UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

Respuesta a las restricciones transpositivas de la sociedad de la información en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Julián Roa González

Directora

Mercedes Hidalgo Herrero

Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE EDUCACIÓN

CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

RESPUESTA A LAS RESTRICCIONES TRANSPOSITIVAS DE LA SOCIEDAD DE LA INFORMACIÓN EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS DOCTORAL

DIRECTORA:

MERCEDES HIDALGO HERRERO

JULIÁN ROA GONZÁLEZ

Madrid 2019

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR

D./Dña. Julián Roa González,
estudiante en el Programa de Doctorado en Educación,
de la Facultad de Educación - CFP de la Universidad Complutense de Madrid, como autor/a de la tesis presentada para la obtención del título de Doctor y titulada:

Respuesta a las restricciones transpositivas de la sociedad de la información en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en E. Secundaria

y dirigida por: Mercedes Hidalgo Herrero

DECLARO QUE:

La tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la Ley de Propiedad Intelectual (R.D. legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad del contenido de la tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

En Madrid, a 21 de Junio de 2019

Fdo.: Julián Roa G

Esta DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD debe ser insertada en la primera página de la tesis presentada para la obtención del título de Doctor.

Agradecimientos

El presente trabajo está dedicado en primer lugar, a mi mujer y a mis hijas, por su apoyo constante y por cederme consciente o inconscientemente un tiempo que les pertenecía.

En segundo lugar a mis padres, por inculcarme el deseo de saber y la voluntad para hacerlo posible.

En tercer lugar, a mi directora de tesis, por su implicación, empuje y profesionalidad sin cuyo celo este trabajo no hubiese sido posible.

En cuarto y último lugar, a todos los amigos y compañeros que con su curiosidad, ánimos y seguimiento han sido un acompañante más del proceso. Entre todos ellos, me gustaría agradecer especialmente, la ayuda de revisión y maquetación realizada por Laura y Elisa.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas.

Resumen

Las Matemáticas son una pieza imprescindible del progreso humano y tecnológico y han sido claves para el desarrollo de la sociedad de la información. La importancia social del tema ha llevado a un proceso de transposición didáctica que acerca determinadas obras matemáticas del saber sabio matemático a las instituciones educativas de enseñanza obligatoria. Entre las áreas matemáticas estudiadas se encuentra la Geometría como uno de los bloques de contenido más relevante. En este trabajo de investigación vamos estudiar las restricciones transpositivas que afectan a su estudio en el primer ciclo de la Educación Secundaria para construir una respuesta educativa propia que permita superar parcialmente las restricciones encontradas.

Para realizar este trabajo de investigación, en un primer momento, se analiza la relevancia social de la Geometría y los resultados obtenidos en este ámbito matemático en pruebas externas regionales, nacionales e internacionales. Como resultado de esta primera aproximación encontramos que, a pesar de su relevancia e interés dentro de la comunidad educativa, el rendimiento obtenido en este área es inferior al rendimiento obtenido en el resto de áreas abordadas. Surge, por tanto, un problema docente que constituye el núcleo inicial de este trabajo de investigación.

Para dar respuesta a esta pregunta esta investigación se alinea con los planteamientos de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* y realiza, en la segunda parte del trabajo, un análisis en torno a tres dimensiones, epistemológica, económico-institucional y ecológica, que permiten transformar el problema docente inicial en un problema de investigación. Como resultado de este análisis dimensional se construye un *modelo epistemológico de referencia* para el área de la Geometría elemental y un *recorrido de estudio e investigación* que lo desarrolla para el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Una vez elaborado el estudio dimensional teórico y desarrolladas las herramientas propuestas desde la TAD, se detalla el tipo de investigación que se va a llevar cabo para estudiar la experimentación de la respuesta construida en una institución educativa de la Comunidad Autónoma de Madrid. En este trabajo se ha optado por un modelo de investigación cualitativa

basada en un *estudio de caso interpretativo*.

La experimentación realizada es analizada a partir de registros de audio y vídeo, diarios de observación realizados por el investigador durante la puesta en práctica y producciones de los estudiantes. El estudio de caso se expone primero de forma descriptiva y posteriormente de forma interpretativa.

El estudio dimensional teórico realizado, la construcción del MER sobre Geometría elemental, la elaboración de un REI que lo desarrolle, el estudio en profundidad del contexto y la descripción e interpretación de la experimentación realizada dentro del horario ordinario de la clase de Matemáticas del primer curso de la Educación Secundaria, permiten desarrollar las conclusiones y líneas de trabajo futuras de este trabajo.

Los resultados de la investigación realizada suponen un primer paso para construir respuestas que superen las restricciones para la enseñanza de la Geometría elemental en línea con el paradigma de *cuestionamiento del mundo* propuesto por Yves Chevallard que contribuyan a la educación de ciudadanos *herbartianos, procognitivos y exotéricos*.

Abstract

Mathematics is an essential part of human and technological progress and has been key to the development of the information society. The social importance of this subject has led to a process of didactic transposition that brings certain mathematical works of mathematical knowledge to the educational institutions of compulsory education. Among the mathematical areas studied is Geometry as one of the most relevant content blocks. In this research, we are going to study the transpositive restrictions that affect the study of Geometry in the first cycle of Secondary Education in order to construct an educational response of our own that allows us to partially overcome the found restrictions.

In order to carry out this study, the social relevance of Geometry and the results obtained in this mathematical field in external regional, national and international tests are first analyzed. As a result of this first approximation, we find that, despite its relevance and interest within the educational community, the performance obtained in this area is lower than the performance obtained in the rest of the areas addressed. Therefore, a teaching problem arises that constitutes the initial nucleus of this research.

In order to answer this, the study is aligned with the approaches of *the Anthropological Theory of the Didactic* and, in the second part of the work, it is carried out an analysis around three dimensions: epistemological, economic-institutional and ecological, which allow the initial teaching problem to be transformed into a research problem. As a result of this dimensional analysis, an *epistemological reference model* is constructed for the area of Elementary Geometry and *a study and research path* that develops this model for the first year of Compulsory Secondary Education.

Once the theoretical dimensional study has been elaborated and the tools proposed from TAD have been developed, the type of research that will be carried out to study the experimentation of the response built in an educational institution of the Autonomous Community of Madrid is detailed. In this work we have opted for a qualitative research model based on *an interpretative case study*. The experimentation carried out is analyzed from audio and video recordings, observation journals made by the researcher during the implementation of REI and

student's performance. The case study is first presented in a descriptive way and then in an interpretative way.

The theoretical dimensional study carried out the construction of the MER on Elementary Geometry and the elaboration of a REI to develop it, the in-depth study of the context and the description and interpretation of the experimentation carried out within the ordinary timetable of the Mathematics class of the first year of Secondary Education allow us to formulate the conclusions and future lines of work.

The results of the research carried out pretend to represent the first step to construct answers that overcome the restrictions for the teaching of Elementary Geometry in line with the paradigm of *questioning the world* proposed by Yves Chevallard that contribute to the education of *herbartian, pro-cognitive and exoteric citizens*.

Introducción

Introducción

La labor profesional está guiada por el conocimiento, la experiencia y por una serie de valores que se adquieren a lo largo de la vida. Para introducir este trabajo de investigación, vamos a apoyarnos en los valores por los que históricamente se ha evaluado la labor docente. En el artículo 18 de los estatutos de la Institución Libre de Enseñanza de 1876 se decía lo siguiente sobre el personal docente:

> En el nombramiento de los Profesores de la Institución se atenderá en primer término a su vocación, a la severidad y probidad de su conducta y a sus dotes de investigadores y expositores.
>
> Todo Profesor podrá ser removido cuando perdiere alguna de estas esenciales condiciones. (Jiménez-Landi, 1973, pp. 703-705).

Antes de abordar la tesis doctoral vamos a desgranar en esta introducción los elementos que, a mi juicio, acreditan mi vocación, mi severidad y mi probidad de conducta. Medir el alcance y desarrollo de las dotes de investigación y exposición corresponde a otras personas.

El compromiso con la educación y la vocación educativa se ha traducido en una sucesión de estudios universitarios y en una amplia y heterogénea experiencia en el mundo educativo que ha acompañado a esos estudios. Para adquirir conocimiento cursé la Diplomatura de Magisterio, la Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones, los estudios no finalizados de Psicopedagogía, el Grado en Ingeniería Audiovisual y el Máster en Estudios Avanzados en Pedagogía. Para ponerlo en práctica di clases de alfabetización de adultos como voluntario, realicé las prácticas de magisterio, ayudé a través de clases particulares a alumnos con dificultades, enseñé español como lengua extranjera durante mi estancia en Reino Unido, diseñé y puse en marcha la formación de profesorado en la metodología matemática Kumon, eduqué y tutoricé como profesor de Matemáticas en educación secundaria y bachillerato y en los últimos cursos traté de transformar mi experiencia y estudios en conocimiento para futuros maestros como profesor ayudante en la Facultad de Educación de la Universidad a distancia de Madrid. Los estudios y la experiencia con los que he dado respuesta a mi vocación son una parte inseparable de mi bagaje, que impregna el contenido de estas páginas y que dota de sentido al esfuerzo que lleva aparejado la realización de una tesis doctoral.

La severidad y probidad de conducta se han concretado en el deseo de ser honesto, en el mantenimiento del espíritu crítico ante lo que uno hace, en el inconformismo ante el fracaso escolar, en el deseo de educar para todos, en el profundo amor hacia el conocimiento, en especial hacia las matemáticas y en la firme creencia de que solo es posible la creación de un mundo más justo a través de la educación; son los valores que guían mi día a día, que dan sentido a mi conducta, que refuerzan mi vocación y mantienen firme mi búsqueda de una educación matemática de calidad para todos. Durante los últimos 22 años he tratado de seguir estos principios y hacerme merecedor de la condición de profesor.

Los conocimientos, experiencias y valores mencionados son, sin embargo, insuficientes a la hora de plantear respuestas posibles al anumerismo que señalaba Paulos (2016). Tal y como decíamos al inicio, el ejercicio de la labor docente lleva aparejado un sinfín de problemas, que deben ser elevados a la categoría de problemas de investigación, para ser estudiados adecuadamente. Estudiar, cuestionar, e investigar son, por tanto, requisitos fundamentales para ser un buen profesor y este afán de alcanzar tal distinción es el principal argumento de esta investigación. Esta tesis doctoral pretende, por tanto, responder al desarrollo de mis dotes de investigador y expositor.

Investigar tratando de abordar la enseñanza completa de las Matemáticas en la Institución de Enseñanza Secundaria es, sin duda, un trabajo imposible de realizar dentro de una tesis doctoral, por ese motivo, se ha decidido focalizar el estudio en el área de Geometría a partir de las reflexiones realizadas por múltiples autores sobre las deficiencias de su enseñanza en el sistema educativo actual. Alsina, Fortuny y Pérez (1997), Gil y Guzmán (1994), Gascón (2002 y 2003), Lockhart (2008) o López de Silanes (2012) entre otros, ponen de manifiesto la necesidad de replantear la enseñanza de esta área troncal de las Matemáticas.

Los objetivos de esta tesis van un paso más allá de las deficiencias y necesidades señaladas y se pueden agrupar en torno a dos bloques.. En un primer bloque nos apoyaremos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD en lo sucesivo) para buscar un conocimiento profundo de la Geometría y de todas las restricciones que existen en la sociedad de la información para su enseñanza. El objetivo de este estudio en profundidad es plantear una posición propia sobre este ámbito y generar una propuesta de estudio que permita abordar su estudio. El segundo bloque de objetivos se centra en estudiar de forma exhaustiva la primera implementación de este enfoque propio y de su propuesta de estudio en un aula real dentro del horario establecido para la asignatura de matemáticas.

Para exponer la consecución de estos objetivos esta tesis doctoral, se estructura en torno a cinco grandes bloques que procedemos a detallar a continuación:

- El primer bloque establece la relevancia social del tema, define el problema de investigación y detalla los objetivos de la investigación.
- El segundo bloque desarrolla el marco teórico y permite dar respuesta al primer bloque de objetivos utilizando las herramientas propuestas por la TAD.
- El tercer bloque permite definir el marco empírico y concretar la metodología de investigación decidida, las preguntas de investigación y las estrategias analíticas que van a permitir analizar el trabajo de campo realizado.
- El cuarto bloque describe el contexto de aprendizaje del estudio de caso y recoge los resultados del análisis del trabajo de campo llevado a cabo.
- El quinto bloque recoge las conclusiones de la tesis doctoral, y da respuesta a los objetivos de investigación planteados y señala las líneas futuras de trabajo.

En las siguientes páginas desarrollaremos en profundidad los bloques anteriores y responderemos a los objetivos de investigación planteados. Antes de abordar ese desarrollo, puedo decir que en el plano personal esta tesis doctoral ha permitido, al menos, responder a la pregunta que planteaba Lockhart (2008):

> ¿Qué es más interesante, medir la dimensión de una sección circular de una hoja cuadriculada, utilizando la fórmula que alguien te ha dado sin ninguna explicación (y te ha hecho memorizar y practicar una y otra vez), o escuchar la historia de uno de los problemas más bonitos y fascinantes y una de las ideas más brillantes y poderosas de la historia humana? (p. 739).

1.

Justificación

Capítulo 1

Justificación

Este primer capítulo se organiza en torno a cuatro grandes ejes: la relevancia social del tema, el rendimiento detectado en las pruebas externas para el bloque de Geometría, la definición del problema de investigación y la concreción de los objetivos de la investigación. Queremos con esta organización justificar el tema de estudio y su pertinencia, y el enfoque y alcance dado a nuestra investigación.

1.1. Relevancia social del tema objeto de estudio en la actualidad

Las características de la sociedad actual basada en la información y sometida a múltiples cambios y transformaciones, suponen para el sistema educativo un nuevo reto para hacer que la escuela responda a las necesidades de la sociedad en la que está inmersa. La Geometría, al igual que el resto de áreas y disciplinas, debe justificar su pertinencia, si quiere formar parte de los contratos sociales futuros entre escuela y sociedad. Por tanto, como primer paso de nuestro trabajo vamos a comprobar la relevancia social del tema escogido y su presencia en la literatura científica. En nuestro caso dicha relevancia se justifica en los siguientes puntos:

1. Las Matemáticas se consideran fundamentales para el desarrollo tecnológico de la sociedad, por lo que su enseñanza debe ser la mejor posible.

> La educación les debería ayudar y se supone que la educación matemática debería ayudarles en particular porque se dice que las matemáticas están en la raíz de la sociedad tecnológica moderna. Sin duda, los educadores, los padres y la sociedad en general consideran que las matemáticas son una de las materias más importantes del currículo escolar, estando solo por detrás del idioma nacional... (Bishop, 1999, p. 17).

Es muy relevante tener en cuenta que las sociedades delegan en la educación la parte de la cultura que debe ser transmitida a las generaciones futuras. Sin embargo, este mandato social está ampliamente influido por la Historia y las características, miedos y retos de la sociedad que organiza el sistema educativo. Las Matemáticas, al estar vinculadas al desarrollo tecnológico, tienen actualmente un papel muy destacado dentro del sistema educativo.

2. A pesar de la importancia social, los resultados obtenidos por los alumnos no son los deseados. El origen de estos malos resultados se puede remontar, como mínimo, hasta los primeros cursos de secundaria, como podemos ver en el siguiente análisis relativo al dominio de conocimientos en Matemáticas, realizado a 2698 alumnos de secundaria:

> Se ha realizado evaluación de conocimientos matemáticos a los alumnos de primero de la ESO, con el fin de conocer el nivel de dominio adquirido en la etapa de educación primaria, y a los alumnos de tercero de la ESO, para ver cuál era el nivel adquirido con el que comenzaban el segundo ciclo de secundaria,[…]
>
> Teniendo en cuenta los conocimientos correspondientes a las tres pruebas en conjunto, los datos demuestran que un 53% de los alumnos que comienzan el primer curso de la ESO no disponen de los conocimientos mínimos necesarios para pasar de etapa,[…]
>
> Quizás como consecuencia de lo anterior (y de otras posibles variables actitudinales, motivacionales, instruccionales,…), la evaluación de los conocimientos adquiridos en el primer ciclo de la ESO es alarmante por su déficit. En concreto, únicamente un 11% de los alumnos disponen de los conocimientos mínimos. Cerca de un 50% de estos estudiantes no han adquirido prácticamente ningún conocimiento. (González-Pineda, Núñez, Álvarez, González, González-Pumariega y Roces, 2003, p. 353).

Los alumnos que fracasan culpan al sistema educativo de sus males al no haber sido capaz de resolver la necesidad, que ese mismo sistema crea al otorgar esa gran importancia a las Matemáticas. Los alumnos que tienen éxito, lo han obtenido incorporando algoritmos de resolución cada vez más complejos, cada vez más alejados de la realidad inmediata, y no cuestionan la educación recibida, al haberles proporcionado el reconocimiento social del que gozan y la vía para formar parte de los trabajos más especializados.

Lo que nadie cuestiona es la necesidad de estudiar esas Matemáticas algorítmicas, de complejidad creciente, de forma obligatoria. Pero, ¿y si ese fuese el principal problema? ¿Y si el problema es, como dice Bishop (1999), que hoy enseñamos Matemáticas a todo el mundo, pero no enseñamos las Matemáticas para todo el mundo?

3. Abordar la educación matemática, en su conjunto, escapa a las posibilidades reales de este trabajo. Por este motivo, se ha optado por centrar nuestro trabajo en el inicio de la educación secundaria y en el área de Geometría. La legislación educativa vigente (LOMCE) para la educación secundaria, considera que la Geometría es un área fundamental de las Matemáticas, que junto al Álgebra, la Aritmética, el Análisis y la Estadística; constituye el núcleo de la educación matemática que se imparte en la etapa.

4. Se trata de un área que ha sido modificada en la legislación en varias ocasiones desde la célebre frase de Dieudonné de 1959: "Si todo el programa que propongo tuviera que condensarse en un solo eslogan yo diría ¡Abajo Euclides!" (Rico, 1997, p. 24). Estas modificaciones legislativas sucesivas, como veremos más adelante, han llevado a un currículo geométrico inestable e irregular en el tiempo que genera problemas de comprensión en el alumno. Las modificaciones también afectan a los docentes ya que, en muchos casos, se han formado matemáticamente bajo un enfoque epistemológico que ha dejado de estar vigente.

5. La comunidad científica recoge la importancia del tema elegido y lo considera un tema activo para dicha comunidad, como muestra la revisión bibliográfica realizada por Barrantes y Balletbo (2012) sobre la enseñanza de la Geometría. En esta revisión se recogen 95 artículos relacionados con la Geometría, entre las 89 revistas mejor posicionadas en la web In-Recs, en el periodo 2002-2012. De los 95 artículos el 48% corresponden a la etapa de Educación Secundaria, como indican los autores del estudio:

> Estos datos indican que el profesorado de la Educación Secundaria es un colectivo interesado en plasmar en artículos sus experiencias e investigaciones, que muestran sus innovaciones y resultados. Este colectivo está preocupado por desarrollar mediante una metodología activa diferentes materiales y recursos que hacen que las actividades realizadas con ellos generen un aprendizaje significativo en los alumnos. (Barrantes y Balletbo, 2012, p. 5).

6. No debemos caer en el error de considerar la Geometría como un concepto transparente que no es cuestionado. En este punto, vamos a dar argumentos sobre la importancia de este saber sabio que justifiquen la necesidad de seguir explicándolo en nuestro sistema educativo.

Son muchos los autores que reivindican el estudio de esta área de las Matemáticas de forma independiente. En la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) en el año 1994, encontramos el siguiente párrafo:

> Como reacción a un abandono injustificado de la Geometría intuitiva en nuestros programas del que fue culpable la corriente hacia la "Matemática Moderna", hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la Geometría.
>
> Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y secundaria. Y al hablar del pensamiento geométrico no me refiero a la enseñanza de la Geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física. (Gil y Guzmán, 1994, p. 83).

Como se puede ver en este fragmento y a lo largo de toda su obra, Guzmán fue un firme defensor de la Geometría, por su poder para fomentar la intuición matemática, su capacidad para adentrarse en la belleza de muchas demostraciones lógicas y por su indudable valor para la visualización de conceptos.

Son muchos los autores que reivindican, al igual que Guzmán, la importancia de este área, teniendo en cuenta las aportaciones de Bressan, Bogisic y Crego (2000), Brousseau (2000) y de Alsina, Fortuny y Pérez (1997) expondremos, a modo de síntesis, una lista que recoge la importancia de la enseñanza de la Geometría como área independiente:

- La Geometría es un tema central en la enseñanza de las Matemáticas que ha formado parte de la educación, especialmente de los grandes matemáticos desde la Antigüedad y ha sido el origen de muchos de los grandes avances que se han producido en la propia disciplina.
- La Geometría forma parte de nuestro lenguaje cotidiano. Es muy frecuente encontrar en el día a día ejemplos de términos geométricos. Cuando nos referimos a calles paralelas, escaleras en espiral, recipientes cilíndricos o llevar una vida recta, estamos utilizando conceptos geométricos que deben ser estudiados en la enseñanza obligatoria.
- La Geometría tiene importantes aplicaciones en tareas de la vida cotidiana. El diseño de gran parte de lo que nos rodea se realiza empleando técnicas basadas en la simetría y en las formas regulares. Los programas de ordenador que tratan imágenes que se controlan de forma vectorial. La confección y lectura de mapas y planos, se hace mediante técnicas de escalado y semejanza. La construcción de un edificio o la distribución de los espacios de una casa, emplean técnicas que necesitan de la manipulación de formas geométricas; ejemplo de ello son innumerables edificios, como el Colegio de Nuestra Señora de La Antigua en Monforte de Lemos (Fig. 1). Sin el trabajo de este área, corremos el riesgo de tener ciudadanos que no sean competentes matemáticamente.

Figura 1. Aplicación de la geometría a la fachada del colegio de nuestra señora de la antigua. Elaboración propia.

- La Geometría se usa en todas las ramas de las Matemáticas. Su papel como técnica de visualización de conocimientos algebraicos, aritméticos o estadísticos es muy frecuente para ayudar en la comprensión de los contenidos y facilita las explicaciones del docente. La representación de los números reales o complejos mediante ejes de coordenadas, las representaciones gráficas de las fracciones, las demostraciones de los productos notables a partir de rectángulos, la presentación de grandes cantidades de información a través de gráficos, la definición de la derivada como pendiente de la recta tangente y de la integral definida como el área encerrada bajo la curva, son ejemplos claros del papel de herramienta auxiliar que otorga la Geometría a la comprensión matemática. Sin una educación adecuada en este área, peligra la comprensión de muchos conceptos matemáticos. Del mismo modo, la facilidad de interpretar el comportamiento de un suceso a partir de la representación gráfica de la función que lo representa es clave para entender la importancia del análisis en otras disciplinas.
- La Geometría es un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización. El poder de la imagen es de todos conocido, en la medida que conseguimos dar forma a algo, estamos más cerca de comprenderlo y recordarlo. Todos necesitamos la habilidad de visualizar objetos en el espacio y captar sus relaciones. Adicionalmente, la abundancia de información en soportes bidimensionales sobre objetos tridimensionales, nos obliga a entrenar la capacidad de manejar y manipular elementos visualmente.
- La Geometría es un modelo de disciplina organizada lógicamente. La Geometría euclídea, vigente, en matemáticas superiores, durante más de 1900 años, supone un ejemplo de la potencia que el método lógico deductivo tiene para la construcción del conocimiento. Conocer y trabajar la obra de Euclides permite entrenar el pensamiento lógico e introducir en los estudiantes la idea de demostración.
- La Geometría posee valor estético y cultural. El arte está impregnado de simetría, composición y juegos de semejanza y forma. Edificios (Fig. 1), tatuajes, secuencias de danza y música, composiciones pictóricas o fotográficas, decoraciones o

diseños industriales, tienen una carga innegable de presencia geométrica. Sin la habilidad de apreciar patrones y formas a nuestro alrededor, nuestra capacidad de apreciar el mundo que nos rodea se reduce notablemente.

- La Geometría se ha centrado históricamente en la descripción y el análisis de las formas. Para el estudio de la forma es interesante separar la imagen de la forma, que tenemos en nuestra mente, de los modelos arbitrarios que encontramos de esa forma en la realidad. La Geometría nos permite estudiar la forma desligándonos de la realidad, estudiando las formas ideales y sus relaciones, podemos iniciar a los alumnos en el estudio de este saber, para que sean capaces de analizar posteriormente las distintas formas que aparecen en la arquitectura, la naturaleza o el arte.
- La Geometría como punto de encuentro entre las Matemáticas como teoría y las Matemáticas como modelo. La Geometría integra los procesos de deducción con los de inducción. En un primer momento, inducimos las formas y generamos modelos que nos permiten visualizar y manipular. Posteriormente, establecemos secuencias de razonamientos lógico-deductivos, sobre esos modelos, que nos permiten descubrir propiedades no evidentes a primera vista. Por último, utilizamos esas deducciones para estudiar de nuevo la realidad. La visualización que aporta la Geometría hace más sencillo ese proceso de deconstrucción-manipulación-reconstrucción.

Una vez aclarada la relevancia social de las matemáticas para la sociedad y la importancia del área elegida tanto a nivel intramatemático como a nivel extramatemático, podemos asegurar que el estudio de la Geometría es un aspecto importante para la sociedad y que por tanto su estudio se incorpora como uno de los bloques de contenido que deben ser trabajados durante las etapas de Educación Obligatoria.

1.2. Consideraciones importantes a tener en cuenta relativas al rendimiento en el bloque de Geometría.

Una vez aclarada la importancia social del tema de estudio y su relevancia para el conocimiento matemático vamos a analizar, en este apartado, el rendimiento obtenido dentro del bloque de Geometría en pruebas de evaluación internacionales, nacionales y regionales.

1.2.1. Pruebas internacionales.

Dentro de las pruebas internacionales que se realizan vamos a tomar en consideración las pruebas del Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) propuestas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) propuesto por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA).

La prueba PISA es una prueba internacional que se lleva a cabo con alumnos de 15 años de Educación Secundaria por la OCDE cada 3 años. La prueba no evalúa materias escolares, sino que se centra en tres competencias: Comprensión lectora, Matemáticas y Ciencias con pruebas independientes del currículo de los países participantes. Cada vez que se realiza la prueba se evalúan las tres competencias pero se pone un foco especial en una de ellas de forma rotativa. En el año 2003 y en el año 2012 el foco estuvo puesto en la competencia matemática.

La prueba TIMSS es una prueba internacional que se lleva a cabo al finalizar el cuarto curso de Educación Primaria cada 4 años. En la prueba se evalúan los rendimientos en Matemáticas y Ciencias de forma diferenciada para cada materia.

1.2.1.1. Resultados en la prueba PISA de 2003

La muestra analizada en España en el año 2003 fue de 10761 alumnos de 383 centros. Los resultados generales en Matemáticas indican que España en su conjunto se sitúa por debajo del rendimiento promedio de los países participantes, que en la prueba descrita fue de 500 puntos. En concreto el resultado promedio obtenido en la prueba de Matemáticas fue de 485 puntos. Este resultado sitúa a España por debajo del rendimiento de la UE, pero sin una diferencia significactiva (MEC, 2008).

En el caso de España, los resultados por sub-áreas de contenido muestran que los mejores resultados se obtienen en el dominio "Cantidad" con una puntuación de 492, 7 puntos superior al promedio, y que los peores resultados se obtienen en el dominio "Espacio y forma" con una puntuación de 476, 9 puntos inferior al promedio (MEC, 2008).

1.2.1.2. Resultados en la prueba TIMSS de 2011

La muestra analizada en España en 2011 fue de 4183 alumnos, 151 centros, 2854 profesores y 2953 grupos. Según los datos que aparecen en el informe del Ministerio, la muestra fue estratificada y se distribuyó proporcionalmente entre las comunidades autónomas y los tipos de centro según su titularidad, lo que permitía obtener resultados representativos del alumnado de cuarto curso en España.

Los resultados generales en Matemáticas indican que España en su conjunto se sitúa por debajo del rendimiento promedio de los países participantes, que en la prueba descrita fue de 491 puntos. En concreto, el resultado promedio obtenido en la prueba de Matemáticas fue de 482 puntos. Este resultado sitúa a España lejos de las puntuaciones obtenidas por los países de nuestro entorno, tal y como se índica en el propio informe MEC (2013).

En el caso de España los resultados por dominios de contenido muestran que los mejores resultados se obtienen en el dominio "Números" con una puntuación de 487 puntos, y que los peores resultados se obtienen en el dominio "Formas y mediciones geométricas", con 476 puntos. Esta diferencia es explicada dentro del informe emitido por el MEC (2013, p. 52) de la siguiente manera:

> La línea de color naranja marca la puntuación 500, que representa el punto de referencia internacional.
>
> En el caso de España la variabilidad entre dominios de contenido y puntuación global (482) es pequeña, con mejores resultados en "números" (487) que en "formas y mediciones geométricas" (476). En "representación de datos" (479) la diferencia no es significativa.
>
> Estas diferencias pueden reflejar que no se dedica idéntica atención a los tres dominios en la clase de matemáticas, además de la dificultad intrínseca de cada uno de ellos, entre otras posibles causas.

Los países que obtienen peores resultados globales consiguen en general, resultados inferiores en "formas y mediciones geométricas". En "representación de datos" no se observa ningún patrón destacable.

El hecho de que los países con menores puntuaciones obtengan mejores resultados en números que en geometría puede explicarse porque "números" es un dominio necesario para progresar en otros conocimientos propios de las matemáticas como la geometría.

1.2.1.3. Resultados en la prueba PISA de 2012

Los resultados generales en Matemáticas indican que España en su conjunto se sitúa por debajo del rendimiento promedio de los países participantes, que en la prueba descrita fue de 494 puntos. En concreto, el resultado promedio obtenido en la prueba de Matemáticas fue de 484 puntos. Este resultado sitúa a España por debajo del rendimiento de la UE pero sin una diferencia significactiva (MEC, 2014).

En el caso de España, los resultados por sub-áreas de contenido muestran que los mejores resultados se obtienen en el dominio "Cantidad" con una puntuación 5 puntos superior al promedio y que los peores resultados se obtienen en el dominio "Espacio y forma" con una puntuación 3 puntos inferior. Esta diferencia es explicada dentro del informe emitido por el MEC (2014, pp. 52-55) de la siguiente manera:

> En el conjunto de los países miembros de la OCDE, la sub-área cantidad (495) es la que obtiene la mejor puntuación, significativamente superior a las otras sub-áreas evaluadas. Los resultados son muy próximos en incertidumbre y datos (493) y cambio y relaciones (493), siendo los dos significativamente superiores a la puntuación alcanzada en espacio y forma (490).
>
> La distribución de los resultados en función de los cuatro contenidos matemáticos en España sigue una tendencia similar a la del conjunto de los países de la OCDE y de la UE, aunque las puntuaciones sean inferiores. España presenta mejor rendimiento relativo en las sub-áreas de cantidad e incertidumbre y datos que en cambio y relacio-

nes y espacio y forma. Por tanto, teniendo margen de mejora en todas las sub-áreas, el rendimiento relativo es peor en las dos últimas que en las dos primeras, en las que se debería intensificar el proceso de enseñanza-aprendizaje [...]

[...] En cuanto a la distribución del alumnado en los niveles de competencia en cada una de las cuatro sub-áreas analizadas, los resultados confirman lo avanzado antes, puesto que en España el 12,4 % del alumnado alcanza los niveles de rendimiento más avanzados (niveles 5 y 6) en la sub-área de cantidad, frente al 8% que alcanzan en la escala general de la competencia matemática. Por otra parte, el porcentaje del alumnado en el otro extremo de la escala de rendimiento (niveles <1 y 1) en la sub-área espacio y forma (27,7% es 4 puntos porcentuales más que en la escala general (23,6%).

En términos generales, se concluye que tanto en España, como en el conjunto de los países de la OCDE, a los alumnos de 15 años les resultan más complejas las tareas relacionadas con el contenido de espacio y forma como, por ejemplo, la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas o la interpretación de vistas de escenas tridimensionlaes desde distintas perspectivas.

Además, en España, este problema es más agudo que en el promedio de la OCDE, ya que como se puede observar, la proporción de alumnos en los niveles altos de la escala es claramente inferior al de la OCDE en espacio y forma y cambio y relaciones, mientras que en las otras dos categorias apenas hay una ligera diferencia en los porcentajes de los niveles más altos. Por tanto, es posible afirmar que, en lo que se refiere a los niveles altos (5 y 6) de la escala de matemáticas, nuestro alumnos tienen más dificultades en cambio y relaciones y espacio y forma, sub-áreas en las que debe actuarse para mejorar las competencias de los alumnos.

