

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa; Universidad Complutense de Madrid.

Facultad de Ciencias Matemáticas.



TESIS DOCTORAL

Cuestiones notables en la teoría de localización

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

M^a Teresa González Manteiga

Madrid, 2015

R: 2709

241
89

IT
UCM
1989

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

IT
519.12
GON

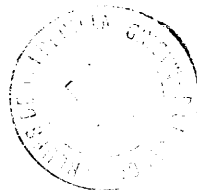
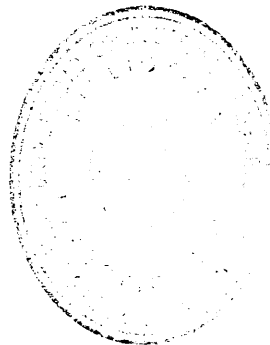


BIBLIOTECA U.C.M.



5307604515

**CUESTIONES NOTABLES EN LA
TEORIA DE LOCALIZACION**



M.^a Teresa González Manteiga

Madrid, 1989

Colección Tesis Doctorales. N.º 241/89

X-53-165709-3

© M.ª Teresa González Manteiga

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria
Madrid, 1989

Ricoh 3700

Depósito Legal: M-31305-1989

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMATICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

CUESTIONES NOTABLES EN LA
TEORIA DE LOCALIZACION.

Memoria presentada, para optar al grado
de Doctor en Ciencias Matemáticas, por
M^a Teresa González Manteiga y dirigida
por el Catedrático Dr.D. Francisco José
Cano Sevilla.

Madrid, junio de 1989.

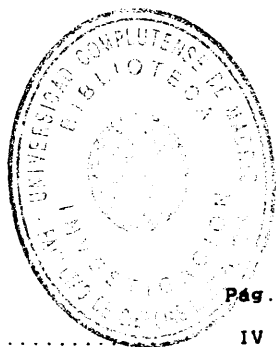
a mi familia

En primer lugar he de expresar mi más sincero agradecimiento a mi profesor el Catedrático Dr. D. Francisco José Cano Sevilla por la elección del tema, sus orientaciones, por su estímulo durante la elaboración de este trabajo de investigación, su paciencia en las correcciones y sus constantes observaciones, así como por la confianza depositada en mí.

También quiero agradecer a los profesores del Departamento de Estadística e Investigación Operativa y a José Andrés Moreno Pérez sus atenciones y al Profesor Dr. Karl Weber que tuvo la amabilidad de enviarme algunos de sus artículos.

No quiero terminar sin agradecer a mi familia y a mis amigos su cariño y comprensión y el haberme animado en todo momento para que esta tesis se pudiera realizar.

Madrid, junio de 1989.



INDICE

	Pág.
PROLOGO	IV
CAPITULO 1. LOCALIZACION EN GRAFOS ORDINARIOS.	
1.1. Introducción	1
1.2. Definiciones previas y nomenclatura	4
1.3. El problema del m-centro	13
1.3.1. Los centros locales	18
1.4. Localización de un m-centro con centros preestablecidos	27
1.5. El problema del r-cubrimiento	32
1.6. Algoritmos para la resolución del proble ma del m-centro.	
1.6.1. Cálculo de distancias	37
1.6.2. Centros locales	39
1.6.3. El centro absoluto	40
1.6.4. El m-centro	53
1.6.5. El m-centro de F con respecto a U con centros preestablecidos	63
CAPITULO 2. LOCALIZACION EN ARBOLES Y REDES.	
2.1. Introducción	65
2.2. Definiciones previas y nomenclatura	67
2.3. El problema del m-centro en una red	73
2.3.1. Los centros locales	76
2.4. El problema del r-cubrimiento	83

	Pág.
2.5. Algoritmos para la resolución del problema del m-centro:	
2.5.1. Centros locales en una red con vértices ponderados	87
2.5.2. Centro absoluto en una red	93
2.5.3. El 1-centro absoluto en una red-árbol	95
2.5.4. Hallar un conjunto dominante de radio r	103
2.5.5. Hallar m-centros en una red	109
2.5.6. Hallar m-centros en una red-árbol	120
2.5.7. Problema del m-centro con centros preestablecidos	135
2.5.8. Resolver el problema de localizar m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas	136
2.5.9. Localizar m centros con distancias restringidas	138
2.5.10. El problema de multiinstalación minimax t-objetivo	140
CAPITULO 3. LOCALIZACION EN GRAFOS ALEATORIOS.	
3.1. Introducción	141
3.2. Nomenclatura y definiciones previas	143
3.3. El problema del m-centro en grafos aleatorios	175

	Pág.
3.4. El problema del r-cubrimiento	187
3.5. Algoritmos para grafos aleatorios	194
CAPITULO 4. CUADROS RESUMEN DE LOS ALGORITMOS	
4.I. Cálculo de distancias en grafos ordinarios	199
4.II. Centros locales en grafos ordinarios ...	200
4.III. El centro absoluto en grafos ordinarios	201
4.IV. El m-centro en grafos ordinarios	202
4.V. Centros locales en redes	206
4.VI. El centro absoluto en redes	207
4.VII. Resolver el problema del r-cubrimiento	211
4.VIII. El m-centro en redes	212
4.IX. El problema del m-centro con centros preestablecidos en redes	222
4.X. Localizar m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas en redes	223
4.XI. Localizar m-centros con distancias res- tringidas en redes	223
4.XII. El problema de multiinstalación minimax t-objetivo en redes	224
4.XIII. Grafos aleatorios	225
4.XIV. El 1-centro en grafos aleatorios	226
4.XV. El m-centro en grafos aleatorios	226
CONCLUSIONES	227
BIBLIOGRAFIA	234

PROLOGO

PROLOGO

El objetivo de este trabajo es estudiar los problemas de localización de centros en grafos, formular el tratamiento y sistematización de la materia, desarrollar algunos aspectos poco estudiados, recoger algunos resultados relevantes para grafos ordinarios y redes, presentar distintos modelos de grafos aleatorios, estudiar las relaciones entre ellos y generalizar el tratamiento de la localización de centros a grafos aleatorios.

En estos problemas de localización el criterio de optimalidad consiste en minimizar la distancia desde la instalación hasta el lugar más alejado del grafo, supuesto accesible, es decir, la optimización del "caso peor".

Un problema más general consiste en localizar de dichas instalaciones un número m , que puede ser grande. Estos problemas se denominan de localización minimax y las instalaciones resultantes se llaman centros del grafo.

En algunos problemas de localización interesa reducir al mínimo la suma total de las distancias o funciones de éstas, desde los vértices del grafo hasta la instalación, es decir, problemas de localización minisum y las instalaciones resultantes se llaman medianas del grafo.

Se tratará el problema de localizar centros en grafos, porque para resolver los problemas de localización minisum y los de localización minimax se requieren métodos diferentes.

En 1954 Whitin señala las posibilidades de la teoría de grafos en Economía, y de ahí surgen aplicaciones en problemas de transporte aéreo, localización de ambulancias o puestos de socorro, sucursales bancarias, cadenas de restaurantes, etc. Estos problemas incluyen la cuestión principal de dónde localizar un objeto, u objetos.

Las aplicaciones prácticas de la teoría de grafos conducen a modelos en los que los vértices, las aristas o ambos se suprimen según unas reglas probabilísticas definidas.

Los primeros ejemplos de grafos aleatorios aparecen en 1956 al estudiar Moor y Shannon circuitos eléctricos usando relés.

En 1959 Erdős y Rényi así como Gilbert presentan los primeros trabajos sobre grafos aleatorios.

Un grafo aleatorio puede representar una red eléctrica, nerviosa, o de carreteras, en las que los vértices son centros de comunicación y las aristas son los cables, las conexiones, o las carreteras respectivamente, que pueden fallar de alguna forma aleatoria.

Cuando las instalaciones son hospitales, el problema del m -centro en un modelo de grafo aleatorio aparece al localizar m hospitales en otros tantos vértices del grafo.

considerando que un paciente potencial, que está a cierta distancia del hospital más próximo, puede requerir o no servicio de uno de esos hospitales.

Este trabajo consta de cuatro capítulos seguidos de las conclusiones y la bibliografía.

En el capítulo 1 se introduce el tema en grafos ordinarios, se fijan las notaciones y la terminología, se presentan distintos modelos y se define el problema del m -centro en grafos ordinarios para los distintos modelos, así como el problema del r -cubrimiento. A continuación se demuestran los teoremas necesarios para resolver estos problemas y se termina el capítulo con la exposición de algoritmos de resolución del problema del m -centro con su correspondiente complejidad.

El segundo capítulo trata de la localización de centros en árboles y en redes, grafos orientados y ponderados. Después de dar las definiciones previas y presentar los distintos modelos se define el problema del m -centro en una red y el problema del r -cubrimiento, se estudia la relación entre ellos y se exponen algoritmos de resolución para el problema del m -centro en los distintos modelos, indicando su complejidad.

Se aborda en el tercer capítulo el problema de la localización de centros en grafos aleatorios. Se definen éstos como elementos de un espacio muestral de cardinal mayor que la

unidad y se formulan distintos modelos de grafos aleatorios. estudiando las relaciones entre ellos. Se observa la necesidad de dar un tratamiento distinto a este tipo de grafos, se requieren nuevas definiciones necesarias para el estudio, como la de función umbral, que permiten dar un tratamiento estadístico a estos grafos. Se estudia el problema de la conexión fundamental para tratar el problema del m -centro. Se dan los teoremas y demostraciones necesarios para que este problema tenga solución casi-seguramente y se finaliza con unos algoritmos para construir grafos aleatorios, grafos aleatorios conexos y para determinar un centro o un m -centro, restringido a los vértices, en un grafo aleatorio conexo.

En el último capítulo se presentan cuadros resumen de los algoritmos analizados en los capítulos anteriores con la complejidad asociada.

En las conclusiones se recogen las afirmaciones y teoremas más importantes, enumerados en los correspondientes capítulos. Al final del trabajo se indican las referencias bibliográficas utilizadas.

CAPITULO 1. LOCALIZACION EN GRAFOS ORDINARIOS.

CAPITULO 1. LOCALIZACION EN GRAFOS ORDINARIOS

1.1 Introducción.

Se dan resultados sobre localización de centros en grafos ordinarios y sus algoritmos.

El origen del problema se remonta al siglo XVII en el que Fermat plantea la cuestión siguiente: "Dados tres puntos en el plano hallar un cuarto punto tal que la suma de sus distancias a los tres puntos dados sea mínima".

En 1640 Torricelli observa que las circunferencias que circunscriben los triángulos equiláteros construidos en los lados del triángulo, exteriores a éste, se cortan en el punto óptimo.

Simpson, en 1750, lo generaliza para obtener el punto que minimiza la suma de las distancias ponderadas a los tres puntos dados.

En 1834 Heinen demuestra que la propiedad de Torricelli no es general. Cuando los tres puntos forman un triángulo con un ángulo mayor o igual a 120° , el vértice de este ángulo es el punto minimizante.

A. Weber, en 1909, incorpora este problema a la teoría de la localización.

Sylvester, en 1857, plantea la siguiente cuestión: "Hallar el menor círculo que contenga un conjunto dado de puntos en el plano". El centro del círculo es la localización minimax de una instalación con respecto al conjunto de puntos. En 1860 da una solución geométrica del problema que se atribuye a Pierce.

En 1869 C. Jordan propone localizar un centro supuesto que los únicos puntos de factible localización son los vértices del grafo.

E. Weiszfeld presenta en 1937 un procedimiento iterativo para localizar una nueva instalación que minimiza la suma de las distancias euclídeas ponderadas a cualquier número de instalaciones existentes. Su trabajo, publicado en francés en la revista japonesa *Tohoku Mathematics Journal*, ha permanecido casi en el olvido hasta 1960.

Precisamente hasta la década de los 60, que coincide con el auge de los ordenadores digitales, no existe un campo concreto de estudio dedicado a la localización de instalaciones.

El problema del centro absoluto de un grafo para el caso en que los vértices sean los únicos puntos de demanda lo plantea en 1964 Hakimi. A continuación trata el problema del m -centro y define el centro local en una arista.

En /73/ se demuestra que un m -centro siempre está formado por vértices o centros locales con respecto a pares de puntos de demanda.

Se recopilan 226 artículos en /35/ escritos hasta 1974.

En 1975 se publica un texto de N. Christofides /22/ y en 1978 Minieka demuestra que existe un conjunto finito dominante para localizar un único centro en un grafo en el que el conjunto de los puntos de demanda es infinito.

Se trata el problema de localizar el centro absoluto en un grafo con vértices ponderados en /53/ y se propone un algoritmo para hallar un m-centro tanto absoluto como restringido a los vértices. En este mismo año, Handler y Mirchandani extienden el concepto de centro local a los vértices y definen el rango de un centro local como la distancia a uno cualquiera de los puntos de demanda para los que es centro local, ya que es la misma para todos ellos.

En /64/ se presenta el problema del m-centro en el caso general.

Se analiza en /37/ la localización de una o más instalaciones y se recogen más de 150 artículos publicados hasta 1982. En /66/ se estudia la complejidad en el problema del m-centro y una interesante revisión del problema del m-centro y de la m-mediana se puede encontrar en /93/ y /94/.

Se extiende el concepto de centro local de Handler y Mirchandani en /74/ y se trata el problema del m-centro continuo.

El problema del m -centro para un conjunto finito de vértices ponderados en un espacio métrico arbitrario se puede encontrar en /27/.

Se estudia, en 1986, el problema de la localización minimax en grafos mixtos , /74/, y el problema del r -cubrimiento en /26/.

En 1988 la búsqueda sistemática por ordenador detectó 355 artículos, publicados entre 1973 y 1984, que se refieren al tema del recubrimiento o del empaquetamiento en grafos y otros 529 publicados desde 1985 a noviembre de 1988.

Nuestra contribución en este capítulo consiste no sólo en recopilar aquellos resultados relevantes para centros en grafos ordinarios, sino en formular el tratamiento y la sistematización de la materia.

Se generalizan algunos modelos para los que se analizan los algoritmos y se describen éstos demostrando los teoremas y proposiciones necesarios.

1.2. Definiciones previas y nomenclatura.

Sean E , un espacio métrico completo, con una métrica d ; X un subconjunto de E , finito, de cardinal n ; Γ una correspondencia de X en X , A el conjunto de los pares relacionados por la correspondencia Γ y $G(X,A)$, un grafo dirigido. A cada vértice x_i del grafo se le asocia un peso v_i , que representa su importancia.

Fijado un numero real $\lambda > 0$. sean:

$$R_{\lambda}^o(x_i) = \{x_j / v_j d(x_i, x_j) \leq \lambda, x_j \in X\}$$

[1]

$$R_{\lambda}^l(x_i) = \{x_j / v_j d(x_j, x_i) \leq \lambda, x_j \in X\}$$

[2]

que indican, respectivamente, los conjuntos de vértices x_j que son accesibles desde el vértice x_i por una trayectoria de longitud ponderada $v_j d(x_i, x_j) \leq \lambda$ y aquellos otros desde los que el vértice x_i se puede alcanzar por una trayectoria de longitud ponderada $v_j d(x_j, x_i) \leq \lambda$.

Sea X_m un subconjunto, de cardinal m de X , y

$$d(X_m, x_i) = \min_{x_j \in X_m} [d(x_j, x_i)]$$

[3]

$$d(x_i, X_m) = \min_{x_j \in X_m} [d(x_i, x_j)]$$

[4]

Definición 1.2.1.

$$S_o(X_m) = \max_{x_j \in X} [v_j d(X_m, x_j)]$$

[5]

es el número de separación externa del conjunto X_m .

Observación 1.2.1.

La definición anterior es útil en aquellos problemas en los que es necesario acceder desde el punto de servicio al de demanda.

Definición 1.2.2.

$$S_i(X_m) = \max_{x_j \in X} [v_j d(x_j, X_m)]$$

[6]

es el número de separación interna del conjunto X_m .

Observación 1.2.2.

Análogamente para problemas en los que se accede desde el punto de demanda al de servicio.

Si X_m consta de un solo vértice x_i , los números $S_o(X_m)$ y $S_i(X_m)$ se llaman, respectivamente, la separación externa y la separación interna del vértice x_i .

Lema 1.2.1

Un grafo $G(X,A)$ tiene números de separación interna y externa finitos para todos los vértices, si y sólo si es fuertemente conexo.

Demostración.

G es fuertemente conexo si a partir de cualquier vértice se puede alcanzar cualquier otro siguiendo un camino del grafo, es decir,

$$\forall x_i \in X \text{ es } \hat{\Gamma}(x_i) = X,$$

Siendo $\hat{\Gamma}(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^1(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \Gamma^3(x_i) \cup \dots$

donde $\Gamma^n(x_i)$ es el subconjunto de vértices de X que se pueden

alcanzar a partir de x_i utilizando un camino de longitud menor o igual que n , formado por aristas del grafo.

Si λ_0 es la longitud, λ , más pequeña, de manera que para un vértice x_i es $R_{\lambda}^0(x_i) = X$, entonces $S_0(x_i) = \lambda_0$.

Análogamente, si λ_i es la longitud, λ , más pequeña de manera que $R_{\lambda}^i(x_i) = X$, entonces $S_i(x_i) = \lambda_i$.

Si G no es fuertemente conexo, existe al menos un $x_i \in X$ que no se puede alcanzar desde cualquier otro vértice siguiendo un camino del grafo. Si x_j es un vértice desde el que no se puede llegar a x_i entonces los números

$$S_0(x_i) = \max_{x_j \in X} [v_j d(x_i, x_j)] \quad \text{y} \quad S_i(x_j) = \max_{x_i \in X} [v_i d(x_i, x_j)]$$

no son finitos, lo que contradice la hipótesis.

■

Definición 1.2.3.

Un conjunto $X_m^* \subset X$ para el que

$$S_0(X_m^*) = \min_{X_m \subset X} [S_0(X_m)]$$

[7]

se llama m-centro externo del grafo G . A $S_0(X_m^*)$ se le denomina m-radio externo.

Definición 1.2.4.

Un conjunto $X_m^* \subset X$ para el que

$$S_i(X_m^*) = \min_{X_m \subset X} [S_i(X_m)]$$

[8]

se llama m-centro interno del grafo G. $S_t(X_m^*)$ recibe el nombre de m-radio interno.

Observación 1.2.3.

Generar todos los conjuntos posibles de vértices $X_m \subseteq X$ que contienen m vértices y hallar, los conjuntos X_m^* y $X_{m_t}^*$ que forman el m-centro, utilizando las definiciones anteriores, requiere $m(n-m) \binom{m}{n}$ comparaciones supuesta conocida la matriz de distancias.

Definición 1.2.5.

Un conjunto $X_{m_{ot}}^* \subset X$ para el que

$$S_{ot}(X_{m_{ot}}^*) = \min_{X_m \subset X} [S_{ot}(X_m)]$$

[9]

se llama m-centro interno-externo combinado del grafo G, siendo

$$S_{ot}(X_m) = S_o(X_m) + S_t(X_m)$$

[10]

la separación interna-externa del conjunto X_m .

Si los puntos del m-centro están situados en los arcos del grafo, el conjunto se dice m-centro absoluto.

Definición 1.2.6.

Si $a = (x_i, x_j)$ es un arco de un grafo cuyo peso (longitud) es l_{ij} , se puede definir un punto y colocado en el arco especificando la longitud $l(x_i, y)$ de la sección (x_i, y) siendo:

$$l(x_i, y) + l(y, x_j) = l_{ij} \quad [11]$$

Definición 1.2.7.

$$S_o(y) = \max_{x_j \in X} [v_j d(y, x_j)] \quad [12]$$

es la separación externa de y .

Definición 1.2.8.

$$S_i(y) = \max_{x_j \in X} [v_j d(x_j, y)] \quad [13]$$

es la separación interna de y .

Definición 1.2.9.

Un punto y_o^* para el que

$$r_o = S_o(y_o^*) = \min_{y \text{ en } \sigma} [S_o(y)] \quad [14]$$

se llama centro absoluto externo del grafo. El número r_o recibe el nombre de radio externo absoluto.

Definición 1.2.10.

Un punto y^* para el que

$$r_t = S_t(y^*) = \min_{y \in a} \{S_t(y)\}$$

[15]

se llama centro absoluto interno del grafo y a r_t radio interno absoluto.

Definición 1.2.11.

La separación interna-externa de y es:

$$S_{ot}(y) = S_o(y) + S_t(y)$$

[16]

Definición 1.2.12.

Un punto y^* para el que

$$S_{ot}(y^*) = \min_{y \in a} \{S_{ot}(y)\}$$

[17]

se llama centro interno-externo absoluto del grafo.

Observación 1.2.4.

Este concepto tiene interés en la localización de centros en los que interesa minimizar el tiempo que se tarda en llegar a la comunidad más alejada y volver de nuevo, por ejemplo para ambulancias, bomberos, etc.

Se estudia el problema del m -centro en distintos modelos:

Modelo 1.2.1 $G(X,A)$ dirigido.

$G(X,A)$ es un grafo, cuyos conjuntos de vértices y de aristas son:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

donde $a_k = (x_i, x_j)$ siendo x_j imagen de x_i por una correspondencia Γ de X en X .

Se consideran las correspondencias i y f del conjunto A en el conjunto X que a cada arista asocian respectivamente el vértice inicial (o los vértices iniciales) y el vértice final (o los vértices finales), respectivamente.

Definición 1.2.13.

Se llama extremo de la arista a a cualquier vértice que pertenece al conjunto $e(a) = i(a) \cup f(a)$.

Las aristas con un solo extremo se llaman lazos.

Definición 1.2.14.

Una arista a_k del grafo G que no es un lazo se dice que es:

Dirigida si tiene un solo vértice inicial y un solo vértice final.

No dirigida si sus extremos son a la vez extremos inicial y final.

Un grafo G en el que todas las aristas son dirigidas es un grafo dirigido.

Modelo 1.2.2 $G(X,A)$ no dirigido.

Es un grafo $G(X,A)$ que tiene todas sus aristas no dirigidas.

En los grafos no dirigidos coinciden los números de separación interna y de separación externa del conjunto X_m .

A cada arista $a = (x_i, x_j)$ se le asocia una longitud $l_{ij} = l(x_i, x_j)$ y cualquier punto y de la arista a se determina dando la longitud de y a uno de los extremos de la arista.

Modelo 1.2.3 $G(X,A)$ mixto.

Un grafo mixto es un grafo $G(X,A)$ con unas aristas dirigidas y otras no dirigidas.

Definición 1.2.15.

Un grafo mixto está definido por los conjuntos X y A de vértices y aristas respectivamente y un par de correspondencias i y f de A en X tales que

$$|i(a)| = |f(a)| \text{ y } 0 < |e(a)| < 3, \text{ para cada } a \in A.$$

Es decir, una arista puede tener uno o dos extremos, si tiene uno es un lazo y si tiene dos puede ser no dirigida o dirigida, pero no ambas cosas a la vez.

Modelo 1.2.4 (G,U,F)

Se considera el modelo (G,U,F) donde $G(X,A)$ es un grafo y los conjuntos U y F se definen del siguiente modo:

U es un conjunto finito de puntos de demanda con pesos $v(u)$, para cada $u \in U$, por ejemplo el conjunto de vértices del grafo o un subconjunto finito de $P(G)$, donde $P(G)$ indica la unión del conjunto de vértices y del de puntos interiores de las aristas del grafo.

F es un conjunto de puntos de factible localización que puede ser finito o infinito.

Modelo 1.2.5 (G,U,F,P)

El modelo (G,U,F,P) donde $G(X,A)$ es un grafo, U es un conjunto finito de puntos de demanda, con pesos $v(u)$ para cada $u \in U$, F es un conjunto de puntos de factible localización que puede ser finito o infinito y P es un conjunto de puntos de servicio preestablecidos.

1.3. El problema del m-centro.

Problema 1.3.1. El problema del m-centro externo.

El problema consiste en:

Determinar

$$X_m = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \in X$$

que minimice

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \\ &= \max_{x_j \in X} \left\{ v_j d(x_m, x_j) \right\} = \\ &= S_o(x_m). \end{aligned}$$

Problema 1.3.2. El problema del m-centro interno.

El problema estriba en:

Determinar

$$X_m = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subset X$$

que minimice

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) =$$

$$= \max_{x_j \in X} \left\{ v_j d(x_j, X_m) \right\} =$$

$$= S_i(X_m).$$

[19]

Problema 1.3.3. El problema del m-centro interno-externo.

El problema se formula así:

Determinar

$$X_m = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subset X$$

que minimice

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) =$$

$$= \max_{x_j \in X} \left\{ v_j [d(X_m, x_j) + d(x_j, X_m)] \right\} =$$

$$= S_{oi}(X_m).$$

[20]

Sea \mathcal{Y}_m un conjunto de m puntos colocados no necesariamente en los vértices del grafo G .

Definición 1.3.1.

La separación del conjunto \mathcal{Y}_m es:

$$S(\mathcal{Y}_m) = \max_{x_j \in X} \{v_j d(\mathcal{Y}_m, x_j)\}$$

[21]

siendo

$$d(\mathcal{Y}_m, x_j) = \min_{y_i \in \mathcal{Y}_m} \{d(y_i, x_j)\}.$$

[22]

Definición 1.3.2.

El m -centro absoluto de G es el conjunto de puntos \mathcal{Y}_m^* tal que:

$$S(\mathcal{Y}_m^*) = \min_{\mathcal{Y}_m \in \mathcal{A}} \{S(\mathcal{Y}_m)\}$$

[23]

Problema 1.3.4. El problema del m -centro de F con respecto a U en el modelo (G, U, F) .

Se trata de encontrar un subconjunto de F de cardinal m que tenga la menor separación con respecto a U .

Definición 1.3.3.

La separación de $X \subset F$ con respecto a U es:

$$S(U, X) = \max \{v(u) \cdot d(X, u), \text{ siendo } u \in U\}.$$

[24]

La separación de X con respecto a U es infinita si algún punto de U no es accesible desde X y es cero si $U \subset X$.

El problema en el modelo (G.U,F) consiste en:

Determinar
 $X = (c_1, c_2, \dots, c_m) \subset F, |X| = m$
que minimice
 $S(U, X)$.

[25]

Definición 1.3.4.

Cualquier conjunto X^* , solución de este problema es un m-centro de F con respecto a U.

Definición 1.3.5.

El valor $r(m)$ de la separación de cualquiera de dichas soluciones es el m-radio de F con respecto a U:

$$r(m) = S(U, X^*).$$

[26]

Problema 1.3.5. El problema del m-centro con centros preestablecidos.

El problema consiste en:

Determinar
 $X = (c_1, c_2, \dots, c_m) \subset F, |X| = m$

que minimice
 $S(U, X \cup P)$.

[27]

Definición 1.3.6.

Cualquier conjunto X^* que sea solución del problema anterior es un m-centro de F con respecto a U, dado P.

Definición 1.3.7.

El valor $r(P;m)$ de la separación de $(X^* \cup P)$ es el m-radio dado P.

$$r(P;m) = S(U, X^* \cup P).$$

[28]

Problema 1.3.6. El problema del m-centro absoluto.

El problema consiste en:

Determinar

$\mathcal{Y}_m = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, siendo y_i puntos de G, no necesariamente vértices,

que minimice

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) =$$

$$= \max_{x_j \in X} \{v_j d(\mathcal{Y}_m, x_j)\} =$$

$$= S(\mathcal{Y}_m).$$

[29]

1.3.1. Los centros locales.

Minieka define el centro local en el interior de una arista $a = (x_i, x_j)$ como un punto equidistante de dos puntos de demanda y tal que, en ninguna de las dos direcciones en que puede ser desplazado dicho punto decrecen a la vez las distancias a estos dos puntos.

Definición 1.3.1.

Un punto $x \in F$ es un centro local de F con respecto a U de rango r si cumple:

- i) Existe algún punto de U cuya distancia ponderada desde x es r.
- ii) No existe ninguna dirección desde x dentro de F sobre una arista no dirigida por la que se pueda desplazar x de manera que las distancias ponderadas a los puntos de U que valen r, sean todas a la vez decrecientes.
- iii) No existe ninguna dirección desde x dentro de F sobre una arista dirigida desde la que se accede a todos los puntos de U por un camino de longitud ponderada no superior a r.

Definición 1.3.1.2.

El punto $x \in F$ se dice que es centro local de F con respecto a U si lo es para algún rango r.

Observación 1.3.1.1.

Un mismo punto x puede ser centro local con respecto a un conjunto U , fijo, con distintos rangos y puede ser centro local con el mismo rango con respecto a distintos conjuntos de puntos de demanda, incluso disjuntos.

Para un grafo $G(X,A)$ conexo y dirigido, Handler y Mirchandani extienden el concepto de centro local a los vértices, y asocian a cada centro local el rango o distancia a los puntos de demanda con respecto a los que es centro local.

Para ellos si x es un centro con respecto a un conjunto de demanda U y $r_x = \max \{d(u,x), u \in U\}$, entonces hay varios puntos de demanda de U a la distancia r_x de x y no hay ninguna dirección desde x en la que todas las distancias sean decrecientes.

Definición 1.3.1.3.

Las direcciones desde x en las que $d(u, \cdot)$ es decreciente en x están determinadas por el conjunto A_{x,x_i} de vértices x_i tales que la arista (o subarista) $[x,x_i]$ pertenece al camino más corto o a uno de los caminos más cortos de x a x_i .

$$A_{x,x_i} = \emptyset \text{ si y sólo si } x = x_i.$$

Definición 1.3.1.4.

Un punto x del grafo $G(X,A)$ es un centro local de rango r_x con respecto a un conjunto de puntos de demanda U , no



vacío, si y sólo si:

$$1. d(x,u) = r_x, \forall u \in U. \quad [30]$$

$$2. \bigcap_{u \in U} \bar{A}_{x,u} = \emptyset. \quad [31]$$

Minieka /72/ demuestra que el centro absoluto de un grafo se encuentra en un vértice o en un centro local con respecto a dos puntos de demanda.

Handler y Mirchandani /44/ demuestran que el centro absoluto de un grafo se encuentra en uno de los centros locales, siendo su rango y su separación coincidentes.

Teorema 1.3.1.1.(Moreno)

Dado un grafo $G(X,A)$, para cualquier conjunto finito de puntos de demanda U , el problema del 1-centro tiene una solución que es un centro local con respecto a un subconjunto de U y su rango es el 1-radio.

Demostración.

Ver Moreno /74/.

Teorema 1.3.1.2. (Dominancia de los centros locales)

Si un punto x es un centro de F con respecto a U , F cerrado, entonces x es un centro local de F con respecto a U de rango $S(U,x)$.

Demostración.

Si x es centro de F con respecto a U y $r = S(U,x)$ vamos a ver que x es centro de F con respecto a U de rango r .

Consideramos $U(x) = \{ u \in U / v(u) \cdot d(x,u) = S(U,x) \} \neq \emptyset$.

Supongamos que x no es centro de F con respecto a U de rango r , entonces pueden fallar las condiciones ii) o iii) de la definición 1.3.1.

Si falla ii) entonces existe una dirección desde x dentro de F sobre una arista $a = [x,x']$ no dirigida por la que se puede desplazar x de manera que las distancias ponderadas a los puntos de U que valen r sean todas a la vez decrecientes. En este caso existe $x''(t)$ en la arista a y $u_i \in U(x)$ tales que

$$S(U,x'') = S(U,x) - t \cdot v(u_i) \cdot \ell(x,x') < S(U,x) \quad t \in (0,1)$$

y x'' sería una mejor localización para el centro local que x .

Si falla iii) existe una dirección desde x dentro de F en una arista dirigida $a = [x,x']$ desde la que se accede a todos los puntos de U por un camino de longitud ponderada menor o igual a r . Entonces

$$\forall u \in U, v(u) \cdot [\ell(x,x') + d(x',u)] \leq r$$

de donde

$$\max_{u \in U} [\ell(x,x') + d(x',u)] \cdot v(u) \leq r = S(U,x)$$

Por tanto

$\forall u \in U, \exists x'' \in a$ y $t \in (0,1)$ tal que

$$v(u) \cdot d(x'',u) = v(u) \cdot [\ell(x,x') + d(x',u) - t\ell(x,x')] =$$

$$\begin{aligned}
&= v(u) \cdot [\ell(x, x') + d(x', u)] - v(u) \cdot t \cdot \ell(x, x') \leq \\
&\leq r - v(u) \cdot t \cdot \ell(x, x').
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$S(U, x') < r = S(U, x)$$

en contradicción con la hipótesis de que x es centro de F con respecto a U .

Por tanto x es centro local de F con respecto a U de rango $r = S(U, x)$.

■

Proposición 1.3.1.1. (Centros locales nulos)

Los puntos de demanda que están en F son centros locales de rango cero.

Demostración.

Si u es un punto del conjunto de demanda U y $u \in F$, entonces es centro local con respecto a él mismo y por tanto su rango es cero.

■

Teorema 1.3.1.3. (Conjunto finito dominante)

Si se impone la condición de que la frontera de F es finita, el conjunto de los centros locales de F con respecto a U es un conjunto finito y dominante para el problema del centro de F con respecto a U .

Demostración.

Como en cada arista existe como máximo un centro local con respecto a cada par de puntos de U , el cardinal del conjunto de los centros locales interiores a F es finito. Cualquier otro centro local será un vértice o un punto de la frontera de F y como ésta es finita el conjunto de los centros locales de F con respecto a U es finito. Por tanto existe un conjunto finito y dominante para el problema del centro de F con respecto a U .

■

Proposición 1.3.1.2.

En un grafo no dirigido, el centro sólo puede estar en los vértices, en los puntos frontera y en los centros locales con respecto a pares de puntos.

En un grafo dirigido, el centro sólo puede estar en los vértices, en los puntos de demanda o en los puntos frontera..

Demostración.

Si x es un punto frontera de F y pertenece a la arista $a = [x_i, x_j]$ puede ser un punto aislado y entonces es un centro local para cualquier punto accesible desde x , o bien una de las subaristas $[x_i, x]$ o $[x, x_j]$ no está contenida en F .

Supongamos que $[x, x_j] \not\subset F$. En este caso $\exists y \in [x_i, x]$ tal que $[y, x] \subset F$ y $\forall z \in [x, x_j]$ el segmento $[x, z] \not\subset F$.

Si la arista a es dirigida y no contiene ningún $u \in U$ los puntos de demanda se alcanzan a través del extremo x_j y por tanto a través de z . Así x es centro local con respecto a cualquier punto de demanda accesible desde x .

Si la arista a es no dirigida, x no es centro local con respecto a los puntos que se alcanzan óptimamente desde x a través de x_i y sí lo es con respecto a los puntos u que se alcanzan óptimamente desde x a través de x_j pero no a través de x_i . Por tanto el punto x es centro local con respecto a cada uno de los puntos de demanda que son accesibles desde x pero no a través de x_i .

Si x es un punto interior de F que pertenece a la arista dirigida $a = [x_i, x_j]$ todos los puntos exteriores a ella y accesibles desde x se alcanzan sólo a través de x_j y por tanto la dirección hacia x no verifica la condición iii) de la definición 1.3.1. Por tanto el centro en un grafo dirigido, si no es un punto frontera de F , sólo puede estar en los vértices o en los puntos de demanda.

Si x es interior a F e interior a una arista no dirigida $a = [x_i, x_j]$ $\exists y_1 \in [x, x_j]$ y $\exists y_2 \in [x, x_i]$ tales que $[x, y_1]$ y $[x, y_2]$ están contenidos en F . En este caso todo $u \in U$ se alcanza óptimamente desde x a través de x_i o a través de x_j . Por tanto u se alcanza óptimamente desde x a través de y_1 o a través de y_2 . Como $[x, y_1]$ y $[x, y_2]$ están contenidos en F ,

x es centro local con respecto a U de rango r si el conjunto de puntos de U que están a una distancia ponderada r desde x no está contenido en los conjuntos de puntos accesibles desde x a través de y_1 ni a través de y_2 .

Así x es centro local de rango r si y sólo si existen dos puntos u' y u'' de U tales que

$$v(u') \cdot d(x, u') = v(u'') \cdot d(x, u'')$$

siendo u' y u'' puntos de demanda que no son accesibles desde x a través de x_i ni a través de x_j . El punto x es centro local con respecto a un par de puntos de demanda.

■

Observación 1.3.1.2.1.

En un grafo no dirigido, un punto interior a una arista es centro local con respecto a uno o a un par de puntos de demanda. Un vértice lo es con respecto a uno, dos o más puntos de demanda, incluso si $F = P(G)$ y la longitud de las aristas es simétrica.

