

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
Departamento de Ecuaciones Funcionales



TESIS DOCTORAL

**Coordenadas polares generalizadas y aplicaciones a la  
acotación de operadores**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Agustín de la Villa Cuenca**

DIRECTOR:

**Miguel de Guzmán Ozamiz**

Madrid, 2015

TP  
1983  
137

Agustín de la Villa Cuenca



x-53-162506-5

**COORDENADAS POLARES GENERALIZADAS Y APLICACIONES  
A LA ACOTACION DE OPERADORES**

Departamento de Ecuaciones Funcionales  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid  
1983



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº

137/83

© Agustín de la Villa Cuenca  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1983  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-18051-1983

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

FACULTAD DE MATEMATICAS

COORDENADAS POLARES GENERALIZADAS Y  
APLICACIONES A LA ACOTACION DE OPERADORES

Memoria, que para optar al Título  
de Doctor presenta Agustín de la  
Villa Cuenca.

Madrid, Marzo, 1982

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES



**A mis padres**

Este trabajo se ha realizado, en parte, con la Beca de Ayuda a la Formación del Personal Investigador del Ministerio de Educación y Ciencia, en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense de Madrid, bajo la dirección del profesor Agregado de la misma, Dr. D. Miguel de Guzmán Ozámiz.



**Agradecimientos:**

A los profesores A. Dou y A. López de la Rica que me pusieron en contacto con el Departamento de Ecuaciones Funcionales.

Al profesor M. de Guzmán sin cuya ayuda y estímulo no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

A los profesores del Departamento de Ecuaciones Funcionales en especial a A. Casas, M<sup>a</sup>. T. Carrillo, T. Menarguez y B. Rubio.

A Horacio Ovejero que durante todos estos años me ha animado constantemente para la realización de la "tesis".

A la señorita Soledad Estévez que ha logrado lo que parecía imposible: Hacer legible el manuscrito original.



## INDICE

	Págs.
INTRODUCCION .....	i
<u>CAPITULO 1.: INTRODUCCION DE LAS COORDENADAS POLARES .....</u>	<u>1</u>
1.1. Definición de las coordenadas polares .....	4
1.2. Coordenadas polares generalizadas. Cambio a polares .....	13
1.3. Teoremas de caracterización de los Rayos Polares .....	25
1.4. Acotaciones del operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación .....	33
1.5. Cálculo de los rayos polares sin condiciones de regularidad en la familia de curvas .....	39
<u>CAPITULO 2.: COORDENADAS POLARES ASOCIADAS A CONJUNTOS "ACOTADOS" .....</u>	<u>48</u>
2.1. Rayos polares asociados a "dilataciones generalizadas" .....	51
2.2. Coordenadas polares asociadas a una cierta familia de elipses ...	59
2.3. Estudio de las coordenadas polares asociadas a la familia $h(x,\rho) = a(x)(\rho-x)$ .....	63
2.4. Estudio de otras familias de curvas .....	75
2.5. Acotaciones del operador maximal .....	78
<u>CAPITULO 3.: COORDENADAS POLARES ASOCIADAS A CONJUNTOS "NO ACOTADOS" .....</u>	<u>86</u>
3.1. Coordenadas polares asociadas a "dilataciones generalizadas" ....	88
3.2. Coordenadas polares asociadas a familias de curvas no "regulares".....	94
3.3. Acotaciones del operador maximal .....	103

<b>CAPITULO 4.:</b> RECUPERACION DE LAS "CIRCUNFERENCIAS" A PARTIR DE LOS RAYOS POLARES .....	110
4.1. Planteamiento del problema .....	112
4.2. Estudio general del problema .....	118
4.3. Aplicaciones .....	120
<b>APENDICE</b> .....	124
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	130

## INTRODUCCION

Uno de los objetivos primordiales del análisis es la acotación de operadores, entendiendo por un operador cualquier aplicación entre espacios de funciones.

Consideraremos el espacio de Banach  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , definido de la forma siguiente:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles Lebesgue} / \\ \|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \}$$

donde  $dx$  es la medida Lebesgue.

Análogamente  $L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles Lebesgue} / \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty\}$ .

Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $|A|_e$  denotará la medida exterior de Lebesgue del conjunto  $A$ .

Si el conjunto  $A$  es medible Lebesgue,  $|A|$  significará su medida de Lebesgue.

Asimismo si se trabaja con una medida producto  $\sigma \times \mu$ ,  $(\sigma \times \mu)_e$  designará la medida exterior.

Nuestro estudio se restringirá a operadores  $K$  entre espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Así  $K : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ ;  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

Una forma de medir la "acotación" del operador  $K$  es el "tipo fuerte"  $(p, q)$  (a veces por simplicidad se designa solamente tipo  $(p, q)$ ). Un operador  $K : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  es de tipo fuerte

(p,q) si  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  se verifica:

$$\|Kf\|_q \leq C \|f\|_p$$

No siempre el operador  $K$  va a satisfacer esta acotación. A veces verifica otra desigualdad y se dirá que el operador

$K : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  es de tipo débil (p,q)  $1 \leq p, q < \infty$  si  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  se verifica que:

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^n / |Kf(x)| > \lambda\} \right| \leq \left( \frac{C \|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

Es trivial demostrar que todo operador de tipo (p,q) es de tipo débil (p,q).

En muchas ocasiones se trabaja con una sucesión de operadores  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$K_j : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

y surgen de forma natural las siguientes cuestiones:

1) Hallar bajo qué condiciones de los operadores  $K_j$  la sucesión  $K_j f(x)$  converge para todo  $x$  (o para casi todo  $x$ ) y que propiedades tiene éste límite.

2) Hallar bajo qué condiciones de los operadores  $K_j$  la sucesión de funciones  $K_j f$  converge en  $L^q$ .

En otras ocasiones se trata con una familia de operadores  $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  donde  $K_\varepsilon$  son operadores;  $K_\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  y se define el operador maximal  $K^*$  asociado a esta familia de la forma siguiente:

$$K^*f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon f(x)|$$

siendo de gran importancia el tener acotaciones para el operador  $K^*$ .

Un tipo de operadores, básico en análisis, son los operadores de convolución.

Sea  $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y una función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$   $1 \leq p \leq \infty$ .

Se define el operador de convolución  $K$  asociado al núcleo  $k$  de la forma siguiente

$$Kf(x) = k * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(y)f(x-y)dy$$

Restringiéndonos a  $\mathbb{R}^1$  el primer operador básico de convolución es la transformada truncada de Hilbert, denotada por  $H_\epsilon$ , que corresponde al núcleo

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } |x| > \epsilon \\ 0 & \text{si } |x| \leq \epsilon \end{cases}$$

y definiendo  $H_\epsilon f(x) = f * h_\epsilon(x)$ .

La transformada de Hilbert  $H$ , se define como

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon f(x)$$

siendo el operador de convolución asociado al núcleo  $h(x) = 1/x$ , es decir

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

entendiendo la integral anterior en el sentido del valor principal de Cauchy.

Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$   $1 < p < \infty$  se tienen las siguientes acotaciones para los operadores anteriores:

a) La transformada truncada de Hilbert es un operador de tipo  $(p,p)$  es decir  $\exists A_p$  tal que

$$\|H_\epsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

b) Existe límite en  $L^p$  de  $H_\epsilon f(x) = Hf(x)$  y se verifica

$$\|Hf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

donde  $A_p$  es la misma constante que en a).

c)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon f(x)$  existe para casi todo  $x$  si

$$f \in L^p(\mathbb{R}^1) \quad 1 \leq p < \infty$$

Si se define  $H^*f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |H_\epsilon f(x)|$ , ( $H^*$  es el operador maximal de Hilbert, donde  $H^*$  es el supremo de una familia de operadores de convolución) se tiene:

d) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$   $1 < p < \infty$  el operador  $H^*$  es de tipo  $(p,p)$  es decir  $\exists B_p$  tal que

$$\|H^*f\|_p \leq B_p \|f\|_p$$

e) Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ ,  $H^*$  es de tipo débil  $(1,1)$  es decir:

$\exists C$  constante absoluta tal que:

$$|\{x / H^*f(x) > \lambda\}| \leq C \frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

La demostración de los resultados a), b), c), d) y e) puede ver se en Guzmán [6] ó Stein [12].

Otra parcela importante del análisis actual está dedicada a la diferenciación de integrales. El inicio de esta teoría arranca del teorema de Lebesgue que nos asegura, que si a cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , le asociamos una familia de intervalos cúbicos, cerrados, centrados

en el propio punto  $x$ , de tal forma que existe una subsucesión,  $\{Q_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$ , de ellos que se contraen a " $x$ " se verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y) dy = f(x)$$

para c.t.  $x$  con  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

El problema se puede plantear de un modo más general:

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , sea  $\mathcal{B}(x)$  una familia de conjuntos medibles, acotados, conteniendo a  $x$ , de medida Lebesgue positiva, y tal que exista por lo menos una sucesión de conjuntos  $B_k \in \mathcal{B}(x)$  cuyos diámetros,  $\delta(B_k)$ , tiendan a 0.

A la familia  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$  se le llama base de diferenciación en  $\mathbb{R}^n$ .

La restricción a conjuntos acotados no es esencial ya que siendo  $\mathcal{B}(x)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , una familia de conjuntos medibles, conteniendo a  $x$ , de medida Lebesgue positiva, tal que  $\mathcal{B}(x)$  contiene al menos una sucesión  $B_k \in \mathcal{B}(x)$  que se contrae en medida a 0, es decir  $|B_k(x)| \rightarrow 0$  entonces:

$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$  es una base de diferenciación en  $\mathbb{R}^n$  (de conjuntos no acotados). Si la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  (de conjuntos acotados o no acotados) se obtiene de tal forma que  $\mathcal{B}(x)$  es el resultado de trasladar al punto  $x$  la familia  $\mathcal{B}(0)$ , la base  $\mathcal{B}$  es "invariante por traslaciones".

Para la base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , invariante por traslaciones, el problema típico de diferenciación es estudiar que condiciones de-

ben cumplir  $\mathcal{B}(0)$  y  $f$  para que se verifique:

$$\lim_{\substack{B \in \mathcal{B}(x) \\ \delta(B) \rightarrow 0 \\ \text{ó } |B| \rightarrow 0}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x) \text{ para c.t.x.}$$

Si se denota por  $k_B(x) = \frac{\chi_B(x)}{|B|}$  con  $B \in \mathcal{B}(0)$  donde  $\chi_B(x)$  es la función característica del conjunto  $B$  entonces se tiene que:

$$\frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} f(y) dy = k_B * f(x)$$

y el problema de diferenciación se reduce a estudiar la convergencia hacia la función  $f$  de  $\{k_B * f\}$ .

Una forma de estudiar el problema es buscar acotaciones para el operador maximal asociado a la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  y que se define de la forma siguiente:

Dada la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  y una función  $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$  se define para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  el operador maximal (asociado a  $\mathcal{B}$ )

$$Mf(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy / R \in \mathcal{B}(x) \right\}$$

Si  $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^1)$  y la base  $\mathcal{B}$  es invariante por traslaciones con  $\mathcal{B}(0) = \{(-h, h), h > 0\}$  el operador maximal asociado a esta base de diferenciación es el operador maximal de Hardy-Littlewood [10] definido por:

$$Mf(x) = \sup_{h > 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y)| dy$$

con  $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ .

Es un resultado clásico que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p)  $1 < p \leq \infty$ .

La importancia del estudio del operador maximal radica en que acotaciones del tipo del operador maximal asociado a una base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , implican propiedades de diferenciación, para ciertas funciones  $f$ , de la base de diferenciación. Esencialmente, si el operador maximal  $M$ , asociado a una base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , es de tipo débil  $(p,p)$  la base  $\mathcal{B}$  diferencia  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_k(x)|} \int_{B_k(x)} f(y) dy = f(x)$$

para casi todo  $x$ , con  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

Otras propiedades y acotaciones del operador maximal  $M$ , y su relación con las propiedades de diferenciación, de la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  pueden verse en Guzmán [5].

La transformada de Hilbert y el operador maximal son instrumentos esenciales para la acotación de otros operadores, de tratamiento, en apariencia, más complicado.

Uno de los métodos de acotación de ciertos operadores, una vez que se tienen acotaciones para otros operadores, que se puedan relacionar con ellos, es el método de rotación introducido por Calderón-Zygmund [2].

Exponemos el método en general y luego estudiaremos algunos casos particulares donde se ve la utilidad del método.

Supongamos que  $K_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j=1,2,\dots$  es una sucesión de núcleos en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , y queremos estudiar la acción sobre  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < \infty$ , de los operadores de convolución  $K_j$  definidos sobre  $L^p(\mathbb{R}^n)$  por:

$$K_j f(x) = k_j * f(x)$$

Utilizando las coordenadas polares se obtiene:

$$K_j f(x) = \int_{\bar{y} \in \Sigma} k_j(y) f(x-y) dy = \int_{\bar{y} \in \Sigma} \int_{r=0}^{\infty} k_j(r \bar{y}) f(x-r\bar{y}) r^{n-1} dr d\bar{y}$$

donde  $\Sigma$  es la esfera unidad en  $R^n$ , es decir:

$$\Sigma = \{\bar{y} \in R^n / |\bar{y}| = 1\}$$

y  $d\bar{y}$  denota la medida Lebesgue sobre  $\Sigma$ .

Si suponemos que los núcleos tienen una propiedad de homogeneidad, por ejemplo

$$k_j(r\bar{y}) = h_j(r) g_j(\bar{y})$$

entonces:

$$\begin{aligned} K_j f(x) &= \int_{\bar{y} \in \Sigma} g_j(\bar{y}) \left( \int_0^{\infty} h_j(r) f(x-r\bar{y}) r^{n-1} dr \right) d\bar{y} = \\ &= \int_{\bar{y} \in \Sigma} g_j(\bar{y}) H_j^{\bar{y}} f(x) d\bar{y} \end{aligned}$$

donde para cada  $\bar{y} \in \Sigma$  fijo  $H_j^{\bar{y}}$  es el operador:

$$H_j^{\bar{y}} f(x) = \int_0^{\infty} h_j(r) f(x-r\bar{y}) r^{n-1} dr$$

Si es posible probar que:

$$\|H_j^{\bar{y}} f\|_p \leq C_p(\bar{y}) \|f\|_p$$

donde  $C_p(\bar{y})$  es tal que

$$\int_{\bar{y} \in \Sigma} |g_j(\bar{y}) C_p(\bar{y})| d\bar{y} < A_p < \infty \quad \forall j=1,2,\dots$$

entonces, usando la desigualdad integral de Minkowsky se obtiene:

$$\|K_j f\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

con  $A_p$  independiente de  $j, f$ .

Este método nos permite rotar una desigualdad unidimensional, por dos circunstancias esenciales:

a) Los núcleos son homogéneos con respecto a las dilataciones.

b) El jacobiano de las coordenadas cartesianas respecto a las coordenadas polares se factoriza en una función de  $r$  y otra de  $\bar{y}$ .

Así los operadores de Calderón-Zygmund, (que son generalización de la transformada de Hilbert a  $n$  dimensiones), se definen como operadores de convolución asociados a núcleos

$$k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad K \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n - \{0\}) \quad \text{tales que:}$$

i)  $K$  es impar y positivamente homogéneo de grado  $-n$ , es decir:

$$k(\lambda x) = \lambda^{-n} k(x)$$

La condición i) nos asegura que

$$\int_{\Sigma} k(\bar{y}) d\bar{y} = 0$$

ii)  $\int_{\Sigma} |k(\bar{y})| d\bar{y} < \infty$ .

Al estudiar el comportamiento del operador  $K$  definido por

$$Kf(x) = k * f(x) \quad \text{para funciones } f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

se efectúa un truncamiento del núcleo  $k$  definiendo los núcleos truncados

$$k_{\varepsilon, \eta}(x) = \begin{cases} k(x) & \text{si } \varepsilon \leq |x| \leq \eta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los operadores asociados a estos núcleos  $K_{\varepsilon, \eta}$  de tal forma que

$$K_{\epsilon, \eta} f(x) = k_{\epsilon, \eta} * f(x) = \int_{\epsilon \leq |y| \leq \eta} k(y) f(x-y) dy$$

Efectuando el paso a coordenadas polares y aplicando el método de rotación se obtiene:

$$K_{\epsilon, \eta} f(x) = \int_{\Sigma} k(\bar{y}) H_{\epsilon, \eta}^{\bar{y}} f(x) d\bar{y}$$

donde ahora  $H_{\epsilon, \eta}^{\bar{y}} f$  es la transformada truncada de Hilbert que es de tipo  $(p, p)$  y por lo tanto se tiene que:

$$\|K_{\epsilon, \eta} f\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

aplicando el método de rotación.

Otra aplicación del método de rotación nos proporciona propiedades de diferenciación en  $R^n$ , a partir de acotaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood en  $R^1$ .

En efecto, sea  $B$  la base de diferenciación, invariante por traslaciones, tal que:

$$B(0) = \{B_r(0)\}_{r \in R^+} \quad \text{con} \quad B_r(0) = \{x / 0 \leq |x| \leq r\}$$

En este caso

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{c}{r^n} \int_{y \in B_r(x)} |f(y)| dy$$

con  $B_r(x) = x + B_r(0)$ .

Y utilizando las coordenadas polares nuevamente se obtiene:

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{c}{r^n} \int_{\bar{y} \in \Sigma} \int_0^r |f(x - \rho \bar{y})| \rho^{n-1} d\rho d\bar{y}$$

Por tanto:

$$Mf(x) \leq \sup_{r > 0} c \int_{\bar{y} \in \Sigma} \frac{1}{r} \int_0^r |f(x - \rho \bar{y})| d\rho d\bar{y}$$

$$\begin{aligned} Mf(x) &\leq c \int_{\bar{y} \in \Sigma} \left( \sup \frac{1}{r} \int_0^r |f(x-\rho\bar{y})| d\rho \right) d\bar{y} = \\ &= c \int_{\bar{y} \in \Sigma} H^{\bar{y}} f(x) d\bar{y} \end{aligned}$$

donde ahora  $H^{\bar{y}} f$  es el operador maximal de Hardy-Littlewood, que conocemos que es de tipo  $(p,p)$ ,  $1 < p \leq \infty$ .

Por tanto apliando el método de rotación se obtiene que

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

ya que en este caso la integral dependiente de  $\Sigma$  es:

$$\int_{\bar{y} \in \Sigma} d\bar{y} < \infty$$

Pero el clásico tipo de homogeneidad puede estar ausente en ocasiones donde se tenga otro tipo de homogeneidad.

Tal es el caso de las integrales singulares con homogeneidad mixta estudiadas primeramente por Fabes y Riviere [3] donde el núcleo  $k$ , con  $k \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , satisface para  $\lambda > 0$ :

$$k(\lambda x_1, \lambda^2 x_2) = \lambda^{-3} k(x_1, x_2).$$

Posteriormente Guzmán [4] generalizó los resultados de Fabes y Riviere trabajando con núcleos  $k$  que satisfacen:

$$k(e^{P \log \lambda} x) = \lambda^{-\text{tr} P} k(x); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \lambda > 0$$

donde  $P$  es una matriz  $n \times n$  cuyos autovalores tienen parte real positiva.

Las integrales singulares asociadas se pueden tratar por medio de unas ciertas "coordenadas polares".

Se demuestra que para cada  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  existe un único

$\rho > 0$  y un único  $\bar{x} \in \Sigma$ , con  $\Sigma = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n / |\bar{y}| = 1\}$ , tal que:

$$x = e^{P \log \rho} \bar{x}$$

y uno trabaja con las nuevas coordenadas  $(\rho, \bar{x})$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Además el jacobiano de la transformación verifica:

$$J(x; \rho, \bar{x}) = \rho^{\text{tr} P - 1} L(\bar{x})$$

donde  $L(\bar{x})$  es una función indefinidamente derivable y acotada en  $\Sigma$ .

Denotando por  $T_\lambda$  la transformación que hace pasar de un punto  $x = (\rho, \bar{x})$  al punto  $x = (\lambda \rho, \bar{x})$  y utilizando el método de rotación en las nuevas coordenadas polares  $(\rho, \bar{x})$  se tiene que:

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(y) f(x-y) dy \quad \text{y teniendo en cuenta que } k(y) = k(e^{P \log \rho} \bar{y}) \text{ se obtiene:}$$

$$Kf(x) = \int_{\bar{y} \in \Sigma} \rho^{-\text{tr} P} k(\bar{y}) \int_0^\infty f(x - T_\rho \bar{y}) \rho^{\text{tr} P - 1} L(\bar{y}) d\rho d\bar{y}$$

y simplificando se obtiene:

$$Kf(x) = \int_{\bar{y} \in \Sigma} L(\bar{y}) k(\bar{y}) \left( \int_0^\infty \frac{f(x - T_\rho \bar{y})}{\rho} d\rho \right) d\bar{y}$$

y denotando:

$$H^{\bar{y}} f(x) = \int_0^\infty \frac{f(x - T_\rho \bar{y})}{\rho} d\rho$$

se obtiene:

$$Kf(x) = \int_{\bar{y} \in \Sigma} L(\bar{y}) k(\bar{y}) H^{\bar{y}} f(x) d\bar{y}$$

Si se tuviesen desigualdades de tipo  $(p, p)$  para el operador  $H^{\bar{y}}$  del tipo:

$$\|H^{\bar{y}} f\|_p \leq C(\bar{y}) \|f\|_p \quad \text{para ciertos espacios } L^p$$

se obtendría por aplicación de la desigualdad integral de Minkowski:

$$\|Kf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

supuesto que  $\int_{\bar{y} \in \Sigma} |L(\bar{y}) k(\bar{y}) C(\bar{y})| d\bar{y} = c < \infty$

El operador  $H_{\bar{y}}$  se "parece" a la transformada de Hilbert, pero a diferencia del caso clásico, en que con  $\bar{y}$  fijo  $x - T_{\rho}\bar{y}$  era una recta que pasaba por el punto  $x$ , en el caso actual no tiene por que presentarse esta situación tan favorable ya que  $x - T_{\rho}\bar{y}$  puede ser una curva cualesquiera en  $\mathbb{R}^n$ , que pasa por  $x$ .

Si se tuviesen acotaciones para el operador  $H_{\bar{y}}$  se tendrían acotaciones para el operador  $K$  en condiciones generales cuando  $x - T_{\rho}\bar{y}$ , con  $\bar{y}$  fijo, no sea una recta.

Afortunadamente la década de los setenta ha sido fructífera en resultados en esta dirección, ya que han sido intensos los estudios para obtener acotaciones de la transformada de Hilbert a lo largo de curvas y del operador maximal a lo largo de curvas definidas de la forma siguiente:

Sea  $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

La transformada de Hilbert a lo largo de la curva  $\gamma$  se define

$$H_{\gamma} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-\gamma(t))}{t} dt$$

El operador maximal a lo largo de  $\gamma$  se define

$$M_{\gamma} f(x) = \sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x-\gamma(t))| dt$$

Es de notar que el operador  $\overline{H^\gamma}$  es equivalente al operador  $H^\gamma$  para "coordenadas polares" generales.

El primer resultado de acotación es debido a Stein-Wainger [15] donde obtienen una acotación en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  para el operador  $H_\gamma$  donde

$$\gamma(t) = \text{sig } t (|t|^{\alpha_1}, |t|^{\alpha_2}, \dots, |t|^{\alpha_n}) \quad \alpha_i > 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

Esencialmente la acotación del operador  $H_\gamma$  se debe a una evaluación de ciertas integrales trigonométricas.

La extensión a la teoría  $L^p$  para el operador  $H_\gamma$ , para la misma curva  $\gamma(t)$ , es debida a Nagel-Riviere-Wainger [7] y [8].

En cuanto al operador maximal  $M_\gamma$  el primer resultado, debido a Nagel-Riviere-Wainger [9] es la acotación de  $M_\gamma$  siendo  $\gamma(t) = (t, t^2)$ , avanzando, con ayuda de la teoría de Littlewood-Paley, con los resultados de Stein [13], Stein [14] y Stein-Wainger [16].

Resultados más generales obtienen Stein-Wainger [17] para curvas bien curvadas (que más adelante explicitaremos).

Ellos obtienen, siendo  $\gamma(t)$  una curva "bien curvada" la acotación para el operador maximal

$$\|M_\gamma f\|_p \leq C(\gamma) \|f\|_p \quad 1 < p < \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

donde  $C(\gamma)$  depende de la curva  $\gamma(t)$ .

Asimismo obtienen otras acotaciones, para el operador  $H_\gamma$ .

Recientemente Nestlerode [11] elimina la dependencia de la constante  $C(\gamma)$  introduciendo otro tipo de curvas llamadas altamente monótonas, obteniendo para este tipo de curvas las acotaciones

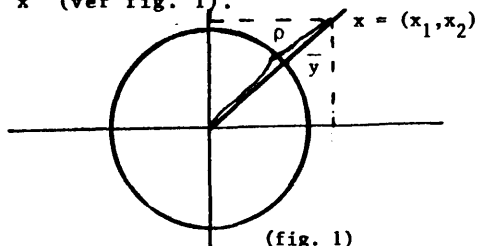
$$|M_Y f|_p \leq C_p |f|_p \quad 2 \leq p < \infty$$

La consecución de este resultado es debida a una generalización del lema de Van der Corput y una adecuada utilización de la teoría de Littlewood-Paley.

Las consideraciones anteriores nos sugieren un procedimiento general para introducir unas "coordenadas polares generalizadas".

Haremos el estudio en  $R^2$  por su transparencia geométrica.

En las coordenadas polares clásicas en  $R^2$  cada punto  $x = (x_1, x_2) \in R^2 - \{0\}$  se representa de forma única por  $(\rho, \bar{y})$  siendo  $\rho$  su distancia al origen e  $\bar{y}$  el punto de la esfera unidad en  $R^2$ , que está en la recta que une el origen de coordenadas y el punto  $x$  (ver fig. 1).



(fig. 1)

En este caso  $\rho = \text{cte}$  representan circunferencias centradas en el origen, así como  $\bar{y} = \text{cte}$  son rectas que pasan por el origen, que son los rayos polares.

Imaginemos que tratamos con una familia de curvas de Jordan suficientemente suaves  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  conteniendo al origen en su interior.

Supongamos que las curvas cubren  $R^2 - \{0\}$  de tal forma que para todo punto distinto del origen exista una sola curva que pasa

por dicho punto.

Estas curvas van a constituir las "circunferencias" ( $\rho = \text{cte}$ ) en las nuevas coordenadas polares.

Se quiere obtener una familia de curvas comenzando por el origen, que serían los "rayos polares" de tal forma que por cada punto distinto del origen pase un sólo rayo polar.

Para la aplicación del método de rotación, es conveniente parametrizar la familia de "rayos polares"  $\Gamma_\alpha$  e introducir un nuevo sistema de coordenadas  $x \longleftrightarrow (\rho, \alpha)$  de tal forma que

$$\text{Jac}(x; \rho, \alpha) = \ell(\rho) m(\alpha)$$

En estas condiciones, es posible la acotación de ciertos operadores, utilizando la técnica del método de rotación, siempre que los rayos polares  $\Gamma_\alpha$  sean "curvas buenas".

Este será el objeto de nuestro trabajo.

La memoria la dividimos en cuatro capítulos. Damos aquí una idea general de lo tratado en cada capítulo, dejando las consideraciones más técnicas, que expondremos en el contexto del propio capítulo.

En el primer capítulo introducimos las coordenadas polares generalizadas  $(\rho, \alpha)$  asociadas a una familia de curvas  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  determinando los rayos polares  $\Gamma_\alpha$  por medio de consideraciones geométricas.

Damos asimismo condiciones respecto a la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  para que los rayos polares sean curvas buenas, de tal

forma que se tengan acotaciones de ciertos operadores (esencialmente del operador maximal y de la transformada de Hilbert) a lo largo de estas curvas; para que sea posible aplicar la técnica del método de rotación.

En el capítulo segundo trabajamos con determinadas familias  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de conjuntos acotados, obteniendo explícitamente los rayos polares asociados a ellas, así como propiedades de acotación del operador maximal (y consecuentemente propiedades de diferenciación) para ciertas bases de diferenciación asociadas a la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

El capítulo tercero sigue las mismas directrices que el capítulo segundo, pero en él las familias de curvas  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  encierran conjuntos que no están acotados, de medida finita.

Finalmente en el capítulo cuarto estudiamos el problema inverso: Dada la familia de rayos polares  $\Gamma_\alpha$ , tratar de recuperar la familia de "circunferencias"  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  tal que  $\Gamma_\alpha$  sean los rayos polares asociados a esta familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , en principio desconocida.

