

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



**SISTEMAS DE COLAS CON REINTENTOS:
ANÁLISIS DE LOS EVENTOS BLOQUEADOS Y
EXITOSOS.**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Julia Amador Pacheco

Bajo la dirección del doctor

Jesús Artalejo Rodríguez

Madrid, 2009

- ISBN: 978-84-692-6009-8

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



SISTEMAS DE COLAS CON REINTENTOS:
ANÁLISIS DE LOS EVENTOS
BLOQUEADOS Y EXITOSOS

Tesis Doctoral
Julia Amador Pacheco

Madrid, Noviembre de 2008

Jesús Artalejo Rodríguez, Profesor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa I de la Universidad Complutense de Madrid

CERTIFICA:

Que la presente memoria titulada

**SISTEMAS DE COLAS CON REINTENTOS: ANÁLISIS DE
LOS EVENTOS BLOQUEADOS Y EXITOSOS**

ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. Julia Amador Pacheco, Licenciada en C.C. Matemáticas, y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Madrid a 10 de Noviembre de 2008.

Fdo. Jesús Artalejo Rodríguez

Agradecimientos

Quiero expresar en primer lugar mi más profundo y sincero agradecimiento a la persona que ha hecho posible este trabajo, mi director de tesis Jesús Artaejo. Mi gratitud por haberse atrevido a dirigirme, labor que ha realizado de manera inmejorable, por su paciencia, sus comentarios y explicaciones enriquecedoras y por tantas otras cosas más que serían difícil de enumerar.

Es obligado para mí dedicar unas palabras de agradecimiento a mi compañera y amiga M^a Jesús, que me ha prestado su ayuda científica, técnica y psicológica. Siempre ha estado conmigo, escuchándome, incluso en los momentos difíciles.

También quiero agradecer a mi marido Goyo y a mis hijos, Beatriz y Nacho, su apoyo incondicional, su confianza en mí y su comprensión por el tiempo que les he restado de dedicación.

Gracias a todos ellos y a los demás amigos y familiares que han estado pendientes de mí y me han animado. Todos han contribuido en alguna medida a la culminación de esta obra.

Por último mi agradecimiento al apoyo institucional por parte del Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto MTM2005-01248.

Índice general

Prólogo	1
Índice de figuras	5
Índice de tablas	7
Capítulo 1. Introducción	9
1.1 Breve descripción de los modelos de colas con reintentos	9
1.2 El sistema $M/M/c$ con reintentos	12
1.2.1 Distribución límite del estado del sistema	15
1.2.2 Periodo de ocupación	17
1.2.3 Tiempo de espera	21
1.3 El sistema $M/G/1$ con reintentos	24
1.3.1 Distribución límite del estado del sistema	24
1.3.2 Periodo de ocupación	25
1.3.3 Tiempo de espera	29
Capítulo 2. Eventos exitosos y bloqueados en el sistema $M/M/c$ con reintentos	35
2.1 Definición de los descriptores en estudio	36
2.2 Distribución de los descriptores: Método de la función	

generatriz	38
2.2.1 Número de reintentos exitosos	39
2.2.2 Número de reintentos bloqueados	42
2.2.3 Número de llegadas exitosas	44
2.2.4 Correlación entre los descriptores	46
2.3 Distribución de los descriptores: Método directo	49
2.3.1 Número de reintentos exitosos	50
2.3.2 Número de reintentos bloqueados	51
2.3.3 Número de llegadas exitosas	54
2.4 Resultados numéricos	56
Apéndice 2.A	67
Capítulo 3. Eventos exitosos y bloqueados en el sistema $M/G/1$ con reintentos	69
3.1 Número de reintentos exitosos	71
3.2 Número de llegadas exitosas	73
3.3 Número de reintentos bloqueados	76
3.3.1 Tiempos de servicio PH	77
3.3.2 Aproximación basada en la reubicación de llegadas ...	81
3.4 Resultados numéricos	87
Capítulo 4. Análisis transitorio de los eventos exitosos y bloqueados	99
4.1 El sistema $M/M/c$ con reintentos	100

4.2 El sistema $M/PH/1$ con reintentos	108
4.3 Resultados numéricos	111
Bibliografía	123
Índice de autores	129
Índice de materias	131

Prólogo

Para el desarrollo de esta tesis nos centramos en los sistemas de colas con reintentos, caracterizados por el hecho de que los clientes que llegan al sistema y no pueden ser atendidos abandonan el área de servicio para, transcurrido un tiempo, volver a intentarlo. Este grupo de clientes que reintentan obtener servicio constituyen la órbita.

El objetivo es profundizar en los sistemas $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos estudiando nuevos descriptores como son el número de eventos exitosos y bloqueados. El interés de estos descriptores radica en la idea de aumentar el conocimiento sobre el grupo de clientes de la órbita. En la mayoría de las aplicaciones es imposible discernir si un cliente que obtiene servicio ha llegado al sistema por primera vez o proviene de la órbita. Tampoco se conoce cuántos intentos repetidos hacen los clientes de la órbita hasta obtener servicio. La diferenciación entre eventos exitosos y bloqueados además proporciona información sobre la dificultad de acceso al servicio solicitado.

Una característica de los sistemas de colas con reintentos es la falta de homogeneidad en las estructuras matriciales que subyacen en las modelizaciones estocásticas. En consecuencia, salvo en algunos casos sencillos, es imposible encontrar soluciones explícitas o recursivas para las probabilidades límite del estado del sistema. Asimismo, en la mayoría de las situaciones es imposible encontrar la distribución para otros descriptores de interés, incluidos los que son objeto de estudio en esta tesis. Para solventar este problema emplearemos varias técnicas de aproximación y análisis numérico.

La estructura de esta tesis queda como sigue. En el Capítulo 1 hacemos una breve descripción de los modelos de colas con reintentos y recogemos resultados correspondientes a la distribución límite del estado del sistema así como a descriptores relacionados con el periodo de ocupación y el tiempo de espera en los modelos $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos. Entre los diferentes métodos de aproximación para encontrar las distribuciones de estos descriptores, nos centramos en los resultados obtenidos mediante el procedimiento más natural y tradicional consistente en truncar la capacidad de la órbita por una cantidad ficticia finita.

En el Capítulo 2 definimos los descriptores de interés como el número de eventos exitosos y bloqueados durante un periodo de ocupación. Para estudiar su distribución en el modelo $M/M/c$ con reintentos usamos dos métodos: el método de la función generatriz y el método directo. En primer lugar obtenemos su función de masa y sus momentos mediante la consideración de las funciones generatrices para el modelo aproximado con capacidad finita de la órbita. Siguiendo esta aproximación tratamos la correlación entre los descriptores a través de su función generatriz conjunta. Con el fin de evitar la inversión numérica de las funciones generatrices, planteamos un método directo para la obtención computacional de la función de masa de estos descriptores, utilizando la aproximación por truncamiento finito de la órbita siempre que no sea posible obtener resultados para el modelo original.

El estudio de la distribución del número de eventos exitosos y bloqueados durante un periodo de ocupación en el sistema $M/G/1$ con reintentos se desarrolla en el Capítulo 3. Nos centramos en el análisis computacional de su función de masa mediante métodos directos. Para este modelo resulta especialmente complicado el estudio del número de reintentos bloqueados, ya que el número de clientes que llegan durante un servicio en curso va a influir sobre el número de reintentos que se producen durante dicho servicio. Proponemos dos aproximaciones diferentes para la obtención de su distribución. En la primera suponemos una distribución de tipo PH para los tiempos de servicio y en la segunda hacemos una reubicación de las llegadas producidas durante un servicio. En ambas asumimos una capacidad finita para la órbita. A través de ejemplos numéricos comparamos estas dos aproximaciones.

Por último, en el Capítulo 4 llevamos a cabo un análisis transitorio de estos descriptores. Puesto que el periodo de ocupación es una variable aleatoria que aumenta estocásticamente según crece el nivel de congestión del sistema,

parece razonable suponer, y así lo vamos a constatar, que la distribución de estos descriptores definidos bajo un periodo de ocupación es más dispersa según aumenta el nivel de congestión y sus momentos tienen magnitudes muy elevadas. Resulta por lo tanto interesante estudiar el comportamiento del número de eventos exitosos y bloqueados durante un intervalo de tiempo fijo. Inicialmente el objetivo era realizar el análisis transitorio de estos descriptores en los modelos $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos, pero resulta muy difícil, si no imposible, obtener la distribución de los descriptores en estado transitorio para el modelo $M/G/1$ con reintentos. Para solucionar este problema suponemos una distribución de tipo PH para los tiempos de servicio, realizando el análisis transitorio de los descriptores en el modelo $M/PH/1$ con reintentos.

Como problemas abiertos, una vez estudiados estos nuevos descriptores para los sistemas $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos, cabría plantearse su futuro estudio en otros sistemas con reintentos como los que se describen a continuación:

- **Población finita** [23, 33]. En los sistemas con los que hemos trabajado en la tesis los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson, donde la probabilidad de que ocurra una llegada en un intervalo de tiempo $(t, t + dt)$ es λdt ; es decir, la intensidad de llegada no depende del número de clientes presentes en el sistema en el instante t . Esto puede interpretarse como que las llegadas son generadas por un número muy grande de fuentes y cada una de estas fuentes genera raramente llegadas. Desde este punto de vista el proceso de Poisson puede verse como un proceso con un número infinito de fuentes de llegadas. Sin embargo, en algunas situaciones prácticas es necesario tener en cuenta el hecho de que la tasa de llegada disminuye a medida que aumenta el número de clientes en el sistema. Esto lo podemos hacer con la ayuda de modelos con un número finito de fuentes donde cada fuente individual genera su propio flujo de llegadas. Parece interesante abordar el estudio de nuestros descriptores en este caso, donde trabajaríamos con espacios de estados finitos, por lo que no tendríamos que recurrir a métodos aproximados para la obtención de la distribución de nuestros descriptores.

- **Sistemas de colas en tiempo discreto con demandas repetidas** [22, 24, 50, 57]. El motivo para investigar los sistemas de colas en tiempo discreto es que son más apropiados que sus homólogos en tiempo continuo para modelar sistemas de ordenadores y telecomunicaciones donde las unidades básicas son digitales como el tiempo de ciclo de una máquina, bits, paquetes, etc. En estos sistemas el tiempo se divide en intervalos de

igual longitud llamados slots y los diferentes eventos (llegadas, salidas, reintentos) ocurren en las fronteras del slot. Puesto que más de uno de estos eventos pueden ocurrir en el mismo slot, es necesario asignar un orden en caso de simultaneidad. La concurrencia de varios eventos causa colisiones y en este contexto surge la necesidad de introducir mecanismos de reintento.

- **Sistema *MAP/PH/1* con reintentos** [23, 42]. Este modelo es una generalización natural del sistema *M/PH/1* con reintentos donde, a diferencia de éste, se recoge la posible correlación entre las llegadas. Para ello se incorpora una componente más en el proceso que describe el sistema en un instante t . La nueva componente indica la fase del proceso de llegada en el instante t , siendo el número de fases finito. Las transiciones para esta componente pueden corresponder o no a un instante de llegada de un cliente. De una fase i se puede pasar a otra fase j bien porque ocurra una llegada o porque haya un cambio de fase sin ocurrir ninguna llegada. Sólo se permanece en la fase i a través de una llegada. Si no ocurre ninguna llegada la transición de una fase i debe ser a otra fase $j \neq i$.

Índice de figuras

Figura 1.1. Transiciones en la cola $M/M/c$ con reintentos	14
Figura 4.1. Características transitorias del descriptor R^s	114
Figura 4.2. Características transitorias del descriptor R^b	115
Figura 4.3. Características transitorias del descriptor A^s	115
Figura 4.4. El efecto de ρ	116
Figura 4.5. El efecto del estado inicial sobre los descriptores	118
Figura 4.6. Análisis transitorio de $E[N(t)]$ y $B(t)$	119
Figura 4.7. El efecto del estado inicial sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$	120
Figura 4.8. El efecto de la distribución de servicio sobre los descriptores	121
Figura 4.9. Esperanza de los cuatro descriptores	121
Figura 4.10. El efecto de la distribución de servicio sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$	122

Índice de tablas

Tabla 2.1. Características del descriptor R^s	57
Tabla 2.2. Características del descriptor R^b	58
Tabla 2.3. Características del descriptor A^s	59
Tabla 2.4. Estadísticos de la inversión numérica	60
Tabla 2.5. Cálculo de $P\{R^s = r\}$: Método directo versus inversión numérica	62
Tabla 2.6. Coeficiente de correlación $\rho(R^b, A^s)$	63
Tabla 2.7. Coeficiente de correlación $\rho(R^b, A^b)$	63
Tabla 2.8. Coeficiente de correlación $\rho(A^s, A^b)$	64
Tabla 2.9. Valor óptimo de μ	64
Tabla 3.1. La esperanza $E[R^s]$	89
Tabla 3.2. La esperanza $E[A^s]$	89
Tabla 3.3. La esperanza $E[R^b]$	90
Tabla 3.4. Otras características del descriptor R^s	93
Tabla 3.5. Otras características del descriptor A^s	94
Tabla 3.6. Otras características del descriptor R^b	95
Tabla 3.7. Comparativa de las aproximaciones de $E[R^b]$	96
Tabla 3.8. Comparativa de las aproximaciones de $F_{R^b}(r)$	96
Tabla 3.9. Valor óptimo de μ	97

Tabla 4.1. Nivel de truncamiento K en función de ρ y de μ	113
Tabla 4.2. Nivel de truncamiento K en función del estado inicial	114
Tabla 4.3. Nivel de truncamiento en función de la distribución de servicio	120

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo recogemos una visión general de los modelos de colas con reintentos, cuya descripción está dada en la Sección 1.1. Nos centramos en los sistemas $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos que tratamos en las Secciones 1.2 y 1.3, respectivamente. Los resultados de este capítulo se centran en los descriptores fundamentales estudiados previamente en la literatura. Hacemos énfasis en métodos algorítmicos y técnicas de aproximación para la resolución de problemas que no pueden tratarse analíticamente. Un análisis de esta naturaleza también es la base para el estudio de los nuevos descriptores que constituyen el objeto de la tesis.

1.1 Breve descripción de los modelos de colas con reintentos

En la teoría clásica de colas, cuando un cliente llega al sistema y no puede obtener servicio de forma inmediata, generalmente se supone que o bien abandona definitivamente el sistema o se une a una línea de espera, en cuyo caso será servido de acuerdo a una disciplina especificada para la cola. En ocasiones también se supone la posibilidad de clientes impacientes que abandonan la línea de espera. Sin embargo, en situaciones reales, a veces los clientes que abandonan el sistema no lo hacen de manera definitiva sino que, transcurrido un tiempo aleatorio, vuelven al sistema e intentan de nuevo

obtener servicio. Este hecho caracteriza a los modelos de colas con reintentos. Falin y Templeton [33] hacen hincapié en que los modelos clásicos de colas no tienen en cuenta la existencia de los reintentos y por lo tanto no pueden aplicarse para resolver un número importante de problemas.

Los primeros apuntes sobre sistemas de colas con reintentos fueron posiblemente los recogidos en Kosten [39] en 1947. Sin embargo, se considera como origen de la teoría de colas con reintentos un artículo de Cohen [27] publicado en 1957 y titulado "*Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls*", donde se analiza el sistema $M/M/c$ con reintentos y clientes impacientes.

Desde el origen de la teoría de colas con reintentos hasta la actualidad ha habido un gran desarrollo en el estudio de este tema. Los artículos [29, 30, 41, 56] resumen los resultados obtenidos en el análisis de los sistemas de colas con reintentos publicados hasta 1997. Por otra parte, Artalejo y Falin [12] llevan a cabo un estudio comparativo entre las colas con y sin reintentos. Para tener una visión más general de la bibliografía nos referimos a los artículos [9, 10, 36].

Cabe destacar la existencia de dos libros dedicados exclusivamente al estudio de los sistemas de colas con reintentos [23, 33]. La monografía de Falin y Templeton [33] proporciona gran cantidad de resultados analíticos para los modelos $M/G/1$ y $M/M/c$ con reintentos. El énfasis es puesto en los descriptores y métodos matemáticos que conducen o bien a fórmulas explícitas o a soluciones en términos de transformadas. No obstante, son muchos los problemas en la teoría de colas con reintentos que resultan ser analíticamente intratables o muy complejos. Por ello el libro de Artalejo y Gómez-Corral [23] se centra en un análisis de naturaleza computacional proporcionando aproximaciones y métodos algorítmicos que permiten estudiar los descriptores más notables de los modelos de colas con reintentos. El uso de los métodos analítico-matriciales juega un papel destacado en el texto.

Podemos encontrar ejemplos de colas con reintentos en nuestras actividades diarias así como en sistemas telefónicos y redes de comunicación. Por ejemplo, cuando un usuario efectúa una llamada telefónica y encuentra la línea ocupada suele repetir la demanda hasta conseguir la conexión requerida. Por ello, el tráfico global de llamadas realizadas en la red telefónica puede dividirse en dos flujos diferentes: el flujo de llamadas originales, que refleja las necesidades reales de los usuarios; y el flujo de llamadas repetidas,

consecuencia de los bloqueos en los intentos previos. Los modelos clásicos de sistemas telefónicos no tienen en cuenta la estructura real de la red y por lo tanto surge la necesidad del estudio de los modelos de colas con reintentos.

Otro ejemplo de aplicación en redes de comunicación sería el siguiente. Consideramos una red local compuesta de varias estaciones conectadas entre sí y con unos intervalos de tiempo de transmisión (slots). Si dos o más estaciones transmiten paquetes simultáneamente entonces se produce una colisión y los paquetes se destruyen y deben retransmitirse posteriormente. Si las estaciones implicadas en el conflicto intentaran retransmitir en el siguiente slot se produciría de nuevo un conflicto. Para evitarlo cada estación, independientemente de las otras, puede posponer la acción hasta otro slot con probabilidad p o retransmitir el paquete con probabilidad $1 - p$. Es decir, cada estación introduce una demora aleatoria antes de intentar de nuevo transmitir el paquete.

El área de servicio de un modelo de colas con reintentos consiste en $c \geq 1$ servidores y $m - c$ ($m \geq c$) posiciones de espera. Cuando un cliente llega al sistema y encuentra un servidor libre es atendido inmediatamente y abandona el sistema cuando finaliza su servicio. Si no hay ningún servidor vacío pero queda libre alguna posición de espera, el cliente se une a la línea de espera. En el caso de que todos los servidores y todas las posiciones de espera estén ocupados, el cliente abandona el sistema definitivamente, con probabilidad $1 - H_1$, o se une a un grupo de clientes no atendidos, llamado órbita, con probabilidad H_1 , desde donde volverá a intentar ocupar un servidor libre para ser atendido. La capacidad de la órbita, K , puede considerarse finita o infinita. En el caso de sistemas con capacidad de la órbita finita, un cliente que llega y encuentra todos los servidores y las posiciones de espera ocupados y la órbita completa debe abandonar el sistema. Cada cliente de la órbita intenta acceder a los servidores, independientemente de los demás, tras un tiempo aleatorio de distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$. Nuevamente, si todos los servidores y las posiciones de espera están ocupados, el cliente abandonará el sistema, con probabilidad $1 - H_k$ (si es el k -ésimo intento, con $k \geq 2$) o permanecerá en la órbita, con probabilidad H_k . Los periodos entre llegadas consecutivas y los tiempos de servicio siguen distribuciones con funciones de distribución $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente. Se supone que el flujo de llegadas de clientes nuevos, los periodos de tiempo entre reintentos sucesivos y los tiempos de servicio son mutuamente independientes.

Podemos denotar los modelos de colas con reintentos utilizando la no-

tación de Kendall $A/B/c/m/K/H$, donde A y B describen la distribución de los tiempos entre llegadas consecutivas y la distribución de los tiempos de servicio, respectivamente, c es el número de servidores, m el número total de servidores y posiciones de espera y K es la capacidad de la órbita. H es la función de persistencia y puede describirse como la sucesión $\{H_k; k \geq 1\}$. Si $H_k = 1$, para todo $k \geq 1$, diremos que estamos ante un sistema con clientes persistentes. Cuando $H_k = \alpha$, $\alpha < 1$, $k \geq 1$, tenemos un sistema con pérdidas geométricas. Si en la notación omitimos m , K o H , entenderemos que $m = c$, $K = \infty$ y $H_k = 1$, $k \geq 1$.

A lo largo de esta memoria nos vamos a centrar en los modelos $M/M/c$ y $M/G/1$ con reintentos, ambos sin posiciones de espera, capacidad infinita de la órbita y clientes persistentes, que pasamos a describir en las siguientes secciones.

1.2 El sistema $M/M/c$ con reintentos

En esta sección describimos el modelo $M/M/c$ con reintentos [23] y resumimos resultados referentes a la distribución límite del estado del sistema [14, 33] y a diversos descriptores, como el periodo de ocupación [15, 17, 18], el tiempo de espera [16, 21], etc.

El modelo $M/M/c$ con reintentos consiste en un modelo de colas con c servidores, sin posiciones de espera y capacidad infinita de la órbita. Los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ , los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial de parámetro ν y los tiempos entre reintentos una exponencial de parámetro μ . Además, el proceso de llegadas primarias, los tiempos de servicio y los de reintentos son mutuamente independientes.

Describimos el estado del sistema en el instante t mediante un proceso bivalente $\mathcal{X} = \{(C(t), N(t)); t \geq 0\}$, donde $C(t)$ es el número de servidores ocupados y $N(t)$ es el número de clientes en la órbita. El proceso \mathcal{X} es una cadena de Markov irreducible en tiempo continuo con espacio de estados $S = \{0, \dots, c\} \times \mathbb{Z}_+$. La cadena es recurrente positiva si y sólo si $\rho = \lambda/c\nu < 1$. Sus tasas infinitesimales de transición $q_{(i,j)(m,n)}$ vienen dadas por:

(a) Para $0 \leq i \leq c-1$,

$$q_{(i,j)(m,n)} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (m, n) = (i+1, j), \\ i\nu, & \text{si } (m, n) = (i-1, j), \\ j\mu, & \text{si } (m, n) = (i+1, j-1), \\ -(\lambda + i\nu + j\mu), & \text{si } (m, n) = (i, j), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) Para $i = c$,

$$q_{(c,j)(m,n)} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (m, n) = (c, j+1), \\ c\nu, & \text{si } (m, n) = (c-1, j), \\ -(\lambda + c\nu), & \text{si } (m, n) = (c, j), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si ordenamos el espacio de estados lexicográficamente como $S = \{(0, 0), \dots, (c, 0), (0, 1), \dots, (c, 1), \dots\}$ podemos expresar el generador infinitesimal Q del proceso \mathcal{X} en bloques de matrices como

$$Q = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots \\ A_1^{(-1)} & A_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots \\ 0_{c+1} & A_2^{(-1)} & A_2^{(0)} & A_2^{(+1)} & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & A_3^{(-1)} & A_3^{(0)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

donde 0_{c+1} es una matriz de dimensión $c+1$ con todos sus elementos iguales a 0, y $A_j^{(-1)}$, $A_j^{(0)}$ y $A_j^{(+1)}$ son las siguientes matrices cuadradas de dimensión $c+1$:

$$A_j^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & j\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & j\mu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j\mu \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_j^{(+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$A_j^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{0j} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \nu & a_{1j} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\nu & a_{2j} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{c-1,j} & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c\nu & a_{cj} \end{pmatrix},$$

con $a_{ij} = -(\lambda + i\nu + j\mu)$, si $0 \leq i \leq c - 1$, y $a_{cj} = -(\lambda + c\nu)$, para $j \geq 0$.

En la Figura 1.1 representamos el diagrama de transiciones y el espacio de estados del proceso \mathcal{X} para $c = 3$.

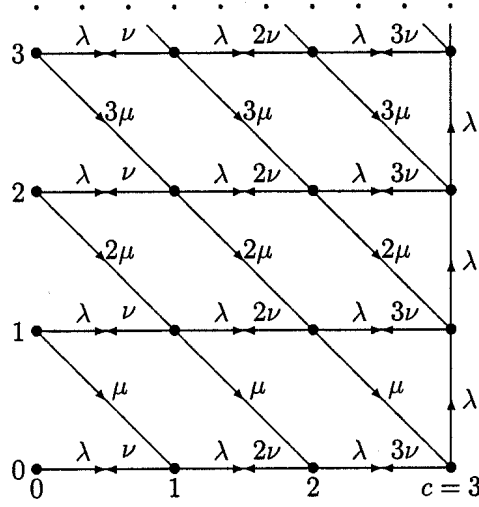


Figura 1.1. Transiciones en la cola $M/M/c$ con reintentos

Resaltamos que los caminos aleatorios definidos sobre el espacio producto de un conjunto finito y el conjunto de los enteros positivos surgen en muchas aplicaciones. La familia más conocida de estos caminos fue introducida por Malyshev [45] y Neuts [47]. La hipótesis principal de sus teorías es la condición de homogeneidad espacial

$$A_j^{(k)} \equiv A^{(k)}, \quad j \geq j^*,$$

para todo k y algún entero positivo j^* .

Esta hipótesis permite profundizar en el análisis matemático de los comportamientos transitorio y límite del proceso. Sin embargo, en la cola $M/M/c$ con reintentos esta hipótesis de homogeneidad no se da, lo que conlleva las principales dificultades de análisis. Empleando otra terminología podemos decir que el sistema $M/M/c$ con reintentos es un ejemplo de proceso de cuasi nacimiento y muerte (proceso QBD) dependiente del nivel [42, 47].

1.2.1 Distribución límite del estado del sistema

En esta subsección consideramos el problema de la obtención de la distribución límite del proceso \mathcal{X} , dada por el vector $\mathbf{p} = (p_{ij})$, siendo $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = i, N(t) = j\}$, para $(i, j) \in S$. Expresemos el vector \mathbf{p} como $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots)$, siendo \mathbf{p}_j el vector formado por las probabilidades límite para el nivel j de la órbita, es decir, $\mathbf{p}_j = (p_{0j}, \dots, p_{cj})$. Entonces podemos escribir las ecuaciones de Kolmogorov, $\mathbf{p}Q = \mathbf{0}$, de la siguiente forma matricial:

$$\mathbf{p}_{j-1}A_{j-1}^{(+1)} + \mathbf{p}_jA_j^{(0)} + \mathbf{p}_{j+1}A_{j+1}^{(-1)} = \mathbf{0}(c+1), \quad j \geq 0,$$

donde \mathbf{p}_{-1} y $A_{-1}^{(+1)}$ tienen todos sus elementos nulos, y $\mathbf{0}(c+1)$ es el vector fila de dimensión $c+1$ con todos sus elementos iguales a 0.

Si $c \leq 2$, las probabilidades límite satisfacen un conjunto de ecuaciones del tipo de nacimiento y muerte, por lo que es posible encontrar su solución explícita o recursiva [23, 37]. Sin embargo, dicha estructura se pierde cuando $c > 2$ y no se dispone de fórmulas explícitas ni planes recursivos para la obtención de las probabilidades p_{ij} . Esta dificultad motiva el estudio de aproximaciones numéricamente tratables y precisas.

A continuación nos centramos en la aproximación más natural y tradicional que consiste en fijar un límite ficticio K para la capacidad de la órbita. De esta forma, el espacio de estados inicial, $S = \{0, \dots, c\} \times \mathbb{Z}_+$, es sustituido por el espacio finito $S^K = \{0, \dots, c\} \times \{0, \dots, K\}$. Este método de truncamiento, debido a Wilkinson [54], se usa habitualmente en el análisis numérico de las colas con reintentos.

Sea $\mathcal{X}^K = \{(C^K(t), N^K(t)); t \geq 0\}$ el proceso Markoviano obtenido bajo la hipótesis de truncamiento. Puesto que el espacio de estados S^K es finito, el proceso \mathcal{X}^K es siempre recurrente positivo. Podemos obtener las probabilidades límite

$$p_{ij}^K = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C^K(t) = i, N^K(t) = j\}, \quad (i, j) \in S^K,$$

de forma recursiva utilizando el Teorema 1.1.

Teorema 1.1. *Las probabilidades $\{p_{ij}^K; (i, j) \in S^K\}$ pueden calcularse siguiendo los pasos:*

Paso 1. Definir las variables $\{r_{ij}^K; (i, j) \in S^K\}$ como

$$r_{ij}^K = p_{ij}^K / p_{0K}^K.$$

Paso 2. Tomar $j = K$. Calcular recursivamente r_{iK}^K , para $i = 1, \dots, c$, mediante

$$r_{iK}^K = \frac{(\lambda + (i-1)\nu + K\mu)r_{i-1,K}^K - \lambda r_{i-2,K}^K}{i\nu}.$$

Paso 3. Tomar $j = j - 1$. Calcular los valores de r_{cj}^K a partir de

$$r_{cj}^K = \frac{(j+1)\mu}{\lambda} \sum_{i=0}^{c-1} r_{i,j+1}^K, \quad 0 \leq j \leq K-1.$$

Obtener recursivamente r_{ij}^K , para $i = c-1, \dots, 0$, mediante

$$r_{ij}^K = \frac{D_{ij} - \gamma_{ij}r_{i+1,j}^K}{b_{ij} + \beta_{0j}},$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= -\lambda, & \beta_{ij} &= \lambda + i\nu + j\mu, \\ \gamma_{ij} &= -(i+1)\nu, & \omega_{ij} &= (j+1)\mu r_{i-1,j+1}^K, \\ b_{0j} &= 0, & b_{ij} &= \frac{i\nu(b_{i-1,j} + j\mu)}{b_{i-1,j} + \beta_{0j}}, \quad 1 \leq i \leq c-1, \\ D_{0j} &= 0, & D_{ij} &= \omega_{ij} - \frac{\alpha_{ij}D_{i-1,j}}{b_{i-1,j} + \beta_{0j}}, \quad 1 \leq i \leq c-1. \end{aligned}$$

Paso 4. Repetir el Paso 3 hasta $j = 0$.

Paso 5. Calcular las probabilidades iniciales $\{p_{ij}^K; (i, j) \in S^K\}$ como

$$p_{ij}^K = \frac{r_{ij}^K}{\sum_{(m,n) \in S^K} r_{mn}^K}.$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en [23, 33].

En general, el plan recursivo propuesto en el Teorema 1.1 da un procedimiento sencillo y eficiente para la obtención de las probabilidades límite. Una buena elección del nivel de truncamiento, K , garantiza el cálculo de cualquier medida de comportamiento con la precisión deseada. Por ejemplo, la probabilidad de bloqueo (es decir, la probabilidad de que estén los c servidores ocupados) y el número medio de clientes en órbita para el modelo truncado convergen a las correspondientes características del modelo original [33].

Cuando se utiliza el modelo truncado de Wilkinson, como aproximación del modelo original, con niveles altos de congestión (es decir, $\lambda \rightarrow c\nu$ o $\mu \rightarrow 0$), el nivel necesario de truncamiento es demasiado grande. Una forma de obtener mejores resultados es trabajar con otro tipo de modelos aproximados basados en espacios de estados infinitos, conocidos como modelos truncados generalizados [14, 33, 48]. Recientemente se ha propuesto otro método basado en la teoría de la decisión Markoviana [35].

Además de la probabilidad de bloqueo y del número medio de clientes en órbita también podemos estudiar otros descriptores de interés como son el periodo de ocupación y el tiempo de espera, que tratamos en las siguientes subsecciones.

1.2.2 Periodo de ocupación

En esta subsección resumimos resultados concernientes al periodo de ocupación, entendiendo como tal el periodo de tiempo que comienza con la llegada de un cliente que encuentra el sistema vacío y acaba en el primer momento en el que el sistema vuelve a quedar vacío. Más concretamente, mostramos los resultados para las distribuciones de la longitud, del número de clientes servidos y del número máximo de clientes presentes en la órbita durante un periodo de ocupación. Al igual que sucedía con las probabilidades límite, disponemos de resultados algorítmicos para los modelos aproximados obtenidos mediante truncamiento y truncamiento generalizado [15, 17]. En esta subsección, por sencillez, nos centramos exclusivamente en el modelo truncado de Wilkinson.

Sea L_{ij} un tiempo de primer paso, definido como el tiempo que transcurre hasta alcanzar por primera vez el estado $(0, 0)$, dado que el estado inicial es $(i, j) \in S^K$. La longitud del periodo de ocupación, L^K , vendrá dada por L_{10} . Sea $L_{ij}^*(s)$ la transformada de Laplace-Stieltjes de L_{ij} ; es decir, $L_{ij}^*(s) = E[\exp\{-sL_{ij}\}]$, con $\text{Re}(s) \geq 0$. Estas transformadas verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L_{00}^*(s) = 1,$$

$$L_{ij}^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + i\nu + j\mu} L_{i+1,j}^*(s) + \frac{i\nu}{s + \lambda + i\nu + j\mu} L_{i-1,j}^*(s)$$

$$+ \frac{j\mu}{s + \lambda + i\nu + j\mu} L_{i+1,j-1}^*(s), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i, j) \neq (0, 0),$$

$$L_{cj}^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + c\nu} L_{c,j+1}^*(s) + \frac{c\nu}{s + \lambda + c\nu} L_{c-1,j}^*(s), \quad 0 \leq j \leq K-1,$$

$$L_{cK}^*(s) = \frac{c\nu}{s + c\nu} L_{c-1,K}^*(s).$$

El Teorema 1.2 resume la solución algorítmica para estas transformadas y, en particular, para la transformada de Laplace-Stieltjes de la longitud del periodo de ocupación $L_K^*(s) = L_{10}^*(s)$. La demostración se encuentra en [17, 23].