1.2.2. Pruebas nacionales.

Dentro de las pruebas nacionales que se realizan vamos a tomar en consideración las pruebas de Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria del año 2000 y la prueba de Evaluación de Diagnóstico realizada en 2010 por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC).

1.2.2.1. Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000

La prueba Evaluación de Diagnóstico es una prueba nacional que se llevaba a cabo durante el último curso de Educación Secundaria por el MEC. En la prueba se evaluaban las áreas de Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales, Geografía e Historia, Lengua Castellana y Literatura y Matemáticas de forma diferenciada.

La muestra analizada en el año 2000 fue de 7486 alumnos, 328 centros y 1266 profesores. Según los datos que aparecen en el informe del Ministerio la muestra se hizo siguiendo un procedimiento de muestreo estratificado, por conglomerados y por etapas, en el que los estratos son las diferentes comunidades y los conglomerados, los centros, lo que permitía obtener resultados representativos del alumnado de cuarto de la ESO en España.

Los resultados generales en matemáticas por niveles de rendimiento indican que España en su conjunto tenía un 16% del alumnado en los niveles más bajos de rendimiento y un porcentaje del 18% del alumnado en los niveles más altos de rendimiento tal y como se índica en el propio informe MEC (2001).

En el caso de España los resultados por dimensiones de contenido, sobre un porcentaje medio de aciertos del 40%, muestran que los mejores resultados se obtienen en las dimensiones “Representación de la información y tratamiento del azar” (44%), “Números y operaciones” (40%) y que los peores resultados se obtienen en las dimensiones “Medida, estimación y cálculo de magnitudes” (39%) y “Geometría” (33%). Esta diferencia es explicada en el informe emitido por el MEC (2001, p.84) de la siguiente manera:

> De los distintos tipos de contenidos evaluados, el bloque que ha resultado más fácil para los alumnos ha sido el referido a Representación de la información y tratamiento del azar (44%), seguido de Números y operaciones (40%), Medida, estimación y cálculo de magnitudes (39%), siendo el más difícil el de Representación y organización del espacio (geometría), ya que el porcentaje medio de respuestas acertadas ha sido del 33%.

1.2.2.2. Resultados Evaluación de Diagnóstico 2010

La prueba Evaluación de Diagnóstico es una prueba nacional que se llevaba a cabo durante el segundo curso de Educación Secundaria por el MEC. En la prueba se evaluaban las competencias lingüísticas, matemáticas, conocimiento e interacción con el mundo físico y social y ciudadana de forma diferenciada.

La muestra analizada en 2010 fue de 29154 alumnos, 870 centros y 4488 profesores. Según los datos que aparecen en el informe del Ministerio, la muestra se hizo siguiendo un procedimiento de muestreo bietápico estratificado y por conglomerados, en el que los estratos son las diferentes comunidades y los conglomerados, los centros, lo que permitía obtener resultados representativos del alumnado de segundo de la ESO en España.

Los resultados generales en matemáticas por niveles de rendimiento indicaban que España en su conjunto tenía un 18% del alumnado en los niveles más bajos de rendimiento y un porcentaje del 8% del alumnado en los niveles más altos de rendimiento tal y como se índica en el propio informe MEC (2011).

En el caso de España los resultados por dimensiones de contenido, sobre una media normalizada de 500 puntos y desviación típica de 100, muestran que los mejores resultados se obtienen en las dimensiones "Números" (507), "Funciones y gráficas" (535), "Estadística y probabilidad" (525) y "Contenidos comunes" (545) y que los peores resultados se obtienen en las dimensiones "Álgebra"(466) y "Geometría" (446). Esta diferencia es explicada dentro del informe emitido por el MEC (2011, p.88) de la siguiente manera:

> Los items de los contenidos comunes a todos los bloques son los que han resultado ser más fáciles para el conjunto del alumnado al ser probablemente, los más generales. Este es el mismo comportamiento, aunque un poco más moderado de las puntuaciones medias de estadística y probabilidad, funciones y gráficas y números.
>
> Sin embargo, los bloques de contenido que han resultado con mayor dificultad son el álgebra y la geometría, aspectos esenciales del aprendizaje, cuyo dominio asegura un éxito posterior en esta competencia.

1.2.3. Pruebas regionales.

Dentro de las pruebas regionales que se realizan vamos a tomar en consideración las pruebas de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) propuestas por la Comunidad de Madrid (CAM) para los cursos de 6º de Primaria y 3º de la ESO. En la prueba se evalúa los rendimientos en Lengua y Matemáticas de forma diferenciada para cada materia. Se trata de unas pruebas censales que se realizaban en mayo a todos los alumnos de 6º de Primaria y 3º de la ESO. Lo que permitía obtener resultados representativos del alumnado de esos cursos en Madrid.

1.2.3.1. Resultados en las pruebas CDI de 6º de Primaria 2012

La muestra analizada en 2012 fue de 58501 alumnos y 1263 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 6 ejercicios de 1 punto y 2 problemas de 2 puntos. Los resultados generales en Matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 5,67 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 7,30 y que los contenidos evaluados eran relativos a Números y Medidas. La nota media obtenida en los problemas fue de 3,23 y los contenidos evaluados fueron relativos a Probabilidad y Estadística y a Geometría. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, vemos que el problema 2 versó sobre un área rectangular y su perímetro y fue respondido de forma correcta por el 52% del alumnado en el caso del área rectangular y por el 27% del alumnado en el caso del perímetro. Lo que da una puntuación media de 3,91 para los contenidos de Geometría.

1.2.3.2. Resultados en las pruebas CDI de 6º de Primaria 2013

La muestra analizada en 2013 fue de 58604 alumnos y 1270 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 6 ejercicios de 1 punto y 2 problemas de 2 puntos. Los resultados generales en Matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 7,01 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 7,87 y que los contenidos evaluados eran relativos a Números y Medidas. La nota media obtenida en los problemas fue de 5,73 y los contenidos evaluados fueron relativos a Números y a Geometría. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, el problema 1 versó sobre un perímetro exterior, un perímetro interior y el área encerrada y fue respondido de forma correcta por el 77,4% del alumnado para el perímetro exterior, por el 32,3% del alumnado para el perímetro interior y por el 53,9% del alumnado para el área encerrada. Lo que da una puntuación media de 5,45 para los contenidos de Geometría.

1.2.3.3. Resultados en las pruebas CDI de 6º de Primaria 2014

La muestra analizada en Madrid en 2014 fue de 60235 alumnos y 1267 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 7 ejercicios de 1 punto y 3 problemas de 1 punto. Los resultados generales en Matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 6,51 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 7,07 y que los contenidos evaluados eran relativos a Números y Medidas. La nota media obtenida en los problemas fue de 5,22 y los contenidos evaluados fueron relativos a Medidas y a Geometría. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, el problema 9 versó sobre obtención de datos sobre el perímetro de forma indirecta en una figura poligonal y el problema 10 versó sobre un perímetro exterior y el área encerrada en una superficie cuadrada y fue respondido de forma correcta por el 32,8% del alumnado para el problema del perímetro, el 37,7% del alumnado para el problema del perímetro exterior y por el 54,7% del alumnado para el problema del área encerrada. Lo que da una puntuación media de 4,17 para los contenidos de Geometría.

1.2.3.4. Resultados en las pruebas CDI de 3º de ESO 2012

La muestra analizada en Madrid en 2012 fue de 53079 alumnos y 777 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 10 ejercicios de 1 punto y 2 problemas de 2,5 puntos. Los resultados generales en Matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 5 puntos sobre 10 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 5,63 y que los contenidos evaluados eran relativos a Números, Medidas, Álgebra y Geometría.

La nota media obtenida en los problemas fue de 3,73 y los contenidos evaluados fueron relativos a Medidas y Funciones. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, los ejercicios 7, 8 y 9 versaron sobre triángulos rectángulos, volumen de un prisma y cálculo de áreas rectangulares. Cada ejercicio estaba dividido en dos apartados la nota media de respuestas correctas de ambos apartados para cada ejercicio fue respectivamente del 50% del alumnado en el ejercicio sobre triángulos rectángulos, el 26,4% del alumnado en el ejercicio de prismas y el 44,45% del alumnado en el ejercicio de áreas rectangulares. Lo que da una puntuación media de 4,02 para los contenidos de Geometría.

1.2.3.5. Resultados en las pruebas CDI de 3º de ESO 2013

La muestra analizada en Madrid en 2012 fue de 53599 alumnos y 778 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 10 ejercicios de 1 punto y 2 problemas de 2,5 puntos. Los resultados generales en matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 4,69 puntos sobre 10 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 5,10 y que los contenidos evaluados fueron relativos a Números, Medidas, Álgebra, Probabilidad y Geometría. La nota media obtenida en los problemas fue de 3,86 y los contenidos evaluados son relativos a Medidas y Números. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, los ejercicios 5 y 9 versaron sobre escalas y cálculo de áreas rectangulares. Cada ejercicio estaba dividido en dos apartados la nota media de respuestas correctas de ambos apartados para cada ejercicio fue un 35,55% del alumnado para el ejercicio de escalas y un 40,05% del alumnado para el ejercicio de áreas rectangulares. Lo que da una puntuación media de 3,78 para los contenidos de Geometría.

1.2.3.6. Resultados en las pruebas CDI de 3º de ESO 2014

La muestra analizada en Madrid en 2012 fue de 54481 alumnos y 781 centros. La prueba de Matemáticas realizada consistía en 10 ejercicios de 1 punto y 2 problemas de 2,5 puntos. Los resultados generales en Matemáticas indican que en la prueba realizada el rendimiento promedio fue de 5,15 puntos sobre 10 (CAM, 2016).

Los resultados por pregunta muestran que en los ejercicios la nota media obtenida fue de 5,11 y que los contenidos evaluados fueron relativos a Números, Medidas, Álgebra, Probabilidad y Geometría. La nota media obtenida en los problemas fue de 5,24 y los contenidos evaluados fueron relativos a Medidas y Números. En los resultados presentados en la Nota de Prensa de la CAM, los ejercicios 4 y 10 versaron sobre volúmenes y cálculo de áreas circulares. El ejercicio 4 estaba dividido en dos apartados la nota media de respuestas correctas de ambos apartados y para cada ejercicio fue un 34,85% del alumnado para el ejercicio de volúmenes y un 42,9% del alumnado para el ejercicio de áreas circulares. Lo que da una puntuación media de 3,88 para los contenidos de Geometría.

Como se ha visto en este apartado los resultados en el ámbito de la Geometría son inferiores a la nota media general para las Matemáticas. Estos resultados son estables en los diferentes tipos de prueba y parecen no estar influidos por la etapa educativa.

1.3. Definición del problema de investigación

Una vez aclarada la relevancia social, la importancia del área elegida tanto a nivel intramatemático como a nivel extramatemático, la situación de crisis en la educación Matemática general y el bajo rendimiento en el ámbito geométrico en particular, podemos aclarar las motivaciones de este trabajo.

La intención de esta tesis doctoral en Educación es contribuir a una educación matemática de calidad, aportando seguridad y respaldo teórico a la labor docente y sentando las bases para analizar, de la forma más completa posible, las demandas que la sociedad del siglo XXI plantea al sistema educativo y las posibles respuestas que se pueden dar a esas demandas. El trabajo de reflexión, estudio e investigación, al que aludíamos al principio de nuestra introducción tiene por fin último contribuir al desarrollo de la sociedad en la que vivimos con intención de mejorarla prestando atención a un tema que como se ha visto es relevante y supone un claro punto de mejora dentro del sistema educativo.

No se trata, por tanto, de mejorar la eficiencia al máximo en la transmisión de ciertos conocimientos geométricos, sino estudiar la educación geométrica como un producto social, cultural y humano que contribuye al desarrollo de los individuos y que debe ser estudiado también bajo estas claves.

1.3.1. Disciplina científica en la que se enmarca la investigación.

El presente trabajo de investigación se enmarca dentro de la disciplina Didáctica de las Matemáticas. En nuestro caso, asumiremos la independencia de esta disciplina, tal y como ha sido argumentado por Gascón (1998) y Godino (2010).

La Didáctica de las Matemáticas puede considerarse una disciplina independiente, que se encuentra aún en un estado inicial de desarrollo. Como es habitual, en estos casos, la disciplina se encuentra en un proceso de definición, construcción y consolidación; que presenta diferentes programas de investigación. En Godino (2010) se realiza una clarificación del término y su relación con otras disciplinas, se sintetizan los principales programas de investigación y se hace una reflexión sobre la consolidación de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. Las conclusiones fundamentales de ese trabajo son:

1. La Didáctica de la Matemática ha logrado en la actualidad una posición consolidada desde el punto de vista institucional.
2. Existe una gran confusión en las agendas de investigación y en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente.
3. Existe un divorcio muy fuerte entre la investigación científica, que se está desarrollando en el ámbito académico, y su aplicación práctica para la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Como se deriva de lo anterior, es importante posicionarse dentro de esta indefinición y elegir razonadamente el Programa de Investigación que se tendrá en cuenta para la realización de este trabajo.

1.3.2. La didáctica fundamental de la Matemática.

La preocupación sobre la Educación Matemática se remonta hasta la Antigüedad, pudiendo encontrar un primer testimonio de ello en el papiro egipcio de Rhind. Desde ese momento, son muchos los autores que han realizado estudios orientados a la Educación Matemática: Euclides, Al-Kjuarismi, Clairout, Klein, Russell, Castelnouvo, Puig Adam, Piaget, Van Hiele, Freudenthal, Brousseau, Guzmán, Chevallard o Gascón son ejemplos de ello.

A partir de los años 80 surge un nuevo interés por desarrollar una teoría fundamental sobre la Didáctica de las Matemáticas. Las teorías fundamentales tienen un carácter descriptivo y predictivo, dentro de un dominio bien delimitado, y tratan de explicar un amplio número de fenómenos a partir de unos pocos conceptos básicos, Burkhardt (1988).

En este trabajo, asumiremos el posicionamiento que se viene realizando dentro de la Didáctica Fundamental de la Matemática. Este grupo, de origen francés, se caracteriza según Godino (2010) por:

- Tener una concepción global de la Enseñanza.
- Estar estrechamente ligado a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje.
- Buscar un paradigma propio de investigación.
- Tener una posición integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos.

Dentro de esta línea de investigación destacan autores como Brousseau, Vergnaud, Chevallard, Douady, Artigue o Godino que han ido dando forma y confeccionando un marco teórico y de investigación propio.

Cada uno de estos autores ha realizado su particular aportación a la Didáctica de las Matemáticas: la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau (1986)), la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud (1990)), la transposición didáctica (Chevallard (1985)), la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard (2007)), la dialéctica herramienta-objeto (Douady (1986)), la ingeniería didáctica (Arigue (1989)), la ontosemiótica (Godino (2002)),...

La elección de esta línea de investigación, para este trabajo, está basada en el amplio desarrollo que ha tenido y en su importancia y difusión en los últimos años:

> La exposición sintética que hemos hecho de algunas de las nociones teóricas desarrolladas por los didactas franceses es una muestra de que, bajo nuestro punto de vista, la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas está en camino de construir un “núcleo firme” de conceptos teóricos que sirva de soporte de un programa de investigación en el sentido de Lakatos. Su capacidad de plantear nuevos problemas de investigación, y de enfocar los problemas clásicos bajo una nueva luz, está siendo puesta de manifiesto a través de la producción científica de todo el colectivo de investigadores. Nociones como las de transposición didáctica, contrato didáctico, obstáculo, se utilizan cada vez

> con mayor frecuencia en las publicaciones en revistas y actas de congresos internacionales de la especialidad. (Godino, 2010, p. 31).

Una vez ubicados, dentro de esta línea de investigación, matizaremos aún más nuestra posición, al decantarnos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD en lo sucesivo). Siendo coherentes con esta línea, asumiremos por tanto, la siguiente definición de Didáctica de las Matemáticas:

> La Didáctica de la Matemática es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de la Matemática. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar, los procesos de estudio- o procesos didácticos- para proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales,…) que se ven llevados a estudiar matemática o ayudar a otros a estudiar matemática. Por lo dicho, la enseñanza aparece como un medio para el estudio (…) la didáctica de la matemática, sin negar la importancia de los factores psicológicos y motivacionales, ya no presupone que las explicaciones últimas de los fenómenos didácticos deban buscarse en dichos factores- que pasan así a ser considerados como consecuencias de determinados fenómenos, y no como sus causas. (…) (Chevallard, 1997, citado en Alderete y Soraire, 2011, p.10).

1.3.3. La Teoría Antropológica de lo didáctico.

La TAD ha aportado numerosos conceptos y herramientas de investigación que analizaremos en el siguiente capítulo en detalle. Para favorecer la claridad expositiva, en este apartado nos centraremos exclusivamente en las aportaciones de esta línea de investigación para la definición del problema de investigación.

1.3.4. Definición del problema didáctico de investigación.

A la hora de enfrentarse a la elaboración de una Tesis, en didáctica de las matemáticas, lo primero es definir el problema didáctico de investigación que se pretende abordar. Para la concreción de este problema, hemos optado por seguir la metodología propuesta por Gascón (2011).

Para ir progresando en la concreción del problema de investigación, partiremos de la importancia del área objeto de estudio y del interés, y la problemática docente asociada a la Geometría, que ya se señaló en el punto anterior.

Sin embargo, y a pesar del interés que despierta la Geometría y de su importancia, desde la segunda mitad del siglo XX su presencia en los currículos oficiales ha sido objeto de revisión continua, dando lugar a un currículo geométrico que presenta algunas carencias como las señaladas por Gascón (2003).

Los aspectos señalados, y los problemas docentes que se derivan de ellos, nos permiten definir un primer punto de partida para la concreción de nuestro problema:

P_0: ¿Cómo se puede realizar el estudio de los elementos geométricos que se lleva a cabo en la Educación Secundaria española?

Esta problemática docente, supone una buena base para comenzar a definir el problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Los problemas de investigación se establecen a partir de la disciplina que los construye. En nuestro caso estableceremos la evolución, de nuestro problema docente, a partir de las herramientas proporcionadas por la TAD.

Como veremos a continuación, la TAD propone diferentes dimensiones de análisis que al ir incorporándose al problema docente, permiten enriquecer el mismo y transformarlo en un problema de investigación en didáctica de las matemáticas. En nuestro caso, seguiremos el análisis de las tres dimensiones propuestas por Gascón (2011): la dimensión epistemológica, la dimensión económica-institucional y la dimensión ecológica.

En forma esquemática, el desarrollo virtual de un problema didáctico puede representarse como sigue:

$\{[(P_0 + P_1) P_2] P_3\}$ P_δ

Donde P_1, P_2 y P_3, representan las dimensiones fundamentales del problema, mientras que P_0 juega un papel especial porque, como veremos, es una formulación inicial, en cierta forma precientífica, de algunos tipos de problemas didácticos, a la que hemos denominado problema docente. Veremos que, aunque P_0 es especialmente visible en las primeras etapas del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas- en la que nos encontramos actualmente-, no consideramos que constituya una dimensión que esté necesariamente presente en todos los problemas didácticos. El símbolo + alude a que P_0 es un problema didáctico incompleto y que es necesario añadirle, al menos, la dimensión epistemológica P_1 para que pueda ser considerado como problema docente de investigación. (Gascón, 2011, p. 205-206).

1.3.4.1. La dimensión epistemológica del problema.

Ante el estudio de cualquier problema, el investigador aporta una visión personal, y muchas veces implícita, sobre qué son y cómo se estudian los distintos saberes matemáticos objeto de estudio. A menudo, se considera esta posición epistemológica como transparente, y por tanto no se tiene en cuenta a la hora de realizar la investigación. En nuestro caso, y para evitar las interpretaciones, realizaremos un trabajo de emancipación epistemológica utilizando una de las herramientas propuestas por la TAD y que definiremos con mayor detalle en el siguiente capítulo, los modelos epistemológicos de referencia (MER en adelante).

La definición del MER amplía considerablemente el problema de investigación. En su elaboración tendremos que decidir y señalar, de forma explícita, el conjunto de elementos del campo de la Geometría que van a ser consideradas objeto de estudio en este trabajo. El MER nos permite estudiar el saber matemático, antes de que sufra transformaciones para ser enseñando en el seno de una institución. Esta visión, externa al sistema de enseñanza, nos permite analizar cómo se interpretan esos saberes en las distintas instituciones.

Para organizar los elementos geométricos se seguirá un criterio de agrupamiento por bloques de afinidad, que permitirá entender los puntos de partida y la dificultad que se desea alcanzar.

Tal y como aparece en Gascón (2011), al añadir está dimensión incorporamos al problema de investigación los siguientes aspectos:

a) La amplitud del ámbito matemático más adecuada para plantear el problema didáctico.

b) Los fenómenos didácticos que serán visibles para el investigador.

c) Los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear.

d) Las explicaciones tentativas que se podrán proponer.

Como dice Chevallard, el estudio de la transposición didáctica, y añadimos el análisis de los MER que este estudio requiere y permite construir, son los instrumentos que han permitido a la Didáctica de las Matemáticas romper con la Didáctica Clásica y construir su propio objeto de estudio, integrando definitivamente el saber matemático. (Gascón, 2011, p. 11).

Al tener en cuenta está dimensión, nuestro problema de investigación se amplía y podría reescribirse como:

P_1: ¿Cuáles son los elementos geométricos que se deberían estudiar en la Educación Secundaria que se lleva a cabo en España?

1.3.4.2. La dimensión económico-institucional del problema.

La segunda dimensión a tener en cuenta es la económico institucional. Cualquier estudio geométrico se va a realizar dentro de una institución que va a imponer restricciones a ese estudio. Para la TAD, estas restricciones están por encima de las restricciones epistemológicas personales, y en gran medida van a poder explicar la relación personal, que se establece con la Geometría en esa institución. Para definir el problema de investigación, debemos entender y estudiar todas aquellas restricciones institucionales, que afectan al estudio de los elementos geométricos definidos en nuestro MER.

Se trata, por tanto, de responder a dos preguntas:

- ¿Cómo es interpretada la Geometría en las instituciones docentes?
- ¿Qué prácticas matemáticas es posible llevar a cabo en dichas instituciones?

Dentro de las instituciones existen distintos modelos epistemológicos que compiten entre sí. El estudio de qué modelo es el dominante, para el estudio de la Geometría, en las instituciones donde va a realizarse la investigación permite adelantar gran parte de los problemas y de las posibilidades de implantación de los procesos didácticos que se van a llevar a cabo y del tipo de productos matemáticos que pueden realizarse y obtenerse en las diferentes instituciones.

Teniendo en cuenta esta dimensión, enriqueceremos aún más el problema de investigación, al considerar la evolución de la legislación vigente en España, para la etapa de Educación Secundaria, y los diferentes modelos epistemológicos subyacentes que se derivan de ella y que pueden llegar a ser dominantes en las instituciones objeto de análisis.

Al tener en cuenta está dimensión, nuestro problema de investigación se amplía y podría reescribirse como:

P_2: ¿Cuáles son los elementos geométricos que se pueden estudiar en el seno de las instituciones de Enseñanza Secundaria españolas?

Tal y como aparece en Gascón (2011, p.15), "la dimensión económico-institucional plantea cuestiones sobre el resultado que, en un periodo histórico determinado, ha producido la acción de la transposición didáctica en las praxeologías matemáticas y didácticas de una institución". Gracias a este análisis, es posible elaborar y contrastar un modelo didáctico de referencia (MDR en lo sucesivo) que sea posible llevar a cabo dentro de las instituciones de ese periodo.

1.3.4.3. La dimensión ecológica del problema.

Una vez identificados los elementos geométricos que se quieren estudiar y las posiciones epistemológicas dominantes en las instituciones que favorecen o dificultan su estudio, "la dimensión ecológica permite comprender por qué las cosas son como son, en las instituciones y qué condiciones se requerirían para que fuesen de otra forma, dentro del universo de lo posible." (Gascón, 2011, p.16).

Para analizar por qué las cosas son como son, utilizaremos la herramienta teórica de los niveles de determinación propuesta por la TAD y que explicaremos en detalle en el siguiente capítulo (Ver Figura 2).

Cada uno de los sucesivos niveles aporta diferentes apoyos e impone diferentes restricciones.

> En cada nivel se producen restricciones entre las OM y las OD que tienen carácter recíproco: la interpretación y la estructuración de las OM en cada nivel de la jerarquía condicionan las formas posibles de organizar su estudio, mientras que, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan, en gran medida, el tipo de OM que será posible reconstruir. (Gascón, 2011, p. 218).

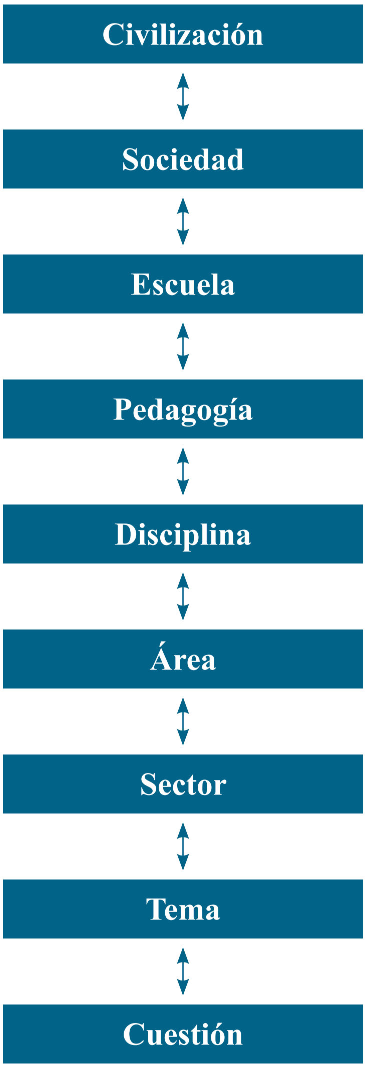


Figura 2. Escala de los niveles de codeterminación didáctica. (Bosch y Gascón, 2007, p. 12).

Teniendo en cuenta estos niveles, podremos analizar el tipo de restricciones transpositivas que han condicionado la forma de abordar el estudio de la Geometría, en las instituciones actuales y el tipo de respuestas posibles que permitirían modificar y enriquecer la enseñanza Geométrica que actualmente se realiza.

Con la incorporación de esta última dimensión, nuestra pregunta de investigación podría definirse como:

P_3: ¿Qué respuestas se pueden producir para superar las restricciones transpositivas que dificultan el estudio de los elementos geométricos que se pueden estudiar dentro de las instituciones de Enseñanza Secundaria españolas?

1.4. Los objetivos de la investigación

Para finalizar este capítulo, señalaremos la definición de objetivos que se derivan de esta construcción del problema de investigación:

1.- Elaborar un MER sobre la Geometría Elemental que permita la emancipación epistemológica.

2.- Detectar, comprender y analizar las restricciones transpositivas para el estudio de la Geometría Elemental en las instituciones de enseñanza secundaria españolas.

3.- Diseñar una respuesta teórica al problema de investigación, mediante la construcción de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI en lo sucesivo) que desarrolle el MER sobre Geometría Elemental construido.

4.- Contribuir a cerrar la brecha entre investigación y aplicación, mediante la implementación en el aula de una propuesta de innovación docente basada en el REI, que se haya construido a partir de la investigación para la enseñanza de la Geometría elemental y que responda a las restricciones para su estudio encontradas por la teoría.

5.- Analizar su viabilidad y sus resultados en una institución educativa concreta, mediante un estudio de caso.

2.

Marco teórico y análisis dimensional

Capítulo 2

Marco teórico y análisis dimensional

En este capítulo vamos, en primer lugar, a profundizar en la TAD y en las diferentes herramientas que ofrece para la investigación en didáctica de las matemáticas.

Una vez aclarados los aspectos principales de esta teoría vamos a ir explicitando todos los elementos epistemológicos que nos permitirán construir un MER propio para el estudio y la investigación de la Geometría elemental.

Para terminar el capítulo estudiaremos la evolución del sistema educativo en España y las restricciones que emanan de los distintos niveles de codeterminación didácticos. Entendemos que para construir una respuesta es necesario realizar un estudio previo en profundidad de las restricciones que vamos a encontrarnos a la hora de poner en marcha cualquier alternativa a la enseñanza dominante en las instituciones de Educación Secundaria españolas.

Con este enfoque se busca dar respuesta a los dos primeros objetivos de la investigación y preparar el terreno para construir nuestra respuesta a las restricciones transpositivas para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación secundaria.

2.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico

Como ya se ha indicado anteriormente, esta investigación se sitúa dentro de la Teoría Antropologica de lo Didáctico. Antes de desarrollar el marco teórico vamos a recoger, en este apartado, el origen, las características diferenciales, los autores principales de este programa de investigación y las aportaciones principales de la TAD que serán tenidas en cuenta en este trabajo.

2.1.1. Origen y aclaración de términos. Lo didáctico y lo antropológico.

Según Bosch, García, Gascón y Ruiz, (2006), la TAD aparece por primera vez con la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) y pretende dar respuesta a dos problemas básicos:

> Por una parte, la necesidad del investigador de emanciparse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares (Chevallard, 2006) (lo que implica que

la TAD nos proporciona nociones para liberarnos de la manera en la que se considera el conocimiento matemático y la actividad matemática en las instituciones escolares).

Por otra parte, el cuestionamiento de las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de difusión del conocimiento matemático en la escuela (es decir, el estudio de lo que hace posible la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo que lo dificulta, etcétera). (Bosch, et al., 2006, p. 38).

Antes de comenzar a describir las principales herramientas y aportaciones teóricas, que vamos a utilizar en este trabajo, vamos a seguir el trabajo de Otero (2013) para explicar los términos Antropológico y Didáctico presentes en el nombre de la TAD.

Respecto a la distinción entre Didáctica y Didáctico encontramos lo siguiente:

La Didáctica estudia las condiciones y restricciones de la difusión institucional de las praxeologías. Una condición resulta una restricción para una persona o una institución, cuando al menos a corto plazo, no puede ser modificada por éstas. Considerando que cada ciencia define o recorta su objeto de estudio, puede agregarse que la Didáctica es la ciencia de lo didáctico o de los hechos didacticos, y que a ella le corresponde definir y redefinir este objeto (Chevallard, 2009a).

Lo didáctico se presenta en la multitud de situaciones sociales en las cuales alguna persona y o alguna institución Y, hacen algo – o pretenden intencionalmente hacerlo- para que alguna persona x, o X pueda estudiar una obra ♥. Las obras son creaciones humanas materiales o no, producidas deliberadamente para cumplir una función definida (Chevallard, 2012). Lo didáctico supone la existencia de sistemas didácticos del tipo S(X;y;♥), que funcionan según ciertas reglas, estudiadas por la Didáctica. (Otero, 2013, p. 15-16).

Como puede verse la TAD se interesa por el sistema formado por las personas que estudian y ayudan a estudiar las obras matemáticas en el seno de alguna institución y pretende comprender las condiciones, restricciones y reglas que condicionan ese estudio.

En relación al término antropológico podemos encontrar la siguiente reflexión:

> Finalmente, el adjetivo "antropológica", expresa que el ámbito de la Didáctica no se restringe a la institución escolar, sino que se amplía a todas las instituciones sociales donde ocurren procesos de difusión de obras, sean estas matemáticas o no. (Otero, 2013, p. 16).

La dimensión antropológica por la que apuesta la TAD es clave para ampliar el punto de vista. Al superar el ámbito de los centros educativos tradicionales incorporando otras instituciones sociales se visibilizan aspectos que no pueden ser estudiados únicamente desde lo que ocurre en la escuela. Esta visión aporta complejidad a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y permite comprender de una forma más profunda el origen y las influencias sociales a las que están sometidas las condiciones, restricciones y reglas a las que hacíamos referencia anteriormente.

Para dar respuesta a estos problemas se van desarrollando una serie de conceptos y herramientas a lo largo del tiempo que se van articulando como una Teoría independiente. A continuación presentamos las más relevantes para este trabajo:

1. La Transposición didáctica. (Chevallard, 1985).
2. Las Praxeologías. (Chevallard, 1999).
3. Los Modelos epistemológicos de referencia. (Bolea, Bosch y Gascón, 2001)
4. Los Niveles de codeterminación didácticos. (Chevallard, 2001a).
5. Los Recorridos y estudios de Investigación. (Chevallard, 2009c).
6. La Pedagogía del cuestionamiento del mundo. (Chevallard, 2013a).

