

# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



## TESIS DOCTORAL

Modelización de relaciones de preferencia: una aproximación borrosa y bipolar al proceso subjetivo de decisión bajo incertidumbre

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Camilo A. Franco de los Ríos

Directores

Francisco Javier Montero de Juan  
Juan Tinguaro Rodríguez González

Madrid, 2012

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Departamento de Estadística e Investigación Operativa



Tesis Doctoral

Modelización de relaciones de preferencia. Una aproximación borrosa  
y bipolar al proceso subjetivo de decisión bajo incertidumbre

Doctorando

Camilo A. Franco de los Ríos

Directores

Francisco Javier Montero de Juan

Juan Tinguaro Rodríguez González

Madrid, Enero de 2012





D. Francisco Javier Montero de Juan y D. Juan Tinguaro Rodríguez González, respectivamente Catedrático y Profesor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid, **AUTORIZAN:**

La presentación de la Tesis Doctoral titulada *Modelización de relaciones de preferencia. Una aproximación borrosa y bipolar al proceso subjetivo de decisión bajo incertidumbre*, realizada por D. Camilo A. Franco de los Ríos bajo nuestra dirección en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa y que presenta para la obtención del grado de Doctor por la Universidad Complutense de Madrid.

En Madrid a 30 de Enero de 2012

Francisco Javier Montero de Juan

Juan Tinguaro Rodríguez González



*Saber aceptar y rechazar las cosas con  
sabiduría permite entender mejor la vida.*

**HEE YAIA KETI OKA**



## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a los profesores Javier Montero y Tinguaro Rodríguez por haberme concedido la oportunidad de trabajar con ellos y haber hecho posible la realización de esta Tesis, tanto por su dedicada orientación y útiles consejos como por su esfuerzo y apoyo personal.

Mi agradecimiento a Francisco Cano y Miguel Ángel Gómez Villegas, directores del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas por haberme permitido realizar esta Tesis en dicho departamento.

Agradezco asimismo a todos los profesores que a lo largo de mi educación escolar y universitaria incentivaron en mí una actitud crítica sobre el aprendizaje.

Gracias a mis amistades, por todas las alegrías y tristezas que hemos compartido, y por todo lo que me han enseñado. Es bueno saber que uno cuenta con gente en algún lugar del mundo en quien se puede confiar.

Esta tesis la dedico a mis padres Álvaro y Ana Lucía, quienes siempre han confiado en mí, a mis abuelos, quienes siempre han sido un soporte espiritual en mi vida, a mi hermana y al resto de mi familia por su cariño y especialmente a María, por su energía, su espontaneidad y sobre todo, por su honestidad.



## ÍNDICE

Introducción .....	I
Objetivos de la tesis .....	VII
Capítulo 1. Aproximación a la teoría de la decisión .....	1
1.1 Teoría clásica de la decisión .....	2
1.2 Retrospectiva sobre la teoría económica de la utilidad esperada .....	5
1.2.1 Modelo axiomático de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.....	7
1.2.2 Modelo axiomático de la utilidad esperada subjetiva de Savage.....	10
1.3 Paradojas sobre la racionalidad económica .....	15
1.3.1 Paradoja de Allais .....	17
1.3.2 Paradoja de Ellsberg .....	18
1.4 Sobre el desarrollo de la teoría de la decisión y la utilidad esperada.....	20
1.4.1 Teoría de la utilidad esperada y el modelo de la integral de Choquet .....	21
1.4.2 Teoría de las perspectivas acumuladas .....	27
1.4.3 Modelo de la integral de Choquet con respecto a bi-capacidades .....	32
Capítulo 2. Teoría de relaciones de preferencia e incertidumbre.....	37
2.1 Relaciones binarias de preferencia .....	38
2.1.1 Las relaciones de preferencia en los axiomas $U1$ , $S1$ , $Q1$ y $P1$ .....	39
2.1.2 Aproximación a los órdenes de preferencia.....	41
2.2 La teoría de la comparabilidad parcial (PCT).....	48
2.2.1 Situaciones de preferencia básicas y compuestas de la PCT .....	49
2.2.2 Representación numérica de los órdenes de preferencia .....	52

2.2.3 Principio de concordancia-discordancia (C-D).....	55
2.3 Un modelo axiomático para la PCT.....	57
2.3.1 Modelo cuatro-valorado de la PCT (4-PCT) .....	58
2.3.2 Modelo continuo de la PCT (c-PCT).....	63
2.4 Teoría de relaciones de preferencia borrosa .....	67
2.4.1 Aproximación a la teoría de conjuntos borrosos ( <i>fuzzy sets</i> ).....	68
2.4.2 Operadores de lógica borrosa .....	69
2.4.3 Ternas de De Morgan y las leyes del pensamiento lógico.....	72
2.4.4 Modelo <i>IA-SM</i> de relaciones de preferencia borrosa.....	76
Capítulo 3. Modelo de Preferencia-Aversión.....	83
3.1 Marco evaluativo borroso-bipolar .....	84
3.1.1 Borrosidad e incertidumbre .....	85
3.1.2 Bipolaridad e incertidumbre .....	90
3.1.2.1 Marco evaluativo de tipo (F1,B1).....	99
3.1.2.2 Marco evaluativo de tipo (F2,B1).....	100
3.1.2.3 Marco evaluativo de tipo (F1,B2).....	101
3.1.2.4 Marco evaluativo de tipo (F2,B2).....	102
3.2 Espacio general semántico de preferencia .....	104
3.2.1 Espacio semántico de tipo B1.1 .....	108
3.2.2 Espacio semántico de tipo B1.2.....	110
3.2.3 Espacio semántico de tipo B2.1 .....	113
3.2.4 Espacio semántico de tipo B2.2.....	114

3.3 Modelo de Preferencia-Aversión (P-A) .....	117
3.3.1 Modelización de relaciones de preferencia y aversión .....	119
3.3.1.1 Modelo binario de Preferencia-Aversión.....	120
3.3.1.2 Modelo borroso de Preferencia-Aversión.....	124
3.3.1.2.1 Soluciones particulares para la estructura básica de Preferencia-Aversión .....	130
3.3.1.2.2 Soluciones particulares para la estructura completa de Preferencia-Aversión .....	137
3.4 Representación de distintos tipos de incertidumbre.....	141
3.4.1 Incertidumbre básica.....	143
3.4.2 Incertidumbre por inexactitud.....	145
3.4.3 Soluciones particulares para una estructura evaluativa de tipo F2 .....	147
3.5 Exploración del espacio general semántico de preferencia.....	150
3.5.1 Comparación entre los modelos <i>IA-SM</i> , <i>c-PCT</i> y <i>P-A</i> .....	152
3.5.2 Una interpretación tipo B1.2 para el modelo <i>P-A</i> con grados de relevancia. 156	
3.5.2.1 Ejemplo sobre un problema de decisión y su interpretación semántica tipo B1.2 .....	160
3.5.3 Ejemplos sobre la estructura completa <i>P-A</i> y la estructura <i>c-PCT</i> .....	164
3.5.3.1 Caso binario.....	164
3.5.3.2 Caso borroso .....	167
Capítulo 4. Aplicaciones del modelo de Preferencia-Aversión .....	171
4.1 Aproximación al individuo socio-económico.....	172
4.1.1 La justicia y la racionalidad de pérdidas y ganancias .....	173

4.1.2 Un individuo racional y social .....	175
4.1.3 Tipología de preferencias.....	177
4.2 Una estructura de preferencia-necesidad para el individuo socio-económico .....	181
4.2.1 Principio de una necesidad insatisfecha.....	181
4.2.2 Estructuras de preferencia-necesidad.....	184
4.2.3 Construcción del punto de vista socio-económico.....	190
4.3 Ejemplos y paradojas .....	194
4.3.1 Ejemplo sobre el procedimiento de decisión del individuo socio-económico	194
4.3.2 Paradoja del burro de Buridan .....	198
4.3.3 Ejemplo de un problema de decisión y su interpretación bajo la estructura completa P-A .....	200
Conclusiones .....	209
Revisión de los objetivos .....	215
Contribuciones relacionadas con esta investigación .....	217
Líneas de trabajo futuro .....	223
Referencias.....	225

## Introducción

Desde una perspectiva matemática, la completa especificación de las relaciones básicas que componen el predicado de preferencia, comúnmente representado por medio de una estructura de preferencias [43], [115], [140], permite explorar el proceso mediante el cual se concibe un cierto orden sobre un conjunto determinado de alternativas (véase por ejemplo [41], [85], [91], [100]). De esta manera, la modelización de preferencias establece, por medio de un lenguaje formal, un marco teórico apropiado para analizar el proceso mediante el cual se organiza la información disponible, con el fin de solucionar un problema de decisión en particular (ver por ejemplo [48], [86], [93], [115], [140]).

Por lo tanto, si la estructura de preferencia se descompone en distintas relaciones básicas, como por ejemplo, en preferencia estricta, indiferencia e incomparabilidad, entonces su completo significado debe ser examinado a partir del vínculo principal que rige sus respectivos componentes. Esta investigación sostiene que este vínculo es principalmente uno de tipo lingüístico (tal como se ha argumentado en primera instancia en [53], siguiendo las propuestas originales de [61], [130], [145]), donde su significado revela un uso cotidiano de la racionalidad humana sobre los procesos de decisión bajo incertidumbre.

En este trabajo se propone examinar el *vínculo lingüístico* entre los componentes de preferencia, explorando las situaciones relacionales que de estos se desprenden, a partir de los cuales el individuo *interpreta* sus posibilidades de acción de acuerdo con sus distintos estados de conocimiento. De esta manera, este proceso de interpretación es una parte integral de aquello que se entiende como proceso de decisión, que no incluye la decisión en sí misma, tal que no se pide que el

ordenamiento de preferencias determine un óptimo, sino que permita describir el mapa cognitivo del individuo racional a partir de su respectiva estructura de preferencias.

De esta forma, el proceso de interpretación de la situación de decisión requiere de la formulación explícita del *marco evaluativo* y del *espacio semántico* mediante los cuales se organiza y procesa la información disponible. Solo de esta manera es posible juzgar la conveniencia de utilizar determinado modelo de preferencias de acuerdo con el problema en particular que se quiera solucionar.

En este sentido, se formula en este trabajo un tipo de *racionalidad de pérdidas y ganancias* (basada en una particular lectura de [75] y de [126]), la cual es necesaria para la identificación del marco evaluativo y del espacio general semántico de preferencia. De esta forma se propone formalizar las distintas interpretaciones disponibles sobre lo que se percibe efectivamente como razones negativas, en contra de una alternativa (percibidas como pérdidas), y lo que se percibe como razones positivas, a favor de una alternativa (percibidas como ganancias).

Entonces se sostiene que de la mano de la especificación completa del marco evaluativo y del espacio semántico, es posible *representar constructivamente* la interpretación del problema de decisión, con el fin de elegir el modelo pertinente para entender los mecanismos cognitivos del individuo racional (con una racionalidad de pérdidas y ganancias). De este modo, el tipo de construcción bajo la cual el individuo interpreta y procesa las alternativas determina la diversidad de situaciones que la estructura de preferencias permite identificar.

De esta manera, como soporte a la decisión, una estructura de preferencia lo suficientemente flexible, en cuanto a la diversidad de situaciones que permite representar, proporciona una caracterización satisfactoria del problema de decisión

y de las situaciones relacionales que mejor lo describen. En este sentido, una estructura de preferencia también asigna índices lingüísticos o semánticos de incertidumbre, según la verificación de los respectivos estados de conocimiento que el individuo revela frente a la decisión.

Entonces, a partir de una descripción satisfactoria del escenario de la decisión, es posible abordar el proceso mediante el cual el individuo identifica los aspectos más relevantes o prioritarios, acerca de las necesidades que deben ser satisfechas, y en base a ello, proceder a elegir determinada acción o alternativa. De este modo, el resultado del proceso de decisión puede ser descrito de acuerdo con el punto de vista del individuo, el cual revela el procedimiento mediante el cual, a partir de la estructura de preferencias, se reconocen las alternativas necesarias y prioritarias sobre las que se debe actuar.

Por lo tanto, se formula la siguiente hipótesis, la cual sirve como eje conductor para solucionar el problema principal de esta tesis que, como se ha mencionado en el párrafo anterior, se refiere a entender el proceso mediante el cual el individuo encuentra la(s) alternativa(s) necesaria(s).

Desde una perspectiva *constructivista*, el proceso de decisión de un individuo inteligente o racional es ante todo un *proceso sobre la formación del valor*, donde (1) se elige un espacio conceptual apropiado, de acuerdo con su *estructura semántica y evaluativa*, sobre el cual se ordenan los elementos de interés y (2) se decide sobre una *buena opción* (con respecto a la función específica que se le asigne), de acuerdo con un *razonamiento consistente* entre unos *principios básicos* y sus *preferencias*.

Entonces, la organización de esta investigación es la siguiente. En el Capítulo 1, se expone la genealogía de la modelización de preferencias desde las ciencias

económicas, examinando los primeros modelos de utilidad (como por ejemplo [119], [141]), las paradojas que de estos se desprenden (véase por ejemplo [1], [37]) y su posterior desarrollo (ver por ejemplo [64], [65], [82], [120], [139]). Con ello, es posible identificar el punto de partida para esta tesis, el cual consiste en que no se cuenta con un modelo que permita la completa caracterización del proceso de decisión para el individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias, donde los atributos positivos (ganancias) y los negativos (pérdidas) puedan ser interpretados y procesados de manera explícitamente *independiente*.

En el Capítulo 2, se describe la modelización de preferencias centrando la atención en sus distintas estructuras matemáticas y los distintos tipos de órdenes que de éstas se desprenden (véase por ejemplo [41], [73], [79], [85], [111]). En consecuencia, se examina con detenimiento la *teoría de comparabilidad parcial* (revisando sus distintos modelos, como por ejemplo [107], [108], [116], [117], [133], [134]) y luego, por medio de la *teoría de conjuntos borrosos* [153], se revisa un modelo estándar donde es posible la verificación gradual de su estructura de preferencia (ver por ejemplo [43], [91], [95], [103], [140]).

A continuación, en el Capítulo 3, se explora un marco general evaluativo de acuerdo con los distintos tipos de bipolaridad [35], [63] y de borrosidad [60], [153] (a partir de la primera propuesta de [112]). Luego se propone la construcción de un espacio semántico general de preferencia, donde sea posible reunir los distintos modelos de preferencia de acuerdo con su interpretación y agregación de la información. Entonces, en base a este espacio, se presenta la propuesta principal de esta tesis, por medio del modelo de Preferencia-Aversión (P-A), donde es posible agregar las pérdidas y ganancias de manera independiente (siguiendo la primera propuesta de [49], [50]).

Finalmente, en el Capítulo 4, se expone la caracterización de un punto de vista socio-económico, por medio del cual es posible describir el proceso mediante el cual un individuo racional identifica el curso de acción necesario frente a una decisión (véase de nuevo [50], junto con [57], [74], [97]). De esta forma se hace referencia a un equilibrio individual, donde la decisión no se encuentra aislada por criterios puramente económicos de maximización de la utilidad (como por ejemplo sucede en [7], [29]), sino que hace parte de un contexto vital, social y político (una primera discusión sobre esta condición puede encontrarse en [5]). De este modo, el proceso de decisión incorpora la posibilidad de verificar si la preferencia responde a razones de deseo o de necesidad, lo cual permite identificar aquello que es prioritario, porque es necesario, de lo que no lo es, y en base a ello describir el proceso de decisión bajo un marco lo suficientemente fiable y representativo.



## Objetivos de la tesis

**Objetivo 1:** Construir un marco teórico y metodológico apropiado para analizar los distintos modelos de preferencia y su aproximación al proceso de decisión bajo incertidumbre de un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias.

- Especificación de un *marco evaluativo general*, con el fin de identificar la estructura evaluativa de un modelo en particular.
- Construcción de un *espacio semántico general de preferencia*, mediante el cual se clasifiquen los distintos modelos de preferencia de acuerdo con su interpretación de la información y su metodología de agregación.

**Objetivo 2:** Definir un modelo de ayuda a la decisión que permita *describir* el proceso de decisión de un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias, tal que se pueda identificar el curso de acción necesario a partir de sus preferencias.

- Caracterizar una *estructura completa de preferencia* que permita la identificación de las diversas situaciones de decisión que resultan de la evaluación *independiente* de atributos negativos (pérdidas) y positivos (ganancias).
- Caracterizar una *estructura de preferencia-necesidad* donde los componentes de preferencia y de necesidad sean distinguibles, tal que se puedan señalar las alternativas necesarias para el individuo.



## Capítulo 1. Aproximación a la teoría de la decisión

La genealogía de la teoría de la decisión [8], [144] se ha desarrollado desde distintos campos del conocimiento científico, como por ejemplo el de la economía y la teoría de la utilidad [16], [39], donde se modelizan las preferencias del individuo por medio de una función (de utilidad) susceptible de ser maximizada [119], [120], [141]. A continuación, en este primer capítulo, se introducen los conceptos necesarios para explorar la modelización axiomática de la utilidad, de tal manera que se puede examinar su evolución a medida que se van incorporando nuevas condiciones, las cuales permiten generalizar la teoría frente a distintas situaciones hipotéticas de decisión.

De esta forma, la Sección 1.1 introduce el contexto bajo el cual se concibe el problema de la decisión para un individuo perfectamente racional [90], [125] ante la presencia de incertidumbre. La Sección 1.2 presenta los primeros modelos axiomáticos de la teoría de la utilidad, la cual se presenta como una teoría de carácter *normativo*, siendo el primero el de Von Neumann y Morgenstern [141], planteado sobre un tipo de incertidumbre *objetivo*, y el segundo, de Savage [119], formulado desde una perspectiva *subjetiva*.

Luego, en la Sección 1.3, se exploran algunos resultados empíricos [1], [37], que contradicen las predicciones de aquellos primeros modelos de utilidad. En consecuencia, en la Sección 1.4 se examina el desarrollo de la teoría de la utilidad [4], [120], ante la presencia de las paradojas antes comentadas, y se revisa la *teoría de perspectivas acumuladas* [75], [139], la cual se presenta como una teoría de carácter *descriptivo* acerca del problema de decisión del individuo.

## 1.1 Teoría clásica de la decisión

En la teoría clásica de la decisión (ver por ejemplo [6], [8], [144]), en particular la teoría de la utilidad esperada (y sus primeros modelos axiomáticos [119], [141]), el problema de la decisión con incertidumbre se plantea a partir de la existencia de un conjunto  $S$  de posibles estados de las cosas, y un conjunto  $X$  de alternativas que dependen de la ocurrencia de uno o más de los estados en  $S$ . De este modo, un evento  $A$  está definido por un subconjunto de estados, donde  $A \subseteq S$ , tal que si se cumple al menos uno de los estados en  $A$ , entonces el evento  $A$  es cierto. En cambio, si no se sabe el estado que efectivamente se cumple, entonces se dice que existe incertidumbre, y el individuo debe resolver su problema de decisión sin conocer el verdadero estado de las cosas.

Dentro de este marco analítico de la utilidad esperada, se concibe una función de utilidad  $u$ , por medio de la cual es posible asignarle a cada  $x \in X$ , su valor de utilidad  $u(x)$ . Esto implica que se prefiere  $x$  a  $y$ , si y sólo si  $u(x) > u(y)$ . De esta forma, la utilidad se presenta como una medida cuantitativa, de satisfacción o de bienestar, cuyo valor es susceptible de ser maximizado de acuerdo con su expectativa matemática. Entonces, esta teoría de la utilidad caracteriza el comportamiento de decisión de un individuo racional, como aquella persona que tiene unas preferencias que son susceptibles de ser representadas cuantitativamente, mediante una medida de utilidad esperada. Solo así, a partir de esta caracterización, el individuo es luego capaz de maximizar su utilidad en presencia de incertidumbre.

Históricamente, este estado de incertidumbre se ha identificado con la situación que el individuo enfrenta en los distintos tipos de apuestas o loterías, tal como la

ruleta (juego que se asocia con la incertidumbre de tipo objetivo) o los caballos (en referencia a la incertidumbre de tipo subjetivo) [39]. De este modo, se formula una pregunta que ejemplifica el dilema al que se enfrenta la teoría clásica de la decisión [55]:

¿Cómo es que un individuo racional compra un seguro de vida y al mismo tiempo juega a la lotería?

La respuesta adelantada por la hipótesis de la utilidad esperada dice que aquel individuo que se expone al riesgo, jugando la lotería, y al mismo tiempo evade el riesgo, comprando un seguro de vida, se comporta de manera racional, a pesar de la aparente inconsistencia en su comportamiento, si:

- Primero: tiene un conjunto *consistente* de preferencias
- Segundo: sus preferencias pueden ser completamente descritas por una función que asigna un valor cuantitativo, denominado utilidad, a las alternativas consideradas.
- Tercero: su objetivo es el de hacer su utilidad esperada tan grande como sea posible.

Desde 1944 esta hipótesis es, bajo la formulación axiomática de Von Neumann y Morgenstern [141], el principio fundacional de la teoría clásica de la decisión racional en condiciones de incertidumbre. De esta manera, estos autores presentan un modelo en el cual el *orden de preferencias* sobre un conjunto dado de alternativas puede ser representado de acuerdo con unos *valores de utilidad*, siempre que estas preferencias cumplan con ciertas propiedades. Se advierte que en este modelo, la probabilidad se concibe como una *probabilidad objetiva*, es decir,

como una medida física, natural y observable, que puede ser directamente conocida.

Luego en 1954 Savage [119] formula la misma hipótesis pero esta vez desde una perspectiva subjetiva, donde la expectativa o probabilidad de ocurrencia de un evento deja de concebirse como un dato objetivo, y pasa a entenderse como un cálculo construido a partir de las preferencias del individuo. De esta manera se generaliza la propuesta de Von Neumann y Morgenstern [141], consolidando la hipótesis de la utilidad esperada por medio de una *teoría consistente*, la cual permite representar, desde una perspectiva normativa, el comportamiento de un individuo racional ante un problema de decisión.

Entonces, en la teoría clásica de la utilidad esperada, se acepta que un individuo se comporta de manera perfectamente *racional* [125] siempre que éste pueda identificar todas las posibles alternativas de cara a la decisión, considerando todas sus posibles consecuencias y, en base a determinado sistema de valores, encontrar la mejor opción de entre todo el conjunto de alternativas. En este sentido, esta *racionalidad* perfecta no sólo guía la decisión, sino que la determina a partir de un cierto ordenamiento de las alternativas.

El argumento clave de la hipótesis de la utilidad esperada es precisamente el de asumir un *orden total* o *lineal*, en base al cual es posible asignar un cierto *ranking* numérico sobre las alternativas, pues de este modo es posible la directa localización de un óptimo, como la opción que domina a todas las demás. En primera instancia, se aprecia que el cálculo de este óptimo es bastante exigente y costoso para la inteligencia humana, que en ciertos casos puede estar o no justificado.

De esta forma, la teoría clásica de la decisión, en su tratamiento de la incertidumbre mediante la hipótesis de la utilidad esperada y su tipo de *racionalidad* perfecta, es

señalada desde distintas posiciones por las limitaciones y los problemas que sus supuestos y predicciones plantean acerca de las decisiones de las personas. Son muy conocidos los contraejemplos encontrados (principalmente [1], [37]), o los cuestionamientos sobre su validez descriptiva (véase por ejemplo [75]) y su libre asociación entre racionalidad y optimización (como se argumenta en [90], [125]).

Estos cuestionamientos se sitúan dentro de un espacio generado por el conflicto permanente entre la representación y la realidad, o entre teoría y práctica, espacio este necesario para el constante desarrollo del conocimiento científico. Ejemplos de esto son las propuestas que, ante los contraejemplos y cuestionamientos, generalizan la teoría (como por ejemplo [4], [120], [139]), o las que proponen un enfoque netamente cualitativo (como por ejemplo [31], [32], [83], [88]).

## **1.2 Retrospectiva sobre la teoría económica de la utilidad esperada**

La genealogía de la utilidad esperada, como explicación de la elección con riesgo entre distintas alternativas, se puede trazar al menos desde 1738 como una propuesta para solucionar la paradoja de San Petersburgo [16], [55]. Esta paradoja trata sobre un jugador que decide si entra o no en una lotería  $L$ , de manera que lo hace si la ganancia esperada es mayor que la suma exigida para entrar en la apuesta. La lotería  $L$  consiste entonces en lanzar una moneda tal que la ganancia es de  $\$2^k$  si sale cruz hasta el  $k$ -ésimo lanzamiento. Luego la probabilidad de que esto ocurra es  $p_k = 1/2^k$ , lo cual quiere decir que el jugador tiene una probabilidad de  $1/2$  de ganar  $\$2$ , una probabilidad de  $1/4$  de ganar  $\$4$  y así sucesivamente. Por lo tanto, la ganancia esperada del juego es la ponderación de todos los posibles resultados por la probabilidad de que estos se produzcan, es decir,

$$E[L] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

De este modo, la paradoja consiste en que un jugador estaría dispuesto a pagar una cantidad arbitrariamente alta de dinero para entrar en  $L$ , lo cual no parece tener ningún sentido. Una de las soluciones propuestas para esta aporía, de hecho la solución que sobrevivió a su época, introduce el concepto de utilidad media, una medida de expectativa moral sobre las ganancias monetarias [16], que no es solamente proporcional a la ganancia, sino que es también inversamente proporcional a la riqueza existente (entre menos riqueza exista, mayor es la utilidad de ganar una unidad monetaria e inversamente, entre más riqueza, menor la utilidad de ganar la misma cantidad), de modo que,

$$E[L] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot u(2^k) < \infty .$$

Este mismo argumento es rescatado algo más de dos siglos después, en el modelo de 1944 de Von neumann y Morgenstern [141], donde se obtiene una representación numérica y lineal sobre el orden de preferencia de un individuo perfectamente racional. De esta manera, se asume que el individuo no puede más que afirmar su preferencia o indiferencia de acuerdo con la satisfacción que espera obtener de las alternativas, diferenciando las que son preferidas o igualmente preferidas de las que no lo son [39], [55].

Se enfatiza que este modelo axiomático [141], el cual se revisa a continuación, permite lograr a la vez un propósito de distinto calibre, a decir, el de formalizar la *hipótesis* de la utilidad esperada como una *teoría* válida, en un sentido normativo y de acuerdo a los condicionantes de rigor científico manejados en la época [46],

[47], caracterizando el comportamiento económico de un individuo racional ante la incertidumbre.

### 1.2.1 Modelo axiomático de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El siguiente es el sistema axiomático que desarrollaron Von Neumann y Morgenstern para la representación de las preferencias de un individuo mediante el concepto de la utilidad [141]. Para ello, se toma el concepto de utilidad de Bernoulli [16], asumiendo que toda ganancia monetaria  $x$  tiene asociado un valor de utilidad  $u(x)$  (*utilidad abstracta* en el lenguaje del modelo [141]), y se incorporan las probabilidades en la estructura de preferencia, tal que todo valor de utilidad puede ser combinado naturalmente con una probabilidad  $p$ , conformando lo que se denomina una *lotería*.

De este modo, se tiene un conjunto  $X$  de valores monetarios y un conjunto  $P^*$  de funciones de probabilidad definidas sobre  $X$ , las cuales son conocidas (de ahí que sean concebidas como probabilidades objetivas). Entonces las loterías se denotan directamente como  $p, q \in P^*$ , conformando el cuerpo de alternativas sobre las que debe decidir el individuo. Además, se define sobre  $P^* \times P^*$  una *relación natural*  $P$ , tal que para cualquier par de loterías  $(p, q) \in P^* \times P^*$ ,  $P(p, q)$  significa que la lotería  $p$  “es preferida a” la lotería  $q$ .

**Axioma U1 [141][141]:** Para todo  $p \neq q \in P^*$ ,  $P(p, q)$  es una relación completa, asimétrica y transitiva.

Esta condición garantiza que  $P$  es *completa* [115], esto es, que para todo  $p \neq q \in P^*$ , se cumple que  $P(p, q)$  o que  $P(q, p)$ ; *asimétrica*, donde para todo

$p, q \in P^*$ , si se cumple que  $P(p, q)$  entonces no se cumple que  $P(q, p)$ ; y *transitiva*, es decir, que para todo  $p, q, r \in P^*$ , si es cierto que  $P(p, q)$  y que  $P(q, r)$  entonces también se cumple que  $P(p, r)$ . Por lo tanto, si para algún  $p, q \in P^*$  no se cumple  $P(p, q)$  ni  $P(q, p)$ , entonces se define, por exclusión, la relación de indiferencia  $I(p, q)$ , como una relación de igualdad entre  $p$  y  $q$ .

Nótese que, si para algún  $p, q \in P^*$  no se cumple  $P(p, q)$  ni  $P(q, p)$ , entonces debe ser cierto que  $p = q$ . Esto es,  $U1$  asume un *orden total estricto* [115] de preferencia (véase la Sección 2.1.1). Así pues, la relación de indiferencia  $I(p, q)$ , definida por exclusión, tal que  $I(p, q)$  es cierta si, y sólo si, no es cierto que  $P(p, q)$  o que  $P(q, p)$ , coincide en este caso con la igualdad, que a su vez es una relación de *equivalencia* sobre  $P^*$ . En particular,  $I$  es una relación de equivalencia si cumple con las propiedades de ser *reflexiva*, esto es, para todo  $p \in P^*$ , es cierto que  $I(p, p)$ ; *simétrica*, es decir, que para todo  $p, q \in P^*$ , se cumple que  $I(p, q) = I(q, p)$ ; y *transitiva*.

**Axioma U2 [141]:** Para todo  $p, q, r \in P^*$ , si se cumple que  $P(p, q)$  y  $P(q, r)$ , entonces existen  $\alpha \neq \beta \in (0, 1)$  tal que  $P(p', q)$  y  $P(q, p'')$ , donde  $p' = \alpha p + (1 - \alpha)r$  y  $p'' = \beta p + (1 - \beta)r$ .

Este supuesto introduce la propiedad *arquimedea*, tal que no importa qué tanto se prefiera  $p$  sobre  $r$  o  $q$  sobre  $r$ , si  $p$  se adjunta a  $r$  bajo un factor lo suficientemente grande (pequeño), la nueva lotería es preferida (deja de ser preferida) a  $q$ . De esta

manera, siempre habrá una combinación entre  $p$  y  $r$  que el individuo considere indiferente a  $q$ .

**Axioma U3 [141]:** Para todo  $p, q, r \in P^*$ ,  $\alpha \in (0,1)$ , se cumple que  $P(p, q)$  si y sólo si es cierto que  $P(p', q')$ , donde  $p' = \alpha p + (1-\alpha)r$  y  $q' = \alpha q + (1-\alpha)r$ .

Este supuesto es una condición de *independencia* o *monotonidad*, donde se garantiza que el orden de preferencia entre dos loterías no cambia aunque se mezclen proporcionalmente con otra lotería.

De este modo, una función  $U : P^* \rightarrow \mathbb{R}$  representa la relación de preferencia  $P$  si, para todo  $p, q \in P^*$ ,  $P(p, q)$  se cumple si y sólo si  $U(p) > U(q)$ . Entonces se formula el siguiente teorema.

**Teorema U [141]:** El sistema axiomático  $U1-U3$  implican la existencia de una función  $U : P^* \rightarrow \mathbb{R}$  que representa la relación de preferencia  $P$ , tal que, para todo  $p \in P^*$ ,

$$U(p) = \sum_{x \in X} u(x) p(x).$$

De esta forma se obtiene un valor de utilidad numérico como una combinación aditiva entre distintas probabilidades. Con el sistema  $U1-U3$ , se valida el concepto de la utilidad y del valor asociado a ésta, desde un punto de vista donde la incertidumbre es de tipo objetivo, como es el caso de una lotería asociada a mecanismos aleatorios, como por ejemplo los dados o la ruleta, con frecuencias bien definidas y conocidas.

Luego, una década más tarde, en 1954 [119], dentro del mismo marco probabilístico de la decisión, Savage propone otro sistema axiomático para

justificar el criterio de la utilidad esperada, pero ahora desde un punto de vista donde la incertidumbre es de tipo subjetivo. En este caso, la probabilidad se concibe como una expectativa matemática, como un cálculo construido a partir de las preferencias de un individuo perfectamente racional.

### 1.2.2 Modelo axiomático de la utilidad esperada subjetiva de Savage

El modelo subjetivo de decisión propuesto por Savage en 1954 [119] asume que un individuo actúa de acuerdo con un cierto estado de las cosas, lo cual genera una consecuencia  $x$  en  $X \subseteq \mathbb{R}$ . De este modo, cada acto está caracterizado por un mapeo  $f: S \rightarrow X$  que va del espacio de estados de las cosas  $S$ , al conjunto de consecuencias  $X$ , de tal modo que para cada estado  $s \in S$ , un acto  $f$  obtiene un valor  $f(s) = x$  en  $X$ .

Específicamente, si el individuo actúa de acuerdo con sus preferencias, es posible obtener una relación de verosimilitud sobre los distintos eventos de  $S$ , bajo la forma de una única distribución de probabilidad  $p$ . De este modo, Savage consigue un resultado análogo al del Teorema  $U$  pero desde una perspectiva subjetiva, en el sentido en que es a partir de las relaciones de preferencia sobre los actos del individuo que se representa la incertidumbre sobre el verdadero estado de las cosas.

Entonces, en el momento en que se caracteriza una única distribución de probabilidad  $p$ , los actos pueden ser valorados de acuerdo con su utilidad esperada. De esta forma,  $F$  es el conjunto de todos los actos (de todas las funciones que van de  $S$  a  $X$ ), tal que para todo  $f, g \in F$ ,  $x \in X$  y  $s \in A$ , donde  $A \subseteq S$ , se dice que  $f = g$  en  $A$  si y sólo si  $f(s) = g(s)$ , y que  $f = x$  en  $A$  si y sólo si  $f(s) = x$ .

Se asume en primer lugar la existencia de una relación binaria de preferencia sobre  $F$ , representada por  $R = \langle P, I \rangle$ , esto es,  $R$  representa la unión de  $P$  e  $I$ . De este modo, la parte asimétrica de  $R$  se representa por medio de  $P$ , mientras que la parte simétrica se representa por medio de  $I$ .

**Axioma S1 [119]:**  $(F, R)$  es un orden total.

De esta manera,  $R$  es *completa en un sentido fuerte* [115], es decir, para todo par de actos  $f, g \in F$ , se cumple que  $R(f, g)$  o que  $R(g, f)$ ; *antisimétrica*, donde para todo  $f, g \in F$ , si se cumplen  $R(f, g)$  y  $R(g, f)$ , entonces es cierto que  $f = g$ ; y transitiva. Nótese que el hecho de que  $R$  es completa en un sentido fuerte, implica que también es reflexiva. De este modo, la relación de indiferencia es una relación de igualdad, tal que para todo  $f, g \in F$ ,  $I(f, g)$  se cumple si y sólo si es cierto que  $R(f, g)$  y que  $R(g, f)$ .

También se reconoce la situación en la que el acto  $g$  es al menos preferido a  $f$  dado el evento  $A$ , esto es, cuando  $R$  está condicionada a que el espacio de estados se circunscriba solamente a  $A$ , y se le denota por medio de  $R_A(g, f)$ .

**Axioma S2 [119]:** Si es cierto que  $R_A(g, f)$  y que  $R_{\neg A}(g, f)$ , donde  $\neg A$  es el complemento de  $A$ , entonces se cumple que  $R(g, f)$ .

De esta forma, se define el principio de certidumbre, más conocido por su nombre original como *sure-thing principle*. Este principio afirma que si el acto  $g$  se prefiere a  $f$  independientemente a que ocurra cierto evento  $A$ , entonces es cierto que  $g$  es preferido a  $f$ , a pesar de no tener certeza sobre el verdadero estado de las cosas (una

detallada discusión sobre la intuición y formalización de este principio se puede encontrar en [66]).

Además, se establece la siguiente condición que regula las preferencias entre actos y alternativas, donde se garantiza, entre otras cosas, que un nuevo evento no puede establecer nuevas preferencias entre las alternativas o revertir las ya existentes. Para ello, se define un evento nulo (Definición S1) y la relación de preferencia sobre el conjunto de consecuencias  $X$  (Definición S2).

**Definición S1 [119]:** Un evento  $A$  es nulo si, y sólo si, para todo  $f, g \in F$ , se cumple que  $R_A(g, f)$ .

**Definición S2 [119]:** Dado el ordenamiento  $(F, R)$ , la relación  $R$  sobre  $X$  es tal que para todo  $x, y \in X$ , es cierto que  $R(y, x)$  si, y sólo si, se cumple que  $R(g, f)$ , donde para todo  $s \in S$ ,  $f(s) = x$  y  $g(s) = y$ .

**Axioma S3 [119]:** Para todo  $x, y \in X$ , si  $f(s) = x$  y  $g(s) = y$ , para todo  $s \in A$ , y si  $A$  no es un evento nulo, entonces es cierto que  $R_A(g, f)$  si y sólo si se cumple que  $R(y, x)$ .

A continuación se introduce la noción de probabilidad como una relación cualitativa entre los eventos, tal que  $Pr(A, B)$  significa que el evento  $A$  es al menos más probable (desde una perspectiva subjetiva) que el evento  $B$ .

**Axioma S4 [119]:** Para todo  $A, B$ , se cumple que  $Pr(A, B)$  o que  $Pr(B, A)$ .

De este modo, un evento  $A$  es al menos más probable que otro evento  $B$ , si, y sólo si, cuando se cumple que  $R(y, x)$ , y existen dos actos  $f_A$  y  $f_B$ , tales que

$f_A(s) = y$  para todo  $s \in A$  y  $f_A(s) = x$  para todo  $s \in \neg A$ ,  $f_B(s) = y$  para todo  $s \in B$  y  $f_B(s) = x$  para todo  $s \in \neg B$ , entonces se cumple que  $R(f_A, f_B)$ .

**Axioma S5 [119]:** Existe al menos un par de consecuencias  $x, y$ , tal que  $P(y, x)$ .

Esta condición de no trivialidad asegura que existe al menos un par de alternativas  $x, y$  donde se cumple  $R(y, x)$  pero no se cumple  $R(x, y)$ .

**Axioma S6 [119]:** Para cualquier  $f, g \in F$  y cualquier  $x \in X$ , si se cumple que  $R(g, f)$ , entonces existe una partición de  $S$ , tal que si  $g$  ó  $f$  se modifican en cualquier elemento de la partición, de modo que tomen el valor de  $x$ , todo lo demás manteniéndose igual, entonces el  $g$  modificado se mantiene preferido a  $f$ , o  $g$  se mantiene preferido al  $f$  modificado, según sea el caso.

De esta manera, el sistema S1-S6 permite representar la relación de verosimilitud  $Pr$ , por medio de una única función cuantitativa de probabilidad  $p$ , tal que para todo  $A, B \subseteq S$ , es cierto que  $Pr(A, B)$  si, y sólo si,  $p(A) \geq p(B)$  [39].

Por último, se define una relación de preferencia entre los actos y las consecuencias, con el fin de formular el último axioma.

**Definición S3 [119]:** La relación  $R_A(f, x)$  es cierta si y solo si  $R_A(f, g)$  es cierta cuando  $g(s) = x$  para todo  $s \in A$ .

**Axioma S7 [119]:** Para todo  $s \in A$ , si  $R_A(g(s), f)$  se cumple, entonces es cierto que  $R_A(g, f)$ .

De este modo, Savage [119] muestra que es posible introducir la función de utilidad en representación de las preferencia del individuo, siguiendo la prueba de existencia desarrollada en 1944 por Von Neumann y Morgenstern [141], pues del sistema  $S1-S7$  se siguen los axiomas  $U1-U3$  [119]. Entonces se garantiza que existe una función de utilidad  $U$ , tal que  $R(g, f)$  es cierto si, y sólo si, se cumple que  $E[U(g(s)), p] \geq E[U(f(s)), p]$ .

**Teorema S [119]:** El sistema  $S1-S7$  implica la existencia de una función de utilidad  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, para todo  $f, g \in F$ , es cierto que  $R(g, f)$  si, y sólo si, se cumple que  $E[U(g(s)), p] \geq E[U(f(s)), p]$ , donde,

$$E[U(g(s)), p] = \sum_{s \in S}^{|S|} U(g(s)) \cdot p(s),$$

y  $E[U(g(s)), p]$  representa la esperanza matemática de  $U$  con respecto a  $p$ .

Como resultado, el sistema de axiomas  $S1-S7$  caracteriza las decisiones racionales bajo incertidumbre de manera que si un individuo actúa como si maximizara la expectativa de cierta función de utilidad, entonces utiliza unas probabilidades subjetivas que obedecen las leyes clásicas del cálculo de probabilidades [39], [90]. Se refuerza así la noción de una racionalidad perfecta para un individuo con un completo conocimiento del mundo, asociando además la utilización de probabilidades con el criterio de la maximización de la utilidad esperada.

En cuanto a las distintas propuestas alternativas que se encuentran acerca de esta formalización y la libre asociación entre racionalidad y optimización, se destaca una obra que se enmarca dentro de la misma corriente clásica de la teoría de la decisión, contemporánea a  $S1-S7$  [119]. Dicha obra [144] examina distintas

aproximaciones al criterio normativo de la decisión, como por ejemplo, la de valorar los actos de acuerdo con su peor consecuencia, según una estrategia *max-min*. De esta forma, el problema de decisión se resuelve maximizando los beneficios de acuerdo con el peor escenario posible.

Por otro lado, como se sostiene en [124], la aproximación subjetiva de la utilidad esperada, en su dimensión normativa, obstruye el desarrollo de herramientas alternativas para un mejor entendimiento del problema de la decisión y del juicio subjetivo sobre la probabilidad y el valor. Esta crítica tiene una mayor relevancia si se recuerdan las distintas, y bien conocidas, paradojas acerca de la teoría de la utilidad y su requerimiento acerca de una racionalidad perfecta del individuo.

### **1.3 Paradojas sobre la racionalidad económica**

Como se ha visto hasta ahora, la teoría clásica de la decisión, y en particular los modelos de utilidad, tanto en su aproximación objetiva [141] como subjetiva [119], exigen que el individuo identifique y ordene todas las posibles alternativas bajo un orden total y transitivo, tomando en cuenta todas sus posibles consecuencias. Además, en base a la expectativa matemática de la utilidad de estas consecuencias, éste debe encontrar la mejor de entre todo el conjunto de alternativas.

El principal inconveniente que surge sobre este tipo de racionalidad es el de su interpretación *instrumental* para solucionar el problema de la decisión, tal que se asume una cierta equivalencia entre racionalidad y optimización [90]. Esta equivalencia entra en conflicto con la perspectiva subjetiva del individuo y el tipo de incertidumbre al que éste se enfrenta, tal que la cantidad de conocimiento que

tiene a su disposición está siempre limitada por la naturaleza misma de la inteligencia humana y de su entorno.

Esta observación, identificada al menos desde 1921 como un problema fundamental para la teoría de la decisión [77], [78], señala que la incertidumbre subjetiva descansa en cierto grado de ignorancia, un estado epistémico donde no se cuenta necesariamente con las probabilidades de todas las posibles consecuencias. De esta forma, todas las probabilidades elementales son igualmente comparables entre sí, sin importar si en determinada situación existe una mayor o menor cantidad de conocimiento relevante sobre el objeto de interés [77].

Por lo tanto, se identifica la necesidad de distinguir entre un tipo de incertidumbre mensurable, denominado en su momento como riesgo, en el sentido en que es medible por medio de una medida numérica de probabilidad; y de otro tipo de incertidumbre, no mensurable, en el sentido en que no puede ser medida por medio de una única probabilidad [78]. Esta tipología de la incertidumbre apunta precisamente a que la decisión humana tiene un fuerte contenido subjetivo, pues se basa en estimaciones *fiabiles*, las cuales permiten reaccionar a lo que se infiere que va a ocurrir en el mundo, tal que es la ignorancia y la necesidad de conocimiento las que guían y controlan la conducta.

De este manera, en presencia de incertidumbre ante distintas situaciones de decisión, los actos de una persona dependen no sólo de las probabilidades percibidas (en el sentido de las percepciones subjetivas de la teoría de la utilidad esperada), sino también de la cantidad de conocimiento disponible [37], [123]. A continuación se examinan algunas paradojas encontradas en la literatura, las cuales permiten ilustrar la importancia de estas observaciones y sus consecuencias sobre el proceso de decisión de un individuo racional.

### 1.3.1 Paradoja de Allais

Es bastante conocido un argumento de Allais, publicado en 1953 [1], donde se muestra que el principio  $S2$  y con él, la teoría de la utilidad  $U1-U3$ , son normativamente insatisfactorios [119]. Este argumento se basa en considerar dos situaciones de decisión, cada una involucrando dos loterías.

En la primera situación, se pide elegir entre una lotería  $A$ , donde se ganan \$500 con una probabilidad absoluta de 1, y otra lotería  $B$ , donde se ganan \$2500 con probabilidad 0.1, \$500 con probabilidad 0.89 o se mantiene el *status-quo* con probabilidad 0.01. En la segunda situación, se pide elegir entre una lotería  $C$ , donde se ganan \$500 con probabilidad 0.11 o se mantiene el *status-quo* con probabilidad 0.89, y otra lotería  $D$ , donde se ganan \$2500 con probabilidad 0.1 o se mantiene el *status-quo* con probabilidad 0.90.

Entonces, se encuentra que una persona racional bien puede preferir  $A$  sobre  $B$ , pues cualitativamente, la probabilidad de ganar \$2500 (0.1) en  $B$  no es lo suficientemente alta como para compensar el riesgo de permanecer en el *status-quo* (0.01). Y del mismo modo, esta misma persona también puede preferir  $D$  sobre  $C$ , pues la probabilidad de ganar \$500 (0.11) o \$2500 (0.1) es prácticamente igual, por lo que el premio mayor es preferido.

De esta forma, y tal como lo sostiene el mismo Savage [119], este resultado no es compatible con el concepto de la utilidad o, lo que es equivalente, con el principio de certeza  $S2$ . Esto es así, puesto que el par de preferencias  $P(A, B)$  y  $P(D, C)$ , implican un sistema de desigualdades incompatible con una hipotética función de utilidad  $U$ , tal que:

$$\begin{cases} U(\$500) > 0.1U(\$2500) + 0.89U(\$500) + 0.01U(\$0) \\ 0.1U(\$2500) + 0.9U(\$0) > 0.11U(\$500) + 0.89U(\$0) \end{cases}$$

Si se examinan las distintas loterías con detenimiento, y se define una lotería  $E$  como la probabilidad 0.89 de ganar \$500, se puede ver que la lotería  $A$  es equivalente a la combinación entre las loterías  $C$  y  $E$ , y de igual manera, que la lotería  $B$  es equivalente a la combinación entre las loterías  $D$  y  $E$ . Por lo tanto, de acuerdo con el principio  $S2$  y el axioma  $U3$ , se tiene que si se prefiere  $A$  sobre  $B$  se debe preferir también  $C$  sobre  $D$ , y de la misma manera, si se prefiere  $B$  sobre  $A$  también se debe preferir  $D$  sobre  $C$ .

Pero el resultado del experimento propuesto por Allais [1], y luego verificado en otros estudios (véase por ejemplo [75]), obtiene que un individuo racional bien puede elegir, primero,  $A$  sobre  $B$  y, luego,  $D$  sobre  $C$ . De este modo, este tipo de discrepancia contradice la teoría de la utilidad, cuestionando su carácter normativo acerca de la decisión de un individuo racional bajo condiciones de incertidumbre.

### 1.3.2 Paradoja de Ellsberg

En 1961 se reconoce otro contraejemplo, conocido como la paradoja de Ellsberg [37], siguiendo los argumentos antes expuestos [77], [78], que cuestiona la validez de la expectativa matemática (probabilística) para caracterizar el comportamiento de decisión del individuo. Esta vez se propone considerar dos urnas que contienen cada una 100 bolas, las cuales pueden ser de color rojo o verde. Se sabe que la primera urna contiene bolas rojas y verdes en la misma proporción, es decir, 50 bolas rojas y 50 bolas verdes, mientras que sobre la segunda urna no se conoce dicha proporción. Se le propone a un jugador que elija la urna de dónde sacar una bola tal que si saca una bola roja entonces gana la apuesta.

El resultado de este experimento muestra que aunque hay personas para quienes les es indiferente elegir una u otra urna, existe una cantidad representativa de personas que prefieren la urna con las proporciones conocidas. En consecuencia, estas personas, quienes prefieren una de las urnas, no concuerdan con la teoría de la utilidad esperada y su representación de la incertidumbre por medio de probabilidades, donde se asigna la misma probabilidad a sacar una bola roja de cualquiera de las urnas. Por lo tanto, se identifican atributos relevantes para la decisión que la probabilidad es incapaz de medir, pues la confianza sobre el cálculo de la probabilidad es mayor para la primera urna, con proporción conocida, que para la segunda, la urna cuya proporción es desconocida.

En este ejemplo se puede observar que el individuo ignora la composición real de una urna, y por lo tanto se encuentra en un estado de incertidumbre subjetiva, además de conocer la composición de la otra urna, encontrándose también en una situación de incertidumbre objetiva. El hecho que se prefiera apostar sobre la urna de proporciones conocidas revela un patrón de comportamiento que no concuerda completamente con la teoría de la utilidad esperada. Un patrón incompatible con el sistema  $U1-U3$ , que sólo trata con probabilidades conocidas, e incompatible de igual modo con el sistema  $S1-S7$ , que trata con probabilidades subjetivas (que en este caso es igualmente incapaz de representar esta situación de incertidumbre por medio de una única probabilidad numérica).

En este sentido, surgen ciertas dificultades para inferir (significativamente) las probabilidades de ciertos eventos de acuerdo con las preferencias del individuo. Por lo tanto, la descripción de la incertidumbre subjetiva en términos de probabilidades resulta incompleta [37], a no ser, claro está, que se conciben

técnicas distintas para medir la probabilidad (donde se pueda distinguir entre probabilidades con distintos grados de confianza).

Entonces, frente a este tipo de situaciones donde no se sabe el verdadero estado de las cosas, en oposición al principio  $S2$ , un individuo no siempre puede hacer uso de probabilidades numéricas para expresar su incertidumbre (subjetiva), como tampoco puede encontrar utilidades numéricas para representar el orden de sus preferencias. Y por lo tanto, no puede comportarse de acuerdo con el criterio de la maximización de la expectativa matemática de la utilidad [37].

Recapitulando, estas paradojas revelan que existe una proporción representativa de individuos que no siguen la tendencia enmarcada por la teoría de la utilidad esperada, contradiciendo así las predicciones desarrolladas mediante su criterio de decisión. Estos argumentos no han resultado del todo destructivos, sino al contrario, han motivado una intensa reflexión acerca de la pertinencia de aplicar estos axiomas sobre todo tipo de situaciones (donde no son aceptables). En consecuencia, se han propuesto nuevas soluciones como las que se repasan a continuación.

#### 1.4 Sobre el desarrollo de la teoría de la decisión y la utilidad esperada

Como se ha visto, al asumir la existencia de una distribución de probabilidad  $p$  sobre  $S$ , tal que  $s \in S$ , la utilidad esperada ( $UE$ ) de un acto  $f \in F$ , recordando que cada acto  $f$  tiene una consecuencia  $x \in X$  de acuerdo con el estado de las cosas  $s$ , se puede expresar como

$$UE(f) = \sum_{s \in S}^{|S|} U(f(s)) \cdot p(s),$$

tal que  $R(f, g)$  es cierto, esto es, el acto  $f$  es al menos preferido a  $g$ , si, y sólo si, se cumple que  $UE(f) \geq UE(g)$ .