Teorema 1.2. *La transformada de Laplace-Stieltjes de la longitud del periodo de ocupación, $L_K^*(s)$, puede calcularse siguiendo los pasos:*

Paso 1. Definir de forma recursiva los coeficientes b_{i0} , \bar{D}_{i0} , \hat{F}_{i0} y \hat{G}_{i0} , para $1 \leq i \leq c-1$, mediante las relaciones

$$b_{10} = \nu, \quad b_{i0} = i\nu \frac{s + b_{i-1,0}}{s + \lambda + b_{i-1,0}}, \quad 2 \leq i \leq c-1,$$

$$\bar{D}_{10} = \nu, \quad \bar{D}_{i0} = i\nu \frac{\bar{D}_{i-1,0}}{s + \lambda + b_{i-1,0}}, \quad 2 \leq i \leq c-1,$$

$$\hat{F}_{i0} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=i}^{c-1} \bar{D}_{k0} \prod_{n=i}^k \frac{\lambda}{s + \lambda + b_{n0}}, \quad 1 \leq i \leq c-1,$$

$$\hat{G}_{i0} = \prod_{k=i}^{c-1} \frac{\lambda}{s + \lambda + b_{k0}}, \quad 1 \leq i \leq c-1.$$

Paso 2. Para $j = 1, \dots, K$, calcular secuencialmente los coeficientes b_{ij} , G_{ij} , $H_{ij}^{(k)}$, \bar{D}_{ij} , \tilde{D}_{ij} , \hat{F}_{ij} y \hat{G}_{ij} dados por

$$b_{0j} = 0, \quad b_{ij} = i\nu \frac{s + j\mu + b_{i-1,j}}{s + \lambda + j\mu + b_{i-1,j}}, \quad 1 \leq i \leq c-1,$$

$$G_{ij} = \prod_{k=i}^{c-1} \frac{\lambda}{s + \lambda + j\mu + b_{kj}}, \quad 0 \leq i \leq c-1,$$

$$H_{ij}^{(k)} = \nu^{i-k+1} \prod_{n=k-1}^{i-1} \frac{n+1}{s + \lambda + j\mu + b_{nj}}, \quad 0 \leq i \leq c-1, 1 \leq k \leq i+1,$$

$$\bar{D}_{ij} = j\mu \sum_{k=1}^{i+1} \left(\hat{F}_{k,j-1} + \hat{G}_{k,j-1} \frac{c\nu \hat{F}_{c-1,j-1}}{s + \lambda + c\nu(1 - \hat{G}_{c-1,j-1})} \right) H_{ij}^{(k)},$$

$$0 \leq i \leq c-1,$$

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{\lambda j\mu}{s + \lambda + c\nu(1 - \hat{G}_{c-1,j-1})} \sum_{k=1}^{i+1} \hat{G}_{k,j-1} H_{ij}^{(k)}, \quad 0 \leq i \leq c-1,$$

$$\hat{F}_{ij} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=i}^{c-1} \bar{D}_{kj} \prod_{n=i}^k \frac{\lambda}{s + \lambda + j\mu + b_{nj}}, \quad 0 \leq i \leq c-1,$$

$$\hat{G}_{ij} = G_{ij} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=i}^{c-1} \tilde{D}_{kj} \prod_{n=i}^k \frac{\lambda}{s + \lambda + j\mu + b_{nj}}, \quad 0 \leq i \leq c-1.$$

Paso 3. Calcular $L_{cK}^(s)$ como*

$$L_{cK}^*(s) = \frac{c\nu \hat{F}_{c-1,K}}{s + c\nu(1 - \hat{G}_{c-1,K})}.$$

Paso 4. Calcular $L_{c0}^(s)$ a través de*

$$L_{c0}^*(s) = \prod_{j=0}^{K-1} \frac{\lambda}{s + \lambda + c\nu(1 - \hat{G}_{c-1,j})} L_{cK}^*(s)$$

$$+ c\nu \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\lambda^j \hat{F}_{c-1,j}}{\prod_{n=0}^j (s + \lambda + c\nu(1 - \hat{G}_{c-1,n}))}.$$

Paso 5. Calcular la transformada de Laplace-Stieltjes de L^K como

$$L_K^*(s) = \hat{F}_{10} + \hat{G}_{10} L_{c0}^*(s).$$

Una vez que hemos computado la transformada de Laplace-Stieltjes $L_K^*(s)$ podemos invertirla numéricamente y obtener su función de densidad utilizando los métodos numéricos existentes en la literatura [1, 2, 3, 26, 52].

Para obtener los momentos de L^K derivamos las ecuaciones correspondientes a $L_{ij}^*(s)$, para $0 \leq i \leq c$, $0 \leq j \leq K$, y evaluamos en $s = 0$, lo que conduce a un sistema de ecuaciones que puede resolverse mediante un algoritmo similar al del Teorema 1.2 [17, 23].

En cuanto al número de clientes servidos durante un periodo de ocupación, I^K , denotamos por I_{ij} el número de clientes servidos durante el periodo L_{ij} , con lo que I^K no es más que I_{10} . Usando un argumento de primer paso obtenemos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de sus funciones generatrices $I_{ij}(z) = E[z^{I_{ij}}]$, para $|z| \leq 1$. En concreto, tenemos que

$$I_{00}(z) = 1,$$

$$I_{ij}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} I_{i+1,j}(z) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} z I_{i-1,j}(z) + \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} I_{i+1,j-1}(z), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i,j) \neq (0,0),$$

$$I_{cj}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} I_{c,j+1}(z) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} z I_{c-1,j}(z), \quad 0 \leq j \leq K-1,$$

$$I_{cK}(z) = z I_{c-1,K}(z).$$

Se puede deducir un algoritmo para calcular $I_{ij}(z)$ de naturaleza similar al Teorema 1.2 [15].

La distribución del número máximo de clientes en órbita durante un periodo de ocupación, N_{max} , puede ser obtenida para el modelo original con órbita infinita. Observemos que, para cada $m \geq 1$ fijo, $P\{N_{max} < m\}$ es la probabilidad de que el proceso \mathcal{X} alcance el estado $(0,0)$ antes de alcanzar el estado (c,m) , habiendo partido del estado $(1,0)$. Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar la probabilidad de absorción por el estado $(0,0)$ para una cadena de Markov con estados absorbentes $(0,0)$ y (c,m) .

Para un m fijo, sea τ_{ij} la probabilidad de absorción por el estado $(0,0)$ si el estado inicial es (i,j) , para $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq m-1$. τ_{10} es igual a $P\{N_{max} < m\}$; esto es, la probabilidad en la que estamos interesados. Condicionando sobre el siguiente estado visitado por la cadena, tenemos que las probabilidades τ_{ij} verifican las siguientes ecuaciones:

$$\tau_{00} = 1,$$

$$\tau_{ij} = \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \tau_{i+1,j} + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \tau_{i-1,j} + \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} \tau_{i+1,j-1}, \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq m-1, (i,j) \neq (0,0),$$

$$\tau_{cj} = \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \tau_{c,j+1} + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} \tau_{c-1,j}, \quad 0 \leq j \leq m-1,$$

$$\tau_{cm} = 0.$$

Nuevamente la solución algorítmica para estas probabilidades puede obtenerse realizando un desarrollo paralelo al del Teorema 1.2. En la Proposición 1.1 recogemos una expresión explícita para la distribución de N_{max} , en el caso de un único servidor ($c = 1$), y la relación existente entre N_{max} y el número máximo de clientes en el sistema durante un periodo de ocupación, denotado por S_{max} . La demostración puede ser vista en [18, 23].

Proposición 1.1. *a) En el caso $c = 1$, la distribución de N_{max} viene dada por*

$$P\{N_{max} \leq m-1\} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!}{\rho^j \prod_{k=1}^j \left(\frac{\lambda+k}{\mu}\right)}}{\rho + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!}{\rho^j \prod_{k=1}^j \left(\frac{\lambda+k}{\mu}\right)}}, \quad m \geq 1.$$

b) La distribución de S_{max} viene dada por

$$P\{S_{max} \leq m\} = \begin{cases} 1 - \left(\sum_{k=0}^m \frac{k!}{\rho^k}\right)^{-1}, & \text{si } 1 \leq m \leq c-1, \\ P\{N_{max} \leq m-c\}, & \text{si } m \geq c. \end{cases}$$

1.2.3 Tiempo de espera

El tiempo de espera se define como el tiempo que ha de permanecer un cliente en la órbita hasta comenzar su servicio, sin contabilizar el propio tiempo de servicio. A continuación resumimos los resultados obtenidos para la distribución del tiempo de espera bajo la hipótesis natural de que los clientes son servidos en orden aleatorio. Para ello utilizamos el modelo truncado de Wilkinson. Las dificultades asociadas al análisis de los sistemas de colas que operan en un orden aleatorio [28, 34] son notoriamente mayores que las que puedan tenerse bajo otras disciplinas de cola.

Sea W^K el tiempo de espera que ha de permanecer un cliente en la órbita hasta comenzar su servicio. Supongamos que en el instante $t = 0$ el proceso \mathcal{X}^K se encuentra en el estado (i, j) , para algún $1 \leq j \leq K$. Marcamos un cliente de la órbita y denotamos por W_{ij} el tiempo de espera residual del

cliente marcado, dado que el estado inicial es (i, j) . Sea $W_{ij}^*(s)$ la transformada de Laplace-Stieltjes de W_{ij} ; es decir, $W_{ij}^*(s) = E[\exp\{-sW_{ij}\}]$, con $\text{Re}(s) \geq 0$. A través de un análisis de primer paso tenemos que estas transformadas verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
W_{ij}^*(s) &= \frac{\lambda}{s + \lambda + i\nu + j\mu} W_{i+1,j}^*(s) + \frac{i\nu}{s + \lambda + i\nu + j\mu} W_{i-1,j}^*(s) \\
&\quad + \frac{(j-1)\mu}{s + \lambda + i\nu + j\mu} W_{i+1,j-1}^*(s) + \frac{\mu}{s + \lambda + i\nu + j\mu}, \\
&\quad 0 \leq i \leq c-1, \quad 1 \leq j \leq K, \\
W_{cj}^*(s) &= \frac{(1 - \delta_{jK})\lambda}{s + (1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu} W_{c,j+1}^*(s) + \frac{c\nu}{s + (1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu} W_{c-1,j}^*(s), \\
&\quad 1 \leq j \leq K,
\end{aligned}$$

siendo δ_{ab} la función de Kronecker definida como

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El Teorema 1.3 proporciona dos expresiones alternativas para la transformada de Laplace-Stieltjes de W^K . Su demostración puede consultarse en [16, 23].

Teorema 1.3. *La transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de espera viene dada por cualquiera de las siguientes expresiones alternativas:*

$$W_K^*(s) = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{cj}^K + \sum_{j=0}^{K-1} p_{cj}^K W_{c,j+1}^*(s) = 1 - \frac{s}{\lambda} \sum_{i=0}^c \sum_{j=1}^K j p_{ij}^K W_{ij}^*(s).$$

Es interesante resaltar que las expresiones obtenidas para $W_K^*(s)$ incluyen la parte discreta, $P\{W^K = 0\} = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{cj}^K$, y la parte continua de la distribución con función de densidad $f_{W^c}(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Puesto que en el modelo con el que estamos trabajando, \mathcal{X}^K , el tamaño K de la órbita es finito, la probabilidad $P\{W^K = 0\}$ es igual a la probabilidad de no-espera, $\sum_{i=0}^{c-1} \sum_{j=0}^K p_{ij}^K$, más la probabilidad de pérdida, p_{cK}^K .

A continuación resumimos los resultados para el número de reintentos que debe realizar un cliente hasta encontrar un servidor libre, que denotamos

por R^K [21]. Este descriptor es el homólogo discreto del tiempo de espera W^K .

De forma análoga a como actuábamos en el análisis del tiempo de espera, marcamos un cliente de la órbita y denotamos por $z_{l,(i,j)}^r$ la probabilidad de que el cliente marcado haga $r \geq 1$ reintentos dado que ya ha realizado l , para $0 \leq l \leq r - 1$, y que el estado actual del sistema es (i, j) , con $j \geq 1$.

Observemos que la distribución de R^K se puede expresar como

$$P\{R^K = 0\} = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{cj}^K,$$

$$P\{R^K = r\} = \sum_{j=0}^{K-1} p_{cj}^K z_{0,(c,j+1)}^r, \quad r \geq 1,$$

donde las probabilidades $z_{l,(i,j)}^r$ verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_{r-1,(i,j)}^r &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{r-1,(i+1,j)}^r + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{r-1,(i-1,j)}^r \\ &+ \frac{(j-1)\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{r-1,(i+1,j-1)}^r + \frac{\mu}{\lambda + i\nu + j\mu}, \quad r \geq 1, 0 \leq i \leq c-1, 1 \leq j \leq K, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} z_{r-1,(c,j)}^r &= \frac{(1 - \delta_{jK})\lambda}{(1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + \mu} z_{r-1,(c,j+1)}^r \\ &+ \frac{c\nu}{(1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + \mu} z_{r-1,(c-1,j)}^r, \quad r \geq 1, 1 \leq j \leq K, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} z_{l,(i,j)}^r &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{l,(i+1,j)}^r + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{l,(i-1,j)}^r \\ &+ \frac{(j-1)\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} z_{l,(i+1,j-1)}^r, \quad r \geq 1, 0 \leq l \leq r-2, 0 \leq i \leq c-1, 1 \leq j \leq K, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} z_{l,(c,j)}^r &= \frac{(1 - \delta_{jK})\lambda}{(1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + \mu} z_{l,(c,j+1)}^r + \frac{c\nu}{(1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + \mu} z_{l,(c-1,j)}^r \\ &+ \frac{\mu}{(1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + \mu} z_{l+1,(c,j)}^r, \quad r \geq 1, 0 \leq l \leq r-2, 1 \leq j \leq K. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para cada valor de $r \geq 1$, necesitamos resolver (1.1) y (1.2) para calcular $z_{r-1,(i,j)}^r$, $0 \leq i \leq c$, $1 \leq j \leq K$. A continuación resolvemos (1.3) y (1.4) para

$l = r - 2, \dots, 0$, donde en cada iteración las cantidades $z_{l+1,(i,j)}^r$ han sido calculadas en la iteración previa.

1.3 El sistema $M/G/1$ con reintentos

El modelo $M/G/1$ con reintentos puede verse como una generalización del modelo $M/M/1$ cuando el tiempo de servicio sigue una distribución general, con función de distribución de probabilidad $B(x)$, con $B(0) = 0$, transformada de Laplace-Stieltjes $\beta(s)$ y momentos β_k , con $k \geq 0$. Es decir, consiste en un modelo con un único servidor, sin posiciones de espera y capacidad infinita de la órbita. Los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ y los tiempos entre reintentos tienen distribución exponencial de parámetro μ . Además, el proceso de llegadas primarias, los tiempos de servicio y los de reintento son mutuamente independientes.

Para este sistema el proceso $\mathcal{Y} = \{(C(t), N(t)); t \geq 0\}$ no es una cadena de Markov, sino que puede verse como un proceso de regeneración Markoviana con espacio de estados $S = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_+$, cuyo estudio puede realizarse usando diferentes metodologías como la teoría de la renovación markoviana [40], cadenas encajadas de Markov [56], uso de variables suplementarias [38], etc.

A continuación, en la Subsección 1.3.1, se muestran los resultados correspondientes a la distribución límite del sistema. En las Subsecciones 1.3.2 y 1.3.3 resumimos los principales resultados para el periodo de ocupación y el tiempo de espera respectivamente.

1.3.1 Distribución límite del estado del sistema

Suponemos la condición de estabilidad $\rho = \lambda\beta_1 < 1$ que garantiza que las probabilidades límite

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = i, N(t) = j\}, \quad (i, j) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_+,$$

existen y son positivas. Estas probabilidades pueden calcularse recursiva-

mente con ayuda de las siguientes ecuaciones [23, 32]:

$$\begin{aligned} p_{0j} &= \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \pi_j, \quad j \geq 0, \\ p_{1j} &= \frac{(j+1)\mu}{\lambda} p_{0,j+1}, \quad j \geq 0, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1 - \rho) \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} du \right\}, \\ \pi_j &= \sum_{i=0}^j \pi_i \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} c_{j-i} + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} c_{j-i+1}, \quad j \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$c_j = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x), \quad j \geq 0, \quad (1.5)$$

es la probabilidad de que lleguen exactamente j clientes durante un tiempo de servicio.

La sucesión $\{\pi_j; j \geq 0\}$ corresponde a la distribución límite de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización de servicio.

En cuanto a las esperanzas, tenemos que

$$\begin{aligned} E[C] &= \rho, \\ E[N] &= \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right). \end{aligned}$$

1.3.2 Periodo de ocupación

La transformada de Laplace-Stieltjes de la longitud del periodo de ocupación, $L^*(s)$, tiene la siguiente expresión explícita [33]:

$$L^*(s) = \frac{\int_0^{L_\infty^*(s)} \frac{\beta(s+\lambda-\lambda u)}{e^{(s,u)(\beta(s+\lambda-\lambda u)-u)}} du}{\int_0^{L_\infty^*(s)} \frac{du}{e^{(s,u)(\beta(s+\lambda-\lambda u)-u)}}}, \quad s > 0, \quad (1.6)$$

donde $L_\infty^*(s)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes de la longitud del periodo de ocupación para la cola $M/G/1$ estándar sin reintentos y $e(s, u)$ se

define como

$$e(s, u) = \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^u \frac{s + \lambda - \lambda\beta(s + \lambda - \lambda v)}{\beta(s + \lambda - \lambda v) - v} dv \right\}, \quad 0 \leq u < L_\infty^*(s).$$

La expresión (1.6) da una solución teórica pero tiene serias limitaciones en la práctica. Parece imposible invertir numéricamente $L^*(s)$ aplicando los algoritmos conocidos [1, 2, 3], ya que éstos necesitan evaluar la transformada para valores complejos de s , pero la expresión (1.6) está dada para valores reales de s . Tampoco es posible obtener los momentos de L derivando en (1.6). No obstante, a través de la teoría de los procesos regenerativos se llega a que

$$E[L] = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{p_{00}} - 1 \right),$$

y en [11] se obtiene una expresión explícita para el momento de orden dos de L .

Para conseguir una estimación de la función de densidad de L existe una aproximación basada en el principio de máxima entropía y otra basada en el modelo truncado con capacidad finita de la órbita, K . En el Teorema 1.4 damos el resultado correspondiente a esta última aproximación. La demostración se fundamenta en el método de las catástrofes [20, 23].

Teorema 1.4. *La transformada de Laplace-Stieltjes $L_K^*(s)$ se puede calcular como sigue:*

Paso 1. Definir las cantidades auxiliares

$$\begin{aligned} c_j(s) &= \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x), \quad j \geq 0, \\ c_j^a(s) &= \sum_{m=j}^\infty c_m(s), \quad 0 \leq j \leq K. \end{aligned}$$

Paso 2. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \phi_j(s) &= c_j(s) + \sum_{n=1}^j \phi_n(s) \frac{\lambda}{s + \lambda + n\mu} c_{j-n}(s) \\ &+ \sum_{n=1}^{j+1} \phi_n(s) \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu} c_{j-n+1}(s), \quad 0 \leq j \leq K-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_K(s) &= c_K^a(s) + \sum_{n=1}^K \phi_n(s) \frac{\lambda}{s + \lambda + n\mu} c_{K-n}^a(s) \\ &\quad + \sum_{n=1}^K \phi_n(s) \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu} c_{K-n+1}^a(s).\end{aligned}$$

Paso 3. Calcular la transformada de Laplace-Stieltjes de L^K como $L_K^*(s) = \phi_0(s)$.

Una vez calculada la transformada $L_K^*(s)$, mediante inversión numérica obtenemos la función de densidad de L para el modelo truncado.

En cuanto al número de clientes servidos durante un periodo de ocupación, I , tenemos las siguientes expresiones explícitas para los dos primeros momentos [43]:

$$\begin{aligned}E[I] &= \frac{1}{p_{00}}, \\ E[I^2] &= \frac{1}{p_{00}} \left(\frac{1 - \rho^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}\rho + \lambda^2\beta_2}{(1 - \rho)^2} + \int_0^1 \frac{2\lambda}{\mu(\beta(\lambda - \lambda u) - u)} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{1 - \rho} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_u^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda v)}{\beta(\lambda - \lambda v) - v} dv \right\} - \frac{(1 - u)\beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} \right) du \right).\end{aligned}$$

La distribución de I puede ser calculada de forma recursiva. Si condicionamos por el número de clientes que llegan durante el primer tiempo de servicio, tenemos que

$$\begin{aligned}P\{I = 1\} &= c_0, \\ P\{I \leq k\} &= c_0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j^{(k-1)}, \quad k \geq 2,\end{aligned}$$

donde $x_j^{(k)}$, para $1 \leq j \leq k$, se define como la probabilidad de que, habiendo j clientes en la órbita en el instante en el que se completa un servicio, se sirvan k clientes en lo que resta del periodo de ocupación. El Teorema 1.5 plantea un sistema recursivo de ecuaciones para calcular las probabilidades $x_j^{(k)}$. La demostración puede verse en [23, 43].

Teorema 1.5. Para cada $k \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{x_j^{(k)}; 1 \leq j \leq k\}$ pueden calcularse como

$$\mathbf{x}^k = T_k \tilde{\mathbf{x}}^{k-1},$$

donde $\mathbf{x}^k = (x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)})'$, $\tilde{\mathbf{x}}^0 = 1$, $\tilde{\mathbf{x}}^{k-1} = (1, \mathbf{x}^{k-1})'$, para $k \geq 2$, y $T_k = (t_{ij})$ es la matriz cuadrada de dimensión k con elementos

$$t_{ij} = \begin{cases} \frac{j\mu}{\lambda+j\mu}c_0, & \text{si } 1 \leq i \leq k, j = i, \\ \frac{\lambda}{\lambda+i\mu}c_{j-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda+i\mu}c_{j-i}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para determinar la distribución del número máximo de clientes en la órbita, N_{max} , necesitamos trabajar con la cadena de Markov encajada en los instantes de salida. Definimos $y_j^{(k)}$ como la probabilidad condicionada de que, comenzando en el estado j , la cadena encajada alcance el estado 0 antes de alcanzar el estado $k+1$. Entonces, tenemos que

$$P\{N_{max} = 0\} = c_0, \\ P\{N_{max} \leq k\} = c_0 + \sum_{j=1}^k c_j y_j^{(k)}, \quad k \geq 1.$$

Obtenemos las probabilidades $y_j^{(k)}$ a través del Teorema 1.6, cuya demostración puede encontrarse en [23, 44].

Teorema 1.6. Para cada $k \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{y_j^{(k)}; 1 \leq j \leq k\}$ pueden calcularse como la solución del sistema

$$\mathbf{y}^k = U_k \mathbf{y}^k + \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{y}^k = (y_1^{(k)}, \dots, y_k^{(k)})'$, $U_k = (u_{ij})$ es la matriz cuadrada de dimensión k con elementos

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda+i\mu}c_{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda+i\mu}c_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq k, \\ \frac{i\mu}{\lambda+i\mu}c_0, & \text{si } 2 \leq i \leq k, j = i-1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$y \mathbf{c} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}c_0, 0, \dots, 0\right)'.$$

1.3.3 Tiempo de espera

El análisis para el tiempo de espera en la cola $M/G/1$ con reintentos conduce a la siguiente expresión para su transformada de Laplace-Stieltjes [31]:

$$W^*(s) = 1 - \rho + \frac{\lambda(1 - \rho)}{s} \int_{L_\infty^*(s)}^1 \frac{(1 - u)(\beta(\lambda - \lambda u) - \beta(s + \lambda - \lambda u))}{(\beta(\lambda - \lambda u) - u)(u - \beta(s + \lambda - \lambda u))} \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_u^1 \left(\frac{s + \mu + \lambda - \lambda v}{\beta(s + \lambda - \lambda v) - v} - \frac{\lambda - \lambda v}{\beta(\lambda - \lambda v) - v} \right) dv \right\} du, \quad s > 0.$$

Puesto que s es real, nuevamente no podemos utilizar los métodos de inversión numérica habituales para obtener la función de densidad de W .

En cuanto a los momentos, se tienen expresiones explícitas para los dos primeros momentos de W . En concreto, el tiempo medio de espera puede obtenerse fácilmente utilizando la fórmula de Little

$$E[W] = E[W_\infty] + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Por otra parte, Artalejo et al. [13] han obtenido la siguiente fórmula para el momento de orden dos:

$$E[W^2] = E[W_\infty^2] + \frac{\lambda\beta_2}{\mu} \left(\frac{2}{(1 - \rho)^2(2 - \rho)} + \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \right) + \frac{2\rho}{\mu^2(1 - \rho)^2}.$$

En las fórmulas anteriores, $E[W_\infty]$ y $E[W_\infty^2]$ denotan los dos primeros momentos del tiempo de espera en la cola $M/G/1$ sin reintentos, pero con orden aleatorio de servicio, cuyas expresiones son

$$E[W_\infty] = \frac{\lambda\beta_2}{2(1 - \rho)}, \\ E[W_\infty^2] = \frac{2\lambda\beta_3}{3(1 - \rho)(2 - \rho)} + \frac{\lambda^2\beta_2^2}{(1 - \rho)^2(2 - \rho)}.$$

Al igual que ocurría con la longitud del periodo de ocupación, para conseguir una estimación de la función de densidad de W existe una aproximación basada en el principio de máxima entropía y otra basada en el modelo truncado con capacidad finita de la órbita [23]. Además Nobel y Tijms [49] han propuesto otra aproximación basada en una distribución gamma.

Centrándonos en la aproximación del modelo truncado, y fijado un valor de K , describimos el estado del sistema mediante el proceso $\{(C^K(t), N^K(t), \xi^K(t)); t \geq 0\}$, donde $C^K(t)$ y $N^K(t)$ denotan el estado del servidor y el tamaño de la órbita en el instante t , respectivamente. Cuando $C^K(t) = 1$, la variable $\xi^K(t)$ está definida como el tiempo transcurrido desde el inicio del servicio hasta el instante t .

Suponemos que en el instante inicial, $t = 0$, un cliente que llega encuentra el servidor ocupado y, por lo tanto, pasa a la órbita. Marcamos este cliente bloqueado. Entonces, el estado del sistema es $(C^K(0+), N^K(0+), \xi^K(0+)) = (1, j, \tau)$, para algún $j \geq 1$, donde $N^K(0+) = j$ incluye al cliente marcado.

Sea $W_{1j\tau}$ el tiempo de espera en órbita del cliente marcado. Su transformada de Laplace-Stieltjes, $W_{1j\tau}^*(s)$, satisface la ecuación

$$W_{1j\tau}^*(s) = \sum_{n=j}^{K-1} c_{n-j,\tau}(s)W_{0n}^*(s) + c_{K-j,\tau}^a(s)W_{0K}^*(s), \quad 1 \leq j \leq K,$$

donde

$$c_{j,\tau}(s) = \frac{1}{1-B(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(s+\lambda)(x-\tau)} \frac{(\lambda(x-\tau))^j}{j!} dB(x), \quad 0 \leq j \leq K-2,$$

$$\begin{aligned} c_{j,\tau}^a(s) &= \frac{1}{1-B(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s(x-\tau)} \sum_{m=j}^{\infty} e^{-\lambda(x-\tau)} \frac{(\lambda(x-\tau))^m}{m!} dB(x) \\ &= \frac{1}{1-B(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s(x-\tau)} dB(x) - \sum_{m=0}^{j-1} c_{m,\tau}(s), \quad 0 \leq j \leq K-1, \end{aligned}$$

y $W_{0j}^*(s)$ denota la transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de espera restante, dado que el tiempo de servicio acaba de finalizar y el estado del sistema es $(0, j)$. Denotamos por $W_{1j}^*(s)$ la transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de espera restante del cliente marcado, dado que ha comenzado un nuevo tiempo de servicio y el estado del sistema es $(1, j)$. Estas transformadas verifican

$$\begin{aligned} W_{0j}^*(s) &= \frac{\lambda}{s + \lambda + j\mu} W_{1j}^*(s) + \frac{(j-1)\mu}{s + \lambda + j\mu} W_{1,j-1}^*(s) \\ &\quad + \frac{\mu}{s + \lambda + j\mu}, \quad 1 \leq j \leq K, \end{aligned}$$

$$W_{1j}^*(s) = \sum_{n=j}^{K-1} c_{n-j}(s)W_{0n}^*(s) + c_{K-j}^a(s)W_{0K}^*(s), \quad 1 \leq j \leq K.$$

La transformada de Laplace-Stieltjes de W^K viene dada por

$$W_K^*(s) = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{1j}^K + \sum_{j=0}^{K-1} \int_0^\infty p_{1j\tau}^K W_{1,j+1,\tau}^*(s) d\tau,$$

donde $p_{1j\tau}^K$ es la probabilidad límite de estar en el estado $(1, j, \tau)$.

Las probabilidades límite p_{1j}^K pueden calcularse de forma eficiente, pero las probabilidades $p_{1j\tau}^K$ no tienen una solución analítica sencilla. Por lo tanto, utilizando la distribución del tiempo de renovación hacia adelante

$$\hat{B}(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^x (1 - B(u)) du, \quad x \geq 0,$$

encontramos la siguiente aproximación para $W_K^*(s)$, recogida en el Teorema 1.7. La demostración puede ser consultada en [19, 23].

Teorema 1.7. *La transformada de Laplace-Stieltjes $W_K^*(s)$ puede aproximarse mediante*

$$W_e^*(s) = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{1j}^K + \sum_{j=0}^{K-1} p_{1j}^K W_{1,j+1}^{*e}(s), \quad (1.7)$$

donde

$$W_{1j}^{*e}(s) = \sum_{n=j}^{K-1} c_{n-j}^e(s)W_{0n}^*(s) + c_{K-j}^{a,e}(s)W_{0K}^*(s), \quad 1 \leq j \leq K,$$

$$c_j^e(s) = \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^j \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{((s + \lambda)x)^j}{j!} (1 - B(x)) dx, \\ 0 \leq j \leq K - 2,$$

$$c_j^{a,e}(s) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^\infty e^{-sx} \sum_{m=j}^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^m}{m!} (1 - B(x)) dx \\ = \frac{1 - \beta(s)}{s\beta_1} - \sum_{m=0}^{j-1} c_m^e(s), \quad 0 \leq j \leq K - 1.$$

Cuando el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial tenemos que $B(x) = \hat{B}(x)$ y, por lo tanto, $W_e^*(s) = W_K^*(s)$.

Observemos en (1.7) que $W_e^*(s)$ tiene una contribución discreta, $1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_{1j}^K$, correspondiente a la probabilidad de no-espera, y la transformada de Laplace-Stieltjes de la contribución continua con densidad $f_{W_e}(x)$ sobre el intervalo $(0, +\infty)$.

A continuación nos centramos en el homólogo discreto de W , es decir, en el número de reintentos realizados por un cliente durante su tiempo de espera, R .

Marcamos un cliente que llega al sistema. Si el servidor está libre cuando llega el cliente marcado, tenemos que $R = 0$, y si está ocupado entonces $R > 0$. En el primer caso obtenemos

$$P\{R = 0\} = 1 - \rho.$$

En el segundo caso, el cliente llegará durante un tiempo de servicio y, por lo tanto, pasará a la órbita. Permanecerá allí durante lo que resta de ese tiempo de servicio más subsecuentes tiempos de servicio, hasta que consiga acceder al servidor. Sea W_1 el tiempo de servicio residual y W_2 el tiempo desde que acaba el servicio en curso hasta que el cliente accede al servidor.

Si el cliente marcado realiza k reintentos durante su tiempo de espera, será en el último donde encuentre el servidor libre y los primeros $k - 1$ reintentos se realizan durante tiempos de servicio. Parte de éstos se habrán producido en el intervalo $(0, W_1)$ y el resto en $[W_1, W_1 + W_2)$. Sea $e_{lm}(\tau)$ la probabilidad de que el cliente marcado realice $l \geq 0$ reintentos y lleguen $m \geq 0$ clientes durante el tiempo de servicio residual, dado que el tiempo transcurrido desde el inicio del servicio hasta su llegada es τ . Entonces

$$e_{lm}(\tau) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} \frac{(\mu x)^l (\lambda x)^m}{l!m!} dB_\tau(x), \quad l \geq 0, \quad m \geq 0,$$

siendo $B_\tau(x)$ la función de distribución condicionada del tiempo de servicio residual, dado que el tiempo de servicio transcurrido es τ , y por lo tanto $dB_\tau(x) = (1 - B(\tau))^{-1} dB(\tau + x)$, para $x \geq 0$.

Sea x_{rm}^k , para $0 \leq r \leq k - 1$ y $m \geq 1$, la probabilidad condicionada de que el cliente marcado realice k reintentos durante $[W_1, W_1 + W_2)$, dado que

en el instante de la salida previa había acumulado r reintentos desde W_1 y había m clientes en órbita. Entonces, tenemos que

$$P\{R = k\} = \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty p_{1j\tau} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^\infty e_{lm}(\tau) x_{0,j+m+1}^{k-l} d\tau, \quad k \geq 1,$$

donde $p_{1j\tau}$ es la probabilidad límite de que el servidor esté ocupado, el tamaño de la órbita sea j y el tiempo transcurrido desde el inicio del servicio sea τ .

Las probabilidades límite $p_{1j\tau}$ no tienen una solución analítica sencilla, por lo que se aproxima $B_\tau(x)$ por $\hat{B}(x)$. Por lo tanto, $e_{lm}(\tau)$ es estimada por \hat{e}_{lm} , para $l \geq 0$ y $m \geq 0$, teniendo que

$$P\{R = k\} = \sum_{j=0}^\infty p_{1j} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^\infty \hat{e}_{lm} x_{0,j+m+1}^{k-l}, \quad k \geq 1.$$

Parece difícil encontrar una solución exacta o numéricamente tratable para x_{rm}^k en el modelo original con capacidad infinita de la órbita, por lo que nuevamente obtenemos resultados para el modelo truncado $\{(C^K(t), N^K(t), \xi^K(t)); t \geq 0\}$. Para dicho modelo tenemos que

$$P\{R^K = 0\} = \sum_{j=0}^K p_{0j}^K + p_{1K}^K,$$

$$P\{R^K = k\} = \sum_{j=0}^{K-1} p_{1j}^K \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{m=0}^{K-1-j} \hat{e}_{lm} x_{0,j+m+1}^{k-l} + \left(\sum_{m=K-j}^\infty \hat{e}_{lm} \right) x_{0K}^{k-l} \right),$$

$$k \geq 1,$$

donde para calcular las probabilidades x_{rm}^k utilizamos el Teorema 1.8, que enunciamos a continuación. La demostración puede consultarse en [21, 23].

Teorema 1.8. *Para cada $k \geq 1$, las probabilidades $\{x_{rm}^k; 0 \leq r \leq k-1, 1 \leq m \leq K\}$ pueden calcularse de forma recursiva a partir de las ecuaciones*

$$\mathbf{x}_{k-1} = (I_K - A_0)^{-1} \mathbf{g},$$

$$\mathbf{x}_r = (I_K - A_0)^{-1} \sum_{n=r+1}^{k-1} A_{n-r} \mathbf{x}_n, \quad 0 \leq r \leq k-2,$$

donde $\mathbf{x}_r = (x_{r1}^k, \dots, x_{rK}^k)'$, \mathbf{g} es un vector columna cuyo m -ésimo elemento viene dado por $\mu/(\lambda + m\mu)$, para $1 \leq m \leq K$, I_K es la matriz identidad de dimensión K , $A_0 = (a_{ij}^0)$ es una matriz cuadrada de dimensión K con elementos

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} \frac{\lambda e_{00} + (i-1)\mu e_{01}}{\lambda + i\mu}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = i, \\ \frac{\lambda r_0 + (K-1)\mu(r_0 - e_{00})}{\lambda + K\mu}, & \text{si } i = j = K, \\ \frac{(i-1)\mu e_{00}}{\lambda + i\mu}, & \text{si } 2 \leq i \leq K, j = i-1, \\ \frac{\lambda e_{0,j-i} + (i-1)\mu e_{0,j-i+1}}{\lambda + i\mu}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq K-1, \\ \frac{\lambda(r_0 - \sum_{n=0}^{K-i-1} e_{0n})}{\lambda + i\mu} \\ + \frac{(i-1)\mu(r_0 - \sum_{n=0}^{K-i} e_{0n})}{\lambda + i\mu}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = K, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde r_l representa la probabilidad de que el cliente marcado realice l reintentos durante un tiempo de servicio. Finalmente, la matriz cuadrada $A_{n-r} = (a_{ij}^{n-r})$ de dimensión K tiene sus elementos a_{ij}^{n-r} definidos como los elementos a_{ij}^0 sin más que sustituir las cantidades e_{0m} y r_0 por $e_{n-r,m}$ y r_{n-r} , respectivamente.