Teorema 1.3.1.4. (Moreno) (Centros locales con respecto a más de dos puntos).

Para cualquier número natural m , un vértice x_i que es centro local con respecto a un conjunto de m puntos de

demanda puede no ser centro local con respecto a un subconjunto propio.

Demostración.

Consideramos para $m=6$ el grafo $G(X,A)$, representado en la figura 1, siendo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{31}\}$ y A el conjunto de aristas dibujadas con longitudes unitarias.

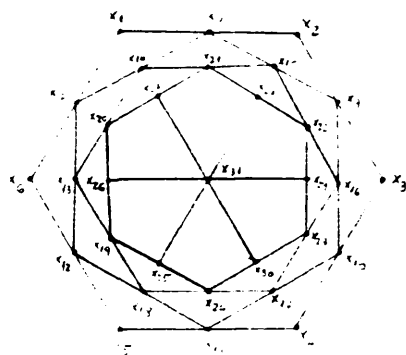


Figura 1

El conjunto de demanda es $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ y el de puntos de factible localización es el conjunto X y todos los puntos de las aristas de G .

El vértice x_{31} , que es el centro geométrico de la figura, es centro local con respecto a U pero no lo es con respecto a $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \subset U$, ya que $S(U_1, x_{13}) < S(U_1, x_{31})$ y lo mismo ocurre con cualquier subconjunto propio de U .

En general, dado el grafo $G(X,A)$ con conjunto de puntos de demanda $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ vértices de un polígono regular de m lados, siendo X el conjunto formado por los m vértices de U , los puntos medios de los lados del polígono que los tiene por vértices, así como los puntos medios de los polígonos que se obtienen repitiendo el procedimiento anterior $(m-2)$ veces, y el centro geométrico de la figura, el centro de la figura es el centro local con respecto a U y no es centro local con respecto a ningún subconjunto propio de U .

■

Observación 1.3.1.4.1.

Los vértices que son centros locales con respecto a un conjunto U de m puntos de demanda y no con respecto a un subconjunto propio de U pueden ser la única solución del correspondiente problema de centro.

1.4. Localización de un m -centro con centros preestablecidos.

Se trata ahora de localizar m nuevos puntos de servicio de forma que la separación del conjunto de los puntos de demanda a la unión de P con el conjunto de los m nuevos centros, sea mínima.

El problema del m -centro con centros preestablecidos consiste en determinar un subconjunto de F de cardinal menor o igual a m que minimice la separación del conjunto U , de puntos de demanda, al conjunto $X \cup P$, siendo P el conjunto formado por los centros preestablecidos.

Teorema 1.4.1.

Si F es cerrado está asegurada la existencia de solución para el problema del m -centro de F con respecto a U dado P .

Demostración.

Ver Moreno /75/.

Teorema 1.4.2. (Conjunto dominante)

En el modelo (G, U, F, P) para cualquier conjunto $X \subset F$ con m puntos existe un conjunto X' constituido por m centros locales de F con respecto a U tal que:

$$S(U, P \cup X') \leq S(U, P \cup X).$$

Si F tiene frontera finita el conjunto de los centros locales es finito y por tanto se podrá encontrar el m -centro, dado P , con un procedimiento finito.

Demostración.

Consideramos un conjunto $X \subset F$ de cardinal m y llamamos r a $S(U, P \cup X)$. Se define $U' = \{u \in U / v(u) \cdot d(P, u) > r\}$.

Si $U' = \emptyset$ entonces $S(U, P) \leq r$. Si X' es un conjunto formado por m centros locales de F con respecto a U y X es cualquier subconjunto de F de cardinal m entonces

$$S(U, P \cup X') \leq S(U, P \cup X).$$

Si $U' \neq \emptyset$ entonces $\exists u \in U / v(u).d(P,u) > r$. Consideramos X' formado por m centros de F con respecto a U .

$\forall u \in U'$ es $v(u).d(P,u) \leq r \Leftrightarrow v(u).d(P \cup X', u) \leq r$.

Si $u \in U'$ y $v(u).d(X,u) \leq r$, por estar X' formado por m centros locales de F con respecto a U ,

$$v(u).d(X',u) \leq v(u).d(X,u) \leq r.$$

De donde

$$S(U, P \cup X') \leq r = S(U, P \cup X).$$

Si F tiene frontera finita, por el teorema 1.3.1.3, el conjunto de los centros locales de F con respecto a U es un conjunto finito y en consecuencia el m -centro dado P se puede encontrar por un procedimiento finito.

■

Teorema 1.4.3. (Obtención del m -centro)

Dados el modelo (G,U,F,P) y un valor $r > 0$, sea:

$$U(r) = \{u \in U / v(u).d(P,u) > r\}$$

$$[U'(r) = \{u \in U / v(u).d(P,u) \geq r\}]$$

Si $X(r)$ $[X'(r)]$ es m -centro de F con respecto a $U(r)$

$[U'(r)]$ se verifica:

a) Si $S(U(r), X(r)) \leq r$

$$[S(U'(r), X'(r)) < r]$$

entonces: $S(U, P \cup X(r)) \leq r$

$$[S(U, P \cup X'(r)) < r].$$

b) En caso contrario, para cualquier conjunto X de no más de m puntos de F se verifica:

$$S(U, P \cup X) > r.$$

$$[S(U, P \cup X) \geq r].$$

Demostración.

a) Si $S(U(r), X(r)) \leq r$, consideramos $u \in U$. Puede ocurrir:

a₁) $u \in U(r)$ entonces

$$v(u) \cdot d(u, X(r)) \leq S(U(r), X(r)) \leq r.$$

a₂) $u \notin U(r)$ entonces

$$v(u) \cdot d(P, u) \leq r$$

En cualquier caso $S(U, P \cup X(r)) \leq r$.

b) Si $S(U(r), X(r)) > r$, entonces $S(U, P \cup X(r)) > r$.

Supongamos que existe $X \subset F$ tal que $|X| \leq m$ que verifique $S(U, P \cup X) \leq r$. Como $\forall u \in U(r)$ es $v(u) \cdot d(P, u) > r$, ha de ser

$$v(u) \cdot d(X, u) \leq r \quad \Leftrightarrow \quad S(U(r), X) \leq r$$

y como $X(r)$ es el m -centro de F con respecto a $U(r)$

$$S(U(r), X(r)) \leq S(U(r), X) \leq r$$

en contra de la hipótesis.

La demostración para $U'(r)$ es análoga. ■

Teorema 1.4.4. (Obtención del m -radio)

En el modelo (G, U, F, P) , para todo número natural m , el m -radio de F con respecto a U dado P es:

$$i) \quad r(P; m) = \min \{ r / S(U(r); X(r)) \leq r \}.$$

siendo $U(r) = \{u \in U / v(u) \cdot d(P, u) > r\}$ y $X(r)$ m -centro de F con respecto a $U(r)$ y

$$ii) \quad r(P; m) = \max \{ r / S(U'(r), X'(r)) \geq r \}$$

siendo $U'(r) = \{u \in U / v(u) \cdot d(P, u) \geq r\}$ y $X'(r)$ m -centro de F con respecto a $U'(r)$.

Demostración.

i) $r(P;m)$ es el m -radio de F con respecto a U dado P , si X^* es un m -centro de F con respecto a U dado P se tiene:

$$S(U, P, X^*) = r(P;m).$$

Consideramos

$$U(r(P;m)) = \{u \in U / v(u).d(P,u) > r(P;m)\}$$

Si $v(u).d(P,u) > r(P;m)$, como $S(U, P, X^*) = r(P;m)$

entonces

$$v(u).d(X^*, u) \leq r(P;m).$$

Por tanto $S(U(r(P;m)), X^*) \leq r(P;m)$ y si $X(r(P;m))$ es un m -centro de F con respecto a $U(r(P;m))$ entonces

$$S(U(r(P;m)), X(r(P;m))) \leq S(U(r(P;m)), X^*) \leq r(P;m).$$

Y en consecuencia:

$$\min \{r / S(U(r), X(r)) \leq r\} \leq r(P;m).$$

Supongamos que

$$\min \{r / S(U(r), X(r)) \leq r\} < r(P;m)$$

entonces $\exists r < r(P;m) / S(U(r), X(r)) \leq r$ y aplicando el teorema 1.4.3. se tiene

$$S(U, P, X(r)) \leq r < r(P;m)$$

que contradice la definición de $r(P;m)$ como m -radio de F con respecto a U dado P , ya que $X(r)$ sería mejor solución que X^* para el m -centro de F con respecto a U dado P .

Por tanto

$$\min \{r / S(U(r), X(r)) \leq r\} = r(P;m).$$

La demostración de ii) es análoga a la anterior.

■

1.5. El problema del r-cubrimiento.

Se trata de minimizar el número de centros a localizar para dar servicio a un subconjunto del conjunto de vértices X , de tal forma que cada vértice esté separado del centro más próximo una distancia que no supere la constante dada r .

En el modelo (G,U,F) , el problema consiste en determinar el subconjunto de F , de menor cardinal, fijada una cota r para su separación.

En cualquier contexto se puede plantear el problema inverso al del m -centro, es decir, en vez de determinar la localización que minimiza la distancia (el tiempo o el costo) necesaria para acceder al punto de demanda más alejado limitando el número de centros a establecer, determinar la localización que optimiza el número de centros de servicio con una cota en la distancia de acceso (el tiempo o el costo) a los puntos de demanda.

El problema del r-cubrimiento de U por F en el modelo (G,U,F) .

Dado un valor positivo r el problema consiste en:

Determinar el conjunto

$$X \subset F$$

que minimice

$$|X| \text{ siendo } S(U,X) \leq r.$$

[32]

Si $S(U, X) < r$ se denomina de r-cubrimiento estricto de U por F.

Definición 1.5.1.

Un r-cubrimiento estricto de U por F es cualquier conjunto X^* que sea solución del problema anterior.

Definición 1.5.2.

El número de puntos de cualquiera de los conjuntos X^* solución del problema es el número de r-dominación (o r-dominación estricta) de U por F:

$$m(r) = |X^*|$$

Teorema 1.5.1. (Moreno)

Dado un grafo $G(X, A)$ y un conjunto finito U de puntos de demanda de G, para cualquier valor de $r > 0$, existe un r-cubrimiento X^* formado por centros locales tales que para cualquier punto de demanda u existe un $c_x \in X^*$ que verifica:

$$d(u, c_x) \leq r_{c_x}$$

$$\text{y } S(U, X^*) = \max \{d(u, c_x), u \in U, c_x \in X^*\} < r.$$

Demostración.

Consideramos un r-cubrimiento X de G y para cada $x \in X$, $U(x) = \{u \in U / d(u, x) \leq r\} \neq \emptyset$.

Si c_x es el 1-centro con respecto a $U(x)$ y

$$X^* = \{c_x, x \in X\}$$
es el conjunto de estos 1-centros, por el teorema 1.3.1.1.
 c_x es un centro local y su rango es $r_{c_x} = S(U(x), c_x)$.

Como $U = \bigcup_{x \in X} U(x)$, $\forall u \in U, \exists c_x \in X^*$ tal que

$$d(u, c_x) \leq S(U(x), c_x) = r_{c_x} \leq S(U(x), x)$$
por ser c_x el centro local con respecto a $U(x)$.

Además

$$\begin{aligned} S(U, X^*) &= \max \{d(u, X^*), u \in U\} = \\ &= \max \left\{ \min \{d(u, c_x), u \in U, c_x \in X^*\} \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ r_{c_x}, c_x \in X^* \right\} \leq \max \left\{ S(U(x), x), x \in X \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ S(U, x), x \in X \right\} = S(U, X) \leq r. \end{aligned}$$

Y como $|X^*| \leq |X| = m(r)$, X^* es un r -cubrimiento. ■

Teorema 1.5.2. (Dominancia en el r -cubrimiento)

Dado un grafo $G(X, A)$, un conjunto finito U de puntos de demanda y un conjunto cerrado F de puntos de factible localización, el conjunto $\mathcal{C}(r)$ de los centros locales de F con respecto a U de rango menor o igual a r es dominante para el problema del r -cubrimiento de U por F .

Demostración.

$\mathcal{C}(r) = \{x \in F / x \text{ es centro local y } \text{rango}(x) \leq r\}$.

Consideramos \mathcal{Y} , un r -cubrimiento de U por F tal que $|\mathcal{Y}| = m$.

Para cada $y_i \in \mathcal{Y}$ se define

$$\mathcal{U}(y_i) = \{u \in U / v(u) \cdot d(y_i, u) \leq r\}$$

Por el teorema 1.3.1.1. $\exists z_i$ 1-centro de F con respecto a $\mathcal{U}(y_i)$ y por el teorema 1.3.1.2. z_i es centro local de F con respecto a $\mathcal{U}(y_i)$ con $\text{rango}(z_i) = S(\mathcal{U}(y_i), z_i) \leq r$.

Llamamos $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ conjunto de los m centros locales de F con respecto a $\mathcal{U}(y_i)$.

Teniendo en cuenta que $\bigcup_{y_i \in \mathcal{Y}} \mathcal{U}(y_i) \supset U$ ya que

$$\forall u \in U \text{ como } S(u, \mathcal{Y}) \leq r \rightarrow \exists y_i \in \mathcal{Y} / v(u) \cdot d(y_i, u) \leq r$$

se deduce que

$$\forall u \in U \exists z_i \in \mathcal{Z} \text{ tal que } S(u, z_i) \leq S(\mathcal{U}(y_i), z_i) \leq r.$$

Así $z_i \in \mathcal{C}(r)$ y $S(U, \mathcal{Z}) \leq r$.

■

Teorema 1.5.3.

En el modelo (G, U, F) siendo U un conjunto finito y F cerrado

a) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ todo $r(m)$ -cubrimiento de U por F es un m -centro y además $r(m)$ es el menor valor de r tal que el número de r -dominación es menor o igual a m .

b) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ el conjunto de los centros locales de F con respecto a U cuyo rango es menor o igual a $r(m)$ es dominante para el m -centro.

Demostración.

a) Dado $r > 0$ se define $E(r) = \{Y \subset F / S(U, Y) \leq r\}$

Si $r = r(m)$ entonces $m(r) = m$.

Consideramos \mathcal{Y}^* un r -cubrimiento de U por F .

$\mathcal{Y}^* \in E(r)$ y $|\mathcal{Y}^*| = m(r) = m$, $S(U, \mathcal{Y}^*) \leq r = r(m)$.

por tanto \mathcal{Y}^* es un m -centro.

Además si $r(m) \leq r$ entonces $m(r) \leq m$, de donde $r(m)$ es el menor valor de r tal que el número de r -dominación es menor o igual a m .

b) El conjunto $\mathcal{Z}(r(m))$, por el teorema 1.5.2. es dominante en el problema del $r(m)$ -cubrimiento de U por F , por tanto existe un $r(m)$ -cubrimiento \mathcal{Z}^* de U por F formado por centros locales de rango menor o igual a $r(m)$ con $|\mathcal{Z}^*| \leq m$. Y como consecuencia del apartado a) \mathcal{Z}^* es un m -centro de F con respecto a U .

■

1.6. Algoritmos para la resolución del problema del m-centro.

Para determinar el m-centro absoluto de un grafo se calculan las distancias indicadas en [3]

1.6.1. Algoritmos de distancias.

1.6.1.1. Dijkstra Modificado.

Se calculan las distancias en $G(X,A)$ desde un vértice dado (raíz) construyendo el árbol de caminos mínimos a partir de él.

En cada paso se incorpora un nuevo vértice, el más próximo, y la arista que lo une. A cada vértice se le asocia un nivel, la longitud del camino mínimo desde la raíz hasta él. El nivel de la raíz es siempre cero.

El esquema del algoritmo es el siguiente:

- Paso 1.* Inicializar el árbol con un vértice x .
- Paso 2.* A cada $x_i \in X$ se le asocia un nivel "infinito" y un Nodo = 0.
- Paso 3.* Para cada $x_i \in X$ adyacente a x se le asocia un nivel igual a la longitud del camino de x a la raíz.
- Paso 4.* Se elige $x_j \in X$ que tenga el mínimo nivel.
- Paso 5.* Se incorpora x_j al árbol, se elimina de la estructura y se incorpora a una lista que los mantiene ordenados de acuerdo con su nivel.
- Paso 6.* Los vértices restantes se ordenan de acuerdo con el nivel que tengan en cada instante en una

estructura ordenada "Niveles". La variable "nodo" indica la posición de cada vértice dentro de la correspondiente estructura "niveles".

Paso 7. Si no quedan vértices fuera del árbol parar y en caso contrario volver al *paso 2*, sustituyendo *x* por el último vértice incorporado.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|A| \cdot \log |X|).$$

Observación 1.6.1.1.1.

Si se calculan las distancias "desde" un vértice o "hasta" un vértice, se dice algoritmo de Dijkstra-exterior o Dijkstra-interior.

1.6.1.2. Dijkstra Global Modificado.

Se calculan a la vez las distancias hasta o desde un conjunto finito de puntos o de vértices.

Los puntos forman una lista *P*, con sus factores de ponderación $v(p)$, para cada elemento $p \in P$.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Inicializar Niveles-Conj. = 0.

Paso 2. Cada $p \in P$ se dispone en una estructura ordenada "Niveles(*p*)" y se construye el árbol de caminos mínimos hasta *p*.

Paso 3. A cada $p \in P$ se le asocia

$$\text{Nivel-Conj}(p) = v(p) \cdot \text{mín}(\text{niveles}(p))$$

Paso 4. Se elige el punto $p \in P$ que corresponda al mínimo de Niveles-Conj. y el vértice x correspondiente al mínimo de Niveles(p).

Paso 5. Se elimina x de Niveles(p) y se incorpora a la lista "Lista(p)" que ordena los vértices de acuerdo con su distancia a p .

Paso 6. Los vértices no incorporados se ordenan en las estructuras Niveles(p) de acuerdo con su nivel para cada punto p de la lista.

Paso 7. Si "Niveles(p)" = 0 eliminar p de Niveles-Conj., en caso contrario volver al *paso 2* hasta que Niveles-Conj. = 0.

COMPLEJIDAD:

La complejidad del algoritmo es:

$$O(|P| \cdot |A| \cdot \text{máx}(\log|X|, \log|P|)).$$

1.6.2. Algoritmos de centros locales.

Determina los centros locales de F , con respecto a un conjunto de demanda U , cuyo rango está entre r' y r'' .

Cada $u \in U$ lleva asociada una lista, ordenada por su nivel, de los vértices cuya distancia ponderada a u no supere a r'' .

Descripción del algoritmo.

- Paso 1.* Para cada $u \in U$, x es el primero de la lista de u , $r = d(x,u) \cdot v(u)$. Se aplica 1.6.1.2. a u hasta el nivel r'' o 1.6.1.1. a cada $u \in U$ hasta el nivel $r''/p(u)$.
- Paso 2.* Se determina si x es centro local con respecto a U de rango r .
- Paso 3.* Para cada vértice x' adyacente con x se determina si con otro punto de demanda $u' \in U$ existe un centro local en $[x,x']$ con respecto a u y u' , siendo u óptimamente accesible a través de x y de rango entre r' y r'' .
- Paso 4.* En caso afirmativo se introduce en la lista de centros locales.
- Paso 5.* Volver al *paso 2*, siendo x el siguiente de la lista de u hasta que $d(x,u) \cdot v(u) < r'$.

COMPLEJIDAD:

El conjunto de los centros locales de $P(G)$ con respecto a un conjunto de demanda U se determina a partir de la matriz de distancia con complejidad:

$$O(|A| \cdot |U|^2).$$

1.6.3. Algoritmos para el centro absoluto.

El centro absoluto, y^* , de un grafo $G(X,A)$ es aquel centro local que tiene la separación mínima.

1.6.3.1. El método de Hakimi.

1.6.3.1.1.

Para un grafo $G(X,A)$ no dirigido.

Paso 1. Para cada arista $a_k = [x_\alpha, x_\beta]$ del grafo se elige un punto cualquiera y_k , siendo $\ell(y_k, x_\beta) = \xi$ la longitud de la subarista $[y_k, x_\beta]$ y por tanto $\ell(y_k, x_\alpha) = \ell_{\alpha\beta} - \xi$.

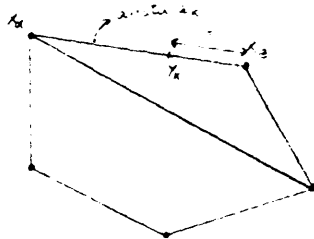


Figura 2

Paso 2. Se calcula $s(y_k)$ mediante

$$\begin{aligned}
 s(y_k) &= \max_{x_i \in X} [v_i \min(\ell(y_k, x_\beta) + d(x_\beta, x_i), \ell(y_k, x_\alpha) + d(x_\alpha, x_i))] = \\
 &= \max_{x_i \in X} [\min \{v_i(\xi + d(x_\beta, x_i)), v_i(\ell_{\alpha\beta} + d(x_\alpha, x_i) - \xi)\}].
 \end{aligned}$$

[33]

Paso 3. Se determina $y_k^* \in a_k$ (o los puntos de la arista a_k) que tiene(n) la separación mínima.

Paso 4. De los y_k^* , $k = 1, 2, \dots, m$ se elige el que da lugar al mínimo más bajo.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|A| \cdot |X| + |X|^2 \cdot \log|X|).$$

1.6.3.1.2.

Para un grafo dirigido.

El método no cambia, pudiendo sustituir cada concepto no dirigido por su equivalente dirigido.

1.6.3.2. El método de Hakimi modificado.

Cualquier centro local en $a_{ij} = [x_i, x_j]$ tendrá asociado con él un radio local absoluto, llamado r_{ij} , que debe ser al menos mayor o igual a p_{ij} , siendo

$$p_{ij} = \max_{x_i \in X} [v \cdot \min \{d(x_i, x_i), d(x_i, x_j)\}]$$

p_{ij} es un límite inferior en el radio absoluto del grafo, por tanto, la cantidad $P = \min_{(x_i, x_j) \in A} \{p_{ij}\}$, donde A es el conjunto de las aristas del grafo, es un límite inferior válido en el radio absoluto.

Si el centro absoluto está en el punto medio de la arista $a_{ij} = (x_i, x_j)$, entonces el radio absoluto es

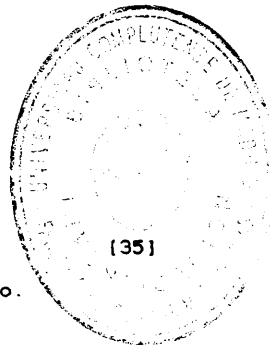
$$p_{ij} + \frac{1}{2} \times x_{ij} \quad (34)$$

donde x_{ij} es el valor de aquel x_i que produce el p_{ij} máximo.

Por tanto, la cantidad

$$H = \min_{(x_i, x_j) \in A} \left\{ p_{ij} + \frac{1}{2} x_{ij} \right\}.$$

es un límite superior válido para el radio absoluto.



1.6.3.3. El método iterativo.

1.6.3.3.1. Para grafos no dirigidos.

Consideramos los conjuntos:

$$Q_\lambda(x_i) = \{y / v_i d(y, x_i) \leq \lambda, y \text{ en } G\}$$

[36]

el conjunto de todos los puntos y en el grafo G desde los que el vértice x_i es accesible a una distancia ponderada λ .

El radio absoluto r es el valor λ_{\min} de modo que

$$\bigcap_{i=1}^n [Q_\lambda(x_i)] \equiv Q_\lambda(x_1) \cap Q_\lambda(x_2) \cap \dots \cap Q_\lambda(x_n) \neq \emptyset.$$

[37]

Por consiguiente, se empieza con cualquier valor pequeño de λ y se calculan los conjuntos $Q_\lambda(x_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, comprobando [37]. Si no se satisface [37] se da a λ un incremento pequeño y repetimos el proceso hasta que se cumpla [37] y el valor resultante de λ es el radio absoluto r del grafo. El conjunto intersección

$$\bigcap_{x_i \in X} [Q_\lambda(x_i)]$$

contendrá, en la iteración final, precisamente un único punto que es el centro absoluto y^* . Ver Christofides /22/.

Observación 1.6.3.3.1.

Puede contener más de un punto en el caso en que exista más de un centro absoluto.

Observación 1.6.3.3.2.

Si $\lambda \leq \frac{v_i v_j}{v_i + v_j} d(x_i, x_j)$, entonces $Q_\lambda(x_i) \cap Q_\lambda(x_j) = \emptyset$.

y el conjunto $\bigcap_{x_i \in X} \{Q_\lambda(x_i)\}$ es vacío.

Así el método iterativo para localizar el centro absoluto se puede iniciar con un valor de λ dado por

$$\lambda_{\text{inicial}} = \max_{x_i \neq x_j \in X} \left[\frac{v_i v_j}{v_i + v_j} d(x_i, x_j) \right] \quad [38]$$

puesto que r debe ser mayor o igual a λ_{inicial} .

Observación 1.6.3.3.3.

El valor $\delta = 2\lambda_{\text{inicial}}$ se puede llamar el diámetro del grafo.

1.6.3.3.2. Para grafos dirigidos sigue siendo válido lo dicho anteriormente.

1.6.3.4. Algoritmo de Kariv y Hakimi.

Se considera el modelo (G, U, F) .

Se ordenan los puntos de U con respecto a su factor de ponderación, $v_i = v(u_i)$

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n, \quad |U| = n$$

Definición 1.6.3.4.1.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, la función definida en $[0, 1]$:

$$s(i;t) = d[x(a,t), u_i] \cdot v_i \quad [39]$$

es la separación del i -ésimo punto de demanda.

Definición 1.6.3.4.2.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ la función definida en $[0, 1]$:

$$S(i;t) = \max \{s(j;t) : j = 1, 2, \dots, i\} \quad [40]$$

es la separación con respecto a los i primeros puntos de demanda.

Las funciones $s(i;t)$ y $S(i;t)$ son lineales a trozos y continuas.

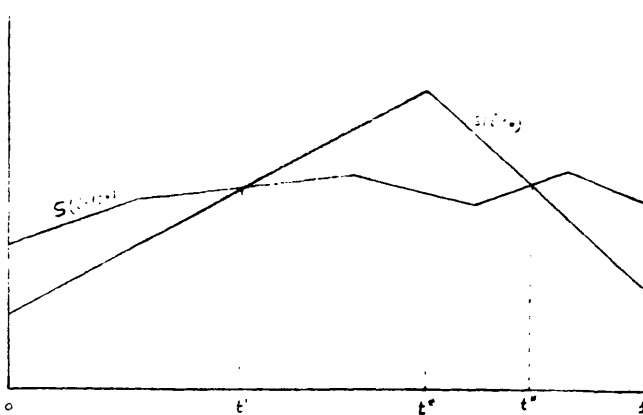


Figura 3

$S(i; \cdot)$ se obtiene de la lista:

$$L(i) = (t(i;0)=0, t(i;1), t(i;2), \dots, t(i;n_i)=1),$$

siendo $t(i,j) < t(i,j+1)$, los puntos de no linealidad de la función $S(i; \cdot)$ en orden creciente, y los valores de $S(i; \cdot)$ en cada uno de ellos:

$$S(j) = S(i; t(i,j)).$$

El valor de $S(i;t)$, $\forall t \in [0,1]$ se calcula determinando el valor j tal que $t(i;j) \leq t < t(i;j+1)$. Entonces

$$S(i;t) = S(j) + (t - t(i;j)) \cdot (S(j+1) - S(j))$$

Para el i -ésimo punto de demanda u_i , la lista $L(i)$, y los valores de $S(i; \cdot)$ en $L(i)$, se obtienen de la lista $L(i-1)$ con sus valores correspondientes.

Puesto que $S(i,t) = \max \{S(i-1;t), s(i;t)\}$, los puntos de no linealidad de $S(i; \cdot)$ pueden ser, además de los de $S(i-1; \cdot)$, el pico de $s(i; \cdot)$ y los puntos de corte de $S(i-1; \cdot)$ y $s(i; \cdot)$.

Es fácil probar que el número máximo de valores a insertar en la lista $L(\cdot)$ es 3: t' , t^* y t'' (ver Fig.3)

Descripción del procedimiento para hallar el mínimo

local.

Paso 1. Inicializar con $a = [x_i, x_j] \in A$.

Paso 2. Para cada $i = 1, 2, \dots, |U|$, localizar el valor

$t^*(i) = t(a, u_i)$ y calcular $s(i;t)$ y $S(i;t)$. Se

inserta t^* en $L(i)$.

Paso 3. Si $S(t^*) < s(t^*)$ y $S(0) \leq s(0)$ entonces se elimina el subintervalo $(0, t^*)$.

En caso contrario se elimina el subintervalo (t', t^*) , llamando t' al punto de corte de S y s entre 0 y t^* y se inserta t' en la lista $L(i)$.

Si $S(t^*) < s(t^*)$ y $S(1) \leq s(1)$ entonces se elimina el subintervalo $(t^*, 1)$.

En caso contrario se elimina el subintervalo (t^*, t'') , llamando t'' al punto de corte de S y s entre t^* y 1 y se inserta t'' en la lista $L(i)$.

Paso 4. Se busca la mejor localización factible entre los puntos de la lista $L(i)$, determinando el punto de menor separación.

COMPLEJIDAD:

La complejidad del algoritmo de Kariv y Hakimi, para localizar el mejor punto en una arista es:

$$O(|U| \cdot \log|U|).$$

Observación 1.6.3.4.1.

Si la arista no tiene todos sus puntos de factible localización, la mejor localización factible está en uno de los puntos de la lista o en uno de los puntos frontera. Para cada arista se determina el punto de la lista que sea factible y tenga la menor separación posible y la separación en los

puntos frontera se obtiene por interpolación entre los elementos de la lista.

1.6.3.5. Algoritmo de relajación.

Paso 1. Inicializar con $x \in F$.

Paso 2. Se aplica Dijkstra exterior a x y se determina el punto $u \in U$ ponderadamente más alejado de x .

Paso 3. $R = \{u\}$.

Paso 4. Se aplica Dijkstra interior a u y se determina el centro de F con respecto a R , como el punto $c \in F$ con menor separación de u .

Paso 5. Si r se alcanza en R parar.

En caso contrario se aplica Dijkstra exterior a c y se llama r a su separación. Si r no se alcanza en un punto de R , se considera u , un punto ponderadamente más lejano de c . Se aplica Dijkstra interior a u hasta el nivel r y se incorpora u a R . Se eliminan los puntos de F que estén a distancia mayor que r de alguno de R . Se determina el nuevo centro c de F con respecto a R .

1.6.3.5.1. Si F es finito.

Si F es finito se puede hallar un centro de F con respecto a U con $|F| \cdot |U|$ comparaciones a partir de la matriz de distancias obtenida por aplicación del algoritmo modificado de Dijkstra a F , U o X .

Se implementa mediante una lista L que contenga los puntos de F ordenados en cada paso por su separación con respecto a R. El centro c de F con respecto a R es el primer punto de la lista.

1.6.3.5.2. Si F es infinito.

Si F es infinito, se asegura la existencia de un centro de F con respecto a U si F es cerrado y U es completamente accesible desde F.

Se descartan las aristas completas $a = [x_i, x_j]$ tales que

$$\min \{d(x_i, u), d(x_j, u)\} \cdot v(u) > r.$$

Se modifica la determinación del centro de las aristas no descartadas con respecto a R.

La lista L está formada por las aristas contenidas en F ordenadas de acuerdo con el valor de una cota inferior de la mejor localización en cada arista.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Inicializar con un punto $x \in F$.

Paso 2. Se aplica Dijkstra exterior a x y se determina el punto $u \in U$ ponderadamente más alejado de x.

Paso 3. $R = \{u\}$.

Paso 4. Se aplica Dijkstra interior a u y se determina para cada $a = [x_i, x_j]$ contenida en F la separa-

ción

$$S(R;a) = \min \{ d(x_i,u), d(x_j,u) \} \cdot v(u)$$

Se inserta la arista a en la lista L con su separación $S(R;a)$.

Paso 5. $c = x$.

Paso 6. Si r se alcanza en R parar.

Si no se aplica Dijkstra exterior a c y se

$$\text{llama } u^* = \max \{ d(c,u) \cdot v(u), u \in U \}$$

$$\text{y } r^* = d(c,u^*) \cdot v(u^*)$$

Si $r^* > S(R;c)$ entonces se aplica Dijkstra interior a u hasta el nivel r^* .

Para cada $a \in F$ se llama

$$r = \min \{ d(x_i,u), d(x_j,u) \} \cdot v(u)$$

Si $S(R:f) \geq r^*$, para $f \in F$, o $r > r^*$, entonces se elimina a de F y f de la lista L .

En caso contrario, si $S(R:f) < r^*$,

entonces se hace $r^* = S(R:f)$ y se

recoloca la lista L en orden creciente de $S(R:f)$.

Se incorpora u a R y se determina el nuevo centro c de F con respecto a $R \cup \{u\}$ después de obtener los nuevos centros locales con respecto a R motivados por la incorporación de u a R y elegir entre los que cubran R el de menor rango.

1.6.3.6. El algoritmo de Minieka.

El procedimiento consiste en determinar la mejor localización posible en cada arista $[x_i, x_j]$ que se encuentra en un centro local con respecto a un punto u al que se accede óptimamente a través de x_i y al punto x que es el más lejano de x_j de entre los que están más alejados de x_i que u .

Descripción del algoritmo de Minieka:

Paso 1. $x = x_j$.

Paso 2. $u = u(k)$ para $k = 1, 2, \dots, n$ ordenados según la distancia a x_i desde el más lejano al más próximo.

$$r = \frac{1}{2} [d(u, x_i) + \ell(x_i, x_j) + d(x_j, x)]$$

Paso 3. Al pasar de u al siguiente si

$$d(x_j, u) > d(x_j, x)$$

entonces se hace $x = u$ y si

$$r < \text{Radio}$$

entonces se hace $\text{Radio} = r$. Volver al paso 1.

Para cada par de puntos u y x el correspondiente centro local tiene una separación, que es su rango:

$$r = \frac{1}{2} [d(u, x_i) + \ell(x_i, x_j) + d(x_j, x)]$$

y está en el interior de la arista $[x_i, x_j]$ si:

$$d(u, x_i) < r < d(u, x_i) + \ell(x_i, x_j)$$

y

$$d(x, x_j) < r < d(x, x_j) + \ell(x_i, x_j).$$



**1.6.3.7. El algoritmo de relajación para el caso $U=X$
y $F = P(G)$.**

El algoritmo determina el centro absoluto de un grafo $G(X,A)$ no dirigido, con longitudes $l(\dots)$ simétricas en el caso en que el conjunto de los puntos de demanda y los de factible localización son vértices y puntos interiores a las aristas.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Iniciar R con cualquier vértice x_i y como centro c tomar el mismo x_i . Hacer $r = 0$ y r^* es la separación de c .

Paso 2. Si $r = r^*$ parar.

En caso contrario determinar el vértice x_j a mayor distancia de c . Si ésta es superior a r se incorpora x_j a R y se determina el centro c con respecto a R hallando los nuevos centros locales, que motiva la incorporación de x_j a R , de rango entre r y r^* ; el centro c es el de menor rango entre los que cubran R . Se hace $r =$ rango de c y r^* es la separación de c .

1.6.3.8. Algoritmo para determinar el centro absoluto de un árbol.

Un árbol es un grafo conexo que tiene al menos dos vértices y no tiene ciclos o circuitos cerrados.

Un grafo es conexo si dados dos vértices cualesquiera del grafo existe al menos un camino que los une.

El algoritmo de relajación se puede utilizar para determinar el centro absoluto de un árbol, modificando el algoritmo dado en 1.6.3.5., del siguiente modo:

- Paso 1.* Si x_i es un vértice cualquiera, determinar el vértice x_j más alejado de x_i y el vértice x_k más lejano a x_j .
- Paso 2.* El punto medio del camino óptimo de x_i a x_k es el centro del árbol.

1.6.4. Algoritmos para determinar m-centros.

1.6.4.1. Algoritmo de Minieka.

Se considera un grafo $G(X,A)$ con vértices no ponderados. Es fácil ver que:

Existe un m-centro absoluto en el conjunto $C = C' \cup X$ siendo C' el conjunto de los puntos x de cada arista $a = [x_i, x_j]$ para los que $d(x_i, x) = d(x, x_j)$.

Ver Minieka /71/.