Este enfoque, el cual se encuentra en el núcleo de la teoría clásica de la decisión, es el comúnmente utilizado para enfrentar situaciones naturales de decisión bajo incertidumbre. Sin embargo, se reconoce la importancia de reflexionar sobre las distintas paradojas que existen acerca de sus cualidades descriptivas y normativas, donde se han encontrado evidentes limitaciones (bajo la perspectiva de la Sección 1.3).

Al respecto, algunas reflexiones de gran relevancia han sido desarrolladas a partir de las observaciones y la evidencia que distintos experimentos han aportado, sobre el pensamiento y el comportamiento humano en situaciones de decisión bajo incertidumbre (véase por ejemplo [75], [139]). Además se han propuesto distintos modelos generalizando la teoría de la utilidad esperada (como en el caso de [4], [120], [139]), constituyendo un cuerpo teórico que continúa siendo desarrollado hasta la actualidad (ver por ejemplo [65], [80], [82]).

#### **1.4.1 Teoría de la utilidad esperada y el modelo de la integral de Choquet**

En 1989 [120], se propone generalizar el modelo de la utilidad esperada subjetiva [119] tanto para probabilidades objetivas como subjetivas, en base a un modelo desarrollado en 1963 [4], donde las probabilidades no son necesariamente aditivas. Se recuerda que una probabilidad  $p$  es aditiva cuando se cumple que para cualquier par de eventos  $A$  y  $B$ ,  $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ , donde  $\cup$  y  $\cap$  son los operadores conjuntistas de unión y conjunción, respectivamente.

De esta manera, completando una base importante de trabajos acerca de las probabilidades subjetivas en la teoría de la decisión [58], [109], [142], [148], se obtiene un resultado análogo al de Savage [119], pero ahora para probabilidades no necesariamente aditivas, estos es, tales que  $p(A \cup B) + p(A \cap B) \leq p(A) + p(B)$ . Entonces, mediante esta generalización, es posible sostener el criterio de la utilidad esperada para los casos en los que es problemático aplicar probabilidades aditivas [120] (como en el caso de la paradoja de Ellsberg [37]).

Por ejemplo, volviendo a la paradoja de Ellsberg [37], donde los eventos complementarios reciben probabilidades de  $1/2$  independientemente del tipo o la cantidad de información disponible. Si a cada evento se le asigna un índice de  $3/7$ , entonces la diferencia  $1 - (3/7 + 3/7) = 1/7$ , expresa un cierto grado de incertidumbre en la asignación de estos índices probabilísticos [120]. En consecuencia, la introducción de probabilidades no necesariamente aditivas permite la transmisión de información que las probabilidades aditivas no pueden representar.

El modelo de Savage [119] se generaliza por medio del siguiente modelo de la integral de Choquet [120]. Este modelo, siguiendo la propuesta de Anscombe y Aumann [4], incluye también probabilidades objetivas, concebidas tal como en el modelo de Von Neumann y Morgenstern [141]. De este modo, un acto  $f$  asigna a cada estado  $s$  una lotería  $p$ , definida ésta sobre consecuencias conocidas.

Por otro lado, la incertidumbre subjetiva se refiere al verdadero estado de las cosas. Esta interpretación no impone ninguna restricción de aditividad de las probabilidades, siempre que sea posible realizar la correspondiente operación integral sobre la expectativa de los actos [120].

Entonces se define un conjunto  $P^*$  de loterías sobre  $X$ , tal que  $P^* = \{p: X \rightarrow [0,1]\}$ , donde  $p(x) \neq 0$  para un número finito de elementos de  $X$  y  $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ . También se define el conjunto de todos los eventos  $\Sigma$ , álgebra de conjuntos sobre el conjunto de estados  $S$ , y un conjunto  $F$  de todas las funciones finitamente valoradas que van de  $S$  a  $P^*$ . De este modo,  $F$  es un conjunto convexo de  $P^{*S}$ , donde las combinaciones convexas de  $P^{*S}$  son el conjunto de todas las  $\alpha f + (1-\alpha)g = h$ , donde  $h(s) = \alpha f(s) + (1-\alpha)g(s)$  en  $S$ , con  $\alpha \in [0,1]$  y  $f$  y  $g$  en  $P^{*S}$ . El sistema axiomático que conforma este modelo es el siguiente.

**Axioma Q1 [120]:**  $(F, R)$  es un orden total.

Tal como se establece también en la condición S1,  $R$  es completa en un sentido fuerte, antisimétrica y transitiva, donde la parte asimétrica de  $R$  se representa por medio de  $P$ , mientras que la parte simétrica se representa por medio de  $I$ . Esta relación  $R$ , definida sobre  $F$ , induce igualmente un orden sobre  $P^*$ , tal que es cierto que  $R(p, q)$  si, y sólo si, se cumple que  $R(f, g)$ , donde para todo  $s \in S$ ,  $f(s) = p$  y  $g(s) = q$ .

A continuación se define la *independencia comonotónica* (monotonidad en común) entre cualquier par de actos, lo cual va a representar un papel clave para evitar las antinomias referidas en la sección 1.3.

**Definición Q1 [120]:** Dos actos  $f, g \in F$  son comonótonos si no ocurre que  $P(f(s), f(t))$  y  $P(g(t), g(s))$  para cualesquiera dos estados  $s, t \in S$ .

Entonces se formula el siguiente axioma.

**Axioma Q2 [120]:** Para todo par de actos comonótonos  $f, g$ , tal que  $f, g, h \in F$ ,  $0 < \alpha < 1$ , si es cierto que  $P(f, g)$  entonces se cumple que  $P(f', g')$ , donde  $f' = \alpha f + (1 - \alpha)h$  y  $g' = \alpha g + (1 - \alpha)h$ .

Esta condición de independencia comonotónica resulta menos fuerte que la condición de independencia (monotonicidad) fuerte, donde se asume que para todo  $f, g, h \in F$ ,  $0 < \alpha < 1$ , si se cumple que  $P(f, g)$  entonces es cierto que  $P(f', g')$ . Ahora, solamente si los actos son comonótonos (Definición Q1), entonces se asume que el orden de preferencia entre dos actos se mantiene a pesar de no saber el verdadero estado de las cosas, evitando así caer en el tipo de paradojas planteadas por Allais [1] y Ellsberg [37]. En este sentido, los actos disponibles para el individuo en las situaciones descritas por aquellas paradojas no son comonótonos.

**Axioma Q3 [120]:** Para todo  $f, g, h \in F$  y  $\alpha \neq \beta$  tal que  $0 < \alpha, \beta < 1$ , si se cumple que  $P(f, g)$  y que  $P(g, h)$  entonces es cierto que  $P(f', g)$  y que  $P(g, f'')$ , donde  $f' = \alpha f + (1 - \alpha)h$  y  $f'' = \beta f + (1 - \beta)h$ .

Además de este axioma de continuidad, se formula el siguiente axioma de monotonicidad o de independencia de los estados, tal que las preferencias sobre las consecuencias no dependen del verdadero estado de las cosas.

**Axioma Q4 [120]:** Para todo  $f, g \in F$ , si es cierto que  $R(f(s), g(s))$  en  $S$ , entonces se cumple que  $R(f, g)$ .

Finalmente se asume un axioma de no trivialidad.

**Axioma Q5 [120]:** No es cierto que para todo  $f, g \in F$ , se cumpla que  $R(f, g)$ .

Esta propuesta permite desarrollar el cálculo de la utilidad esperada de un acto con respecto a una probabilidad no necesariamente aditiva, introduciendo así la integral de Choquet [27], con respecto a una capacidad  $\mu$ . Esta capacidad  $\mu$  es una función continua que satisface las condiciones de normalización  $\mu(\emptyset)=0$  y  $\mu(S)=1$  y de monotonicidad, tal que para todo  $E, G \subseteq \Sigma$  (luego  $E, G \subset S$ ), se cumple que si  $E \subseteq G$  entonces  $\mu(E) \leq \mu(G)$  [65].

**Definición C1 [65]:** Sea  $v$  una función  $v: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La integral de Choquet con respecto a una capacidad  $\mu$ , donde  $v_i = v(i)$  para  $i=1,2,\dots,n$  tal que  $n$  es la cardinalidad de  $S$ , y  $\alpha$  es una permutación en  $S$ , tal que  $v_{\alpha(1)} \leq \dots \leq v_{\alpha(n)}$  y  $v_{\alpha(0)} = 0$ , está dada por la siguiente expresión,

$$\int_S v \partial\mu = \sum_{i=1}^n (v_{\alpha(i)} - v_{\alpha(i-1)}) \mu(\{\alpha(i), \dots, \alpha(n)\}).$$

De esta manera, para el caso en que  $\mu$  es aditiva, la integral se reduce a la media aritmética [65],

$$\int_S v \partial\mu = \sum_{i=1}^n \mu(\{i\}) v_i.$$

Además, para el caso en que  $\mu$  es simétrica, tal que si  $|A|=|B|$  para cualquier  $A, B$ , donde  $|A|$  es la cardinalidad de  $A$ , entonces  $\mu(A) = \mu(B)$ , la integral de Choquet es equivalente a los operadores OWA [150],

$$\int_S v \partial\mu = \sum_{i=1}^n (\mu_{n-i+1} - \mu_{n-i}) v_{\alpha(i)},$$

donde  $\mu_i = \mu(A)$  tal que  $|A|=i$ .

También se ha definido la versión ordinal de la integral de Choquet, conocida como la integral de Sugeno [127], la cual permite valorar las alternativas directamente sobre una escala ordinal, posiblemente finita, de manera que, tomando la función  $v: X \rightarrow [0,1]$ ,

$$\int_S v \partial\mu = \bigvee_{i=1}^n \left[ v_{\alpha(i)} \wedge \mu(\{\alpha(i), \dots, \alpha(n)\}) \right],$$

donde  $\wedge, \vee$  representan el mínimo y el máximo respectivamente.

La introducción de la integral de Choquet en la teoría de la decisión se debe principalmente a que sus dos argumentos son interpretados, uno ( $\mu$ ), como una probabilidad no necesariamente aditiva, y el otro ( $v$ ), como una función valorada en  $\mathbb{R}$  (análoga a una función de utilidad [109]). Por consiguiente, el teorema que se deduce del sistema  $Q1-Q5$  se especifica a continuación.

**Teorema Q [120]:** Si la relación de preferencia  $R$  definida sobre  $F$  satisface los axiomas  $Q1-Q5$ , entonces existe una única probabilidad  $\mu$  no necesariamente aditiva en  $\Sigma$  y una función  $v$  afín en  $P^*$ , es decir, única hasta una cierta transformación lineal, tal que para todo  $f, g \in F$ , es cierto que  $R(f, g)$  si, y sólo si, se cumple que,

$$\int_S v(f(s)) \partial\mu \geq \int_S v(g(s)) \partial\mu.$$

Este modelo de Choquet permite definir de manera consistente una única probabilidad subjetiva, generalizando la teoría de la utilidad esperada para el caso no aditivo. De esta manera, se responden por un lado las críticas existentes en contra de la utilización de probabilidades subjetivas necesariamente aditivas [1],

[37], pero por el otro, falla en describir satisfactoriamente distintos fenómenos relevantes de la decisión [75], [139], como se examina a continuación.

#### 1.4.2 Teoría de las perspectivas acumuladas

Siguiendo el modelo de Choquet [120], en 1992 [139] se somete a revisión una propuesta inicialmente hecha en 1979 [75], donde se hace una reflexión crítica de la teoría de la utilidad esperada como modelo descriptivo de la decisión bajo incertidumbre. De esta forma se sientan las bases de una teoría alternativa, nombrada por sus autores como la teoría de las perspectivas acumuladas (CPT, por sus iniciales en inglés, *Cumulative Prospect Theory*).

La CPT representa dos actitudes características de las personas hacia el riesgo, tal que el comportamiento con respecto a posibles ganancias es distinto al que se tiene con respecto a posibles pérdidas. En la actualidad se ha podido verificar esta dualidad a nivel cerebral, por medio de imágenes donde se ve que las pérdidas y las ganancias son efectivamente procesadas en regiones distintas del cerebro [98], [149].

Por ejemplo, si se tiene la opción de ganar \$100 con certeza o de ganar \$250 con una probabilidad de 0.5, se encuentra que las personas con *aversión* al riesgo eligen la primera opción a pesar de que la expectativa matemática de la opción incierta es mayor (su valor esperado es de \$125). En cambio, si se enfrentan a una pérdida segura de \$100 o una pérdida de \$250 con 0.5 de probabilidad, las mismas personas con *aversión* al riesgo eligen la opción incierta. Por lo tanto este comportamiento no es necesariamente irracional, sino que simplemente reconoce la asimetría natural de ciertas decisiones humanas, de acuerdo con un tipo de

racionalidad que permite al individuo diferenciar entre los atributos positivos y negativos propios de los objetos de interés.

Con el fin de formalizar estas ideas, las cuales parten de la base de diferenciar las pérdidas de las ganancias, la CPT concibe los actos de acuerdo con sus perspectivas monetarias [75], [139]. Dichas perspectivas pueden ser positivas (ganancias), negativas (pérdidas) o neutrales (ni ganancias ni pérdidas), de modo que se define el conjunto de todas las perspectivas  $F = \{f : S \rightarrow X\}$ , tal que  $F^+$  y  $F^-$  representan las perspectivas positivas y negativas, respectivamente, y  $X$  toma valores de  $\mathbb{R}$ , de manera que a todo  $f \in F$  le corresponde una consecuencia monetaria  $x \in X$ .

Entonces, se organizan todas las consecuencias en orden creciente, de forma que para todo  $f \in F$ , donde  $(A_i)$  es una partición de  $S$ , el par representado por  $f = (x_i, A_i)$  significa que se obtiene  $x_i$  si  $A_i$  ocurre, tal que  $x_i > x_j$  si y solo si  $i > j$ . En este marco, una alternativa es positiva si  $i > 0$ , negativa si  $i < 0$  y neutral si  $i = 0$ . La parte positiva de  $f$ ,  $f^+$ , se obtiene como  $f^+(s) = f(s)$  si  $f(s) > 0$  y  $f^+(s) = 0$  si  $f(s) \leq 0$ . La parte negativa se obtiene de manera análoga.

De esta manera, se asume que existe una función estrictamente creciente,  $v : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v(x_0) = v(0) = 0$ , y dos capacidades  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  (en el sentido de [27], [120]), de modo que para cualquier perspectiva  $f = (x_i, A_i)$ ,  $-m \leq i \leq n$ , se tienen unos pesos de decisión  $\pi^+(f^+) = (\pi_0^+, \dots, \pi_n^+)$  y  $\pi^-(f^-) = (\pi_{-m}^-, \dots, \pi_0^-)$  definidos como [139],

$$\pi_n^+ = \mu^+(A_n),$$

$$\pi_{-m}^- = \mu^-(A_{-m}),$$

$$\pi_i^+ = \mu^+(A_i \cup \dots \cup A_n) - \mu^+(A_{i+1} \cup \dots \cup A_n), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$\pi_i^- = \mu^-(A_{-m} \cup \dots \cup A_i) - \mu^-(A_{-m} \cup \dots \cup A_{i-1}), \quad 1-m \leq i \leq 0,$$

tal que el valor agregado  $V$  de las perspectivas positivas y negativas, respectivamente, está dado por [139],

$$V(f^+) = \sum_{i=0}^n \pi_i^+ v(x_i),$$

$$V(f^-) = \sum_{i=-m}^0 \pi_i^- v(x_i),$$

y el valor agregado  $V$  de las perspectivas, tanto positivas como negativas, se obtiene como [139],

$$V(f) = V(f^+) + V(f^-). \quad (1)$$

Nótese que si se toma  $\pi_i = \pi_i^+$  si  $i \geq 0$  y  $\pi_i = \pi_i^-$  si  $i < 0$ , la ecuación (1) se puede reescribir como [139],

$$V(f) = \sum_{i=-m}^n \pi_i v(x_i). \quad (2)$$

De esta forma, el sistema axiomático que formaliza la CPT es el siguiente.

**Axioma P1 [139]:**  $(F, R)$  es un orden total.

La relación  $R = \langle P, I \rangle$  es completa en un sentido fuerte, antisimétrica y transitiva.

Esta relación  $R$ , definida sobre  $F$ , induce igualmente un orden sobre  $X$ , tal que es cierto que  $R(x, y)$  si, y sólo si, se cumple que  $R(f, g)$ , donde para todo  $s \in S$ ,  $f(s) = x$  y  $g(s) = y$ .

**Axioma P2 [139]:** Para todo  $f, g, h \in F$  y  $\alpha \neq \beta$  tal que  $0 < \alpha, \beta < 1$ , si se cumple que  $P(f, g)$  y que  $P(g, h)$  entonces es cierto que  $P(f', g)$  y que  $P(g, f'')$ , donde  $f' = \alpha f + (1 - \alpha)h$  y  $f'' = \beta f + (1 - \beta)h$ .

**Axioma P3 [139]:** Para todo  $f, g \in F$ , si es cierto que  $R(f(s), g(s))$  en  $S$ , entonces se cumple que  $R(f, g)$ .

Estos dos supuestos asumen, respectivamente, la continuidad y la monotonicidad del orden  $(F, R)$ , en el mismo estilo de los axiomas  $Q3$  y  $Q4$ , respectivamente. Ahora, siguiendo la condición de comonotonicidad introducida antes (axioma  $Q2$ ), se formula el siguiente axioma, también llamado “independencia coordinada comonotónica” [142].

**Axioma P4 [139]:** Para todo par de perspectivas comonótonas  $f, g$ , donde  $f, g, h \in F$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , es cierto que  $R(f, g)$  si y sólo si se cumple que  $R(f', g')$ , donde  $f' = \alpha f + (1 - \alpha)h$  y  $g' = \alpha g + (1 - \alpha)h$ .

Por último se propone la condición de doble emparejamiento, la cual hace explícita referencia a la combinación entre perspectivas positivas y negativas.

**Axioma P5 [139]:** Para todo  $f, g \in F$ , si  $I(f^+, g^+)$  y  $I(f^-, g^-)$  entonces  $I(f, g)$ .

De esta manera, el sistema axiomático  $P1-P5$ , junto con la representación de la incertidumbre por medio del funcional de Choquet con respecto a las capacidades, interpretadas éstas como probabilidades no aditivas, permiten la formulación del siguiente teorema.

**Teorema P [139]:** Si  $(F^+, R)$  y  $(F^-, R)$  pueden ser representados cada uno por un funcional acumulativo, entonces  $(F, R)$  satisface la CPT si, y sólo si, cumple con los axiomas  $P1-P5$ .

De este modo, se asegura que tanto la ecuación (1) como la (2), preservan el orden de preferencia sobre la combinación entre las perspectivas de los actos, en una escala de valoración enmarcada en términos monetarios de pérdidas y ganancias (se advierte que una axiomatización alternativa de la CPT ha sido desarrollada en [143]).

Por lo tanto, la caracterización  $P1-P5$  formaliza la propuesta general de la CPT, por medio del modelo de la integral de Choquet que agrega acumulativamente las perspectivas, y gracias a los resultados obtenidos [139], [143], potencia su utilización dentro de la teoría de la decisión y de la ayuda a la decisión con múltiples criterios [65]. Es precisamente en este contexto de ayuda a la decisión que se ha examinado en mayor detalle la CPT y su formulación mediante la integral de Choquet.

De este modo, el posterior desarrollo de la CPT, bajo el enfoque multi-criterio [65], ha encontrado que la CPT, aunque tiene una gran flexibilidad para representar distintos comportamientos de decisión, no es totalmente satisfactoria, debido a su limitación para representar las preferencias de un individuo en todo tipo de situaciones [64], [81]. Esto se debe a que no permite definir un valor específico de preferencia cuando las alternativas tienen asociados valores tanto positivos como negativos, es decir, cuando las alternativas son consideradas buenas y malas de manera simultánea.

### 1.4.3 Modelo de la integral de Choquet con respecto a bi-capacidades

Como se ha señalado, la formulación de la CPT mediante la integral de Choquet no permite representar las preferencias de un individuo cuando sus alternativas son buenas y malas al mismo tiempo [65]. Por ello, se desarrolla un modelo [64] en el cual se asume directamente la *dependencia* entre la parte positiva y la negativa, esto es, donde una alternativa puede ser *solamente* una de las tres: buena, mala o neutral. De este modo, se asume que el individuo se ve forzado a actuar, esto es, a tomar una decisión inmediata, y por ello, debe resolver por sí mismo la ambigüedad o ambivalencia causada por la coexistencia de afectos positivos y negativos [82].

Entonces se identifica un único valor acerca de la predisposición hacia determinada alternativa, mediante un mapeo de dichos afectos sobre una única escala. De esta forma se define el modelo de la integral de Choquet con respecto a una bi-capacidad (CBC) [64], [65], el cual se examina brevemente a continuación.

Primero que todo, bajo el marco analítico de la ayuda a la decisión bajo múltiples criterios y el modelo de la integral de Choquet [65], se tiene un conjunto de criterios  $N$ , donde una coalición de criterios  $C$  es un subconjunto de  $N$ , tal que  $C \subseteq N$ . Luego, cada coalición tiene asignado un vector de valoraciones  $(v_1, \dots, v_n)$ , donde  $v_i \in [-1, 1]$  denota el grado en que la coalición satisface el criterio  $i \in N$ .

De esta forma, si se cumple que  $v_i > 0_i$  ( $v_i < 0_i$ ), entonces  $v_i$  es considerado bueno (malo) por el individuo, donde  $0_i$  es el nivel neutral en la escala utilizada para todos los criterios (en este sentido se asume la conmensurabilidad entre los criterios, tal que  $v_i = v_j$  es cierto si y sólo si la intensidad de satisfacción es la misma tanto para el criterio  $i$  como para el  $j$ ). Bajo este punto de vista, una

capacidad  $\mu(C)$  expresa el grado de importancia que la coalición  $C$  tiene sobre el proceso de decisión.

De este modo, una bi-capacidad es una función  $\mu(C, D)$ , para todo  $C, D \subseteq N$ , que tiene el mismo rol que una capacidad pero con dos argumentos, uno positivo, que representa la coalición de criterios totalmente satisfechos, y otro negativo, que representa la coalición de criterios insatisfechos [80], [81]. Entonces, las definiciones de una bi-capacidad y de la integral de Choquet con respecto a una bi-capacidad son las siguientes.

**Definición CBC1 [65]:** Sea  $Q(N) = \{(C, D) \in 2^N \times 2^N \mid C \cap D = \emptyset\}$ . Una bi-capacidad es una función  $\mu: Q(N) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\mu(\emptyset, \emptyset) = 0$ ,  $\mu(C, D) \leq \mu(C', D)$  cuando  $C \subseteq C'$ , es decir, es monótona creciente con respecto al primer argumento, y  $\mu(C, D) \geq \mu(C, D')$  cuando  $D \subseteq D'$ , es decir, es monótona decreciente con respecto al segundo argumento. Se dice que está normalizada si  $\mu(N, \emptyset) = 1$  y  $\mu(\emptyset, N) = -1$ . De forma complementaria, el dual o conjugado de una bi-capacidad está dado por  $\bar{\mu}(C, D) = -\mu(D, C)$  para todo  $(C, D) \in Q(N)$ .

Para el caso de la CPT, una bi-capacidad  $\mu$  consiste en tomar dos capacidades  $\mu^+, \mu^-$  tal que para cualquier par  $(C, D) \in Q(N)$ ,

$$\mu(C, D) = \mu^+(C) - \mu^-(D).$$

En consecuencia, el valor agregado sobre la importancia de la coalición  $C$  se obtiene mediante la integral de Choquet de la siguiente forma, donde  $v_C \geq 0$  y  $v_{-C} < 0$ ,

$$\int_N v \partial\mu = \int_N v_C \partial\mu^+ - \int_N v_{-C} \partial\mu^-. \quad (3)$$

**Definición CBC2 [65]:** Para cualquier  $C \subseteq N$  y  $v \in \mathbb{R}^n$ , sea  $\alpha$  una permutación en  $N$  tal que  $|v_{\alpha(1)}| \leq \dots \leq |v_{\alpha(n)}|$ , donde

$$C_{\alpha(i)}^+ = \{\alpha(i), \dots, \alpha(n)\} \cap C = \{\alpha(j), \alpha(j) \geq \alpha(i) \text{ y } v_{\alpha(j)} \geq 0\}$$

y

$$C_{\alpha(i)}^- = \{\alpha(i), \dots, \alpha(n)\} \cap (N \setminus C) = \{\alpha(j), \alpha(j) \geq \alpha(i) \text{ y } v_{\alpha(j)} < 0\}.$$

Entonces la integral de Choquet con respecto a una bi-capacidad  $\mu$  está dada por la siguiente expresión,

$$\int_N v \partial\mu = \sum_{i=1}^n |v_{\alpha(i)}| \left[ \mu(C_{\alpha(i)}^+, C_{\alpha(i)}^-) - \mu(C_{\alpha(i+1)}^+, C_{\alpha(i+1)}^-) \right].$$

Aunque este modelo CBC es bastante general, permitiendo representar situaciones de preferencia lo suficientemente complejas, que no se pueden representar directamente con capacidades clásicas [64], su puesta en práctica es actualmente difícil dado el número y el tipo de parámetros que necesita. Además se encuentra que no siempre es posible representar las distintas situaciones de decisión de un individuo racional [82].

En particular, al estudiar la importancia relativa de dos criterios condicionada a un tercero, se plantea un método de compensación entre criterios, tal que los criterios “bien-satisfechos” compensan los criterios “mal-satisfechos”. En este sentido, el

enfoque consiste en construir prioridades entre los distintos criterios y conseguir un consenso entre ellos.

El problema es que si los valores del atributo condicional están más cercanos al nivel neutral que los de los atributos en comparación, es decir, si el criterio condicional es el más cercano al nivel neutral entre los criterios disponibles, entonces las respectivas relaciones de preferencia no pueden ser representadas por medio de un único valor [65], [82].

La presente investigación se vuelca ahora sobre la construcción de una estructura relacional de preferencia para el individuo, donde éste tenga la posibilidad de expresar de manera *independiente* y *flexible*, tanto su preferencia como su aversión hacia las alternativas. Para ello, se examina a continuación el marco teórico proporcionado por las relaciones binarias de preferencia y los distintos tipos de órdenes que éstas pueden representar, prestando particular atención a sus estructuras y propiedades matemáticas.

De este modo, en el siguiente Capítulo 2, la Sección 2.1 empieza por una aproximación matemática a la teoría de preferencias, y luego en la Sección 2.2, se examina la *teoría de comparabilidad parcial* [116] (PCT, por sus iniciales en inglés, *Partial Comparability Theory*). Después se continúa en la Sección 2.3, repasando un modelo axiomático cuatro-valorado [135] y continuo [108] de la PCT, y se finaliza dicho capítulo con la Sección 2.4, con la *teoría de preferencias borrosas* [153] y un *modelo estándar de preferencias borrosas* [43], [95], [140].



## Capítulo 2. Teoría de relaciones de preferencia e incertidumbre

A partir del desarrollo de modelos matemáticos sobre la teoría de la decisión y la utilidad [120], [141], la modelización de preferencias se ha consolidado en la búsqueda de modelos más generales y flexibles (como en el caso de [86], [115]). De esta forma, se le concede más relevancia a la descripción e identificación de las distintas situaciones de decisión de un individuo racional, donde la racionalidad no es necesariamente perfecta (ver por ejemplo [91], [92], [118]).

Entonces, por medio de la representación de las estructuras matemáticas que sostienen las relaciones de preferencia [115], se construyen modelos que permiten examinar con mayor detalle el proceso subjetivo de decisión [12], [79], [86]. Por lo tanto, en este segundo capítulo, se examinan distintas estructuras de preferencia, junto con sus respectivos modelos y la representación de las distintas situaciones de decisión bajo incertidumbre.

De este modo, la Sección 2.1 trata sobre las relaciones binarias y los órdenes de preferencia, formulando algunas propiedades que permiten identificar los componentes básicos de una estructura de preferencia [115]. Después, en la Sección 2.2, se examina la *teoría de comparabilidad parcial* [116] (PCT, por sus iniciales en inglés, *Partial Comparability Theory*), donde se introducen algunos conceptos con el fin de explorar aquellas situaciones de decisión que ofrecen mayor conflicto e incertidumbre para el individuo.

Luego, en la Sección 2.3, se formaliza un modelo axiomático cuatro-valorado (4-PCT) [135] y continuo de la PCT (c-PCT) [135]. Finalmente, en la Sección 2.4, se revisan la *teoría de conjuntos borrosos* [153] y un *modelo estándar de preferencias*

*borrosas* [43], [95], [140], donde se trabaja con una estructura completa de preferencias, bajo una verificación gradual de las relaciones básicas de decisión.

## 2.1 Relaciones binarias de preferencia

Como se ha visto en el primer capítulo, la genealogía de la modelización de preferencias coincide con los primeros modelos axiomáticos de la utilidad esperada, los cuales conforman el núcleo de la teoría clásica de la decisión. De esta forma, examinando el orden dado por  $R = P \cup I = \langle P, I \rangle$ , junto con el resto de los axiomas necesarios para demostrar la existencia de una función valorada en representación del orden de preferencia del individuo, la teoría de preferencias se ha desarrollado en búsqueda de un equilibrio entre la consistencia, la flexibilidad y la generalidad de la teoría (véase por ejemplo [39], [86], [146]).

De esta manera, la teoría de preferencias se centra en describir e identificar las relaciones básicas de preferencia, representándolas por medio de su correspondiente estructura matemática (como en [79], [111]). Esto, con el propósito de construir modelos que expliquen de manera completa el proceso subjetivo de la decisión.

Formalmente, la relación binaria  $R$  se define sobre un conjunto de referencia  $X$ , tal que  $R \subseteq X \times X$ , donde para cualquier par  $(x, y) \in X \times X$ ,  $R(x, y) \in \{0, 1\}$  permite representar la relación existente entre  $x$  e  $y$ . De esta forma, para un conjunto de alternativas  $X$ , la relación binaria de preferencia  $R(x, y)$  representa el predicado de preferencia entre cierto par de alternativas  $(x, y) \in X \times X$ .

Por ejemplo, si  $R$  representa el predicado “ $x$  es mejor que  $y$ ”, entonces es una relación de preferencia *estricta*, o si representa el predicado “ $x$  es al menos mejor que  $y$ ”, entonces es una relación de preferencia *débil*. De este modo, el orden que  $R$  induce sobre  $X$  es el significado *primario* de  $R$  (siguiendo la propuesta de [129] y su lectura de [145]). Este marco analítico permite examinar el proceso comparativo de un individuo sobre las alternativas disponibles, identificando sus atributos relativos y construyendo un cierto orden sobre las mismas.

### 2.1.1 Las relaciones de preferencia en los axiomas $U1$ , $S1$ , $Q1$ y $P1$

En un principio, el sistema  $U1-U3$ , en particular el axioma  $U1$ , asume un *orden total estricto* de preferencia [115]. De este modo,  $P$  es una relación de preferencia completa, donde para todo  $x \neq y \in X$ , se cumple que  $P(x, y)$  o que  $P(y, x)$ ; asimétrica, tal que para todo  $x, y \in X$ , si se cumple que  $P(x, y)$  entonces no es cierto que  $P(y, x)$ ; y transitiva, donde para todo  $x, y, z \in X$ , si es cierto que  $P(x, y)$  y que  $P(y, z)$  entonces también se cumple que  $P(x, z)$ . Además, si para algún par  $x, y \in X$ , no se cumple que  $P(x, y)$  ni que  $P(y, x)$ , entonces se define por exclusión la relación de indiferencia  $I(x, y)$ , como una relación de igualdad matemática (tal como se ha visto en la sección 1.2.1).

La *analogía* con las operaciones numéricas ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ ) es directa [141], de acuerdo con los conceptos de “mayor que” y “menor que”, de modo que para cualquier  $x, y \in X$ , sólo una de las siguientes tres relaciones se cumple (también conocida como la propiedad tricotómica)  $x > y$ ,  $x < y$  o  $x = y$ . Por lo tanto, tal como ocurre con las operaciones numéricas de la analogía anterior, se tiene que tanto  $P$  como  $I$  son transitivas.

De esta forma, el orden total dado por  $\langle P, I \rangle$ , excluye de la teoría de la utilidad la posibilidad de que ocurra alguna de estas combinaciones,  $P(x, y)$  e  $I(x, y)$ ,  $P(y, x)$  e  $I(y, x)$  o  $P(x, y)$  y  $P(y, x)$ . La exclusión de las dos primeras combinaciones implica que  $P$  no es reflexiva, esto es, que para ningún  $x \in X$  se cumple que  $P(x, x)$ , mientras que la exclusión de la última combinación conserva la transitividad de  $P$ , dado que el cumplimiento de  $P(x, y)$  y  $P(y, x)$  implicaría  $P(x, x)$ , lo cual no es permitido.

De esta manera, tal como se asume explícitamente en los axiomas  $S1$ ,  $Q1$  y  $P1$ , la relación  $R = \langle P, I \rangle$  es un *orden total* [115]. Esto es,  $R$  es completa en un sentido fuerte, tal que para todo par de alternativas  $x, y \in X$ , se cumple que  $R(x, y)$  o que  $R(y, x)$ ; antisimétrica, donde para todo  $x, y \in X$ , si se cumplen  $R(x, y)$  y  $R(y, x)$ , entonces es cierto que  $I(x, y)$ ; y transitiva, tal que para todo  $x, y, z \in X$ , si es cierto que  $R(x, y)$  y que  $R(y, z)$  entonces también se cumple que  $R(x, z)$ .

De este modo, se tiene que estos axiomas implican un *orden lineal* sobre las alternativas [41]. Resulta evidente la importancia de éste supuesto para demostrar que existe una representación funcional, numérica y afín en representación del orden de preferencias del individuo (ver por ejemplo [39]), donde este mismo orden también se puede interpretar como un *ranking* completo sobre los objetos de  $X$ . Este es efectivamente el caso de la teoría de la utilidad, donde se asume que  $(X, R)$  es un orden total y se deduce que existe una función valorada en  $\mathbb{R}$  que preserva el orden de preferencia sobre los elementos de  $X$  (ver de nuevo [39], como también [79]).

Esta aproximación refleja solo un orden óptimo que debe servir de referencia para cualquier proceso de decisión, de ahí su carácter normativo, mas no permite describir ni representar todas las situaciones de decisión a las que se puede enfrentar un individuo. Como consecuencia, la teoría de la utilidad (en particular los modelos  $U1-U3$ ,  $S1-S7$  y  $Q1-Q5$ ) no permite examinar el proceso mediante el cual un orden total de preferencia (estricto, en el caso de  $U1$ ) puede ser efectivamente obtenido, y esto a su vez obliga a considerar como inconsistentes las preferencias que no obedecen dicho orden (como se sostiene en [85], [89], [124]).

### 2.1.2 Aproximación a los órdenes de preferencia

En retrospectiva, la teoría clásica de la decisión y la teoría de la utilidad solo consideran la *estructura de preferencia*  $R = \langle P, I \rangle$ . Bajo esta estructura, la indiferencia se caracteriza como una relación de igualdad, y como tal, se cumple que para todo  $(x, y, z) \in X$ ,  $I(x, y)$  e  $I(y, z)$  implican  $I(x, z)$ , o en otros términos,  $x = y$  e  $y = z$  implican  $x = z$ . Así pues, esta es una asociación directa con la igualdad matemática, donde dos valores son distinguibles siempre que no sean idénticos.

De esta forma,  $R = \langle P, I \rangle$  se caracteriza como un orden total sobre  $X$ , solo si se cumple con el siguiente sistema axiomático.

**Axioma T1:** Para todo  $x, y \in X$ , una y sólo una relación entre  $P(x, y)$ ,  $P(y, x)$  e  $I(x, y)$  se cumple.

**Axioma T2:**  $I$  es una relación de igualdad.

**Axioma T3:**  $P$  es una relación transitiva.

Nótese que si se asume en lugar de  $T2$  que  $I$  es una relación de equivalencia, se tiene que  $R$  es un orden débil sobre  $X$  [85], [115]. De cualquier forma, la definición de la indiferencia como una relación transitiva ha motivado una profunda reflexión sobre la consistencia de la teoría con respecto a la experiencia (ver por ejemplo [3], [40], [85]). Esta reflexión puede entenderse mediante la asociación entre lo *equivalente* y lo *indistinguible*. Partiendo de la experiencia,  $x$  puede situarse próximo a  $y$ , e  $y$  puede situarse próximo a  $z$ , aunque  $x$  no necesariamente esté próximo a  $z$ . De esta manera, la indiferencia no es necesariamente una relación de igualdad o de equivalencia, sino una relación de indistinción no transitiva, donde  $I(x, y)$  e  $I(y, z)$  no implican  $I(x, z)$ .

Esta idea (que se recoge en [85]) se formaliza por medio de la caracterización de un *semi-orden* para la estructura  $R = \langle P, I \rangle$ . La intuición de esta propuesta puede encontrarse en el poder discriminatorio de la mente humana y su capacidad para identificar diferencias cuando el grado de similitud entre los objetos de interés así lo permite [3]. De este modo,  $R$  es un semi-orden de  $X$  si para todo  $x, y, z, w \in X$  se cumplen los siguientes axiomas.

**Axioma L1 [85]:** Se obtiene una y sólo una relación entre  $P(x, y)$ ,  $P(y, x)$  e  $I(x, y)$ .

**Axioma L2 [85]:** Se cumple que  $I(x, x)$ .

**Axioma L3 [85]:**  $P(x, y)$ ,  $I(y, z)$  y  $P(z, w)$  implican  $P(x, w)$ .

**Axioma L4 [85]:**  $P(x, y)$ ,  $P(y, z)$  y  $I(y, w)$  excluyen la coexistencia de  $I(x, w)$  e  $I(z, w)$ .

Esta caracterización regula la construcción de un orden lineal sobre los elementos de  $X$ , asumiendo que un intervalo de indiferencia nunca extiende uno de preferencia estricta y excluyendo la posibilidad de que un intervalo de indiferencia incluya un intervalo de preferencia estricta. De esta forma,  $I$  es simétrica y reflexiva, mientras que solo  $P$  es transitiva. Entonces se tiene que esta caracterización de un semi-orden generaliza la de un orden total, pues un orden total es también un semi-orden, pero no lo contrario [85].

Por otro lado, se advierte que el orden que induce  $R = \langle P, I \rangle$  sobre el conjunto de alternativas incluye absolutamente a todas las alternativas, hasta las que son claramente descartadas, lo cual, desde un punto de vista práctico, no es muy razonable. Y la explicación por la cual aquellas alternativas son descartadas no es precisamente porque haya una relación de preferencia sobre ellas, ni porque sean indiferentes, sino porque tienen cierto grado de *incomparabilidad* con respecto a las alternativas más relevantes.

De este modo, tiene mayor sentido identificar las alternativas de interés y en caso de conflicto, encontrar mayor información acerca de las mismas. Como ya se ha mencionado en la Sección 1.3 (véase [78]), es la ignorancia y la necesidad de conocimiento lo que guía los actos del individuo. Por lo tanto, se reconoce la importancia de incluir la incomparabilidad como una *relación básica* en la estructura de preferencias del individuo.

Hasta ahora se ha visto que tanto para un orden total como para un semi-orden, la incomparabilidad no tiene cabida, de modo que si para cualquier par de alternativas  $x, y \in X$ , no se cumple ni  $P(x, y)$  ni  $P(y, x)$ , entonces se tiene que  $I(x, y)$ . El problema es que esta falta de preferencia no discrimina entre las distintas

situaciones básicas de incomparabilidad e indecisión. De este modo, un semi-orden, aunque identifica que la indiferencia no es necesariamente transitiva, sigue siendo insuficiente para diferenciar e incluir explícitamente la incomparabilidad en la estructura de preferencias.

Por ejemplo, sea el caso en que un individuo debe decidir racionalmente entre determinado par de alternativas  $x, y \in X$ . Primero, se puede decir que el individuo está indeciso a falta de un proceso racional que aún debe asumir. Luego, una vez inicia el proceso comparativo, si no existe preferencia ni indiferencia entre  $x$  e  $y$ , entonces se puede decir que éstas son *parcialmente incomparables* si, y sólo si, existe un  $z \in X$  tal que se cumplen  $R(x, z)$  y  $R(y, z)$  o  $R(z, x)$  y  $R(z, y)$ ; y son *completamente incomparables* si, y sólo si, para todo  $z \in X$ , si es cierto que  $R(x, z)$  o  $R(z, x)$ , entonces no se cumple que  $R(y, z)$  o  $R(z, y)$ .

Este ejemplo sirve para reflejar el hecho de que un individuo se encuentra en distintas situaciones de decisión dependiendo si está *indeciso*, debido a que le falta información relevante; si es *indiferente*, pues la información que tiene le indica que las opciones son similares; o si está en un *conflicto comparativo*, donde no es posible comparar directamente todas las opciones disponibles.

Para la presente investigación, estas situaciones expresan distintos estados del conocimiento, lo cual desarrolla un papel primordial en el proceso de decisión del individuo. Por ello, se considera que una estructura de preferencia debe ser lo suficientemente general como para representar la situación más simple de decisión, caso de un orden total, hasta una situación más compleja, caso de un orden parcial, en el cual es posible que exista un cierto conflicto, parcial o total, entre las distintas alternativas.

Nótese que un orden total es un caso especial de un *orden parcial*, donde para cualquier  $x, y \in X$ , se cumplen los siguientes axiomas.

**Axioma J1:** Para todo  $x, y \in X$ , se cumple *máximo* una de las tres relaciones  $P(x, y)$ ,  $P(y, x)$  e  $I(x, y)$ .

**Axioma J2:**  $I$  es una relación de igualdad.

**Axioma J3:**  $P$  es una relación transitiva.

Esta formulación permite que dos alternativas  $x, y \in X$ , para las cuales no se cumple ninguna de las tres relaciones (de indiferencia, de preferencia y de su inversa), puedan ser consideradas incomparables.

De esta forma, la *estructura completa de preferencia*  $R = \langle P, I, J \rangle$  se completa por medio de la *relación de incomparabilidad*  $J$ , una relación simétrica y no reflexiva.

Por lo tanto, el predicado representado por  $R = \langle P, I, J \rangle$  se descompone en tres situaciones básicas, donde para todo  $x, y \in X$ , se cumplen las siguientes propiedades (ver por ejemplo [100], [101], [115]), tal que  $R^{-1}(x, y) = R(y, x)$  y  $R^d(x, y) = \neg(R^{-1}(x, y))$ .

**Propiedad R1:**  $P(x, y) = R(x, y) \cap R^d(x, y)$ .

**Propiedad R2:**  $I(x, y) = R(x, y) \cap R^{-1}(x, y)$ .

**Propiedad R3:**  $J(x, y) = \neg R(x, y) \cap R^d(x, y)$ .

**Propiedad R4:**  $P(x, y) \cup I(x, y) = R(x, y)$ .

**Propiedad R5:**  $P(x, y) \cup I(x, y) \cup P^{-1}(x, y) = R(x, y) \cup R^{-1}(x, y)$ .

**Propiedad R6:**  $P(x, y) \cup J(x, y) = R^d(x, y)$ .

Entonces se encuentra que la inclusión de la incomparabilidad como una relación básica en la estructura de preferencia ha sido explorada dentro del mismo marco de la teoría de la utilidad (véase [12], [13]), donde se consigue igualmente demostrar la existencia de una función de utilidad sobre un conjunto parcialmente ordenado de alternativas  $X$ , mas no su unicidad. Esto es, la función de utilidad no es única, pues para dos alternativas incomparables, cualquier función arbitrariamente definida sobre éstas puede representar una utilidad.

De este modo, si  $x$  es preferido a  $y$ , entonces  $u(x) > u(y)$ , pero la implicación inversa ya no es directa (a diferencia de los sistemas  $U1-U3$  y  $S1-S7$ ), dado que  $\mathbb{R}$  posee un orden lineal y las alternativas solo tienen un orden parcial. Como resultado, se tiene que es posible encontrar de vuelta el orden de preferencia si y sólo si se conoce el conjunto de todas las funciones de utilidad [12].

Este problema se puede formular también examinando la relación entre un orden total o lineal  $L$  y un orden parcial  $P$  (como puede ser el orden correspondiente a determinado conjunto de alternativas). Desde esta perspectiva (ver por ejemplo [36], [131]), si  $P$  y  $L$  están ambos definidos sobre el mismo conjunto de elementos, y si todo par ordenado en  $P$  ocurre en  $L$ , entonces se dice que  $L$  es una extensión lineal de  $P$ . Entonces, se tiene que todo  $P$  posee una extensión lineal  $L$ , y además, si  $x$  e  $y$  son dos elementos incomparables en  $P$ , entonces existe una extensión  $L_1$  en que se cumple que  $x < y$ , y otra extensión  $L_2$  en que se cumple que  $y < x$ .

Además, dada una colección  $\mathfrak{R}$  de órdenes lineales definidos sobre  $X$ , se dice que un orden parcial  $P$  es *realizado* por  $\mathfrak{R}$  si, y sólo si, para cualquier  $x, y \in X$ , si es cierto que  $x < y$  en  $P$ , entonces se cumple que  $x < y$  en todo orden lineal de la

colección  $\mathfrak{R}$ . Entonces, si  $P$  es un orden parcial sobre  $X$ , existe una colección  $\mathfrak{R}$  de órdenes lineales sobre  $X$  que realizan  $P$ , y la *dimensión* de  $P$  es el mínimo entero positivo  $t$  para el cual existe  $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_t\}$  donde  $P = \bigcap \mathfrak{R} = \bigcap_{i=1}^t L_i$  (véase [36], [62], [131], [152]).

De este modo, mediante la introducción de la relación de incomparabilidad, se examina un orden parcial  $P$  como la realización de una colección de extensiones que mantienen el orden de los elementos comparables, pero que reversan la situación de los elementos incomparables [131]. En este sentido, el orden de preferencia entre distintas alternativas no tiene porqué ser invariante a través de distintos contextos (tal como se sostiene en [40], [75], [89] o [138]).

Por ejemplo, si se cuenta con un conjunto de alternativas  $X = \{x, y\}$ , tal que  $x$  es preferida a  $y$  en un contexto representado por  $L_1$ , y en otro contexto  $L_2$ ,  $y$  es preferida a  $x$ , entonces se tiene que el orden en  $X$  varía según si el contexto es  $L_1$  o  $L_2$ . De donde se concluye que  $x$  e  $y$  son incomparables.

Nótese entonces que cuantos más elementos incomparables existan, la dimensión del orden parcial tiende también a ser mayor. Esto refleja la importancia de identificar los elementos incomparables, pues permiten entender la complejidad del proceso de decisión y de la construcción del orden de preferencia sobre  $X$ .

Como resultado, la inclusión de la incomparabilidad en la estructura de preferencia implica un marco teórico más general y flexible que el que se tiene en los modelos clásicos de la utilidad. Por ello, se deben examinar propuestas alternativas que permitan una mayor operatividad, frente a problemas de decisión donde los estados epistémicos del individuo exigen tratar con situaciones de preferencia menos

rígidas o nítidas. A continuación se repasan las bases de lo que se conoce como la teoría de comparabilidad parcial.

## 2.2 La teoría de la comparabilidad parcial (PCT)

A partir de la teoría clásica de la decisión y de la utilidad [119], [141], [144], y ante la necesidad de una representación más realista de las preferencias, se genera un interés por diseñar modelos menos restrictivos para representar la decisión racional bajo incertidumbre (véase por ejemplo [85], [117]). De este modo, se presta mayor atención a diseños que utilicen la información disponible para representar situaciones observables y verificables, permitiendo un proceso dialéctico de aprendizaje entre la teoría y la experiencia.

Por ello, es necesario construir primero los conceptos que permitan representar las situaciones que ocurren en el mundo real, donde el conocimiento no es del todo perfecto y puede existir un cierto tipo (relacional) de incertidumbre, sobre si una alternativa es estrictamente preferida a otra, igual de buena o si son incomparables; o también donde los criterios o puntos de vista que sirven para comparar las opciones generan conflictos que deben ser identificados y resueltos.

En este sentido, la teoría de la comparabilidad parcial (PCT) [118] establece que la comparación entre cualquier par de alternativas puede generar alguna de las siguientes situaciones básicas de decisión:

- *Indiferencia*
- *Preferencia estricta*
- *Preferencia global*

- *Incomparabilidad*

Luego, en referencia a un conjunto de alternativas (acciones potenciales [116]), el individuo identifica una situación básica o una combinación de dos o tres de las cuatro situaciones fundamentales de decisión.

Por lo tanto, la PCT introduce dos métodos para representar las preferencias de un individuo, donde la preferencia intransitiva y la incomparabilidad no se interpretan como expresiones *irracionales* o *inconsistentes*, sino como situaciones básicas e irreducibles de preferencia. El primero se define como un *sistema relacional fundacional de preferencia* [116], donde se asigna una, y sólo una, de las relaciones fundamentales, para cada par de alternativas en  $X$ . El segundo se define como un *sistema relacional combinado de preferencia* [116], donde se identifica *al menos dos* de las relaciones anteriormente mencionadas.

### 2.2.1 Situaciones de preferencia básicas y compuestas de la PCT

Como se ha visto, la CPT define cuatro relaciones fundacionales o básicas de preferencia [118]. Así pues, se tiene que una situación de indiferencia entre dos alternativas  $x$  e  $y$ , se representa por medio de la relación simétrica y reflexiva  $I(x, y)$ ; una situación de preferencia estricta, por medio de la relación asimétrica y no reflexiva  $P(x, y)$ ; una situación donde es imposible distinguir entre indiferencia y preferencia estricta, se representa mediante la relación de preferencia global  $Q(x, y)$ ; y una situación de conflicto comparativo, por medio de una relación de incomparabilidad  $J(x, y)$ , simétrica y no reflexiva.

De este modo, la incomparabilidad representa una situación donde no se toma una posición definida sobre la comparación entre  $x$  e  $y$ , sin ser indiferente entre las dos,

y la preferencia global representa una situación donde no es posible discriminar o diferenciar sin ambigüedad entre la indiferencia y la preferencia [116]. Además, no se impone transitividad sobre  $\langle P, I, Q, J \rangle$ . La razón por la cual no se impone transitividad sobre la preferencia estricta  $P$  descansa en la consideración de distintos criterios o dimensiones [73], lo cual permite a su vez examinar las denominadas *inconsistencias* por la intransitividad de las preferencias (sobre un tratamiento más detallado acerca de la intransitividad de las preferencias, ver por ejemplo [40], [89], [138]).

Por ejemplo, si se evalúan las alternativas  $x, y, z \in X$  por medio de cuatro criterios  $A, B, C$  y  $D$ , tal que  $x$  es valorada según  $A$  y  $B$ ,  $y$  según  $B$  y  $C$ , y  $z$  según  $C$  y  $D$ , entonces la valoración conjunta de  $x$  e  $y$  se obtiene por medio del criterio  $B$ , tal que  $P(x, y)$  se cumple bajo  $B$ , mientras que la de  $y$  con  $z$  se obtiene por medio de  $C$ , donde  $P(y, z)$  se cumple bajo  $C$ . Por lo tanto, si se aceptara la transitividad de  $P$ , esto implicaría  $P(x, z)$ , pero no se cuenta con criterio alguno para comparar  $x$  y  $z$ , por lo que solo se puede afirmar  $J(x, z)$ .

