

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN PRIMER CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Mónica Ramírez García, *Universidad Complutense de Madrid*,
monica.ramirez@edu.ucm.es

Carlos de Castro Hernández, *Universidad Autónoma de Madrid*,
carlos.decastro@uam.es

Comunicación

RESUMEN.

Presentamos el desarrollo de dos sesiones de un taller de resolución de problemas en primer curso de educación primaria. Describimos las estrategias empleadas por los niños en un problema de multiplicación y otro de división, antes de recibir instrucción formal sobre estas operaciones. Los niños construyen significados sobre la estructura multiplicativa, que constituyen la base para la comprensión en este ámbito matemático. Proponemos adelantar experiencias en que los niños puedan construir ideas sobre conceptos o procedimientos antes de su enseñanza formal. Planteamos la resolución de problemas como vía de construcción de significados y no de aplicación de contenidos.

Nivel educativo: Educación Primaria.

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo se enmarca en el aprendizaje de la resolución de problemas y su relación con el de la aritmética. Vamos a comenzar exponiendo la relación que se establece en los últimos currículos entre ambos temas y planteando la necesidad de un cambio en el enfoque de estos aprendizajes matemáticos iniciales.

Con respecto a las operaciones aritméticas, en anteriores currículos, la suma y resta se incluían en el primer curso, dejando la iniciación a las tablas de multiplicar para el segundo curso y, de forma más completa, la multiplicación y división para el segundo ciclo. El nuevo currículo de educación primaria del Ministerio de Educación y Ciencia propone la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014, P. 34069) en primer curso. En el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid se marca la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en el primer curso de Educación Primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Estas medidas suponen que el aprendizaje formal de las tablas de multiplicar se adelante un curso, con lo que implica dicho aprendizaje de memorización.

Desde hace ya unos años, tanto el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (en adelante, NCTM) en su publicación de los Principios y Estándares de la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2003), como los informes PISA (OCDE, 2005) remarcan la importancia de los procesos, como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, la articulación y la comunicación, el establecimiento de conexiones y relaciones, la representación y modelización, para la competencia matemática. En el currículo anterior aparecía la resolución de problemas como la actividad

principal en las clases de matemáticas (MEC, 2007) y en el actual currículo se añade un bloque a los cuatro bloques de contenidos ya existentes llamado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" (MEC, 2014).

La competencia matemática valora más la comprensión que la memorización. En este trabajo consideramos el aprendizaje de las matemáticas con comprensión, desde en un enfoque cognitivo, como la actividad mental que permite construir por sí mismo significados para conceptos y procedimientos matemáticos, relacionándolos y organizándolos de algún modo productivo que permitan ser accesibles para resolver nuevos problemas (Carpenter y Lehrer, 1999). Así, adelantar la memorización de las tablas a primer curso no se ajusta bien a esta consideración del aprendizaje con comprensión.

El modelo teórico que utilizamos se basa en la Instrucción Guiada Cognitivamente (en adelante, CGI) para el aprendizaje de la aritmética y algunos aspectos del sistema de numeración (Carpenter, Fennema et al, 1999). Este modelo de enseñanza muestra que planteando problemas aritméticos verbales en un contexto significativo para los niños, éstos son capaces de resolverlos, sin una instrucción formal sobre los contenidos aritméticos, simplemente utilizando estrategias inventadas por ellos. Estas estrategias son informales ya que no son el resultado de una instrucción sino que los niños, utilizando sus propias ideas, establecen relaciones entre las cantidades según la estructura semántica del problema y lo resuelven.

Para el aprendizaje con comprensión, estas estrategias son la base para una buena comprensión a la hora de recibir la enseñanza formal sobre las operaciones aritméticas. Además, son conocimientos funcionales que pueden aplicar en situaciones de resolución de problemas nuevas (Carpenter y Lehrer, 1999). Se plantea así invertir el sentido habitual de la organización de las tareas en el aula donde normalmente se introduce una operación aritmética y a continuación se plantea problemas verbales para su aplicación, como se indica en el currículo de la LOE, "Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta en los que intervengan números naturales (hasta tres dígitos) y utilizando los algoritmos básicos correspondientes..." (MEC, 2007, p. 31559).

Por tanto, nuestra propuesta es introducir los primeros problemas aritméticos verbales antes de su instrucción formal. Trabajos como De Castro et al. (2007 y 2009) ponen de manifiesto que los niños, desde Educación Infantil, son capaces de resolver problemas aritméticos verbales. Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños pueden resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y la resistencia a incluirlos estas situaciones a esta edad, puede provocar no dotar de significado el algoritmo que aprenden en primaria (p. 9). Así, los niños tendrán la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesitar su instrucción formal.