Como el número de puntos de C' es a lo sumo $|X| \cdot (|X| - 1)$, el m-centro se puede encontrar tomando como localizaciones factibles los $n = |X|$ vértices y los $n(n-1)$ puntos de C' , es decir, examinando un número finito de candidatos.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O (|X|^{(2m+1)} \cdot |A|^m)$$

1.6.4.2. Algoritmo de Minieka para el modelo (G, U, F).

Para el modelo (G, U, F), el algoritmo de Minieka es la aplicación del siguiente resultado:

Teorema 1.6.4.2.1.

Un m-centro de F con respecto a U es un conjunto X de m puntos tal que si $r = S(U, X)$, no existe ningún r-cubrimiento estricto de U por F con m puntos.

Demostración.

Moreno /74/.

Descripción del algoritmo.

Si X^* es cualquier subconjunto de F formado por m puntos, repetir, mientras exista X, la operación:

Sea X un S(U, X^*)-cubrimiento estricto de U por F tal que $|X| \leq m$. Hacer $X^* = X$.

Si F es finito el algoritmo lo es, ya que siempre se reduce la separación de X^* y se recorre el conjunto de las distancias ponderadas desde F hasta U, que es finito.

Si F no es finito pero tiene frontera finita el algoritmo es finito si sólo se buscan conjuntos X constituidos

por centros locales de F con respecto a U . La solución se alcanza al ser el conjunto de los centros locales de F con respecto a U , cuyo rango no supera r , dominante para el m -centro.

COMPLEJIDAD:

El algoritmo de Minieka para el m -centro de F con respecto a U tiene complejidad:

$$O(|A|^m \cdot |U|^{(2m+1)}).$$

1.6.4.3. El algoritmo de Kariv y Hakimi.

Este algoritmo se fundamenta en el siguiente teorema:

Teorema 1.6.4.3.1.

Para el modelo (G,U,F) siendo U un conjunto finito y F cerrado, si $m \in \mathbb{N}^$ existe al menos un conjunto \mathcal{Y}' formado por $(m-1)$ centros locales de F con respecto a U tales que si U' es el conjunto de demanda no cubierto por estos $(m-1)$ centros locales dentro de su rango, entonces el centro de F con respecto a U' junto con los $(m-1)$ centros locales anteriores constituye un m -centro \mathcal{Y}^* de F con respecto a U cuya $S(U, \mathcal{Y}^*)$ es el radio de F con respecto a U' .*

Demostración.

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, por el teorema 1.5.3., existe al menos un m -centro \mathcal{Y}^* formado por centros locales de rango menor o igual a $r(m)$.

Para cada $u \in U$, por el teorema 1.3.1.1. existe un centro local $v_i = v_i(u)$ con respecto a $\{u\}$ cuyo rango es el 1-radio:

$$v(u).d(v_i, u) = \text{rango}(v_i)$$

Como $S(U, \mathcal{Y}^*) = \max \{ \text{rango}(v_i), v_i \in \mathcal{Y}^* \}$, si $v_j \in \mathcal{Y}^*$ es tal que $\text{rango}(v_j) = S(U, \mathcal{Y}^*)$ entonces $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}^* - \{v_j\}$ es el conjunto buscado formado por $(m-1)$ centros locales y $U' = \{u_j\}$ siendo $v_j = v_j(u_j)$, es decir, u_j el punto de demanda cubierto por v_j .

$S(U, \mathcal{Y}^*) = \text{rango}(v_j) = S(v_j, u_j)$, es decir, el radio de F con respecto a U' .

■

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Determinar todos los centros locales de F con respecto a U .

Paso 2. Repetir para las posibles elecciones de $(m-1)$ centros locales.

Paso 2.1. Determinar el conjunto U' de los puntos de demanda no cubiertos por estos $(m-1)$ centros locales.

Paso 2.2. Determinar el centro de F con respecto a U' .

Paso 2.3. Sea r el máximo de los rangos de estos m centros locales, los $(m-1)$ anteriores más el centro con respecto a U' .

Paso 3. El m -radio es el mejor de los valores de r correspondientes a todas las posibles elecciones de $(m-1)$ centros locales.

COMPLEJIDAD:

El algoritmo de Kariv y Hakimi tiene complejidad:

$$O(|A|^m \cdot |U|^{(2m-1)} \cdot \text{Log}|U|)$$

1.6.4.4. Algoritmo iterativo para el m-centro absoluto.

Se considera cada vértice x_i sucesivamente y se penetra a lo largo de todas las rutas posibles que parten de él hasta una distancia $\delta_i = \frac{\lambda}{v_i}$; donde λ es una constante predefinida que se llama la penetración.

Los conjuntos $Q_\lambda(x_i)$ [36] se calculan de manera similar.

Consideramos una región ϕ_λ , es decir, un conjunto de puntos y de G , tales que todos ellos pueden llegar exactamente al mismo conjunto de vértices de G dentro de las distancias δ_i para una λ dada.

Una región puede ser, por ejemplo, una sección de una arista o puede contener un solo punto.

Descripción del algoritmo.

Este algoritmo permite hallar el m-centro absoluto de un grafo $G = (X, A)$ para un m dado.

Paso 1. Poner $\lambda = 0$.

Paso 2. Incrementar λ en una cantidad pequeña $\Delta\lambda$.

- Paso 3.* Hallar los conjuntos $Q_\lambda(x_i)$ para todos los $x_i \in X$ y calcular las regiones ϕ_λ .
- Paso 4.* Formar el grafo bipartido $G' = (X' \cup X, A')$, donde X' es un conjunto de vértices, cada uno de los cuales representa una región, y A' es un conjunto de aristas, de forma que existe un arco entre una región-vértice y un vértice x_i si y sólo si x_i se puede alcanzar desde esa región.
- Paso 5.* Hallar el conjunto mínimo dominante de G' .
- Paso 6.* Si el número de regiones en el conjunto anterior es mayor que m , volver al *paso 2*; en caso contrario, parar. Las regiones en este conjunto forman entonces el m -centro absoluto del grafo original G .

El número de regiones en el conjunto mínimo dominante representa, por definición, el número más pequeño de puntos de G a partir de los cuales todos sus vértices se alcanzan dentro de una distancia de penetración λ para esa iteración.

En el proceso de obtención del m -centro absoluto se deducen también los $(n-1)$, $(n-2)$, etc. centros absolutos. Por tanto, al término de cualquier iteración, las regiones en el conjunto mínimo dominante son el $(\ell-1)$ -centro absoluto, y el valor correspondiente λ a esa iteración es el " $(\ell-1)$ -radio absoluto", es decir, es el valor "crítico" de λ .

Observación 1.6.4.4.1.

El menor valor de m , de manera que cada vértice se alcance desde algún centro para una distancia crítica dada (problema inverso), se obtiene de los *pasos* 3 a 6, como el número correspondiente de regiones en el conjunto mínimo dominante y las regiones forman el m -centro buscado.

1.6.4.5. El algoritmo de relajación para el m -centro.

El algoritmo de Minieka se mejora si el m -centro está constituido por centros locales con respecto a puntos de demanda extremos (puntos muy lejanos entre sí). Es la corrección y generalización del presentado por Handler, en 1979, y se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1.6.4.5.1.

Dado un grafo $G(X,A)$ con un conjunto finito U de puntos de demanda y un conjunto F , cerrado, de puntos de factible localización, si $\mathcal{Y}^* \subset F$, $|\mathcal{Y}^*| \leq m$ y $r = S(U, \mathcal{Y}^*)$, \mathcal{Y}^* es un m -centro de F con respecto a U si y sólo si para $R \subset U$ no existe ningún r -cubrimiento estricto de R por m puntos de F .

Demostración.

☐ Sea \mathcal{Y}^* un m -centro de F con respecto a U y $r = S(U, \mathcal{Y}^*)$.

Supongamos que \mathcal{Y} es un r -cubrimiento estricto de $R=U$ por m puntos de F . Entonces $S(U, \mathcal{Y}) < r$ y $|\mathcal{Y}| = m$.

Como $S(U, \mathcal{Y}) < r = S(U, \mathcal{Y}^*)$ y $|\mathcal{Y}| = m$, \mathcal{Y} sería un r -cubrimiento estricto de U por F con m puntos y esto es imposible por el teorema 1.6.4.2.1.

◀ Supongamos que $r = S(U, \mathcal{Y}^*)$ e \mathcal{Y}^* no es un m -centro de F con respecto a U y sea \mathcal{Y} un m -centro de F con respecto a U . Entonces $S(U, \mathcal{Y}) < S(U, \mathcal{Y}^*)$.

Si $R \subset U$, $S(R, \mathcal{Y}) \leq S(U, \mathcal{Y}) < S(U, \mathcal{Y}^*) = r$. Por tanto \mathcal{Y} es un r -cubrimiento estricto de U por F con cardinal m , en contra de la hipótesis.

■

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se considera cualquier conjunto R relajado de U y \mathcal{X}^* cualquier subconjunto de F de cardinal m .

Paso 2. Sea \mathcal{X} un $S(U; \mathcal{X}^*)$ -cubrimiento estricto de R por F .

Paso 3. Si $|\mathcal{X}| > m$ entonces \mathcal{X}^* es un m -centro. Parar.

Paso 4. Si $S(U; \mathcal{X}) < S(U; \mathcal{X}^*)$ entonces hacer $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}$ y volver al *paso 2*. En caso contrario añadir a R un nuevo punto de demanda y volver al *paso 2*.

COMPLEJIDAD:

Si M es el número de centros locales relativo a R , la complejidad es:

$$O\left(\max \left\{ |A| \cdot \text{Log}|X|, |U| \cdot M^m, |U|^2 \right\} \cdot M\right).$$

1.6.4.6. Algoritmo de relajación mejorado.

Se mejora el algoritmo de relajación por varias heurísticas:

H.1.- Comenzar R con un único punto de demanda, preferiblemente un punto extremo, por ejemplo el más alejado de un punto de localización factible cualquiera.

H.2.- Si el número de centros buscado es pequeño, calcular los m -centros para $m = 1, 2, \dots$ usando el $(m-1)$ -centro como conjunto X^m inicial para el m -centro.

H.3.- Si la separación con respecto a U es mayor que la relativa a R , introducir en R uno de los puntos que la ocasionan, por ejemplo, un punto $u \in U - R$ tal que:

$$d(x,u) \cdot p(u) = S(U,X).$$

H.4.- Como sólo interesa la existencia de algún r -cubrimiento estricto con menor separación que X^m , basta encontrar un recubrimiento con m puntos como máximo en el problema asociado y tomar como X el correspondiente conjunto. Se consigue así un menor decrecimiento de la separación pero una mayor rapidez en la resolución del recubrimiento.

1.6.4.7. Algoritmo de Moreno.

Este algoritmo se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1.6.4.7.1.

Para cualquier $r < r(1)$ (el 1-radio), el conjunto P de los puntos del grafo $G(X,A)$ con vértices ponderados que se encuentran a distancia r de algún vértice, es dominante para el r -cobrimiento estandar.

Demostración.

Ver Moreno /75/.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Dado el número m de centros a establecer, determinar el conjunto C de centros locales del grafo $G(X,A)$. Introducir todos los rangos distintos en un árbol binario balanceado. (Ver Moreno /75/). Comenzar con la raíz.

Nodo = rango de la raíz.

Paso 2. Tomar el valor r del Nodo y determinar el conjunto P de los puntos de G a distancia ponderada r de algun vértice de X .

Paso 3. Averiguar si existe algún conjunto X de m elementos de P que cubran X dentro de un radio r .

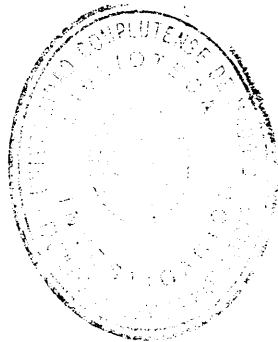
Paso 4. Si existe X , almacenarlo . pasar al hijo izquierdo y asignar a Nodo el rango de éste. En caso contrario pasar al derecho y asignar a Nodo el rango del hijo derecho.

Paso 5. Si $\text{Nodo} = 0$, X es un m -centro, en caso contrario volver al *paso 2*.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|A|^m \cdot |X|^{(m+1)} \cdot \text{Log } |X|).$$



1.6.5. Algoritmos de m-centro de F con respecto a U
con centros preestablecidos.

Este problema lo inicio Minieka en 1980, estudiando la localización de sólo un nuevo punto con distintos criterios.

El problema del m-centro de F con respecto a U dado F se resuelve con $r(P;m)$ y el m-centro de $U(r(P;m))$.

Para obtener este valor se aplican las heurísticas:

H.1. Creciente. (Halpern y Maimon (1982)).

A partir de un valor suficientemente pequeño, aumentarlo hasta encontrar el primero que verifique la condición requerida.

H.2. Decreciente. (Halpern y Maimon (1982)).

A partir de un valor suficientemente grande, disminuirlo hasta encontrar el primero que verifique la condición requerida.

H.3. Fibonacci. (Hansen, Thisse y Peeters (1981)).

A partir de dos valores, suficientemente pequeño y grande, efectuar una aproximación en m utilizando la "sección aurea" consistente en seguir los números de Fibonacci entre dichos valores hasta conseguir el requerido.

H. 4. Arbol. (Moreno (1986)).

Introducir los posibles valores del m-radio $r(m)$ en un árbol binario balanceado y realizar una búsqueda de los valores consecutivos que verifican la condición requerida.

Conocidos todos los $O(|A| \cdot |U|^2)$ centros locales e introduciendo los rangos menores que $S(U, P)$ en un árbol binario balanceado se resuelven un número de problemas de m-centro del orden de la profundidad del árbol.

Se resuelve el problema del m-centro por el algoritmo de Kariv y Hakimi con $O(|A|^m \cdot |U|^{(2m-1)} \cdot \text{Log}|U|)$ para cada uno de ellos. La complejidad total es:

$$O(|A|^m \cdot |U|^{(2m-1)} \cdot \text{Log}|A| \cdot (\text{Log}|U|)^2).$$

También se puede aplicar un algoritmo como el de Minieka:

Paso 1. Sea X un subconjunto cualquiera de F con cardinal menor o igual a m y $r = S(U, P \cup X)$.

Paso 2. Repetir, mientras $S(R, X) < r$, la operación:

Construir $U' = \{ u \in U / d(P, u) \cdot p(u) \geq r \}$,

obtener un m-centro X de F con respecto a U' y

rebajar r haciendo $r = S(U, P \cup X)$.

El conjunto X obtenido es la solución del problema del m-centro de F con respecto a U con centros preestablecidos.

CAPITULO 2. LOCALIZACION EN ARBOLES Y REDES.



CAPITULO 2. LOCALIZACION EN ARBOLES Y REDES

2.1. Introducción.

Este capítulo trata de la localización de centros en árboles y redes. un árbol es un grafo conexo, con al menos dos vértices y sin ciclos ni aristas múltiples y una red $N(X,A)$ es un grafo orientado y ponderado. El problema de la localización de un centro en una red fue resuelto en 1965 por Hakimi.

En 1979 se propone un algoritmo /53/ para hallar el m -centro en redes y se recogen problemas de localización en éstas en /44/.

En 1981 se presenta un algoritmo /65/ para hallar el k -ésimo camino más largo en un árbol.

Se publica un interesante artículo /66/ sobre complejidad en el problema del m -centro en 1983 y una revisión de los problemas de localización en redes /93/ y /94/ que incluye 117 referencias bibliográficas.

En 1985 se estudia el problema del m -centro continuo en una red, ver /45/.

La búsqueda por ordenador realizada en 1988 detectó 3850 artículos publicados entre 1973 y noviembre de 1988.

Los problemas de localización en redes tienen múltiples aplicaciones pues éstas son un modelo para

representar una red de carreteras, fluvial, terminales de aeropuertos, andenes de embarque, eléctrica, de ferrocarril, etc.

En este tipo de problemas las instalaciones se representan por puntos que se pueden localizar en los vértices o en las aristas de la red y la función objetivo a minimizar suele ser:

-Una suma de costes de transporte proporcionales a las distancias de viaje, en la red, entre los puntos de demanda y la más próxima de las nuevas instalaciones, que da lugar al problema de la m -mediana.

-El máximo de "pérdidas" proporcionales a las distancias de viaje entre los puntos de demanda y la instalación más próxima, que conduce al problema del m -centro.

-El número total de instalaciones a localizar, con lo que se obtiene el problema del r -cubrimiento.

En este capítulo se presenta el problema del m -centro en una red y se generalizan algunos modelos. Consideramos en particular los problemas de localización de centros en redes-árboles, T , es decir, en aquellas redes que contienen un único camino más corto entre dos vértices cualesquiera.

2.2. Definiciones previas y nomenclatura.

Consideramos un espacio métrico completo E , con una métrica d ; X un subconjunto de E , finito, de cardinal n ; Γ una correspondencia de X en X y A el conjunto de los pares relacionados por la correspondencia Γ . A cada $x_i \in X$ se le asocia un peso v_i .

Definición 2.2.1.

Una red $N(X,A)$ es un grafo dirigido u orientado y ponderado.

Definición 2.2.2.

Un árbol $T(X,A)$ es un grafo conexo que tiene al menos dos vértices y no tiene ciclos, o circuitos cerrados, ni aristas múltiples.

Un grafo es conexo si dados dos vértices cualesquiera del grafo existe al menos un camino que los une.

Teorema 2.2.1.

Si $T(X,A)$ es un grafo siendo $|X| = n \geq 2$ las siguientes propiedades equivalentes caracterizan un árbol:

1. T es conexo y no tiene ciclos.
2. T no tiene ciclos y posee $(n-1)$ aristas.
3. T tiene $(n-1)$ aristas y es conexo.
4. T no tiene ciclos y añadiendo una arista se crea un ciclo y sólo uno.
5. T es conexo y si se suprime una arista deja de ser conexo.
6. Cualquier par de vértices de T están unidos por un único camino.

Demostración.

Es sencilla. Puede verse en /8/.

Definición 2.2.3.

Un vértice x de una red $N(X,A)$ se dice que es terminal si existe una sola arista en A con el vértice x como extremo. Esta arista se llama una arista terminal.

Proposición 2.2.1.

Todo árbol no trivial tiene necesariamente dos vértices terminales y al menos una arista terminal.

Demostración.

Es consecuencia inmediata de la definición de árbol.

■

A cada arista de la red $N(X,A)$ se le asocia una longitud positiva, la distancia entre sus vértices.

Definición 2.2.4.

La distancia entre dos vértices x_i y x_j de N es la longitud de algún camino más corto que une x_i con x_j .

Como consecuencia del teorema 2.2.1. podemos afirmar que un árbol, T , es un grafo que contiene un único camino entre dos vértices cualesquiera.

Definición 2.2.5.

Una red-árbol es una red que es fuertemente conexa y sin ciclos ni aristas múltiples.

Observación 2.2.1.

En el caso de una red-árbol $T(X,A)$ la distancia entre dos vértices es la longitud del único camino que los une.

Si x es un punto de la red $N(X,A)$, interior a la arista $[x_i, x_j]$, se considera N' la red que se obtiene añadiendo el punto x al conjunto X de vértices de N y reemplazando la arista $[x_i, x_j]$ por las subaristas $[x_i, x]$ y $[x, x_j]$.

Si y es un punto de la red $N'(X \cup \{x\}, A')$, interior a la arista $[x_i', x_j']$, se considera la red N'' que se obtiene añadiendo el punto y al conjunto $X \cup \{x\}$ y reemplazando la arista $[x_i', x_j']$ por las subaristas $[x_i', y]$ e $[y, x_j']$.

Definición 2.2.6.

La distancia entre dos puntos x e y de la red N es la longitud de algún camino más corto que une x e y en la red N' .

Definición 2.2.7.

Un vector localización es un elemento

$$Y = (y_1, \dots, y_n)$$

del producto cartesiano $N^m = N \times N \times \dots \times N$.

Definición 2.2.8.

La distancia de un vértice a un conjunto Y de puntos de la red N es:

$$d(x_i, Y) = \min_{y \in Y} d(x_i, y)$$

[41]

Observación 2.2.2.

La distancia de x_i a Y se puede interpretar como el tiempo necesario para viajar de x_i al punto más próximo de Y .

Definición 2.2.9.

Dados $Y, Z \subset N^m$, la distancia

$$d_m(Y, Z) = \sum_{i=1}^m d(y_i, z_i).$$

[42]

La distancia [42] da estructura de espacio métrico a N^m .

Definición 2.2.10.

Dados $Y, Z \subset N$, la distancia de Y a Z es:

$$d(Y, Z) = \min \{d(y, z), y \in Y, z \in Z\}$$

[43]

Francis, McGinnis y White /37/ destacan las siguientes propiedades de las distancias en redes:

Lema 2.2.1.

Dada una red $N = (X, A)$, una arista $[x_r, x_s]$ cualquiera de A y uno de los vértices $x_i \in X$, la función $d(x, x_i)$ es:

- i) Continua en $[x_r, x_s]$.
- ii) Al variar x de x_r a x_s en la arista $[x_r, x_s]$ o bien es:
 - a) linealmente creciente, o
 - b) linealmente decreciente, o

c) primero es linealmente creciente y luego linealmente decreciente.

iii) Es convexa, es decir, dados dos puntos del grafo de la función $d(x, x_i)$ el segmento que los une está contenido en el grafo de dicha función.

Lema 2.2.2.

La función $f_1(x) = d(x, a)$ es convexa en la red N , cualquiera que sea $a \in N$ si y sólo si N es una red-árbol.

Lema 2.2.3.

La función $f_2(x, y) = d(x, y)$ es convexa en N^2 si y sólo si N es una red-árbol.

Lema 2.2.4.

La suma de funciones convexas en $S \subset T^m$ es una función convexa en S .

El máximo de funciones convexas en S es una función convexa en S .

Si f es cualquier función convexa en $S \subset T^m$ y g es cualquier función convexa y no decreciente en el espacio euclídeo de dimensión uno, entonces la función $g \circ f$ es convexa en S .

Como consecuencia de los lemas anteriores, dados dos números λ y μ no negativos, la función $\lambda d(x, a)$ es convexa en T^1 y la función $\mu d(x, y)$ es convexa en T^2 .

Los problemas del m-centro y la m-mediana son problemas de minimización convexa en el caso en que la red es una red-árbol y si la red no es una red-árbol pueden no ser convexos.

A continuación presentamos los modelos que vamos a utilizar:

Modelo 2.2.1 $N(X,A)$

$N(X,A)$ es una red, es decir, un grafo dirigido y ponderado cuyos conjuntos de vértices y de aristas son:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Modelo 2.2.2 (N,P)

El modelo (N,P) representa una red $N(X,A)$ con un conjunto finito P de puntos de servicio preestablecidos.

Modelo 2.2.3 $T(X,A)$

Indicamos por $T(X,A)$ una red-árbol, es decir, una red fuertemente conexa, sin ciclos ni aristas múltiples.

2.3. El problema del m-centro en una red.

Consideramos $N = (X,A)$ un grafo dirigido u orientado y ponderado. Suponemos que al menos una de las aristas une dos vértices cualesquiera distintos y que A no contiene ciclos o circuitos cerrados ni aristas múltiples.

Se formula el problema del m -centro en una red $N(X,A)$ con los siguientes supuestos:

- A.1. Las instalaciones que se van a localizar se supone que tienen área cero y se representan por puntos.
- A.2. El coste del viaje, o el tiempo necesario para viajar, desde x_i a una instalación es directamente proporcional a la distancia en la red, con constantes de proporcionalidad v_i que son independientes de los valores de las distancias.
- A.3. Las distancias en la red son las longitudes de los caminos más cortos.
- A.4. Si se va a instalar más de un centro, entonces todos ellos son homogéneos y se viaja al, o desde el, centro más próximo.
- A.5. A cada arista se le asocia una longitud positiva, la distancia entre sus vértices, y toda arista es rectificable, es decir, existe una aplicación biyectiva de cada una en el segmento $[0,1]$.

Así, para cada punto x de cualquier arista, por ejemplo la a_{ij} de longitud l_{ij} , que une x_i con x_j , existe un único número $\lambda(x) \in [0,1]$ tal que $\lambda(x) \cdot l_{ij}$ y $[1-\lambda(x)] \cdot l_{ij}$ son las longitudes a lo largo de la arista entre x_i y x_j respectivamente.

Problema 2.3.1. El problema del m -centro restringido a los vértices.

El problema consiste en:

Determinar

$$X_m = (c_1, c_2, \dots, c_m) \subset X, \quad m < n$$

que minimice

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i(d(x_i, X_m))\} = F(X_m).$$

[44]

Siendo f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, funciones de las distancias de cada vértice de la red al conjunto

$$X_m = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Las funciones $f_i(d(x_i, X_m))$ se pueden interpretar como el tiempo necesario para viajar desde x_i al centro más próximo. En ese caso $F(X_m)$, $|X_m| = m$, representa el tiempo máximo necesario para llegar desde x_i al centro más próximo de X_m . El correspondiente problema del m -centro determina el conjunto $X^* \subset X$, $|X^*| = m$, que hace mínimo el tiempo máximo necesario para llegar desde x_i al centro más próximo de X^* .

La expresión general de las funciones $f_i(d(x_i, X_m))$ es:

$$f_i(d(x_i, X_m)) = v_i d(x_i, X_m) + h_i$$

[45]

siendo v_i , números positivos que representan pesos y h_i constantes que representan costes fijos.

Observación 2.3.1.

En la interpretación anterior h_i podría ser el tiempo de preparación del viaje en x_i .

Así la expresión general de $F(X_m)$ es:

$$F(X_m) = \max_{1 \leq i \leq n} (v_i d(x_i, X_m) + h_i)$$

[46]

Observación 2.3.2.

El problema tiene interés en el caso de una red de transporte aéreo en la que los vértices son aeropuertos. Se localizan m vértices del grafo (instalaciones) de tal forma que minimicen la distancia máxima entre un punto de demanda y su instalación más próxima.

Definición 2.3.1.

La separación del conjunto X_m es:

$$S(X_m) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ f_i(d(x_i, X_m)) \}$$

[47]

siendo $d(x_i, X_m)$ la distancia definida en [41].

Definición 2.3.2.

El m -centro restringido a los vértices de N es el conjunto X_m^* tal que

$$S(X_m^*) = \min_{X_m \subset X} \{ S(X_m) \}$$

[48]

Definición 2.3.3.

Se llama m-radio de N , r_m , al valor de la función F en el m -centro, es decir, si x_m^* es un m -centro,

$$r_m = F(x_m^*).$$

[49]

Observación 2.3.3.

Si $m = n$ entonces $x_m = X$ y $r_m = 0$.

2.3.1. Los centros locales.

Al considerar como posibles puntos de localización de los centros los puntos de las aristas se obtienen los centros locales.

Si c es un 1-centro con respecto a un conjunto de demanda U y $r_1 = \max_{u \in U} d(u, c)$, entonces hay al menos un punto de U a la distancia r_1 de c y no hay ninguna dirección desde c en la que todas estas distancias sean decrecientes.

Definición 2.3.1.1. (Moreno)

Las direcciones desde c en las que la distancia $d(u, \cdot)$ es decreciente en c están determinadas por el conjunto λ_{c, x_i} de vértices x_i tales que la arista (o subarista) $[c, x_i]$ pertenece al camino más corto desde c a x_i .

$$\lambda_{c, x_i} = \emptyset \text{ si y sólo si } c = x_i.$$

Definición 2.3.1.2.

Un punto x de la red-árbol $T(X, A)$ es un centro local de rango r_x con respecto a un conjunto U , no vacío, de puntos de demanda si y sólo si:

1. $d(x, u) = r_x, \forall u \in U.$
2. $\bigcap_{u \in U} A_{x, u} = \emptyset.$

Según el teorema 1.3.1.1.:

Para cualquier conjunto de puntos de demanda U el problema del 1-centro tiene una solución y esta solución es un centro local con respecto a un subconjunto de U de rango igual al 1-radio.

Problema 2.3.2. El problema del m-centro absoluto de $N(X, A)$.

Si no se exige que los centros sean vértices obtenemos el problema del m-centro absoluto de la red N que podríamos formular del siguiente modo:

Determinar

$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset N$$

que minimice

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ f_i(d(x_i, \mathcal{Y})) \right\} = F(\mathcal{Y})$$

[50]

La expresión general de $F(\mathcal{Y})$ es:

$$F(\mathcal{Y}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{v_i d(x_i, \mathcal{Y}) + h_i\}$$

[51]

Definición 2.3.4.

Se llama m-radio absoluto de N , r_m , al valor de la función F en el m-centro absoluto \mathcal{Y}_m^* .

$$\begin{aligned} r_m = F(\mathcal{Y}_m^*) &= \min_{\mathcal{Y} \subset N} [F(\mathcal{Y})] = \\ &= \min_{\mathcal{Y} \subset N} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \{f_i(d(x_i, \mathcal{Y}))\} \right] \end{aligned}$$

[52]

Problema 2.3.3. El problema del m-centro continuo de (N, A) .

Si los puntos de demanda de servicio pueden ser tanto los vértices como todos los puntos de las aristas de la red, el problema se denomina del m-centro continuo y lo podemos formular del siguiente modo:

Determinar

$$\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} \subset N$$

que minimice

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \max_{x \in N} \{f(d(x, \mathcal{Y}))\} = F(\mathcal{Y}).$$

[53]

Observación 2.3.4.

Una aplicación de este problema sería la localización de m ambulancias en una red de carreteras, ya que la demanda puede ocurrir en cualquier punto de la red.

**Problema 2.3.4. El problema del m-centro restringido a los
vértices con centros preestablecidos.**

Consideramos el modelo (N,P), siendo $N(X,A)$, con $|X| = n$ y $P \subset X$ tal que $|P| = m_1$. Se trata de localizar m vértices que incluyan los m_1 dados en P y que formen un m -centro.

El problema consiste en:

Determinar

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = P \cup X_1$$

siendo P el conjunto formado por los m_1 vértices dados y X_1 un conjunto de $m_2 = m - m_1$ vértices que minimice

$$F(X) = \max_{x_i \in X} \{v_i d(x_i, P \cup X_1)\}$$

[54]

Problema 2.3.5. El problema del m-centro absoluto con centros preestablecidos.

Consideramos el modelo (N,P), siendo $N(X,A)$, con $|X| = n$, y $|P| = m_1$. Se trata de localizar m centros en N de modo que incluyan los m_1 puntos dados en P .

Se puede formular así:

Determinar

$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} = P \cup Y_1$$

siendo P el conjunto formado por los m_1 puntos dados
 e Y_1 un conjunto de $m_2 = m - m_1$ puntos de N ,
 que minimice

$$F(\mathcal{Y}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{v_i d(x_i, P \cup Y_1)\} \quad [55]$$

**Problema 2.3.6. El problema de localizar m-instalaciones
 minimax con comunicaciones mutuas.**

Se considera una red $N(X, A)$, con $|X| = n$,
 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset N$ y dos conjuntos no vacíos I_m e I_c ,
 siendo:

$$I_c \subset \{(i, j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

$$I_m \subset \{(j, k), 1 \leq j < k \leq m\}$$

[56]

se define la función

$$F(Y) = \max \left[\max_{(i, j) \in I_c} \{v_{ij} d(y_i, x_j)\}, \max_{(j, k) \in I_m} \{w_{jk} d(y_j, y_k)\} \right] \quad [57]$$

donde v_{ij} y w_{jk} son pesos positivos.

El problema consiste en:

Determinar

$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset N$$

que minimice

$$F(\mathcal{Y}) = \max \left[\max_{(i,j) \in I_c} \{v_{ij} d(y_i, x_j)\}, \max_{(j,k) \in I_n} \{w_{jk} d(y_j, y_k)\} \right]$$

[58]

Observación 2.3.5.

Se presentan problemas de este tipo si se quieren localizar nuevas instalaciones que realizan una labor de apoyo a instalaciones en servicio o bien a otras de nueva creación.

Problema 2.3.7. El problema de localizar m centros con distancias restringidas.

En una red $N(X,A)$ con $|X| = n$, se consideran los conjuntos no vacíos I_n e I_c definidos en [56] y unos números positivos c_{ij} y b_{jk} .

El problema estriba en:

Determinar

$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset N$$

que satisfaga:

$$d(y_i, x_j) \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in I_c$$

$$d(y_j, y_k) \leq b_{jk}, \quad \forall (j,k) \in I_n$$

[59]

Si existe al menos un conjunto \mathcal{Y} que satisfaga las restricciones anteriores se dice que las distancias restringidas son compatibles.

**Problema 2.3.8. El problema de multiinstalación minimax
t-objetivo.**

Sean $N(X,A)$ una red y los conjuntos I_B e I_C definidos en [56].

Se considera para cada r , $1 \leq r \leq t$, un subconjunto no vacío I^r del conjunto $I_C \cup I_B$, y los números positivos v_{ij}^r y w_{jk}^r que representan pesos. Se define para cada $Y \subset N$, $|Y| = m$, el r -ésimo objetivo:

$$f_r(Y) = \max \left[\max_{(i,j) \in I^r \cap I_C} \{v_{ij}^r d(y_i, x_j)\}, \max_{(j,k) \in I^r \cap I_B} \{w_{jk}^r d(y_j, y_k)\} \right] \quad [60]$$

Si alguno de los conjuntos $I^r \cap I_C$ e $I^r \cap I_B$ fuera vacío se define el máximo correspondiente igual a cero.

Los conjuntos I^r para cada r , $1 \leq r \leq t$ no son necesariamente disjuntos e incluso si existen p, q , $1 \leq p < q \leq t$ tales que $(i,j) \in I^p \cap I^q \cap I_C$ (o bien $(j,k) \in I^p \cap I^q \cap I_B$) puede ser $v_{ij}^p \neq v_{ij}^q$ (o bien $w_{jk}^p \neq w_{jk}^q$).

El problema de multiinstalación minimax t-objetivo se enuncia así:

$$\begin{aligned} &\text{Determinar} \\ &Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset N \\ &\text{que minimice} \\ &F(Y) = (f_1(Y), f_2(Y), \dots, f_t(Y)). \end{aligned}$$

[61]

2.4. El problema del r-cubrimiento.

En lugar de localizar m centros de tal forma que minimicen la distancia máxima para unos puntos de demanda dados, se resuelve el problema inverso:

Determinar cuál es el menor número m de instalaciones tales que el m -radio de N sea menor o igual a un valor dado r .

El problema del r -cubrimiento (o r -dominación) en una red general se expresa así:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } |\mathcal{Y}|, \mathcal{Y} \subset N, \\ & \text{sujeto a} \\ & \max_{1 \leq i \leq n} v_i d(x_i, \mathcal{Y}) \leq r. \end{aligned}$$

[62]

Si los vértices de N representan puntos de demanda y también son los puntos de posible localización para una instalación, una solución factible representa un conjunto de vértices, \mathcal{Y} , tal que cada punto de demanda (vértice) está a distancia menor o igual a r de alguna instalación de \mathcal{Y} . Una solución óptima es uno de estos conjuntos que además tiene el mínimo cardinal.

Definición 2.4.1.

El número de r -dominación es el menor entero positivo m tal que el m -radio absoluto de N es menor o igual que r , es decir, si \mathcal{Y}^* es un r -cubrimiento, el número de dominación es $m(r) = |\mathcal{Y}^*|$.

Observación 2.4.1.

Aplicaciones de problemas de r -cobrimiento son la localización de sucursales bancarias, de restaurantes del mismo propietario, etc.

Observación 2.4.2.

Podemos considerar r como un parámetro y tendremos así para cada valor de r un problema diferente de r -cobrimiento.

Relación entre el problema del m -centro y el del r -cobrimiento.

Designamos por $q(r)$ el valor mínimo de la función objetivo para los problemas de r -cobrimiento.

Lema 2.4.1.

Existe un m -centro \mathcal{Y} y un valor de r tal que

$$\begin{aligned} \forall_i d(x_i, \mathcal{Y}) \leq r, \quad i=1,2,\dots,n \\ \text{y } |\mathcal{Y}| = m. \end{aligned}$$

si y sólo si $q(r) \leq m$.

El mínimo valor de r para el que $q(r) \leq m$ es r_m , el m -radio.

Así se puede resolver el problema del m -centro a partir de las soluciones de una sucesión de problemas de r -cobrimiento con r decreciente. Una vez que se conoce r_m se puede resolver el problema del r_m -cobrimiento para obtener el m -centro absoluto.

Definición 2.4.2.

Si m es el número de dominación de radio r , entonces todo m -centro absoluto de N es un conjunto dominante de radio r .

Definición 2.4.3.

Conjunto dominante es un conjunto dominante de radio 1 para una red cuyas aristas tienen longitud 1 y cuyos vértices tienen peso 1. Su cardinal es el número de dominación de la red N .

Observación 2.4.3.