Estudiamos el problema general y lo resolvemos explícitamente en determinados casos.

Finalmente, acabamos la memoria con una serie de problemas abiertos en los que estamos actualmente trabajando.



CAPITULO 1

INTRODUCCION DE LAS COORDENADAS POLARES

En este capítulo introducimos unas "coordenadas polares" asociada a ciertas familias de curvas  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  que cubren todo el plano ó parte de él.

Dividimos el capítulo en cinco apartados.

En el primero, bajo hipótesis de regularidad de la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  definimos las "coordenadas polares" asociadas a la familia  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  por medio de una cierta condición geométrica, así como los "rayos polares", cuya caracterización está da da por los teoremas 1.1.1 y 1.1.2, dependiendo de la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

En el apartado segundo vemos el comportamiento de la medida Lebesgue para el cambio a estas coordenadas polares, que nos viene explicitado por el teorema 1.2.

En el apartado tercero exponemos primeramente resultados de acotación del operador maximal a lo largo de curvas, que definimos allí; dando posteriormente resultados, principalmente los teoremas 1.3.b.1 y 1.3.b.3 que nos garanticen que los rayos polares asociados a la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , que seguimos suponiendo suficientemente regular, sean curvas "buenas".

En el apartado cuarto estudiamos acotaciones para el operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación, relacionadas con la familia  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , suficientemente regular, obteniendo, vía los resultados del apartado anterior los teoremas de acotación del operador maximal, bajo ciertas hipótesis de la familia  $(C_\rho)$

$\rho \in (0, \infty)$ , fundamentalmente los teoremas 1.4.1 y 1.4.3.

Finalmente en el apartado quinto, calculamos los rayos polares para determinadas familias  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  sin las suficientes condiciones de regularidad, exigidas en los apartados anteriores.

### 1.1. Definición de las "coordenadas polares"

En este apartado definimos las coordenadas polares asociadas a una familia  $(C_\rho)$ ;  $\rho \in (0, \infty)$  de curvas de clase  $C^2$ .

Por comodidad técnica denotamos la familia de curvas  $C_\rho = h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ ; aunque la técnica para introducir estas "coordenadas polares" es general para toda familia de curvas  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  que barran  $R^2 - \{0\}$ , o parte del plano.

Asimismo, por facilidad de cálculo, supondremos primeramente que la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  está situada en el primer cuadrante; extendiendo posteriormente el estudio al caso general  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , para lo cual sólo son necesarias pequeñas modificaciones.

Sea entonces la familia de curvas  $y = h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  que la suponemos, en principio, situada en el primer cuadrante, de modo que todo punto del primer cuadrante esté en una y sólo una de las curvas de la familia.

Supongamos que  $\forall \rho; \rho \in (0, \infty)$  los conjuntos limitados por las curvas de la familia  $h(x, \rho)$  y los semiejes positivos de coordenadas están acotados y por tanto se verifica:

- i)  $\exists a(\rho)$  finito tal que  $h(a(\rho), \rho) = 0$   $\forall \rho; \rho \in (0, \infty)$
- ii)  $h(0, \rho) = C(\rho) < \infty$   $\forall \rho$

Para todo punto del primer cuadrante sustituimos las coordenadas cartesianas por las "coordenadas polares" que denotamos por  $(\rho, \alpha)$  donde:

$\rho$  es el valor del parámetro de la familia  $h(x, \rho)$  en la que se encuentra el punto; y

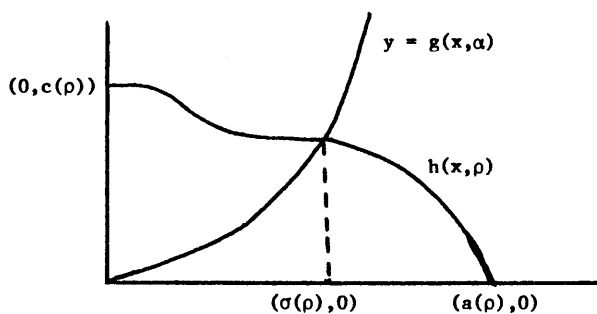
$\alpha$  es un número real  $\alpha \in [0, 1]$  que satisface una cierta condición geométrica que ahora expondremos.

Se intenta, (a semejanza de las coordenadas polares clásicas) barrer el primer cuadrante por medio de unas determinadas curvas que llamaremos "rayos polares" que verificarán cierta condición sobre las áreas encerradas por los conjuntos  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados, asociada al número real  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Definición 1.1. "Rayos polares"**

Con  $\alpha$  fijo  $\alpha \in [0, 1]$  a las curvas  $g(x, \alpha)$ , (que determinamos a continuación), las denominaremos "rayos polares" asociados a la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

La condición geométrica que verifican los rayos polares asociados a  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  es la siguiente: (ver fig. 1)



(fig. 1)

$\forall \rho, \rho \in (0, \infty)$  se debe verificar:

$$\int_0^{\sigma(\rho)} g(x, \alpha) dx + \int_{\sigma(\rho)}^{a(\rho)} h(x, \rho) dx = \alpha \int_0^{a(\rho)} h(x, \rho) dx \quad |1.1.1|$$

es decir, fijada una recta de referencia, en este caso el eje de abscisas, como origen de áreas la igualdad |1.1.1| nos dice que el área encerrada por las curvas  $y = g(x, \alpha) \quad 0 \leq x \leq \sigma(\rho)$  e

$$y = h(x, \rho) \quad \sigma(\rho) \leq x \leq a(\rho)$$

es  $\alpha$  veces la superficie encerrada por la curva  $h(x, \rho)$  con los ejes coordenados.

Para la determinación de los rayos polares  $g(x, \alpha) \quad \alpha \in [0, 1]$  se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1.1. Se considera la familia de curvas  $y = h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  que barren el primer cuadrante, de tal forma que todo punto de él está en una sola curva de la familia.

Supongamos que la familia  $h(x, \rho)$  es de clase  $C^2$  y que  $h_\rho(x, \rho) \neq 0$  y continua  $\forall x > 0, \forall \rho \in (0, \infty)$ . Supongamos que la familia  $h(x, \rho)$  es tal que la función  $\sigma(\rho, \alpha)$  definida por la igualdad |1.1.1| admite función inversa  $\rho = \rho(\sigma, \alpha)$ .

Entonces los rayos polares  $g(x, \alpha) \quad \alpha \in [0, 1]$  son únicos y su expresión viene definida por

$$g(x, \alpha) = h(x, \rho(x, \alpha))$$

Demostración:

En la fig. 1 se observa la siguiente igualdad:

$$g(\sigma(\rho)) = h(\sigma(\rho), \rho)$$

y en consecuencia, aunque la función  $g(x, \alpha)$  es desconocida, el problema de su determinación se reduce a encontrar la función  $\sigma(\rho, \alpha)$ .

Para ello en la igualdad:

$$\int_0^{\sigma(\rho)} g(x, \alpha) dx + \int_{\sigma(\rho)}^{a(\rho)} h(x, \rho) dx = \alpha \int_0^{a(\rho)} h(x, \rho) dx$$

derivemos con respecto a  $\rho$  obteniendo:

$$g(\sigma(\rho), \alpha) \sigma'(\rho) + h(a(\rho), \rho) a'(\rho) - h(\sigma(\rho), \rho) \sigma'(\rho) + \int_{\sigma(\rho)}^{a(\rho)} h_\rho(x, \rho) dx = \alpha \left[ \int_0^{a(\rho)} h_\rho(x, \rho) dx - h(a(\rho), \rho) a'(\rho) \right] \quad |1.1.2|$$

y teniendo en cuenta que:

$$h(a(\rho), \rho) = 0; \quad g(\sigma(\rho), \alpha) = h(\sigma(\rho), \rho) \quad |1.1.2| \quad \text{se convierte en:}$$

que es equivalente a

$$\int_{\sigma(\rho)}^{a(\rho)} h_\rho(x, \rho) dx = \alpha \cdot \int_0^{a(\rho)} h_\rho(x, \rho) dx \quad |1.1.3|$$

que es equivalente a

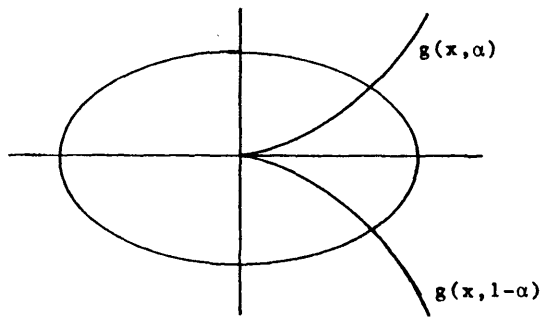
$$F(\sigma, \rho) = \int_0^\sigma h_\rho(x, \rho) dx - (1-\alpha) \int_0^{a(\rho)} h_\rho(x, \rho) dx = 0 \quad |1.1.4|$$

que nos determina  $\sigma = \sigma(\rho, \alpha)$  si se verifica que  $F_\sigma(\sigma, \rho) = h_\rho(\sigma, \rho) \neq 0$ , lo cual es cierto por hipótesis.

Y asegurada, también por hipótesis, la existencia de la función inversa se tiene que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  son únicos ya que al ser  $F_\sigma(\sigma, \rho) \neq 0 \exists_1 \sigma = \sigma(\rho, \alpha)$  y por tanto  $\exists_1 \rho = \rho(\sigma, \alpha)$  y  $g(x, \alpha) = h(x, \rho(x, \alpha))$ . c.q.d.

La condición expuesta de que la familia  $h(x,\rho)$ ;  $\rho \in (0,\infty)$  se encuentra en el primer cuadrante es superflua como veremos a continuación.

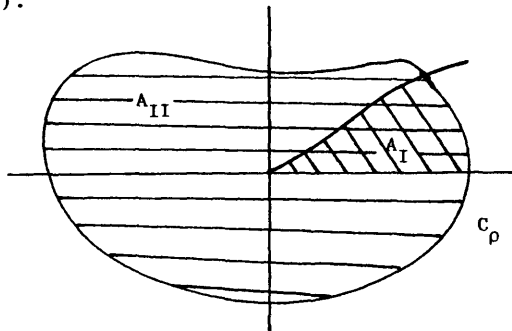
Así si la familia  $(C_\rho)$ ;  $\rho \in (0,\infty)$ , está formada por conjuntos simétricos respecto al origen y a los ejes coordenados (ver fig. 2)



(fig. 2)

basta efectuar el estudio con  $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$  estudiando la naturaleza de los rayos polares  $g(x,\alpha)$  con  $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$  y utilizando adecuadamente la condición de simetría.

Finalmente si la familia  $(C_\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  es arbitraria la utilización de la condición |1.1.1| nos determina los rayos polares (ver fig. 3).



(fig. 3)

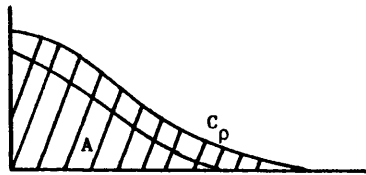
Los rayos polares de orden  $\alpha$  vendrán definidos como las curvas que verifican la igualdad:

$$A_I = \alpha A_{II} \quad 0 \leq \alpha < 1$$

Dependerá de la familia de curvas  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  el que los rayos polares se obtengan de forma explícita  $y = g(x, \alpha)$ , o sólo sea posible una representación paramétrica  $(g_1(t, \alpha), g_2(t, \alpha))$ .

En el capítulo siguiente estudiaremos un ejemplo, donde se obtendrá la representación paramétrica de los rayos polares, para una determinada familia de curvas  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

Siguiendo la misma técnica, se pueden establecer unas "coordenadas polares" para familias de curvas  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , si la familia de curvas barren un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , (ver fig. 4)



(fig. 4)

obteniendo unas coordenadas polares para los puntos del conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

En la continuación de esta memoria, si no se cita nada en contra, supondremos que la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  está situada en el primer cuadrante, barriendo las curvas de dicha familia bien todo el primer cuadrante o bien parte de él.

Si la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , que seguimos suponiendo de clase  $C^2$ , está formada por conjuntos no acotados, (en el sentido

que ahora expondremos), la situación es esencialmente la misma.

Supongamos entonces que la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  es de la forma  $y = h(x, \rho)$  de forma que  $\forall \rho$  la curva  $h(x, \rho)$  está situada en el primer cuadrante.

Supongamos también que los conjuntos limitados por la curva  $h(x, \rho)$  y los ejes positivos de coordenadas no están acotados.

Por tanto se verifica:

i)  $\exists a < \infty$  tal que  $h(a, \rho) = 0 \quad \forall \rho$

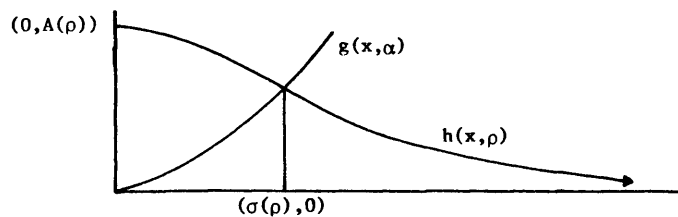
ii)  $h(0, \rho) = A(\rho)$  pudiendo ser  $A(\rho)$  infinito.

Supongamos finalmente que el área encerrada por la curva  $h(x, \rho)$  y los ejes positivos de coordenadas es finita lo que es equivalente a:

$$\int_0^\infty h(x, \rho) dx < \infty \quad \forall \rho \quad \rho \in (0, \infty)$$

Con estas condiciones tratamos de introducir, (análogamente al caso de conjuntos acotados) unas "coordenadas polares" asociadas a la familia  $h(x, \rho) \quad \rho \in (0, \infty)$ .

Las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  así como los rayos polares  $g(x, \alpha)$  se definen como en el caso de conjuntos acotados estudiados anteriormente, (ver fig. 5)



(fig. 5)

El problema se reduce a encontrar los rayos polares  $y = g(x, \alpha)$  de forma que se verifique:

$$\int_0^{\sigma(\rho)} g(x, \alpha) dx + \int_{\sigma(\rho)}^{\infty} h(x, \rho) dx = \alpha \int_0^{\infty} h(x, \rho) dx \quad |1.1.5|$$

con  $\alpha \in [0, 1]$ .

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1.2. Sea la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , de clase  $C^2$ , situada en el primer cuadrante, tal que los conjuntos que delimitan las curvas  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados sean no acotados y de medida finita.

Supongamos:

- i) La función  $h_\rho(x, \rho)$  es continua y distinta de cero  $\forall x > 0, \forall \rho \in (0, \infty)$ .
- ii) La función  $\sigma(\rho, \alpha)$  definida por |1.1.5| admite función inversa  $\rho = \rho(\sigma, \alpha)$  (lo que es equivalente a decir que  $\sigma'(\rho, \alpha) \neq 0 \forall \rho \in (0, \infty) \forall \alpha \in [0, 1]$ ).

Entonces los rayos polares  $g(x, \alpha)$  están definidos unívocamente por la expresión:

$$g(x, \alpha) = h(x, \rho(x, \alpha))$$

Demostración.

Observando la fig. 5 se tiene que:

$$g(\sigma(\rho), \alpha) = h(\sigma(\rho), \rho)$$

Por tanto, el problema de la determinación de los rayos polares

res queda reducido al cálculo de la función  $\sigma(\rho, \alpha)$  definida por |1.1.5|.

Derivando |1.1.5| respecto a  $\rho$  se obtiene:

$$\begin{aligned} g(\sigma(\rho), \alpha) \sigma'(\rho) + \int_{\sigma(\rho)}^{\infty} h_{\rho}(x, \rho) dx - h(\sigma(\rho), \rho) \sigma'(\rho) = \\ = \alpha \int_0^{\infty} h_{\rho}(x, \rho) dx \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que  $g(\sigma(\rho), \alpha) = h(\sigma(\rho), \rho)$  la expresión anterior es equivalente a:

$$F(\sigma, \rho) = \int_0^{\sigma} h_{\rho}(x, \rho) dx - (1-\alpha) \int_0^{\infty} h_{\rho}(x, \rho) dx = 0 \quad |1.1.6|$$

La expresión |1.1.6| nos determina  $\sigma$  como función implícita de  $\rho$  y la hipótesis i) nos asegura que  $F_{\sigma}(\sigma, \rho) = h_{\rho}(x, \rho) \neq 0$  y por tanto  $\exists_1 \sigma = \sigma(\rho, \alpha)$ . La hipótesis ii) nos garantiza la existencia de la función inversa  $\rho = \rho(\sigma, \alpha)$  y por tanto como  $g(x, \alpha) = h(x, \rho(x, \alpha))$  queda demostrado el teorema.

La restricción impuesta a la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de estar situada en el primer cuadrante es simplemente por facilidad de cálculo, tratando de forma similar que para familias  $(C_{\rho})$  de conjuntos acotados, los casos de familias  $(C_{\rho})$   $\rho \in (0, \infty)$  de conjuntos no acotados simétricos con respecto a los ejes coordenados, o familias  $(C_{\rho})$   $\rho \in (0, \infty)$  de conjuntos no acotados arbitrarios, con las mismas técnicas que las expuestas para familias  $(C_{\rho})$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  de conjuntos acotados.

1.2. Coordenadas polares generalizadas. Cambio a polares.

Tratamos en este apartado el comportamiento de la medida e integral de Lebesgue, en el nuevo sistema de coordenadas  $(\rho, \alpha)$ .

$$\begin{aligned} \text{Sea } \phi : (0, \infty) \times [0, 1] &\longrightarrow A \\ (\rho, \alpha) &\longrightarrow (x, y) \end{aligned}$$

denotando por  $A$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que barren las curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .

Suponemos que  $A$  es medible Lebesgue, así como los conjuntos que encierran las curvas  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados  $\forall \rho$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

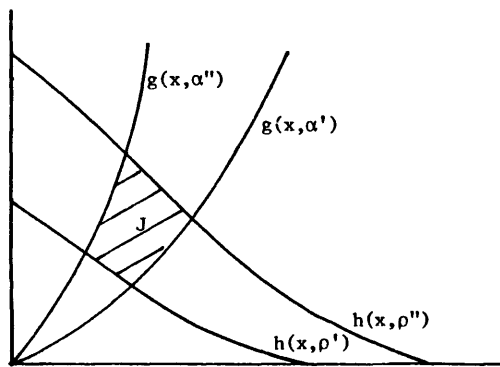
De la definición de las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  es inmediato observar que, si la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , se encuentra en las condiciones expuestas en el apartado |1.1|,  $\phi$  es una biyección y por lo tanto todo punto de  $A$  se puede describir unívocamente por el par  $(\rho, \alpha)$   $0 < \rho < \infty$ .  
 $0 \leq \alpha \leq 1$

Definición 1.2.1. "Celda polar"

Llamaremos "celda polar" de  $A$  a una región de  $A$ , que en coordenadas polares viene descrita de la forma:

$$J = (\rho', \rho''] \times (\alpha', \alpha'']$$

con  $(\rho', \rho''] \subset (0, \infty)$  y  $(\alpha', \alpha''] \subset [0, 1]$  ver fig. 6



(fig. 6)

Consideraremos recubrimientos de  $A$  por celdas polares diádicas.

Dado  $k$ , ( $k=1,2,\dots$ ) se define  $\xi_k$  como la colección de celdas polares del tipo

$$J_k = \left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right] \times \left(\frac{q}{2^k}, \frac{q+1}{2^k}\right]$$

para cada  $p, q \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right] \subset (0, \infty) \quad \text{y} \quad \left(\frac{q}{2^k}, \frac{q+1}{2^k}\right] \subset [0, 1]$$

Consideremos

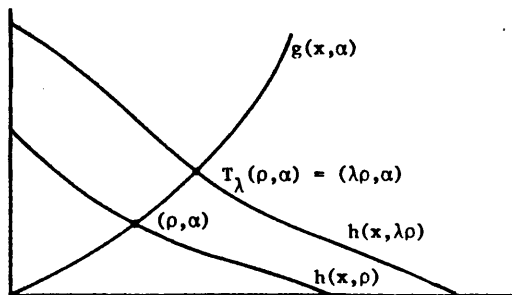
$$\xi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

Es trivial que la familia  $\xi$  de las celdas polares diádicas de  $A$  es numerable y verifica si  $J_j \in \xi_j$ ;  $J_k \in \xi_k$  con  $j \leq k$  entonces  $J_j \cap J_k = \emptyset$  ó  $J_j \subset J_k$ .

En analogía con los intervalos diádicos es fácil comprobar que cada abierto de  $A$  es unión numerable de celdas polares disjuntas dos a dos.

Por tanto, para ver como se comporta la medida Lebesgue en  $A$  frente a este cambio de coordenadas, basta ver como se transforma el elemento de área de una celda polar.

Sea  $T_\lambda$  para cada  $\lambda > 0$   $\lambda \in \mathbb{R}$  la aplicación que a cada punto  $(\rho, \alpha) \in A$  le transforma en el punto  $(\lambda\rho, \alpha)$  del mismo rayo polar, es decir  $T_\lambda(\rho, \alpha) = (\lambda\rho, \alpha)$ , ver fig. 7



(fig. 7)

Designemos por  $S(\rho)$  el área encerrada por la curva  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados, que supondremos función derivable.

Sea  $\bar{x}$  el punto de la curva correspondiente al valor del parámetro  $\rho = 1$  que llamaremos "curva unidad" para estas coordenadas y la denotaremos por  $I$ .

Sobre esta curva unidad, consideremos la familia  $F$  de conjuntos siguientes:

Un conjunto  $C \subset I$  está en  $F$  si:

$$C = \emptyset \quad \delta$$

$$C_1 = \{T_\lambda \bar{x} = (\lambda, \alpha) \quad \text{siendo} \quad \bar{x} = (1, \alpha) \in C, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

es medible Lebesgue.

Trivialmente  $F$  es una  $\Sigma$ -álgebra.

Se considera la aplicación  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma : F &\longrightarrow [0, +\infty) \\ C &\longrightarrow \sigma(C) = \frac{S'(1)}{S(1)} |C_1|\end{aligned}$$

siendo  $S'(\rho)$  la derivada con respecto a  $\rho$  de la función  $S(\rho)$ .

La función  $\sigma$  así definida sobre  $F$  es una medida completa y finita, por ser completa la medida Lebesgue y encerrar área finita las curvas  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados.

La introducción de la constante  $\frac{S'(1)}{S(1)}$ , que a priori parece artificiosa, será discutida al final de este apartado.

Por razón de como se han construido los rayos polares si  $C \subset I$ , y  $r \geq 0$ , denominando  $C_r = \{T_\lambda \bar{x} = (\lambda, \alpha), \bar{x} = (1, \alpha) \in C, 0 \leq \lambda \leq r\}$  resulta:

$$\begin{aligned}|C_r| &= \frac{S(r)}{S'(1)} \sigma(C) \quad \text{ya que entonces:} \\ |C_r| &= \frac{S(r)}{S'(1)} \frac{S'(1)}{S(1)} |C_1| = \frac{S(r)}{S(1)} |C_1|\end{aligned}$$

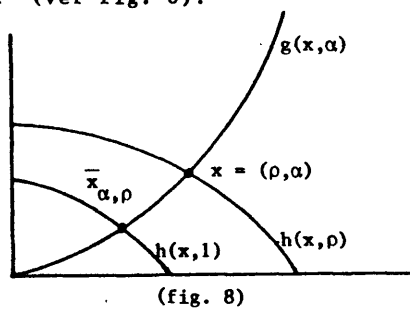
Se tiene el siguiente resultado, que nos relaciona el comportamiento de la medida Lebesgue en las nuevas coordenadas, así como el cambio de variable en las integrales:

**Teorema 1.2.** Sea la biyección:

$$\begin{aligned}\psi : A &\longrightarrow I \times (0, \infty) \\ x &\longrightarrow (\bar{x}_{\alpha, \rho}, \rho)\end{aligned}$$

donde  $\bar{x}_{\alpha, \rho}$  es el transformado en la curva unidad  $I$  del punto

$x \in A$  de coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  que está en el mismo rayo polar y  $\rho$  es el valor del parámetro de la familia  $h(x, \rho)$  donde se encuentra el punto  $x$  (ver fig. 8).



En  $A$  consideramos la medida Lebesgue, en  $I$  la medida  $\sigma$  definida anteriormente y sobre  $(0, \infty)$  una medida Lebesgue-Stieljes  $\mu$  asociada a la función  $f$

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho \longmapsto f(\rho) = \frac{S(\rho)}{S'(1)}$$

En el espacio producto  $I \times (0, \infty)$  consideramos la medida producto  $\sigma \times \mu$ .

Entonces:

- (a)  $M \subset A$  es  $|\cdot|$ -medible si y solamente si  $\psi(M)$  es  $\sigma \times \mu$ -medible y además

$$|M| = (\sigma \times \mu)(\psi(M))$$

- (b)  $\ell(\cdot) \in L^1(A)$  si y solamente si  $\ell(\psi^{-1}(\cdot)) \in L^1(I \times (0, \infty), \sigma \times \mu)$

y además se verifica:

$$\int_A \ell(x) dx = \int_{I \times (0, \infty)} \ell(\psi^{-1}(y)) d(\sigma \times \mu)(y) =$$

$$= \int_0^\infty \int_I \ell(T_\rho \bar{y}) \left( \left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) d\bar{y} \frac{S'(\rho)}{S'(1)} d\rho$$

donde  $\left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y}, \eta(\bar{y}) \right]$  es el producto escalar del vector tangente  $\frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y}$  por el vector normal  $\eta(\bar{y})$ .

Demostración.

a) Condición suficiente

1°) Sea  $\psi(M) = B \times (r_1, r_2]$  donde  $B \subset I$  es  $\sigma$  medible y  $(r_1, r_2] \subset (0, \infty)$ .

Se tiene:

$$(\sigma \times \mu)(B \times (r_1, r_2]) = \sigma(B) \cdot \mu(r_1, r_2] = \sigma(B) \frac{S(r_2) - S(r_1)}{S'(1)}$$

Por otro lado

$$M = \psi^{-1}(B \times (r_1, r_2]) = \{T_\lambda \bar{x} = (\lambda, \alpha) \text{ con } \bar{x} = (1, \alpha) \in B \text{ y } r_1 < \lambda \leq r_2\}$$

Es decir  $M = C_{r_2} - C_{r_1}$ .

Luego  $M$  es medible y además

$$|M| = |C_{r_2} - C_{r_1}| = |C_{r_2}| - |C_{r_1}| = \sigma(B) \frac{S(r_2) - S(r_1)}{S'(1)}$$

al ser  $\sigma$  una medida finita.

Así el teorema es cierto para conjuntos en  $I \times (0, \infty)$  de la forma  $\psi(M) = B \times (r_1, r_2]$  con  $B \in \mathcal{F}$  y  $(r_1, r_2] \subset (0, \infty)$ .

2°) Sea  $\psi(M) \subset I \times (0, \infty)$  tal que  $(\sigma \times \mu)(\psi(M)) = 0$ . Por las condiciones de la medida producto y la medida Lebesgue-Stieljes, tenemos que  $\forall \epsilon > 0$  existe una sucesión  $\{(B \times K)_i\}$  de conjuntos del tipo del apartado 1° disjuntos dos a dos tal que

$$\psi(M) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \times K)_i \quad \text{y además}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\sigma \times \mu)(B \times K)_i < (\sigma \times \mu) \psi(M) + \epsilon = \epsilon$$

Así

$$\begin{aligned} |M|_{\epsilon} &= |\psi^{-1} \psi(M)|_{\epsilon} \leq |\psi^{-1} \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \times K)_i|_{\epsilon} = \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi^{-1}(B \times K)_i \right|_{\epsilon} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\psi^{-1}(B \times K)_i|_{\epsilon} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma \times \mu)(B \times K)_i < \epsilon \end{aligned}$$

Luego  $|M|_{\epsilon} = 0$  y por tanto  $|M| = 0$ , por consiguiente el teorema es cierto cuando  $\psi(M)$  es un conjunto de medida  $\sigma \times \mu$  nula.

3°) Sea  $\psi(M) \subset I \times (0, \infty)$   $\sigma \times \mu$ -medible con  $(\sigma \times \mu) \psi(M) < \infty$ .