2.1.2. La Transposición didáctica.

La primera vez que apareció la idea de Transposición Didáctica fue en 1980 en el marco de la Première Ecole d´Été de Didactique des Mathématiques en la Universidad de Chamrousse (Bosch y Gascón, 2007).

Durante los siguientes 5 años se fue difundiendo el concepto y la terminología y en 1985 culminó todo ese proceso de gestación en la primera edición de la obra *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (Chevallard, 1985).

Esta teoría postula que el conocimiento o las obras que se estudian en la escuela se han generado en la sociedad y que son las necesidades de esta última las que condicionan mediante sucesivas transformaciones la forma en que las obras socialmente construidas son transmitidas en la escuela. Esta idea fue revolucionaría porque sitúa en el primer plano las relaciones sociales e institucionales que afectan a lo que acaba enseñándose en una institución educativa. La transposición didáctica se realiza progresivamente en varias fases. Para clarificar todo el proceso podemos ver un esquema general en la figura 3:

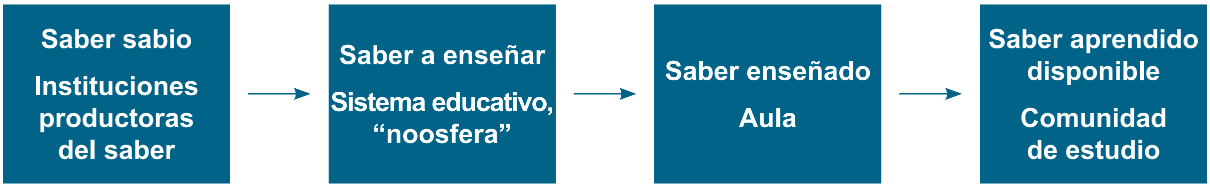


Figura 3. El proceso de transposición didáctica (Barquero, 2009, A 52).

Se trata, por tanto, de un concepto clave a la hora de construir una respuesta que sea aplicable en el aula ya que permite explicar el paso del saber sabio, al saber enseñado en los centros de enseñanza. En esa primera obra se proporciona la siguiente definición del propio autor:

> Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. (Chevallard, 1985, como se cita en Gómez, 2005, p. 87).

Para la TAD los encargados de realizar esos cambios son muy diferentes y forman parte del cuerpo de profesores, de la clase política, de personas de referencia en esa área,… Ese grupo de personas se denomina "noosfera" (Bosch y Gascón, 2007, p. 1). Es importante señalar que en este trabajo el papel de la noosfera en la concreción de la respuesta será realizado por el propio investigador.

Estos saberes transformados llegarán a las instituciones educativas donde sufrirán nuevas transformaciones para adaptarse a ese medio. Posteriormente llegan al aula donde vuelven a ser transformados por el docente y en último término llegan al alumno que transforma una vez más lo que se le enseña. El análisis de este segundo bloque de transformaciones se realizará en el siguiente apartado.

A finales de la década de los 90, el concepto de Transposición Didáctica se integra, como ya se ha mencionado, en la TAD como una parte fundamental de la misma. Desde este nuevo prisma antropológico, la Transposición Didáctica debe tener en cuenta que los saberes han surgido para dar respuesta a preguntas. Cuando las respuestas a estas preguntas han sido aceptadas por una sociedad son susceptibles de ser transformadas para ser enseñadas. Las actividades sociales generan un conjunto de obras humanas para dar respuesta a preguntas teóricas o prácticas. El enfoque antropológico prima este aspecto social de la escuela, que se crea para transmitir tanto las respuestas ya aceptadas como las preguntas que les dieron origen. La TAD evita, por tanto, la transmisión cerrada y expositiva de respuestas al alumno. Este tipo de transmisión es lo que se define como una transmisión "monumentalista" (Chevallard, 2004). Para entender cómo se realiza esa Transposición Didáctica podemos seguir el siguiente esquema (Fig. 4) basado en el planteado por Bolea (1995, p. 94).

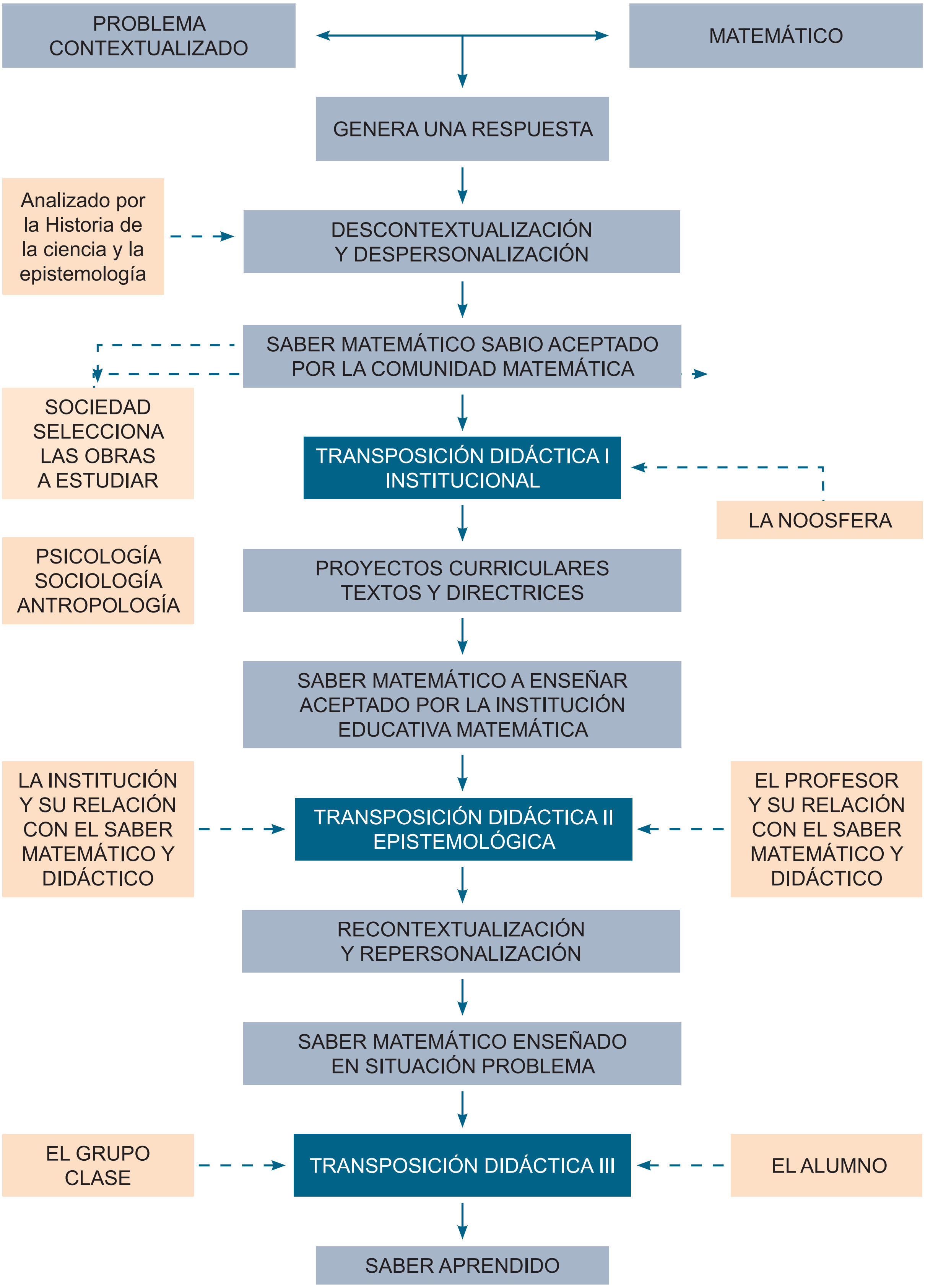


Figura 4. La transposición didáctica. Elaboración propia a partir de Bolea (1995, p. 94).

La figura anterior señala una serie de procesos, productos y fases que se llevan a cabo por diferentes personas o colectivos en distintos ambientes sociales que procedemos a explicar en detalle a continuación:

1. La búsqueda de soluciones ante un problema o grupo de problemas matemáticos es lo que lleva al investigador matemático a generar respuestas a los mismos. Dichas respuestas están claramente influidas por las posiciones personales y de contexto que han llevado a su solución. En muchas ocasiones esa primera respuesta está llena de caminos sin salida y no sigue ningún orden lógico ni jerarquizado. Para que pueda ser reconocido como un saber, el investigador matemático debe descontextualizar el problema y despersonalizarlo de forma que gran parte del proceso intuitivo y creativo se pierde al presentarse la respuesta en forma de teoría elaborada y secuenciada. Sus intuiciones, sus incertidumbres, son aspectos que interesarán principalmente a la historia de la ciencia y a la epistemología.

2. La sociedad, en función de sus necesidades sociales, económicas e históricas, decidirá cuales son las obras a transmitir a las generaciones futuras. Entre ellas figurarán algunas obras matemáticas que deberán ser transformadas para que puedan convertirse en un saber a enseñar. En ese proceso se tendrán en cuenta las aportaciones de la psicología, la sociología y la antropología que estén vigentes en ese momento y se cederá a la noosfera la tarea de su deconstrucción y reformulación secuenciada. Las distintas partes de la noosfera presionarán en función de sus intereses, ideas y posiciones epistemológicas. Dicho saber queda recogido, en parte, en los documentos oficiales aprobados por la administración.

3. Las editoriales, las instituciones educativas y los profesores reciben el encargo de transmitir ese saber escolar y elaboran una recontextualización y repersonalización del saber a enseñar en función de la posición epistemológica que tengan hacia la Didáctica y hacia las Matemáticas. Normalmente es el profesor el último encargado en generar las distintas situaciones problema del aula, por lo que su formación, personalidad, experiencia y sus creencias personales influirán en la transformación. Se produce así otra transposición didáctica que queda reflejada en las distintas propuestas que hace cada profesor. El acceso a esta propuesta es muy difícil de analizar y se hace necesario un estudio detallado de los apuntes de los alumnos, los diarios de los docentes, etc.

4. En última instancia es el alumno el que en función de su atención, creencias, motivación, emociones, estrategias de aprendizaje, conocimientos previos, predisposición para aprender y situación personal debe enfrentarse con el estudio. La responsabilidad última para saber qué parte del saber a enseñar es realmente transformada en un saber aprendido reside en el alumno.

Para completar esta descripción del proceso podemos recurrir de nuevo al creador del término Transposición Didáctica:

> El papel del profesor es el de actor en una obra que no ha escrito él, pero cuyo texto íntegro tampoco se le facilita. Para elaborar su guión, su representación, dispone de distintas orientaciones: un programa oficial, comentarios e instrucciones oficiales respecto a la metodología, etc., con los que deberá completar la obra a representar. Estas restricciones dan lugar al siguiente hecho importante: "El enseñante, en su representación, solamente dispone de un cierto espacio de libertad, por lo tanto de un cierto espacio de incertidumbre" (Chevallard, 1990, como se cita en Bolea, 1995, p. 92).

El estudio de la transposición es una etapa imprescindible en la generación de respuestas para la enseñanza de las Matemáticas que se enseñan en el aula. Las Matemáticas son un conocimiento vivo que se enseña y se aprende, que se difunde y se utiliza. Para proponer una respuesta sobre las Matemáticas escolares y cómo se aplican en una institución es necesario recorrer la cadena de transposiciones didácticas y llegar a captar y entender las razones que motivan y justifican su enseñanza. "Para la TAD la unidad mínima de análisis de cualquier proceso didáctico pasa a contener todas las etapas de la transposición didáctica" (Bosch y Gascón, 2007, p. 6).

A la idea de la transformación del saber hay que añadir la idea del envejecimiento que se produce en los saberes a enseñar. La ciencia y la sociedad cambian gradualmente y estos cambios provocan que aquello que fue considerado un saber sabio sea sustituido por otro más completo y novedoso. Por otra parte, la necesidad sobre las obras matemáticas a transmitir también va modificándose, de forma que lo que fue legítimo en una época puede haber quedado obsoleto o deslegitimado en otro momento socio-histórico.

Cuando un saber enseñado se aleja demasiado del saber sabio vigente o deja de servir al propósito de la sociedad que lo creó, ese saber envejece y es muy probable que sea retirado o modificado sustancialmente en la siguiente reforma.

Este fenómeno de envejecimiento queda definido por Chevallard (1994) en la siguiente cita:

> Pero el veredicto se presenta como un rumor a través del cuerpo social. Y llega un día que una murmuración contestataria se infla y no puede ser ignorada. El currículo, simplemente, pierde su credibilidad. La materia enseñada, bruscamente es golpeada por la obsolescencia. Las negociaciones deben ser reabiertas. La noosfera, que ronronea, en un instante se despierta. Los noosferianos entran en liza, acudiendo de dos lados a la vez. Del interior del sistema de enseñanza: es la masa de anónimos, que el gran público, salvo algunas excepciones, ignora. Del exterior también, yo quiero decir, de la esfera sabia: es la rara élite de aquellos que teniendo tanta legitimidad para esto, se atreven a proponer un nuevo contrato, y pretenden mostrar la vía de la reconciliación entre escuela y sociedad. Estos últimos ejercen y hablan propiamente de una función de leadership. (Chevallard, 1994, como se cita en Gómez, 2005, p.89).

Como se verá más adelante, la respuesta que proponemos en este trabajo quiere contribuir a la reformulación del contrato entre escuela y sociedad mediante una propuesta de enseñanza-aprendizaje de la Geometría elemental basada en los planteamientos de la TAD.

2.1.3. Praxeologías.

Una vez aclarado el concepto de Tranposición didáctica, que dio origen a la TAD, vamos a explicar el concepto de Praxeología.

La idea principal es que toda obra humana, incluida la matemática, surge para dar respuestas a un conjunto de cuestiones problemáticas dentro de una institución. Las praxeologías u organizaciones matemáticas, son el resultado final de la actividad matemática. Por un lado, consta de tareas y técnicas, o maneras de hacer válidas en una institución. Estamos así en el nivel de la praxis o el saber hacer. Por otro, las técnicas utilizadas están justificadas por un discurso explicativo al que se denomina tecnología que se describe, explica y justifica desde la teoría. Entramos así en el nivel del logos o el saber. Es importante resaltar que las praxeologías que se estudian en un instituto de Educación Secundaria sobre Geometría son muy distintas a las que se estudian en una facultad de Matemáticas. Estudiar un tema en Didáctica de las Matemáticas, teniendo en cuenta este hecho, es una de las aportaciones de la TAD.

> Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general, (…) ¿Qué es exactamente una praxeología? Podemos confiar en la etimología para guiarnos aquí,- uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: praxis, i.e. la parte práctica por un lado, y el logos, por el otro. “Logos” es una palabra griega que, desde los tiempos pre-Socráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano particularmente sobre el cosmos. (…) [De acuerdo con] un principio fundamental de la TAD -la teoría antropológica de lo didáctico-, no pueden existir acciones humanas sin ser, al menos parcialmente, “explicadas”, “hechas inteligibles”, “justificadas”, “contabilizadas”, en cualquier estilo de “razonamiento” que pueda abrazar dicha explicación o justificación.
>
> La praxis, por tanto, implica el logos que, a su vez, implica volver a la praxis. En efecto, toda praxis requiere un apoyo en el logos porque, a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar. Por supuesto, una praxeología podría ser deficiente, por ejemplo porque “su praxis” se compone de una técnica ineficaz “técnica” es aquí la palabra oficial para designar una “forma de hacer”- y su componente “logos” consta casi completamente de puro sinsentido ¡al menos desde el punto de vista del praxeologo!. (Chevallard, 2007, como se cita en Barquero, 2009, A 52-53).

Dada la importancia del concepto de praxeología para este trabajo y de los conceptos que lo componen; tareas, técnicas, tecnologías y teorías, ofrecemos a modo de resumen la figura 5:

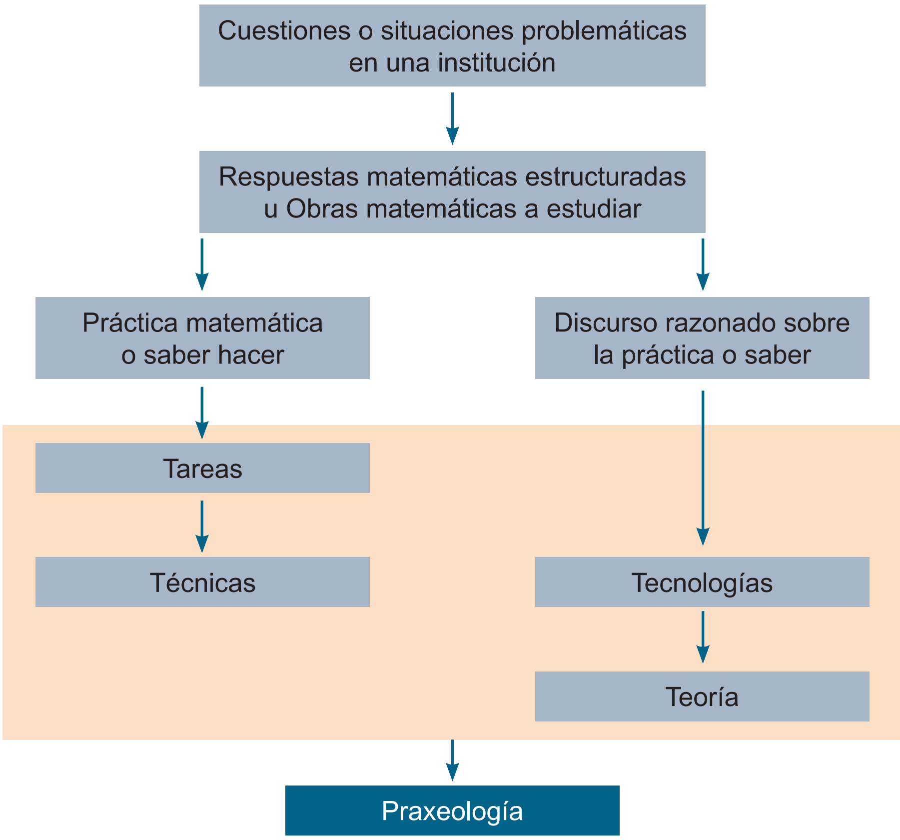


Figura 5. Elementos que constituyen una praxeología. Elaboración propia.

El concepto de praxeología se amplió posteriormente de forma que sirviese para analizar diferentes procesos dentro de las instituciones. Según el grado de complejidad de sus componentes podemos tener las siguientes praxeologías:

- Praxeologías puntuales, si están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas T. Esta noción es relativa a la institución considerada y está definida, en principio a partir del bloque práctico-técnico $[T/\tau]$.
- Praxeologías locales, resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología q, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.
- Praxeologías regionales, se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración alrededor de una teoría matemática común Q, de diversas

praxeologías locales. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías (Θ) de las praxeologías locales (PL) que integran la praxeología regional.

- Praxeologías globales, que surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

De manera simplificada, es posible afirmar que lo que se aprende y enseña en una institución escolar son praxeologías matemáticas o, al menos, ciertos componentes de éstas. Las praxeologías rara vez son personales, más bien son compartidas por grupos de seres humanos organizados en instituciones. (Bosch, et al., 2006, p. 39).

Como se puede deducir de la cita anterior, la praxeología constituye el elemento central que permite modelizar todas las actividades humanas y en especial la actividad matemática que se produce en el seno de una institución.

2.1.4. Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

En todas las instituciones existe un modelo epistemológico dominante que determina lo que significa enseñar y aprender matemáticas y cada una de las áreas que la componen en el seno de dicha institución. Estos modelos influyen directamente en lo que los sujetos de esa institución pueden hacer y por tanto es determinante desde el punto de vista didáctico.

Para poder investigar con independencia de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones, desde la TAD se propone organizar de forma clara y explícita el conjunto de praxeologías que constituyen el saber matemático objeto de estudio. Esta organización se denomina MER.

El MER es necesario para liberarse de los modelos dominantes en las instituciones, emancipación epistemológica, y de la subjetividad institucional, emancipación institucional. Como investigadores debemos tener, por tanto, una visión personal, crítica y reflexiva sobre las praxeologías que serán objeto de estudio, que no incorpore dependencias relativas a la posición institucional.

En efecto, para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemlógicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. En esto consiste la emancipación epistemológica, mientras que la emancipación institucional hace referencia a la necesidad del didacta (y de la ciencia didáctica) de liberarse de las dependencias que acarrean la posición de "profesor" (sujeto de cierta institución escolar), la de "noosferiano" (sujeto de la noosfera, esto es autor de libros de texto, de planes de estudio, de documentos curriculares, de textos de formación del profesorado, etc.) e, incluso, la de "matemático guardián de la ortodoxia" (sujeto de la institución productora y conservadora del saber). (Gascón, 2014, p. 100).

Para desarrollar un MER el investigador puede construir "una arborescencia de praxeologías de complejidad y completitud crecientes" (Gascón, 2014, p. 109). Esta construcción permite formular problemas didácticos y visibilizar fenómenos desde una posición externa al proceso de trasposición didáctica, como se puede ver en la figura 6 que mostramos a continuación:

Figura 6. Papel de los modelos epistemológicos de referencia en los procesos transpositivos. (Bosch y Gascón, 2007, p. 394).

Una vez establecido el papel de los MER para la investigación abordamos las cuatro características de los MER basándonos en el trabajo de Gascón (2014, p.111-112):

a) Un MER específico o local no está asociado simplemente a un ámbito de la actividad matemática, sino a uno o más fenómenos didácticos (que involucran un ámbito más o menos extenso de la actividad matemática). Por lo tanto, si se trata de estudiar diferentes fenómenos didácticos emergentes en un mismo ámbito de la actividad matemática, será necesario construir diferentes MER (Schneider, 2013).

b) La construcción de un MER, la explicitación de los fenómenos asociados y la formulación de los problemas didácticos correspondientes son procesos simultáneos que se desarrollan dialécticamente.

c) Un MER es una respuesta tentativa inicial a las cuestiones que forman parte de la dimensión epistemológica de los problemas didácticos involucrados (Gascón, 2011) y, como tal, es imprescindible (en el ámbito de la TAD) para formular los problemas didácticos como verdaderos problemas de investigación.

d) Todo MER es provisional, es una hipótesis científica, y debe ser contrastado empíricamente. Si un MER específico no cumple su función fenomenotécnica, deberá ser revisado y hasta modificado profundamente. La piedra de toque para decidir entre dos MER rivales cuál de ellos es más útil heurísticamente (o para decidir cómo modificar un MER a fin de poder estudiar nuevos aspectos de un fenómeno didáctico), son los hechos didácticos interpretados como fenómenos.

En nuestro trabajo de investigación nos proponemos estudiar la enseñanza de la Geometría elemental, para que, una vez descrita y caracterizada, sirva para tener un modelo ideal que permita comparar las situaciones institucionales estudiadas y plantear preguntas y problemas que permitan progresar en su estudio.

Para llevar a cabo la construcción ideal del MER, sobre Geometría elemental, que nos permita liberarnos de los modelos epistemológicos dominantes en las diferentes instituciones y hacer visibles nuevos fenómenos didácticos, vamos a tener en cuenta el planteamiento realizado por Sierra (2006, p. 55):

> Ya hemos visto que todo MER debe elaborarse en base a las Organizaciones Matemáticas sabias que legitiman epistemológicamente el proceso de enseñanza de dicha OM. Pero la propia elaboración del MER constituye al mismo tiempo una herramienta de distanciamiento de dicha institución sabia al permitir a la investigación didáctica expli-

citar su propio punto de vista sobre el contenido matemático en juego en los procesos didácticos que se enseñan, implementan, analizan y evalúan. En particular, el MER debe tomar en cuenta la evolución histórica de las OM sabias, aunque sin copiarlas miméticamente. Siguiendo a Lakatos (1971), podemos considerar un MER como una "reconstrucción racional" de la evolución histórica de las OM consideradas, que "corrige" en cierta manera la evolución real. Además, dado que un MER es una herramienta para el análisis de procesos didácticos concretos, su construcción también debe tomar en consideración las restricciones que provienen de las instituciones escolares en las que la OM en cuestión es designada como OM "a enseñar".

2.1.5. Los niveles de codeterminación didácticos.

Las actividades de estudio en matemáticas suponen la activación de, al menos, una praxeología. Estas praxeologías que se movilizan están condicionadas por múltiples restricciones que determinan la actividad y los resultados matemáticos que es posible obtener como resultado de ese estudio. "En la TAD, se dice que una condición es una restricción para una persona o una institución si no puede ser modificada por dicha persona o institución, al menos en el corto plazo" (Chevalllard, 2013a, p.163).

Chevallard (2001b, 2004, 2007, 2013b) propuso considerar una serie sucesiva de niveles de determinación que el investigador debería tener en cuenta a la hora de estudiar las restricciones y condiciones que influyen en la formación de las praxeologías matemáticas y didácticas en una institución. El esquema de la figura 7 sirve de resumen:

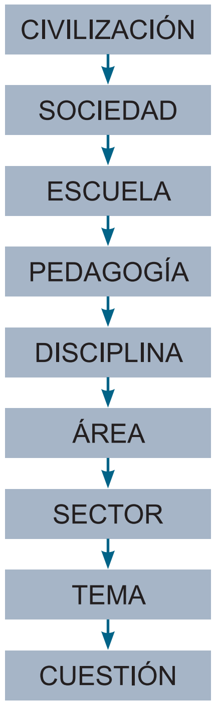


Figura 7. Escala de los niveles de codeterminación didáctica (Bosch y Gascón, 2007, p.12).

Gracias a este esquema el investigador puede prestar atención a las restricciones que tiene el profesor en el aula a la hora de trabajar una determinada praxeología matemática y determinar a qué nivel corresponden.

En cada uno de los niveles se introducen restricciones particulares donde se pone de manifiesto la determinación recíproca entre las praxeologías matemáticas y las didácticas: la estructura entre las organizaciones matemáticas en cada nivel de la jerarquía presentada condiciona las diversas formas de organizar el estudio; pero recíprocamente los dispositivos didácticos en cada nivel determinan a la vez, en gran medida, el tipo de praxeologías matemáticas que será posible construir en una institución.

A continuación podemos ver un ejemplo ilustrativo de los diferentes niveles de codeterminación:

> Podemos considerar un problema práctico de construcción de un depósito de agua (nivel de la Sociedad), designarlo como digno de ser estudiado en la escuela (nivel Escolar), mediante la modelización por un conjunto de disciplinas (nivel Pedagógico). La elección de un modelo dentro de una disciplina nos sitúa en un nivel mayor de especificidad y, si

la disciplina elegida es la matemática, podremos considerar el problema dentro de una u otra área (geometría, álgebra, estadística o análisis, por ejemplo), dentro de un sector concreto de cada área (cálculo de volúmenes, integración de funciones o simulación numérica y análisis estadístico), en un tema más específico (cálculo de volumen de un cilindro) hasta llegar al nivel en que sólo nos preocuparía la cuestión como problema a resolver, pero no el tipo de conocimientos que hay que aplicar. (Rodríguez, 2005, p.195).

Para establecer una primera aproximación vamos a explicitar rápidamente qué decisiones se toman en cada nivel, para iluminar el tipo de restricciones que aparecen en cada caso:

1. En el nivel de la civilización se analizan variables supranacionales que afectan al proceso de enseñanza y que condicionan los saberes objeto de estudio que las distintas sociedades van a tener en cuenta.
2. En el nivel de la sociedad es donde se deciden (en una civilización dada) qué saberes deben ser objeto de estudio en la enseñanza reglada que todo ciudadano debe conocer.
3. En el nivel de la escuela se estudian las restricciones que provienen de la organización del sistema educativo en instituciones escolares. En este nivel se deben garantizar las condiciones óptimas que hacen posible el estudio de las praxeologías seleccionadas por la Sociedad.
4. En el nivel pedagógico se estudian las restricciones que afectan a todas las disciplinas, como por ejemplo, el tipo de profesores que pueden impartir las materias, el tipo de agrupamiento de los alumnos y el número de ellos por aula, la cantidad de tiempo dedicada a cada asignatura o la organización de los horarios.
5. En el nivel de la disciplina podemos estudiar las restricciones específicas de una materia concreta: la Física, las Matemáticas, la Lengua o la Tecnología, por ejemplo.
6. En los siguientes niveles, área, sector, tema y cuestión se establece una organización descendente que permite ir concretando las distintas praxeologías hasta las cuestiones a estudiar. Sin una organización de este tipo las cuestiones aparecen aisladas y corren el peligro de no responder a las necesidades de la sociedad a la que pertenece la institución donde se estudian.

De este modo, esta herramienta permite estudiar las limitaciones, condiciones y restricciones que afectan al estudio e identificar el nivel de donde proceden. La identificación causal adecuada es, por tanto, la clave para la realización de propuestas que sean viables y que aporten soluciones a los errores detectados.

2.1.6. El concepto de modelización dentro de la TAD.

En la investigación realizada por Lucas (2015) se realiza una descripción detallada del concepto de modelización matemática dentro de la TAD que será la asumida en este trabajo.

> En definitiva, desde la TAD, proponemos reformular los procesos de modelización como procesos de construcción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004) con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas relativas a cierto ámbito de la realidad matemática o extra-matemática. Así, la modelización matemática puede funcionar como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar (García, 2005; Barquero, 2009; Serrano, 2013).

Dentro del mismo trabajo se estudian en detalle los principales aspectos a tener en cuenta sobre el término de modelización. De un modo esquemático, podemos decir que son los siguientes:

a) Se integra la modelización intramatemática en la noción de "modelización".
b) Se interpreta la modelización matemática como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar.
c) La modelización no es únicamente un aspecto de la enseñanza de las Matemáticas, sino que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización.
d) La modelización matemática es un proceso recursivo.
e) El modelo epistemológico de la TAD no permite considerar la modelización de componentes aislados de una OM como "conceptos", "técnicas" o "problemas". (Lucas, 2015, p. 22-24).

Una vez establecido el concepto de modelización y sus principales características asumiremos que el proceso de modelización se lleva a cabo siguiendo un recorrido no lineal a través de cuatro estadios tal y como se expone en Lucas (2015).

Los procesos de modelización comienzan con una cuestión problemática inicial de carácter amplio que genera un número suficiente de cuestiones derivadas que sirven de guía al proceso de estudio. Estas cuestiones derivadas van apareciendo a lo largo del proceso como respuesta a los diferentes estadios que se detallan a continuación.

Primer estadio. Construcción del sistema a modelizar

La naturaleza de la cuestión generatriz hace necesario establecer una delimitación de aquellos aspectos del problema que nos van a servir para construir un modelo útil que responda a la cuestión planteada.

Es importante destacar que las cuestiones problemáticas iniciales pueden provenir tanto de la realidad matemática como de la realidad extramatemática.

Segundo estadio. Construcción del modelo matemático y reformulación de las cuestiones iniciales.

Una vez conocemos los aspectos relevantes del problema inicial, pasamos a estudiar los distintos tipos de técnicas matemáticas que sirven para ir acercándose a la cuestión generatriz e ir dando forma a la cuestión inicial mediante sucesivas preguntas derivadas.

Tercer estadio. Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.

Aprendidas las nuevas técnicas, se intenta dar respuesta a la pregunta inicial y se explora si esta es o no completa y satisfactoria.

Cuarto estadio: Necesidad de un nuevo proceso de modelización para responder a nuevas cuestiones.

Aquellos aspectos de la cuestión generatriz no resueltos por el modelo creado dan lugar a nuevas preguntas derivadas que deben estudiarse de nuevo desde el primer estadio y que conforman por tanto el germen inicial del nuevo proceso de modelización.

Es importante entender que los estadios planteados no tienen por qué ser recorridos de forma secuencial, tal y como intentaremos mostrar, a través de nuestra propuesta, más adelante.

En nuestra respuesta prestaremos atención a todos ellos haciendo un especial hincapié a las cuestiones derivadas de los distintos estadios que provocan el paso de una etapa a la siguiente.

2.1.7. Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI).