Existe una clasificación de los problemas aritméticos verbales muy consensuada desde los años ochenta (Castro, 2008), de problemas de estructura aditiva, como los problemas de cambio, combinación y comparación, y problemas de estructura multiplicativa, con grupos iguales, comparación, producto cartesiano. En este trabajo vamos a mostrar cómo los niños construyen sus propias estrategias ante problemas aritméticos verbales, más concretamente de multiplicación y división (estructura multiplicativa), antes de la memorización de las tablas de multiplicar, desarrollando así el aprendizaje con comprensión, y por tanto, competencia matemática. Rompemos así el uso de los problemas como tarea para comprobar la aplicabilidad de las operaciones aritméticas.

2. UN TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Dentro de nuestro proyecto planteamos problemas aritméticos verbales desde Educación Infantil (De Castro et al. 2007 y 2009). En concreto, en el trabajo De Castro et al. (2009) observamos como los niños resolvían problemas de estructura multiplicativa en un aula de segundo curso de Educación Infantil.

El taller que describimos aquí es la continuación de estos alumnos al llegar a primero de Educación Primaria. Abarca un curso escolar con un total de 25 sesiones, una a la semana en dos aulas del mismo centro. El resto de las clases de matemáticas siguen una metodología tradicional utilizando el libro de texto.

El contexto que utilizamos para los problemas debe ser significativo para los niños y hemos utilizado la literatura infantil. Cada cuento infantil sirve de contexto para dos sesiones. Además una persona externa les envía una carta semanalmente pidiendo ayuda para resolver el problema en cuestión. Así las fases del taller son:

- Lectura del cuento. En el momento de la sesión se lee el cuento, aunque las tutoras lo leen con ellos un par de veces durante la semana antes del taller.
- Lectura de la carta de la persona externa, en la que se plantea el problema y se pide que expliquen como lo han hecho.
- Resolución individual, donde los niños sin ninguna indicación resuelven el problema con el material que les proporcionamos encima de las mesas.
- Puesta en común de las estrategias, donde los niños saben que deben explicar sus estrategias.
- Escribir una carta con la resolución del problema a la persona externa.

Con todas estas fases, los niños desarrollan los procesos indicados en la competencia matemática.

El taller tiene como objetivos didácticos desarrollar estrategias informales para problemas aritméticos aditivos y multiplicativos considerando algunos contenidos que toman importancia en Educación Primaria. Es importante remarcar que en el taller no se les da instrucción ninguna de cómo deben resolverlos y se les proporciona distintos materiales para que ellos elijan su estrategia. Los problemas que se plantean son:

- Planteamos problemas de multiplicación y división con grupos de 10 para trabajar la decena y así tener que contar distintas unidades dentro del sistema de numeración decimal (Ramírez y De Castro, 2012).
- Planteamos problemas aditivos con números de dos cifras para que los niños tenga la oportunidad de construir estrategias en las que la comprensión del valor posicional de los números les facilitará su resolución. Además los niños podrán relacionar el algoritmo de la suma y resta trabajando en las clases tradicionales con las estrategias desarrolladas en el taller.
- Planteamos problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división, para que los niños construyan sus primeros significados sobre estas operaciones.

Vamos a describir dos de las sesiones en las que se plantean problemas de estructura multiplicativa, una de multiplicación y otra de división.

3. EL DESARROLLO DE LAS SESIONES DEL TALLER.

3.1. SESIÓN 1. PROBLEMA DE MULTIPLICACIÓN.

En la cuarta sesión del taller se plantea un problema de estructura multiplicativo de grupos iguales de multiplicación. Estos problemas están compuesto por un número de grupos y en cada grupo hay el mismo número de elementos. Basado en el cuento "El Gato Tragón", el problema es el siguiente: "El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?". Las estrategias observadas son las siguientes:

Agrupamiento por grupos. Estrategia de modelización en la que los niños representan grupos de objetos con el número de elementos por grupo que viene en el enunciado. Es decir, en este problema que hay 7 grupos (niñas) con 2 elementos en cada grupos (brazos), los niños hacen 7 grupos con 2 elementos en cada grupo. Vamos a ver varias formas de realizar esta estrategia.

Representando los elementos por grupos, sin representante de grupo (a). En la Figura 1 se puede observar como un niño realiza 7 grupos de 2 contadores cada uno y luego los cuenta todos.



Figura 1. Agrupamiento por grupos con objetos (a).