Las expresiones para \hat{e}_{lm} , e_{lm} y r_l pueden encontrarse en [21, 23].

En cuanto al número medio de reintentos realizados por un cliente durante su tiempo de espera, podemos comprobar en [21] que su valor exacto viene dado por

$$E[R] = \frac{\lambda\mu}{1-\rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right).$$

Capítulo 2

Eventos exitosos y bloqueados en el sistema $M/M/c$ con reintentos

Este capítulo tiene como objetivo estudiar nuevos descriptores que nos ayuden a tener información sobre el estado de la órbita en los sistemas de colas con reintentos, más concretamente en el modelo $M/M/c$ con reintentos. Así, introducimos nuevas variables para distinguir entre la ocurrencia de reintentos exitosos (es decir, aquellos reintentos que encuentran algún servidor libre) y reintentos bloqueados (que encuentran todos los servidores ocupados). También vamos a distinguir entre llegadas exitosas (es decir, aquellas que llegan por primera vez al sistema y encuentran algún servidor libre) y llegadas bloqueadas (que encuentran todos los servidores ocupados). El capítulo está basado en el artículo de Amador y Artalejo [4].

Comenzamos en la Sección 2.1 definiendo los nuevos descriptores objeto de nuestro estudio y las relaciones existentes entre ellos. En la Sección 2.2 vamos a trabajar con las funciones generatrices de estos descriptores para el modelo $M/M/c$ con una órbita con capacidad $K < \infty$. Consideramos esta aproximación ya que para el modelo original con capacidad infinita de la órbita no podemos obtener soluciones a los sistemas infinitos que se nos plantean. A través de la inversión numérica de las funciones generatrices vamos a poder obtener las funciones de masa de los descriptores en estudio. La Sección 2.2 está dividida a su vez en cuatro partes. La Subsección 2.2.1

está dedicada al estudio de la distribución del número de reintentos exitosos mediante el método de la función generatriz, así como a la obtención de sus primeros momentos. En las Subsecciones 2.2.2 y 2.2.3 el estudio es extendido al caso del número de reintentos bloqueados y del número de llegadas exitosas. En la Subsección 2.2.4 tratamos la correlación entre los descriptores mediante la función generatriz conjunta de los mismos. Es interesante señalar que prácticamente no existen trabajos en la literatura de los sistemas de colas con reintentos dedicados al estudio de la correlación.

En la Sección 2.3 estudiamos las funciones de masa de nuestros descriptores a través de métodos directos. Esta sección está desglosada en tres subsecciones, una para cada descriptor. En la Subsección 2.3.1 vamos a estudiar el cálculo de las probabilidades del número de reintentos exitosos para el modelo original con capacidad infinita de la órbita. Las aproximaciones a las funciones de masa de probabilidad del número de reintentos bloqueados y del número de llegadas exitosas se llevan a cabo en las Subsecciones 2.3.2 y 2.3.3 respectivamente. Para ello, nuevamente consideramos el modelo $M/M/c$ con órbita finita.

Por último, en la Sección 2.4 vamos a exponer ejemplos numéricos que ilustran los resultados obtenidos en las secciones anteriores. También comentamos cómo elegir el nivel de truncamiento adecuado para la órbita. Además diseñamos un problema de optimización basado en los descriptores estudiados a lo largo del capítulo.

2.1 Definición de los descriptores en estudio

Antes de definir los nuevos descriptores objeto de nuestro estudio necesitamos hacer referencia al periodo de ocupación. Recordemos que un periodo de ocupación, L , viene definido como el tiempo que transcurre hasta que el proceso \mathcal{X} alcanza por primera vez el estado $(0,0)$, dado que el estado inicial es $(1,0)$.

A continuación definimos los nuevos descriptores:

R^s : número de reintentos exitosos durante un periodo de ocupación; es decir, aquellos clientes de la órbita que, al reintentar acceder al servicio, encuentran al menos un servidor libre y, por lo tanto, pasan a ser servidos.

R^b : número de reintentos bloqueados durante un periodo de ocupación; es decir, aquellos clientes de la órbita que, al reintentar acceder al servicio, encuentran todos los servidores ocupados.

A^s : número de llegadas exitosas durante un periodo de ocupación; es decir, aquellos clientes que a su llegada al sistema encuentran algún servidor libre.

A^b : número de llegadas bloqueadas durante un periodo de ocupación; es decir, aquellos clientes que a su llegada al sistema encuentran todos los servidores ocupados (pasando, por lo tanto, a formar parte de la órbita).

Una vez definidos estos descriptores vamos a ver qué relaciones podemos encontrar entre ellos. Siguiendo un argumento de cruce de nivel, tenemos que durante un periodo de ocupación el número de veces que el proceso \mathcal{X} pasa del nivel $j - 1$ de la órbita al nivel j (es decir, se produce una llegada bloqueada) coincide con el número de veces que el proceso \mathcal{X} cruza del nivel j al nivel $j - 1$ (es decir, tiene lugar un reintento exitoso). Por lo tanto, tenemos la siguiente igualdad:

$$R^s = A^b. \quad (2.1)$$

Además tenemos las siguientes relaciones:

$$I = 1 + A^s + A^b, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^I R_i = R^s + R^b, \quad (2.3)$$

donde I es el número total de clientes servidos durante un periodo de ocupación y R_i , para $i = 1, \dots, I$, es el número de reintentos realizados por el i -ésimo cliente hasta que encuentra un servidor libre.

La relación (2.2) nos dice que el número total clientes servidos durante un periodo de ocupación coincide con el número total de llegadas exitosas y de llegadas bloqueadas más la llegada con la que se inicia el periodo de ocupación. En cuanto a la relación (2.3) tenemos que, durante un periodo de ocupación, el número total de reintentos (exitosos más bloqueados) es igual a la suma de los reintentos realizados por todos y cada uno de los clientes que acaban siendo servidos a lo largo de dicho periodo.

Si tomamos esperanzas sobre las expresiones (2.1)-(2.3) obtenemos las siguientes relaciones para los valores medios de los descriptores:

$$E[R^s] = E[A^b], \quad (2.4)$$

$$E[I] = 1 + E[A^s] + E[A^b], \quad (2.5)$$

$$E[I] E[R] = E[R^s] + E[R^b], \quad (2.6)$$

donde $E[R]$ es el número medio de reintentos realizados por un cliente arbitrario de la órbita hasta que encuentra un servidor libre. El estudio de los descriptores I y R lo podemos encontrar en [15, 21].

2.2 Distribución de los descriptores: Método de la función generatriz

Si intentamos encontrar las funciones generatrices de los nuevos descriptores para el modelo original $M/M/c$ con reintentos y capacidad infinita de la órbita nos vamos a encontrar con un sistema infinito de ecuaciones que no podemos solucionar. Por ello, en primer lugar, vamos a aproximar este modelo infinito por un modelo truncado que mantiene las principales propiedades del modelo original [23, 33, 54]. Para ello vamos a limitar la capacidad de la órbita a un valor suficientemente grande, K , de tal forma que los clientes que lleguen y encuentren el sistema en el estado (c, K) (es decir, todos los servidores ocupados y la órbita completa) se pierden. El generador infinitesimal del modelo truncado resultante viene dado por la siguiente matriz cuadrada, tridiagonal por bloques, de dimensión $M = (c+1)(K+1)$:

$$Q_K = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ A_1^{(-1)} & A_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_{K-1}^{(0)} & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_K^{(-1)} & A_K^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde $A_j^{(0)}$ ($0 \leq j \leq K$), $A_j^{(+1)}$ ($0 \leq j \leq K-1$) y $A_j^{(-1)}$ ($1 \leq j \leq K$) son las siguientes matrices de orden $(c+1) \times (c+1)$:

$$A_j^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & j\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & j\mu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j\mu \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_j^{(+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$A_j^{(0)} = \begin{pmatrix} -(\lambda + j\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \nu & -(\lambda + \nu + j\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & c\nu & -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu) \end{pmatrix}.$$

Para desarrollos matriciales posteriores hacemos referencia a la notación matricial del Apéndice 2.A. Asimismo, y teniendo en cuenta dicho apéndice, definimos las matrices $B_0^{(0)} = A_0^{(0)} - \lambda E_{12}(c+1)$, $B_j^{(0)}(z) = A_0^{(0)} - \delta_{0j} \lambda z E_{12}(c+1) - \lambda(1-z)W_{c+1}$, para $0 \leq j \leq K$, y $C_j^{(0)}(z) = A_j^{(0)} + j\mu(z-1)E_{c+1,c+1}(c+1)$, para $1 \leq j \leq K$.

A continuación vamos a determinar las funciones generatrices y los momentos de los descriptores R^s , R^b y A^s para el modelo truncado. No será necesario encontrar la función generatriz y los momentos de A^b ya que $A^b = R^s$, en virtud de (2.1).

2.2.1 Número de reintentos exitosos

Denotamos por R_{ij}^s el número de reintentos exitosos durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i, j) , con $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$. Sea $\Psi_{ij}^{R^s}(z)$ su correspondiente función generatriz; es decir, $\Psi_{ij}^{R^s}(z) = E \left[z^{R_{ij}^s} \right]$, para $|z| \leq 1$, y sea $\widehat{R}_{ij}^s(n)$ su momento factorial de orden n ; es decir, $\widehat{R}_{ij}^s(n) = E \left[R_{ij}^s (R_{ij}^s - 1) \cdots (R_{ij}^s - n + 1) \right]$, para $n \geq 1$. Obviamente, $R^s = R_{10}^s$.

Los siguientes vectores corresponden a las funciones generatrices y a los momentos factoriales particionados de acuerdo al nivel de la órbita:

$$\begin{aligned}
\Psi_j^{R^s}(z) &= (\Psi_{0j}^{R^s}(z), \dots, \Psi_{cj}^{R^s}(z))', \quad 0 \leq j \leq K, \\
\Psi^{R^s}(z) &= (\Psi_0^{R^s}(z), \dots, \Psi_K^{R^s}(z))', \\
\widehat{\mathbf{R}}_j^s(n) &= (\widehat{R}_{0j}^s(n), \dots, \widehat{R}_{cj}^s(n))', \quad 0 \leq j \leq K, \\
\widehat{\mathbf{R}}^s(n) &= (\widehat{\mathbf{R}}_0^s(n), \dots, \widehat{\mathbf{R}}_K^s(n))'.
\end{aligned}$$

El Teorema 2.1, que enunciamos seguidamente, proporciona los sistemas finitos de ecuaciones que han de verificar las funciones generatrices y los momentos de las variables R_{ij}^s , para $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$.

Teorema 2.1. a) Las funciones generatrices $\left\{ \Psi_{ij}^{R^s}(z); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K \right\}$ satisfacen el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - D(z)) \Psi^{R^s}(z) = -\lambda \mathbf{e}_1(M), \quad (2.8)$$

donde

$$D(z) = \lambda E_{12}(M) + (1-z)U_{K+1} \otimes A_1^{(-1)}.$$

b) Los momentos factoriales $\left\{ \widehat{R}_{ij}^s(n); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K \right\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques

$$\begin{aligned}
(Q_K - \lambda E_{12}(M)) \widehat{\mathbf{R}}^s(n) &= -n \left(U_{K+1} \otimes A_1^{(-1)} \right) \widehat{\mathbf{R}}^s(n-1), \\
n &\geq 1,
\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^s(0) = \mathbf{e}(M). \quad (2.10)$$

Demostración. Si utilizamos un análisis de primer paso encontramos que las funciones generatrices $\Psi_{ij}^{R^s}(z)$ verifican las siguientes ecuaciones:

$$\Psi_{00}^{R^s}(z) = 1, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ij}^{R^s}(z) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j}^{R^s}(z) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i-1,j}^{R^s}(z) \\
&+ \frac{j\mu z}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j-1}^{R^s}(z), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i,j) \neq (0,0),
\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Psi_{c_j}^{R^s}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \Psi_{c,j+1}^{R^s}(z) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} \Psi_{c-1,j}^{R^s}(z), \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (2.13)$$

$$\Psi_{cK}^{R^s}(z) = \Psi_{c-1,K}^{R^s}(z). \quad (2.14)$$

La ecuación (2.11) es obvia, ya que si partimos del estado $(0, 0)$ el número de reintentos exitosos durante lo que resta del periodo de ocupación será 0 con probabilidad 1. El primer término en la parte derecha de las ecuaciones (2.12) corresponde a la llegada al sistema de un nuevo cliente, el segundo término a la finalización de un servicio y el tercero a un cliente de la órbita que accede a un servidor libre (es decir, un reintento exitoso). En las ecuaciones (2.13) recogemos el hecho de que si los c servidores están ocupados y la órbita no está completa las únicas transiciones posibles son debidas a la llegada de un nuevo cliente, que pasará a la órbita (es decir, una llegada bloqueada), o a la finalización de un servicio. Por último, si los c servidores están ocupados y la órbita está completa la única transición posible es al estado $(c-1, K)$, es decir, que un cliente que está siendo servido acabe su servicio.

Podemos expresar las ecuaciones (2.11)-(2.14) en forma matricial como $Q_K^{R^s}(z)\Psi^{R^s}(z) = -\lambda\mathbf{e}_1(M)$, donde, por ejemplo para el caso $c = 2, K = 2$, la matriz $Q_K^{R^s}(z)$ quedaría

$$\begin{pmatrix} d_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & d_{10} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\nu & d_{20} & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu z & 0 & d_{01} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu z & \nu & d_{11} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu & d_{21} & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu z & 0 & d_{02} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu z & \nu & d_{12} & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu & d_{22} \end{pmatrix},$$

con $d_{ij} = -((1 - \delta_{i2}\delta_{j2})\lambda + i\nu + (1 - \delta_{i2})j\mu)$, para $0 \leq i \leq 2$ y $0 \leq j \leq 2$.

En general, la matriz $Q_K^{R^s}(z)$ tiene la siguiente forma tridiagonal por bloques:

$$Q_K^{R^s}(z) = \begin{pmatrix} B_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ zA_1^{(-1)} & A_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_{K-1}^{(0)} & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & zA_K^{(-1)} & A_K^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Puesto que podemos reescribir la matriz $Q_K^{R^s}(z)$ como $Q_K - D(z)$, la fórmula (2.8) queda demostrada.

A continuación nos centramos en la obtención de los momentos factoriales de orden $n \geq 1$, $\widehat{R}_{ij}^s(n)$. Es obvio que $\widehat{R}_{ij}^s(0) = 1$. Utilizando la fórmula de Leibnitz para la derivada de un producto, derivamos n veces la fórmula (2.8) y obtenemos

$$(Q_K - D(z)) \frac{d^n}{dz^n} \Psi^{R^s}(z) - n \frac{d}{dz} D(z) \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Psi^{R^s}(z) = \mathbf{0}(M), \quad n \geq 1.$$

Como $\widehat{R}_{ij}^s(n) = \frac{d^n}{dz^n} \Psi^{R^s}(z) \Big|_{z=1}$, llegamos a que el vector $\widehat{\mathbf{R}}^s(n)$, con $n \geq 1$, satisface las ecuaciones (2.9), como queríamos demostrar. La expresión (2.10), para $n = 0$, es trivial. \square

2.2.2 Número de reintentos bloqueados

Denotamos por R_{ij}^b el número de reintentos bloqueados durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i, j) , con $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$. Sea $\Psi_{ij}^{R^b}(z)$ su correspondiente función generatriz y $\widehat{R}_{ij}^b(n)$ su momento factorial de orden n , para $n \geq 0$. Nosotros estamos interesados en $R^b = R_{10}^b$.

La siguiente notación vectorial corresponde a las funciones generatrices y a los momentos factoriales particionados de acuerdo al nivel de la órbita:

$$\begin{aligned} \Psi_j^{R^b}(z) &= \left(\Psi_{0j}^{R^b}(z), \dots, \Psi_{cj}^{R^b}(z) \right)', \quad 0 \leq j \leq K, \\ \Psi^{R^b}(z) &= \left(\Psi_0^{R^b}(z), \dots, \Psi_K^{R^b}(z) \right)', \\ \widehat{\mathbf{R}}_j^b(n) &= \left(\widehat{R}_{0j}^b(n), \dots, \widehat{R}_{cj}^b(n) \right)', \quad 0 \leq j \leq K, \\ \widehat{\mathbf{R}}^b(n) &= \left(\widehat{\mathbf{R}}_0^b(n), \dots, \widehat{\mathbf{R}}_K^b(n) \right)'. \end{aligned}$$

El Teorema 2.2 recoge el sistema de ecuaciones que han de verificar la funciones generatrices de las variables $\{R_{ij}^b, 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$, así como el correspondiente a sus momentos factoriales.

Teorema 2.2. a) Las funciones generatrices $\{\Psi_{ij}^{R^b}(z); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ satisfacen el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - C(z)) \Psi^{R^b}(z) = -\lambda \mathbf{e}_1(M), \quad (2.15)$$

donde

$$C(z) = \lambda E_{12}(M) + \mu(1-z)V_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1).$$

b) Los momentos factoriales $\{\widehat{R}_{ij}^b(n); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - \lambda E_{12}(M)) \widehat{\mathbf{R}}^b(n) = -n\mu(V_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1)) \widehat{\mathbf{R}}^b(n-1), \quad n \geq 1, \quad (2.16)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^b(0) = \mathbf{e}(M).$$

Demostración. Llevando a cabo un análisis de primer paso tenemos que las funciones generatrices $\Psi_{ij}^{R^b}(z)$ verifican las siguientes ecuaciones:

$$\Psi_{00}^{R^b}(z) = 1, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}^{R^b}(z) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j}^{R^b}(z) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i-1,j}^{R^b}(z) \\ &+ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j-1}^{R^b}(z), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i,j) \neq (0,0), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{cj}^{R^b}(z) &= \frac{\lambda}{\lambda + c\nu + j\mu} \Psi_{c,j+1}^{R^b}(z) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu + j\mu} \Psi_{c-1,j}^{R^b}(z) \\ &+ \frac{j\mu z}{\lambda + c\nu + j\mu} \Psi_{cj}^{R^b}(z), \quad 0 \leq j \leq K-1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\Psi_{cK}^{R^b}(z) = \frac{c\nu}{c\nu + K\mu} \Psi_{c-1,K}^{R^b}(z) + \frac{K\mu z}{c\nu + K\mu} \Psi_{cK}^{R^b}(z). \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.17)-(2.20) se pueden expresar en forma matricial como

$Q_K^{R^b}(z)\Psi^{R^b}(z) = -\lambda\mathbf{e}_1(M)$, donde

$$Q_K^{R^b}(z) = \begin{pmatrix} B_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \dots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ A_1^{(-1)} & C_1^{(0)}(z) & A_1^{(+1)} & \dots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \dots & C_{K-1}^{(0)}(z) & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \dots & A_K^{(-1)} & C_K^{(0)}(z) \end{pmatrix}.$$

Puesto que podemos descomponer la matriz $Q_K^{R^b}(z)$ en la diferencia de matrices $Q_K - C(z)$, entonces queda demostrada la fórmula (2.15).

Para demostrar el apartado b) de este teorema basta tener en cuenta que $\widehat{R}_{ij}^b(n) = \left. \frac{d^n}{dz^n} \Psi^{R^b}(z) \right|_{z=1}$. Usando nuevamente la fórmula de Leibnitz para la derivada n -ésima de (2.15) obtenemos

$$(Q_K - C(z)) \frac{d^n}{dz^n} \Psi^{R^b}(z) - n \frac{d}{dz} C(z) \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Psi^{R^b}(z) = \mathbf{0}(M), \quad n \geq 1,$$

y evaluando esta derivada en el punto $z = 1$ concluimos que el vector $\widehat{\mathbf{R}}^b(n)$ satisface las ecuaciones (2.16), como queríamos demostrar. \square

2.2.3 Número de llegadas exitosas

Acabamos el estudio unidimensional de los nuevos descriptores obteniendo la función generatriz y los momentos factoriales del número de llegadas exitosas, cuyos resultados recogemos en el Teorema 2.3.

Denotamos por A_{ij}^s el número de llegadas exitosas durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i, j) , con $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$. Sea $\Psi_{ij}^{A^s}(z)$ su correspondiente función generatriz y $\widehat{A}_{ij}^s(n)$ su momento factorial de orden n , para $n \geq 1$. En particular, $A^s = A_{10}^s$.

Los siguientes vectores corresponden a las funciones generatrices y a los momentos factoriales particionados según el nivel de la órbita:

$$\begin{aligned}
\Psi_j^{A^s}(z) &= (\Psi_{0j}^{A^s}(z), \dots, \Psi_{cj}^{A^s}(z))', \quad 0 \leq j \leq K, \\
\Psi^{A^s}(z) &= (\Psi_0^{A^s}(z), \dots, \Psi_K^{A^s}(z))', \\
\widehat{\mathbf{A}}_j^s(n) &= (\widehat{A}_{0j}^s(n), \dots, \widehat{A}_{cj}^s(n))', \quad 0 \leq j \leq K, \\
\widehat{\mathbf{A}}^s(n) &= (\widehat{\mathbf{A}}_0^s(n), \dots, \widehat{\mathbf{A}}_K^s(n))'.
\end{aligned}$$

Teorema 2.3. a) Las funciones generatrices $\{\Psi_{ij}^{A^s}(z); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ satisfacen el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - B(z)) \Psi^{A^s}(z) = -\lambda \mathbf{e}_1(M), \quad (2.21)$$

donde

$$B(z) = \lambda z E_{12}(M) + I_{K+1} \otimes \lambda(1-z)W_{c+1}.$$

b) Los momentos factoriales $\{\widehat{A}_{ij}^s(n); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - \lambda E_{12}(M)) \widehat{\mathbf{A}}^s(n) = -n\lambda (I_{K+1} \otimes W_{c+1} - E_{12}(M)) \widehat{\mathbf{A}}^s(n-1), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^s(0) = \mathbf{e}(M). \quad (2.23)$$

Demostración. Mediante un análisis de primer paso obtenemos que las funciones generatrices $\Psi_{ij}^{A^s}(z)$ verifican las siguientes ecuaciones:

$$\Psi_{00}^{A^s}(z) = 1, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ij}^{A^s}(z) &= \frac{\lambda z}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j}^{A^s}(z) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i-1,j}^{A^s}(z) \\
&+ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Psi_{i+1,j-1}^{A^s}(z), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i,j) \neq (0,0),
\end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\Psi_{cj}^{A^s}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \Psi_{c,j+1}^{A^s}(z) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} \Psi_{c-1,j}^{A^s}(z), \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (2.26)$$

$$\Psi_{cK}^{A^s}(z) = \Psi_{c-1,K}^{A^s}(z). \quad (2.27)$$

Podemos expresar el sistema de ecuaciones (2.24)-(2.27) de manera matricial como $Q_K^{A^s}(z)\Psi^{A^s}(z) = -\lambda\mathbf{e}_1(M)$, donde

$$Q_K^{A^s}(z) = \begin{pmatrix} B_0^{(0)}(z) & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \dots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ A_1^{(-1)} & B_1^{(0)}(z) & A_1^{(+1)} & \dots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \dots & B_{K-1}^{(0)}(z) & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \dots & A_K^{(-1)} & B_K^{(0)}(z) \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz $Q_K^{A^s}(z)$ la podemos escribir como $Q_K - B(z)$, llegamos a la fórmula (2.21).

Si derivamos n veces (2.21) y evaluamos el resultado en el punto $z = 1$ obtenemos el sistema de ecuaciones dado por (2.22) y (2.23) para los momentos factoriales $\{\widehat{A}_{ij}^s(n); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$. \square

En los Teoremas 2.1-2.3 hemos llegado a sistemas de ecuaciones finitos con estructura tridiagonal por bloques que pueden resolverse por diferentes métodos, como pueden ser algoritmos de tipo eliminación gaussiana y sustitución regresiva, método iterativo de Gauss-Seidel, etc. [25, 42]. Por otro lado, la inversión numérica de los sistemas (2.8), (2.15) y (2.21) puede llevarse a cabo a través del método *FFT* (Fast Fourier Transform) que nos proporcionará las correspondientes funciones de masa de probabilidad de los descriptores en estudio [52].

2.2.4 Correlación entre los descriptores

Para finalizar esta sección vamos a centrarnos en el estudio de la correlación existente entre los descriptores R^s , R^b , A^s y A^b , a través de los coeficientes de correlación dos a dos. Para ello vamos a trabajar con la función generatriz conjunta de estos cuatro descriptores.

Puesto que $R^s = A^b$, será suficiente con calcular tres de los seis coeficientes de correlación correspondientes a los cuatro descriptores. En concreto vamos a obtener $\rho(R^b, A^s)$, $\rho(R^b, A^b)$ y $\rho(A^s, A^b)$.

Teniendo en cuenta la definición de coeficiente de correlación, por ejemplo, el correspondiente a R^b y A^s viene dado por

$$\rho(R^b, A^s) = \frac{E[R^b A^s] - E[R^b] E[A^s]}{\sigma(R^b)\sigma(A^s)},$$

el problema se reduce a la obtención de los momentos cruzados $E[R^b A^s]$, $E[R^b A^b]$ y $E[A^s A^b]$, ya que las esperanzas $E[R^b]$, $E[A^s]$ y $E[A^b]$ y las desviaciones típicas $\sigma(R^b)$, $\sigma(A^s)$ y $\sigma(A^b)$ las podemos obtener aplicando los Teoremas 2.1-2.3.

Para calcular $E[R^b A^s]$ necesitamos resolver un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los momentos $\tilde{m}_{ij} = E[R_{ij}^b A_{ij}^s]$, para $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$. En el caso particular $(i, j) = (1, 0)$ obtenemos el momento deseado $\tilde{m}_{10} = E[R^b A^s]$. Asimismo, para los momentos $E[R^b A^b]$ y $E[A^s A^b]$ hemos de resolver los correspondientes sistemas de ecuaciones para $\hat{m}_{ij} = E[R_{ij}^b A_{ij}^b]$ y $\bar{m}_{ij} = E[A_{ij}^s A_{ij}^b]$, respectivamente. Esto se lleva a cabo en el Teorema 2.4. Como hemos hecho en ocasiones anteriores, agrupamos los momentos en vectores de acuerdo a los niveles de la órbita, teniendo para cada $0 \leq j \leq K$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_j &= (\tilde{m}_{0j}, \dots, \tilde{m}_{cj})', & \tilde{\mathbf{m}} &= (\tilde{\mathbf{m}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{m}}_K)', \\ \hat{\mathbf{m}}_j &= (\hat{m}_{0j}, \dots, \hat{m}_{cj})', & \hat{\mathbf{m}} &= (\hat{\mathbf{m}}_0, \dots, \hat{\mathbf{m}}_K)', \\ \bar{\mathbf{m}}_j &= (\bar{m}_{0j}, \dots, \bar{m}_{cj})', & \bar{\mathbf{m}} &= (\bar{\mathbf{m}}_0, \dots, \bar{\mathbf{m}}_K)'. \end{aligned}$$

Teorema 2.4. a) *Los momentos cruzados $\{\tilde{m}_{ij}; 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques*

$$\begin{aligned} (Q_K - \lambda E_{12}(M)) \tilde{\mathbf{m}} &= \lambda (E_{12}(M) - I_{K+1} \otimes W_{c+1}) \hat{\mathbf{R}}^b(1) \\ &\quad - \mu (V_{K+1} \otimes E_{c+1, c+1}(c+1)) \hat{\mathbf{A}}^s(1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

b) *Los momentos cruzados $\{\hat{m}_{ij}; 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques*

$$\begin{aligned} (Q_K - \lambda E_{12}(M)) \hat{\mathbf{m}} &= - (W_{K+1} \otimes A_0^{(+1)}) \hat{\mathbf{R}}^b(1) \\ &\quad - \mu (V_{K+1} \otimes E_{c+1, c+1}(c+1)) \hat{\mathbf{A}}^b(1). \end{aligned}$$

c) Los momentos cruzados $\{\overline{m}_{ij}; 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema tridiagonal por bloques

$$(Q_K - \lambda E_{12}(M)) \overline{\mathbf{m}} = - \left(W_{K+1} \otimes A_0^{(+1)} \right) \widehat{\mathbf{A}}^s(1) \\ + \lambda (E_{12}(M) - I_{K+1} \otimes W_{c+1}) \widehat{\mathbf{A}}^b(1).$$

Demostración. Para $0 \leq i \leq c$ y $0 \leq j \leq K$, consideramos la función generatriz conjunta, definida como

$$\Phi_{ij}(z_1, z_2, z_3, z_4) = E \left[z_1^{R_{ij}^s} z_2^{R_{ij}^b} z_3^{A_{ij}^s} z_4^{A_{ij}^b} \right], \quad |z_k| \leq 1, 1 \leq k \leq 4.$$

Usando un análisis de primer paso obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Phi_{00}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1, \quad (2.29)$$

$$\Phi_{ij}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\lambda z_3}{\lambda + i\nu + j\mu} \Phi_{i+1,j}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \Phi_{i-1,j}(z_1, z_2, z_3, z_4) + \frac{j\mu z_1}{\lambda + i\nu + j\mu} \Phi_{i+1,j-1}(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq K, (i, j) \neq (0, 0), \quad (2.30)$$

$$\Phi_{cj}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\lambda z_4}{\lambda + c\nu + j\mu} \Phi_{c,j+1}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu + j\mu} \Phi_{c-1,j}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ + \frac{j\mu z_2}{\lambda + c\nu + j\mu} \Phi_{cj}(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (2.31)$$

$$\Phi_{cK}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{c\nu}{c\nu + K\mu} \Phi_{c-1,K}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ + \frac{K\mu z_2}{c\nu + K\mu} \Phi_{cK}(z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (2.32)$$

Sea $\phi_{ij}(n_1, n_2, n_3, n_4)$ el momento factorial conjunto de orden (n_1, n_2, n_3, n_4) del vector (R^s, R^b, A^s, A^b) , es decir, para $n_k \geq 0$ y $1 \leq k \leq 4$, tenemos

$$\phi_{ij}(n_1, n_2, n_3, n_4) = E \left[R_{ij}^s \dots (R_{ij}^s - n_1 + 1) \dots A_{ij}^b \dots (A_{ij}^b - n_4 + 1) \right].$$

Derivando las ecuaciones (2.29)-(2.32) n_i veces con respecto a z_i , para $1 \leq i \leq 4$, y tomando $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 1, 1, 0)$ tenemos que

$$\phi_{00}(0, 1, 1, 0) = 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + i\nu + j\mu)\phi_{ij}(0, 1, 1, 0) &= \lambda\phi_{i+1,j}(0, 1, 1, 0) + i\nu\phi_{i-1,j}(0, 1, 1, 0) \\ &\quad + j\mu\phi_{i+1,j-1}(0, 1, 1, 0) + \lambda\phi_{i+1,j}(0, 1, 0, 0), \\ 0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad (i, j) &\neq (0, 0), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + c\nu)\phi_{cj}(0, 1, 1, 0) &= \lambda\phi_{c,j+1}(0, 1, 1, 0) + c\nu\phi_{c-1,j}(0, 1, 1, 0) \\ &\quad + j\mu\phi_{cj}(0, 0, 1, 0), \quad 0 \leq j \leq K-1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$c\nu\phi_{cK}(0, 1, 1, 0) = c\nu\phi_{c-1,K}(0, 1, 1, 0) + K\mu\phi_{cK}(0, 0, 1, 0). \quad (2.36)$$

Para obtener la fórmula (2.28) solamente hemos de tener en cuenta que $\tilde{m}_{ij} = \phi_{ij}(0, 1, 1, 0)$, $\widehat{R}_{ij}^b(1) = \phi_{ij}(0, 1, 0, 0)$ y $\widehat{A}_{ij}^s(1) = \phi_{ij}(0, 0, 1, 0)$. Expresando las ecuaciones (2.33)-(2.36) en forma matricial llegamos a (2.28).

La demostración para los apartados b) y c) es similar y por lo tanto la omitimos. \square

2.3 Distribución de los descriptores: Método directo

En esta sección proponemos métodos directos para obtener la función de masa de probabilidad de los descriptores R^s , R^b y A^s . El principal motivo para utilizar estos métodos es evitar la inversión numérica de las funciones generatrices.

Vamos a comenzar encontrando la función de masa de probabilidad de R^s . En este caso podremos hacerlo para el modelo original $M/M/c$ con reintentos, con capacidad infinita de la órbita, es decir, $K = \infty$. Para los descriptores R^b y A^s trabajaremos nuevamente con el modelo truncado con capacidad finita de la órbita.

2.3.1 Número de reintentos exitosos

Sea $x_{ij}^s(r)$ la probabilidad de que se realicen $r \geq 0$ reintentos exitosos durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i, j) . Obviamente $P\{R^s = r\} = x_{10}^s(r)$, para $r \geq 0$.

Es importante darse cuenta de que $x_{ij}^s(r) > 0$ si y sólo si $j \leq r$, lo que nos va a permitir encontrar una solución recursiva a estas probabilidades para el modelo original con capacidad infinita de la órbita, resultado que recoge el Teorema 2.5.

Agrupamos estas probabilidades en vectores, de acuerdo al nivel de la órbita, como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j^s(r) &= (x_{0j}^s(r), \dots, x_{cj}^s(r))', \quad 0 \leq j \leq r, \\ \mathbf{x}^s(r) &= (\mathbf{x}_0^s(r), \dots, \mathbf{x}_r^s(r))', \quad r \geq 0.\end{aligned}$$

Teorema 2.5. a) Para $r = 0$, las probabilidades $\{x_{i0}^s(0); 0 \leq i \leq c\}$ verifican el sistema de ecuaciones

$$B_0^{(0)} \mathbf{x}^s(0) = -\lambda \mathbf{e}_1(c+1). \quad (2.37)$$

b) Para cada $r \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{x_{ij}^s(r); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq r\}$ verifican el sistema de ecuaciones

$$Q^{R^s}(r) \mathbf{x}^s(r) = \mathbf{b}^s(r), \quad (2.38)$$

donde

$$Q^{R^s}(r) = \begin{pmatrix} B_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ 0_{c+1} & A_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_{r-1}^{(0)} & A_{r-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & A_r^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^s(r) &= (\mathbf{b}_0^s(r), \dots, \mathbf{b}_r^s(r))', \\ \mathbf{b}_j^s(r) &= -j\mu (x_{1,j-1}^s(r-1), \dots, x_{c,j-1}^s(r-1), 0)'. \quad 0 \leq j \leq r.\end{aligned}$$

Demostración. Utilizando un argumento de primer paso tenemos que, para cada $r \geq 0$ fijo, las probabilidades $\{x_{ij}^s(r); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq r\}$ han de verificar el siguiente sistema finito de ecuaciones:

$$x_{00}^s(r) = \delta_{0r}, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^s(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i+1,j}^s(r) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i-1,j}^s(r) \\ &+ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i+1,j-1}^s(r-1), \quad 0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j \leq r, (i,j) \neq (0,0), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$x_{cj}^s(r) = (1 - \delta_{jr}) \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} x_{c,j+1}^s(r) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} x_{c-1,j}^s(r), \quad 0 \leq j \leq r. \quad (2.41)$$

Podemos observar como las probabilidades en el punto r dependen de las probabilidades en el punto $r-1$ a través de (2.40), donde recogemos el hecho de que se produce un reintento exitoso cuando uno de los clientes de la órbita intenta obtener servicio y encuentra algún servidor libre.