Los REI fueron propuestos por Chevallard (2004, 2007, 2009 b, 2009c, 2013a) y sirven para otorgar sentido y funcionalidad al estudio de la matemática en la escuela y para dar respuesta a las restricciones transpositivas que se producen en todos los niveles de coodeterminación didácticos. Se parte de un sistema organizador general del proceso de estudio que puede describirse de la siguiente manera:

> La notion clé peut ètre schématisée de la manière suivante. Une question Q étant posée, un système didactique
>
> S (X; Y; Q)
>
> se forme autour d'elle : X est un collectif d'étude (une classe, une équipe d'élèves, une équipe de chercheurs, un journaliste, etc.) et Y une équipe (en général réduite : Y peut même être l'ensemble vide) d'aides à l'étude (professeur, tuteur, directeur de recherche, directeur de la rédaction, etc.). Le but de la constitution de ce système didactique est d'étudier Q, c'est-à-dire de chercher à lui apporter une réponse R qui satisfasse certaines contraintes a priori, dont celle de résister à sa mise á l'èpreuve para la confrontation avec des "milieux adidactiques" appropriés. Le bilan du travail attendu de X sous la conduite et la supervision de Y peut être noté ainsi:
>
> S (X; Y; Q) $\longrightarrow$ R. (Chevallard, 2009c, p.1)

Al sistema anterior alumnos-profesores-cuestiones, hay que ayudarle mediante un medio adecuado que esté formado al menos por:

- Respuestas pre-construidas.
- Preguntas derivadas de la cuestión generatriz.
- Obras matemáticas bajo la forma de teorías, experimentos o praxeologías.

Los alumnos y profesores se enfrentan a cuestiones reales estudiando respuestas ya disponibles en las redes de conocimiento. El estudio de estas respuestas establecidas lleva a una cadena de preguntas similares y derivadas que obligan a los alumnos a profundizar y estudiar obras matemáticas que van otorgando respuesta a toda la cadena de preguntas. A lo largo de ese proceso se acaba dando respuesta a la pregunta original. El alumno aprende estudiando e investigando. Dentro de la TAD este esquema se denomina Sistema Herbartiano y fue definido por Chevallard y Ladage (2010, p.3) de la siguiente manera:

> Il est temps d'exhiber ce que nous appelons le schéma herbartien, qui permet d'interroger l'étude d'une question Q. Sous sa forme semi-développée, ce schéma formel sécrit ainsi:
>
> $[S (X; Y; Q) \longrightarrow M] \longrightarrow R^{\heartsuit}$.
>
> La flèche incurvée montante exprime que, augmenté de ce qu'on nomme un milieu didactique ou milieu pour l'etude M, le système didactique S (X; Y; Q) "fabrique" la réponse R♥ à la question Q. La flèche incurvée descendante exprime que le système didactique S (X; Y; Q) contitue son milieu pour él etude M. De quoi celui-ci est-il fait? Le schéma herbartien développé le révèle:
>
> $[S (X; Y; Q) \longrightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge},..., R_n^{\lozenge}. O_{n+1}, O_{n+2},..., O_m^{\lozenge}\}] \longrightarrow R^{\heartsuit}$
>
> Le milieu contient l'outillage rassemblé pour étudier Q, outillage réuni tout au long de l'enquête sur Q: $M=\{R_1^{\lozenge},R_2^{\lozenge},\ldots,R_n^{\lozenge}. O_{n+1}, O_{n+2},\ldots,O_m\}]$

Este tipo de aprendizaje obliga al alumno a realizar un trabajo como matemático. Es durante el proceso de plantear hipótesis y de aceptarlas o refutarlas donde el alumno pone en marcha los procesos de inducción y deducción propios del saber matemático. El alumno aprende matemáticas haciendo matemáticas. El estudio e investigación realizados permiten al alumno abordar el problema para obtener una respuesta funcional a la cuestión generatriz e ir construyendo algunas de las obras matemáticas presentes o no en el MER. Se devuelve así el sentido al estudio de los saberes a enseñar.

Para hacer posible un REI es necesario realizar los siguientes cambios en el sistema didáctico con respecto al sistema tradicional:

Topogénesis: Cambiar el rol del profesor y del alumno

El profesor debe ser el encargado de introducir en el medio las obras y las respuestas preestablecidas a estudiar e investigar.

El alumno debe producir respuestas personales a la pregunta generatriz, plantearse nuevas preguntas e introducir obras nuevas en el medio suministrado por el profesor. Esta forma de trabajo es más rica que el estudio monumentalista, ya que enriquece el medio y no excluye del mismo obras, respuestas o preguntas que puedan surgir como resultado de la investigación.

Cronogénesis. Modificar el tiempo de estudio.

Para realizar una investigación el alumno debe realizar un proceso menos lineal hacia la respuesta. Dentro de este proceso es imprescindible que se exploren y tanteen muchos más caminos que los que se estudian en un proceso tradicional. Por otro lado, la posibilidad de que se generen un buen número de preguntas derivadas hace que los alumnos encuentren un mayor sentido a lo que estudian y doten de una mayor significatividad a lo que aprenden. Sin embargo este proceso puede resultar mucho más dilatado en el tiempo y mucho más impredecible.

Mesogénesis. Cambiar el medio.

Para la realización de un REI es necesario disponer de un medio abierto donde realicen aportaciones los alumnos y los profesores. Así mismo, ese medio debe ser capaz de incorporar obras, preguntas y respuestas no previstas de antemano que provengan de múltiples fuentes y soportes. La selección inicial de obras y respuestas realizada por el profesor no es definitiva y es importante que se amplíe y modifique en función de la investigación que realizan los alumnos. El medio por tanto está parcialmente construido y se completa con la investigación de la clase.

Es evidente que estos cambios que se plantean para hacer posible un REI pueden chocar chocar con algunas de las restricciones que provienen de los diferentes niveles de codeterminación. Por ese motivo el REI es la respuesta que plantea la TAD a estas restricciones y permite romper con el paradigma educativo dominante y avanzar hacia un nuevo paradigma, como se verá a continuación.

Antes de avanzar es necesario aclarar que la forma tradicional de explicar obras matemáticas donde es el profesor el que explica directamente un saber a enseñar y donde el alumno se acerca a ese saber por un camino lineal y prestablecido es una opción válida que se puede incorporar de forma puntual al medio. En este sentido el REI acepta y se enriquece con los medios tradicionales pero también supera la restricciones derivadas de ese modelo al aceptar que el medio puede y debe enriquecerse con las aportaciones de todos los implicados durante el proceso.

Las habilidades que se deben movilizar por parte del profesor y de los alumnos son muy diferentes a las que se utilizan de forma habitual en las aulas, por ese motivo para que la implantación de un REI sea realmente posible es necesario realizar un trabajo previo con los docentes y con los alumnos para que esas habilidades nuevas estén disponibles.

A modo de resumen, podemos utilizar como metáfora el crecimiento de una planta. El profesor planta la semilla inicial a modo de pregunta generatriz. Esta semilla germinará mejor o peor en función del medio disponible. La labor de todos es procurar que la semilla brote. Inicialmente la semilla buscará las respuestas más sencillas en el medio a través de su raíz. Una vez haya florecido generará nuevas ramas en forma de preguntas derivadas. Estas nuevas hojas fortalecerán la planta-respuesta y obligarán a buscar nuevas respuestas en el medio fortaleciendo la planta con raíces más profundas y lejanas. De esta forma la planta-respuesta que se genere será más duradera y difícil de perder.

En oposición a este modelo podríamos decir, siguiendo con nuestra metáfora, que la enseñanza tradicional siembra cuestiones en un medio poco fértil, dando un fruto pobre de raíces superficiales que al no seguir desarrollándose muere rápidamente.

2.1.8. Los Momentos de Estudio.

La noción de momentos de estudio definida en Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 275), nos permite describir las situaciones que ocurren en las aulas cuando los estudiantes abordan el estudio de las praxeologías.

> Las praxeologías matemáticas no surgen de manera instantánea en las instituciones, ni aparecen acabadas de modo definitivo. Más bien, por el contrario, son el resultado de un trabajo complejo y continuado que se realiza durante largo tiempo, en cuya dinámica de funcionamiento existen ciertas relaciones invariables y que, por tanto, es posible modelizar. Aparecen aquí los dos aspectos inseparables del trabajo matemático: por un lado, el proceso de construcción matemática, esto es, el proceso de estudio y, por otro, el propio resultado de esta construcción, es decir, la praxeología matemática. En efecto, no hay organización matemática sin un proceso de estudio que la engendre, pero tampoco hay proceso de estudio sin una organización matemática en construcción. Proceso y producto son dos caras de una misma moneda. Ante una tarea problemática, el matemático usa y construye matemáticas, realizándolo todo a la vez. (Bosch et al., 2006, p. 40).

Elaborar una praxeología matemática supone para cualquier "estudiante", ya sea matemático investigador o alumno de matemáticas, entrar en un proceso de estudio que, como tal, no es un proceso homogéneo sino que está estructurado en diferentes momentos. Cada momento del proceso de estudio hace referencia a una dimensión o aspecto de la actividad de estudio, más que a un periodo cronológico preciso. Por lo tanto, los momentos están distribuidos de una forma dispersa a lo largo del proceso de estudio y no pueden ser vividos " de una vez por todas".

> Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como sea necesario a lo largo del proceso de estudio, e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que si es importante destacar es que cada uno de los seis momentos de estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y existe una dinámica interna global que se

> manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre dichos momentos. Todo proceso de estudio, en cuanto actividad humana, puede ser modelado mediante una praxeología, que será denominada praxeología didáctica. Como toda praxeología, estará compuesta por un conjunto de tareas didácticas problemáticas, técnicas didácticas para abordarlas y tecnologías y teorías didácticas que las expliquen y las justifiquen. (Bosch et al., 2006, p. 41).

Los momentos de estudio se obtienen al estudiar aquellos aspectos que permanecen invariantes en los procesos de construcción matemática y permiten clasificar las distintas fases por las que se avanza y retrocede en el proceso de estudio. En Chevalllard (1999) se describen en detalle los diferentes momentos de estudio. A continuación las expondremos aquí de un modo sintetizado:

- El momento del primer encuentro: Es el momento en el que los estudiantes se encuentran con una obra matemática por primera vez y hace referencia a los objetos matemáticos que constituyen un tipo de problemas. Aunque puede producirse de muchas maneras cuando nos enfrentamos a una tarea o a un tipo de tareas que pertenecen a una obra matemática, por primera vez, estamos descubriendo o volviendo a descubrir la obra matemática a la que pertenencen.

> Se señalará por fin que si, como es evidente, el primer encuentro no determina enteramente la relación al objeto- el cual se construye y modifica a lo largo del proceso de estudio-, sí juega sin embargo un papel importante en la economía del aprendizaje, porque, dado el coste institucional y personal que impone (en el doble plano cognitivo y de deseo), orienta en general fuertemente el desarrollo ulterior de las relaciones institucional y personal del objeto encontrado. (Chevallard, 1999, p. 23).

- El momento exploratorio: Los estudiantes trabajan con los distintos tipos de tareas de la obra matemática objeto de estudio como un medio que debe permitir encontrar una técnica relativa a los problemas del mismo tipo. Se relaciona, por tanto, un determinado tipo de problemas con la construcción de una técnica adecuada para abordarlos que será a partir de ese momento la manera casi rutinaria de abordar los problemas que se presenten de ese tipo.

> Se señalará que, contra cierta visión heroica de la actividad matemática, que la presenta como una serie errática de enfrentamientos singulares con dificultades siempre nuevas, lo que está en el corazón de la actividad matemática es más la elaboración de técnicas que no la resolución de problemas aislados. A la ilusión moderna del alumno-héroe que supera sin necesidad de lucha toda dificultad posible, se opone también la realidad indispensable del alumno-artesano laborioso que, con sus condíscipulos, bajo la conducción reflexiva del profesor, elabora pacientemente sus técnicas matemáticas. (Chevallard, 1999, p. 23).

- El momento tecnológico-teórico: Este momento está relacionado con el resto de momentos ya que el bloque tecnológico sustenta las tareas, técnicas y problemas que se están trabajando y se desarrolla a lo largo de todo el proceso. Desde el primer encuentro los alumnos van relacionando lo que están trabajando con los entornos tecnológico-teóricos que ya tienen elaborados o van estableciendo los primeros pasos de uno nuevo. En este momento el alumno realiza una justificación de la técnica a partir de una tecnología o teoría que la sustenta. Cabe destacar que en muchos enfoques clásicos este momento se utiliza en primer lugar y es el profesor el encargado de presentarlo ya construido a los estudiantes que ven los problemas como simples aplicaciones del bloque tecnológico-teórico que se está abordando.

- El momento del trabajo de la técnica: Una vez los alumnos han adquirido el conocimiento de una determinada técnica se debe mejorar al máximo para que esta sea lo más eficaz y fiable posible. Esto supone trabajar con un conjunto de tareas lo más adecuadas posibles que permitan la practica para mejorar su dominio, este momento se refiere, por tanto, al dominio, puesta punto y reelaboración de algunos aspectos de las técnicas matemáticas encontradas.

- El momento de la institucionalización: Se precisa qué técnica se utiliza, qué elementos forman parte del entorno tecnológico-teórico y cuales no y a qué subtipos de problemas se puede aplicar la técnica y a cuales no. Se refiere, por tanto, a la obra matemática en su conjunto y se trata de fijar aquello que debe permanecer en el tiempo separándolo del proceso de estudio que permitió su construcción.

> Los otros momentos del estudio, en efecto, sólo nos libran una organización matemática en obras, donde el trabajo realizado, que se quiere duradero, se mezcla necesariamente con los “relieves” de una construcción elaborada por ensayos, retoques, paradas y avances. Ahora bien, lo que merece durar lo que quiere ser perenne no se impone nunca por sí mismo y con toda seguridad. Tal ejemplo, cuyo examen ha servido para el proyecto de construcción, revelando unas persepectivas a priori desconocidas, tal estado de tal técnica, que se habrá empleado mucho tiempo para rebasarla, tal Teorema, en sí mismo insuficiente pero que fue el primer resultado demostrado, ¿Se integrarán en la organización matemática definitiva, o bien se descartarán? El momento de la institucionalización es pues, en primer lugar, el que, en la construcción “en bruto” que poco a poco, ha emergido del estudio, van a separar, por un movimiento que compromete el porvenir, lo “matemáticamente necesario”, que será conservado, y lo “matemáticamente contingente” que, pronto, será olvidado. En este submomento de oficialización, una praxeología matemática separada ya de la historia singular que la hizo nacer, hace su entrada en la cultura de la institución que ha albergado su génesis. (Chevallard, 1999, p. 24).

- El momento de la evaluación: Este momento tiene una doble vertiente por un lado se deben establecer los mecanismos para controlar cuál es el grado de asimilación del proceso de estudio e investigación en cada estudiante y por otro se debe evaluar la praxeología creada en el proceso en relación a la institución dónde ha sido estudiada.

> En la práctica, se llega a un momento en el que se debe “hacer balance”: porque este momento de reflexividad donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que vale lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la “respiración” misma de toda actividad humana. […]
>
> […] La operación de evaluación debe ser entendida así en un sentido más amplio: detrás de la evaluación clásica de relaciones personales, es decir, detrás de la evaluación de “las personas”, se perfila la evaluación de la norma misma- de la relación institucional

que sirve de patrón. ¿Cuánto vale, de hecho, la organización matemática que se ha construido e institucionalizado? (Chevallard, 1999, p. 25).

La herramienta de los momentos de estudio desarrollada dentro de la TAD tiene dos usos importantes. Por un lado sirve al docente para organizar las situaciones didácticas más adecuadas para trabajar cada uno de los momentos de estudio al planificar sus sesiones de clase y por otro permite al investigador disponer de una herramienta de observación para analizar los procesos didácticos que ocurren en las instituciones.

2.1.9. El cuestionamiento del mundo frente al monumentalismo.

En Chevallard (2013a) se propone un cambio radical en la pedagogía escolar. Frente al modelo tradicional propone una pedagogía basada en la investigación y el cuestionamiento del mundo. Para explicar este nuevo paradigma consideraremos tres elementos principales: un grupo de estudiantes, al que denominaremos X, un profesor, que denominaremos y, y una obra matemática que se quiere estudiar que denominaremos O. Estos tres elementos forman una tripleta didáctica (X, y, O) que esta sometida a un conjunto de restricciones.

2.1.9.1. El paradigma de la Visita de las Obras y sus Deficiencias.

Chevallard (2013a, p.163) define paradigma didáctico como “un conjunto de reglas que prescriben, aunque sea implícitamente, qué se estudia- qué pueden ser las apuestas didácticas O- y qué formas de estudiarlas puede haber”.

Los paradigmas didácticos, según Chevallard (2013a, pp. 163-164) han evolucionado. En primer lugar nos encontramos el paradigma de la “aclamación y estudio de autoridades y obras maestras” donde se estudiaban las obras completas de grandes autores tal y como habían sido creadas. Dentro de este paradigma, se solían estudiar los Elementos de Euclides. Este paradigma dio paso a la división de estas grandes obras maestras en fragmentos más pequeños que pretendían hacer más accesible esas obras a los estudiantes y que dejaban de estudiar la obra en su conjunto. Este segundo paradigma es el que se denomina “visita a las obras” o “visita de monumentos”. Los fragmentos de las grandes obras, como el Teorema de Pitágoras, son presentados como monumentos con un valor propio, que deben ser admirados y contemplados, sin cuestionarse el origen o la razón de ser que tuvo ese fragmento y sin plantearse si ese fragmento tiene actualmente alguna razón de ser que justifique su estudio.

> Se puede argumentar que esto ha llegado a ser así porque el paradigma de la visita de monumentos tiende a dotar de poco sentido a las obras así visitadas- "¿Por qué aparece esto aquí?","¿Cuál es su utilidad?"- Siguen siendo preguntas sin respuesta general. El lector interesado puede querer comprobar cómo esto se aplica a muchas entidades matemáticas. Por ejemplo, ¿para qué sirve la noción de ángulo reflejo? La misma pregunta se puede plantear sobre los ángulos en general, y también acerca de las rectas paralelas, las rectas secantes, las semirrectas, los segmentos, etc. Por supuesto lo mismo ocurre con la reducción de fracciones o el desarrollo de los polinomios, con la noción de número decimal, y muchas otras. ¿En qué situaciones una entidad matemática de ese tipo puede resultar útil, sino completamente inevitable, y cómo? Debido a estas preguntas silenciadas- cuando se visitan monumentos no hay que plantear preguntas como "¿Para qué?" o "¿Y qué?"- los estudiantes se reducen a ser meros espectadores, incluso cuando los educadores les instan con pasión a "disfrutar" del puro espectáculo de las obras matemáticas. (Chevallard, 2013a, p. 164).

El paradigma monumentalista descrito anteriormente ha estado y está vigente en las instituciones educativas y se organiza en torno al currículo escolar. El currículo educativo se organiza en torno a unos bloques de contenido que fragmentan las diferentes áreas que componen la disciplina de matemáticas en una serie de contenidos a estudiar en las instituciones educativas.

> Las consecuencias de esta situación histórica son muchas. Antes que nada, voy a mencionar una a la que ya me he referido: la evolución irresistible del currículo escolar de matemáticas hacia una forma de "monumentalismo" epistemológico, en el que el conocimiento viene organizado en unos trozos y pedazos santificados por la tradición, cuya supuesta "belleza" ha sido realzada por la pátina del tiempo y que los estudiantes tienen que visitar, reverenciar, disfrutar, divertirse con él e incluso "amar". Todo esto, por su-

puesto, no es más que un sueño, por lo menos para la gran masa de estudiantes- no para los pocos afortunados que necesitan muy poca atención. (Chevallard, 2013a, p. 165).

El principal problema de este paradigma, siguiendo la argumentación de Chevallard (2013a) tiene que ver con la elección de los "monumentos" que se eligen para ser estudiados. Generalmente esta selección se realiza a partir de la tradición y de reformas frenéticas que van ocurriendo a lo largo del tiempo y no suele estar avalada por una base experimental o una experiencia amplia o relevante. Esta situación lleva a que, en muchas ocasiones, sea difícil encontrar la razón de ser de estos monumentos.

2.1.9.2. El cuestionamiento del mundo como nuevo paradigma didáctico.

Para definir el paradigma didáctico que se propone desde la TAD, vamos a sintetizar en este apartado las ideas principales sobre las que se construye y que aparecen en Chevallard (2013a):

1. La educación es un proceso que se desarrolla durante toda la vida, por tanto la componente X de la terna didáctica (X,Y,O) puede ser un estudiante de cualquier edad.
2. Para medir el esfuerzo didáctico realizado por la Sociedad no importa únicamente lo que la gente sabe, es igualmente importante lo que la gente puede aprender y cómo puede hacerlo.
3. Las Obras matemáticas a estudiar, O, no deben tener una respuesta evidente y deben surgir a partir de cuestiones, Q, que los estudiantes, x, deben estudiar con o sin ayuda de algunos profesores, Y.
4. Los estudiantes deben tener una actitud receptiva hacia los problemas abiertos y sin resolver. Se debe promover la actitud científica de investigación en todos los ciudadanos y en todos los ámbitos de actividad.
5. La escuela y la universidad no deben centrarse en dar respuestas cerradas y preconstruidas a los estudiantes, deben centrarse en fomentar la búsqueda de respuestas a preguntas que aún no sabemos contestar. Para poder llevar a cabo esta búsqueda, el estudiante debe estudiar las respuestas disponibles y estudiar si son o no válidas. Se trata, por tanto, de fomentar la capacidad de evaluar qué respuestas,

de las encontradas, son las más relevantes.

6. Las obras matemáticas, O, son herramientas que permiten estudiar las diferentes respuestas encontradas y seleccionar entre todas ellas la que se considere más adecuada. La indagación de X sobre Q es lo que da comienzo a un recorrido de estudio e investigación.
7. Los contenidos aprendidos, en este contexto, no son planificados de antemano y dependen de las cuestiones, Q, que se planteen y del REI que se lleve a cabo para buscar respuestas y obras matemáticas que permitan construir la respuesta deseada.
8. La escuela o Skhole supera las instituciones educativas actuales, es ubicua e incorpora la formación formal, informal y no formal. Del mismo modo también supera la organización basada en la edad.

> Pero el camino seguido en una investigación dada, independientemente de sus factores determinantes, tiene consecuencias cruciales en el escenario didáctico descrito anteriormente: si rara vez se recurre a una obra O en todos los seminarios y talleres del país, entonces esta obra O desaparecerá a la larga del currículum nacional. Para ser francos, esto puede provocar la desaparición de partes de las disciplinas tradicionales de la escuela, porque el lugar ocupado por una disciplina en el nuevo currículum dependerá de su eficacia en la provisión de herramientas para indagar sobre las cuestiones planteadas en el currículum; ya no dependerá de ninguna jerarquía de disciplinas establecida antigua o recientemente considerada como el incuestionable legado del pasado. Las disciplinas tradicionalmente florecientes deberían entonces preocuparse por su futuro en la escuela: ¿continuarán teniendo éxito o languidecerán pronto? La pregunta se plantea para todas las disciplinas y en particular para las matemáticas. (Chevallard, 2013a, p. 178).

Como puede apreciarse en esta última cita, el paradigma de cuestionamiento del mundo que se propone desde la TAD, supone una propuesta de cambio radical que pone en cuestión a todas las disciplinas y a todas sus áreas. Este trabajo pretende estudiar el papel de la Geometría elemental y la forma de abordar su estudio e investigación dentro de este nuevo paradigma.

2.1.10. Actitudes de los estudiantes en el paradigma de cuestionamiento del mundo.

Para cerrar este apartado sobre la TAD y sus aportaciones vamos a centrarnos en las actitudes que deben tener los estudiantes dentro del paradigma de cuestionamiento del mundo propuesto. Para destacar los aspectos más importantes que deben cambiar vamos a basarnos en el trabajo de Donvito, Otero y Sureda (2014) y en el trabajo de Chevallard (2013a). Así, las actitudes de los estudiantes en este nuevo paradigma son las siguientes:

1. Actitud de ser herbartiano: Los estudiantes deben tener una actitud abierta hacia el estudio de preguntas que no se saben responder de forma inmediata. Tal y como se indicó anteriormente el sistema herbartiano propuesto por la TAD requiere que los estudiantes se enfrenten a cuestiones a estudiar que requieren ir dando respuestas parciales y descubriendo un conjunto de obras hasta dar con la respuesta deseada y válida dentro de la institución. La actitud de hacerse preguntas y de estudiar prolongadamente para obtener respuestas es clave en este cambio de enfoque.
2. Procognitivo: A diferencia de lo que ocurre con los estudiantes en el paradigma monumentalista, las respuestas no deben buscarlas únicamente en los conocimientos ya conocidos y deben buscarse aquellas respuestas que sean necesarias incluso aunque aún no se disponga de ellas.
3. Actitud exotérica frente a actitud esotérica: Dada la naturaleza ambigua de estos términos y las posibles confusiones que pueden producir vamos a definir en primer lugar los términos esotérico y exotérico en el sentido que les otorga Chevallard (2013a, p.175):

> El personaje implícitamente dibujado aquí es lo que llamaremos un esotérico (usando así el adjetivo como sustantivo) alguien al que se le supone en posesión de todo el conocimiento necesario (la idea que la mayoría de la gente tiene de “un historiador”, “un biólogo”, “un matemático”, “un físico”, etc., se relaciona normalmente con esta fantasía. Por el contrario un exotérico tiene que estudiar y aprender indefinidamente, y nunca llegará al estatus escurridizo del esotérico. De hecho, todos los verdaderos estudiosos son exotéricos y deberían seguir siéndolo para mantenerse sabios.

En el paradigma de cuestionamiento del mundo propuesto desde la TAD los estudiantes deben estudiar para saber y adquirir conocimientos pero también para revisar lo que ya se da por sabido y se cree saber.

4. Actitud de problematización: El cuestionamiento del mundo se produce cuando se generan nuevos problemas y cuestiones de investigación. Se trata por tanto de fomentar la actitud de formular preguntas.
5. Enciclopedista ordinario: Los estudiantes deben buscar una formación relativamente universal que les permita aprender y buscar sobre temas diversos. Se busca por tanto estar abierto a nuevos conocimientos y no necesitar acumular muchos conocimientos sobre un tema para aventurarse a estudiarlo.

> En el nuevo paradigma, el ciudadano debe convertirse en herbartiano, procognitivo y exotérico. ¿Cómo podemos promover esta nueva ciudadanía? Más allá de estar poseidos por la pasión epistemológica que se necesita para ir del camino de la ignorancia hacia el del conocimiento adecuado, una condición crucial es, sin duda, el tiempo asignado al estudio y a la indagación en la vida de un adulto. Bastante a menudo, parece que este tiempo tiende a cero con el paso de los años. En este sentido, sugiero que repitamos una y otra vez el gran truco de los griegos- el de transmutar el tiempo de ocio, del que algunos de nuestros contemporáneos parecen gozar en abundancia, en tiempo de estudio e investigación, según la auténtica tradición de la skhole. Esta búsqueda pertenece a lo que Freud llamó una vez Kulturarbeit, el "trabajo civilizador"- un cambio radical que está aun por llegar y que es una condición sine qua non para la emergencia del nuevo paradigma didáctico. (Chevallard 2013a, p.175).

Como se ha podido ver a lo largo de este capítulo la TAD es una teoría en continuo desarrollo que suministra al investigador un cuerpo teórico y un conjunto de herramientas para poder emanciparse de las instituciones escolares, cuestionarse las condiciones y restricciones que afectan a la difusión del conocimiento en cualquier lugar donde se produzca una difusión de conocimientos y estudiar desde esa emancipación y desde el conocimiento de las restricciones encontradas las situaciones sociales en las que un grupo, X, estudia una cuestión, Q, con la ayuda de otras personas, Y, para obtener una respuesta válida y deseada en el seno de la institución dónde se produce la difusión de conocimientos.

2.2. Construcción del Modelo Epistemológico de Referencia sobre la Geometría Elemental.

Para poder estudiar un ámbito matemático dentro de la TAD, es necesario describir y dar una interpretación de lo que, como investigadores, vamos a considerar dentro de ese ámbito matemático. La construcción de ese MER, tal y como se vio en el capítulo anterior, es el primer paso necesario para construir nuestro problema de investigación.

Para construir nuestro MER sobre la Geometría elemental, hemos de responder a la pregunta:

¿Qué entendemos por Geometría elemental?

La respuesta a esta pregunta procede de un conjunto de sistemas de referencia relativos que vamos a detallar en este capítulo y que nos van a permitir concretar, de forma precisa, la dimensión epistemológica de este trabajo de investigación.

> Con base en el MER, el didacta puede deconstruir y reconstruir las praxeologías cuya difusión intrainstitucional e interinstitucional pretende analizar.
>
> La Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985/1991, 1997) nos enseña que *no existe un sistema de referencia privilegiado* a partir del cual se observe, analice y juzgue el mundo de los saberes. Pero la ausencia de un *sistema de referencia absoluto* no hace menos imprescindible —de forma bastante análoga a lo que pasa en la mecánica— la utilización de *sistemas de referencia relativos*, adecuados a cada problema y situación (Bosch y Gascón, 2005). Queremos insistir una vez más en que los modelos epistemológicos que construye la Didáctica de las Matemáticas deben tomarse como *hipótesis de trabajo* y, como tales, deben ser constantemente contrastados y revisados. (Gascón, 2011, pp. 208-209).

Vamos a proceder, en primer lugar, a describir el conjunto de posiciones ontológicas y epistemológicas generales que aparecen en la creación de las Matemáticas, y gracias a esa visión de conjunto estableceremos con exactitud la posición de este trabajo.

En la segunda parte de este apartado, vamos a analizar el conjunto de sistemas de referencia relativos, que nos han servido para aclarar nuestra descripción e interpretación de la Geometría elemental del primer ciclo de la Educación Secundaria. Cada uno de los sistemas de referencia relativos que vamos a tener en cuenta ha moldeado una parte de nuestra forma de entender el ámbito Geométrico elemental que estamos estudiando. Podemos considerar, por tanto, que esos sistemas, junto al posicionamiento ontológico y epistemológico anterior, forman nuestra visión epistemológica.

En la tercera parte de este apartado, vamos a definir el conjunto de elementos que componen la Geometría elemental en este trabajo utilizando varios niveles de concreción. El concepto de praxeología definido por Chevallard (2007) va a estar implícito en los elementos definidos en cada nivel de concreción de nuestro MER y gracias a ello vamos a poder estudiar las diferentes praxeologías puntuales, locales o regionales que vayan apareciendo como resultado de nuestra investigación.

Por último, antes de abordar la construcción de nuestro MER, es necesario aclarar que se trata de una hipótesis de trabajo que se ha ido construyendo de forma paralela a la investigación. A medida que hemos ido avanzando en esa construcción, el problema docente inicial se ha ido definiendo con mayor claridad, lo que ha permitido a su vez enriquecer el MER que se estaba construyendo. La construcción del MER se ha realizado, por tanto, de forma paralela a la definición del problema de investigación. Por ese motivo, hay que entender que lo expuesto aquí es el resultado de un proceso de retroalimentación mutua que abarca toda la investigación.

Por razones expositivas en este trabajo detallaremos el MER en este capítulo.

2.2.1. Posicionamiento Ontológico y Epistemológico de las Matemáticas.

Parece lógico empezar esta reflexión teórica, sobre la ontología y la epistemología de las Matemáticas, desde la Filosofía. Los trabajos de D'Amore (2005), Gascón (2001) o Cañón (1993 y 2006) dan cuenta de lo fértil que es este campo de estudio y las enormes consecuencias que tiene en el quehacer diario del docente. Es, por tanto, obligado revisar las aportaciones de la Filosofía sobre las Matemáticas y posicionarse dentro de ellas, antes de continuar.

2.2.1.1. Las creencias ontológicas.

A lo largo de la Historia de la Filosofía, muchos son los autores que se han posicionado sobre la naturaleza de los entes matemáticos. Este único punto merece un trabajo en sí mismo. En nuestro caso, sintetizaremos las posiciones en dos, basándonos en Cañón (1993):

- Las proposiciones Matemáticas son verdades necesarias y universales, cuyo conocimiento es un conocimiento cierto. Se trata, por tanto, de descubrir esa verdad universal a partir de nuestra razón. Han sido representantes de esta corriente Platón, Leibniz, Frege, Cantor o Gödel.
- No hay certeza en el conocimiento matemático, y se puede poner en cuestión la posibilidad de hablar de verdades necesarias y universales. Las Matemáticas, por tanto, se crean por el hombre a partir de la experiencia. Han sido representantes de esta corriente Mill, Locke, Hobbes, Hume o Quine.

En nuestro posicionamiento coincidimos con Cañón (1993), quien busca el camino intermedio entre estas dos posturas y así queda reflejado en la figura 8.