En cuanto a la combinación de dos o tres de las cuatro situaciones básicas de decisión, se destacan algunas combinaciones de interés para representar el estado epistémico de un individuo con dificultades para reconocer la mejor opción [118]:

**Ausencia de preferencia:** No existen argumentos nítidos positivos para justificar preferencia estricta o global entre las dos alternativas, y no hay poder de discriminación entre  $I(x, y)$  y  $J(x, y)$ .

**Presencia de preferencia:** Existen razones nítidas y positivas para justificar preferencia estricta o global por alguna de las dos alternativas en comparación, pero no hay poder de discriminación entre  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$ .

**Presunta preferencia:** Existen razones nítidas y positivas para justificar la preferencia global por una alternativa o la indiferencia entre las dos, pero no hay poder de discriminación entre  $Q(x, y)$  e  $I(x, y)$ .

**Preferencia conflictiva:** Existen argumentos nítidos y positivos para justificar preferencia estricta por una alternativa o incomparabilidad entre las dos, pero no hay poder de discriminación entre  $P(x, y)$  y  $J(x, y)$ .

**Posible preferencia:** Existen argumentos nítidos y positivos para justificar que hay presencia de preferencia o presunta preferencia sobre una alternativa pero no hay poder de discriminación entre preferencia estricta, preferencia global e indiferencia.

Esta es una primera propuesta sobre el diseño de un modelo *aproximado* a una realidad incierta, por el contrario del orden total que modela la realidad con absoluta certeza, bajo un ideal pre-existente e inaccesible. El punto principal es que, en situaciones reales, las preferencias no son siempre nítidas, en el sentido en que no siempre es posible diferenciar perfectamente la relación básica que represente determinada situación de decisión.

Entonces, las situaciones relacionales deben ser construidas y aprendidas, por lo que pueden existir conflictos, dudas y ambigüedades entre éstas. Es precisamente en este sentido que tanto el sistema relacional básico como el combinado permiten representar situaciones naturales de incertidumbre y conflicto en el proceso de decisión del individuo.

### 2.2.2 Representación numérica de los órdenes de preferencia

La PCT proporciona un marco teórico donde es posible reflejar, de manera general, un tipo de conocimiento parcial y ambiguo, donde la transitividad y la absoluta discriminación entre las situaciones de preferencia no son del todo verificables. De este modo, esta teoría propone construir una función que permite valorar cada alternativa según determinado criterio, tomando en cuenta que no se tiene un conocimiento perfecto sobre todas sus posibles consecuencias. De esta manera, con respecto a un criterio en particular, se examina la presencia de preferencia estricta, preferencia global o indiferencia.

Por ejemplo, sea que para cierto par de alternativas  $x, y \in X$ , no existen argumentos positivos y nítidos para diferenciar entre preferencia estricta, preferencia global o indiferencia. Entonces, se puede examinar el poder de discriminación que tiene determinado criterio  $g$  para identificar una buena opción entre todas las disponibles. De esta manera, la percepción sobre los atributos positivos de una alternativa  $x \in X$  se representa por medio de una función  $g$ , tal que su valor asociado está dado por  $g(x)$ .

Entonces se pueden elegir dos funciones  $q$  y  $p$ , tal que si la diferencia de  $g(x) - g(y)$  es positiva y no es mayor que  $q(g(y))$ , se tiene que no es una diferencia significativa y por lo tanto existe indiferencia entre  $x$  e  $y$ . Por otro lado, dicha diferencia solo es significativa si es mayor que  $p(g(y))$ , caso en el cual se dice que existe preferencia estricta de  $x$  sobre  $y$ . En cambio, si esta diferencia se encuentra entre  $q(g(y))$  y  $p(g(y))$ , se dice que existe preferencia global de  $x$  sobre  $y$ . Esta idea se recoge en la siguiente definición de un *pseudo-criterio* [118].

**Definición PsC [118]:** Para todo  $x, y \in X$ , un pseudo-criterio es una función  $g$  cuyo poder de discriminación se caracteriza a partir de un umbral de indiferencia  $q$  y un umbral de preferencia  $p$ , de la siguiente manera:

$$I(x, y) \Leftrightarrow -q(g(x)) \leq g(x) - g(y) \leq q(g(y)),$$

$$Q(x, y) \Leftrightarrow q(g(y)) < g(x) - g(y) \leq p(g(x)),$$

$$P(x, y) \Leftrightarrow p(g(y)) < g(x) - g(y),$$

donde se cumple que,

$$\frac{q(g(y)) - q(g(x))}{g(y) - g(x)} \geq -1,$$

$$\frac{p(g(y)) - p(g(x))}{g(y) - g(x)} \geq -1.$$

Así pues, un pseudo-criterio permite asignar una única relación entre  $P$ ,  $I$  o  $Q$  a cualquier par de alternativas, definiendo determinados valores límite, por medio de los umbrales  $p$  y  $q$ , para representar sobre la recta numérica, las distintas situaciones relacionales de preferencia.

De este modo se puede representar el caso de un orden total, para una función  $g$  valorada en  $\mathbb{R}$  (a la manera de la utilidad), y asignando a los umbrales  $p$  y  $r$  valores nulos, tal que

$$\begin{cases} I(x, y) \Leftrightarrow g(x) = g(y), \\ P(x, y) \Leftrightarrow g(x) > g(y). \end{cases} \quad (4)$$

Este orden (4) es simétrico y transitivo para  $I(x, y)$  y asimétrico y transitivo para  $P(x, y)$ , donde, para cada par  $x, y \in X$ , se satisface una única relación de la estructura  $R = \langle P, I \rangle$ .

Por lo tanto, en base a la Definición *PsC*, se define un *pseudo-orden* [118], como un sistema relacional de preferencia dado por las tres relaciones binarias  $P, Q, I$ , definidas éstas sobre un conjunto finito de alternativas  $X$ , tal que las tres funciones  $g, q, p$ , interpretadas respectivamente como pseudo-criterio, umbral de indiferencia y umbral de preferencia, existen si, y sólo si, se cumplen la siguientes condiciones.

**Axioma Ps1 [118]:** La estructura  $\langle P, Q, I \rangle$  es un *sistema relacional fundacional de preferencia*, esto es, si para todo  $x, y \in X$ , se verifica una única situación entre  $I(x, y), Q(x, y), Q(y, x), P(x, y)$  o  $P(y, x)$ .

**Axioma Ps2 [118]:**  $\langle P \cup Q, I \rangle$  es un semi-orden sobre  $X$ .

**Axioma Ps3 [118]:**  $\langle P, \hat{P} \rangle$  es un semi-orden sobre  $X$ , donde se cumple  $\hat{P}(x, y)$  si y sólo si no se cumple  $P(x, y)$  ni tampoco  $P(y, x)$ .

**Axioma Ps4 [118]:** Para todo  $x, y, z, w \in X$ , se cumple lo siguiente:

$$P(x, y) \cap I(y, z) \cap Q(z, w) \Rightarrow P(x, w),$$

$$Q(x, y) \cap I(y, z) \cap P(z, w) \Rightarrow P(x, w),$$

$$P(x, y) \cap Q(y, z) \cap I(z, w) \Rightarrow P(x, w),$$

$$I(x, y) \cap Q(y, z) \cap P(z, w) \Rightarrow P(x, w).$$

Todos estos conceptos entran en juego para definir el método de la PCT en la modelización de las preferencias de un individuo [117]. Dicho método identifica situaciones de preferencia parcial, no necesariamente transitivas, donde además se incluye la preferencia global como una situación relacional básica, esto es, reconociendo la ambigüedad que puede existir al intentar diferenciar la parte estricta de preferencia con la indiferencia. A continuación se explora un principio que tiene una gran relevancia para la presente investigación, mediante el cual se puede seguir examinando la metodología de la PCT.

### **2.2.3 Principio de concordancia-discordancia (C-D)**

La ausencia o presencia de preferencia, siguiendo la propuesta de la PCT, puede referirse a la identificación de distintas situaciones básicas o combinadas de preferencia, tal como se ha visto anteriormente (Secciones 2.2.1 y 2.2.2). Por ejemplo, se puede verificar una relación básica de preferencia global o una relación compuesta de ausencia o presencia de preferencia, presunta o posible preferencia o preferencia conflictiva.

En este sentido, el principio de *concordancia-discordancia* (C-D) [117] permite explotar la información concordante acerca de alguno de estos tipos de preferencia, para determinado par de alternativas  $x, y \in X$ , y contrastarla con la información discordante que exista sobre los mismos. Entonces es posible contruir distintos tipos de relaciones de preferencia de acuerdo con la información disponible, con el fin de entender lo mejor posible la situación del individuo ante un problema de decisión.

Por ejemplo, si se quiere examinar la información disponible, concordante y discordante, acerca del sistema de alternativas de  $X$ , se pueden construir tres pesos

de decisión como los siguientes (el procedimiento completo sobre cómo obtener estos pesos se puede encontrar en [116], [117]). Primero, un peso asociado con todos los criterios donde  $x$  es preferida a  $y$ ,  $\omega^G$ , luego, otro asociado con todos los criterios donde  $y$  es preferida a  $x$ ,  $\omega^L$ , y finalmente, otro para los criterios en los que  $x$  e  $y$  son indiferentes,  $\omega^I$ .

Luego, la concordancia se refiere a los argumentos a favor de que  $x$  sea preferida a  $y$ . Esto es, si  $\omega^G$  es significativo, entonces mayor será la concordancia en favor de la preferencia de  $x$  sobre  $y$ . Y al mismo tiempo, se debe prestar atención a los criterios que son discordantes, con el objeto de incluir en el proceso de decisión toda la información disponible y relevante para su correspondiente interpretación.

Por lo tanto, la discordancia se examina de acuerdo con la importancia de los criterios donde  $x$  es rechazada. En nuestro ejemplo, como no hay explícitamente un peso asociado con este tipo de criterios, se interpreta que el peso de los criterios donde  $x$  es rechazada corresponde con  $\omega^L$ , tal que si éste es mayor que  $\omega^G$ , mayor será la discordancia en contra de que  $x$  es preferida a  $y$ . De este modo, la evaluación global sobre la información concordante y discordante, acerca de la situación de preferencia para determinado par de alternativas  $x, y \in X$ , se consigue por medio del examen conjunto de  $\omega^G$  y  $\omega^L$  [117].

En conclusión, la PCT se presenta como una teoría de *ayuda a la decisión* [118], [133], de naturaleza distinta a la de la teoría de la utilidad, donde se valora cada alternativa de acuerdo con un *ranking* de preferencia, lo cual se asocia más con la *toma de la decisión* [39]. En la primera (ayuda a la decisión), se identifica la información relevante para resolver situaciones conflictivas, de forma flexible y

aplicada a problemas prácticos, donde no siempre es posible encontrar un óptimo o una alternativa absolutamente mejor que las demás.

En la segunda (toma de la decisión), el valor asignado por la función efectivamente identifica una solución para el problema, pero no toma en cuenta consideraciones que bien pueden quedar por fuera de su dominio. Estas consideraciones no son por ello menos importantes, según el punto de vista del individuo y su percepción sobre las posibles consecuencias, positivas y negativas, que cada alternativa desencadena.

Se advierte que la presente investigación se enmarca bajo la primera interpretación de ayuda a la decisión, examinando explícitamente éste proceso como de aprendizaje sobre las preferencias de cara a la decisión. Este enfoque es el resultado de asumir que el individuo desarrolla un contraste entre cada alternativa de acuerdo con su estado del conocimiento, evaluando y descubriendo qué tan fiable es la información disponible, para entonces encontrar un procedimiento que permita identificar las mejores opciones disponibles.

A continuación se revisa un modelo axiomático para la PCT [135], donde a partir del principio C-D [133], se consigue una aproximación cualitativa sobre las distintas situaciones de decisión, obteniendo una cierta estructura relacional conocida como la estructura PCT [135], [136].

### **2.3 Un modelo axiomático para la PCT**

El marco proporcionado por los principios de decisión de la PCT [107], [116], [117], ha sido formalizado por medio de la *lógica de cuatro valores de Belnap* y el *lenguaje DDT* [132], [134], [135], con el objeto de incentivar y permitir su adecuada implementación en la teoría de la decisión. Este marco resalta la intuición

de que el problema de decisión siempre recae sobre argumentos positivos y negativos, de acuerdo con el principio C-D [133].

Bajo esta perspectiva se reconoce como punto relevante, que la formulación del problema de decisión, junto con su correspondiente descripción de las alternativas, determina el tipo de procedimiento mediante el cual es realizable la agregación de los distintos trozos de información disponibles. Como consecuencia, se tiene que distintos procedimientos implican distintos resultados (este punto se retomará en el Capítulo 3 cuando se presente el espacio semántico general de preferencia). Por ello, desde una *perspectiva constructivista*, la teoría de la decisión debe tomar en cuenta no solo el proceso mediante el cual se elige una alternativa en particular, sino también la *pertinencia* del procedimiento de agregación, de acuerdo con el tipo de información disponible.

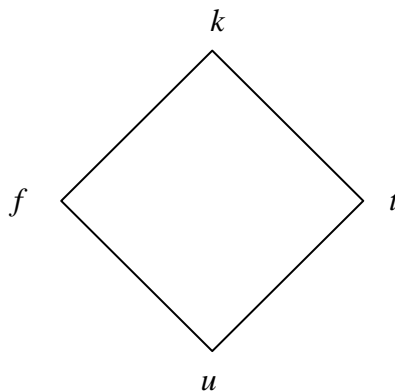
### **2.3.1 Modelo cuatro-valorado de la PCT (4-PCT)**

La intuición detrás del modelo cuatro-valorado de la PCT (4-PCT) es precisamente la de considerar no solo las razones o argumentos a favor de una cierta alternativa, sino también, en base al principio C-D, tomar en cuenta las razones para rechazar dicha alternativa. De este modo, a partir de un sistema axiomático que representa explícitamente las relaciones de preferencia, sus autores [135] se proponen evitar representaciones netamente numéricas que transformen la aproximación cualitativa en una netamente cuantitativa (un problema que surge de la libre interpretación sobre la primera propuesta de la PCT [116], [117]).

En este sentido, la motivación para introducir este modelo, junto con la lógica de cuatro valores y el lenguaje *DDT* [132], es la de permitir la representación de situaciones relacionales donde existe indecisión o incertidumbre de distintos tipos

(por falta o por exceso de información). Entonces, además de formular un modelo general de preferencia para la ayuda a la decisión, esta aproximación cuatro-valorada permite diferenciar, en una situación de no-preferencia, dos estados epistémicos distintos: uno, como consecuencia de ignorancia o falta de información, y el otro, por exceso de información contradictoria.

De esta forma, se define una estructura parcialmente ordenada (*lattice*) con respecto a cuatro estados del conocimiento del individuo [132] (para una imagen de esta estructura o *lattice*  $L_4$ , ver Figura 1). Estos son, el valor de *verdad* ( $t$ ), el de *contradicción* ( $k$ ), el de *desconocimiento* ( $u$ ) y el de *falsedad* ( $f$ ).



**Figura 1:** Estructura *lattice* cuatro-valorada ( $L_4$ ).

- El estado de verdad ( $t$ ) se presenta cuando existen razones positivas y no existen razones negativas para afirmar que una proposición  $A$  se cumple.
- El estado de contradicción ( $k$ ) se presenta cuando existen tanto razones positivas como negativas para afirmar que  $A$  se cumple.
- El estado de desconocimiento ( $u$ ) ocurre cuando no hay razones positivas ni negativas para afirmar que  $A$  se cumple.

- El estado de falsedad ( $f$ ) ocurre cuando no hay razones positivas pero sí hay razones negativas para afirmar que  $A$  se cumple.

Esta caracterización se desarrolla en base al language *DDT* [132], donde se introduce una *negación débil* ( $\sphericalangle$ ) y se distingue entre la *negación fuerte* ( $\neg$ ) y el *complemento* ( $\sim$ ), de acuerdo con los valores de la Tabla 1. Básicamente, la negación débil invierte la existencia de los argumentos negativos, la negación fuerte invierte únicamente los valores de verdad y falsedad y el complemento invierte tanto los valores de verdad y falsedad como de incertidumbre por falta de información y por exceso de la misma.

$R$	$\sphericalangle R$	$\neg R$	$\sim R$
$t$	$k$	$f$	$f$
$k$	$t$	$k$	$u$
$u$	$f$	$u$	$k$
$f$	$u$	$t$	$t$

**Tabla 1:** Tablas de verdad para la negación débil, fuerte y complemento.

Formalmente, sean  $R^+$  y  $R^-$  las representaciones nítidas (no graduables), tal que  $R^+, R^- \in \{0,1\}$ , para el predicado de preferencia  $R$ , “es al menos tan buena como”, y de no-preferencia  $\neg R$ , “no es al menos tan buena como”, respectivamente. Entonces se obtienen cuatro conjuntos como partición del universo del discurso, de la siguiente manera,

$$R^t = R^+ \cap \sim R^-,$$

$$R^k = R^+ \cap R^-,$$

$$R^u = \sim R^+ \cap \sim R^-,$$

$$R^f = \sim R^+ \cap R^-,$$

donde  $R^t$ ,  $R^k$ ,  $R^u$ ,  $R^f$  representan los estados de verdad, contradicción, desconocimiento y falsedad, respectivamente, del predicado  $R$  dentro del universo  $X \times X$ . De esta forma se tiene que  $R \in \{t, k, u, f\}$ , donde,

$$R^t = \{(x, y) \in X \times X \mid R(x, y) = t\} = R^+ \cap \sim R^-.$$

De este modo se cumplen las siguientes propiedades características del modelo 4-PCT,

$$R^t \cup R^k = R^+,$$

$$R^k \cup R^f = R^-,$$

$$R^k \cap R^u = \emptyset,$$

$$R^t \cup R^k \cup R^u \cup R^f = X \times X.$$

Luego, a partir de la extensión de cuatro valores de  $R$  y de su inversa  $R^{-1}$ , siguiendo el axioma de *Independencia de Alternativas Irrelevantes* [135], se introduce [135] una estructura de preferencia completa, compuesta por diez relaciones básicas, la cual conforma un *sistema relacional fundacional de preferencia, bien fundado y maximal* [118], [135].

**Definición PCT [135]:** Dado un conjunto de alternativas  $X$ , el lenguaje *DDT* (donde el operador  $\wedge$  se toma como el mínimo y los distintos tipos de negación están dados en la Tabla 1), y la relación característica  $R(x, y)$ , la cual representa el predicado “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ”, para cualquier  $(x, y) \in X$ , la *estructura de preferencia PCT*  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$  se define a continuación:

- Indiferencia:  $i(x, y) \equiv R(x, y) \wedge R(y, x)$ ;
- Indiferencia débil:  $j(x, y) \equiv \approx R(x, y) \wedge \approx R(y, x)$ ;
- Semi-indiferencia:  $h(x, y) \equiv R(x, y) \wedge \approx R(y, x)$ ;
- Preferencia estricta:  $p(x, y) \equiv R(x, y) \wedge \sim R(y, x)$ ;
- Preferencia débil:  $q(x, y) \equiv \approx R(x, y) \wedge \sim R(y, x)$ ;
- Semi-preferencia:  $k(x, y) \equiv R(x, y) \wedge \sim \approx R(y, x)$ ;
- Semi-preferencia débil:  $l(x, y) \equiv \approx R(x, y) \wedge \neg \approx R(y, x)$ ;
- Incomparabilidad:  $r(x, y) \equiv \sim R(x, y) \wedge \sim R(y, x)$ ;
- Incomparabilidad débil:  $u(x, y) \equiv \sim \approx R(x, y) \wedge \sim \approx R(y, x)$ ;
- Semi-incomparabilidad:  $v(x, y) \equiv \sim R(x, y) \wedge \sim \approx R(y, x)$ .

En resumen, a partir de la existencia o ausencia de argumentos positivos y negativos para sostener  $R(x, y)$ , el modelo 4-PCT le asigna un valor de verdad al predicado que ésta representa, de acuerdo con la extensión de cuatro valores:  $R^t, R^k, R^u, R^f$ . Entonces, con el fin de conseguir una estructura donde sea posible verificar situaciones intermedias entre aquellos cuatro valores de referencia, se revisa a continuación un modelo continuo para la PCT (denominado c-PCT).

### 2.3.2 Modelo continuo de la PCT (c-PCT)

Con el objeto de extender el modelo 4-PCT, tal que sea posible considerar situaciones intermedias entre  $\{t, k, u, f\}$ , se introduce el siguiente modelo continuo de la PCT (c-PCT). De este modo, se definen ahora dos funciones [108],

$$\mu_{R^+}(x, y), \mu_{R^-}(x, y): X \times X \rightarrow [0, 1],$$

de acuerdo con el grado de intensidad en que un par de elementos  $x, y \in X$  verifican el predicado de preferencia  $R^+$  y de no-preferencia  $R^-$ , respectivamente. De este modo,

$$R^+(x, y) = \left\{ \langle x, y, \mu_{R^+}(x, y) \rangle \mid x, y \in X \right\}$$

representa el grado en que se verifica  $R^+(x, y)$ , es decir, “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ”, tal que  $\mu_{R^+}(x, y) \in [0, 1]$ , y

$$R^-(x, y) = \left\{ \langle x, y, \mu_{R^-}(x, y) \rangle \mid x, y \in X \right\}$$

representa el grado en que se verifica  $R^-(x, y)$ , es decir, “ $x$  no es al menos tan buena como  $y$ ”, donde  $\mu_{R^-}(x, y) \in [0, 1]$ .

Intuitivamente,  $\mu_{R^+}$  y  $\mu_{R^-}$  representan el grado de creencia en  $R^+(x, y)$  y  $R^-(x, y)$ , respectivamente [105]. Por lo tanto, se necesita definir los cuatro valores  $\{t, k, u, f\}$  en términos de sus intensidades, por medio de una extensión continua donde sea cierto que [108],

$$R^t(x, y) = t(x^+, x^-) = T_1(x^+, N(x^-)),$$

$$R^k(x, y) = k(x^+, x^-) = T_2(x^+, x^-),$$

$$R^u(x, y) = u(x^+, x^-) = T_3(N(x^+), N(x^-)),$$

$$R^f(x, y) = f(x^+, x^-) = T_4(N(x^+), x^-),$$

donde  $x^+ = R^+(x, y)$ ,  $x^- = R^-(x, y)$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$  son *t-normas* continuas [121] (representando la conjunción) y  $N$  es una negación estricta definida sobre el intervalo unitario (una descripción más detallada sobre estos operadores continuos y la *teoría de conjuntos borrosos* [153] se pospone para la siguiente sección 2.4). De esta manera, la traducción continua de las propiedades características del modelo 4-PCT, para una *t-norma*  $T$  y una *t-conorma*  $S$  [121] (ambas continuas), donde  $S$  representa la disyunción, es la siguiente,

$$S(t(x^+, x^-), k(x^+, x^-)) = x^+,$$

$$S(k(x^+, x^-), f(x^+, x^-)) = x^-,$$

$$T(k(x^+, x^-), u(x^+, x^-)) = 0,$$

$$S(t(x^+, x^-), k(x^+, x^-), u(x^+, x^-), f(x^+, x^-)) = 1.$$

Entonces, la solución que se encuentra para que una extensión continua de  $\{t, k, u, f\}$  cumpla con las propiedades características del modelo, está caracterizada por las siguientes ecuaciones [108],

$$t(x^+, x^-) = T_1(x^+, n(x^-)), \quad (5)$$

$$k(x^+, x^-) = T_2(x^+, x^-), \quad (6)$$

$$u(x^+, x^-) = T_2(n(x^+), n(x^-)), \quad (7)$$

$$f(x^+, x^-) = T_1(n(x^+), x^-), \quad (8)$$

donde, para un automorfismo  $\varphi$  del intervalo unitario [43], [102],

$$T_1(x, y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(x), \varphi(y)\}) \text{ y}$$

$$T_2(x, y) = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0\}).$$

De este modo, se caracterizan los cuatro estados de conocimiento por medio de distintas intensidades de creencia, lo cual permite una transición continua entre ellos. Por lo tanto, los distintos estados pueden coexistir simultáneamente, a excepción, claro está, de los estados de desconocimiento y contradicción.

Se advierte que éste no es el único modelo continuo de la PCT que se encuentra en la literatura. Al respecto, existe una propuesta distinta [44], donde se examina una estructura similar a la del modelo c-PCT, pero en un marco puramente ordinal, como se presenta a continuación [44]:

$$t(x^+, x^-) = T_1(x^+, n(x^-)), \quad (9)$$

$$k(x^+, x^-) = T_1(x^+, x^-), \quad (10)$$

$$u(x^+, x^-) = T_1(n(x^+), n(x^-)), \quad (11)$$

$$f(x^+, x^-) = T_1(n(x^+), x^-). \quad (12)$$

Entonces, esta caracterización ordinal de los cuatro estados de conocimiento permite la coexistencia simultánea de todos ellos, por medio de sus distintas intensidades. Nótese también que esta solución no es una partición de  $X \times X$ , pues

la suma de las cuatro intensidades, correspondientes con  $\{t, k, u, f\}$ , no obtiene necesariamente la unidad (una completa comparación entre esta propuesta y el modelo c-PCT se puede encontrar en [105]).

Luego, si se combinan directamente los valores de  $R^t, R^k, R^u$  y  $R^f$ , para la relación de preferencia  $R$  y su inversa, por medio de la  $t$ -norma  $T_1$ , se obtiene una *estructura de preferencia c-PCT*, correspondiente con la de la Definición PCT, pero para el caso continuo. De este modo, se obtienen las diez relaciones especificadas en la Tabla 2 [44], [136].

$R^t, R^k, R^u, R^f$	$R^t(y, x)$	$R^k(y, x)$	$R^u(y, x)$	$R^f(y, x)$
$R^t(x, y)$	$i(x, y)$	$h(x, y)$	$k(x, y)$	$p(x, y)$
$R^k(x, y)$	$h(y, x)$	$j(x, y)$	$l(x, y)$	$q(x, y)$
$R^u(x, y)$	$k(y, x)$	$l(y, x)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$
$R^f(x, y)$	$p(y, x)$	$q(y, x)$	$v(y, x)$	$r(x, y)$

**Tabla 2:** Se definen diez situaciones de preferencia según la *estructura c-PCT*  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$ .

De esta manera, los modelos 4-PCT y c-PCT formalizan la primera propuesta de la PCT [116], obteniendo una estructura de preferencias flexible y representativa de las distintas situaciones de decisión del individuo. Primero, el modelo 4-PCT consigue formalizar las bases de la PCT, construyendo su estructura básica de preferencia (siguiendo la Definición PCT), dada por  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$ .

De este modo, se caracterizan 10 relaciones básicas que constituyen una estructura relacional, la cual expresa los distintos tipos de incertidumbre que puede existir al

identificar una, y sólo una, de las relaciones de  $\langle P, I, Q, J \rangle$ . Luego, se extiende este modelo a un marco continuo, por medio del modelo c-PCT, de tal manera que es posible considerar además, situaciones intermedias entre  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$ .

Entonces, aceptando el carácter continuo o *borroso* (*fuzzy*) de las preferencias, se examina a continuación la estructura completa de preferencia  $R = \langle P, I, J \rangle$ , de acuerdo con las propiedades R1-R6 (Sección 2.1.2), bajo el marco de la *teoría de conjuntos borrosos* [153].

## 2.4 Teoría de relaciones de preferencia borrosa

Una aproximación analítica al proceso de aprendizaje y decisión de un individuo, exige técnicas de análisis flexibles que permitan describir los distintos estados epistémicos que se pueden generar a partir de los casos ya identificados por las aproximaciones más clásicas. En particular, dada la estructura de preferencia  $R = \langle P, I, J \rangle$ , es posible examinar la intensidad de cada componente y caracterizar su participación en el predicado de preferencia representado por  $R$ .

En algunas primeras investigaciones sobre las intensidades de preferencia, como por ejemplo [39], [100], [107], la fuerza de preferencia representa el grado en que se prefiere una alternativa a otra, examinando la vaguedad inherente del proceso comparativo y permitiendo comparaciones entre las distintas relaciones. Esto con el fin de representar con más flexibilidad el proceso de decisión del individuo, y su impacto dentro de un ambiente social, político y económico (ver por ejemplo [6], [19], [41], [122]).

### 2.4.1 Aproximación a la teoría de conjuntos borrosos (*fuzzy sets*)

La *teoría de conjuntos borrosos* (*fuzzy set theory*, como se le conoce en inglés) [154], ofrece un marco más *general y flexible* que la lógica tradicional *booleana* [21], y por ello, es particularmente apropiada para representar un tipo de *sistema humanístico* [154] (social, político o económico) fuertemente influenciado por la subjetividad humana. Esto es, un sistema que permita entender de manera gradual el proceso de decisión por medio del aprendizaje de argumentos sobre la conveniencia de elegir una alternativa sobre otra.

Entonces, con el fin de representar situaciones aproximadas por naturaleza [94], la lógica borrosa ofrece técnicas que permiten examinar, de manera igualmente rigurosa, situaciones tolerantes con la subjetividad del pensamiento humano y su interpretación lingüística [154].

De esta forma, en la teoría de conjuntos borrosos [153], se representa un *conjunto borroso*  $R$  a partir de una familia de objetos  $X$ , tal que  $R = \{ \langle x, \mu_R(x) \rangle \mid x \in X \}$ , donde  $\mu_R(x) \in [0,1]$  es la intensidad o grado en que el objeto  $x \in X$  es compatible con el concepto representado por  $R$ . Entonces,  $\mu_R(x): X \rightarrow [0,1]$  es la función característica (de pertenencia) de  $R$  y de acuerdo con esta función, se constituye el significado de  $R$  [129], [130].

Se advierte que la función característica de un conjunto borroso se puede generalizar de la siguiente manera [60], [61]. Sea la función característica de  $R$  definida como  $\mu_R(x): X \rightarrow L$ , donde  $L$  es una estructura parcialmente ordenada, tal que se le asigna a cada objeto del universo  $X$  un valor  $\mu_R(x) \in L$ , según su intensidad de pertenencia al concepto representado por  $R$  (de este modo el intervalo

$[0,1]$  es un caso especial de  $L$ ). Este marco permite distintas interpretaciones sobre los estados epistémicos o situaciones relacionales que surgen de los valores de pertenencia, representando así la *inexactitud* natural de las palabras, relaciones y en general, de todo predicado graduable [129].

Dicha inexactitud puede identificarse de distintas formas, a partir de cierta semántica sobre las funciones de pertenencia y sus valores de intensidad [61]. Algunas de estas formas son la *vaguedad*, donde un concepto tiene una definición imprecisa, cuyos límites o fronteras no están nítidamente especificados; la *ambigüedad*, donde más de un concepto distinguible es descrito; o la *ambivalencia*, donde coexisten nociones antagónicas o conflictivas.

Entonces, el significado de un concepto o predicado borroso es susceptible de ser graduado, mediante su representación como un conjunto borroso  $R$ , primero, a partir del orden inducido por  $R$  sobre  $X$  y segundo, por medio del grado en el que  $x \in X$  es identificado como similar a  $R$  (verifica las propiedades de  $R$ ) de acuerdo con  $L$ . De forma análoga a como ocurre con un predicado unitario, un predicado binario borroso es una relación borrosa valorada igualmente en  $L$ , y todo predicado  $n$ -dimensional puede ser caracterizado por medio de una función  $P: X^n \rightarrow L$ .

#### 2.4.2 Operadores de lógica borrosa

Con el fin de trabajar con conceptos borrosos, es necesario definir la manera en que se relacionan entre ellos. Esto es, por medio de operadores que conservan ciertas propiedades características de la conjunción, la disyunción, la negación y la implicación entre conjuntos. Por lo tanto, se presentan a continuación los operadores de lógica borrosa, donde  $A, B...$  representan proposiciones cuyos

valores de verdad están dados por  $v(A)$ ,  $v(B)$ ..., los cuales toman valores en  $L = [0,1]$  [72], [121].

De esta manera, la conjunción [84], [121] se representa por medio de una función  $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  tal que se cumple que  $v(A \text{ y } B) = T(v(A), v(B))$ ; para todo  $x \in [0,1]$ , es cierto que  $T(0, x) = 0$  y que  $T(1, x) = x$ ; para todo  $x, y \in [0,1]$ ,  $T$  es simétrica, esto es, se cumple que  $T(x, y) = T(y, x)$ ; para cualquier  $x, y, z \in [0,1]$ ,  $T$  es asociativa, donde se cumple que  $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ ; y para cualquier  $0 \leq x \leq w \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq z \leq 1$ ,  $T$  es no decreciente con respecto a ambos argumentos, tal que es cierto que  $T(x, y) \leq T(w, z)$ .

A este tipo de funciones  $T$  se les denomina *t-normas* [121]. El origen de estas *t-normas* se encuentra en la teoría estadística sobre espacios métricos, donde se introducen como herramienta para generalizar la desigualdad triangular clásica. En este sentido, una *t-norma* es continua si la función  $T$  es continua en  $[0,1]$ , y es arquimedea si  $T(x, x) < x$  para todo  $x \in (0,1)$ .

Por otro lado, la disyunción [84], [121] se representa por medio de una función  $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  tal que es cierto que  $v(A \text{ o } B) = S(v(A), v(B))$ ; para todo  $x \in [0,1]$ , se cumple que  $S(0, x) = x$  y que  $S(1, x) = 1$ ; para todo  $x, y \in [0,1]$ ,  $S$  es simétrica, es decir, es cierto que  $S(x, y) = S(y, x)$ ; para cualquier  $x, y, z \in [0,1]$ ,  $S$  es asociativa, tal que se cumple que  $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ ; y para cualquier  $0 \leq x \leq w \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq z \leq 1$ ,  $S$  es no decreciente con respecto a ambos argumentos, esto es, se cumple que  $S(x, y) \leq S(w, z)$ .

A este tipo de funciones  $S$  se les denomina *t-conormas* [121]. Entonces, una *t-conorma* es continua si la función  $S$  es continua en  $[0,1]$  y es arquimedea si  $S(x,x) > x$  para todo  $x \in (0,1)$ . Es importante tener en cuenta que tanto en el caso de una *t-norma* como en el caso de una *t-conorma*, su elección depende de cada problema en particular.

En cuanto a la negación [43], [128], ésta se representa por medio de una función  $n: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , tal que  $n(0)=1$ ,  $n(1)=0$ . De este modo, si es cierto que  $v(A) < v(B)$  entonces se cumple que  $v(\text{no } A) > v(\text{no } B)$ , y se tiene que  $n$  es estrictamente decreciente; si  $v(\text{no } A)$  depende de forma continua de  $v(A)$ , entonces  $n$  es continua; y si es cierto que  $v(\text{no } (\text{no } A)) = v(A)$ , entonces  $n$  es involutiva, esto es, para todo  $x \in [0,1]$ , es cierto que  $n(n(x)) = x$ .

De esta forma, si  $n$  es estrictamente decreciente y continua, se tiene que  $n$  es una *negación estricta* y existe un único valor  $0 < v < 1$  para el cual es cierto que  $n(v) = v$ . Si además es involutiva, entonces  $n$  es una *negación fuerte*. Por lo tanto, el complemento de  $v(A) = x$  es una negación fuerte y está dado por  $n(x) = 1 - x$ .

Finalmente, la *implicación* [14], [43] se representa como una función  $I^\rightarrow : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  donde se cumple que  $v(A \text{ entonces } B) = I^\rightarrow(v(A), v(B))$ , tal que es cierto que  $I^\rightarrow(1,0) = 0$ ; para todo  $x \in [0,1]$ , se cumple que  $I^\rightarrow(0,x) = 1$  y que  $I^\rightarrow(x,1) = 1$ ; y para todo  $x, y, z \in [0,1]$ , si se cumple que  $x \leq z$ , entonces es cierto que  $I^\rightarrow(x,y) \geq I^\rightarrow(z,y)$ , y si es cierto que  $y \leq z$ , entonces se cumple que  $I^\rightarrow(x,y) \leq I^\rightarrow(x,z)$ . De este modo, una implicación cumple con la propiedad del

orden si se cumple que para todo  $x, y \in [0,1]$ , si es cierto que  $x \leq y$ , entonces es cierto que  $I^{\rightarrow}(x, y) = 1$ .

Luego de introducir estos operadores básicos, se examinan a continuación algunas leyes del pensamiento lógico [21] que permiten definir las *ternas de De Morgan* [43] y, en particular, un tipo *fuerte* de terna de De Morgan que tiene una gran importancia para la posterior especificación de un *modelo estándar de relaciones de preferencia borrosa*.

### 2.4.3 Ternas de De Morgan y las leyes del pensamiento lógico

A lo largo de la genealogía de la lógica *multi-valorada* [110], las leyes del pensamiento lógico *booleano* [21] han recibido especial atención, con el objeto de preservarlas, en la medida de lo posible, en el caso borroso o continuo. Este es el caso, por ejemplo, de las *leyes de De Morgan*, donde para una  $t$ -norma  $T$ , una  $t$ -conorma  $S$  y dos negaciones  $n_1$  y  $n_2$ , se cumplen [43],

$$n_1(S(x, y)) = T(n_1(x), n_1(y)) \text{ y}$$

$$n_2(T(x, y)) = S(n_2(x), n_2(y)).$$

De este modo, se define una *terna de De Morgan*  $(T, S, n)$  si, y sólo si, existe una  $t$ -norma  $T$ , una  $t$ -conorma  $S$  y una negación estricta  $n$ , que satisfacen [43][121],

$$n(S(x, y)) = T(n(x), n(y)). \quad (13)$$

Dicha terna de De Morgan es continua si  $T$  y  $S$  son funciones continuas en el intervalo unitario.

Por otro lado, algunas de las leyes clásicas que mayor atención han recibido a lo largo de la historia del pensamiento lógico y matemático son la *ley de la no-contradicción* y la *ley del tercero excluido*. En este sentido se encuentra un reconocido debate generado por la corriente *intuicionista* de principios de siglo XX [22], [23], que retó la corriente formalista, por medio del *principio constructivista*<sup>1</sup>, la aceptación de la ley de no-contradicción y el rechazo de la ley del tercero excluido [114] (manteniéndose dentro del mismo marco *booleano*).

Al respecto sólo se señala que para aquel intuicionismo [22], [71], la negación de una proposición  $A$  puede ser establecida si, y sólo si, a partir de la construcción  $A$  se consigue una contradicción. De este modo, el principio de no-contradicción es explícitamente su fuente de contenido para la negación, pero en cambio rechaza el principio del tercero excluido. Por el contrario, en la lógica borrosa, ninguno de estos principios se cumplen necesariamente [87], [110].

De esta manera, la ley de la no-contradicción puede ser enunciada como el principio de que "nada puede ser tanto  $A$  como no- $A$ " [110], es decir,

$$T(x, n(x)) = 0 \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

---

<sup>1</sup> El método constructivista del *intuicionismo de Brouwer y Heyting* [22], [23], [71] se centra en reconocer una afirmación matemática como una proposición expresada de la forma "he efectuado la construcción  $A$ " [71]. La negación matemática de esta afirmación dice por lo tanto, "he efectuado la construcción  $B$ , de la cual se deduce una contradicción al suponer que la construcción  $A$  se puede obtener" [71]. De modo contrario, aceptando el principio del tercero excluido, es posible afirmar una proposición  $A$  a pesar de no haber efectuado explícitamente su construcción.

Este enfoque intuicionista señala que existen objetos de estudio que requieren una forma lógica diferente a la clásica [71]. Esto es porque afirmar  $A$  o no- $A$  requiere de un método general para resolver todo problema, donde para cualquier proposición  $A$  se pueda concluir la demostración de  $A$  o de no- $A$ . El argumento intuicionista descansa en que como no se cuenta con dicho método (como se desprende de los resultados de indecidibilidad en sistemas formales-axiomáticos [59]), no es válido utilizar dicho principio.

Por ejemplo, considérese la siguiente forma de expresar el principio del tercero excluido, "no(no  $A$ )  $\rightarrow$   $A$ " [71]. La posición intuicionista lo cuestiona así, como que la prueba de la imposibilidad de la imposibilidad de una proposición no es en todo caso una prueba de la proposición en sí misma. Sin embargo, en el momento en que se afirma  $A$ , esto es, que se ha efectuado la construcción de  $A$ , se sigue entonces que es imposible que  $A$  sea imposible. Esto es, se rechaza "no(no  $A$ )  $\rightarrow$   $A$ " pero se acepta la implicación inversa, " $A \rightarrow$  no(no  $A$ )".

Y del mismo modo, la ley del tercero excluido puede ser formulado como que "todo debe ser  $A$  o no- $A$ " [110], es decir,

$$S(x, n(x)) = 1 \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Entonces, en la teoría de conjuntos borrosos, se tiene que el principio de no-contradicción se cumple para una  $t$ -norma continua  $T$  si, y sólo si, existe un automorfismo  $\varphi$  del intervalo unitario tal que [43],

$$T^L(x, y) = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0\}) \text{ y}$$

$$n(x) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)),$$

donde  $T^L$  es la  $t$ -norma de Lukasiewicz [87].

Del mismo modo, el principio del tercero excluido se cumple para una  $t$ -conorma continua  $S$  si, y sólo si, existe un automorfismo  $\varphi$  del intervalo unitario, tal que [43],

$$S^L(x, y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(x) + \varphi(y), 1\}) \text{ y}$$

$$n(x) \geq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

donde  $S^L$  es la  $t$ -conorma de Lukasiewicz [87].

Por lo tanto, se tiene que la única combinación posible entre  $T$ ,  $S$ , y  $n$  que permite preservar tanto el principio de contradicción como el del tercero excluido es,

$$T^L(x, y) = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0\}),$$

$$S^L(x, y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(x) + \varphi(y), 1\}),$$

$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

A esta combinación  $(T^L, S^L, n)_\varphi$  se le denomina una terna de De Morgan de tipo *fuerte* (bajo la estructura de Lukasiewicz), donde  $T^L$  y  $S^L$  son respectivamente la  $t$ -norma y la  $t$ -conorma de Lukasiewicz y  $n$  es una negación de tipo fuerte, definidas unívocamente a partir de un automorfismo  $\varphi$  [43], [95], [102].

Por último, es importante señalar otros dos tipos de ternas de De Morgan. La terna  $(T^p, S^p, n)_\varphi$ , denominada de tipo *estricto* o *probabilístico*, definida como,

$$T^p(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y)),$$

$$S^p(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x) \cdot \varphi(y)),$$

$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)),$$

y la terna  $(T^m, S^m, n)_\varphi$ , de tipo *max-min*, definida como,

$$T^m(x, y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(x), \varphi(y)\}),$$

$$S^m(x, y) = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}),$$

$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

En la próxima sección se examina un modelo estándar de relaciones de preferencia borrosa [43], [95], [140], donde se hace uso de las ternas de De Morgan definidas anteriormente y se caracterizan distintas representaciones funcionales para la estructura de preferencia  $R = \langle P, I, J \rangle$ .

#### 2.4.4 Modelo IA-SM de relaciones de preferencia borrosa

Como se ha visto, en la teoría de conjuntos borrosos [60], [61], [153], [154], un concepto o predicado graduable puede ser representado por medio de un conjunto borroso  $R$  y su correspondiente función característica. De este modo, se construye su significado de acuerdo con el orden que  $R$  induce sobre  $X$ , y en segunda instancia, por medio del grado en el que  $x \in X$  es identificado como similar a  $R$ .

Siguiendo estas pautas, una relación de preferencia es considerada un predicado binario, graduable en  $L=[0,1]$ , según la verificación en que cierto par de alternativas  $x, y \in X$  cumple con la propiedad, “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ”, y se define como,

$$R(x, y) = \{ \langle x, y, \mu_R(x, y) \rangle \mid x, y \in X \}.$$

De esta forma, se utiliza la representación funcional  $\mu_R(x, y)$ , tal que  $\mu_R(x, y) \in [0,1]$ , para caracterizar la situación de preferencia, en relación directa con la percepción y verificación del predicado en cuestión.

De esta manera, el problema principal para la teoría de preferencias borrosas se centra en definir en términos de la relación borrosa  $R$  las relaciones (también borrosas) de preferencia ( $P$ ), indiferencia ( $I$ ) e incomparabilidad ( $J$ ), de manera que se mantengan tantas propiedades de la teoría clásica como sea posible (ver por ejemplo [43], [56], [91]). En este sentido, una estructura de preferencias borrosas (como las desarrolladas en [102], [103], [140]), además de las tres relaciones básicas, incluye también los operadores lógicos que permiten representarlas en un ambiente borroso.

Entonces, debido a ciertas complicaciones que resultan de la directa aplicación de la lógica borrosa sobre la estructura de preferencia y las propiedades  $R1-R6$  (ver por ejemplo [2]), y con el fin de preservar tantas de estas propiedades como sea posible, se formula el siguiente modelo axiomático para la estructura  $R = \langle P, I, J \rangle$  y su correspondiente terna de De Morgan  $(T, S, n)_\phi$ . En primer lugar, los datos de entrada del modelo son las relaciones de preferencia  $R(x, y)$  y  $R(y, x)$ , donde  $R$  existe según el grado en que se verifica la propiedad de “ser al menos tan buena como”. De esta forma se definen los siguientes axiomas [43], [95].

**Axioma IA [43], [95]:** Para todo par de alternativas  $x, y \in X$ , se tiene que los valores de  $P(x, y)$ ,  $I(x, y)$  y  $J(x, y)$  dependen solamente de los valores de  $x' = R(x, y)$  y  $y' = R(y, x)$ . Se formula la existencia de las funciones continuas  $p, i, j: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $P(x, y) = p(x', y')$ ,  $I(x, y) = i(x', y')$  y  $J(x, y) = j(x', y')$ .

**Axioma PA [43], [95]:** Las funciones  $p(x', n(y'))$ ,  $i(x', y')$  y  $j(n(x'), n(y'))$  son no-decrecientes con respecto a ambos argumentos.

**Axioma SM [43], [95]:** Las funciones  $i(x', y')$  y  $j(x', y')$  son simétricas.

El axioma *IA* se le conoce por el nombre de *independencia de alternativas irrelevantes*, debido a que se asume que un tercer elemento no interfiere en la comparación de dos elementos distintos. De este modo las funciones  $p, i, j$  pueden ser explícitamente definidas de acuerdo con las respectivas situaciones relacionales de preferencia estricta, indiferencia e incomparabilidad.

El axioma  $PA$ , conocido por el nombre de *asociatividad positiva*, describe cada función de manera que mantengan el orden de sus argumentos, caracterizando su comportamiento de acuerdo con sus cotas generales. Se advierte que esta condición puede también expresarse a partir de una función estrictamente creciente  $S^*$ , tal que  $S^*(x', 0) = S^*(0, x') = x'$ , donde basta solo con asumir la asociatividad positiva de  $p$ , para garantizar asociatividad positiva también para  $i$  y  $j$  [95]. Por último, el axioma  $SM$  asume la simetría de la indiferencia,  $i$ , y de la incomparabilidad,  $j$ .

Entonces, si se traducen las tres propiedades clásicas  $R4$ - $R6$  que describen la descomposición de  $R$  según la estructura  $\langle P, I, J \rangle$ , por medio de una terna de De Morgan  $(T, S, n)_\varphi$ , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones [43], [95],

$$S(p(x', y'), i(x', y')) = x', \quad (14)$$

$$S(p(x', y'), i(x', y'), p(y', x')) = S(x', y'), \quad (15)$$

$$S(p(y', x'), j(y', x')) = n(x'). \quad (16)$$

En general, sea  $n$  una negación fuerte, si  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  satisface (14) y (16), entonces se identifican las siguientes cotas [43],

$$T^L(x', n(y')) \leq p(x', y') \leq T^m(x', n(y')), \quad (17)$$

$$T^L(x', y') \leq i(x', y') \leq T^m(x', y'), \quad (18)$$

$$T^L(n(x'), n(y')) \leq j(x', y') \leq T^m(n(x'), n(y')). \quad (19)$$

Si  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  satisface además (15), su solución se define de la siguiente forma [43],

donde  $i$  y  $j$  son mutuamente excluyentes,

$$p(x', y') = T^m(x', n(y')), \quad (20)$$

$$i(x', y') = T^L(x', y'), \quad (21)$$

$$j(x', y') = T^L(n(x'), n(y')). \quad (22)$$

De otro modo, si se asume asimetría sobre  $P$ , tal que si se cumple que  $P(x, y) > 0$  entonces es cierto que  $P(y, x) = 0$ , la solución para  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  que satisface (14) y (16) es la siguiente [43],

$$p(x', y') = T^L(x', n(y')), \quad (23)$$

$$i(x', y') = T^m(x', y'), \quad (24)$$

$$j(x', y') = T^m(n(x'), n(y')). \quad (25)$$

En cambio si la solución de  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  permite la verificación simultánea de sus distintas relaciones básicas, tal que  $T(p(x, y), p(y, x)) = T(i(x, y), j(y, x))$ , entonces se tiene que [140],

$$p(x', y') = T^p(x', n(y')), \quad (26)$$

$$i(x', y') = T^p(x', y'), \quad (27)$$

$$j(x', y') = T^p(n(x'), n(y')). \quad (28)$$

De esta manera, el modelo  $IA-SM$  permite la representación borrosa o graduada del predicado de preferencia y de sus relaciones básicas, a partir de los grados de intensidad correspondientes a los datos de entrada  $R$  y  $R^{-1}$ , y por medio de las funciones  $\langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\varphi$ .

Por lo tanto, este modelo encuentra distintas soluciones para la estructura  $R = \langle P, I, J \rangle$  y su representación continua, encontrando situaciones intermedias entre los componentes de preferencia estricta, indiferencia e incomparabilidad. Estas situaciones intermedias se refieren en cierta medida a la incertidumbre o ambigüedad que existe sobre las distintas situaciones de decisión (ver por ejemplo [48], [53], [54]), expresando la perspectiva subjetiva del individuo al evaluar el grado en que un par de alternativas verifican el significado de  $R$ .

Se recuerda que por el lado de la PCT, también se reconoce la ambigüedad que puede existir al querer identificar una situación de decisión por medio de una, y sólo una, de las relaciones  $\langle P, I, J \rangle$ . En dicha teoría, se define la relación básica de preferencia global  $Q$ , donde es imposible identificar separadamente la parte estricta de preferencia de la indiferencia. Además, se permite la existencia de una combinación de relaciones básicas para representar la situación de decisión de un individuo [116], [117], [118].

Se observa también otro punto en común entre el modelo  $IA-SM$  y la PCT. Recordando el sistema dado por las ecuaciones (6)-(8), se encuentra que el modelo  $IA-SM$  permite desarrollar una construcción elaborada a partir de dos referencias opuestas, una, acerca de los atributos positivos de  $x$  con respecto a  $y$ ,  $x'$ , y la otra, acerca de sus respectivos atributos negativos,  $y'$ . Por lo tanto, recordando la PCT y el principio C-D, se puede decir que esta caracterización permite examinar la discordancia sobre la intensidad de preferencia  $x'$ , por medio de la de  $y'$ .