Si para cada $r \geq 0$ expresamos el sistema de ecuaciones (2.39)-(2.41) en forma matricial, entonces obtenemos (2.37) y (2.38). \square

Para calcular la función de masa de probabilidad de R^s comenzamos resolviendo el sistema (2.37) y tomamos $P\{R^s = 0\} = x_{10}^s(0)$. A continuación resolvemos recursivamente el sistema (2.38) y tomamos $P\{R^s = r\} = x_{10}^s(r)$, para $r \geq 1$.

2.3.2 Número de reintentos bloqueados

Sea $x_{ij}^b(r)$ la probabilidad de tener $r \geq 0$ reintentos bloqueados durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i,j) . Obviamente $P\{R^b = r\} = x_{10}^b(r)$. Para calcular estas probabilidades vamos a considerar el modelo truncado con capacidad finita de la órbita, K . La necesidad de trabajar con el modelo aproximado en lugar del original vendrá justificada más adelante.

El Teorema 2.6 proporciona, para cada $r \geq 0$, el sistema de ecuaciones a resolver para el cálculo de las probabilidades $\{x_{ij}^b(r); 1 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$.

Para cada $r \geq 0$, denotamos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j^b(r) &= (x_{0j}^b(r), \dots, x_{cj}^b(r))', \quad 0 \leq j \leq K, \\ \mathbf{x}^b(r) &= (\mathbf{x}_0^b(r), \dots, \mathbf{x}_K^b(r))'.\end{aligned}$$

Teorema 2.6. a) Para $r = 0$, las probabilidades $\{x_{ij}^b(0); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Q^{R^b} \mathbf{x}^b(0) = -\lambda \mathbf{e}_1(M). \quad (2.42)$$

b) Para cada $r \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{x_{ij}^b(r); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema de ecuaciones

$$Q^{R^b} \mathbf{x}^b(r) = \mathbf{b}^b(r), \quad (2.43)$$

donde

$$Q^{R^b} = \begin{pmatrix} B_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ A_1^{(-1)} & B_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & B_{K-1}^{(0)} & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_K^{(-1)} & B_K^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$B_j^{(0)} = A_j^{(0)} - \frac{j\mu}{\lambda} A_0^{(+1)}, \quad 1 \leq j \leq K,$$

$$\mathbf{b}^b(r) = (\mathbf{b}_0^b(r), \dots, \mathbf{b}_K^b(r))',$$

$$\mathbf{b}_j^b(r) = -j\mu x_{cj}^b(r-1) \mathbf{e}_{c+1}(c+1), \quad 0 \leq j \leq K.$$

Demostración. Usando nuevamente un argumento de primer paso tenemos que, para cada $r \geq 0$ fijo, las probabilidades $\{x_{ij}^b(r); 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ han de verificar las ecuaciones

$$x_{00}^b(r) = \delta_{0r}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
x_{ij}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i+1,j}^b(r) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i-1,j}^b(r) \\
&+ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} x_{i+1,j-1}^b(r), \quad 0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad (i,j) \neq (0,0),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
x_{cj}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + c\nu + j\mu} x_{c,j+1}^b(r) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu + j\mu} x_{c-1,j}^b(r) \\
&+ (1 - \delta_{0r}) \frac{j\mu}{\lambda + c\nu + j\mu} x_{cj}^b(r-1), \quad 0 \leq j \leq K-1,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$x_{cK}^b(r) = \frac{c\nu}{c\nu + K\mu} x_{c-1,K}^b(r) + (1 - \delta_{0r}) \frac{K\mu}{c\nu + K\mu} x_{cK}^b(r-1). \tag{2.47}$$

Observemos que un reintento bloqueado sólo se da cuando un cliente de la órbita intenta acceder al servicio y encuentra todos los servidores ocupados. Este hecho queda recogido en (2.46) y (2.47).

Si expresamos el sistema de ecuaciones (2.44)-(2.47) en forma matricial obtenemos (2.42) y (2.43). \square

A la vista del Teorema 2.6 la forma de actuar para obtener la función de masa de probabilidad de R^b sería la siguiente. Comenzamos resolviendo el sistema (2.42), con lo que obtenemos los valores de las probabilidades $\{x_{ij}^b(0), 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ y calculamos $P\{R^b = 0\} = x_{10}^b(0)$. A continuación resolvemos, de forma recursiva, para $r \geq 1$, el sistema (2.43) obteniendo las probabilidades $\{x_{ij}^b(r), 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ y calculando $P\{R^b = r\} = x_{10}^b(r)$.

Para el modelo original con capacidad infinita de la órbita, las probabilidades $\{x_{ij}^b(r); 0 \leq i \leq c, j \geq 0\}$ han de verificar, para cada $r \geq 0$, las ecuaciones (2.44)-(2.46) para $j \geq 0$. A partir de estas ecuaciones podemos observar que $P\{R^b = 0\} = x_{10}^b(0)$ depende de la secuencia infinita $\{x_{cj}^b(0); j \geq 0\}$, por lo que no podemos encontrar la solución exacta. Para resolver este problema hemos de considerar el modelo truncado con capacidad finita, donde K debe ser lo suficientemente grande para que el modelo truncado conserve las propiedades fundamentales del modelo original. La elección del valor K la posponemos a la Sección 2.4.

2.3.3 Número de llegadas exitosas

Por último, vamos a calcular la función de masa de probabilidad del descriptor A^s . Denotamos por $y_{ij}^s(a)$ la probabilidad de que haya $a \geq 0$ llegadas exitosas durante lo que queda del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (i, j) . Por lo tanto $P\{A^s = a\} = y_{10}^s(a)$, para cada $a \geq 0$.

Nuevamente trabajamos con el modelo truncado con capacidad finita de la órbita, K , cuya justificación daremos más adelante. Para este modelo, el Teorema 2.7 proporciona el sistema de ecuaciones que han de verificar las probabilidades $\{y_{ij}^s(a), 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$, para cada $a \geq 0$.

Definimos, para cada valor fijo $a \geq 0$, los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j^s(a) &= (y_{0j}^s(a), \dots, y_{cj}^s(a))', \quad 0 \leq j \leq K, \\ \mathbf{y}^s(a) &= (\mathbf{y}_0^s(a), \dots, \mathbf{y}_K^s(a))', \end{aligned}$$

Teorema 2.7. *a) Para $a = 0$, las probabilidades $\{y_{ij}^s(0), 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema de ecuaciones*

$$Q^{A^s} \mathbf{y}^s(0) = -\lambda \mathbf{e}_1(M). \quad (2.48)$$

b) Para cada $a \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{y_{ij}^s(a), 0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K\}$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Q^{A^s} \mathbf{y}^s(a) = \mathbf{b}^s(a), \quad (2.49)$$

donde

$$Q^{A^s} = \begin{pmatrix} C_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{c+1} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ A_1^{(-1)} & C_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{c+1} & 0_{c+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & C_{K-1}^{(0)} & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{c+1} & 0_{c+1} & 0_{c+1} & \cdots & A_K^{(-1)} & C_K^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
C_j^{(0)} &= A_j^{(0)} - \lambda W_{c+1}, \quad 0 \leq j \leq K, \\
\mathbf{b}^s(a) &= (\mathbf{b}_0^s(a), \dots, \mathbf{b}_K^s(a))', \\
\mathbf{b}_0^s(a) &= -\lambda (0, y_{20}^s(a-1), \dots, y_{c0}^s(a-1), 0)', \\
\mathbf{b}_j^s(a) &= -\lambda (y_{1j}^s(a-1), \dots, y_{cj}^s(a-1), 0)', \quad 1 \leq j \leq K.
\end{aligned}$$

Demostración. Siguiendo un argumento de primer paso tenemos que

$$y_{00}^s(a) = \delta_{0a}, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
y_{ij}^s(a) &= (1 - \delta_{0a}) \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} y_{i+1,j}^s(a-1) + \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} y_{i-1,j}^s(a) \\
&+ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} y_{i+1,j-1}^s(a), \quad 0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad (i,j) \neq (0,0),
\end{aligned} \quad (2.51)$$

$$y_{cj}^s(a) = \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} y_{c,j+1}^s(a) + \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} y_{c-1,j}^s(a), \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (2.52)$$

$$y_{cK}^s(a) = y_{c-1,K}^s(a). \quad (2.53)$$

Solamente cuando un cliente nuevo llega y encuentra algún servidor libre se obtiene una llegada exitosa, lo que se plasma en (2.51).

Si para cada $a \geq 0$ expresamos el sistema (2.50)-(2.53) en forma matricial obtenemos (2.48) y (2.49). \square

Para el modelo original con capacidad infinita de la órbita, para cada $a \geq 0$, las probabilidades $\{y_{ij}^s(a), 0 \leq i \leq c, j \geq 0\}$ verifican las ecuaciones (2.50)-(2.52) para $j \geq 0$. De las ecuaciones (2.50) y (2.51) obtenemos de forma sencilla

$$\begin{aligned}
y_{i0}^s(0) &= \frac{\nu}{\lambda + \nu}, \\
y_{i0}^s(a+1-i) &= (1 - \delta_{i,a+1}) \frac{\lambda}{\lambda + i\nu} y_{i+1,0}^s(a-i) \\
&+ \frac{i\nu}{\lambda + i\nu} y_{i-1,0}^s(a+1-i), \quad 1 \leq a \leq c-2, \quad 1 \leq i \leq a+1.
\end{aligned} \quad (2.54)$$

Para cada valor fijo de a , la ecuación (2.54) nos proporciona un procedimiento recursivo para calcular $y_{a+1,0}^s(0), \dots, y_{10}^s(a)$. Por lo tanto, resulta fácil obtener $P\{A^s = a\} = y_{10}^s(a)$, para $0 \leq a \leq c - 2$. Sin embargo, para $a = c - 1$, el cálculo de $y_{c0}^s(0)$ pasa por utilizar la ecuación (2.52), con $j \geq 0$, lo que implica que la obtención de $y_{c0}^s(0)$ depende de la secuencia infinita $\{y_{cj}^s(0); j \geq 0\}$. Para evitar esta dificultad, recurrimos nuevamente al modelo truncado, con una órbita con capacidad K , como aproximación del modelo original.

2.4 Resultados numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos que ilustran los aspectos más importantes del comportamiento de los descriptores R^s , R^b y A^s . También proponemos un sencillo problema de optimización para la tasa de reintento μ .

En primer lugar, vamos a mostrar resultados concernientes a las esperanzas y desviaciones típicas de las variables R^s , R^b y A^s . Para el cálculo de estos momentos podríamos usar el método directo de obtención de la función de masa de probabilidad de estos descriptores. Fijaríamos un valor $\epsilon > 0$ y calcularíamos las probabilidades hasta alcanzar el percentil de orden $1 - \epsilon$. Por ejemplo, en el caso de R^s pararíamos el cálculo de las probabilidades en el punto $r(\epsilon)$ tal que $P\{R^s \leq r(\epsilon) - 1\} \leq 1 - \epsilon < P\{R^s \leq r(\epsilon)\}$. Entonces, aproximaríamos el momento $E[(R^s)^n]$ por $\sum_{r=0}^{r(\epsilon)} r^n P\{R^s = r\}$. Este método para aproximar los momentos tiene el inconveniente de que desprecia probabilidades $P\{R^s = r\}$ de pequeña magnitud pero que van multiplicadas por valores probablemente grandes de r^n , con lo que la aproximación puede diferir considerablemente del verdadero valor del momento que queremos calcular.

Una alternativa para la obtención de las esperanzas y varianzas de los descriptores es utilizar los Teoremas 2.1-2.3 para los momentos en el modelo aproximado con capacidad finita de la órbita. Para ello, hemos de comenzar determinando cuál es el valor del nivel de truncamiento, K , con el que trabajar. Existen diferentes criterios para determinarlo como los que podemos encontrar en [14, 21]. Nosotros vamos a actuar de la siguiente forma; por ejemplo, para R^s , comenzamos calculando $E[R^s]$ para el mínimo nivel de truncamiento $K = 1$ y vamos incrementando sucesivamente el valor de K

hasta que se estabilizan las cuatro primeras cifras decimales de $E[R^s]$. Éste será el valor que fijaremos para la capacidad de la órbita. Hacemos lo mismo para el resto de descriptores en estudio. Una vez determinado el nivel de truncamiento deseado utilizamos las fórmulas (2.4)-(2.6) para chequear la precisión del truncamiento con la ayuda de los valores de $E[I]$ y $E[R]$ [15, 21].

Los resultados que recogemos en las Tablas 2.1-2.3 corresponden a un sistema con cinco servidores ($c = 5$), tasa de servicio $\nu = 1.0$, intensidades de tráfico $\rho \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ y tasas de reintento $\mu \in \{0.05, 0.5, 2.5, 5.0, 50.0, 100.0\}$. En concreto, cada celda de las Tablas 2.1-2.3 contiene, en orden decreciente, el valor del nivel de truncamiento, K , la esperanza y la desviación típica del correspondiente descriptor, para cada combinación de valores (ρ, μ) . Por ejemplo, en la Tabla 2.1 podemos comprobar que para la combinación $(\rho, \mu) = (0.4, 2.5)$ tenemos los siguientes resultados: $K = 10$, $E[R^s] = 0.3804$ y $\sigma(R^s) = 1.4420$.

Tabla 2.1. Características del descriptor R^s

	μ	0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	4	3	4	4	3	4
	$E[R^s]$	0.0089	0.0087	0.0093	0.0096	0.0102	0.0103
	$\sigma(R^s)$	0.1248	0.1204	0.1343	0.1404	0.1500	0.1535
$\rho = 0.4$	K	17	12	10	10	11	11
	$E[R^s]$	1.1058	0.3708	0.3804	0.3978	0.4362	0.4401
	$\sigma(R^s)$	4.7979	1.3946	1.4420	1.5172	1.6743	1.6897
$\rho = 0.6$	K	72	29	24	24	23	24
	$E[R^s]$	2520.7615	6.7418	4.6534	4.6762	4.9806	5.0190
	$\sigma(R^s)$	5369.2617	15.4704	10.4275	10.4164	10.9696	11.0414
$\rho = 0.8$	K	295	87	66	63	63	62
	$E[R^s]$	8.0504×10^{10}	262.5693	53.6163	46.2652	42.7308	42.6837
	$\sigma(R^s)$	1.2437×10^{11}	451.8367	96.5183	82.8757	75.3294	75.1205

La Tabla 2.1 nos muestra los resultados correspondientes al descriptor R^s . En ella podemos observar lo siguiente:

- El nivel de truncamiento K aumenta a medida que la intensidad de tráfico, ρ , crece. Esto concuerda con lo que esperábamos, ya que cuanto mayor sea la intensidad de tráfico necesitaremos tener una mayor capacidad de la

órbita para que las aproximaciones de los momentos sean lo suficientemente precisas.

- Los momentos de R^s crecen a medida que lo hace ρ . De hecho, cuanto mayor es la intensidad de tráfico mayor es la longitud del periodo de ocupación y, por lo tanto, mayor es el número de sucesos durante dicho periodo, incluyendo R^s .

- El comportamiento de $E[R^s]$ y $\sigma(R^s)$ como funciones de μ es más complicado. Para $\rho \in \{0.2, 0.4, 0.6\}$ tanto la media como la desviación típica presentan un mínimo y son funciones decrecientes cuando $\rho = 0.8$. Este comportamiento puede explicarse mediante el siguiente razonamiento. Cuando la tasa de reintento crece, la longitud del periodo de ocupación disminuye y, consecuentemente, también esperamos una disminución en el número de sucesos durante dicho periodo, en particular de R^s . Por otro lado, la probabilidad de bloqueo (es decir, la probabilidad de encontrar todos los servidores ocupados) aumenta según lo hace la tasa de reintento. Puesto que cada cliente bloqueado se convierte en un reintento exitoso esperaremos un crecimiento de R^s con valores crecientes de μ . La competencia entre estos dos efectos opuestos explica la existencia de un mínimo.

Tabla 2.2. Características del descriptor R^b

μ		0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	1	3	6	5	7	7
	$E[R^b]$	0.0001	0.0012	0.0063	0.0127	0.1299	0.2601
	$\sigma(R^b)$	0.0106	0.0430	0.1649	0.3149	3.0843	6.1597
$\rho = 0.4$	K	17	12	13	13	15	16
	$E[R^b]$	0.0700	0.0893	0.3754	0.7439	7.4124	14.8204
	$\sigma(R^b)$	0.4549	0.5980	2.3398	4.5813	45.1387	90.1997
$\rho = 0.6$	K	73	30	29	30	35	36
	$E[R^b]$	561.0671	3.3497	7.5863	13.8539	127.8487	254.4328
	$\sigma(R^b)$	1198.3914	10.2630	25.0004	45.8466	423.1055	841.9831
$\rho = 0.8$	K	310	102	85	82	93	95
	$E[R^b]$	6.2119×10^{10}	344.7393	189.6291	285.5688	2201.3942	4334.9671
	$\sigma(R^b)$	9.5974×10^{10}	650.3610	461.2981	721.4581	5743.0505	11330.8315

La Tabla 2.2 corresponde a las características del descriptor R^b y de ella podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Observamos nuevamente que el nivel de truncamiento K crece a medida que lo hace la intensidad de tráfico ρ .

- $E[R^b]$ y $\sigma(R^b)$ son funciones crecientes de ρ para cada μ fijo.
- Al igual que ocurría con las características de R^s , el comportamiento de la media y de la desviación típica de R^b como funciones de μ se complica. Vemos que ambas medidas son funciones crecientes de μ para $\rho \in \{0.2, 0.4\}$, y presentan un mínimo para $\rho \in \{0.6, 0.8\}$. La explicación dada para el descriptor R^s sigue siendo válida para el descriptor R^b .

Tabla 2.3. Características del descriptor A^s

	μ	0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	5	4	3	3	2	1
	$E[A^s]$	1.8571	1.7205	1.7106	1.7096	1.7085	1.7084
	$\sigma(A^s)$	4.1387	2.8302	2.7900	2.7865	2.7828	2.7825
$\rho = 0.4$	K	19	10	8	7	5	4
	$E[A^s]$	24.1227	6.8915	6.1744	6.0957	6.0127	6.0065
	$\sigma(A^s)$	80.0149	10.9445	9.0895	8.9167	8.7434	8.7309
$\rho = 0.6$	K	70	32	18	16	14	10
	$E[A^s]$	12984.7090	30.9567	17.9358	16.7376	15.5491	15.4646
	$\sigma(A^s)$	27567.5774	50.7205	25.1686	23.0770	21.1046	20.9692
$\rho = 0.8$	K	276	80	53	44	44	38
	$E[A^s]$	1.1205×10^{11}	333.8830	56.5312	44.6263	34.6385	34.0014
	$\sigma(A^s)$	1.7312×10^{11}	525.7812	77.5461	59.2838	44.6423	43.7437

En la Tabla 2.3 podemos ver el efecto de la intensidad de tráfico y de la tasa de reintento sobre el número medio de llegadas exitosas y sobre su desviación típica. Las conclusiones a las que llegamos son:

- El nivel de truncamiento K es mayor cuanto más congestionado está el sistema, es decir, cuando $\rho \rightarrow 1$ o $\mu \rightarrow 0$.
- Los dos primeros momentos, $E[A^s]$ y $\sigma(A^s)$, son funciones crecientes de ρ , para cada μ fijo, y son funciones decrecientes de μ , para cada ρ fijo. En particular, cuando la tasa de reintento aumenta será más probable que todos los servidores estén ocupados y por lo tanto esperamos que el número de llegadas exitosas decrezca.

En la Tabla 2.4 recogemos los resultados de la inversión numérica de las funciones generatrices $\Psi^{R^s}(z)$, $\Psi^{R^b}(z)$ y $\Psi^{A^s}(z)$, obtenidos aplicando el método *FFT* [52] a las expresiones dadas en los Teoremas 2.1-2.3. Este método está basado en evaluar la función generatriz que se quiere invertir en

2^m argumentos complejos $z's$, donde 2^m ha de ser tal que la cola de la distribución sea menor que un valor dado ϵ' . Nosotros hemos elegido $\epsilon' = 10^{-2}$ y hemos calculado m utilizando la desigualdad de Chebychev. Puesto que con este método sustituimos la función generatriz por una serie de potencias sobre el dominio finito $\{0, \dots, 2^m - 1\}$, podemos considerar las probabilidades obtenidas como estimaciones de las verdaderas probabilidades. Sin embargo, es conocido que el método *FFT* es una herramienta muy potente para obtener numéricamente la función de masa de probabilidad. Además nuestra experiencia numérica nos muestra que las diferencias obtenidas entre la inversión numérica y los métodos directos (ver Sección 2.3) no son apreciables. En este sentido, en la Tabla 2.5 comparamos los resultados correspondientes al descriptor R^s .

Tabla 2.4. Estadísticos de la inversión numérica

	μ	0.1	1.0	10.0	100.0
R^s	K	28	17	15	17
	2^m	256	64	64	64
	k_{99}	81	20	21	22
	\mathcal{M}	0	0	0	0
	$P\{R^s = 0\}$	0.7466	0.7466	0.7466	0.7466
R^b	K	24	18	23	24
	2^m	32	64	512	4096
	k_{99}	15	16	125	1213
	\mathcal{M}	0	0	0	0
	$P\{R^b = 0\}$	0.8552	0.8480	0.7749	0.7504
A^s	K	26	17	11	9
	2^m	2048	256	256	256
	k_{99}	642	79	64	62
	\mathcal{M}	0	0	0	0
	$P\{A^s = 0\}$	0.2857	0.2857	0.2857	0.2857

Para un sistema con $c = 5$ y $\rho = 0.5$, cada celda de la Tabla 2.4 recoge, en orden decreciente, los valores de K , 2^m , el percentil de orden 99 (k_{99}), la moda (\mathcal{M}) y la probabilidad en el punto 0, para diferentes tasas de reintento $\mu \in \{0.1, 1.0, 10.0, 100.0\}$. Se muestran los resultados para los descriptores R^s , R^b y A^s .

A la vista de estos resultados podemos concluir que

- Los tres descriptores, R^s , R^b y A^s , tienen distribuciones con una única moda en el punto 0, por lo que sus funciones de masa de probabilidad son decrecientes.

- Mirando los valores de k_{99} y de 2^m podemos analizar cómo son las colas de las distribuciones de estos descriptores en función de la tasa de reintento μ . En concreto, observamos que R^s y A^s tienen la cola más pesada cuando la tasa de reintento es más pequeña ($\mu = 0.1$), mientras que R^b la tiene más pesada cuando la tasa de reintento es más grande ($\mu = 100.0$).

- La probabilidad $P\{R^b = 0\}$ es una función decreciente de μ , como era de esperar, ya que cuanto mayor sea la tasa de reintento irá aumentando la probabilidad de que haya reintentos bloqueados y, por consiguiente, disminuirá la probabilidad de que no haya ninguno. Para los otros descriptores tenemos que ambas probabilidades, $P\{R^s = 0\}$ y $P\{A^s = 0\}$, como funciones de μ , son constantes. De hecho, $P\{R^s = 0\}$ representa la probabilidad de no visitar la órbita (cualquier cliente de la órbita ha de acabar siendo servido para concluir el periodo de ocupación y por lo tanto se convertirá en un reintento exitoso). Por lo tanto, $P\{R^s = 0\}$ corresponde con la probabilidad de absorción por el estado $(0, 0)$, cuando el proceso \mathcal{X} comienza visitando el estado $(1, 0)$ y los únicos estados posibles son $\{(0, 0), \dots, (c, 0), (c, 1)\}$. Obviamente, esta probabilidad no depende del valor de μ . Para A^s tenemos que $P\{A^s = 0\} = \nu/(\lambda + \nu)$, ya que el suceso $(A^s = 0)$ sólo puede darse cuando el periodo de ocupación consiste sólo en el tiempo de servicio del cliente inicial.

En la Tabla 2.5 podemos comparar las probabilidades $P\{R^s = r\}$ obtenidas por el método directo (ver Teorema 2.5), escritas en negrita, y las obtenidas mediante la inversión numérica, utilizando los valores de K y 2^m de la Tabla 2.4. Seguimos trabajando con $c = 5$, $\rho = 0.5$ y $\mu \in \{0.1, 1.0, 10.0, 100.0\}$. En la tabla aparecen las probabilidades hasta el percentil de orden 99. Las diferencias no son apreciables.

Tabla 2.5. Cálculo de $P\{R^s = r\}$: Método directo versus inversión numérica

r	$\mu = 0.1$	$\mu = 1.0$	$\mu = 10.0$	$\mu = 100.0$
0	0.746655 0.746656	0.746655 0.746655	0.746655 0.746655	0.746655 0.746655
1	0.035878 0.035879	0.060550 0.060550	0.056532 0.056532	0.053158 0.053158
2	0.019916 0.019917	0.039501 0.039501	0.037603 0.037603	0.036073 0.036073
3	0.013999 0.014000	0.028484 0.028484	0.027785 0.027785	0.027114 0.027114
4	0.011026 0.011027	0.021683 0.021683	0.021580 0.021580	0.021359 0.021359
5	0.009249 0.009250	0.017054 0.017054	0.017252 0.017252	0.017284 0.017284
...
20	0.003348 0.003348	0.001325 0.001325	0.001505 0.001505	0.001686 0.001686
21	0.003210 0.003211	...	0.001306 0.001306	0.001472 0.001472
22	0.003081 0.003081	0.001286 0.001286
...
81	0.000356 0.000356

A continuación presentamos los resultados numéricos correspondientes a los coeficientes de correlación $\rho(R^b, A^s)$, $\rho(R^b, A^b)$ y $\rho(A^s, A^b)$, que recogemos en las Tablas 2.6-2.8. Vamos a ver el efecto que tienen sobre estos coeficientes la intensidad de tráfico, ρ , y la tasa de reintento, μ , en un sistema con $c = 5$ y $\nu = 1.0$. Hemos elegido, de nuevo, el nivel de truncamiento K como el primer entero que estabiliza las cuatro primeras cifras decimales del coeficiente de correlación en estudio.

Las conclusiones que podemos extraer son las siguientes:

- Los tres coeficientes presentan siempre valores positivos. Cuando un descriptor crece, por ejemplo R^b , esperamos que haya aumentado la longitud del periodo de ocupación, y consecuentemente el otro descriptor, por ejemplo A^s , también crece.

- Para cada valor fijo de μ , los tres coeficientes de correlación son funciones crecientes de ρ , es decir, cuanto mayor sea la intensidad de tráfico mayor es la correlación entre los descriptores. Además, la relación es prácticamente lineal (coeficiente de correlación próximo a uno) cuando se tiene una baja tasa de reintento y una alta intensidad de tráfico, en concreto, $\mu = 0.05$ y $\rho = 0.8$.

- El comportamiento de los coeficientes de correlación como funciones de μ , dado un valor fijo de ρ , es más complicado. Observamos que $\rho(A^s, A^b)$ es una función decreciente de μ , para cada valor fijo de ρ . El coeficiente $\rho(R^b, A^s)$ es una función decreciente de μ cuando $\rho \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$, mientras que para $\rho = 0.2$ presenta un mínimo en el punto $\mu = 0.5$. En cuanto a $\rho(R^b, A^b)$, tenemos que para $\rho = 0.2$ es una función creciente de μ , para $\rho = 0.4$ presenta un mínimo en $\mu = 0.5$, y es una función decreciente de μ cuando $\rho \in \{0.6, 0.8\}$.

Tabla 2.6. Coeficiente de correlación $\rho(R^b, A^s)$

	μ	0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	7	7	8	8	9	8
	$\rho(R^b, A^s)$	0.1237	0.1120	0.1259	0.1284	0.1288	0.1287
$\rho = 0.4$	K	18	16	18	17	16	17
	$\rho(R^b, A^s)$	0.7213	0.4366	0.3581	0.3433	0.3238	0.3222
$\rho = 0.6$	K	33	36	29	29	28	30
	$\rho(R^b, A^s)$	0.9987	0.7437	0.5616	0.5246	0.4803	0.4769
$\rho = 0.8$	K	6	72	68	73	65	81
	$\rho(R^b, A^s)$	0.9999	0.9237	0.6918	0.6270	0.5427	0.5361

Tabla 2.7. Coeficiente de correlación $\rho(R^b, A^b)$

	μ	0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	8	8	8	10	9	9
	$\rho(R^b, A^b)$	0.2020	0.4783	0.6948	0.7443	0.7956	0.7986
$\rho = 0.4$	K	17	16	17	16	16	17
	$\rho(R^b, A^b)$	0.7816	0.7507	0.8240	0.8369	0.8454	0.8454
$\rho = 0.6$	K	43	32	29	30	30	30
	$\rho(R^b, A^b)$	0.9994	0.9175	0.8871	0.8812	0.8702	0.8690
$\rho = 0.8$	K	6	74	72	69	66	68
	$\rho(R^b, A^b)$	0.9999	0.9769	0.9158	0.9003	0.8784	0.8765

Tabla 2.8. Coeficiente de correlación $\rho(A^s, A^b)$

μ		0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	K	7	6	7	6	8	6
	$\rho(A^s, A^b)$	0.6186	0.2692	0.2217	0.2145	0.2050	0.2043
$\rho = 0.4$	K	17	14	14	12	12	14
	$\rho(A^s, A^b)$	0.9542	0.6934	0.5629	0.5396	0.5119	0.5098
$\rho = 0.6$	K	23	32	24	24	29	25
	$\rho(A^s, A^b)$	0.9997	0.9067	0.7852	0.7552	0.7185	0.7158
$\rho = 0.8$	K	5	59	49	49	59	54
	$\rho(A^s, A^b)$	0.9999	0.9799	0.8874	0.8514	0.7981	0.7937

Por último, proponemos un problema de optimización donde aplicar los nuevos descriptores en estudio. Los problemas que se pueden plantear son de una gran variedad dependiendo de la naturaleza de la función de coste y del entorno en el que se use el modelo. A continuación exponemos nuestro planteamiento.

Sea $c(R^b)$ el coste unitario asociado a un reintento bloqueado y $c(A^b)$ el coste unitario correspondiente a una llegada bloqueada. El problema de optimización consiste en determinar la tasa de reintento μ para la que se minimiza el coste total esperado durante un periodo de ocupación. Es decir,

$$\min_{\mu} \left[c(R^b)E[R^b] + c(A^b)E[A^b] \right].$$

Teniendo en cuenta que $E[A^b] = E[R^s]$ y usando solamente el coste relativo $c_r = c(A^b)/c(R^b)$, el problema se reduce a

$$\min_{\mu} \left[E[R^b] + c_r E[R^s] \right]. \quad (2.55)$$

Tabla 2.9. Valor óptimo de μ

μ	0.05	0.5	2.5	5.0	50.0	100.0
$\rho = 0.2$	0.0268	0.0273	0.0343	0.0416	0.1605	0.2911
$\rho = 0.4$	3.3874	1.2017	1.5167	1.9374	8.7210	16.1407
$\rho = 0.6$	8123.3516	23.5751	21.5465	27.8825	142.7905	269.4898
$\rho = 0.8$	3.0363×10^{11}	1132.4472	350.4780	424.3644	2329.5866	4463.0182

En la Tabla 2.9 mostramos los resultados de la función de coste medio (2.55), cuando estamos en un sistema con cinco servidores ($c = 5$), una

tasa de servicio $\nu = 1.0$ y fijamos el coste relativo $c_r = 3.0$. Hacemos variar la intensidad de tráfico $\rho \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ y evaluamos la función de coste en los puntos $\mu \in \{0.05, 0.5, 2.5, 5.0, 50.0, 100.0\}$. Observamos que, para $\rho = 0.2$, el coste medio es una función creciente de μ , por lo que tenemos que el valor óptimo es el punto extremo $\mu^* = 0.0$. Al crecer ρ obtenemos un valor óptimo propio μ^* que se ha señalado en negrita en la tabla.

Apéndice 2.A

Notación matricial

- $\mathbf{e}(r)$ vector columna de dimensión r con todos los elementos iguales a 1.
- $\mathbf{e}_k(r)$ vector columna de dimensión r con todos los elementos iguales a 0, excepto el elemento k -ésimo que toma el valor 1.
- $\mathbf{0}(r)$ vector columna de dimensión r con todos los elementos iguales a 0.
- I_r matriz identidad de dimensión r .
- 0_r matriz de dimensión r con todos los elementos iguales a 0.
- $E_{ij}(r) = \mathbf{e}_i(r)\mathbf{e}'_j(r)$.

$$\bullet U_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet V_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r \end{pmatrix}.$$

$$\bullet W_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si A es una matriz de dimensión $m \times n$ y B es una matriz de dimensión $p \times q$, se define el producto de Kronecker $A \otimes B$, como la matriz de dimensión $mp \times nq$ cuyo bloque (i, j) -ésimo viene dado por $a_{ij}B$, es decir,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

Eventos exitosos y bloqueados en el sistema $M/G/1$ con reintentos

En este capítulo analizamos los descriptores R^s , R^b y A^s , definidos en el Capítulo 2, para el modelo $M/G/1$ con reintentos, centrándonos en el análisis computacional de su función de masa de probabilidad a través de métodos directos. Aunque los descriptores son los mismos que estudiamos en el Capítulo 2, el método de estudio es diferente. El modelo $M/M/c$ con reintentos es Markoviano y, por lo tanto, su estudio se basa en los instantes en los que ocurre alguna transición (es decir, una llegada, una salida o un reintento exitoso). Sin embargo, el modelo $M/G/1$ es semi-Markoviano y debe estudiarse en los instantes en los que se completa el tiempo de servicio. Así pues, el estudio de estos descriptores en el modelo $M/G/1$ es más complicado, especialmente el del número de reintentos bloqueados ya que el número de reintentos que se realizan durante un servicio depende del número de llegadas al sistema durante dicho servicio. Este capítulo se basa en el artículo de Amador y Artalejo [5].

El Capítulo 3 está estructurado en cuatro secciones, las tres primeras corresponden al estudio de cada uno de los descriptores propuestos. En concreto, la Sección 3.1 está dedicada al cálculo de la función de masa de probabilidad de R^s para el modelo original $M/G/1$ con capacidad infinita de la órbita. La complejidad de las ecuaciones que rigen la dinámica del

número de llegadas exitosas y del número de reintentos bloqueados hace que nos planteemos aproximar el modelo original por el modelo truncado con capacidad finita de la órbita, K . Así, en la Sección 3.2 aproximamos la función de masa de probabilidad de A^s a través de dicho modelo truncado. Adicionalmente, en la Sección 3.3 usamos dos aproximaciones para obtener las probabilidades de R^b . La primera consiste en asumir que los tiempos de servicio siguen una distribución de tipo PH . Esta primera aproximación es tratada en la Subsección 3.3.1. En la Subsección 3.3.2 trabajamos con una distribución general del tiempo de servicio y aproximamos la función de masa de probabilidad mediante la reubicación de las llegadas que ocurren durante cada servicio.