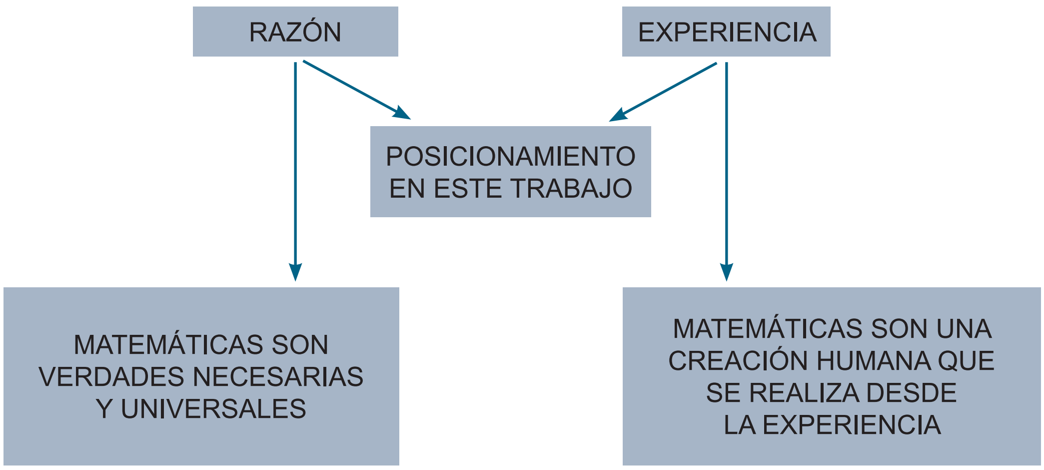


Figura 8. Posicionamiento ontológico. Elaboración propia.

Las Matemáticas son una creación del hombre para intentar comprender la realidad que le rodea. Por ejemplo, la necesidad de predecir el tiempo, las estaciones, llevar una contabilidad, distribuir las tierras o construir edificios ha llevado al hombre a crear un lenguaje, que se ha ido perfeccionado con el tiempo. Las Matemáticas nacen para trabajar la cantidad y la forma. Sin embargo, esta creación permite al hombre liberarse de lo empírico y comenzar a trabajar desde la razón, descubriendo de esa forma verdades y relaciones que no eran accesibles desde la experiencia inmediata. Se produce entonces, un desarrollo independiente, que se va retroalimentando desde la experiencia y que adelanta y anticipa lo que luego se va refutando mediante la teoría y la práctica.

Las Matemáticas, son también, un edificio lógico que busca ser consistente consigo mismo y que, por tanto, permite unificar descubrimientos y resultados de forma acumulativa. Integra los nuevos descubrimientos en los ya existentes y tiene como meta crear nuevas formas de expresar las ideas, de la manera más clara y completa posible.

Situándonos en esta posición intermedia, podemos dar una mejor respuesta a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría elemental. Por un lado, asumimos su origen empírico y la riqueza que de ello se deriva para su enseñanza basada en la experiencia y en lo manipulativo. Por otro, no negamos la capacidad de abstracción que representan las ideas geométricas de plano, recta o punto; y reconocemos en las demostraciones lógico-deductivas uno de los instrumentos más bellos e instructivos de la razón humana. Desde este equilibrio, podemos estudiar los distintos enfoques epistemológicos y comprender, de forma más completa, las virtudes y los defectos de los distintos planteamientos que veremos a continuación.

2.2.1.2. La epistemología de las Matemáticas.

Para realizar esta investigación estudiaremos, en primer lugar, la propuesta sobre epistemología y prácticas docentes que realiza Gascón (2001). En este trabajo se analiza el desarrollo histórico de las diferentes posiciones epistemológicas sobre las matemáticas partiendo de las posiciones Euclidianistas y cuasi-experimentales propuestas por Lakatos. A lo largo del trabajo se amplían esas posiciones con la posición constructivista y la posición antropológica. En general esas 4 posiciones se pueden resumir del siguiente modo:

1. Euclidianismo: Todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas), que constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos). A través del método lógico-deductivo, se van realizando demostraciones a partir de los axiomas que dan lugar a Teoremas, que sirven a su vez de base para la elaboración de nuevas deducciones.
2. Modelos Cuasi-empíricos: Se debe partir siempre de un problema y elaborar una teoría explicativa del mismo. Lo esencial son aquí los procedimientos: conjeturar, probar tentativamente, contrastar, refutar, buscar contra ejemplos, modificar un poco el problema original, cambiar las definiciones, etc.
3. Constructivismo: Para aprender y crear Matemáticas, hay que utilizar los hechos que proporciona la Historia de la Ciencia, junto a los hechos conocidos del desarrollo psicogenético. Los hechos científicos proporcionan el desarrollo factual y la psicogénesis los instrumentos y mecanismos del desarrollo científico.
4. Modelo antropológico: Para estudiar Matemáticas es necesario conocer cuáles son las leyes que rigen la producción, la comunicación y la utilización del saber matemático en el seno de una institución, así como su transposición entre las diferentes instituciones.

A los 4 posicionamientos anteriores, propuestos por Gascón (2001), en este trabajo vamos a incorporar un quinto posicionamiento epistemológico al que denominaremos Modelo logístico.

5. Modelo logístico: Para estudiar Matemáticas es necesario dominar las técnicas de computación y aplicar sus resultados a los problemas derivados del comercio, la construcción, la cocina,…

Como puede verse, existen diferentes modos de entender el quehacer matemático que condicionan, en gran medida, la forma de investigar en Matemáticas. Desde nuestro punto de vista, todos ellos son válidos y han permitido avanzar en el conocimiento de esta disciplina. En nuestro caso, la corriente epistemológica sobre las matemáticas que se utilizará en este trabajo es el posicionamiento antropológico. Para comprender la situación actual de la enseñanza aprendizaje de la Geometría, tenemos que realizar el estudio de la génesis y el desarrollo de los conocimientos geométricos y la forma de comunicarlos, utilizarlos y enseñarlos a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta las instituciones y la sociedad donde ese estudio se realizó. Una vez comprendida la situación actual, y visibilizadas las restricciones que sobre ella operan, vamos a utilizar este posicionamiento epistemológico antropológico para realizar nuestra respuesta.

Al elegir esta vía, buscaremos en la evolución histórica, social y legislativa las claves para entender la situación actual y, de la misma manera, buscaremos en la sociedad actual y en sus necesidades, las claves para justificar el estudio y la forma de llevarlo a cabo, que debería plantearse como alternativa.

2.2.2. Sistemas de referencia relativos del pensamiento geométrico.

El MER que se plantea en este trabajo se apoya firmemente en tres pilares de la investigación sobre el pensamiento geométrico: la evolución histórica del saber sabio geométrico, el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría y las aportaciones de Guy Brousseau sobre las propiedades educativas de la geometría elemental y los distintos niveles del espacio.

La evolución histórica del saber sabio nos sitúa en el conocimiento de la disciplina y nos permite estudiar los diferentes posicionamientos epistemológicos sobre el ámbito geométrico. La historia señala muchas de las pistas sobre cómo aprendemos y, aunque su camino no es equiparable al que recorre un estudiante, su conocimiento forma parte del equipamiento praxeológico del docente para el quehacer en el aula.

El trabajo realizado por Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldorf, ha venido revindicándose en muchos países desde los años 70. En España el interés por este modelo de aprendizaje geométrico cobra importancia a partir de los años 90.

> El modelo de razonamiento de Van Hiele (1986) es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la Geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes. (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 56).

El modelo Van Hiele pretende responder a dos ideas fundamentales que estudiaremos a continuación: cómo se produce la evolución en el razonamiento geométrico y cómo debe actuar un profesor para que sus alumnos lleven a cabo esa evolución. Los trabajos con el modelo de Van Hiele son una constante internacional y siguen produciendo mucha investigación dentro del campo de la Geometría, por lo que es muy importante conocer y tener en cuenta sus posibles aplicaciones a nuestro MER.

> El modelo de van Hiele aplicado a la didáctica de la Geometría en particular, y de las matemáticas en general, ha ido cobrando impulso y fuerza desde principios de la década de los 90 en todo el mundo, tanto en países desarrollados como de economía emergente, de forma que es un referente ineludible cuando hablamos de currículo de Geometría, y de los resultados alcanzados por los sistemas educativos en las etapas generales de la enseñanza. (López de Silanes, 2012, p.9).

Por último, el trabajo realizado por Guy Brousseau dentro de la teoría fundamental y sus aportaciones sobre la importancia de los distintos niveles del espacio que se está estudiando en Geometría van a ser especialmente relevantes en este MER al entender que son las necesidades de actuar en los distintos niveles del espacio las que justifican, para el alumno, la necesidad de estudiar un nuevo concepto.

2.2.3. La evolución del saber sabio.

A lo largo de la historia, los matemáticos se han enfrentado a problemas que eran de importancia dentro de un contexto determinado. Para resolver esos problemas, los matemáticos ponen en juego herramientas personales y contextuales que les permiten generar una respuesta. Una vez obtenidas las respuestas, se despersonalizan y se descontextualizan y pasan a formar parte del saber sabio aceptado. El contexto y el trabajo personal quedan ocultos para el docente y el estudiante, y en ocasiones información importante para entender cómo puede abordarse un problema no es tenida en cuenta. La investigación de la evolución del saber sabio, permite al investigador tener en cuenta los procesos personales y contextuales que dieron origen a las distintas respuestas aceptadas y pueden servir de ayuda a la hora de establecer el MER.

> La matemática tiene una historia milenaria y apasionante, constituye toda una aventura del pensamiento observar desde nuestra perspectiva los rodeos, los callejones sin salida

aparente, los túneles oscuros, las controversias de la evolución del pensamiento matemático hasta nuestros días. (Guzmán, 1983, p. 47).

Para entender cómo ha sido la evolución del saber sabio geométrico, y entender las dificultades personales y contextuales que tuvieron que superarse, vamos a remontarnos a sus orígenes y vamos a buscar en su desarrollo histórico algunos de los elementos, que vamos a tener en cuenta en la construccción de este MER.

2.2.3.1. La protogeometría.

El origen de esa protogeometría estaría ubicado más allá de los primeros textos escritos. Por ese motivo, solo podemos especular a partir de algún resto cerámico o talla primitiva. En consecuencia, no está claro qué llevó al hombre a iniciarse en el estudio de la forma, pero seguramente se trató de la confluencia de la necesidad de resolver tareas de origen práctico, como la elaboración de herramientas para cazar, la construcción de estructuras sencillas o la agrimensura, junto a otras de carácter estético y de orden.

2.2.3.2. Los primeros documentos.

Las civilizaciones fluviales alrededor del mundo empezaron a construir las primeras nociones sobre la forma. De todas estas civilizaciones, los documentos más antiguos de los que disponemos con información matemática son las tablillas babilonias descifradas a mediados de siglo XX y los papiros egipcios descifrados en el siglo XIX.

El documento más revelador de la matemática egipcia es el papiro de Ahmes o de Rhind, datado en el año 1650 a.C. y en el que el propio autor informa al lector de que lo allí recogido proviene de otro material ya realizado entre el año 2000 a.C. y el año 1800 a.C. En ese papiro, de carácter didáctico, se recogen 84 problemas que dan una muestra de lo que sabían realizar los egipcios. En concreto, a partir del problema 51 aparecen cuestiones geométricas. En la primera tarea geométrica que consideramos se pide calcular el área de un triángulo isósceles, y la técnica que se sugiere para su resolución, es la de partir el triángulo por la mitad de su base y rotarlo para formar un rectángulo de lado la mitad de la base y de alto la altura del triángulo inicial (Fig. 9). La tarea 52, del mismo papiro, aplica una técnica similar para un trapecio isósceles. Tenemos aquí la primera prueba escrita de una justificación tecnológica, de una demostración informal geométrica.

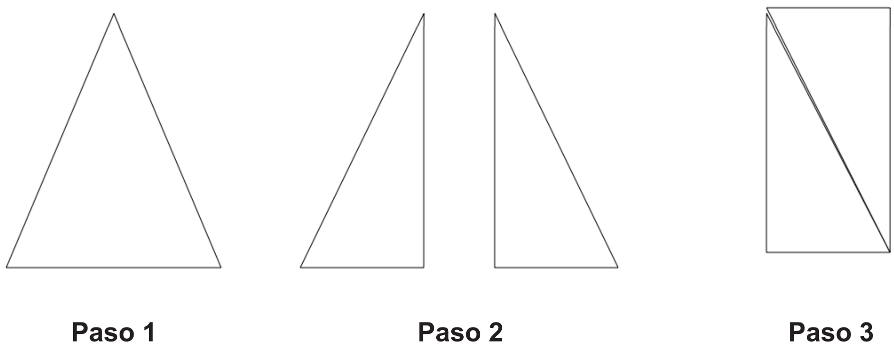


Figura 9. Demostración tecnológica del área de un triángulo. Elaboración propia.

En el papiro aparece también una primera aproximación del número π como 3,16 y la técnica para hallar la longitud de una circunferencia, según la tecnología que expresa que la razón entre el área de un círculo y la longitud de su circunferencia es la misma que la razón entre el área del cuadrado circunscrito y su perímetro (Fig. 10)[1].

Figura 10. Relación entre área y perímetro en círculos y cuadrados. Elaboración propia.

Una última aportación que mostramos del papiro de Ahmes la tenemos en la tarea 56, donde se establece una relación trigonométrica para mantener el ángulo en las cuatro paredes de una pirámide. El problema dice así:

---

1 $\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{2r\,2r}{4\,2r}$

¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado en la base? El seqt es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. En mediciones verticales se utilizaba como unidad de medida el codo y en horizontales la mano o palmo, que equivalía a 1/7 del codo.

La resolución presentada por Ahmes es:

- Calcula ½ de 360 que da 180.
- Multiplica 250 hasta obtener 180, que da ½ + 1/5 + 1/50.
- Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora por ½ + 1/5 + 1/50 que da 5 + 1/25. Luego el seqt es 5 + 1/25 palmos por codo.

(http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm)

En la figura 11 vemos una representación de este problema y podemos comprobar que el seqt equivale a la cotangente del ángulo alfa y que por tanto permite calcular cuánto debe medir la base en relación a la altura para mantener la pendiente de las caras laterales.

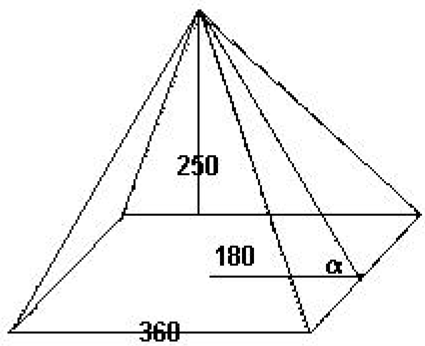


Figura 11. Representación del problema 56 del papiro de Rhind.. Recuperado de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Aunque el papiro de Ahmes es la mejor fuente sobre la Geometría egipcia, cabe destacar la presencia en otros documentos, como el papiro de Moscú, de tareas relacionadas con el cálculo de volúmenes de troncos de pirámides datados alrededor del año 1890 a.C. En estos documentos, aunque no aparece ninguna fórmula, la forma de proceder indica que los egipcios conocían las fórmulas para obtener el volumen de una pirámide y de un tronco de la misma, obtenidas seguramente de forma experimental.

La primera explicación del origen de la Geometría egipcia la encontramos en Herodoto de la siguiente forma:

> Sesostris dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes. Si el rio se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre… el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar, por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida. A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia. (Boyer, 1986, p. 29).

La otra gran fuente de información, sobre los orígenes de la Geometría, la encontramos en las tablillas cuneiformes de Mesopotamia. En la cultura mesopotámica se estudió la obra matemática en torno a un sistema de numeración sexagesimal y posicional y, además, se desarrolló un álgebra que permitía la resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, cuyas posibles aplicaciones prácticas son muy difíciles de considerar.

En Geometría, encontramos un notorio ejemplo de prototrigonometría en la tablilla Plimton 322. En esta tablilla incompleta se encuentra una curiosa relación de números en cuatro columnas numeradas del 1 al 15. Lo que inicialmente parece una simple lista comercial se revela tras su análisis y transformación al sistema decimal, en una tablilla ordenada con 15 ternas pitagóricas, que probablemente se utilizaran para medir áreas de cuadrados y lados de triángulos rectángulos.

Estos descubrimientos parecen confirmar que, en Mesopotamia, se dieron los primeros usos de las Matemáticas sin relaciones directas con la realidad, como un mero ejercicio intelectual.

En otras parcelas, aparecen relaciones entre el cuadrado de los lados y las áreas de polígonos regulares, y parece haber indicios claros de que se conocía el concepto de semejanza por su presencia en algunas tablillas.

Existe constancia de que, los babilonios, conocían el Teorema de Pitágoras y lo utilizaban en numerosas tareas: la aproximación que se hace a la diagonal de un cuadrado difiere en menos de una millonésima del valor real, y se tiene constancia de que utilizaban este valor para obtener la diagonal de cualquier cuadrado a partir de su lado.

Por último, aparecen datos que permiten afirmar que, en Mesopotamia, se conocía que la apotema de un polígono inscrito en una circunferencia se podía obtener a partir de la triangulación del polígono en triángulos isósceles a partir del centro de la circunferencia circunscrita. En este caso la altura del triángulo isósceles coincide con la apotema del polígono inscrito, el lado igual con el radio de la circunferencia circunscrita y el lado desigual con la cuerda.

Por otra parte se conocía que el ángulo inscrito en una semicircunferencia era de noventa grados (Fig.12), descubrimiento estudiado como Teorema de Tales que vivió 1000 años más tarde.

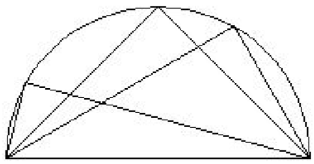


Figura 12. Ángulos inscritos en una semicircunferencia. Elaboración propia.

Como conclusión, podemos decir que las tareas geométricas en el Antiguo Egipto tenían un origen puramente práctico y que el carácter de la Geometría era experiencial. En la civilización mesopotámica este carácter comenzó a virar hacia tareas con origen matemático.

2.2.3.3. La primera Geometría griega.

Hacia el año 700 a.C. parece claro que el avance de la Geometría se desplaza desde Mesopotamia hasta Grecia. No hay evidencia de que los griegos conocieran todos los avances obtenidos por egipcios y babilónicos, aunque parece bastante plausible que así fuera.

Los primeros nombres que aparecen son los de Tales de Mileto y Pitágoras, ambos alrededor del siglo VI a.C. A los dos se les atribuyen muchos de los descubrimientos iniciales de los griegos, pero hay que decir que no existen documentos que lo avalen y que se acepta así por la tradición oral y por las afirmaciones de las primeras exposiciones griegas de la Historia de las Matemáticas.

Tales es el primer hombre de la Historia al que se le atribuyen descubrimientos matemáticos concretos[2]. Aunque muchos de los descubrimientos que se le atribuyen, como el men-

2 En la obra de Carl B. Boyer Historia de la matemática (Boyer, 1986) se pueden leer muchas de las leyendas atribuidas a Tales de Mileto, como la medición de la altura de las pirámides mediante la medición de la sombra de un palo o la predicción de un eclipse solar en el 585 A.C., fecha que se utiliza para estimar la duración de su vida.

cionado anteriormente de los ángulos inscritos en una semicircunferencia, eran ya conocidos, parece que lo que sí puede atribuírsele es el inicio de una organización racional de los conocimientos geométricos de la época.

En concreto, la tradición le atribuye 5 Teoremas:

1. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto. (ver Fig.12)
2. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por su diámetro.
3. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.
4. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
5. Si dos triángulos son tales que dos de sus ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

La opinión antigua es unánime al considerar a Tales como un hombre brillante, discípulo de egipcios y caldeos, y como el primer filósofo de los grandes sabios griegos.

La Geometría estudiada, hasta este punto, estaba muy influida por la aplicación a problemas específicos. Tras las aportaciones de Tales quedaba abierta la vía para el estudio de la Matemática[3] como puro amor por la sabiduría.

Pitágoras es otra figura clave a la hora de entender los orígenes de la Geometría. Los datos sobre su vida no son nada claros, y la secta pitagórica posterior no contribuye a tener datos fiables de su figura. Lo que sí parece claro es que viajó a Egipto, Babilonia y probablemente a la India. Aunque se sabe que se escribieron varias biografías de Pitágoras, todas ellas se han perdido y, debido al carácter comunal de la secta que creó, todos los descubrimientos solían atribuirse al fundador. Por tanto hablaremos aquí de los descubrimientos de los pitagóricos.

En relación al tema que nos atañe, los pitagóricos demostraron el Teorema de Pitágoras, aunque como ya se ha dicho era un método ya utilizado en Mesopotamia. También se sabe que descubrieron al menos 3 de los 5 poliedros regulares: el tetraedro, el cubo y el dodecaedro[4].

Una de las construcciones pitagóricas más conocidas es el pentagrama estrellado o

3 Se atribuye a Pitágoras la invención de las palabras filosofía, o amor por la sabiduría, y matemática, o aquello que se puede comprender.

4 Existe el dodecaedro de piedra etrusco anterior al 500 A.C. encontrado cerca de la región donde se instalaron los pitagóricos.

estrella pitagórica. Se trata de un pentágono regular del que se trazan las diagonales de forma que estas acaban formando otro pentágono regular más pequeño y una estrella de 5 puntas (ver Fig. 13).

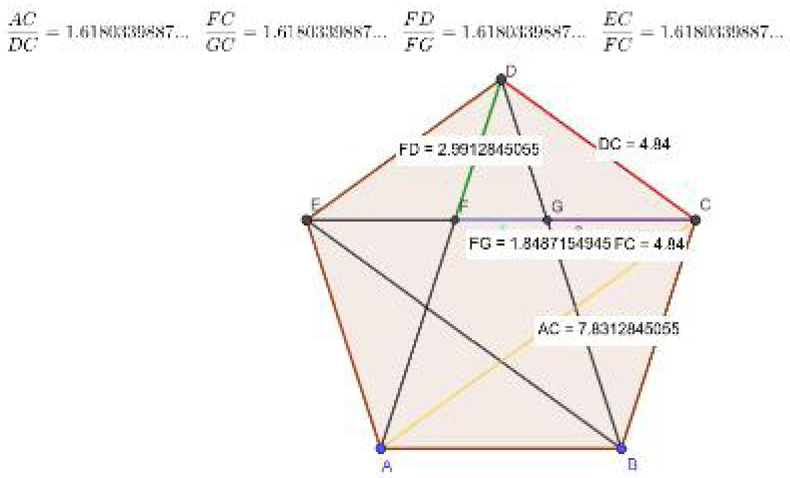


Figura 13. Estrella pitagórica. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/UEzqCxye

Lo interesante de este pentágono y de la estrella que se forma dentro de él es que aparecen diversas relaciones iguales entre los diferentes elementos del pentágono y los segmentos y subsegmentos que constituyen la estrella pitagórica como se aprecia en la figura 13. Esta relación es también conocida como proporción áurea, divina proporción o segmento en media y extrema razón. Su importancia es bien conocida en el arte y parece bastante probable que fuese descubierta por los pitagóricos.

El *siglo V a.C.* dio continuidad a la obra de Pitágoras y Tales. Aunque no se conservan documentos originales, se conoce el nombre de varios matemáticos de la época y algunas de sus aportaciones.

> Este periodo es la época heroica de las matemáticas puesto que rara vez antes ni después el hombre se ha enfrentado con problemas matemáticos de una importancia tan fundamental con tan pocas herramientas. (Boyer, 1986, p. 95).

De esta época son Arquitas de Tarento, Hipaso de Metaponto, Demócrito, Hipias de Ellis, Hipócrates de Chios[5], Anáxagoras de Clazomene y Zenón de Elea. Estos 7 matemáticos forjaron los cambios necesarios para el impulso de la Matemática posterior.

En cuanto a sus aportaciones geométricas, cabe destacar los tres problemas clásicos de la Antigüedad:

1. La cuadratura del círculo: Hallar utilizando solamente regla y compás un cuadrado que posea un área igual a la de un círculo dado.
2. La duplicación del cubo: Hallar utilizando solamente regla y compás un cubo tal que su volumen sea el doble que otro cubo del que se conoce su lado.
3. La trisección del ángulo: Hallar utilizando únicamente regla y compás un ángulo cuyo valor sea un tercio del valor de un ángulo dado.

Estos tres problemas son irresolubles con regla y compás, pero fueron el motor de reflexión y búsqueda de conocimiento de los mejores matemáticos durante más de 2200 años.

Además de estos problemas clásicos, en esta época, probablemente *Hipaso*[6] descubrió los inconmensurables, seguramente a raíz de la construcción de los sucesivos pentágonos inscritos en la estrella pitagórica (ver Fig. 13), o a la relación también infinita entre la relación de la diagonal y el lado de un cuadrado. Como ya se ha dicho, la relación entre diagonal y lado de un cuadrado era ya conocida en Mesopotamia, pero es en esta época cuando se demuestra que esa relación es inconmensurable[7].

La última gran aportación de este grupo fueron las paradojas de Zenón que, junto al descubrimiento de los inconmensurables, supuso el abandono de representar los números como piedrecillas y pasar a verlos como segmentos. El mundo de las magnitudes continuas era una cosa separada del número y tenía que ser tratada mediante métodos geométricos.

La Geometría pasó a considerarse como la ley que regía el mundo, lo que preparó algunas de las bases para el desarrollo posterior del método axiomático-deductivo en los elementos de Euclides.

---

5 No debe confundirse con el más fámoso y médico Hipócrates de Cos.

6 Una de las leyendas más conocidas sobre su vida, indica que fue asesinado por este descubrimiento por sus compañeros pitagóricos.

7 Para ampliar este tema, se puede consultar la demostración por reducción al absurdo qeu hace Aristóteles y que se basa en aceptar que la diagonal y el lado son conmensurables y que su relación se expresa mediante una fracción irreducible y llegar mediante el Teorema de Pitágoras a que la relación entre ambas es la relación entre dos números pares y por tanto la hipótesis de partida es absurda.

La desconfianza en el número hizo que apareciese el álgebra geométrica que resolvía, mediante regla y compás, problemas babilónicos que habían sido resueltos hasta ese momento mediante cálculos aritméticos. Este álgebra resulta rara a nuestros ojos, pero en muchas ocasiones resulta muy útil y visual para la transmisión de conceptos como la propiedad distributiva o los productos notables.

Como puede observarse, en esta primera época griega, el objeto de estudio de la Geometría pasó de estar constituido por tareas extramatemáticas de origen práctico a estar conformado también por tareas de origen matemático, sin aplicabilidad práctica directa.

2.2.3.4.Platón y Aristóteles.

Las aportaciones del siglo IV a.C., antesala de los Elementos, son principalmente de corte filosófico. La importancia de Platón, para las Matemáticas en general y para la Geometría en particular, es la de inspirador y director de otros matemáticos[8]. A Platón se le atribuye también la distinción entre Aritmética (teoría de números) y Logística (técnicas de computación). La primera era para los filósofos y servía para enaltecer al espíritu, al obligar a la mente a razonar sobre el número abstracto. La segunda era para los comerciantes y los hombres de guerra y debía resolver las operaciones mundanas, como el mercado y el despliegue de tropas. La primera tiene un objeto de estudio matemático, en tanto que la segunda tiene origen extramatemático.

En Geometría se puede observar la misma distinción, al diferenciar la Geometría pura, con sus razonamientos sobre entidades abstractas, de la Geometría mundana del artesano o del técnico. Es en este sentido, Platón es el responsable de la restricción a la regla y el compás, al tratarse estas de las herramientas que permiten fabricar las figuras más puras: la circunferencia y su infinita simetría; y la recta dentro de la cual cualquier punto puede convertirse en el centro de simetría.

Platón, convierte la enseñanza de las Matemática en parte esencial de la formación de los hombres de estado y reorganiza la hipótesis de partida, al afirmar que los razonamientos que hacemos en Geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas

8 Se dice que en la puerta de su escuela estaba grabado el lema “no entrará aquí nadie que ignore la Geometría”.

absolutas que ellas representan. Estamos, por tanto, ante una revolución ontológica de los conceptos matemáticos. Este giro hacia el descubrimiento de las ideas Matemáticas a partir de la razón y el análisis es, quizá, la aportación más clara de Platón a la Geometría, y es precisamente este punto el que más se ha criticado posteriormente, al obligar a los hombres a apartarse de los problemas del mundo real.

De los *discípulos de Platón* destacaremos a Eudoxo por dos de sus aportaciones a la Geometría: la restitución parcial de las proporciones y el método de exhaución. Este último es especialmente interesante, porque permitió resolver la tarea de calcular el área de los círculos y el volumen de las esferas. El área del círculo se puede llegar a agotar inscribiendo en él un polígono regular y aumentando después indefinidamente el número de sus lados. Empleando la técnica de de exhaución, se pudo hacer uso riguroso de este método, para resolver las áreas de los círculos.

Como añadido cabe destacar que fue Mencmo, un discípulo de Eudoxo, el que descubrió las cónicas.

La aportación platónica fue esencial en la visión global de las Matemáticas.

> En Platón, las proposiciones Matemáticas expresan verdades eternas. Pertenecen al mundo de las ideas y sus leyes son las del modelo eterno e inmutable, no hay nada contingente en ellas, son también por tanto leyes necesarias. Son eternas, necesarias y universales. (Cañón, 1993, p. 78).

El otro gran discípulo de Platón fue *Aristóteles*, quien negaría esa posición de las proposiciones Matemáticas como anteriores a las cosas. Para Aristóteles las proposiciones no están separadas de las cosas y no son principio de ellas. Es decir, se posiciona ontológicamente en el polo opuesto a su maestro. Aristóteles establece la axiomática como modelo lógico de explicación. El proceso deductivo es la clave, la demostración rigurosa partiendo de unos primeros principios, es la forma de trabajar en Geometría. La verdad ya no viene dada por las ideas eternas, sino por la validez de esos primeros principios quienes otorgan legitimidad a todo el proceso. El debate se centra sólo en los primeros axiomas y a la validez de los mismos se llega por medio de la inducción.

> Aristóteles no escribió un tratado o manual sobre matemáticas. De hecho, fue consciente de cuál era el terreno del matemático y cuál el del dialéctico y el filósofo. Las pruebas matemáticas en cuanto tales no son criticables por el filósofo o el dialéctico, sino tan sólo los principios o puntos de partida en los cuales se basa el razonamiento matemático. Por ejemplo, las nociones de “unidad” (□ν, μόνας) para el arítmetico, y de “punto” (στιγμή) para el geómetra, son esenciales para poder construir y sistematizar su cuerpo doctrinal, pero queda fuera de las posibilidades de tales ramas de la matemática, justificar la existencia o inexistencia- el tipo de entidad que poseen- dichos objetos. En este sentido, dice Aristóteles, los matemáticos suponen la existencia de tales entidades con el fin de avanzar en su investigación y, por tanto, se toman tales definiciones como algo indemostrable, o al menos no demostrable al modo que lo hacen los Teoremas que se siguen de tales definiciones. (Martí, 2017, p. 46).

En este planteamiento se aprecia una clara epistemología general sobre las matemáticas de corte euclideano.

2.2.3.5. Los Elementos de Euclides.

De la mano de Ptolomeo I, se crea en Alejandría una escuela conocida como el Museo. Para enseñar en esta escuela acudieron maestros y sabios de todo el mundo antiguo. Entre ellos se encontraba *Euclides* de Alejandría. De Euclides se sabe poco, la mayor parte son anécdotas o historias sobre su persona, pero se desconoce su fecha de nacimiento y dónde se formó como matemático. Euclides escribió numerosas obras sobre temas tan variados como la óptica o la música. Pero lo que realmente le hizo un hueco en la historia fue su obra *Los Elementos*. “*Los Elementos* han servido, durante siglos, como libro de texto de la enseñanza elemental por excelencia” (Millán, 2004, p.110). En él se recogen los contenidos considerados elementales en los campos de Aritmética, Geometría Sintética y Álgebra Geométrica. Esta obra se podía ampliar con el arte de calcular y el estudio de las cónicas y las curvas planas superiores. Euclides no se atribuye en la obra la autoría de los contenidos, sino que hizo un uso extenso de las obras conocidas dándole, eso sí, un orden y una estructura propias.

Los elementos forman un grupo de 13 libros que abordan fundamentalmente los siguientes contenidos:

> Los elementos están divididos en trece libros o capítulos, de los cuáles la primera media docena son sobre geometría plana elemental, los tres siguientes son sobre teoría de números, el libro X sobre los inconmensurables y los tres últimos principalmente sobre geometría de sólidos. No hay ninguna introducción o preámbulo a la obra, y el primer libro comienza abruptamente con una lista de 23 definiciones. (Boyer, 1986, p.146).