Si se conoce un procedimiento para hallar el m -centro, entonces realizando una búsqueda binaria sobre los posibles valores del número de dominación de radio r : $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$, se puede hallar un r -cubrimiento.

Observación 2.4.4.

Si se conocen m , el número de dominación de radio r , y un conjunto dominante de radio r tenemos un m -centro absoluto de N .

Por el teorema 1.5.1., se sabe que:

Para cualquier valor $r > 0$, hay un r -cubrimiento X^* formado por centros locales tales que para cualquier punto de demanda u existe un $x \in X^*$ tal que

$$d(x,u) \leq r_x$$

$$\text{y } \max \{d(u, X^*), u \in U\} = \max \{r_x, x \in X^*\} < r.$$

Y como consecuencia del teorema 1.5.3., el problema del m -centro se resuelve mediante un conjunto de problemas de r -cubrimiento. El valor inicial de r puede ser cualquier cota superior de r_m , el m -radio. Se cubre el conjunto de puntos de demanda con el mínimo número de centros locales de rango menor que r , en el que cada centro local x cubre el conjunto de puntos de demanda dentro de su rango, que es la distancia r_x . Se va disminuyendo el valor de r tomando como valor en cada paso el máximo rango de los centros locales en la solución del problema de r -cubrimiento del paso anterior, mientras que el número de centros locales sea mayor que m . El último valor de r es el m -radio r_m y el correspondiente r -cubrimiento es un m -centro.

2.5. Algoritmos para la resolución del problema del m-centro.

2.5.1. Algoritmos de centros locales en una red con vértices ponderados.

2.5.1.1. El método de Hakimi (1965).

Este algoritmo determina el centro local en una arista de la red $N(X,A)$ con vértices ponderados.

Se parte de una lista de los vértices de la red ordenados en orden no decreciente de los pesos.

El esquema del algoritmo es el siguiente:

Paso 1. Se inicializa $i = 0$ y se elige una arista $a = (x_r, x_s)$ de la red. L es la lista ordenada $\langle 0, \ell(a) \rangle$, $d_\alpha(0) = 0$, $d_\alpha(\ell(a)) = 0$.

Paso 2. Si $i = n$ entonces ir al *paso 1*.

En caso contrario se asigna a i el valor $i+1$.

Paso 3. Se calcula para cada vértice x_i su distancia ponderada a un punto arbitrario $x(a)$ de $a = (x_r, x_s)$. Llamando t a la distancia de $x(a)$ a x_r a lo largo de la arista a , la distancia ponderada de x_i al punto $x(a)$ es:

$$d_\alpha(x_i, t) = v_i \cdot \min \{ t + d(x_r, x_i), (\ell(a) - t) + d(x_i, x_s) \} \quad [63]$$

La representación gráfica de $d_\alpha(x_i, t)$ cuando $0 \leq t \leq \ell(a)$ es un segmento o dos segmentos de línea recta cuyas pendientes son $\pm v_i$. En el caso en que consta

de dos segmentos. en el punto en que estos se unen la función $d_\alpha(x_i, \dots)$ alcanza su máximo.

Paso 4. Hallar el punto \hat{t} tal que

$$d_\alpha(x_i, \hat{t}) = \max_{0 \leq t \leq \ell(a)} \{d_\alpha(x_i, t)\} \quad [64]$$

Teniendo en cuenta que $d_\alpha(x_i, \dots)$ es lineal a trozos y continua en cada arista, este máximo para cada arista se alcanza en \hat{t} , que será 0, $\ell(a)$ o el punto en el que se unen los dos segmentos, en el que la función no es derivable.

Paso 5. Hallar el punto $t^- \in L = \langle 0, \ell(a) \rangle$ tal que

$$t^- = \max \{t_j \in L / t_j \leq \hat{t}\} \quad [65]$$

y hallar el punto $t^+ \in L = \langle 0, \ell(a) \rangle$ tal que

$$t^+ = \min \{t_j \in L / t_j \geq \hat{t}\}$$

Se calcula

$$d_\alpha(\hat{t}) = d_\alpha(t_{j-1}) + \frac{d_\alpha(t_j) - d_\alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} (\hat{t} - t_{j-1}) \quad [66]$$

Si $d_\alpha(\hat{t}) \geq d_\alpha(x_i, \hat{t})$ volver al *paso 2*.

Paso 6. Si $t^- = \hat{t} = t^+$ entonces asignar a $d_\alpha(\hat{t})$ el valor $d_\alpha(x_i, \hat{t})$ e ir al *paso 7*.

En caso contrario ($t^- < \hat{t} < t^+$) insertar \hat{t} en la lista L , asignar $d_\alpha(\hat{t})$ el valor $d_\alpha(x_i, \hat{t})$, a t^- el valor \hat{t} y a t^+ el valor \hat{t}

Paso 7. Si $t^- = 0$ entonces ir al *paso 8*. En caso contrario se llama s^- al valor t^- . Hallar

$$\max \{t_j \in L / t_j < s^-\}$$

y asignar a t^- este valor.

Si $d_\alpha(t^-) < d_\alpha(x_i, t^-)$ entonces borrar t^- de la lista L y repetir el *paso 7*.

Si $d_\alpha(t^-) = d_\alpha(x_i, t^-)$ entonces ir al *paso 9*

Si $d_\alpha(t^-) > d_\alpha(x_i, t^-)$ entonces hallar el punto t_0 del intervalo (t^-, s^-) en el que se cortan $d_\alpha(\cdot)$ y $d_\alpha(x_i, \cdot)$. Insertar el punto t_0 en la lista L . asignar el valor $d_\alpha(x_i, t_0)$ el valor $d_\alpha(t_0)$ e ir al *paso 9*.

Paso 8. Si $t^- = 0$ entonces ir al *paso 9*.

En caso contrario insertar el punto $t=0$ en la lista L y asignar a $d_\alpha(0)$ el valor $d_\alpha(x_i, 0)$.

Paso 9. Si $t^+ = l(a)$ entonces ir al *paso 10*.

En caso contrario se llama s^+ al valor t^+ .

Hallar el

$$\min \{t_j \in L / t_j > s^+\}$$

y asignar a t^+ este valor.

Si $d_\alpha(t^+) < d_\alpha(x_i, t^+)$ entonces borrar t^+ de L y repetir el *paso 9*.

Si $d_\alpha(t^+) = d_\alpha(x_i, t^+)$ entonces volver al *paso 2*.

Si $d_\alpha(t^+) > d_\alpha(x_i, t^+)$ entonces se calcula el punto t_0 en el intervalo (s^+, t^+) en el que se cortan $d_\alpha(\cdot)$ y

$d_{\alpha}(x_i, \cdot)$. Insertar el punto t_0 en la lista L. asignar a $d_{\alpha}(t_0)$ el valor $d_{\alpha}(x_i, t_0)$ y volver al *paso 2*.

Paso 10. Si $t = \ell(a)$ entonces volver al *paso 2*.

En caso contrario insertar el punto $t = \ell(a)$ en la lista L. asignar a $d_{\alpha}(\ell(a))$ el valor $d_{\alpha}(x_i, \ell(a))$ y volver al *paso 2*.

Paso 11. Hallar en la lista L un punto t^* para el que $d_{\alpha}(\cdot)$ es el mínimo. Cada uno de estos puntos es un centro local en la arista a y el valor $d_{\alpha}(t^*)$ es el radio local correspondiente.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X| \cdot \log|X|).$$

2.5.1.2. Algoritmo de Kariv y Hakimi (1979).

Este algoritmo determina el centro local en una red de vértices con pesos unitarios.

Se elige una arista $a = (x_r, x_s)$ de la red. Se supone conocida la matriz de distancias de la red. Para cada vértice x_i de ésta se dispone de una lista $L(x_i)$ en la que están ordenados todos los vértices de la red en orden no creciente de sus distancias a x_i , por tanto x_i será el último de $L(x_i)$.

En el algoritmo t^* y r representan el centro local y el radio local, respectivamente, en la arista $a = (x_r, x_s)$.

Descripción del algoritmo.

- Paso 1.** Sea x^* el primer vértice de la lista $L(x_r)$ y \hat{x} el primer vértice de $L(x_m)$.
 Si $d_\alpha(x^*, 0) \leq d_\alpha(\hat{x}, \ell(a))$ entonces asignar a t^* el valor 0 y a r el valor $d_\alpha(x^*, 0)$.
 En caso contrario asignar a t^* el valor $\ell(a)$ y a r el valor $d_\alpha(\hat{x}, \ell(a))$.
 Si $x^* = \hat{x}$ entonces parar.
 [$\forall x \in X$ y $\forall t \in [0, \ell(a)]$ $d_\alpha(x, t) \leq d_\alpha(x^*, t)$ y así $d_\alpha(x^*, \cdot) = d_\alpha(\cdot, \cdot)$, t^* y r son el centro local y el radio local de a , respectivamente].
- Paso 2.** Dar a i el valor 1 y llamando x_m al vértice de mínimo índice tal que $d_\alpha(x_m, \ell(a)) = \max \{d_\alpha(x_i, \ell(a))\}$ asignamos a x_m el valor x^* .
 Para cada $x_i \in X$ se define
 $X_i = \{x \in X / d_\alpha(x, 0) \leq d_\alpha(x_i, 0)\}$
- [67]
- Paso 3.** Asignar a i el valor $i+1$.
 Sea x^* el i -ésimo vértice de la lista $L(x_r)$.
 Si $d_\alpha(x^*, 0) \neq d_\alpha(x_m, 0)$ entonces ir al *paso 4*.
 En caso contrario, si $d_\alpha(x^*, \ell(a)) > d_\alpha(x_m, \ell(a))$ asignar a x_m el valor x^* . Repetir el *paso 3*.
 [$d_\alpha(x_i, 0) = d_\alpha(x_1, 0)$, $i < n$].
- Paso 4.** Se llama \bar{x}^* a x_m .
 Si $i = n$ entonces ir al *paso 8*.
 En caso contrario asignar a x_m el valor \bar{x}^* e ir al *paso 5*.

Paso 5. Asignar a i el valor $i+1$.

Sea x^* el i -ésimo vértice de la lista $L(x_r)$.

Si $d_\alpha(x^*, 0) \neq d_\alpha(x_m, 0)$ entonces ir al *paso 6*.

En caso contrario si $d_\alpha(x^*, \ell(a)) > d_\alpha(x_m, \ell(a))$ asignar a x_m el valor x^* y repetir el *paso 5*.

$$[d_\alpha(x_i, 0) = d_\alpha(x_{i-1}, 0), i < n].$$

Paso 6. Si las funciones $d_\alpha(x_m, \cdot)$ y $d_\alpha(\bar{x}, \cdot)$ no se cortan o bien coinciden a lo largo de todo un segmento entonces ir al *paso 7*.

En caso contrario se llama t_m al punto de intersección de $d_\alpha(x_m, \cdot)$ y $d_\alpha(\bar{x}, \cdot)$.

Si $d_\alpha(x_m, t_m) < r$ entonces asignar a t^* el valor t_m y a r el valor $d_\alpha(x_m, t_m)$.

Paso 7. Si $d_\alpha(x_m, \ell(a)) > d_\alpha(\bar{x}, \ell(a))$ entonces asignar a \bar{x} el valor x_m .

Si $i = n$ entonces ir al *paso 8*.

En caso contrario asignar a x_m el valor \bar{x} e ir al *paso 5*.

Paso 8. Si $d_\alpha(x^*, \cdot)$ y $d_\alpha(\bar{x}^*, \cdot)$ no se cortan o si coinciden a lo largo de todo un segmento entonces parar.

En caso contrario, sea t_m el punto de intersección de $d_\alpha(x^*, \cdot)$ y $d_\alpha(\bar{x}^*, \cdot)$.

Si $d_\alpha(x^*, t_m) \geq r$ entonces parar.

En caso contrario, asignar a t^* el valor t_m y a r el valor $d_\alpha(x^*, t_m)$ y parar.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo, supuestas

conocidas la matriz de distancias y las listas $L(x_r)$ y $L(x_s)$ es:

$$O(|X|)$$

2.5.2. Algoritmos para el centro absoluto en una red.

2.5.2.1. El método de Hakimi (1978).

Consiste en calcular el mínimo local para cada arista a de la red $N(X,A)$ y seleccionar el mejor entre los $|A|$ mínimos locales.

Descripción del algoritmo.

- Paso 1.* Ordenar los vértices de la red según un orden no decreciente de sus pesos.
- Paso 2.* Para cada arista a de la red se aplica el algoritmo 2.5.1.1. para hallar un centro local en a y el radio local correspondiente.
- Paso 3.* El mínimo de los radios locales de las aristas de la red es el 1-radio de la red. Cualquier centro local que corresponda al mínimo de los radios locales es 1-centro de la red.

COMPLEJIDAD:

La complejidad del algoritmo es:

$$O(|A| \cdot |X| \cdot \log|X|)$$

supuesta conocida la matriz de distancias del grafo.



2.5.2.2. Algoritmo de Hakimi, Schmeichel y Pierce (1978).

Este algoritmo, /93/, resuelve el problema del 1-centro en una red con vértices no ponderados con complejidad

$$O (|A| \cdot |X| \cdot \log |X|)$$

y con complejidad

$$O (|A| \cdot |X|^2 \cdot \log |X|)$$

para el caso de vértices ponderados.

2.5.2.3. Algoritmo de Kariv y Hakimi (1979).

Este algoritmo determina el 1-centro en una red en la que los pesos de los vértices v_i son todos unitarios.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Para cada $x \in X$, se construye una lista $L(x)$ de todos los vértices de la red ordenados en orden no creciente de sus distancias a x .

Paso 2. Para cada arista a de la red se aplica el algoritmo 2.5.1.2. para hallar el radio local de a y un centro local.

Paso 3. El mínimo de los radios locales de todas las aristas de la red es el 1-radio de la red. Cualquier centro local que corresponda al mínimo de los radios locales es un 1-centro de la red.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo, conocida la matriz

de distancias es:

$$O (|A| \cdot |X| + |X|^2 \cdot \log |X|).$$

2.5.3. Algoritmos para el 1-centro absoluto en una red-árbol.

2.5.3.1. Algoritmo de Goldman (1972).

Resuelve el problema de localizar el 1-centro absoluto de una red-árbol con $v_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ y con sumandos. Este algoritmo determina la arista en la que está el centro absoluto o reduce la búsqueda a uno de los dos subárboles que se obtienen eliminando todos los puntos interiores de esta arista.

La complejidad de este algoritmo es:

$$O (|X|^2)$$

2.5.3.2. El método de Handler (1973).

Resuelve el problema del centro absoluto en una red-árbol con pesos unitarios y sin sumandos.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se elige un vértice cualquiera x_i del árbol.

Paso 2. Hallar el vértice x_r más alejado de x_i .

Paso 3. Hallar el vértice x_s más alejado de x_r .

Paso 4. El punto medio del camino que une x_i con x_j es el único centro absoluto de la red-árbol.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este método es:

$$O(|X|)$$

2.5.3.3. Algoritmo de Dearing y Francis (1974).

Este algoritmo, que resuelve el problema del centro absoluto para una red-árbol con vértices ponderados y con sumandos, se basa en el siguiente resultado:

Lema 2.5.3.3.1. (Dearing y Francis).

El radio de cualquier red está acotado inferiormente por α , siendo

$$\alpha = \max_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \left\{ \frac{d(x_i, x_j) + \frac{h_i}{v_i} + \frac{h_j}{v_j}}{\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j}} \right\} \quad [68]$$

y esta cota inferior se alcanza siempre que la red sea una red-árbol.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$, se calcula b_{ij} , siendo

$$b_{ij} = \frac{v_i v_j d(x_i, x_j) + v_j h_i + v_i h_j}{v_i + v_j} \quad [69]$$

y entonces se determina el máximo valor b_{re} de b_{ij}

- Paso 2.* Se calcula h_i , máximo valor de h_i .
- Paso 3.* Se determina b , el máximo de b_{rs} y h_i .
- Paso 4.* Si $b = h_i$, se toma $x^* = x_i$ como el único centro absoluto. Parar.
- Paso 5.* En caso contrario, es decir, si $b = b_{rs}$, se toma x^* el único punto del camino que une x_r con x_s que verifica las dos igualdades siguientes:

$$d(x^*, x_r) = \frac{v_s d(x_r, x_s) + h_s - h_r}{v_r + v_s} \quad [70]$$

$$d(x^*, x_s) = \frac{v_r d(x_r, x_s) + h_r - h_s}{v_r + v_s} \quad [71]$$

COMPLEJIDAD:

El cálculo de b_{ij} requiere $O(|X|^2)$ operaciones.

Observación 2.5.2.3.1.

Si hacemos $h_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ el algoritmo resuelve el problema de hallar el centro absoluto sin sumandos.

2.5.3.4. Método de Lin (1975).

Lin ha ampliado el método de Handler para resolver el problema del 1-centro absoluto en una red-árbol $T(X, A)$ con pesos unitarios y con sumandos.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se añade un nuevo vértice adyacente a cada vértice antiguo x_i de T y una arista que le une con él de longitud igual al sumando h_i asociado al vértice antiguo. Se obtiene así una red-árbol T' con sumandos cero.

Paso 2. Se aplica el algoritmo 2.5.3.2. a la red-árbol T' .

COMPLEJIDAD:

La complejidad del método de Lin es:

$$O(|X'|)$$

siendo $|X'| = |X| + |V|$, donde $|V|$ representa el número de vértices añadidos, es decir, el número de sumandos $h_i \neq 0$.

2.5.3.5. Algoritmo de Kariv y Hakimi para el 1-centro absoluto en una red-árbol (1979).

Resuelve el problema del 1-centro absoluto de una red-árbol $T(X,A)$ con pesos distintos de la unidad y con sumandos. Reduce la búsqueda a subárboles cada vez más pequeños hasta quedar reducidos a una arista y utiliza el concepto de centroide de una red-árbol que definimos a continuación.

Definición 2.5.3.5.1.

Dado un vértice x de una red-árbol $T(X,A)$, el grafo $T-(x)$ se compone de los subárboles conexos $T_{x,1}, T_{x,2}, \dots$.

T_{x,p_x} . Se define

$$N(x) = \max_{1 \leq i \leq p_x} (|T_{x,i}|) \quad [72]$$

Definición 2.5.3.5.2.

Un centroide de una red-árbol T es un vértice x_c para el que $N(x)$ es mínimo.

$$N(x_c) = \min_{x \in X} (N(x)) \quad [73]$$

Observación 2.5.3.5.2.1.

Una red-árbol puede tener uno o dos centroides. Si tiene dos centroides, éstos están conectados por una arista.

Se designa por $T_{x,i}^+$ el subárbol que consta de $T_{x,i}$, el vértice x y la arista que conecta x con $T_{x,i}$.

Teorema 2.5.3.5.1.

Dado $x \in X$ un vértice fijo y x_r un vértice tal que

$$v_r \cdot d(x_r, x) = \max_{x_j \in X} (v_j \cdot d(x_j, x))$$

Si $T_{x,r}$ es el subárbol de $T-(x)$ al que pertenece x_r , entonces el 1-centro de T está en $T_{x,r}^+$.

Demostración.

Supongamos que el 1-centro x^* de T no pertenezca a $T_{x,r}^+$. Como $x_r \in T - (x)$

$$d(x_r, x^*) > d(x_r, x)$$

y si r_1 es el 1-radio de T entonces

$$r_1 \geq v_r \cdot d(x_r, x^*) > v_r \cdot d(x_r, x) = \max_{x_j \in X} (v_j \cdot d(x_j, x))$$

por tanto x^* no sería el 1-centro de T , porque la elección de

x nos daría una menor separación

$$v_r \cdot d(x_r, x)$$

luego $x^* \in T_{x,l}^+$.

■

Corolario 2.5.3.5.1.1.

Sean x_l y x_a dos vértices tales que $x_l \in T_{x,l}$ y $x_a \in T_{x,a}$, siendo $l \neq a$ y

$$v_l \cdot d(x_l, x) = v_a \cdot d(x_a, x) = \max_{x_j \in X} \{v_j \cdot d(x_j, x)\}$$

Entonces x es el 1-centro de T.

2.5.3.5.1. Algoritmo para hallar el centroide de una red-árbol.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se inicializa $T' = T$. Para cada vértice x de T' se define $n(x) = n - 1$, el número de vértices del subárbol $T' - (x)$.

Paso 2. Si T' consta de un solo vértice, Parar. El único vértice de T' es el centroide de la red-árbol T.

Paso 3. Se elige una hoja x de la red-árbol auxiliar T' . Si $n(x) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ entonces parar. La hoja x es un centroide de la red-árbol T.

En caso contrario, si x_l es el vértice adyacente a x en T' se asigna a $n(x_l)$ el valor $n(x_l) - (n - n(x))$. Se elimina el vértice x y la arista (x, x_l) de T' . Hacer $T' = T' - (x)$ y volver al **paso 2**.

COMPLEJIDAD:

La complejidad del algoritmo para hallar el centroide de una red-árbol es:

$$O(|X|).$$

Descripción del algoritmo de Kariv y Hakimi para hallar el 1-centro absoluto de una red-árbol.

En este algoritmo T' representa el subárbol $T'_i = T_{x_i, i} - \{x_i\}$, T'' es $T_{x_i, i}^+$ y T''' es $T_{x_i, i}$.

Paso 1. Se inicializa $T' = T$.

Paso 2. Si T' tiene una sola arista a , entonces por el algoritmo 2.5.1.1. se halla el centro local x^* de T en la arista a . Parar. x^* es el 1-centro de la red-árbol T .

Paso 3. Usando el algoritmo 2.5.3.5.1. hallar el centroide x_c de T' .

Paso 4. Se considera el vértice x_r de T tal que

$$v_r.d(x_r, x_c) = \max_{x_j \in X} \{v_j.d(x_j, x_c)\}$$

Se considera T''' la componente de $T - \{x_c\}$ que contiene x_r y T'' el subárbol que está formado por T''' , el vértice x_c y la arista que conecta x_c con T''' .

Paso 5. Si existe x_s tal que $x_s \in T''$ y

$$v_s.d(x_s, x_c) = v_r.d(x_r, x_c)$$

entonces, por el corolario 2.5.3.5.1.1., x_c es el 1-centro de T . Parar.

Paso 6. Asignar a T' la intersección $T \cap T''$ y volver al *paso 2*.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X| \cdot \log|X|)$$

2.5.3.6. Algoritmo de Kariv y Hakimi para determinar el 1-centro restringido a los vértices de una red-árbol (1979).

Para resolver el problema del 1-centro en una red-árbol restringido a los vértices se puede adaptar el algoritmo 2.5.3.5. sustituyendo el *paso 2* por el siguiente:

Paso 2': Si T' tiene una sola arista $a = (x_r, x_s)$

$$d_r = \max_{x_j \in X} \{v_j d(x_j, x_r)\}$$

$$d_s = \max_{x_j \in X} \{v_j d(x_j, x_s)\}$$

Si $d_r < d_s$, entonces x_r es el 1-centro restringido a los vértices de T .

Si $d_r > d_s$, entonces x_s es el 1-centro restringido a los vértices de T .

Si $d_r = d_s$, entonces x_r y x_s son los dos 1-centro restringido a los vértices de T .

Parar.

2.5.4. Algoritmos para hallar un conjunto dominante de radio r.

El problema de hallar un conjunto dominante de vértices de radio 1 en una red-árbol cuyas aristas tienen longitud 1 y cuyos vértices también tienen pesos 1 lo resuelven, en 1975, Cockayne, Goodman y Hedetniemi con un algoritmo de complejidad $O(|X|)$.

La generalización a un conjunto dominante de vértices de radio r, entero, en una red-árbol con vértices de peso 1 y cuyas aristas tienen longitud 1 lo resolvió, en 1976, en tiempo lineal Slater.

2.5.4.1. Algoritmo de Kariv y Hakimi para hallar un conjunto dominante absoluto de radio r (1979).

Este algoritmo, que resuelve el problema de hallar un conjunto dominante de radio r para una red-árbol con vértices ponderados, es una generalización del algoritmo de Slater.

Dada una red-árbol $T(X,A)$ con pesos v_i en cada vértice, no todos unitarios, y un número $r > 0$, se trata de hallar el menor número positivo m tal que el m-radio absoluto de T no sea mayor que r.

Este algoritmo realiza una búsqueda a través de las aristas de T, empezando por las hojas y moviéndose hacia el interior. Durante esta búsqueda se localizan los puntos del conjunto dominante deseado de forma óptima hasta que se cubre el árbol completo con m puntos dentro de un radio r. Para ello

se usa una red-árbol auxiliar T' y se define una variable $R(x_i)$ para cada vértice de T' .

Definición 2.5.4.1.1.

a) Si el vértice x_i está ya cubierto por uno de los puntos del conjunto dominante que se ha localizado en la red-árbol hasta ahora, entonces

$R(x_i)$ es la distancia no ponderada entre x_i y el punto más próximo del conjunto dominante. En este caso

$$\frac{r}{v_i} \geq R(x_i) \geq 0. \quad [74]$$

b) Si el vértice x_i no está cubierto todavía se considera el conjunto $S(x_i)$ formado por el vértice x_i y aquellos vértices que no se han eliminado todavía en T' y que están cubiertos por el mismo punto del conjunto dominante que x_i . Se define

$$-R(x_i) = \min_{x_j \in S(x_i)} \left\{ \frac{r}{v_j - d(x_j, x_i)} \right\}. \quad [75]$$

que es la máxima distancia no ponderada de x_i dentro de la cual cualquier punto de la red-árbol auxiliar T' podría cubrir todos los vértices del conjunto $S(x_i)$. En este caso

$$\frac{r}{v_i} \geq -R(x_i) > 0. \quad [76]$$

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se inicializa T' con T y $m = 0$. Para cada vértice x_i de T' se le asigna la variable

$$R(x_i) = \frac{r}{v_i}$$

Paso 2. Si no existe ninguna hoja x_r del árbol auxiliar T' tal que $R(x_r) \geq 0$ [ninguna hoja está cubierta], entonces ir al *paso 5*.

Si el árbol auxiliar T' es un vértice x_r con $R(x_r) \geq 0$ entonces parar. El árbol T está cubierto dentro del radio r por un conjunto dominante de m puntos.

En caso contrario, sea x_r una hoja de T' tal que $R(x_r) \geq 0$ y sea $a = (x_r, x_s)$ la arista incidente con x_r en T' . Eliminar x_r y a del árbol auxiliar T' .

Paso 3. Si $R(x_r) + l(a)$ es la distancia de x_s al punto del conjunto dominante que cubre x_r , puede ocurrir:

$$R(x_r) + l(a) \leq \frac{r}{v_s} \text{ entonces ir al } \textit{paso 4}.$$

o bien

$$R(x_r) + l(a) > \frac{r}{v_s} \text{ [en este caso el punto que cubre } x_r \text{ no cubre } x_s \text{] entonces volver al } \textit{paso 2}.$$

Paso 4. [$R(x_r) + l(a) \leq \frac{r}{v_s}$, es decir, el punto del conjunto dominante que cubre x_r también cubre x_s]

Si $0 \leq R(x_s) \leq R(x_r) + l(a)$ [x_s está también cubierto por un punto próximo] entonces volver al *paso 2*.

Si $0 < R(x_r) + l(a) < R(x_s)$ [el punto del conjunto dominante que cubre x_r está más próximo a x_s que el punto del conjunto dominante que ahora cubre x_s] asignar a $R(x_s)$ el valor $R(x_r) + l(a)$ y volver al paso 2.

Si $0 < R(x_r) + l(a) < -R(x_s)$ [el punto del conjunto dominante que cubre x_r cubre también al conjunto $S(x_s)$] entonces asignar a $R(x_s)$ el valor $R(x_r) + l(a)$ y volver al paso 2.

Si $0 < -R(x_s) < R(x_r) + l(a)$ [el punto del conjunto dominante que cubre x_r no cubre todos los puntos de $S(x_s)$] entonces volver al paso 2.

Paso 5. [Para cada hoja x_r de T' tal que $R(x_r) < 0$, es decir, que no está todavía cubierta]. Si el árbol auxiliar T' tiene un solo vértice x_r , entonces hacer $m = m + 1$, añadir el vértice x_r al conjunto dominante y parar.

En caso contrario, sea x_r una hoja de T' y $a = (x_r, x_s)$ la arista incidente con x_r en T' . Eliminar x_r y a del árbol auxiliar T' .

Paso 6. Si $-R(x_r) > l(a)$ entonces ir al paso 7.

Si $-R(x_r) = l(a)$ entonces ir al paso 8.

Si $-R(x_r) < l(a)$ entonces ir al paso 9.

Paso 7. [$-R(x_r) > l(a)$]: no es necesario que el punto del conjunto dominante que podría cubrir el

conjunto $S(x_r)$ se localice en la arista a]
 Si $-R(x_r) - l(a) < -R(x_s)$, entonces $[R(x_r) < 0$
 y así x_s no estaría todavía cubierto; después
 de eliminar x_r de T' , los vértices de $S(x_r)$
 se incluyen en el conjunto $S(x_s)$ y se
 actualiza el valor de $R(x_s)$] asignar a $R(x_s)$
 el valor $R(x_r) + l(a)$ y volver al paso 2.
 Si $0 < -R(x_s) \leq -R(x_r) - l(a)$ entonces [aunque
 los vértices de $S(x_r)$ están ahora incluidos
 en el conjunto $S(x_s)$, no es necesario cambiar
 el valor de $R(x_s)$] volver al paso 2.
 Si $0 < R(x_s) \leq -R(x_r) - l(a)$, entonces [x_s
 está ya cubierto, y el punto del conjunto
 dominante que cubre x_s también cubre los
 vértices de $S(x_r)$] volver al paso 2.
 Si $-R(x_r) - l(a) < R(x_s)$, entonces [el
 vértice x_s está ya cubierto; sin embargo, el
 punto del conjunto dominante que está
 cubriendo ahora x_s no puede cubrir los
 vértices del conjunto $S(x_r)$. Se trata x_s como
 si no estuviera ya cubierto y se busca un
 punto que cubra x_s y el conjunto $S(x_r)$. Así,
 el nuevo conjunto $S(x_r)$ es ahora $S(x_r) \cup \{x_s\}$
 y se vuelve a asignar el valor de $R(x_s)$]
 asignar a $R(x_s)$ el valor $R(x_r) + l(a)$ y
 volver al paso 2.

Paso 8. $[-R(x_r) = l(a)$: para cubrir el conjunto
 $S(x_r)$, se puede localizar un nuevo punto del

conjunto dominante en el vértice x_a].

Si $R(x_a) = 0$ [hay ya un punto del conjunto dominante localizado en x_a], entonces volver al paso 2.

Paso 9. [Determinar el conjunto dominante absoluto de radio r].

$\{-R(x_r) < l(a)$: para cubrir el conjunto $S(x_r)$, se puede localizar un nuevo punto del conjunto dominante en la arista a , a la distancia $-R(x_r)$ de x_r y por tanto a la distancia $l(a)+R(x_r)$ de x_a]. Asignar a m el valor $m+1$. localizar un nuevo punto del conjunto dominante en la arista $a = (x_r, x_a)$ a la distancia $-R(x_r)$ de x_r y volver al paso 3.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X|).$$

2.5.4.2. Algoritmo de Kariv y Hakimi para hallar un conjunto dominante de radio r restringido a los vértices (1979).

Para resolver el problema del conjunto dominante de radio r restringido a los vértices se puede adaptar el algoritmo 2.5.4.1. cambiando el paso 9 por el siguiente:

Paso 9': [$-R(x_r) < l(a)$: El vértice x_r no cubre el conjunto $S(x_r)$, y además habría que localizar en x_r un nuevo punto del conjunto dominante]. Asignar a m el valor $m+1$, localizar un nuevo punto del m -centro en x_r , asignar a $R(x_r)$ el valor 0 y volver al paso 3.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es también $O(|X|)$.

Observación 2.5.4.1.

El número m que se obtiene al terminar los algoritmos anteriores es el número de dominación de radio r y el conjunto de m puntos que se construye es el conjunto dominante de radio r .

2.5.5. Algoritmos para hallar m -centros en una red.

Todos los procedimientos para resolver este problema generan y resuelven una sucesión de problemas de r -cubrimiento.

Para hallar el m -centro absoluto Francis, McGinnis y White /37/ usan algunos de sus resultados sobre el problema del centro absoluto. En particular, utilizan el hecho de que hay un problema de centro absoluto cuyo valor mínimo de la

función objetivo es igual al valor mínimo de la función objetivo en el problema del m-centro. Este hecho les permite reducir la búsqueda del mínimo valor de la función objetivo a las entradas positivas de la matriz asociada $B = [b_{ij}]$, siendo

$$b_{ij} = \frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j} \quad [77]$$

que se obtiene haciendo cero los sumandos h_i en [69], correspondiente al algoritmo 2.5.3.3. que resuelve el problema del centro absoluto con sumandos.

Dada una función

$$F(Y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{v_i d(x_i, Y)\},$$

el problema del r-cubrimiento consiste en:

Minimizar

$|Y|$ de manera que

$$F(Y) \leq r, \text{ para un valor de } r \text{ dado.}$$

Si $q(r)$ es el valor mínimo de la función objetivo en el problema de r-cubrimiento, tomando r como parámetro, y r_m es el mínimo valor de la función objetivo en el problema del m-centro, r_m es el mínimo elemento r del conjunto de las entradas positivas de la matriz B para el que $q(r) \leq m$. Entonces r_m es el m-radio y cualquier Y que resuelva el problema del r_m -cubrimiento es un m-centro absoluto. Así para resolver el problema del m-centro se resuelven una sucesión de problemas de r-cubrimiento, usando una búsqueda binaria para hallar r_m en el conjunto de las entradas positivas de la matriz $[b_{ij}]$.

Para el caso en que no todos los pesos de la red $N(X,A)$ son la unidad, Kariv y Hakimi demuestran que el problema del m -centro se puede reducir a uno computacionalmente finito y dan un algoritmo para resolverlo:

2.5.5.1. Algoritmo de Kariv y Hakimi para hallar un m -centro (1979).

Este algoritmo resuelve el problema de hallar el m -centro en una red general $N(X,A)$.

Restringe la búsqueda a un conjunto de "puntos sospechosos" siguiendo a Minieka y utiliza el concepto de "rango" de los "puntos sospechosos" introducido por Handler.

Definición 2.5.5.1.1.

El rango del centro local c con respecto al par de vértices x_i y x_j es:

$$r(c) = d(x_i, c) = d(x_j, c):$$

[78]

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Hallar la localización y_i y el correspondiente rango $r^{(i)}$ de cada uno de los "puntos sospechosos", es decir, los vértices de la red y los puntos en los que las dos funciones $d_a(x_i, \cdot)$ y $d_a(x_j, \cdot)$ se cortan con pendientes de signo contrario. El número de puntos sospechosos es $O(|A| \cdot |X|^2)$.

Paso 2. Para cada conjunto posible

$$X_{m-1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$$

de $m-1$ puntos sospechosos, dar los *pasos* 3,4 y 5 y luego ir al *paso* 6. El número de estos subconjuntos es a lo sumo

$$\binom{|A| \cdot |X|^2}{m-1}$$

Paso 3. Para cada i , $1 \leq i \leq m-1$, siendo

$$r^{(i)} = \max_{x_j \in X} \{v_j d(x_j, x_i)\}$$

el rango de x_i , hallar

$$X_i = \{x_j \in X / v_j d(x_j, x_i) \leq r^{(i)}\}$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{m-1} X_i$$

Paso 4. Hallar el 1-centro ψ_m de la red N' (siendo N' la red N en la que todos los vértices de X tienen peso 0. $r^{(m)}$ es el 1-radio de N').

Paso 5. $X_m = X_{m-1} \cup \{\psi_m\}$.

Asignar $r(X_m) = \max_{1 \leq i \leq m} \{r^{(i)}\}$ y regresar al

paso 2.

Paso 6. Si X_m^* es el conjunto tal que

$$r(X_m^*) = \min_{X_m} \{r(X_m)\}$$

entonces X_m^* es un m -centro de la red y $r(X_m^*)$ es el correspondiente m -radio.

COMPLEJIDAD:

Para el caso en que los vértices no están ponderados

la complejidad de este algoritmo es:

$$O (|A|^m \cdot |X|^{2m-1} / (m-1)!)$$

y para el caso en que no todos los pesos son la unidad es de complejidad:

$$O (|A|^m \cdot |X|^{2m-1} \cdot \log |X| / (m-1)!).$$

2.5.5.1. Algoritmos para el m-centro continuo en una red.

De los problemas de localización minimax en redes el más interesante es el del m-centro continuo en una red, problema 2.3.3., en el que tanto los puntos de demanda como las instalaciones pueden ser vértices o cualquier punto de los arcos de la red.