Para cada  $n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) existe una sucesión disjunta

$\{(B \times K)_{in}\}_i$  tal que

$$\psi(M) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \times K)_{in}$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\sigma \times \mu)(B \times K)_{in} < \sigma \times \mu \psi(M) + \frac{1}{n}$$

Consideremos

$$H = \bigcap_n \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \times K)_{in} \right) = \bigcup_i \left( \bigcap_n (B \times K)_{in} \right)$$

Como para todo  $n$  ( $n=1, 2, \dots$ )

$$\bigcap_n (B \times K)_{in} = (C \times J)_i$$

donde  $C \in F$  y  $J$  es una celda polar en  $R^1$  ó bien

$$\bigcap_n (B \times K)_{in} = \emptyset$$

Se tiene que:

$H = \bigcup_i (C \times J)_i$  es una unión de conjuntos del tipo 1° disjuntos dos a dos, tal que

$$\psi(M) \subset H \quad \text{y} \quad \sigma \times \mu(H) = \sigma \times \mu(\psi(M))$$

También:

$$\psi^{-1}(H) = \psi^{-1}\left(\bigcup_i (C \times J)_i\right) = \bigcup_i \psi^{-1}(C \times J)_i$$

luego  $\psi^{-1}(H)$  es medible, por el apartado 1° y además

$$\begin{aligned} |\psi^{-1}(H)| &= \sum_i |\psi^{-1}(C \times J)_i| = \sum_i \sigma \times \mu(C \times J)_i = \\ &= \sigma \times \mu(H) = \sigma \times \mu(\psi(M)) \end{aligned}$$

Al ser  $\sigma \times \mu(\psi(M)) < \infty$  se tiene que  $\sigma \times \mu(H - \psi(M)) = 0$ , luego  $\psi^{-1}(H - \psi(M))$  es medible Lebesgue y por lo visto en el apartado 2°  $|\psi^{-1}(H - \psi(M))| = 0$ .

Así se tiene que como

$$M = \psi^{-1}\psi(M) = \psi^{-1}(H - (H - \psi(M))) \quad \text{y}$$

teniendo en cuenta que  $|\psi^{-1}(H - \psi(M))| = 0$  se tiene que:

$$|M| = |\psi^{-1}(H)| = \sigma \times \mu(\psi(M))$$

Finalmente si  $\psi(M)$  es un conjunto  $\sigma \times \mu$  medible cualquiera se puede escribir:

$$\psi(M) = \bigcup_{j=0}^{\infty} [\psi(M) \cap (I \times [j, j+1])] = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_j$$

con  $D_j \cap D_k = \emptyset$  si  $j \neq k$  ( $j, k=0, 1, 2, \dots$ ) y con  $\sigma \times \mu(D_j) < \infty$ .

Entonces  $\psi^{-1}(D_j)$  es medible Lebesgue y  $|\psi^{-1}(D_j)| = \sigma \times \mu(D_j)$ .

Y así:

$$M = \psi^{-1}(\psi(M)) = \psi^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} D_j\right) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \psi^{-1}(D_j)$$

por tanto  $M$  es medible Lebesgue y

$$\begin{aligned} |M| &= \sum_j |\psi^{-1}(D_j)| = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma \times \mu(D_j) = \sigma \times \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} D_j\right) \\ &= \sigma \times \mu(\psi(M)) \end{aligned}$$

Condición necesaria:

Para probar esta parte, observemos que, si  $J$  es una celda polar en  $A \subset \mathbb{R}^2$  se verifica:

$\psi(J) = C \times K$  donde  $C \in F$  y  $K$  es una celda en  $\mathbb{R}^1$ .

Por tanto  $\psi(J)$  es  $\sigma \times \mu$  medible y además

$$\sigma \times \mu(\psi(J)) = \sigma \times \mu(C \times K) = |\psi^{-1}(C \times K)| = |\psi^{-1} \psi(J)| = |J|$$

Si  $M \subset A$  es abierto, entonces  $M = \bigcup_j J_j$ , donde  $J_j$  son celdas polares diádicas disjuntas dos a dos.

Entonces:

$\psi(M) = \psi\left(\bigcup_j J_j\right) = \bigcup_j \psi(J_j)$  es  $\sigma \times \mu$ -medible y además

$$\sigma \times \mu(\psi(M)) = \sum_j \sigma \times \mu(\psi(J_j)) = \sum_j |J_j| = |M|$$

Si  $M \subset A$  es tal que  $|M| = 0$ , entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists G \subset A$  abierto tal que:

$$G \supset M \quad \text{y} \quad |G| < |M| + \epsilon = \epsilon$$

Luego  $\sigma \times \mu(\psi(M)) \leq \sigma \times \mu(\psi(G)) = |G| < \epsilon$  de donde  $\psi(M)$  es  $\sigma \times \mu$ -medible y  $\sigma \times \mu(\psi(M)) = 0$ .

El resto de la demostración es análogo al proceso de demostración de que la condición es suficiente.

b) En primer lugar si  $s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$  es una función simple  $s \in L^1(A)$ , por el apartado (a) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_A s(x) dx &= \sum_{i=1}^N a_i |A_i| = \sum_{i=1}^N a_i \sigma \times \mu(\psi(A_i)) = \\ &= \int_{I_X(0, \infty)} s(\psi^{-1}(y)) d(\sigma \times \mu)(y) \end{aligned}$$

ya que  $\forall y \in I_X(0, \infty)$  se verifica que

$$s(\psi^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}(\psi^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{\psi(A_i)}(y)$$

Sea  $\ell \in L^1(A)$   $\ell \geq 0$ .

Sea  $\ell_k$  una sucesión de funciones simples  $\ell_k \geq 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ) y  $\ell_k \uparrow \ell$  para casi todo  $x$ . Entonces  $\ell_k(\psi^{-1}) \uparrow \ell(\psi^{-1})$  para casi todo  $y$ , y se verifica:

$$\begin{aligned} \int_A \ell(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \ell_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_X(0, \infty)} \ell_k(\psi^{-1}(y)) d \sigma \times \mu(y) = \\ &= \int_{I_X(0, \infty)} \ell(\psi^{-1}(y)) d(\sigma \times \mu)(y). \end{aligned}$$

Para  $\ell \in L^1(A)$  arbitraria, el resultado es inmediato al considerar la parte positiva y negativa de  $\ell$ .

Se ha demostrado también que si  $\ell \in L^1(A)$  entonces

$\ell \circ \psi^{-1} \in L^1(I \times (0, \infty))$  y

$$\int_A \ell(x) dx = \int_{I \times (0, \infty)} \ell(\psi^{-1}(y)) d(\sigma \times \mu)(y)$$

El recíproco se obtiene con la misma técnica de demostración.

Finalmente denotando por  $y = (\bar{y}, \rho(y)) \in I \times (0, \infty)$  se tiene que  $\psi^{-1}(y) = T_{\rho(y)} \bar{y}$  y si  $\ell \in L^1(A)$  aplicando el teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \int_A \ell(x) dx &= \int_{I \times (0, \infty)} \ell(T_{\rho(y)} \bar{y}) d(\sigma \times \mu)(\bar{y}, \rho(y)) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_I \ell(T_{\rho} \bar{y}) d\sigma(\bar{y}) du(\rho) \quad |1.2.1| \end{aligned}$$

Por otra parte denotando por:

$$\rho' = S(\rho)$$

se obtiene la familia  $h(x, \rho')$   $\rho' \in (0, \infty)$ .

Se puede utilizar para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  las coordenadas

$$x \longleftrightarrow (\rho', \bar{y})$$

donde:

$\rho'$  es el parámetro de la familia  $h(x, \rho')$  donde se encuentra  $x$ , e  $\bar{y} \in I$ .

Por cada punto  $\bar{y} \in I$ , existe un único rayo polar  $g(x, \alpha)$  que pasa por  $\bar{y} \in I$ .

Así la familia de rayos polares  $g(x, \alpha)$  la podemos parametrizar por medio de los puntos  $\bar{y} \in I$ , (en lugar de  $\alpha \in [0, 1]$ , denotandola por  $(\Gamma_{\bar{y}})_{\bar{y} \in I}$ .

Para cada punto  $x \in A$  existe un único  $\rho'(x)$ ,  $\rho'(x) > 0$  y

un único  $\bar{x} \in I$  tal que

$$x \in C_{\rho'}(x) \cap \Gamma_{\bar{x}}^-$$

Definiendo la transformación  $T_\lambda : A \rightarrow A$  de tal forma que siendo  $y = (\rho'(y), \bar{y})$  entonces  $T_\lambda y = (\lambda \rho'(y), \bar{y})$  y siendo  $J(\rho', \rho'+h, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$  la celda polar, determinada por las curvas  $C_{\rho'}, C_{\rho'+h}, \Gamma_{\bar{y}_1}^-, \Gamma_{\bar{y}_2}^-$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |J(\rho', \rho'+h, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| &= |T_{\rho'} J(1, 1 + \frac{h}{\rho'}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| = \\ &= \rho' |J(1, 1 + \frac{h}{\rho'}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| \end{aligned}$$

Por tanto el área de una celda polar infinitesimal se expresa facilmente por el área de una celda polar, una de cuyas curvas fronteras es  $I$ , y su expresión se puede aproximar por las sumas de Riemann:

$$\begin{aligned} \rho' \sum_{j=1}^N \Delta \bar{y}^j ((T_1 + \frac{h}{\rho'} (\bar{y}^j)) - T_1(\bar{y}^j), n(\bar{y}^j)) &= \\ = h \sum_{j=1}^N \Delta \bar{y}^j \left( \frac{T_1 + \frac{h}{\rho'} (\bar{y}^j) - T_1(\bar{y}^j)}{\frac{h}{\rho'}} \right), n(\bar{y}^j) \end{aligned}$$

donde  $\bar{y}^j \in I$ ,  $\Delta \bar{y}^j$  son elementos de longitud en  $I$  y  $n(\bar{y})$  es la normal a  $I$  en  $\bar{y} \in I$ .

Entonces pasando al límite podemos expresar

$$\int_A \ell(x) dx = \int_{\bar{y} \in I} \int_{\rho'} \ell(T_{\rho'}, \bar{y}) \left( \left[ \frac{d}{d\lambda} T_\lambda \bar{y} \right]_{\lambda=1}, n(\bar{y}) \right) d\rho' d\bar{y}$$

y pasando a las nuevas variables  $(\rho, \bar{y})$ , teniendo en cuenta que los rayos polares  $\Gamma_{\bar{y}}^-$  son invariantes por las transformaciones  $T_\lambda$  se obtiene:

$$\int_A \ell(x) dx = \int_{\bar{y} \in I} \int_0^\infty \ell(T_\rho \bar{y}) \left( \left[ \frac{d}{d\lambda} T_\lambda \bar{y} \right]_{\lambda=1}, n(\bar{y}) \right) \frac{S'(\rho)}{S'(1)} d\rho d\bar{y} \quad |1.2.2|$$

donde  $S'(1)$  es una constante de normalización para que  $d\bar{y}$  sea la medida Lebesgue en  $I$ . Las igualdades |1.2.1| y |1.2.2| demuestran el apartado b) del teorema.

### 1.3.: Teoremas de caracterización de los Rayos Polares.

Este apartado está estructurado en dos partes.

En la primera parte 1.3.a damos una descripción técnica sobre el tipo de curvas para las cuales se tienen acotaciones para el operador maximal y la transformada de Hilbert a lo largo de curvas, citados en la introducción.

En la segunda parte 1.3.b damos condiciones sobre la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , para que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a esta familia, sean curvas del tipo de las descritas en 1.3.a que nos permitirán obtener, en el apartado siguiente, resultados de acotación del operador maximal, asociado a ciertas bases de diferenciación relacionadas con la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

#### 1.3.a.: Curvas "bien curvadas" y curvas "altamente monótonas"

Como expusimos en la introducción, es en la década de los se ta nta donde se intenta conseguir resultados de acotación de los operadores:  $H_Y$  denominado transformada de Hilbert a lo largo de curvas

y  $M_\gamma$  operador maximal a lo largo de curvas definidos de la forma siguiente: Siendo  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se define:

$$H_\gamma f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - \gamma(t))}{t} dt$$

$$M_\gamma f(x) = \sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x - \gamma(t))| dt$$

Exponemos aquí los últimos resultados obtenidos, sobre el tipo de curvas  $\gamma(t)$ , para las cuales se tienen ciertas acotaciones para los operadores  $H_\gamma$  y  $M_\gamma$ .

**Definición 1.3.a.1. "Curvas bien curvadas"**

Dada la curva  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es bien curvada si los vectores  $\left\{ \frac{d^j \gamma}{dt^j}(0) \right\} j=1,2,\dots$  engendran  $\mathbb{R}^n$ .

El siguiente teorema nos da una acotación para el operador  $M_\gamma$  si  $\gamma$  es una curva bien curvada. Más concretamente se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.a.1.** Si  $\gamma(t)$  es una curva bien curvada el operador  $M_\gamma f$  es de tipo  $(p,p)$  es decir

$$\|M_\gamma f\|_p \leq C(\gamma) \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

La demostración puede verse en Stein-Wanger [17] utilizando ideas extraídas de la teoría de Littlewood-Payley.

Es de resaltar que la constante  $C(\gamma)$  depende de la curva  $\gamma$  y esencialmente está relacionada con la curvatura de la curva en el

origen.

Para obviar la dependencia de la curva en la acotación del operador  $M_\gamma$  se ha introducido un nuevo tipo de curvas denominadas "altamente monótonas".

Nosotros describiremos solamente curvas "altamente monótonas" en  $\mathbb{R}^2$ .

Más concretamente se tiene la siguiente:

Definición 1.3.a.2. "Curvas altamente monótonas"

La curva  $\gamma(t) = (t, \phi(t))$ ,  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  es altamente monótona si y solamente si

- i)  $\phi(0) = 0$ ;  $\phi'(0) = 0$
- ii)  $\phi''(t) > 0$  y no decreciente en  $(0, \infty)$

Para curvas altamente monótonas se obtiene el siguiente resultado de acotación para el operador  $M_\gamma$ :

Teorema 1.3.a.2. Sea la curva  $\gamma(t) = (t, \phi(t))$  altamente monótona.

Entonces se verifica:

- a) El operador  $M_\gamma$  es de tipo  $(p, p)$   $2 \leq p \leq \infty$ , es decir

$$\|M_\gamma f\|_p \leq C(p) \|f\|_p \quad 2 \leq p \leq \infty$$

- b) Si  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$   $2 \leq p \leq \infty$  se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon f(x - \gamma(t)) dt = f(x) \quad \text{para c.t.x.}$$

La demostración puede verse en Nestlerode [11] y se obtiene esencial

mente por una generalización del lema de Van der Corput.

En Stein-Wainger [17] y Nestlerode [11] se obtienen también acotaciones para el operador  $M_\gamma$  bajo ciertas condiciones adicionales para las curvas  $\gamma(t)$ .

Es un problema abierto la acotación del operador  $M_\gamma$ , si  $\gamma$  es una curva altamente monótona, para  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 < p < 2$ .

1.3.b.: Condiciones generales para que los rayos polares sean curvas "bien curvadas" o "altamente monótonas"

Damos en este apartado condiciones para que los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ ; (que supondremos suficientemente regular), sean curvas del tipo de las descritas en [1.3.a].

En todo este apartado supondremos que la familia  $h(x, \rho)$  es al menos de clase  $C^2$  así como que  $h_\rho(x, \rho) \neq 0 \quad \forall x > 0$   $\forall \rho \in (0, \infty)$  lo cual nos permite asegurar que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  son únicos y vienen determinados según lo descrito en los teoremas 1.1.1 y 1.1.2.

Mientras no haya lugar a confusión y por mayor comodidad de notación designaremos los rayos polares  $g(x, \alpha)$  simplemente por  $g(x)$ . En las condiciones anteriores se obtiene el siguiente resultado para que dichos rayos polares sean curvas "bien curvadas".

Teorema 1.3.b.1. Sea la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de clase  $C^2$  tal que  $h_\rho(x, \rho) \neq 0$ ,  $\forall x$ ,  $\forall \rho$ .

Para que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  sean curvas "bien curvadas" es condición suficiente que se verifique para todo  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  la condición:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} [h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + 2h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma) + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma))(\rho'(\sigma))^2 + h_\rho(\sigma, \rho(\sigma))\rho''(\sigma)] \neq 0$$

Demostración:

Al ser los rayos polares en forma paramétrica de la forma  $(t, g(t, \alpha))$  y ser un vector en la dirección de la tangente  $(1, g'(t, \alpha))$ , de acuerdo con la definición 1.3.a.1 se obtiene el teorema si se demuestra que  $g''(t) \neq 0$ .

Por la construcción de los rayos polares se tiene que  $g(\sigma) = h(\sigma, \rho(\sigma))$  y por tanto derivando se obtiene:

$$g'(\sigma) = h_\sigma(\sigma, \rho(\sigma)) + h_\rho(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma)$$

y derivando nuevamente:

$$g''(\sigma) = h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma) + [h_{\rho\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma)]\rho'(\sigma) + h_\rho(\sigma, \rho(\sigma))\rho''(\sigma)$$

Por las hipótesis de regularidad de la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  se tiene:

$$g''(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} g''(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} [h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + 2h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \cdot \rho'(\sigma) + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) [\rho'(\sigma)]^2 + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \rho''(\sigma)]$$

Y por la hipótesis del teorema  $g''(0) \neq 0$ . c.q.d.

La hipótesis del teorema anterior no es necesaria, ya que bastaría la existencia de un número natural  $n$  con  $n \geq 2$ , tal que  $g^n(0) \neq 0$ .

Imponiendo condiciones de regularidad a la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , que nos permitan efectuar todas las derivaciones que sean precisas, se pueden enunciar teoremas que nos dan condiciones suficientes, para cada número natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , que nos garanticen que los rayos polares sean curvas bien curvadas en función de condiciones sobre las derivadas parciales de la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  y de la función  $\rho = \rho(\sigma)$ .

Si además de las hipótesis impuestas en el teorema 1.3.b.1 se tiene la condición adicional:

$$\sigma(\rho) \rightarrow 0 \iff \rho \rightarrow 0$$

caso bastante frecuente, por ejemplo si la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  se contrae al origen si  $\rho \rightarrow 0$  se obtiene un teorema análogo al teorema 1.3.b.1 pero en función de  $\sigma(\rho)$  que puede ser de mayor utilidad práctica.

Concretamente se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.b.2. En las condiciones del teorema 1.3.b.1 y con la condición adicional  $\sigma(\rho) \rightarrow 0 \iff \rho \rightarrow 0$  es condición suficiente para que

los rayos polares sean curvas bien curvadas que se verifique:

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \left[ h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + 2h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{1}{\sigma'(\rho)} + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{1}{(\sigma'(\rho))^2} - h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{\sigma''(\rho)}{(\sigma'(\rho))^2} \right] \neq 0$$

La demostración es trivial ya que la condición impuesta en el teorema 1.3.b.2 es análoga a la del teorema 1.3.b.1 puesta en términos de la función  $\sigma(\rho)$  y sus derivadas.

Los siguientes teoremas nos caracterizan las familias  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  tales que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a ellas sean curvas altamente monótonas.

**Teorema 1.3.b.3.** Sea la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  al menos de clase  $C^2$  tal que  $h_{\rho}(x, \rho) \neq 0 \forall x > 0$  y  $\forall \rho$ . Sea  $\rho(\sigma)$  la función inversa, de la que suponemos su existencia, de la función  $\sigma(\rho)$  calculada según la fórmula |1.1.4| ó |1.1.5|.

Los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a esta familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  son curvas "altamente monótonas" si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

- i)  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} [h_{\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma)] = 0$
- ii)  $h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + 2h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma) + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma))(\rho'(\sigma))^2 + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho''(\sigma)$

es una función positiva y no decreciente para  $\sigma \in (0, \infty)$ .

Demostración.

Poniendo los rayos polares en forma paramétrica serán de la forma  $(\sigma, g(\sigma, \alpha))$  y bastará para demostrar el teorema que se cumplan las condiciones de la definición 1.3.a.2. Claramente  $g(0) = 0$  ya que los rayos polares pasan por el origen de coordenadas.

Asimismo  $g'(\sigma) = h_{\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma)$  y por las condiciones de regularidad de la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  se tiene

$$g'(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} g'(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} [h_{\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma))\rho'(\sigma)] = 0$$

por la hipótesis i) del teorema.

Queda demostrada así la condición i) de la definición 1.3.a.2.

La condición ii) de la definición 1.3.a.2 es asimismo equivalente a la hipótesis ii) del teorema ya que dicha hipótesis es la expresión de  $g''(\sigma)$  en términos de la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .  
c.q.d.

Si se verifica la condición adicional de que  $\sigma(\rho) \rightarrow 0 \iff \rho \rightarrow 0$  se tiene la expresión equivalente (pero generalmente de mayor utilidad práctica) del teorema 1.3.b.3.

Teorema 1.3.b.4. Sea la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de clase  $C^2$  y  $h_{\rho}(x, \rho) \neq 0 \quad \forall x > 0$   
 $\forall \rho \in (0, \infty)$ .

Supongamos que  $\exists \rho = \rho(\sigma)$  función inversa de  $\sigma = \sigma(\rho)$  definida por la fórmula |1.1.4| ó |1.1.5| y que además  $\sigma(\rho) \rightarrow 0 \iff \rho \rightarrow 0$ .

Entonces:

Los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  son curvas altamente monótonas si y sólo si se verifica:

$$i) \lim_{\sigma \rightarrow 0} [h_{\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{1}{\sigma'(\rho)}] = 0$$

$$ii) h_{\sigma\sigma}(\sigma, \rho(\sigma)) + 2h_{\sigma\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{1}{\sigma'(\rho)} + h_{\rho\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \left(\frac{1}{\sigma'(\rho)}\right)^2 - h_{\rho}(\sigma, \rho(\sigma)) \frac{\sigma''(\rho)}{(\sigma'(\rho))^2}$$

es una función positiva y no decreciente en  $\sigma \in (0, \infty)$

1.4.: Acotaciones del operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación.

En este apartado establecemos condiciones para que el operador maximal, asociado a bases de diferenciación relacionadas con la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , sea de tipo  $(p, p)$  para ciertos rangos de espacios  $L^p(\mathbb{R}^2)$ .

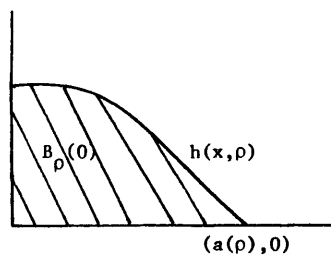
La técnica a seguir es efectuar el cambio de variable a las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  introducidas en el apartado |1.1|, aplicar el método de rotación, para estas nuevas coordenadas polares y utilizar, cuando los rayos polares sean curvas "bien curvadas" ó "altamente monótonas", los resultados de acotación del operador maximal  $M_{\gamma}$  descritos en 1.3.a.

La base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , que consideramos, es la siguiente:

$$\mathcal{B} \text{ es invariante por traslaciones donde } \mathcal{B}(0) = \{B_{\rho}(0)\}_{\rho \in \mathbb{R}^+}$$

con  $B_\rho(0) = \{(x,y) / 0 \leq x \leq a(\rho) \}$   
 $0 \leq y \leq h(x,\rho)$

(ver fig. 9)



(fig. 9)

donde  $a(\rho)$  será finito o infinito dependiendo para ello que, los conjuntos delimitados por las curvas  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados esten acotados o no.

$$\text{Designamos por } S(\rho) = \int_0^{a(\rho)} h(x,\rho) dx.$$

Intentamos, siendo  $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ , acotaciones para el operador maximal asociado a la base  $B$ , es decir:

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{S(r)} \int_{B_r(0)} |f(x-y)| dy$$

Efectuando el cambio de variable a las coordenadas polares  $(\rho, \bar{y}_{\rho,\alpha})$  donde,  $\rho$  es el parámetro de la familia donde está situado el punto  $y$  e  $\bar{y}_{\rho,\alpha}$  es el punto de la curva unidad  $I$  que está situado en el mismo rayo polar que  $y$ , se obtiene, utilizando la expresión de la integral en las nuevas coordenadas del apartado |1.2|, la siguiente expresión del operador maximal:

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{S(r)} \int_I \left( \left[ \frac{dT_\rho \bar{y}}{d\rho} \right]_{\rho=1} \cdot n(\bar{y}) \right) \int_0^r |f(x-T_\rho \bar{y})| \frac{S'(\rho)}{S'(1)} d\rho d\bar{y}$$

donde  $x - T_\rho \bar{y}$  es el rayo polar correspondiente al punto  $\bar{y} \in I$  y  $d\bar{y}$  es la medida Lebesgue en  $I$ .

Trivialmente se observa la siguiente acotación

$$Mf(x) \leq \int_I \left| \left( \left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| \sup_{r>0} \int_0^r |f(x - T_\rho \bar{y})| \frac{S'(\rho)}{S'(1)S(r)} |d\rho d\bar{y}$$

Se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.1.** Se considera la familia  $h(x, \rho)$ ;  $\rho \in (0, \infty)$ , de clase  $C^2$ , y la base  $B$  asociada a ella de la forma descrita anteriormente.

Supongamos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia  $h(x, \rho)$  son curvas bien curvadas  $\forall \alpha$   $0 \leq \alpha \leq 1$  (o lo que es equivalente a que  $\forall \bar{y} \in I$  el rayo polar que pasa por  $\bar{y}$  y es una curva "bien curvada"). Si se verifican las condiciones:

i)  $\frac{S'(\rho)}{S(r)} \leq \frac{c}{r} \quad \forall \rho < r$

ii) Denotando por  $C(\bar{y})$  la constante asociada al rayo polar que pasa por  $\bar{y}$ , del teorema 1.3.a.1 se tiene:

$$\int_I \left| \left( \left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| C(\bar{y}) |d\bar{y} = c < \infty$$

Entonces el operador maximal asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo fuerte  $(p, p)$   $1 < p < \infty$  es decir

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p; \quad 1 < p < \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

La condición (i) nos permite acotar el operador maximal del modo siguiente

$$Mf(x) \leq \int_I \left| \left( \left| \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right|_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| \sup_{r > 0} \frac{c}{r} \int_0^r |f(x - T_\rho \bar{y})| d\rho d\bar{y}$$

es decir

$$Mf(x) \leq \int_I \left| \left( \left| \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right|_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| M^{\bar{y}} f(x) d\bar{y}$$

donde  $M^{\bar{y}} f(x)$  es el operador maximal a lo largo de curvas, para  $\bar{y}$  fijo.

En este caso con  $\bar{y}$  fijo las curvas son "bien curvadas" y por tanto, según el teorema 1.3.a.1, se obtiene  $\|M^{\bar{y}} f\|_p \leq C(\bar{y}) \|f\|_p$   $1 < p < \infty$ , y aplicando la desigualdad integral de Minkowski se obtiene:

$$\|Mf\|_p \leq \int_I \left| \left( \left| \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right|_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| \cdot C(\bar{y}) \|f\|_p d\bar{y}$$

Y aplicando la hipótesis ii) se llega a

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

c.q.d.

Las condiciones del teorema anterior se pueden debilitar "en cierto modo" obteniendo el siguiente:

Corolario 1.4.2. En las hipótesis del teorema 1.4.1 salvo la más débil de que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  sean curvas "bien curvadas" salvo para un conjunto  $B \subset I$

de medida de Lebesgue en  $I$  nula, se tiene que

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

Demostración.

Es trivial ya que según lo visto en el apartado |1.2| en la hipótesis del corolario 1.4.2 el conjunto de rayos polares que no son curvas "bien curvadas" es un conjunto de medida nula de

$$B_\rho(0) \quad \forall \rho \in (0, \infty).$$

La suposición de que los rayos polares sean curvas "bien curvadas" exige cierta información sobre la función  $C(\bar{y})$ , que depende esencialmente de dichos rayos polares.

Para eliminar esta dependencia trabajaremos ahora con la suposición de que los rayos polares sean curvas "altamente monótonas" obteniendo el siguiente teorema:

Teorema 1.4.3. Sea la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  suficientemente regular tal que los rayos polares asociados a ella sean curvas "altamente monótonas",  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

Consideremos la base de diferenciación  $B$  descrita al comienzo de este apartado.

Si se verifica

- i)  $\frac{S'(\rho)}{S(r)} \leq \frac{c}{r} \quad \forall \rho < r$
- ii)  $\int_I \left| \left( \left[ \frac{dT}{d\rho} \right]_{\rho=1}, n(\bar{y}) \right) \right| d\bar{y} < \infty$

entonces el operador maximal asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo fuerte  $(p,p)$   $2 \leq p < \infty$ .

Demostración.