Lo más interesante de los elementos es su estructura lógico-deductiva, lo que significa epistemológicamente el asentamiento del llamado euclideanismo en Geometría. Euclides establece cinco postulados y cinco nociones comunes que deben ser, siguiendo la lógica aristotélica, verdades comunes a todas las ciencias convincentes por sí mismos. En cualquier caso se trata de verdades conocidas y aceptadas como obvias que se exigían o servían para justificar las demás.

La lista de estos primeros 10 axiomas es:

Postulados geométricos

1. Por dos puntos distintos pasa una recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta corta dos rectas de forma que los ángulos interiores de un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que los dos ángulos rectos.

Nociones comunes

6. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
7. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
8. Si iguales se restan a iguales, los resultados son iguales entre sí.
9. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
10. El todo es mayor que la parte.

Sobre la base de estos axiomas se establece, mediante la deducción lógica, toda la obra posterior. La gran aportación de la obra de Euclides es el método de razonamiento expuesto y utilizado muy similar a los planteamientos ontológicos de Aristóteles.

Hoy en día se sabe que muchas de las demostraciones y deducciones realizadas por Euclides son inexactas o incompletas pero se puede afirmar que:

> En su época los Elementos fueron evidentemente el desarrollo lógico de la matemática elemental más finamente razonado, que se había reunido jamás y tuvieron que pasar 2000 años antes de que se diera una formulación más cuidadosa. Durante este largo intervalo de tiempo la mayoría de los matemáticos consideraron lógicamente satisfactorio y pedagógicamente adecuado el tratamiento. (Boyer, 1986, p. 148).

El recorrido de la obra, desde su creación en el siglo III a.C., fue similar al de otros textos, primero fue copiado innumerables veces por los griegos. Estas copias introdujeron algunos errores y aportaciones de otros matemáticos. Los Elementos fueron traducidos al árabe y de ahí al latín, llegando hasta Venecia en 1482, donde se realiza la primera impresión del libro. A partir de esa impresión se han realizado más de un millar de ediciones, siendo, sin duda, el libro de Matemáticas más reproducido y el que mayor influencia ha tenido a lo largo del tiempo.

2.2.3.6. Arquímedes y Apolonio.

Siguiendo el método establecido en los Elementos, los matemáticos posteriores a Euclides ampliaron donde fue posible la obra. Podemos atribuir a Arquímedes varios desarrollos, entre los que destaca el método para obtener el valor de π. La técnica de Arquímedes consistía en partir de los hexágonos regular inscrito y circunscrito en la circunferencia (ver Fig. 14) y calcular los perímetros de los polígonos obtenidos duplicando el número de lados hasta llegar al polígono regular de 96 lados. De esta forma, se obtiene una serie en la que el perímetro de los polígonos circunscritos es siempre mayor que el perímetro de la circunferencia, y otra serie en la que el perímetro de los polígonos inscritos es siempre menor que el perímetro de la circunferencia. A partir de este punto, Arquímedes razonó que el perímetro real de la circunferencia podía hallarse como la media armónica o geométrica entre ambos. La aproximación obtenida por este método deja el valor de π entre 3,142857 y 3,14084 y, lo que es más importante, dejaba un método capaz de obtener el valor de π, con la precisión que se desease, mediante la ampliación del número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos.

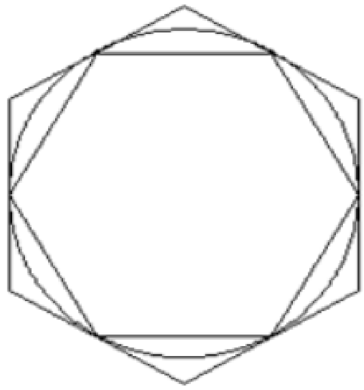


Figura 14. Método de Arquímedes para obtener π . Elaboración propia.

Otras aportaciones destacadas de Arquímedes fueron su estudio de las parábolas, las espirales, volúmenes, sólidos semiregulares y trigonometría. La obra de Arquímedes desapareció durante muchos siglos y fue recopilándose mediante el descubrimiento de copias de los originales, que fueron encontrándose a lo largo del tiempo. La más reciente fue hallada en 1906 donde se descubrió una copia del libro del método, en la que Arquímedes explica un sistema mecánico, no riguroso, para obtener soluciones que es bastante similar al cálculo integral y diferencial actual.

Apolonio fue el otro gran matemático de la antigua Grecia posterior a Euclides. Su obra ha desaparecido casi por completo, aunque se sabe por otros autores los temas que trató. Se tiene constancia de que la obra de Apolonio junto a la de Arquímedes y a los libros más avanzados de Euclides formaban el denominado "Tesoro de Análisis", que constituía la base de los estudios matemáticos de los hombres que dominaban los Elementos de Euclides. Estas obras se han perdido, pero de Apolonio se conserva su obra más importante, a saber, el tratado sobre Cónicas. El libro de las Cónicas se divide en 8 libros, de los que los cuatro primeros son una recopilación, similar a la realizada por Euclides en los Elementos, que incluyen algunos Teoremas originales de Apolonio sobre cónicas. Los cuatro últimos, sin embargo, aportan claridad a las curvas cónicas y las unifican, al demostrar que pueden ser obtenidas a partir de un único cono, sin más dificultad que variar la inclinación del plano que corta el cono. Además, Apolonio considera las curvas que se obtienen a partir de un cono de dos hojas, lo que es sin duda una visión más parecida a la visión moderna de las cónicas.

La mayoría de las *aportaciones posteriores* sugieren que los griegos empezaron a desarrollar una Geometría Analítica primitiva, en la que se experimentaba con métodos de análisis y sistemas de coordenadas, pero que quedaba limitada por el desarrollo del Álgebra geométrica. Así mismo, es difícil conocer los avances obtenidos por la pérdida de gran parte de estos libros, de los que se conservan partes aisladas o referencias indirectas. Lo que parece claro es que la Geometría había quedado perfectamente construida con la obra de Euclides y los textos de Arquímedes, Apolonio y los demás autores que se estudiaban en el "Tesoro de Análisis". El siguiente gran salto en Geometría no se daría hasta la obra de Descartes, entrado ya el siglo XVII d. C., salto que supone un abandono de la regla y el compás. A partir de ese punto, diferenciaremos la Geometría en dos partes, la Geometría sintética o realizable, con regla y compás; y la Geometría analítica o realizable mediante Álgebra.

2.2.3.7. Descartes.

La introducción del sistema de numeración posicional Hindú, igual al utilizado en la actualidad, y el trabajo de los algebristas árabes del siglo IX (Al-Khowarizmi y Thabit Ibn-Qurra), y de los algebristas italianos del siglo XVI (Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, etc.), en la resolución de las ecuaciones generales de grados 2, 3 y 4 dio paso al siguiente salto en Geometría. Lo dio Descartes (d.C.1596- d.C.1650) en su obra "Discurso del método"[9].

En la obra de Descartes se establece el sistema de referencia de ejes cartesianos y se estudia la representación de expresiones algebraicas en el plano, creando de este modo las bases de la Geometría analítica. Esta Geometría tiene por objeto estudiar las propiedades de las figuras geométricas por medio del cálculo algebraico.

El enfoque es el siguiente: escogemos un punto en el plano y lo llamamos origen. Trazamos dos ejes: líneas que pasan por el origen y se cortan en él formando ángulos rectos.

9 El apartado sobre Geometría se presenta en uno de los tres apéndices.

Nombramos un eje como X y otro como Y. Cualquier punto P en el plano está determinado por el par de distancias (x, y), siendo x la distancia al eje y e y la distancia al eje x, y que nos indica lo lejos que se sitúa ese punto respecto al origen de coordenadas. Las coordenadas en el espacio toman la forma (x, y, z). Por eso decimos que el plano es bidimensional y el espacio tridimensional. El número de dimensiones se puede deducir de cuantos números son necesarios para especificar un punto. Podemos decir que:

> La contribución más importante hecha por el concepto de coordenadas es que se apartó la visión griega de curvas como objetos que estaban construidos por medios geométricos específicos, y se las vio como el aspecto visual de una fórmula algebraica. (Stewart, 2012, p. 95).

2.2.3.8. Las Geometrías no Euclideas.

Desde su publicación en "Los Elementos", el quinto postulado[10] fue objeto de debate por muchos de los mejores matemáticos de todos los tiempos. La mayoría de ellos estaban convencidos de que podía ser probado a partir del resto de postulados, y centraron su investigación y sus esfuerzos en conseguirlo y convertirlo finalmente en un Teorema.

Tras varios siglos de teorías y desarrollos matemáticos, nadie demostró su falsedad, pero tampoco nadie demostró que fueran falsas las geometrías derivadas de negarlo[11].

Durante los siglos XIX y XX se consolidaron las geometrías no euclídeas. La primera de ellas es la *geometría hiperbólica*, desarrollada en paralelo por los matemáticos Lobachevski y Bolyai. Este último compartió correspondencia con Gauss, que habiendo llegado a resultados similares no se atrevió a publicarlos. La conclusión era que el quinto postulado es indemostrable e independiente de los demás. A través de su negación podía crearse un sistema diferente y geométricamente coherente. La Geometría hiperbólica propone un quinto postulado diferente:

- Por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela.

10 Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
11 Para ampliar este punto puede consultarse la obra de Gómez (2010).

Para explicar las consecuencias y aplicaciones de esta geometría nos apoyaremos en una construcción que nos permita imaginar primero el modelo y comprobar después los usos del mismo.

Para explicar este modelo seguiremos una explicación similar a la que aparece en Gómez (2010).

Lo primero que hemos de imaginar es la denominada "curva del perro". Imaginemos una persona situada en A que lleva un perro unido por una cadena situado en P. En el punto P hay un hueso y el perro se resiste a abandonarlo. El dueño del perro camina en línea recta en sentido positivo del eje x, mientras el perro arrastrado por la cadena hace resistencia para volver hasta P. Al principio el perro se sitúa a una distancia grande de su amo pero a medida que este avanza la distancia se mantiene (al ir el amo delante) pero la trayectoria de ambos va acercándose (Ver Fig.15)

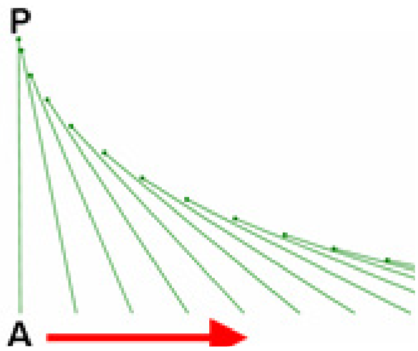


Figura 15. Curva Tractiz o trayectoria del perro. De Vivero - Trabajo propio, Dominio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1502228

Si giramos la curva tractiz alrededor de la dirección marcada por el amo. Obtenemos una figura denominada pseudoesfera (ver Fig.16). Esta superficie es el modelo de la Geometría hiperbólica, que será la encargada de estudiar el comportamiento de puntos y rectas sobre esta superficie.

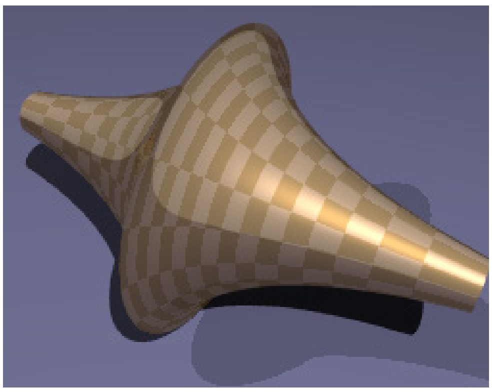


Figura 16. Pseudoesfera. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pseudosphere.png#/media/File:Pseudosphere.png

Esta figura se asemeja a la campana de una trompeta. Si imaginamos a dos personas caminado desde el centro de la trompeta hasta su boca podemos hacernos una idea de cómo serían dos líneas paralelas en Geometría hiperbólica. La aplicación más conocida de este modelo fue realizada por Einstein, quien utilizó este modelo para describir el espacio-tiempo. Son famosos los ejemplos que imaginan el espacio como una cama elástica donde los planetas, al tener masa, deforman el espacio a su alrededor de forma hiperbólica. El espacio deja de ser una superficie plana, para convertirse en una superficie curva.

Poco tiempo después de la construcción de la geometría hiperbólica, el célebre matemático Riemann creó la geometría elíptica, sustituyendo el quinto postulado por este otro:

- Dada una recta r y un punto P no perteneciente a ella, no existen rectas que pasen por P y sean paralelas a la recta r.

Para entender está geometría y sus aplicaciones utilizaremos el siguiente ejemplo:

> Es posible realizar con un globo un interesante ejercicio para entender mejor la geometría de Riemann. Sobre el globo deshinchado y totalmente plano, se dibuja un trozo de línea recta, de la que se mide su longitud. A su lado, se dibuja un triángulo. Cuando se hincha el globo, los dibujos practicados se transforman. ¿Qué puede observarse en la recta y el triángulo? ¿La recta se ha torcido? ¿La suma de los ángulos del triángulo da todavía 180º? En el globo la línea es una curva denominada geodésica, es decir, las circunferencias máximas de la esfera. (Gómez, 2010, p. 68).

A modo de resumen, imaginemos lo que ocurriría en una carrera que se realizase en cada uno de los tres mundos. En un mundo plano Euclideo, la trayectoria de los participantes no se acerca ni se separa, siempre se mantiene a la misma distancia. En un mundo hiperbólico, las trayectorias de los participantes se alejarán más y más a medida que avanzan hacia la campana de la trompeta y se juntarían más y más en caso de desplazarse en el otro sentido. En un mundo esférico, la trayectoria de los participantes se acercaría más y más a medida que se acercaran a los polos y se alejarían más y más a medida que se acercaran al ecuador. Haciendo este ejercicio, podemos comprender mejor la idea de paralelismo en cada uno de los tres modelos.

La aparición de las geometrías no euclídeas provocó una eclosión en el desarrollo de la Geometría. Muchos otros modelos geométricos nacieron de la contemplación de los objetos y de los fenómenos.

> (…), las nuevas geometrías no sólo son posibles, sino que han abierto nuevos caminos en el conocimiento humano. Aunque sus formulaciones puedan parecer complejas, son en realidad la cara más amable de las Matemáticas, pues han mejorado nuestra percepción de la realidad y sus aplicaciones prácticas son constantes en nuestra vida diaria. No son sólo formulaciones abstractas en la mente de los iniciados, sino que son capaces de prevenir enfermedades y de orientar al hombre en sus viajes. Podría considerarse que las nuevas Geometrías han hecho visible al hombre aquello que durante siglos le pareció invisible, y por tanto han hecho más ancho su mundo. Cabe decir, en resumen, que nunca una negación insolente, la del quinto postulado de Euclides, resultó tan rentable para la humanidad. (Gómez, 2010, p. 138).

2.2.3.9. Evolución histórica de las posiciones epistemológicas en el ámbito de la Geometría.

Una vez aclarada la evolución histórica del saber sabio geométrico vamos a apoyarnos en el trabajo de Bolea (1995) para identificar la evolución epistemológica específica de este ámbito a lo largo de la historia de las matemáticas y que procedemos a sintetizar a continuación:

1. Geometría primitiva (agrimensores): Esta visión se desarrolla en el espacio de los objetos reales proporcionando un medio para comprender el mundo circundante. Los conceptos, principios y postulados se abstraen a partir de lo real. La geometría es bajo este punto de vista un conjunto de conocimientos empíricos.

> La geometría primitiva, la geometría de los agrimensores y “tensadores de cuerda” (egipcios y babilonios) se desarrolla en el espacio de los objetos rea-

> les y proporciona el medio más completo para comprender el mundo circundante, el mundo del que fueron abstraídos los conceptos, los principios y los postulados. (Bolea, 1995, p. 96).

2. Los elementos de Euclides: La Geometría se desliga de la experiencia y pasa a considerarse un espacio estrictamente conceptual. Se incorpora el razonamiento lógico deductivo a partir de unos axiomas evidentes como metodología. Las hipótesis y las conclusiones deben demostrarse a través de un proceso lógico-deductivo estricto.

> Incorpora una metodología, en la cual, a partir de unos principios evidentes, es la hipótesis la que conduce a la conclusión mediante un proceso lógico deductivo que llamamos demostración. (Bolea, 1995, p. 96).

3. La geometría analítica: A partir de la obra de Descartes se establece un nuevo método general de resolución que se apoya en los conceptos de coordenadas y en la representación de cualquier ecuación algebráica en forma de curva plana. El uso de un espacio geométrico basado en puntos y de una nueva forma de hacer Geometría apoyada en la herramienta del álgebra supone una nueva visión epistemológica sobre el área de la Geometría.

> Descartes deseaba crear un método que pudiera aplicarse a la resolución de todos los problemas de la geometría, es decir, formular un método general de resolución. […] La geometría analítica representa una nueva concepción epistemológica de la geometría ya qe aparece un nuevo espacio geométrico, el espacio de puntos, y una nueva forma de hacer geometría, apoyada en la herramienta del álgebra. Se inicia la confrontación metodológica análisis-síntesis. (Bolea, 1995, p. 97).

4. Las geometrías no euclideas: Ante el fracaso a la hora de demostrar algunos conceptos se cambia el enfoque y se abandona el intento de demostración directa. Se trata de negar ciertas verdades para tratar de ver las consecuencias de esa negación y estudiar de ese modo su necesidad y naturaleza. La negación del quinto postulada amplia la concepción de la Geometría y se abandona la idea de verdad absoluta por la idea de verdad matemática.

> El nuevo enfoque para la matemática trata de dar respuesta a la siguiente situación: si los métodos de resolución "frontales" resultan inadecuados para resolver ciertos problemas e impiden explicar por qué son inadecuados, habrá que variar tales métodos. El fenómeno que se produce es un proceso de inversión del método y de los problemas. Es decir, se trata de utilizar un método, unas herramientas con las que partiendo de lo que parece inalcanzable, poder dar razón del porqué pueden o no pueden resolverse los problemas.
>
> Así pues, el problema de la "demostración" del V postulado de las paralelas, que fue objeto de numerosas investigaciones desde los tiempos antiguos debido a su complicada naturaleza, alcanza su auténtico sentido mediante su cambio, su inversión. (Bolea, 1995, p. 97).

El abandono de la confrontación entre Geometría y naturaleza supone una nueva visión epistemológica de este ámbito. Además este enfoque permite superar algunas limitaciones de la Geometría analítica como las propiedades de situación y orientación independientes de la medida y la definición generalizada de curvas y superficies ya que no todas son expresables mediante ecuaciones algebraicas.

> Se crean, tras esta ruptura epistemológica, dos tipos de geometrías. Por una parte, unas geometrías puramente sintéticas como la proyectiva y la descriptiva y por otra, una geometría diferencial, auténticamente analítica en el sentido de utilizar los métodos y conceptos del análisis infinitesimal.

> Se pretende, pues, aprovechar y ampliar los resultados obtenidos por el método analítico o por coordenadas (diferencial), sin prescindir del cuerpo de saberes proporcionado por el método sintético o por construcción gráfica (proyectiva-descriptiva).
>
> La confrontación metodológica análisis- síntesis vuelve a producirse. (Bolea, 1995, p. 98).

5. La Geometría como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones. El matemático trabaja con multiplicidades abstractas y transformaciones de las mismas. Los objetos "formales" de las matemáticas se contraponen a los objetos "reales".

Las 5 posiciones epistemológicas del ámbito geométrico vistas gracias al estudio de la evolución del saber sabio geométrico suponen un problema a la hora de definir el saber sabio al que debemos acudir para realizar nuestro MER sobre Geometría elemental. Esta pluralidad de posiciones genera la necesidad de posicionarse epistemológicamente tal y como vemos en la siguiente cita:

> Resumiendo podemos afirmar que no hay actualmente parcela matemática que recoja la geometría elemental y, por lo tanto, no hay un colectivo que legitime este saber escolar, quedando abierto a múltiples influencias. Por ello, pueden aparecer, como ya hemos comentado, una pluralidad de respuestas en la comunidad matemática basadas en las diversas concepciones epistemológicas. Esta controversia que existe en la actualidad, sobre qué geometría debe tratarse en los niveles escolares, en los niveles obligatorios, no escapa al debate que existe en la esfera matemática, en los niveles universitarios, sobre el contenido geométrico. Parece ser que en cada clase de estudios universitarios, licenciatura de matemáticas, diplomatura de Maestro y estudios en los que los contenidos matemáticos tienen carácter instrumental, lo que se estudia bajo el nombre de geometría es distinto. (Bolea 1995, p. 99).

2.2.3.10. Aportaciones a la construcción del MER.

La evolución del saber sabio geométrico histórico, sigue un proceso de modelización progresiva, con un nivel de abstracción creciente. Por ese motivo, las geometrías no euclideas o la Topología moderna, se encuentran fuera del saber a enseñar en la escuela. Sin embargo, de la evolución histórica podemos extraer algunas pistas sobre la forma en la que se descubrieron algunos conceptos. El enfoque histórico permite la investigación y el redescubrimiento de muchos de los contenidos geométricos de la educación secundaria; las fórmulas, la proporcionalidad, la descomposición de figuras o el cálculo de áreas aparecen humanizando las Obras Matemáticas, que son objeto de estudio en el MER.

En la crítica que hace Guzmán (1983) a la Matemática Moderna, encontramos algunas líneas maestras para mejorar la enseñanza de las Matemáticas. En lo referido a la evolución del saber sabio, podemos destacar lo siguiente:

> Con la enseñanza secundaria no se debe pretender impartir unos conocimientos que hagan de la personalidad del estudiante un mosaico de miniprofesionales de las diferentes materias. Se debe tratar con ella de ayudarle a conformar su personalidad intelectual mediante la asimilación profunda de unas pocas ideas matrices en algunos campos de las ciencias y de las letras, asimilación realizada pausadamente, de modo vital, entroncando estas ideas matrices con la personalidad de sus descubridores, con la historia de su génesis y su evolución, con muestras de su fecundidad en nuestra cultura actual. (Guzmán, 1983, p.47).

El enfoque de este MER está orientado a la modelización del espacio[12], que puede hacerse desde la Geometría Elemental. Esta Geometría no proviene de los axiomas euclideos ni de la transformación algebraica o los invariantes. La Geometría que se estudia en este MER proviene de la agrimensura y de la experiencia directa con el espacio; se construye desde la experiencia y la inducción, y pretende desarrollarse posteriormente en la deducción y en el razonamiento con entidades abstractas en cursos posteriores. Nuestro enfoque epistemológico

12 Debemos entender el espacio como la extensión proyectada desde el cuerpo, en todas direcciones y hasta el infinito.

es, por tanto, compatible con el posicionamiento epistemológico de la Geometría primitiva o Agrimensura y es coherente con la propia evolución histórica de este área de conocimiento tal y como se ha visto. El planteamiento, como propone Guzmán, es más pausado y vital, y parte de la génesis misma del pensamiento geométrico y su evolución inicial.

2.2.4. El modelo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría.

Para establecer los límites de la Geometría elemental que vamos a considerar en el primer ciclo de la Educación Secundaria es necesario comprender en profundidad la evolución en la forma geométrica de razonar que se produce en los estudiantes. Entre 1957 y 1984 se desarrolla el modelo Van Hiele. La aportación fundamental del modelo es la definición de 5 niveles de razonamiento Geométrico y de 5 fases para la enseñanza de la Geometría. Estos niveles y fases permiten la guía, el diseño y la creación de experiencias apropiadas, según el nivel previo de los alumnos.

2.2.4.1. Los niveles de razonamiento.

En López de Silanes (2012), podemos ver un desarrollo completo de los niveles que el matrimonio Van Hiele propuso.

Según este modelo, la capacidad de razonamiento geométrico evoluciona pasando por los siguientes niveles:

1. Nivel de Reconocimiento. En el primer nivel se maneja solamente información visual, y su forma de razonamiento no puede ser considerada como matemática.
2. Nivel de Análisis. En el segundo nivel se reconoce la presencia de propiedades Matemáticas en los objetos geométricos, y el razonamiento se basa en la percepción.
3. Nivel de Deducción Informal. En el tercer nivel se comienza a desarrollar la capacidad de razonamiento, llegando a manejar los elementos más simples del razonamiento formal, como las definiciones o las implicaciones.
4. Nivel de Deducción Formal. El cuarto nivel capacita al alumno para el razonamiento formal.
5. Nivel de Rigor. Finalmente en el quinto nivel se adquieren los conocimientos y se desarrolla toda la capacidad de razonamiento. (López de Silanes, 2012, p. 23).

Para comprender y estudiar los niveles de razonamiento, propuestos por Van Hiele, vamos a fijarnos en una serie de habilidades básicas y su relación con los mismos. Las habilidades que tendremos en cuenta fueron propuestas por Hoffer (1990) y recogidas por López de Silanes (2012) en el siguiente cuadro:

Tabla 1.

Descriptores de las habilidades básicas de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele.

	Visual	Verbal	Dibujar	Lógica	Modelar
N1 Reconocimiento	Reconocer diferentes figuras por el dibujo. Reconocer información contenida en la figura.	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la invarianza de las figuras en distintas posiciones.	Identificar formas geométricas en objetos físicos.
N2 Análisis	Enumerar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de otra mayor.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Entender que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar fenómenos de un modelo.
N3 Deducción Informal	Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figuras.	Definir con palabras adecuadas y concisamente. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.	Dada cierta figura cosntruir otras relacionadas con la primera.	Comprender culalidades de una buena definición. Usar las propiedades para determinar si una clase de figura está contenida en otra.	Comprender el concepto de un modelo matemático que representa relaciones entre objetos.
N4 Deducción Formal	Utilizar información de otra figura para deducir más información.	Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y Teoremas. Reconocer que información da un problema y que información hay que hallar.	Reconocer cómo y cuándo usar elementos en una figura. Deducir de información dada cómo dibujar una figura específica.	Utilizar reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. Poder deducir consecuencias de la información dada.	Poder deducir propiedades de objetos de una información dada. Poder resolver problemas relacionados con objetos.
N5 Rigor	Reconocer supuestos injustificados hechos al usar figuras. Concebir figuras relacionadas en varios sistemas deductivos.	Formular extensiones de resultados conocidos. Describir varios sistemas deductivos.	Comprender las limitaciones y capacidades de varios elementos de dibujo. Representar gráficamente conceptos no estandarizados en varios sistemas deductivos.	Comprender las capacidades y limitaciones de supuestos y postulados. Saber cuándo un sistema de postulados es independiente, consistente y categórico.	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstractos. Desarrollar modelos matemáticos para describir fenómenos no físicos, sociales y naturales.

Extraída de López de Silanes (2012, p.45).

Los niveles de razonamiento, aportados por el modelo, permiten vislumbrar las principales razones del fracaso en Geometría, como desajustes entre las demandas curriculares y el nivel real del alumnado. Este desajuste imposibilitaría el aprendizaje.

2.2.4.2. Las fases de aprendizaje.

Las fases de aprendizaje se relacionan directamente con la actividad cotidiana de enseñanza. En este sentido, las fases de aprendizaje, constituyen una propuesta para su uso directo por los profesores, que les permiten organizar y secuenciar los contenidos de forma que se produzca un avance en el nivel de razonamiento.

En Gutiérrez y Jaime (2012), se explican de forma detallada las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele, los aspectos más relevantes se comentan a continuación:

- **Fase 1: Información.**

Durante la fase de información, el profesor plantea el campo de estudio y todos los aspectos relativos al mismo que considere necesarios (materiales, problemas tipo a resolver,…). El manejo inicial por parte de los alumnos de los materiales y conocimientos básicos debe permitir al docente establecer los conocimientos previos de los alumnos.

> El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, que materiales van a utilizar, etcétera. […] Ésta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema a abordar. (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 57).

- **Fase 2: Orientación dirigida.**

Con ayuda de los materiales suministrados, los alumnos deben ir descubriendo, comprendiendo y aprendiendo los contenidos principales del tema objeto de estudio. El objetivo aquí es disponer de una cuidadosa selección de actividades, que forme la base adecuada del nivel que se pretende alcanzar. El material es, por tanto, dirigido a los contenidos principales y escalonado de forma progresiva.

> Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrán realizar un aprendizaje eficaz (en cuánto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades propuestas estén convenientemete dirigidas hacia los conceptos, propiedades, entre otros, que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará organizado para que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de manera progresiva (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 58).

- **Fase 3: Explicitación.**

Mediante el trabajo en grupo se intercambian experiencias, se explica la resolución de las actividades y se buscan regularidades. En esta fase, es muy relevante el intercambio de respuestas y la justificación de las mismas de forma clara y ordenada. La discusión es la que debe permitir ir generando la nueva red de relaciones. Esta fase es transversal a todo el proceso y debe permitir la adquisición del vocabulario matemático, propio del nivel que se pretende alcanzar.

> Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), además de ordenarlas y expresarlas con claridad. […] La tercera fase no hay que entenderla como un periodo de actividad entre las fases 2 y 4, sino que se trata de una fase transversal, que se superpone a las demás fases, pues hay que aprovechar cualquier momento para promover el diálogo entre los estudiantes (con la participación o no del profesor, según interese). (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 58).

- **Fase 4: Orientación libre.**

Se presentan investigaciones, diferentes a las iniciales, que permitan aplicar los conocimientos recién adquiridos. El perfeccionamiento de los nuevos conocimientos debe hacerse mediante la presentación de problemas que admitan diferentes enfoques y soluciones por parte del profesor. Una manera habitual de realizar esta fase es plantear actividades donde los elementos principales deban ser unidos por el estudiante, gracias a los nuevos conocimientos, vocabulario y modos de solución que se están trabajando. Los problemas abiertos planteados, deben permitir el fortalecimiento de las relaciones ya creadas, y el establecimiento de nuevas relaciones más profundas y complejas.

> El campo de estudio ya es, en gran parte, conocido por los alumnos, pero estos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 58).

- **Fase 5: Integración.**

Para culminar el proceso, los alumnos deben adquirir una visión general, desarrollando nuevas relaciones entre los nuevos contenidos y métodos y los que ya se conocían. Se trata de comprender la globalidad, mediante el trabajo de comprensiones globales que no suministren conceptos, propiedades o métodos nuevos a los estudiantes. Es, por tanto, una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conocen.

> En esta fase, el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando compresiones globales, pero es importante que estas no les aporten ningún concepto o propiedad nuevos a los estudiantes: solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conocen (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 59).

2.2.4.3. El desarrollo del nivel de razonamiento esperable en el primer ciclo de la Educación Secundaria.

Conocer el nivel esperado en el que se encuentran los alumnos es un instrumento imprescindible para poder plantear actividades matemáticas significativas con los alumnos. Son varias las posibilidades para conocer la situación actual esperable en los primeros años de enseñanza secundaria. En López de Silanes (2012) encontramos dos métodos que nos han parecido especialmente útiles: el estudio de los libros de texto y los resultados en el cuestionario de Usiskin (1982) de 148 alumnos de la etapa de primaria y 119 alumnos de la etapa de secundaria.

En la siguiente tabla podemos ver el análisis, realizado por el autor, de los libros de texto, en el que se señala el porcentaje de actividades encontradas de cada nivel para los diferentes cursos.

Tabla 2.

Porcentaje de actividades encontradas de cada nivel para los diferentes cursos

Etapa	Curso	N1	N2	N3	N4	N5	TOTAL
Primaria	1º	100					100
	2º	100					100
	3º	26	74				100
	4º	23	77				100
	5º	3	76	21			100
	6º	3	74	23			100
ESO	1º	2	88	10			100
	2º		35	65			100
	3º		6	94			100
	4º		8	92			100
Bachillerato	1º			13	84	2	100
	2º			7	90	4	100

Extraída de López de Silanes (2012, p.75)

Como puede apreciarse, la enseñanza obligatoria abarca exclusivamente los primeros 3 niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele. En los primeros cursos de secundaria se produce una evolución en los niveles de razonamiento, entre el nivel 2 y el nivel 3.

El cuestionario utilizado en la medición realizada por el autor en 2012, fue validado para su aplicación en España y el criterio general para ubicar a los alumnos en un nivel fue el de acertar 3 de los 5 items del nivel preguntado y haber superado, en al menos 3 de los 5 items planteados, los niveles anteriores. Respecto al nivel medido mediante el cuestionario de Usiskin (1982), los resultados en porcentaje pueden verse en la siguiente tabla:

Tabla 3

Nivel medido mediante cuestionario de Usiskin

Curso	N0	N1	N2	N3	N4	N5
6º Primaria	6,8%	58,1%	35,1%			
4º ESO	5,9%	17,6%	57,2%	19,3%		

Elaboración Propia a partir de López de Silanes (2012).