Una forma de aproximarse a la solución de este problema es discretizar el conjunto de los puntos de demanda y resolver el problema del m-centro para el caso en que las instalaciones se pueden localizar en los vértices o en las aristas de la red, pero los puntos de demanda son un número finito.

2.5.5.1.1. Algoritmo de Minieka (1970).

Este algoritmo resuelve el problema del m-centro absoluto en una red $N(X,A)$ en la que el conjunto de puntos de demanda es X .

Minieka /73/ demuestra el siguiente resultado en el que se basa su algoritmo:

Teorema 2.5.5.1.1.1.

El conjunto finito C de todos los centros locales de N define un conjunto dominante para el problema del m -centro en una red en la que las instalaciones se pueden localizar en los vértices o en las aristas de la red y con puntos de demanda en los vértices, que permite definir

$$r_m = \min_{X_m \subseteq C} \left[\max_{x \in X} d(X_m, x) \right] \quad [79]$$

Se considera $D = [d_{ij}]$ de $n = |X|$ filas y $|C|$ columnas, siendo d_{ij} la distancia del vértice x_i al j -ésimo candidato a centro. Entonces

$$r_m = \min_{H_m \subseteq S} \max_{x_i \in X} \min_{j \in H_m} (d_{ij}), \quad [80]$$

siendo H_m el conjunto de índices de un conjunto de m columnas de D y $S = \{1, 2, \dots, |C|\}$.

Descripción del algoritmo.

Pase 1. Se elige un conjunto H_m formado por los índices de un conjunto arbitrario de m columnas de D .

Pase 2. Calcular $d = \max_{x_i \in X} \min_{j \in H_m} (d_{ij})$.

Pase 3. Actualizar la matriz $B = [b_{ij}]$, donde

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } d_{ij} \geq d \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, |C| \end{matrix}$$

Pase 4. Resolver el problema de recubrimiento

$$h = \min e^t x, \text{ donde } e^t = (1, 1, \dots, 1)$$

$$Bx \geq e, \quad x_j \in (0, 1), \quad j = 1, 2, \dots, |C|.$$

Paso 5. Si $h > m$ parar; $r_m = d$ es el valor de una solución óptima.

En caso contrario actualizar H_m y volver al *paso 2.*

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O \left[|X| + \binom{|X|}{2} \cdot |A| \right].$$

2.5.5.1.2. Algoritmo de Handler y Rozman (1985)

Handler y Rozman /45/ dan un algoritmo para resolver el problema del m -centro continuo en una red en la que las instalaciones se pueden localizar en cualquier punto de los arcos y con puntos de demanda en los vértices. Este algoritmo se basa en las siguientes proposiciones:

Proposición 2.5.5.1.2.1.

En el algoritmo 2.5.5.1.1. si d es el valor correspondiente al m -centro asociado al conjunto H_m con el que se trabaja, entonces todas las columnas (candidatos a centros) del conjunto $K = \{c \in C / r(c) \geq d\}$, siendo $r(c)$ el rango de c definido en [78], se pueden eliminar sin perder la optimalidad de la solución.

Proposición 2.5.5.1.2.2.

En el algoritmo 2.5.5.1.1., para cualquier columna j y para cualquier fila i , el procedimiento de inicialización

$b_{ij} = 0$ si $d_{ij} > r^{(j)}$, siendo $r^{(j)}$ el rango del candidato a centro asociado con la columna j , se puede tomar sin perder la optimalidad.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se elige un conjunto H_m formado por los índices de un conjunto arbitrario de m columnas de D .

Paso 2. Calcular $d = \max_{x_i \in X} \min_{j \in H_m} (d_{ij})$.

Paso 3. Ajustar la matriz $B = [b_{ij}]$, donde

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } d_{ij} > r^{(j)} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, |C|$.

Paso 4. Eliminar de B todas las columnas j tales que $r^{(j)} \geq d$.

Paso 5. Resolver el problema de recubrimiento

$$h = \min e^t x, \text{ donde } e^t = (1, 1, \dots, 1)$$

$$Bx \geq e, \quad x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, |C|.$$

Paso 6. Si $h > m$ parar: $r_m = d$ es el valor de una solución óptima.

En caso contrario actualizar H_m y volver al *paso 2*.

2.5.5.1.3. Algoritmo de relajación de Handler y

Rozman (1985).

Este algoritmo permite resolver el problema del m -centro continuo en una red en la que las instalaciones se pueden localizar en cualquier punto de las

aristas de la red y en la que los puntos de demanda son vértices.

En el algoritmo se utiliza la siguiente notación:

Se supone que un candidato a centro $c \in N$ está determinado originalmente por un par de vértices x_i y x_j .

$C(x,y) = \{c \in C / \exists x_i, x_j \in X \text{ respecto de los cuales } c \text{ es centro local}\}.$

$C[(x,y):d] = \{c \in C(x,y) / r(c) < d\}.$

$C(R:d) = \bigcup_{x_i, x_j \in R} C[(x,y):d]$

(h, \hat{X}_h, \hat{r}) son los candidatos para una solución óptima del problema de recubrimiento, donde

h es el valor de la función objetivo.

\hat{X}_h es el conjunto de los h centros en la solución.

$\hat{d} = \max_{c \in \hat{X}_h} \{r(c)\}.$

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se inicializa $m = 1$ y se selecciona un vértice cualquiera x . Se define $R = \{x\}$, $d = \infty$, $C(R:d) = \{x\}$ (centro local con respecto a x y x de rango 0), $\hat{d} = 0$, $\hat{X}_1 = \{x\}$.

Paso 2. Si todo vértice de $X - R$ está dentro de un rango \hat{d} de algún $x \in \hat{X}_m$, entonces \hat{X}_m es una solución mejorada. $X_m = \hat{X}_m$ es la nueva solución en curso, con $d = \hat{d}$ una cota superior de r_m . Actualizar $C(R:d)$ eliminan-

do los candidatos a centro cuyos rangos sean mayores o iguales a d . Ir al *paso 4*.

En caso contrario se elige como vértice a entrar x_r , el más alejado de \hat{X}_m . Si $\hat{d} < \max_{x_j \in X} d(\hat{X}_m, x_j) < d$, entonces \hat{X}_m es

todavía una solución mejorada. Se hace

$$d = \max_{x_j \in X} d(\hat{X}_m, x_j) \text{ y } X_m = \hat{X}_m.$$

Ir al *paso 2*.

Paso 3. Añadir x_r a R y actualizar $C (R:d)$ añadiendo los candidatos a centros $C [(x_r, y):d]$, $\forall y \in R$. Ir al *paso 4*.

Paso 4. Seleccionar de $C (R:d)$ un conjunto arbitrario de m candidatos a centros, \hat{X}_m , que cubran todos los vértices de R e ir al *paso 2*. Si esto no es posible ir al *paso 5*.

Paso 5. La solución en curso X_m es un conjunto de m -centros con m -radio $r_m = d$. Si m es el número de centros buscados parar. En caso contrario hacer $m = m+1$ y volver al *paso 4*.

Este algoritmo mejora en la práctica la complejidad de los anteriores para valores grandes de n .

2.5.5.1.4. Algoritmo de Moreno.

Este algoritmo para determinar el m -centro modifica el procedimiento de relajación de Handler y se basa en el siguiente resultado:

Proposición 2.5.5.1.4.1.

Si R_1 y R_2 son dos conjuntos de vértices disjuntos cuyos centros respectivos son c_1 y c_2 con radios r_1 y r_2 , una buena localización para el centro de $R = R_1 \cup R_2$ es el punto c del camino mínimo de c_1 a c_2 tal que:

$$r_1 + d(c_1, c) = d(c, c_2) + r_2.$$

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Inicializar $|X|$ conjuntos R_i

$$R_i = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, |X| = n.$$

Para cada i se define $c_i = x_i$, $r_i = 0$ y

$$w_{ij} = r_i + d(x_i, x_j) + r_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Paso 2. Se calculan $w_{i,j(k)} = \min_{1 \leq j \leq n} w_{ij}$

$$w_{k,j(k)} = \min_{1 \leq i \leq n} w_{i,j(k)}$$

Se elige el par $(k, j(k))$ que minimiza w_{ij} y

se actualizan R_i, c_i y r_i .

$$R_i = R_k \cup R_{j(k)}$$

$$r_i = \frac{w_{k,j(k)}}{2}$$

c_i es el punto del camino mínimo de c_k a $c_{j(k)}$ que está a distancia $r_i - r_k$ de c_k .

Paso 3. Se calculan los nuevos valores de $w_{i,j}$ y se repite el paso 2 hasta tener m ternas

(R_i, r_i, c_i) , es decir $|X| - m$ veces.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X|^2 \cdot \log|X|).$$

2.5.6. Algoritmos para hallar m-centros en una red-árbol.

2.5.6.1. Algoritmo de Handler (1978).

Este algoritmo resuelve el problema del 2-centro absoluto en una red-árbol $T(X,A)$. con pesos unitarios, en la que los puntos de demanda están en los vértices y las instalaciones pueden estar en los vértices o en las aristas de la red.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se aplica el método de Handler, algoritmo 2.5.3.2., para determinar el 1-centro absoluto x^* de T .

Paso 2. Se divide la red-árbol por x^* en dos subárboles disjuntos T_1 y T_2 .

Paso 3. Se aplica el algoritmo 2.5.3.2. para determinar los 1-centros absolutos x_1^* y x_2^* de T_1 y T_2 respectivamente. que constituyen el 2-centro de T .

COMPLEJIDAD:

La complejidad del algoritmo de Handler es:

$$O(|X|).$$

2.5.6.2. Algoritmo de Kariv y Hakimi para el m-centro absoluto (1979).

Este algoritmo, que resuelve el problema de hallar el m-radio y el correspondiente m-centro absoluto para

una red-árbol con vértices ponderados, se basa en el siguiente resultado:

Teorema 2.5.6.2.1.

Si \mathcal{Y}_m^* es el m-centro absoluto de una red-árbol con vértices ponderados y r_m es el m-radio absoluto, entonces existe al menos un $x \in \mathcal{Y}_m^*$ y un par de vértices x_i y x_j tales que:

$$d(x_i, x_j) = d(x_i, x) + d(x, x_j)$$

y

$$v_i \cdot d(x_i, x) = v_j \cdot d(x_j, x) = r_m.$$

Demostración.

Ver Kariv y Hakimi /53/.

Corolario 2.5.6.2.1.1.

El m-radio absoluto de una red-árbol con vértices ponderados es uno de los $n(n-1)/2$ posibles cocientes:

$$\frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j}$$

Demostración.

$$d(x_i, x_j) = \frac{r_m}{v_i} + \frac{r_m}{v_j} = \frac{v_j \cdot r_m + v_i \cdot r_m}{v_i \cdot v_j}$$

de donde

$$r_m = \frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j}$$

■

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se calculan los $n(n-1)/2$ valores

$$r_{ij} = \frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j} \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq n$$

Paso 2. Se ordenan los valores r_{ij} en una lista L en orden no decreciente.

Paso 3. Se aplica el algoritmo 2.5.4.1. para hallar un conjunto dominante de radio r_{ij} para cada $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ y se calcula el número de dominación, m_{ij} , de radio r_{ij} .

Paso 4. Mediante una búsqueda binaria en la lista L se determina r_m que es el menor r_{ij} para el que $m_{ij} \leq m$. Se designa por m' el número de dominación de radio r_m .

Paso 5. Si $\mathcal{Y}_{m'}^*$ es el conjunto dominante de radio r_m , que se determina por el algoritmo 2.5.4.1., añadiendo cualquier conjunto arbitrario de $m-m'$ puntos a $\mathcal{Y}_{m'}^*$ se obtiene un m -centro \mathcal{Y}_m^* de la red-árbol.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X|^2 \cdot \log|X|).$$

2.5.6.3. Algoritmo de Kariv y Hakimi para el m-centro restringido a los vértices (1979)

Para resolver el problema del m -centro restringido a los vértices se puede aplicar el algoritmo

2.5.6.2. sustituyendo los pasos 1.3.4 y 5 por los siguientes:

Paso 1'. Se calculan los $n(n-1)$ valores:

$$r_{ij} = v_i \cdot d(x_i, x_j) \text{ para } i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

Paso 3'. Se aplica el algoritmo 2.5.4.2. para hallar un conjunto dominante de radio r_{ij} para cada $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ y se calcula el número de dominación, m_{ij} , restringido a los vértices para cada r_{ij} .

Paso 4'. Mediante una búsqueda binaria en la lista L se determina r_m

$$r_m = \min_{i, j \in \langle 1, 2, \dots, n \rangle} \left\{ r_{ij} / m_{ij} \leq m \right\}.$$

Se designa por m' el número de dominación de radio r_m .

Paso 5'. Si $X_{m'}$ es el conjunto dominante de radio r_m , que se obtiene aplicando el algoritmo 2.5.4.2., añadiendo $m-m'$ vértices arbitrarios a $X_{m'}$ se obtiene un m -centro X_m^* de la red-árbol.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es también:

$$O(|X|^2 \log|X|).$$

2.5.6.4. Algoritmo de Hakimi, Schemichel y Pierce para el m-centro absoluto (1978).

Este algoritmo, que resuelve el problema del m -centro absoluto en una red-árbol con pesos unitarios en los

vértices para $m > 2$, se basa en el siguiente teorema:

Teorema 2.5.6.4.1. (Hakimi, Schmeichel y Pierce).

Dados un 1-centro absoluto y^* de una red-árbol $T(X, \lambda)$, un vértice periférico x_1 , es decir, un vértice que verifica:

$$d(x_1, y^*) = \max_{x_i \in X} \{d(x_i, y^*)\}$$

y $p(x_1, y^*)$ el camino que une x_1 con y^* , si y^* no es un vértice el camino $p(x_1, y^*)$ se supone que incluye la arista que contiene y^* . Entonces existe una arista a en el camino $p(x_1, y^*)$ que si se elimina de T separa dos componentes T_1 , que contiene x_1 , y T_2 , tales que si y_1^* es el 1-centro absoluto de T_1 e y_{m-1}^* es un $(m-1)$ -centro de T_2 entonces $y_m^* = \{y_1^*\} \cup y_{m-1}^*$ es un m -centro absoluto de T .

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se halla el 1-centro absoluto y^* de T y un vértice periférico x_1 .

Paso 2. Sea $p(x_1, y^*)$ el camino que conecta x_1 con y^* , y si y^* no es un vértice $p(x_1, y^*)$ se supone que incluye la arista a a la que pertenece y^* . Para cada a de $p(x_1, y^*)$, se determina $T_1(a)$, el subárbol de $T-(a)$ que contiene x_1 , y $T_2(a)$ el otro subárbol de $T-(a)$.

Paso 3. Se halla el 1-centro absoluto $y_1^*(a)$ y el correspondiente 1-radio $r_1^1(a)$ de $T_1(a)$. Se halla el $(m-1)$ -centro absoluto $y_{m-1}^*(a)$ de

$T_2(a)$ y su correspondiente $(m-1)$ -radio absoluto $r_{m-1}^2(a)$.

Paso 4. Se determina

$$r_m(a) = \max \{ r_1^1(a), r_{m-1}^2(a) \}.$$

$$\text{y se calcula } r_m(a_0) = \min_{a \in p(x_1, y^*)} \{ r_m(a) \}$$

Entonces $r_m(a_0)$ es el m -radio absoluto de T y el conjunto $y_{m-1}^*(a_0) \cup \{y_1^*(a_0)\}$ es el m -centro absoluto.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O (|X| \log^{m-2} |X|) \text{ para } m > 2.$$

2.5.6.5. Algoritmo de Hakimi, Schemichel y Pierce para el m -centro restringido a los vértices (1978).

Para determinar el m -centro restringido a los vértices de una red-árbol $T(X, A)$ con pesos unitarios, no se puede aplicar el teorema 2.5.6.4.1. en el que se basa el algoritmo anterior, pero sí se puede hacer uso del siguiente lema:

Lema 2.5.6.5.1.

Se considera una red-árbol $T(X, A)$ con pesos unitarios en los vértices y dos vértices periféricos x_1 y x_2 tales que $d(x_1, x_2) = \max_{x_i, x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\}$. Para cada arista a del camino $p(x_1, x_2)$ se construyen los dos subárboles conexos $T_1(a)$

y $T_2(a)$ que se obtienen eliminando la arista a de T , siendo $T_1(a)$ el que contiene x_1 . Entonces, para cada m ($m > 1$), existe una arista a_m en $p(x_1, x_2)$ y dos números naturales m_1 y m_2 ($m_1 + m_2 = m$) tales que si $X_{m_1}^*$ es un m_1 -centro de $T_1(a_m)$ y $X_{m_2}^*$ es un m_2 -centro de $T_2(a_m)$, entonces $X_m^* = X_{m_1}^* \cup X_{m_2}^*$ es un m -centro restringido a los vértices de T .

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se hallan dos vértices periféricos x_1 y x_2 de T tales que

$$d(x_1, x_2) = \max_{x_i, x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\}. \text{ Sea } p(x_1, x_2)$$

el camino que conecta x_1 y x_2 en T .

Paso 2. Para cada valor de m_1 ($m_1 \in \{1, 2, \dots, m-1\}$) dar los pasos 3, 4 y 5.

Paso 3. Para cada arista a de $p(x_1, x_2)$ se halla:

1) Un m_1 -centro $X_{m_1}^*(a)$ y el correspondiente

m_1 -radio $r_{m_1}(a)$ de $T_1(a)$, siendo $T_1(a)$ el subárbol conexo de $T-(a)$ que contiene x_1 .

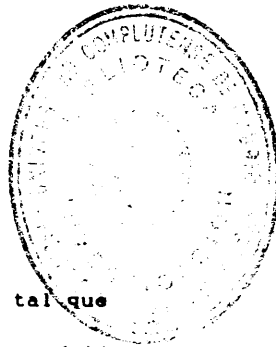
2) Si $m_2 = m - m_1$, se halla un m_2 -centro

$X_{m_2}^*(a)$ y el correspondiente m_2 -radio

$r_{m_2}(a)$ de $T_2(a)$, siendo $T_2(a)$ el subárbol conexo de $T-(a)$ que contiene x_2 .

Paso 4. Se determina :

$$r_{m_1, m_2}^*(a) = \max \{r_{m_1}(a), r_{m_2}(a)\}$$



y se calcula

$$\min_{a \in p(x_1, x_2)} (r_{m_1, m_2}(a))$$

mediante una búsqueda binaria.

Paso 5. Sea a_{m_1, m_2} la arista de $p(x_1, x_2)$ tal que

$$r_{m_1, m_2}(a_{m_1, m_2}) = \min_{a \in p(x_1, x_2)} (r_{m_1, m_2}(a))$$

Designamos por

$$r_{m_1, m_2} = r_{m_1, m_2}(a_{m_1, m_2})$$

$$X_{m_1, m_2}^* = X_{m_1}^*(a_{m_1, m_2}) \cup X_{m_2}^*(a_{m_1, m_2}).$$

Paso 6. Asignamos a r_m el valor

$$\min (r_{m_1, m_2} / 1 \leq m_1 \leq m \text{ y } m_2 = m - m_1) \text{ y}$$

sea X_m^* el conjunto X_{m_1, m_2}^* que corresponde

a r_m . Entonces r_m es el m -radio restringido

a los vértices de T y X_m^* es un m -centro

restringido a los vértices de T .

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X| \cdot \log^{m-1} |X|).$$

2.5.6.6. Otros algoritmos para el m -centro en una red-árbol.

Con objeto de rebajar la complejidad de los algoritmos para resolver el problema del m -centro en una red-árbol, se han buscado conjuntos que contengan los valores factibles del radio.

Definición 2.5.6.6.1.

Un valor $r > 0$ se dice que es factible si existe un conjunto de m elementos del conjunto de puntos de posible localización de centros

$$(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

tales que la distancia de cualquier punto de demanda x al más próximo de los y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) es menor o igual a r .

Chandrasekaran y Tamir /65/ y /66/ prueban que estos conjuntos de valores factibles del radio para una red $N(X,A)$ son:

$$R_1 = \{ d(x_i, x_j), x_i, x_j \in X \} \quad [81]$$

si tanto los puntos de demanda como los de posible localización de centros están restringidos a los vértices, en el caso de vértices no ponderados y

$$R_2 = \{ v_i d(x_i, x_j), x_i, x_j \in X \} \quad [82]$$

si los vértices tienen pesos v_i no todos uno.

$$R_3 = \left\{ \frac{1}{2} d(x_i, x_j), x_i, x_j \in X \right\} \quad [83]$$

si el conjunto de los puntos de demanda está restringido a los vértices pero los centros se pueden localizar en los vértices o en las aristas, para vértices no ponderados y

$$R_4 = \left\{ \frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j}, x_i, x_j \in X \right\} \quad [84]$$

para vértices ponderados (Ver Corolario 2.5.6.2.1.1.).

$$R_3 = (d(x_i, x_j), \frac{1}{2} d(x_i, x_j), x_i, x_j \in X) \quad [85]$$

si la localización de los centros se reduce a los vértices, pero son posibles puntos de demanda tanto los vértices como los puntos de las aristas.

$$R_d = \left\{ \frac{d(x_i, x_j)}{2k}, x_i, x_j \in X, k = 1, 2, \dots, m \right\} \quad [86]$$

si tanto los puntos de demanda como los m centros pueden ser tanto vértices como puntos de las aristas.

2.5.6.6.1. Algoritmo de Chandrasekaran y Tamir (1980).

Este algoritmo resuelve el problema de determinar el m-centro continuo en una red-árbol, con vértices no ponderados, en el caso en que tanto los puntos de demanda como las instalaciones pueden estar tanto en los vértices como en las aristas.

Se prueba que r_m es uno de los números:

$$r_{i,j} = \frac{d(x_i, x_j)}{2k} \quad [87]$$

siendo x_i y x_j dos vértices de grado 1 y k cualquier entero entre 1 y m.

La complejidad del algoritmo de Chandrasekaran y Tamir que permite calcular r_m y aplicar el algoritmo de r-cubrimiento es:

$$O [(|X| \cdot \log m)^2].$$



2.5.6.6.2. Algoritmo de Megiddo, Tamir, Zemel y Chandrasekaran (1981).

Este algoritmo /65/, resuelve el problema del m-centro en una red-árbol en el caso que los puntos de demanda, o los de posible localización, o ambos, estén restringidos a los vértices de la red. Se puede aplicar tanto en el caso de vértices no ponderados como para vértices con pesos v_i no todos uno. Divide la red-árbol $T(X,A)$ con $|X| = n$, en tres subárboles, cada uno de ellos con cardinal menor o igual a $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

La complejidad del algoritmo de Megiddo, Tamir, Zemel y Chandrasekaran es:

$$O \{ |X| \cdot \min \{ m \cdot \log^2 |X|, |X| \cdot \log m \} \}.$$

2.5.6.6.3. Algoritmo de Tansel, Francis, Lowe y Chen (1982).

Este algoritmo /93/ resuelve el problema del m-centro ($0 < m \leq n$) en una red-árbol, con distancias restringidas, para el caso en que se imponen cotas superiores a la distancia de cada vértice al centro más próximo, sustituyendo los pesos v_i por funciones f_i de la distancia $d(x_i, y)$ que son continuas y estrictamente decrecientes. Este problema recibe el nombre de problema del m-centro no lineal.

La complejidad del algoritmo de Tansel, Francis, Lowe y Chen es:

$$O \{ |X|^4 \cdot \log |X| \}$$

si se utiliza un algoritmo para el problema del r-cubrimiento

de complejidad $O(|X|^2)$ y de complejidad:

$$O(|X|^3 \cdot \log |X|)$$

si se utiliza un algoritmo de complejidad $O(|X|)$ para el problema del r -cubrimiento.

2.5.6.6.4. Algoritmo de Tamir y Zemel (1982).

Este algoritmo resuelve el problema del m -centro en una red-árbol en el caso en que todos los pesos son la unidad, y que los suministros (o puntos de posible localización), Σ , y demandas, Δ , son una colección de un número finito de subregiones de T disjuntas, cerradas y conexas, de las que alguna puede ser un solo punto.

El algoritmo reduce la búsqueda de r_m a un conjunto finito \mathcal{R} , formado por las distancias entre cualquier punto "extremo" de una subregión en Σ y cualquier punto "extremo" de una subregión en Δ y resuelve el problema del r -cubrimiento para valores de $r \in \mathcal{R}$.

La complejidad del algoritmo es:

$$O(|X| \cdot \log^2 |X|)$$

para el caso en que tanto Σ como Δ son discretos.

Si Σ y Δ contienen una arista entera entonces la complejidad es:

$$O(|X| \min \{m \cdot \log^2 |X|, |X| \cdot \log m\}).$$

2.5.6.6.5. Algoritmo de Megiddo y Tamir para el m -centro continuo (1983).

Permite resolver el problema del m -centro continuo en una red-árbol con vértices no ponderados.

mejorando la complejidad de los anteriores. Además se obtiene una cota superior del número de operaciones necesarias que no depende de m .

Partiendo del resultado de Chandrasekaran y Tamir que afirma que el m -radio es uno de los números $d(x_i, x_j)/2k$, donde x_i y x_j son dos vértices de grado 1 de la red-árbol $T(X, A)$ y k es cualquier entero entre 1 y m , se definen las funciones:

$$k_{ij}(r) = \left\lceil \frac{d(x_i, x_j)}{2r} \right\rceil \quad (r > 0), \quad \forall x_i, x_j \in X.$$

[88]

es decir, $k_{ij}(r)$ es la parte entera más uno del cociente $d(x_i, x_j)/2r$, $\forall x_i, x_j \in X$.

La función $k_{ij}(r)$ es, para cada par de vértices x_i, x_j de X fijos, una función escalonada con saltos

$$\left\lceil \frac{d(x_i, x_j)}{2k} \right\rceil, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

[89]

Se determina un intervalo $[a, b]$ para r tal que $m_a > m \geq m_b$ en el que las funciones $k_{ij}(r)$ son constantes en $[a, b]$. Por tanto $a < r_m \leq b$, ya que $r_m = \min \{ r / m_r \leq m \}$ y por tanto $r_m = b$ ya que al menos una de las funciones $k_{ij}(r)$ debe tener un salto en r_m .

Este intervalo (a, b) se va reduciendo gradualmente, conteniendo siempre r_m tal que $m_r \leq m$. La reducción /65/ se realiza en dos fases. En la primera se encuentra un intervalo $(a_0, b_0]$ tal que $a_0 < r_m \leq b_0$ y al menos una de las funciones $k_{ij}(r)$ es constante en $(a_0, b_0]$. En la segunda fase se va reduciendo gradualmente el intervalo a la vez que va

aumentando el conjunto de los pares (x_i, x_j) para los que la función $k_{ij}(r)$ correspondiente es constante, hasta conseguir que todas estas funciones sean constantes en el intervalo.

Se considera un centroide c de T , es decir, se divide T en dos subárboles T_1 y T_2 cuyo único vértice común sea c y tales que cada uno de los subárboles tengan a lo sumo $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ vértices. El centroide se puede hallar por un algoritmo de Goldman de $O(|X|)$ o por el algoritmo 2.5.3.5.1. de Kariv y Hakimi también de complejidad $O(|X|)$.

A continuación se calculan $d(x_i, c)$, $\forall x_i \in T_1$ y $d(c, x_j)$, $\forall x_j \in T_2$ y se reduce la búsqueda de r_m al conjunto

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{d(x_i, c) + d(c, x_j)}{k_{ic}(r) + k_{cj}(r) + 1}, x_i \in T_1, x_j \in T_2 \right\}$$

[90]

La complejidad de este algoritmo para resolver el problema del m -centro continuo es:

$$O(|X| \cdot \log^3 |X|).$$

2.5.6.6.6. Algoritmo de Megiddo y Tamir para el m -centro absoluto (1983).

Permite hallar el m -centro absoluto en una red-árbol $T(X, A)$, con vértices ponderados, en el caso en que los puntos de demanda están restringidos a los vértices de la red.

Se utiliza el hecho de que r_m es uno de los $n(n-1)/2$ posibles valores del conjunto

$$\left\{ \frac{v_i v_j d(x_i, x_j)}{v_i + v_j}, x_i, x_j \in X \right\}$$

[91]

Siguiendo un procedimiento similar al algoritmo anterior se encuentra el m-centro absoluto con complejidad

$$O(|X| \log^3 |X|).$$

2.5.6.6.7. Algoritmo mejorado de Megiddo y

Tamir (1983).

Determina el m-centro absoluto en una red-árbol $T(X,A)$ con vértices ponderados, si los puntos de demanda se restringen a los vértices de la red.

Se determina el centroide de T , dividiendo T en dos subárboles cada uno de los cuales con a lo sumo $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ vértices. Se procede del mismo modo en los subárboles hasta obtener una descomposición total.

La distancia $d(x_i, x_j) = d(x_i, c) + d(c, x_j)$ donde c es un centroide de la descomposición total de la red-árbol T .

Si c_k es uno de los centroides y T_k^1 y T_k^2 son los subárboles que separa c_k de un subárbol anterior, se reduce la búsqueda del m-radio al conjunto

$$\left\{ \frac{v_i v_j [d(x_i, c_k) + d(c_k, x_j)]}{v_i + v_j}, x_i \in T_k^1, x_j \in T_k^2 \right\}$$

[92]

y siguiendo un procedimiento análogo al de los algoritmos

anteriores se resuelve el problema del m-centro con complejidad:

$$O [|X| \cdot \log^2 |X| \cdot \log \log |X|].$$

Si los m centros sólo se pueden localizar en los vértices, la complejidad es:

$$O [|X| \cdot \log^2 |X|].$$

2.5.7. Algoritmo para el problema del m-centro con centros preestablecidos.

2.5.7.1. Algoritmo Modificado de Kariv y Hakimi (1979).

Resuelve el problema del m-centro con m_1 centros preestablecidos en una red-árbol $T(X,A)$ considerando para cada vértice $x_i \in X$ el punto $y(x_i) \in \mathcal{Y}^*$ que está más próximo a x_i . Así

$$d(x_i, y(x_i)) = \min_{y \in \mathcal{Y}^*} \{d(x_i, y)\}.$$

[93]

Cada una de las distancias ponderadas $v_i \cdot d(x_i, y(x_i))$ puede ser el m-radio con m_1 centros preestablecidos de la red-árbol $T(X,A)$.

En el caso del problema del m-centro restringido a los vértices y con centros preestablecidos estos valores están ya incluidos en los $n(n-1)$ valores

$$r_{ij} = v_i d(x_i, x_j), \quad x_i, x_j \in X, \quad i \neq j.$$

[94]

En cualquier caso, el número de posibles valores del m-radio es $O(|X|^2)$ y la complejidad del algoritmo modificado para el m-centro con centros preestablecidos sigue siendo

$$O(|X|^2 \log|X|).$$

2.5.8. Algoritmo para resolver el problema de localizar m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas.

2.5.8.1. Algoritmo de Francis, Lowe y Ratliff (1978).

Este algoritmo determina m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas en una red-árbol $T(X,A)$.

Se parte de una red-árbol $T(X,A)$, con $|X| = n$, dos conjuntos I_B e I_C , no vacíos:

$$I_C \subset \{ (i,j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \}$$

$$I_B \subset \{ (j,k), 1 \leq j < k \leq m \}$$

[95]

y la función

$$F(Y) = \max \left\{ \max_{(i,j) \in I_C} \{ v_{ij} d(y_i, x_j) \}, \max_{(j,k) \in I_B} w_{jk} d(y_j, y_k) \right\}$$

[96]

Se construye el grafo unidireccional de nodos $N_1, N_2, \dots, N_m, E_1, E_2, \dots, E_n$.

Para cada $(i,j) \in I_C$ se coloca un arco (N_i, E_j) de longitud $\frac{1}{v_{ij}}$ y para cada $(j,k) \in I_B$ un arco (N_j, N_k) de longitud $\frac{1}{w_{jk}}$.

Se considera n_{st} la longitud del camino más corto que une dos nodos E_s y E_t cualesquiera en los que existen instalaciones y se calcula

$$Z^* = \max_{1 \leq s < t \leq n} (d(x_s, x_t) / n_{st}). \quad [97]$$

Se construye una solución óptima y^* aplicando el Procedimiento de Localización Secuencial /36/ a las restricciones:

$$d(y_i, x_j) \leq \frac{Z^*}{v_{ij}}, \quad (i, j) \in I_c \quad [98]$$

$$d(y_j, y_k) \leq \frac{Z^*}{w_{jk}}, \quad (j, k) \in I_b \quad [99]$$

Para calcular n_{st} se necesitan $O(|X|^3)$ operaciones y para las distancias $d(x_s, x_t)$. $O(|X|^2)$ operaciones. La aplicación del Procedimiento de Localización Secuencial requiere $O(m(|X|+m))$ operaciones.

Observación 2.5.8.1.1.

Se supone que G es conexo, si no lo fuera se descompondría el problema del calculo de Z^* en un conjunto de problemas independientes en los que el grafo subyacente sea conexo.

Kolen (1982) demuestra que este problema es NP-difícil en una red general.

2.5.9. Algoritmo para localizar m centros con distancias restringidas.

El problema de localizar m centros con distancias restringidas en una red lo han planteado Dearing, Francis y Lowe en 1976. Se demuestra que las distancias restringidas definen siempre conjuntos convexos si y sólo si la red es una red-árbol.

2.5.9.1. Algoritmo de Francis, Lowe y Ratliff para localizar un centro con distancias restringidas (1978).

Para localizar una sola instalación Dearing, Francis y Lowe dan una demostración constructiva del siguiente resultado para una red-árbol T:

Lema 2.5.9.1.1.(Horn).

Existe $y \in T$ para el que

$$d(y, x_i) \leq c_i, \quad i \in I$$

si y sólo si

$$d(x_j, x_k) \leq c_j + c_k, \quad \text{para } i \leq j < k \leq n.$$

[100]

Basándose en este resultado Francis, Lowe y Ratliff desarrollan un Procedimiento de Intersección Secuencial /36/ que interseca los entornos

$$N(x_i, c_i) = \{x \in T / d(x, x_i) \leq c_i\}$$

[101]

para obtener el entorno compuesto

$$N(p,r) = \bigcap_{i \in I} N(x_i, c_i)$$

[102]

con centro único p y radio r . Este entorno compuesto es un subárbol compacto, conexo y contiene todas las soluciones factibles del problema de localizar un centro con distancias restringidas.

La complejidad del algoritmo es:

$$O(|X|).$$

2.5.9.2. Algoritmo de Francis, Lowe y Ratliff para localizar m centros con distancias restringidas (1980).

Francis, Lowe y Ratliff extienden el resultado de Horn para localizar m nuevas instalaciones. Construyen un grafo unidireccional G con nodos $N_1, N_2, \dots, N_m, E_1, \dots, E_n$ y crean un arco (N_i, E_j) de longitud c_{ij} para cada $(i,j) \in I_c$ y un arco (N_j, N_k) de longitud b_{jk} para todo $(j,k) \in I_b$.

Se supone que G es conexo, si no es así se descompone en un conjunto de problemas independientes que se estudian por separado.

Dados dos nodos cualesquiera E_j y E_k en los que existen instalaciones se designa por $\mathcal{L}(E_j, E_k)$ la longitud del camino más corto en G que conecta los dos nodos. El problema de las distancias restringidas es compatible si y sólo si

$$d(x_j, x_k) \leq \mathcal{L}(E_j, E_k), \text{ para } 1 \leq j < k \leq n$$

[103]

Las desigualdades [103] reciben el nombre de condiciones de separación.

El Procedimiento de Localización Secuencial requiere para este caso $O(m(|X| + m))$ operaciones.

2.5.10. Algoritmo para el problema de multiinstalación minimax t-objetivo.

2.5.10.1. Algoritmo de Tansel, Francis y Lowe para multiinstalación minimax biobjetivo (1982).

Para este caso particular Tansel, Francis y Lowe dan un procedimiento que permite construir la frontera eficiente, es decir, el conjunto de las 2-uplas (Z_1, Z_2) que constituyen los valores objetivos de los puntos eficientes para dicho problema.

Este procedimiento requiere

$$O(m^2(m + |X|^2))$$

operaciones para construir la frontera eficiente.

CAPITULO 3. LOCALIZACION EN GRAFOS ALEATORIOS.