En la Sección 3.4 presentamos resultados numéricos de lo desarrollado en las secciones previas. También comentamos cómo seleccionar el nivel de truncamiento cuando trabajamos con el modelo aproximado $M/G/1$ con capacidad de la órbita $K < \infty$. Por último, también incluimos un problema de optimización referente a estos descriptores.

La notación matricial usada a lo largo del capítulo es coherente con lo expuesto en el Apéndice 2.A.

Antes de comenzar el estudio de la distribución de probabilidad de los descriptores vamos a encontrar expresiones exactas para los valores medios de los mismos. Recordemos que para el modelo $M/M/c$ con reintentos conocíamos las relaciones (2.4)-(2.6), pero no disponíamos de fórmulas explícitas para cada media.

Sea T un ciclo regenerativo, definido como el tiempo que transcurre entre dos visitas sucesivas del proceso \mathcal{Y} al estado $(0, 0)$. También definimos T_1 como el tiempo a lo largo de un ciclo que el servidor está ocupado. Entonces, la probabilidad de bloqueo, $p_1 = \rho$, puede ser expresada como [23]

$$p_1 = \frac{E[T_1]}{E[T]}.$$

Por otra parte, la probabilidad p_{00} es

$$p_{00} = \frac{1/\lambda}{E[T]}.$$

Considerando estas igualdades y la propiedad *PASTA* (Poisson Arrivals See Time Averages) [55], tenemos que

$$E[A^b] = \lambda E[T_{1.}] = \lambda E[T] p_{1.} = p_{00}^{-1} \rho.$$

En base a las relaciones (2.4)-(2.6), que continúan siendo válidas para el sistema $M/G/1$ con reintentos, y sabiendo que [21, 23]

$$E[I] = p_{00}^{-1} = \frac{1}{1-\rho} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} du \right\},$$

$$E[R] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda \beta_2 \mu}{2(1-\rho)},$$

obtenemos las siguientes expresiones para las esperanzas de los descriptores objeto de nuestro estudio:

$$E[R^s] = E[A^b] = p_{00}^{-1} \rho, \quad (3.1)$$

$$E[A^s] = p_{00}^{-1}(1-\rho) - 1, \quad (3.2)$$

$$E[R^b] = p_{00}^{-1}(E[R] - \rho). \quad (3.3)$$

3.1 Número de reintentos exitosos

En esta sección vamos a deducir ecuaciones recursivas para el cálculo de la función de masa de probabilidad $P\{R^s = r\}$, para $r \geq 0$.

Sea $x_i^s(r)$ la probabilidad de que ocurran exactamente $r \geq 0$ reintentos exitosos durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que acaba de finalizar un tiempo de servicio y en ese instante hay i clientes en la órbita, con $0 \leq i \leq r$. Observemos que si quedan más de r clientes en la órbita, estos han de ser servidos en el periodo de ocupación residual. Por lo tanto, el hecho de que ocurran exactamente r reintentos exitosos es un suceso con probabilidad cero. Notemos también que $x_0^s(r) = \delta_{0r}$.

Condicionando por el número de llegadas durante el primer servicio, obtenemos que la distribución de probabilidad de R^s satisface

$$P\{R^s = r\} = \sum_{i=0}^r c_i x_i^s(r), \quad r \geq 0, \quad (3.4)$$

donde c_i es la probabilidad de que ocurran i llegadas durante un tiempo de servicio, para $i \geq 0$, definida en (1.5). Todos los clientes que llegan durante el servicio pasan a formar parte de la órbita y, puesto que cuando comienza el primer servicio la órbita está vacía, pueden llegar a lo sumo r clientes durante el tiempo del primer servicio.

En el siguiente teorema deducimos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de las probabilidades $\{x_i^s(r), 1 \leq i \leq r\}$, para cada $r \geq 1$.

Teorema 3.1. *Para cada $r \geq 1$ fijo, las probabilidades $\{x_i^s(r); 1 \leq i \leq r\}$ verifican el sistema de ecuaciones*

$$M_r \mathbf{x}_r^s = B_r \tilde{\mathbf{x}}_r, \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{x}_r^s = (x_1^s(r), \dots, x_r^s(r))'$, $\tilde{\mathbf{x}}_1 = 1$, $\tilde{\mathbf{x}}_r = (0, \mathbf{x}_{r-1}^s)'$, para $r \geq 2$, $M_r = (m_{ij})$ y $B_r = (b_{ij})$ son matrices cuadradas de dimensión r con elementos

$$m_{ij} = \begin{cases} \lambda(1 - c_0) + i\mu, & \text{si } 1 \leq i \leq r, j = i, \\ -\lambda c_{j-i}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq r, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} i\mu c_{j-i}, & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Para deducir las ecuaciones que han de verificar $\{x_i^s(r), 1 \leq i \leq r\}$, analizamos los posibles eventos durante el tiempo que transcurre entre dos finalizaciones sucesivas de servicio, teniendo que

$$x_i^s(r) = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{j=i}^r c_{j-i} x_j^s(r) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{j=i-1}^{r-1} c_{j-i+1} x_j^s(r-1), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.6)$$

Deducimos la ecuación (3.6), para un i fijo, sin más que tener en cuenta que, si en el instante que concluye un servicio quedan i clientes en la órbita, puede ocurrir que el siguiente cliente en ser servido sea uno que llega por primera vez al sistema (con probabilidad $\lambda(\lambda + i\mu)^{-1}$) o uno proveniente de la órbita (con probabilidad $i\mu(\lambda + i\mu)^{-1}$). En cualquier caso, durante el tiempo que transcurre mientras este cliente está siendo servido, hemos de registrar el posible número de llegadas que se producen hasta que finaliza el servicio, teniendo en cuenta que el número total de clientes que puede haber en la órbita debe ser a lo sumo r .

Si, para cada $r \geq 1$ fijo, expresamos las ecuaciones (3.6) en forma matricial entonces obtenemos (3.5). \square

Puesto que el sistema (3.5) es triangular podemos obtener las probabilidades $\{x_i^s(r), 1 \leq i \leq r\}$ de forma recursiva. Una vez conocidas estas probabilidades podemos calcular $P\{R^s = r\}$ utilizando la expresión (3.4).

3.2 Número de llegadas exitosas

En esta sección estudiamos el número de llegadas exitosas durante un periodo de ocupación. En este caso, vamos a aproximar el modelo original $M/G/1$ con reintentos y capacidad infinita para la órbita por un modelo truncado con una capacidad finita de la órbita, $K \geq 1$. De este modo los clientes que llegan al sistema y encuentran el servidor ocupado y la órbita completa (es decir, encuentran el estado $(1, K)$) abandonan el sistema sin ser servidos. La necesidad de trabajar con el modelo aproximado en lugar del original vendrá justificada más adelante.

Sea $y_i^s(a)$ la probabilidad de que ocurran a llegadas exitosas durante lo que resta del periodo de ocupación, dado que en el instante de finalizar el servicio habían quedado i clientes en la órbita, para $0 \leq i \leq K$. Obviamente $y_0^s(a) = \delta_{0a}$.

Condicionando por el número de clientes que llegan durante el tiempo del primer servicio obtenemos que la función de masa de probabilidad de A^s verifica

$$P\{A^s = a\} = \sum_{i=0}^{K-1} c_i y_i^s(a) + \left(1 - \sum_{i=0}^{K-1} c_i\right) y_K^s(a), \quad a \geq 0, \quad (3.7)$$

ya que si llegan menos de K clientes todos pasarán a la órbita, pero si llegan K o más solamente formarán parte de la órbita los K primeros y el resto se perderá. En el modelo $M/G/1$ con reintentos y capacidad infinita de la órbita todos los clientes que llegan durante el tiempo de servicio pasan a la órbita y tendríamos, por lo tanto, una serie infinita en (3.7) en lugar de las sumas finitas que nos aparecen en el modelo truncado.

El Teorema 3.2, que enunciamos a continuación, nos da el sistema de ecuaciones que proporciona las probabilidades $\{y_i^s(a), 1 \leq i \leq K\}$, para cada $a \geq 0$.

Teorema 3.2. Para cada $a \geq 0$ fijo, las probabilidades $\{y_i^s(a); 1 \leq i \leq K\}$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$M\mathbf{y}_0^s = \mathbf{b}_0^s, \quad (3.8)$$

$$M\mathbf{y}_a^s = B\mathbf{y}_{a-1}^s, \quad a \geq 1, \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{y}_a^s = (y_1^s(a), \dots, y_K^s(a))'$, $\mathbf{b}_0^s = (\mu c_0, 0, \dots, 0)'$, $M = (m_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas de dimensión K con elementos

$$m_{ij} = \begin{cases} \lambda + i\mu - i\mu c_1, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = i, \\ \lambda + K\mu - K\mu(1 - c_0), & \text{si } i = j = K, \\ -i\mu c_0, & \text{si } 2 \leq i \leq K, j = i-1, \\ -i\mu c_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq K-1, \\ -i\mu(1 - \sum_{k=0}^{K-i} c_k), & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = K, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda c_{j-i}, & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq K-1, \\ \lambda \left(1 - (1 - \delta_{iK}) \sum_{k=0}^{K-i-1} c_k\right), & \text{si } 1 \leq i \leq K, j = K, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Comenzamos con $a = 0$ y analizamos cuáles son las ecuaciones que deben verificar las probabilidades $\{y_i^s(0), 1 \leq i \leq K\}$. Para que no haya llegadas exitosas los clientes que reciben servicio deben proceder siempre de la órbita. Teniendo esto en cuenta y que los clientes que llegan durante el tiempo de un servicio pasan a la órbita, obtenemos que

$$y_i^s(0) = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \left(\sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} y_j^s(0) + \left(1 - \sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1}\right) y_K^s(0) \right), \quad 1 \leq i \leq K. \quad (3.10)$$

Para analizar el caso $a \geq 1$ hemos de distinguir si el cliente que va a recibir servicio procede de la órbita o es una nueva llegada. Si el que accede al servicio es un cliente que llega por primera vez al sistema (es decir, una llegada exitosa) entonces el número de llegadas exitosas que deben darse en el periodo de ocupación residual será $a - 1$. En base a esto y considerando nuevamente las posibles llegadas durante el tiempo de servicio llegamos a

$$\begin{aligned}
y_i^s(a) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \left(\sum_{j=i}^{K-1} c_{j-i} y_j^s(a-1) + \left(1 - \sum_{j=i}^{K-1} c_{j-i} \right) y_K^s(a-1) \right) \\
&+ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \left(\sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} y_j^s(a) + \left(1 - \sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} \right) y_K^s(a) \right), \\
&1 \leq i \leq K-1, \quad a \geq 1. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_K^s(a) &= \frac{\lambda}{\lambda + K\mu} y_K^s(a-1) \\
&+ \frac{K\mu}{\lambda + K\mu} (c_0 y_{K-1}^s(a) + (1 - c_0) y_K^s(a)), \quad a \geq 1. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Podemos agrupar las ecuaciones (3.10)-(3.12) en una única expresión como

$$\begin{aligned}
y_i^s(a) &= (1 - \delta_{0a}) \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \left((1 - \delta_{iK}) \sum_{j=i}^{K-1} c_{j-i} y_j^s(a-1) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - (1 - \delta_{iK}) \sum_{j=i}^{K-1} c_{j-i} \right) y_K^s(a-1) \right) \\
&+ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \left(\sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} y_j^s(a) + \left(1 - \sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} \right) y_K^s(a) \right), \\
&1 \leq i \leq K, \quad a \geq 0. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Si, para cada $a \geq 0$ fijo, expresamos el sistema de ecuaciones (3.13) en forma matricial obtenemos (3.8) y (3.9). \square

Podemos justificar el uso del modelo truncado con capacidad finita de la órbita, en lugar del modelo original, sin más que observar la fórmula (3.13). Si trabajásemos con una órbita infinita en la ecuación (3.13) nos aparecerían series infinitas en lugar de las sumas finitas que tenemos cuando usamos el modelo aproximado, al igual que nos sucedía en la fórmula (3.7). Además, para cada a fijo tendríamos que resolver el sistema (3.9) (o (3.8) si $a = 0$) de infinitas ecuaciones, donde la matriz M sería una matriz de dimensión

infinita y de tipo Hessenberg superior. Desafortunadamente este tipo de sistemas de ecuaciones no tiene solución conocida. Es por ello, por lo que trabajamos con un modelo $M/G/1$ con reintentos con capacidad finita, pero K debe ser lo suficientemente grande para que el modelo truncado conserve las propiedades fundamentales del modelo original. Falta por especificar cómo elegir dicho valor K , lo que posponemos a la Sección 3.4.

A la vista del Teorema 3.2 y una vez elegido el nivel de truncamiento para la órbita, la forma de actuar para obtener la función de masa de probabilidad de A^s sería la siguiente. Comenzamos resolviendo el sistema (3.8) con lo que obtenemos los valores de las probabilidades $\{y_i^s(0), 1 \leq i \leq K\}$. Utilizando la expresión (3.7) para $a = 0$ calculamos $P\{A^s = 0\}$. A continuación resolvemos, de forma recursiva, para $a \geq 1$, el sistema (3.9) obteniendo las probabilidades $\{y_i^s(a), 1 \leq i \leq K\}$. Aplicando nuevamente (3.7) calculamos el valor de $P\{A^s = a\}$, para $a \geq 1$.

3.3 Número de reintentos bloqueados

A continuación analizamos la función de masa de probabilidad del número de reintentos bloqueados durante un periodo de ocupación, R^b . Al igual que para el estudio del descriptor A^s , consideramos el sistema con capacidad finita de la órbita. Los clientes que llegan y encuentran el sistema en el estado $(1, K)$ se pierden y, por lo tanto, no producen reintentos bloqueados.

El número de reintentos bloqueados durante un tiempo de servicio depende del número arbitrario de clientes que llegan por primera vez al sistema a lo largo de dicho servicio. Por lo tanto, va a ser muy difícil, si no imposible, encontrar la distribución exacta de R^b cuando consideramos una distribución general del tiempo de servicio. Por ello planteamos dos aproximaciones.

En la primera aproximación resolvemos el problema considerando distribuciones de servicio de tipo PH [42]. Este tipo de distribuciones de probabilidad forman una familia muy versátil. La distribución exponencial, la hipereexponencial y la de Erlang, entre otras, pertenecen a esta familia. Cabe destacar algunas propiedades importantes relativas a este tipo de distribuciones. Una de ellas es que el conjunto de distribuciones de tipo PH es denso en el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad definidas en el intervalo $[0, +\infty)$. Además, sumas y mixturas de variables aleatorias independientes con distribuciones PH también se distribuyen de acuerdo

a una PH . En la Subsección 3.3.1 estudiamos la distribución de R^b en el modelo $M/PH/1$ con reintentos y capacidad de la órbita K , con $K \geq 1$. La segunda aproximación hace referencia a los instantes de llegada de los clientes nuevos, durante el tiempo de servicio. La aproximación consistirá en la reubicación de estas llegadas, en el sentido que concretaremos más adelante en la Subsección 3.3.2.

3.3.1 Tiempos de servicio PH

Supongamos que los tiempos de servicio siguen una distribución tipo PH de orden m caracterizada por $(\boldsymbol{\alpha}, T)$, donde el vector fila $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ corresponde a la distribución de la fase inicial y la matriz cuadrada T , de dimensión m , determina las tasas infinitesimales de los cambios de fase. Sea el vector columna $\mathbf{t} = -T\mathbf{e}(m)$, con $\mathbf{e}(m)$ definido en el Apéndice 2.A, que determina las tasas infinitesimales de finalización de servicio.

El estado de la cola $M/PH/1$ con reintentos y capacidad de la órbita K en el instante t viene descrito por la cadena de Markov $\{(K^K(t), N^K(t)); t \geq 0\}$, donde $K^K(t) = 0$ representa que el servidor está vacío y $K^K(t) = i$, para $1 \leq i \leq m$, denota la fase en la que el servidor está proporcionando servicio. $N^K(t)$ es el número de clientes en la órbita. El generador infinitesimal viene dado por la siguiente matriz cuadrada, tridiagonal por bloques, de dimensión $(m+1)(K+1)$:

$$Q_K = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_0^{(+1)} & 0_{m+1} & \cdots & 0_{m+1} & 0_{m+1} \\ A_1^{(-1)} & A_1^{(0)} & A_1^{(+1)} & \cdots & 0_{m+1} & 0_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{m+1} & 0_{m+1} & 0_{m+1} & \cdots & A_{K-1}^{(0)} & A_{K-1}^{(+1)} \\ 0_{m+1} & 0_{m+1} & 0_{m+1} & \cdots & A_K^{(-1)} & A_K^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde $A_j^{(0)}$ ($0 \leq j \leq K$), $A_j^{(+1)}$ ($0 \leq j \leq K-1$) y $A_j^{(-1)}$ ($1 \leq j \leq K$) son las siguientes matrices de dimensión $(m+1) \times (m+1)$:

$$A_j^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & j\mu\boldsymbol{\alpha} \\ 0_{m \times (m+1)} & \end{pmatrix}, \quad A_j^{(0)} = \begin{pmatrix} -(\lambda + j\mu) & \lambda\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{t} & -(1 - \delta_{jK})\lambda I_m + T \end{pmatrix},$$

$$A_j^{(+1)} = \lambda(I_{m+1} - E_{11}(m+1)).$$

Para encontrar la función de masa de probabilidad del número de reintentos bloqueados durante un periodo de ocupación comenzamos condicionando sobre la fase de la primera llegada. Entonces, tenemos que

$$P\{R^b = r\} = \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{k0}^b(r), \quad r \geq 0, \quad (3.15)$$

donde $y_{kj}^b(r)$ es la probabilidad de que se produzcan r reintentos bloqueados en lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (k, j) , para $0 \leq k \leq m$ y $0 \leq j \leq K$.

Para calcular la función de masa de probabilidad es necesario obtener previamente las probabilidades $y_{kj}^b(r)$. El Teorema 3.3 proporcionará el sistema de ecuaciones a resolver para conseguir estas probabilidades. Previamente, para facilitar la comprensión, vamos a considerar dos casos particulares de distribuciones tipo *PH*: la distribución hiperexponencial y la de Erlang.

1. Tiempos de servicio hiperexponenciales

Supongamos que los tiempos de servicio son hiperexponenciales; es decir, su función de distribución de probabilidad es $B(x) = \sum_{k=1}^m p_k(1 - e^{-\nu_k x})$, para $x \geq 0$, $p_k > 0$ y $\sum_{k=1}^m p_k = 1$. Obviamente esta distribución es de tipo *PH* con vector $\alpha = (p_1, \dots, p_m)$ y matriz $T = -\text{Diag}(\nu_1, \dots, \nu_m)$. Para calcular la función de masa de probabilidad de R^b usamos la ecuación (3.15), donde las incógnitas $y_{kj}^b(r)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones, para cada r fijo:

$$y_{00}^b(r) = \delta_{0r}, \quad (3.16)$$

$$y_{0j}^b(r) = \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m p_k y_{kj}^b(r) + \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m p_k y_{k,j-1}^b(r), \quad 1 \leq j \leq K, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} y_{kj}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + \nu_k + j\mu} y_{k,j+1}^b(r) + \frac{\nu_k}{\lambda + \nu_k + j\mu} y_{0j}^b(r) \\ &+ (1 - \delta_{0r}) \frac{j\mu}{\lambda + \nu_k + j\mu} y_{kj}^b(r-1), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 0 \leq j \leq K-1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$y_{kK}^b(r) = \frac{\nu_k}{\nu_k + K\mu} y_{0K}^b(r) + (1 - \delta_{0r}) \frac{K\mu}{\nu_k + K\mu} y_{kK}^b(r-1), \quad 1 \leq k \leq m. \quad (3.19)$$

La igualdad (3.16) es obvia. En las ecuaciones (3.17) recogemos la idea de que si el servidor está libre y hay j clientes en la órbita puede ocurrir que el siguiente cliente en ser servido sea una llegada nueva o un cliente proveniente de la órbita. Independientemente de donde provenga el cliente, con probabilidad p_k accederá a un servicio cuya duración sigue una distribución exponencial de parámetro ν_k , $1 \leq k \leq m$, pasando al estado (k, j) , si era una llegada nueva, o al estado $(k, j - 1)$, si era un cliente de la órbita. Si el servidor está ocupado y la órbita no está completa; es decir, estamos en el estado (k, j) , con $1 \leq k \leq m$ y $0 \leq j \leq K - 1$, puede ocurrir una llegada bloqueada, una finalización del servicio o un reintento bloqueado. En el último caso quedarán por suceder $r - 1$ reintentos bloqueados en lo que resta del periodo de ocupación. Todo lo anterior está recogido en las ecuaciones (3.18). Por último, en las ecuaciones (3.19), recogemos el hecho de que si el servidor está ocupado y la órbita está completa entonces sólo puede darse la finalización del servicio o un reintento bloqueado.

2. Tiempos de servicio Erlang

En este caso tenemos que $B(x) = \int_0^x \frac{\nu^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\nu t} dt$, para $x \geq 0$ y $m \in \{1, 2, \dots\}$. La distribución de Erlang también es una distribución tipo *PH* con vector $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ y matriz $T = \nu(W_{m+1} - I_{m+1})$. Ahora, la expresión (3.15) queda reducida a

$$P\{R^b = r\} = y_{10}^b(r), \quad r \geq 0,$$

donde para obtener $y_{10}^b(r)$ hemos de resolver, para cada r fijo, el sistema de ecuaciones que se da a continuación, al que se llega utilizando un argumento similar al realizado para la distribución hiperexponencial.

$$\begin{aligned} y_{00}^b(r) &= \delta_{0r}, \\ y_{0j}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} y_{1j}^b(r) + \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} y_{1,j-1}^b(r), \quad 1 \leq j \leq K, \\ y_{kj}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + \nu + j\mu} y_{k,j+1}^b(r) + \frac{\nu}{\lambda + \nu + j\mu} y_{k+1,j}^b(r) \\ &+ (1 - \delta_{0r}) \frac{j\mu}{\lambda + \nu + j\mu} y_{kj}^b(r-1), \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq K-1, \\ y_{kK}^b(r) &= \frac{\nu}{\nu + K\mu} y_{k+1,K}^b(r) + (1 - \delta_{0r}) \frac{K\mu}{\nu + K\mu} y_{kK}^b(r-1), \quad 1 \leq k \leq m-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{mj}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + \nu + j\mu} y_{m,j+1}^b(r) + \frac{\nu}{\lambda + \nu + j\mu} y_{0j}^b(r) \\
&+ (1 - \delta_{0r}) \frac{j\mu}{\lambda + \nu + j\mu} y_{mj}^b(r-1), \quad 0 \leq j \leq K-1, \\
y_{mK}^b(r) &= \frac{\nu}{\nu + K\mu} y_{0K}^b(r) + (1 - \delta_{0r}) \frac{K\mu}{\nu + K\mu} y_{mK}^b(r-1).
\end{aligned}$$

A continuación damos el Teorema 3.3, válido para cualquier distribución de servicio PH , que proporciona, en forma matricial, el sistema que gobierna a las probabilidades $y_{kj}^b(r)$.

Teorema 3.3. *Para cada $r \geq 0$ fijo, las probabilidades $\{y_{kj}^b(r); 0 \leq k \leq m, 0 \leq j \leq K\}$ verifican el sistema de ecuaciones*

$$P\mathbf{y}_r^b = \mathbf{f}_r^b, \quad (3.20)$$

donde $\mathbf{y}_r^b = (\mathbf{y}_0^b(r), \dots, \mathbf{y}_K^b(r))'$ y $\mathbf{y}_j^b(r) = (y_{0j}^b(r), \dots, y_{mj}^b(r))'$, para $0 \leq j \leq K$, $\mathbf{f}_0^b = -\mathbf{e}_1((m+1)(K+1))$ y $\mathbf{f}_r^b = -R\mathbf{y}_{r-1}^b$, para $r \geq 1$, y

$$\begin{aligned}
P &= Q_K - R - F, \\
R &= \mu V_{K+1} \otimes (I_{m+1} - E_{11}(m+1)), \\
F &= E_{11}((m+1)(K+1))(Q_K + E_{11}((m+1)(K+1))), \quad (3.21)
\end{aligned}$$

siendo Q_K el generador infinitesimal del sistema $M/PH/1$ con reintentos y capacidad de la órbita K , dado en (3.14).

Demostración. Teniendo en cuenta las posibles transiciones desde el estado actual del sistema, obtenemos que las probabilidades $y_{kj}^b(r)$, para cada $r \geq 0$, verifican las siguientes ecuaciones:

$$y_{00}^b(r) = \delta_{0r}, \quad (3.22)$$

$$y_{0j}^b(r) = \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{kj}^b(r) + \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{k,j-1}^b(r), \quad 1 \leq j \leq K, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
y_{kj}^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda - t_{kk} + j\mu} y_{k,j+1}^b(r) + \frac{1}{\lambda - t_{kk} + j\mu} \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^m t_{kk'} y_{k'j}^b(r) \\
&+ \frac{t_k}{\lambda - t_{kk} + j\mu} y_{0j}^b(r) + (1 - \delta_{0r}) \frac{j\mu}{\lambda - t_{kk} + j\mu} y_{kj}^b(r-1), \\
&1 \leq k \leq m, \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{kK}^b(r) &= \frac{1}{-t_{kk} + K\mu} \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^m t_{kk'} y_{k'K}^b(r) + \frac{t_k}{-t_{kk} + K\mu} y_{0K}^b(r) \\
&+ (1 - \delta_{0r}) \frac{K\mu}{-t_{kk} + K\mu} y_{kK}^b(r-1), \quad 1 \leq k \leq m,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

siendo $T = (t_{ij})$ y $\mathbf{t} = (t_i)$.

Expresando el sistema (3.22)-(3.25) en forma matricial obtenemos (3.20). \square

Observemos que la matriz Q_K en (3.14) describe la dinámica infinitesimal de la cola $M/PH/1$ con reintentos y capacidad de la órbita $K < \infty$, incluyendo: i) las llegadas bloqueadas (véase $A_j^{(+1)}$), ii) los reintentos exitosos (véase $A_j^{(-1)}$), iii) las llegadas exitosas (véase $\lambda\alpha$ en $A_j^{(0)}$), iv) las finalizaciones de servicio (véase \mathbf{t} en $A_j^{(0)}$) y v) las transiciones entre fases (véase T en $A_j^{(0)}$). Los reintentos bloqueados no producen ninguna transición en la cadena de Markov, por lo que su efecto no está representado en el generador infinitesimal Q_K sino en la matriz R y en el vector \mathbf{f}_r^b . Por otro lado, para recoger la ecuación (3.22) hemos de restar la matriz F en (3.21).

3.3.2 Aproximación basada en la reubicación de llegadas

Como mencionábamos anteriormente, las distribuciones de tipo PH dan una representación versátil de los tiempos de servicio que pueden satisfacer las necesidades prácticas. Sin embargo, podemos seguir interesados en trabajar con tiempos de servicio más generales, no necesariamente de tipo PH . A continuación tratamos esta situación más general, donde para darle una solución utilizaremos una aproximación basada en la reubicación de las llegadas bloqueadas durante cada tiempo de servicio.

Consideramos el sistema $M/G/1$ con reintentos y capacidad finita de la órbita. Sea $x_i^b(r)$ la probabilidad de que se produzcan r reintentos bloqueados en lo que resta del periodo de ocupación, dado que al acabar un servicio quedaron i clientes en la órbita, con $1 \leq i \leq K$, $r \geq 0$. Nótese que $x_0^b(r) = \delta_{0r}$. Condicionando por el número de llegadas y reintentos durante el primer servicio tenemos que

$$P\{R^b = 0\} = c_0^{0,0} + (1 - \delta_{1K}) \sum_{i=1}^{K-1} c_0^{i,0} x_i^b(0) + d_0^{K,0} x_K^b(0), \quad (3.26)$$

$$P\{R^b = r\} = (1 - \delta_{1K}) \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{k=0}^r c_0^{i,k} x_i^b(r-k) + \sum_{k=0}^r d_0^{K,k} x_K^b(r-k), \quad r \geq 1, \quad (3.27)$$

donde $c_i^{j,k}$ es la probabilidad de j llegadas originales y k reintentos bloqueados durante un servicio, dado que inmediatamente después del comienzo de dicho servicio el número de clientes en órbita es i , para $0 \leq i \leq K$, $j \geq 0$ y $k \geq 0$. Por otra parte, $d_i^{K-i,k}$ es la probabilidad de que durante un servicio se produzcan al menos $K-i$ llegadas originales y k reintentos bloqueados, dado que en el instante inmediatamente posterior al comienzo del servicio hay i clientes en órbita, es decir, $d_i^{K-i,k} = \sum_{j=K-i}^{\infty} c_i^{j,k}$, para $0 \leq i \leq K$ y $k \geq 0$.

La dinámica de las probabilidades $x_i^b(r)$ es recogida en el Teorema 3.4. Previamente discutimos cómo obtener, de manera aproximada, las cantidades $c_i^{j,k}$ y $d_i^{K-i,k}$. Supongamos que la longitud del tiempo de servicio es x y que llegan j clientes nuevos en los instantes x_1, \dots, x_j , lo que implica que estos clientes pueden producir reintentos durante los tiempos de servicio residuales de longitudes $x - x_1, \dots, x - x_j$, respectivamente. Parece bastante difícil manejar estas restricciones multidimensionales, por lo que proponemos aproximarnos a la situación suponiendo que los j clientes llegan al sistema en el instante intermedio $x/2$. Esta aproximación afecta, en media, sólo a $\rho < 1$ clientes por servicio. En base a esta reubicación de llegadas tenemos que las cantidades $c_i^{j,k}$ pueden aproximarse por

$$\hat{c}_i^{j,k} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \sum_{m=0}^k e^{-i\mu x} \frac{(i\mu x)^m}{m!} e^{-\frac{j\mu x}{2}} \frac{\left(\frac{j\mu x}{2}\right)^{k-m}}{(k-m)!} dB(x).$$

De donde deducimos, tras realizar algunas operaciones, que

$$\hat{c}_i^{j,k} = \frac{\lambda^j \left(i\mu + \frac{j\mu}{2}\right)^k}{j!k!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+i\mu+\frac{j\mu}{2})x} x^{j+k} dB(x), \quad (3.28)$$

y en base a la definición de $d_i^{K-i,k}$ tenemos que $\hat{d}_i^{K-i,k} = \sum_{j=K-i}^{\infty} \hat{c}_i^{j,k}$; por consiguiente obtenemos

$$\hat{d}_i^{K-i,k} = \frac{\left(\frac{(K+i)\mu}{2}\right)^k}{k!} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(K+i)\mu x}{2}} x^k dB(x) - (1 - \delta_{iK}) \sum_{j=0}^{K-i-1} \frac{\lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} e^{-\left(\lambda + \frac{(K+i)\mu}{2}\right)x} x^{j+k} dB(x) \right). \quad (3.29)$$

Veamos seguidamente las expresiones exactas que toman estas cantidades en los casos particulares de tiempos de servicio exponenciales, hiperexponenciales y de Erlang.

1. *Tiempos de servicio exponenciales*

Particularizando (3.28) al caso $B(x) = 1 - e^{-\nu x}$, para $x \geq 0$, tenemos que

$$\hat{c}_i^{j,k} = \binom{j+k}{j} \frac{\lambda^j \nu \left(i\mu + \frac{j\mu}{2}\right)^k}{\left(\lambda + \nu + i\mu + \frac{j\mu}{2}\right)^{j+k+1}}.$$

A su vez, (3.29) se reduce a

$$\hat{d}_i^{K-i,k} = \frac{\nu \left(\frac{(K+i)\mu}{2}\right)^k}{\left(\nu + \frac{(K+i)\mu}{2}\right)^{k+1}} - (1 - \delta_{iK}) \nu \left(\frac{(K+i)\mu}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{K-i-1} \binom{j+k}{j} \frac{\lambda^j}{\left(\lambda + \nu + \frac{(K+i)\mu}{2}\right)^{j+k+1}}.$$

2. *Tiempos de servicio hiperexponenciales*

Si los tiempos de servicio son hiperexponenciales tenemos que

$$\hat{c}_i^{j,k} = \binom{j+k}{j} \sum_{l=1}^m p_l \frac{\lambda^j \nu_l \left(i\mu + \frac{j\mu}{2}\right)^k}{\left(\lambda + \nu_l + i\mu + \frac{j\mu}{2}\right)^{j+k+1}},$$

$$\hat{d}_i^{K-i,k} = \left(\frac{(K+i)\mu}{2} \right)^k \sum_{l=1}^m p_l \left(\frac{\nu_l}{\left(\nu_l + \frac{(K+i)\mu}{2} \right)^{k+1}} \right. \\ \left. - (1 - \delta_{iK}) \nu_l \sum_{j=0}^{K-i-1} \binom{j+k}{j} \frac{\lambda^j}{\left(\lambda + \nu_l + \frac{(K+i)\mu}{2} \right)^{j+k+1}} \right).$$

3. Tiempos de servicio Erlang

En este caso, las fórmulas (3.28) y (3.29) conducen a

$$\tilde{c}_i^{j,k} = \frac{(j+k+m-1)!}{j!k!(m-1)!} \frac{\lambda^j \nu^m \left(i\mu + \frac{j\mu}{2} \right)^k}{\left(\lambda + \nu + i\mu + \frac{j\mu}{2} \right)^{j+k+m}}, \\ \hat{d}_i^{K-i,k} = \frac{\nu^m \left(\frac{(K+i)\mu}{2} \right)^k}{k!(m-1)!} \left(\frac{(k+m-1)!}{\left(\nu + \frac{(K+i)\mu}{2} \right)^{k+m}} \right. \\ \left. - (1 - \delta_{iK}) \sum_{j=0}^{K-i-1} \frac{(j+k+m-1)!}{j!} \frac{\lambda^j}{\left(\lambda + \nu + \frac{(K+i)\mu}{2} \right)^{j+k+m}} \right).$$

El Teorema 3.4, que enunciamos a continuación, proporciona el sistema de ecuaciones que han de verificar las probabilidades $\{x_i^b(r), 1 \leq i \leq K\}$, para cada $r \geq 0$, considerando las aproximaciones previas.