Expresando el operador maximal en las "coordenadas polares" se obtiene aplicando la hipótesis i) del teorema que:

$$Mf(x) \leq \int_I \left| \left( \left[ \frac{dT_{\rho}\bar{y}}{d\rho} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| \sup_{r>0} \frac{c}{r} \int_0^r |f(x - T_{\rho}\bar{y})| d\rho d\bar{y}$$

así

$$Mf(x) \leq \int_I \left| \left( \left[ \frac{dT_{\rho}\bar{y}}{d\rho} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| M^{\bar{y}}f(x) d\bar{y}$$

donde  $M^{\bar{y}}$ , para  $\bar{y}$  fijo es el operador maximal a lo largo de curvas que por hipótesis son curvas altamente monótonas. Por tanto aplicando la desigualdad de Minkowski, teniendo en cuenta el teorema 1.3.a.2 se obtiene:

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p \int_I \left| \left( \left[ \frac{dT_{\rho}\bar{y}}{d\rho} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) \right| d\bar{y}$$

y utilizando la hipótesis ii) se obtiene

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p \quad 2 \leq p \leq \infty$$

c.q.d.

Análogamente a lo obtenido para curvas "bien curvadas" se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.4.4. El resultado del teorema 1.4.3 es cierto si los rayos polares  $g(x,\alpha)$  son curvas altamente monótonas salvo para un conjunto  $B \subset I$  de medida Lebesgue nula en  $I$ .

La demostración es análoga a la del corolario 1.4.2.

Es de resaltar que si los rayos polares son rectas, el método de rotación, utilizando el cambio a las "coordenadas polares", funciona utilizando los resultados de acotación del operador maximal unidimensional de Hardy-Littlewood.

También, al estar en  $\mathbb{R}^2$  hay una correspondencia biunívoca:

$$\phi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longleftrightarrow & I \\ \alpha & \longleftrightarrow & \bar{y} \end{array}$$

donde  $\bar{y}$  es el punto de la curva unidad correspondiente al rayo polar  $\alpha$ .

Y en determinadas ocasiones es más fácil trabajar con las coordenadas  $(\rho, \alpha)$  que con las coordenadas  $(\rho, \bar{y})$  siempre que sea de más fácil manejo

$$\int_0^1 \left( \left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho (\phi(\alpha)) \right]_{\rho=1}, \eta(\phi(\alpha)) \right) \cdot \phi'(\alpha) d\alpha$$

que

$$\int_I \left( \left[ \frac{d}{d\rho} T_\rho \bar{y} \right]_{\rho=1}, \eta(\bar{y}) \right) d\bar{y}$$

sin ser en algunos casos necesario el cálculo de la función  $\phi(\alpha)$ , al efectuar directamente el cambio de variable de las coordenadas cartesianas a las coordenadas  $(\rho, \alpha)$ .

#### 1.5.: Cálculo de los rayos polares, sin condiciones de regularidad en la familia de curvas.

En los apartados anteriores de este capítulo se imponen condiciones de regularidad a la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , en concreto que sea de clase  $C^2$ , para garantizar la existencia y unicity

dad de los rayos polares  $g(x, \alpha)$ .

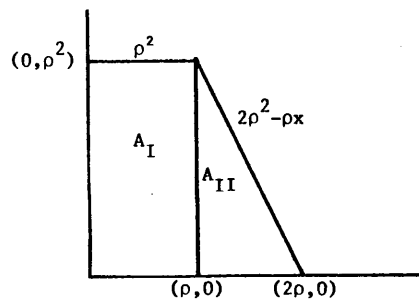
En este apartado veremos que las condiciones no son necesarias, pudiendo obtener los rayos polares utilizando la condición geométrica expresada en las fórmulas (1.1.1) ó (1.1.5).

Analizamos dos ejemplos que nos ponen de manifiesto que la dificultad es únicamente operativa, dependiendo de la naturaleza de la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .

1.5.1.: Sea la familia  $h(x, \rho)$ ;  $\rho \in (0, \infty)$  definida de la forma:

$$h(x, \rho) = \begin{cases} \rho^2 & 0 \leq x \leq \rho \\ 2\rho^2 - \rho x & \rho < x < 2\rho \end{cases}$$

ver fig. 10

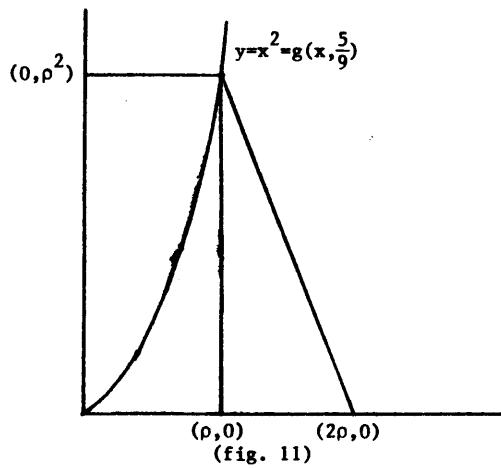


(fig. 10)

Se observa que para  $\rho$  fijo la familia  $h(x, \rho)$  no es derivable en  $x = \rho$ .

Se tiene que  $S(\rho) = |A_I| + |A_{II}| = \rho^3 + \frac{\rho^3}{2} = \frac{3\rho^3}{2}$ .

El rayo polar correspondiente a  $\alpha = \frac{5}{9}$  es  $y = x^2$  (ver fig. 11).

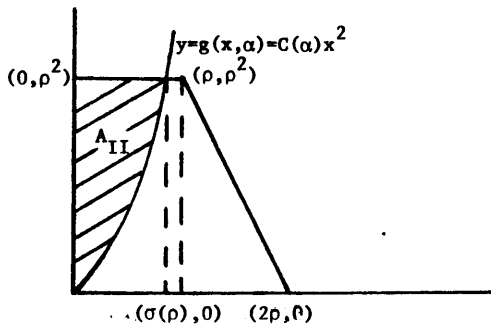


ya que  $\forall \rho \in (0, \infty)$  se tiene que

$$\int_0^{\rho} x^2 dx + \frac{\rho^3}{2} = \frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^3}{2} = \frac{5\rho^3}{6} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2} \rho^2 = \frac{5}{9} S(\rho)$$

Si  $\alpha \neq \frac{5}{9}$  probamos con rayos polares del tipo  $g(x, \alpha) = C(\alpha)x^2$ .

Si  $\alpha > \frac{5}{9}$  trivialmente los rayos polares estarán en la situación de la figura 12:



determinando  $C(\alpha)$  por la condición [1.1.1] que en este caso es equivalente a la ecuación:

$$|A_{II}| = (1-\alpha) \frac{3}{2} \rho^3 \quad |1.5.1|$$

En este caso  $\sigma(\rho)$  es tal que  $C(\alpha)\sigma(\rho)^2 = \rho^2$  y por tanto

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{C(\alpha)}} .$$

Por otra parte,

$$|A_{II}| = \rho^2 \sigma(\rho) - \int_0^{\sigma(\rho)} C(\alpha) x^2 dx$$

y sustituyendo  $\sigma(\rho)$  por su valor hallado anteriormente se obtiene

$$|A_{II}| = \frac{\rho^3}{\sqrt{C(\alpha)}} - \frac{\rho^3}{3\sqrt{C(\alpha)}} = \frac{2}{3} \frac{\rho^3}{\sqrt{C(\alpha)}} \quad |1.5.2|$$

Sustituyendo el valor de  $|A_{II}|$  en |1.5.1| y dividiendo por  $\rho^3$  se llega a:

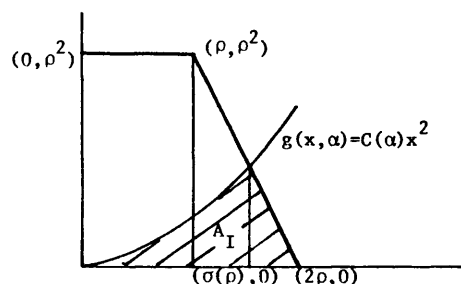
$$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C(\alpha)}} = (1-\alpha) \frac{3}{2} \quad \text{y por tanto}$$

$$C(\alpha) = \left(\frac{4}{9} \frac{1}{(1-\alpha)}\right)^2$$

Se obtiene así, que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  para  $\alpha \in [5/9, 1]$  son de la forma:

$$g(x,\alpha) = \left(\frac{4}{9(1-\alpha)}\right)^2 x^2$$

Si  $\alpha < \frac{5}{9}$  los rayos polares son de la forma  $y = C(\alpha)x^2 = g(x,\alpha)$  y estamos en la situación de la fig. 13



(Fig. 13)

determinando  $C(\alpha)$  por la condición |1.1.1|.

Así

$$|A_I| = \int_0^{\sigma(\rho)} C(\alpha)x^2 dx + \frac{1}{2} (2\rho - \sigma(\rho))C(\alpha)(\sigma(\rho))^2 \quad |1.5.3|$$

Pero  $\sigma(\rho)$  es la abcisa de intersección de las curvas:

$$y = C(\alpha) x^2$$

$$y = 2\rho^2 - \rho x$$

Por tanto  $\sigma(\rho)$  es la solución de la ecuación  $C(\alpha)x^2 + \rho x - 2\rho^2 = 0$ .

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\sigma(\rho) = \left( \frac{\sqrt{1 + 8C(\alpha)} - 1}{2 C(\alpha)} \right) \rho \quad |1.5.4|$$

La condición |1.1.1| en este caso queda reducida a  $|A_I| = \frac{3}{2} \alpha \rho^3$  sustituyendo  $|A_I|$  según |1.5.3| y  $\sigma(\rho)$  por |1.5.4| y simplificando por  $\rho^3$  se obtiene:

$$C(\alpha) \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{1 + 8C(\alpha)} - 1}{2 C(\alpha)} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{\sqrt{1 + 8C(\alpha)} - 1}{2 C(\alpha)} \right) C(\alpha) =$$

$$\left( \frac{\sqrt{1 + 8C(\alpha)} - 1}{2 C(\alpha)} \right)^2 - \frac{3}{2} \alpha = 0 \quad |1.5.5|$$

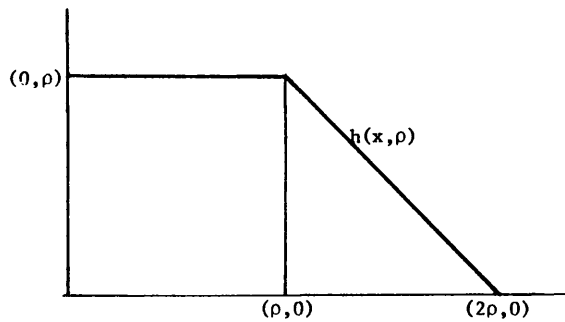
La ecuación |1.5.5| nos determina implícitamente  $C(\alpha)$  y así si  $\alpha \in (0, \frac{5}{9})$  los rayos polares son de la forma:

$$y = C(\alpha)x^2 \quad \text{con } C(\alpha) \text{ determinada por } |1.5.5|$$

1.5.2.: Consideremos ahora la familia

$$h(x, \rho) = \begin{cases} \rho & 0 \leq x \leq \rho \\ 2\rho - x & \rho < x \leq 2\rho \end{cases} \quad \rho \in (0, \infty)$$

(ver fig. 14)



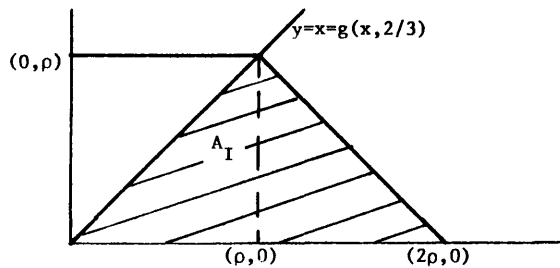
(fig. 14)

En este caso  $S(\rho) = \int_0^{2\rho} h(x, \rho) dx = \frac{3}{2} \rho^2$ .

Claramente la familia  $h(x, \rho)$  no cumple las condiciones de regularidad exigidas en los apartados anteriores.

Al ser la superficie encerrada por la familia  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados de orden  $\rho^2 = S(\rho)$  parece razonable conjeturar que los rayos polares sean rectas;  $g(x, \alpha) = C(\alpha)x$  determinando  $C(\alpha)$  por la condición geométrica |1.1.1|.

Claramente  $y=x$  corresponde al rayo polar  $\alpha = 2/3$  ya que según la figura 15 se observa:

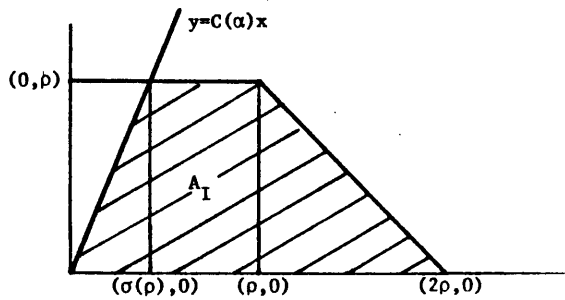


(fig. 15)

$$|A_I| = \frac{1}{2} 2\rho \cdot \rho = \rho^2 = \frac{2}{3} \frac{3}{2} \rho^2 = \frac{2}{3} S(\rho).$$

Si  $\alpha > \frac{2}{3}$  la situación de los rayos polares es de la figura

16



(fig. 16)

determinando  $C(\alpha)$  por la condición |1.1.1|. En este caso

$$|A_I| = \frac{1}{2} \rho \sigma(\rho) + \rho(\rho - \sigma(\rho)) + \frac{1}{2} \rho^2$$

Por tanto la condición |1.1.1| en este caso es:

$$\frac{1}{2} \rho \sigma(\rho) + \rho(\rho - \sigma(\rho)) + \frac{1}{2} \rho^2 = \frac{3}{2} \alpha \rho^2 \quad |1.5.6|$$

Pero  $\sigma(\rho)$  es la abscisa de intersección de las curvas

$$y = \rho$$

$$y = C(\alpha)x \text{ por tanto:}$$

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho}{C(\alpha)} \quad |1.5.7|$$

Sustituyendo |1.5.7| en |1.5.6| y simplificando por  $\rho^2$  se llega a:

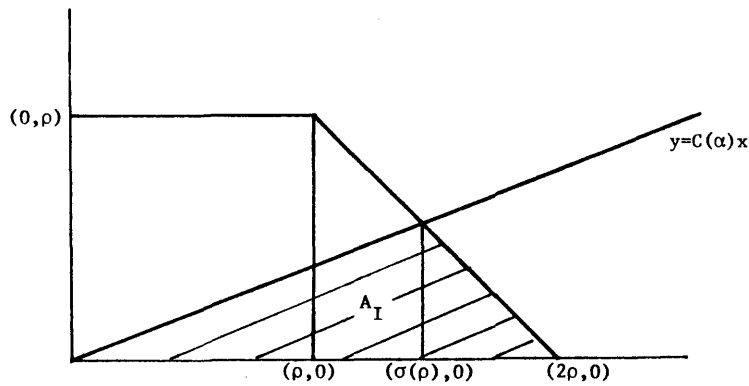
ga a:

$$\frac{1}{2C(\alpha)} + 1 - \frac{1}{C(\alpha)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \alpha \quad |1.5.8|$$

que determina  $C(\alpha)$  en función de  $\alpha$  obteniéndose

$$C(\alpha) = \frac{1}{3(1-\alpha)}, \quad \alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \quad |1.5.9|$$

Si  $\alpha < \frac{2}{3}$  la determinación de los rayos polares  $g(x, \alpha)$  se reduce al cálculo de  $C(\alpha)$  en la situación de la fig. 17.



(fig. 17)

En este caso:

$$|A_I| = \frac{1}{2} 2 \rho C(\alpha) \sigma(\rho)$$

donde  $\sigma(\rho)$  es la abscisa de intersección de las curvas:

$$y = C(\alpha)x$$

$$y = 2\rho - x$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\sigma(\rho) = \frac{2\rho}{1 + C(\alpha)} \quad |1.5.10|$$

La condición |1.1.1| sustituyendo  $\sigma(\rho)$  por su valor obtenido en |1.5.10| se transforma en:

$$\frac{1}{2} 2 \rho C(\alpha) \frac{2\rho}{1 + C(\alpha)} = \frac{3}{2} \alpha \rho^2 \quad |1.5.11|$$

y dividiendo por  $\rho^2$ , despejando  $C(\alpha)$  se obtiene:

$$C(\alpha) = \frac{\frac{3}{4} \alpha}{1 - \frac{3}{4} \alpha} \quad \alpha \in (0, \frac{2}{3})$$

En resumen los rayos polares para esta familia de curvas

$h(x, \rho)$  son:

$$g(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{3(1-\alpha)} x & 2/3 \leq \alpha \leq 1 \\ \frac{\frac{3}{4} \alpha}{1 - \frac{3}{4} \alpha} x & 0 \leq \alpha < 2/3 \end{cases}$$

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que la obtención de los rayos polares es un problema operativo, no siendo posible en algunas ocasiones (como se observa en 1.5.1) la obtención explícita de dichos rayos polares.

CAPITULO II

COORDENADAS POLARES ASOCIADAS A  
CONJUNTOS "ACOTADOS"

Estudiamos en este capítulo las coordenadas polares asociadas a familias de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de tal forma que  $\forall \rho \in (0, \infty)$  el conjunto encerrado por  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados esté acotado.

Si no se dice nada en contra, supondremos que la familia  $h(x, \rho)$  está situada en el primer cuadrante.

Estructuramos este capítulo en cinco apartados.

En el primero analizamos las coordenadas polares asociadas a una familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de tal forma que las curvas de la familia se deducen de una de ellas por medio de transformaciones "dilataciones generalizadas", concretando la naturaleza de los rayos polares en el teorema 2.1.1.

Posteriormente analizamos algunas familias  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de este tipo, que incluyen a las coordenadas polares clásicas como caso particular.

En el apartado segundo estudiamos las coordenadas polares asociadas a una cierta familia de cuadrantes de elipses, que se contraen al origen.

En el apartado tercero estudiamos familias  $h(x, \rho) = a(x)(\rho - x)$   $0 \leq x \leq \rho$   $\rho \in (0, \infty)$  estudiando casos particulares de la función  $a(x)$ , así como condiciones de la función  $a(x)$  para que los rayos polares asociados a dicha familia sean curvas "bien curvadas" o "altamente monótonas" obteniendo los teoremas 2.3.2 y 2.3.3.

En el cuarto apartado estudiamos las coordenadas polares para otro tipo de familias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , concretamente las familias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  cuyos conjuntos son afines a uno de ellos y familias  $h(x,\rho) = a(\rho)(\rho-x)$   $0 \leq x \leq \rho$   $\rho \in (0,\infty)$ .

En el apartado quinto introducimos una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  asociada a la familia de curvas  $h(x,\rho)$ , dando teoremas generales (teoremas 2.5.1, 2.5.2 y 2.5.3) de acotación del operador maximal asociado a la base  $\mathcal{B}$ , analizando explícitamente algunos de los casos estudiados en los apartados anteriores.

2.1.: Rayos polares asociados a "dilataciones generalizadas"

A veces la familia de curvas  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  puede provenir de una curva, por ejemplo  $C_1$ , por medio de unas transformaciones.

En este apartado estudiamos familias de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , que determinan con los ejes coordenados conjuntos acotados, que se obtienen a partir de una de ellas, que denominaremos  $h(x, 1)$ , por medio de unas transformaciones llamadas dilataciones generalizadas calculando los rayos polares asociados a esta familia.

Damos al comienzo de este apartado la teoría general estudiando posteriormente determinados casos particulares.

2.1.1.: Definición de "dilataciones generalizadas" y rayos polares asociados a ellas.

DEFINICION 2.1.1.: "Dilatación generalizada"

Dada una curva  $y = h(x)$ , que supondremos en el primer cuadrante, y que denotaremos por  $h(x, 1)$ , las dilataciones generalizadas de orden "m",  $m > 0$   $m \in \mathbb{R}^+$  se definen de la forma siguiente:

Dado  $\rho$  fijo la curva  $h(x, 1)$  se transforma en la curva  $h(x, \rho)$  definida a partir de  $h(x, 1)$  de tal forma que si  $(x, h(x)) \in h(x, 1)$  entonces  $(\rho x, \rho^m h(x)) \in h(x, \rho)$ .

Una expresión equivalente es que se verifique:

$$h(\rho x, \rho) = \rho^m h(x, 1) = \rho^m h(x).$$

Al trabajar con curvas  $h(x, \rho)$  que determinan conjuntos acotados, para la curva  $y = h(x)$  se debe verificar:

$\exists a$  tal que  $h(a) = 0$

Supongamos que la curva  $y = h(x)$  es de clase  $C^2$ .

Se tiene entonces el siguiente teorema, que caracteriza los rayos polares asociados a familias del tipo anterior.

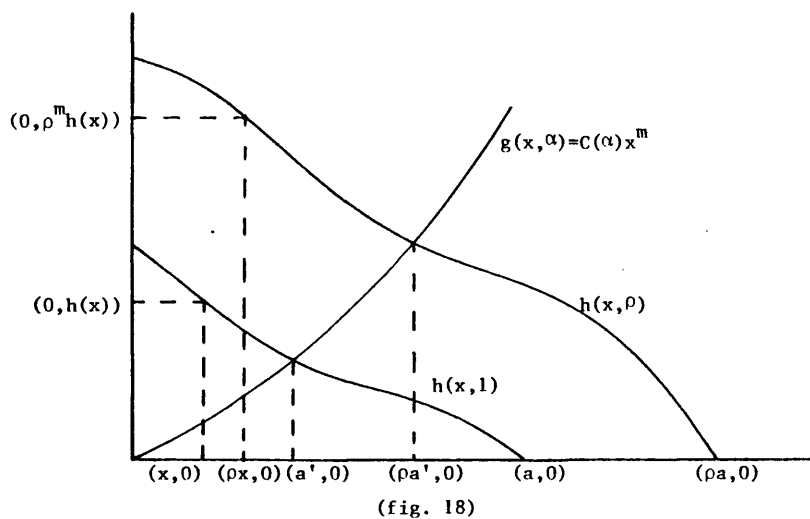
TEOREMA 2.1.1.- Sea  $y = h(x)$  una curva de clase  $C^2$  y consideremos la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de curvas obtenidas a partir de la curva  $y = h(x) \equiv h(x, 1)$  por medio de dilataciones generalizadas de orden  $m$ .

Entonces los rayos polares asociados a esta familia son  $g(x, \alpha) = C(\alpha) x^m$ , con  $C(\alpha)$  dependiendo únicamente de la función  $h(x)$ .

Demostración.

Denotando por  $S = \int_0^a h(x, 1) dx$  se tiene, (efectuando el cambio de variable  $x = \rho t$  y teniendo en cuenta la definición de la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ ), que: (ver fig. 18)

$$\int_0^{\rho a} h(x, \rho) dx = \rho^{m+1} \int_0^a h(t, 1) dt = \rho^{m+1} S$$



Deberemos comprobar que los rayos polares son de la forma  $g(x, \alpha) = C(\alpha)x^m$ .

Para ello si  $C(\alpha)x^m$  es el rayo polar de orden  $\alpha$ , para  $\rho = 1$  se deberá verificar (fig. 18)

$$\int_0^{a'} C(\alpha) x^m dx + \int_{a'}^a h(x, 1) dx = \alpha S \quad |2.1.1|$$

Pero entonces  $\forall \rho$  la abscisa de intersección de la curva  $h(x, \rho)$  con  $C(\alpha)x^m$  es  $\rho a'$  y se tendrá

$$\int_0^{\rho a'} C(\alpha) x^m dx = \int_{\rho a'}^{\rho a} h(x, \rho) dx =$$

(efectuando el cambio de variable  $\rho x = t$ )

$$= \rho^{m+1} \left[ \int_0^{a'} C(\alpha) t^m dt + \int_{a'}^a h(t, 1) dt \right] = \quad \text{por } |2.1.1|$$

$$= \rho^{m+1} \alpha S = \alpha \int_0^{\rho a} h(x, \rho) dx$$

c.q.d.

Si  $m = 1$  las curvas  $h(x, \rho)$  definen conjuntos homotéticos al conjunto que define  $h(x, 1)$ .

Se debe hacer la restricción de que por todo punto del primer cuadrante (o parte de él), pase una sola de las curvas  $h(x, \rho)$  lo cual implica que  $\forall \rho$  el punto  $(\rho x, \rho^m h(x))$  no esté en el grafo de la curva  $y = h(x) \equiv h(x, 1)$ .

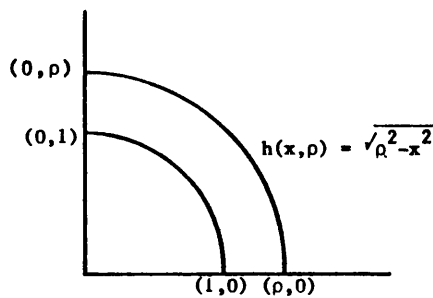
Si no se impone esta condición no existe unicidad de las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$ .

### 2.1.2.: Casos particulares de "dilataciones generalizadas"

El primer caso que tratamos corresponde a las "coordenadas polares clásicas" que provienen al considerar la familia de curvas

$$h(x, \rho) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq \rho$$

$$\rho \in (0, \infty) \quad (\text{ver fig. 19})$$



(fig. 19)

Trivialmente se observa que la familia  $h(x, \rho)$  son conjuntos homotéticos de  $h(x, 1) = \sqrt{1-x^2}$ . Como en este caso  $h_\rho(x, \rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \neq 0$   $0 < x < \rho$  la ecuación |1.1.4| se convierte en

$$F(\sigma, \rho) = \int_0^\sigma \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx - (1-\alpha) \int_0^\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx = 0$$

y efectuando el cambio de variable  $\frac{x}{\rho} = t$  y efectuando las integraciones se llega a la ecuación:

$$\text{arc sen } \frac{\sigma}{\rho} = (1-\alpha) \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

Si  $\alpha = 0$   $g(x, 0) \equiv y = 0$

Si  $\alpha = 1$   $g(x, 1) \equiv x = 0$

Si  $0 < \alpha < 1$  se tiene que  $\sigma = C(\alpha)\rho$  ya que entonces:

$$\text{arc sen } C(\alpha) = (1-\alpha) \frac{\pi}{2}, \text{ y por tanto}$$

$$C(\alpha) = \text{sen } \frac{\pi}{2} (1-\alpha)$$

Los rayos polares de acuerdo con el teorema 1.1.1 serán:

$$\begin{aligned} g(x, \alpha) &= h(x, \rho(x)) = \sqrt{\rho^2 - \rho^2 C^2(\alpha)} = \rho \sqrt{1 - C^2(\alpha)} = \\ &= \rho \cos \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \end{aligned}$$

y siendo  $\rho(x) = \frac{x}{\text{sen } \frac{\pi}{2} (1-\alpha)}$  se llega a

$$g(x, \alpha) = \frac{x}{\text{sen } \frac{\pi}{2} (1-\alpha)} \cdot \cos \frac{\pi}{2} (1-\alpha) = x \text{ tg } \frac{\pi}{2} \alpha$$

resultado que coincide con las coordenadas polares clásicas.

En este caso, estudiado separadamente, para poner de manifies-

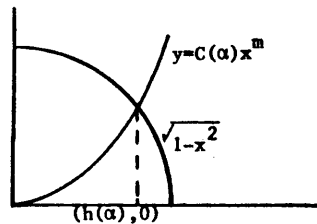
to que las coordenadas polares introducidas en esta memoria engloban como caso particular a las coordenadas polares clásicas, será asimismo un caso particular (correspondiente al valor  $m = 1$ ) del segundo ejemplo que estudiaremos a continuación:

Se considera  $h(x) \equiv h(x,1)$  el cuadrante positivo de la circunferencia unidad es decir

$$h(x) \equiv h(x,1) = \sqrt{1-x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Consideramos la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  formada por las "dilataciones generalizadas" de orden  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$  de la curva  $h(x,1)$ .

Según el teorema 2.1.1 los rayos polares asociados a esta familia serán  $g(x,\alpha) = C(\alpha)x^m$ , determinando  $C(\alpha)$  por medio de la igualdad siguiente (ver fig. 20)



(fig. 20)

$$\int_0^{h(\alpha)} C(\alpha)x^m dx + \int_{h(\alpha)}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \alpha \frac{\pi}{4} \quad |2.1.2.1|$$

donde  $h(\alpha)$  es tal que:

$$C(\alpha)h(\alpha)^m = \sqrt{1 - [h(\alpha)]^2} \quad \text{que es equivalente a}$$

$$C^2(\alpha)(h(\alpha))^{2m} = 1 - [h(\alpha)]^2 \quad |2.1.2.2|$$

Resuelto  $h(\alpha)$  en función de  $C(\alpha)$  por medio de |2.1.2.2| y sustituido su valor en |2.1.2.1| permiten el cálculo de  $C(\alpha)$ .