Aunque en el estudio no se presentan datos individualizados por cursos, podemos aceptar que la situación en 6º de Primaria, se corresponde con los conocimientos previos esperados en los primeros cursos de secundaria. En este sentido podemos ver que, a pesar de la propuesta de los libros de texto, existe un porcentaje significativo de alumnos que podemos considerar analfabetos geométricos (Nivel 0) y que la mayoría de los alumnos ha superado el Nivel 1 y está adquiriendo el Nivel 2. Tan solo un tercio del alumnado podría avanzar hacia el Nivel 3. Por lo que lo normal, a la hora de trabajar en el aula es ubicarse dentro del Nivel 2 de razonamiento e ir avanzando paulatinamente hacia el Nivel 3.

La situación en 4º de la ESO es alarmante para los alumnos que mostraban analfabetismo geométrico. A pesar de realizar 4 años más de estudio, no consiguen evolucionar. Esta situación es coherente con el modelo de Van Hiele, ya que no es posible el avance dentro de un nivel si se realizan actividades de un nivel para el que no se está preparado. En cuanto a la adquisición del Nivel 3, podemos afirmar que se trata de una situación minoritaria, por lo que la mayoría de los alumnos solo consiguen alcanzar, al final de su escolarización, el Nivel 2 propuesto por el modelo.

2.2.4.4. Aportaciones a la construcción del MER.

Para construir nuestro MER sobre la Geometría elemental hemos de tener en cuenta todas las instituciones y no solo el saber sabio geométrico. De las dos construcciones teóricas propuestas por Van Hiele asumiremos los niveles de razonamiento como marco teórico a la hora de determinar el grado general de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes en el primer ciclo de la institución de Educación Secundaria en España.

> El modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la Geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes. (Gutiérrez y Jaime, 2012, p.56).

Es importante tener en cuenta, por tanto, que nuestro MER va a trabajar praxeologías que están condicionadas por los niveles de razonamiento esperables en la institución que será objeto de estudio. Tal y como se ha indicado, el nivel de razonamiento esperable se encuentra en o por debajo del nivel 3.

En este MER no consideraremos las fases de aprendizaje a la hora de realizar nuestro trabajo en el aula, al considerarlas demasiado cerradas en su planteamiento y demasiado centradas en el papel central del profesor. La propuesta que plantearemos a partir de nuestro MER está mucho menos dirigida y cerrada, y tiene por centro del proceso de aprendizaje al alumno.

A tenor de lo estudiado en este apartado, el MER que se va a elaborar en este trabajo debe permitir estudiar la Geometría elemental siendo coherente con el objetivo implícito de conseguir que no haya alumnado en situación de analfabetismo geométrico al finalizar los primeros cursos de secundaria y que la practica totalidad de la población escolar supere el Nivel 1 y domine el Nivel 2.

2.2.5. Teoría de Guy Brousseau.

El tercer pilar de nuestro MER lo constituyen los trabajos de Brousseau sobre Geometría. De ellos extraeremos algunas propiedades de la Geometría elemental, su valor didáctico y matemático, y la diferenciación entre los distintos niveles del espacio. Este último aspecto va a ser clave para establecer las distintas modelizaciones, que tendremos en cuenta más adelante.

2.2.5.1. El papel de la Geometría.

En los trabajos de Brousseau, encontramos algunas afirmaciones importantes sobre el papel que puede jugar la Geometría elemental en la educación.

> La géometrie offre aux professeurs une possibilité de provoquer chez leurs élèves une activité reconnue comme authentiquement mathématique par la plupart des mathématiciens eux mêmes. Ce n'est pas le cas de lárithmetique élementaire absorbée dans l'álgèbre elle-même, souvent assimilée à du calcul et même réduit à des algorithmes, sans parler des statisques dont le contenu est à peine reconnu comme mathématique et que les professeurs du moins en France en daignent ou ne savent pas enseigner. Cela tient en partie au fait que la géométrie offre à propos d'un petit nombre d'objets, tout un feutre d'énoncés en interrelation, que l'on peut approcher pau un tissu serré de théorèmes, et en partié à l'ancienneté et à la profusion luxuriante des approches ou des points de vue à son sujet. (Brousseau, 2000, p.1).

Como puede verse en la afirmación anterior, la Geometría es un área de las Matemáticas muy relevante y que tiene, en su forma de estructurarse y de estudiarse, muchos elementos propios que no están presentes en otras partes de las matemáticas.

Sin embargo, la aproximación deductiva del método geométrico presenta algunos inconvenientes a la hora de trasladar su enseñanza a la Educación Secundaria. Por ese motivo, es necesario plantearse algunas preguntas, como se cita a continuación:

> Pour répondre à de telles questions, il me semble nécessaire
> - de déterminer ce qu'est la géométrie, à la fois en tant que science, en tant que pratique et en tant qu'object d'enseignement.
> - et de mettre en évidence les conditions de sa construction et de sa diffusion, et notamment les équilibres et les régulations qui lui permettent de posséder les vertus didactiques que nous lui reconnaissons. (Brousseau, 2000, p.2).

2.2.5.2. El conocimiento del espacio.

Para responder a las cuestiones anteriores, va a ser necesario profundizar en la idea del espacio que emana de la obra de este autor.

El alumno de secundaria ha ido organizando el espacio, en los cursos precedentes, mediante actividades de orientación. El niño se sitúa en el espacio en relación a otros objetos y otros individuos. En este punto es importante distinguir entre los distintos niveles de magnitud que presenta el espacio.

> Si queremos hablar de materiales para construir la geometría, tendremos que tener en cuenta una variable didáctica estudiada en especial por Guy Brousseau (1987), que es el tamaño del espacio. Brevemente la describimos. El tamaño del espacio es una variable didáctica en el sentido de que toma diferentes valores que hacen que las construcciones mentales asociadas y las actividades manipulativas que se hagan dependan del valor que tome. Tres valores esenciales toma la variable Tamaño del espacio, que corresponden a tres nombres: micro-espacio, meso-espacio y macro-espacio. Si bien en los límites entre dos de ellos pueden coexistir concepciones de ambos.
>
> El micro-espacio corresponde al mundo de los objetos pequeños, manipulables con las manos, encima de una mesa, objetos de tamaños desde visible, hasta la mitad de la estatura del que los manipula.
>
> El meso-espacio o espacio medio corresponde a un tamaño de objetos entre el limite superior del micro-espacio y hasta 50 o 100 veces la estatura del que actúa.
>
> El macro-espacio corresponde a espacios mayores, más allá del tamaño de un campo de fútbol, podríamos decir.
>
> Las concepciones mentales que van asociadas a cada uno de ellos son diferentes, puesto que las posibilidades de manipulación son diferentes. (Villarroya, 1994, p.97).

Esta consideración de los distintos niveles del espacio, planteada por Brousseau, es muy relevante para construir el MER que nos ocupa. El micro-espacio es el lugar privilegiado para el estudio en la institución escolar, al poder trabajarse dentro de las dimensiones de un papel. Los estudiantes trabajan con representaciones de la realidad, construyendo sus ideas y sus técnicas de resolución sobre este nivel del espacio. Pero el trabajo en el micro-espacio limita el medio en el que el alumno construye su estudio.

> Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La "droite" peut être déterminée, dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deus plans, dans le meso-espace, par un alignement visuel, dans le macro-espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat… Dans le micro-espace les distances sont des longueurs d'objets, les angles des "formes" ou des rotations; les mesures de longueurs y sont beaucoup plus économiques que les mesures d'angles, dans le macro-espace cést l'inverse. (Brousseau, 2000, p.6).

Al considerar los diferentes niveles del espacio en nuestro MER, se enriquecen las experiencias y los significados que se pueden otorgar a la medida de longitudes, a los instrumentos de medida o al concepto de ángulo. Además de ampliar el significado de los conceptos, el cambio entre un nivel del espacio y otro es lo que justifica la necesidad de construir los conceptos de igualdad y semejanza. Por ese motivo, en nuestra investigación tener en cuenta las aportaciones de Brousseau es fundamental para construir nuestro MER.

2.2.5.3. La enseñanza de la Geometría.

Es importante señalar aquí que para Brousseau hay diferencias importantes a nivel epistemológico a la hora de abordar la enseñanza de la geometría, que deben ser tenidas en cuenta y que son fuente de muchos errores y malentendidos.

> La distinction entre connaissance de l'espace et géométrie tend à s'effacer dans notre culture devant la formidable efiicacité des mathématiques dans ce domaine, et réciproquement devant l'intérêt des modèles géométriques pour toutes sortes d'études mathématiques. Cette distinction n'apparaît pas bien aux élèves et par conséquent elle n'est pas présente dans l'espirit des professeurs. Elle est pourtant très importante dès lors que l`on prend la géométrie non plus comme une conaissance utile par elle-même mais comme un moyen pour l'enseigment d'initier él élève au raisonnement déductif ou comme initiation à l`usage d'une théorie mathématique. La confusion entre les

> différences fonctions de la géométrie comme moyen de représentation de l'espace ou comme modèle d'une activité mathématique est la source d'errours, de malentendus et d'échecs. (Brousseau, 2000, p.8).

Tal y como se explicó en el punto anterior, nuestro MER pretende trabajar en la construcción del nivel 2 de razonamiento y en la iniciación del nivel 3. Por ese motivo, ante las diferencias epistemológicas señaladas por Brousseau, nos posicionaremos en la visión de la Geometría como medio de representación del espacio. Entendemos que el otro posicionamiento es propio de los niveles de razonamiento superiores y que, por tanto, aunque esté presente en algunos puntos, no es el posicionamiento principal de este trabajo.

2.2.5.4. Aportaciones a la construcción del MER.

El trabajo de Brousseau es clave a la hora de definir las distintas praxeologías que van a construir nuestro MER. Los niveles del espacio afectan considerablemente a la praxis y limitan en gran medida el uso de las técnicas conocidas por los alumnos. El trabajo en el macro-espacio pone en cuestión muchos de los conceptos geométricos, las dificultades a la hora de medir y trazar en ese nivel del espacio, llevan al alumno de forma natural a la necesidad de representar en el plano y operar sobre él.

> En el micro-espacio, los objetos se pueden coger, mover, medir todas las distancias que aparezcan, que serán segmentos, pues el concepto de recta no existe, la medición de ángulos no tiene sentido, determinar que un cuadrilátero es un rectángulo se hará midiendo los lados y las diagonales. El actor puede estar sentado o desplazarse un poco. No es necesario conceptualizar los desplazamientos, puesto que son fáciles y baratos. Tampoco se necesitan sistemas de referencias.
>
> En el meso-espacio, en general, los objetos no se pueden coger, es el actor el que se mueve alrededor de ellos, pero se mueve, en general, en dos dimensiones. Se necesita un sistema de referencia, respecto del cual se mueve el sujeto. La determinación de que un cuadrilátero es un rectángulo no es tan sencilla como en el micro-espacio. A veces

es necesario medir ángulos, por ejemplo para determinar la altura de un edificio. Para actuar en él hay que crearse intelectualmente ciertas figuras no materiales, una idea de recta,… Se necesita ya un cierto aprendizaje de la representación plana de los objetos para trabajar intelectualmente sobre ellos.

En el macro-espacio, las posibilidades de desplazamiento del actor son escasas, en relación al tamaño del macro-espacio en que se mueve. La medición de ángulos se hace imprescindible, puesto que las distancias o son muy caras de medir o imposibles, Se necesitan sistemas de referencia. Hay que juntar micro-espacio o meso-espacios. La representación plana de los objetos y situaciones se hace imprescindible. (Villarroya, 1994, pp.97-98).

En nuestro MER, tendremos muy en cuenta los diferentes niveles del espacio en las praxeologías relativas a la medición y al trazado. Entenderemos que en el resto de los casos los alumnos trabajarán siempre en el nivel del micro-espacio, previa conversión de los datos obtenidos en el macro y en el meso-espacio. Entendemos que incluir esa diferenciación permite construir un MER más amplio, y dar respuesta así a un mayor número de situaciones de estudio de la Geometría elemental.

2.3. MER para la enseñanza de la Geometría elemental en el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

En el apartado anterior hemos ido progresando hacia el MER que va a utilizarse en este trabajo. A continuación vamos a recoger un breve resumen de las distintas aportaciones que se van a tener en cuenta a partir de la reflexión teórica realizada.

El posicionamiento ontológico entre la razón y la experiencia nos permite dar valor a la experimentación y la manipulación en el espacio real y cotidiano sin renunciar al trabajo de los diferentes problemas tras haber sido matematizados. Intentamos de este modo poder observar en nuestra investigación los procesos matemáticos de generalización, particularización, conjetura y justificación que puedan producirse de forma inductiva o deductiva por los estudiantes.

El planteamiento epistemológico general aceptado es el Antropológico que nos permite estudiar la génesis y el desarrollo de los conocimientos geométricos y la forma de comunicarlos, utilizarlos y enseñarlos a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta las instituciones y la sociedad donde ese estudio se realizó para poder comprender de forma amplia el concepto de Geometría elemental que queremos abordar en este trabajo.

La visión amplia que nos aporta el planteamiento epistemológico general se complementa con el estudio de los diferentes posicionamientos epistemológicos de este ámbito matemático concreto. Por ese motivo hemos estudiado la evolución del saber sabio y nos hemos posicionado dentro de la Geometría primitiva y la agrimensura. Entendemos que el trabajo, llevado a cabo por la Humanidad, en la construcción de la Geometría, debe ser similar al que realicen los estudiantes para su estudio. En este sentido, son los problemas prácticos y las experiencias manipulativas las que van definiendo poco a poco los conceptos, las tareas y las técnicas geométricas. Una vez definidas estas, se puede proceder de forma inversa y tratar de construir, la teoría y las tecnologías, a partir de unos primeros axiomas evidentes. La inducción, en este nivel educativo, precede pues a la deducción y en este sentido se produce una emancipación del saber sabio euclídeo.

El modelo de Van Hiele nos permite profundizar y desarrollar nuestro MER desde el ángulo de la institución, de esa forma enriquecemos el enfoque al no aceptar el saber sabio como único sistema relativo. Los estudios presentados nos permiten fijar una meta clara para la Geometría elemental; el objetivo de este MER está puesto en la adquisición del nivel 2 y en la introducción al nivel 3 de razonamiento propuesto por el modelo. Los estudiantes van a trabajar sobre los conceptos geométricos, para interiorizar sus propiedades a partir de la experiencia e iniciarse en los procesos de establecer definiciones informales, que preparen el camino del método lógico-deductivo. La definición de esta meta es clave para la selección de las praxeologías que serán objeto de estudio.

Por último hemos querido tener en cuenta las aportaciones de Brousseau para entender los distintos niveles de organización espacial. Nuestro MER no está limitado al micro-espacio, como suele ser habitual, y ve en los distintos niveles del espacio una herramienta para forzar al alumno a construir sus conceptos. El trabajo en los distintos niveles del espacio, definidos por Brousseau, es de suma importancia para dar significado a muchos de los conceptos geométricos y, al igual que sucedió en el desarrollo histórico, la necesidad de trabajar en los distintos niveles del espacio es el camino elegido en este MER para provocar el cambio en los niveles de razonamiento.

2.3.1. Praxeologías.

Tal y como indicamos en el apartado 1 del capítulo 3, toda obra humana, incluida la matemática, surge para dar respuestas a un conjunto de cuestiones problemáticas dentro de una institución. Las praxeologías u organizaciones matemáticas son el resultado final de la actividad matemática que se produce en dichas instituciones y por tanto constituyen el elemento de análisis adecuado para realizar esta investigación.

En este apartado detallaremos por tanto nuestro MER desde una doble perspectiva. Por un lado debe servirnos para investigar de forma general la transposición didáctica que se produce al estudiar la Geometría elemental en el primer curso de la institución de enseñanza secundaria española y por otro debe ser lo suficientemente detallado como para poder comprender las tareas, las técnicas y los discursos explicativos sobre ellas que puedan aparecer como consecuencia del estudio.

Se establece por tanto este MER como una descripción detallada en tres niveles decrecientes de concreción del conjunto de elementos que se deberían abordar durante el estudio de la Geometría elemental en el primer curso de la institución secundaria.

Es importante resaltar que las praxeologías que se estudian en un instituto de Educación Secundaria sobre Geometría elemental, en consonancia con los estadios de Van Hiele en los que se hallan los estudiantes, son muy distintas a las que se estudian en una facultad de Matemáticas. Este hecho ha sido tenido en cuenta en este trabajo a la hora de describir los diferentes niveles de concreción. La descripción que se realizará a continuación se ha hecho desde un posicionamiento epistemológico geométrico que coincide con la geometría primitiva y la agrimensura y que por tanto no tiene el nivel de rigor formal que sería esperable desde otros posicionamientos epistemológicos del ámbito geométrico. El nivel de razonamiento y los niveles del espacio que se esperan observar en el primer curso de la institución de Educación secundaria también han condicionado la redacción y la concreción de nuestro MER y deben ser tenidos en cuenta para su lectura. Estudiar un tema en Didáctica de las Matemáticas, teniendo en cuenta estas diferencias, es una de las aportaciones de la TAD.

2.3.2. Teoría matemática que sustenta los elementos descritos en el MER.

Como se ha visto en la evolución del saber sabio, la obra de Euclides fue el referente para la enseñanza de la Geometría durante 2000 años. Podemos decir que en los 13 volúmenes que componen esa obra aparecen un conjunto de praxeologías completo y que por lo tanto se podría entender como un MER en sí mismo. La aproximación que sigue este trabajo es diferente a la planteada en los Elementos. En nuestro caso hemos optado por una aproximación constructiva inductiva frente a la aproximación descriptiva y axiomática, que aparecía en la obra de Euclides.

Sin embargo, a la hora de establecer el logos de nuestro MER, para la Geometría Elemental, aceptamos como Teoría que justifica todas las praxeologías que puedan surgir la Geometría plana Euclidea pero no los Elementos, al entender que en ella se encuentran todos los elementos teóricos y tecnológicos necesarios para nuestro trabajo.

Esta teoría, como se ha visto anteriormente, se construye a partir de unos axiomas evidentes que nosotros aceptaremos como verdades evidentes y no cuestionables dentro de nuestro MER.

A modo de recordatorio, y por razones de claridad expositiva, volvemos a dar aquí la lista de estos primeros axiomas:

Postulados geométricos

1.- Por dos puntos distintos pasa una recta.

2.- Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

3.- Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.

4.- Todos los ángulos rectos son iguales.

5.- Si una línea recta corta dos rectas de forma que los ángulos interiores de un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que los dos ángulos rectos.

Nociones comunes

6.- Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.

7.- Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.

8.- Si iguales se restan a iguales, los resultados son iguales entre sí.

9.- Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.

10.- El todo es mayor que la parte.

Las tecnologías que emanan de esos axiomas, mediante el método lógico-deductivo, son muy amplias y abarcan desde la geometría plana y de los sólidos, hasta el álgebra geométrica y la teoría de números. Nuestro MER tiene un alcance mucho menor que la obra de Euclides, por eso mismo hemos querido acotar el término Geometría e incorporar la palabra elemental en nuestra definición.

2.3.3. Descripción de los diferentes niveles de concreción.

La concreción de nuestro MER se va a realizar a través de una estructura de tres niveles de abstracción decrecientes donde definiremos el conjunto de elementos que vamos a considerar como Geometría elemental. Como ya se ha dicho, el conjunto de elementos definidos está recogido dentro de la Teoría que hemos definido como Geometría Plana Euclídea. El desarrollo completo del MER responde a uno de los objetivos de este trabajo, y se considera una aportación fundamental para la comprensión del mismo.

El MER que se presenta a continuación tiene sus fuentes en la Geometría primitiva descrita en el desarrollo histórico. Por ese motivo, debido a la relatividad institucional del MER, el alcance del mismo es limitado y no se abordan en él demostraciones ni construcciones axiomáticas y no se tienen en cuenta la Geometría cartesiana ni las Geometrías no euclídeas.

Por otro lado, el MER se organiza fundamentalmente en torno a lo necesario para desarrollar en el alumnado el nivel 2 de razonamiento, propuesto por el modelo Van Hiele. El conjunto de elementos seleccionados para este MER busca, por tanto, responder fundamentalmente a:

Tabla 4

Descriptores básicos del Nivel 2 de razonamiento del modelo de Van Hiele.

	Visual	Verbal	Dibujar	Lógica	Modelar
N2 Análisis	Enumerar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de otra mayor.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Entender que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar fenómenos de un modelo.

Extraída de López de Silanes, (2012, p.45).

Además de lo ya dicho, los elementos seleccionados se pueden estudiar en tres niveles diferentes del espacio.

En nuestro caso, reinterpretaremos la praxis relativa a medida y trazado, en función de los 3 niveles del espacio previstos, cuando sea preciso. El resto de elementos será únicamente definido en un nivel general, al entender que los datos y los resultados obtenidos de su aplicación serán convertidos al nivel del espacio correspondiente, gracias a la semejanza de figuras proporcionales.

Para dar claridad al proceso, vamos a agrupar los elementos que constituyen el MER bajo las siguientes categorías:

1.- Descripción y definición de los elementos relativos a la medición de longitudes, superficies y ángulos.

2.- Descripción y definición de los elementos que permiten establecer la semejanza de figuras proporcionales.

3.- Descripción y definición de los elementos que permiten trazar las diferentes figuras planas.

4.- Descripción y definición de los elementos que permiten la descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de las figuras planas.

5.- Descripción y definición de los elementos que permiten realizar cálculos directos o indirectos de las figuras planas.

A la hora de definir los elementos que definen nuestro MER, vamos a tener en cuenta el concepto de Género de tareas definido por Chevallard (1992). Aunque esta distinción no es determinante en nuestro trabajo, podemos decir que nuestro trabajo puede agrupar las tareas en dos grandes categorías, las sintéticas y las analíticas.

Vamos a utilizar, principalmente, la categoría sintética en los elementos relativos a la medición y al trazado. El conjunto de elementos que se tratan allí hacen referencia al uso de instrumentos de medida y dibujo, y utilizan normalmente en su definición verbos como trazar, construir o medir.

En el otro extremo, definiremos la categoría analítica como el conjunto de elementos que hacen referencia a procedimientos aritméticos o algebraicos, y que utilizan normalmente en su definición verbos como: calcular, hallar u obtener. Esta categoría es la dominante en los elementos de semejanza, composición, traslación, giro, simetría, recomposición y cálculo directo e indirecto.

El MER que se construye en este trabajo está orientado a los alumnos del primer ciclo de la ESO. Tal y como se ha visto en el apartado anterior, este alumnado (de forma mayoritaria) ya tiene adquiridos una serie de conceptos geométricos, que provienen de su experiencia educativa y vital previa, que se podrían equiparar a la adquisición del Nivel 1 del modelo de Van Hiele. Aceptaremos, por tanto, como nivel de conocimientos previos lo siguiente:

Tabla 5.

Descriptores básicos del Nivel 1 de razonamiento del modelo de Van Hiele.

	Visual	Verbal	Dibujar	Lógica	Modelar
N1 Reconocimiento	Reconocer diferentes figuras por el dibujo. Reconocer información contenida en la figura.	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la invarianza de las figuras en distintas posiciones.	Identificar formas geométricas en objetos físicos.

Extraída de López Silanes (2012, p. 45)

Las definiciones de los conceptos que se usarán en este MER provienen de estos niveles de razonamiento. Su descripción tiene la intención de evitar ambigüedades y servir como aclaración de los términos que se utilizarán en la definición de los distintos elementos descritos. Por claridad expositiva, el conjunto de definiciones que tendremos en cuenta, se puede consultar en el Anexo 1 de este trabajo.

2.3.4. Descripción y definición de los elementos relativos a la medición de longitudes, superficies y ángulos.

La medida es un elemento central de este MER, y recoge el papel fundamental que tuvo la Geometría en su origen. Los estudiantes, en su proceso de estudio, van a realizar múltiples mediciones directas en todos los niveles del espacio contemplados. El trabajo directo de medición va a ser clave para permitir la inducción de las técnicas y las tecnologías que componen este bloque y es coherente con los niveles de razonamiento que se pretenden conseguir.

2.3.4.1. Primer nivel de concreción.

Como parte de este bloque, vamos a definir un conjunto de 3 elementos generales matemáticos (EG en lo sucesivo), que nos van a servir de base para abordar el proceso de medición esperable dentro de este MER. En concreto, vamos a definir cómo puede hacerse la medición de longitudes, superficies y ángulos.

EG 1: La distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une.

Vamos a aceptar, en el marco de este MER, que la distancia más corta entre dos puntos va a ser equivalente a la del segmento que los une, cuya existencia se deduce a partir del axioma 1 citado anteriormente, que es la definición de distancia en esta Geometría.

El proceso de medición de la distancia entre dos puntos es clave para la realización de cualquier medida que se realice, ya sea de longitud o de superficie. Por este motivo, en este MER incluiremos como primer elemento general la distancia entre dos puntos.

Dentro de este MER no se contempla la medición de distancia de dos puntos que están representados en un plano cartesiano. No obstante, esta medición en el plano cartesiano, podría basarse en el Teorema de Pitágoras y es clave para la construcción de la Geometría Analítica posterior. Por este motivo, aunque no es un objetivo de este MER, puede ser una técnica que se puede inducir de la práctica y que permitiría sentar las bases para cursos posteriores, por lo que se debe valorar su inclusión en un futuro.

EG 2: El área encerrada por una figura rectangular es equivalente a la suma de las unidades de superficie que están contenidas dentro de ella.

Vamos a aceptar, en el marco de este MER, que el área encerrada en una figura plana puede obtenerse, como se deduce a partir del axioma 6 citado anteriormente, observando el número de veces que está contenida una unidad de superficie conocida en el área encerrada.

El proceso de medición de áreas de figuras planas es clave para la realización de cualquier medida de superficie que se pretenda estudiar. Por este motivo, en este MER incluiremos como elemento general el área de figuras planas, que emana directamente del concepto de unidad de superficie cuadrada y que se justifica con los axiomas recogidos desde el 6 al 10.

Aceptamos pues, que medir es comparar el número de veces que esta contenida una determinada unidad de referencia de superficie, en el área encerrada que está siendo objeto de medida.

EG 3: El ángulo comprendido entre dos semirectas es equivalente al número de veces que está contenido la noventava parte de un recto entre ellas.

Vamos a aceptar, en el marco de este MER, que la unidad de referencia para la medida del ángulo comprendido es la noventava parte de un recto.

El ángulo encerrado por dos semirrectas puede obtenerse gracias a los axiomas que van del 6 al 10 observando el número de veces que está contenido la noventava parte de un recto en el espacio comprendido entre las dos semirrectas. Dentro de este MER no será necesario contemplar unidades de medida inferiores a un grado.

Queremos señalar que los tres elementos generales anteriores parten de ideas muy intuitivas sobre la medida y que son propios de la Geometría elemental. La comparación con unidades de referencia es aceptada en este trabajo dada la relatividad de nuestro MER y el uso como instrumento que esperamos hacer de él.

Antes de continuar, queremos señalar que el alejamiento que hacemos aquí del saber sabio Geométrico no sería adecuado para el estudio de la Geometría de otros niveles educativos o contextos y deberían ser reformulados en función del objetivo del estudio para poder generar un instrumento válido de análisis.

Como ya se ha dicho, el proceso de medición es de suma importancia en la construcción de la Geometría elemental que abarca este trabajo. Sin embargo, a la hora de llevarse a cabo en la práctica, es necesario diferenciar cómo se van a aplicar los elementos generales anteriores en los distintos niveles del espacio. Por ese motivo, en los siguientes apartados recogeremos un conjunto de elementos que concretaran las actividades de medición que son abordables dentro de este MER y que matizarán, cuando sea necesario, la influencia que tienen sobre la praxis los diferentes niveles del espacio.

2.3.4.2. Segundo nivel de concreción.

A continuación vamos a avanzar en la concreción de nuestro MER desarrollando los elementos generales y particularizándolos en una nueva categoría, los elementos medios (EM en lo sucesivo). En los casos en los que sea posible y en función de su importancia para el MER, o en aquellas ocasiones donde la demostración sea accesible para los alumnos del primer ciclo de secundaria, se dará una descripción detallada.

El **EG1** relativo a la medición de longitudes lleva asociado tres EM que emanan directamente de la medición de distancias.

EM1 Medición de la distancia entre dos puntos

Este elemento medio es una consecuencia directa del EG1 que se describía anteriormente. En él se presupone que los dos puntos y el segmento que los une están situados sobre el mismo plano. En función del nivel del espacio en el que nos movamos la línea que une a los dos puntos en la superficie puede no estar dentro del mismo plano. En el macro-espacio la situación habitual será esta, por lo que en la aplicación de este EM se producirá un error de medida. Sin embargo, dado el nivel de razonamiento que se pretende estudiar y el alcance que damos aquí a la Geometría elemental aceptaremos que la linea que se trace entre los puntos y los puntos extremos del mismo, en cualquiera de los niveles del espacio, serán coplanarios y será un segmento.

Por tanto para medir la distancia entre dos puntos, trazaremos la línea recta que los une y comprobaremos el número de veces que está contenida la unidad de referencia elegida en ese segmento.

EM2 Medición de las longitudes de los lados de un triángulo y comparación de las mismos entre sí.

Para medir la longitud de los lados de un triángulo podemos proceder como en EM1 de forma sucesiva y obtener la longitud de los lados a, b y c. Posteriormente podemos comparar los diferentes lados entre sí de la siguiente manera.

En una recta cualquiera a partir de un punto P colocamos el número de veces que está contenida la unidad de referencia en el lado a y en el lado b, de forma que queden situados a ambos lados del punto P. A continuación de ambos lados procedemos a colocar el número de veces que está contenida la unidad de referencia en el lado c. El segmento que se obtiene al colocar el lado a y el lado c o el lado b y el lado c es siempre mayor que el segmento obtenido al colocar el lado b o el lado a respectivamente.

Mediante la aplicación sucesiva de este EM es posible llegar mediante razonamiento inductivo a la conclusión de que en un triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

Este EM y la conclusión que se obtiene de él midiendo permiten comprobar dentro de la relatividad de este MER la posibilidad o imposibilidad de construir un triángulo y comprobar si el resultado de las mediciones es incorrecto o cumple al menos una condición necesaria pero no suficiente.

EM3 Medición del radio de una circunferencia y de los lados de un hexágono regular inscrito en ella.

Mediante la aplicación sucesiva de EM1 se pueden obtener las longitudes del radio y de los lados de un hexágono regular inscrito en la misma circunferencia.

Si comparamos el radio y el lado obtenidos trasladando el número de veces que está contenida la unidad de referencia en cada uno de ellos a una recta a partir de un punto P, podemos observar que ambos son iguales.

A partir de este resultado y mediante observación directa de las mediciones es posible inducir que el trazado de los radios de la circunferencia circunscrita que pasan por los vértices del hexágono regular inscrito forman triángulos equiláteros dentro del hexágono regular.

Esto permite demostrar, dentro de la relatividad institucional del MER, que el radio de la circunferencia circunscrita de un hexágono regular es igual a su lado.

Gracias a este EM se podrán realizar construcciones, trazados y mediciones indirectas en todos los niveles del espacio.

El **EG2** relativo a la medición de superficies lleva asociado un número pequeño de EM debido a que solamente hemos recogido en este punto aquellos que emanan directamente de la medición de áreas rectángulares. Las fórmulas para el calculo de áreas de superficies planas se describirán más adelante.

EM4 Fórmula del área de un rectángulo.

Tal y como se muestra en la siguiente figura (Fig.17), el área de un rectángulo es equivalente a contar el número de unidades de superficie que dividen a cada lado del rectángulo presentes dentro de él. Esta operación es equivalente al proceso de multiplicar que se describe a continuación. Utilizando EG 1 y 2, podemos deducir que, el área rectángular es igual a multiplicar el número de unidades de longitud, contenido en la base del rectángulo, por el número de unidades de longitud, contenido en la altura, siempre y cuando se utilice la misma unidad de referencia para ambas.