En consecuencia, el hecho de que  $x'$  no sea creíble no implica que  $y'$  lo sea, coincidiendo con la intuición original de la PCT [116], [117], pues puede ser el caso que  $y$  sea, hasta cierto grado, estrictamente preferido a  $x$ ,  $p(y', x') > up$ , que

sean, hasta cierto grado, indiferentes,  $i(y', x') > u_i$ , o ahora también que sean, hasta cierto grado, incomparables,  $j(y', x') > u_j$ , donde  $u_p$ ,  $u_i$  y  $u_j$  representan respectivamente umbrales de preferencia, indiferencia e incomparabilidad.

Recapitulando, una vez se han expuesto las estructuras matemáticas que soportan el modelo de decisión de la PCT, desde el principio C-D hasta su modelo continuo c-PCT, y el modelo IA-SM, se ve la necesidad de construir un *espacio semántico* que permita examinar conjuntamente los distintos modelos de preferencia. Ello, no sólo para enmarcar el proceso de elección entre las alternativas, sino también para situar las distintas metodologías de agregación de los modelos, aplicables según la cualidad de la información y su correspondiente interpretación.

De este modo, la información con la que cuenta el individuo tiene una gran relevancia para la decisión, y por ello, también la tiene la estructura evaluativa sobre la cual se ordenan y evalúan las alternativas. Por lo tanto, un modelo que quiera dar respuesta a las situaciones de la realidad subjetiva del individuo, debe contar con una estructura evaluativa que le permita hacerlo de una manera completa y flexible.

De esta forma, en el próximo Capítulo 3, en la Sección 3.1, se explora el espacio evaluativo para un modelo de decisión, examinando la relación entre la representación borrosa o difusa [61], [130], [154] y la *bipolaridad* [35], [112] de la información. Luego, en la Sección 3.2, se presenta un *espacio general semántico de preferencia*, donde los distintos modelos de preferencia pueden ser conjuntamente examinados, encontrando un *vacío* en la modelización de preferencias. Este vacío motiva que en la Sección 3.3 se presente un nuevo modelo, extendiendo el sistema IA-SM, tal que la evaluación y agregación independiente de

afectos positivos y negativos permite construir una *estructura completa de preferencia-aversión* (P-A) (ver por ejemplo [49], [52]). Finalmente, en la Sección 3.4, es posible completar el espacio semántico y presentar algunos ejemplos.

### **Capítulo 3. Modelo de Preferencia-Aversión**

Desde una perspectiva subjetiva, la racionalidad del individuo y la información de la que éste dispone determinan la formulación y el desarrollo del problema de decisión. De este modo, la modelización de preferencias está enmarcada por el tipo de racionalidad con la que se caracteriza al individuo, la cual proporciona un determinado carácter semántico para los datos de entrada del modelo. Entonces se resalta la importancia de mantener la misma semántica a lo largo de todo el proceso, pues de esto depende que se obtenga una solución compatible y satisfactoria de acuerdo con las necesidades del individuo.

Por lo tanto, la estructura evaluativa del modelo, sobre la cual se ordenan y evalúan las alternativas, debe ser cuidadosamente especificada, con el fin de representar de manera completa las distintas situaciones de decisión a las que se puede ver enfrentado el sujeto. En este sentido, la riqueza semántica del conjunto de preferencias del individuo cobra una gran relevancia, pues permite expresar las condiciones naturales de subjetividad e inexactitud del conocimiento humano.

De esta forma, el significado del predicado de preferencia sobre el conjunto de alternativas no es algo fijo y único, sino por el contrario, es múltiple, graduable y está en continua formación. Entonces se sostiene que la construcción del significado obedece a un proceso dialéctico que explora polos opuestos [69], uno positivo acerca de lo que es similar, y otro negativo acerca de lo que es distinto [76], [99].

Por lo tanto, la *bipolaridad* [35], junto con la borrosidad [61], permiten representar un marco evaluativo donde el individuo debe responder satisfactoriamente ante situaciones de decisión inexactas o ambiguas [112]. De este modo, la información

disponible se interpreta de acuerdo con su valoración y su semántica particular, teniendo en cuenta que dicha interpretación ha de ser lo suficientemente flexible, con el fin de representar de manera *fiable* la subjetividad del individuo.

De esta manera, en la Sección 3.1, se propone un *marco evaluativo* para el modelo de decisión, donde se relacionan las tipologías de borrosidad y bipolaridad, de acuerdo con los atributos iniciales de la información. En la siguiente Sección 3.2, se propone además un *espacio general semántico de preferencia*, complementando así el marco evaluativo, para la interpretación y caracterización de los distintos modelos de preferencia. Luego, en la Sección 3.3, se propone un nuevo *modelo de preferencia-aversión* (P-A) [49], [51], donde es posible expresar y agregar de manera independiente las evaluaciones positivas de preferencia y las negativas de aversión.

En la Sección 3.4, se examinan distintas maneras de representar la incertidumbre subjetiva sobre el proceso de decisión, revisando la estructura básica del modelo P-A junto con el marco evaluativo propuesto en la Sección 3.1. Finalmente, en la Sección 3.5, se ilustra cómo el modelo P-A completa el espacio semántico de preferencia, y se examina dicho espacio por medio de la comparación entre los modelos *IA-SM*, *c-PCT* y *P-A*, además de una interpretación tipo B1.2 del modelo P-A con grados de relevancia, presentando por último algunos ejemplos.

### **3.1 Marco evaluativo borroso-bipolar**

En un problema de decisión, es importante identificar de manera formal y explícita el modo en que se agrega la información con la que cuenta el individuo. Para ello, es necesario interpretar su significado, con el fin de encontrar una respuesta

compatible con la formulación inicial del problema. Entonces se tiene que la estructura evaluativa sobre la cual se ordenan y evalúan las alternativas, es la principal herramienta de un modelo de decisión para llevar a cabo el correspondiente proceso de interpretación.

De este modo, se requiere especificar el significado de los distintos trozos de información, que al ser leídos por un modelo matemático de decisión, deben ser agregados conservando siempre su semántica original. Como se ha señalado en la Sección 2.4, el significado de un concepto o de un predicado en general, es naturalmente graduable y ambiguo, de manera que un modelo flexible debe dar cuenta de ésta condición, por medio de un marco evaluativo que permita representar distintas posibilidades interpretativas de la información.

Por lo tanto, se examina a continuación una cierta tipología de la borrosidad [60], [154], lo cual permite desarrollar un tratamiento matemático de la imprecisión de acuerdo con el tipo de información revelada por el lenguaje y las percepciones humanas. Esta aproximación permite representar explícitamente la vaguedad asociada con la construcción y especificidad de un predicado  $R$ , lo cual implica un cierto grado de incertidumbre sobre su interpretación. Por lo tanto, es necesario establecer ciertas condiciones mínimas, tal que se garantice que la información sea procesada de acuerdo con su semántica original.

### **3.1.1 Borrosidad e incertidumbre**

Como se ha visto en la Sección 2.4, el significado de un concepto, es naturalmente múltiple, graduable y vago, pues hay un grado de generalidad en cuanto a los objetos a los que éste puede hacer referencia. Esta vaguedad o ambigüedad,

simplemente refleja el hecho de que existe una multiplicidad de significados alternativos acerca de una misma representación formal [20], [54], [61].

De esta manera, la ambigüedad puede examinarse a partir de distintos tipos de borrosidad [154]. Un primer tipo de borrosidad (como el que se ha introducido en la Sección 2.4.1) permite estudiar la imprecisión conceptual y lingüística por medio de una función que asigna un único valor al grado de pertenencia  $\mu_R(x) \in [0,1]$ , según la intensidad en que el objeto  $x \in X$  satisface las propiedades del predicado  $R$ . Por otro lado, existe un segundo tipo de borrosidad, el cual permite examinar un tipo de imprecisión asociada tanto con palabras como con percepciones, por medio de una representación más suave y relacional que la que proporciona un único valor, asignando un número borroso (un conjunto borroso del primer tipo) según la verificación de  $x \in R$ .

Entonces, al examinar la borrosidad del primer tipo, se tiene que ésta permite el tratamiento de la vaguedad mediante el grado en que un objeto  $x \in X$  verifica las propiedades del predicado  $R$ , donde  $R$  encuentra su significado por medio de la función de pertenencia  $\mu_R(x): X \rightarrow [0,1]$ . En consecuencia, el valor asignado a cada objeto se puede interpretar de acuerdo a un orden que identifica los valores nítidos  $\{0,1\}$  con un grado de máxima exactitud, o certeza, y los valores intermedios con un menor grado de la misma.

Este orden de exactitud, concebido como un *orden secundario* de  $R$  sobre  $X$ , ha sido formalizado de distintas maneras, aunque una de las primeras propuestas es la que define el orden de borrosidad de la siguiente manera.

**Definición F1 [30]:** Una *medida de borrosidad*  $\beta(A)$ , se define para cualquier par de conjuntos borrosos  $A, B \in R^f(X)$ , donde  $R^f(X)$  es el conjunto de todos los conjuntos borrosos definidos sobre  $X$ , de acuerdo con las siguientes condiciones.

**Condición F1 [30]:**  $\beta(A) = 0$  si y sólo si  $A$  es un conjunto nítido, esto es, si y sólo si  $\mu_A(x) = 0$  o  $\mu_A(x) = 1$ .

**Condición F2 [30]:**  $\beta(A)$  tiene un valor máximo cuando  $\mu_A(x) = 0.5$  para todo  $x \in X$ .

**Condición F3 [30]:** Si  $\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq 0.5$  o  $0.5 \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x)$  entonces  $\beta(A) \leq \beta(B)$  y se dice que  $A$  es más exacto que  $B$ .

Sin embargo, no siempre es posible encontrar un grado de intensidad, dado por un único valor, para representar el grado de pertenencia de un objeto a un conjunto borroso. Como respuesta a esta dificultad, debida al tipo de información con la que se esté tratando, como por ejemplo si se trata con percepciones o emociones, se introduce un tipo de borrosidad de grado  $n$  [60], [154]. Esta propuesta permite representar la pertenencia de un objeto  $x \in X$  a  $R$  mediante un conjunto borroso de grado  $n-1$ , ganando así mayor expresividad que la que se obtiene por medio de un único grado de pertenencia.

De esta manera, un conjunto borroso del segundo tipo (borrosidad de segundo grado), está caracterizado por una función de pertenencia  $\psi_R : X \rightarrow F([0,1])$ , donde  $F([0,1])$  es el conjunto de todos los conjuntos borrosos en el intervalo  $[0,1]$ . De esta forma es posible expresar niveles más elevados de imprecisión o

inexactitud (asociados con la ignorancia natural del conocimiento), reteniéndola a lo largo del proceso de inferencia del individuo.

Esta aproximación es útil siempre que los métodos del primer tipo de borrosidad, de ahora en adelante borrosidad de tipo F1, sean insuficientes para expresar incertidumbre por inexactitud, como en el caso en que no haya consenso sobre las funciones de pertenencia de tipo F1. De este modo, el poder expresivo que proporcionan los métodos de razonamiento del segundo tipo de borrosidad, de ahora en adelante borrosidad de tipo F2, radica en que mantiene la incertidumbre original a lo largo del proceso de inferencia, de aprendizaje y de decisión, del individuo.

La genealogía de este tipo de borrosidad F2 está estrechamente vinculada con los conjuntos borrosos intervalo-valorados (IVFS) [67], en donde se le asigna a cada objeto  $x \in X$  el intervalo  $[\mu_R^L(x), \mu_R^U(x)]$ , donde el espacio evaluativo está dado por  $L^I = \{[a, b] \subseteq [0, 1] \mid a \leq b\} \subset F([0, 1])$ , tal que  $\mu_R^L(x)$  es la cota inferior y  $\mu_R^U(x)$  es la cota superior para la función característica de  $R$ . Cuanto más amplio sea este intervalo, mayor será la incertidumbre o inexactitud asociada con el objeto y su verificación de las propiedades de  $R$ .

Nótese que estos valores  $\mu_R^L(x)$  y  $\mu_R^U(x)$  también pueden ser identificados como los grados de creencia y de plausibilidad, respectivamente, acerca de la pertenencia de  $x$  a  $R$  (un estudio más detallado de esta interpretación de la incertidumbre como una medida de ambigüedad, en el sentido de [42], [151], puede ser encontrado en [54], [147]). De este modo, la diferencia  $\mu_R^U(x) - \mu_R^L(x)$  se puede interpretar como una cierta medida de inexactitud acerca de  $\mu_R(x)$  [54].

Por lo tanto, cuanto mayor sea la distancia entre la información que potencialmente soporta al grado  $\mu_R(x)$ , esto es  $\mu_R^U(x)$ , con la que lo soporta con absoluta certeza,  $\mu_R^L(x)$ , mayor será dicha medida de imprecisión. Esta medida de inexactitud se puede formalizar de la siguiente manera.

**Definición IN:** Sean  $\mu_R(x): X \rightarrow [0,1]$  la función de pertenencia del predicado  $R$ ,  $\mu_R^L(x)$  la cota inferior y  $\mu_R^U(x)$  la cota superior de  $\mu_R(x)$ , tal que  $\mu_R^U(x) \geq \mu_R^L(x)$ , entonces  $\alpha: [0,1] \rightarrow [0,1]$  es una medida de inexactitud o de borrosidad de tipo F2, si se cumplen las siguientes condiciones:

**Condición IN1:**  $\alpha(\mu_R(x)) = 0$  si y sólo si  $\mu_R^U(x) = \mu_R^L(x)$ .

**Condición IN2:**  $\alpha(\mu_R(x)) = 1$  si y sólo si  $\mu_R^L(x) = 0$  y  $\mu_R^U(x) = 1$ .

**Condición IN3:** Si  $\mu_R^L(x) < \mu_R^U(x)$  entonces  $\alpha(\mu_R(x)) > 0$ .

**Condición IN4:** Para dos conjuntos difusos  $\mu_R(x)$  y  $\nu_R(x)$ ,

$$\alpha(\mu_R(x)) < \alpha(\nu_R(x)) \text{ si y sólo si } (\mu_R^U(x) - \mu_R^L(x)) < (\nu_R^U(x) - \nu_R^L(x)).$$

Estas condiciones se siguen de manera directa de las observaciones anteriores sobre los conjuntos borrosos IVFS, tal que si la frontera del concepto inexacto representado por el conjunto difuso  $R$  no puede ser caracterizada por un valor preciso, entonces se dice que existe inexactitud sobre la especificación de dicho concepto. Se reconoce de este modo que el valor de pertenencia  $\mu_R(x)$  es de una naturaleza distinta a la de la medida de inexactitud  $\alpha(\mu_R(x))$ .

**Proposición 1:** La función  $\alpha(\mu_R(x)) = \mu_R^U(x) - \mu_R^L(x)$  es una medida de inexactitud IN1-IN4.

**Demostración:** 1) Si  $\mu_R^U(x) = \mu_R^L(x)$  entonces  $\alpha(\mu_R(x)) = \mu_R^U(x) - \mu_R^L(x) = 0$ .  
 2) Si  $\mu_R^U(x) = 1$  y  $\mu_R^L(x) = 0$  entonces  $\alpha(\mu_R(x)) = \mu_R^U(x) - \mu_R^L(x) = 1$ . 3) Si  $\mu_R^U(x) > \mu_R^L(x)$  entonces  $\alpha(\mu_R(x)) = \mu_R^U(x) - \mu_R^L(x) > 0$ . 4) Se sigue de manera directa.  $\diamond$

Esta medida está implícita siempre que se trabaje con intervalos como convención para representar grados de pertenencia a los conjuntos borrosos. Entonces, para los conjuntos borrosos IVFS, se define la negación  $n_{IV}$  como

$$n_{IV}([\mu_R^L, \mu_R^U]) = [n(\mu_R^U), n(\mu_R^L)],$$

mientras que para una  $t$ -conorma  $S_{IV}$  y una  $t$ -norma  $T_{IV}$ , se tiene que, para todo  $a, b, c, d \in [0, 1]$ ,

$$S_{IV}([a, b], [c, d]) = [S(a, c), S(b, d)]$$

y

$$T_{IV}([a, b], [c, d]) = [T(a, c), T(b, d)].$$

De este modo, tanto para la borrosidad F1 como para la F2, es común tomar la negación de  $\mu_R(x)$  directamente como su complemento,  $n(\mu_R(x)) = 1 - \mu_R(x)$ , lo cual es equivalente a asumir que el complemento de la información positiva representa directamente la información negativa. Pero puede ser el caso que estas dos dimensiones de la información sean intrínsecamente distintas.

### 3.1.2 Bipolaridad e incertidumbre

Diferentes estudios en psicología [24], [76], [99], ciencias sociales [75], [126], [139], neurociencia [98], [149], y filosofía [69], [145] tratan sobre el significado de

los conceptos y su carácter bipolar y dialéctico, en cuanto a que las fronteras de sus definiciones se superponen con las de sus opuestos. En general, esta dialéctica tiene diversas consecuencias sobre la racionalidad, el comportamiento y la decisión humana, asumiendo que el cerebro tiene la facultad de identificar y distinguir los aspectos o atributos positivos, útiles y funcionales, de los negativos, nocivos y lesivos, asociados con el significado de algún concepto o predicado en particular.

En este sentido, la bipolaridad reconoce un proceso dialéctico en la formación del significado de los conceptos de acuerdo con su polaridad, con respecto a una escala con dos polos opuestos, uno positivo y otro negativo, generándose así un espacio evaluativo para verificar las propiedades de la información disponible. De este modo, este espacio evaluativo se define en términos de dos polos de referencia, lo cual permite organizar los objetos de interés según sus atributos positivos y negativos.

Recientemente se ha propuesto una tipología para la bipolaridad [35], donde se reconocen al menos dos maneras de interpretarla. Por un lado, se hace referencia a la *bipolaridad de tipo I*, donde la información negativa es la negación fuerte o el complemento de la información positiva. Por otro lado, se hace referencia a la *bipolaridad de tipo II*, donde la información negativa no es necesariamente el complemento de la positiva, tal que es necesaria una evaluación directa sobre cada uno de los polos [35]. En el primer caso, se dice que existe *dependencia* entre los dos polos, mientras que en el segundo caso es posible representar la existencia de afectos positivos y negativos simultáneamente, es decir, que existe *independencia* entre ellos.

Por lo tanto, la bipolaridad o *incertidumbre semántica* de un predicado se puede medir de dos maneras. La primera (como por ejemplo [82], [99], [139]), por medio

de una única escala bipolar univariada, dotada de un único estado neutral que representa una situación de *incertidumbre semántica* donde el predicado no es ni positivo ni negativo. Y la segunda (como por ejemplo [76], [93]), por medio de dos escalas unipolares e independientes, una para medir los aspectos positivos y la otra para medir los aspectos negativos, examinadas conjuntamente como una escala bipolar bivariada, donde la representación de la *incertidumbre semántica* corresponde con dos estados distintos.

En el primer estado, denominado como estado de *ignorancia*, no se cuenta con argumento alguno para valorar el predicado, y además coincide con el valor mínimo por medio del cual las dos escalas pueden ser conjuntamente examinadas. En cambio, en el segundo estado, denominado como estado de *ambivalencia*, se cuenta con argumentos para valorar que el predicado es tanto positivo como negativo.

Básicamente, la bipolaridad reconoce la existencia de un par de polos de referencia  $P$ - $Z$ , que desde una perspectiva clásica pueden ser interpretados como lo verdadero y lo falso, y que en esencia son dos referentes donde la información negativa no coincide necesariamente con la negación o el complemento de la positiva. Dichos referentes pueden ser considerados antónimos [129], [130] o antagónicos [113], como lo son, por ejemplo, las pérdidas y las ganancias, la preferencia y la aversión o la necesidad y el lujo.

De esta manera el polo  $P$  sirve para asignar el carácter positivo de la información y el polo  $Z$  su carácter negativo, de modo que la información que no es ni positiva ni negativa es neutral. Por medio del par  $P$ - $Z$  es posible organizar la información disponible, de manera que lo que es positivo con respecto a uno de estos polos es considerado negativo con respecto al otro.

Entonces, si la relación entre  $P$  y  $Z$  es complementaria,  $Z = n(P)$ , solo una única evaluación o verificación es necesaria para identificar los distintos atributos de la información, tal que  $\mu_Z(x) = \mu_{n(P)}(x) = n(\mu_P(x)) = 1 - \mu_P(x)$ . En este último caso la información negativa es simplemente la negación de la positiva, donde  $\mu_Z(x)$  es el grado en que el objeto  $x$  no verifica las propiedades de  $P$ , y se clasifica como bipolaridad de tipo I, generalmente presente en los distintos modelos de borrosidad de tipo F1 y F2.

Sin embargo, en los casos en los que  $Z$  no es necesariamente la negación de  $P$ , como por ejemplo, cuando lo que se pierde no es igual a lo que no se gana, cuando lo que no se prefiere no coincide con lo que se rechaza o cuando lo necesario no coincide con lo que no es un lujo, entonces se debe verificar también, junto con el grado  $\mu_P(x)$ , el grado  $\mu_Z(x)$ .

De este modo se definen dos escalas de valoración, una  $L_P^+$ , donde se evalúa  $\mu_P(x)$ , y otra  $L_Z^+$ , donde se evalúa  $\mu_Z(x)$ , tal que el par  $\langle \mu_P(x), \mu_Z(x) \rangle$  verifica el grado en que existe respectivamente información positiva y negativa sobre la pertenencia de un objeto  $x$  a  $P$ , tal que

$$\langle \mu_P(x), \mu_Z(x) \rangle = \langle \mu_P^+(x), \mu_Z^+(x) \rangle \in L_P^+ \times L_Z^+.$$

Entonces, en caso de existir simetría, se tiene que

$$\langle \mu_P(x), \mu_Z(x) \rangle = \langle \mu_P^+(x), \mu_P^-(x) \rangle \in L_P^+ \times L_P^- = L_Z^- \times L_Z^+.$$

Este tipo de bipolaridad se clasifica como de tipo II, donde los polos  $P$  y  $Z$  no son necesariamente complementarios. Entonces, es posible identificar cuatro estados

epistémicos acerca del objeto  $x$  y su verificación del concepto dialéctico definido a partir de sus respectivos polos  $P$ - $Z$ .

En particular, se puede aplicar sin pérdida de generalidad este tipo de razonamiento sobre la modelización de preferencias, siguiendo el modelo c-PCT y la caracterización (5)-(8) de la Sección 2.3.2, donde  $x^+ = \mu_{R^+}(x, y)$  y  $x^- = \mu_{R^-}(x, y)$ , tal que  $\mu_{R^+} \in L^+ = [0, 1]$  y  $\mu_{R^-} \in L^- = [0, 1]$ . Bajo esta propuesta, se definen los cuatro estados  $\{t, k, u, f\}$  a partir del par de datos de evidencia  $x^+$  y  $x^-$ , como,

$$t(x^+, x^-) = T^m(x^+, n(x^-)),$$

$$k(x^+, x^-) = T^L(x^+, x^-),$$

$$u(x^+, x^-) = T^L(n(x^+), n(x^-)),$$

$$f(x^+, x^-) = T^m(n(x^+), x^-).$$

De esta manera, se representan cuatro estados epistémicos acerca de los objetos  $x$  e  $y$ , de acuerdo con su compatibilidad con el predicado  $R$ , el cual se verifica con respecto a sus respectivos polos  $R^+$  y  $R^-$ , tal que  $R^+ = P$  y  $R^- = Z$ , donde se identifican las siguientes situaciones características [112], [137].

**Verdad ( $t$ ):** Se verifica  $P$  pero no se verifica  $Z$ , tal que la caracterización nítida de este estado está dada por  $t(x^+, x^-) = (1, 0)$ .

**Contradicción o ambivalencia ( $k$ ):** Se verifican tanto  $P$  como  $Z$ , tal que su caracterización nítida está dada por  $k(x^+, x^-) = (1, 1)$ .

**Desconocimiento o ignorancia ( $u$ ):** No se verifica ni  $P$  ni  $Z$ , tal que su caracterización nítida está dada por  $u(x^+, x^-) = (0, 0)$ .

**Falsedad ( $f$ ):** Se verifica  $Z$  pero no se verifica  $P$ , tal que su caracterización nítida está dada por  $f(x^+, x^-) = (0, 1)$ .

Entonces, examinando estos cuatro estados epistémicos  $\{t, k, u, f\}$ , cada par  $(x^+, x^-) = (\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) \in L^+ \times L^-$  tiene asociada la siguiente matriz de evidencia,

$$M = \begin{bmatrix} f(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) & k(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) \\ u(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) & t(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) \end{bmatrix}.$$

De este modo, la matriz  $M$  está compuesta por los cuatro valores  $\{t, f, u, k\}$ , los cuales expresan el grado en que se verifican los respectivos estados epistémicos, utilizando la misma escala en la cual el par  $(\mu_{R^+}, \mu_{R^-})$  es evaluado.

Por lo tanto, para cada caso en el que la escala de valoración sea de distintos tipo, es decir, en el que se tenga una borrosidad de tipo F1 o F2, junto con una bipolaridad de tipo I o de tipo II, denotados respectivamente como B1 o B2, el tratamiento de la información precisa mantener la misma representación del conocimiento a lo largo de todo el proceso de inferencia, que en caso de la decisión, corresponde con el proceso de aprendizaje y de valoración subjetiva del individuo.

A continuación se especifican las propiedades mínimas que se deben cumplir para que la extensión correspondiente al marco evaluativo (F2,B2) no pierda su semántica original y sea fiel con la clase de información con la que se trata [112].

**Teorema 1:** Sean  $\mu_{R^+} = [\mu_{R^+}^L, \mu_{R^+}^U]$  y  $\mu_{R^-} = [\mu_{R^-}^L, \mu_{R^-}^U]$  las respectivas valoraciones en intervalos para la verificación positiva y negativa de un predicado  $R$ , tal que  $0 \leq \mu_{R^+}^L \leq \mu_{R^+}^U \leq 1$  y  $0 \leq \mu_{R^-}^L \leq \mu_{R^-}^U \leq 1$ . Del mismo modo, sean  $u = [u^L, u^U]$ ,  $t = [t^L, t^U]$ ,  $f = [f^L, f^U]$  y  $k = [k^L, k^U]$  la extensión de cuatro valores asociadas con el par  $(\mu_{R^+}, \mu_{R^-})$ , tal que tanto  $u^U$  y  $k^L$  como  $u^L$  y  $k^U$  son mutuamente excluyentes. Por lo tanto, se cumple que

$$t^L + f^L + u^U + k^U = t^U + f^U + u^L + k^L = 1 + m,$$

donde  $m = \min\{\alpha(\mu_{R^+}), \alpha(\mu_{R^-}), \alpha(u), \alpha(t), \alpha(f), \alpha(k)\}$  y  $\alpha(x) = x^U - x^L$  es la medida de inexactitud asociada con cada intervalo.

**Demostración:** Sean  $s^U = \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U$ ,  $s^L = \mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^L$ ,  $s_1 = \mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^U$  y  $s_2 = \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^L$ , y sean  $M_1 = t^L + f^L + u^U + k^U$  y  $M_2 = t^U + f^U + u^L + k^L$ , donde

$$t^L = \min\{\mu_{R^+}^L, (1 - \mu_{R^-}^U)\}, \quad t^U = \min\{\mu_{R^+}^U, (1 - \mu_{R^-}^L)\},$$

$$f^L = \min\{\mu_{R^+}^L, (1 - \mu_{R^-}^U)\}, \quad f^U = \min\{\mu_{R^+}^U, (1 - \mu_{R^-}^L)\},$$

$$u^L = \max\{(1 - \mu_{R^+}^U - \mu_{R^-}^U), 0\} = \max\{(1 - s^U), 0\},$$

$$u^U = \max\{(1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L), 0\} = \max\{(1 - s^L), 0\},$$

$$k^L = \max\{(\mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^L - 1), 0\} = \max\{(s^L - 1), 0\},$$

$$k^U = \max\{(\mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1), 0\} = \max\{(s^U - 1), 0\},$$

tal que tanto  $k^L$  y  $u^U$  como  $u^L$  y  $k^U$  son mutuamente excluyentes.

Entonces por medio de  $s_1$  se puede examinar el tipo de relación existente entre  $\mu_{R^+}^L$  y  $1 - \mu_{R^-}^U$ , pues si  $s_1 > 1$  ( $s_1 \leq 1$ ) entonces  $\mu_{R^+}^L < 1 - \mu_{R^-}^U$  ( $\mu_{R^+}^L \geq 1 - \mu_{R^-}^U$ ), tal que  $t^L = \mu_{R^+}^L$  y  $f^U = \mu_{R^-}^U$  ( $t^L = 1 - \mu_{R^-}^U$  y  $f^U = 1 - \mu_{R^+}^L$ ). Del mismo modo, por medio de  $s_2$  se puede entender el tipo de relación entre  $\mu_{R^+}^U$  y  $1 - \mu_{R^-}^L$  y determinar los valores para  $t^U$  y  $f^L$ , obteniéndose cuatro casos posibles para  $t^L, t^U, f^L$  y  $f^U$ .

De manera análoga,  $s^U$  determina los valores para  $u^L$  y  $k^U$ , mientras que  $s^L$  determina los valores para  $k^L$  y  $u^U$ , pero nótese que solo tres casos son posibles, pues el caso en que  $s^U < 1$  y  $s^L \geq 1$  está excluido dado que  $s^L \leq s^U$ . De este modo, de los doce casos que resultan de todas las posibles combinaciones, seis casos son excluidos debido a las restricciones  $0 \leq s^L \leq s_1, s_2 \leq s^U \leq 2$  y  $s^L + s^U = s_1 + s_2$ . Entonces se debe demostrar que la igualdad  $M_1 = M_2 = 1 + m$  es cierta para cada uno de los seis casos siguientes.

Caso 1:  $s_1, s_2, s^L, s^U < 1$ .

En este caso se tiene que  $M_1 = \mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^L + 1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L = 1$ ,  
 $M_2 = \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U + 1 - \mu_{R^+}^U - \mu_{R^-}^U = 1$ ,  $\alpha(t) = \alpha(\mu_{R^+}^L)$ ,  $\alpha(f) = \alpha(\mu_{R^-}^L)$ ,  
 $\alpha(u) = \alpha(\mu_{R^+}^L) + \alpha(\mu_{R^-}^L)$  y que  $\alpha(k) = 0$ . Por lo tanto  $m = \alpha(k) = 0$  y  
 $M_1 = M_2 = 1 + m$ .

Caso 2:  $s_1, s_2, s^L < 1, s^U \geq 1$ .

En este caso se tiene que  $M_1 = \mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^L + 1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1$   
 $= \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U = s^U$ ,  $M_2 = \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U = s^U$ ,  $\alpha(t) = \alpha(\mu_{R^+}^L)$ ,  $\alpha(f) = \alpha(\mu_{R^-}^L)$ ,

$\alpha(u) = 1 - s^L$  y que  $\alpha(k) = s^U - 1$ . Ahora, como  $\alpha(\mu_{R^+}) - (s^U - 1) = 1 - s_1 > 0$ ,  
 $\alpha(\mu_{R^-}) - (s^U - 1) = 1 - s_2 > 0$  y  $1 - s^L - (s^U - 1) = 2 - (s^L + s^U) = 2 - (s_1 + s_2) > 0$ ,  
 entonces  $m = \alpha(k) = s^U - 1$  y  $M_1 = M_2 = 1 + m$ .

Caso 3:  $s_1, s^L < 1, s_2, s^U \geq 1$

En este caso se tiene que  $M_1 = \mu_{R^+}^L + 1 - \mu_{R^+}^U + 1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1$   
 $= 1 + \mu_{R^-}^U - \mu_{R^-}^L = 1 + \alpha(\mu_{R^-})$ ,  $M_2 = 1 - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^-}^U = 1 + \alpha(\mu_{R^-})$ ,  $\alpha(t) = 1 - s^L$ ,  
 $\alpha(f) = s^U - 1$ ,  $\alpha(u) = s^U - 1$  y que  $\alpha(k) = 1 - s^L$ . Entonces, como  
 $\alpha(\mu_{R^+}) - \alpha(\mu_{R^-}) = s_2 - s_1 > 0$ ,  $1 - s^L - \alpha(\mu_{R^-}) = 1 - s_1 > 0$  y  $s^U - 1 - \alpha(\mu_{R^-})$   
 $= s_2 - 1 \geq 0$ , entonces  $m = \alpha(\mu_{R^-})$  y  $M_1 = M_2 = 1 + m$ .

Caso 4:  $s_2, s^L < 1, s_1, s^U \geq 1$ .

En este caso se tiene que  $M_1 = 1 - \mu_{R^-}^U + \mu_{R^-}^L + 1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1$   
 $= 1 + \mu_{R^+}^U - \mu_{R^+}^L = 1 + \alpha(\mu_{R^+})$ ,  $M_2 = \mu_{R^+}^U + 1 - \mu_{R^+}^L = 1 + \alpha(\mu_{R^+})$ ,  $\alpha(t) = s^U - 1$ ,  
 $\alpha(f) = 1 - s^L$ ,  $\alpha(u) = 1 - s^L$  y que  $\alpha(k) = s^U - 1$ . Entonces, como  
 $\alpha(\mu_{R^-}) - \alpha(\mu_{R^+}) = s_1 - s_2 > 0$ ,  $1 - s^L - \alpha(\mu_{R^+}) = 1 - s_2 > 0$  y  $s^U - 1 - \alpha(\mu_{R^+})$   
 $= s_1 - 1 \geq 0$ , entonces  $m = \alpha(\mu_{R^+})$  y  $M_1 = M_2 = 1 + m$ .

Caso 5:  $s^L < 1, s_1, s_2, s^U \geq 1$ .

En este caso se tiene que  $M_1 = 1 - \mu_{R^-}^U + 1 - \mu_{R^+}^U + 1 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1$   
 $= 2 - \mu_{R^+}^L - \mu_{R^-}^L = 1 + (1 - s^L)$ ,  $M_2 = 1 - \mu_{R^+}^L + 1 - \mu_{R^-}^L = 1 + (1 - s^L)$ ,  $\alpha(t) = \alpha(\mu_{R^-})$   
 $\alpha(f) = \alpha(\mu_{R^+})$ ,  $\alpha(u) = 1 - s^L$  y que  $\alpha(k) = s^U - 1$ . Entonces, como

$$\alpha(\mu_{R^+}) - (1 - s^L) = s_1 - 1 \geq 0, \quad \alpha(\mu_{R^-}) - (1 - s^L) = s_2 - 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad s^U - 1 - (1 - s^L) \\ = s^U + s^L - 2 = s_1 + s_2 - 2 \geq 0, \text{ entonces } m = 1 - s^L \text{ y } M_1 = M_2 = 1 + m.$$

Caso 6:  $s_1, s_2, s^L, s^U \geq 1$ .

En este último caso se tiene que  $M_1 = 1 - \mu_{R^-}^U + 1 - \mu_{R^+}^U + \mu_{R^+}^U + \mu_{R^-}^U - 1 = 1$ ,  
 $M_2 = 1 - \mu_{R^+}^L + 1 - \mu_{R^-}^L + \mu_{R^+}^L + \mu_{R^-}^L - 1 = 1$ ,  $\alpha(t) = \alpha(\mu_{R^-})$ ,  $\alpha(f) = \alpha(\mu_{R^+})$ ,  
 $\alpha(u) = 0$  y que  $\alpha(k) = \alpha(\mu_{R^+}) + \alpha(\mu_{R^-})$ . Entonces, se sigue que  $m = \alpha(u) = 0$   
 y  $M_1 = M_2 = 1 + m$ . ◇

A continuación, y a modo de recapitulación, se examinan algunos ejemplos, donde se repasan los cuatro casos que componen el marco evaluativo, según las cuatro combinaciones entre los tipos de borrosidad F1 y F2 con los de bipolaridad B1 y B2. De este modo, y en base al Teorema 1, se enfatiza que la forma en que se representa la información, junto con la estructura sobre la cual se ordenan y evalúan las alternativas, determinan el resultado final del proceso de inferencia o de decisión del individuo.

### 3.1.2.1 Marco evaluativo de tipo (F1,B1)

En primer lugar, se tiene el espacio dado por (F1,B1), enmarcado por la borrosidad de tipo F1 y la bipolaridad de tipo B1. En este caso,  $L = [0,1]$  y  $Z = -P$ , de modo que  $\mu_{R^+} = \mu_P$  y  $\mu_{R^-} = \mu_{-P} = n(\mu_{R^+}) = 1 - \mu_{R^+}$ . Por lo tanto,  $t = \mu_{R^+}$ ,  $f = \mu_{R^-}$  y  $k = u = 0$ , donde no se permite la existencia de inexactitud sobre los valores de  $\mu_{R^+}$  y  $\mu_{R^-}$ .

Por ejemplo, si se tiene que  $\mu_{R^+} = 0.3$ , entonces  $(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) = (0.3, 0.7)$  y se obtiene la siguiente matriz de evidencia,

$$EM_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

De esta forma se generaliza la noción de verdad,  $\mu_P$ , y falsedad,  $\mu_Z = \mu_{-P}$ , excluyendo  $k$  y  $u$ , en un espacio evaluativo de borrosidad y bipolaridad de tipo (F1,B1).

### 3.1.2.2 Marco evaluativo de tipo (F2,B1)

En segundo lugar, en cuanto al marco de tipo (F2,B1), esto es, de borrosidad F2 y bipolaridad B1, el valor de  $\mu_{R^+}$  no está dado por un único valor, sino por un intervalo  $[\mu_{R^+}^L, \mu_{R^+}^U]$  dentro del cual se conoce, aunque con cierta imprecisión, que se encuentra el valor de pertenencia  $\mu_{R^+}$ . Por lo tanto, se sigue asumiendo que

$$Z = -P \quad \text{pero} \quad \text{ahora} \quad L = L^IV, \quad \text{donde} \quad \mu_{R^+} = [\mu_{R^+}^L, \mu_{R^+}^U] \quad \text{y}$$

$$\mu_{R^-} = n_{IV}([\mu_{R^+}^L, \mu_{R^+}^U]) = [1 - \mu_{R^+}^U, 1 - \mu_{R^+}^L].$$

De esta manera, se obtiene de nuevo  $t = \mu_{R^+}$  y  $f = \mu_{R^-}$  pero ahora  $k = u = [0, \alpha]$ , donde  $m = \alpha$ , tal que si la inexactitud o la imprecisión se reduce,  $\alpha$  tenderá a cero y  $k$  y  $u$  también tenderán a cero, lo cual se asemeja al espacio de tipo (F1,B1). Por ejemplo, si  $\mu_{R^+} = [0.1, 0.4]$ , se tiene que  $\mu_{R^-} = [0.6, 0.9]$ , y se obtiene la siguiente matriz de evidencia, donde  $t$  y  $f$  mantienen la naturaleza inexacta de la información de entrada y  $u$  y  $k$  existen como valores positivos,

$$EM_2 = \begin{bmatrix} [0.6, 0.9] & [0, 0.3] \\ [0, 0.3] & [0.1, 0.4] \end{bmatrix}.$$

### 3.1.2.3 Marco evaluativo de tipo (F1,B2)

En tercer lugar se tiene el marco generado por la borrosidad de tipo F1 y la bipolaridad de tipo B2, donde la información negativa sobre la pertenencia de un objeto al conjunto difuso es independiente de la información positiva. Entonces, se sigue que  $Z \neq \neg P$ , donde  $\mu_{R^+} = \mu_P$ ,  $\mu_{R^-} = \mu_Z$ . Por lo tanto,  $m = \alpha = 0$  pero  $t$  y  $f$  no pueden seguir siendo identificados directamente con  $\mu_{R^+}$  y  $\mu_{R^-}$  respectivamente, y solo uno de los estados  $u$  y  $k$  se cumple.

Por ejemplo, si  $(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) = (0.5, 0.6)$ , se obtiene la siguiente matriz de evidencia,

$$EM_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$

donde  $t \neq \mu_{R^+}$  y  $f \neq \mu_{R^-}$  y se obtiene un grado de conflicto por ambivalencia dado por  $k = 0.1$ , tal que  $t < \mu_{R^+}$  y  $f < \mu_{R^-}$ .

Bajo esta perspectiva se pueden examinar ciertamente los conjuntos difusos intuicionistas de Atanassov [9] (AFS), los cuales incorporan tanto un grado de pertenencia  $\mu_{R^+}$  como un grado independiente de no-pertenencia  $\mu_{R^-}$ , junto con un grado de incertidumbre  $\pi_R = 1 - (\mu_{R^+} + \mu_{R^-})$ , tal que  $\mu_{R^+}, \mu_{R^-} \in [0, 1]$  y  $\mu_{R^+} + \mu_{R^-} \leq 1$  (excluyendo el estado de ambivalencia o contradicción). De esta forma, el marco evaluativo de los conjuntos AFS está dado por  $L^* = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\} \subset [0, 1]^2$ , donde la misma escala  $L^+ = L^- = [0, 1]$  es utilizada tanto para la verificación positiva como para la negativa, relacionadas ambas por medio de la restricción sobre sus valoraciones.

Por lo tanto, la propuesta AFS afirma que la verdad del predicado negativo no puede ser obtenida por medio de la negación del predicado positivo, obligando a verificar de manera independiente el grado  $\mu_{R^-}$ . Esto es, el planteamiento de AFS trata la bipolaridad de tipo B1 como una de tipo B2, tal que caracteriza la oposición entre  $R^+$  y  $R^-$ , de manera que existe independencia entre los dos. Por ello, su estructura es ambigua y ha generado bastante controversia por la manera correcta de interpretarla (ver por ejemplo [26], [33], pero también [10]).

Básicamente, se encuentra que los conjuntos AFS y los IVFS tienen una estructura formalmente equivalente [28], mediante el isomorfismo  $\phi: L^* \rightarrow L^{IV}$ , tal que  $\phi(\langle \mu_p, \mu_{-p} \rangle) = [\mu_p, 1 - \mu_{-p}]$ . Este resultado obliga a tratar los conjuntos AFS como de tipo B1, a pesar de la intuición original que los presentaba como de tipo B2. Sin embargo, si el grado de no-pertenencia  $\mu_{R^-}$  se interpreta como una función de pertenencia de polaridad Z, tal que  $Z \neq \neg P$ ,  $\mu_{R^-} = \mu_Z$ , entonces se sigue que el marco evaluativo es de tipo B2, un tipo de conjuntos que no es equivalente con los IVFS [112].

### 3.1.2.4 Marco evaluativo de tipo (F2,B2)

En cuarto y último lugar se tiene el caso más general, un marco evaluativo de tipo (F2,B2), esto es, de borrosidad tipo F2 y bipolaridad tipo B2. En este caso, existe incertidumbre o inexactitud acerca de los valores  $\mu_{R^+}$  y  $\mu_{R^-}$ , obteniéndose los valores de evidencia dados por  $(\mu_{R^+}, \mu_{R^-}) \in L^{IV} \times L^{IV}$ . Por ejemplo, si  $\mu_{R^+} = [0.6, 0.8]$  y  $\mu_{R^-} = [0.9, 0.6]$ , la matriz de evidencia es la siguiente,

$$EM_4 = \begin{bmatrix} [0.2, 0.4] & [0.5, 0.4] \\ [0, 0] & [0.4, 0.1] \end{bmatrix}.$$

De esta forma, cada uno de los elementos de  $EM_4$  tiene grados de incertidumbre o inexactitud distintos, extendiendo los resultados de  $EM_1$ ,  $EM_2$  y  $EM_3$ . Entonces se tiene que  $m=0$  y como los valores  $\mu_{R^+}$  y  $\mu_{R^-}$  son independientes, pueden variar sin afectarse entre sí. En caso de que ambos tiendan a cero, el espacio se asemejará a uno de tipo (F1,B2), siempre teniendo en cuenta que la condición necesaria para obtener un espacio de bipolaridad tipo B2 es la existencia de un polo negativo  $Z \neq -P$ , distinto al caso simétrico o bipolar B1 en el cual  $Z = -P$ .

De esta manera, se caracterizan cuatro casos para el marco evaluativo de un modelo de decisión, en los que se puede situar al individuo según el tipo de información del que éste disponga, a partir de la combinación entre distintos tipos de borrosidad, como lo son F1 y F2, y distintos tipos de bipolaridad, como en el caso de B1 y B2. Cada uno de estos casos implica un tratamiento particular de la información, siguiendo una estructura semántica propia y explícita para su representación y posterior interpretación.

Entonces, cada caso implica un tratamiento característico de la incertidumbre o la inexactitud acerca del grado en que se verifican las propiedades del predicado que se quiere representar. Y del mismo modo, se examina la cualidad distintiva de la información negativa, en cuanto a que puede ser, por un lado, el complemento de la positiva, o por el otro, independientemente construida.

Las consecuencias para la teoría de la decisión son de gran importancia, desde una metodología relacional de preferencias, donde el individuo debe construir coherentemente con su estado del conocimiento un orden sobre las alternativas disponibles. Básicamente, se precisa primero elegir el marco evaluativo apropiado para aprovechar la información más relevante de cara al problema de decisión, y

solo entonces se puede asignar efectivamente un grado de verificación de preferencia.

Por lo tanto, la formulación del problema de decisión, junto con la descripción de las alternativas, implica procedimientos de agregación distintos. De esta manera, una aproximación constructiva a la teoría de la decisión toma en cuenta no solo el proceso del individuo mediante el cual se elige una alternativa en particular, sino también la elección del procedimiento de agregación necesario según el tipo de problema y la cualidad de la información.

Se recalca que la teoría debe ser lo suficientemente general como para permitir que el individuo sitúe sus relaciones básicas de preferencia de acuerdo con el marco evaluativo de su elección, del cual se desprende el correspondiente proceso de agregación, según la dependencia o independencia de los argumentos positivos y negativos. A continuación se examina una propuesta para la especificación y formalización de estas ideas.

### **3.2 Espacio general semántico de preferencia**

Bajo una perspectiva subjetiva, la *fiabilidad* de un procedimiento de decisión implica poseer una cierta habilidad para responder a situaciones inexactas o inciertas, de acuerdo con el estado de conocimiento del individuo. De esta manera, entre mayor sea esta *fiabilidad*, más confiable será el procedimiento para encontrar buenas alternativas frente a un problema de decisión. Por lo tanto, la *fiabilidad* es una propiedad deseable dentro de la modelización de preferencias, en su acercamiento al proceso de aprendizaje y de ayuda a la decisión del individuo.

En particular, la decisión humana se basa en estimaciones muy básicas, las cuales permiten reaccionar a lo que se infiere que va a ocurrir en el mundo, tal que es la ignorancia y la necesidad de conocimiento las que guían y controlan la conducta [78] (un punto desarrollado en la Sección 1.3). Por lo tanto, una teoría de la decisión que describa y responda al proceso de decisión individual, desde una perspectiva constructivista, debe ofrecer los medios para tratar tanto con información cierta como incierta, de acuerdo con los estados epistémicos del individuo y su correspondiente interpretación.

Como se ha señalado en la anterior Sección 3.1, la escala de valoración bipolar puede construirse de acuerdo con un modelo univariado (B1) o bivariado (B2), según la naturaleza e intensidad del vínculo entre los polos de referencia, es decir, entre los aspectos positivos y negativos. En el primero, se hace referencia a un único eje con valor neutral (0), donde un valor negativo representa la percepción sobre una mala opción y un valor positivo representa la percepción sobre una buena opción. De este modo, el valor neutral representa la percepción sobre una opción que no se considera ni buena ni mala.

En cambio en el segundo modelo, se utilizan dos escalas unipolares independientes acotadas por debajo por 0, una para las intensidades positivas y la otra para las negativas. Estas intensidades son componentes independientes sobre la valoración de determinada opción, tal que cada uno se obtiene mediante mediciones de distinto tipo, uno para la parte positiva y otro para la negativa, de manera que es posible valorar la opción como positiva y negativa a la vez.

Este es el punto de partida para construir un *espacio general semántico de preferencia*, donde se puedan ubicar los distintos modelos según la interpretación que éstos desarrollen de la información disponible. De este modo, se pueden

representar las distintas posibilidades que tiene el individuo para evaluar sus alternativas en busca de una buena decisión.

En esta investigación se propone construir dicho espacio semántico, con el fin de situar los distintos modelos en base a su tratamiento de la información y sus respectivos procesos de agregación. Como se ha visto en la Sección 3.1, el resultado depende de cómo se interprete la información a lo largo de dicho proceso, lo cual hace referencia directa a la semántica de cada modelo en particular.

Entonces se tienen distintos tipos de bipolaridad de acuerdo con la naturaleza de la información positiva  $\mu_{R^+} = x^+$ , y negativa  $\mu_{R^-} = x^-$ . De esta manera, se tiene que para el caso en el que se cumple que  $n(x^+) = 1 - x^+ = x^-$ , se reconoce la existencia de bipolaridad de tipo B1, y para el caso en el que se permite que  $n(x^+) \neq x^-$ , se reconoce la existencia de bipolaridad de tipo B2.

Por otro lado, en referencia directa a la modelización de preferencias, se han identificado dos interpretaciones distintas acerca de la información negativa sobre la relación de preferencia entre cierto par de alternativas. Esto es, se identifica una primera interpretación donde el grado positivo de verificación de la relación inversa  $\mu_{R^{-1}} = y^+$ , funciona como información negativa de  $\mu_{R^+} = x^+$ , tal que  $x^- = y^+$ , y una segunda interpretación donde la información negativa no coincide necesariamente con la relación inversa, tal que  $x^- \neq y^+$ .

Ciertamente, esta diferencia de interpretación refleja una cualidad de simetría o asimetría añadida sobre el tipo de bipolaridad. De este modo, cuando el marco es B1 o B2, y se cumple que  $x^- = y^+$ , entonces se dice que el marco es de tipo **B1.1** o

**B2.1**, y cuando se cumple que  $x^- \neq y^+$ , entonces se dice que es de tipo **B1.2** o **B2.2**, respectivamente.

Luego se examina esta tipología bipolar en relación a la *interdependencia* entre las dimensiones positiva y negativa de los datos de entrada, esto es, de las relaciones de preferencia del individuo, de acuerdo con el tratamiento que se hace de las cuatro relaciones características  $\langle R^+, R^-, R^{-+}, R^{-1-} \rangle$ . Por lo tanto, si se interpreta la información de entrada a partir de los pares  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle$ , se tiene una *metodología dependiente D1*, dado que evalúa conjuntamente los aspectos positivos y negativos. Mientras que si se interpreta en base a los pares  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ , se dice que se tiene una *metodología independiente D2*, dado que evalúa separadamente los aspectos positivos de los negativos.

Por consiguiente, se pueden examinar los distintos modelos de preferencia vistos hasta el momento por medio de un espacio semántico en común. Desde la teoría clásica de la utilidad y su generalización por medio de la representación numérica de un orden total (4), hasta la explícita referencia a las pérdidas y ganancias de la CPT (1) y (2), y el modelo CBC (3), como también el modelo estándar de preferencias borrosas (modelo *IA-SM*), el pseudo-criterio de la PCT (Definición *PsC*), y su formalización axiomática cuatro-valorada (modelo 4-PCT) y continua (modelo c-PCT). Con estos ejemplos se ilustra el espacio semántico de preferencia que se propone en esta investigación (ver Figura 2).

Interdependencia Bipolaridad	D1	D2
<b>B1.1</b>	Teoremas $U, S, Q$ Orden total (4)	Teoremas $U, S, Q$ Orden total (4)
<b>B1.2</b>	CPT(1), (2), CBC(3)	PCT: Definición $PsC$
<b>B2.1</b>	$IA-SM$ : (14)-(16)	$IA-SM$ : (14)-(16)
<b>B2.2</b>	4-PCT, c-PCT	...