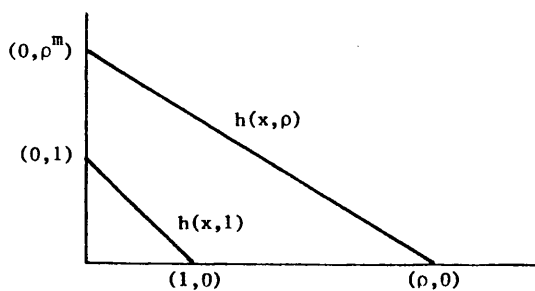
Si  $m = 1$  estamos en la situación del ejemplo primero.

Con  $m \in \mathbb{R}^+$  este caso corresponde a las coordenadas polares estudiadas por Guzmán [4], asociada a la matriz  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ .

El tercer ejemplo que estudiamos corresponde a la familia de curvas:

$$h(x, \rho) = -\rho^{m-1}(x-\rho) \quad m \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq x \leq \rho$$

que corresponden a las "dilataciones generalizadas" de orden  $m$  de la curva  $y = h(x) \equiv h(x, 1) = 1-x$ ;  $0 \leq x \leq 1$  (ver fig. 21).



(fi g. 21)

Para el cálculo de los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a esta familia de curvas obviamos los casos

$$\alpha = 0 \quad \text{ya que trivialmente} \quad g(x, 0) \equiv y = 0$$

$$\alpha = 1 \quad \text{puesto que} \quad g(x, 1) \equiv x = 0$$

Al ser

$$h_\rho(x, \rho) = m \rho^{m-1} - (m-1)\rho^{m-2} x$$

se tiene que  $h_\rho(x, \rho) \neq 0$   $0 \leq x \leq \rho$  .  
 $\rho \in (0, \infty)$

Aplicando la ecuación |1.1.4| para el cálculo de los rayos polares se obtiene; para el cálculo de  $\sigma(\rho)$  la siguiente ecuación, dividiendo previamente por  $\rho^{m-2}$ :

$$\int_0^{\sigma(\rho)} (m\rho - (m-1)x) dx = (1-\alpha) \int_0^\rho (m\rho - (m-1)x) dx \quad |2.1.2.3|$$

Efectuando la integración y reagrupando términos semejantes en  $\sigma$ , supuesto que  $m \neq 1$  se obtiene:

$$\frac{(m-1)\sigma^2}{2} - m\rho\sigma + (1-\alpha) \frac{(m+1)}{2}\rho^2 = 0 \quad |2.1.2.4|$$

Despejando  $\sigma$  teniendo en cuenta que  $\sigma(\rho) < \rho$  resulta:

$$\sigma = \frac{(m - \sqrt{m^2 - (m^2-1)(1-\alpha)})}{m-1}$$

y por comodidad de notación escribimos

$$\sigma = C_{m,\alpha} \rho \quad \text{con} \quad C_{m,\alpha} \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{matrix} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 1 \\ m \neq 1 \end{matrix} \quad |2.1.2.5|$$

Por tanto los rayos polares asociados a este sistema serán:

$$g(x, \alpha) = h(x, \rho(x)) = \rho^m - \rho^{m-1} \rho C_{m,\alpha} = \rho^m (1 - C_{m,\alpha})$$

y por tanto:

$$g(x, \alpha) = \left(\frac{x}{C_{\alpha,m}}\right)^m (1 - C_{\alpha,m}) = C'_{\alpha,m} x^m$$

resultado que concuerda con el teorema 2.1.1.

Si  $m=1$ , la familia  $h(x, \rho)$  está formada por conjuntos homotéticos a  $y = h(x) \equiv h(x, 1) = 1-x$   $0 \leq x \leq 1$  y para la obtención de

los rayos polares sustituimos  $m=1$  en [2.1.2.4] obteniendo:

$$-\rho\sigma + (1-\alpha)\rho^2 = 0, \quad \text{y por tanto}$$

$$\sigma = (1-\alpha)\rho, \quad \text{y consecuentemente} \quad \rho = \frac{\sigma}{1-\alpha}$$

Por tanto los rayos polares, si  $m=1$ , serán:

$$g(x, \alpha) = \rho - x = \frac{x}{1-\alpha} - x = \frac{\alpha}{1-\alpha} x \quad \alpha \in (0, 1)$$

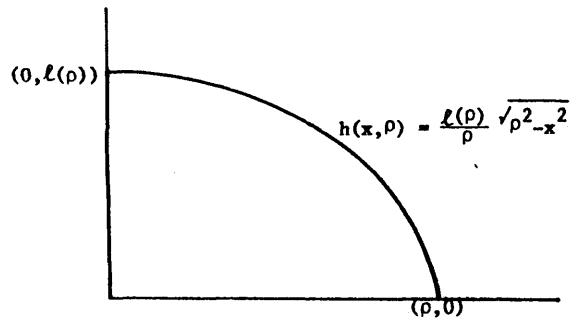
Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los rayos polares asociados a familias  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  que son "dilataciones generalizadas" de orden  $m$  de la curva  $y = h(x) \equiv h(x, 1)$  son de la forma  $C(\alpha)x^m$ , dependiendo la función  $C(\alpha)$  de la función  $h(x)$ , así en el primer ejemplo  $C(\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$  y en el tercero, si  $m=1$   $C(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ .

La forma de la función  $C(\alpha)$  tendrá gran importancia, como veremos en el apartado final de este capítulo, para la acotación del operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación.

## 2.2.: Coordenadas polares asociadas a la familia de curvas

$$h(x, \rho) = \frac{\ell(\rho)}{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq \rho \quad \text{con } \ell(\rho) \in C^1, \text{ creciente}$$
$$\ell(0) = 0 \quad \ell(\rho) \rightarrow \infty.$$
$$\rho \rightarrow \infty$$

En este apartado estudiamos las coordenadas polares asociadas a las curvas descritas anteriormente, que forman una familia de cuadrantes de elipses que se contraen al origen, de semiejes  $\rho$  y  $\ell(\rho)$  (ver fig. 22).



(fig. 22)

Utilizamos para ello la ecuación |1.1.4|, siendo en este caso:

$$h_{\rho}(x, \rho) = \left[ \frac{\ell'(\rho) \cdot \rho - \ell(\rho)}{\rho^2} \right] \sqrt{\rho^2 - x^2} + \frac{\ell(\rho)}{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

y simplificando resulta:

$$h_{\rho}(x, \rho) = \frac{\ell'(\rho) \cdot \rho(\rho^2 - x^2) + \ell(\rho)x^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

y al ser  $\ell'(\rho) > 0$  y ser  $0 \leq x \leq \rho$  se tiene  $h_{\rho}(x, \rho) > 0$  si  $0 < x \leq \rho$ .

La ecuación |1.1.4|, en este caso es la siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma(\rho)} \frac{\ell'(\rho)\rho(\rho^2 - x^2) + \ell(\rho)x^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - x^2}} dx &= \\ &= (1-\alpha) \int_0^{\rho} \frac{\ell'(\rho)\rho(\rho^2 - x^2) + \ell(\rho)x^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - x^2}} dx \end{aligned} \quad |2.2.1|$$

Descomponiendo:

$$h_{\rho}(x, \rho) = \frac{\ell'(\rho)}{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} + \frac{\ell(\rho)}{\rho^2} \frac{x^2}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = j_1(x) + j_2(x)$$

Se tiene que siendo:

$I_1 = \int j_1(x) dx$ , y efectuando el cambio de variable  $x = \rho \operatorname{sen} t$  resulta:

$$I_1 = \ell'(\rho) \rho \left[ \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right] \quad |2.2.2|$$

Denominando  $I_2 = \int j_2(x) dx$ , efectuando una integración por partes y haciendo posteriormente el mismo cambio de variable  $x = \rho \operatorname{sen} t$  se obtiene:

$$I_2 = \frac{\ell(\rho)}{\rho^2} \left[ -x \sqrt{\rho^2 - x^2} + \rho^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \right] \quad |2.2.3|$$

Llevando |2.2.2| y |2.2.3| a |2.2.1| y poniendo los límites de integración se obtiene:

$$\begin{aligned} & \rho \ell'(\rho) \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{4} \right] - \frac{\ell(\rho)}{\rho^2} \sigma \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \\ & + \ell(\rho) \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{4} \right] = \\ & = (1-\alpha) \left[ \ell(\rho) + \rho \ell'(\rho) \right] \frac{\pi}{4} \quad |2.2.4| \end{aligned}$$

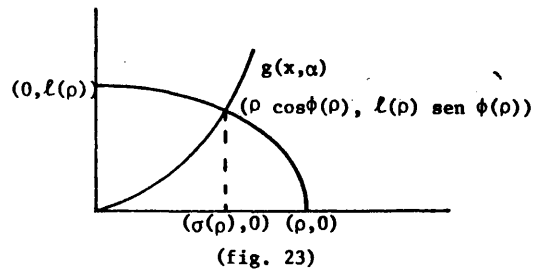
Observando que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho} &= 2 \operatorname{sen} \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho} \right) \cos \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho} \right) = \\ &= 2 \frac{\sigma}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}} = \frac{2\sigma}{\rho^2} \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \end{aligned}$$

y sustituyendo esta equivalencia en |2.2.4| se llega a :

$$\begin{aligned} & \rho \ell'(\rho) \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{2} + \frac{\sigma}{2\rho^2} \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \right] - \frac{\ell(\rho)}{\rho^2} \sigma \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \\ & + \ell(\rho) \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\rho}}{2} + \frac{\sigma}{2\rho^2} \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \right] - (1-\alpha) \frac{\pi}{4} \left[ \ell(\rho) + \rho \ell'(\rho) \right] = 0 \quad |2.2.5| \end{aligned}$$

De más fácil manejo es la ecuación |2.2.5| utilizando una nueva incógnita  $\phi(\rho)$ , ver fig. 23.



Entonces  $\sigma(\rho) = \rho \cos \phi(\rho)$  y por tanto:

$$\cos \phi(\rho) = \frac{\sigma}{\rho}, \quad \text{arc cos } \frac{\sigma}{\rho} = \phi(\rho)$$

$$\text{sen } \phi(\rho) = \frac{\sqrt{\rho^2 - \sigma^2}}{\rho}, \quad \text{arc sen } \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\pi}{2} - \phi(\rho)$$

$$\text{sen } 2\phi(\rho) = 2 \text{ sen } \phi(\rho) \cos \phi(\rho) = \frac{2\sigma}{\rho^2} \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

Sustituyendo estas expresiones |2.2.5| se convierte en:

$$\begin{aligned} \rho \ell'(\rho) \left[ \frac{\frac{\pi}{2} - \phi(\rho)}{2} + \frac{\text{sen } 2\phi(\rho)}{4} \right] - \ell(\rho) \frac{\text{sen } 2\phi(\rho)}{2} \\ + \ell(\rho) \left[ \frac{\frac{\pi}{2} - \phi(\rho)}{2} + \frac{\text{sen } 2\phi(\rho)}{4} \right] - (1-\alpha) \frac{\pi}{4} (\ell(\rho) + \rho \ell'(\rho)) = 0 \end{aligned}$$

|2.2.6|

Simplificando y agrupando términos equivalentes se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\rho)}{2} [\rho \ell'(\rho) + \ell(\rho)] + \frac{\text{sen } 2\phi(\rho)}{4} [\ell(\rho) - \rho \ell'(\rho)] = \\ = \frac{\alpha\pi}{4} [\ell(\rho) + \rho \ell'(\rho)] \end{aligned}$$

y dividiendo la expresión anterior por  $\rho \ell'(\rho) + \ell(\rho) > 0$ , por las

condiciones impuestas en el enunciado, se obtiene:

$$\frac{\phi(\rho)}{2} + \frac{\text{sen } 2\phi(\rho)}{4} \left[ \frac{\ell(\rho) - \rho \ell'(\rho)}{\ell(\rho) + \rho \ell'(\rho)} \right] = \alpha \frac{\pi}{4} \quad |2.2.7|$$

La resolución de |2.2.7| nos permite calcular  $\phi(\rho)$  y por tanto  $\sigma(\rho)$  con lo cual quedan determinados los rayos polares  $g(x, \alpha)$ .

Casos particulares:

Si  $\ell(\rho) = \rho^m$ , corresponde a las "dilataciones generalizadas" de orden  $m$  estudiadas en el apartado anterior.

Si  $m = 1$  corresponde a las coordenadas polares clásicas y entonces |2.2.7| se convierte en:  $\frac{\phi(\rho)}{2} = \frac{\alpha\pi}{4}$  por tanto

$$\phi(\rho) = \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{y entonces}$$

$$\sigma(\rho) = \rho \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \rho = \frac{\sigma}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}$$

y los rayos polares serán:

$$g(x, \alpha) = \sqrt{\rho^2 - x^2} = \rho \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi\alpha}{2}} = \rho \text{sen } \frac{\alpha\pi}{2} = x \text{tg } \frac{\alpha\pi}{2}$$

resultado ya obtenido en el primer ejemplo del apartado |2.1|.

2.3.: Estudio de las coordenadas polares asociadas a la familia

$$h(x, \rho) = a(x)(\rho - x) \quad 0 \leq x \leq \rho \quad a(x) \in C^2 \\ \rho \in (0, \infty) \quad a(x) \neq 0 \quad \forall x > 0$$

En este apartado hacemos un estudio de las coordenadas polares, asociadas a la familia  $h(x, \rho)$  enunciada anteriormente, estudiando

algunos casos particulares de la función  $a(x)$ , así como también damos condiciones a la función  $a(x)$  para que los rayos polares asociados a esta familia sean curvas bien curvadas o altamente monótonas.

La obtención de los rayos polares es un problema operativo, ya que supuesta  $a(x)$  de clase  $C^2$  y  $a(x) \neq 0 \quad \forall x > 0$ , la ecuación |1.1.4| queda reducida a:

$$\int_0^\sigma a(x) dx = (1-\alpha) \int_0^\rho a(x) dx \quad |2.3.1|$$

Denotando por  $A(x)$  una función tal que  $A'(x) = a(x)$  |2.3.1| se convierte en:

$$A(\sigma) - (1-\alpha) A(\rho) = \alpha A(0) \quad |2.3.2|$$

La ecuación |2.3.2| nos permite calcular  $\sigma = \sigma(\rho, \alpha)$  y en consecuencia los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia.

Pasamos a estudiar ahora el caso particular de  $a(x) = x^\beta$ , trabajando entonces con la familia:

$$h(x, \rho) = x^\beta (\rho - x); \quad \beta \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq x \leq \rho \quad \rho \in (0, \infty)$$

Ahora  $A(x) = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$ , y aplicando en este caso |2.3.2| se obtiene:

$$\frac{\sigma^{\beta+1}}{\beta+1} = (1-\alpha) \frac{\rho^{\beta+1}}{\beta+1}$$

y obviando los casos  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  cuyos rayos polares corresponden a los ejes coordenados se llega, si  $0 < \alpha < 1$ , a la expresión

$$\sigma = (1-\alpha)^{1/\beta+1} \rho \quad \text{y por tanto}$$

$$\rho = \frac{\sigma}{(1-\alpha)^{1/\beta+1}}$$

Consecuentemente los rayos polares  $g(x,\alpha)$  asociados a esta familia serán

$$g(x,\alpha) = h(x,\rho(x,\alpha)) = x^\beta \left( \frac{x}{(1-\alpha)^{1/\beta+1}} - x \right)$$

$$g(x,\alpha) = x^{\beta+1} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{1/\beta+1}} - 1 \right) = c_{\alpha,\beta} x^{\beta+1}$$

si  $0 < \alpha < 1$ , con  $c_{\alpha,\beta} > 0$ .

Se tiene el siguiente resultado:

2.3.1.: Dada la familia  $h(x,\rho) = x^\beta(\rho-x)$   $\rho \in (0,\infty)$   $0 < \rho < \infty$ .

Si  $\beta > 1$ , entonces los rayos polares  $g(x,\alpha)$  asociados a esta familia son curvas altamente monótonas para  $0 < \alpha < 1$ .

Este resultado es trivial, observando la definición 1.3.a.2 de curvas altamente monótonas y la expresión de los rayos polares  $g(x,\alpha)$  asociados a esta familia y calculados anteriormente.

Casos particulares de  $\beta$ :

(a) Si  $\beta = 0$  se obtiene la familia

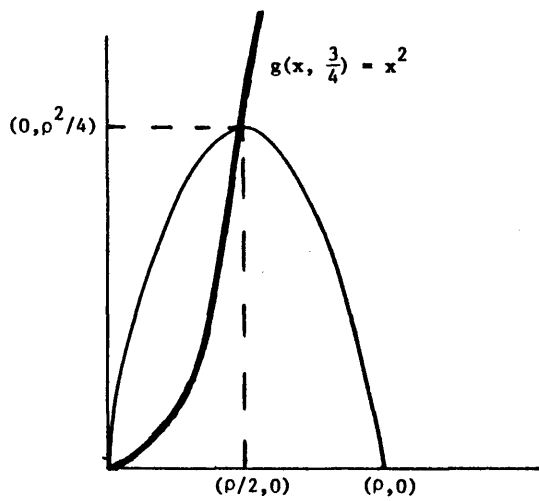
$$h(x,\rho) = \rho - x; \quad \rho \in (0,\infty) \quad 0 \leq x \leq \rho$$

estudiada ya en el apartado [2.1]

(b) Si  $\beta = 1$  entonces la familia  $h(x,\rho)$  es:

$$h(x,\rho) = x(\rho-x) \quad \rho \in (0,\infty) \quad 0 \leq x \leq \rho$$

que es una familia de parábolas (ver fig. 24).



(fig. 24)

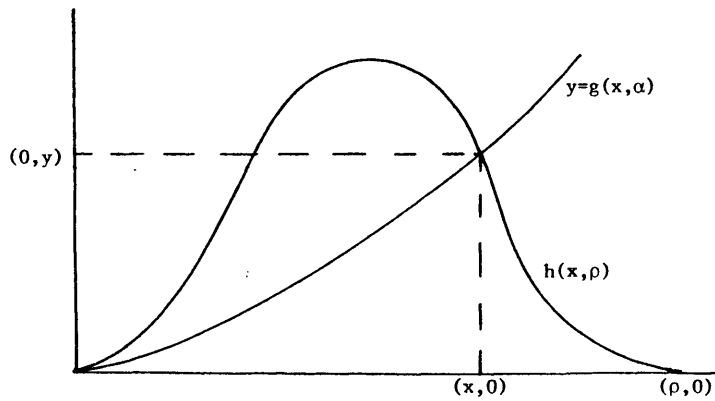
siendo los rayos polares asociados a esta familia

$$g(x, \alpha) = x^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} - 1 \right)$$

si  $\alpha = \frac{3}{4}$  se obtiene  $g(x, \frac{3}{4}) = x^2$ , que coincide con los vértices de la familia de parábolas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .

Estudiaremos ahora el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas a las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$ , cuya forma es esencial para la aplicación del método de rotación y consecuentemente para la obtención de ciertas acotaciones para determinados operadores.

En nuestro caso se tiene (ver fig. 25)



(fig. 25)

$$y = h(x, \rho) = x^\beta (\rho - x)$$

$$y = g(x, \alpha) = x^{\beta+1} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{1/\beta+1}} - 1 \right)$$

y despejando  $x$  e  $y$  en función de  $(\rho, \alpha)$  se obtiene que la transformación viene dada por

$$x = \rho(1-\alpha)^{1/\beta+1}$$

$$y = \rho^{\beta+1} ((1-\alpha)^{\beta/\beta+1} - (1-\alpha))$$

Por tanto:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \begin{vmatrix} (1-\alpha)^{1/\beta+1} & (\beta+1) \rho^\beta [(1-\alpha)^{\beta/\beta+1} - (1-\alpha)] \\ -\frac{\rho}{\beta+1} (1-\alpha)^{-\beta/\beta+1} & \rho^{\beta+1} \left[ -\frac{\beta}{\beta+1} (1-\alpha)^{-1/\beta+1} + 1 \right] \end{vmatrix}$$

Operando se llega a:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \frac{1}{\beta+1} \rho^{\beta+1}$$

lo cual nos indica que el jacobiano se puede factorizar en una función de  $\alpha$  y otra función de  $\rho$ , por tanto podremos explotar con éxito la técnica del método de rotación para acotación de operadores, como veremos en el apartado |2.4|.

Daremos ahora teoremas que nos garanticen, bajo ciertas condiciones de la función  $a(x)$ , que incluyen el caso  $a(x) = x^\beta$  estudiado anteriormente, que los rayos polares sean curvas "bien curvadas" o altamente monótonas.

Se tiene concretamente los siguientes resultados:

Teorema 2.3.2. - Se considera la familia  $h(x,\rho) = a(x)(\rho-x)$ ;  $\rho \in (0,\infty)$   
 $0 \leq x \leq \rho$   
con  $a(x) \in C^2(0,\infty)$   $a(x) \neq 0$   $0 < x < \rho$ . Si  $a'(0) \neq 0$  los rayos polares  $g(x,\alpha)$  asociados a la familia  $h(x,\rho)$  son curvas bien curvadas, salvo posiblemente para un conjunto de números reales  $B$ ,  $B \subset [0,1]$ , de medida Lebesgue nula.

Demostración.

Excluyamos los casos  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ .

Si  $\alpha \in (0,1)$  la determinación de los rayos polares se reduce al cálculo de  $\sigma$  en la expresión

$$\int_0^{\sigma(\rho)} a(x) dx = (1-\alpha) \int_0^\rho a(x) dx$$

siendo en general difícil el cálculo explícito de la función  $\sigma(\rho)$ , para funciones generales  $a(x)$ , y por tanto es difícil el cálculo explícito de los rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

Pero si nos fijamos en la definición 1.3.a.1 de curvas "bien curvadas" para demostrar el teorema, poniendo los rayos polares  $g(x, \alpha)$  en la forma  $(t, g(t, \alpha))$  y como un vector en la dirección de la tangente es  $(1, g'(t, \alpha))$ , basta ver que  $g''(0, \alpha) \neq 0$ , salvo para un conjunto  $B$  de  $\alpha$   $B \subset (0, 1)$  de medida Lebesgue nula.

Si derivamos la expresión |2.3.1| respecto a  $\rho$  obtenemos:

$$a(\sigma(\rho)) \sigma'(\rho) = (1-\alpha) a(\rho)$$

En consecuencia

$$\sigma'(\rho) = \frac{a(\rho)(1-\alpha)}{a(\sigma(\rho))} \quad |2.3.3|$$

Por las condiciones impuestas a la función  $a(x)$  se tiene que  $\sigma'(\rho) \neq 0 \quad \forall \rho$  si  $\alpha \in (0, 1)$ .

Una observación trivial es que  $\sigma(\rho) < \rho$  y por tanto  $\sigma(\rho) \rightarrow 0 \iff \rho \rightarrow 0$ .

Asimismo por la regularidad de la función  $a(x)$  se verifica que:

$$\sigma'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma'(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)a(\rho)}{a(\sigma(\rho))} = (1-\alpha) \quad |2.3.4|$$

Para demostrar que  $g''(0) \neq 0$  basta ver que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g''(\sigma(\rho)) \neq 0$$

Pero al ser  $g(\sigma(\rho)) = h(\sigma(\rho), \rho) = a(\sigma(\rho)) (\rho - \sigma(\rho))$  se tiene, derivando con respecto a  $\rho$ :

$$g'(\sigma(\rho))\sigma'(\rho) = a'(\sigma(\rho)) \cdot \sigma'(\rho) (\rho - \sigma(\rho)) + a(\sigma(\rho))(1 - \sigma'(\rho))$$

y dividiendo por  $\sigma'(\rho)$  se obtiene:

$$g'(\sigma(\rho)) = a'(\sigma(\rho)) [\rho - \sigma(\rho)] + a(\sigma(\rho)) \left[ \frac{1}{\sigma'(\rho)} - 1 \right] \quad |2.3.5|$$

Y derivando la expresión anterior con respecto a  $\rho$ , para el cálculo de  $g''(\sigma(\rho))$ , se llega a:

$$g''(\sigma(\rho))\sigma'(\rho) = a''(\sigma(\rho)) [\rho - \sigma(\rho)] \sigma'(\rho) + a'(\sigma(\rho)) [1 - \sigma'(\rho)] + \\ + a'(\sigma(\rho))\sigma'(\rho) \left[ \frac{1}{\sigma'(\rho)} - 1 \right] - a(\sigma(\rho)) \frac{\sigma''(\rho)}{(\sigma'(\rho))^2}$$

y dividiendo esta expresión por  $\sigma'(\rho)$  y agrupando términos semejantes se obtiene:

$$g''(\sigma(\rho)) = a''(\sigma(\rho)) [\rho - \sigma(\rho)] + 2a'(\sigma(\rho)) \left[ \frac{1}{\sigma'(\rho)} - 1 \right] - \\ - a(\sigma(\rho)) \frac{\sigma''(\rho)}{[\sigma'(\rho)]^3} \quad |2.3.6|$$

Y por tanto tomando límites si  $\rho \rightarrow 0$  se llega a:

$$g''(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} g''(\sigma(\rho)) = 2a'(0) \left[ \frac{1}{\sigma'(0)} - 1 \right] - a(0) \frac{\sigma''(0)}{(\sigma'(0))^3} \quad |2.3.7|$$

y sustituyendo el valor de  $\sigma'(0)$  obtenido en 2.3.4 se tiene:

$$g''(0) = 2a'(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} - a(0) \frac{\sigma''(0)}{(1-\alpha)^3} \quad |2.3.8|$$

Distinguiremos dos casos

i)  $a(0) = 0$

Entonces según |2.3.8|:

$$g''(0) = 2a'(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} \neq 0 \quad \text{si } \alpha \in (0,1)$$

ya que por hipótesis  $a'(0) \neq 0$ .

ii)  $a(0) \neq 0$ .

Calcularemos entonces  $\sigma''(0)$  para sustituir su valor en |2.3.8|.

Por |2.3.3| se tiene  $\sigma'(\rho) = \frac{a(\rho)(1-\alpha)}{a(\sigma(\rho))}$  y derivando esta expresión respecto a  $\rho$  se tiene:

$$\sigma''(\rho) = (1-\alpha) \left[ \frac{a'(\rho)a(\sigma(\rho)) - a(\rho) a'(\sigma(\rho))\sigma'(\rho)}{[a(\sigma(\rho))]^2} \right] \quad |2.3.9|$$

Tomando límites en |2.3.9| si  $\rho \rightarrow 0$  y utilizando el valor de  $\sigma'(0)$  obtenido en |2.3.4| se llega a:

$$\sigma''(0) = \frac{(1-\alpha)\alpha a'(0)}{a(0)} \quad |2.3.10|$$

Sustituyendo el valor de  $\sigma''(0)$  obtenido en |2.3.10| en la expresión |2.3.8| se tiene:

$$\begin{aligned} g''(0) &= 2a'(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} - a'(0) \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \\ &= \frac{a'(0)}{(1-\alpha)^2} [2\alpha(1-\alpha) - \alpha] \quad |2.3.11| \end{aligned}$$

y así  $g''(0) \neq 0$  si  $\alpha \in (0,1)$  salvo si  $\alpha \neq 1/2$ . c.q.d.

La hipótesis  $a'(0) \neq 0$  del teorema anterior no es necesaria, ya que según la definición 1.3.a.1 bastaría la existencia de un cierto número natural  $n$  ( $n=2,3,\dots$ ) tal que  $g^n(0) \neq 0$  para que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  fuesen curvas "bien curvadas", como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{La familia } h(x,\rho) &= x^3(\rho-x) \quad \rho \in (0,\infty), \\ &0 \leq x \leq \rho \end{aligned}$$

estudiada explícitamente en este apartado, admite como rayos polares  $g(x,\alpha) = C(\alpha)x^3$  con  $C(\alpha) > 0$  si  $\alpha \in (0,1)$ .

Dichos rayos polares son curvas "bien curvadas" y sin embargo  $g''(0, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha$ .

Vamos a dar ahora una condición necesaria y suficiente, bajo ciertas hipótesis de la función  $a(x)$ , para que los rayos polares asociados a la familia  $h(x, \rho) = a(x)(\rho - x) \quad \rho \in (0, \infty), \quad 0 \leq x \leq \rho$ , sean curvas "altamente monótonas".

Teorema 2.3.3.: Se considera la familia  $h(x, \rho) = a(x)(\rho - x)$ ;  $\rho \in (0, \infty) \quad 0 \leq x \leq \rho$  con  $a(x) \in C^2(0, \infty) \quad a(x) > 0$  en  $(0, \infty)$ .