Teorema 3.4. *Para cada $r \geq 0$ fijo, las probabilidades $\{x_i^b(r); 1 \leq i \leq K\}$ satisfacen el siguiente sistema tridiagonal por bloques:*

$$N_0 \mathbf{x}_0^b = \mathbf{b}_0^b, \quad (3.30)$$

$$N_0 \mathbf{x}_r^b = \sum_{m=1}^r N_m \mathbf{x}_{r-m}^b, \quad r \geq 1, \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{x}_r^b = (x_1^b(r), \dots, x_K^b(r))'$, para $r \geq 0$, $\mathbf{b}_0^b = (\mu \hat{c}_0^{0,0}, 0, \dots, 0)'$, y $N_m = (n_{ij}^m)$ son matrices cuadradas de dimensión K con elementos

$$n_{ij}^0 = \begin{cases} \lambda + i\mu - \lambda\hat{c}_i^{0,0} - i\mu\hat{c}_{i-1}^{1,0}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = i, \\ \lambda + K\mu - \lambda\hat{d}_K^{0,0} - K\mu\hat{d}_{K-1}^{1,0}, & \text{si } i = j = K, \\ -i\mu\hat{c}_{i-1}^{0,0}, & \text{si } 2 \leq i \leq K, j = i-1, \\ -\lambda\hat{c}_i^{j-i,0} - i\mu\hat{c}_{i-1}^{j-i+1,0}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq K-1, \\ -\lambda\hat{d}_i^{K-i,0} - i\mu\hat{d}_{i-1}^{K-i+1,0}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = K, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y para $1 \leq m \leq r$,

$$n_{ij}^m = \begin{cases} \lambda\hat{c}_i^{0,m} + i\mu\hat{c}_{i-1}^{1,m}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = i, \\ \lambda\hat{d}_K^{0,m} + K\mu\hat{d}_{K-1}^{1,m}, & \text{si } i = j = K, \\ i\mu\hat{c}_{i-1}^{0,m}, & \text{si } 2 \leq i \leq K, j = i-1, \\ \lambda\hat{c}_i^{j-i,m} + i\mu\hat{c}_{i-1}^{j-i+1,m}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq K-1 \\ \lambda\hat{d}_i^{K-i,m} + i\mu\hat{d}_{i-1}^{K-i+1,m}, & \text{si } 1 \leq i \leq K-1, j = K, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Condicionando sobre la procedencia del cliente que ocupa el servidor y contando el número de llegadas nuevas y de reintentos producidos durante el servicio en curso, tenemos que

$$\begin{aligned} x_i^b(r) &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=0}^r \left((1 - \delta_{iK}) \sum_{j=i}^{K-1} c_i^{j-i,k} x_j^b(r-k) + d_i^{K-i,k} x_K^b(r-k) \right) \\ &+ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=0}^r \left(\sum_{j=i-1}^{K-1} c_{i-1}^{j-i+1,k} x_j^b(r-k) + d_{i-1}^{K-i+1,k} x_K^b(r-k) \right), \\ &1 \leq i \leq K, r \geq 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Poniendo este sistema de ecuaciones en forma matricial y aproximando las probabilidades $c_i^{j,k}$ y $d_i^{K-i,k}$ por $\hat{c}_i^{j,k}$ y $\hat{d}_i^{K-i,k}$, respectivamente, obtenemos (3.30) y (3.31). \square

La combinación de las fórmulas (3.26) y (3.27) y la solución iterativa de los sistemas (3.30) y (3.31) completa este segundo método de aproximación para la obtención de las probabilidades $P\{R^b = r\}$.

La comparación entre los dos métodos aproximados será realizada en la siguiente sección a través de resultados numéricos (véanse las Tablas 3.7 y 3.8). Una manera de ver la efectividad de estas aproximaciones será comparar las aproximaciones de $E[R^b]$ con el verdadero valor esperado, dado por la ecuación (3.3). Para ello, a continuación vemos cómo podemos obtener los valores esperados de R^b para las dos aproximaciones.

Denotamos por $\bar{E}[R^b]$ el valor esperado de R^b cuando utilizamos la aproximación basada en el truncamiento de la órbita y distribución de servicio PH . Si en (3.15) multiplicamos las probabilidades $P\{R^b = r\}$ por r y sumamos desde $r = 0$ hasta ∞ , tenemos que

$$\bar{E}[R^b] = \sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{R}_{k0}^b, \quad (3.33)$$

donde \bar{R}_{kj}^b es el número esperado de reintentos bloqueados en lo que resta del periodo de ocupación, dado que el estado actual del sistema es (k, j) , para $0 \leq k \leq m$ y $0 \leq j \leq K$.

Para obtener las incógnitas $\{\bar{R}_{kj}^b, 0 \leq k \leq m, 0 \leq j \leq K\}$ multiplicamos las ecuaciones (3.22)-(3.25) por r y sumamos desde $r = 1$ hasta ∞ , quedándonos por resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{00}^b &= 0, \\ \bar{R}_{0j}^b &= \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{R}_{kj}^b + \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} \sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{R}_{k,j-1}^b, \quad 1 \leq j \leq K, \\ \bar{R}_{kj}^b &= \frac{\lambda}{\lambda - t_{kk} + j\mu} \bar{R}_{k,j+1}^b + \frac{1}{\lambda - t_{kk} + j\mu} \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^m t_{kk'} \bar{R}_{k'j}^b + \frac{t_k}{\lambda - t_{kk} + j\mu} \bar{R}_{0j}^b \\ &+ \frac{j\mu}{\lambda - t_{kk} + j\mu} \bar{R}_{kj}^b + \frac{j\mu}{\lambda - t_{kk} + j\mu}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad 0 \leq j \leq K-1, \\ \bar{R}_{kK}^b(r) &= \frac{1}{-t_{kk} + K\mu} \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^m t_{kk'} \bar{R}_{k'K}^b + \frac{t_k}{-t_{kk} + K\mu} \bar{R}_{0K}^b \\ &+ \frac{K\mu}{-t_{kk} + K\mu} \bar{R}_{kK}^b + \frac{K\mu}{-t_{kk} + K\mu}, \quad 1 \leq k \leq m. \end{aligned}$$

Para la aproximación basada en la reubicación de llegadas, denotamos por $\hat{E}[R^b]$ el valor esperado de R^b , y por \hat{R}_i^b el número esperado de reintentos bloqueados en lo que resta del periodo de ocupación dado que al finalizar un servicio han quedado i clientes en la órbita, con $1 \leq i \leq K$. Si en (3.27) multiplicamos por r y sumamos desde $r = 1$ hasta ∞ , tenemos que

$$\hat{E}[R^b] = (1 - \delta_{1K}) \sum_{i=1}^{K-1} c_i \hat{R}_i^b + \left(1 - \sum_{i=0}^{K-1} c_i\right) \hat{R}_K^b + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} k c_0^{i,k}.$$

Aproximando $c_j^{i,k}$ por $\hat{c}_j^{i,k}$ obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} k \hat{c}_j^{i,k} = j\mu\beta_1 + \frac{\lambda\mu}{2}\beta_2.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $c_0^{0,k} = 0$ si $k \geq 1$, $\hat{E}[R^b]$ se reduce a

$$\hat{E}[R^b] = (1 - \delta_{1K}) \sum_{i=1}^{K-1} c_i \hat{R}_i^b + \left(1 - \sum_{i=0}^{K-1} c_i\right) \hat{R}_K^b + \frac{\lambda\mu}{2}\beta_2. \quad (3.34)$$

Para calcular las incógnitas $\{\hat{R}_i^b, 1 \leq i \leq K\}$, nuevamente multiplicamos las ecuaciones de (3.32) por r y sumamos desde $r = 1$ hasta ∞ , obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones, tras reemplazar $c_j^{i,k}$ por $\hat{c}_j^{i,k}$:

$$\begin{aligned} (\lambda + i\mu)\hat{R}_i^b &= \lambda \left((1 - \delta_{iK}) \sum_{j=i}^{K-1} c_{j-i} \hat{R}_j^b \right) + i\mu \left(\sum_{j=i-1}^{K-1} c_{j-i+1} \hat{R}_j^b \right) \\ &+ \left(\lambda \left(1 - (1 - \delta_{iK}) \sum_{j=0}^{K-i-1} c_j \right) + i\mu \left(1 - \sum_{j=0}^{K-i} c_j \right) \right) \hat{R}_K^b \\ &+ i\mu\beta_1(\lambda + (i-1)\mu) + \frac{\lambda\mu}{2}\beta_2(\lambda + i\mu), \quad 1 \leq i \leq K. \end{aligned}$$

3.4 Resultados numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos que nos ayudan a evaluar el comportamiento de los descriptores en estudio.

En primer lugar, vamos a mostrar resultados relativos a las esperanzas de los descriptores R^s , R^b y A^s , para diferentes elecciones de la distribución del tiempo de servicio. En concreto, consideramos tiempos de servicio con distribuciones Erlang-3 (E_3), exponencial (M) e hiperexponencial (H_2), de forma que el primer momento, β_1 , se ha normalizado para que en cualquiera de las tres distribuciones tome el valor 1. En el caso de la distribución hiperexponencial fijamos el coeficiente de variación como 1.25.

Para obtener los valores exactos de las esperanzas hemos utilizado las fórmulas (3.1)-(3.3). En el caso Markoviano; es decir, cuando los tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente, sabemos que $p_{00}^{-1} = (1 - \rho)^{-\frac{\lambda}{\mu}-1}$ [33]. Entonces, podemos obtener las siguientes expresiones explícitas:

$$\begin{aligned} E[R^s] &= \rho(1 - \rho)^{-\frac{\lambda}{\mu}-1}, \\ E[A^s] &= (1 - \rho)^{-\frac{\lambda}{\mu}} - 1, \\ E[R^b] &= (1 - \rho)^{-\frac{\lambda}{\mu}-1} \left(\frac{\rho^2}{1 - \rho} + \frac{\lambda\beta_2\mu}{2(1 - \rho)} \right). \end{aligned}$$

Las Tablas 3.1-3.3 recogen respectivamente los valores de $E[R^s]$, $E[A^s]$ y $E[R^b]$ para las tres distribuciones de servicio mencionadas previamente. Se consideran diferentes intensidades de tráfico, $\rho \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$, y diferentes tasas de reintento, $\mu \in \{0.05, 0.5, 2.5, 25.0, 100.0\}$. Más concretamente, cada casilla de la tabla está asociada a un par (ρ, μ) y contiene las esperanzas asociadas a las tres distribuciones de servicio.

En la Tabla 3.1, correspondiente a $E[R^s]$, podemos observar lo siguiente:

- El número medio de reintentos exitosos durante un periodo de ocupación aumenta a medida que lo hace la intensidad de tráfico y disminuye según aumenta la tasa de reintento.
- Comparando los resultados para las tres distribuciones de los tiempos de servicio, denotadas por $E[R^s(E_3)]$, $E[R^s(M)]$ y $E[R^s(H_2)]$, tenemos que $E[R^s(E_3)] > E[R^s(M)] > E[R^s(H_2)]$, para cualquier combinación de valores (ρ, μ) .

Tabla 3.1. La esperanza $E[R^s]$

	μ	0.05	0.5	2.5	25.0	100.0
$\rho = 0.2$	E_3	0.62980	0.27419	0.25466	0.25046	0.25011
	M	0.61035	0.27334	0.25450	0.25044	0.25011
	H_2	0.59722	0.27274	0.25439	0.25043	0.25010
$\rho = 0.4$	E_3	53.9622	1.03449	0.72790	0.67255	0.66813
	M	39.6916	1.00320	0.72344	0.67213	0.66803
	H_2	33.0976	0.98513	0.72081	0.67189	0.66796
$\rho = 0.6$	E_3	346968.2	5.15835	1.92032	1.53751	1.50929
	M	89406.9	4.50421	1.86894	1.53335	1.50826
	H_2	44224.8	4.19806	1.84281	1.53119	1.50773
$\rho = 0.8$	E_3	7.9274×10^{13}	85.4608	7.37906	4.25259	4.06170
	M	6.1035×10^{11}	52.5305	6.69468	4.21140	4.05183
	H_2	6.3259×10^{10}	41.8761	6.39795	4.19235	4.04724

Los resultados de la Tabla 3.2 para $E[A^s]$ muestran que su comportamiento es similar al de la esperanza de R^s ; es decir, la esperanza es función creciente de ρ , para cada μ fijo, y función decreciente de μ , para cada ρ fijo. También tenemos que $E[A^s(E_3)] > E[A^s(M)] > E[A^s(H_2)]$.

Tabla 3.2. La esperanza $E[A^s]$

	μ	0.05	0.5	2.5	25.0	100.0
$\rho = 0.2$	E_3	1.51922	0.09679	0.01865	0.00184	0.00046
	M	1.44140	0.09336	0.01801	0.00178	0.00044
	H_2	1.38890	0.09098	0.01756	0.00174	0.00043
$\rho = 0.4$	E_3	79.9433	0.55173	0.09185	0.00882	0.00219
	M	58.5374	0.50480	0.08516	0.00820	0.00204
	H_2	48.6464	0.47770	0.08122	0.00784	0.00195
$\rho = 0.6$	E_3	231311.1	2.43890	0.28021	0.02501	0.00619
	M	59603.6	2.00281	0.24596	0.02223	0.00551
	H_2	29482.2	1.79870	0.22854	0.02079	0.00515
$\rho = 0.8$	E_3	1.9818×10^{13}	20.3652	0.84476	0.06314	0.01542
	M	1.5258×10^{11}	12.1326	0.67367	0.05285	0.01295
	H_2	1.5814×10^{10}	9.46903	0.59948	0.04808	0.01181

El comportamiento de $E[R^b]$ es más complicado, como podemos observar en la Tabla 3.3. Más concretamente, vemos que

- El número medio de reintentos bloqueados durante un periodo de ocupación es una función creciente de ρ , para cada μ fijo.

- Para cada ρ fijo, $E[R^b]$ no es, en general, una función monótona de μ . Si $\rho = 0.2$, $E[R^b]$ es una función creciente de μ cuando las distribuciones de servicio son exponencial e hiperexponencial y alcanza un mínimo en $\mu = 0.5$ cuando la distribución es Erlang. Si $\rho = 0.4$, $E[R^b]$ tiene un mínimo en $\mu = 0.5$, para cualesquiera de las tres distribuciones de servicio que estamos considerando. Para $\rho = 0.6$, $E[R^b]$ tiene un mínimo en $\mu = 0.5$ cuando las distribuciones de servicio son la exponencial y la hiperexponencial, y en $\mu = 2.5$ cuando la distribución es Erlang. Para $\rho = 0.8$ el mínimo lo alcanza en $\mu = 2.5$ para las tres distribuciones.

- Las relaciones entre las esperanzas para las distintas distribuciones, que denotamos $E[R^b(E_3)]$, $E[R^b(M)]$ y $E[R^b(H_2)]$, dependen de la combinación de valores (ρ, μ) . Para $(\rho, \mu) \in \{(0.4, 0.05), (0.6, 0.05), (0.8, 0.05), (0.8, 0.5)\}$ tenemos que $E[R^b(E_3)] > E[R^b(M)] > E[R^b(H_2)]$. Para el resto de combinaciones $E[R^b(E_3)] < E[R^b(M)] < E[R^b(H_2)]$.

Tabla 3.3. La esperanza $E[R^b]$

μ		0.05	0.5	2.5	25.0	100.0
$\rho = 0.2$	E_3	0.18369	0.18279	0.59421	5.28058	20.9054
	M	0.19073	0.23917	0.85894	7.88907	31.3264
	H_2	0.19713	0.28659	1.08216	10.0898	40.1190
$\rho = 0.4$	E_3	38.9727	1.26437	2.50721	19.1303	74.6824
	M	29.7687	1.50480	3.49664	28.4538	111.783
	H_2	25.5989	1.70860	4.32867	36.3172	143.084
$\rho = 0.6$	E_3	549366.3	12.0361	10.8818	66.3694	253.812
	M	145286.3	12.3865	14.4843	98.1345	379.329
	H_2	73420.0	13.0205	17.5211	124.911	485.209
$\rho = 0.8$	E_3	3.3030×10^{14}	484.278	91.0084	371.393	1370.14
	M	2.5939×10^{12}	341.448	110.462	543.271	2042.12
	H_2	2.7330×10^{11}	301.639	128.059	688.201	2608.95

En las Tablas 3.4-3.6 resumimos algunas otras características de estos descriptores. Más concretamente cada casilla de estas tablas contiene, en orden decreciente, la probabilidad en el punto cero, la moda o modas de la distribución y la probabilidad acumulada en el punto 100.

Recordemos que es posible calcular la función de masa de probabilidad de R^s sin necesidad de truncar la órbita. Por el contrario, para calcular la distribución de A^s y R^b necesitamos trabajar con un modelo aproximado con capacidad finita de la órbita. Puesto que en este capítulo nos hemos centrado en estudiar la función de masa de probabilidad de los descriptores parece coherente utilizar un criterio puntual para determinar el valor de K . Por ejemplo, para el descriptor A^s , definimos la norma asociada al nivel de truncamiento K como

$$\mathcal{P}(K) = \max_{0 \leq a \leq 100} |P\{A^s(K-1) = a\} - P\{A^s(K) = a\}|,$$

donde $P\{A^s(K) = a\}$ se calcula mediante (3.7), tras resolver el sistema proporcionado por las ecuaciones (3.8) y (3.9).

Eligiendo $K = 150$ podemos asegurar que $\mathcal{P}(K) < 10^{-14}$. De hecho, para la mayoría de las entradas de la Tabla 3.5 podemos alcanzar la precisión 10^{-14} para valores más pequeños de K , pero tomamos $K = 150$ porque este valor garantiza la precisión 10^{-14} para todos los experimentos numéricos de esta sección, tanto para A^s como para R^b .

En la Tabla 3.4, relativa al descriptor R^s , podemos observar lo siguiente:

- El valor de la probabilidad $P\{R^s = 0\}$ es $\beta(\lambda)$.
- La función de masa de probabilidad de R^s es decreciente, por lo tanto tiene una única moda en el punto 0.
- A medida que aumenta la intensidad de tráfico disminuye la probabilidad de que no haya ningún reintento exitoso.
- La cola de la distribución es más pesada a medida que crece la intensidad de tráfico o disminuye la tasa de reintento.
- En cuanto a la influencia de las distribuciones de servicio tenemos que $P\{R^s(E_3) = 0\} < P\{R^s(M) = 0\} < P\{R^s(H_2) = 0\}$. La relación entre las colas de las tres distribuciones de servicio depende de la combinación de valores (ρ, μ) .

En la Tabla 3.5, correspondiente al descriptor A^s , observamos que

- La función de masa de probabilidad de A^s es decreciente, por lo tanto tiene una única moda en el punto 0.
- Para un valor fijo de μ , $P\{A^s = 0\}$ es una función decreciente de ρ ; sin embargo, para un valor fijo de ρ , es una función creciente de μ .
- La cola de la distribución de probabilidad de A^s es más pesada a

medida que crece la intensidad de tráfico o disminuye la tasa de reintento.

- Comparando los resultados para las tres distribuciones de servicio, tenemos que $P\{A^s(E_3) = 0\} < P\{A^s(M) = 0\} < P\{A^s(H_2) = 0\}$ y $P\{A^s(E_3) \leq 100\} \leq P\{A^s(M) \leq 100\} \leq P\{A^s(H_2) \leq 100\}$.

En la Tabla 3.6 recogemos los resultados obtenidos para el descriptor R^b utilizando la aproximación debida sólo al truncamiento de la órbita; es decir, usando la ecuación (3.15). Observamos lo siguiente:

- A medida que la tasa de reintento crece la función de masa de probabilidad de R^b puede tener dos modas, una de ellas siempre se alcanza en el punto 0.

- $P\{R^b = 0\}$ es una función decreciente de ρ , para cada μ fijo; sin embargo, como función de μ , para $\rho \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$ fijo, alcanza un máximo en $\mu = 0.5$. Si $\rho = 0.2$, $P\{R^b = 0\}$ es una función decreciente de μ .

- La cola de la distribución de probabilidad de R^b es más pesada a medida que crece ρ . Si $\rho = 0.2$, $P\{R^b \leq 100\}$ es decreciente como función de μ . Para $\rho \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$, $P\{R^b \leq 100\}$ tiene un máximo como función de μ .

- En cuanto a la influencia de las distribuciones de servicio tenemos que $P\{R^b(E_3) = 0\} < P\{R^b(M) = 0\} < P\{R^b(H_2) = 0\}$, a excepción del caso $(\rho, \mu) = (0.2, 0.5)$. La influencia sobre las colas de las distribuciones depende del valor del par (ρ, μ) .

Tabla 3.4. Otras características del descriptor R^s

		$\mu = 0.05$	$\mu = 0.5$	$\mu = 2.5$	$\mu = 25.0$	$\mu = 100.0$	
$\rho = 0.2$	E_3	$P\{R^s = 0\}$	0.82397	0.82397	0.82397	0.82397	0.82397
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{R^s = 0\}$	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{R^s = 0\}$	0.83932	0.83932	0.83932	0.83932	0.83932
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$\rho = 0.4$	E_3	$P\{R^s = 0\}$	0.68695	0.68695	0.68695	0.68695	0.68695
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.85181	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{R^s = 0\}$	0.71428	0.71428	0.71428	0.71428	0.71428
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.87925	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{R^s = 0\}$	0.72869	0.72869	0.72869	0.72869	0.72869
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.89416	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$\rho = 0.6$	E_3	$P\{R^s = 0\}$	0.57870	0.57870	0.57870	0.57870	0.57870
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.61610	0.99720	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{R^s = 0\}$	0.62499	0.62499	0.62499	0.62499	0.62499
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.66279	0.99726	0.99996	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{R^s = 0\}$	0.64610	0.64610	0.64610	0.64610	0.64610
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.68509	0.99711	0.99992	0.99997	0.99997
$\rho = 0.8$	E_3	$P\{R^s = 0\}$	0.49205	0.49205	0.49205	0.49205	0.49205
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.51169	0.80701	0.98829	0.99732	0.99768
	M	$P\{R^s = 0\}$	0.55555	0.55555	0.55555	0.55555	0.55555
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.57593	0.86495	0.98788	0.99569	0.99608
	H_2	$P\{R^s = 0\}$	0.58139	0.58139	0.58139	0.58139	0.58139
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^s \leq 100\}$	0.60272	0.88856	0.98758	0.99463	0.99503

Tabla 3.5. Otras características del descriptor A^s

		$\mu = 0.05$	$\mu = 0.5$	$\mu = 2.5$	$\mu = 25.0$	$\mu = 100.0$	
$\rho = 0.2$	E_3	$P\{A^s = 0\}$	0.85127	0.93899	0.98323	0.99817	0.99953
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.99997	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{A^s = 0\}$	0.85841	0.94131	0.98382	0.99823	0.99955
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.99997	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{A^s = 0\}$	0.86312	0.94290	0.98422	0.99827	0.99956
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$\rho = 0.4$	E_3	$P\{A^s = 0\}$	0.70666	0.81531	0.93101	0.99144	0.99781
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.82549	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{A^s = 0\}$	0.73162	0.82951	0.93597	0.99204	0.99797
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.85282	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{A^s = 0\}$	0.74505	0.83760	0.93888	0.99240	0.99806
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.86801	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$\rho = 0.6$	E_3	$P\{A^s = 0\}$	0.59227	0.68536	0.84430	0.97666	0.99391
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.61610	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{A^s = 0\}$	0.63690	0.71939	0.86122	0.97922	0.99458
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.66277	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{A^s = 0\}$	0.65750	0.73599	0.86983	0.98055	0.99492
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.68505	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$\rho = 0.8$	E_3	$P\{A^s = 0\}$	0.50144	0.57220	0.73222	0.94605	0.98519
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.51169	0.93575	0.99999	0.99999	0.99999
	M	$P\{A^s = 0\}$	0.56398	0.62771	0.77016	0.95446	0.98753
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.57593	0.97248	0.99999	0.99999	0.99999
	H_2	$P\{A^s = 0\}$	0.58965	0.65154	0.78725	0.95836	0.98862
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{A^s \leq 100\}$	0.60272	0.98334	0.99999	0.99999	0.99999

Tabla 3.6. Otras características del descriptor R^b

		$\mu = 0.05$	$\mu = 0.5$	$\mu = 2.5$	$\mu = 25.0$	$\mu = 100.0$	
$\rho = 0.2$	E_3	$P\{R^b = 0\}$	0.92932	0.91914	0.86828	0.82939	0.82533
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0, 11
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99999	0.99122	0.93573
	M	$P\{R^b = 0\}$	0.93124	0.91529	0.87071	0.83862	0.83470
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99989	0.98069	0.92130
	H_2	$P\{R^b = 0\}$	0.93293	0.91615	0.87527	0.84465	0.84071
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.99999	0.99999	0.99946	0.97462	0.92163
$\rho = 0.4$	E_3	$P\{R^b = 0\}$	0.74966	0.79996	0.74564	0.69445	0.68883
		\mathcal{M}	0	0	0	0, 2	0, 14
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.87662	0.99990	0.99848	0.95159	0.84685
	M	$P\{R^b = 0\}$	0.77416	0.81258	0.76518	0.72198	0.71629
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.90057	0.99952	0.99519	0.93389	0.84077
	H_2	$P\{R^b = 0\}$	0.78787	0.82302	0.77886	0.73663	0.73078
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.91280	0.99881	0.99166	0.93036	0.84951
$\rho = 0.6$	E_3	$P\{R^b = 0\}$	0.61047	0.67584	0.63741	0.58664	0.58070
		\mathcal{M}	0	0	0	0, 3	0, 15
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.61610	0.96546	0.97410	0.87788	0.75028
	M	$P\{R^b = 0\}$	0.65643	0.71359	0.67868	0.63373	0.62730
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.66279	0.96460	0.96511	0.87006	0.76537
	H_2	$P\{R^b = 0\}$	0.67813	0.73406	0.70053	0.65534	0.64855
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.68509	0.96403	0.96119	0.87555	0.78372
$\rho = 0.8$	E_3	$P\{R^b = 0\}$	0.51004	0.56643	0.54482	0.49966	0.49398
		\mathcal{M}	0	0	0	0, 3	0, 15
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.51169	0.74875	0.88099	0.78230	0.65630
	M	$P\{R^b = 0\}$	0.57414	0.62812	0.60728	0.56464	0.55797
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.57593	0.80643	0.89154	0.79949	0.69733
	H_2	$P\{R^b = 0\}$	0.60081	0.65595	0.63531	0.59125	0.58403
		\mathcal{M}	0	0	0	0	0
		$P\{R^b \leq 100\}$	0.60272	0.83153	0.89900	0.81623	0.72417

A continuación comparamos numéricamente las dos aproximaciones para la distribución de R^b . Para valores pequeños de la tasa de reintento, el tiempo de servicio tiende a finalizar antes de que tenga lugar un intento repetido; por lo tanto, la reubicación de clientes no va a tener un efecto perturbador sobre la dinámica del sistema. Así pues, esperamos tener alta precisión cuando μ sea pequeño. En las Tablas 3.7 y 3.8, para el caso $(\rho, \mu) = (0.8, 100.0)$, vamos a comprobar cómo también se obtienen buenas aproximaciones cuando la tasa de reintento toma valores altos.

Tabla 3.7. Comparativa de las aproximaciones de $E[R^b]$

	$\bar{E}[R^b]$	$\hat{E}[R^b]$	$E[R^b]$
E_3	1370.148958326	1370.148958321	1370.148957385
M	2042.124838966	2042.124838965	2042.124838966
H_2	2608.955483322	2608.955483324	2608.955483418

La Tabla 3.7 recoge los resultados obtenidos para la esperanza de R^b mediante las dos aproximaciones, utilizando respectivamente (3.33) y (3.34), y la obtenida a través de la expresión exacta (3.3). En ambas aproximaciones seguimos trabajando con $K = 150$. Podemos comprobar que los tres valores coinciden al menos hasta el quinto decimal, para cualesquiera de las tres distribuciones de servicio.

Tabla 3.8. Comparativa de las aproximaciones de $F_{R^b}(r)$

r	$\bar{F}_{R^b}^{E_3}(r)$	$\hat{F}_{R^b}^{E_3}(r)$	$\bar{F}_{R^b}^M(r)$	$\hat{F}_{R^b}^M(r)$	$\bar{F}_{R^b}^{H_2}(r)$	$\hat{F}_{R^b}^{H_2}(r)$
0	0.49398	0.49205	0.55797	0.55571	0.58403	0.58160
1	0.49591	0.49207	0.56035	0.55603	0.58663	0.58199
2	0.49786	0.49210	0.56271	0.55649	0.58919	0.58257
3	0.49981	0.49216	0.56503	0.55708	0.59170	0.58330
4	0.50176	0.49226	0.56732	0.55780	0.59418	0.58417
5	0.50373	0.49241	0.56958	0.55863	0.59662	0.58518
6	0.50570	0.49261	0.57181	0.55956	0.59902	0.58631
7	0.50767	0.49288	0.57402	0.56059	0.60138	0.58755
8	0.50965	0.49323	0.57619	0.56172	0.60371	0.58889
9	0.51163	0.49366	0.57834	0.56292	0.60600	0.59032
10	0.51361	0.49418	0.58046	0.56420	0.60825	0.59183
...
100	0.65630	0.66124	0.69733	0.69691	0.72417	0.72386

En la Tabla 3.8 mostramos la función de distribución de probabilidad de R^b para ambas aproximaciones, con $K = 150$. De nuevo observamos que los valores obtenidos por las dos aproximaciones difieren poco.

Nuestro último objetivo en este capítulo es encontrar una tasa de reintento óptima con respecto a una función objetivo específica. Entre los diversos problemas de optimización que pueden plantearse, en base a diferentes criterios de costes/beneficios, nuestro planteamiento es el siguiente:

Sean $b(R^s)$, $b(A^s)$, $b(R^b)$ y $b(A^b)$ los beneficios unitarios asociados a un reintento exitoso, una llegada exitosa, un reintento bloqueado y una llegada bloqueada, respectivamente. El problema de optimización consiste en determinar la tasa de reintento μ para la que se maximiza el beneficio total esperado durante un periodo de ocupación. Es decir,

$$\max_{\mu} \left[b(R^s)E[R^s] + b(A^s)E[A^s] + b(R^b)E[R^b] + b(A^b)E[A^b] \right]. \quad (3.35)$$

En la Tabla 3.9 mostramos los resultados de la función de beneficio esperado (3.35), cuando la distribución de los tiempos de servicio es E_3 y $(b(R^s), b(A^s), b(R^b), b(A^b)) = (1.0, 3.0, -10.0, -3.0)$. Para cada elección de ρ obtenemos un valor óptimo μ^* , que ha sido marcado en negrita en la tabla.

Tabla 3.9. Valor óptimo de μ

μ	0.05	0.5	2.5	25.0	100.0
$\rho = 0.2$	1.4611	-2.0860	-6.3955	-53.3011	-209.5537
$\rho = 0.4$	-257.8215	-13.0575	-26.2523	-192.6219	-748.1537
$\rho = 0.6$	-5.4936×10^6	-123.3615	-111.8185	-666.6944	-2541.1265
$\rho = 0.8$	-3.4021×10^{15}	-4952.6061	-922.3086	-3722.2496	-13709.5667

Capítulo 4

Análisis transitorio de los eventos exitosos y bloqueados

En los Capítulos 2 y 3 hemos estudiado los descriptores R^s (número de reintentos exitosos), R^b (número de reintentos bloqueados), A^s (número de llegadas exitosas) y A^b (número de llegadas bloqueadas) referidos a un periodo de ocupación. Puesto que durante un periodo de ocupación $R^s = A^b$ el estudio se reducía a tres de los cuatro descriptores. Veíamos como la distribución de los descriptores era más dispersa a medida que el nivel de congestión del sistema se incrementaba y, como consecuencia, la magnitud de los momentos se hacía muy grande. La dispersión de la distribución se explica porque el periodo de ocupación es estocásticamente más grande cuanto mayor es el nivel de congestión. A la vista de este hecho parece razonable plantearse el estudio de la distribución de los descriptores durante un periodo de tiempo fijo $(0, t]$, en lugar de hacerlo referido a un periodo de ocupación. Como durante un periodo de tiempo fijo ya no se da la igualdad entre R^s y A^b , en este capítulo necesitaremos estudiar los cuatro descriptores. Los contenidos de este capítulo están basados en el artículo de Amador y Artalejo [6].

Existen algunos trabajos dedicados al análisis transitorio del estado del sistema en colas con reintentos [7, 8, 51, 53] pero con un enfoque diferente al desarrollado en este capítulo, tanto por el objetivo del estudio como por la metodología empleada.

Como hemos dicho anteriormente, los procesos estocásticos asociados a los sistemas de colas con reintentos no son homogéneos y, por lo tanto, solamente existen fórmulas explícitas para la distribución del estado del sistema en algunos casos muy específicos. Obviamente las dificultades analíticas aumentan cuando trabajamos con otros descriptores y el sistema opera en régimen transitorio. En este capítulo realizamos un estudio de naturaleza computacional para la distribución de los descriptores R^s , R^b , A^s y A^b durante un periodo de tiempo fijo $(0, t]$, basado en la aproximación obtenida mediante truncamiento de la órbita y en el uso de distribuciones de servicio de tipo PH .

Más concretamente, estructuramos el Capítulo 4 en tres secciones. En la Sección 4.1 nos centramos en el modelo $M/M/c$ con reintentos y capacidad finita de la órbita, llevando a cabo el análisis computacional de las características transitorias de los cuatro descriptores. En la Sección 4.2 extendemos el análisis al modelo $M/PH/1$ con reintentos y capacidad finita de la órbita. Por último, en la Sección 4.3 presentamos resultados numéricos de las principales características transitorias estudiadas en las secciones previas.

4.1 El sistema $M/M/c$ con reintentos

Recordemos que en la cola $M/M/c$ con reintentos, el estado del sistema en el instante t está representado por la cadena de Markov $\{(C(t), N(t)); t \geq 0\}$, donde $C(t)$ es el número de servidores ocupados y $N(t)$ es el número de clientes en la órbita en el instante t . Debido a lo intratable de este modelo para el análisis transitorio de los eventos exitosos y bloqueados nos centramos en la aproximación más simple que consiste en fijar una capacidad ficticia K para la órbita, siendo $\{(C^K(t), N^K(t)); t \geq 0\}$ el proceso Markoviano obtenido bajo la hipótesis de truncamiento con generador infinitesimal Q_K dado en (2.7).

Como el objetivo para los cuatro descriptores en estudio es contar eventos, completamos la descripción del sistema considerando el proceso $\{(C^K(t), N^K(t), X(t)); t \geq 0\}$, donde, para cada descriptor fijo, $X(t)$ denota el número de eventos que han tenido lugar durante el intervalo de tiempo $(0, t]$.

A continuación introducimos la notación para las características de los descriptores. Para R^s tenemos que $X(t) = X^{R^s}(t)$. Para cada $t \geq 0$, deno-

tamos las probabilidades transitorias

$$p_{ijk}^{R^s}(t) = P\{C^K(t) = i, N^K(t) = j, X^{R^s}(t) = k\},$$

para $0 \leq i \leq c, 0 \leq j \leq K, k \geq 0$, y las probabilidades en el instante inicial

$$p_{ijk}^{R^s}(0) = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j, k) = (i_0, j_0, k_0), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $X^{R^s}(t)$ es una componente de conteo, tenemos que $k \geq k_0$.