**Figura 2.** Espacio semántico de preferencia donde cada modelo se clasifica según su semántica particular.

A continuación se examinan los distintos subespacios semánticos generados por la combinación entre los marcos de bipolaridad, junto con su correspondiente interpretación de la información negativa, B1.1, B1.2, B2.1 y B2.1, y las diferentes metodologías de interdependencia D1 y D2. Evidentemente, hasta ahora solo es posible presentar un espacio semántico incompleto, pues no se cuenta aún con un ejemplo (como lo es el modelo de Preferencia-Aversión que se presenta en la Sección 3.3) para ilustrar el subespacio generado por la combinación B2.2-D2.

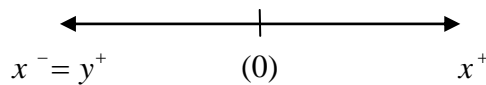
### 3.2.1 Espacio semántico de tipo B1.1

Bajo el marco de bipolaridad de tipo B1, se tiene que la información negativa está relacionada con la información positiva mediante el complemento, de modo que se cumple que  $n(x^+) = 1 - x^+ = x^-$ . Por lo tanto, si se toma la relación inversa de

preferencia  $y^+$  como información negativa acerca de  $x^+$ , se tiene que  $n(x^+) = x^- = y^+$ , y se obtiene el subespacio semántico de tipo B1.1.

Entonces, en este subespacio, la metodología D1 es equivalente a la D2, pues se cumple que  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle = \langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ . De este modo, se verifica que el predicado “ $x$  no es al menos tan buena como  $y$ ”,  $n(x^+)$ , es equivalente a “ $x$  es al menos tan mala como  $y$ ”,  $x^-$ , y estos a su vez son equivalentes a “ $y$  es al menos tan buena como  $x$ ”,  $y^+$ , donde una única evaluación  $x^+$  es suficiente para capturar toda la información relevante acerca de las alternativas  $x, y \in X$ .

De esta forma la información negativa es simplemente la negación de la positiva, y el resultado del proceso de agregación corresponde con un único valor de la estructura evaluativa de tipo B1 (como se muestra en la Figura 3). Dicho resultado obtiene un valor menor que el valor neutral (0) si  $x$  no es preferida a  $y$ , mayor que (0) si  $x$  es preferida a  $y$  o igual a (0) si son indiferentes..



**Figura 3.** Representación del espacio semántico de tipo B1.1, donde se obtiene un único valor como resultado del proceso de agregación.

Este es el caso de un orden total representado mediante (4), y que se encuentra en los distintos modelos de la utilidad caracterizados por los teoremas  $U$ ,  $S$  y  $Q$ . De esta manera, para cualquier par de alternativas  $x, y \in X$ , si la utilidad de  $x$ ,  $U(x)$ ,

es mayor que  $U(y)$ , entonces se cumple que  $P(x, y)$ , si son iguales, entonces se cumple que  $I(x, y)$ , y en caso contrario, es cierto que  $P(y, x)$ .

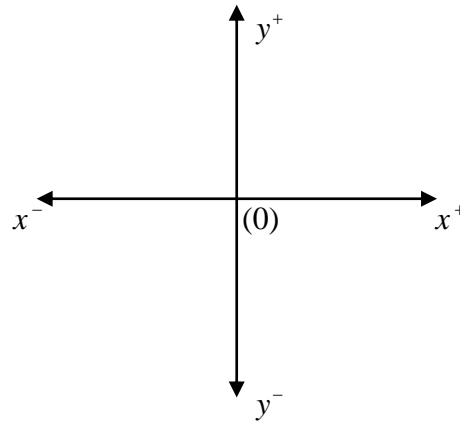
### 3.2.2 Espacio semántico de tipo B1.2

Ahora, bajo el mismo marco de bipolaridad de tipo B1, donde se tiene que  $n(x^+) = x^-$ , se considera el caso en el cual se cumple que la información negativa no corresponde con la relación inversa, esto es, tal que  $x^- \neq y^+$ . De esta forma, se verifica que  $n(x^+) = x^- \neq y^+$ , y se obtiene el subespacio semántico de tipo B1.2.

En este caso, las metodologías D1 y D2 no son equivalentes, pues agregar los pares  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle$  es ciertamente distinto que agregar  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ .

Nótese que en el caso de D1, se consigue primero un valor para  $(x^+, x^-)$  y otro para  $(y^+, y^-)$ , mientras que en el caso de D2, con la evaluación entre  $(x^+, y^+)$  se obtiene directamente el valor de  $(x^-, y^-)$ , pues  $n(x^+, y^+) = (x^-, y^-)$ .

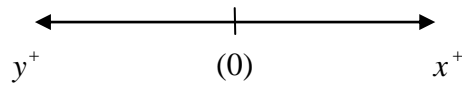
Por el lado de la metodología D1, se tienen dos escalas tipo B1, una para representar los valores de  $x^+$ , tal que  $n(x^+) = x^-$ , y la otra para representar los valores de  $y^+$ , tal que  $n(y^+) = y^-$ . De este modo son necesarias las mediciones de  $x^+$  e  $y^+$  para entender la situación de preferencia entre un par de alternativas  $x, y \in X$ . Entonces se pueden examinar conjuntamente las dos escalas por medio de su intersección, utilizando sus valores neutrales como punto en común e identificando la situación de preferencia de acuerdo con las dos escalas de tipo B1 (como se muestra en la Figura 4).



**Figura 4.** Representación del espacio semántico de tipo B1.2-D1, donde se obtiene un único valor como resultado del proceso de agregación de dos escales de tipo B1.

Por el lado de la metodología D2, es suficiente con una escala de tipo B1 para representar los valores de  $x^+$  junto con los de  $y^+$ , con el fin de identificar la situación de preferencia entre el par de alternativas  $x, y \in X$ , tal que  $n(x^+) = x^- \neq y^+$  (ver Figura 5). Si se toma por ejemplo la Definición *PsC* de la PCT, donde se define un pseudo-criterio que mide qué tan buena es una alternativa con respecto a otra, se tiene el caso de una operación de agregación que obtiene una única situación a partir de las intensidades de  $x^+$  y de  $y^+$ .

Entonces, si  $x^+$  es suficientemente mayor (de acuerdo con un cierto umbral de preferencia) que  $y^+$ , se cumple que  $P(x, y)$ , si son suficientemente similares (de acuerdo con un cierto umbral de indiferencia), entonces se cumple que  $I(x, y)$ , pero en caso contrario, ya no es cierto que  $P(y, x)$  deba ser cierto (como ocurre en el ejemplo del espacio B1.1), pues ahora también puede ser que se cumplan  $Q(x, y)$  o  $Q(y, x)$ , como se muestra en la Figura 5. Nótese que de un espacio de tipo B1.2 se puede pasar a uno de tipo B1.1, anulando los umbrales de preferencia e indiferencia, tal como se hace en (4).



**Figura 5.** Representación del espacio semántico de tipo B1.2-D2, donde se obtiene un único valor como resultado del proceso de agregación.

Ahora, se puede tener también el caso en que se aplique la metodología D1, dentro del mismo espacio B1.2, como en los casos de la CPT (1), (2) y el modelo CBC (3). En los modelos de la CPT (1), (2) y CBC (3), se utiliza la recta numérica como una escala de tipo B1 para medir la importancia conjunta de los afectos positivos (ganancias) y negativos (pérdidas). En este caso, su proceso de agregación es de tal manera que se identifica un único valor, positivo, negativo o neutral, a partir de la evaluación de los pares  $(x^+, x^-)$  para todo  $x, y \in X$ .

Se advierte que se encuentra una interpretación distinta sobre la tipología de bipolaridad de la CPT, donde se afirma que basta con asumir que las pérdidas se perciben o miden de manera independiente a las ganancias, para que su escala evaluativa sea considerada de tipo B2 [63]. Al respecto, además de la argumentación anterior, se señala que la intuición básica de la CPT es precisamente que ambas percepciones positivas y negativas son independientes, tal que bajo incertidumbre, se valoran más las pérdidas que las ganancias [75], [139]. Pero la clave está en el modo de agregar ambas dimensiones, donde la CPT y el modelo CBC obtienen como resultado un único valor sobre una escala de tipo B1.

Básicamente, si es posible tener una valoración positiva y otra negativa simultáneamente, tal que  $n(x^+) \neq x^-$ , entonces la escala bipolar es de tipo B2. En

caso contrario, si se utiliza una escala (como por ejemplo, la recta numérica) para mapear un único resultado, tal que  $n(x^+) = x^-$ , entonces la escala bipolar es de tipo B1.

### 3.2.3 Espacio semántico de tipo B2.1

Una vez se han examinado ambos subespacios B1.1 y B1.2, los cuales descansan sobre una estructura evaluativa de tipo B1, se exploran ahora las distintas combinaciones entre una estructura de tipo B2, la interpretación semántica del predicado (positivo o negativo) de preferencia y las metodologías D1 y D2. De este modo, bajo el marco de bipolaridad de tipo B2, a diferencia del de tipo B1, se cumple que  $n(x^+) \neq x^-$ .

Por lo tanto, si se verifica que  $x^- = y^+$ , tal que  $n(x^+) \neq x^- = y^+$ , entonces se obtiene el espacio semántico de tipo B2.1, donde además de la evaluación de  $x^+$  es necesario también evaluar la intensidad en que se verifica  $x^-$ , donde  $x^- = y^+$ . En este caso se tienen dos escalas independientes, una escala unipolar para valorar la intensidad de  $x^+$ , y otra para valorar la de  $x^-$ , lo cual hace referencia a una estructura evaluativa de tipo B2 (ver Figura 6).

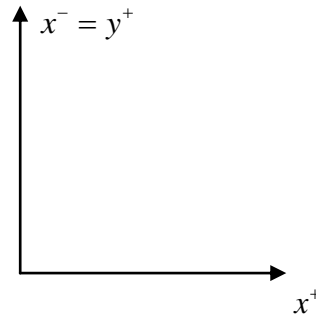
Nótese que en este subespacio B2.1, la metodología D1 es equivalente a la D2, pues se cumple que  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle = \langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ . Tal es el caso, por ejemplo, del modelo *IA-SM* (14)-(16), el cual permite la verificación de valoraciones simultáneas tanto para la preferencia positiva ( $x^+$ ) como para la negativa ( $x^- = y^+$ ). En efecto, siguiendo el sistema de ecuaciones (14)-(16), se comprueba que,

$$x^+ = S(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+)),$$

$$n(x^+) = S(p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)),$$

$$x^- = y^+ = S(p(y^+, x^+), i(y^+, x^+)),$$

de manera que es posible obtener intensidades simultaneas tanto para  $x^+$  como para  $x^-$ .



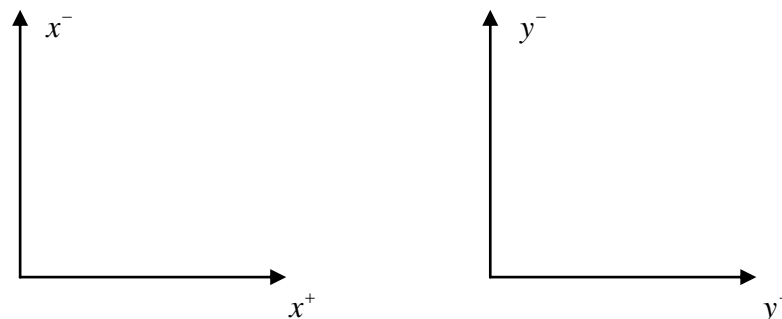
**Figura 6.** Representación del espacio semántico de tipo B2.1, donde se agregan dos escalas unipolares, una para la información positiva y la otra para la negativa.

### 3.2.4 Espacio semántico de tipo B2.2

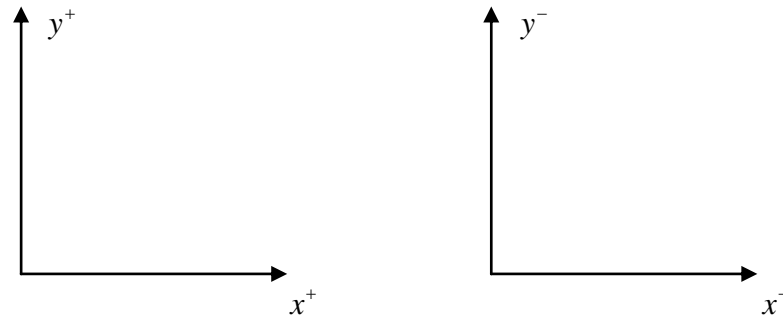
Este es el caso más general, donde se considera el marco B2 junto con la interpretación de que la información negativa  $x^-$ , no coincide con la relación inversa  $y^+$ . De esta forma, se verifica que  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ , y se obtiene un espacio semántico de tipo B2.2. Por lo tanto, no solo hay que medir las intensidades de  $x^+$  e  $y^+$ , sino también las de  $x^-$  e  $y^-$ , con el fin de capturar toda la información relevante sobre el par de alternativas  $x, y \in X$ .

Nótese que siempre es posible pasar de un escenario de tipo B2 a uno de tipo B1, pero no lo contrario. En este sentido, el espacio B1.1, donde se cumple que  $n(x^+) = x^- = y^+$ , se presenta como el escenario más restrictivo, donde la intensidad de  $x^+$  representa toda la información disponible. Por lo tanto, a medida que se flexibiliza aquella condición y se permite verificar casos más generales, como el del espacio B1.2, donde es cierto que  $n(x^+) = x^- \neq y^+$ , o el del espacio B2.1, donde se cumple que  $n(x^+) \neq x^- = y^+$ , se consigue caracterizar el espacio más general B2.2, donde es posible verificar que  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ .

En este caso, siguiendo la metodología D1, se tienen dos escalas unipolares para valorar las intensidades de preferencia  $(x^+, x^-)$ , y otras dos para la valoración de las intensidades  $(y^+, y^-)$ , tal como se presenta en la Figura 7. En cambio, siguiendo la metodología D2, se tienen dos escalas unipolares para evaluar el par de intensidades positivas  $(x^+, y^+)$ , y otras dos para la evaluación de las intensidades negativas  $(x^-, y^-)$ , tal como se presenta en la Figura 8.



**Figura 7.** Representación del espacio semántico de tipo B2.2-D1, donde se agregan dos escalas unipolares para valorar  $(x^+, x^-)$ , y otras dos para valorar  $(y^+, y^-)$ .



**Figura 8.** Representación del espacio semántico de tipo B2.2-2, donde se agregan dos escalas unipolares para valorar  $(x^+, y^+)$ , y otras dos para valorar  $(x^-, y^-)$ .

Un ejemplo de este espacio, bajo la metodología D1, es el modelo 4-PCT y el c-PCT, donde se examina la interacción entre los pares  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle$ . De este modo se obtiene la respectiva valoración, por un lado, para el par  $(x^+, x^-)$ , y por el otro, para el par  $(y^+, y^-)$ , de acuerdo con la estructura L4 (ver Sección 2.3). Entonces se permite la verificación de los estados de *verdad*, *falsedad*, *desconocimiento* o *contradicción* (donde la información negativa se verifica al mismo tiempo que la positiva) con respecto a cada par, y se encuentra la situación de preferencia de acuerdo con la estructura de 4-PCT o c-PCT.

Entonces se reconoce un *vacío semántico*, dado que no se cuenta con un ejemplo para el espacio semántico B2.2-D2, lo cual no nos permite completar la representación del espacio general semántico de preferencia (ver Figura 2). En este caso, es necesario encontrar un modelo lo suficientemente general, que incluya el marco evaluativo dado por B2, donde se interprete que la información positiva y negativa son independientes, tal que la relación negativa sea distinta que la inversa, y donde se desarrolle el proceso de agregación sobre los pares  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ , representando la información positiva *aparte* de la negativa.

Por lo tanto, se introduce en la próxima Sección 3.3 la propuesta principal de esta investigación, un modelo de Preferencia-Aversión (P-A) [49], [51], donde es posible expresar de manera independiente grados de verificación tanto para el predicado de preferencia (información positiva) como para el de aversión (información negativa). De este modo, se tiene que la información de entrada permite la coexistencia de lo positivo y lo negativo, esto es, de razones para preferir y de razones para rechazar, y siguiendo la metodología D2, se mantiene dicha independencia a lo largo de todo el proceso de agregación.

De esta forma, la especificación conjunta del espacio semántico de preferencia permite representar con mayor *fiabilidad* el espacio cognitivo del individuo, identificando explícitamente el modo en que se construye y representa el proceso de decisión individual. En este sentido, esta propuesta constructivista permite elegir, primero, el tipo de procedimiento necesario para valorar las alternativas (en referencia al marco evaluativo), segundo, el modo en que se deben interpretar las percepciones acerca de las mismas (con respecto al espacio semántico), y tercero, el procedimiento de agregación adecuado para unas preferencias enmarcadas por una *racionalidad de pérdidas y ganancias*.

### **3.3 Modelo de Preferencia-Aversión (P-A)**

El tipo de información que se obtiene de un conjunto de preferencias es de una gran riqueza semántica, siempre que se asume que pertenecen a un individuo racional o inteligente que sopesa sus argumentos en busca de una buena decisión. Precisamente esta riqueza semántica es la que permite expresar las condiciones naturales de subjetividad e inexactitud del conocimiento humano. Por lo tanto, la

racionalidad del individuo, la cual enmarca los datos o la información recibida en forma de preferencias, debe permitir la representación de estructuras que incorporen los distintos estados de conocimiento del individuo frente a un problema de decisión.

De este modo, la estructura de preferencias contiene una semántica propia, la cual corresponde con el tipo de información y la fuente de la misma, que para el caso es nada menos que la inteligencia humana. Entonces, se acepta que un rasgo fundamental de dicha inteligencia es su capacidad de examinar los argumentos positivos de manera diferente que los negativos, por lo cual, la estructura de preferencias debe representar dicha capacidad, guardando su condición isomorfa con la racionalidad humana. Este tipo de racionalidad es la que se denomina, en esta investigación, *racionalidad de pérdidas y ganancias*, siguiendo la intuición básica de la CPT, junto con el principio C-D de la PCT.

Esto es, como soporte de la decisión, el orden de preferencia se construye de manera que permite enfrentar la incertidumbre sobre las alternativas disponibles, valorando los aspectos negativos aparte de los positivos. Ello, en la medida en que son dos dimensiones distintas de la información. La negativa, sobre la que se tiene un mayor grado de confianza (lo lesivo o nocivo es en principio más fácil de identificar), en oposición a como se valora la positiva, dimensión ésta sobre la que se puede tener un menor grado de seguridad (lo deseable es en principio más ambiguo o incierto) [126].

Esta diferenciación, junto con las posibilidades representativas de los distintos estados del conocimiento (examinados a partir de las distintas situaciones relacionales básicas de preferencia), son las bases fundacionales de esta propuesta que completa el espacio general semántico de preferencia. En particular, mediante

la siguiente formalización del modelo de Preferencia-Aversión (P-A) [49], [51], se obtiene un ejemplo del marco evaluativo y la interpretación semántica B2.2, junto con la metodología D2.

### 3.3.1 Modelización de relaciones de preferencia y aversión

Con el fin de construir un modelo donde sea posible desarrollar una interpretación de la información de acuerdo con el espacio semántico B2.2, y de la metodología D2, se introduce en este trabajo el siguiente modelo de Preferencia-Aversión (P-A). De esta forma es posible representar, de manera independiente, la verificación de argumentos positivos por un lado, y de argumentos negativos por el otro, lo cual exige por ello mismo un proceso de agregación particular (en referencia a la metodología D2).

Entonces, el modelo P-A requiere de entrada de la verificación de dos relaciones, una positiva de preferencia y otra negativa de aversión, valoradas éstas según el grado en que un par de alternativas verifican las propiedades del respectivo predicado. De este modo, el predicado de preferencia se representa por medio del conjunto  $R^+$ , y el predicado de aversión por medio de  $R^-$ , valorados cada uno, para el caso nítido, según la estructura  $L = \{0,1\}$ , y para el caso borroso, según  $L = [0,1]$ .

Por lo tanto, se cuenta con una relación de preferencia,

$$\mu_{R^+} : X \times X \rightarrow L,$$

y otra relación de aversión,

$$\mu_{R^-} : X \times X \rightarrow L,$$

para todo par de elementos o alternativas  $x, y \in X$ .

De esta manera, se valora cada relación según el grado de verificación sobre las propiedades del predicado positivo, correspondiente a la relación  $R^+$ , y del negativo, de acuerdo con la relación  $R^-$ , tal que

$$R^+ = \left\{ \langle x, y, \mu_{R^+}(x, y) \rangle \mid x, y \in X \right\}$$

representa el predicado “ $x$  es al menos tan *buena* como  $y$ ”, donde  $\mu_{R^+}(x, y) \in L$ , y

$$R^-(x, y) = \left\{ \langle x, y, \mu_{R^-}(x, y) \rangle \mid x, y \in X \right\}$$

representa el predicado “ $x$  es al menos tan *mala* como  $y$ ”, donde  $\mu_{R^-}(x, y) \in L$ .

Estas dos relaciones binarias, donde la relación de aversión  $R^-$  es positivamente verificada mediante una intensidad independiente de la relación de preferencia  $R^+$ , identifican situaciones fundamentales de preferencia y aversión donde efectivamente los argumentos en contra pueden ser contruidos independientemente de los argumentos a favor de una posible decisión. De esta forma, se consigue un modelo que representa de manera general la racionalidad de pérdidas y ganancias del individuo.

### 3.3.1.1 Modelo binario de Preferencia-Aversión

A continuación se examina el modelo P-A, evaluando los grados de verificación para las relaciones  $R^+$  de preferencia y  $R^-$  de aversión, de acuerdo con la estructura evaluativa  $L = \{0,1\}$ . De este modo, mediante la evaluación conjunta de  $\mu_{R^+}$  y su inversa  $\mu_{R^+}^{-1}$ , se caracteriza la *estructura básica de preferencia*, y de igual

manera, mediante la evaluación de  $\mu_{R^-}$  y  $\mu_{R^-}^{-1}$ , se caracteriza la *estructura básica de aversión*.

Entonces, por el lado del predicado de preferencia  $R^+$ , su estructura básica se descompone en las tres relaciones:

- *Preferencia estricta (P)*: relación asimétrica y no reflexiva.
- *Indiferencia (I)*: relación simétrica y reflexiva.
- *Incomparabilidad (J)*: relación simétrica y no reflexiva.

y por el lado del predicado de aversión  $R^-$ , se descompone en las tres relaciones:

- *Aversión estricta (Z)*: relación asimétrica y no reflexiva.
- *Indiferencia por aversión (G)*: relación simétrica y reflexiva.
- *Incomparabilidad por aversión (H)*: relación simétrica y no reflexiva.

La definición nítida de estas relaciones binarias es la siguiente.

$$P(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^+}(x, y) = 1 \text{ y } \mu_{R^+}(y, x) = 0,$$

$$I(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^+}(x, y) = 1 \text{ y } \mu_{R^+}(y, x) = 1,$$

$$J(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^+}(x, y) = 0 \text{ y } \mu_{R^+}(y, x) = 0,$$

$$Z(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^-}(x, y) = 1 \text{ y } \mu_{R^-}(y, x) = 0,$$

$$G(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^-}(x, y) = 1 \text{ y } \mu_{R^-}(y, x) = 1,$$

$$H(x, y) = 1 \text{ si y solo si } \mu_{R^-}(x, y) = 0 \text{ y } \mu_{R^-}(y, x) = 0.$$

De este modo la *estructura básica P-A*, se descompone en seis situaciones básicas, tal que,

$$\langle R^+, R^- \rangle = \langle (P, I, J), (Z, G, H) \rangle.$$

donde para todo  $x, y \in X$ , se cumple que, por el lado de la preferencia,

$$P(x, y) \cup I(x, y) = R^+(x, y),$$

$$P(x, y) \cup I(x, y) \cup P(y, x) = R^+(x, y) \cup R^+(y, x),$$

$$P(y, x) \cup J(y, x) = 1 - R^+(x, y),$$

y por el lado de la aversión,

$$Z(x, y) \cup G(x, y) = R^-(x, y),$$

$$Z(x, y) \cup G(x, y) \cup Z(y, x) = R^-(x, y) \cup R^-(y, x),$$

$$Z(y, x) \cup H(y, x) = 1 - R^-(x, y).$$

De esta manera, la caracterización de la estructura básica P-A define el modo en que se relacionan sus distintos componentes, por medio de los conectores lógicos de la teoría clásica de conjuntos, para las distintas situaciones de preferencia  $(P, P^{-1}, I, J)$ , aparte de las de aversión  $(Z, Z^{-1}, G, H)$ .

Por lo tanto, y de acuerdo con la metodología D2, estas dos dimensiones (como dos órdenes distintos que son) se combinan a continuación para representar la *estructura completa P-A*:

$$\langle PZ, PA, PG, PH, IZ, IG, IH, JZ, JG, JH \rangle,$$

de la siguiente forma:

- **Ambivalencia:**  $PZ = P \cap Z$
- **Preferencia fuerte:**  $PA = P \cap Z^{-1}$

- **Pseudo-preferencia:**  $PG = P \cap G$
- **Preferencia semi-fuerte:**  $PH = P \cap H$
- **Pseudo-aversión:**  $IZ = I \cap Z$
- **Indiferencia fuerte:**  $IG = I \cap G$
- **Indiferencia positiva:**  $IH = I \cap H$
- **Aversión semi-fuerte:**  $JZ = J \cap Z$
- **Indiferencia negativa:**  $JG = J \cap G$
- **Incomparabilidad por ignorancia:**  $JH = J \cap H$

Esta estructura completa P-A, representa de una manera relacional, las distintas situaciones o estados del conocimiento del individuo frente a una decisión. Desde esta perspectiva, se identifican *índices lingüísticos* sobre las distintas situaciones, revelando un cierto tipo de incertidumbre semántica (introducida primeramente en esta investigación en la Sección 3.1.2), como lo es la *ambivalencia (PZ)*, caso en el cual se verifican las relaciones de preferencia y aversión estrictas; la *incomparabilidad por ignorancia (JH)*, donde no se cuenta con información alguna acerca de preferencia ni aversión; la *indecisión por indiferencia (IG, IH, JG)*, donde las alternativas son igual de buenas y/o de malas; o la *ambigüedad*, caso en el cual no se distingue entre la preferencia y la indiferencia por aversión (*PG*), o entre la aversión y la indiferencia (*IZ*).

De la misma forma, se identifican otras situaciones revelando ciertos tipos de certidumbre en la preferencia o la aversión. Tal es el caso de la preferencia fuerte (*PA*), donde se identifica la preferencia estricta y además se rechaza explícitamente la otra alternativa; la preferencia semi-fuerte (*PH*), donde se verifica la preferencia

estricta y no se cuenta con presencia de juicios negativos; o la aversión semi-fuerte ( $JZ$ ), donde se verifica la aversión y no se cuenta con presencia de juicios positivos.

Entonces, dicha caracterización de la incertidumbre frente a la decisión, la cual se constituye a partir de la evaluación conjunta entre los valores de preferencia y aversión, se puede extender para el caso continuo, donde  $L = [0,1]$ . De este modo, se pueden identificar, además de los índices lingüísticos sobre las situaciones de decisión, los grados de verificación sobre dichas situaciones. A continuación se presenta dicha extensión, definiendo el modelo P-A bajo un ambiente borroso.

### 3.3.1.2 Modelo borroso de Preferencia-Aversión

A partir del modelo estándar  $IA-SM$ , visto en la Sección 2.4, donde se cuenta con un sistema axiomático para traducir a un ambiente borroso las propiedades  $R1-R6$  de preferencia, se presenta ahora el modelo borroso P-A. Entonces, debido a que no es posible la traducción directa de las propiedades clásicas de preferencia por medio de los operadores de lógica borrosa (ver por ejemplo [2]), y con el fin de preservar tantas de estas propiedades como sea posible, se formula el siguiente modelo axiomático para la estructura básica P-A y una terna de De Morgan  $(T, S, n)_\varphi$ ,

$$\langle R^+, R^- \rangle_\varphi = \langle (p, i, j), (z, g, h) \rangle_\varphi.$$

**Axioma IA2:** Para todo par de alternativas  $x, y \in X$ , se tiene que las intensidades de  $P(x, y)$ ,  $I(x, y)$  y  $J(x, y)$  dependen solamente de los valores de  $x^+ = \mu_{R^+}(x, y)$  e  $y^+ = \mu_{R^+}(y, x)$ , y que las intensidades de  $Z(x, y)$ ,  $G(x, y)$  y  $H(x, y)$  dependen solamente de los valores de  $x^- = \mu_{R^-}(x, y)$  e

$y^- = \mu_{R^-}(y, x)$ . Se formula la existencia de las funciones continuas  $p, i, j, z, g, h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , tales que

$$P(x, y) = p(x^+, y^+),$$

$$I(x, y) = i(x^+, y^+),$$

$$J(x, y) = j(x^+, y^+),$$

$$Z(x, y) = z(x^-, y^-),$$

$$G(x, y) = g(x^-, y^-),$$

$$H(x, y) = h(x^-, y^-).$$

**Axioma PA2:** Las funciones  $p(x^+, n(y^+))$ ,  $i(x^+, y^+)$ ,  $j(n(x^+), n(y^+))$ ,  $z(x^-, n(y^-))$ ,  $g(x^-, y^-)$  y  $h(n(x^-), n(y^-))$  son no-decrecientes con respecto a ambos argumentos.

**Axioma SM2:** Las funciones  $i(x^+, y^+)$ ,  $j(x^+, y^+)$ ,  $g(x^-, y^-)$  y  $h(x^-, y^-)$  son simétricas.

Entonces, siguiendo las propiedades de la estructura básica P-A, se define el siguiente sistema de ecuaciones por medio de una terna de De Morgan  $(T, S, n)_\phi$  de tipo continuo (tal que  $T$  y  $S$  son continuas). De este modo, la estructura de preferencia corresponde con la caracterización de (14)-(16),

$$S(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+)) = x^+, \quad (29)$$

$$S(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+), p(y^+, x^+)) = S(x^+, y^+), \quad (30)$$

$$S(p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)) = n(x^+), \quad (31)$$

y de manera análoga, la estructura de aversión se traduce como,

$$S(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-)) = x^-, \quad (32)$$

$$S(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-), z(y^-, x^-)) = S(x^-, y^-), \quad (33)$$

$$S(z(y^-, x^-), h(y^-, x^-)) = n(x^-). \quad (34)$$

Este sistema de ecuaciones permite construir un orden positivo, basado en las cuatro funciones  $\langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\phi$ , y un orden negativo sobre  $X$ , basado en las cuatro funciones  $\langle z, z^{-1}, g, h \rangle_\phi$ , el primero acerca de los atributos positivos de  $x$  al ser comparado con  $y$ , y el otro acerca de los atributos negativos de  $x$  al ser comparado con  $y$ . Por lo tanto, la información negativa sobre la preferencia  $x^+$ , se verifica por medio de una identificación directa sobre sus atributos negativos, dada por  $x^-$ , donde  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ .

A diferencia del modelo *IA-SM*, y su caracterización (14)-(16), la información negativa no se interpreta aquí según el subespacio semántico B2.1, donde se cumple que  $x^- = y^+$ . Ahora, se cuenta con cuatro valores o grados que verifican la presencia de información positiva, por medio de  $x^+$  e  $y^+$ , e información negativa, por medio de  $x^-$  e  $y^-$ . Estos grados luego se agregan según la metodología D2, conformando la versión borrosa de la estructura completa P-A, [49], [51], a partir de la intersección entre el orden generado por  $\langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\phi$  y el generado por  $\langle z, z^{-1}, g, h \rangle_\phi$ , tal que,

$$\langle R^+, R^- \rangle_{P-A} = T\left(\langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\varphi, \langle z, z^{-1}, g, h \rangle_\varphi\right),$$

donde  $T$  es una  $t$ -norma continua y  $\langle R^+, R^- \rangle_{P-A}$  es el predicado de preferencia y aversión “es al menos tan bueno y al menos tan malo como”.

Entonces se obtienen dieciséis posibles situaciones (ver Tabla 3), identificadas mediante diez funciones que caracterizan la estructura completa P-A en su versión continua,

$$\langle pz, pa, pg, ph, iz, ig, ih, jz, jg, jh \rangle,$$

de la siguiente forma:

- **Ambivalencia:**  $pz = T(p, z)$
- **Preferencia fuerte:**  $pa = T(p, z^{-1})$
- **Pseudo-preferencia:**  $pg = T(p, g)$
- **Preferencia semi-fuerte:**  $ph = T(p, h)$
- **Pseudo-aversión:**  $iz = T(i, z)$
- **Indiferencia fuerte:**  $ig = T(i, g)$
- **Indiferencia positiva:**  $ih = T(i, h)$
- **Aversión semi-fuerte:**  $jz = T(j, z)$
- **Indiferencia negativa:**  $jg = T(j, g)$
- **Incomparabilidad por ignorancia:**  $jh = T(j, h)$

Esta definición borrosa de la estructura completa P-A, representa de una manera relacional y gradual, situaciones o estados intermedios del conocimiento del individuo frente a la decisión. Entonces, se identifican sus índices lingüísticos, según el tipo de incertidumbre subjetiva que representan, junto con sus correspondientes intensidades de verificación.

De esta manera, los distintos estados epistémicos representados por cada una de estas funciones constituyen un marco flexible y representativo de la situación subjetiva del individuo frente a una decisión. De este modo, a partir de la combinación de la preferencia estricta con las relaciones básicas de aversión se obtienen los cuatro valores de  $pz$ ,  $pa$ ,  $pg$  y  $ph$ . La primera es una situación de ambivalencia ( $pz$ ), dado que coexisten dos valoraciones antagónicas de preferencia y aversión estrictas, donde  $x$  es mejor y a la vez peor que  $y$ . Nótese que en este caso no hay una decisión fácil debido a la ambivalencia natural del problema. La segunda, en cambio, es una situación de preferencia fuerte ( $pa$ ), donde se tiene preferencia estricta y aversión estricta inversa, lo cual hace que la preferencia estricta sea aún más fuerte debido a que la otra alternativa es peor.

Siguiendo con la descripción de la estructura completa P-A, la situación de pseudo-preferencia ( $pg$ ) refleja una situación en que se verifica preferencia estricta aunque las dos alternativas son igual de malas, reflejando un cierto grado de insatisfacción conflictiva, mientras que la situación de preferencia semi-fuerte ( $ph$ ) representa el caso en el cual se tiene preferencia estricta y no se sabe nada acerca de los atributos negativos de las opciones, pues existe un grado de incomparabilidad por aversión.

Por el lado de la indiferencia, su combinación con la aversión estricta genera una situación de pseudo-aversión ( $iz$ ), donde las alternativas son igual de buenas pero una es peor que la otra. En cuanto a la combinación entre la indiferencia y la

indiferencia por aversión, el resultado es el de la indiferencia fuerte (*ig*), pues ambas alternativas son igual de buenas y de malas, es decir, son bastante similares entre sí. En último lugar, por la combinación entre indiferencia e incomparabilidad por aversión, se obtiene la indiferencia positiva (*ih*), pues no se sabe nada de los atributos negativos de *x* e *y* pero sí se sabe que son igual de buenas.

Por último, se tienen las situaciones de incomparabilidad valoradas de acuerdo con *iz*, *ig* y *ih*. La primera situación es de aversión semi-fuerte (*iz*), la cual representa el caso en el cual se tiene aversión estricta pero no se sabe nada acerca de los atributos positivos de las opciones, pues existe un grado de incomparabilidad sobre la preferencia. La segunda es una situación de indiferencia negativa (*ig*), donde no se sabe nada acerca de los atributos positivos entre *x* e *y* pero sí se sabe que son igual de malas, reflejando una inconformidad fuerte sobre las alternativas disponibles. Finalmente se obtiene la situación de absoluta incomparabilidad, denominada incomparabilidad por ignorancia (*ih*), donde el individuo no cuenta con información relevante para encontrar argumentos a favor ni en contra acerca de las alternativas en cuestión.

$\langle R^+, R^- \rangle_{P-A}$	<i>z</i>	$z^{-1}$	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>p</i>	<i>pz</i>	<i>pa</i>	<i>pg</i>	<i>ph</i>
$p^{-1}$	$pa^{-1}$	$pz^{-1}$	$pg^{-1}$	$ph^{-1}$
<i>i</i>	<i>iz</i>	$iz^{-1}$	<i>ig</i>	<i>ih</i>
<i>j</i>	<i>jz</i>	$jz^{-1}$	<i>ig</i>	<i>ih</i>

**Tabla 3:** Diez funciones que componen la versión borrosa de la estructura completa P-A:  $\langle pz, pa, pg, ph, iz, ig, ih, jz, jg, jh \rangle$ .

Ahora, se examinan soluciones particulares para el modelo borroso *IA2-SM2*, primero acerca de la estructura básica P-A (Sección 3.3.1.2.1), y a continuación, explorando la estructura completa P-A (Sección 3.3.1.2.2).

### 3.3.1.2.1 Soluciones particulares para la estructura básica de Preferencia-Aversión

Como se ha visto en la Sección 3.1, la estructura evaluativa de tipo F1 permite la asignación de un valor, según el grado en que un par de alternativas son compatibles con el predicado representado por la estructura básica P-A. De este modo, el modelo *IA2-SM2* encuentra diferentes soluciones, de acuerdo con las funciones de preferencia  $(p, i, j)$  y de aversión  $(z, g, h)$ , y las propiedades que éstas permiten verificar.

Entonces, de manera general, la estructura básica P-A  $\langle (p, i, j), (z, g, h) \rangle_\varphi$ , definida a partir de una terna de De Morgan  $(T, S, n)_\varphi$ , cumplen las siguientes propiedades básicas.

**Lema 1:** Dadas las ecuaciones (29), (31) y (32), (34) del modelo *IA2-SM2*, las siguientes propiedades son ciertas para todo  $x^+, x^-, y^+, y^- \in [0, 1]$ :

$$PA1. \quad p(0, y^+) = i(0, y^+) = 0;$$

$$PA2. \quad p(x^+, 1) = j(x^+, 1) = 0;$$

$$PA3. \quad p(x^+, 0) = i(x^+, 1) = x^+;$$

$$PA4. \quad p(1, x^+) = j(0, x^+) = n(x^+);$$

$$PA5. \quad z(0, y^-) = g(0, y^-) = 0;$$

$$PA6. z(x^-, 1) = h(x^-, 1) = 0;$$

$$PA7. z(x^-, 0) = g(x^-, 1) = x^-;$$

$$PA8. z(1, x^-) = h(0, x^-) = n(x^-).$$

**Demostración:**

(PA1) PA5: Sea  $x^- = 0$ , luego  $S(z(0, y^-), g(0, y^-)) = 0$  por (32) y  $S(n, m) = 0$

si y sólo si  $n = m = 0$ . Del mismo modo, reemplazando  $z$  por  $p$  y  $g$  por  $i$ , se

demuestra PA1 [43].

(PA2) PA6: Sea  $x^- = 1$  en (34), luego  $z(y^-, 1) = 0$  y  $h(y^-, 1) = 0$ . De este modo

$S(z(y^-, 1), h(y^-, 1)) = n(1) = 0$ . De igual manera, reemplazando  $z$  por  $p$  y  $h$  por

$j$ , se demuestra PA2 [43].

(PA3) PA7: Sea  $y^- = 0$  en (32), entonces, por (PA5) y SM2,

$$x^- = S(z(x^-, 0), g(x^-, 0)) = S(z(x^-, 0), 0) = z(x^-, 0),$$

y sea  $y^- = 1$  en (32), luego, por (PA6),

$$x^- = S(z(x^-, 1), g(x^-, 1)) = S(0, g(x^-, 1)) = g(x^-, 1).$$

De manera análoga, reemplazando  $z$  por  $p$  y  $g$  por  $i$ , se demuestra PA3 [43].

(PA4) PA8. Sea  $y^- = 1$  en (34), luego, por PA6 y SM2,

$$n(x^-) = S(z(1, x^-), h(1, x^-)) = S(z(1, x^-), 0) = z(1, x^-),$$

y sea  $y^- = 0$  en (34), entonces, por PA5,

$$n(x^-) = S(z(0, x^-), h(0, x^-)) = S(0, h(0, x^-)) = h(0, x^-).$$

Del mismo modo, reemplazando  $z$  por  $p$  y  $h$  por  $j$ , se demuestra PA4 [43].  $\diamond$

Ahora, así como se tienen las cotas para  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , dadas por (17)-(19), donde  $x' = x^+$  e  $y' = y^+$ , se demuestra que las siguientes cotas para  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$  verifican las ecuaciones (32), (34). Se recuerda que  $(T^L, S^L, n)_\varphi$  es una terna de De Morgan de tipo fuerte (bajo la estructura de Lukasiewicz), y  $(T^m, S^m, n)_\varphi$  es una terna de De Morgan de tipo *max-min* (véase la Sección 2.4.3).

**Teorema 2:** Las desigualdades,

$$T^L(x^-, n(y^-)) \leq z(x^-, y^-) \leq T^m(x^-, n(y^-)),$$

$$T^L(x^-, y^-) \leq g(x^-, y^-) \leq T^m(x^-, y^-),$$

$$T^L(n(x^-), n(y^-)) \leq h(x^-, y^-) \leq T^m(n(x^-), n(y^-)).$$

verifican el sistema definido por el par de ecuaciones (32), (34) y caracterizan las cotas de  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ .

**Demostración:** Esta demostración se desarrolla de forma análoga a como se demuestran las desigualdades (17)-(19) del modelo IA-SM [43]. De este modo, como  $(T, S, n)_\varphi$  es una terna de De Morgan, por el axioma PA2 y el Lema 1 se sigue que  $z(x^-, y^-) \leq z(1, y^-) = n(y^-)$  y que  $z(x^-, y^-) \leq z(x^-, 0) = x^-$ . Por lo tanto la cota superior de  $z$  se verifica. De la misma manera se obtienen las cotas superiores de  $g$  y de  $h$ . Por el otro lado, para el caso de las cotas inferiores, se tiene que,

$$\begin{aligned} x^- = S(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-)) &\leq S(z(x^-, y^-), g(1, y^-)) = S(z(x^-, y^-), y^-) \\ &= n\left[T^L\left(n(z(x^-, y^-), n(y^-))\right)\right]. \end{aligned}$$

Esto es cierto si y sólo si  $z(x^-, y^-) \geq T^L(x^-, n(y^-))$ . Por lo tanto la cota inferior de  $z$  se verifica y de la misma manera se pueden obtener las cotas inferiores de  $g$  y de  $h$ .  $\diamond$

Este resultado implica el siguiente, donde se tiene una caracterización general para  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , de manera análoga al Teorema 3.2 de [43] y su solución para  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  de (29), (31).

**Teorema 3:** Para toda solución  $\langle z, g, h \rangle_\phi$  de (32), (34), donde  $x^-, y^- \in [0, 1]$ , se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{TPA1:} \quad T^L(z(x^-, y^-), z(y^-, x^-)) = 0$$

$$\mathbf{TPA2:} \quad T^L(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-)) = 0$$

$$\mathbf{TPA3:} \quad T^L(z(x^-, y^-), h(x^-, y^-)) = 0$$

$$\mathbf{TPA4:} \quad T^L(g(x^-, y^-), h(x^-, y^-)) = 0$$

$$\mathbf{SPA1:} \quad S^L\left(S^L(z(x^-, y^-), z(y^-, x^-)), S^L(g(x^-, y^-), h(x^-, y^-))\right) = 1$$

**Demostración:**

$$\mathbf{TPA1:} \quad T^L(z(x^-, y^-), z(y^-, x^-)) \leq T^L\left(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(y^-, n(x^-))\right) \quad y$$

$$T^L\left(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(y^-, n(x^-))\right) \leq T^L(x^-, n(x^-)) = 0.$$

$$\mathbf{TPA2:} \quad T^L(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-)) \leq T^L(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(x^-, y^-)) \quad \text{y}$$

$$T^L(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(x^-, y^-)) \leq T^L(n(y^-), y^-) = 0.$$

$$\mathbf{TPA3:} \quad T^L(z(x^-, y^-), h(x^-, y^-)) \leq T^L(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(n(x^-), n(y^-))) \quad \text{y}$$

$$T^L(T^m(x^-, n(y^-)), T^m(n(x^-), n(y^-))) \leq T^L(x^-, n(x^-)) = 0.$$

$$\mathbf{TPA4:} \quad T^L(g(x^-, y^-), h(x^-, y^-)) \leq T^L(T^m(x^-, y^-), T^m(n(x^-), n(y^-))) \quad \text{y}$$

$$T^L(T^m(x^-, y^-), T^m(n(x^-), n(y^-))) \leq T^L(x^-, n(x^-)) = 0.$$

$$\mathbf{SPA1:} \quad S^L(S^L(z(x^-, y^-), z(y^-, x^-)), S^L(g(x^-, y^-), h(x^-, y^-)))$$

$$= S^L(S^L(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-)), S^L(z(y^-, x^-), h(y^-, x^-))) = S^L(x^-, n(x^-)). \quad \diamond$$

De esta manera se tiene que, con respecto a  $T^L$ ,  $Z$  es asimétrica ( $TPA1$ ), y con respecto a  $S^L$ , la unión de  $Z$ ,  $Z^{-1}$ ,  $G$ ,  $H$  es una partición de  $X \times X$ . Entonces se pueden caracterizar las siguientes soluciones para el sistema (32)-(34), análogamente a como se ha hecho para el modelo  $IA-SM$  y el sistema (29)-(31) [43], [103], [140] (véase la Sección 2.4, donde  $x' = x^+$  e  $y' = y^+$ , tal que los resultados de obtienen automáticamente reemplazando  $z$  por  $p$ ,  $g$  por  $i$  y  $h$  por  $j$ ).

Por lo tanto, la solución de  $\langle z, g, h \rangle_\phi$  que satisface las ecuaciones (32) y (34), donde  $Z$  es asimétrica, tal que si se cumple que  $Z(x, y) > 0$  entonces es cierto que  $Z(y, x) = 0$ , recibe la siguiente formulación,

$$z(x^-, y^-) = T^L(x^-, n(y^-)), \quad (35)$$

$$g(x^-, y^-) = T^m(x^-, y^-), \quad (36)$$

$$h(x^-, y^-) = T^m(n(x^-), n(y^-)). \quad (37)$$

En cambio, para la solución de  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$  que satisface el sistema (32)-(34), donde  $z$  y  $z^{-1}$  pueden coexistir simultáneamente y  $g$  y  $h$  son mutuamente excluyentes, se tiene que,

$$z(x^-, y^-) = T^m(x^-, n(y^-)), \quad (38)$$

$$g(x^-, y^-) = T^L(x^-, y^-), \quad (39)$$

$$h(x^-, y^-) = T^L(n(x^-), n(y^-)). \quad (40)$$

Nótese que tanto (35)-(37) como (38)-(40) siguen la estructura estándar de Lukasiewicz, tal que en la primera,  $z$  y  $z^{-1}$  están definidas por medio de la  $t$ -norma  $T^L$ , por lo que son mutuamente excluyentes, y  $g$  y  $h$  lo están por el correspondiente residuo (dado por  $T^m$ ), mientras que en la segunda,  $g$  y  $h$  están definidas por la  $t$ -norma  $T^L$ , siendo estas mutuamente excluyentes, y  $z$  y  $z^{-1}$  lo están por el correspondiente residuo (mediante  $T^m$ ).

Por otro lado, la solución de  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$  para las ecuaciones (32) y (34) que permite la coexistencia de las cuatro situaciones de aversión, tal que  $T(z(x, y), z(y, x)) = T(g(x, y), h(y, x))$ , requiere que  $T$  sea la  $t$ -norma multiplicativa o probabilística  $T^p$  (véase la Sección 2.4.3), tal que,

$$z(x^-, y^-) = T^p(x^-, n(y^-)), \quad (41)$$

$$g(x^-, y^-) = T^p(x^-, y^-), \quad (42)$$

$$h(x^-, y^-) = T^p(n(x^-), n(y^-)). \quad (43)$$

De manera puramente formal, la caracterización de estas soluciones para el sistema axiomático *IA2-SM2* y la estructura básica de aversión  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , corresponde con las soluciones existentes para la estructura básica de preferencia  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  [43], [95], [140] (formuladas en la Sección 2.4.4).

Dicha solución admite una total y perfecta separabilidad entre sus componentes, donde además de valorar las relaciones básicas de preferencia estricta, indiferencia e incomparabilidad, se valoran también las relaciones básicas de aversión estricta, indiferencia por aversión e incomparabilidad por aversión. Esto es consecuencia de que para ambos órdenes, se tiene una partición perfecta del conjunto de alternativas, de manera que

$$S^L(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+), p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)) = 1$$

y

$$S^L(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-), z(y^-, x^-), h(y^-, x^-)) = 1.$$

Nótese que si en lugar de  $S^L$  se toma la  $t$ -conorma  $S^p$ , la agregación de ambas estructuras básicas sigue siendo una partición de  $X \times X$ , pero si se toma en cambio la  $t$ -conorma  $S^m$ , el resultado es tal que,

$$S^m(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+), p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)) \leq 1$$

y

$$S^m(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-), z(y^-, x^-), h(y^-, x^-)) \leq 1.$$

De este modo, mediante la utilización de  $S^m$  para agregar los distintos componentes de las estructuras básicas de preferencia y aversión, se obtiene un cierto tipo de incertidumbre (medido por la diferencia entre el valor agregado por  $S^m$  y 1) acerca de la preferencia o aversión que pueda existir con respecto a determinado par de alternativas. Este punto, importante para la representación de la incertidumbre subjetiva en el proceso de decisión, se examina luego en la Sección 3.3.1.3, donde se exploran distintos tipos de incertidumbre sobre el modelo P-A.

A continuación, se examina la estructura completa P-A, de acuerdo con su caracterización valorada de los distintos estados subjetivos de decisión. Entonce se tiene que dicha caracterización se constituye a partir de la evaluación conjunta de los valores de preferencia y aversión, tal que se pueden identificar, además de los índices lingüísticos sobre las situaciones de decisión, los grados de verificación sobre dichas situaciones.

### **3.3.1.2.2 Soluciones particulares para la estructura completa de Preferencia-Aversión**

En este apartado, se investiga acerca del grado de separabilidad de las situaciones que componen la estructura completa P-A, que resulta de la intersección entre las dos estructuras de preferencia  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  y aversión  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ . Se recuerda que esta estructura completa P-A, tal como se introduce en la Sección 3.3.1.2, utiliza una  $t$ -norma  $T$  continua para operar con la intersección entre las dos estructuras básicas de preferencia y aversión.

Ahora, sea  $T = T^m$  el operador mediante el cual se define la estructura completa P-A, tal que

$$\langle R^+, R^- \rangle_{P-A} = T^m \left( \langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\varphi, \langle z, z^{-1}, g, h \rangle_\varphi \right)$$

Entonces, para las ecuaciones de preferencia (20)-(22) y (23)-(25), y para las de aversión (35)-(37) y (38)-(40), donde se utiliza la estructura estándar de Lukasiewicz y su correspondiente residuo en la caracterización de las distintas situaciones de preferencia y aversión, se tiene que los valores de la estructura completa P-A suman al menos 1 y máximo 3. Mientras que para las ecuaciones (26)-(28) y (41)-(43), donde se utiliza la estructura probabilística, se tiene que suman al menos 1 y máximo 4.