CAPITULO 3. LOCALIZACION EN GRAFOS ALEATORIOS

3.1. Introducción.

En los capítulos anteriores se han considerado grafos $G(X,A)$, siendo

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ y } A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$$

conjuntos fijos. Las aplicaciones prácticas de la teoría de grafos conducen a modelos en los que los vértices, las aristas o ambos se suprimen según unas reglas probabilísticas definidas.

Los primeros ejemplos de grafos aleatorios aparecen en 1956 al estudiar Moor y Shannon circuitos eléctricos usando relés.

Erdős y Rényi así como Gilbert, en 1959, presentan los primeros trabajos sobre grafos aleatorios.

En 1979 se publica un libro de Bollobas /10/ que presenta un capítulo dedicado a este tipo de grafos.

Un interesante artículo /30/ se publica en 1981 incluyendo problemas abiertos en este campo. Y a partir de este año crece el interés por el estudio de los modelos de grafos aleatorios.

Se presenta en /2/ el problema del recubrimiento en grafos aleatorios.

La existencia de ciclos Hamiltonianos en una clase de grafos aleatorios se estudia en 1983. Ver /33/. En 1984 se

utilizan los grafos aleatorios para explicar un modelo epidémico sugerido por Gertsbakh en 1977. Ver /49/ y /50/. La infección se transmite de los m vértices inicialmente infectados en dirección inversa a las orientaciones de los arcos.

En 1985 se estudia el número de dominación de grafos aleatorios en el n -cubo /51/ y se presentan en /90/ recubrimientos asintóticamente buenos para grafos aleatorios.

La evolución de los grafos aleatorios se introduce en /80/ y los artículos /99/./100/. /101/ y /102/ recogen la evolución de éstos en el n -cubo y el problema del recubrimiento por subcubos.

Pero los grafos aleatorios tienen también interés por sí mismos. Se puede considerar cada uno de estos como un "grafo con vida" que se desarrolla, o pasa por varios estados, adquiriendo cada vez más aristas.

El tema sigue siendo de interés y actualidad y una prueba de ello es que ya se han realizado dos Encuentros Internacionales dedicados a Grafos Aleatorios y Métodos Probabilísticos en Combinatoria. El Segundo Seminario Internacional reunió en Polonia a 52 participantes de 14 países.

Karonski y Palka /55/ editan en 1987 las Actas de este Segundo Seminario y anuncian que se seguirán organizando con carácter bienal.

En noviembre de 1988 se realiza una búsqueda por ordenador que detecta 179 artículos sobre grafos aleatorios publicados desde 1973 a finales de 1984. de los que 9 tratan

el tema de recubrimiento o empaquetamiento, y otros 284 artículos publicados desde enero de 1985 a noviembre de 1988 de los que 19 tratan sobre recubrimiento o empaquetamiento. En esta búsqueda no apareció ningún artículo sobre modelos de localización en grafos aleatorios en el sentido que estamos tratando.

Nuestro objetivo es estudiar la localización de centros en este tipo de grafos.

3.2. Nomenclatura y definiciones previas.

Dado un grafo $G(X,A)$, siendo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ conjuntos finitos, el número de vértices, n , recibe el nombre de orden de G y el número de aristas t , el tamaño de G . El vértice x_i se dice que tiene el nivel i .

Podríamos ahora considerar todos los grafos posibles de orden n . El número de grafos etiquetados (o de vértices distinguibles) de orden n es:

$$VR_{2, \binom{n}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}.$$

De éstos los que tienen tamaño t serán:

$$C_{\binom{n}{2}, t} = \binom{\binom{n}{2}}{t}.$$

Un grafo aleatorio será un elemento de un espacio muestral de cardinal mayor que 1. Se presentan a continuación distintos modelos de grafos aleatorios:

Modelo 3.2.1 Modelo de densidad fija de aristas.

$$\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}).$$

Dado un número natural $n > 1$ fijo, consideramos un conjunto de cardinal n , $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, las $\binom{n}{2}$ aristas que unen estos puntos y un número $p \in \mathbb{R} / 0 < p < 1$, el espacio muestral $\mathcal{A} = \mathcal{G}_{n,p}$ está formado por todos los grafos etiquetados de orden n .

En este modelo se consideran pues n vértices fijos y las $\binom{n}{2}$ posibles aristas, y cada una de ellas pertenecerá al grafo aleatorio $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p})$ con probabilidad p , fija, independientemente de que pertenezca o no otra arista al grafo.

El número de aristas de uno de estos grafos $G_{n,p}$ sigue una distribución binomial $B\left(\binom{n}{2}, p\right)$.

Si se elige al azar un grafo $G_{n,p}$ de \mathcal{A} , la probabilidad de que $|\mathcal{A}_{n,p}| = t$ es:

$$P(|\mathcal{A}_{n,p}| = t) = \binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot (1-p)^{\binom{n}{2}-t} = \binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot q^{\binom{n}{2}-t} .$$

[104]

Es inmediato probar que la probabilidad del espacio muestral $\mathcal{G}_{n,p}$ es 1.

Proposición 3.2.1.1.

El modelo de densidad fija de aristas es equivalente al modelo que se obtiene borrando cada una de las $\binom{n}{2}$ aristas con probabilidad $q = 1-p$.

Demostración

Es obvio, teniendo en cuenta que $P(|\mathcal{A}_{n,p}| = t)$ coincide con [104].



Observación 3.2.1.1.

Este modelo tiene aplicación en los sistemas físicos o químicos en los que los vértices pueden representar moléculas y las aristas enlaces entre ellas, o bien los vértices son núcleos y las aristas conexiones que pueden fallar con probabilidad $q = 1-p$ fija.

Modelo 3.2.2 Modelo de número de aristas fijo.

$$\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}).$$

Dado un número natural $n > 1$ fijo y un número $t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t \leq \binom{n}{2}$, también fijo, el espacio muestral $\mathcal{A} = \mathcal{G}_{n,t}$ está formado por todos los grafos etiquetados $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ de orden n y tamaño t .

La probabilidad de cada grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ de $\mathcal{G}_{n,t}$ es constante:

$$P(G_{n,t}) = \left[\binom{n}{2} \right]^{-1}.$$

[105]

Modelo 3.2.3 Modelo de grafos esparcidos.

$$\mathfrak{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p = p(n)).$$

Se puede extender el modelo 3.2.1. suponiendo $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $|X_n| = n > 1$ variable. las $\binom{n}{2}$ posibles aristas $a_{ij} = (x_i, x_j)$ y una probabilidad p función del número de vértices $p = p(n)$, por ejemplo $p = a \cdot \frac{\ln n}{(n-1)}$ ($a = \text{cte}$).

Caso particular:

Modelo 3.2.3.1 Modelo de densidad paramétrica.

$$\mathfrak{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p = 1 - n^{-c/n}).$$

Un caso particular del modelo 3.2.3. que se conoce con el nombre de modelo de densidad paramétrica, es el siguiente:

Dados $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ siendo $n > 1$ fijo, y las $\binom{n}{2}$ aristas que unen los vértices de X_n , el espacio muestral $\mathfrak{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p = 1 - n^{-c/n})$ está formado por todos los grafos de orden n en los que cada arista $a_{ij} = (x_i, x_j)$ pertenece al grafo con probabilidad $p = 1 - n^{-c/n}$, independientemente de la presencia o ausencia de otras aristas, donde c puede tomar cualquier valor entre $1/n$ y $n/\log n$.

Modelo 3.2.4 Modelo de grafos esparcidos en función del

tiempo.

$$\mathfrak{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p = p(t)).$$

Dados $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ siendo $n > 1$ fijo, y las

$\binom{n}{2}$ aristas que unen los vértices de X_n , el espacio muestral $\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p = p(t))$ está formado por todos los grafos de orden n en los que cada arista $a_{ij} = (x_i, x_j)$ pertenece al grafo con probabilidad $p = p(t)$, por ejemplo $p = 1 - e^{-t}$, siendo $0 \leq t < +\infty$ el parámetro tiempo. Se definen así grafos aleatorios $G_{n,p(t)}(X_n, \mathcal{A}_{n,p})$ esparcidos en función del tiempo.

Observación 3.2.4.1.

En este modelo un grafo aleatorio $G_{n,p(t)}(X_n, \mathcal{A}_{n,p})$ se puede considerar como un organismo en crecimiento que va adquiriendo aristas con el tiempo.

Modelo 3.2.5

Modelo de número de aristas función del número de vértices.

$$\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, |\mathcal{A}| = t(n)).$$

También se puede extender el modelo 3.2.2. considerando $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|X_n| = n$ variable y el $|\mathcal{A}| = t(n)$, función del número de vértices. Por ejemplo puede ser $t(n)$ de $O(1)$ o bien $t(n)$ de $O(n \cdot \ln n)$.

Observación 3.2.5.1.

En este modelo un grafo aleatorio $G_{n,t(n)}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ se puede considerar como un organismo en crecimiento que adquiere cada vez más vértices y más aristas.

Modelo 3.2.6 Modelo de grafos aleatorios con el mismo grado s en cada vértice.

$$\mathcal{G}_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s}).$$

Dado un conjunto $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fijo, siendo $n > 1$ y un número s fijo tal que $1 < s \leq n-1$ el espacio muestral $\mathcal{M} = \mathcal{G}_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s})$ consta de todos los grafos etiquetados $G_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s})$ con aristas no dirigidas, de orden n en el que cada vértice tiene grado s , es decir, cada vértice está unido con otros s vértices.

La probabilidad de uno cualquiera de los grafos $G_{n,s}$ de $\mathcal{G}_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s})$ es:

$$P(G_{n,s}) = \binom{n-1}{s}^{-n},$$

[106]

ya que para cada uno de los n vértices hay $\binom{n-1}{s}$ elecciones posibles de los s vértices que se unen con él, independientemente de los restantes.

Modelo 3.2.7 Grafo con aristas probabilizadas.

$$\mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi}, \pi).$$

Se considera un conjunto de vértices

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

las $\binom{n}{2}$ aristas $a_{ij} = (x_i, x_j)$ que los unen y una aplicación π de $A_{n,\pi}$ en $(0,1)$ que a cada arista a_{ij} hace corresponder $\pi(a_{ij}) = \pi_{ij}$. A cada una de las aristas a_{ij} se les asignan unos números d_{ij} fijos que indican la distancia del vértice x_i al vértice x_j y otros números π_{ij} , $0 < \pi_{ij} < 1$, que indican la probabilidad de que se utilice la arista $a_{ij} = (x_i, x_j)$.

Un grafo $G_{n,\pi} \in \mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, A_{n,\pi}, \pi)$ tiene por conjunto de vértices X y las $\binom{n}{2}$ aristas a_{ij} que los unen se utilizan con probabilidad π_{ij} siendo $0 < \pi_{ij} < 1$.

Observación 3.2.7.1.

Si la probabilidad $\pi_{ij} = p / 0 < p < 1$, $\forall i \neq j$ tendríamos como caso particular el modelo 3.2.1.

Observación 3.2.7.2.

Una aplicación de este modelo podría ser la siguiente:

Supongamos dadas n poblaciones x_i tales que cada una de ellas está comunicada con las $(n-1)$ restantes por carreteras a_{ij} ; los números d_{ij} representan la distancia entre x_i y x_j por carretera y los π_{ij} pueden indicar la frecuencia de utilización de la carretera a_{ij} en cualquiera de los dos sentidos, o la probabilidad de que esa carretera esté bloqueada.

Modelo 3.2.8 Modelo de aristas dirigidas y probabilizadas.

$$\mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi}, \pi_{ij}).$$

Se considera un conjunto de n vértices

$$X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \text{ siendo } x_i = i,$$

y las $n(n-1)$ aristas $a_{ij} = (x_i, x_j)$ que parten de un vértice cualquiera a cada uno de los restantes. Para cada arista se considera la longitud de ésta d_{ij} y un número $\pi_{ij} = P(a_{ij})$, $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$ tal que $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Observación 3.2.8.1.

Este modelo tiene utilidad en la localización de instalaciones de emergencia en la que los números π_{ij} pueden representar la probabilidad de que un usuario de la población x_i precise servicios de una instalación en x_j .

En general $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}$ e incluso uno de ellos podría ser cero sin serlo el otro.

Modelo 3.2.9 Modelo de grafos con número de aristas

variable.

$$\mathcal{G}_{n,r}(X_n, \mathcal{A}_{n,r}, \zeta(i)).$$

Otra posible ampliación del modelo 3.2.2. consiste en suponer un conjunto de vértices $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n > 1$ fijo, siendo $x_i = i$ y n variables aleatorias, independientes e

idénticamente distribuidas. $\xi(i)$ tales que $P(\xi(i)=j) = \rho_j$,
 siendo $\sum_{j=1}^n \rho_j = 1$.

Un grafo $G_{n,\tau}$ de $\mathfrak{G}_{n,\tau}(X_n, \mathcal{A}_{n,\tau})$ tiene por conjunto de
 vértices X y por aristas $a_{ij} = (i, \xi(i)=j)$ con probabilidad ρ_j .

Para cada grafo $G_{n,\tau}$, $\tau = |\mathcal{A}|$ es el número de aristas
 con probabilidad distinta de cero.

Caso particular:

Si $\rho_j = 1/n$ para $j = 1, 2, \dots, n$, obtenemos el modelo de
 grafos con conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ y aristas
 $a_{ij} = (i, \xi(i)=j)$ con probabilidad uniforme $\pi_{ij} = 1/n$.

Modelo 3.2.10 Modelo general con n vértices.

$$\mathfrak{G}_n(X_n, \mathcal{A}).$$

Dado un número natural $n > 1$ fijo, consideramos un
 conjunto de cardinal n , $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y las $\binom{n}{2}$
 aristas que unen los elementos de X . Se designa por G el grafo
 completo de conjunto de vértices X con las $\binom{n}{2}$ aristas.

Un modelo más general de grafo aleatorio se obtendría
 al considerar como tal cualquier subgrafo S obtenido borrando
 vértices y aristas de G mediante un mecanismo aleatorio.

Caso particular:

Si se suprimen sólo aristas tendríamos el modelo
3.2.1.

Relación entre los modelos de densidad fija de aristas y de número de aristas fijo.

Erdős y Rényi han demostrado que asintóticamente, es decir cuando $n \rightarrow \infty$, el comportamiento de $G_{n,t}$ y $G_{n,p}$ es prácticamente el mismo cuando $t = \lfloor p \cdot \binom{n}{2} \rfloor$, ya que cuando n es grande el número de aristas del grafo $G_{n,p}$ no difiere significativamente de su valor esperado que es $\binom{n}{2} \cdot p$, puesto que el número de aristas, t , sigue una distribución $B\left(\binom{n}{2}, p\right)$.

Y aunque los resultados sobre $G_{n,t}$ son distintos de los resultados sobre $G_{n,p}$, si consideramos una propiedad A de los grafos se cumple:

$$\begin{aligned}
 &P(G_{n,p} \text{ tenga la propiedad } A) = \\
 &= \sum_{t=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot q^{\binom{n}{2}-t} \cdot P(G_{n,t} \text{ tenga la propiedad } A).
 \end{aligned}$$

[107]

Definición 3.2.1.

Consideramos el espacio muestral $\mathcal{G}_{n,p}$ del modelo 3.2.1. Dada una propiedad A se dice que casi todo grafo tiene la propiedad A si

$$P(G_{n,p} \text{ tenga la propiedad } A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

También se puede aplicar a grafos del modelo 3.2.3. siendo $p = p(n)$.

Teorema 3.2.1. (Bollobas)

Se consideran dos números naturales s y k fijos tales que $1 \leq s \leq k$ y un número real p también fijo tal que $0 < p < 1$. Entonces en $\mathcal{G}_{n,p}$ casi todo grafo $G_{n,p} = (X_n, \mathcal{A}_{n,p})$ es tal que para todo conjunto de vértices ordenados x_1, x_2, \dots, x_k , existe un vértice $x \in X$ tal que

$$\begin{cases} (x, x_i) \in \mathcal{A}_{n,p} & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ (x, x_i) \notin \mathcal{A}_{n,p} & \text{si } s < i \leq k \end{cases}$$

Demostración.

Dado un conjunto cualquiera de k vértices ordenados x_1, x_2, \dots, x_k y un vértice $x \in X$, indicamos por A la propiedad

$$\exists x \in X \text{ tal que } \begin{cases} (x, x_i) \in \mathcal{A}_{n,p} & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ (x, x_i) \notin \mathcal{A}_{n,p} & \text{si } s < i \leq k \end{cases}$$

$$P(x \in X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ verifique la propiedad } A) = p^s \cdot q^{k-s}$$

Entonces

$$P(\forall x \in X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ no verifique la propiedad } A) = (1 - p^s \cdot q^{k-s})^{n-k}$$

Si llamamos S al suceso:

" $G_{n,p}$ verifica la propiedad A "

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - V_{n,k} \cdot \left(1 - p^s \cdot q^{k-s}\right)^{n-k} =$$

$$= 1 - n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot \left(1 - p^s \cdot q^{k-s}\right)^{n-k}.$$

Pero como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot \left(1 - p^s \cdot q^{k-s}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot \left(1 - p^s \cdot q^{k-s}\right)^{n-k} \text{ y como } 0 < p < 1 \text{ y } 0 < q < 1 \text{ es:}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot \left(1 - p^s \cdot q^{k-s}\right)^{n-k} \leq 0$$

es $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S) = 1$.

■

Relación entre el modelo de densidad fija de aristas y el modelo de densidad paramétrica.

Proposición 3.2.1. (Protasi)

Si $c = \frac{1}{\log_b n}$, para todo entero $b > 1$ el modelo de

densidad paramétrica coincide con el modelo de densidad fija de aristas siendo $p = 1 - 1/b$. Cuando c tiende a $1/n$ el modelo de densidad paramétrica describe grafos casi nulos.

Demostración

Para $c = \frac{n}{\log_b n}$ es $p(n) = 1 - n^{-1/\log_b n} = 1 - n^{-\log_n b}$
por tanto $p(n) = 1 - 1/b$.

Si c tiende a $1/n$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^{-1/n^2}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/n^2} = 1 - 1 = 0.$$

■

En las definiciones siguientes $F < G$ significa que F es un subgrafo de G .

Definición 3.2.2.

Se dice que $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$ es un conjunto convexo si $G \in \mathcal{M}^*$ siempre que $G_1 < G < G_2$ siendo G_1 y $G_2 \in \mathcal{M}^*$.

Definición 3.2.3.

Una propiedad \mathcal{A} de los grafos se dice que es una propiedad convexa si

$$(F_1 < G < F_2) \wedge (F_1 \text{ y } F_2 \text{ tienen la propiedad } \mathcal{A}) \rightarrow \\ \rightarrow (G \text{ tiene la propiedad } \mathcal{A}).$$

En el siguiente teorema se utilizan los modelos de grafos esparcidos y de número de aristas función del número de vértices.

Teorema 3.2.2. (Bollobas)

Sea $0 < p = p(n) < 1$ tal que

$$p \cdot n^2 \longrightarrow \infty \text{ y } (1-p) \cdot n^2 \longrightarrow \infty \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

y sea A una propiedad de los grafos. Entonces:

a) Si $0 < \epsilon < 1$ es fijo y si $G_{n,t(n)}$ tiene la propiedad A para las funciones $t(n)$ tales que

$$(1-\epsilon)p \binom{n}{2} < t(n) < (1+\epsilon)p \binom{n}{2},$$

entonces casi todo grafo $G_{n,p}$ tiene la propiedad A .

b) Si A es una propiedad convexa y casi todo grafo de $\mathcal{G}_{n,p}$ tiene la propiedad A , entonces casi todo grafo en

$\mathcal{G}_{n, \lfloor p \binom{n}{2} \rfloor}$ tiene A .

Demostración

Se considera $\mathcal{M} = \mathcal{G}_{n,p}$, siendo $0 < p = p(n) < 1$ tal que $p \cdot n^2 \longrightarrow \infty$ $(1-p)n^2 \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

El espacio muestral $\mathcal{M} = \mathcal{G}_{n,p} = \bigcup_{t=0}^{\binom{n}{2}} \mathcal{G}_{n,t}$ y los grafos $G_{n,t} \in \mathcal{G}_{n,t}$ tienen la misma probabilidad en $\mathcal{G}_{n,t}$ que en $\mathcal{G}_{n,p}$.

$$P(\mathcal{G}_{n,t}) = \binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot q^{\binom{n}{2}-t}.$$

Por tanto el cociente:

$$\frac{P(\mathcal{S}_{n,t})}{P(\mathcal{S}_{n,t+1})} = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot q^{\binom{n}{2}-t}}{\binom{\binom{n}{2}}{t+1} \cdot p^{t+1} \cdot q^{\binom{n}{2}-(t+1)}} = \frac{t+1}{\binom{\binom{n}{2}}{t+1} - t} \cdot \frac{q}{p} \text{ crece con } t \text{ y}$$

$P(\mathcal{S}_{n,t})$ es máxima si

$$\frac{P(\mathcal{S}_{n,t})}{P(\mathcal{S}_{n,t+1})} = \frac{t+1}{\binom{\binom{n}{2}}{t+1} - t} \cdot \frac{q}{p} \geq 1$$

y

$$\frac{P(\mathcal{S}_{n,t-1})}{P(\mathcal{S}_{n,t})} = \frac{t}{\binom{\binom{n}{2}}{t} - (t-1)} \cdot \frac{q}{p} \leq 1$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} q \cdot (t+1) \geq p \left[\binom{\binom{n}{2}}{t+1} - t \right] \\ q \cdot t \leq p \left[\binom{\binom{n}{2}}{t} - (t-1) \right] \end{array} \right\} \Rightarrow p \left[\binom{\binom{n}{2}}{t} + 1 \right] - 1 \leq t \leq p \left[\binom{\binom{n}{2}}{t+1} \right]$$

a) Si $0 < \epsilon < 1$ y n es suficientemente grande

$$\frac{P(\mathcal{S}_{n,t})}{P(\mathcal{S}_{n,t+1})} = \frac{t+1}{\binom{\binom{n}{2}}{t+1} - t} \cdot \frac{q}{p} > 1 - \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t > \binom{\binom{n}{2}}{t+1} \cdot p \cdot (1 - \epsilon).$$

$$\frac{P(\mathcal{G}_{n,t})}{P(\mathcal{G}_{n,t+1})} < 1+\epsilon \rightarrow t < \binom{n}{2} \cdot p \cdot (1+\epsilon)$$

Por tanto siempre que

$$\binom{n}{2} \cdot p \cdot (1-\epsilon) < t(n) < \binom{n}{2} \cdot p \cdot (1+\epsilon)$$

si $P(G_{n,t(n)} \text{ tenga la propiedad } \mathcal{A}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ entonces

$$P(G_{n,p} \text{ tenga la propiedad } \mathcal{A}) =$$

$$= \sum_{t=\lfloor \binom{n}{2} p(1-\epsilon) \rfloor}^{\lfloor \binom{n}{2} p(1+\epsilon) \rfloor} \binom{\binom{n}{2}}{t} \cdot p^t \cdot q^{\binom{n}{2}-t} \cdot P(G_{n,t} \text{ tenga la propiedad } \mathcal{A})$$

tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Luego casi todo grafo tiene la propiedad \mathcal{A} .

b) Llamando $t_1 = \lfloor \binom{n}{2} \cdot p \cdot (1-\epsilon) \rfloor$ y $t_2 = \lfloor \binom{n}{2} \cdot p \cdot (1+\epsilon) \rfloor$ como

$$1-\epsilon < \frac{P(\mathcal{G}_{n,t})}{P(\mathcal{G}_{n,t+1})} < 1+\epsilon \quad \text{siempre que } t_1 \leq t(n) \leq t_2$$

casi todo grafo G tiene un número de aristas t tal que $t_1 \leq t \leq t_2$, es decir,

$$P\left(\bigcup_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{G}_{n,t}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Ademas $\exists \eta / 0 < \eta < \frac{1}{2}$ tal que $P \left[\bigcup_{t=0}^{\binom{n}{2} p} \mathcal{G}_{n,t} \right] > \eta$ para n suficientemente grande.

Como consecuencia si $\mathcal{G} \in \mathcal{M}$ es tal que $P(\mathcal{G})$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists t_1$ y t_2 tales que

$$\binom{n}{2} \cdot p \cdot (1-\epsilon) \leq t_1 \leq \binom{n}{2} \cdot p \leq t_2 \leq \binom{n}{2} \cdot p \cdot (1+\epsilon)$$

$$\frac{|\mathcal{G}_{n,t_1} \cap \mathcal{M}|}{|\mathcal{G}_{n,t_1}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{y} \quad \frac{|\mathcal{G}_{n,t_2} \cap \mathcal{M}|}{|\mathcal{G}_{n,t_2}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Si \mathcal{G} es un conjunto convexo y $\mathcal{G}_{n,t_1} \subset \mathcal{G}_{n,t} \subset \mathcal{G}_{n,t_2}$ entonces

$$\frac{|\mathcal{G}_{n,t} \cap \mathcal{M}|}{|\mathcal{G}_{n,t}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Por tanto siempre que $t_1 \leq t \leq t_2$ se tiene

$$\frac{|\mathcal{G}_{n,t} \cap \mathcal{M}|}{|\mathcal{G}_{n,t}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

En particular se verificará si $t = \lfloor \binom{n}{2} p \rfloor$.

Así, si Λ es una propiedad convexa y casi todo grafo de $\mathcal{G}_{n,p}$ tiene la propiedad Λ , entonces casi todo grafo de $\mathcal{G}_{n, \lfloor \binom{n}{2} p \rfloor}$ tiene la propiedad Λ .

■

Observación 3.2.2.1.

El teorema 3.2.2. expresa la estrecha relación entre los modelos de grafos esparcidos, $\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$, y de número de aristas función del número de vértices, $\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, |\mathcal{A}|=t(n))$, cuando $t(n)$ es próximo a $\binom{n}{2} \cdot p$ que es el número esperado de aristas en $\mathcal{G}_{n,p}$.

Proposición 3.2.2.

a) Para el modelo de densidad fija de aristas, $\mathcal{G}_{n,p}(X, \mathcal{A})$, cuando p es fijo casi todos los grafos $G_{n,p}$ son conexos.

b) Para el modelo de número de aristas fijo, $\mathcal{G}_{n,t}(X, \mathcal{A})$, para $t = \lfloor \binom{n}{2} p \rfloor$ casi todos los grafos $G_{n,t}$ son conexos.

Demostración

a) En el espacio muestral $\mathcal{G}_{n,p}$ definimos la variable aleatoria X :

$X(G) = \{n^2 \text{ de conjuntos } \{x_i, x_j\} \text{ de pares de vértices de } G \text{ tales que ningún vértice de } G \text{ es adyacente a ambos } x_i \text{ y } x_j\}$.

Para cada par $\{x_i, x_j\}$ se define la variable aleatoria de Bernoulli Y_{ij}

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si ningún vértice de } G \text{ es adyacente a } x_i \text{ ya } x_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ y } x_j \text{ están unidos por un camino de longitud 2} \end{cases}$$

esta variable aleatoria tiene parámetro $p(Y_{i,j} = 1) = (1-p^2)^{n-2}$

Así $X = \sum_{i \neq j} Y_{i,j}$ es una variable binomial de parámetros $\binom{n}{2}$ y $(1-p^2)^{n-2}$ y la $E(X) = \binom{n}{2} (1-p^2)^{n-2}$.

Para p fijo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(X) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} (1-p^2)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} (1-p^2)^{n-2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-p^2)^{n-2}}{\ln(1-p^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto el número esperado de pares de vértices de G tales que ningún vértice es adyacente a los del par tiende a cero al aumentar n y esto significa que casi todos los grafos de $\mathfrak{G}_{n,p}$ son conexos.

b) En el espacio muestral $\mathfrak{G}_{n,t}$

$$E(X) = \binom{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left[\binom{n}{t-k} - \binom{n-2-k}{t-k} \right] \cdot P(G_{n,t}) =$$

$$= \binom{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\binom{n-2}{k} \left[\binom{n}{2} - (n-2)k \right]}{\binom{n}{t}}$$

siendo k el número de vértices distintos de x_i y de x_j que son adyacentes a x_i . De los $\binom{n}{2} - (n-2)k$ restantes $(t-k)$ son adyacentes a x_j , de manera que ningún vértice es adyacente a x_i y a x_j a la vez.

Por el teorema 3.2.2. si $t = \lfloor \binom{n}{2} p \rfloor$ siendo $0 < p < 1$ fijo, casi todo grafo $G_{n,t}$ es conexo.

■

Proposición 3.2.3.

Para el modelo de grafos aleatorios con el mismo grado s en cada vértice, para $s \geq 2$, fijo, casi todos los grafos son conexos.

Demostración

Ver Palmer /80/.

En el estudio de los grafos aleatorios con frecuencia interesan no sólo propiedades de $G_{n,p}$ o de $G_{n,t}$ para funciones $p = p(n)$ o $t = t(n)$ cuando n tiende a infinito, sino también las funciones mínimas $p = p(n)$, o $t = t(n)$, para las que $G_{n,p}$ o $G_{n,t}$ tienen casi seguramente una propiedad específica.

Definición 3.2.4.1.

Una función umbral para la propiedad estructural A de los grafos es una función u de \mathbb{N} en \mathbb{R} que tiende monótonamente a infinito cuando n tiende a infinito y tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G_{n, t(n)} \text{ tenga la propiedad } A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t(n)}{u(n)} \rightarrow 0 \\ 1 & \text{si } \frac{t(n)}{u(n)} \rightarrow \infty \end{cases} \quad [108]$$

Observación 3.2.4.1.

Las propiedades para las que se define una función umbral son las que se denominan crecientes en el sentido que si G es un grafo prolongado de F y F tiene la propiedad A entonces G también tiene esa propiedad.

Definición 3.2.4.2.

Una función p-umbral para la propiedad estructural A de los grafos es una función u de \mathbb{N} en \mathbb{R} que tiende monótonamente a infinito cuando n tiende a infinito y tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G_{n, p(n)} \text{ tenga la propiedad } A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p(n)}{u(n)} \rightarrow 0 \\ 1 & \text{si } \frac{p(n)}{u(n)} \rightarrow \infty \end{cases} \quad [109]$$

Observación 3.2.4.2.1.

Una función umbral $u(n)$ es por tanto una función tal que si $t(n)$ (o $p(n)$) es mucho menor que $u(n)$ cuando n es grande es muy improbable que $G_{n,t(n)}$ (o $G_{n,p(n)}$) tenga la propiedad A , y si $t(n)$ (o $p(n)$) es mucho mayor que $u(n)$ cuando n es grande entonces es muy probable que $G_{n,t(n)}$ (o $G_{n,p(n)}$) tengan la propiedad A . Podríamos decir que la propiedad "surge bruscamente" al alcanzar $t(n)$ (o $p(n)$) la función umbral $u(n)$.

Definición 3.2.5.1.

Si $u(n)$ es una función umbral para A y si existe una función F de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que

$P(G_{n,t(n)} \text{ tenga la propiedad } A) \longrightarrow F(x) \text{ si } \frac{t(n)}{u(n)} \longrightarrow x,$
esta función F se llama una función de distribución umbral para A .

Definición 3.2.5.2.

Si $u(n)$ es una función umbral para A y si existe una función F de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que

$P(G_{n,p(n)} \text{ tenga la propiedad } A) \longrightarrow F(x) \text{ si } \frac{p(n)}{u(n)} \longrightarrow x,$
esta función F se llama una función de distribución p-umbral para A .

Definición 3.2.6.1.

El par de funciones $(u_1(n), u_2(n))$ se dice que es un

par umbral para Λ si

$$P(G_{n,t(n)} \text{ tenga la propiedad } \Lambda) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t(n)-u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow -\infty \\ 1 & \text{si } \frac{t(n)-u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow +\infty \end{cases} \quad [110]$$

Definición 3.2.6.2.

El par de funciones $(u_1(n), u_2(n))$ se dice que es un par umbral para Λ si

$$P(G_{n,p(n)} \text{ tenga la propiedad } \Lambda) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p(n)-u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow -\infty \\ 1 & \text{si } \frac{p(n)-u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow +\infty \end{cases} \quad [111]$$

Definición 3.2.7.1.

Una función F de \mathbb{R} en \mathbb{R} es una función de distribución umbral puntualmente si

$$P(G_{n,t(n)} \text{ tenga la propiedad } \Lambda) \longrightarrow F(x) \text{ si } \frac{t(n)-u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow x. \quad [112]$$

siendo $(u_1(n), u_2(n))$ un par umbral.

Definición 3.2.7.2.

Una función F de \mathbb{R} en \mathbb{R} es una función de distribución p-umbral puntualmente si:

$$P(G_{n,p(n)} \text{ tenga la propiedad } A) \longrightarrow F(x) \text{ si } \frac{p(n) - u_1(n)}{u_2(n)} \longrightarrow x. \quad [113]$$

siendo $(u_1(n), u_2(n))$ un par umbral.

¿Cuál será la función umbral para que un grafo $G_{n,t}$ no tenga vértices aislados?

Primero se determina el número esperado de vértices aislados en el modelo de número de aristas fijo $\mathcal{G}_{n,t}(X, \#)$. Para ello se define la variable aleatoria:

$$\eta(G_{n,t}) = \text{"n}^\circ \text{ de vértices aislados en } G_{n,t}\text{"}$$

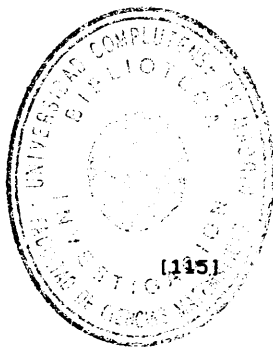
La probabilidad de que un vértice esté aislado es:

$$p = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}}$$

[114]

La variable aleatoria η es $B(n,p)$, por tanto

$$E(\eta) = n \cdot p = n \cdot \frac{\binom{n-1}{t}}{\binom{n}{t}}$$



Teniendo en cuenta que $\binom{n}{t} \leq \frac{n^t}{t!} \leq \left(\frac{e \cdot n}{t}\right)^t$

$$E(\eta) = n \cdot \frac{\binom{n-1}{t}}{\binom{n}{t}} \leq n \cdot \frac{\binom{n-1}{t}}{\binom{n}{t}} = n \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-2t/n)}$$

[116]

$$\text{Si } t = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot e^{-k \cdot \ln n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ \infty & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$$

[117]

Teorema 3.2.3.

En el modelo de número de aristas función del número de vértices $\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$, la función $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo k una constante, es una función umbral para que un

grafo no tenga vértices aislados si $k > 1$ y si $0 < k < 1$ entonces casi todo grafo tiene al menos un vértice aislado.

Demostración

Si $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo $k > 1$, utilizando la desigualdad de Markov:

$$P(\eta \geq 1) \leq E(\eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

y por tanto casi todos los grafos en $\mathcal{G}_{n, u(n)}$ no tienen vértices aislados.

Evidentemente si $\frac{t(n)}{u(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} > 0$ entonces

$$P(G_{n, t(n)} \text{ no tenga vértices aislados}) = 0$$

y si $\frac{t(n)}{u(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ entonces

$$P(G_{n, t(n)} \text{ no tenga vértices aislados}) = 1.$$

Si $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo $0 < k < 1$, entonces casi todos los grafos tienen al menos un vértice aislado.

Si $\eta(G_{n,t}) = "$ número de vértices aislados en $G_{n,t}$ " para probar que $P(\eta = 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} > 0$, se utiliza la desigualdad de Chebychev para $t = |E(\eta)|$:

$$P(\eta = 0) = P\left[|\eta - E(\eta)| \geq |E(\eta)|\right] \leq \frac{V(\eta)}{(E(\eta))^2} = \frac{E(\eta^2) - (E(\eta))^2}{(E(\eta))^2}.$$

Así para probar que $P(\eta = 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ basta demostrar que $E(\eta^2)$ y $(E(\eta))^2$ son asintóticamente equivalentes.