Es condición necesaria y suficiente para que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  sean curvas "altamente monótonas", salvo posiblemente para conjuntos  $B$  de números reales,  $B \subset [0, 1]$  de medida Lebesgue nula el que se verifique:

i)  $a(0) = 0$

ii)  $a''(\sigma(\rho)) [\rho - \sigma(\rho)] + 2a'(\sigma(\rho)) \left[ \frac{1}{\sigma'(\rho)} - 1 \right] - a(\sigma(\rho)) \frac{\sigma''(\rho)}{(\sigma'(\rho))^3}$  sea positiva y no decreciente para  $\rho \in (0, \infty)$  y  $\forall \alpha \in [0, 1] - B$ .

Demostración.

De la definición 1.3.a.2 de curvas "altamente monótonas" se deduce que para demostrar el teorema, siendo los rayos polares  $(x, g(x, \alpha))$  basta comprobar:

1)  $g(0, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1] - B$

2)  $g'(0, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1] - B$

3)  $g''(x, \alpha)$  es positiva y no decreciente  $\forall x \in (0, \infty)$  y  $\forall \alpha \in [0, 1]$  - B.

Excluyendo los casos  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  se tiene que:

La condición 1) es trivial ya que  $\forall \alpha \in (0, 1)$  los rayos polares  $g(x, \alpha)$  pasan por el origen de coordenadas.

Por otra parte, tomando límites, cuando  $\rho \rightarrow 0$ , (o lo que es equivalente  $\sigma(\rho) \rightarrow 0$ ) en la expresión |2.3.5| teniendo en cuenta |2.3.4| se obtiene:

$g'(0, \alpha) = a(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in (0, 1)$ , por la hipótesis (i), con lo cual queda comprobado 2).

Finalmente la condición 3) es equivalente a la hipótesis (ii) teniendo en cuenta la expresión de  $g''(x, \alpha)$  dada en |2.3.6|. c.q.d.

El teorema anterior permite tratar casos de la función  $a(x)$ , donde no sea fácil el cálculo explícito de los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , como muestra el siguiente ejemplo:

Sea la familia  $h(x, \rho) = a(x)(\rho - x)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ ;  $0 \leq x \leq \rho$  y

$$a(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

El cálculo explícito de los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , para esta familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , exigiría el cálculo explícito de la función  $\sigma(\rho)$  definida por:

$$\int_0^\sigma e^{-1/x^2} dx = (1-\alpha) \int_0^\rho e^{-1/x^2} dx \quad |2.3.12|$$

siendo difícil dicho cálculo.

Por otra parte es trivial comprobar, utilizando las derivadas de la función  $\sigma(\rho)$  definida por |2.3.12| que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  no son curvas bien curvadas, ya que  $\forall n, (n=2, \dots)$  se tiene:

$$g^n(x, \alpha) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x^2}$$

y por tanto

$$g^n(0, \alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} g^n(x, \alpha) = 0$$

Asimismo de la expresión |2.3.12| se llega a:

$$\sigma'(\rho) = \frac{(1-\alpha) e^{-1/\rho^2}}{e^{-1/(\sigma(\rho))^2}} \quad |2.3.13|$$

$$\sigma''(\rho) = (1-\alpha) \left[ \frac{\frac{2}{\rho^3} e^{-1/\rho^2} e^{-1/(\sigma(\rho))^2} - (1-\alpha) \frac{2}{(\sigma(\rho))^3} e^{-2/\rho^2}}{e^{-1/(\sigma(\rho))^2}} \right] \quad |2.3.14|$$

Entonces de la definición de la función  $a(x)$  se tiene  $a(0) = 0$  que es la hipótesis i) del teorema 2.3.3 comprobándose la hipótesis ii) utilizando las expresiones |2.3.13| y |2.3.14|.

En consecuencia los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a esta familia, son curvas "altamente monótonas".

2.4.: Estudio de otras familias de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ .

Tratamos en este apartado de otras familias de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  que determinan con los ejes coordenados conjuntos acotados.

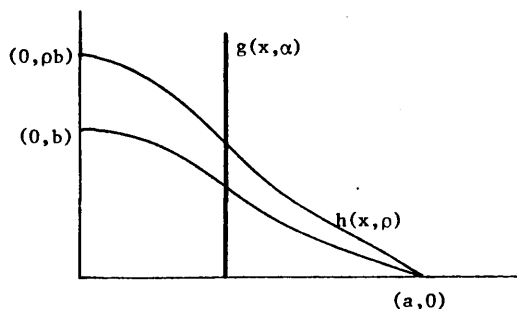
El primer ejemplo que trataremos será el de familias  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  que son curvas afines (respecto al eje de las  $x$ ) de una curva de la familia que denotaremos  $h(x,1)$ . En este ejemplo vemos que los rayos polares asociados a él, no pasan por el origen de coordenadas.

El segundo ejemplo considerado se refiere a familias de curvas  $h(x,\rho) = a(\rho)(\rho-x)$   $\rho \in (0,\infty)$ ,  $0 \leq x \leq \rho$ , que son rectas de pendiente  $-a(\rho)$ .

Pasemos a estudiar explícitamente los ejemplos enunciados:

1.- Consideremos una curva  $y = h(x) \equiv h(x,1)$ , que suponemos en el primer cuadrante y tal que  $\exists a$  finito tal que  $h(a) = 0$ .

Formemos la familia de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  afines a la curva  $y = h(x)$ , es decir  $h(x,\rho) = \rho h(x) = \rho h(x,1)$  (ver. fig. 26)



(fig. 26)

Los rayos polares asociados a esta familia  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  son rectas verticales  $x = \text{cte}$  ya que si denotamos por

$$S = \int_0^a h(x,1) dx$$

Entonces evidentemente

$$\rho S = \int_0^a h(x,\rho) dx$$

Y como para la curva correspondiente al valor del parámetro  $\rho = 1$ , se tiene que existe una única recta vertical  $x = \sigma$  tal que:

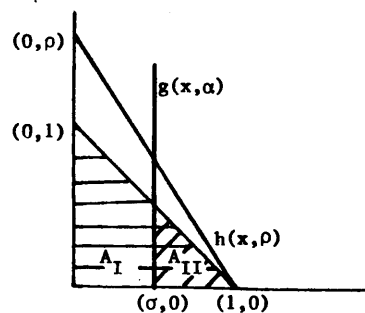
$$\int_0^\sigma h(x,1) dx = \alpha S = \alpha \int_0^a h(x,1) dx$$

basta comprobar que la misma recta  $x = \sigma$  verifica la misma igualdad  $\forall \rho \in (0,\infty)$  lo cual es evidente ya que:

$$\int_0^\sigma h(x,\rho) dx = \rho \int_0^\sigma h(x,1) dx = \rho \alpha S = \alpha \int_0^a h(x,\rho) dx.$$

Así pues, para toda familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  de conjuntos afines a uno de ellos denotado por  $h(x,1)$ , los rayos polares son rectas verticales; dependiendo de la función  $h(x) \equiv h(x,1)$  el cálculo de dichos rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

Así por ejemplo si  $h(x) = 1-x$  y por tanto  $h(x,\rho) = \rho(1-x)$  ver fig. 27



(fig. 27)

el rayo polar de orden  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0,1]$  corresponderá a la recta  $x = \sigma$ , determinando  $\sigma$  por medio de la igualdad:

$$|A_{II}| = \alpha |A_I|$$

En este caso se tiene:

$$|A_I| = 1/2$$

$$|A_{II}| = \frac{(1-\sigma)^2}{2}$$

En consecuencia:

$$(1-\sigma)^2 = \alpha$$

y por tanto:

$$\sigma = 1 - \sqrt{\alpha}$$

siendo  $x = 1 - \sqrt{\alpha}$  el rayo polar  $g(x,\alpha)$   $\alpha \in [0,1]$ .

2.- Tratamos ahora el estudio de la familia  $h(x,\rho) = a(\rho)(\rho-x)$   $0 \leq x \leq \rho$   $\rho \in (0,\infty)$  familia de rectas, bastante "general" en el sentido de que, la variación de la función  $a(\rho)$  hace variar la pendiente de las rectas que forman la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ . El caso  $a(\rho) = \rho^{m-1}$  con  $m \in \mathbb{R}^+$  ha sido ya estudiado en el tercer ejemplo del apartado |2.1|.

Imponiendo cierta regularidad a la función  $a(\rho)$ , por ejemplo que  $a(\rho)$  sea de clase  $C^2$ , se tiene:

$$h_\rho(x,\rho) = a'(\rho)(\rho-x) + a(\rho)$$

Por tanto  $h_\rho(x,\rho)$  es continua si  $0 < x < \rho$ .

Si  $h_\rho(x,\rho) \neq 0 \forall x$   $0 < x < \rho$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  aplicando la ecuación |1.1.4| para la determinación de los rayos polares se obtiene:

$$\int_0^\sigma [a'(\rho)(\rho-x) + a(\rho)] dx = (1-\alpha) \int_0^\rho [a'(\rho)(\rho-x) + a(\rho)] dx$$

|2.4.1|

Efectuando operaciones en |2.4.1| y agrupando términos semejantes se llega a:

$$a'(\rho) \frac{\sigma^2}{2} - (a'(\rho)\rho + a(\rho))\sigma + (1-\alpha) [a'(\rho) \frac{\rho^2}{2} + a(\rho)\rho] = 0$$

|2.4.2|

que nos permite obtener  $\sigma(\rho)$ , dependiendo su facilidad de cálculo de la función  $a(\rho)$ , y por tanto dependerá esencialmente también de la función  $a(x)$  el cálculo explícito de los rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

### 2.5.: Acotaciones del operador maximal

Tratamos ahora de acotaciones para el operador maximal asociado a bases de diferenciación  $B$ , relacionadas con la familia de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , de la forma siguiente:

Consideremos la familia de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , que suponemos situadas en el primer cuadrante y tal que los conjuntos encerrados por la curva  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados estén acotados.

Definimos la base de diferenciación

$$B = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} B(z)$$

invariante por traslaciones, con:

$$B(0) = \{B_\rho(0)\}_{\rho \in \mathbb{R}^+} \equiv \{B(\rho,0)\}_{\rho \in \mathbb{R}^+}$$

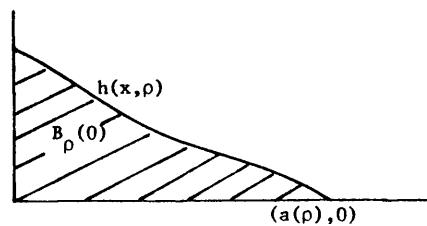
siendo:

$$B_\rho(0) = \{(x,y) / 0 \leq x \leq a(\rho) \}$$

$$0 \leq y \leq h(x,\rho)$$

donde  $a(\rho)$  es tal que

$$h(a(\rho), \rho) = 0 \quad (\text{ver fig. 28})$$



La acotación del operador maximal se hará efectuando el cambio a las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  y utilizando los resultados de acotación del operador maximal a lo largo de curvas, para curvas "altamente monótonas" y "bien curvadas" expuestos en el apartado |1.3|.

Daremos primeramente resultados generales de acotación del operador maximal, aplicandolos posteriormente a algunos de los ejemplos tratados en los apartados anteriores de este capítulo.

Para la base de diferenciación descrita anteriormente el operador maximal tiene la expresión:

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B(r,0)} |f(x-y)| dy$$

y denotando por  $T_{\rho, \alpha}$  la transformación que hace pasar el punto  $(1, \alpha)$  situado en la curva  $h(x, 1)$  al punto  $(\rho, \alpha)$  que está en el mismo rayo polar y en la curva  $h(x, \rho)$  el operador maximal en las nuevas coordenadas tendrá la siguiente expresión, denotando por  $\bar{y} = (1, \alpha)$ :

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_0^1 \int_0^r |f(x - T_{\rho, \alpha} \bar{y})| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} d\rho d\alpha$$

Pero por la elección de las coordenadas  $(\rho, \alpha)$  se verifica que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = j(\rho) m(\alpha).$$

Entonces se verifican las siguientes acotaciones para el operador maximal:

Teorema 2.5.1.- Sea la familia de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  y consideremos la base  $B$  de diferenciación asociada a ella, descrita anteriormente.

Supongamos que los rayos polares  $g(x,\alpha)$ , asociados a la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  son curvas altamente monótonas, salvo para un conjunto de números reales de medida de Lebesgue nula en  $[0,1]$ .

Denotando  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = j(\rho) m(\alpha)$  si se verifican las condiciones siguientes:

$$i) \frac{|j(\rho)|}{|B(r,0)|} \leq \frac{c}{r} \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq r$$

$$ii) \int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha = c < \infty$$

Entonces el operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo fuerte  $(p,p)$   $2 \leq p \leq \infty$  es decir

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 2 \leq p \leq \infty; \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

Demostración:

Al efectuar el cambio de variable a las coordenadas  $(\rho,\alpha)$  se tiene que:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(r,0)|} \int_0^1 \int_0^r |f(x-T_{\rho,\alpha}\bar{y})| |j(\rho)m(\alpha)| d\rho d\alpha$$

Y por tanto:

$$Mf(x) \leq \int_0^1 |m(\alpha)| \left( \sup_{r>0} \frac{1}{|B(r,0)|} \int_0^r |f(x-T_{\rho,\alpha}\bar{y}) j(\rho)| d\rho \right) d\alpha$$

y definiendo, con  $\alpha$  fijo, el operador  $M^\alpha$  de la forma:

$$M^\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(r,0)|} \int_0^r |f(x-T_{\rho,\alpha}\bar{y}) j(\rho)| d\rho$$

se tiene que:

$$Mf(x) \leq \int_0^1 |m(\alpha)| M^\alpha f(x) d\alpha$$

Utilizando la hipótesis i) al ser  $\frac{|j(\rho)|}{|B(r,0)|} \leq \frac{c}{r}$  se llega a:

$$M^\alpha f(x) \leq \sup_{r>0} \frac{c}{r} \int_0^r |f(x-T_{\rho,\alpha}\bar{y})| d\rho$$

y como los rayos polares son curvas altamente monótonas se tiene según el teorema 1.3.a.2 que:

$$\|M^\alpha f\|_p \leq C_p \|f\|_p; \quad 2 \leq p \leq \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

Y aplicando la desigualdad integral de Minkowski se obtiene:

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha$$

y utilizando la hipótesis ii) se llega a:

$$\|Mf\|_p \leq C'_p \|f\|_p, \quad 2 \leq p \leq \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

é.q.d.

Teorema 2.5.2. - Se considera la familia de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  y la base de diferenciación  $B$  asociada a ella, según lo indicado al comienzo de este apartado.

Supongamos que los rayos polares  $g(x,\alpha)$ , asociados a la fami

lia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  son curvas bien curvadas, salvo para un conjunto de medida nula  $B$  de números reales con  $B \subset [0, 1]$ .

Se tiene, por tanto, que siendo:

$$M_{\alpha} f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{r} \int_0^r |f(x - T_{\rho, \alpha} \bar{y})| d\rho$$

$$\|M_{\alpha} f\|_p \leq C(\alpha) \|f\|_p \quad \text{si } f \in L^p(\mathbb{R}^2); \quad 1 < p < \infty$$

Denotando asimismo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = j(\rho) m(\alpha)$$

Si se verifican las condiciones:

$$\text{i) } \frac{|j(\rho)|}{|B(r, 0)|} \leq \frac{c}{r} \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq r$$

$$\text{ii) } \int_0^1 |m(\alpha) C(\alpha)| d\alpha = C < \infty$$

Entonces el operador maximal  $M$  asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo  $(p, p)$   $1 < p < \infty$  y por tanto

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty \quad \text{y } f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

**Teorema 2.5.3.-** En las mismas condiciones para la familia  $h(x, \rho)$  de los teoremas anteriores, así como para la base de diferenciación  $B$ , supongamos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia  $h(x, \rho)$  sean rectas, (salvo posiblemente para un conjunto de números  $\alpha$  de medida nula en  $[0, 1]$ ).

Si se verifican las condiciones:

$$\text{i) } \frac{|j(\rho)|}{|B(r, 0)|} \leq \frac{c}{r} \quad 0 \leq \rho \leq r$$

$$\text{ii) } \int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha = C < \infty$$

Entonces el operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo  $(p,p)$   $1 < p < \infty$  es decir

$$\|Mf\|_p \leq C(p) \|f\|_p; \quad 1 < p < \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

La demostración de los teoremas 2.5.2 y 2.5.3 va paralela a la demostración del teorema 2.5.1 utilizando el método de rotación y los resultados expuestos en el apartado |1.3|, o la acotación del operador maximal unidimensional de Hardy-Littlewood.

Comprobaremos ahora, para ciertas familias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  estudiadas en los apartados anteriores que las hipótesis de los teoremas 2.5.1, 2.5.2 ó 2.5.3 son ciertas obteniendo, en consecuencia propiedades de acotación del operador maximal.

Así en las "coordenadas polares clásicas" se tiene:

$$h(x,\rho) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad \rho \in (0,\infty) \quad 0 \leq x \leq \rho$$

Obtuvimos que los rayos polares eran las rectas:

$$g(x,\alpha) = \text{tg } \frac{\pi}{2} \alpha \quad x$$

El cambio a polares viene dado por las ecuaciones:

$$x = \rho \cos \frac{\pi}{2} \alpha$$

$$y = \rho \text{ sen } \frac{\pi}{2} \alpha$$

y por tanto

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = \frac{\pi}{2} \rho$$

En este caso  $m(\alpha) = 1$ ,  $j(\rho) = \frac{\pi}{2} \rho$ ,  $|B(r,0)| = \frac{\pi}{4} r^2$  por tanto

$$\frac{|j(\rho)|}{|B(r,0)|} \leq \frac{C}{r}$$

$$\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha < \infty$$

Aplicando el teorema 2.5.3 el operador maximal es de tipo  $(p,p)$   $1 < p < \infty$ .

Este resultado, ya clásico, puede verse utilizando otras técnicas en Guzmán [5].

Analizando ahora el tercer ejemplo considerado en el apartado [2.1] con  $m=1$  es decir:

$$h(x,\rho) = \rho - x \quad 0 \leq x \leq \rho \quad \rho \in (0,\infty)$$

Los rayos polares para esta familia, obtenidos allí, son

$$g(x,\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} x$$

Por tanto las ecuaciones del cambio de variable son:

$$x = \rho(1-\alpha)$$

$$y = \rho \alpha$$

y el jacobiano de esta transformación

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = \rho$$

Como en este caso  $|B_r(0)| = \frac{r^2}{2}$  se verifican las condiciones del teorema 2.5.3 y por lo tanto el operador maximal, asociado a la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  es de tipo  $(p,p)$   $1 < p < \infty$ .

Finalmente consideramos la familia  $h(x, \rho) = x^\beta(\rho-x)$ ,  
 $0 \leq x \leq \rho \quad \rho \in (0, \infty)$ .

Obtuvimos en el apartado [2.3], concretamente en el resultado 2.3.1, que con  $\beta > 1$ , los rayos polares asociados a esta familia son curvas altamente monótonas.

También se obtuvo allí que:

$$x = \rho(1-\alpha)^{1/\beta+1}$$
$$y = \rho^{\beta+1} |(1-\alpha)^{\beta/\beta+1} - (1-\alpha)|$$

y por tanto:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \frac{1}{\beta+1} \rho^{\beta+1}$$

También se tiene que:

$$|B(r, 0)| = \int_0^r x^\beta(\rho-x) dx = \frac{r^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}$$

Por tanto se verifican las condiciones del teorema 2.5.1, y entonces el operador maximal es de tipo  $(p, p) \quad 2 \leq p \leq \infty$ .

El método de acotación del operador maximal es general, siendo solamente dificultades técnicas las que son necesario resolver, principalmente el cálculo de  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)}$ , que dependen esencialmente de la naturaleza de la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  que se considere.

CAPITULO III

COORDENADAS POLARES ASOCIADAS A  
CONJUNTOS "NO ACOTADOS".

Trabajamos en este capítulo con familias de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , (que por comodidad operativa las suponemos situadas en el primer cuadrante), tales que  $\forall \rho \in (0, \infty)$  los conjuntos delimitados por la curva  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados sean no acotados de medida finita.

En el primer apartado tratamos con familias  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  que son "dilataciones generalizadas", (en el mismo sentido que en el capítulo segundo), de una de las curvas de la familia que denotamos  $h(x, 1)$ , analizando los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a familias de este tipo y resolviendo casos particulares de la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

En el apartado segundo estudiamos algunos ejemplos donde se pierde la "regularidad" de la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , analizando las coordenadas polares asociadas a familias de este tipo.

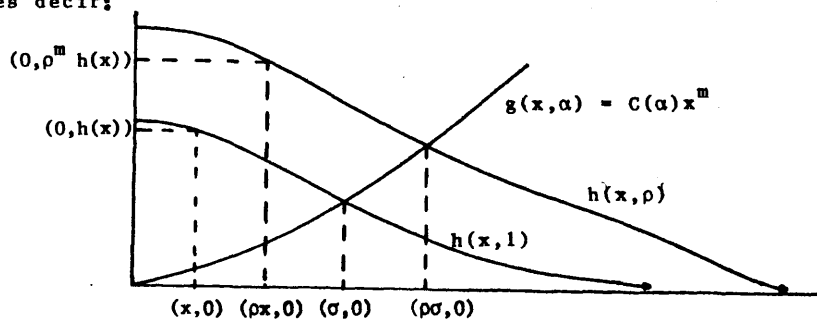
Finalmente en el tercer apartado damos condiciones de acotación del operador maximal; asociado a una cierta base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , que definimos allí; primero generales como el teorema 3.3.1 y el teorema 3.3.2, analizando posteriormente varios ejemplos, que nos permiten utilizar dichos teoremas.

3.1.: Coordenadas polares asociadas a "dilataciones generalizadas"

Consideramos en este apartado familias de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ , de clase  $C^2$ , situadas en el primer cuadrante, (por comodidad de cálculo), de tal forma que los conjuntos delimitados por la curva  $h(x,\rho)$  y los ejes de coordenadas sean conjuntos no acotados, de medida finita y por tanto

$$\int_0^{\infty} h(x,\rho) dx = S(\rho) < \infty$$

La familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , en el contexto de este apartado, está construida por medio de dilataciones generalizadas de orden  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$ , de una de las curvas de la familia, denotada por  $h(x,1)$  (ver fig. 29), en la misma forma que la descrita en el apartado |2.1|, es decir:



(fig. 29)

Dada la curva  $y = h(x,1)$  la curva  $h(x,\rho)$  es tal que:

Si  $(x, h(x,1))$  está en la curva  $y = h(x,1)$  entonces el punto  $(\rho x, \rho^m h(x,1))$  está en la curva  $h(x,\rho)$ , lo que equivale a decir:

$$h(\rho x, \rho) = \rho^m h(x, 1)$$

Si  $m=1$  la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  corresponde a curvas homotéticas de la curva  $y = h(x,1)$ .

Se comprueba que los rayos polares para familias de este tipo son de la forma  $g(x,\alpha) = C(\alpha)x^m$ , con  $C(\alpha)$  dependiendo de la curva  $y = h(x,1)$ , ya que siendo

$$S = \int_0^{\infty} h(x,1) dx$$

Si para  $\rho = 1$   $g(x,\alpha) = C(\alpha)x^m$  es el rayo polar de orden  $\alpha$  se debe verificar: (ver fig. 29):

$$\int_0^{\sigma} C(\alpha)x^m dx + \int_{\sigma}^{\infty} h(x,1) dx = \alpha S \quad |3.1.1|$$

Entonces para la curva  $h(x,\rho)$ , con  $\rho \in (0,\infty)$ , si  $B$  es el área encerrada por las curvas  $C(\alpha)x^m$ ,  $h(x,\rho)$  y el eje de las  $x$ , se tiene:

$$B = \int_0^{\rho\sigma} C(\alpha)x^m dx + \int_{\rho\sigma}^{\infty} h(x,\rho) dx \quad |3.1.2|$$

y efectuando en |3.1.2| el cambio de variable  $x = \rho t$ , teniendo en cuenta que  $h(\rho t,\rho) = \rho^m h(t,1)$ , se convierte en:

$$B = \rho^{m+1} \left[ \int_0^{\sigma} C(\alpha)t^m dt + \int_{\sigma}^{\infty} h(t,1) dt \right] \quad |3.1.3|$$

y teniendo en cuenta |3.1.1| se llega a:

$$B = \rho^{m+1} \alpha S = \alpha \int_0^{\infty} h(x,\rho) dx \quad |3.1.4|$$

que demuestra que las curvas  $g(x,\alpha) = C(\alpha)x^m$  son los rayos polares asociados a la familia  $h(x,\rho)$  descrita anteriormente.

Pasemos ahora a estudiar algunos casos particulares de la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  de este tipo.

El primer ejemplo corresponde a la familia de curvas:  $h(x, \rho) = \rho^m e^{-x/\rho}$   $x > 0$   $\rho \in (0, \infty)$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$  que corresponde a las dilataciones generalizadas de orden  $m$  de la curva  $y = h(x) \equiv h(x, 1) = e^{-x}$ . En este caso se tiene:

$$h_\rho(x, \rho) = m \rho^{m-1} e^{-x/\rho} + \rho^{m-2} x e^{-x/\rho} = \rho^{m-2} e^{-x/\rho} [m\rho + x] \quad |3.1.5|$$

Se verifica  $h_\rho(x, \rho) \neq 0$  si  $x > 0$   $\forall \rho$  y por tanto según el teorema 1.1.2 los rayos polares asociados a la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  son únicos reduciéndose su cálculo al cálculo de la función  $\sigma(\rho)$  de |1.1.6| que en este caso es:

$$\int_0^\sigma \rho^{m-2} e^{-x/\rho} [\rho m + x] dx - (1-\alpha) \int_0^\infty \rho^{m-2} e^{-x/\rho} [\rho m + x] dx = 0 \quad |3.1.6|$$

Efectuando la integración y simplificando |3.1.6| se convierte en:

$$F(\sigma, \rho) = e^{-\sigma/\rho} [(m+1)\rho + \sigma] + \alpha(m+1)\rho = 0 \quad |3.1.7|$$

Comprobaremos que  $\sigma(\rho) = C(\alpha, m)\rho$ , ya que para esta función  $\sigma(\rho)$ , (que es única por ser  $h_\rho(x, \rho) \neq 0$   $\forall x > 0$ ,  $\forall \rho$ ) se tiene, sustituyendo en |3.1.7|, la ecuación:

$$-e^{-C(\alpha, m)} [(m+1)\rho + C(\alpha, m)\rho] + \alpha \rho(m+1) = 0 \quad |3.1.8|$$

Dividiendo la anterior expresión por  $\rho$ , y escribiendo  $C(\alpha)$  en vez de  $C(\alpha, m)$  se obtiene:

$$\alpha(m+1) - e^{-C(\alpha)} [(m+1) + C(\alpha)] = 0 \quad |3.1.9|$$

Si consideramos la siguiente función

$$H(x) = -e^{-x} [(m+1)+x] + \alpha(m+1) \quad |3.1.10|$$

se observa que:

$$H(0) = -(m+1) + \alpha(m+1) < 0 \quad |3.1.11|$$

al ser  $0 < \alpha < 1$ .

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \alpha(m+1) > 0 \quad |3.1.12|$$

Además

$$H'(x) = e^{-x} [(m+1) + x] - e^{-x} = (m+x)e^{-x} > 0 \quad |3.1.13|$$

Las ecuaciones |3.1.11| |3.1.12| y |3.1.13| nos garantizan que existe un único valor,  $C(\alpha)$  tal que  $H(C(\alpha)) = 0$  que es precisamente |3.1.9|.

Entonces los rayos polares  $g(x, \alpha)$  serán  $g(x, \alpha) = h(x, \rho(x)) = e^{-C(\alpha)} \left(\frac{x}{C(\alpha)}\right)^m = D(\alpha) x^m$  siendo  $C(\alpha)$  la solución de |3.1.9|, que hemos visto que es única.

Trivialmente según los resultados expuestos en el apartado |1.3|, se observa que si  $m \geq 2$  los rayos polares  $g(x, \alpha) = D(\alpha)x^m$  son curvas "altamente monótonas".

En el caso particular  $m=1$ , la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , es homotética de la curva  $y = e^{-x}$  y los rayos polares asociados a este familia son las rectas

$$g(x, \alpha) = D(\alpha)x, \quad \text{con} \quad D(\alpha) = \frac{e^{-C(\alpha)}}{C(\alpha)}$$

siendo  $C(\alpha)$  la solución de |3.1.9|.