**Teorema 4:** La suma de los valores de la estructura completa P-A, donde la intersección entre las relaciones básicas de preferencia y aversión se opera mediante la  $t$ -norma  $T^m$ , es mínimo 1 en cualquier caso y máximo 3 para los casos en que se utilice la estructura estándar de Lukasiewicz o 4 para los casos en que se utilice la estructura probabilística.

**Demostración:** Sea  $\mathbb{I}^L = \sum T^m \left( (p, p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h) \right)$  el sumatorio de los valores de la estructura completa P-A, obtenidos por medio de una estructura estándar de Lukasiewicz y de su correspondiente residuo. Es evidente que el mínimo de  $\mathbb{I}^L$  ocurre cuando se verifica una única situación, caso en el cual  $\mathbb{I}^L = 1$ . Pero cuando se verifica más de una, puede ser el caso que sea mayor que 1.

Esto se puede ver fácilmente tomando las ecuaciones de preferencia (20)-(22) y las ecuaciones de aversión (38)-(40), tal que,

$$p \geq z \geq i \geq g \geq j \geq h \geq p^{-1} \geq z^{-1}.$$

Entonces se sigue que  $\mathbb{I}^L = 3h + 2g + 2z^{-1} + z + 5p^{-1} + 2j + i > 1$  (debido a que  $h + g + z^{-1} + z = 1$ ).

Luego se trata de encontrar el máximo de  $\mathbb{I}^L$ . Nótese que al utilizar la estructura estándar de Lukasiewicz, una de las relaciones básicas es siempre excluida. Por lo tanto, se plantea el sistema de ecuaciones para (38)-(40), asumiendo que  $z > 0$ , lo cual implica que  $z^{-1} = 0$ , tal que  $z = g = h$ . Esto es, siempre que la  $t$ -norma sea  $T^m$ , la suma de los valores de la estructura completa P-A es máxima cuando se cumple que  $z = g = h$ , pues así el valor mínimo en toda situación es también el máximo.

De este modo se obtiene que  $x^- = 2/3$  y que  $y^- = 1/3$ . Reemplazando de igual manera para  $x^+ = 2/3$  e  $y^+ = 1/3$ , en (23)-(25), se obtiene que  $1 \leq \mathbb{I}^L \leq 3$ . El mismo resultado se sostiene para (20)-(22) y (35)-(37).

Ahora, para el caso en que se utilice la estructura probabilística,  $\mathbb{I}^p = \sum T^m((p, p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h))$  es el correspondiente sumatorio de todos los valores de la estructura completa P-A. Entonces el mínimo de  $\mathbb{I}^p$  se obtiene cuando solo una situación se cumple, caso en el cual  $\mathbb{I}^p = 1$ . Solo falta encontrar el máximo para  $\mathbb{I}^p$ .

Tal como en el caso anterior, se plantea el sistema de ecuaciones para (41)-(43), tal que  $z = z^{-1} = g = h$ . De este modo se obtiene que  $x^- = y^- = 1/2$ . Reemplazando de igual manera para  $x^+ = y^+ = 1/2$ , en (26)-(28), se encuentra que  $1 \leq \mathbb{I}^M \leq 4$ . ◇

Luego, si se utiliza la  $t$ -norma de Lukasiewicz  $T^L$  para operar con la intersección sobre la estructura básica P-A, tal que

$$\langle R^+, R^- \rangle_{P-A} = T^L \left( \langle p, p^{-1}, i, j \rangle_{\varphi}, \langle z, z^{-1}, g, h \rangle_{\varphi} \right)$$

la suma de los valores de la estructura completa P-A es al menos 0 y máximo 1.

**Teorema 5:** La suma de los valores de la estructura completa P-A, donde la intersección entre las relaciones básicas de preferencia y aversión es la  $t$ -norma  $T^L$ , es al menos 0 y máximo 1.

**Demostración:** Sea  $\Pi = \sum T^L \left( (p, p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h) \right)$  el sumatorio de todos los valores de la estructura completa P-A. De este modo, el valor mínimo del sumatorio es 0, pues si se asume, sin pérdida de generalidad, que  $p = 0.5$  y que  $z = 0.5$ , se tiene que el resto de los valores de la estructura básica de preferencia suman 0.5 e igualmente, que el resto de los valores de la estructura básica de aversión suman también 0.5. Por lo tanto, mediante la  $t$ -norma  $T^L$ , el valor de agregar la estructura básica P-A es 0, evidentemente su valor mínimo.

Con respecto a su valor máximo, se asume, sin falta de generalidad, que  $p > 0.5$  y que  $z = 0.5$ , el cual representa el caso límite para el cual  $pz > 0$ . De este modo se cumple que  $T^L(p, z) = p + 0.5 - 1$ . Luego, como  $p > 0.5$ , entonces el resto de valores de la estructura básica de preferencia suman menos que 0.5, y como  $z = 0.5$ , entonces el resto de valores de la estructura básica de aversión suman 0.5, de donde se obtiene que  $\sum T^L \left( (p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h) \right) = 0$  y que  $T^L(p, z^{-1}) + T^L(p, g) + T^L(p, h) = p + 0.5 - 1$ .

Por lo tanto, se encuentra el valor de  $p$  para el cual es máxima la suma  $\sum T^L((p), (z, z^{-1}, g, h)) = 2(p + 0.5 - 1) = 2p - 1$ , de donde se obtiene como solución que  $p = 1$  y que el valor máximo para  $\Pi$  es 1.  $\diamond$

Por otro lado, si se utiliza la  $t$ -norma probabilística  $T^p$  para operar con la intersección sobre la estructura básica P-A, tal que

$$\langle R^+, R^- \rangle_{P-A} = T^p \left( \langle p, p^{-1}, i, j \rangle_\varphi, \langle z, z^{-1}, g, h \rangle_\varphi \right)$$

la suma de los componentes de la estructura completa P-A es siempre igual a 1.

**Teorema 6:** La suma de los valores de la estructura completa P-A, donde la intersección entre las relaciones básicas de preferencia y aversión es la  $t$ -norma  $T^p$ , siempre es igual a 1.

**Demostración:** Sea  $\Pi = \sum T^p \left( (p, p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h) \right)$  el sumatorio de todos

los valores de la estructura completa P-A. Entonces se obtiene directamente que

$$\Pi = \sum T^p \left( (p, p^{-1}, i, j), (z, z^{-1}, g, h) \right) = (p + p^{-1} + i + j)(z + z^{-1} + g + h) = 1,$$

debido a la caracterización de las soluciones de preferencia (20)-(22), (23)-(25),

(26)-(28) y aversión (35)-(37), (38)-(40) y (41)-(43), donde  $p + p^{-1} + i + j = 1$  y

$$z + z^{-1} + g + h = 1. \quad \diamond$$

### 3.4 Representación de distintos tipos de incertidumbre

Recapitulando, se ha visto por un lado que se reconoce una completa separabilidad de las relaciones básicas de preferencia y aversión, siguiendo las soluciones presentadas tanto para la estructura básica de preferencia  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , (20)-(22), (23)-

(25) o (26)-(28), como para la estructura básica de aversión  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , (35)-(37), (38)-(40) o (41)-(43), tal que

$$p + p^{-1} + i + j = 1,$$

$$z + z^{-1} + g + h = 1.$$

Por otro lado, se reconoce la existencia de un tipo de incertidumbre o ambigüedad semántica, explícitamente identificada en primera instancia por la PCT [118], tal que no siempre son perfectamente separables las relaciones básicas en las cuales se descompone la estructura  $R^+$ , como tampoco lo son las relaciones básicas en las que se descompone  $R^-$ .

Recordemos que desde la perspectiva de la PCT, se reconoce la posibilidad de que no sean perfectamente diferenciables los componentes básicos de  $R^+$ . Es en este sentido que se acepta la existencia de ambigüedad sobre la identificación de la relación básica de preferencia que le corresponde a cada situación epistémica de decisión.

Entonces la PCT, primero mediante la caracterización de la relación de preferencia global  $Q$ , y luego, mediante la caracterización de la estructura PCT (en base a los modelos 4-PCT y c-PCT), da cuenta de esta ambigüedad frente a la decisión. Esto es, utilizando estructuras más flexibles, como lo es en un principio  $\langle P, I, Q, J \rangle$  o luego las estructuras 4-PCT y c-PCT, se caracteriza la incertidumbre subjetiva frente al requerimiento de identificar una, y solo una, relación básica de la estructura dada por  $\langle P, I, J \rangle$ .

Del mismo modo, la estructura completa P-A caracteriza distintos tipos de incertidumbre semántica frente a la decisión. Esto es, mediante las diez situaciones

que la componen, se representan distintos tipos de estados del conocimiento, cada uno ejemplificando, bajo índices lingüísticos, el tipo de problema al que se enfrenta el individuo.

De esta manera, estas estructuras examinan otros tipos de incertidumbre subjetiva, aparte de la típicamente probabilística o frecuentista, y en el caso de la versión borrosa de la estructura completa P-A y de la c-PCT, se ofrecen grados de verificación sobre sus distintas situaciones. De esta forma, se ayuda a examinar el proceso de decisión del individuo, describiendo su estado del conocimiento frente al problema en cuestión.

A continuación se examinan algunas otras representaciones de incertidumbre subjetiva, explorando primordialmente la estructura básica P-A.

### 3.4.1 Incertidumbre básica

Como se ha visto, las soluciones para la estructura básica P-A (20)-(22), (23)-(25), (26)-(28) y (35)-(37), (38)-(40) y (41)-(43), admiten una total y perfecta separabilidad entre sus componentes, siempre que se asume que  $S = S^L$  o que  $S = S^p$ , tal que

$$S(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+), p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)) = 1$$

y

$$S(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-), z(y^-, x^-), h(y^-, x^-)) = 1.$$

Pero si se toma en cambio la  $t$ -conorma  $S^m$ , el resultado es tal que,

$$S^m(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+), p(y^+, x^+), j(y^+, x^+)) \leq 1$$

y

$$S^m(z(x^-, y^-), g(x^-, y^-), z(y^-, x^-), h(y^-, x^-)) \leq 1.$$

Entonces se define un grado de *incertidumbre básica*  $\pi$ , obtenido mediante la diferencia  $\pi_p = 1 - S^m(p, p^{-1}, i, j)$ , para el caso de la estructura básica de preferencia, y  $\pi_z = 1 - S^m(z, z^{-1}, g, h)$ , para el caso de la estructura básica de aversión. Este grado expresa la incertidumbre acerca de la *confianza* sobre las intensidades de preferencia y aversión que pueda existir con respecto a determinado par de alternativas.

La idea básica de este tipo de incertidumbre es la siguiente. Siempre que no se tenga una perfecta verificación de una de las situaciones de  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  o de  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , entonces se tiene presencia de incertidumbre básica, tal que  $\pi > 0$ . Esto es, porque el valor agregado mediante  $S^m$  obtiene la intensidad máxima, y si ningún valor es 1, entonces el grado de incertidumbre es mayor que 0.

De este modo, bajo un marco evaluativo de tipo (B2,F1), se caracteriza un grado de incertidumbre a partir de la borrosidad de tipo F1, acerca de la confianza que tiene el individuo en las intensidades de preferencia y aversión. Dicha marco evaluativo ha sido examinado en la Sección 3.1, junto con el marco de tipo (B2,F2), donde a partir de la borrosidad de tipo F2, se formula la representación de la *incertidumbre por inexactitud*, por medio de la medida de inexactitud *IN1-IN4*. A continuación se aplica esta medida sobre la estructura básica P-A.

### 3.4.2 Incertidumbre por inexactitud

En la Sección 3.1 se presentó un marco evaluativo compuesto por los dos tipos de bipolaridad B1 y B2, junto con los dos tipos de borrosidad F1 y F2. De este modo, examinando el marco evaluativo del modelo P-A y la caracterización de su estructura completa, se tiene que la especificación de sus soluciones corresponden con el marco (B2,F1), donde se encuentra un grado único para valorar cada situación de decisión.

Ahora, exploramos el otro tipo de marco evaluativo (B2,F2), donde a partir de la borrosidad de tipo F2, y la aproximación intervalo-valorada (IV) sobre los grados de intensidad de cada situación, se incluye en el análisis otro tipo de incertidumbre. Este tipo de incertidumbre corresponde con la inexactitud asociada con la valoración de dichas intensidades, y se le ha caracterizado como *incertidumbre por inexactitud*, por medio de la medida de inexactitud  $IN1-IN4$  (véase la Sección 3.1.1).

A continuación se aplica esta medida sobre la estructura básica P-A. Nótese que desde que se tiene conocimiento de las cotas de las funciones caracterizando las distintas situaciones de la estructura básica P-A (ecuaciones (17)-(19) para el caso de preferencia y el Teorema 2 para el caso de aversión), bajo un marco de representación de la información de tipo F1, se tiene a disposición una cierta medida de imprecisión  $\alpha$ , en el sentido de  $IN1-IN4$ , que permite trabajar el marco F1 a la manera de uno de tipo F2.

En efecto, si se definen respectivamente los grados de incertidumbre por inexactitud de  $\langle p, i, j \rangle_{\varphi}$  como,

$$\alpha(p(x^+, y^+)) = T^m(x^+, n(y^+)) - T^L(x^+, n(y^+)), \quad (44)$$

$$\alpha(i(x^+, y^+)) = T^m(x^+, y^+) - T^L(x^+, y^+), \quad (45)$$

$$\alpha(j(x^+, y^+)) = T^m(n(x^+), n(y^+)) - T^L(n(x^+), n(y^+)). \quad (46)$$

y de  $\langle z, g, h \rangle_\phi$  como,

$$\alpha(z(x^-, y^-)) = T^m(x^-, n(y^-)) - T^L(x^-, n(y^-)), \quad (47)$$

$$\alpha(g(x^-, y^-)) = T^m(x^-, y^-) - T^L(x^-, y^-), \quad (48)$$

$$\alpha(h(x^-, y^-)) = T^m(n(x^-), n(y^-)) - T^L(n(x^-), n(y^-)). \quad (49)$$

entonces es posible aprovechar toda la información disponible, al estilo de F2, pero bajo el marco de F1. De este modo, a pesar de representar las intensidades por un valor único, se cuenta también con un cierto grado de imprecisión natural al proceso de evaluación del individuo. Esta posibilidad de incluir medidas de información en la estructura de las relaciones básicas, ha sido examinada también en [48], [53].

En este sentido, se puede pasar de un espacio F1 a uno de tipo F2 si se toma el intervalo dado por las cotas respectivas de  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  y  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , tal que para cada intensidad de cada una de las relaciones básicas de preferencia y aversión, se tiene una cota inferior y otra superior dada por (17)-(19) y el Teorema 2, de modo que,

$$p(x^+, y^+) = [T^L(x^+, n(y^+)), T^m(x^+, n(y^+))], \quad (50)$$

$$i(x^+, y^+) = [T^L(x^+, y^+), T^m(x^+, y^+)], \quad (51)$$

$$j(x^+, y^+) = [T^L(n(x^+), n(y^+)), T^m(n(x^+), n(y^+))], \quad (52)$$

$$z(x^-, y^-) = \left[ T^L(x^-, n(y^-)), T^m(x^-, n(y^-)) \right], \quad (53)$$

$$g(x^-, y^-) = \left[ T^L(x^-, y^-), T^m(x^-, y^-) \right], \quad (54)$$

$$h(x^-, y^-) = \left[ T^L(n(x^-), n(y^-)), T^m(n(x^-), n(y^-)) \right]. \quad (55)$$

De esta manera, la subjetividad mediante el cual el individuo valora sus opciones, de acuerdo con el marco evaluativo propuesto en la Sección 3.1, permite explorar su imprecisión o inexactitud mediante las representaciones de (44)-(49) o (50)-(55). Siguiendo este marco evaluativo, se propone ahora una caracterización explícita de las soluciones de tipo F2, para el modelo borroso P-A.

### 3.4.3 Soluciones particulares para una estructura evaluativa de tipo F2

Mediante la medida de inexactitud  $IN1-IN4$ , se ha examinado en el apartado anterior la incertidumbre por inexactitud desde un marco de tipo (B2,F1), a la manera de uno de tipo (B2,F2). Ahora se explora explícitamente el marco (B2,F2), caracterizando soluciones particulares intervalo-valoradas para el modelo borroso P-A.

En este caso, el individuo le asigna a cada par de alternativas  $x, y \in X$  un intervalo de intensidades de preferencia,

$$\left[ x_L^+, x_U^+ \right] = \left[ \mu_{R^+}^L(x, y), \mu_{R^+}^U(x, y) \right],$$

junto con el correspondiente intervalo de aversión,

$$\left[ x_L^-, x_U^- \right] = \left[ \mu_{R^-}^L(x, y), \mu_{R^-}^U(x, y) \right].$$

Por lo tanto, para incluir la incertidumbre por inexactitud en la caracterización de las soluciones de  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  y  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , se puede adoptar la notación de los grados

de intensidad de acuerdo a intervalos, extendiendo las soluciones de tipo F1 a soluciones de tipo F2. Para ello, se ha definido la negación de los conjuntos borrosos IVFS en la Sección 3.1.1, tal que

$$n_{IV}([\mu_R^L, \mu_R^U]) = [n(\mu_R^U), n(\mu_R^L)],$$

y tal como se ha definido una  $t$ -conorma  $S_{IV}$  y una  $t$ -norma  $T_{IV}$   $a, b, c, d \in [0, 1]$ , se tiene que los respectivos operadores de Lukasiewicz están dados por,

$$S_{IV}^L([a, b], [c, d]) = [S^L(a, c), S^L(b, d)],$$

$$T_{IV}^L([a, b], [c, d]) = [T^L(a, c), T^L(b, d)],$$

los operadores de tipo *max-min* están dados por,

$$S_{IV}^m([a, b], [c, d]) = [S^m(a, c), S^m(b, d)],$$

$$T_{IV}^m([a, b], [c, d]) = [T^m(a, c), T^m(b, d)],$$

y los de tipo probabilístico por,

$$S_{IV}^p([a, b], [c, d]) = [S^p(a, c), S^p(b, d)],$$

$$T_{IV}^p([a, b], [c, d]) = [T^p(a, c), T^p(b, d)].$$

De este modo, para  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , la solución (20)-(22) se expresa como,

$$p([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+], [\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+]) = T_{IV}^m([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+], n_{IV}([\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+])),$$

$$i([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+], [\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+]) = T_{IV}^L([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+], [\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+]),$$

$$j([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+], [\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+]) = T_{IV}^L(n_{IV}([\underline{x}_L^+, \underline{x}_U^+]), n_{IV}([\underline{y}_L^+, \underline{y}_U^+])).$$

La solución (23)-(25) como,

$$p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^L\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right),$$

$$i\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^m\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right),$$

$$j\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^m\left(n_{IV}\left(\left[x_L^+, x_U^+\right]\right), n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right).$$

Y la solución (26)-(28) como

$$p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right),$$

$$i\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right),$$

$$j\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(n_{IV}\left(\left[x_L^+, x_U^+\right]\right), n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right).$$

Del mismo modo, para  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , la solución (38)-(40) se expresa como,

$$z\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^m\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right),$$

$$g\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^L\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right),$$

$$h\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^L\left(n_{IV}\left(\left[x_L^+, x_U^+\right]\right), n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right).$$

La solución (35)-(37) como,

$$z\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^L\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right),$$

$$g\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^m\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right),$$

$$h\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^m\left(n_{IV}\left(\left[x_L^+, x_U^+\right]\right), n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right).$$

Y la solución (41)-(43) como

$$z\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right),$$

$$g\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right),$$

$$h\left(\left[x_L^+, x_U^+\right], \left[y_L^+, y_U^+\right]\right) = T_{IV}^p\left(n_{IV}\left(\left[x_L^+, x_U^+\right]\right), n_{IV}\left(\left[y_L^+, y_U^+\right]\right)\right).$$

De esta forma cada relación básica tiene asociada una medida de inexactitud, siguiendo la caracterización *IN1-IN4*, como en el caso de  $\alpha(\mu_R(x)) = \mu_R^U(x) - \mu_R^L(x)$ , expresando una cierta ambigüedad con la respectiva valoración (IV) del individuo sobre la alternativas que tiene a su disposición.

Del mismo modo se construye la estructura completa P-A, consiguiendo su respectiva representación por intervalos (incluyendo la incertidumbre por inexactitud), de acuerdo con la verificación de sus distintas situaciones epistémicas de decisión. Entonces se necesitan los respectivos conectores  $T_{IV}^L$ ,  $T_{IV}^m$  y  $T_{IV}^p$ , los cuales permiten evaluar la intersección de las dos dimensiones de preferencia y aversión intervalo-valoradas.

Ahora se concluye este capítulo por medio de la siguiente sección, donde se revisa el espacio general semántico de preferencia, completándolo por medio del modelo P-A. De esta manera, el espacio más general B2.2, puede ser examinado desde las metodologías D1, caso de las estructuras 4-PCT y c-PCT, y D2, caso de la estructura completa P-A.

### 3.5 Exploración del espacio general semántico de preferencia

Como se ha visto en la Sección 3.2, es evidente que la bipolaridad, bajo sus distintas interpretaciones, está presente en la modelización de preferencias de

manera natural. Desde la teoría clásica de la utilidad y su generalización por medio de la representación numérica de un orden total (4), hasta la explícita referencia a las pérdidas y ganancias de la CPT (1) y (2), y el modelo CBC (3), como también el modelo estándar de preferencias borrosas (modelo *IA-SM*), el pseudo-criterio de la PCT (Definición *PsC*), y su formalización axiomática cuatro-valorada (modelo 4-PCT) y continua (modelo c-PCT).

De esta forma, el espacio general semántico de preferencia (Sección 3.2 y Figura 2) permite examinar conjuntamente todos estos modelos, y ahora, gracias a la propuesta del modelo P-A, se completa dicho espacio general, solucionando el vacío semántico identificado en esta investigación (Sección 3.2.4). En este sentido, el modelo P-A representa un ejemplo para el espacio B2.2-D2 (ver Figura 9), bajo la estructura evaluativa de tipo B2, y desarrollando el proceso de agregación sobre los pares  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ , tal que  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ , interpretando y agregando la información positiva aparte de la negativa.

Interdependencia Bipolaridad	D1	D2
<b>B1.1</b>	Teoremas <i>U, S, Q</i> Orden total (4)	Teoremas <i>U, S, Q</i> Orden total (4)
<b>B1.2</b>	CPT(1), (2), CBC(3)	PCT-Definición <i>PsC</i>
<b>B2.1</b>	<i>IA-SM</i> : (14)-(16)	<i>IA-SM</i> : (14)-(16)
<b>B2.2</b>	4-PCT, c-PCT	<i>IA2-SM2</i> : P-A

**Figura 9.** Espacio semántico de preferencia completo, donde cada modelo se clasifica según su semántica particular.

### 3.5.1 Comparación entre los modelos *IA-SM*, *c-PCT* y *P-A*

En esta sección se analizan las similitudes y diferencias que pueden existir entre los distintos modelos del espacio B2.1, en particular, el modelo *IA-SM*, y del espacio B2.2, en relación a los modelos *c-PCT* (espacio B2.2-D1) y *P-A* (espacio B2.2-D2). En primera instancia, el espacio semántico B2.2 generaliza los demás espacios, pues permite la verificación de  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ , donde se obtienen dos tipos de modelos de acuerdo con sus respectivos procedimientos de agregación D1 y D2. Entonces, estas dos metodologías pueden ser conjuntamente examinadas por medio del espacio general semántico de preferencia.

Esto es, bajo la metodología D1 de la estructura *c-PCT*, el mapa cognitivo del individuo frente a la decisión se construye a partir de la evaluación conjunta de los aspectos positivos y negativos, evaluando en primera instancia los pares  $\langle (x^+, x^-), (y^+, y^-) \rangle$ . Mientras que bajo la metodología D2 de la estructura completa *P-A*, dicho mapa se construye a partir de la evaluación de los pares  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ , tratando de manera independiente los aspectos positivos de los negativos.

Por lo tanto, las dos metodologías permiten identificar situaciones cualitativamente distintas, y siempre a partir de los mismos datos que ofrece el individuo, pero que reciben un tratamiento distinto en cada caso. En consecuencia, se presenta el siguiente teorema, donde se afirma que un procedimiento es distinto según se evalúen, de forma dependiente (D1) o independiente (D2), los atributos positivos y los negativos.

**Teorema 7:** La estructura c-PCT,  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$ , y la estructura completa P-A,  $\langle pz, pa, pg, ph, iz, ig, ih, jz, jg, jh \rangle$ , sólo son equivalentes si se impone la condición semántica  $y^+ = x^-$ .

**Demostración:** Se tiene que la intersección entre las relaciones básicas de preferencia  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , y aversión  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ , para la estructura completa P-A, y  $(R^t, R^k, R^u, R^f)$  y sus inversas para la estructura c-PCT, es una misma  $t$ -norma continua  $T$ . Ahora, se toma la solución para la estructura básica de preferencia dada por (20)-(22), y para la de aversión por (38)-(40), del mismo modo que las cuatro relaciones de la PCT están caracterizadas por (5)-(8), donde  $t(x^+, x^-) = R^t$ ,  $f(x^+, x^-) = R^f$ ,  $u(x^+, x^-) = R^u$  y  $k(x^+, x^-) = R^k$ , mediante la estructura estándar de Lukasiewicz y su correspondiente residuo.

- $pz$  no es equivalente a  $i$ :  $pz = T(T^m(x^+, n(y^+)), T^m(x^-, n(y^-)))$  e  $i = T(T^m(x^+, n(x^-)), T^m(y^+, n(y^-)))$ . Nótese que si se asume que  $y^+ = x^-$ , entonces sí son equivalentes.
- $iz$  no es equivalente a  $h^{-1}$ :  $iz = T(T^L(x^+, y^+), T^m(x^-, n(y^-)))$  y  $h^{-1} = T(T^m(y^+, n(y^-)), T^L(x^+, x^-))$ . Del mismo modo que en el caso anterior, si  $y^+ = x^-$ , entonces sí son equivalentes.
- $jz$  no es equivalente a  $k^{-1}$ :  $jz = T(T^L(n(x^+), n(y^+)), T^m(x^-, n(y^-)))$  y  $k^{-1} = T(T^m(y^+, n(y^-)), T^L(n(x^+), n(x^-)))$ . Si  $y^+ = x^-$  entonces sí son equivalentes.

De la misma manera se puede verificar que las siguientes relaciones no son equivalentes:  $pa$  y  $p$ ,  $pg$  y  $h$ ,  $ph$  y  $k$ ,  $pa^{-1}$  y  $p^{-1}$ ,  $pz^{-1}$  y  $r$ ,  $pg^{-1}$  y  $q^{-1}$ ,  $ph^{-1}$  y  $v^{-1}$ ,  $iz^{-1}$  y  $q$ ,  $ig$  y  $j$ ,  $ih$  y  $l$ ,  $jz^{-1}$  y  $v$ ,  $ig$  y  $l^{-1}$ ,  $jh$  y  $u$ , a no ser que se cumpla que  $y^+ = x^-$ .  $\diamond$

De esta forma, la estructura completa P-A y la estructura c-PCT son equivalentes si y sólo si se fuerza la condición semántica de que  $y^+ = x^-$ , en cuyo caso ambas propuestas colapsan en el mismo modelo *IA-SM*. En efecto, si es cierto que  $y^+ = x^-$ , entonces la información disponible se reduce y el modelo *IA-SM* es suficiente para su completo tratamiento.

Pero en el caso en el cual  $y^+ \neq x^-$ , el espacio semántico B2.2 identifica el lugar conceptual del proceso que el individuo ejerce sobre las alternativas, pesando las ganancias aparte de las pérdidas. De esta forma, el modelo P-A desarrolla dicho proceso por medio de dos órdenes, uno de preferencia y otro de aversión, que luego son conjuntamente evaluados.

De este modo, se encuentra en esta investigación que la solución (5)-(8) del modelo c-PCT y sus propiedades características, sigue la misma formulación funcional que la de las estructuras de preferencia  $\langle p, i, j \rangle_\phi$  y de aversión  $\langle z, g, h \rangle_\phi$ , dada por (20)-(22) y (38)-(40), respectivamente. Por lo tanto, siempre que se interprete que es cierto que  $x^- = y^+$ , los modelos c-PCT y P-A (bajo su solución (20)-(22) y (38)-(40)), son equivalentes.

En el caso para el cual aquellos dos modelos coinciden, entonces colapsan en el mismo modelo *IA-SM*, correspondiente al espacio semántico B2.1. Por lo tanto, si se asume que  $x^- = y^+$ , se tiene que,

$$t(x^+, x^-) = T^m(x^+, n(x^-)) = T^m(x^+, n(y^+)) = p(x^+, y^+), \quad (56)$$

$$k(x^+, x^-) = T^L(x^+, x^-) = T^L(x^+, y^+) = i(x^+, y^+). \quad (57)$$

$$u(x^+, x^-) = T^L(n(x^+), n(x^-)) = T^L(n(x^+), n(y^+)) = j(x^+, y^+), \quad (58)$$

$$f(x^+, x^-) = T^m(n(x^+), x^-) = T^m(y^+, n(x^+)) = p(y^+, x^+), \quad (59)$$

de tal manera que,

$$t(y^+, y^-) = T^m(y^+, n(y^-)) = T^m(x^-, n(y^-)) = z(x^-, y^-),$$

$$k(y^+, y^-) = T^L(y^+, y^-) = T^L(x^-, y^-) = g(x^-, y^-).$$

$$u(y^+, y^-) = T^L(n(y^+), n(y^-)) = T^L(n(x^-), n(y^-)) = h(x^-, y^-),$$

$$f(y^+, y^-) = T^m(n(y^+), y^-) = T^m(y^-, n(x^-)) = z(y^-, x^-).$$

Entonces, para el caso en el que las dos estructuras c-PCT y P-A coinciden, se verifica que ambas colapsan en el mismo modelo *IA-SM*, tal que  $z(x^-, y^-) = p(y^+, x^+)$ ,  $g(x^-, y^-) = i(y^+, x^+)$  y  $h(x^-, y^-) = j(y^+, x^+)$ . En este sentido, aunque la metodología difiere en cada modelo, sus resultados coinciden *únicamente* en el caso en que se fuerce la *condición semántica*  $x^- = y^+$ . En este caso (y solo en este caso), de acuerdo con (56)-(59), las situaciones de decisión de la estructura completa P-A coinciden bajo diferentes etiquetas con las de la estructura c-PCT, y su interpretación de la información es equivalente con el espacio semántico B2.1.

Sin embargo, está claro que ambos modelos son diferentes, debido a sus distintas metodologías. En este sentido, se debe entrar a evaluar la *pertinencia* de seguir un

modelo u otro, con el fin de resolver un problema en particular. Sobre este punto solo se observa que el modelo c-PCT examina directamente los estados de contradicción  $k$ , y desconocimiento  $u$ , acerca de la *cantidad de información* disponible, donde se requiere que éstos sean mutuamente excluyentes, pues no se puede expresar desconocimiento por falta de información de manera simultánea a contradicción por exceso de la misma.

Como se ha visto, esta condición de exclusión coincide con el caso del modelo P-A, donde la indiferencia (por aversión) y la incomparabilidad (por aversión) no pueden ser verificadas simultáneamente. Pero este modelo permite la verificación de otras condiciones, las cuales consisten en exigir que la preferencia (aversión) estricta sea asimétrica, como en los casos de (23)-(25) y (35)-(37), o que se permita la existencia simultánea de valores para todas las situaciones de la estructura básica P-A, como en (26)-(28) y (41)-(43).

Ahora, se advierte que también es posible una interpretación del modelo P-A correspondiente con el espacio B1.2, por medio de la construcción de pesos de decisión o *grados de relevancia* sobre la estructura básica P-A. Luego se revisan algunos ejemplos, donde se cuenta con los grados de  $x^+$  e  $y^+$ , aparte de los de  $x^-$  e  $y^-$ , y se desarrolla una interpretación semántica y un proceso de agregación particular, de acuerdo con el espacio general semántico de preferencia.

### **3.5.2 Una interpretación tipo B1.2 para el modelo P-A con grados de relevancia**

En esta sección se formula una interpretación del modelo P-A de acuerdo con el espacio B1.2. De este modo, se examinan los atributos positivos acerca de un determinado par de alternativas  $x, y \in X$ , por medio de las relaciones  $R^+(x, y)$  y

$R^+(y, x)$ , junto con los negativos, por medio de  $R^-(x, y)$  y  $R^-(y, x)$ , asignándoles un único valor  $\mu_R(x, y)$  y  $\mu_R(y, x)$  sobre la escala  $L = [-1, 1]$ .

De esta forma, se define el siguiente modelo de acuerdo con el espacio B1.2 y la metodología de agregación D1, tal que,

$$\mu_R(x, y) = \omega_x^+ \mu_{R^+}(x, y) - \omega_x^- \mu_{R^-}(x, y) \quad (60)$$

y

$$\mu_R(y, x) = \omega_y^+ \mu_{R^+}(y, x) - \omega_y^- \mu_{R^-}(y, x), \quad (61)$$

donde  $\omega_x^+$  es un peso asociado con la alternativa  $x$ , expresando su importancia relativa con respecto al sistema de alternativas y su orden de preferencia, dado por  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , mientras que  $\omega_x^-$  es el peso correspondiente a su importancia relativa con respecto al sistema de alternativas y su orden de aversión, dado por  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ , tal que  $0 \leq \omega_x^+, \omega_x^- \leq 1$ .

La especificación de estos pesos es necesaria para la completa representación de la percepción subjetiva del individuo hacia las pérdidas, concebidas éstas según las razones negativas de aversión, y las ganancias, concebidas éstas según las razones positivas de preferencia. Por lo tanto, estos pesos deben hacer referencia tanto a la importancia como a la relevancia de los argumentos encontrados, asignando un valor según la relación existente entre la cantidad de información disponible y el grado de conocimiento e ignorancia relevante acerca de determinada alternativa [77].

Desde esta perspectiva, en lo que trata a los pesos de decisión, éstos tienen que tomar en consideración la importancia relativa de una alternativa con respecto al

sistema completo de alternativas y sus distintas intensidades de preferencia y aversión. De esta forma se incluye información determinante en la evaluación binaria de alternativas, que no es posible incluir en los modelos estándares de preferencia debido al axioma de independencia de alternativas irrelevantes (IA2).

Entonces (siguiendo la propuesta inicial de [49]) **Error! Reference source not found.**, estos pesos se construyen en base a la especificación de un orden positivo  $O^+$ , y otro negativo  $O^-$ , sobre el conjunto de alternativas  $X$ . De este modo, tomando el concepto de la dimensión o altura de un orden, en el sentido de [18], donde la dimensión de un elemento  $x \in X$ ,  $d[x]$ , en  $O^+$  se define como la máxima longitud  $d$  de cadenas  $z \prec y \prec \dots \prec x$  en  $O^+$  donde  $x$  es el mayor elemento, tal que  $y \prec x$  si  $p(x^+, y^+) > \varepsilon$  para cierto umbral  $\varepsilon \geq 0$ .

De manera similar, la dimensión de  $x \in X$  en  $O^-$  es la máxima longitud de cadenas  $z \triangleleft y \triangleleft \dots \triangleleft x$  en  $O^-$  donde  $x$  es el mayor elemento, tal que  $y \triangleleft x$  si  $z(x^-, y^-) > \delta$  para cierto umbral  $\delta \geq 0$ , y por la dimensión de  $O^+$ ,  $d[O^+]$ , y la de  $O^-$ ,  $d[O^-]$ , se entiende la máxima longitud de cualquier cadena en  $O^+$  y en  $O^-$ , respectivamente. De esta forma, toda alternativa  $x \in X$  tiene asociado un peso de decisión, definido éste como un *grado de relevancia*, tanto para lo positivo,  $\omega_x^+$ , como para lo negativo,  $\omega_x^-$ , dado por la siguiente definición.

**Definición W:** Para toda alternativa  $x \in X$ , el grado de relevancia de  $x$  con respecto al orden dado por  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , está dado por,

$$\omega_x^+ = \frac{d[x]}{d[O^+]},$$

y el grado de relevancia de  $x$  con respecto al orden dado por  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ , está dado por,

$$\omega_x^- = \frac{d[x]}{d[O^-]}.$$

La propuesta que se hace aquí para caracterizar los pesos de decisión utiliza toda la información disponible acerca de una alternativa  $x$  con respecto a todas las demás alternativas en  $X$ , transmitiéndola luego sobre las relaciones de preferencia y aversión para todo par  $x, y \in X$ . Es por ello que estos pesos de decisión miden la importancia relativa de una alternativa con respecto a todo el sistema de alternativas.

De este modo, el grado de relevancia positiva de  $x$ ,  $\omega_x^+$ , se construye contando las alternativas sobre las cuales  $x$  marca una preferencia estricta, esto es, para cierto grado mayor que  $\varepsilon$ , mientras que el grado de relevancia negativo de  $x$ ,  $\omega_x^-$ , se construye contando las alternativas sobre las cuales  $x$  marca una aversión estricta, para un grado mayor  $\delta$ .

Ahora, siguiendo la intuición principal del modelo de la CPT, la cual afirma que las pérdidas se perciben con mayor intensidad que las ganancias, los grados de relevancia positivos, los cuales hacen referencia a la intensidad con la que se perciben las ganancias o los argumentos de preferencia, se calculan por medio de la cota inferior de  $p$ , esto es,  $p(x^+, y^+) = T^L(x^+, n(y^+))$ . En cambio, los grados negativos, que hacen referencia a las pérdidas como a los argumentos de aversión, se obtienen por medio de la cota superior de  $z$ , tal que  $z(x^-, y^-) = T^m(x^-, n(y^-))$ .

De esta manera, definiendo los umbrales de preferencia y aversión, se identifican los grados de relevancia correspondientes con cada alternativa y se evalúa el modelo P-A de acuerdo con las ecuaciones (60)-(61). Entonces, se encuentra un único valor, en una escala de tipo B1, para la valoración conjunta de las alternativas y su respectiva ordenación.

### 3.5.2.1 Ejemplo sobre un problema de decisión y su interpretación semántica tipo B1.2

Sea una situación en la que se debe decidir sobre el tipo de energía en el cual una sociedad debe invertir. Entonces se establece una comisión para que evalúe las distintas opciones en base a la información disponible por parte de expertos en distintas áreas. Las opciones de energía son *a*: eólica y marítima, *b*: solar, *c*: geotérmica y *d*: nuclear, y la información se encuentra representada por medio de las siguientes matrices con las intensidades de preferencia  $R^+$ ,

$R^+$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1.00	0.70	0.40	0.20
<i>b</i>	0.30	1.00	0.50	0.10
<i>c</i>	0.70	0.90	1.00	0.50
<i>d</i>	0.70	0.90	0.60	1.00

donde por ejemplo  $\mu_{R^+}(a,b)=0.70$  mide la intensidad del predicado “*a* es al menos mejor que *b*”, en base a las razones positivas que existen para sustentarlo, como pueden ser la cantidad de energía eléctrica generada por cada una de las tecnologías o su viabilidad. También, se cuenta con las correspondientes intensidades de aversión  $R^-$ ,

$R^-$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1.00	0.30	0.40	0.10
$b$	0.50	1.00	0.30	0.10
$c$	0.40	0.10	1.00	0.20
$d$	0.90	0.80	0.80	1.00

donde por ejemplo  $\mu_{R^-}(a,b) = 0.30$  mide la intensidad del predicado “ $a$  es al menos peor que  $b$ ”, en base a las razones negativas que existen para sustentarlo, como por ejemplo los costes asociados a cualquier tipo de accidente operativo o de la naturaleza.

Entonces, si se examina el problema bajo la luz del espacio general semántico de preferencia, esta información disponible se puede interpretar y agregar de distintas maneras. Primero, se pueden interpretar los datos de entrada de acuerdo con el espacio B1.2 o B2.2, y luego, se puede desarrollar el correspondiente proceso de agregación de acuerdo con la metodología D1 o D2.

En este ejemplo, se formula el problema de acuerdo con el modelo P-A y su correspondiente interpretación B1.2-D1, dada por (60)-(61). Entonces, se construyen los grados de relevancia de la siguiente manera. Con respecto a los atributos positivos o argumentos de preferencia, se calcula la intensidad de preferencia estricta por medio de su cota inferior ( $IP$ ), y con respecto a los atributos negativos o argumentos de aversión, se calcula la intensidad de aversión estricta por medio de su cota superior ( $uZ$ ).

De esta manera se siguen los siguientes resultados, donde se obtienen la siguiente matriz de preferencia estricta,

<i>IP</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	0.00	0.40	0.00	0.00
<i>b</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>c</i>	0.30	0.40	0.00	0.00
<i>d</i>	0.40	0.80	0.10	0.00

y la de aversión estricta,

<i>uZ</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	0.00	0.30	0.40	0.10
<i>b</i>	0.50	0.00	0.30	0.10
<i>c</i>	0.40	0.10	0.00	0.20
<i>d</i>	0.90	0.80	0.80	0.00

Entonces, tomando los umbrales  $\varepsilon = \delta = 0.3$ , se identifica que la máxima longitud para una cadena de preferencia en *IP* es  $d[IP] = 2$ , donde el elemento con una mayor altura es “*d*”, tal que  $b \prec a \prec d$ , dado que  $\mu_{IP}(d, a) = 0.40$  y  $\mu_{IP}(d, b) = 0.80$ . Por lo tanto,  $\omega_a^+ = 1/2$ ,  $\omega_b^+ = 0$ ,  $\omega_c^+ = 1/2$  y  $\omega_d^+ = 1$ . Del mismo modo, la máxima longitud para una cadena de aversión es  $d[uZ] = 3$ , donde se puede ver que el elemento con una mayor altura es de nuevo “*d*”, tal que  $a \prec b \prec c \prec d$ , de donde se sigue que  $\omega_a^- = 1/3$ ,  $\omega_b^- = 1/3$ ,  $\omega_c^- = 1/3$  y  $\omega_d^- = 1$ . Por consiguiente se obtienen los siguientes valores de preferencia-aversión,

<i>R</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	0.17	0.25	0.07	0.12
<i>b</i>	-0.17	-0.33	-0.10	-0.03
<i>c</i>	0.22	0.42	0.17	0.18
<i>d</i>	-0.20	0.10	-0.20	0.00

En este caso, se identifican las intensidades de cada relación de la estructura de preferencia y de la de aversión, y se agregan según el modelo (60)-(61), encontrando un único valor, en una escala de tipo B1, para la valoración conjunta de las alternativas (matriz  $R$ ). De esta forma, la opción  $c$  obtiene la mejor valoración debido a que sus atributos positivos son siempre más fuertes que los negativos. Luego le sigue  $a$ , como un segundo mejor, y al final se encuentran las peores opciones,  $b$  y  $d$ .

Nótese también que, como las relaciones de preferencia  $R^+$  y aversión  $R^-$  son reflexivas, los elementos de las diagonales de las matrices  $R^+$  y  $R^-$  son todos iguales a 1. De este modo, al llevar a cabo las operaciones (60) y (61), mediante las cuales se obtienen los valores de la matriz  $R$ , la diagonal de esta nueva matriz expresa la diferencia entre los pesos de las respectivas alternativas. Por lo tanto, se obtienen cuatro pesos de decisión o grados de relevancia (tantos como alternativas hay), donde

$$\mu_R(a, a) = \omega_a^+ - \omega_a^- = 0.17,$$

$$\mu_R(b, b) = \omega_b^+ - \omega_b^- = -0.33,$$

$$\mu_R(c, c) = \omega_c^+ - \omega_c^- = 0.17,$$

$$\mu_R(d, d) = \omega_d^+ - \omega_d^- = 0.$$

Entonces, si se ordenan las alternativas de acuerdo con sus grados de relevancia, se tiene que  $c$  y  $a$  tienen la mayor importancia, seguidos luego por  $d$  y finalmente por  $b$ . De esta manera, la comisión encuentra argumentos para sustentar y respaldar, por medio de un procedimiento equilibrado de pérdidas y ganancias, que las tecnologías de energía geotérmica ( $c$ ) y eólica y marítima ( $a$ ) son igual de

relevantes, en base a su importancia relativa, aunque la opción  $c$  obtiene la mejor valoración (de acuerdo con este modelo correspondiente al espacio semántico B1.2-D1).

### 3.5.3 Ejemplos sobre la estructura completa P-A y la estructura c-PCT

Ahora se examina la estructura c-PCT junto con la estructura completa P-A, examinando las situaciones de decisión que cada una identifica frente a los mismos problemas de decisión. Primero se toma un ejemplo donde la valoración acerca de cada situación es binaria, caso para el cual  $L = \{0,1\}$ , y luego se toma otro ejemplo más general, donde la valoración es continua, caso para el cual  $L = [0,1]$ .

En el siguiente capítulo, la presente investigación se centra en una propuesta para identificar las alternativas más necesarias, en base a su condición de ser preferidas y no rechazadas, sobre lo cual se modeliza un *punto de vista* sobre el cual es posible identificar el *curso de acción necesario* para un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias.

#### 3.5.3.1 Caso binario

Considérese un votante que debe elegir entre dos candidatos  $x$  e  $y$ . Si esta persona evalúa los atributos positivos de  $x$ , considera que éste puede solucionar los problemas más urgentes de la sociedad porque tiene propuestas claras para hacerlo, a diferencia de la opción  $y$ , quien no es claro en sus propuestas aunque tiene buenas intenciones. En cambio, si evalúa los atributos negativos de los candidatos, resulta que el candidato  $x$  está imputado en casos de corrupción, mientras el candidato  $y$  no lo está.

Por lo tanto, este votante considera que  $x$  es mejor que  $y$  si se fija en los aspectos positivos o buenos de los dos, esto es,  $\mu_{R^+}(x, y) = 1$  y  $\mu_{R^+}(y, x) = 0$ , y por otro lado, que  $x$  es peor que  $y$  si piensa en los aspectos negativos o malos, lo cual se traduce como  $\mu_{R^-}(x, y) = 1$  y  $\mu_{R^-}(y, x) = 0$ .

De este modo, podemos examinar qué nos dicen cada una de las estructuras 4-PCT y P-A sobre la situación de preferencia con respecto a  $x$  e  $y$ . Si seguimos el procedimiento de agregación del modelo 4-PCT, se obtiene máxima contradicción al evaluar la preferencia de  $x$  sobre  $y$  y máximo desconocimiento al valorar la preferencia de  $y$  sobre  $x$ . Esto es, existe semi-preferencia débil de  $x$  sobre  $y$ . El resultado se muestra en la Tabla 4.

4-PCT	$R^t(y, x)$	$R^k(y, x)$	$R^u(y, x)$	$R^f(y, x)$
$R^t(x, y)$	0	0	0	0
$R^k(x, y)$	0	0	1	0
$R^u(x, y)$	0	0	0	0
$R^f(x, y)$	0	0	0	0

**Tabla 4:** La estructura PCT y su interpretación del ejemplo binario.

Por otro lado, si seguimos el procedimiento de agregación del modelo P-A, se obtiene que existe preferencia estricta de  $x$  sobre  $y$  y aversión estricta de  $y$  sobre  $x$ . Entonces, el resultado agregado de ambas dimensiones se puede leer en la Tabla 5, donde se obtiene una situación de ambivalencia.

De acuerdo con la interpretación de la estructura P-A, el individuo no puede encontrar una opción óptima. Por lo tanto, si la situación relacional se examina de manera operativa, tal que se deba identificar una actitud hacia la elección de  $x$  o de

y, el votante se ve forzado a no decidir, esto es, a posponer su decisión en busca de argumentos o de información relevante acerca de las opciones disponibles.

Otra posibilidad es que el individuo le asigne pesos distintos a cada dimensión de preferencia y aversión. De este modo, si pesan más las pérdidas o los atributos negativos (intuición básica de la CPT [75], [138]), la alternativa  $x$  es finalmente rechazada.

P-A	$Z(x,y)$	$Z(y,x)$	$G(x,y)$	$H(x,y)$
$P(x,y)$	1	0	0	0
$P(y,x)$	0	0	0	0
$I(x,y)$	0	0	0	0
$J(x,y)$	0	0	0	0

**Tabla 5:** Interpretación de la estructura P-A sobre el ejemplo binario.

Desde un punto de vista cualitativo, una misma situación de preferencia se identifica de modo distinto según el modelo que se utilice, o también, según el método de agregación que se aplique. Para el modelo 4-PCT, la situación del ejemplo se identifica como la coexistencia de mucha información contradictoria sobre al menos qué tan buena es  $x$  con respecto a  $y$ , y de muy poca información sobre el predicado inverso.

En cambio, para el modelo P-A, esta situación se identifica como la existencia de ambivalencia, un estado de conocimiento básico y directamente atribuible al raciocinio humano [76]. Desde esta perspectiva, se encuentra la situación que permite describir el estado de conocimiento del individuo, bajo una racionalidad de pérdidas y ganancias, frente a una decisión conflictiva.

**3.5.3.2 Caso borroso**

Considérese la misma situación del ejemplo anterior, pero ahora tomando otro votante con otras preferencias. De esta forma, al evaluar los atributos positivos de  $x$ , el votante considera que este candidato puede solucionar los problemas sociales de mejor manera que  $y$ , pero si evalúa los atributos negativos, encuentra que el candidato  $x$  está imputado en casos de corrupción, pero además que el candidato  $y$  también es corrupto, aunque éste no ha sido acusado de manera oficial.

De este modo, este votante considera que  $x$  es mejor que  $y$  si busca argumentos positivos para valorarlos:  $\mu_{R^+}(x, y) = 0.9$  y  $\mu_{R^+}(y, x) = 0.1$ , y por otro lado, si se fija en los argumentos negativos, considera que  $x$  es al menos tan mala como  $y$  y  $y$  es al menos tan mala como  $x$ , aunque con un poco de menor intensidad en la segunda relación:  $\mu_{R^-}(x, y) = 0.9$  y  $\mu_{R^-}(y, x) = 0.8$ .

Por consiguiente, la estructura c-PCT obtiene un grado máximo de contradicción sobre la preferencia de  $x$  sobre  $y$  y de falsedad sobre la preferencia de  $y$  sobre  $x$ , esto es, de *preferencia débil* por  $x$ . También se identifican otras situaciones con un grado menor de intensidad para la semi-preferencia, la semi-preferencia débil tanto de  $x$  sobre  $y$  como de  $y$  sobre  $x$ , la incomparabilidad débil y la semi-incomparabilidad de  $x$  sobre  $y$ . El resultado completo se encuentra en la Tabla 6.

c-PCT	$R^t(y, x)$	$R^k(y, x)$	$R^u(y, x)$	$R^f(y, x)$
$R^t(x, y)$	0	0	0	0
$R^k(x, y)$	0	0.1	0.2	0.7
$R^u(x, y)$	0	0.1	0.1	0.1
$R^f(x, y)$	0	0	0	0

**Tabla 6:** Caracterización de la estructura c-PCT sobre el ejemplo borroso.

Por el otro lado, la estructura completa P-A identifica una intensidad máxima en la situación relacional de preferencia estricta de  $x$  sobre  $y$  y de aversión por las dos alternativas. De esta manera, se obtiene una situación relacional de *pseudo-preferencia*, donde se cumple  $PG(x,y)$  con una intensidad de 0.8. Esto quiere decir que se expresa una gran inconformidad sobre las opciones disponibles, aunque se identifica a  $x$  como la opción menos mala y por ende la que tiene mayor apoyo por parte del individuo.