Sea $p_{ijk}^{*R^s}(s)$ la transformada de Laplace de la probabilidad $p_{ijk}^{R^s}(t)$; es decir, $p_{ijk}^{*R^s}(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{ijk}^{R^s}(t) dt$, para $\text{Re}(s) \geq 0$. Los siguientes vectores corresponden a las transformadas de Laplace particionados de acuerdo a los niveles de la órbita:

$$\mathbf{p}_{jk}^{*R^s}(s) = (p_{0jk}^{*R^s}(s), \dots, p_{cjk}^{*R^s}(s)), \quad 0 \leq j \leq K, k \geq k_0,$$

$$\mathbf{p}_k^{*R^s}(s) = (\mathbf{p}_{0k}^{*R^s}(s), \dots, \mathbf{p}_{Kk}^{*R^s}(s)), \quad k \geq k_0.$$

Sin más que cambiar R^s por R^b , A^s o A^b obtenemos la notación correspondiente a los respectivos descriptores.

Sea \mathbf{v}_0 un vector fila de dimensión $(c+1)(K+1)$ con todos los elementos iguales a cero excepto el elemento $(i_0 + j_0(c+1))$ -ésimo que toma el valor 1. El resto de la notación matricial usada a lo largo del capítulo es coherente con lo expuesto en el Apéndice 2.A.

El Teorema 4.1, que enunciamos seguidamente, proporciona los sistemas de ecuaciones que han de verificar las transformadas de Laplace de las probabilidades de transición de los descriptores en estudio.

Teorema 4.1. *a) Para cada $k \geq k_0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{p}_k^{*R^s}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:*

$$\mathbf{p}_k^{*R^s}(s) (Q_K - sI_{(c+1)(K+1)} - \mu(U_{K+1} \otimes W_{c+1})) = \mathbf{a}_k, \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{a}_k = -\delta_{kk_0} \mathbf{v}_0 - (1 - \delta_{kk_0}) \mu \mathbf{p}_{k-1}^{*R^s}(s) (U_{K+1} \otimes W_{c+1})$.

*b) Para cada $k \geq k_0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{p}_k^{*R^b}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:*

$$\mathbf{p}_k^{*R^b}(s) (Q_K - sI_{(c+1)(K+1)} - \mu(V_{K+1} \otimes E_{c+1, c+1}(c+1))) = \mathbf{b}_k, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{b}_k = -\delta_{kk_0} \mathbf{v}_0 - (1 - \delta_{kk_0}) \mu \mathbf{P}_{k-1}^{*R^b}(s)(V_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1))$.

c) Para cada $k \geq k_0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{p}_k^{*A^s}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:

$$\mathbf{p}_k^{*A^s}(s) (Q_K - sI_{(c+1)(K+1)} - \lambda(I_{K+1} \otimes W_{c+1})) = \mathbf{c}_k, \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{c}_k = -\delta_{kk_0} \mathbf{v}_0 - (1 - \delta_{kk_0}) \lambda \mathbf{P}_{k-1}^{*A^s}(s)(I_{K+1} \otimes W_{c+1})$.

d) Para cada $k \geq k_0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{p}_k^{*A^b}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:

$$\mathbf{p}_k^{*A^b}(s) (Q_K - sI_{(c+1)(K+1)} - \lambda(W_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1))) = \mathbf{d}_k, \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{d}_k = -\delta_{kk_0} \mathbf{v}_0 - (1 - \delta_{kk_0}) \lambda \mathbf{P}_{k-1}^{*A^b}(s)(W_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1))$.

Demostración. En primer lugar nos centramos en el estudio del número de reintentos exitosos durante el periodo $(0, t]$. Siguiendo el método de la transformada de Laplace [46], escribimos las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante del proceso $\{(C^K(t), N^K(t), X^{R^s}(t)); t \geq 0\}$, que vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ijk}^{R^s}(t) &= -(\lambda + i\nu + j\mu) p_{ijk}^{R^s}(t) + (1 - \delta_{0i}) \lambda p_{i-1,jk}^{R^s}(t) \\ &+ (i+1)\nu p_{i+1,jk}^{R^s}(t) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(1 - \delta_{kk_0})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k-1}^{R^s}(t), \\ &0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{cjk}^{R^s}(t) &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu) p_{cjk}^{R^s}(t) + (1 - \delta_{0j}) \lambda p_{c,j-1,k}^{R^s}(t) \\ &+ \lambda p_{c-1,jk}^{R^s}(t) + (1 - \delta_{jK})(1 - \delta_{kk_0})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k-1}^{R^s}(t), \\ &0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tomando transformadas de Laplace en (4.5) y (4.6) y teniendo en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} p_{ijk}^{R^s}(t) dt = s p_{ijk}^{*R^s}(s) - \delta_{(i,j,k)(i_0,j_0,k_0)},$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} s p_{ijk}^{*R^s}(s) - \delta_{(i,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -(\lambda + i\nu + j\mu) p_{ijk}^{*R^s}(s) + (1 - \delta_{0i}) \lambda p_{i-1,jk}^{*R^s}(s) \\ &+ (i+1)\nu p_{i+1,jk}^{*R^s}(s) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(1 - \delta_{kk_0})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k-1}^{*R^s}(s), \\ &0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
sp_{cjk}^{*R^s}(s) - \delta_{(c,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu)p_{cjk}^{*R^s}(s) \\
&\quad + (1 - \delta_{0j})\lambda p_{c,j-1,k}^{*R^s}(s) + \lambda p_{c-1,jk}^{*R^s}(s) \\
+ (1 - \delta_{jK})(1 - \delta_{kk_0})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k-1}^{*R^s}(s), \quad &0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Si escribimos las ecuaciones (4.7) y (4.8) en forma matricial obtenemos la expresión (4.1).

Para el descriptor R^b escribimos las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante del proceso $\{(C^K(t), N^K(t), X^{R^b}(t)); t \geq 0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{ijk}^{R^b}(t) &= -(\lambda + i\nu + j\mu)p_{ijk}^{R^b}(t) + (1 - \delta_{0i})\lambda p_{i-1,jk}^{R^b}(t) \\
+ (i+1)\nu p_{i+1,jk}^{R^b}(t) &+ (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{R^b}(t), \\
0 \leq i \leq c-1, \quad &0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{cjk}^{R^b}(t) &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + j\mu)p_{cjk}^{R^b}(t) + (1 - \delta_{0j})\lambda p_{c,j-1,k}^{R^b}(t) \\
&\quad + \lambda p_{c-1,jk}^{R^b}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{R^b}(t) \\
&\quad + (1 - \delta_{kk_0})j\mu p_{cj,k-1}^{R^b}(t), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Tomando transformadas de Laplace en (4.9) y (4.10) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
sp_{ijk}^{*R^b}(s) - \delta_{(i,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -(\lambda + i\nu + j\mu)p_{ijk}^{*R^b}(s) + (1 - \delta_{0i})\lambda p_{i-1,jk}^{*R^b}(s) \\
&\quad + (i+1)\nu p_{i+1,jk}^{*R^b}(s) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{*R^b}(s), \\
0 \leq i \leq c-1, \quad &0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sp_{cjk}^{*R^b}(s) - \delta_{(c,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu + j\mu)p_{cjk}^{*R^b}(s) \\
+ (1 - \delta_{0j})\lambda p_{c,j-1,k}^{*R^b}(s) &+ \lambda p_{c-1,jk}^{*R^b}(s) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{*R^b}(s) \\
&\quad + (1 - \delta_{kk_0})j\mu p_{cj,k-1}^{*R^b}(s), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (4.11) y (4.12) se puede expresar en forma matricial como (4.2).

Las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante del proceso $\{(C^K(t), N^K(t), X^{A^s}(t)); t \geq 0\}$ asociado al descriptor A^s quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ijk}^{A^s}(t) &= -(\lambda + i\nu + j\mu) p_{ijk}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{kk_0}) \lambda p_{i-1,j,k-1}^{A^s}(t) \\ &+ (i+1)\nu p_{i+1,j,k}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{A^s}(t), \\ &0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{cjk}^{A^s}(t) &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu) p_{cjk}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{0j}) \lambda p_{c,j-1,k}^{A^s}(t) \\ &+ (1 - \delta_{kk_0}) \lambda p_{c-1,j,k-1}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{A^s}(t), \\ &0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las transformadas de Laplace de (4.13) y (4.14) conducen a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} s p_{ijk}^{*A^s}(s) - \delta_{(i,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -(\lambda + i\nu + j\mu) p_{ijk}^{*A^s}(s) \\ &+ (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{kk_0}) \lambda p_{i-1,j,k-1}^{*A^s}(s) + (i+1)\nu p_{i+1,j,k}^{*A^s}(s) \\ &+ (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{*A^s}(s), \\ &0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} s p_{cjk}^{*A^s}(s) - \delta_{(c,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu) p_{cjk}^{*A^s}(s) \\ &+ (1 - \delta_{0j}) \lambda p_{c,j-1,k}^{*A^s}(s) + (1 - \delta_{kk_0}) \lambda p_{c-1,j,k-1}^{*A^s}(s) \\ &+ (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{*A^s}(s), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Expresando el sistema de ecuaciones (4.15) y (4.16) en forma matricial obtenemos (4.3).

Finalmente, para el número de llegadas bloqueadas durante el intervalo $(0, t]$, podemos escribir las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante del proceso $\{(C^K(t), N^K(t), X^{A^b}(t)); t \geq 0\}$ como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ijk}^{A^b}(t) &= -(\lambda + i\nu + j\mu) p_{ijk}^{A^b}(t) + (1 - \delta_{0i}) \lambda p_{i-1,j,k}^{A^b}(t) \\ &+ (i+1)\nu p_{i+1,j,k}^{A^b}(t) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{A^b}(t), \\ &0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{cjk}^{A^b}(t) &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu)p_{cjk}^{A^b}(t) + (1 - \delta_{0j})(1 - \delta_{kk_0})\lambda p_{c,j-1,k-1}^{A^b}(t) \\
&\quad + \lambda p_{c-1,jk}^{A^b}(t) + (1 - \delta_{jK})(j + 1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{A^b}(t), \\
&\quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Tomando transformadas de Laplace en (4.17) y (4.18) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
sp_{ijk}^{*A^b}(s) - \delta_{(i,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -(\lambda + i\nu + j\mu)p_{ijk}^{*A^b}(s) + (1 - \delta_{0i})\lambda p_{i-1,jk}^{*A^b}(s) \\
&\quad + (i + 1)\nu p_{i+1,jk}^{*A^b}(s) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j + 1)\mu p_{i-1,j+1,k}^{*A^b}(s), \\
&\quad 0 \leq i \leq c - 1, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
sp_{cjk}^{*A^b}(s) - \delta_{(c,j,k)(i_0,j_0,k_0)} &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu)p_{cjk}^{*A^b}(s) \\
&\quad + (1 - \delta_{0j})(1 - \delta_{kk_0})\lambda p_{c,j-1,k-1}^{*A^b}(s) + \lambda p_{c-1,jk}^{*A^b}(s) \\
&\quad + (1 - \delta_{jK})(j + 1)\mu p_{c-1,j+1,k}^{*A^b}(s), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Expresando en forma matricial el sistema de ecuaciones (4.19) y (4.20) obtenemos (4.4). \square

Una vez calculadas las transformadas de Laplace, podemos obtener la distribución marginal $p_{..k}^{R^s}(t) = P\{X^{R^s}(t) = k\}$, para $k \geq k_0$, mediante la inversión numérica de la suma $\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^K p_{ijk}^{*R^s}(s)$. De igual forma lo hacemos para los otros descriptores. En la Sección 4.3 llevaremos a cabo la inversión numérica de las transformadas de Laplace formuladas en el Teorema 4.1 [1, 2, 3, 26, 52].

A continuación pasamos a obtener los momentos del número de eventos exitosos y bloqueados que tienen lugar durante el intervalo $(0, t]$. Definimos

$$\begin{aligned}
m_{ij}^{R^s,n}(t) &= \sum_{k=k_0}^{\infty} k^n p_{ijk}^{R^s}(t), \quad 0 \leq i \leq c, \quad 0 \leq j \leq K, \quad n \geq 0, \\
m_n^{R^s}(t) &= \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^K m_{ij}^{R^s,n}(t) = \sum_{k=k_0}^{\infty} k^n p_{..k}^{R^s}(t), \quad n \geq 0,
\end{aligned}$$

$$m_{ij}^{*R^s, n}(s) = \int_0^\infty e^{-st} m_{ij}^{R^s, n}(t) dt, \quad 0 \leq i \leq c, \quad 0 \leq j \leq K, \quad n \geq 0.$$

Obviamente, para $n = 0$, obtenemos las probabilidades transitorias del estado del sistema, es decir, tenemos que

$$m_{ij}^{R^s, 0}(t) = \sum_{k=k_0}^\infty p_{ijk}^{R^s}(t) = P\{C^K(t) = i, N^K(t) = j\},$$

$$m_0^{R^s}(t) = 1.$$

Agrupando las transformadas de Laplace de acuerdo a los niveles de la órbita obtenemos los siguientes vectores:

$$\mathbf{m}_j^{*R^s, n}(s) = \left(m_{0j}^{*R^s, n}(s), \dots, m_{cj}^{*R^s, n}(s) \right), \quad 0 \leq j \leq K, \quad n \geq 0,$$

$$\mathbf{m}^{*R^s, n}(s) = \left(\mathbf{m}_0^{*R^s, n}(s), \dots, \mathbf{m}_K^{*R^s, n}(s) \right), \quad n \geq 0.$$

Las definiciones para los demás descriptores son de la misma naturaleza, basta con sustituir en las definiciones previas R^s por el correspondiente descriptor R^b , A^s o A^b .

El Teorema 4.2 que se da a continuación proporciona un plan recursivo para la obtención de los momentos.

Teorema 4.2. *a) Para cada $n \geq 0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{m}^{*R^s, n}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:*

$$\mathbf{m}^{*R^s, n}(s)(Q_K - sI_{(c+1)(K+1)}) = \mathbf{a}^n, \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{a}^n = -\mathbf{v}_0 k_0^n - (1 - \delta_{0n})\mu \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \mathbf{m}^{*R^s, l}(s)(U_{K+1} \otimes W_{c+1})$.

*b) Para cada $n \geq 0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{m}^{*R^b, n}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:*

$$\mathbf{m}^{*R^b, n}(s)(Q_K - sI_{(c+1)(K+1)}) = \mathbf{b}^n,$$

donde $\mathbf{b}^n = -\mathbf{v}_0 k_0^n - (1 - \delta_{0n})\mu \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \mathbf{m}^{*R^b, l}(s)(V_{K+1} \otimes E_{c+1, c+1}(c+1))$.

c) Para cada $n \geq 0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{m}^{*A^s,n}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:

$$\mathbf{m}^{*A^s,n}(s)(Q_K - sI_{(c+1)(K+1)}) = \mathbf{c}^n,$$

donde $\mathbf{c}^n = -\mathbf{v}_0 k_0^n - (1 - \delta_{0n})\lambda \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \mathbf{m}^{*A^s,l}(s)(I_{K+1} \otimes W_{c+1})$.

d) Para cada $n \geq 0$, el vector de transformadas de Laplace $\mathbf{m}^{*A^b,n}(s)$ satisface el siguiente sistema tridiagonal por bloques:

$$\mathbf{m}^{*A^b,n}(s)(Q_K - sI_{(c+1)(K+1)}) = \mathbf{d}^n,$$

donde $\mathbf{d}^n = -\mathbf{v}_0 k_0^n - (1 - \delta_{0n})\lambda \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \mathbf{m}^{*A^b,l}(s)(W_{K+1} \otimes E_{c+1,c+1}(c+1))$.

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} k^n p_{i-1,j+1,k-1}^{R^s}(t) = m_{i-1,j+1}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0n}) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} m_{i-1,j+1}^{R^s,l}(t),$$

obtenemos de (4.5) y (4.6) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{ij}^{R^s,n}(t) &= -(\lambda + i\nu + j\mu) m_{ij}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0i})\lambda m_{i-1,j}^{R^s,n}(t) \\ &\quad + (i+1)\nu m_{i+1,j}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu \\ &\quad \times \left(m_{i-1,j+1}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0n}) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} m_{i-1,j+1}^{R^s,l}(t) \right), \\ &\quad 0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{cj}^{R^s,n}(t) &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu) m_{cj}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0j})\lambda m_{c,j-1}^{R^s,n}(t) \\ &\quad + \lambda m_{c-1,j}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu \\ &\quad \times \left(m_{c-1,j+1}^{R^s,n}(t) + (1 - \delta_{0n}) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} m_{c-1,j+1}^{R^s,l}(t) \right), \quad 0 \leq j \leq K. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Las condiciones iniciales ahora son $m_{ij}^{R^s,n}(0) = \delta_{(i,j)(i_0,j_0)} k_0^n$, para $0 \leq i \leq c$, $0 \leq j \leq K$ y $n \geq 0$. Por lo tanto, tomando transformadas de Laplace sobre (4.22) y (4.23) obtenemos

$$\begin{aligned}
sm_{ij}^{*R^s,n}(s) - \delta_{(i,j)(i_0,j_0)}k_0^n &= -(\lambda + i\nu + j\mu)m_{ij}^{*R^s,n}(s) + (1 - \delta_{0i})\lambda m_{i-1,j}^{*R^s,n}(s) \\
&\quad + (i+1)\nu m_{i+1,j}^{*R^s,n}(s) + (1 - \delta_{0i})(1 - \delta_{jK})(j+1)\mu \\
&\quad \times \left(m_{i-1,j+1}^{*R^s,n}(s) + (1 - \delta_{0n}) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} m_{i-1,j+1}^{*R^s,l}(s) \right), \\
&\quad 0 \leq i \leq c-1, \quad 0 \leq j \leq K,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sm_{cj}^{*R^s,n}(s) - \delta_{(c,j)(i_0,j_0)}k_0^n &= -((1 - \delta_{jK})\lambda + c\nu)m_{cj}^{*R^s,n}(s) \\
&\quad + (1 - \delta_{0j})\lambda m_{c,j-1}^{*R^s,n}(s) + \lambda m_{c-1,j}^{*R^s,n}(s) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu \\
&\quad \times \left(m_{c-1,j+1}^{*R^s,n}(s) + (1 - \delta_{0n}) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} m_{c-1,j+1}^{*R^s,l}(s) \right), \quad 0 \leq j \leq K,
\end{aligned}$$

que escritas en forma matricial conducen a (4.21).

Los mismos argumentos pueden extenderse a los descriptores R^b , A^s y A^b . \square

4.2 El sistema $M/PH/1$ con reintentos

El objetivo inicial en esta sección sería estudiar el número de eventos exitosos y bloqueados durante un periodo fijo de tiempo $(0, t]$ en la cola $M/G/1$ con reintentos. Desafortunadamente parece muy difícil, o incluso imposible, obtener la distribución exacta de estos descriptores en estado transitorio. En el libro de Falin y Templeton [33] se obtienen fórmulas en términos de transformadas para el análisis transitorio del estado del sistema en el modelo $M/G/1$ con reintentos, pero dichas fórmulas no son muy apropiadas para la inversión numérica. Además, el problema se complica aún más al considerar la variable de conteo $X(t)$. La clave del análisis transitorio de la cadena encajada en los instantes de salida es el cálculo de las potencias de la matriz de probabilidades de transición en una etapa, pero es bien sabido que la mayoría de los métodos existentes fallan cuando el espacio de estados es infinito [40]. Además, en el caso de R^b el problema es incluso mayor puesto que, como ya comentamos en la Sección 3.3, el número de reintentos bloqueados que se producen durante un tiempo de servicio dado depende de las llegadas bloqueadas que tienen lugar durante dicho tiempo de servicio.

Teniendo en cuenta las consideraciones previas, a continuación reducimos el estudio del número de eventos exitosos y bloqueados durante un periodo $(0, t]$ a la cola $M/PH/1$ con reintentos. Es decir, suponemos una distribución $PH(\alpha, T)$, de orden m , para el tiempo de servicio, en lugar de una distribución general.

Según vimos en la Subsección 3.3.1 el estado de la cola $M/PH/1$ con reintentos y capacidad de la órbita K viene descrito por la cadena de Markov $\{(K^K(t), N^K(t)); t \geq 0\}$, donde $K^K(t) = 0$ representa que el servidor está vacío y $K^K(t) = i$, para $1 \leq i \leq m$, denota la fase del servicio que está teniendo lugar. $N^K(t)$ es el número de clientes en la órbita. El generador infinitesimal Q_K viene dado por (3.14).

Podemos adaptar fácilmente la notación introducida en la Sección 4.1 al modelo $M/PH/1$ sustituyendo $C^K(t)$ por $K^K(t)$. Por ejemplo, $p_{ijk}^{R^s}(t)$ ahora sería la probabilidad $P\{K^K(t) = i, N^K(t) = j, X^{R^s}(t) = k\}$, para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq K$ y $k \geq 0$. La dinámica infinitesimal de una cola con tiempos de servicio PH incluye transiciones debidas a un cambio de fase. Además, en el instante en el que se ocupa el servidor es necesario que le sea asignada una fase.

En base a esta adaptación de la notación, tenemos que las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante, para el descriptor R^s , quedan de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} p_{0jk}^{R^s}(t) = -(\lambda + j\mu)p_{0jk}^{R^s}(t) + \sum_{i=1}^m t_i p_{ijk}^{R^s}(t), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ijk}^{R^s}(t) = & -((1 - \delta_{jK})\lambda - t_{ii})p_{ijk}^{R^s}(t) + \lambda \alpha_i p_{0jk}^{R^s}(t) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^m t_{i'} p_{i'jk}^{R^s}(t) \\ & + (1 - \delta_{0j})\lambda p_{i,j-1,k}^{R^s}(t) + (1 - \delta_{jK})(1 - \delta_{kk_0})(j+1)\mu \alpha_i p_{0,j+1,k-1}^{R^s}(t), \\ & 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comparando las ecuaciones (4.5) y (4.6), para la cola $M/M/c$ con reintentos, con las ecuaciones (4.24) y (4.25), para la cola $M/PH/1$ con reintentos, parecen ser bastante diferentes a primera vista. Sin embargo, tras una identificación apropiada por bloques, puede mostrarse que la estructura matricial para ambos modelos tiene el mismo aspecto.

Las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante para los otros tres descriptores quedan como sigue. Para R^b

$$\frac{d}{dt}p_{0jk}^{R^b}(t) = -(\lambda + j\mu)p_{0jk}^{R^b}(t) + \sum_{i=1}^m t_i p_{ijk}^{R^b}(t), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_{ijk}^{R^b}(t) = & -((1 - \delta_{jK})\lambda - t_{ii} + j\mu)p_{ijk}^{R^b}(t) + \lambda\alpha_i p_{0jk}^{R^b}(t) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^m t_{i'} p_{i'jk}^{R^b}(t) \\ & + (1 - \delta_{0j})\lambda p_{i,j-1,k}^{R^b}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu\alpha_i p_{0,j+1,k}^{R^b}(t) \\ & + (1 - \delta_{kk_0})j\mu p_{ij,k-1}^{R^b}(t), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para el descriptor A^s se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_{0jk}^{A^s}(t) = & -(\lambda + j\mu)p_{0jk}^{A^s}(t) + \sum_{i=1}^m t_i p_{ijk}^{A^s}(t), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.28) \\ \frac{d}{dt}p_{ijk}^{A^s}(t) = & -((1 - \delta_{jK})\lambda - t_{ii})p_{ijk}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{kk_0})\lambda\alpha_i p_{0j,k-1}^{A^s}(t) \\ & + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^m t_{i'} p_{i'jk}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{0j})\lambda p_{i,j-1,k}^{A^s}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu\alpha_i p_{0,j+1,k}^{A^s}(t), \\ & 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Finalmente, las ecuaciones asociadas a A^b son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_{0jk}^{A^b}(t) = & -(\lambda + j\mu)p_{0jk}^{A^b}(t) + \sum_{i=1}^m t_i p_{ijk}^{A^b}(t), \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0, \quad (4.30) \\ \frac{d}{dt}p_{ijk}^{A^b}(t) = & -((1 - \delta_{jK})\lambda - t_{ii})p_{ijk}^{A^b}(t) + \lambda\alpha_i p_{0jk}^{A^b}(t) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^m t_{i'} p_{i'jk}^{A^b}(t) \\ & + (1 - \delta_{0j})(1 - \delta_{kk_0})\lambda p_{i,j-1,k-1}^{A^b}(t) + (1 - \delta_{jK})(j+1)\mu\alpha_i p_{0,j+1,k}^{A^b}(t), \\ & 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq K, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Escribiendo los sistemas de ecuaciones (4.24)-(4.31) en forma matricial y siguiendo los mismos argumentos que se usaron en los Teoremas 4.1 y 4.2, podemos dar por válidos los resultados de dichos teoremas para el modelo $M/PH/1$ con reintentos y capacidad finita de la órbita sin más que tener en cuenta las siguientes tres modificaciones:

1. El generador infinitesimal Q_K de la cola $M/M/c$ con reintentos es reemplazado por el correspondiente a la cola $M/PH/1$ definido en (3.14).
2. El valor de c (número de servidores) en la cola $M/M/c$ con reintentos es sustituido por el valor de m (número de fases) en la cola $M/PH/1$ con reintentos.
3. La matriz W_{c+1} que aparece en los apartados *a)* y *c)* de los Teoremas 4.1 y 4.2 se sustituye por la matriz \overline{W}_{m+1} , definida como

$$\overline{W}_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0_{m \times (m+1)} \end{pmatrix},$$

y la matriz $E_{c+1,c+1}(c+1)$ que aparece en los apartados *b)* y *d)* se sustituye por la matriz $I_{m+1} - E_{11}(m+1)$ cuando trabajamos con la cola $M/PH/1$ con reintentos.

4.3 Resultados numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos de aplicación de los resultados desarrollados en las secciones previas.

En primer lugar, mostramos resultados concernientes a las esperanzas y coeficientes de variación de las variables R^s , R^b y A^s en el modelo $M/M/c$ con reintentos, así como para el número medio de clientes en la órbita y la probabilidad de bloqueo.

Puesto que estamos trabajando con el modelo aproximado con capacidad finita de la órbita, hemos de determinar el valor del nivel de truncamiento K apropiado. Como hemos comentado en los capítulos anteriores existen diferentes criterios para determinarlo. Estamos interesados en mostrar resultados concernientes a medias y coeficientes de variación, por lo que el criterio que hemos utilizado es el de fijar un error relativo para estas características suficientemente pequeño. En concreto, si para el nivel de truncamiento K denotamos por $m^K(u)$ el valor de la característica en estudio en el instante u ,

determinamos el valor K , para un intervalo de tiempo $(0, t]$, como el primer número natural que verifica que $\max_{u \in (0, t]} \{\mathcal{E}(u)\} < 10^{-5}$, donde

$$\mathcal{E}(u) = \left| \frac{m^{K-1}(u)}{m^K(u)} - 1 \right|.$$

Los siguiente resultados numéricos corresponden a un sistema con cinco servidores ($c = 5$), tasa de servicio $\nu = 1.0$, diferentes intensidades de tráfico, ρ , tasas de reintento, μ , y diferentes estados iniciales (i_0, j_0, k_0) , con $k_0 = 0$. El intervalo de tiempo donde se estudian las características de los descriptores es $(0, 30]$.

En las Tablas 4.1 y 4.2 recogemos los valores de K para las medias y los coeficientes de variación de R^s , R^b y A^s , así como para el número medio de clientes en órbita, $E[N(t)]$, y la probabilidad de bloqueo, $B(t)$.

El coeficiente de variación viene definido, por ejemplo para R^s , como

$$C_v(R^s(t)) = \frac{(Var(R^s(t)))^{1/2}}{E[R^s(t)]}.$$

En cuanto a $E[N(t)]$ y $B(t)$ tenemos que

$$E[N(t)] = \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^K j p_{ij}(t),$$

$$B(t) = \sum_{j=0}^K p_{ej}(t),$$

donde $p_{ij}(t) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p_{ijk}^{R^s}(t)$.

En la Tabla 4.1 consideramos el estado inicial $(0, 0, 0)$ y mostramos cómo varía K para $\rho \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ y $\mu \in \{0.1, 1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$. En la Tabla 4.2 fijamos $\rho = \mu = 0.5$ y vemos los valores que toma K para diferentes estados iniciales $(i_0, j_0) \in \{(0, 0), (5, 0), (0, 10), (5, 10)\}$.

Tabla 4.1. Nivel de truncamiento K en función de ρ y de μ

		μ	0.1	1.0	5.0	10.0	50.0
$E[R^s(t)]$	$\rho = 0.25$		10	10	10	10	9
	$\rho = 0.5$		21	18	17	17	16
	$\rho = 0.75$		39	30	27	27	26
$E[R^b(t)]$	$\rho = 0.25$		11	11	11	11	11
	$\rho = 0.5$		23	21	20	20	20
	$\rho = 0.75$		43	37	36	36	35
$E[A^s(t)]$	$\rho = 0.25$		4	5	5	5	5
	$\rho = 0.5$		14	13	13	13	13
	$\rho = 0.75$		32	27	25	25	24
$C_v(R^s(t))$	$\rho = 0.25$		11	11	11	11	11
	$\rho = 0.5$		23	20	19	19	19
	$\rho = 0.75$		43	34	30	30	29
$C_v(R^b(t))$	$\rho = 0.25$		11	13	13	13	13
	$\rho = 0.5$		26	25	25	24	24
	$\rho = 0.75$		48	43	42	42	42
$C_v(A^s(t))$	$\rho = 0.25$		5	5	5	5	5
	$\rho = 0.5$		15	18	17	17	17
	$\rho = 0.75$		40	34	31	30	29
$E[N(t)]$	$\rho = 0.25$		10	10	11	11	11
	$\rho = 0.5$		23	20	20	20	20
	$\rho = 0.75$		45	40	39	39	39
$B(t)$	$\rho = 0.25$		8	9	9	9	9
	$\rho = 0.5$		20	17	16	16	16
	$\rho = 0.75$		40	32	29	29	28

En las Tablas 4.1 y 4.2 podemos observar lo siguiente:

- El nivel de truncamiento, fijado μ , aumenta a medida que lo hace ρ . Para $\rho = 0.75$ los niveles de truncamiento decrecen a medida que aumenta μ , para $\rho = 0.25$ prácticamente permanecen constantes y para $\rho = 0.5$ decrecen a medida que aumenta μ , excepto en el caso de $C_v(A^s(t))$ que alcanza un máximo en $\mu = 1.0$.

- Para una combinación fija de valores de (ρ, μ) y partiendo del mismo estado inicial, los niveles de truncamiento necesarios para el estudio de las características de A^s son inferiores a los de las características de R^s y estos inferiores a los correspondientes para R^b .

- El nivel de truncamiento necesario aumenta si inicialmente hay más servidores ocupados o si inicialmente hay más clientes en la órbita.

Tabla 4.2. Nivel de truncamiento K en función del estado inicial

(i_0, j_0)	(0, 0)	(5, 0)	(0, 10)	(5, 10)
$E[R^s(t)]$	18	19	21	24
$E[R^b(t)]$	21	22	24	27
$E[A^s(t)]$	13	14	18	22
$E[N(t)]$	21	21	25	28
$B(t)$	18	18	22	26

En las Figuras 4.1-4.3 representamos las esperanzas y coeficientes de variación de las variables R^s , R^b y A^s en función de t , con $t \in (0, 30]$, para los correspondientes niveles de truncamiento dados en la Tabla 4.1. Cada figura consta a su vez de cuatro gráficas, las dos primeras corresponden a la media y coeficiente de variación con $\mu = 5.0$ y $\rho \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$; y las otras dos a la media y coeficiente de variación con $\rho = 0.5$ y $\mu \in \{0.1, 5.0, 50.0\}$. Se ha obviado presentar los gráficos correspondientes a A^b por presentar un comportamiento similar a los de R^s .

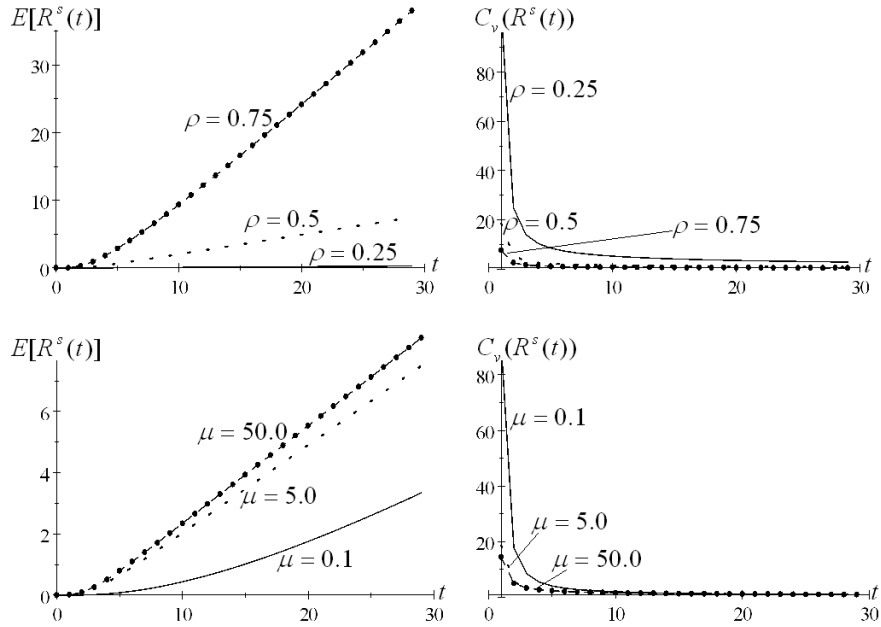


Figura 4.1. Características transitorias del descriptor R^s

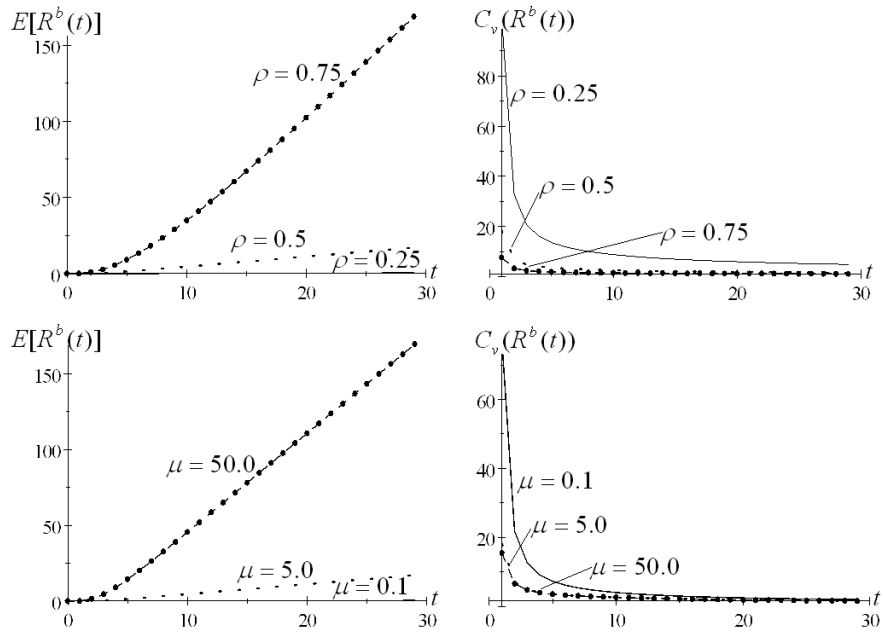


Figura 4.2. Características transitorias del descriptor R^b

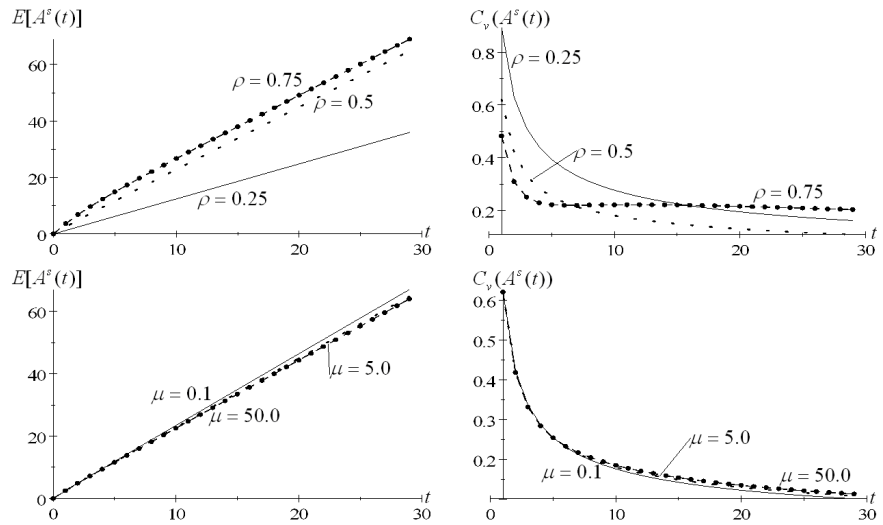


Figura 4.3. Características transitorias del descriptor A^s

Las conclusiones más significativas son:

- $E[R^s(t)]$, $E[R^b(t)]$ y $E[A^s(t)]$ son funciones crecientes de t , para cualquier combinación de valores de (ρ, μ) .