Designando por Y_i la variable aleatoria:

$$Y_i(G) = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } x_i \text{ es aislado} \\ 0 & \text{si el vértice } x_i \text{ no es aislado} \end{cases}$$

la variable $\eta = \sum_{i=1}^n Y_i$.

$$E(\eta^2) = \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) + \sum_{i \neq j} E(Y_i Y_j)$$

pero como $Y_i^2 = Y_i$,

$$E(\eta^2) = E(\eta) + n \cdot (n-1) \cdot E(Y_1 Y_2)$$

Pero $E(Y_1 Y_2) = \frac{\binom{n-2}{t}}{\binom{n}{t}}$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{\binom{n-r}{t}}{\binom{n}{t}} \text{ es asintóticamente equivalente a } e^{-2rt/n} \text{ si}$$

t es $o(n^{3/2})$ y r es constante, se tiene que

$E(\eta^2)$ es asintóticamente equivalente a $E(\eta) + n^2 \cdot e^{-41/n}$ y $E(\eta)$ es asintóticamente equivalente a $n \cdot e^{-21/n}$, de donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\eta^2)}{(E(\eta))^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{E(\eta)} + 1 \right].$$

y como $E(\eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ ya que $0 < k < 1$, se tiene

$$P(\eta = 0) \leq \frac{E(\eta^2) - (E(\eta))^2}{(E(\eta))^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

■

Teorema 3.2.4.

Para el modelo de grafos esparcidos $\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$, $u(n) = c \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo c una constante, es una función p -umbral para que un grafo no tenga vértices aislados si $c > 1$ y si $0 < c < 1$ entonces casi todo grafo tiene al menos un vértice aislado.

Demostración

En $\mathcal{G}_{n,p}$ se define la variable aleatoria ζ del siguiente modo:

$$\zeta(G_{n,p}) = "n^0 \text{ de vértices aislados en } G_{n,p}."$$

La probabilidad de que un vértice en $G_{n,p}$ esté aislado es $(1-p)^{n-1}$.

Como ζ es $B(n, (1-p)^{n-1})$ la $E(\zeta) = n(1-p)^{n-1}$ que es asintóticamente equivalente a $n \cdot e^{-(n-1)p}$ y por tanto a $n \cdot e^{-np}$.

Si se toma $p = c \cdot \frac{\ln n}{n}$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{\ln n \cdot c}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-c} = \begin{cases} 0 & \text{si } c > 1 \\ 1 & \text{si } c = 1 \\ \infty & \text{si } 0 < c < 1 \end{cases}$$

[118]

Por tanto si $c > 1$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\zeta) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow P(\zeta \geq 1) \leq E(\zeta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, es decir, casi todos los grafos

en $\mathcal{G}_{n,p}$ no tienen vértices aislados.

Si $0 < c < 1$ para probar que $P(\zeta = 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ se utiliza la desigualdad de Chebychev.

$$P(\zeta = 0) = P\left[|\zeta - E(\zeta)| \geq |E(\zeta)|\right] \leq \frac{V(\zeta)}{(E(\zeta))^2} = \frac{E(\zeta^2) - (E(\zeta))^2}{(E(\zeta))^2}$$

Se considera la variable $\zeta = \sum_{i=1}^n Y_i$, siendo

$$Y_i(G_{n,p}) = \begin{cases} 0 & \text{si el v\u00e9rtice } x_i \text{ no est\u00e1 aislado} \\ 1 & \text{si el v\u00e9rtice } x_i \text{ est\u00e1 aislado.} \end{cases}$$

$$E(\zeta^2) = \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) + \sum_{i \neq j} E(Y_i \cdot Y_j)$$

pero como $Y_i^2 = Y_i$,

$$E(\zeta^2) = E(\zeta) + n \cdot (n-1) \cdot E(Y_i Y_j)$$

Pero $E(Y_i Y_j) = (1-p)^{2(n-2)+1}$ de donde

$E(\zeta^2) = E(\zeta) + n(n-1)(1-p)^{2(n-2)+1}$ y teniendo en cuenta que

$E(\zeta) = n(1-p)^{n-1}$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\zeta) = \infty$ si $0 < c < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\zeta^2)}{(E(\zeta))^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{E(\zeta)} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2(n-2)+1}}{n^2(1-p)^{2(n-1)}} \right] = 1$$

Por tanto

$$P(\zeta = 0) \leq \frac{E(\zeta^2) - (E(\zeta))^2}{(E(\zeta))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

■

Definición 3.2.8.

Un árbol aleatorio rotulado de n vértices ($n > 2$) es un grafo aleatorio conexo que no tiene ciclos ni aristas múltiples.

Definición 3.2.9.

La distancia entre los vértices x_i y x_j de un grafo aleatorio G es, $d(x_i, x_j)$, el número de aristas de uno de los caminos más cortos que unen x_i con x_j en G .

Es decir, el mínimo número, d , de aristas de los caminos que unen x_i con x_j .

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = x_j \\ d & \text{si } x_i \text{ y } x_j \text{ están conectados por un camino.} \\ +\infty & \text{si } x_i \text{ y } x_j \text{ no están conectados por ningún cami-} \\ & \text{no.} \end{cases}$$

[119]

Definición 3.2.10.

La distancia entre el vértice x_i de $G(X_n, \mathcal{A})$ y un conjunto $C \subset X_n$ se define del siguiente modo:

$$d(x_i, C) = \min_{x_j \in C} d(x_i, x_j).$$

[120]

Definición 3.2.11.

El diámetro de un grafo G con conjunto de vértices X_n es:

$$\delta = \max_{x_i, x_j \in X_n} d(x_i, x_j).$$

[121]

Definición 3.2.12.

El radio de un grafo G con conjunto de vértices X es:

$$r = \min_{x_i \in X} \left[\max_{x_j \in X} d(x_i, x_j) \right].$$

[122]

Definición 3.2.13.

Un subconjunto X de X_n es r -dominante si

$$\forall x_i \in X_n, \exists x_j \in X / d(x_i, x_j) \leq r.$$

O bien, si

$$\max_{x_i \in X_n} (d(x_i, X)) \leq r.$$

[123]

También se dice que X es un r -cubrimiento (r -covering).

Definición 3.2.14.

El número de r -dominancia (número de r -covering) de G , $m(r)$, es el número de vértices de X^* , el conjunto r -dominante de menor cardinal en G .

$$m(r) = |X^*|.$$

[124]

Se han presentado distintos modelos de grafos aleatorios y estudiado relaciones entre ellos. No entraremos en el tratamiento de los aspectos topológicos o geométricos para estos modelos pues nuestro objetivo es la localización de centros en grafos aleatorios que exponemos a continuación.

3.3. El problema del m-centro en grafos aleatorios.

Se pueden extender sin dificultad las definiciones de números de separación externa (1.2.1) y de separación interna (1.2.2) de un subconjunto X_m del conjunto de vértices, sin más que considerar la definición [119] de distancia entre los vértices de un grafo aleatorio. Asimismo para determinar el m-centro externo, el m-centro interno, el radio externo y el radio interno utilizamos las definiciones 1.2.3. y 1.2.4.

También se puede considerar el m-centro interno-externo combinado de un grafo aleatorio, utilizando la definición 1.2.5.

A continuación tratamos el problema de localizar un centro o m centros en los distintos modelos de grafos aleatorios.

Observación 3.3.1.

Se van a localizar las instalaciones en los vértices del grafo, y no precisamente en cualquier punto a lo largo de una arista, pues en los modelos de grafos aleatorios los vértices pueden representar comunidades en las que se van a

instalar hospitales. puntos de los que se propaga una infección, moléculas de un sistema físico o químico, etc. y las aristas no son más que conexiones entre ellas.

Problema 3.3.1. El problema del m-centro para el modelo de grafos esparcidos. $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$.

El problema del m-centro consiste en:

Encontrar un subconjunto X_m de X_n tal que $|X_m|=m$ que minimice:

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X_m)$$

[125]

Observación 3.3.1.1.

Este problema aparece en la localización de instalaciones de emergencia cuando se trata de localizar m hospitales en m poblaciones elegidas entre n posibles de tal forma que minimice la distancia de cada una de las poblaciones al hospital más próximo, teniendo en cuenta que la probabilidad de utilizar una carretera que une x_i con x_j es $p(n)$.

Observación 3.3.1.2.

Si $p(n) = p$ es constante obtenemos como caso particular el modelo de densidad fija de aristas.

En el capítulo 1 se observó, ver Lema 1.2.1., que un grafo $G(X,A)$ tiene números de separación interna y externa

finitos para todos los vértices si y sólo si a partir de cualquier vértice se puede alcanzar cualquier otro siguiendo un camino del grafo. Esto nos sugiere el siguiente teorema para grafos aleatorios:

Teorema 3.3.1.

Para el modelo de grafos esparcidos $\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$, la función $u(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo k una constante, es una función p -umbral para que en el grafo $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$ el problema del m -centro tenga solución casi seguramente si $k > 1$.

Demostración.

Teniendo en cuenta [119] no encontraremos un m -centro en un grafo aleatorio mientras que en éste haya vértices aislados, pero si no hay vértices aislados, como n es finito el problema tiene solución.

Consideramos la variable aleatoria ζ :

$$\zeta(G_{n,p(n)}) = \overset{\circ}{n} \text{ de vértices aislados en } G_{n,p(n)}$$

como ζ es $B(n, (1-p(n))^{n-1})$ sabemos que $E(\zeta) = n(1-p(n))^{n-1}$ y por el teorema 3.2.4 tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ \infty & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$$

Por tanto si $k > 1$ el número esperado de vértices aislados en el modelo de grafos esparcidos tiende a cero cuando n tiende a infinito.

En consecuencia si $p(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo $k > 1$,

por la desigualdad de Markov:

$$P(\zeta(G_{n,p(n)}) \geq 1) \leq E(\zeta) \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De lo que se deduce, teniendo en cuenta [119], que para valores de n suficientemente grandes siempre que $p(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$ ($k > 1$) el problema de minimizar

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X_m)$$

tiene solución casi seguramente, pues todo se reduce a elegir subconjuntos de m elementos del conjunto de vértices y minimizar $d(x_i, X_m)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ para todas las elecciones posibles.

■

Teorema 3.3.2.

Para el modelo de grafos esparcidos $\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$, $u(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo k constante tal que $0 < k < 1$, es una función umbral para que el problema del m -centro no tenga solución casi seguramente.

Demostración.

Por el teorema 3.2.4 sabemos que si $p(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo k constante tal que $0 < k < 1$, entonces casi todo grafo $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$ tiene al menos un vértice aislado, en consecuencia por [119] es imposible encontrar un conjunto

$x_m \in X$ que minimice $\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, x_m)$ en casi todo grafo. Por tanto casi seguramente el problema del m-centro no tiene solución.

■

Problema 3.3.2. El problema del m-centro para el modelo de número de aristas función del número de vértices.

$$S_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n)).$$

El problema del m-centro para este modelo se define como en [125].

Observación 3.3.2.

Este problema se puede aplicar en la localización de instalaciones de emergencia cuando se trata de localizar m puestos de socorro elegidos entre n puntos dados de tal forma que minimice la distancia de cada uno de estos puntos al puesto de socorro más próximo cuando sólo se dispone de t(n) caminos de comunicación.

Teorema 3.3.3.

Para el modelo de número de aristas función del número de vértices $S_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ la función $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$ siendo k una constante es una función umbral para que en el grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ el problema del m-centro tenga solución casi seguramente siempre que $k > 1$.

Demostración.

Consideramos la variable aleatoria η :

$\eta(G_{n,t(n)}) = \overset{0}{n}$ de vértices aislados en $G_{n,t(n)}$.

Como η es $B\left(n, p = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}}\right)$ se tiene que

$$E(\eta) = n \cdot \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}}$$

Si $t(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo $k > 0$ tenemos por [117]

que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ \infty & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$$

Por tanto si $k > 1$ el número esperado de vértices aislados en el modelo de número de aristas función de n tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Por consiguiente, si $t(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$ siendo $k > 1$

$$P(\eta(G_{n,t(n)}) \geq 1) \leq E(\eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} > 0$$

Así, para valores de n suficientemente grandes siempre que $t(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$ ($k > 1$) el problema de minimizar

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X_m)$$

tiene solución casi seguramente, por ser n un número finito.

■

Teorema 3.3.4.

Para el modelo de número de aristas función del número de vértices $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$, $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$ siendo k una constante tal que $0 < k < 1$ es una función umbral para que el problema del m -centro no tenga solución casi seguramente.

Demostración.

Teniendo en cuenta el teorema 3.2.3. si $t(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo k constante tal que $0 < k < 1$, entonces casi todo grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ tiene al menos un vértice aislado, por lo que será imposible encontrar un conjunto $X_m \subset X_n$ que minimice

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X_m)$$

en casi todo grafo.

■

Problema 3.3.3. El problema del m-centro para el modelo de grafos aleatorios con el mismo grado s en cada vértice. $\mathcal{G}_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s})$

Se considera un conjunto fijo $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ siendo $n > 1$ y un número s fijo tal que $1 < s \leq n-1$. Todo grafo aleatorio de este modelo tiene orden n y cada vértice está unido con otros s vértices.

Como $s > 1$ no hay vértices aislados en los grafos de este modelo.

El problema del m-centro en $\mathcal{G}_{n,s}(X_n, \mathcal{A}_{n,s})$ consiste en

Determinar un subconjunto X_m de X_n tal que

$$|X_m| = m$$

que minimice

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{d(x_i, X_m)\}$$

[126]

que por ser X_n un conjunto finito tiene solución cualquiera que sea el grafo aleatorio elegido.

En este caso se puede tratar el problema del m-centro por los procedimientos estudiados en el capítulo 1 restringiendo el conjunto de los puntos de factible localización a los vértices.

Problema 3.3.4. El problema del m-centro para el modelo de aristas probabilizadas. $\mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi}, \pi)$

Se considera $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ siendo n un número natural fijo mayor que 1 y las $\binom{n}{2}$ aristas a_{ij} que unen los

elementos de X_n . Llamamos $\pi: A_{n,\pi} \longrightarrow (0,1)$ que a cada arista a_{ij} hace corresponder $\pi(a_{ij}) = \pi_{ij} \in (0,1)$, que indica la probabilidad de que x_i utilice la instalación localizada en x_j .

En este modelo no hay grafos con vértices aislados.

El problema del m-centro en $\mathcal{S}_{n,\pi}(X_n, A_{n,\pi}, \pi)$ consiste en:

Determinar $X_m \subset X_n$ tal que $|X_m| = m$
que minimice

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left[\min_{x_j \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_i, x_j) \} \right]$$

(127)

que representa la distancia máxima para llegar de x_i al centro más próximo de X_m teniendo en cuenta la probabilidad π_{ij} de que x_i precise servicio de una instalación x_j de X_m .

El problema del m-centro en este tipo de grafos, conocidas las probabilidades π_{ij} se podría resolver considerando el grafo ordinario completo $G(X,A)$, siendo $X = X_n$ minimizando:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\min_{x_j \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_i, x_j) \} \right]$$

Por tanto el problema del m-centro para el modelo de aristas probabilizadas tiene solución y se puede tratar por los procedimientos estudiados en el capítulo 1 considerando como puntos de factible localización los x_i de X_n .

Problema 3.3.5. El problema del m-centro para el modelo de aristas dirigidas y probabilizadas.

$$\mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi}, \pi_{ij})$$

Se considera $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, siendo $x_i = i$ y las $n(n-1)$ aristas orientadas $a_{ij} = (i, j)$ que unen los puntos de X_n . A cada arista a_{ij} se le asocia una probabilidad

$$\pi_{ij} = p(a_{ij}) \in [0,1] \text{ tal que } \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Cada grafo aleatorio de este modelo tiene por conjunto de vértices X_n y por aristas los pares (i, j) que tienen asociada probabilidad $\pi_{ij} \neq 0$.

Como la suma de las probabilidades de las aristas a_{ij} que parten del vértice i -ésimo es igual a la unidad, de cada vértice sale al menos una arista con probabilidad distinta de cero, de lo que deducimos que no hay vértices aislados en los grafos de este modelo.

El problema del m -centro externo en $\mathcal{G}_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi}, \pi_{ij})$ consiste en:

Determinar $X_m \subset X_n$ tal que $|X_m|=m$
que minimice

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left[\min_{x_i \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_i, x_j) \} \right]$$

(128)

Análogamente, el problema del m -centro interno consiste en:

Determinar $X_m \subset X_n$ tal que $|X_m|=m$ que minimice

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left[\min_{x_i \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_j, x_i) \} \right]$$

[129]

Estos problemas se puede tratar considerando el grafo ordinario dirigido y completo $G(X,A)$ siendo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i = i$, considerando π_{ij} ponderaciones, minimizando la función

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{1 \leq j \leq n} \left[\min_{x_i \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_i, x_j) \} \right]$$

o bien:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{1 \leq j \leq n} \left[\min_{x_i \in X_m} \{ \pi_{ij} d(x_j, x_i) \} \right]$$

Definición 3.3.1.

Se dice que un grafo $G_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi})$ orientado es débilmente conexo si el grafo no orientado que se obtiene despreciando la orientación de las aristas es conexo.

Definición 3.3.2.

Se dice que un grafo $G_{n,\pi}(X_n, \mathcal{A}_{n,\pi})$ orientado es fuertemente conexo si desde cualquier vértice de $G_{n,\pi}$ se puede alcanzar cualquier otro vértice siguiendo un camino del grafo.

El problema del m -centro para el modelo de aristas dirigidas y probabilizadas se puede estudiar por los



procedimientos vistos en el capítulo 1 restringiendo el conjunto de los puntos de factible localización a los vértices. Este problema tendrá solución, por el lema 1.2.1. si y sólo si el grafo es fuertemente conexo.

Problema 3.3.6. El problema del m-centro para el modelo de grafos con número de aristas variable.

$$\mathcal{G}_{n,T}(X_n, \mathcal{A}_{n,T}, \xi(i))$$

Dado $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ siendo $x_i = i$ y un conjunto de n variables aleatorias $\xi(i)$ independientes e idénticamente distribuidas tales que $P(\xi(i) = j) = \rho_j$, siendo $\sum_{j=1}^n \rho_j = 1$, cada grafo aleatorio de este modelo tiene orden n y por aristas $(i, \xi(i)=j)$ con probabilidades asociadas ρ_j tales que $\sum_{j=1}^n \rho_j = 1$.

En este caso de cada vértice salen el mismo número de aristas y con la probabilidad $P(\xi(i) = j) = \rho_j$ constante para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

El problema del m-centro en $\mathcal{G}_{n,T}(X_n, \mathcal{A}_{n,T}, \xi(i))$ se puede formular así:

$$\begin{aligned} & \text{Determinar } X_m \subset X_n \text{ tal que } |X_m| = m \\ & \text{que minimice} \\ & \max_{1 \leq i \leq n} \left[\min_{x_j \in X_m} [\rho_j d(x_i, x_j)] \right] \text{ para los valores de } \rho_j \neq 0 \end{aligned}$$

[129]

cuya solución se puede tratar considerando el grafo ordinario dirigido $G(X,A)$ siendo $X = \{1, 2, \dots, n\}$ y A el conjunto de aristas dirigidas $(i, \zeta(i)=j)$ con probabilidades asociadas $p_j \neq 0$, tomando p_j como las ponderaciones de las correspondientes aristas.

Por tanto los modelos de grafos esparcidos y de número de aristas función del número de vértices son los que necesitan un nuevo tratamiento.

3.4. El problema del r-cubrimiento.

Problema 3.4.1. El problema del r-cubrimiento en el modelo de grafos esparcidos y en el modelo de número de aristas función del número de vértices.

Para un grafo $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$ del espacio muestral $\mathcal{S}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$ o bien $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ del espacio muestral $\mathcal{S}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ el problema del r-cubrimiento consiste en:

Determinar un subconjunto X^* de X_n

que minimice $|X^*|$

sujeto a

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) \leq r.$$

[130]

Observación 3.4.1.

Este problema proporciona un conjunto r-dominante.

Observación 3.4.2.

Si determinamos $X^* \subset X$ que minimice $|X|$ sujeto a

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) < r$$

se denomina el problema del r-cubrimiento estricto.

El $|X^*| = m(r)$ es el número de r-dominación.

Relación entre el problema del m-centro y del r-cubrimiento en el modelo de número de aristas fijo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$.

Vamos a ver que si en el grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ tiene solución el problema del m-centro también tiene solución el problema del r-cubrimiento.

Teorema 3.4.1.

Dado un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ la sucesión de los radios

$$r(m) = \min_{|X| \leq m} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X), \text{ siendo } X \subset X_n \right\} \text{ para } m = 1, 2,$$

..., n es no creciente.

Demostración.

Si $m_1 < m_2$ y X^* es un m_1 -centro de $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ entonces $|X^*| \leq m_1 < m_2$, por tanto

$$\begin{aligned} r(m_1) &= \min_{|X| \leq m_1} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X), \text{ siendo } X \subset X_n \right\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \min_{|X| \leq m_2} \{ \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X), \text{ siendo } X \subset X_n \} = r(m_2)$$

por tanto $r(m)$ es no creciente.

■

Teorema 3.4.2.

Dado un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ la función de dominación

$$m(r) = \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r \}, \text{ siendo } r \geq 0$$

es no creciente y $m(r) = m, \forall r / r(m) \leq r < r(m-1)$.

Demostración.

Si $r_1 < r_2$ y X^* es un r_1 -cubrimiento de $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$

entonces $\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) \leq r_1 < r_2$, de donde

$$\begin{aligned} m(r_1) &= \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r_1 \} = |X^*| \geq \\ &= \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r_2 \} = m(r_2) \end{aligned}$$

luego $m(r)$ es no creciente.

Vamos a demostrar que $m(r) = m, \forall r / r(m) \leq r \leq r(m-1)$.

Si $r(m) \leq r \leq r(m-1)$ y X^* es un m -centro de $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ entonces:

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) = r(m) \leq r \text{ y } |X^*| = m$$

de donde se deduce que

$$m(r) = \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r \} \leq m$$

[131]

Además $\forall X \subset X_n / \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r$, si fuese $|X| < m$ entonces $r(m-1) = \min_{|X| \leq m-1} \{ \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \}$, siendo $X \subset X_n$ es menor o igual a r contra la hipótesis de ser $r < r(m-1)$. Por tanto $\forall X \subset X_n / \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r$ es $|X| \geq m$ y en consecuencia

$$m(r) = \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r \} \geq m$$

[132]

De [131] y [132] se deduce que $m(r) = m$ para todo r tal que $r(m) \leq r \leq r(m-1)$.

■

Corolario 3.4.2.1.

Si $r(m) \leq r < r(m-1)$ entonces $m(r) = m$ y si $r = r(m)$ entonces $m(r) = m$.

Demostración.

Es una consecuencia inmediata del teorema.

■

Corolario 3.4.2.2.

$$r < r(m) \Leftrightarrow m < m(r).$$

Demostración.

☞ Si $r < r(m)$ por el corolario 3.4.2.1. es $m(r) = m+1$ y por tanto $m(r) > m$.

☛ Si $m < m(r)$ supongamos que $r \geq r(m)$ entonces, por el corolario 3.4.2.1., $m(r) = m$ que es una contradicción con la hipótesis, por tanto si $m < m(r)$ entonces $r < r(m)$.

■

Teorema 3.4.3.

Dado un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ todo $m(r)$ -centro de $G_{n,t}$ es un r -cubrimiento y $m(r)$ es el menor número m tal que $r(m) \leq r$.

Demostración.

Si $r(m) \leq r < r(m-1)$ entonces, por el corolario 3.4.2.1., es $m = m(r)$.

Si X^* es un $m(r)$ -centro entonces $|X^*| = m(r) = m$ y

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) \leq r(m).$$

Como $m(r) = \min_{X \subset X_n} \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r \}$ se deduce que $\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X^*) \leq r$. Por tanto $|X^*| = m(r)$ y X^* es

un r -cubrimiento de $G_{n,t}$.

Además si $m < m(r)$, por el corolario 3.4.2.2., es $r < r(m)$. Luego $m(r)$ es el menor valor de m tal que $r(m) \leq r$.

■

Observación 3.4.3.1.

Por tanto siempre que en un grafo aleatorio $G_{n,t}$ tenga solución el problema del m -centro, también tendrá solución el problema del r -cubrimiento.

Teorema 3.4.4.

Para el modelo de número de aristas función del número de vértices $\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$

a) La función $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo k una constante, es una función umbral para que en el grafo

$G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t}, t=t(n))$ el problema del r -cubrimiento tenga solución casi seguramente si $k > 1$.

b) La función $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$, siendo k una constante y $0 < k < 1$, es una función umbral para que el problema del r -cubrimiento no tenga solución casi seguramente.

Demostración.

Es inmediata teniendo en cuenta los resultados de los teoremas 3.3.3., 3.3.4. y 3.4.3.

■

Teorema 3.4.5.

Para el modelo de grafos esparcidos

$\mathcal{G}_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p}, p=p(n))$

a) La función $u(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$, siendo k una constante, es una función p -umbral para que en el grafo $G_{n,p}(X_n, \mathcal{A}_{n,p})$ el problema del r -cubrimiento tenga solución casi seguramente si $k > 1$.

b) La función $u(n) = k \cdot \frac{\ln n}{n}$ siendo k una constante tal que $0 < k < 1$ es una función p -umbral para que el problema del r -cubrimiento no tenga solución casi seguramente.

Demostración.

Es inmediata teniendo en cuenta los resultados de los teoremas 3.3.1., 3.3.2. y 3.3.3.

■

Como consecuencia de los teoremas anteriores:

La probabilidad de que el problema del m -centro (o el problema del r -cubrimiento), en el modelo de número de aristas fijo, tenga solución es prácticamente nula para un valor de $|X_n| = n$ fijo siempre que $t < \frac{n \cdot \ln n}{2}$, para valores grandes de n .

3.5. Algoritmos para grafos aleatorios.

3.5.1. Algoritmo de Takamizawa, Takiuchi y Nishizeki.

Este algoritmo permite construir un grafo aleatorio para el modelo de número de aristas fijo.

$\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se asigna a X_n el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, a $\mathcal{A}_{n,t}$ el \emptyset , a J el valor $n(n-1)/2$ y a T el valor 0.

Paso 2. Se numeran desde 1 hasta $n(n-1)/2$ las $\binom{n}{2}$ aristas posibles.

Paso 3. Si $T = t$ entonces parar, $\mathcal{A}_{n,t}$ es el conjunto de aristas del grafo aleatorio. En caso contrario seguir al *paso 4*.

Paso 4. Se generan números naturales aleatorios K tales que $1 \leq K \leq J$.

Paso 5. Se asigna a $\mathcal{A}_{n,t}$ el resultado $\mathcal{A}_{n,t} \cup a_k$, siendo a_k la arista numerada con K y a T el valor $T+1$.

Paso 6. Se pasa a_k al final de la lista, es decir, se hace $a_j = a_k$ y se asigna a J el valor $J-1$. Volver al *paso 3*.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X_n|^2).$$

3.5.2. Algoritmo de Takamizawa, Takiuchi y Nishizeki.

Con este algoritmo se obtiene un grafo aleatorio conexo para el modelo de número de aristas fijo, $\mathcal{G}_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se asigna a X_n el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, a $\mathcal{A}_{n,t}$ el \emptyset , a J el valor $n(n-1)/2$ y a T el valor 0.

Paso 2. Se numeran desde 1 hasta $n(n-1)/2$ las $\binom{n}{2}$ aristas posibles.

Paso 3. Se asigna a V_i el conjunto $\{i\}$ para $1 \leq i \leq n$, a T_i el \emptyset y a T_f el \emptyset .

Paso 4. Si $T=t$ entonces parar. $\mathcal{A}_{n,t}$ es el conjunto de aristas del grafo aleatorio conexo. En caso contrario seguir al *paso 5*.

Paso 5. Se generan números naturales aleatorios K tales que $1 \leq K \leq J$.

Paso 6. Se asigna a T_i el conjunto V_i formado por un extremo de la arista K y a T_f el conjunto formado por el otro extremo de la arista K .

Paso 7. Si $T_i = T_f$, entonces volver al **paso 5**. En caso contrario seguir al **paso 8**.

Paso 8. Se asigna a $\mathcal{A}_{n,t}$ el conjunto $\mathcal{A}_{n,t} \cup a_k$, siendo a_k la arista numerada con K y a T el valor T+1.

Paso 9. Asignar a a_j la arista a_k y a J el valor J-1. Volver al **paso 4**.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X_n|^2).$$

3.5.3. Algoritmo para determinar un 1-centro para un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ conexo.

Dado un grafo conexo del modelo de número de aristas fijo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ se puede determinar un centro en ese grafo.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se calculan las distancias

$$d(x_i, x_j), \forall x_j \in X_n - \{x_i\}$$

y se inicializa $i = 1$.

Paso 2. Se elige x_i y se calcula

$$\max_{1 \leq j \leq n} d(x_j, x_i).$$

Paso 3. Se hace $x^* = x_i$ y $r^* = \max_{1 \leq j \leq n} d(x_j, x_i)$.

Paso 4. Se asigna a i el valor $i+1$ y se repite el **paso 2**.

Paso 5. Si $\max_{1 \leq j \leq n} d(x_j, x_i) < r^*$ se hace $x^* = x_i$ y $r^* = \max_{1 \leq j \leq n} d(x_j, x_i)$.
 Si $\max_{1 \leq j \leq n} d(x_j, x_i) \geq r^*$ volver al *paso 4*.

Paso 6. Si $i = n$ entonces parar, x^* es el 1-centro buscado y r^* es el 1-radio.
 Si $i < n$ volver al *paso 4*.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|\mathcal{A}_{n,t}| \cdot \log |X_n|).$$

Observación 3.5.3.1.

Este algoritmo determina un 1-centro para un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ conexo, pero puede existir más de un centro. El resultado por tanto puede no ser único. El conjunto de todos los 1-centros forma un conjunto central.

Para determinar el conjunto central se podría aplicar n veces el algoritmo comenzando cada vez con uno de los n vértices. El conjunto formado por los 1-centros encontrados sería dicho conjunto central.

3.5.4. Algoritmo para determinar un m-centro para un grafo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ conexo.

Se trata de determinar un m -centro en un grafo conexo $G_{n,t}(X_n, \mathcal{A}_{n,t})$ del modelo de número de aristas fijo.

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Se asigna a X_n el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y se eligen todos los $\binom{n}{t-1}$ conjuntos C_i de $t-1$ vértices que se numeran de 1 a $\binom{n}{t-1}$. Se inicializa $i = 1$, $r^* = 0$, $X_m = \emptyset$.

Paso 2. Se elige C_i .

Paso 2.1. Se elige el conjunto Y de vértices no cubiertos por los $(t-1)$ vértices de C_i .

Paso 2.2. Se determina el 1-centro x^* de Y utilizando el algoritmo 3.5.3.

Paso 2.3. $r_i^* = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(x_i, x^*), \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, Y)\}$.

Paso 3. Se hace $r^* = r_i^*$ y $X_m = C_i \cup \{x^*\}$.

Paso 4. Se asigna a i el valor $i+1$ y se repiten los pasos 2, 2.1, 2.2 y 2.3.

Paso 5. Si $r_i < r^*$ se repite el paso 3, en caso contrario volver al paso 4.

Paso 6. Si $i = \binom{n}{t-1}$, parar. X_m es el m -centro buscado y r^* es el m -radio.

Si $i < \binom{n}{t-1}$ volver al paso 4.

COMPLEJIDAD:

La complejidad de este algoritmo es:

$$O(|X_n|^{t-1} \cdot |X_n| \cdot \log |X_n|).$$

CAPITULO 4. CUADROS RESUMEN DE LOS ALGORITMOS.

**CUADROS RESUMEN DE ALGORITMOS PARA
LOCALIZACION EN GRAFOS ORDINARIOS.**

4.I. Calculo de distancias.

4.II. Centros locales.

4.III. El centro absoluto.

4.IV. El m-centro.

4.I. Algoritmos para calculo de distancias en grafos ordinarios.

ALGORITMO	I.1. Dijkstra Modificado
Modelo del grafo	$G(X,A)$
Resuelve el problema de:	Calcular las distancias desde (o hasta) un vértice en G construyendo el árbol de caminos mínimos a partir de (o hasta) él.
Complejidad	$O(A \cdot \log X)$

ALGORITMO	I.2. Dijkstra global Modificado
Modelo del grafo	$G(X,A)$ P una lista de puntos p con factores de ponderación $v(p)$ para cada $p \in P$.
Resuelve el problema de:	Calcular a la vez las distancias hasta o desde un conjunto finito de puntos o de vértices P con unas ponderaciones $v(p)$.
Complejidad	$O(P \cdot A \cdot \max\{\log X , \log P \})$

4.II. Algoritmos para centros locales en grafos ordinarios.

ALGORITMO	II.1. Algoritmo de centros locales
Modelo del grafo	(G,U,F)
Resuelve el problema de:	Determinar los centros locales de F con respecto a U cuyo rango está entre r' y r'' , cotas inferior y superior respectivamente del radio de F con respecto a U, y los puntos de U que cubren dentro de su rango.
Complejidad	$O(A \cdot U ^2)$

ALGORITMO	II.2. Algoritmo de Kariv y Hakimi
Modelo del grafo	(G,U,F)
Resuelve el problema de:	Determinar la mejor localización factible en una arista, para hallar el centro absoluto de F con respecto a U.
Complejidad	$O(U \cdot \log U)$
Mejora:	Algoritmo de relajación

4.III. Algoritmos para el centro absoluto en grafos ordinarios.

ALGORITMO	III.1. El método de Hakimi
Modelo del grafo	G(X,A) no dirigido o dirigido con vértices ponderados.
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de G.
Complejidad	$O(A \cdot X + X ^2 \cdot \log X)$
Mejoras:	El método de Hakimi modificado. El método iterativo.

ALGORITMO	III.2. Algoritmo de Minieka
Modelo del grafo	G(X,A) no dirigido con longitudes simétricas.
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de G.
Complejidad	$O(A \cdot X + X ^2 \cdot \log X)$
Mejora:	Algoritmo de relajación.

4.IV. Algoritmos para el m-centro en grafos ordinarios.

ALGORITMO	IV.1. Algoritmo de Minieka
Modelo del grafo	$G(X,A)$ con vértices no ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto de G .
Complejidad	$O(X ^{2m+1} \cdot A ^m)$

ALGORITMO	IV.2. Algoritmo de Kariv y Hakimi
Modelo del grafo	$G(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto de G .
Complejidad	$O(A ^m \cdot X ^{2m-1} \cdot \log X)$
Mejora:	Algoritmo de Moreno.

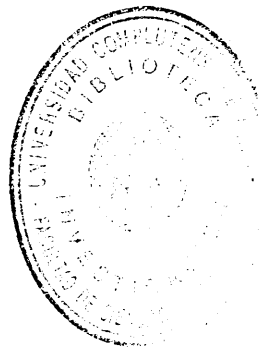
ALGORITMO	IV.3. Algoritmo de Moreno
Modelo del grafo	G(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto de G.
Complejidad	$O(A ^m \cdot X ^{(m+1)} \cdot \log X)$

ALGORITMO	IV.4. Algoritmo de Minieka
Modelo del grafo	(G,U,F) siendo F cualquiera con frontera finita.
Resuelve el problema de localizar:	m-centro de F con respecto a U.
Complejidad	$O(A ^m \cdot U ^{(2m+1)})$
Mejoras:	Algoritmo de relajación. Algoritmo de relajación mejorado.

ALGORITMO	IV.5. Algoritmo de relajación para m-centro
Modelo del grafo	(G,U,F) siendo F cualquiera con frontera finita.
Resuelve el problema de localizar:	m-centro de F con respecto a U.
Complejidad	$O(\max \{ A \cdot \log X , U \cdot M^m, U ^2 \} \cdot M)$ siendo M el número de centros locales con respecto al último conjunto relajado R de U.
Mejora:	Algoritmo de relajación mejorado.

ALGORITMO	IV.6. Algoritmo de Kariv y Hakimi
Modelo del grafo	(G,U,F) siendo F cualquiera con frontera finita.
Resuelve el problema de localizar:	m-centro de F con respecto a U y determinar el m-radio.
Complejidad	$O(A ^m \cdot U ^{(2m-1)} \cdot \log U)$

ALGORITMO	IV.7. Algoritmo de Kariv y Hakimi
Modelo del grafo	(G,U,F,P) siendo F cerrado y P el conjunto de puntos de servicio preestablecidos.
Resuelve el problema de localizar:	m-centro de F con respecto a U dado P.
Complejidad	$O(A ^m \cdot U ^{(2^m-1)} \cdot \log A \cdot (\log U)^2)$



**CUADROS RESUMEN DE ALGORITMOS PARA
LOCALIZACION EN ARBOLES Y REDES.**

- 4.V. Centros locales.**
- 4.VI. El centro absoluto.**
- 4.VII. El r-cubrimiento.**
- 4.VIII. El m-centro.**
- 4.IX. El m-centro con centros preestablecidos.**
- 4.X. m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas.**
- 4.XI. m-centros con distancias restringidas.**
- 4.XII. Multiinstalación minimax t-objetivo.**

4.V. Algoritmos para centros locales en redes.