Además, se verifican otras situaciones en un menor grado (todas con 0.1), las cuales corresponden con ambivalencia  $PZ(x,y)$ , incomparabilidad por ignorancia  $JH(x,y)$ , preferencia semi-fuerte  $PH(x,y)$ , pseudo-aversión  $IZ(x,y)$ , indiferencia fuerte  $IG(x,y)$ , e indiferencia positiva  $IH(x,y)$ , junto con la aversión semi-fuerte  $JZ(x,y)$ , e indiferencia negativa  $JG(x,y)$ . El resultado completo se encuentra en la Tabla 7.

P-A	$Z(x,y)$	$Z(y,x)$	$G(x,y)$	$H(x,y)$
$P(x,y)$	0.1	0	0.8	0.1
$P(y,x)$	0	0	0	0
$I(x,y)$	0.1	0	0.1	0.1
$J(x,y)$	0.1	0	0.1	0.1

**Tabla 7:** La estructura P-A y su interpretación del ejemplo borroso.

En este ejemplo se puede ver que a pesar de que las dos estructuras PCT y P-A se diferencian, no solo desde un punto de vista cualitativo, sino también cuantitativo, en el número de situaciones relacionales que se identifican, el resultado señala una intensidad mayor para un tipo de preferencia que la primera identifica como de *preferencia débil*, y la segunda como de *pseudo-preferencia* por  $x$ . En este sentido,

la alternativa  $x$  es elegida sobre  $y$ , al ser considerada la opción menos mala de las dos.



## Capítulo 4. Aplicaciones del modelo de Preferencia-Aversión

En este capítulo, se propone aplicar la racionalidad de pérdidas y ganancias, junto con su capacidad para revelar los grados de preferencia y aversión de manera separada, como en el caso del modelo P-A, para representar el proceso de decisión bajo un punto de vista socio-económico. Para ello es necesario presentar algunos nuevos conceptos (siguiendo la primera propuesta de [50]), principalmente el de una *estructura de preferencia-necesidad* y el del *principio de una necesidad insatisfecha*.

La estructura de preferencia-necesidad requiere de la formulación explícita de la dimensión de preferencia aparte de la de aversión, lo cual permite formalizar el proceso mediante el cual se identifica el *curso de acción necesario*. De este modo, la misma capacidad de razonar con los atributos positivos aparte de los negativos, que tiene una persona con una racionalidad de pérdidas y ganancias, es lo que la hace capaz de diferenciar el curso de acción necesario de entre un conjunto dado de alternativas.

En este sentido, la especificación de la preferencia por *deseo* aparte de la preferencia por *necesidad*, donde se identifica lo que el individuo necesita o requiere aparte de lo que simplemente desea, se logra sin pedirle al sujeto que revele directamente qué necesita y qué desea, sino deduciéndolo a partir de la explícita formulación de argumentos a favor y en contra acerca de las alternativas disponibles. Por lo tanto, se advierte que este concepto de necesidad no debe confundirse con otras aproximaciones encontradas en la literatura, en los campos de Inteligencia Artificial y la teoría de la posibilidad [15], [25], [34], [105], donde se le pide al individuo directamente que revele sus necesidades o requerimientos.

Entonces, el presente capítulo se organiza de la siguiente forma. En la Sección 4.1, se introducen los conceptos de la *cualidad negativa de la justicia*, el *individuo socio-económico*, a la imagen del *homo-socioeconomicus*, y se introduce también una nueva *tipología de preferencias*, la cual permite diferenciar un tipo donde preferencia, necesidad y deseo son equivalentes, y otro donde deseo y necesidad difieren.

Luego, en la Sección 4.2, de la mano de los conceptos antes mencionados y del *principio de una necesidad insatisfecha*, se propone una nueva *estructura de preferencia-necesidad*, la cual permite modelizar las preferencias del individuo bajo un *punto de vista socio-económico*. Finalmente, en la Sección 4.3, se revisan algunos ejemplos sobre la aplicación del modelo P-A y la construcción del punto de vista socio-económico, lo cual permite a su vez resolver una paradoja acerca de la imposibilidad de obtener una decisión debido a la indecisión del individuo.

#### **4.1 Aproximación al individuo socio-económico**

La racionalidad de pérdidas y ganancias es un atributo del individuo o ser humano que le permite identificar aquello que considera positivo, aparte de lo que considera negativo. De esta forma, su capacidad de integrarse en la sociedad y la vida económica y política de una manera coordinada y cooperativa, recae en su poder de diferenciar aquello que es necesario, porque funciona, le beneficia y no es nocivo, de lo que es simplemente deseado.

Esta diferenciación sobre lo que es necesario requiere de un paso previo, el cual consiste en revelar la *cualidad negativa de la justicia*. Este paso permite identificar aquello que es indeseable por ser perjudicial y lesivo, aparte de lo que es deseable

por ser beneficioso tanto para el propio individuo como para los demás integrantes de la sociedad. De este modo se propone aquí que es posible reconocer las alternativas *necesarias* como aquellas que son al mismo tiempo deseadas y no rechazadas.

#### **4.1.1 La justicia y la racionalidad de pérdidas y ganancias**

Al menos desde el Siglo IV a. C. [5], existe un interés por reconocer el *proceso* mediante el cual se puede identificar una *acción correcta* de entre un conjunto de acciones posibles. Este proceso hace referencia al comportamiento del individuo en la sociedad, asumiendo que éste se relaciona con otros por medio de sus decisiones, las cuales obedecen a criterios de su propio interés.

Desde esta perspectiva, aquello que es *bueno* o *correcto* se interpreta de acuerdo con la función o el objetivo que se le asigna. Por lo tanto, para identificar aquello que es *correcto* se debe verificar qué tan *bueno* es una acción o alternativa en relación a su función. En este sentido, el significado de una acción, o de manera general, de un concepto, guarda una relación directa con el uso que a éste se le asigne [145].

Este calificativo de *bueno* o *correcto* es una manera de entender la realidad, según la racionalidad del ser humano que, en continuo contraste con su opuesto y bajo un proceso dialéctico que se nutre del antagonismo natural de los conceptos, permite construir el conocimiento [69]. De este modo, la decisión hace parte de un proceso más amplio de aprendizaje, que parte del significado de los conceptos, predicados o relaciones, como representaciones particulares de la realidad, para verificar el grado en que éstas cumplen con las propiedades de interés.

De esta manera, la construcción de conocimiento, a través de las ciencias que examinan el comportamiento humano y los distintos sistemas sociales, identifica el buen funcionamiento de la sociedad a partir del comportamiento individual, lo cual está directamente relacionado con la *justicia* y la racionalidad humana. A mediados del siglo XVIII, se adelanta una hipótesis que expone la existencia de una clara separación entre la *cualidad negativa de la justicia*, respecto a la abstención de lo perjudicial y lesivo, y las cualidades positivas, respecto a la búsqueda del bien tanto para el propio individuo como para los demás [126].

Se expone que la individualidad y la incertidumbre sobre la realidad no permiten formular una ley universal acerca de lo que se puede considerar como lo *correcto* o lo *mejor*. Como consecuencia, los aspectos a favor de una opción pueden ser identificados de manera general, a través de distintos contextos, como percepciones inexactas y difusas. Por el otro lado, lo lesivo se asocia más fácilmente con cualquier contexto, previo conocimiento de las reglas sociales y prácticas que definen al individuo en la sociedad, lo cual permite asociar cierta generalidad a la cualidad de abstención de comportamientos nocivos.

Esta es la cualidad negativa de la justicia [126], ya que la razón humana tiene la capacidad de reconocer por experiencia lo que hace daño tanto a uno como a otros. Conociendo las normas sociales que rodean al individuo, se reconoce un entorno donde la decisión soportada en aspectos positivos es más incierta que aquella que recae en aspectos negativos. Es precisamente en este sentido que la bipolaridad, por medio de una racionalidad de pérdidas y ganancias, se presenta como la capacidad de diferenciar estímulos hostiles de estímulos benévolos, una cualidad necesaria para sobrevivir [24].

De esta manera, se define aquí el *curso de acción necesario*, como la alternativa que es buena para el individuo, de acuerdo con lo que éste quiere o desea hacer, y que al mismo tiempo no es mala, siempre que no sea lesiva o perjudicial, según las razones existentes a favor y en contra acerca de las alternativas disponibles. En este sentido, se propone que el más puro deseo subjetivo encuentra sus límites bien a nivel individual, por una cierta condición de *auto-control*, o bien a nivel social, por el comportamiento de otros individuos y el *bloqueo* que estos ejercen entre sí.

Por lo tanto, se plantea en esta investigación que la racionalidad de pérdidas y ganancias es necesaria para representar el razonamiento de un individuo *equilibrado*, quien encuentra en la cualidad del auto-control el medio para actuar responsablemente frente a sus deseos. Se advierte que este atributo de auto-control implica que los individuos no siguen una búsqueda *insaciable* por el óptimo, a diferencia de lo que ocurre en aquellos modelos económicos donde el equilibrio existe solo en función del conflicto o del bloqueo entre las estrategias individuales [11], [96], [104].

Ahora se examina un marco teórico particular, con el fin de formular el proceso mediante el cual el individuo identifica el curso de acción necesario frente a un problema de decisión bajo incertidumbre. Entonces se considera al individuo no solo en su dimensión económica (bajo una racionalidad perfecta que lo lleva a desear, insaciablemente, el máximo valor de utilidad), sino también en su dimensión social.

#### **4.1.2 Un individuo racional y social**

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la modelización de preferencias asume una cierta descomposición de las preferencias individuales, donde el

individuo busca la mejor opción en base a la información disponible. De este modo, se caracterizan distintas estructuras de preferencias, con el fin de identificar la situación relacional que mejor describe el problema de decisión en cuestión.

En la teoría clásica y neoclásica de la economía, el individuo es referido como el *homo-economicus*, un agente que maximiza su deseo medido por la utilidad [7], [29], [106]. Las preferencias que este tipo de individuo revela, corresponden con la estructura  $R = \langle P, I, J \rangle$ , la cual ha sido examinada en los primeros modelos de utilidad, con la restricción  $J = \emptyset$  [119], [120], [141], o sin aquella restricción, como en [12], [13]. Se observa que esta estructura ha sido examinada de manera más general, sin referencia al *homo-economicus*, por medio del modelo *IA-SM* (ver Sección 2.4).

En contrapartida, se propone caracterizar una estructura de preferencia de otro tipo (lo cual se hace efectivamente más adelante, en la Sección 4.2.2), bajo principios de decisión distintos, con el fin de representar el proceso de decisión de un individuo *holístico*, en el sentido en que éste no se encuentra aislado maximizando sus beneficios, sino por el contrario, siempre está inmerso en un contexto social y político (como se señala desde [5]). A este tipo de individuo se le denomina, desde una perspectiva alternativa de la teoría económica, como el *homo-socioeconomicus* [97].

De esta forma, la visión bajo la cual se concibe al *homo-socioeconomicus* afirma que el concepto de la *necesidad material* es una dimensión básica de la vida humana y económica, a pesar de no ser formalmente reconocida por la corriente dominante de la teoría económica y su caracterización de la decisión racional. Se recuerda que en los distintos modelos económicos vistos en el Capítulo 1, se hace

referencia a un tipo de racionalidad perfecta, utilizada de manera instrumental para conseguir un resultado óptimo, mediante la maximización de la utilidad [125].

Entonces, desde una perspectiva socio-económica, el comportamiento individual no está determinado inequívocamente por una medida de bienestar como la de la utilidad, sino por los deseos y las necesidades del individuo (como se argumenta en [57], [74] ). Por lo tanto, su comportamiento depende de la satisfacción de sus preferencias, en cuanto a que éstas representan no solo sus deseos, sino también sus necesidades, tanto físicas como psicológicas.

Por ello, con el fin de entender al individuo como un ser integral, se debe identificar aquello que es necesario aparte de lo que es preferido. De esta manera, se sostiene en esta investigación, a la manera de una proposición, que la preferencia (en cuanto que deseo) y la necesidad son componentes diferenciables y característicos de un individuo a la imagen del *homo-socioeconomicus*. A continuación se presenta una propuesta acerca de una tipología de preferencias que permite sostener esta proposición.

#### 4.1.3 Tipología de preferencias

Es conveniente distinguir ahora entre *dos tipos de preferencias*. Esto nos permitirá referirnos explícitamente a una tipología donde la distinción entre la preferencia por deseo y por necesidad es posible. Como se ha visto en la Sección 4.1.2, la relación entre estos dos tipos de conceptos, de *necesidad* y *deseo*, tiene un carácter dual, pues ambos tienen un significado al mismo tiempo similar y distinto.

Nótese que aunque necesidad y deseo comparten la misma intensidad de preferencia en los modelos clásicos (como por ejemplo el modelo *IA-SM* y la estructura  $R = \langle P, I, J \rangle$ ), su significado es ciertamente antagónico (en el sentido

más general de [113]). Esto es, a medida que un objeto es más necesario, se espera que sea menos lujoso, y a medida que es más lujoso, se espera que sea menos necesario.

De esta manera, lo que es necesario obtiene un valor *básico*, opuesto a lo que es un lujo, lo cual obtiene un valor *deseado*. Entonces se identifican dos polos opuestos de necesidad y lujo, que también pueden ser vistos como aquello que es pensamiento ilusorio (deseo) frente a un pensamiento cierto (necesario). De este modo, se tiene que en la consideración del deseo, el individuo piensa en lo que *quiere* hacer, mientras que en la de la necesidad, piensa en lo que *puede/debe* hacer (una primera aproximación al significado de estos dos conceptos se encuentra en [50]).

Entonces, se diferencia entre aquello que es necesario o básico, aparte de lo que es preferido por ser simplemente deseado, o en otras palabras, de lo que es un lujo. De esta forma, se asocia al *homo-economicus* con unas **preferencias de tipo 1**, donde se afirma la equivalencia entre preferencia, deseo y necesidad, en oposición a las **preferencias de tipo 2** del *homo-socioeconomicus*, donde se acepta la separabilidad y distinción entre la preferencia por deseo y la preferencia por necesidad.

De este modo, las preferencias de tipo 1 corresponden con algunas estructuras de preferencia examinadas en esta investigación, como por ejemplo la estructura básica de preferencia  $\langle P, I, J \rangle$ , la estructura PCT  $\langle P, I, Q, J \rangle$  o la c-PCT  $\langle p, q, k, l, i, j, h, r, u, v \rangle$ , donde los argumentos o razones negativas sobre las alternativas no son *procesados* independientemente a las razones positivas. Por lo

tanto, en todos estos ejemplos se asume la equivalencia entre preferencia, deseo y necesidad.

Entonces, se tiene que la semántica de las preferencias de tipo 1 corresponde con los espacios semánticos B1.1 y B1.2 y B2.1 (véase el espacio general semántico de preferencia de la Sección 3.2), y también con B2.2-D1 (debido a su metodología dependiente D1). En estos casos, los distintos modelos que llevan a cabo el proceso de agregación de las preferencias no permiten distinguir entre deseo y necesidad, pues no es posible la medición independiente y explícita de los atributos negativos y positivos acerca de las alternativas disponibles.

Para el caso del espacio B2.2-D1 y la estructura c-PCT, su tipología parece menos clara. En un principio, se tiene que la información de entrada se refiere por un lado a la presencia de razones positivas y por el otro, a la presencia de razones negativas. Pero su metodología dependiente D1 hace que no sea posible distinguir entre preferencia-deseo y preferencia-necesidad (este punto quedará más claro una vez se formalice la estructura de preferencia-necesidad en la Sección 4.2.2 y se presente el Teorema 8).

En consecuencia, las preferencias de tipo 2 corresponden con el espacio semántico más general B2.2-D2 y la estructura completa P-A. En este caso, los argumentos o razones negativas acerca de las alternativas disponibles sí son explícitamente formuladas y procesadas aparte de las razones positivas, permitiendo que el individuo diferencie lo que es preferido de lo que es necesario.

Por lo tanto, los modelos de preferencias de tipo 2 permiten distinguir entre deseo y necesidad, donde se cumple que  $x^- \neq n(x^+) \neq y^+$  y se mantiene la independencia entre lo positivo y lo negativo a lo largo del respectivo proceso de agregación.

Entonces, sobre las preferencias de tipo 2 sí es posible examinar la manera en la que el individuo socio-económico, o el *homo-socioeconomicus*, identifica el curso de acción necesario frente al problema de decisión.

Se recalca que la identificación *explícita* de razones positivas, aparte de las negativas, es necesaria para construir preferencias del segundo tipo, pues sólo así el individuo puede encontrar el sentido de justicia o responsabilidad sobre aquello que desea para sí mismo. Es decir, aquello que se prefiere pero que también puede ser perjudicial es distinto a aquello que se prefiere y que no es nocivo para nadie, siendo lo primero, preferencia del primer tipo y lo segundo, preferencia por necesidad (un componente básico del segundo tipo de preferencia).

De esta forma, se tiene que el *valor básico o necesario* debe ser construido por el individuo, haciendo uso de su racionalidad de pérdidas y ganancias, identificando los atributos positivos aparte de los negativos, y luego agregándolos de manera independiente. Este proceso de agregación es precisamente lo que permite señalar el curso de acción necesario frente a una decisión.

Se advierte que este curso de acción debe ser complementado por unos principios básicos, los cuales guíen el proceso de decisión del individuo a lo largo de la comparación entre las alternativas disponibles. Este punto se desarrolla en la próxima sección, donde se formula también la definición de una estructura de preferencia-necesidad para el individuo socio-económico.

## 4.2 Una estructura de preferencia-necesidad para el individuo socio-económico

Como se ha visto en la sección anterior, la identificación de las preferencias de tipo 2 permite diferenciar entre la preferencia que obedece al deseo y la que obedece a la necesidad material del individuo. De este modo, examinando las intensidades sobre las razones a favor y en contra acerca de las alternativas disponibles, es posible describir el curso de acción necesario mediante aquello que el individuo requiere o necesita.

Entonces, este curso de acción recae sobre un cierto principio de decisión, denominado aquí *principio de una necesidad insatisfecha*, el cual revela lo *prioritario* como aquello que es más necesario. En consecuencia, el individuo que expresa sus preferencias de tipo 2, mediante una *estructura de preferencia-necesidad*, encuentra el curso de acción necesario por medio de la construcción de un *punto de vista socio-económico*, lo cual se examina a continuación.

### 4.2.1 Principio de una necesidad insatisfecha

La relación entre los conceptos de necesidad y deseo ha sido examinada con cierto detalle en la anterior sección. En ésta, se ha visto que lo requerido o necesario es en gran medida contrario a lo superfluo o a aquello que bien se puede considerar como un lujo. Pero también es el caso en que ambos conceptos demuestran una cierta *sinergia*, reforzándose mutuamente. Esta dualidad es imposible de examinar por medio de las preferencias de tipo 1, por lo cual, de ahora en adelante, se hace referencia explícitamente a las preferencias de tipo 2.

De este modo, lo necesario bien puede ser identificado como la causa principal para la existencia de la preferencia. En particular, se observa que mientras que algo

puede ser deseado sin que sea realmente necesario, lo que es necesario, precisamente por serlo, es también deseado.

Entonces se tiene un *vínculo primario* entre la *preferencia* y la *necesidad*, sobre el cual es posible reflexionar acerca de la naturaleza o esencia de estas dos nociones. Esto es, que la *preferencia* **no** implica *necesidad*, pero la *necesidad* **sí** implica *preferencia*. De esta manera, se observa que la preferencia por necesidad es ciertamente distinta que la preferencia por deseo, lo cual tiene consecuencias verificables sobre la manera en que el individuo enfrenta y soluciona su problema de decisión.

Esto es, el paradigma clásico de una racionalidad perfecta [90], [125], considera que el individuo siempre quiere más de un bien o servicio de su preferencia, sin que su deseo se pueda saciar (ver por ejemplo [29]). Al maximizar el valor esperado de la utilidad, el *homo-economicus* se guía únicamente por su deseo, interpretando de esta manera su racionalidad como un instrumento aislado de consideraciones éticas y/o sociales.

Por el contrario, la preferencia por necesidad se caracteriza por tener implícito un nivel de satisfacción. Esto es, a diferencia de la preferencia de tipo 1, la preferencia de tipo 2 permite la identificación del componente de necesidad, con respecto al cual, una vez se alcanza determinado umbral de satisfacción, ya no se prefiere/necesita más de lo mismo (esta es la cualidad antes mencionada del auto-control). De esta forma, el principio de no saciedad es asumible sobre el *homo-economicus* y sus preferencias del primer tipo (ver por ejemplo [11], [29]), mas no sobre las del segundo tipo.

Por lo tanto, se propone que es más importante o prioritario, para un individuo concebido a la imagen del *homo-socioeconomicus*, satisfacer las necesidades más

relevantes primero, y posponer los deseos, en cuanto superfluos, para después. De este modo se enuncia el *principio de una necesidad insatisfecha*, tal que aquello que se identifica como necesario recibe prioridad sobre aquello que se identifica como deseo.

Entonces, sea  $N$  el predicado de preferencia-necesidad, tal que para todo  $x, y \in X$ ,  $N(x, y)$  se lee como “ $x$  es *más necesaria* que  $y$ ”, y sea  $D$  el predicado de preferencia-deseo, tal que  $D(x, y)$  significa que “ $x$  es al menos tan deseada como  $y$ ”. De este modo se enuncia el principio de una necesidad insatisfecha de la siguiente manera.

**Principio de una necesidad insatisfecha:** Para todo  $x, y \in X$ , si se cumple que  $N(x, y)$  y también que  $D(y, x)$ , entonces el curso de acción necesario es el de elegir  $x$  sobre  $y$ .

En el contexto del proceso económico, y en base al principio de una necesidad insatisfecha, se afirma que un deseo insatisfecho es distinto a una necesidad insatisfecha. Esto, en la medida en que la necesidad es un requerimiento para la existencia humana, como todo lo material que el ser humano necesita para sobrevivir y pertenecer a la sociedad de una forma activa y participativa, mientras que la preferencia-deseo es propia del pensamiento ilusorio, tal que puede ser requerido materialmente o no.

Por consiguiente, esta propuesta se encuentra implícita en el espacio general semántico de preferencia, en particular el espacio semántico B2.2-D2, el cual permite examinar indirectamente lo que el individuo necesita o requiere, induciéndolo a partir de sus relaciones de preferencia y aversión. Esto es, la racionalidad de pérdidas y ganancias hace posible caracterizar al individuo

*holístico*, a imagen del *homo-socioeconomicus*, por medio de la valoración independiente de razones positivas y negativas para elegir determinada alternativa o curso de acción.

A continuación, esta investigación se centra en caracterizar una estructura de preferencia-necesidad para el individuo socio-económico, donde el deseo y la necesidad pueden comportarse o de manera sinérgica u opuesta, según si el deseo refleja necesidad o no. Este tipo de comportamiento se justifica y sostiene en base a la racionalidad de pérdidas y ganancias, el principio fundacional del espacio general semántico de preferencia para la evaluación subjetiva de la decisión.

#### **4.2.2 Estructuras de preferencia-necesidad**

Desde la teoría de conjuntos borrosos [61], [130], [154], la representación de un concepto se construye a partir de la función característica del conjunto y la verificación del grado en que un objeto cumple las propiedades que definen dicho concepto. Entonces, si se consideran conjuntamente los conceptos de necesidad y preferencia, cuyas fronteras son evidentemente borrosas o difusas, es posible examinar su significado compuesto mediante la constitución del valor de preferencia de tipo 2.

Por lo tanto, la medida del componente de preferencia-necesidad, aparte del de preferencia-deseo, es la base para identificar la percepción subjetiva sobre las alternativas que son realmente necesarias y por ello mismo, también deseadas. De esta forma, el núcleo de las relaciones de preferencia de tipo 2 se refiere a aquello que se puede/debe hacer, donde las intensidades de deseo y de necesidad obedecen efectivamente a una racionalidad individual, vital [5], que permite encontrar un curso de acción necesario ante las distintas alternativas del problema de decisión.

De este modo, se asume que la necesidad es el componente básico, el núcleo, de las preferencias del segundo tipo. Entonces, una estructura de preferencia de este tipo, denominada aquí *estructura de preferencia-necesidad*, se formula por medio de una *condición mínima de implicación* (como se especifica en [68]) sobre las intensidades de necesidad ( $N$ ) y deseo ( $D$ ), pues se postula que “necesitar” implica “desear”, pero no lo contrario.

Estas ideas se formalizan a continuación por medio de la *implicación intuicionista*  $I_i^{\rightarrow}$  (ver por ejemplo [71]). De esta forma, el operador  $I_i^{\rightarrow}$  es una implicación que cumple con la propiedad del orden (ver Sección 2.4.2), tal que para dos elementos  $x$  e  $y$  cualesquiera,  $I_i^{\rightarrow}(x, y) = 1$  si y solo si  $x \leq y$ . Esto es, si se tiene que ( $N$ ) implica ( $D$ ), entonces una estructura de preferencia-necesidad es tal que para cualquier par de alternativas  $x, y \in X$ , se verifica que  $I_i^{\rightarrow}(N(x, y), D(x, y)) = 1$ .

Sea  $\mu_N(x, y)$  la intensidad de necesidad, según el grado en que se verifica que “ $x$  es más necesaria que  $y$ ”, y sea  $\mu_D(x, y)$  la intensidad de deseo, de acuerdo con el grado en que se verifica que “ $x$  es al menos tan deseada como  $y$ ”. Entonces, una estructura de preferencia-necesidad identifica el componente de necesidad aparte del de deseo, de acuerdo con la condición implicativa  $I_i^{\rightarrow}(\mu_N(x, y), \mu_D(x, y)) = 1$ .

**Definición N:** Una estructura de *preferencia-necesidad* sobre  $X$  está dada por el par  $\langle D, N \rangle$ , tal que para todo  $x, y \in X$ , se verifica que

$$D(x, y) = R^+(x, y),$$

$$N(x, y) = T(R^+(x, y), n(R^-(x, y))),$$

donde  $R^+(x, y)$  representa el predicado “ $x$  es al menos tan *buena* como  $y$ ”,  
 $R^-(x, y)$  representa el predicado “ $x$  es al menos tan *mala* como  $y$ ”,  $n$  es una  
negación fuerte y  $T$  es una  $t$ -norma continua, y es cierto que

$$I_i^{\rightarrow}(\mu_N(x, y), \mu_D(x, y)) = 1.$$

En esta forma, si  $\mu_D(x, y) = 0$ , entonces  $\mu_N(x, y)$  no puede ser mayor que 0 y si  
 $\mu_N(x, y) = 1$ , entonces  $\mu_D(x, y) = 1$ . Por lo tanto, si  $\mu_D(x, y) = \mu_N(x, y)$ ,  
entonces la intensidad de deseo expresa el grado en que existe preferencia debido a  
la identificación material de necesidad. De otro modo, si  $\mu_D(x, y) > \mu_N(x, y)$ ,  
entonces la *distancia* entre las intensidades de deseo y necesidad expresa la  
diferencia ente el componente de deseo ( $D$ ) y el componente de necesidad ( $N$ ), tal  
que a mayor distancia, mayor será el *decrecimiento* de la necesidad frente a la del  
deseo.

De esta manera, el individuo puede preferir determinadas alternativas con  
intensidades distintas, pero esto no implica que todas las alternativas preferidas  
sean igualmente necesarias. De esta forma, aunque el individuo revele que prefiere  
una alternativa sobre otra, también tiene la capacidad de *distinguir* si dicha  
preferencia obedece simplemente a que quiere satisfacer un deseo (que por  
definición carece de un nivel de saciedad), o a que tiene una necesidad por  
satisfacer (que por su misma condición de ser necesaria, incorpora un cierto nivel  
de saciedad).

Por lo tanto, el significado de la relación de preferencia de tipo 2, la cual está  
caracterizada por medio de la estructura de preferencia-necesidad, solo es  
completamente comprendido una vez se examina la expresión relacional compuesta

$I_i^{\rightarrow}(N(x, y), D(x, y)) = 1$ . En este sentido,  $N$  expresa el *valor necesario* de  $x$  frente a  $y$ , mientras que  $D$  expresa el *valor deseado* de  $x$  frente a  $y$ .

Entonces, con el fin de aclarar la relación entre el espacio semántico general de preferencia y la estructura de necesidad-preferencia  $\langle D, N \rangle$ , se formula el siguiente resultado. Se confirma de este modo la afirmación hecha en la Sección 4.1.3, donde se asegura que la semántica de las preferencias de tipo 2 corresponde con el espacio semántico B2.2-D2.

**Teorema 8:** Para todo  $x, y \in X$ , y dado el espacio semántico general de preferencia, la estructura de preferencia-necesidad  $\langle D, N \rangle$  permite diferenciar lo que es preferido de lo que es necesario si, y sólo si, la semántica de las relaciones  $R^+(x, y), R^-(x, y) \in [0, 1]$  obedece al espacio B2.2-D2, como en el caso del modelo P-A.

**Demostración:** Bajo la estructura evaluativa de los espacios semánticos B1.1 y B1.2, es decir, bajo una escala de valoración de tipo B1, se cumple que  $x^- = n(x^+)$ . De este modo, se verifica que  $N = T(R^+, n(R^-)) = T(x^+, n(x^-)) = x^+$ , tal que  $N = D$ . En cuanto al espacio B2.1, se cumple que  $N = T(x^+, n(x^-)) = T(x^+, n(y^+))$ . Entonces, de acuerdo con el modelo IA-SM, se tiene que  $T(x^+, n(y^+)) = p(x^+, y^+) = P$ , tal que  $N = P$ . Con respecto al espacio semántico B2.2-D1, y el modelo c-PCT, se cumple que  $N = T(x^+, n(x^-)) = R^+ = x^+$ , tal que  $N = D$ . Por el contrario, bajo el espacio B2.2-D2 y el modelo P-A, se tiene que

$N = T(R^+, n(R^-)) = T(S(p, i), S(z^{-1}, h))$ , de modo que no es cierto que  $N = D$  ni que  $N = P$ . ◇

Por lo tanto, la formulación explícita de una estructura de preferencia-necesidad, examinando el modelo P-A de acuerdo con la Definición  $N$ , se propone a continuación.

**Teorema 9:** Para cualquier par de alternativas  $x, y \in X$ , y una  $t$ -conorma continua  $S$ , la estructura completa P-A tiene implícita una estructura de preferencia-necesidad  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ , dada por,

$$\mu_D^{P-A}(x, y) = x^+ = S(p(x^+, y^+), i(x^+, y^+)),$$

$$\mu_N^{P-A}(x, y) = S(pa(x, y), ph(x, y), iz(y, x), ih(x, y)),$$

si y solo si  $S = S^m$ , donde  $S^m = \max$ .

**Demostración:** Se debe verificar que la definición de  $\mu_N^{P-A}$  coincide con la del componente de necesidad de la Definición  $N$ , donde  $N = T(R^+, n(R^-))$ . De este modo, tomando las ecuaciones (29) y (34) del modelo P-A, se tiene que  $R^+ = x^+ = S(p, i)$  y que  $n(R^-) = n(x^-) = S(z^{-1}, h)$ . Por lo tanto, se tiene que  $T(R^+, n(R^-)) = T(S(p, i), S(z^{-1}, h)) = S(T(p, z^{-1}), T(p, h), T(i, z^{-1}), T(i, h))$  es cierto si, y solo si,  $S = S^m$ , dado que  $S^m$  es la única  $t$ -conorma continua que cumple con la ley distributiva, tal que para todo  $a, b, c \in [0, 1]$  y para cualquier  $t$ -norma  $T$ , es cierto que  $T(a, S(b, c)) = S(T(a, b), T(a, c))$  si, y sólo si,  $S = S^m$  [43]. De esta forma se tiene que  $N = \mu_N^{P-A} = S^m(pa, ph, iz, ih)$ .

Entonces, se tiene que comprobar también que siempre es el caso que  $I_i^{\rightarrow}(\mu_N^{P-A}, \mu_D^{P-A})=1$ . De esta manera, es cierto que  $pa < p$  para el caso en el que  $p > z^{-1}$  y se cumple que  $pa = p$  para el caso en el que  $p \leq z^{-1}$ ; de igual manera,  $ph < p$  si  $p > h$  y  $ph = p$  si  $p \leq h$ ;  $iz^{-1} < i$  si  $i > z^{-1}$  e  $iz^{-1} = i$  si  $i \leq z^{-1}$ ; y finalmente,  $ih < i$  si  $i > h$  e  $ih = i$  si  $i \leq h$ ; por lo tanto, se tiene que  $pa \leq p$ ,  $ph \leq p$ ,  $iz^{-1} \leq i$  e  $ih \leq i$ . En consecuencia, se verifica que  $\mu_N^{P-A} = S(pa, ph, iz^{-1}, ih) \leq S(p, i) = \mu_D^{P-A}$ , tal que  $I_i^{\rightarrow}(\mu_N^{P-A}, \mu_D^{P-A})=1$ .  $\diamond$

De este modo, el individuo socio-económico cuenta con unas preferencias de tipo 2, reveladas por medio de una estructura de preferencia-necesidad dada por  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ . Entonces el proceso de decisión del individuo socio-económico, caracterizado a partir de su racionalidad de pérdidas y ganancias y el espacio semántico B2.2-D2, recae en identificar aquello que es necesario, y en base al principio de una necesidad insatisfecha, reconocer el curso de acción necesario de acuerdo con la alternativa cuya intensidad de necesidad sea mayor.

De esta forma, el *homo-socioeconomicus* otorga prioridad a la(s) alternativa(s) con mayor grado de necesidad, postergando la elección de opciones que aunque tengan intensidades de preferencia-deseo fuertes, carecen del atributo de ser efectivamente necesarias. Este proceso de reconocimiento del curso de acción necesario es examinado en la siguiente sección, donde se esboza la construcción de un *punto de vista socio-económico*, mediante la combinación de las dos dimensiones, positiva y negativa, del individuo frente a la decisión.

### 4.2.3 Construcción del punto de vista socio-económico

Recapitulando, el proceso de decisión del *homo-socioeconomicus* se caracteriza a partir de la identificación de los atributos positivos (ganancias) aparte de los negativos (pérdidas). De esta forma es posible representar sus intensidades de preferencia del segundo tipo, mediante la construcción de la correspondiente estructura de preferencia-necesidad, a la manera de  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ .

Una vez se expresan las intensidades de preferencia-deseo ( $D$ ) y de preferencia-necesidad ( $N$ ), el individuo cuenta con los medios para identificar las alternativas prioritarias, como aquellas que proporcionan un mayor nivel de satisfacción (ganancias) y un menor nivel de preocupación (pérdidas o deudas). De esta manera, lo prioritario está asociado con lo que es necesario, es decir, con aquello que es deseado y al mismo tiempo tiene un nivel mínimo de atributos negativos.

Esta equivalencia entre la necesidad y lo prioritario, de acuerdo con la condición de que lo necesario es indispensable para la vida, se debe precisamente a que el individuo está integrado en un ambiente tanto social como político. De este modo, el individuo socio-económico, en base al principio de una necesidad insatisfecha, es capaz de encontrar el curso de acción necesario para hacerse con las alternativas más necesarias y prioritarias.

En este sentido, las dos dimensiones de la racionalidad de pérdidas y ganancias son identificadas como los componentes básicos en la constitución de un *punto de vista socio-económico*. De manera general, un *punto de vista* se define aquí como un conjunto de criterios mediante el cual se obtiene un orden de preferencia sobre el conjunto de alternativas  $X$ . Por lo tanto, el punto de vista socio-económico está conformado por dos *super-criterios*, uno de pérdidas y otro de ganancias, a partir

del cual, por medio de la estructura  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ , se obtiene un orden de preferencia-necesidad sobre  $X$  que permite identificar el curso de acción necesario frente a la decisión.

Bajo este orden de ideas, se formula la siguiente caracterización de un punto de vista socio-económico, el cual describe el proceso de decisión del *homo-socioeconomicus* frente a un conjunto dado de alternativas  $X$ .

- **Primero:** El individuo tiene una racionalidad de pérdidas y ganancias que le permite expresar sus preferencias, sobre un conjunto dado de alternativas  $X$ , mediante la estructura básica P-A.
- **Segundo:** Las necesidades del individuo pueden ser completamente descritas por la estructura  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ .
- **Tercero:** De acuerdo con el principio de una necesidad insatisfecha, el individuo identifica que el curso de acción necesario corresponde con la elección de la(s) alternativa(s) que se encuentra en la parte más alta del orden de necesidad que el componente  $\langle N \rangle_{P-A}$  establece sobre  $X$ .

De este modo, se asume que un individuo inteligente, gracias a su racionalidad de pérdidas y ganancias, puede decir sobre cualquier par de alternativas, por un lado, con respecto a sus atributos positivos, si una alternativa es mejor que la otra, si son igual de buenas o si por el contrario, son incomparables. Y por otro lado, con respecto a sus atributos negativos, si una alternativa es peor que la otra, si son igual de malas o si por el contrario, son incomparables. Entonces se construyen los respectivos órdenes  $O^+$  y  $O^-$  (de acuerdo con la estructura básica P-A) sobre el conjunto  $X$ .

De esta forma, el individuo evalúa sus opciones y obtiene dos tipos de construcciones, una sobre los atributos positivos de las alternativas, conformando un orden de preferencia ( $O^+$ ) dado por  $R^+ = \langle p, i, j \rangle_\varphi$ , y la otra sobre los atributos negativos, conformando un orden de aversión ( $O^-$ ) dado por  $R^- = \langle z, g, h \rangle_\varphi$ . Luego, el individuo socio-económico construye su punto de vista, por medio de la evaluación conjunta de los dos órdenes  $O^+$  y  $O^-$ , de acuerdo con la Definición  $N$  y la especificación de la estructura  $\langle D, N \rangle$ .

Por lo tanto, sea el orden  $O$  el resultante de la intersección entre  $O^+$  y  $n(O^-)$ , donde el operador  $n$  revierte el orden de  $O^-$ , tal que para todo  $x, y \in O^-$ , si  $x \leq y$  en  $O^-$ , se tiene que  $y \leq x$  en  $n(O^-)$ , y sea la alternativa  $x \in X$  un elemento maximal si no existe otro elemento  $y \in X$  tal que sea cierto que  $x < y$  en  $O$ . De esta manera, el conjunto de todos los elementos maximales del conjunto  $\Theta = (X, O)$  se denota como  $\max(\Theta)$  [131].

De esta forma, el paso tercero en la caracterización del punto de vista socio-económico, el cual describe el proceso de decisión del *homo-socioeconomicus*, puede reformularse de la siguiente manera:

**Regla de decisión  $N$ :** En base al principio de una necesidad insatisfecha, el curso de acción necesario para el individuo socio-económico está compuesto por el conjunto de alternativas necesarias  $\mathbf{N}$ , que son elementos maximales de  $\Theta = (X, O)$ , tal que  $\mathbf{N} = \max(\Theta)$ .

Entonces, el algoritmo que permite resolver un problema de decisión, encontrando el curso de acción necesario frente a las alternativas disponibles, se puede enunciar de la siguiente manera.

**Paso 1:** Para todo par de alternativas  $x, y \in X$ , el individuo revela las intensidades en que verifica el predicado de preferencia  $R^+$  y el de aversión  $R^-$ .

**Paso 2:** Se contruye la estructura básica P-A, identificando las intensidades para los componentes de la estructura básica de preferencia, a partir de las soluciones (20)-(22), (23)-(25) o (26)-(28), y las intensidades para los componentes de la estructura básica de aversión, a partir de las soluciones (35)-(37), (38)-(40) o (41)-(43).

**Paso 3:** Se construye la estructura completa P-A, mediante la evaluación conjuntiva de la estructura básica P-A, por medio de la  $t$ -norma del mínimo  $T^m$  (Teorema 4), la  $t$ -norma de Lukasiewicz  $T^L$  (Teorema 5) o la  $t$ -norma probabilística  $T^p$  (Teorema 6).

**Paso 4:** A partir de la estructura de preferencia-necesidad  $\langle D, N \rangle_{P-A}$  (Teorema 9), se identifica el orden de necesidad, dado por el componente  $\langle N \rangle_{P-A} = N$ , sobre  $X$ .

**Paso 5:** El curso de acción necesario está compuesto por el conjunto de alternativas necesarias  $\mathbf{N}$  (Regla de decisión  $N$ ), que son elementos maximales de  $\Theta = (X, N)$ , tal que  $\mathbf{N} = \max(\Theta)$ .

Este procedimiento de decisión se ilustra en la siguiente sección mediante un par de ejemplos. Para finalizar, se observa que esta propuesta, fundada en una racionalidad de pérdidas y ganancias, requiere de la construcción explícita de una

estructura de preferencia-necesidad, que como se ha visto, se encuentra implícita en la estructura completa P-A (Teorema 9). De este modo, se identifica aquello que es prioritario por su condición de ser necesario, fundado en el principio básico de una necesidad insatisfecha, en referencia directa al *homo-socioeconomicus* y su punto de vista característico.

### **4.3 Ejemplos y paradojas**

A continuación se examinan algunos ejemplos sobre el modelo P-A y el punto de vista socio-económico, junto con una conocida paradoja acerca de la decisión racional. Primero, se examina el proceso de decisión del *homo-socioeconomicus*, a partir del orden de preferencia y aversión que éste asigna sobre el conjunto de alternativas  $X$ . Segundo, se revisa la paradoja del burro de Buridan, donde se plantea una decisión imposible a partir de elementos puramente analíticos. Finalmente se revisa el problema de decisión propuesto en la Sección 3.5.2.1 (el cual se resolvió de acuerdo con el espacio semántico B1.2-D1 y el modelo P-A con grados de relevancia), con el fin de aplicar la metodología correspondiente con el espacio semántico B2.2-D2 y la estructura completa P-A.

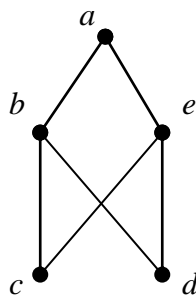
#### **4.3.1 Ejemplo sobre el procedimiento de decisión del individuo socio-económico**

En este ejemplo se asume que el individuo puede decir si prefiere o rechaza una alternativa sobre otra, si las considera igual de buenas o igual de malas, o por el contrario, si las considera incomparables. Por lo tanto, es capaz de construir dos tipos de órdenes sobre las mismas, uno de preferencia y otro de aversión, dibujándolos por medio de un diagrama, tal que un arco que conecta dos nodos o

alternativas denota preferencia débil en el orden de preferencia, o aversión débil en el orden de aversión, de la mayor alternativa sobre la menor.

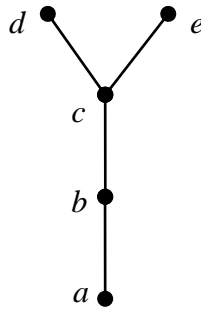
De esta forma, el elemento más grande está en lo más alto del orden y el elemento más pequeño se encuentra en lo más bajo del mismo, y en caso de ausencia de arco, las dos alternativas son incomparables. Luego el individuo combina los dos tipos de órdenes, uno de tipo positivo y el otro de tipo negativo, con el fin de encontrar las alternativas necesarias y prioritarias con respecto al punto de vista socio-económico.

Entonces, evaluando un conjunto de alternativas dado por  $X=\{a,b,c,d,e\}$ , el individuo pesa las razones positivas aparte de las negativas, y en cada caso construye un orden sobre  $X$ . De este modo, si toma en cuenta las razones a favor acerca de cada opción, encuentra un orden de preferencia de acuerdo con la Figura 10.



**Figura 10.** El orden de preferencia.

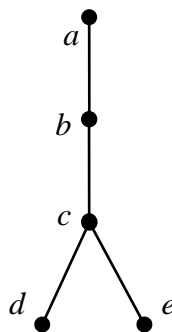
De la misma manera, si toma en cuenta las razones en contra acerca de cada alternativa, encuentra un orden de aversión dado por la Figura 11.



**Figura 11.** El orden de aversión.

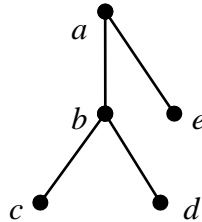
De esta forma, se tienen dos órdenes, uno de preferencia y otro de aversión, los cuales deben ser agregados, mediante su respectiva intersección, para obtener un orden conjunto de pérdidas y ganancias. Entonces, para el caso del *homosocioeconomicus*, se construye un punto de vista socio-económico, con el fin de identificar sus necesidades y el correspondiente curso de acción necesario.

En primera instancia, siguiendo la Definición *N*, la combinación de ambos órdenes exige aplicar un operador involutivo sobre el orden de aversión (como se muestra en la Figura 12), tal que el elemento menos rechazado esté en la parte más alta y el más rechazado en la parte más baja del orden. De esta forma, al obtener el orden conjunto de preferencia y no-aversión, el elemento más necesario se encuentra en la parte más alta del orden.



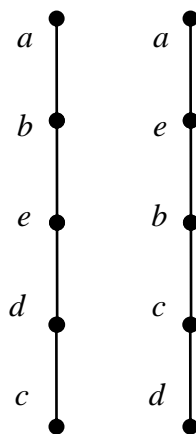
**Figura 12.** El orden de no-aversión.

Entonces, bajo un punto de vista socio-económico, se obtiene que la alternativa  $a$  es la más necesaria, pues es el elemento maximal del orden de preferencia y no-aversión (ver Figura 13).



**Figura 13.** El orden de necesidad bajo un punto de vista socio-económico.

Además, nótese que aunque un orden parcial puede descomponerse en distintos órdenes lineales, donde cada uno de estos puede interpretarse como un cierto criterio o dimensión, no ha sido necesario efectuar dicha descomposición (como por ejemplo, la que se ilustra en la Figura 14 para el orden de preferencia, tomando dicho orden como un orden parcial). Tan solo se pide al individuo que revele sus preferencias como dos órdenes no necesariamente lineales, uno de preferencia, y otro de aversión, a partir de los cuales se obtiene un orden correspondiente con el punto de vista socio-económico.



**Figura 14.** Dos dimensiones o extensiones lineales para el orden de preferencia.

#### 4.3.2 Paradoja del burro de Buridan

Se examina ahora una paradoja conocida como la paradoja del burro de Buridan [17], entendida ésta como una crítica al determinismo moral, la cual propone considerar la situación de un burro, que al ser indiferente entre un bulto de paja y otro de cebada, morirá de hambre al no poder decidirse por ninguno de los dos, dado que los desea de la misma manera.

Del mismo modo, se puede pensar en un individuo que debe elegir entre bebida y comida, pero que al desear ambos de la misma manera, y debido a su indecisión, morirá de hambre y sed al no poder elegir entre una y otra opción. Esta es una consecuencia indeseable que se desprende de la aproximación determinista de la teoría de la decisión.

Esta paradoja critica directamente el denominado determinismo moral, el cual sostiene que ante un problema de decisión, el individuo siempre elige la mejor alternativa. Pero entonces, si no hay a disposición una mejor opción, sino varias opciones buenas, el resultado es el de la cancelación de la decisión, y por ende, en el caso del hambriento, la muerte por inanición.

Esta paradoja se puede analizar de distintas maneras. Por ejemplo, si se acepta que no existe la indiferencia perfecta en la vida real, en el sentido en que siempre hay alguna diferencia entre una y otra opción (así sean la misma, en cuyo caso se niega que se verifique con total intensidad la propiedad reflexiva de la preferencia débil). De esta forma, se tiene que el individuo siempre es capaz de encontrar alguna diferencia entre las alternativas disponibles, y por lo tanto elegirá la que más valore (dominando así el comportamiento irracional descrito por la paradoja [17]).

Otra manera de analizar la paradoja es la de considerar los aspectos negativos o nocivos en contra de las alternativas, en base a la racionalidad de pérdidas y ganancias. Entonces puede darse el caso igualmente que varias alternativas sean valoradas exactamente del mismo modo, por lo que, bajo una perspectiva determinista, el individuo morirá de hambre. Pero esta consecuencia, de por sí indeseable, choca contra la racionalidad de pérdidas y ganancias y la cualidad negativa de la justicia, atributos éstos de un individuo socio-económico, quien tiene la capacidad de diferenciar estímulos hostiles de estímulos benévolos, ya que de ello depende su sobrevivencia [24] (véase la Sección 4.1.1).

Entonces se advierte que existe un argumento negativo que resuelve la paradoja, pues una vez el individuo reconoce que morirá por no ingerir alimento, descubre que el curso de acción necesario es el de no dejar de tomar nada. De este modo, su decisión efectiva obedece a una necesidad material sobre la cual está *forzado* a actuar.

Por lo tanto, en la medida en que se fuerza la decisión real o efectiva sobre el individuo, se debe forzar del mismo modo la construcción de una jerarquía sobre las necesidades. De esta forma, se fuerza la existencia de una secuencia de alternativas que deben ser satisfechas, desde la más hasta la menos necesaria, tal que una vez se elige la primera necesidad, el individuo pasará a la siguiente en cuanto alcance su respectivo nivel de saciedad. Se recuerda que este nivel de saciedad es una característica primaria de aquello que es necesario, en oposición a lo que es preferido solo por ser deseado (véase la Sección 4.1.3).

En conclusión, se reconoce que la paradoja se mantiene siempre que se tengan dos alternativas iguales, una posibilidad ante todo teórica, que es insoluble para la teoría de la decisión que defiende que de un orden de preferencia siempre se

desprende una mejor opción y que ésta coincide con la elección de un individuo racional. Pero desde la posición teórica de la ayuda a la decisión, donde se sitúa al modelo P-A, se considera que de un orden de preferencia-aversión se obtiene la situación que mejor describe el estado de conocimiento del individuo, la cual no coincide necesariamente con una decisión óptima y efectiva.

De este modo, bajo esta aproximación P-A, el orden no determina la decisión, sino que describe el problema y plantea posibles cursos de acción de acuerdo con la(s) situación(es) relacional(es) identificada(s). Entonces, bajo un punto de vista socio-económico, es posible señalar el curso de acción necesario, el cual se ejecuta en base a las necesidades del individuo.

Por lo tanto, se resuelve la paradoja del burro de Buridan [17], o como se ha reformulado aquí, del Hombre Hambriento, si y solo si,

1. Se reconoce la racionalidad de pérdidas y ganancias del individuo, en base a la cual se descubre que se morirá si no se elige nada.
2. Se revelan las necesidades del individuo, elementos del conjunto  $N$ , tal que  $N \subseteq X$ .
3. Se fuerza una jerarquía sobre  $N$ , en base a la cual se pueden saciar *secuencialmente* todas las necesidades del individuo.

### **4.3.3 Ejemplo de un problema de decisión y su interpretación bajo la estructura completa P-A**

Ahora se revisa el ejemplo propuesto en la Sección 3.5.2.1, pero esta vez, se desarrolla una interpretación semántica de acuerdo con el espacio B2.2-D2 y el modelo P-A. Se recuerda que el problema exige decidir sobre un determinado tipo

de energía, tal que se cuenta con los grados de preferencia y aversión que expertos asignan sobre las distintas tecnologías disponibles. Las alternativas son las siguientes,  $a$ : eólica y marítima,  $b$ : solar,  $c$ : geotérmica y  $d$ : nuclear.