El segundo ejemplo que analizamos corresponde a la familia de curvas:

$$h(x, \rho) = \rho^m \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2} \quad 0 \leq x < \infty \quad m \in \mathbb{R}^+ \\ \rho \in (0, \infty)$$

que corresponde a las dilataciones generalizadas de orden  $m$  de la curva  $h(x, 1) = \frac{1}{1+x^2}$   $0 \leq x < \infty$ , estando interesados en el cálculo de los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a esta familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .

Excluyamos los casos  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ , que corresponden a los ejes coordenados.

En este caso se tiene:

$$h_\rho(x, \rho) = m \rho^{m-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2} + \frac{2 \rho^{m-3} x^2}{\left[1 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2\right]^2}$$

Trivialmente se observa que:

$$h_\rho(x, \rho) \neq 0 \quad \forall x > 0 \quad \rho \in (0, \infty)$$

Por tanto el cálculo de los rayos polares, asociados a esta familia, puede hacerse de acuerdo a la fórmula |1.1.6| que en este caso se reduce a:

$$F(\sigma, \rho) = (m+1) \cdot \arctg \frac{\sigma}{\rho} - \frac{\sigma}{1 + \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2} - (m+1) \cdot \frac{\pi}{2} (1-\alpha) = 0 \quad |3.1.14|$$

que nos determina la función  $\sigma(\rho) = C(\alpha)\rho$ , por tanto  $\rho = \frac{\sigma}{C(\alpha)}$ , con  $C(\alpha)$  solución de la ecuación

$$(m+1) \arctg C(\alpha) - \frac{1}{1 + (C(\alpha))^2} - (m+1) \frac{\pi}{2} (1-\alpha) = 0 \quad |3.1.15|$$

que es única ya que considerando la función:

$$G(x) = (m+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{1+x^2} - (m+1) \frac{\pi}{2} (1-\alpha)$$

se tiene que

$$G(0) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) > 0; \quad G'(x) > 0$$

y por tanto existe un único valor  $C(\alpha)$ , tal que  $G(C(\alpha)) = 0$  que es equivalente a la ecuación |3.1.15|.

Entonces los rayos polares serán:

$$g(x, \alpha) = h(x, \rho(x)) = \frac{x^m}{(C(\alpha))^m} \frac{1}{1 + (C(\alpha))^2} = D(\alpha)x^m$$

con  $D(\alpha) = \frac{1}{(C(\alpha))^m (1 + (C(\alpha))^2)}$ , siendo  $C(\alpha)$  la solución de |3.1.15|.

Las consecuencias siguientes son inmediatas:

Si  $m \geq 2$ , los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia  $h(x, \rho) = \rho^m \frac{1}{1 + (\frac{x}{\rho})^2}$ ;  $\rho \in (0, \infty)$   $x > 0$  son curvas "altamente monótonas", según se desprende inmediatamente de la definición 1.3.a.2.

Si  $m=1$ , los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia  $h(x, \rho) = \rho \frac{1}{1 + (\frac{x}{\rho})^2}$ , (que en este caso son conjuntos homotéticos a  $h(x, 1) = \frac{1}{1+x^2}$ ) son las rectas  $y = D(\alpha)x$ , con  $D(\alpha) = \frac{1}{C(\alpha)(1 + (C(\alpha))^2)}$  siendo  $C(\alpha)$  la solución de |3.1.15|.

3.2.: Coordenadas polares asociadas a familias de curvas  $h(x,\rho)$   
 $\rho \in (0,\infty)$  no "regulares".

Tratamos en este apartado de introducir unas coordenadas polares asociadas a familias de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , de tal forma que los conjuntos encerrados por las curvas  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados sean de medida finita y no acotados y la familia  $h(x,\rho)$  no satisfaga condiciones de "regularidad".

La introducción de las "coordenadas polares" debe hacerse en este caso directamente de la condición geométrica que las determina, concretamente la ecuación |1.1.5|, para la obtención de los rayos polares.

Trataremos varios ejemplos de familias  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  de este tipo donde se pondrá de manifiesto la técnica a utilizar.

El estudio de las "coordenadas polares" es practicamente equivalente al cálculo de los rayos polares ya que si  $A$  es el conjunto barrido por la familia de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  todo punto  $x$  de  $A$  se puede representar por el par  $(\rho,\alpha)$  donde:

$\rho$ : Es el valor del parámetro de la curva de la familia  $h(x,\rho)$  que pasa por el punto  $x$ .

$\alpha$ : Es el valor del parámetro del rayo polar que pasa por el punto  $x$ .

1) Estudio de las "coordenadas polares" asociadas a la familia

$$h(x,\rho) = \begin{cases} \rho & 0 \leq x \leq \rho \\ \rho^3/x^2 & \rho < x < \infty \end{cases} \quad \rho \in (0,\infty)$$

Se observa que para cada  $\rho$  fijo la curva  $h(x,\rho)$  no es derivable en  $x = \rho$ .

Se tiene también que

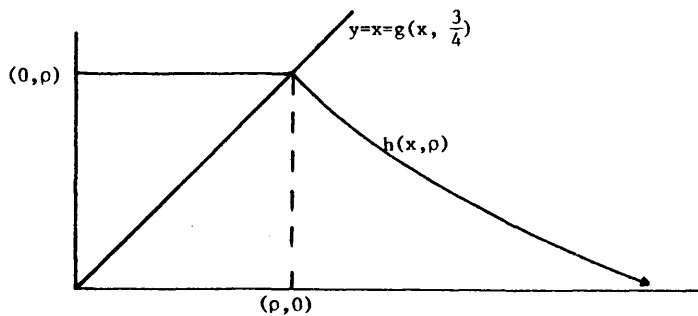
$$S(\rho) = \int_0^{\infty} h(x,\rho) dx = \int_0^{\rho} \rho dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho^3}{x^2} dx = 2\rho^2$$

Comprobaremos que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  son:

$$g(x,\alpha) = C(\alpha)x$$

calculando explícitamente  $C(\alpha)$  para  $\alpha \in [0,1]$ .

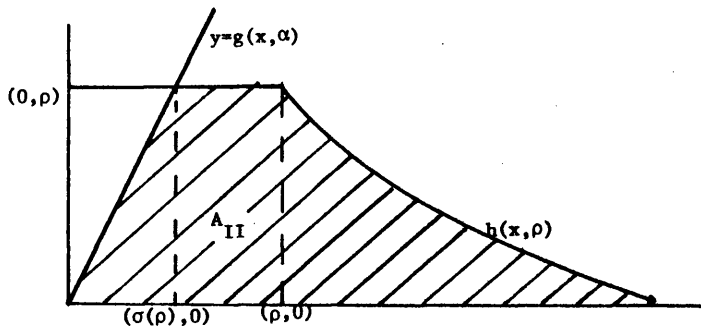
Según se observa en la figura 30 es trivial comprobar que:



(fig. 30)

el rayo polar para  $\alpha = \frac{3}{4}$  es  $g(x, \frac{3}{4}) = x$ .

Si  $\alpha > \frac{3}{4}$  la situación de los rayos polares es la de la fig.



(fig. 31)

En este caso:

$$|A_{II}| = S(\rho) - \frac{1}{2} \rho \sigma(\rho) = 2\rho^2 - \frac{1}{2} \sigma(\rho) \cdot \rho \quad |3.2.1|$$

Y la condición geométrica |1.1.5| que determina los rayos polares se convierte en:

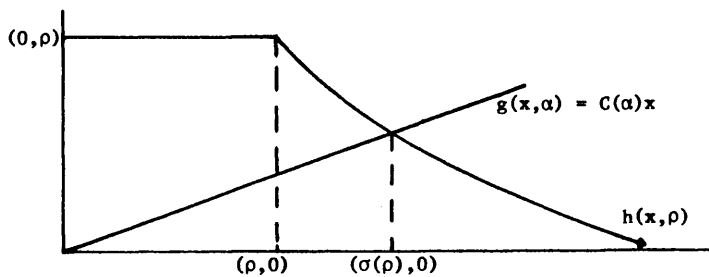
$$2\rho^2 - \frac{1}{2} \sigma(\rho) \cdot \rho = \alpha 2\rho^2 \quad |3.2.2|$$

Y despejando  $\sigma$  se obtiene:

$$\sigma = 4(1-\alpha)\rho \quad |3.2.3|$$

Con lo cual los rayos polares para  $\alpha > \frac{3}{4}$  serán  $g(x, \alpha) = h(x, \rho(x)) = \rho(x) = \frac{x}{4(1-\alpha)}$ ;  $\alpha > \frac{3}{4}$ .

Si  $\alpha < \frac{3}{4}$  la situación es la de la figura 32.



(fig. 32)

donde  $\sigma(\rho)$  es la abscisa de intersección de las curvas:

$$\begin{aligned} y &= \rho^3/x^2 \\ y &= C(\alpha)x \end{aligned} \quad |3.2.4|$$

y despejando  $\sigma(\rho)$  en función de  $C(\alpha)$  se obtiene

$$\sigma = \frac{\rho}{\sqrt[3]{C(\alpha)}} \quad |3.2.5|$$

Para el cálculo de  $C(\alpha)$  ponemos la condición de que  $g(x, \alpha)$  sea el rayo polar de orden  $\alpha$  obteniendo:

$$\int_0^{\sigma(\rho)} C(\alpha)x \, dx + \int_{\sigma(\rho)}^{\infty} \frac{\rho^3}{x^2} \, dx = \alpha \, 2\rho^2 \quad |3.2.6|$$

Efectuando la integración en |3.2.6| y sustituyendo  $\sigma(\rho)$  por el valor obtenido en |3.2.5| se llega a:

$$\frac{C(\alpha)}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{C(\alpha)}} + \sqrt[3]{C(\alpha)} = 2\alpha$$

y despejando  $C(\alpha)$  se tiene que:

$$C(\alpha) = \left(\frac{4\alpha}{3}\right)^3 \quad |3.2.7|$$

En resumen los rayos polares asociados a la familia

$$h(x, \rho) = \begin{cases} \rho & 0 \leq x \leq \rho \\ \rho^3/x^2 & \rho < x < \infty \end{cases} ; \quad \rho \in (0, \infty)$$

son

$$g(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4(1-\alpha)} x & 3/4 \leq \alpha \leq 1 \\ \left(\frac{4\alpha}{3}\right)^3 x & 0 \leq \alpha < 3/4 \end{cases}$$

Calcularemos el jacobiano de la transformación a las coordenadas polares, que nos será de utilidad en el apartado siguiente.

Podemos obviar el caso  $\alpha = \frac{3}{4}$  al ser  $g(x, \frac{3}{4})$  un conjunto de medida Lebesgue nula.

Se tiene que con  $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1]$  las ecuaciones que definen la transformación son:

$$\begin{aligned} y &= \rho \\ y &= \frac{1}{4(1-\alpha)} x \end{aligned} \quad |3.2.8|$$

Y despejando  $x$  e  $y$  se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 4(1-\alpha)\rho \\ y &= \rho \end{aligned} \quad |3.2.9|$$

Por tanto

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = \begin{vmatrix} 4(1-\alpha) & 1 \\ -4\rho & 0 \end{vmatrix} = 4\rho \quad |3.2.10|$$

Si  $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$  las ecuaciones del cambio de coordenadas serán:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{4}{3}\alpha\right)^3 x \\ y &= \frac{\rho^3}{x^2} \end{aligned} \quad |3.2.11|$$

Despejando  $x$  e  $y$  se llega a:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\rho}{4\alpha} \\ y &= \frac{16\alpha^2}{9} \rho \end{aligned} \quad |3.2.12|$$

Y entonces:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{16\alpha^2}{9} \\ -\frac{3\rho}{4\alpha^2} & \frac{32\alpha\rho}{9} \end{vmatrix} = 4\rho \quad |3.2.13|$$

2) Estudio de las coordenadas polares asociadas a la familia de curvas:

$$h(x, \rho) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \rho \\ \rho^3/x^2 & \rho < x < \infty \end{cases}; \quad \rho \in (0, \infty)$$

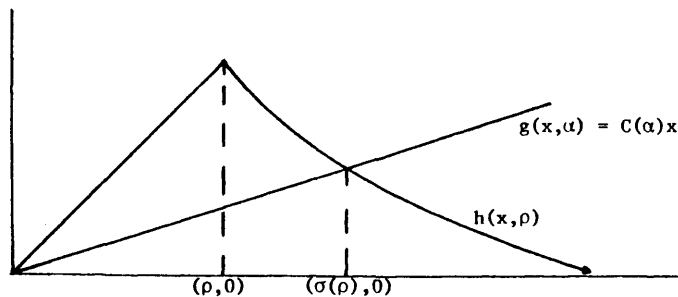
Es obvia la no regularidad de la familia  $h(x, \rho)$ , ya que para  $\rho$  fijo la curva  $h(x, \rho)$  no es derivable en  $x = \rho$ .

En este caso se tiene

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} h(x, \rho) dx = \int_0^{\rho} x dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho^3}{x^2} dx = \frac{3}{2} \rho^2 \quad |3.2.14|$$

Comprobaremos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  son de la forma  $g(x, \alpha) = C(\alpha)x$  calculando  $C(\alpha)$ .

Se debe verificar (ver figura 33):



(fig. 33)

$$\int_0^{\sigma(\rho)} C(\alpha)x dx + \int_{\sigma(\rho)}^{\infty} \frac{\rho^3}{x^2} dx = \alpha \frac{3}{2} \rho^2 \quad |3.2.15|$$

donde  $\sigma(\rho)$  es la abscisa de intersección de las curvas:

$$y = C(\alpha)x$$

$$y = \rho^3/x^2$$

Por tanto despejando se tiene que:

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt[3]{C(\alpha)}} \quad |3.2.16|$$

Y efectuando las integraciones en |3.2.15|, sustituyendo  $\sigma(\rho)$  por su valor según |3.2.16| se llega a:

$$\frac{\sqrt[3]{C(\alpha)}}{2} + \sqrt[3]{C(\alpha)} = \frac{3}{2} \alpha \quad |3.2.17|$$

Con lo cual despejando  $C(\alpha)$  se tiene:

$$C(\alpha) = \alpha^3$$

Por tanto los rayos polares asociados a este familia son:

$$g(x, \alpha) = \alpha^3 x \quad |3.2.18|$$

Efectuando el cambio a las coordenadas  $(\rho, \alpha)$  se tiene que las ecuaciones de la transformación son:

$$\begin{aligned} y &= \alpha^3 x \\ y &= \frac{\rho^3}{x^2} \end{aligned} \quad |3.2.19|$$

En consecuencia despejando  $x$  e  $y$  se llega a:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\rho}{\alpha} \\ y &= \alpha^2 \rho \end{aligned} \quad |3.2.20|$$

Por tanto se tiene que el jacobiano de la transformación es:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \begin{vmatrix} 1/\alpha & \alpha^2 \\ -\frac{\rho}{\alpha^2} & 2\alpha\rho \end{vmatrix} = 3\rho \quad |3.2.21|$$

3) Estudio de las coordenadas polares asociadas a la familia:

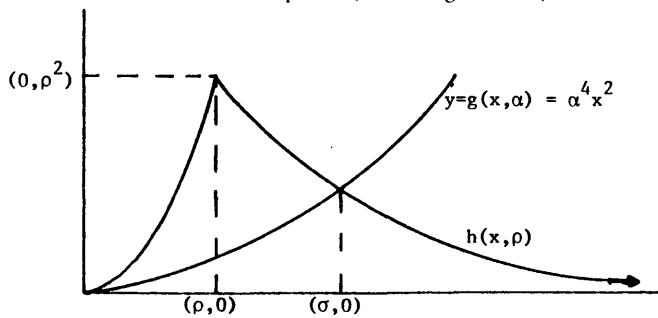
$$h(x, \rho) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \rho \\ \frac{\rho^4}{x^2} & \rho < x < \infty \end{cases} \quad \rho \in (0, \infty)$$

Se observa inmediatamente la no regularidad de la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  en los puntos de la forma  $(\rho, \rho)$ .

Comprobaremos que los rayos polares asociados a la familia antes descrita son:

$$g(x, \alpha) = \alpha^4 x^2$$

Para ello debemos demostrar que (ver figura 34):



(fig. 34)

$$\int_0^\sigma \alpha^4 x^2 dx + \int_\sigma^\infty \frac{\rho^4}{x^2} dx = \alpha \left[ \int_0^\rho x^2 dx + \int_\rho^\infty \frac{\rho^4}{x^2} dx \right] \quad | 3.2.22 |$$

donde  $\sigma$  es la abscisa de intersección de las curvas:

$$y = \rho^4 / x^2$$

$$y = \alpha^4 x^2$$

y despejando se obtiene que:

$$\sigma = \frac{\rho}{\alpha} \quad |3.2.23|$$

Sustituido el valor de  $\sigma$  dado por |3.2.23| en |3.2.22| e integrando se llega a:

$$\alpha^4 \frac{\rho^3}{3\alpha^3} + \rho^4 \frac{\alpha}{\rho} = \alpha [\rho^3/3 + \rho^3] \quad |3.2.24|$$

como efectivamente |3.2.24| es una identidad se ha demostrado que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  satisfacen:

$$g(x,\alpha) = \alpha^4 x^2$$

Las ecuaciones del cambio a las coordenadas polares  $(\rho,\alpha)$  vienen definidas por:

$$\begin{aligned} y &= \alpha^4 x^2 \\ y &= \frac{\rho^4}{x^2} \end{aligned} \quad |3.2.25|$$

y despejando  $x$  e  $y$  se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\rho}{\alpha} \\ y &= \rho^2 \alpha^2 \end{aligned} \quad |3.2.26|$$

Por tanto el jacobiano de la transformación será:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = \begin{vmatrix} 1/\alpha & 2\rho\alpha^2 \\ -\frac{\rho}{\alpha^2} & 2\rho^2\alpha \end{vmatrix} = 4\rho^2 \quad |3.2.27|$$

3.3.: Acotaciones del operador maximal.

Consideraremos en este apartado la familia de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ , situadas en el primer cuadrante, de tal forma que los conjuntos delimitados por las curvas  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados son no acotados, pero de medida finita.

A la familia  $h(x,\rho)$  le asociamos la base de diferenciación  $B$ ,  $B = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x)$ , invariante por traslaciones tal que

$$B(0) = \{B_\rho(0)\}_{\rho \in \mathbb{R}^+}$$

con

$$B_\rho(0) = \{(x,y) / 0 \leq x < \infty \} \\ 0 \leq y \leq h(x,\rho)$$

y designando por  $S(\rho) = |B_\rho(0)|$ .

En el contexto de este apartado, diremos simplemente la base de diferenciación  $B$  asociada a la familia de curvas  $h(x,\rho)$ , sobreentendiendo que nos referimos a la base de diferenciación anteriormente definida.

Se obtendrán acotaciones del operador maximal, asociado a la base de diferenciación  $B$ , utilizando el cambio a las coordenadas polares  $(\rho,\alpha)$ , dando primero acotaciones de tipo general, aplicandolas posteriormente a los ejemplos tratados en el apartado [3.2].

Si el operador de la transformación a las coordenadas polares  $(\rho,\alpha)$  verifica:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = j(\rho) m(\alpha)$$

se tienen los siguientes resultados, cuya demostración corre parale

la a los del apartado |2.5|. En concreto las acotaciones para el operador maximal pueden englobarse en los siguientes teoremas:

TEOREMA 3.3.1.- Sea la familia de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ , situadas en el primer cuadrante, y tal que los conjuntos delimitados por las curvas  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados sean conjuntos no acotados de medida finita.

Sea  $B$  la base de diferenciación asociada a la familia  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ .

Supongamos que los rayos polares  $g(x,\alpha)$ , asociados a la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Si se verifican las hipótesis

- i)  $\frac{|j(\rho)|}{S(r)} \leq \frac{c}{r} \quad \forall \rho \quad 0 < \rho \leq r$
- ii)  $\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha < \infty$

Entonces:

El operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $B$ , es de tipo  $(p,p)$   $1 < p \leq \infty$  y por tanto:

$$\|Mf\|_p \leq C(p) \|f\|_p, \quad 1 < p \leq \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2).$$

Teorema 3.3.2.- Sea la familia de curvas  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$ , situada en el primer cuadrante, y tal que los conjuntos delimitados por las curvas  $h(x,\rho)$  y los ejes coordenados sean conjuntos no acotados de medida finita.

Sea  $\mathcal{B}$  la base de diferenciación asociada a la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ .

Supongamos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ;  $\rho \in (0, \infty)$  son curvas altamente monótonas, salvo posiblemente para un conjunto de números reales  $B$ ,  $B \subset [0, 1]$ , de medida de Lebesgue nula en  $[0, 1]$ .

Si se verifican las siguientes condiciones:

- i)  $\frac{|j(\rho)|}{S(r)} \leq \frac{c}{r}$  para  $0 < \rho \leq r$
- ii)  $\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha < \infty$

Entonces:

El operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , es de tipo  $(p, p)$ ,  $2 \leq p \leq \infty$  y por tanto:

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 2 \leq p \leq \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

Teorema 3.3.3. - Se considera la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , situada en el primer cuadrante, y tal que los conjuntos delimitados por las curvas  $h(x, \rho)$  y los ejes coordenados sean conjuntos no acotados de medida finita.

Sea  $\mathcal{B}$  la base de diferenciación asociada a la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

Supongamos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , sean curvas bien curvadas, salvo posiblemente para un conjunto  $B$  de números reales,  $B \subset [0, 1]$ , de medida Lebesgue nula.

Denotamos por  $C(\alpha)$  la constante correspondiente al rayo polar  $g(x, \alpha)$  del teorema 1.3.a.1.

Si se verifica:

$$i) \frac{|j(\rho)|}{S(r)} \leq \frac{c}{r} \quad \forall \rho \quad 0 < \rho \leq r$$

$$ii) \int_0^1 |m(\alpha) C(\alpha)| d\alpha = C < \infty$$

entonces:

El operador maximal  $M$  asociado a la base de diferenciación  $B$  es de tipo  $(p, p)$   $1 < p < \infty$  es decir:

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

La demostración de los teoremas 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 es una transcripción literal de la utilizada en los teoremas del apartado |2.5| para familias de curvas  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  que delimitan conjuntos acotados con los ejes coordenados.

Pasemos ahora a analizar algunos casos concretos.

1) Si consideramos la familia

$$h(x, \rho) = \begin{cases} \rho & 0 \leq x \leq \rho \\ \frac{\rho^3}{x^2} & \rho < x < \infty \end{cases} \quad \rho \in (0, \infty)$$

obtuvimos en el apartado anterior |3.2| que los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a ella eran las rectas definidas por:

$$g(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4(1-\alpha)} x & \frac{3}{4} \leq \alpha \leq 1 \\ \left(\frac{4\alpha}{3}\right)^3 x & 0 \leq \alpha < 3/4 \end{cases}$$

También se vió allí que:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = 4\rho, \quad \text{por tanto } j(\rho) = 4\rho \quad \text{y } m(\alpha) = 1$$

Al ser  $S(r) = 2r^2$  se tiene que:

$$\frac{|j(\rho)|}{S(r)} = \frac{4\rho}{2r^2} \leq \frac{c}{r} \quad \text{si } 0 < \rho \leq r$$

y

$$\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha = \int_0^1 d\alpha < \infty$$

Por tanto aplicando el teorema 3.3.1 el operador maximal, asociado a la clase de diferenciación  $B$ , es de tipo  $(p,p)$ ,  $1 < p < \infty$ .

2) Si estudiamos la base de diferenciación asociada a la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  con

$$h(x,\rho) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \rho \\ \frac{\rho^3}{x^2} & \rho < x < \infty \end{cases} \quad \rho \in (0,\infty)$$

se tiene, según los resultados del apartado |3.2|, que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  son las rectas

$$g(x,\alpha) = \alpha^3 x$$

También allí se encontró que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = 3\rho; \quad \text{por tanto } m(\alpha) = 1 \quad j(\rho) = 3\rho$$

y  $S(r) = |B_r(0)| = \frac{3}{2} r^2$ .

Por tanto se tiene:

$$\frac{|j(\rho)|}{S(r)} = \frac{3\rho}{3/2 r^2} \leq \frac{c}{r} \quad \text{si} \quad 0 < \rho \leq r$$

y:

$$\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha = \int_0^1 d\alpha < \infty$$

Aplicando el teorema 3.3.1 el operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $B$ , es de tipo  $(p,p)$   $1 < p < \infty$  y por tanto  $B$  diferencia  $L^p(\mathbb{R}^2)$   $1 < p < \infty$ .

3) Analizando la base de diferenciación  $B$ , asociada a la familia  $h(x,\rho)$ ,  $\rho \in (0,\infty)$  definida por:

$$h(x,\rho) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \rho \\ \frac{4}{x^2} & \rho < x < \infty \end{cases} \quad \rho \in (0,\infty)$$

y teniendo en cuenta los resultados obtenidos para esta familia de curvas en el apartado |3.2|, a saber:

Los rayos polares  $g(x,\alpha)$  son las curvas "altamente monótonas"  $g(x,\alpha) = \alpha^4 x^2$ .

El jacobiano de la transformación verifica

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = 4\rho^2; \quad \text{por tanto} \quad j(\rho) = 4\rho^2 \quad m(\alpha) = 1$$

$$S(r) = |B_r(0)| = \frac{4}{3} r^3.$$

Entonces se verifica:

$$\frac{|j(\rho)|}{S(r)} = \frac{4\rho^2}{4/3 r^3} \leq \frac{c}{r} \quad \text{si} \quad 0 < \rho \leq r$$

$$\int_0^1 |m(\alpha)| d\alpha = \int_0^1 d\alpha < \infty$$

Estamos por tanto en condiciones de aplicar el teorema 3.3.2, y se tiene entonces que el operador maximal  $M$ , asociado a la base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , es de tipo  $(p,p)$   $2 \leq p \leq \infty$ .

En general el problema es técnico, consistiendo fundamentalmente la dificultad en encontrar las ecuaciones de transformación a las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  y en consecuencia en determinar las funciones  $j(\rho)$  y  $m(\alpha)$ .

CAPITULO IV

RECUPERACION DE LAS "CIRCUNFERENCIAS"  
A PARTIR DE LOS RAYOS POLARES.

En este capítulo estudiamos el problema inverso, es decir dados los rayos polares  $g(x,\alpha)$  encontrar las "circunferencias"  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , de tal manera que los rayos polares  $g(x,\alpha)$  sean los asociados a la familia de curvas  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ .

En el primer apartado estudiamos el problema suponiendo condiciones suficientes de regularidad a los rayos polares  $g(x,\alpha)$  obteniendo el resultado general 4.1, pasando posteriormente a analizar determinados casos particulares.

En el segundo apartado analizamos el problema suprimiendo ciertas condiciones de regularidad para la familia de rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

En el tercero vemos como se puede utilizar esta técnica para obtener propiedades de acotación para el operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación.



4.1.: Planteamiento del problema.

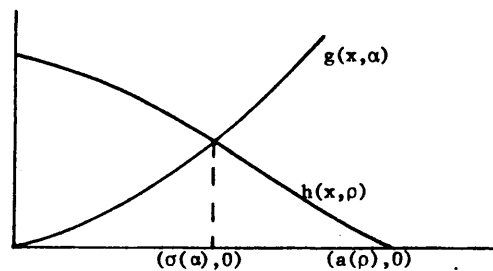
Estudiamos ahora la recuperación de las "circunferencias"  $(C_\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , conociendo los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia  $(C_\rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , que ahora nos es desconocida.

En este apartado consideraremos que los rayos polares  $g(x, \alpha)$  son suficientemente regulares, y por comodidad técnica suponemos que barren el primer cuadrante, o parte de él.

Daremos primeramente, una condición general para el cálculo de la familia  $C_\rho \equiv h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , estudiando posteriormente algunos casos particulares de rayos polares  $g(x, \alpha)$ .

Sea la familia de rayos polares  $g(x, \alpha)$ , de clase  $C^2$ .

Para el cálculo de la familia de "circunferencias"  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$ , utilizaremos la condición de que  $g(x, \alpha)$  sean los rayos polares asociados a esta familia obteniendo, (ver fig. 35):



(fig. 35)

$$\int_0^{\sigma(\alpha)} g(x, \alpha) dx + \int_{\sigma(\alpha)}^{a(\rho)} h(x, \rho) dx = \alpha \int_0^{a(\rho)} h(x, \rho) dx \quad |4.1.1|$$

donde  $a(\rho)$  puede ser finito o infinito, al no conocer a priori la naturaleza de las curvas  $h(x,\rho)$ .