Otros niños dibujan 7 grupos de dos brazos con dos rayitas "/" "\" y luego los cuentan todos. Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos añadiendo el número de elementos por grupos cada vez que se considera un grupo. En la Figura 2, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas.



Figura 2. Agrupamiento por grupos con dedos (a).

También se puede observar esta estrategia en la tabla 100 (Figura 3), por cada niña se señalan dos numerales hasta llegar a contar 7 grupos de dos numerales. En la figura solo se ve hasta las 3 primeras niñas.



Figura 3. Agrupamiento por grupos con Tabla 100 (a).

Utilizando un representante por cada grupo y por los elementos por grupo (b). Dentro de esta estrategia hay niños que representan también con un contador los grupos como vemos en la Figura 4, en la que se colocan 7 contadores que son las niñas y por cada uno de ellos dos contadores más que son los brazos.

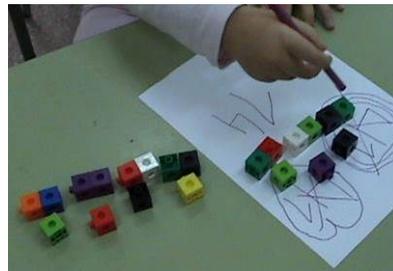


Figura 4. Agrupamiento por grupos con representante para cada grupo con objetos (b).

También se puede observar en las representaciones gráficas de algunos niños. En la Figura 5, un niño representa con numerales las niñas y luego va contando dos puntos al lado de cada numeral.



Figura 5. Agrupamiento por grupos con representante para cada grupo con distintas representaciones (b).

En la Figura 6, un niño utiliza una representación icónica de las niñas y escribe la secuencia de numerales sobre los brazos.

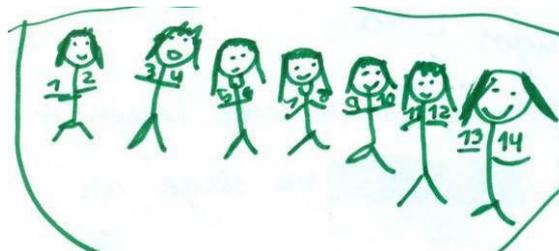


Figura 6. Agrupamiento por grupos con representante para cada grupo con distintas representaciones (b).

Utilizar representante de grupo y sin representante de elementos por grupo (figural) (c). Otra variedad de esta estrategia se da al representar con un objeto cada grupo y contar cada grupo el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En la Figura 7 y 8, se observa que los niños solo representan el número de grupos (7) y cuentan cada uno de ellos dos veces. En la figura 7, una niña cuenta a la derecha y a la izquierda de cada bola de plastilina. En la figura 8, otra niña cuenta cada una de las 7 bolas, dos veces.



Figura 7. Agrupamiento con solo representante para cada grupo con plastilina (c).



Figura 8. Agrupamiento con solo representante para cada grupo con rekenrek (c).

Agrupamiento por cada elemento por grupo. Estrategia de modelización en la que los niños representan el número de grupos por cada elemento que contiene el grupo. Es decir, en este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (brazos), por lo que se representa un grupo de 7 por un brazo de cada niña y otro grupo de 7 por del otro brazo. Los niños hacen 2 grupos de 7 elementos. En la Figura 9, un niño pone en el rekenrek 7 bolas en cada fila, representando los siete brazos izquierdos y derechos de las niñas.



Figura 9. Agrupamiento por cada elemento del grupo con el rekenrek.

Otra niña utiliza la tabla 100 contando primero siete numerales y luego otros siete: Dice "hay siete niñas, ¿no?... y cuento otras siete... porque cada niña tiene dos brazos" (Figura 10).



Figura 10. Agrupamiento por cada elemento del grupo con Tabla 100.

3.2. SESIÓN 2. PROBLEMA DE DIVISIÓN.

En la quinta sesión del taller se plantea un problema de estructura multiplicativo de grupos iguales de división partitiva. En este caso conocemos el número total de elementos y el número de grupos, pero no conocemos el número de elementos por grupo. Basado en el cuento "Un regalo diferente", el problema es el siguiente: "Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?".

Las estrategias observadas se basan todas en el *Reparto* de objetos. Una observación importante es que todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos aún sin que el enunciado indicase de ninguna forma que los dos comían el mismo número de buñuelos. A continuación mostramos las diferentes variantes de esta estrategia:

Reparto de objetos de uno en uno sin contar inicialmente la cantidad total hasta que entre los grupos tienen el total de elementos (a). En la Figura 11, un niño coge un montón de unidades y las reparte en dos grupos de uno en uno hasta que entre los dos grupos suman 18 objetos.