- $C_v(R^s(t))$, $C_v(R^b(t))$ y $C_v(A^s(t))$ son funciones decrecientes de t , para cualquier combinación de valores (ρ, μ) .
- Fijado $\mu = 5.0$, las medias de los descriptores crecen a medida que lo hace ρ . Estos crecimientos son más acusados para R^b y menos para A^s .
- Fijado $\rho = 0.5$, $E[R^s(t)]$ y $E[R^b(t)]$ crecen a medida que lo hace μ . Sin embargo, $E[A^s(t)]$ decrece a medida que aumenta μ , siendo este decrecimiento muy suave.
- Fijado $\mu = 5.0$, $C_v(R^s(t))$ es función decreciente de ρ . Fijado $\rho = 0.5$, $C_v(R^s(t))$ es función decreciente de μ para valores pequeños de t ($t < 6$), alcanza un mínimo para valores intermedios de t y para valores grandes prácticamente permanece constante. Este hecho es difícil de apreciar en la Figura 4.1.
- $C_v(R^b(t))$ es función decreciente de ρ , fijado $\mu = 5.0$, y función decreciente de μ , fijado $\rho = 0.5$, como se muestra en la Figura 4.2.
- Por último, en la Figura 4.3 observamos que, fijado ρ o μ , $C_v(A^s(t))$ no es monótona respecto del parámetro restante.

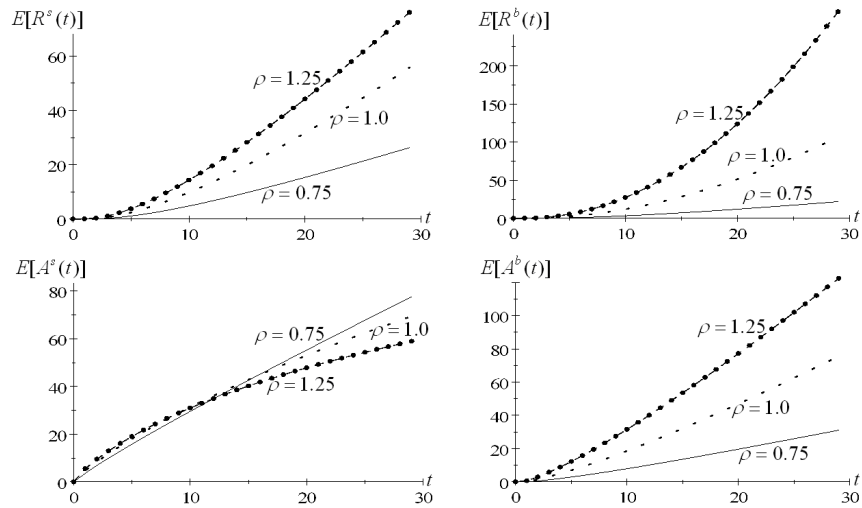


Figura 4.4. El efecto de ρ

En la Figura 4.4 mostramos el efecto de ρ en el comportamiento transitorio de las medias de los descriptores R^s , R^b , A^s y A^b . En particular, consideramos valores mayores o iguales a 1 para los cuales la cadena $\{(C(t),$

$N(t); t \geq 0\}$ no es recurrente positiva. Los niveles de truncamiento son los correspondientes al criterio expuesto anteriormente consistente en fijar un error relativo para la media inferior a 10^{-5} . Podemos observar lo siguiente:

- El crecimiento de las funciones $E[R^s(t)]$, $E[R^b(t)]$ y $E[A^b(t)]$ es más fuerte según ρ aumenta, siendo especialmente mayor este crecimiento en el caso de $E[R^b(t)]$.

- El comportamiento del crecimiento de $E[A^s(t)]$ como función de ρ es diferente. Para valores pequeños de t el máximo de $E[A^s(t)]$ se da para $\rho = 1.25$, mientras que para valores grandes de t el máximo lo alcanza para $\rho = 0.75$. Esto resulta lógico puesto que $\rho > 1$ significa que, a largo plazo, entran más clientes que salen. Si contabilizamos el número de llegadas exitosas durante un periodo de tiempo pequeño, parece lógico pensar que cuantos más clientes lleguen más accederán a un servidor libre. A partir de un determinado momento la situación se invierte, es decir, cuantos más clientes lleguen más se llenará la órbita y, por lo tanto, será más probable que un cliente de la órbita acceda a un servidor libre que uno que llega de nuevo.

En la Figura 4.5 representamos las medias de los cuatro descriptores para diferentes estados iniciales, con los niveles de truncamiento expuestos en la Tabla 4.2. En dicha figura vemos que

- El número medio de reintentos exitosos, el de reintentos bloqueados y el de llegadas bloqueadas es mayor si inicialmente hay clientes en la órbita. Si no hay clientes en la órbita al inicio, estos números medios son mayores cuando partimos con todos los servidores ocupados.

- Si inicialmente hay clientes en la órbita, para intervalos pequeños de tiempo, el número medio de reintentos exitosos es mayor cuando todos los servidores están libres; a partir de un determinado t la situación se invierte, pasando a ser mayor cuando los servidores están ocupados.

- Si inicialmente hay clientes en la órbita tanto el número medio de reintentos bloqueados como el de llegadas bloqueadas son mayores cuando de partida todos los servidores están ocupadas.

- El comportamiento de $E[A^s(t)]$, en función del estado inicial, es muy diferente al de los otros descriptores. El número medio de llegadas exitosas disminuye si inicialmente hay servidores ocupados. Tanto si hay o no servidores ocupados, el número medio de llegadas exitosas disminuye según hay más clientes en la órbita desde el inicio.

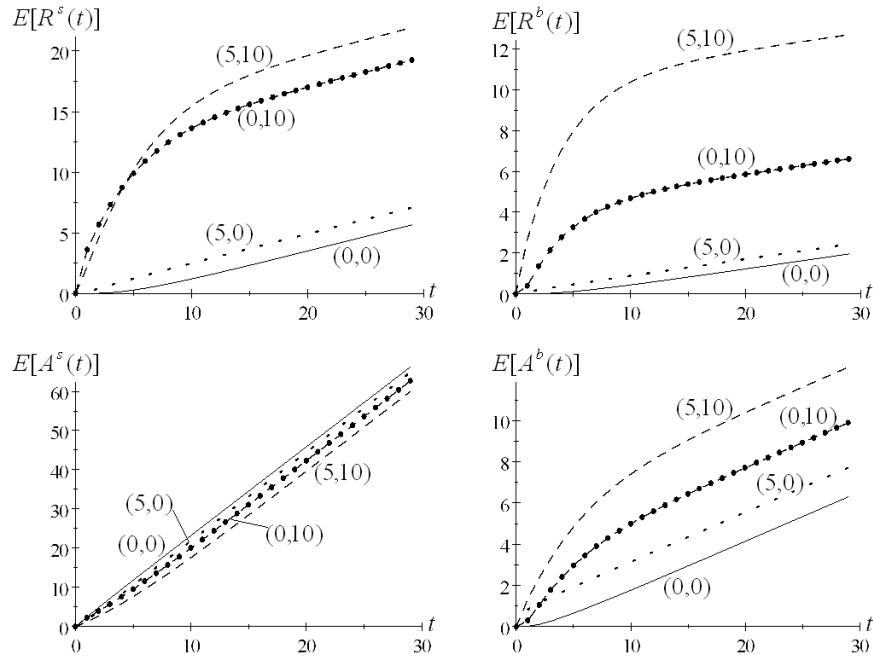


Figura 4.5. El efecto del estado inicial sobre los descriptores

En las Figuras 4.6 y 4.7 podemos analizar el comportamiento transitorio del número medio de clientes en la órbita, $E[N(t)]$, y de la probabilidad de bloqueo, $B(t)$. En concreto, en la Figura 4.6 observamos lo siguiente:

- $E[N(t)]$ y $B(t)$ son funciones crecientes de t , para cualquier combinación de valores de (ρ, μ) .
- $E[N(t)]$ es función creciente de ρ , fijado $\mu = 5.0$, y función decreciente de μ , fijado $\rho = 0.5$. Obviamente, cuantos más clientes lleguen más engrosarán la órbita y cuantos más clientes reintenten mayor será el número de estos que abandonen la órbita para ocupar un servidor libre.
- $B(t)$ es función creciente de ρ , fijado $\mu = 5.0$, y función creciente de μ , fijado $\rho = 0.5$. Resulta obvio, ya que cuanto mayor sea la tasa de llegada o mayor la tasa de reintento mayor será la probabilidad de que todos los servidores estén ocupados.

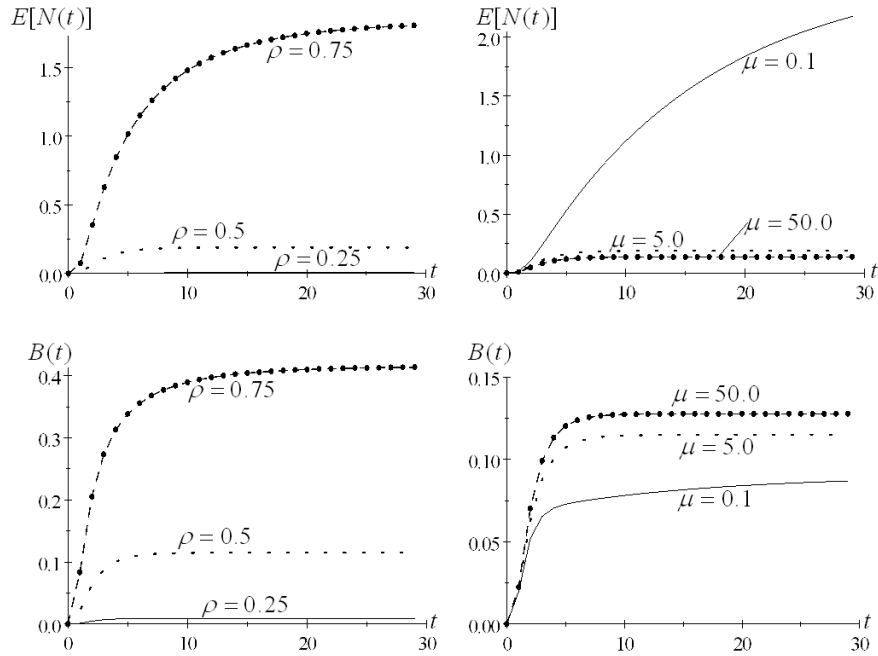


Figura 4.6. Análisis transitorio de $E[N(t)]$ y $B(t)$

En la Figura 4.7, para el caso $\rho = \mu = 0.5$, podemos ver lo siguiente:

- El efecto de (i_0, j_0) sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$ se disipa según crece t . Ambos descriptores convergen a sus respectivos valores estacionarios $E[N] = 0.64240$ y $B = 0.09598$.
- El número medio de clientes en la órbita es mayor si inicialmente hay clientes en la misma. Tanto si inicialmente hay clientes en la órbita como si no los hay, el número medio de clientes en ella es superior si al inicio todos los servidores están ocupados.
- Si inicialmente todos los servidores están ocupados la probabilidad de bloqueo decrece con el tiempo. Si inicialmente todos los servidores están libres y no hay clientes en la órbita, la probabilidad de bloqueo crece con el tiempo. Si al inicio todos los servidores están libres y hay clientes en la órbita, la probabilidad de bloqueo alcanza un máximo como función de t .

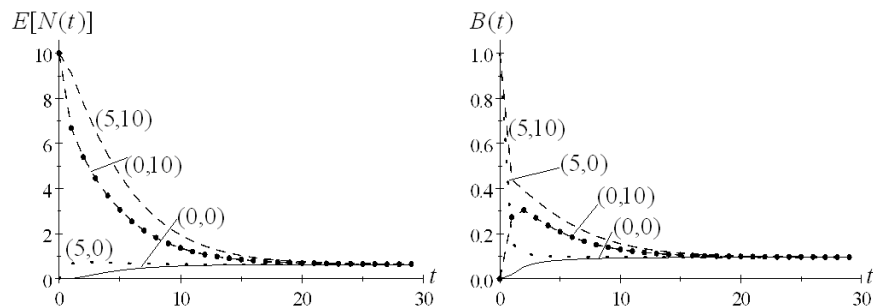


Figura 4.7. El efecto del estado inicial sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$

A continuación presentamos los resultados numéricos para el modelo $M/PH/1$ con reintentos. Hemos considerado tiempos de servicio con distribuciones Erlang-5 (E_5), exponencial (M) e hiperexponencial (H_2), con $\beta_1 = 1.0$. El coeficiente de variación de la distribución hipergeométrica es 1.5. De forma análoga a como hacíamos para el modelo $M/M/c$ con reintentos, damos en primer lugar la Tabla 4.3 que recoge los niveles de truncamiento necesarios para la obtención de $E[R^s(t)]$, $E[R^b(t)]$, $E[A^s(t)]$, $E[A^b(t)]$, $E[N(t)]$ y $B(t)$, para las diferentes distribuciones de servicio, con $\rho = \mu = 0.5$, tales que los errores relativos sean inferiores a 10^{-5} .

Tabla 4.3. Nivel de truncamiento en función de la distribución de servicio

	$E[R^s(t)]$	$E[R^b(t)]$	$E[A^s(t)]$	$E[A^b(t)]$	$E[N(t)]$	$B(t)$
E_5	12	14	10	13	15	12
M	14	16	12	16	17	14
H_2	16	20	14	20	22	16

En la Tabla 4.3 vemos cómo el nivel de truncamiento asociado a cada descriptor es mayor cuanto más dispersa es la distribución del tiempo de servicio, es decir, los niveles más pequeños los tenemos para la distribución Erlang-5 y los más altos para la hiperexponencial.

En la Figura 4.8 tenemos representadas las esperanzas $E[R^s(t)]$, $E[R^b(t)]$, $E[A^s(t)]$ y $E[A^b(t)]$ como funciones de t para las tres distribuciones de servicio. Observamos que cuanto más dispersa es la distribución del tiempo de servicio menor es el número medio de reintentos exitosos y el de llegadas bloqueadas, y mayor es el número medio de llegadas exitosas. El comportamiento de $E[R^b(t)]$ es más complejo. A partir de un determinado t , a mayor dispersión de la distribución de servicio mayor es el número medio de reintentos bloqueados. Sin embargo, para valores pequeños de t la situación

es la inversa. Para $t \in (4, 12)$ el máximo número medio de reintentos bloqueados se alcanza para la distribución exponencial.

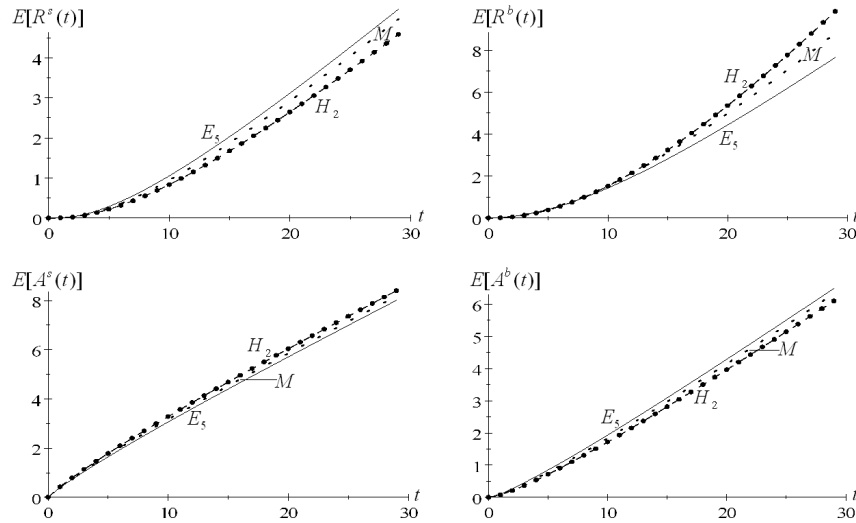


Figura 4.8. El efecto de la distribución de servicio sobre los descriptores

En la Figura 4.9 comparamos las medias de los cuatro descriptores cuando la distribución de servicio es Erlang-5, teniendo que $E[R^s(t)]$ es la menor y $E[A^s(t)]$ es la mayor, para cualquier valor de t . $E[R^b(t)]$ y $E[A^b(t)]$ se cruzan alrededor del punto $t = 16$.

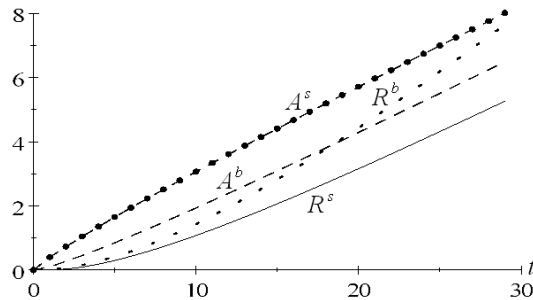


Figura 4.9. Esperanza de los cuatro descriptores

Por último, en la Figura 4.10 mostramos el efecto de la distribución de servicio sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$. Aproximadamente para $t \leq 6$, $E[N(t)]$ disminuye a medida que aumenta la dispersión de la distribución de servicio, mientras que para $t \geq 11$ la situación se invierte. En los valores intermedios

el máximo se alcanza para la distribución de servicio exponencial. En cuanto a la probabilidad de bloqueo vemos que disminuye a mayor dispersión de la distribución de servicio.

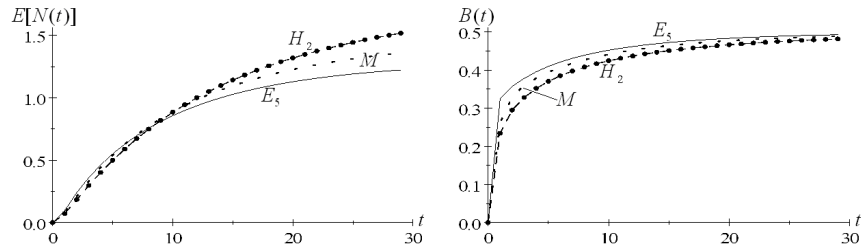


Figura 4.10. El efecto de la distribución de servicio sobre $E[N(t)]$ y $B(t)$

Bibliografía

- [1] J. Abate and W. Whitt (1995), Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions, *ORSA Journal on Computing* **7**, 36-43.
- [2] J. Abate, G.L. Choudhury and W. Whitt (2000), An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models. In: *Computational Probability* (Ed. W.K. Grassmann), pp. 257-323, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [3] J. Abate and W. Whitt (2006), A unified framework for numerically inverting Laplace transforms, *INFORMS Journal on Computing* **18**, 408-421.
- [4] J. Amador and J.R. Artalejo (2007), On the distribution of the successful and blocked events in the $M/M/c$ retrial queue: A computational approach, *Applied Mathematics and Computation* **190**, 1612-1626.
- [5] J. Amador and J.R. Artalejo (2009), The $M/G/1$ retrial queue: New descriptors of the customer's behavior, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **223**, 15-26.
- [6] J. Amador and J.R. Artalejo (2009), Transient analysis of the successful and blocked events in retrial queues (en evaluación).
- [7] V.V. Anisimov (1999), Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queueing systems, *Mathematical and Computer Modelling* **30**, No. 3-4, 65-78.
- [8] V.V. Anisimov (2008), *Switching Processes in Queueing Models*, ISTE-Wiley, London.
- [9] J.R. Artalejo (1999), Accessible bibliography on retrial queues, *Mathematical and Computer Modelling* **30**, No. 3-4, 1-6.
- [10] J.R. Artalejo (1999), A classified bibliography of research on retrial queues: Progress in 1990-1999, *Top* **7**, 187-211.

- [11] J.R. Artalejo and M.J. Lopez-Herrero (2000), On the busy period of the $M/G/1$ retrial queue, *Naval Research Logistics* **47**, 115-127.
- [12] J.R. Artalejo and G.I. Falin (2002), Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis, *Revista Matemática Complutense* **15**, 101-129.
- [13] J.R. Artalejo, G.I. Falin and M.J. Lopez-Herrero (2002), A second order analysis of the waiting time in the $M/G/1$ retrial queue, *Asia-Pacific Journal of Operational Research* **19**, 131-148.
- [14] J.R. Artalejo and M. Pozo (2002), Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue, *Annals of Operations Research* **116**, 41-56.
- [15] J.R. Artalejo, A. Economou and M.J. Lopez-Herrero (2005), Algorithmic analysis for the number of customers served in a busy period of the $M/M/c$ retrial queue. In: *Proceedings of the Third National Conference on Mathematical and Computational Models* (Eds. R. Arumuganathan and R. Nadarajan), pp. 3-15, Allied Publishers, New Delhi.
- [16] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2005), Waiting time in the $M/M/c$ queue with finite retrial group, *Bulletin of Kerala Mathematics Association* **2**, 1-17.
- [17] J.R. Artalejo, A. Economou and M.J. Lopez-Herrero (2007), Algorithmic approximations for the busy period distribution of the $M/M/c$ retrial queue, *European Journal of Operational Research* **176**, 1687-1702.
- [18] J.R. Artalejo, A. Economou and M.J. Lopez-Herrero (2007), Algorithmic analysis of the maximum queue length in a busy period for the $M/M/c$ retrial queue, *INFORMS Journal on Computing* **19**, 121-126.
- [19] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2007), Waiting time analysis of the $M/G/1$ queue with finite retrial group, *Naval Research Logistics* **54**, 524-529.
- [20] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2007), A note on the busy period of the $M/G/1$ queue with finite retrial group, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **21**, 77-82.
- [21] J.R. Artalejo and M.J. Lopez-Herrero (2007), On the distribution of the number of retrials, *Applied Mathematical Modelling* **31**, 478-489.

- [22] J.R. Artalejo, A. Economou and A. Gómez-Corral (2008), Algorithmic analysis of the *Geo/Geo/c* retrial queue, *European Journal of Operational Research* **189**, 1042-1056.
- [23] J.R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2008), *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*, Springer, Berlin.
- [24] I. Atencia and P. Moreno (2006), A discrete-time *Geo/G/1* retrial queue with the server subject to starting failures, *Annals of Operations Research* **141**, 85-107.
- [25] G. Bolch, S. Greiner, M. De Meer and K.S. Trivedi (2006), *Queueing Networks and Markov Chains: Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications*, Wiley-Interscience, New Jersey.
- [26] A.M. Cohen (2007), *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Springer, New York.
- [27] J.W. Cohen (1957), Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunication Review* **18**, 49-100.
- [28] R.B. Cooper (1981), *Introduction to Queuing Theory*, Edward Arnold, London.
- [29] G.I. Falin (1986), Single-line repeated orders queueing systems, *Optimization* **17**, 649-667.
- [30] G.I. Falin (1990), A survey of retrial queues, *Queueing Systems* **7**, 127-167.
- [31] G.I. Falin and C. Fricker (1991), On the virtual waiting time in an *M/G/1* retrial queue, *Journal of Applied Probability* **28**, 446-460.
- [32] G.I. Falin, M. Martin and J.R. Artalejo (1994), Information theoretic approximations for the *M/G/1* retrial queue, *Acta Informatica* **31**, 559-571.
- [33] G.I. Falin and J.G.C. Templeton (1997), *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London.
- [34] L. Flatto (1997), The waiting time distribution for the random order service *M/M/1*, *Annals of Applied Probability* **7**, 382-409.

- [35] J.M. Giménez-Guzmán, M.J. Doménech-Benloch, V. Pla, V. Casares-Giner and J. Martínez-Bauset (2008), Value extrapolation technique to solve retrial queues: A comparative perspective, *ETRI Journal* **30**, 492-494.
- [36] A. Gómez-Corral (2006), A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques, *Annals of Operations Research* **141**, 163-191.
- [37] T. Hanschke (1987), Explicit formulas for the characteristics of the $M/M/2/2$ queue with repeated attempts, *Journal of Applied Probability* **24**, 486-494.
- [38] J. Keilson, J. Cozzolino and H. Young (1968), A service system with unfilled requests repeated, *Operations Research* **16**, 1126-1137.
- [39] L. Kosten (1947), On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking, *De Ingenieur* **59**, 1-25, (en holandés).
- [40] V.G. Kulkarni (1995), *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Chapman and Hall, London.
- [41] V.G. Kulkarni and H.M. Liang (1997), Retrial queues revisited. In: *Frontiers in Queueing* (Ed. J.H. Dshalalow), pp. 19-34, CRC Press, Boca Raton.
- [42] G. Latouche and V. Ramaswami (1999), *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, ASA-SIAM, Philadelphia.
- [43] M.J. Lopez-Herrero (2002), Distribution of the number of customers served in an $M/G/1$ retrial queue, *Journal of Applied Probability* **39**, 407-412.
- [44] M.J. Lopez-Herrero and M.F. Neuts (2002), The distribution of the maximum orbit size of an $M/G/1$ retrial queue during the busy period. In: *Advances in Stochastic Modelling* (Eds. J.R. Artalejo and A. Krishnamoorthy), pp. 219-231, Notable Publications, Inc., New Jersey.
- [45] V.A. Malyshev (1972), Homogeneous random walks on the product of a finite set and a half-line. In: *Probabilistic Methods of Research*, Moscow State University, pp. 5-13, (en ruso).

- [46] J. Medhi (2003), *Stochastic Models in Queueing Theory*, Academic Press, Amsterdam.
- [47] M.F. Neuts (1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [48] M.F. Neuts and B.M. Rao (1990), Numerical investigation of a multi-server retrial model, *Queueing Systems* **7**, 169-190.
- [49] R.D. Nobel and H.C. Tijms (2006), Waiting-time probabilities in the $M/G/1$ retrial queue, *Statistica Neerlandica* **60**, 73-78.
- [50] R.D. Nobel and P. Moreno (2008), A discrete-time retrial queueing model with one server, *European Journal of Operational Research* **189**, 1088-1103.
- [51] Y.W. Shin (2000), Transient distributions of level dependent quasi-birth-death processes with linear transition rates, *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics* **7**, 83-100.
- [52] H.C. Tijms (2003), *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, Chichester.
- [53] J. Wang, B. Liu and J. Li (2008), Transient analysis of an $M/G/1$ retrial queue subject to disasters and server failures, *European Journal of Operational Research* **189**, 1118-1132.
- [54] R.I. Wilkinson (1956), Theories for toll traffic engineering in the U.S.A., *The Bell System Technical Journal* **35**, 421-514.
- [55] R.W. Wolff (1982), Poisson arrivals see time averages, *Operations Research* **30**, 223-231.
- [56] T. Yang and J.G.C. Templeton (1987), A survey on retrial queues, *Queueing Systems* **2**, 201-233; Corrección, *Queueing Systems* **4**, 94 (1989).
- [57] T. Yang and H. Li (1995), On the steady-state queue size distribution of the discrete-time $Geo/G/1$ queue with repeated customers, *Queueing Systems* **21**, 199-215.

Índice de autores

- Abate, J. 19, 26, 105
Amador, J. 35, 69, 99
Anisimov, V.V. 99
Artalejo, J.R. 3, 4, 10, 12, 15, 16, 17, 18,
19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28,
29, 31, 33, 34, 35, 38, 56, 57, 69,
70, 71, 99
Atencia, I. 3

Bolch, G. 46

Casares-Giner, V. 17
Choudhury, G.L. 19, 26, 105
Cohen, A.M. 19, 105
Cohen, J.W. 10
Cooper, R.B. 21
Cozzolino, J. 24

De Meer, M. 46
Doménech-Benlloch, M.J. 17

Economou, A. 3, 12, 17, 18, 19, 20, 21,
38, 57

Falín, G.I. 3, 10, 12, 16, 17, 25, 29, 38,
88, 108
Flatto, L. 21
Fricker, C. 29

Giménez-Guzmán, J.M. 17
Gómez-Corral, A. 3, 4, 10, 12, 15, 16, 18,
19, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29,
31, 33, 34, 38, 70, 71
Greiner, S. 46

Hanschke, T. 15

Keilson, J. 24
Kosten, L. 10
Kulkarni, V.G. 10, 24, 108

Latouche, G. 4, 14, 46, 76
Li, H. 3
Li, J. 99
Liang, H.M. 10
Liu, B. 99
Lopez-Herrero, M.J. 12, 17, 18, 19, 20,
21, 23, 26, 27, 28, 29, 33, 34,
38, 56, 57, 71

Malyshev, V.A. 14
Martín, M. 25
Martínez-Bauset, J. 17
Medhi, J. 102
Moreno, P. 3

Neuts, M.F. 14, 17, 28
Nobel, R.D. 3, 29

Pla, V. 17
Pozo, M. 12, 17, 56

Ramaswami, V. 4, 14, 46, 76

Rao, B.M. 17

Shin, Y.W. 99

Templeton, J.G.C. 3, 10, 12, 16, 17, 24,
25, 38, 88, 108

Tijms, H.C. 19, 29, 46, 59, 105

Trivedi, K.S. 46

Wang, J. 99

Whitt, W. 19, 26, 105

Wilkinson, R.I. 15, 38

Wolff, R.W. 70

Yang, T. 3, 10, 24

Young, H. 24

Índice de materias

- Bloqueo, probabilidad de
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 25
 - valor transitorio 112, 118, 122
- Cadena encajada, método de la 72, 108
- Clientes en la órbita, número máximo de
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 28
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 20
- Clientes en la órbita, número medio de
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 25
 - valor transitorio 112, 118, 122
- Clientes servidos, número de
 - función de masa 27
 - función generatriz 20
 - momentos 27, 38, 71
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 27
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 20
- Colas en tiempo discreto 3
- Conteo, proceso de 100
- Error relativo 112
- Espera, tiempo de
 - inversión numérica 29
 - momentos 29
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 29
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 21
 - transformada de Laplace-Stieltjes 22, 29, 31
- Estabilidad 24
- Estados absorbentes 20
- Estado del sistema, distribución límite de
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 24
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 15
- Estructura matricial tridiagonal 13, 38, 40, 43, 45, 46, 47, 77
- FFT , método de inversión 46, 59
- Función generatriz, método de la 38, 48
- Gamma, distribución 29
- Generador infinitesimal
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 13
 - sistema $M/M/c$ truncado con reintentos 38
 - sistema $M/PH/1$ truncado con reintentos 77
- Hessenberg, estructura tipo 76
- Intensidad óptima de reintento 64, 97
- Kolmogorov, ecuaciones de
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 15, 102
 - sistema $M/PH/1$ con reintentos 109
- Kronecker
 - función 22
 - producto 67
- Little, fórmula de 29
- Llegadas bloqueadas
 - análisis transitorio 102
 - esperanza 38, 71

- momentos transitorios 107
- sistema $M/M/c$ con reintentos 37
- Llegadas exitosas
 - análisis transitorio 102
 - esperanza 38, 71, 88
 - función de masa 54, 73
 - función generatriz 45
 - momentos factoriales 45
 - momentos transitorios 107
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 73
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 37, 44, 54
- MAP*, proceso 4
- Máxima entropía, método de 26, 29
- Momentos cruzados 47, 62
- Órbita 11
 - Infinita 49, 69
 - Truncada 2, 15, 21, 26, 29, 35, 38, 51, 54, 73, 76, 81, 100, 109
- Orden aleatorio 21
- PASTA*, propiedad 70
- Periodo de ocupación, longitud del 2, 36
 - inversión numérica 26
 - momentos 19, 26
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 25
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 17
 - transformada de Laplace-Stieltjes 18, 25, 26
- Persistencia 12
- PH*, distribución 2, 76, 77, 109
- Primer paso, método de 40, 43, 45, 48, 51, 52, 55
- Población finita 3
- Poisson, proceso de 3, 12, 24
- QBD*, proceso 14
- Recurrencia positiva 12, 117
- Redes de comunicación 11
- Reintentos bloqueados
 - análisis transitorio 101
 - esperanza 38, 71, 86, 88
 - función de masa 51, 78, 82
 - función generatriz 43
 - momentos factoriales 43
 - momentos transitorios 106
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 76, 51
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 37, 42, 51
- Reintentos exitosos
 - análisis transitorio 101
 - esperanza 38, 71, 88
 - función de masa 50, 71
 - función generatriz 40
 - momentos factoriales 40, 42
 - momentos transitorios 106
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 71
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 36, 39, 50
- Reintentos realizados por un cliente
 - esperanza 34, 38, 71
 - función de masa 23, 33
 - sistema $M/G/1$ con reintentos 32
 - sistema $M/M/c$ con reintentos 22
- Renovación hacia adelante, tiempo de 31
- Reubicación de llegadas 2, 81
- Servicio, tiempo de
 - Erlang 79, 84
 - exponencial 83
 - hiperexponencial 78, 83
- Sistema de ecuaciones, solución de 46
- Sistema $M/G/1$ con reintentos 1, 2, 9, 24, 69
- Sistema $M/M/c$ con reintentos 1, 2, 9, 12, 35, 100

Sistema $M/G/1$ sin reintentos 25, 29

Sistema $M/PH/1$ con reintentos 77, 108

Sistemas telefónicos 10

Transitorio, análisis 2, 99

 inversión numérica 105

 sistema $M/M/c$ con reintentos 100, 111

 sistema $M/PH/1$ con reintentos 108, 120

 transformada de Laplace 101

Truncamiento, nivel de 16, 56, 91, 111

Variación, coeficiente de 112, 114