Para eliminar la dependencia de  $h(x,\rho)$  en [4.1.1] derivemos con respecto a  $\alpha$ , con lo cual se llega a:

$$\begin{aligned} g(\sigma(\alpha),\alpha)\sigma'(\alpha) + \int_0^{\sigma(\alpha)} g_{\alpha}(x,\alpha)dx - h(\sigma(\alpha),\rho)\sigma'(\alpha) = \\ = \int_0^{a(\rho)} h(x,\rho)dx \end{aligned} \quad |4.1.2|$$

y observando la fig. 35 se tiene que:

$g(\sigma(\alpha),\alpha) = h(\sigma(\alpha),\rho)$  y por tanto [4.1.2] se convierte en:

$$\int_0^{\sigma(\alpha)} g_{\alpha}(x,\alpha)dx = \int_0^{a(\rho)} h(x,\rho)dx \quad |4.1.3|$$

Derivando [4.1.3] respecto de  $\alpha$  obtenemos:

$$F(\sigma,\sigma',\alpha) = g_{\alpha}(\sigma,\alpha)\sigma' + \int_0^{\sigma} g_{\alpha\alpha}(x,\alpha)dx = 0 \quad |4.1.4|$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Resultado 4.1.:

Si la ecuación [4.1.4] tiene solución única para  $\alpha \in [0,1]$  y siendo  $\sigma(\alpha)$  dicha solución existe la función  $\alpha(\sigma)$  entonces las circunferencias del sistema vienen dadas por:

$$h(x,\rho) = g(x,\alpha(x)) \quad |4.1.5|$$

donde el parámetro  $\rho$  aparece de la constante de integración en la resolución de [4.1.4].

La familia de curvas  $h(x, \rho)$ , así obtenida, delimitará con los ejes conjuntos acotados si existe  $a(\rho)$  finito tal que  $h(a(\rho), \rho) = 0$ . En caso contrario la familia de curvas  $h(x, \rho)$  delimitará con los ejes coordenados conjuntos no acotados.

En el caso de que la ecuación |4.1.4| se reduzca a:

$$\sigma' = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \sigma = \text{cte}$$

En consecuencia no se puede recuperar, por medio del resultado 4.1, las circunferencias  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , al no existir la función inversa  $\alpha(\sigma)$ .

Sin embargo situaciones como la anterior, (en cierto modo anómalas), tendrán aplicaciones interesantes como veremos en el apartado |4.3|.

Pasaremos ahora al estudio de algunos casos particulares:

1) Estudio de las "circunferencias"  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  asociadas a la familia de rayos polares

$$g(x, \alpha) = C(\alpha)\ell(x)$$

con  $C(\alpha)$  y  $\ell(x)$  de clase  $C^2$  y  $C'(\alpha) \neq 0$ .

En este caso |4.1.4| se reduce a:

$$\ell(\sigma(\alpha))C'(\alpha)\sigma'(\alpha) + C''(\alpha) \int_0^{\sigma(\alpha)} \ell(x) dx = 0 \quad |4.1.6|$$

Dividiendo por  $C'(\alpha)$  |4.1.6| es equivalente a:

$$\frac{\ell(\sigma) d\sigma}{\int_0^{\sigma} \ell(x) dx} = - \frac{C''(\alpha)}{C'(\alpha)} d\alpha \quad |4.1.7|$$

y formalmente si  $L(x)$  es una función tal que  $L'(x) = \ell(x)$  se tiene:

$$\ell n L(\sigma) = -\ell n C'(\alpha) + \rho \quad |4.1.8|$$

y supuesto  $\rho > 0$  en |4.1.8| se llega a:

$$L(\sigma) = \frac{\rho}{C'(\alpha)} \quad |4.1.9|$$

y si existe la función inversa  $L^{-1}(\cdot)$  lo que es equivalente a que  $L'(\sigma) = \ell(\sigma) \neq 0$  se obtiene que:

$$\sigma = L^{-1}\left(\frac{\rho}{C'(\alpha)}\right) \quad |4.1.10|$$

obteniendo entonces la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  según la expresión:

$$h(x, \rho) = g(x, \alpha(x, \rho))$$

donde  $\alpha(x, \rho)$  se calcula a partir de |4.1.10|.

Así si  $\ell(x) = x^n$  se tiene:

$L(x) = x^{n+1}$  y por tanto |4.1.9| se convierte en

$$\sigma^{n+1} = \frac{\rho}{C'(\alpha)} \quad |4.1.11|$$

Por tanto

$$\sigma = \left(\frac{\rho}{C'(\alpha)}\right)^{1/n+1} \quad \text{y} \quad C'(\alpha) = \frac{\rho}{\sigma^{n+1}} \quad |4.1.12|$$

Si  $C''(\alpha) \neq 0$  |4.1.12| determina la función  $\alpha = \alpha(\sigma, \rho)$  teniendo entonces que:

$$h(x, \rho) = C(\alpha(x, \rho))x^n \quad |4.1.13|$$

En el caso concreto de la familia de rayos polares  $g(x, \alpha) = e^{-\alpha} x^n$  es decir

$$C(\alpha) = e^{-\alpha}$$

$$l(x) = x^n$$

al ser  $C'(\alpha) = C''(\alpha) = -e^{-\alpha}$  la expresión |4.1.12| que nos permite el cálculo de  $\sigma$  será:

$$\sigma = (\rho e^{-\alpha})^{1/n+1} \quad |4.1.14|$$

Por tanto se tiene

$$h(x, \rho) = g(x, \alpha(x, \rho)) = x^n e^{-\alpha} = e^{-\alpha} (\rho e^{-\alpha})^{n/n+1}$$

por tanto

$$h(x, \rho) = \rho^{n/n+1} e^{-\alpha 1/n+1}$$

y teniendo en cuenta |4.1.14| se obtiene

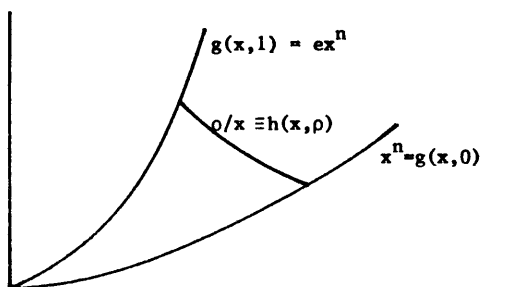
$$h(x, \rho) = \frac{\rho}{x} \quad \rho \in (0, \infty)$$

delimitado por los rayos polares

$$g(x, 0) = x^n$$

$$g(x, 1) = e^{-\alpha} x^n$$

(ver fig. 36).



(fig. 36)

Si consideramos ahora la familia de rayos polares  $g(x, \alpha) = x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$  caso que corresponde a:

$$c(\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$$

$$\ell(x) = x$$

por tanto según |4.1.12| se tiene que

$$\sigma = \left( \frac{\rho}{\frac{\pi}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \alpha)} \right)^{1/2} = \rho' \cos \frac{\pi}{2} \alpha \quad |4.1.15|$$

con  $\rho' = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}}$

En consecuencia según |4.1.5|

$$h(x, \rho') = \rho' \cos \frac{\pi}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha = \rho' \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \alpha = \rho' \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} \alpha}$$

y utilizando |4.1.15| se llega a:

$$h(x, \rho') = \rho' \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\rho'}\right)^2} = \sqrt{\rho'^2 - x^2}$$

para  $\rho' \in (0, \infty)$ , resultado que coincide con el primer ejemplo tratado en |2.1.2|.

2) Estudio de las "circunferencias" asociadas a la familia de rayos polares

$$g(x, \alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} x$$

Podemos suponer  $\alpha \in (0, 1)$  ya que los casos  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  corresponden a los ejes coordenados.

Para el cálculo de la circunferencia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  aplicamos la ecuación |4.1.4| obteniendo:

$$\frac{\sigma \sigma'}{(1-\alpha)^2} + \int_0^\sigma \frac{2x}{(1-\alpha)^3} dx = 0 \quad |4.1.16|$$

que integrando y simplificando se convierte en:

$$\alpha' + \frac{\sigma}{1-\alpha} = 0 \quad |4.1.17|$$

Resolviendo |4.1.17| se llega a

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho(1-\alpha) \\ \alpha &= 1 - \frac{\sigma}{\rho} \end{aligned} \quad |4.1.18|$$

y sustituyendo en la ecuación |4.1.5| para el cálculo de las circunferencias  $h(x,\rho)$ , utilizando las ecuaciones |4.1.18| obtenemos:

$$h(x,\rho) = \frac{\alpha}{1-\alpha} x = \frac{x}{1-\alpha} \quad \alpha = \rho(1 - \frac{x}{\rho}) = \rho - x;$$

$\rho \in (0, \infty)$ , resultando que concuerda con el tercer ejemplo estudiado en el apartado |2.1.2|.

Bajo ciertas condiciones para la familia de rayos polares la técnica para encontrar la familia de circunferencias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  es general. La dificultad para obtener explícitamente dichas "circunferencias" depende de la naturaleza de la familia de rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

#### 4.2.: Estudio general del problema.

Tratamos ahora de recuperar las circunferencias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  de un sistema, conociendo los rayos polares  $g(x,\alpha)$  asociados a la familia  $h(x,\rho)$ . Supondremos que no se verifican las hipótesis de regularidad de la familia de rayos polares  $g(x,\alpha)$ .

Así si  $g(x,\alpha)$  no es de clase  $C^2$ , para un valor  $\alpha = \alpha_0$ , se pueden seguir las técnicas del apartado 4.1. si  $\alpha \neq \alpha_0$  y usar

la continuidad de la función  $g(x, \alpha)$  en  $\alpha = \alpha_0$  para recuperar las circunferencias  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  como lo muestra el ejemplo siguiente.

1) Estudio de la familia de "circunferencias" asociadas a los rayos polares

$$g(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{3(1-\alpha)} x & 2/3 < \alpha \leq 1 \\ \frac{3/4 \alpha}{1 - 3/4 \alpha} x & 0 \leq \alpha \leq 2/3 \end{cases}$$

Trivialmente se observa que la función  $g(x, \cdot)$  no es de clase  $C^2$  si  $\alpha = 2/3$ , efectuamos entonces los cálculos del apartado [4.1] para  $2/3 < \alpha < 1$  y  $0 < \alpha < 2/3$  obteniendo:

a)  $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

En este caso aplicando [4.1.4] se obtiene:

$$\sigma = \rho'(1-\alpha) \quad [4.2.1]$$

y por tanto la familia de circunferencias será

$$h(x, \rho') = g(x, \alpha(x, \rho')) = \frac{x}{3(1-\alpha)} = \frac{\rho'}{3} = C$$

b)  $0 < \alpha < 2/3$

En este caso [4.1.4] se reduce a:

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{\rho}{3/4} (1 - 3/4 \alpha)^2 \quad \text{y por tanto}$$

$$\sigma = \rho'(1 - \frac{3}{4} \alpha) \quad \text{con } \rho' = \sqrt{\frac{8\rho}{3}} \quad [4.2.2]$$

Teniendo en cuenta [4.2.2] la expresión de  $h(x, \rho')$  es:

$$h(x, \rho') = \frac{3/4 \alpha}{1 - 3/4 \alpha} \quad x = \rho' \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) = \rho' - x \quad |4.2.3|$$

Al ser  $h(x, \rho')$  una función continua, si  $\alpha = \frac{2}{3}$  según |4.2.2| la abscisa correspondiente a dicho valor es:

$$x = \rho' \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \rho'/2$$

Utilizando la continuidad de la función  $h(x, \rho')$ ,  $\forall \rho' \in (0, \infty)$ , en el punto  $(\rho'/2, \rho')$  se obtiene para el valor de  $C$  del apartado a) con  $C = h(\rho'/2, \rho') = \rho' - \rho'/2 = \rho'/2$ .

Se tiene entonces que la familia de circunferencias  $h(x, \rho)$  es:

$$h(x, \rho) = \begin{cases} \rho/2 & 0 \leq x \leq \rho/2 \\ \rho - x & \rho/2 < x \leq \rho \end{cases} \quad \rho \in (0, \infty)$$

#### 4.3.: Aplicaciones.

En los capítulos 2 y 3 se han obtenido anotaciones del operador maximal, para bases de diferenciación  $B$  asociadas a la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  utilizando fundamentalmente dos hechos:

a) Los rayos polares  $g(x, \alpha)$  eran curvas altamente monótonas, curvas bien curvadas o rectas.

b) El jacobiano de la transformación a coordenadas polares verifica:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = j(\rho) m(\alpha)$$

Esto nos sugiere, en el contexto de este capítulo, un método de trabajo para acotaciones del operador maximal asociado a ciertas bases de diferenciación  $\mathcal{B}$  que es el siguiente:

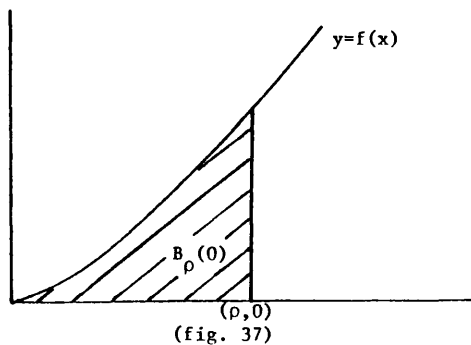
Escojamos rayos polares  $g(x,\alpha)$   $\alpha \in [0,1]$  que sean curvas al<sub>tamente</sub> monótonas, bien curvadas o rectas.

Si se calculan las circunferencias  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$  asociadas a la familia de rayos polares  $g(x,\alpha)$  y se define la base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , asociada a la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ , con el jacobiano de la transformación  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)} = j(\rho) m(\alpha)$  estaremos en condiciones de aplicar los teoremas 2.5.1 , 2.5.2 , 2.5.3 , 3.3.1 , 3.3.2 , 3.3.3 según la naturaleza de los rayos polares  $g(x,\alpha)$  y de la familia  $h(x,\rho)$   $\rho \in (0,\infty)$ .

Así por ejemplo dada una curva  $y = f(x)$  con  $f(0) = 0$  consideramos la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  invariante por traslaciones con

$$\mathcal{B}(0) = \{B_\rho(0)\}_{\rho \in \mathbb{R}^+}$$

(ver fig. 37).



Los rayos polares asociados a la familia  $(C_\rho)_{\rho \in \mathbb{R}^+}$ , siendo  $C_\rho$  la frontera del conjunto  $B_\rho(0)$ , son de la forma:

$$g(x, \alpha) = \alpha f(x)$$

ya que  $\forall \rho$  se tiene:

$$\int_0^\rho \alpha f(x) = \alpha \int_0^\rho f(x) = \alpha |B_\rho(0)|$$

Y utilizando el cambio a las coordenadas polares definido por la transformación

$$\begin{aligned} y &= \alpha f(x) \\ x &= \rho \end{aligned} \quad |4.3.1|$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x &= \rho \\ y &= \alpha f(\rho) \end{aligned} \quad |4.3.2|$$

se obtiene que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha f'(\rho) \\ 0 & f(\rho) \end{vmatrix} = f(\rho)$$

Si  $f(x) = mx$  se tiene que

$$|B_\rho(0)| = \int_0^\rho mx \, dx = m \frac{\rho^2}{2}$$

y por tanto:

$$\text{Como } \frac{f(\rho)}{|B_\rho(0)|} = \frac{m\rho}{m \frac{\rho^2}{2}} = \frac{2}{\rho} \leq \frac{c}{r} \quad \text{si } 0 < \rho < r \text{ y}$$

$$\int_0^\alpha d\alpha < \infty$$

aplicando el teorema 3.3.1 se tiene que el operador maximal asociado a la base  $B$  es de tipo  $(p, p)$   $1 < p < \infty$ .

Si  $f(x)$  verifica:

$f(0) = 0$ ;  $f'(0) = 0$  y  $f''(x) > 0$  y no decreciente en  $x > 0$  y por tanto  $y = f(x)$  es una curva altamente monótona.

Y si se tiene que

$$\frac{f(\rho)}{|B_r(0)|} \leq \frac{c}{r} \quad \forall \rho \quad 0 < \rho \leq r$$

entonces aplicando el teorema 3.3.2 resulta que el operador maximal, asociado a la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  es de tipo  $(p,p)$   $2 \leq p \leq \infty$ .

La técnica es general consistiendo la dificultad en encontrar de forma explícita la transformación a coordenadas polares y por tanto calcular  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\alpha)}$ .

## APENDICE

Exponemos finalmente dos problemas abiertos, en los cuales estamos actualmente trabajando, indicando algunas técnicas que podrían conducir a su solución.

El primero de ellos concierne a la naturaleza de los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia  $h(x, \rho)$ ;  $\rho \in (0, \infty)$  teniendo información sobre la función  $S(\rho) = \int_0^{a(\rho)} h(x, \rho) dx$ , con  $a(\rho)$  finito o infinito.

El segundo trata de la posible generalización a más dimensiones de las coordenadas polares en  $R^2$  introducidas en el capítulo primero de esta memoria. La dificultad en  $R^n$ , con  $n > 2$  estriba en que se "pierde" el aspecto geométrico que nos da pie a la introducción de las coordenadas polares en  $R^2$ .

### 1) Naturaleza de los rayos polares:

La técnica general para el cálculo de los rayos polares  $g(x, \alpha)$  asociados a la familia de curvas  $h(x, \rho)$   $x > 0$   $\rho \in (0, \infty)$ , que supondremos en el primer cuadrante y suficientemente regular, es la solución de las ecuaciones |1.1.4| ó |1.1.6| que permiten calcular  $\sigma(\rho)$  y con ello los rayos polares  $g(x, \alpha)$ .

La determinación explícita de la función  $\sigma(\rho)$  es difícil, como lo muestran algunos casos tratados en esta memoria.

De ahí que fuese conveniente el tener otra herramienta de cálculo, que nos permita determinar la naturaleza de los rayos polares.

Surge así, de forma natural, la siguiente pregunta:

¿Existirá relación entre los rayos polares  $g(x, \alpha)$ , asociados a la familia  $h(x, \rho)$   $\rho \in (0, \infty)$  y  $S(\rho) = \int_0^{a(\rho)} h(x, \rho) dx$ ?

Si la respuesta fuese afirmativa el conocimiento de la función  $S(\rho)$  nos permitiría saber el "aspecto" de los rayos polares.

Así en el primer ejemplo tratado en el apartado |2.1| se tiene

$$S(\rho) = C \rho^2 \quad \text{y} \quad g(x, \alpha) = C(\alpha)x$$

También en el mismo apartado |2.1|, en el ejemplo tercero obteníamos que si

$$S(\rho) = C \rho^{m+1} \quad \text{entonces} \quad g(x, \alpha) = C'(\alpha)x^m$$

Si  $S(\rho)$  determinase de alguna forma "unívocamente" los rayos polares, la función  $C(\alpha)$  variaría únicamente con la familia  $h(x, \rho)$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ .

## 2) Generalización del problema a n dimensiones, $n > 2$ .

Efectuaremos un planteamiento del problema en  $R^3$ .

Se considera una familia uniparamétrica de superficies, cerradas, conteniendo al origen:

$$F(x, y, z, \rho) = 0 \quad \rho \in (0, \infty)$$

de tal forma que cada punto de  $R^3$  (o de un cierto subconjunto medible de  $R^3$ ) esté en sólo una de las superficies de la familia.

Se trata de hallar los rayos polares  $\gamma(t)$

$$\begin{aligned} \gamma : R &\longrightarrow R^3 \\ t &\longrightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{aligned}$$

de tal forma que todo punto  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  (o a un cierto subconjunto medible de  $\mathbb{R}^3$ ) quede determinado por  $(\rho, \bar{y})$  donde

$\rho$ : Es el parámetro de la familia de superficies  $F(x, y, z, \rho) = 0$  donde se encuentre el  $x$ , e

$\bar{y}$ : Es el punto de una superficie de la familia, por ejemplo

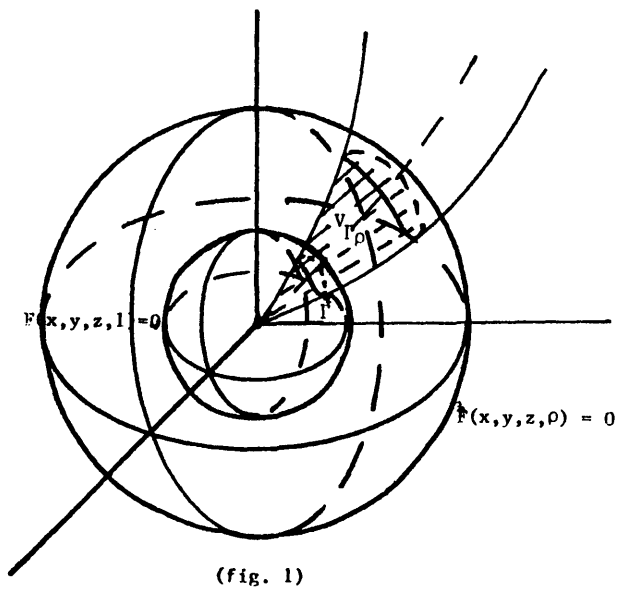
$F(x, y, z, 1) = 0$ , llamada "superficie unidad" que está en el mismo rayo polar que  $x$ .

Una posible forma de abordar el problema del cálculo de los rayos polares, asociados a la familia de superficies  $F(x, y, z, \rho) = 0$   $\rho \in (0, \infty)$ , es la siguiente:

Los rayos polares, asociados a la familia de superficies  $F(x, y, z, \rho) = 0$   $\rho \in (0, \infty)$  serán las familias de curvas, pasando por el origen, tales que al considerar cualquier curva cerrada  $\Gamma$  en una superficie de la familia  $F(x, y, z, \rho) = 0$   $\rho \in (0, \infty)$ , (por comodidad supondremos que la superficie corresponde al valor  $\rho = 1$  del parámetro), el "cuerno" formado por los rayos polares, que pasan por los puntos de  $\Gamma \subset F(x, y, z, 1) = 0$ , determina en cada superficie  $F(x, y, z, \rho) = 0$  un volumen que denotamos  $V_{\Gamma\rho}$  y siendo  $\dot{V}(\rho)$  el volumen encerrado por la superficie  $F(x, y, z, \rho) = 0$  se verifique:

$$\frac{V_{\Gamma\rho}}{V(\rho)} = \text{cte} \quad \forall \rho \in (0, \infty)$$

(ver fig. 1).



Así, si la familia de superficies viene dada de la forma siguiente

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^4} + \frac{z^2}{\rho^6} = 0 \quad \rho \in (0, \infty)$$

que expresada en forma paramétrica tiene la expresión

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \cos \beta & \rho &\in (0, \infty) \\ y &= \rho^2 \cos \alpha \sin \beta & \alpha &\in [0, \pi) \\ z &= \rho^3 \sin \alpha & \beta &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Es claro que, en este caso, los rayos polares tienen la expresión:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos \alpha \cos \beta & \lambda &\in (0, \infty) \\ y &= \lambda^2 \cos \alpha \sin \beta \\ z &= \lambda^3 \sin \alpha & \alpha, \beta &\text{ fijos} \end{aligned}$$

ya que definiendo las transformaciones  $\{T_\mu\}_{\mu \in (0, \infty)}$   $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma:

$$T_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 y \\ \mu^3 z \end{pmatrix}$$

que corresponde a la matriz  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  estudiada por Guzmán [4], las curvas "rayos polares" son invariantes por las transformaciones  $\{T_\mu\}_{\mu \in (0, \infty)}$ .

Asímismo si el volumen del cuerno  $C$ , que delimita una curva  $\Gamma \subset F(x, y, z, 1) = 0$ , es  $H$ , se tiene que  $T_\mu(C)$  tiene un volumen  $\mu^6 H$ .

Por otra parte  $T_\mu$  transforma la superficie  $F(x, y, z, 1) = 0$  de volumen  $V(1)$  en la superficie  $F(x, y, z, \mu) = 0$  de volumen  $V(\mu) = \mu^6 V(1)$ .

Y denominando  $d = \frac{H}{V(1)}$  la relación entre el volumen del "cuerno" delimitado por  $\Gamma$  en la superficie  $F(x, y, z, 1) = 0$  y el volumen encerrado por la propia superficie  $F(x, y, z, 1) = 0$ , será cierto también que  $\forall \mu > 0$  la relación entre el volumen delimitado por  $T_\mu(C)$  y el encerrado por la superficie  $F(x, y, z, \mu) = 0$  es:

$$\frac{\mu^6 H}{\mu^6 V(1)} = \frac{H}{V(1)} = d$$

En el caso general de familias de superficies  $F(x, y, z, \rho) = 0$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ , parece natural la introducción de dos parámetros  $(\alpha, \beta)$ ,

introducidos de acuerdo a alguna relación geométrica, que nos relacionen "biunívocamente" los puntos  $\bar{y}$  de la "superficie unidad"  $F(x,y,z,1) = 0$ .

Caracterizando los rayos polares por condiciones geométricas, introduciendo los parámetros  $(\alpha, \beta)$  que nos definan biunívocamente la "superficie unidad"  $F(x,y,z,1) = 0$ , es claro que, bajo ciertas condiciones de la familia  $F(x,y,z,\rho) = 0$ , todo punto  $x$  de  $R^3$  (o de un cierto subconjunto medible de  $R^3$ ) barrido por la familia de superficies  $F(x,y,z,\rho) = 0$ ;  $\rho \in (0, \infty)$  se puede definir por las "coordenadas polares"  $(\rho, \alpha, \beta)$  de tal forma que:

$\rho$ : Es el valor del parámetro de la familia  $F(x,y,z,\rho) = 0$  donde se encuentra el punto  $x$ .

$(\alpha, \beta)$ : Los valores que nos definen el punto  $\bar{y}$ , de la "superficie unidad"  $F(x,y,z,1) = 0$ , que está en el mismo rayo polar que el punto  $x$ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] CALDERON, A.P. and ZYGMUND, A. [1952]. "On the existence of certain singular integrals". (Acta Math. 88 (1952)).
- [2] CALDERON, A.P. and ZYGMUND, A. [1956]. "On singular integrals" (Amer. J. Math. 18 (1956)).
- [3] FABES, E.B. and RIVIERE, N.B. [1966]. "Singular integrals with mixed homogeneity". (Studia Math. T. XVII (1966))
- [4] de GUZMAN, M. [1968]. "Singular integrals operators with generalized homogeneity" (Thesis, University of Chicago (1968)).
- [5] de GUZMAN, M. [1975]. "Differentiation of integrals in  $R^n$ " (Springer-Verlag - Berlin (1975)).
- [6] de GUZMAN, M. [1981]. "Real variable methods in Fourier Analysis". (North-Holland - Amsterdam (1981)).
- [7] NAGEL, A., RIVIERE, N.M. and WAINGER, S. [1974]. "On Hilbert transforms along curves I". (Bull of the Amer. Math. Soc. 80 (1974)).
- [8] NAGEL, A. - RIVIERE, N.M. and WAINGER, S. [1976.a]. "On Hilbert transforms along curves II". (Amer. J. of Math. 90 (1976)).
- [9] NAGEL, A., RIVIERE, N.M. and WAINGER, S. [1976.b]. "A maximal function associated to the curve  $(t, t^2)$ ". (Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1976)).
- [10] HARDY, G.H. and LITTLEWOOD, J.E. [1930]. "A maximal theorem with function-theoretic applications". (Acta Math. 54 (1930)).

- [11] NESTLERODE, W.C. [1981]. "Singular integrals and maximal functions associated with highly monotone curves". *Aparecerá*.
- [12] STEIN, E.M. [1970]. "Singular integrals and differentiability properties of functions". (Princeton University Press. Princeton. New Jersey (1970)).
- [13] STEIN, E.M. [1976.a]. "Maximal functions: Spherical means". (Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1976)).
- [14] STEIN, E.M. [1976.b]. "Maximal functions: Homogeneous curves". (Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1976)).
- [15] STEIN, E.M. and WAINGER, S. [1970]. "The estimation of an integral arising in multiplier transformations". (Studia Math. 35 (1970)).
- [16] STEIN, E.M. and WAINGER, S. [1976]. "Maximal functions associated to smooth curves". (Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1976)).
- [17] STEIN, E.M. and WAINGER, S. [1978]. "Problems in Harmonic analysis related to curvature". (Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978)).
- [18] STEIN, E.M. and WEISS, G. [1971], "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces". (Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1971)).
- [19] WALIAS, M. [1978]. "Integrales singulares asociadas a familias de conjuntos convexos". (Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid (1978)).
- [20] ZYGMUND, A. [1968]. "Trigonometric Series". Vol. I and II (Cambridge University Press (1968)).