De esta forma, a partir de las intensidades reveladas por los expertos, se obtienen las intensidades de preferencia estricta, indiferencia e incomparabilidad, de acuerdo con las diferentes caracterizaciones de  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$ , dadas por (20)-(22), (23)-(25) y (26)-(28); junto con las de aversión estricta, indiferencia negativa e incomparabilidad por aversión, de acuerdo con las caracterizaciones de  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ , dadas por (35)-(37), (38)-(40) y (41)-(43).

Como se ha visto, las cotas de  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  vienen dadas por (17)-(19) y las de  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$  han sido formuladas mediante el Teorema 2, tal que sus intensidades pueden ser representadas utilizando la notación por intervalos, de acuerdo con (50)-(55), según el tipo de borrosidad F2. De esta forma, se obtiene un intervalo en el cual se encuentra con certeza la intensidad de cada una de las situaciones relacionales básicas, pero existe un cierto grado de inexactitud acerca de la misma. Este grado de inexactitud está dado por (44)-(46) para  $\langle p, i, j \rangle_\varphi$  y por (47)-(49) para  $\langle z, g, h \rangle_\varphi$ .

Por lo tanto, sobre la información de la cual se dispone (las intensidades de preferencia y aversión se encuentran en la formulación original del problema, en la Sección 3.3.2.1), se obtienen las siguientes intensidades intervalo-valoradas de preferencia estricta ( $P$ ), indiferencia ( $I$ ) e incomparabilidad ( $J$ ).

<i>P</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[0.0,0.0]	[0.4,0.7]	[0.0,0.3]	[0.0,0.2]
<i>b</i>	[0.0,0.3]	[0.0,0.0]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
<i>c</i>	[0.3,0.6]	[0.4,0.5]	[0.0,0.0]	[0.0,0.4]
<i>d</i>	[0.5,0.7]	[0.8,0.9]	[0.1,0.5]	[0.0,0.0]

<i>I</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[1.0,1.0]	[0.0,0.3]	[0.1,0.4]	[0.0,0.2]
<i>b</i>	[0.0,0.3]	[1.0,1.0]	[0.4,0.5]	[0.0,0.1]
<i>c</i>	[0.1,0.4]	[0.4,0.5]	[1.0,1.0]	[0.1,0.5]
<i>d</i>	[0.0,0.2]	[0.0,0.1]	[0.1,0.5]	[1.0,1.0]

<i>J</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[0.0,0.0]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.1,0.3]
<i>b</i>	[0.0,0.3]	[0.0,0.0]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
<i>c</i>	[0.0,0.3]	[0.0,0.1]	[0.0,0.0]	[0.0,0.4]
<i>d</i>	[0.1,0.3]	[0.0,0.1]	[0.0,0.4]	[0.0,0.0]

Nótese que a partir de estas intensidades de preferencia, se podría concluir que la opción *d* es la preferida de las cuatro. Pero de esta manera se estaría ignorando la mitad de la información disponible, de acuerdo con la estructura básica P-A. Por lo tanto, es también necesario incluir la información negativa sobre las pérdidas asociadas con cada alternativa. Entonces, se obtienen también las intensidades intervalo-valoradas de aversión estricta (*Z*), indiferencia negativa (*G*) e incomparabilidad por aversión (*H*).

<i>Z</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[0.0,0.0]	[0.0,0.3]	[0.0,0.4]	[0.0,0.1]
<i>b</i>	[0.2,0.5]	[0.0,0.0]	[0.2,0.3]	[0.0,0.1]
<i>c</i>	[0.0,0.4]	[0.0,0.1]	[0.0,0.0]	[0.0,0.2]
<i>d</i>	[0.8,0.9]	[0.7,0.8]	[0.6,0.8]	[0.0,0.0]

<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[1.0,1.0]	[0.0,0.3]	[0.0,0.4]	[0.0,0.1]
<i>b</i>	[0.0,0.3]	[1.0,1.0]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
<i>c</i>	[0.0,0.4]	[0.0,0.1]	[1.0,1.0]	[0.0,0.2]
<i>d</i>	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.2]	[1.0,1.0]

<i>H</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	[0.0,0.0]	[0.2,0.5]	[0.2,0.6]	[0.0,0.1]
<i>b</i>	[0.2,0.5]	[0.0,0.0]	[0.6,0.7]	[0.1,0.2]
<i>c</i>	[0.2,0.6]	[0.6,0.7]	[0.0,0.0]	[0.0,0.2]
<i>d</i>	[0.0,0.1]	[0.1,0.2]	[0.0,0.2]	[0.0,0.0]

Luego se tienen dos órdenes distintos que pueden ser examinados según la estructura P-A. Como se tienen cuatro alternativas, se necesitan seis matrices P-A para examinar todos los distintos subconjuntos de pares que pueden hacerse a partir del conjunto  $X = \{a, b, c, d\}$ . De este modo, utilizando la  $t$ -norma  $T_{IV}^m$  como operador de intersección entre  $\langle p, i, j \rangle_{\varphi}$  y  $\langle z, g, h \rangle_{\varphi}$ , se obtienen los siguientes resultados.

Una aproximación borrosa y bipolar al proceso subjetivo de decisión bajo incertidumbre

<b>P-A(a,b)</b>	$Z(a,b)$	$Z(b,a)$	$G(a,b)$	$H(a,b)$
$P(a,b)$	[0.0,0.3]	[0.2,0.5]	[0.0,0.3]	[0.2,0.5]
$P(b,a)$	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]
$I(a,b)$	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]
$J(a,b)$	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]

<b>P-A(a,c)</b>	$Z(a,c)$	$Z(c,a)$	$G(a,c)$	$H(a,c)$
$P(a,c)$	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]
$P(c,a)$	[0.3,0.6]	[0.0,0.4]	[0.0,0.4]	[0.2,0.6]
$I(a,c)$	[0.0,0.4]	[0.0,0.4]	[0.0,0.4]	[0.1,0.4]
$J(a,c)$	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]	[0.0,0.3]

<b>P-A(a,d)</b>	$Z(a,d)$	$Z(d,a)$	$G(a,d)$	$H(a,d)$
$P(a,d)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.2]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$P(d,a)$	[0.0,0.1]	[0.5,0.7]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$I(a,d)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.2]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$J(a,d)$	[0.0,0.1]	[0.1,0.3]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]

<b>P-A(b,c)</b>	$Z(b,c)$	$Z(c,b)$	$G(b,c)$	$H(b,c)$
$P(b,c)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$P(c,b)$	[0.2,0.3]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.4,0.5]
$I(b,c)$	[0.2,0.3]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.4,0.5]
$J(b,c)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]

<b>P-A(b,d)</b>	$Z(b,d)$	$Z(d,b)$	$G(b,d)$	$H(b,d)$
$P(b,d)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$P(d,b)$	[0.0,0.1]	[0.7,0.8]	[0.0,0.1]	[0.1,0.2]
$I(b,d)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]
$J(b,d)$	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]	[0.0,0.1]

<b>P-A(c,d)</b>	$Z(c,d)$	$Z(d,c)$	$G(c,d)$	$H(c,d)$
$P(c,d)$	[0.0,0.2]	[0.0,0.4]	[0.0,0.2]	[0.0,0.2]
$P(d,c)$	[0.0,0.2]	[0.1,0.5]	[0.0,0.2]	[0.0,0.2]
$I(c,d)$	[0.0,0.2]	[0.1,0.5]	[0.0,0.2]	[0.0,0.2]
$J(c,d)$	[0.0,0.2]	[0.0,0.4]	[0.0,0.2]	[0.0,0.2]

De esta manera, se obtiene el orden que la estructura P-A asigna sobre  $X$ . Este tipo de orden se construye utilizando toda la información disponible e interpretándola de acuerdo con el espacio B2.2-D2, el cual está dotado de una estructura evaluativa de tipo B2, donde se agrega la información positiva aparte de la negativa, en referencia a los pares  $\langle (x^+, y^+), (x^-, y^-) \rangle$ , tal que  $n(x^+) \neq x^- \neq y^+$ .

Entonces se analizan las situaciones relacionales de decisión identificadas por el modelo P-A, centrándonos en las de mayor importancia, de acuerdo con los grados de sus intensidades. De esta forma, en P-A( $a, b$ ) se encuentra evidencia de que existe preferencia fuerte,  $pa(a, b)$ , y preferencia semi-fuerte,  $ph(a, b)$ , de  $a$  sobre  $b$ .

En P-A( $a, c$ ) se reconoce una relación de preferencia fuerte,  $pa(c, a)$ , y de preferencia semi-fuerte,  $ph(c, a)$ , de  $c$  sobre  $a$ . En P-A( $a, d$ ) se encuentra evidencia de ambivalencia,  $pz(d, a)$ , pseudo-aversión,  $iz(d, a)$ , y aversión semi-fuerte,  $jz(d, a)$ , de  $d$  sobre  $a$ , y de preferencia fuerte,  $pa(a, d)$ , de  $a$  sobre  $d$ . En este caso, se encuentra mayor intensidad de ambivalencia, al mismo tiempo que cierta intensidad de aversión por  $d$  y un poco menos de intensidad en la preferencia por  $a$ .

En P-A( $b, c$ ) se muestra una relación de semi-preferencia,  $ph(c, b)$ , de  $c$  sobre  $b$ , e indiferencia positiva,  $ih(c, b)$ . Luego, con menor intensidad, se tiene preferencia fuerte,  $pa(c, b)$ , de  $c$  sobre  $b$  y pseudo-aversión,  $iz(b, c)$ , de  $b$  sobre  $c$ . En P-A( $b, d$ ), se encuentra que hay ambivalencia,  $pz(d, b)$ , junto con un poco de preferencia semi-fuerte,  $ph(d, b)$ , de  $d$  por  $b$ , y en P-A( $c, d$ ) se tiene evidencia de ambivalencia,  $pz(d, c)$ , pseudo-aversión,  $iz(d, c)$ , y aversión semi-fuerte,  $jz(d, c)$ , de  $d$  sobre  $c$ , y preferencia fuerte,  $pa(c, d)$ , de  $c$  sobre  $d$ .

Entonces, una vez se ha encontrado u obtenido la descripción del problema, interpretándolo por medio de la estructura completa P-A, y señalando las distintas

situaciones que mejor representan el estado de conocimiento de quien debe decidir (en este caso una comisión, integrada por varios individuos que deben emitir un juicio), se procede ahora a examinar la estructura de preferencia-necesidad  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ . Esto, con el fin de identificar el curso de acción necesario bajo un punto de vista socio-económico.

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 9 (Sección 4.2.2), se tiene que para cualquier par  $x, y \in X$ ,

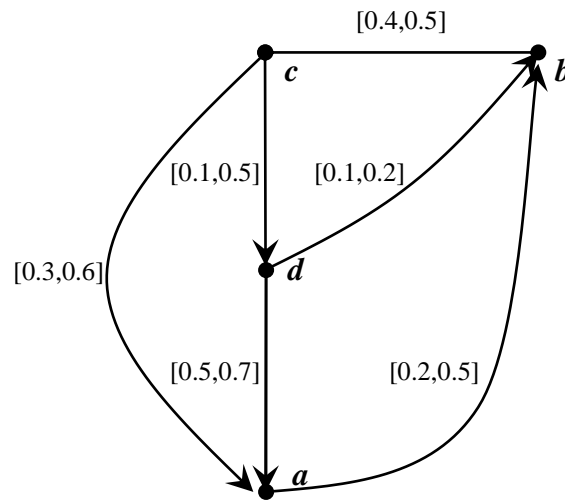
$$\mu_N^{P-A}(x, y) = S^m(pa(x, y), ph(x, y), iz(y, x), ih(x, y)).$$

De este modo, se consiguen los siguientes valores (en intervalos) de necesidad sobre las alternativas  $X = \{a, b, c, d\}$ .

$\mu_N^{P-A}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	[0.0, 0.0]	[0.2, 0.5]	[0.1, 0.4]	[0.0, 0.2]
$b$	[0.0, 0.3]	[0.0, 0.0]	[0.4, 0.5]	[0.0, 0.1]
$c$	[0.3, 0.6]	[0.4, 0.5]	[0.0, 0.0]	[0.1, 0.5]
$d$	[0.5, 0.7]	[0.1, 0.2]	[0.0, 0.2]	[0.0, 0.0]

Entonces se tiene que para todo  $x, y \in X$ , es cierto que  $x = y$  si y solo si se verifica que  $\mu_N^{P-A}(x, y) = [\mu_N^L, \mu_N^U] = \mu_N^{P-A}(y, x)$ , y se cumple que  $x \geq y$  si y solo si es cierto que  $\mu_N^L(x, y) \geq \mu_N^L(y, x)$  y  $\mu_N^U(x, y) \geq \mu_N^U(y, x)$ . De esta forma, bajo el orden de necesidad dado por  $\langle D, N \rangle_{P-A}$  y las intensidades intervalo-valoradas sobre la verificación del predicado de necesidad  $N$ , “es más necesario que”, se encuentra que  $c = b$ , con una intensidad entre [0.4, 0.5],  $c \geq a$ , con una intensidad entre [0.3, 0.6],  $c \geq d$ , con una intensidad entre [0.1, 0.5],  $d \geq a$ , con una intensidad entre [0.5, 0.7],  $a \geq b$  con una intensidad entre [0.2, 0.5] y  $d \geq b$  con una intensidad entre [0.1, 0.2].

La representación de este orden de necesidad se puede ver en la Figura 15, donde el arco direccional de  $c$  a  $d$  refleja que  $c \geq d$  y el arco sin dirección entre  $c$  y  $b$  refleja que  $c = b$ .



**Figura 15.** El orden de necesidad bajo un punto de vista socio-económico.

De esta manera se puede ver que aunque las alternativas  $b$  y  $c$  son igual de necesarias entre ellas, se tiene que  $c$  es más necesaria que  $d$  y que  $a$ , pero  $a$  y  $d$  son las dos más necesarias que  $b$ . Por lo tanto, de acuerdo con el punto de vista socio-económico, se revela el curso de acción necesario mediante la identificación del conjunto  $\mathbf{N}$  de necesidades o alternativas prioritarias, tal que  $\mathbf{N} = \{c\}$ . Esto es,  $c$  es el elemento maximal del orden de necesidad  $(X, N)$  dado por  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ .



## Conclusiones

En esta investigación se ha desarrollado un análisis sobre la modelización de preferencias, haciendo énfasis en la búsqueda del significado de los conceptos junto con el de sus opuestos, introduciendo la nueva propuesta de una *racionalidad de pérdidas y ganancias*. Se ha puesto al descubierto un rasgo característico del conocimiento científico, denominado como bipolaridad y que se encuentra de forma natural en el lenguaje y en la construcción del conocimiento en general, lo cual ha servido (implícitamente) de eje para el desarrollo de la teoría de la decisión y los distintos modelos de preferencia.

Este rasgo bipolar, una característica primaria en la modelización de preferencias, ha sido explícitamente formulado mediante el *espacio semántico general de preferencia*. Entonces, de acuerdo con este espacio, el cual ha sido originalmente introducido en esta investigación, se identifica un *vacío semántico* en la modelización de preferencias de un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias. Este vacío se refiere a que no se encuentra en la literatura de la teoría de la decisión, un modelo que permita representar el proceso de decisión de un individuo cuya valoración de las ganancias ocurra de manera independiente a la de las pérdidas.

Con el propósito de subsanar este vacío, se presenta en este trabajo la nueva propuesta del *modelo P-A*. Este modelo está compuesto por la *estructura básica P-A*, que al ser conjuntivamente examinada, da lugar a la *estructura completa P-A*, compuesta por diez situaciones distintas de decisión, las cuales representan los distintos estados del conocimiento que el individuo puede tener frente a la decisión. Entonces se tiene que la caracterización de diez situaciones distintas de decisión, al

igual que ocurre con la estructura c-PCT, es posible si, y sólo si, se asume la completa independencia entre las dimensiones positiva y negativa de la información (ver el espacio semántico B2.2 en la Sección 3.2.4).

Esas diez situaciones de decisión se presentan en esta investigación como diferentes tipos de estados del conocimiento frente a la decisión, caracterizadas como tipos de *incertidumbre semántica*. Esta modelización **descriptiva** de la incertidumbre, propuesta en este trabajo, se complementa con el tipo de valoración que hace el sujeto de sus intensidades de preferencia y aversión, sea mediante el marco evaluativo correspondiente al de la borrosidad de tipo F1 o al de la borrosidad de tipo F2.

Finalmente, por medio de la estructura completa P-A, se especifica un *punto de vista socio-económico*, característica fundamental de un individuo holístico y equilibrado, identificado como el *homo-socioeconomicus*. De este modo, se propone una nueva *tipología de preferencias*, las de un primer tipo donde preferencia, necesidad y deseo son equivalentes, y las de segundo tipo, donde la necesidad es de una naturaleza distinta a la del deseo.

Por lo tanto, se introduce una nueva *estructura de preferencia-necesidad*, con el fin de formalizar las preferencias del segundo tipo. Entonces se demuestra que la semántica de este tipo de preferencias corresponde con el espacio semántico B2.2-D2, y se formula un ejemplo de una estructura de preferencia-necesidad implícita en la estructura completa P-A. De esta manera, se adelanta el *principio de una necesidad insatisfecha*, en base al cual el orden de preferencia-necesidad revela aquello que es necesario y por ello mismo, prioritario.

Dicho orden de preferencia-necesidad se sostiene como soporte de la decisión en base a una racionalidad vital de pérdidas y ganancias, que a partir de la *cualidad*

*negativa de la justicia*, discrimina entre lo que es preferido debido a que es simplemente deseado, de lo que es preferido debido a que es necesario y prioritario. El proceso de decisión que se desencadena de esta manera, es descrito por medio del punto de vista socio-económico, propuesto en esta investigación con el fin de encontrar el *curso de acción necesario* de entre todos los posibles cursos de acción o alternativas.

Por lo tanto, se concluye que el principal aporte *aplicado* de esta investigación, consiste en que su enfoque efectivamente ayuda al individuo en situaciones en que debe tomar una decisión y encuentra algún tipo de conflicto que no le permite la identificación directa de una única alternativa *óptima*. De este modo, se afirma que la racionalidad de pérdidas y ganancias y la evaluación independiente de los atributos positivos y negativos de las alternativas son necesarias para representar el razonamiento de un individuo *equilibrado*, quien encuentra en la cualidad del auto-control el medio para actuar responsablemente frente a sus deseos. Este aporte se basa en la nueva propuesta teórica y metodológica del modelo P-A, la cual **completa** el espacio semántico general de preferencia.

Concluyendo, con esta nueva propuesta se reconocen dos puntos importantes:

1. La formulación del problema de decisión y la descripción de las alternativas implican procedimientos de agregación distintos, lo cual implica también resultados distintos.
2. Las preferencias del individuo deben ser *consistentes* con respecto a su racionalidad y a su estado del conocimiento.

Sobre el *primer punto*, se tiene que la formulación del problema de decisión y la descripción de las alternativas implican procedimientos de agregación distintos, tal

como ha sido señalado mediante el espacio semántico general de preferencia. De esta forma, se identifica de manera explícita la naturaleza y la correspondiente interpretación de la información disponible, lo cual sirve de soporte para una apropiada elección del respectivo procedimiento de agregación, lo cual determina en gran medida el resultado final frente a la decisión.

Este espacio semántico general caracteriza seis sub-espacios distintos, donde es posible evaluar el tipo de información del que dispone el individuo, de acuerdo con las caracterizaciones de B1.1, B1.2, B2.1 y B2.2. En este sentido, cada uno de estos espacios implica un tratamiento específico de la información, según las metodologías D1 o D2, lo cual permite caracterizar distintos tipos de estructuras, como en el caso de la estructura  $\langle D, N \rangle_{P-A}$ , la cual se define con respecto a la semántica particular de la estructura completa P-A.

De manera complementaria, se han examinado también distintas representaciones de la incertidumbre o de la inexactitud acerca del grado en que se verifican las propiedades del predicado de preferencia, y en su caso, de aversión. Por ello se cuenta además con un marco evaluativo donde la información puede representarse según la tipología F1 o la F2, lo cual requiere a su vez de un tratamiento especial, según cada caso (Teorema 1, Sección 3.1.2), para mantener la semántica original de dicha información a lo largo del proceso de decisión.

En cuanto al *segundo punto*, se hace referencia a la racionalidad del individuo y la construcción de un orden sobre las alternativas disponibles, lo cual debe ser coherente con su estado del conocimiento. Básicamente, una vez el individuo cuenta con un marco apropiado para interpretar y utilizar la información más

relevante de cara a su problema de decisión, éste debe asignar efectivamente un grado de verificación sobre la situación relacional entre las distintas alternativas.

De esta manera se sostiene que el proceso de decisión de un individuo inteligente es ante todo un *proceso sobre la formación del valor*, donde éste elige primero el espacio conceptual apropiado según su propósito, en referencia al marco evaluativo y al espacio semántico general de preferencia, y segundo, verifica la existencia de preferencia y en su caso, de aversión, sobre un conjunto dado de alternativas. Entonces, este proceso descansa de manera general en un *razonamiento consistente* entre unos *principios básicos* (según una racionalidad de pérdidas y ganancias) y sus *preferencias* (del primer o del segundo tipo).

Estos *principios básicos* dictan las reglas de decisión indispensables, según el punto de vista del individuo, lo cual hace posible la identificación de las opciones más importantes o prioritarias. Entonces se defiende la pertinencia del punto de vista socio-económico, el cual asocia lo prioritario con lo necesario, lo cual permite al individuo identificar sus necesidades aparte de sus deseos y, en base a esto, ordenar sus alternativas para enfrentar íntegramente el problema de decisión y reconocer el curso de acción necesario.

En este sentido, la estructura completa P-A representa distintos estados del conocimiento frente a la decisión, a partir de los cuales se deduce un tipo de elección (necesaria) que corresponde con el del punto de vista socio-económico. De esta forma se discrimina lo que es deseado de lo que es necesario, y se identifica un procedimiento de decisión característico para el individuo socio-económico.

Por lo tanto, la aproximación constructivista que se desarrolla a lo largo de esta investigación, permite no solo tomar en cuenta el proceso de decisión mediante el cual se elige una alternativa en particular, sino también la elección del método de

### **Una aproximación borrosa y bipolar al proceso subjetivo de decisión bajo incertidumbre**

agregación según la racionalidad del individuo y su interpretación de la información disponible. De este modo, se tiene un marco teórico lo suficientemente flexible como para incluir distintos modelos de preferencia, donde su semántica particular es explícitamente formulada con el fin de desarrollar una interpretación apropiada con los requerimientos de cada problema en particular.

## Revisión de los objetivos

**Objetivo 1:** Se ha construido un marco teórico y metodológico apropiado para analizar los distintos modelos de preferencia y su aproximación al proceso de decisión bajo incertidumbre de un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias. En particular:

- Se ha propuesto un *marco evaluativo general*, donde se identifica la estructura evaluativa de un modelo de preferencia, de acuerdo con el tipo de borrosidad y de bipolaridad de la información.
- Se ha propuesto un *espacio semántico general de preferencia*, el cual clasifica los distintos modelos de preferencia de acuerdo con su interpretación de la información y su metodología de agregación.

**Objetivo 2:** Se ha definido un modelo de ayuda a la decisión que permite *describir* el proceso de decisión de un individuo con una racionalidad de pérdidas y ganancias, identificando el curso de acción necesario a partir exclusivamente de sus preferencias. De este modo:

- Se ha caracterizado la *estructura completa P-A*, la cual permite la identificación de las diversas situaciones de decisión que resultan de la interpretación y agregación *independiente* de los atributos negativos (pérdidas) y de los positivos (ganancias).
- Se han definido las *estructuras de preferencia-necesidad*, donde los componentes de preferencia y de necesidad son distinguibles, y se ha definido el algoritmo de decisión para un individuo equilibrado, denominado como el *homo-socioeconomicus*, quien encuentra, por medio

de su capacidad de auto-control y del *principio de una necesidad insatisfecha*, el curso de acción necesario de acuerdo con las necesidades que debe satisfacer con mayor prioridad.

## **Contribuciones relacionadas con esta investigación**

La investigación que se ha desarrollado en esta tesis es el resultado de un continuo esfuerzo, el cual se ha visto reflejado también en las siguientes publicaciones y contribuciones:

### **Artículos en revistas de impacto indexadas en el JCR de Thomas Reuters**

#### **2011**

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. A need-preference structure for the *homosocioeconomicus*. *Fuzzy Sets and Systems* (en segunda revisión).

### **Capítulos o secciones de libro con proceso de doble referee**

#### **2009**

C. Franco, J. Montero. On the use of coherence measures for fuzzy preference relations. *EUROFUSE WORKSHOP'09. Preference Modelling and Decision Analysis*. Eds.: P. Burillo, H. Bustince, B. de Baets, J. Fodor. Universidad Pública de Navarra, Pamplona (ISBN: 978-84-9769-242-7), 15-19, 2009.

#### **2010**

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Rectification of preferences in a fuzzy environment. *Communications in Computer and Information Science* 80. Eds.: E. Hüllemeier, R. Kruse, F. Hoffman. Springer, Heidelberg (ISBN: 978-3-642-14054-9), 168-178, 2010.

C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Information measures over intuitionistic four valued fuzzy preferences. *Proceedings IEEE WCCI-FUZZIEEE* (ISBN: 978-1-4244-6920-8), 1971-1978, 2010.

J. M. García-Santesmases, C. Franco, J. Montero. Consensus measures for symbolic data. Computational Intelligence, Foundations and Applications. Eds.: D. Ruan, T. Li, Y. Xu, G. Chen, E. E. Kerre. World Scientific, Singapore (ISBN: 978-981-4324-69-4), 651-658, 2010.

## 2011

C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Relational structures for measures of ignorance. Advances in Intelligent Systems Research, Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT-LFA'11. Eds.: S. Gachilet, J. Montero, G. Mauris (ISBN: 978-90-78677-00-0), 613-619, 2011.

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. On partial comparability and preference-aversion models. Advances in Intelligent and Soft Computing, Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Congress on Intelligent Systems and Knowledge Engineering. Eds.: Y. Wang, T. Li. Springer, Heidelberg (ISBN: 978-3-642-25663-9), 15-17, 2011.

J.T. Rodríguez, C. Franco, B. Vitoriano, J. Montero. An axiomatic approach to the notion of semantic antagonism. Proceedings of the International Fuzzy Systems Association World Congress and the Asian Fuzzy Systems Society International Conference (ISBN:978-602-99359-0-5), FT1 04-1/6, 2011.

J.T. Rodríguez, C. Franco, J. Montero. On the relationship between bipolarity and fuzziness. Eurofuse 2011. Workshop on Fuzzy Methods for Knowledge-Based Systems. Eds.; P. Melo-Pinto, P. Couto, C. Serodio, J. Fodor, B. De Baets. Springer, Heidelberg (ISBN: 978-3-642-24000-3), 193-205, 2011.

## Contribuciones a congresos

### 2008

J. M. García-Santesmases, C. Franco, J. Montero. Consensus measures for symbolic data (Póster). The 8<sup>th</sup> International FLINS Conference on Computational Intelligence in Decision and Control. Madrid, Spain, September 21-24, 2008.

### 2009

C. Franco, J. Montero. On the use of coherence measures for fuzzy preference relations. EUROFUSE WORKSHOP'09. Preference Modelling and Decision Analysis. Pamplona, Spain, September 16-18, 2009.

C. Franco. Relaciones de preferencia difusa, incertidumbre y coherencia. Jornada FuzzyMAD. Madrid, Diciembre 3, 2009.

### 2010

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Rectification of preferences in a fuzzy environment. International Congress on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU). Dortmund, Germany, June 28 – July 2, 2010.

C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Information measures over intuitionistic four valued fuzzy preferences. IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI). Barcelona, Spain, July 18-23, 2010.

C. Franco, J. Montero. Organizing information by fuzzy preference structures – Fuzzy preference semantics. International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE). Hangzhou, China, November 15-16, 2010.

J. Montero, J. M. Santesmases, C. Franco, L. Garmendia, R. González del Campo, D. Gómez, V. López, S. Muñoz, M. T. Ortuño, E. Roanes, K. Rojas, J. T. Rodríguez, G. Tirado, B. Vitoriano, J. Yañez. Construction of decision aid systems under linguistic uncertainty (Póster). Jornada FuzzyMAD. Madrid, Diciembre 16, 2010.

## **2011**

J. Montero, J. M. Santesmases, C. Franco, L. Garmendia, R. González del Campo, D. Gómez, V. López, S. Muñoz, M. T. Ortuño, E. Roanes, K. Rojas, J. T. Rodríguez, G. Tirado, B. Vitoriano, J. Yañez. Diseño de Sistemas de Ayuda a la Decisión con Incertidumbre Lingüística (Póster). Workshop: Presente y Futuro de la Investigación en Decisión Multicriterio en España. Madrid, Febrero 1, 2011.

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Aggregation weights for a preference-aversion model. World Conference on Soft Computing. San Francisco, May 23-26, 2011.

J.T. Rodríguez, C. Franco, B. Vitoriano, J. Montero. An axiomatic approach to the notion of semantic antagonism. International Fuzzy Systems Association World Congress and the Asian Fuzzy Systems Society International Conference (IFSA-AFSS). Surabaya & Bali, Indonesia, June 21-25, 2011.

C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Relational structures for measures of ignorance. The 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-LFA). Aix les Bains, France, July 18-22, 2011.

J.T. Rodríguez, C. Franco, J. Montero. On the relationship between bipolarity and fuzziness. Eurofuse Workshop on Fuzzy Methods for Knowledge-Based Systems. Régua, Portugal, September 21-23, 2011.

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. On partial comparability and preference-aversion models. The 6<sup>th</sup> International Congress on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE). Shangai, China, December 15-17, 2011.

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Modelización borrosa de relaciones de preferencia y aversión. Jornada FuzzyMAD. Diciembre 20, 2011.

**2012**

C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Modelo difuso de Preferencia-Aversión. Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF). Valladolid, Febrero 1-3, 2012.



## **Líneas de trabajo futuro**

Como futuras líneas de investigación, es importante seguir examinando las distintas propiedades matemáticas que cumplen cada una de las diez relaciones de la estructura completa P-A. También se debe seguir comparando esta propuesta con los otros modelos de preferencias encontrados en la literatura, explorando el espacio semántico general de preferencia junto con el marco evaluativo borroso y bipolar.

En cuanto a las diversas aplicaciones del modelo P-A y la estructura de preferencia-necesidad, es evidente que su aplicación en el campo de la Economía debe ser ampliada, con el fin de modelizar el proceso socio-económico de la formación del valor y de los precios. También es relevante explorar el área de la Psicología, en cuanto a la evidencia que puede existir acerca del uso cotidiano y práctico tanto de la estructura completa P-A como de la estructura de preferencia-necesidad.

De igual modo, se debe seguir la literatura Científica en general, como por ejemplo la Neurociencia, la Biología o a la Sociología, explorando posibles semejanzas entre las propuestas de dichos campos y la aproximación del modelo P-A, sobre el razonamiento y comportamiento de un individuo *inteligente*. Por último se señala la pertinencia de examinar el desempeño de las estructuras de preferencia-necesidad en problemas aplicados donde la solución requiere de la identificación de alternativas necesarias, las cuales tienen prioridad sobre las alternativas deseadas, como en los casos de atención a desastres naturales y ayuda humanitaria.



## Referencias

- [1] M. Allais. Le comportement de l'homme rationel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica* 21, 503-546, 1953.
- [2] C. Alsina. On a family of connectives for fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 16, 231-235, 1985.
- [3] W. Amstrong. Uncertainty and the utility function. *The Economic Journal* 58, 1-10, 1948.
- [4] F. Anscombe, R. Aumann. A definition of subjective probability. *The Annals of Mathematical Statistics* 34, 199-205, 1963.
- [5] Aristotle. *The Ethics of Aristotle*. Arno Press, New York, 1973.
- [6] K. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. John Wiley, New York, 1951.
- [7] K. Arrow, G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22, 265-290, 1954.
- [8] K. Arrow, L. Hurwicz. An optimality criterion for decision-making under ignorance. En: *Uncertainty and Expectations in Economics: Essays in Honour of G. L. S. Shackle*. (eds.: C. Carter, J. Ford). Basil Blackwell, Oxford, 1972.
- [9] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 20, 87-96, 1986.
- [10] K. Atanassov. Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade's paper "Terminological difficulties in fuzzy set theory – the case of "Intuitionistic fuzzy sets"". *Fuzzy Sets and Systems* 156, 496-499, 2005.
- [11] J. Aubin. Cooperative fuzzy games. *Mathematics of Operations Research* 6, 1-13, 1981.

- [12] R. Aumann. Utility theory without the completeness axiom. *Econometrica* 30, 445-462, 1962.
- [13] R. Aumann. Utility theory without the completeness axiom: a correction. *Econometrica* 32, 210-212, 1964.
- [14] M. Baczynski, B. Jayaram.  $(S, N)$ - and  $R$ - implications: A state-of-the-art survey. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 1836-1859, 2008.
- [15] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, H. Prade. Bipolar possibility theory in preference modeling: Representation, fusion and optimal solutions. *Information Fusion* 7, 135-150, 2006.
- [16] D. Bernoulli. Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica* 22, 23-36, 1954 (traducido por L. Sommer from *Specimen theoriae novae de mensura sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, 175-192, 1738).
- [17] A. Billot. *Economic Theory of Fuzzy Equilibria. An axiomatic analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [18] G. Birkhoff. *Lattice Theory.* Providence: American Mathematical Society, 1964.
- [19] D. Black. *The Theory of Committees and Elections.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987.
- [20] M. Black. Vagueness. An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science* 4, 427-455, 1937.
- [21] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Dover Publications, New York, 1958.

- [22] L. Brouwer. L.E.J. Brouwer Collected Works. Vol. 1. Philosophy and the Foundations of Mathematics (ed: A. Heyting). North-Holland Publishing, Amsterdam, 1975.
- [23] L. Brouwer. Intuitionism and formalism. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 37, 55-64, 1999.
- [24] J. Cacioppo, W. Gardner, G. Berntson. Beyond bipolar conceptualizations and measures: the case of attitudes and evaluative space. Personality and Social Psychology Review 1, 3-25, 1997.
- [25] A. Casali, Ll. Godo, C. Sierra. A logical framework to represent and reason about graded preferences and intentions. Proceedings 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, Sydney, Australia, September 16-19, 27-37, 2008.
- [26] G. Cattaneo, D. Ciucci. Intuitionistic fuzzy sets or orthopair fuzzy sets? Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Zittau, Germany, September 10-12, 147-152, 2003.
- [27] G. Choquet. Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier 5, 131-295, 1953.
- [28] C. Cornelis, K. Atanassov, E. Kerre. Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: a critical comparison. Proceedings EUSFLAT'03, 159-163, 2003.
- [29] G. Debreu. Theory of Value. An Axiomatic Approach of Economic Equilibrium. Yale University Press, New York, 1959.
- [30] A. DeLuca, S. Termini. A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Information and Control 20, 301-312, 1972.

- [31] D. Dubois, H. Fargier, P. Perny. Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: an axiomatic approach. *Artificial Intelligence* 148, 219-260, 2003.
- [32] D. Dubois, H. Fargier, P. Perny. Corrigendum to “Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: an axiomatic approach”. *Artificial Intelligence* 171, 361-362, 2007.
- [33] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade. Terminological difficulties in fuzzy set theory – the case of “Intuitionistic fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 156, 485-491, 2005.
- [34] D. Dubois, H. Prade. *Possibility Theory*. New York, Plenum Press, 1988.
- [35] D. Dubois, H. Prade. An introduction to bipolar representations of information and preference. *International Journal of Intelligent Systems* 23, 866-877, 2008.
- [36] B. Dushnik, E. Miller. Partially ordered sets. *American Journal of Mathematics* 63, 600-610, 1941.
- [37] D. Ellsberg. Risk, ambiguity and the savage axioms. *Quarterly journal of Economics* 75, 643-669, 1961.
- [38] W. Fellner. Distortion of subjective probabilities as a reaction to uncertainty. *The Quarterly Journal of Economics* 75, 670-689, 1961.
- [39] P. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
- [40] P. Fishburn. Intransitive individual indifference and transitive majorities. *Econometrica* 38, 482-489, 1970.

- [41] P. Fishburn. The theory of social choice. Princeton University Press, New Jersey, 1973.
- [42] P. Fishburn. The axioms and algebra of ambiguity. *Theory and Decision* 34, 119-137, 1993.
- [43] J. Fodor, M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [44] Ph. Fortemps, R. Slowinski. A graded quadrivalent logical for ordinal preference modeling: Loyola-like approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1, 93-111, 2002.
- [45] C. Fox, A. Tversky. Ambiguity aversion and comparative ignorance. *The Quarterly Journal of Economics* 110, 585-603, 1995.
- [46] C. Franco. Exploración del formalismo lógico en el desarrollo de la teoría económica neoclásica. Tesis de grado, Universidad de los Andes, Facultad de Economía, 2004.
- [47] C. Franco. Formalismo axiomático en economía. *Cuadernos de Economía* 24, 35-63, 2006.
- [48] C. Franco, J. Montero. Organizing information by fuzzy preference structures – Fuzzy preference semantics. *Proceedings ISKE 2010*, 135-140, 2010.
- [49] C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Aggregation weights for a preference-aversion model. *World Conference on Soft Computing*, San Francisco, may 23-26, 2011.
- [50] C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. A need-preference structure for the *homo-socioeconomicus*. *Fuzzy Sets and Systems* (en segunda revisión).

- [51] C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. On partial comparability and preference-aversion models. ISKE 2011, Shangai, China, Diciembre 15-17, 2011.
- [52] C. Franco, J. Montero, J.T. Rodríguez. Modelo difuso de preferencia-aversión. ESTYLF 2012, Valladolid, España, Febrero 1-3, 2012.
- [53] C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Information measures over intuitionistic four valued fuzzy preferences. Proceedings IEEE-WCCI: 1971-1978, 2010.
- [54] C. Franco, J.T. Rodríguez, J. Montero. Relational structures for measures of ignorance. Proceedings EUSFLAT-LFA'11, 613-619, 2011.
- [55] M. Friedman, L. Savage. The utility analysis of choices involving risk. The Journal of Political Economy 56, 279-304, 1948.
- [56] J. García-Lapresta, L. Meneses. An empirical analysis of transitivity with four scaled preferential judgment modalities. Review of Economic Design 8, 335-346, 2003.
- [57] N. Georgescu-Roegen. The pure theory of consumer's behavior. The Quarterly Journal of Economics 50, 545-593, 1936.
- [58] I. Gilboa. Expected utility with purely subjective non-additive probabilities. Journal of Mathematical Economics 16, 65-88, 1987.
- [59] K. Gödel. Sobre proposiciones formalmente indecidibles en los Principia Mathematica y sistemas análogos. En: Obras Completas. Kurt Gödel (ed.: Jesús Mosterín). Alianza Editorial, Madrid, 1981.
- [60] J. Goguen. L-fuzzy sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, 145-174, 1967.
- [61] J. Goguen. The logic of inexact concepts. Synthese 19, 325-373, 1969.

- [62] J. González-Pachón, D. Gómez, J. Montero, J. Yáñez. Soft dimension theory. *Fuzzy Sets and Systems* 137, 137-149, 2003.
- [63] M. Grabisch, S. Greco, M. Pirlot. Bipolar and bivariate models in multi-criteria decision analysis: descriptive and constructive approaches. *International Journal of Intelligent Systems* 23, 930-969, 2008.
- [64] M. Grabisch, Ch. Labreuche. Bi-capacities for decision making on bipolar scales. *Proceedings Eurofuse'02*, 185-190, 2002.
- [65] M. Grabisch, Ch. Labreuche. A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *A Quarterly Journal of Operations Research* 6, 1-44, 2008.
- [66] S. Grant, A. Kajii, B. Polak. Decomposable choice under uncertainty. *Journal of Economic Theory* 92, 169-197, 2000.
- [67] I. Grattan-Guinness. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. *Mathematical Logic Quarterly* 22, 149-160, 1976.
- [68] G. Hardegree. Material implication in orthomodular (and Boolean) lattices. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 22, 163-182, 1981.
- [69] G. Hegel. *Science of Logic*. Blackmask Online, 2001 (Primera edición: 1812).
- [70] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, P. Sánchez. A multi-granular linguistic decision model for evaluating the quality of network services. *Intelligent Sensory Evaluation: Methodologies and Applications*. Springer, 2004.
- [71] A. Heyting. *Intuitionism. An Introduction*. North-Holland Publishing, Amsterdam, 1966.

- [72] U. Höhle, L. Stout. Foundations of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 40, 257-296, 1991.
- [73] O. Huber. Nontransitive multidimensional preferences: theoretical analysis of a model. *Theory and Decision* 10, 147-165, 1979.
- [74] D. Ironmonger. *New Commodities and Consumer Behaviour*. Cambridge University Press, London, 1972.
- [75] D. Kahneman, A. Tversky. Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-291, 1979.
- [76] K. Kaplan. On the ambivalence-indifference problem in attitude theory and measurement: a suggested modification of the semantic differential technique. *Psychological Bulletin* 77, 361-372, 1972.
- [77] J. Keynes. *A Treatise on Probability*. Macmillan, London, 1929 (primera edición: 1921).
- [78] F. Knight. *Risk, Uncertainty, and Profit*. University of Chicago Press, Chicago, 1971 (primera edición: 1921).
- [79] D. Krantz, R. Luce, P. Suppes, A. Tversky. *Foundations of measurement*, vol. 1. Academic Press, New York, 1971.
- [80] Ch. Labreuche. Construction of a Choquet integral and the value functions without any commensurateness assumption in multi-criteria decision making. *Proceedings EUSFLAT-LFA'11*, 90-97, 2011.
- [81] Ch. Labreuche, M. Grabisch. Generalized Choquet-like aggregation functions for handling bipolar scales. *European Journal of Operational Research* 172, 931-955, 2006.

- [82] Ch. Labreuche, M. Grabisch. The representation of conditional relative importance between criteria. *Annals of Operations Research* 154, 93-122, 2007.
- [83] D. Lehmann. Generalized qualitative probability: Savage revisited. *Proceedings UAI'96*, 381-388, 1996.
- [84] C. Ling. Representation of associative functions. *Publicationes Mathematicae Debrecen* 12, 189-212, 1965.
- [85] R. Luce. Semiorders and a theory of utility discrimination. *Econometrica* 24, 178-191, 1956.
- [86] R. Luce, H. Raiffa. *Games and Decisions*. John Wiley, New York, 1957.
- [87] J. Lukasiewicz. *Selected Works* (ed.: L. Borkowski). North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [88] J. Marichal. An axiomatic approach to the discrete Sugeno integral as a tool to aggregate interacting criteria in a qualitative framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 9, 164-172, 2001.
- [89] K. May. Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns. *Econometrica* 22, 1-13, 1954.
- [90] P. Monguin. Does optimization imply rationality? *Synthese* 124, 73-111, 2000.
- [91] J. Montero. Arrow's theorem under fuzzy rationality. *Behavioral Science* 32, 267-273, 1987.
- [92] J. Montero. Rational aggregation rules. *Fuzzy Sets and Systems* 62, 267-276, 1994.
- [93] J. Montero, D. Gómez, H. Bustince. On the relevance of some families of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 158, 2429-2442, 2007.

- [94] J. Montero, V. López, D. Gómez. The role of fuzziness in decision making. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 215, 337-349, 2007.
- [95] J. Montero, J. Tejada, C. Cutello. A general model for deriving preference structures from data. *European Journal of Operational Research* 98, 98-110, 1997.
- [96] R. Myerson. Virtual utility and the core for games with incomplete information. *Journal of Economic Theory* 136, 260-285, 2007.
- [97] E. O'Boyle. Homo socio-economicus: foundational to social economics and the social economy. *Review of social economy* 63, 483-507, 2005.
- [98] J. O'Doherty, M. Kringelback, E. Rolls, J. Hornak, C. Andrews. Abstract reward and punishment representations in the human orbitofrontal cortex. *Nature Neuroscience* 4, 95-102, 2001.
- [99] Ch. Osgood, G. Suci, P. Tannenbaum. *The Measurement of Meaning*. University of Illinois Press, Urbana, 1958.
- [100] S. Ovchinnikov. Structure of fuzzy binary relations. *Fuzzy Sets and Systems* 6, 169-195, 1981.
- [101] S. Ovchinnikov. Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings. *Fuzzy Sets and Systems* 40, 107-126, 1991.
- [102] S. Ovchinnikov, M. Roubens. On strict preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* 43, 319-326, 1991.
- [103] S. Ovchinnikov, M. Roubens. On fuzzy strict preference, indifference, and incomparability relations. *Fuzzy Sets and Systems* 49, 15-20, 1992.
- [104] G. Owen. *Game Theory*. Academic Press, San Diego, 1995.

- [105] M. Öztürk, A. Tsoukiàs. Modelling continuous positive and negative reasons in decision aiding. *Decision Support Systems* 43, 1512-1526, 2007.
- [106] V. Pareto. *Manual de Economía Política*. Atalaya, Buenos Aires, 1946 (primera edición: 1906).
- [107] P. Perny, B. Roy. The use of fuzzy outranking relations in preference modelling. *Fuzzy Sets and Systems* 49, 33-53, 1992.
- [108] P. Perny, A. Tsoukiàs. On the continuous extension of a four valued logic for preference modeling. *Proceedings IPMU'98*, 302-309, 1998.
- [109] J. Quiggin. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization* 3, 323-343, 1982.
- [110] N. Rescher. *Many Valued Logic*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [111] F. Roberts. *Measurement theory with Applications to Decision-Making and the Social Sciences*. Addison Wesley, Massachusetts, 1979.
- [112] J.T. Rodríguez, C. Franco, J. Montero. On the relationship between bipolarity and fuzziness. *Eurofuse Workshop on Fuzzy Methods for Knowledge-Based Systems*, Régua, Portugal, Septiembre 21-23, 2011.
- [113] J.T. Rodríguez, C. Franco, B. Vitoriano, J. Montero. An axiomatic approach to the notion of semantic antagonism. *Proceedings IFSA-AFSS'11*, 2011.
- [114] B. Rosser. Constructibility as a Criterion for Existence. *The Journal of Symbolic Logic* 1, 36-39, 1936.
- [115] M. Roubens, P. Vincke. *Preference Modelling*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- [116] B. Roy. How outranking relation helps multiple criteria decision making. En: Selected Proceedings of a Seminar on Multi-Criteria Decision Making 1972. The University of South Carolina Press, Columbia, 1973.
- [117] B. Roy. Partial preference analysis and decision-aid: the fuzzy outranking relation concept. En: Conflicting Objectives in Decisions (eds.: D. Bell, R. Keeney, H. Raiffa). Wiley and Sons, New York, 1977.
- [118] B. Roy, P. Vincke. Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results. *Management Science* 30, 1323-1335, 1984.
- [119] L. Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover Publications, Inc., New York, 1972 (primera edición: Hohn Wiley & Sons, Inc., 1954).
- [120] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica* 57, 571-587, 1989.
- [121] B. Schweizer, A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. Elsevier Science Publishing Co., New York, 1983.
- [122] A. Sen. *Collective Choice and Social Welfare*. Oliver and Boyd, San Francisco, 1970.
- [123] G. Shackle. *Uncertainty in Economics*. University Press, Cambridge, 1955.
- [124] G. Shafer. Savage revisited. *Statistical Science* 1, 463-501, 1986.
- [125] H. Simon. *Administrative Behavior. A Study of Decision-Making Process in Administrative Organization*. The Free Press, New York, 1967.
- [126] A. Smith. *The Theory of Moral Sentiments*. Cambridge, 2002 (primera edición: 1759).

- [127] M. Sugeno. A model of human evaluation process using fuzzy measure (1983). En: Fuzzy Modeling and Control. Selected Works of M. Sugeno (eds.: H. Nguyen, N. Prasad). CRC Press, New York, 1999.
- [128] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica* 3, 47-60, 1979.
- [129] E. Trillas. On the use of words and fuzzy sets. *Information Sciences* 176, 1463-1487, 2006.
- [130] E. Trillas. On a model for the meaning of predicates (A naïve approach to the genesis of fuzzy sets). En: *Views of Fuzzy Sets and Systems from Different Perspectives* (ed.: Rudolf Seising). Springer, 175-205, 2009.
- [131] W. Trotter. *Combinatorics and Partially Ordered Sets. Dimension Theory*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1992.
- [132] A. Tsoukiàs. A first-order, four valued, weakly paraconsistent logic and its relation to rough sets semantics. *Foundations of Computing and Decision Sciences* 12, 85-112, 2002.
- [133] A. Tsoukiàs, P. Perny, P. Vincke. From concordance/discordance to the modelling of positive and negative reasons in decision aiding. En: *Aiding Decisions with Multiple Criteria. Essays in Honor of Bernard Roy*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2002.
- [134] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke. A survey on non conventional preference modelling. *Ricerca Operativa* 61, 5-49, 1992.
- [135] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke. A new axiomatic foundation of partial comparability. *Theory and Decision* 39, 79-114, 1995.

- [136] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke. Extended preference structures in MultiCriteria Decision Aid. En: Multicriteria Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [137] E. Turunen, M. Öztürk, A. Tsoukiás. Paraconsistent semantics for Pavelka style fuzzy sentential logic. Fuzzy Sets and Systems, 2010.
- [138] A. Tversky. Intransitivity of preferences. Psychological Review 76, 31-48, 1969.
- [139] A. Tversky, D. Kahneman. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty 5, 297-323, 1992.
- [140] B. Van der Walle, B. de Baets, E. Kerre. Characterizable fuzzy preference structures. Annals of Operations Research 80, 105-136, 1998.
- [141] J. Von Neumann, O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1953 (primera edición: Princeton University Press, 1944).
- [142] P. Wakker. Continuous subjective expected utility with non-additive probabilities. Journal of Mathematical Economics 18, 1-27, 1989.
- [143] P. Wakker, A. Tversky. An axiomatization of cumulative prospect theory. Journal of Risk and Uncertainty 7, 147-176, 1993.
- [144] A. Wald. Statistical Decision Functions. Chelsea Publishing Company, 1971 (primera edición: John Wiley & Sons, Inc. 1950)
- [145] L. Wittgenstein. Investigaciones filosóficas. Editorial Crítica, Barcelona, 1998.
- [146] J. Wolfowitz. Bayesian inference and axioms of consistent decision. Econometrica 30, 470-479, 1962.
- [147] S. Wong, Z. Wang, P. Bollmann-Sdorra. On qualitative measures of ignorance. International Journal of Intelligent Systems 11, 27-47, 1998.

- [148] M. Yaari. Dual theory of choice under uncertainty. *Econometrica* 55, 95-115, 1987.
- [149] J. Yacubian, J. Gläscher, K. Schroeder, T. Sommer, D. Braus, Ch. Büchel. Dissociable systems for gain- and loss- related value predictions and errors of prediction in the human brain. *The Journal of Neuroscience* 26, 9530-9537, 2006.
- [150] R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, 183-190, 1988.
- [151] R. Yager. On a measure of ambiguity. *International Journal of Intelligent Systems* 10, 1001-1019, 1995.
- [152] J. Yáñez, J. Montero. A poset dimension algorithm. *Journal of Algorithms* 30, 185-208, 1999.
- [153] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338-353, 1965.
- [154] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences* 8, 199-249, 1975.