Figura 11. Reparto de objetos de uno en uno sin contar inicialmente la cantidad total (a).

Reparto de uno en uno contando primero el total de elementos y luego repartiendo en los grupos de uno en uno (b). En la Figura 12 se puede observar como un niño coge primero 18 contadores y luego los reparte de uno en uno en dos grupos. Finalmente comprueba los objetos que hay en cada grupo. En la Figura 13 una niña reparte de uno en uno los objetos en los grupos cogiéndolos a la vez, así sabe que los dos tienen lo mismo.



Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total (b).



Figura 13. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total (b).

En la Figura 14 mostramos la hoja de trabajo en la que dos niños hacen el reparto por medio de un dibujo uniendo por líneas los buñuelos con cada personaje.



Figura 14. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total (b).

Reparto en bloques contando primero el total de elementos y luego repartiendo en bloques (c). En la Figura 15 un niño coge primero 18 objetos y luego los va repartiendo de 3 en 3. Finalmente comprueba los objetos que hay en cada grupo.



Figura 15. Reparto de objetos en bloques contando inicialmente la cantidad total (c).

Reparto por la mitad (d). Al ser un problema en el que se debe dividir en dos grupos, muchos niños buscaron la mitad de los objetos representados. En la Figura 16, un niño construye una barra con 18 centicubos y estima con los dedos donde está la mitad y parte la barra por ahí. Después comprueba si hay los mismos en las dos barras resultantes.



Figura 16. Reparto por la mitad (d) con objetos.

En la Figura 17 puede observarse esta estrategia en una representación gráfica en la que dibujan los 18 buñuelos y buscan la mitad, marcándola con una raya y comprobando lo que queda a ambos lados.

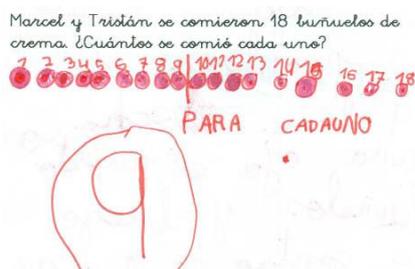


Figura 17. Reparto por la mitad (d) con dibujo.

4. CONCLUSIONES.

En los talleres realizados se ha observado que la mayoría de los niños resolvían problemas de multiplicación y división utilizando estrategias propias sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen situaciones aritméticas, articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros. Este implicará aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos y por lo tanto competencia matemática.

Introducir la resolución de problemas antes de la instrucción formal, implica romper con el uso de la resolución de problemas para aplicar conocimientos nuevos, sino como vía para desarrollar la comprensión de los contenidos matemáticos.

Nuestra opción consiste en proponer experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que adelantar conocimientos formales. Más que pasar la memorización de algunas tablas de multiplicar a primero de Educación Primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división para su comprensión.

Pensamos que la línea a seguir en la enseñanza de las matemáticas debe ser, en algunos aspectos, la contraria a la adoptada en el nuevo currículo de primaria. Ya hace años que Kamii (1995) escribía sobre el efecto perjudicial de los algoritmos que al introducirse demasiado pronto "fuerzan a los niños a renunciar a su propio pensamiento numérico" (p. 49). Parafraseando a Kamii, creemos que adelantar las tablas de multiplicar fuerza a los niños a renunciar a su propio pensamiento multiplicativo.

REFERENCIAS.

CARPENTER, T.P., FENNEMA, E., FRANKE, M.L., LEVI, L. y EMPSON, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

CARPENTER, T. P. y LEHRER, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

CASTRO, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

CASTRO, E., CAÑADAS, M.C. y CASTRO-RODRÍGUEZ, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia*, 2(2), 1-11. En <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/32>

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, JUVENTUD Y DEPORTE DE LA COMUNIDAD DE MADRID (2014). *Borrador del Currículo de Educación Primaria*. Recuperado el 15-05-2014 de: <http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565-Borrador de Curriculum de Educacion Primaria.pdf>

DE CASTRO, C. y ESCORIAL, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía IX)*, 23-48. Disponible en: <http://eprints.ucm.es/12643/>

DE CASTRO, C., WALSH, J., DEL COSO, E., SALVADOR, C., GONZALEZ, V. y ESCORIAL, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73 (3)*, 33-42.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, pp. 31487-31566.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE*, 106, pp. 33827-34369.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

KAMII, K. C. (1995). *Reinventando la aritmética III*. Madrid: Visor.

RAMIREZ, M. y DE CASTRO, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática - 2012* (pp-109). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM. Disponible en <http://eprints.ucm.es/25470/>