ALGORITMO	V.1. El metodo de Hakimi (1965)
Modelo de red	$N(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	El centro local en una arista de la red.
Complejidad	$O(X \cdot \log X)$

ALGORITMO	V.2. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios en los vértices.
Resuelve el problema de localizar:	El centro local en una arista de la red.
Complejidad	$O(X)$

4.VI. Algoritmos para el centro absoluto en redes.

VI.1. Algoritmo para el centro absoluto en una red.

ALGORITMO	VI.1.1. Hakimi, Schmeichel y Pierce (1978)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios en los vértices.
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(A \cdot X \cdot \log X)$
Mejora:	Algoritmo de Kariv y Hakimi (1979)

ALGORITMO	VI.1.2. Método de Hakimi (1978)
Modelo de red	$N(X,A)$ con vértices ponderados.
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(A \cdot X \cdot \log X)$
Mejora:	Algoritmo de Kariv y Hakimi (1979)

ALGORITMO	VI.1.3. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios.
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(A \cdot X + X ^2 \log X)$

VI.2. Algoritmos para el centro absoluto en una red-árbol.

ALGORITMO	VI.2.1. Goldman (1972)
Modelo de red	$T(X,A)$ con pesos unitarios y con sumandos h_i
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(X ^2)$

ALGORITMO	VI.2.2. Método de Handler (1973)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios y $h_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(X)$

ALGORITMO	VI.2.3. Dearing y Francis (1974)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados y sumandos h_i
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(X ^2)$

ALGORITMO	VI.2.4. Lin (1975)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios y con sumandos h_i
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(X')$ siendo $ X' = X + V $ y $ V $ el número de h_i no nulos.

ALGORITMO	VI.2.5. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados y sumandos h_i
Resuelve el problema de localizar:	Centro absoluto de la red.
Complejidad	$O(X \log X)$

ALGORITMO	VI.2.6. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$T(X,A)$ con vértices ponderados y sumandos h_v
Resuelve el problema de localizar:	1-centro restringido a los vértices.
Complejidad	$O (X \log X)$

4.VII. Algoritmos para resolver el problema del r-cubrimiento en redes.

ALGORITMO	VII.1. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$T(X,A)$ con pesos v_v en los vértices
Resuelve el problema de localizar:	Un conjunto dominante absoluto de radio r
Complejidad	$O (X)$

ALGORITMO	VII.2. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	T(X,A) con pesos v_i en los vértices
Resuelve el problema de localizar:	Un conjunto dominante de radio r restringido a los vértices.
Complejidad	$O(X)$

4.VIII. Algoritmos para el m-centro en redes.

VIII.1. Algoritmos para el m-centro en una red.

ALGORITMO	VIII.1.1. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	N(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m - centro
Complejidad	$O(A ^m X ^{2m-1} / (m-1)!)$

ALGORITMO	VIII.1.2. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$N(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m - centro
Complejidad	$O (A ^m X ^{2m-1} \log X / (m-1)!)$

ALGORITMO	VIII.1.3. Minieka (1970)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto con puntos de demanda en los vértices.
Complejidad	$O (X + \binom{ X }{2} \cdot A)$

ALGORITMO	VIII.1.4. Handler y Rozman (1985)
Modelo de red	N(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto con puntos de demanda en los vértices.
Complejidad	$O (X + \binom{ X }{2} \cdot A)$

ALGORITMO	VIII.1.5. Moreno (1985)
Modelo de red	N(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto con puntos de demanda en los vértices
Complejidad	$O (X ^2 \log X)$

VIII.2. Algoritmos para el m -centro en una red-árbol.

ALGORITMO	VIII.2.1. Handler (1978)
Modelo de red	$T(X,A)$ con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	2-centro absoluto con puntos de demanda en los vértices.
Complejidad	$O(X)$

ALGORITMO	VIII.2.2. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	$T(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m -centro restringido a los vértices
Complejidad	$O(X ^2 \cdot \log X)$

ALGORITMO	VIII.2.3. Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto y el correspondiente m - radio
Complejidad	$O (X ^2 \cdot \log X)$

ALGORITMO	VIII.2.4. Hakimi, Schemichel y Pierce (1978)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro restringido a los vértices siendo $m > 1$.
Complejidad	$O (X \cdot \log^{m-1} X)$

ALGORITMO	VIII.2.5. Hakimi, Schemichel y Pierce (1978)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto siendo $m > 2$.
Complejidad	$O [X \cdot \log^{m-2} X]$

ALGORITMO	VIII.2.6. Chandrasekaran y Tamir (1980)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro continuo con puntos de demanda también en vértices o en las aristas.
Complejidad	$O [(X \cdot \log m)^2]$

ALGORITMO	VIII.2.7. Megiddo, Tamir, Zemel, Chandrasekaran (1981)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro en el caso en que los puntos de demanda o los de posible localización o ambos estén restringidos a los vértices.
Complejidad	$O(X \min \{m \log^2 X , X \log m\})$

ALGORITMO	VIII.2.8. Megiddo, Tamir, Zemel, Chandrasekaran (1981)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro en el caso en que los puntos de demanda o los de posible localización o ambos estén restringidos a los vértices.
Complejidad	$O(X \min \{m \log^2 X , X \log m\})$

ALGORITMO	VIII.2.9. Tansel, Francis, Lowe y Chen (1982)
Modelo de red	$T(X,A)$ con funciones f_i de la distancia $d(x_i, Y)$, continuas y estrictamente decrecientes asociadas a sus vértices.
Resuelve el problema de localizar:	m -centro no lineal con distancias restringidas.
Complejidad	$O(X ^4 \log X)$ con algoritmo para el r -cubrimiento de $O(X ^2)$ y $O(X ^3 \log X)$ si el algoritmo de r -cubrimiento es de complejidad $O(X)$.

ALGORITMO	VIII.2.10. Tamir y Zemel (1982)
Modelo de red	$T(X,A)$ con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m -centro siendo Σ (suministros) y Δ (demandas) colecciones de un número finito de subregiones de T disjuntas, cerradas y conexas y ambas discretas.
Complejidad	$O(X \log^2 X)$

ALGORITMO	VIII.2.11. Tamir y Zemel (1982)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro siendo Σ (suministros) y Δ (demandas) colecciones de un número finito de subregiones de T disjuntas, cerradas y conexas y tales que ambas contienen una arista entera.
Complejidad	$O (X \cdot \min \{m \cdot \log^2 X , X \cdot \log m\})$

ALGORITMO	VIII.2.12. Megiddo y Tamir (1983)
Modelo de red	T(X,A) con pesos unitarios
Resuelve el problema de localizar:	m-centro continuo
Complejidad	$O (X \cdot \log^3 X)$

ALGORITMO	VIII.2.13. Megiddo y Tamir (1983)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro absoluto con puntos de demanda restringidos a los vértices.
Complejidad	$O (X \cdot \log^3 X)$

ALGORITMO	VIII.2.14. Mejorado de Megiddo y Tamir (1983)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro con puntos de demanda y de posible localización restringidos a los vértices.
Complejidad	$O (X \cdot \log^2 X)$

ALGORITMO	VIII.2.15. Mejorado de Megiddo y Tamir (1983)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro con puntos de demanda restringidos a los vértices
Complejidad	$O (X \cdot \log^2 X \cdot \log \log X)$

4.IX. Algoritmos para el problema del m-centro con centros preestablecidos en redes.

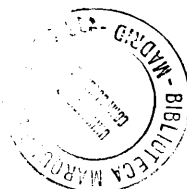
ALGORITMO	IX.1. Modificado de Kariv y Hakimi (1979)
Modelo de red	T(X,A) con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m-centro con m_1 centros preestablecidos
Complejidad	$O (X ^2 \cdot \log X)$

4.X. Algoritmos para localizar m instalaciones minimax con comunicaciones mutuas en redes.

ALGORITMO	X.1. Procedimiento de Localización Secuencial de Francis, Lowe y Ratliff (1978)
Modelo de red	$N(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	m -instalaciones minimax con comunicaciones mutuas.
Complejidad	$O [m.(X + m)]$

4.XI. Algoritmos para localizar m -centros con distancias restringidas en redes.

ALGORITMO	XI.1. Procedimiento de Intersección Secuencial de Francis, Lowe y Ratliff (1978)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios.
Resuelve el problema de localizar:	Un centro en la red con distancias restringidas.
Complejidad	$O [X]$



ALGORITMO	XI.2. Procedimiento de Localización Secuencial de Francis, Lowe y Ratliff (1980)
Modelo de red	$N(X,A)$ con pesos unitarios.
Resuelve el problema de localizar:	Localizar m nuevos centros con distancias restringidas.
Complejidad	$O (m \cdot (X + m))$

4.XII. Algoritmos para el problema de multiinstalación minimax t -objetivo en redes.

ALGORITMO	XII.1. Tansel, Francis y Lowe (1982)
Modelo de red	$N(X,A)$ con vértices ponderados
Resuelve el problema de localizar:	una multiinstalación minimax t -objetivo para $t = 2$.
Complejidad	$O [m^2 \cdot (m + X ^2)]$

CUADROS RESUMEN DE ALGORITMOS PARA
GRAFOS ALEATORIOS

4.XIII. Algoritmos para grafos aleatorios.

4.XIV. Algoritmo para el 1-centro.

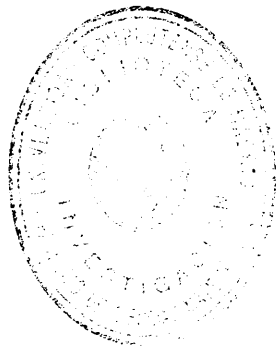
4.XV. Algoritmo para el m-centro.

XIV. Algoritmo para el 1-centro en grafos aleatorios.

ALGORITMO	XIV. Algoritmo para el 1-centro
Modelo de grafo aleatorio	Modelo de número de aristas fijo
Resuelve el problema de localizar:	Un centro entre los vértices de un grafo aleatorio conexo.
Complejidad	$O(A_{n,t} \cdot \log X_n)$

XV. Algoritmo para el m-centro en grafos aleatorios.

ALGORITMO	XV. Algoritmo para determinar un m-centro.
Modelo de grafo aleatorio	Modelo de número de aristas fijo
Resuelve el problema de localizar:	Un m-centro restringido a los vértices de un grafo aleatorio conexo.
Complejidad	$O(X_n ^{t-1} \cdot A_{n,t} \cdot \log X_n)$



CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Al comenzar el trabajo centramos el interés en los problemas de localización minimax que dan lugar a centros en grafos.

Primero se estudian distintos modelos de grafos ordinarios, que pueden ser no dirigidos o dirigidos e incluso con unas aristas dirigidas y otras no, que reciben el nombre de grafos mixtos. También se consideran grafos con un conjunto U de puntos de demanda, un conjunto F de puntos de factible localización e incluso con centros preestablecidos.

Para los grafos no dirigidos se puede asegurar la existencia de centro si el grafo es conexo. En el caso de los dirigidos hay que exigir, Lema 1.2.1., que sea fuertemente conexo.

Según se considere que el m -centro (o un solo centro, si $m=1$) esté formado por vértices o pueden ser puntos situados en las aristas del grafo, nos encontramos ante un problema de m -centro restringido a los vértices o un problema de centro absoluto. Para determinar el centro absoluto de un grafo, Teoremas 1.3.1.1., 1.3.1.2., 1.3.1.3., se precisa el concepto de centro local.

Se demuestra que en un grafo no dirigido, el centro absoluto sólo puede estar en los vértices, en los puntos frontera y en los centros locales con respecto a pares de puntos, y que si la frontera es finita el conjunto de los

centros locales es finito. Teorema 1.3.1.3., y por tanto el problema del centro tiene solución, que se puede encontrar con un procedimiento finito.

Si el grafo es dirigido se demuestra que el centro sólo puede estar en los vértices, en los puntos de demanda o en los puntos frontera y si estos son conjuntos finitos el problema del m -centro se puede resolver por un procedimiento finito.

Para asegurar la existencia de un m -centro en un grafo con centros preestablecidos se demuestra que es preciso que F , conjunto de puntos de factible localización, sea cerrado y tenga frontera finita. Teorema 1.4.2.. Para la obtención del m -centro y del m -radio véanse los teoremas 1.4.3 y 1.4.4.

Si, en lugar de minimizar la distancia máxima de un conjunto X_m al conjunto U de puntos de demanda, se trata de minimizar el número de centros a localizar con una cota r para la separación al conjunto de puntos de demanda, se define el problema del r -cubrimiento.

Se demuestra que si el conjunto U de puntos de demanda es finito, $\forall r > 0$ existe un r -cubrimiento, X^* , formado por centros locales, tal que $S(U, X^*) < r$ y que, si el conjunto U de los puntos de demanda es finito y el conjunto F de los puntos de factible localización es cerrado, entonces un r -cubrimiento de U por F está formado por centros locales de F con respecto a U de rango menor o igual a r .

Para determinar los centros locales de F con respecto a U , si éste está formado por más de dos puntos, hay que tener

en cuenta el teorema 1.3.1.4. que afirma que un vértice puede ser centro local con respecto a un conjunto de m puntos de demanda y no serlo con respecto a un subconjunto propio.

Un resultado interesante es el teorema 1.5.3. que relaciona el problema del m -centro y el del r -cubrimiento.

Consideramos en el capítulo 2 los árboles y los grafos orientados y ponderados, redes, y en particular las redes-árbol y se estudia el problema del m -centro en una red, primero restringido a los vértices y a continuación, sin esta restricción, los del m -centro absoluto y del m -centro continuo, que se extienden para redes con centros preestablecidos. Se presentan otros tres problemas, también de interés en la práctica, que son la localización de m instalaciones mimimax con comunicaciones mutuas, el de localizar m -centros con distancias restringidas, y el de multiinstalación minimax t -objetivo.

Para hallar el 1-centro absoluto de una red-árbol se define un centroide y se demuestra, teorema 2.5.3.5.1., que el 1-centro está en el subárbol que consta de un subárbol no separable $T_{x,l}$, el vértice x y la arista que conecta x con $T_{x,l}$.

Para encontrar m -centros en una red todos los procedimientos consisten en generar y resolver una sucesión de problemas de r -cubrimiento, con r decreciente, partiendo del conjunto de valores factibles del m -radio absoluto.

En el capítulo 3 se extiende el estudio de la localización de centros a grafos aleatorios.

Primero se definen distintos modelos de grafos aleatorios, se estudian relaciones entre ellos y se hace un análisis estadístico de las propiedades de los grafos. Al ser un grafo aleatorio un elemento cualquiera de un espacio muestral hablamos de probabilidad de que un grafo tenga o no cierta propiedad. Por su interés en el problema del m -centro se estudia en primer lugar la conexión, Proposición 3.2.2., y se introducen definiciones como la de función umbral (función p -umbral) para una propiedad de los grafos, que son funciones $u(n)$ tales que la probabilidad de que un grafo $G_{n,t(n)}$ ($G_{n,p(n)}$) tenga la propiedad A tiende a cero cuando n tiende a infinito si $\frac{t(n)}{u(n)}$ (o $\frac{p(n)}{u(n)}$) tiende a cero y la probabilidad tiende a uno si $\frac{t(n)}{u(n)}$ (o $\frac{p(n)}{u(n)}$) tiende a infinito.

Se demuestra que la función umbral para que un grafo $G_{n,t(n)}$ no tenga vértices aislados es $u(n) = k \cdot \frac{n \cdot \ln n}{2}$ siendo k constante y mayor que 1 y que la función umbral para que no tenga vértices aislados un grafo $G_{n,p(n)}$ es $p(n) = c \cdot \frac{\ln n}{n}$ siendo c una constante mayor que 1.

Se dan las definiciones de distancia entre los vértices de un grafo aleatorio y distancia entre un vértice y un conjunto y se extiende el problema del m -centro para grafos aleatorios. Se consideran como puntos de factible localización únicamente los vértices del grafo y no cualquier punto de las aristas.

El problema del m -centro necesita un tratamiento especial para los modelos de grafos esparcidos y de número de aristas función de n . El Lema 1.2.1. del capítulo 1 sugiere

los teoremas 3.3.1. y 3.3.3. que determinan la función umbral para que este problema tenga solución casi seguramente y los teoremas 3.3.2. y 3.3.4. que dan las funciones umbral para que el problema del m -centro en estos modelos no tenga solución casi seguramente.

También se formula el problema del r -cubrimiento y se estudia la relación con el problema del m -centro para el modelo de número de aristas fijo. Se demuestra que la sucesión de los radios $r(m)$ es no creciente, así como la función de dominación $m(r) = \min \{ |X| \text{ tal que } \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, X) \leq r \}$ siendo $r \geq 0$.

Se demuestra, teorema 3.4.3., que en el modelo de número de aristas fijo todo $m(r)$ -centro de $G_{n,p}$ es un r -cubrimiento y $m(r)$ es el menor número m tal que $r(m) \leq r$.

Se dan, para finalizar, dos teoremas 3.4.4. y 3.4.5 que proporcionan funciones umbral para que el problema del r -cubrimiento tenga solución casi seguramente para los modelos de número de aristas función del número de vértices y de grafos esparcidos.

En los tres capítulos se han descrito algoritmos para resolver el problema del m -centro indicando la complejidad asociada.

En el capítulo 4 se presentan cuadros resumen de los algoritmos para localización de centros en grafos ordinarios, árboles y redes y en grafos aleatorios, con su correspondiente complejidad

Un método para rebajar la complejidad de los algoritmos presentados podría consistir en estudiar si se

puede definir el problema del grafo total $G(X, A)$ en más de una componente no separable, esto es en más de un subgrafo con conjunto de vértices de cardinal máximo que no tiene vértices de separación, o de articulación.

Por tanto, dado un grafo conexo podríamos determinar para cada vértice x_i si existen vértices x_j y x_k , $x_j \neq x_i$ y $x_k \neq x_i$ tales que los caminos que unen x_j y x_k pasan por x_i , es decir, si x_i es o no un vértice de articulación, y en caso afirmativo determinar las componentes no separables del grafo.

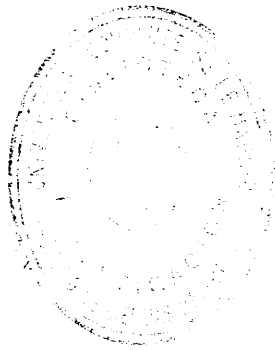
Si el grafo tiene al menos dos componentes no separables, para resolver un problema del grafo total, si éste se puede definir en s componentes no separables, con el método de divide y vencerás (divide and conquer) se resuelve el problema en cada componente y luego se elige la solución óptima para el grafo total. Para un algoritmo de complejidad $O(|X|^2)$ ésta quedaría reducida a $O(|X|^2 / \sum_{i=1}^s |X_i|^2)$, siendo X_i el conjunto de vértices de cada componente no separable.

La efectividad del método de divide y vencerás en los grafos aleatorios, en el caso en que se pueda aplicar, pierde interés al aumentar el número de aristas pues disminuye el número de componentes no separables.

En la bibliografía se recogen los libros y artículos más interesantes pues este tema sigue siendo de interés y actualidad.

En noviembre último realizamos una búsqueda sistemática por ordenador que detectó 884 artículos referentes

a problemas de localización en grafos ordinarios, de los que 529 se publicaron desde enero de 1985 hasta noviembre de 1988. 3850 artículos que tratan el tema en árboles o en redes y 463 que se refieren a problemas de recubrimiento o empaquetamiento en grafos aleatorios, de los que 284 se han publicado desde enero de 1985 a noviembre de 1988.



BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- /1/ ABBOTT, H.L., LIU, A.C. (1979) "Bounds for the covering number of a graph". *DISCRETE MATH.* 25, 3, 281-284.
- /2/ AJTAI, M., KOMLOS, J., RODL, V., SZEMEREDI, E. (1982) "On coverings of random graphs". *COMMENT. MATH. UNIV. CAROLIN.* 23, 1, 193-198.
- /3/ ALSPACH, B.R., GODSIL, C.D. (1985) *Cycles in graphs.* North-Holland.
- /4/ ARROWSMITH, D.K. (1979) "Percolation theory on multirooted directed graphs". *J. MATH. PHYS.* 20, 1, 101-103.
- /5/ BEINEKE, L.W., WILSON, R.J. (Eds.) (1983) *Selected topics in graph theory 2.* Academic Press.
- /6/ BERGE, C. (1983) *Graphes.* Gauthier-Villars.
- /7/ BERGE, C., BRESSON, D., CAMION, P., MAURRAS, J.F., STERBOUL, F. (1983) *Combinatorial mathematics.* North-Holland.
- /8/ BERGE, C., GHOUILA-HOURI, A. (1962) *Programmes, jeux et réseaux de transport.* Dunod.
- /9/ BOLLOBAS, B. (1978) *Extremal graph theory.* Academic Press.
- /10/ BOLLOBAS, B. (1979) *Graph Theory. An introductory course.* Springer-Verlag.

- /11/ BOLLOBAS, B., ERDŐS, P. (1976) "Cliques in random graphs". *MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC.* 80, 419-427.
- /12/ BOLLOBAS, B. (1986) "Random graphs and covering graph of posets". *ORDER* 3; 19, 245-255.
- /13/ BOLLOBAS, B., MCKAY, B.D. (1986) "The number of matchings in random regular graphs and bipartite graphs". *J. COMBIN. THEORY. Ser. B.* 1, 41, 80-91.
- /14/ BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. (1984) *Progress in graph theory.* Academic Press.
- /15/ BOROWIECKI, M., KENNEDY, J.W., SYSLO, M.M. (Eds.) (1983) *Graph theory.* Springer-Verlag.
- /16/ BRIGHAM, R.C. (1984) "Upper bounds on the edge clique cover number of a graph". *DISCRETE MATH.* 1, 52, 31-37.
- /17/ BURTIN, Yu.D. (1973) "Asymptotic estimates of the diameter and independence and domination numbers of a random graph". *SOVIET MATH. DOKL.* 14, 497-501.
- /18/ BURTIN, Yu.D. (1974) "On extreme metric parameters of a random graph. I. Asymptotic estimates". *THEORY PROBAB. APPL.* XIX, 4, 710-725.
- /19/ BURTIN, Yu. D. (1975) "On extreme metric characteristics of a random graph. II. Limit distributions". *THEORY PROBAB. APPL.* XX, 1, 83-101.
- /20/ COCKAYNE, E.J., FAVARON, O. PAYAN, C. THOMASON, A. (1980) "Contributions to the theory of domination, independence and irredundance in graphs". Univ. of Victoria. Deptm. of Math. Preprint, Victoria.

- /21/ CHANG, G.J., NEMHAUSER, G.L. (1982) "R-domination on block graphs". *OPER. RES. LETT.* 1, 6, 214-218.
- /22/ CHRISTOFIDES, M. (1975) *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press.
- /23/ CHUNG, K.L. (1974) *A Course in Probability Theory* Academic Press.
- /24/ DEKEL, E., MASSIMI, D., SAHNI, S. (1981) "Parallel matrix and graph algorithms". *SIAM J. COMPUT.* 10, 4, 657-675.
- /25/ DEO, N., PANG, Chi-yin. (1984) "Shortest-path algorithms: Taxonomy and annotation". *NETWORKS.* 14, 275-323.
- /26/ DREZNER, Z., (1986) "The p-cover problem" *EUROPEAN J. OPER. RES.* 26, 312-313.
- /27/ DYER, M.E., FRIEZE, A.M. (1985) "A simple heuristic for the p-centre problem". *OPER. RES. LETT.* 3, 6, 285-288.
- /28/ ERDŐS, P. (1959) "Graph theory and probability" *CANAD. J. MATH.* XI, 1, 34-38.
- /29/ ERDŐS, P. (1961) "Graph theory and probability. II" *CANAD. J. MATH.* XIII, 2, 346-352.
- /30/ ERDŐS, P. (1981) "On the combinatorial problems which I would like to see solved". *COMBINATORICA*, I, 1, 25-42.
- /31/ FABER, V., LAVER, R., MCKENZIE, R. (1978) "Coverings of groups by abelian subgroups". *CANAD. J. MATH.* XXX, 5, 933-945.
- /32/ FAGIN, R. (1976) "Probabilities on finite models". *J. SYMBOLIC LOGIC.* 41, 1, 50-58.

- /33/ FENNER, T.I., FRIEZE, A.M. (1983) "On the existence of Hamiltonian cycles in a class of random graphs". *DISCRETE MATH.* 45, 301-305.
- /34/ FERNANDEZ DE LA VEGA, W. (1982) "Sur la cardinalité maximum des couplages d'hypergraphes aleatoires uniformes". *DISCRETE MATH.* 40, 2-3, 315-318.
- /35/ FRANCIS, R.L., GOLDSTEIN, J.M. (1974) "Location theory: A selective bibliography". *OPER. RES.* 22, 2, 400-410.
- /36/ FRANCIS, R.L., LOWE, T.J., RATLIFF, H.D. (1978) "Distance constraints for tree network multifacility location problems". *OPER. RES.* 26, 570-596.
- /37/ FRANCIS, R.L., MCGINNIS, L.F., WHITE, J.A. (1983) "Locational analysis". *EUROPEAN J. OPER. RES.* 12, 220-252.
- /38/ FRIEZE, A.M. (1986) "Maximum matchings in a class of random graphs". *J. COMBIN. THEORY. Ser. B.* 2, 40, 196-212.
- /39/ FRIEZE, A.M. (1986) "On large matchings and cycles in sparse random graphs". *DISCRETE MATH.* 3, 59, 243-256.
- /40/ GRIMMETT, G.R., PULLEYBLANK, W.R. (1985) "Random near-regular graphs and the node packing problem". *OPER. RES. LETT.* 4, 4, 169-174.
- /41/ GRIMMETT, G.R. (1986) "An exact threshold theorem for random graphs and the node-packing problem". *J. COMBIN. THEORY. Ser. B.* 2, 40, 187-195.
- /42/ GUREVICH, Y., STOCKMEYER, L., VISHKIN, U. (1984) "Solving NP-Hard problems on graphs that are almost trees and

- an application to facility location problems". *J. ASSOC. COMPUT. MACH.* **31**, 3, 459-473.
- /43/ HAMMERSLEY, J.M. (1980) "A generalization of McDiarmid's theorem for mixed Bernoulli percolation". *MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC.* **88**, 167-170.
- /44/ HANDLER, G.Y., MIRCHANDANI, P.B. (1979) *Location on Networks: Theory and Algorithms*. M.I.T. Press.
- /45/ HANDLER, G.Y., ROZMAN, M. (1985) "The continuous m-center problem on a network". *NETWORKS*. **15**, 191-204.
- /46/ HOCHBAUM, D.S. (1985) "Easy solutions for the k-center problem or the dominating set problem on random graphs". *NORTH-HOLLAND MATH. STUD.*, **109**, 189-209.
- /47/ IMAI, H., ASANO, T. (1986) "Efficient algorithms for geometric graph search problems". *SIAM J. COMPUT.* **15**, 2, 478-494.
- /48/ JANSON, S. (1986) "Random trees in a graph and trees in a random graph". *MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC.* **100**, 2, 319-330.
- /49/ JUBEN, L., MUTAFÇIEV, R. (1984) "Asymptotic estimates for the inverse epidemic process on a random graph". *PLISKA STUD. MATH. BULGAR.* **7**, 123-126.
- /50/ JUBEN, L., MUTAFÇIEV, R. (1984) "Probability distributions related to some epidemic models on random graphs". *PLISKA STUD. MATH. BULGAR.* **7**, 127-133.
- /51/ KAISER, C., WEBER, K. (1985) "Degrees and domination number of random graphs in the n-cube". *ROSTOCK. MATH. KOLLOQ.* **28**, 18-32

- /52/ KALANTARI, B. HILL, A.V., ARORA, S.R. (1985) "An algorithm for the traveling salesman problem with pickup and delivery customers". *EUROPEAN J. OPER. RES.* 22, 377-386.
- /53/ KARIV, O., HAKIMI, S.L. (1979) "An algorithmic approach to network location problems". I: The p-centers. *SIAM J. APPL. MATH.* 37, 3, 513-538.
- /54/ KARONSKI, M. (1982) "A review of random graphs" *J. GRAPH THEORY.* 6, 349-390.
- /55/ KARONSKI, M., PALKA, Z. (Eds.) (1987) *Random Graphs* 85. North-Holland Mathematics Studies, 144.
- /56/ KAUFMANN, A. (1971) *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. C.E.C.S.A.
- /57/ KAWAGUCHI, T., NAKANO, H., NAKANISHI, Y. (1982) "Probabilistic analysis of a heuristic graph coloring algorithm". *ELECTRON. COMM. JAPAN.* 65-A, 6, 12-18.
- /58/ KAZUHITO TAKAMIZAWA, MASAOKI TAKIUCHI, SHINJI SAITO. (1978). "A statistical analysis of random graphs". *SURIKAISEIKENKYUSHO KOKYUROKU.* 333, 178-188.
- /59/ KÖRNER, F. (1986) "On the relationship of approximation algorithms for the minimum and the maximum traveling salesman problem". *EUROPEAN J. OPER. RES.* 26, 262-265.
- /60/ KORŠUNOV, A.D. (1976) "Solution of a problem of Erdős and Rényi on Hamiltonian cycles in nonoriented graphs". *SOVIET MATH. DOKL.* 17, 3, 760-764.

- /61/ LIFSCHITZ, V., PITTEL, B. (1983) "The worst and the most probable performance of a class of set-covering algorithms". *SIAM J. COMPUT.* 12, 2, 329-346.
- /62/ LIPTON, R.J., TARJAN, R.E. (1979) "A separator theorem for planar graphs". *SIAM J. APPL. MATH.* 36, 2, 177-189.
- /63/ LIPTON, R.J., TARJAN, R.E. (1980) "Applications of a planar separator theorem". *SIAM J. COMPUT.* 9, 3, 615-627.
- /64/ LOVE, R.F., MORRIS, J.G., WESOŁOWSKY, G.O. (1988) *Facilities Location. Models & Methods.* Nort-Holland.
- /65/ MEGIDDO, N., TAMIR, A., ZEMEL, E., CHANDRASEKARAN, R. (1981) "An $O(n \log^2 n)$ algorithm for the k th longest path in a tree with applications to location problems". *SIAM J. COMPUT.* 10, 2, 328-337.
- /66/ MEGIDDO, N., TAMIR, A. (1983) "New results on the complexity of p -center problems". *SIAM J. COMPUT.* 12, 4, 751-758.
- /67/ MEIR, A., MOON, J.W. (1970) "The distance between points in random trees". *J. COMBIN. THEORY* 8, 99-103.
- /68/ MEIR, A., MOON, J.W. (1973) "Random packings and coverings in random trees". *A EQUATIONES MATH.* 9, 107-114.
- /69/ MEIR, A., MOON, J.W. (1975) "Relations between packing and covering numbers of a tree". *PACIFIC J. MATH.* 61, 1, 225-233.
- /70/ MEIR, A., MOON, J.W. (1977) "Packing and covering constants for certain families of trees. II". *TRANS. AMER. MATH. SOC.* 233, 167-178.

- /71/ MEIR, A., MOON, J.W. (1978) "On the altitude of nodes in random trees". *CANAD. J. MATH.* **XXX**, 5, 997-1015.
- /72/ MEIR, A., MOON, J.W. (1978) "Path node-covering constants for certain families of trees". *MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC.* **84**, 519-529.
- /73/ MINIEKA, E. (1970) "The m-center problem". *SIAM Review* **12**, 138-139.
- /74/ MORENO, J.A. (1985) "A correction to the definition of local center". *EUROPEAN J. OPER. RES.* **20**, 382-386.
- /75/ MORENO, J.A., (1986) *Localización minimax en grafos mixtos*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense.
- /76/ MORRIS, J.G. (1981) "Convergence of the Weiszfeld Algorithm for Weber problems using a generalized distance function". *OPER. RES.* **29**, 1, 37-48.
- /77/ NEWMAN, C.M., SCHULMAN, L.S. (1981) "Infinite clusters in percolation models". *J. STATIST. PHYS.* **26**, 3, 613-628.
- /78/ NEMHAUSER, G.L., TROTTER, L.E. (1975) "Vertex packings: structural properties and algorithms". *MATH. PROGRAMMING*, **8**, 232-248.
- /79/ ORE, O. (1965) *Theory of graphs*. American Mathematical Society.
- /80/ PALMER, E.M. (1985) *Grafical Evolution. An Introduction to the Theory of Random Graphs*. John Willey & Sons.
- /81/ PROTASI, M. (1983) "A new probabilistic model for the study of algorithmic properties of random graph problems" *FOUND. COMP. THEORY*, 360-367.
- /82/ PULLEYBLANK, W.R. (1979) "Minimum node covers and

- 2-bicritical graphs". *MATH. PROGRAMMING.* 17, 1, 91-103.
- /83/ ROSENFELD, M., ZAKS, J. (1984) *Convexity and graph theory*. North-Holland.
- /84/ ROSS, S.M. (1981) "A random graph". *J. APPL. PROBAB.* 18, 309-315.
- /85/ RUCINSKI, A. (1982) "Matchings and k-factors in a random graph". *STUDIA SCI. MATH. HUNGAR.* 1-4, 17, 335-340.
- /86/ SCHMIDT, J. (1983) "A threshold for perfect matchings in random d-pure hipergraphs". *DISCRETE MATH.* 2-3, 45, 287-295.
- /87/ SHAMIR, E., UPFAL, E. (1981) "Large regular factors in random graphs". *NORTH-HOLLAND MATH. STUD.* 87, 271-282.
- /88/ SHAMIR, E., UPFAL, E. (1981) "On factors in random graphs". *ISRAEL J. MATH.* 39, 4, 296-302.
- /89/ SHAMIR, E., UPFAL, E. (1982) "One-factor in random graphs based on vertex choice". *DISCRETE MATH.* 41, 3, 281-286.
- /90/ SPENCER, J. (1985) "Asymptotically good coverings". *PACIFIC J. MATH.* 2, 118, 575-586.
- /91/ STEWART, W.R.(Jr.), GOLDEN, B.L. (1983) "Stochastic vehicle routing: A comprehensive approach". *EUROPEAN J. OPER. RES.* 14, 371-385.
- /92/ TAMIR, A. (1985) "A finite algorithm for the continuous p-center location problem on a graph". *MATH. PROGRAMMING.* 31, 298-306.
- /93/ TANSEL, B.C., FRANCIS, R.L., LOWE, T.J. (1983) "Location on networks: a survey. Part I: The p-center and

- p-median problems". *MANAGEMENT SCI.* 29, 4, 482-497.
- /94/ TANSEL, B.C., FRANCIS, R.L., LOWE, T.J. (1983) "Location on networks: a survey. Part II: Exploiting tree network structure". *MANAGEMENT SCI.* 29, 4, 498-511.
- /95/ TARJAN, R. (1972) "Depth-first search and linear graph algorithms". *SIAM J. COMPUT.* 1, 2, 146-160.
- /96/ TARJAN, R.E., TROJANOWSKI, A.E. (1977) "Finding a maximum independent set". *SIAM J. COMPUT.* 6, 3, 537-546.
- /97/ VASKO, F.J., WILSON, G.R. (1984) "Using a facility location algorithm to solve large set covering problems". *OPER. RES. LETT.* 3, 2, 85-90.
- /98/ VERCELLIS, C. (1985) "A threshold for multiple edge coverings in random hypergraphs". *NORTH-HOLLAND MATH. STUD.* 109, 311-319.
- /99/ WEBER, K. (1981) "Domination number for almost every graph" *ROSTOCK. MATH. KOLLOQ.* 16, 31-43.
- /100/ WEBER, K. (1982) "Random graphs-a survey" *ROSTOCK.MATH. KOLLOQ.* 21, 83-98.
- /101/ WEBER, K. (1982) "The length of random boolean functions". *ELEKTRON. INFORMATIONSVERARB. KYBERNET.* 18, 659-668.
- /102/ WEBER, K. (1984) "On the evolution of random graphs in the n-cube". *PROC. CONF. GRAPH THEORY*, 203-206.
- /103/ WEBER, K. (1985) "Subcube coverings of random graphs in the n-cube". *ANN. DISCRETE MATH.* 28, 319-336.
- /104/ WEBER, K. (1985) "Subcube coverings of random spanning subgraphs of the n-cube". *MATH. NACHR.* 120, 327-345.
- /105/ WEBER, K. (1986) "On components of random graphs in the n-cube". *ELECTRON. INFORMATIONSVERARB.KYBERNET.* 22, 601-613.