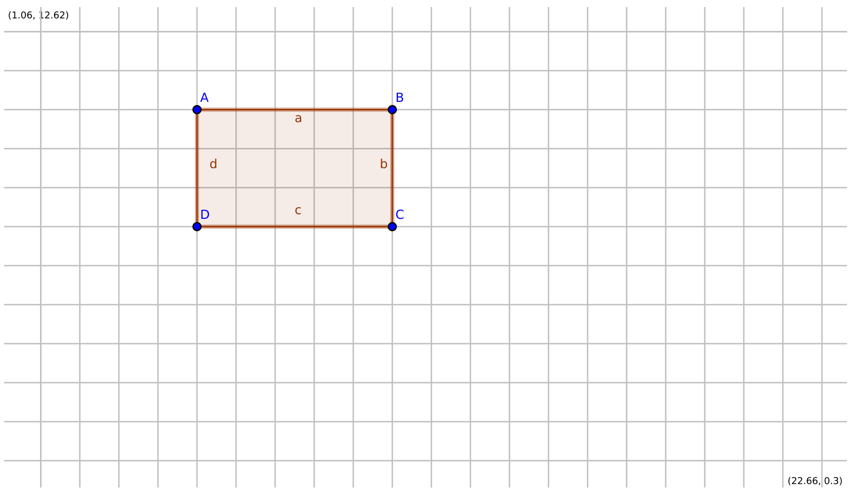


Figura 17. Cálculo del área de un rectángulo. Elaboración propia

En este MER vamos a considerar que el cuadrado es un caso particular de rectángulo donde altura y base son iguales. Por ese motivo y a partir de este mismo EM podemos obtener que la fórmula para obtener el área de un cuadrado es el resultado de multiplicar el lado del cuadrado por sí mismo.

De forma analítica, el Área de un rectángulo puede expresarse como:

A=base x altura

Y el Área de un cuadrado como:

A=lado x lado

EM5 Fórmula del área de un triángulo rectángulo.

Si dividimos un rectángulo utilizando una de sus diagonales obtenemos dos triángulos rectángulos idénticos. Por lo tanto, de aquí se deduce que el área de un triángulo rectángulo es la mitad del área del rectángulo que comparte base con él y que tiene la misma altura.

La figura 18 permite aclarar esta idea.

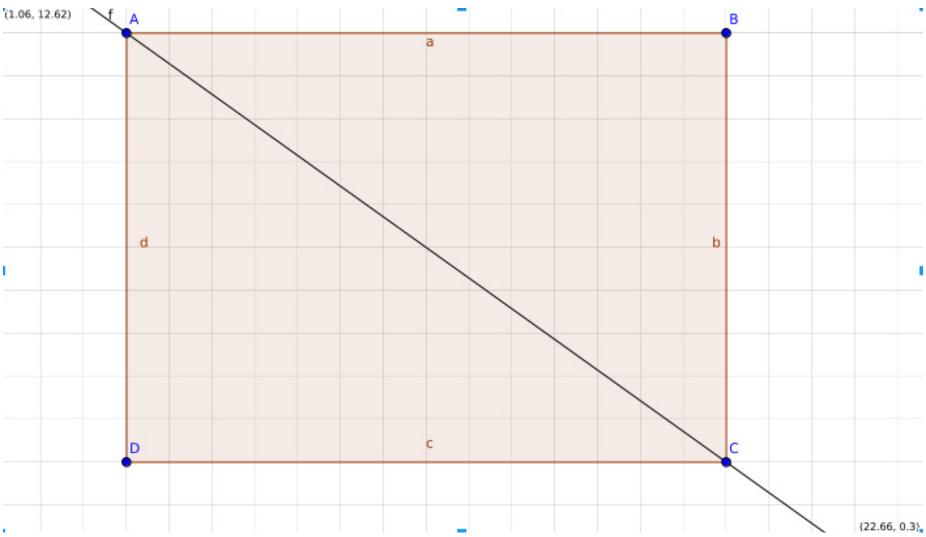


Figura 18. Área de la superficie de un triángulo. Elaboración propia

Una generalización de este EM que vamos a usar posteriormente podría enunciarse de la siguiente manera:

El área de dos triángulos rectángulos que comparten base y están encerrados entre las mismas paralelas es igual y se corresponde a la mitad del área del rectángulo que tiene la misma base que los triángulos y cuya altura es la distancia entre las paralelas que contenían a los dos triángulos originales.

El **EG3** relativo a la medición de ángulos va a generar varios EM. Aunque la medición de ángulos es una actividad compleja en los distintos niveles del espacio, el concepto de ángulo descrito en este MER (definido en el Anexo 1) y sus implicaciones es clave para justificar algunos de los EM que se desarrollarán en los puntos posteriores.

Para comprender la explicación de los siguientes EM vamos a asumir que en todos ellos disponemos de la posibilidad de dividir el espacio en noventavas partes de un recto a partir de un punto dado.

EM6 Los ángulos que se forman al levantar una semirrecta a partir de una recta dada suman 180 grados.

Cuando levantamos una semirrecta sobre una recta de forma perpendicular observamos que el espacio comprendido a cada lado de la semirrecta tiene noventa noventavas partes de un recto. Si inclinamos la semirrecta perpendicular con una inclinación que utilice partes exactas de grado podemos observar de forma directa cómo los grados que se restan a uno de los lados de la semirrecta van a parar al otro lado. Permaneciendo en todo momento la suma total como 180 grados.

Una generalización de este EM que vamos a usar posteriormente podría enunciarse de la siguiente manera:

Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien formará dos ángulos cuya suma será igual a dos rectos.

Es importante incorporar este EM ya que nos va a permitir obtener el valor de un ángulo a partir de la medición de su suplementario.

EM7 Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.

Este EM puede intuirse visualmente especialmente si asumimos que las rectas que se cortan pueden representarse en un espacio dividido en noventavas partes de un recto a partir del punto de corte. En esta situación y dada la relatividad institucional de nuestro MER, basta con contar las partes comprendidas a ambos lados del punto de corte para comprobar su igualdad. Una vez comprobada puede extenderse su uso a otros niveles del espacio dónde no resulta tan obvia.

EM8 Fórmula de las suma de los ángulos de un triángulo.

Si dividimos el espacio que abarca cada uno de los ángulos de un triángulo utilizando la división en noventavas partes de un recto. Podemos comprobar midiendo que la suma de todos ellos es igual a 180º.

Esta propiedad esencial en los triángulos permite la realización de múltiples tareas relativas a la medición de ángulos y permite obtener el valor interior de los ángulos de muchas figuras y polígonos. De nuevo nos encontramos aquí con un EM difícil de inducir de la medición directa de ángulos en el meso y en el macro-espacio pero que puede estudiarse y explorarse en el micro-espacio mediante demostraciones sencillas basadas en la división y el conteo o mediante explicaciones basadas en plegados.

Un enunciado alternativo a este EM y equivalente al quinto postulado podría ser:

En todo triángulo la suma de sus ángulos es igual a dos rectos.

EM9 En un triángulo el lado mayor se encuentra situado frente al ángulo mayor.

Si utilizamos los EG 1 y 3 para medir los ángulos y los lados que se sitúan frente a ellos en un triángulo podemos inducir fácilmente que el lado que abarca el ángulo mayor se corresponde con el lado mayor, que el lado que abarca el ángulo mediano se corresponde con el lado mediano y que el lado que abarca el ángulo pequeño se corresponde con el lado pequeño.

Gracias a este EM intuitivo se pueden realizar tareas de demostración y argumentación informales, dentro de la relatividad institucional de este MER, de la validez de una medida o de un cálculo. Estamos ante una condición necesaria pero no suficiente que puede resultar útil para el desarrollo de los niveles de razonamiento.

EM10 Cuadro de las paralelas.

En este EM vamos a definir algunas proposiciones relativas a las paralelas y a los ángulos que forman al ser cortadas por transversales.

Si trazamos una recta de forma que corte a dos paralelas y medimos el número de grados que tienen los distintos ángulos que se generan podemos deducir, como se aprecia en las figuras 19, 20, 21 y 22 que los ángulos alternos serán iguales, que el ángulo externo es igual al interno y opuesto del mismo lado, o que los dos internos del mismo lado son iguales a dos rectos.

El EM que hemos recogido aquí nos va a permitir asegurar el paralelismo de dos rectas a partir de la medición de sus ángulos o la obtención de medidas de ángulos de forma indirecta a partir del trazado de rectas paralelas.

Otras formas de enunciar este EM podrían ser:

Si al incidir una recta f sobre dos rectas, s y r, hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas, s y r, serán paralelas entre sí (Fig. 19)[13] .

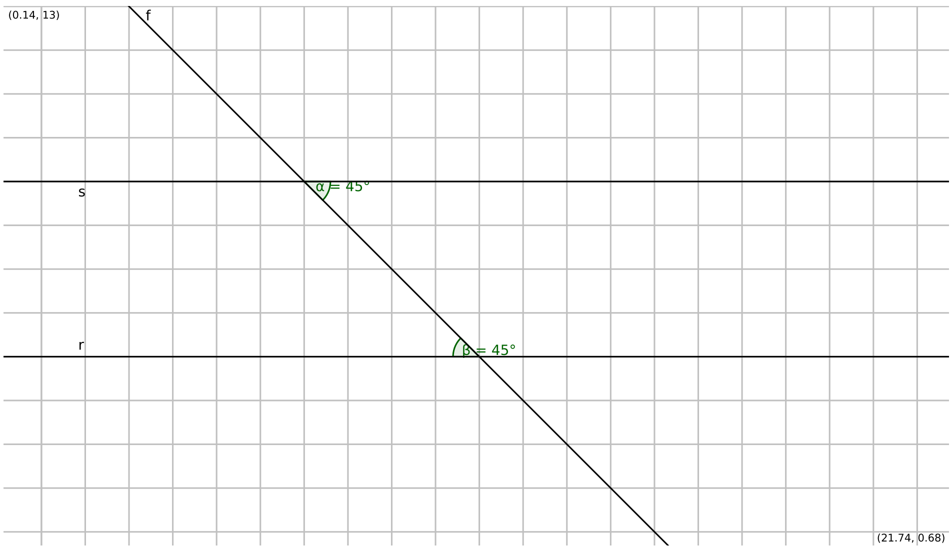


Figura 19. Ángulos alternos iguales al cortar dos paralelas. Elaboración propia.

13 Proposición 27 del Libro 1 de los elementos

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí (Fig. 20)[14].

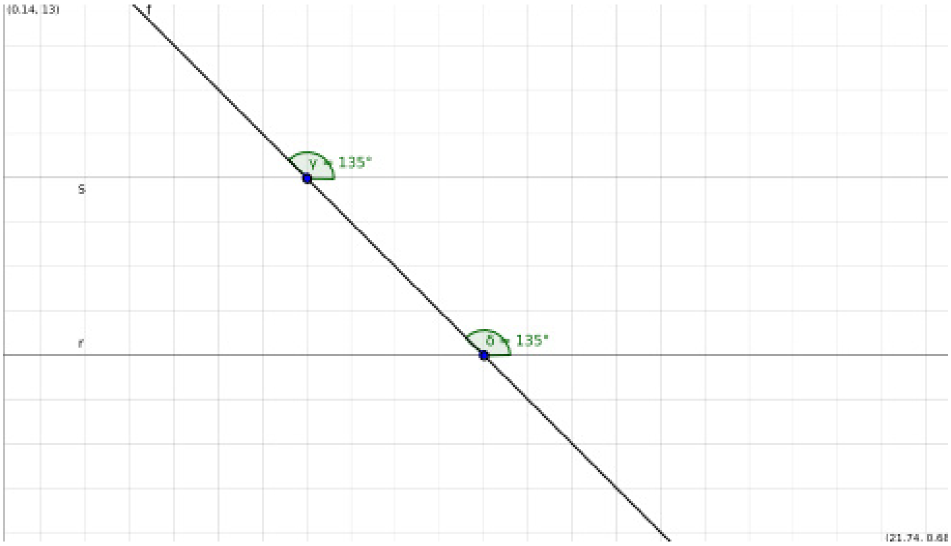


Figura 20. Ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado. Elaboración propia.

La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos (Figura 21)[15].

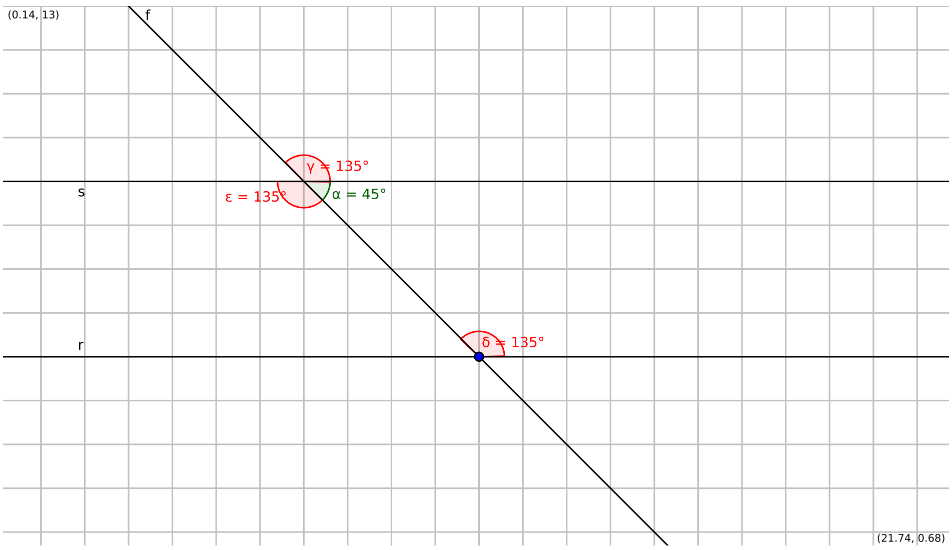


Figura 21. Ángulos iguales en rectas paralelas. Elaboración propia.

14 Proposición 28 del Libro 1 de los elementos
15 Proposición 29 del Libro 1 de los elementos

Las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí (Fig. 22)[16].

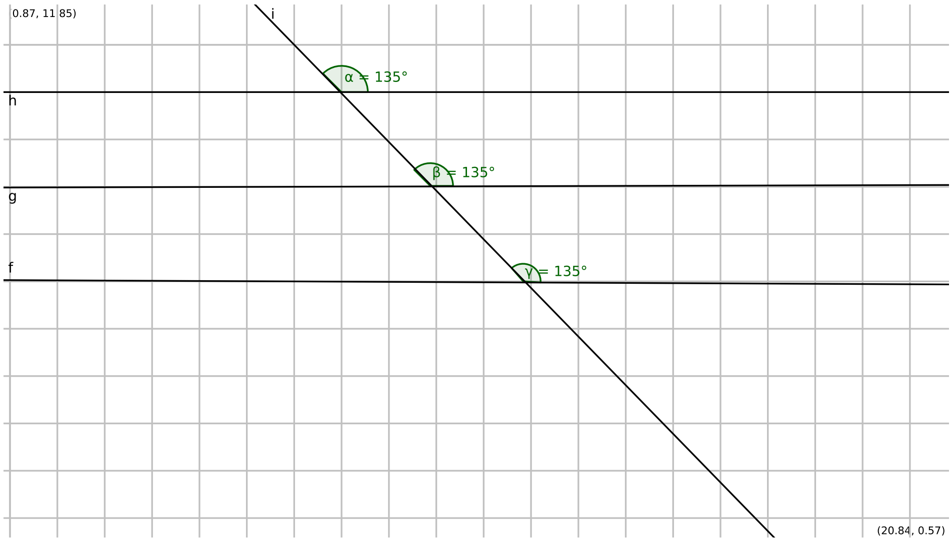


Figura 22. Rectas paralelas a una misma recta. Elaboración propia.

Antes de dar comienzo a la descripción del tercer nivel de concreción de esta primera categoría vamos a exponer una tabla que recoge los EG y EM tratados hasta el momento.

Tabla 6.

Relación entre el EG1 y los EM derivados del mismo.

EG	**EM**
Medición de la distancia entre dos puntos (EG1)	EM1 La distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une.
	EM2 En un triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.
	EM3 El radio de la circunferencia circunscrita de un hexágono regular es igual a su lado

Elaboración propia.

16 Proposición 30 del Libro 1 de los elementos

Tabla 7.

Relación entre el EG2 y los EM derivados del mismo.

EG	EM
Medición de un área rectángular cualquiera (EG2)	EM4 Fórmula de un área de un cuadrado
	EM5 Fórmula de un área de un triángulo

Elaboración propia

Tabla 8.

Relación entre el EG3 y los EM derivados del mismo.

EG	EM
Medición de un ángulo cualquiera (EG3)	EM6 Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien formará dos ángulos iguales a dos rectos.
	EM7 Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.
	EM8 En todo triángulo la suma de sus ángulos es igual a dos rectos.
	EM9 En un triángulo el lado mayor se encuentra situado frente al ángulo mayor
	EM10 Cuadro de las paralelas

Elaboración propia

2.3.4.3. Tercer nivel de concreción.

En la definición de los elementos particulares que componen este tercer nivel de medición (EP en lo sucesivo) vamos a particularizar cuando sea necesario los tres niveles del espacio que estamos considerando en este MER. Es importante entender que aunque se apoyan en los mismos EM y EG los instrumentos concretos para llevarlos a cabo son diferentes y por tanto es necesario explicarlo cuando sea necesario en este punto.

EP1 Medir la longitud de un lado de una figura plana en el micro-espacio.

Para realizar la medición de un lado en el Micro-espacio vamos a utilizar la regla graduada de tal forma que al colocar la regla graduada junto a la longitud a medir podamos comparar el número de unidades de referencia que están contenidas en ese lado. En nuestro caso aceptaremos como unidad mínima de medida el milímetro, despreciando el error de medida que se comete al no considerar distancias inferiores.

EP2 Medir la longitud de un lado de una figura plana en el meso-espacio.

Para realizar la medición de un lado en el Meso-espacio vamos a utilizar la regla graduada de pizarra y la cinta métrica, de tal forma que al colocar la regla graduada o la cinta métrica junto a la longitud a medir podamos comparar el número de unidades de referencia que están contenidas en ese lado. Es importante asegurarse en este caso que la cinta métrica está tensa y que está correctamente situada sobre el lado que se desea medir. En nuestro caso aceptaremos como unidad mínima de medida en este espacio el centímetro, despreciando el error de medida que se comete al no considerar distancias inferiores.

EP3 Medir la longitud de un lado de una figura plana en el macro-espacio.

Para realizar la medición de un lado en el Macro-espacio vamos a utilizar un medidor de distancia, de tal forma que al ir trasladando la rueda del medidor sobre el lado que se desea medir se obtenga el número de unidades de referencia que están contenidas en ese lado. Es importante asegurarse en este caso que el medidor de distancia se desplaza sobre el lado a medir sin desviarse del mismo para lo que puede ayudar marcar el lado mediante una cuerda tensa. En nuestro caso aceptaremos como unidad mínima de medida en este espacio el decímetro, despreciando el error de medida que se comete al no considerar distancias inferiores.

EP4 Medir la longitud de una diagonal en una figura plana en el microespacio.

La medición de la diagonal es equivalente a la medición del lado (EP1).

EP5 Medir la longitud de una diagonal en una figura plana en el meso-espacio.

La medición de la diagonal es equivalente a la medición del lado (EP2).

EP6 Medir la longitud de una diagonal en una figura plana en el macro-espacio.

La medición de la diagonal es equivalente a la medición del lado (EP3).

EP7 Medir la longitud del perímetro de una figura plana en el micro-espacio.

La medición del perímetro se obtiene realizando la medición de los lados que conforman la figura como en EP1 y sumando los resultados.

EP8 Medir la longitud del perímetro de una figura plana en el meso-espacio.

La medición del perímetro se obtiene realizando la medición de los lados que conforman la figura como en EP2 y sumando los resultados.

EP9 Medir la longitud del perímetro de una figura plana en el macro-espacio.

La medición del perímetro se obtiene realizando la medición de los lados que conforman la figura como en EP3 y sumando los resultados.

EP10 Comprobar la posibilidad o imposibilidad de construir un triángulo a partir de las medidas de tres lados conocidos.

En este caso no es necesario precisar el EP según los niveles del espacio al entender que estos ya han sido tenidos en cuenta a la hora de obtener las medidas de los lados del triángulo que se considera.

Un triángulo solo se podrá construir cuando la suma de las medidas de los dos lados menores sea superior a la medida del lado mayor.

La realización de este EP se considera relevante para la construcción del nivel 2 de razonamiento ya que permite establecer una propiedad de los triángulos y sienta la base para realizar algunas demostraciones informales en el nivel 3 de razonamiento.

EP11 Comprobar si las medidas obtenidas al medir los lados de un triángulo pueden ser correctas.

En este caso no es necesario precisar el EP según los niveles del espacio al entender que estos ya han sido tenidos en cuenta a la hora de obtener las medidas de los lados del triángulo que se considera.

Las medidas realizadas solo podrán ser correctas si la suma de las medidas de los dos lados menores es superior a la medida del lado mayor (EM2).

Esta tarea permite introducir al alumno en la idea de condición necesaria pero no suficiente lo que sienta la base para realizar algunas demostraciones informales en el nivel 3 de razonamiento.

EP12 Medir la longitud de los lados de un hexágono regular real a partir del radio de la circunferencia circunscrita.

En EM3 se estableció que la medida del radio de la circunferencia circunscrita en un hexágono regular es igual a la medida del lado del hexágono regular. Gracias a este EM los alumnos podrán obtener la medida del lado del hexágono en cualquier nivel del espacio midiendo el radio de la circunferencia que lo circunscribe.

Este EP puede resultar especialmente útil cuando no es posible la realización de la medida del lado del hexágono debido a dificultades o irregularidades sobre el terreno.

EP13 Medir la longitud del radio de la circunferencia circunscrita real a partir de los lados de un hexágono regular.

Como ya se ha descrito en EP12 gracias a EM3 los alumnos podrán obtener la medida del radio de la circunferencia circunscrita midiendo el lado del hexágono regular inscrito en ella.

Este EP puede resultar especialmente útil en cualquier nivel del espacio cuando no es posible la realización de la medida del radio de la circunferencia circunscrita debido a dificultades o irregularidades sobre el terreno.

EP14 Calcular el área de un cuadrado a partir de la medición de su lado.

En este caso no es necesario precisar el EP según los niveles del espacio al entender que estos ya han sido tenidos en cuenta a la hora de obtener las medidas del lado del cuadrado que se considera o sea aplicando EP1, EP2 o EP3 según corresponda.

El área del cuadrado se obtiene multiplicando el lado medido por si mismo.

EP15 Medir por defecto el área de un polígono contando el número de unidades de superficie contenidas en un espacio interior dividido en cuadrados.

Las cuadrículas son comunes al trabajar en el micro-espacio donde es habitual utilizar un papel milimetrado o cuadriculado. También es posible que estas cuadrículas estén presentes en el meso o en el macro-espacio si los polígonos a medir están construidos sobre baldosas o losetas cuadradas.

En estos casos se puede obtener una medida aproximada del área del polígono contando el número de unidades de superficie completas contenidas en el interior de la figura poligonal.

EP16 Medir por exceso el área de un polígono contando el número de unidades de superficie contenidas y que se solopan por los lados del polígono en una superficie dividida en cuadrados.

Las cuadrículas son comunes al trabajar en el micro-espacio donde es habitual utilizar un papel milimetrado o cuadriculado. También es posible que estas cuadrículas estén presentes en el meso o en el macro-espacio si los polígonos a medir están construidos sobre baldosas o losetas cuadradas.

En estos casos se puede obtener una medida aproximada del área del polígono contando el número de unidades de superficie completas o parcialmente contenidas en el interior de la figura poligonal

EP17 Medir el área de un rectángulo contando las unidades de superficie contenidas en su espacio interior cuando las esquinas del rectángulo coinciden con las esquinas de los cuadrados que dividen la superficie interior.

En ocasiones se utilizan las divisiones en forma de cuadricula de los distintos niveles del espacio para trazar figuras rectangulares. Cuando los cuadrados interiores coinciden con las esquinas del rectángulo y su lado es un divisor común a la medida de la base y la altura del rectángulo se puede obtener la medida exacta del rectángulo mediante el conteo de las unidades de superficie contenidas en él.

EP18 Calcular el área de un rectángulo a partir de la medición de sus lados.

Las posibilidades de contar unidades de superficie interiores son muy limitadas especialmente en el meso y en el macro-espacio. Por ese motivo la tarea más habitual va a ser proceder a medir, con las limitaciones propias de cada nivel del espacio, la base y la altura de los rectángulos que se deseen medir y obtener su área mediante la multiplicación de ambas medidas.

EP19 Sumar el área de dos rectángulos.

El EG 2 permite afirmar que la suma de las áreas de dos rectángulos se puede obtener mediante la suma aritmética de sus áreas calculadas individualmente una vez satisfechas las mediciones atendiendo a los diferentes niveles del espacio.

EP20 Restar el área de dos rectángulos.

El EG 2 permite afirmar que la resta del área de dos rectángulos se puede obtener mediante la resta aritmética del área del rectángulo mayor menos la superficie del rectángulo menor, una vez satisfechas las mediciones atendiendo a los diferentes niveles del espacio.

EP21 Dividir un rectángulo en partes iguales.

La división de un rectángulo en partes iguales se puede hacer dividiendo la base o la altura del rectángulo en partes iguales mediante medición y aritmética. En este EP se puede comprobar que la suma de los rectángulos obtenidos es equivalente al área del rectángulo original tal y como se ha hecho en EP19.

EP22 Calcular el área de un triángulo a partir de la medición de sus lados y su altura.

Las posibilidades de contar unidades de superficie interiores son muy limitadas especialmente en el meso y en el macro-espacio. Por ese motivo el EP más habitual va a ser proceder a medir, con las limitaciones propias de cada nivel del espacio, la base y la altura de los triángulos que se deseen medir y obtener su área mediante la multiplicación de ambas medidas y su posterior división entre 2.

EP23 Medir un ángulo dado utilizando transportador.

Los transportadores son herramientas graduadas que permiten medir cuántos grados abarca un determinado ángulo. Aunque los hay de diferentes tamaños, su uso está limitado al micro-espacio y al meso-espacio (si se utilizan transportadores de ángulos de pizarra). Para realizar esta medición basta hacer coincidir los lados del ángulo objeto de medida con las marcas existentes en el instrumento de medida y que señalan los grados que abarca. La medición mediante este instrumento no es demasiado precisa, especialmente en el mesoespacio, no obstante, dada la naturaleza de este MER creemos que el proceso de medición tiene más valor que la precisión de la medida en sí. Por este motivo aceptaremos esta herramienta como válida.

EP24 Medir un ángulo dado utilizando un portaángulos.

Los portaángulos son herramientas graduadas que permiten medir cuántos grados abarca un determinado ángulo en el macro-espacio. Para realizar esta medición basta hacer coincidir los lados del ángulo objeto de medida con las marcas existentes en el instrumento de medida y que señalan los grados que abarca. La medición mediante este instrumento no es demasiado precisa, no obstante dada la naturaleza de este MER creemos que el proceso de medición tiene más valor que la precisión de la medida en sí. Por este motivo aceptaremos esta herramienta como válida.

EP25 Transportar un ángulo conocido mediante un transportador de ángulos.

Para transportar un ángulo mediante el transportador basta con trazar una línea y situar sobre ella la parte horizontal de la herramienta. Una vez hemos hecho coincidir ambas líneas buscamos en la escala graduada el valor del ángulo a transportar y procedemos a unir el vértice del ángulo con la línea señalada por la escala. Aceptaremos que este procedimiento es posible en el micro-espacio y en el meso-espacio.

EP26 Transportar un ángulo conocido mediante un portaángulos.

Para transportar un ángulo mediante el portaángulos basta con trazar una línea y situar sobre ella una de las partes de la herramienta. Una vez hemos hecho coincidir la línea y una de las partes de la herramienta, abrimos la herramienta buscando en la escala graduada el valor del ángulo a transportar. Marcamos mediante una estaca que se encuentre en la línea de visión del portaángulos un punto perteneciente al otro lado del ángulo que deseamos transportar y procedemos a unir el vértice del ángulo con el punto señalado por la estaca. Aceptaremos que este procedimiento, a pesar de su inexactitud, es posible en el macro-espacio.

EP27 Medir un ángulo prolongando los lados que lo limitan.

En los distintos niveles del espacio pueden producirse situaciones donde sea más sencillo medir el ángulo opuesto por el vértice que el ángulo que se pretende medir (utilizando EM8). Con el fin de salvar estas dificultades físicas se puede prolongar el trazado de los lados que limitan el ángulo que se quiere medir y realizar la medición sobre el ángulo opuesto por el mismo vértice.

EP28 Obtención del ángulo de un triángulo conocidos los otros dos.

Los ángulos de un triángulo suman dos rectos, tal y como ha quedado definido en el EM8. Por ese motivo, podemos obtener el ángulo desconocido mediante una resta. Si a 180º se le restan los ángulos conocidos podemos obtener el valor del ángulo desconocido independientemente del nivel del espacio en el que nos manejemos.

EP29 Obtención de los distintos ángulos de un triángulo isósceles conocido uno de sus ángulos.

Los triángulos isósceles por definición tienen dos lados y dos ángulos iguales, por lo que para la realización de este EP los estudiantes pueden conocer el ángulo repetido o el ángulo desigual. En ambos casos podemos usar el EM8 que asegura que los ángulos de un triángulo suman 180º. Si se trata del ángulo desigual los estudiantes podrán superar este EP restando a 180 el ángulo conocido y dividiendo el resultado por 2. Si se trata del ángulo igual los estudiantes podrán obtener el ángulo desigual restando a 180 el ángulo igual dos veces. Este EP es independiente del nivel del espacio en el que se realice.

EP30 Comprobar la validez de las medidas de los ángulos obtenidos a partir de las medidas de los lados.

Una vez realizadas las medidas de ángulos y lados atendiendo a los diferentes niveles del espacio. El estudiante puede de nuevo comprobar si se cumple la condición necesaria pero no suficiente de que el ángulo mayor se sitúa frente al lado mayor, el ángulo mediano se sitúa frente al lado mediano y el ángulo pequeño se sitúa frente al lado pequeño.

EP31 Comprobar la validez de las medidas de los lados obtenidos a partir de las medidas de los ángulos.

Una vez realizadas las medidas de ángulos y lados atendiendo a los diferentes niveles del espacio. El estudiante puede de nuevo comprobar si se cumple la condición necesaria pero no suficiente de que el lado mayor se sitúa frente al ángulo mayor, el lado mediano se sitúa frente al ángulo mediano y el lado pequeño se sitúa frente al ángulo pequeño.

EP32 Obtención del ángulo conjugado a uno dado.

El ángulo conjugado a uno dado es tal que completa un giro completo. Por ese motivo para obtener el ángulo conjugado a uno dado basta con restar a 360º el ángulo dado. Esta operación es independiente del nivel del espacio.

EP33 Medir un ángulo a partir de una paralela a uno de los lados que lo conforman.

Cuando nos encontramos en una superficie en la que hay trazadas múltiples líneas paralelas entre sí podemos obtener la medida relativa a un ángulo prolongando los lados que lo conforman y realizando la medición del mismo sobre algunas de las paralelas que son cortadas por la prolongación de los lados del ángulo. Esta situación permite desplazar el punto de medición a otro lugar de la superficie cuando existe dificultades para realizar la medición en el lugar original. Aunque esta circunstancia será más frecuente en el micro-espacio es posible, como hemos indicado más arriba, que los ángulos que se desean medir en el meso-espacio y en macro-espacio estén trazados sobre áreas que presenten algún tipo de división regular.

2.3.4.4. Cuadros resumen de los elementos de medición definidos.

A continuación se presentan 3 cuadros resumen de los elementos por niveles de concreción definidos para facilitar al lector su consulta.

Tabla 9.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG1.

EG	EM	EP
Medición de la distancia entre dos puntos (EG1)	EM1 La distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une.	EP1, EP4 y EP7
		EP2, EP5 y EP8
		EP3, EP6 y EP9

Elaboración propia.

Tabla 10.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG2

EG	EM	EP
Medición de un área rectángular cualquiera (EG2)	EM4 Fórmula del área de un cuadrado	EP14, EP15, EP16, EP17, EP18, EP19, EP20, EP21
		EP14, EP15, EP16, EP17, EP18, EP, EP20, EP21
		EP14,EP15,EP16,EP17,EP18,EP19,EP20, EP21
	EM5 Fórmula del área de un triángulo	EP22
		EP22
		EP22

Elaboración propia.

Tabla 11.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG3.

EG	EM	EP
Medición de un ángulo cualquiera (EG3)	EM6 Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien formará dos ángulos iguales a dos rectos.	EP23, EP25
		EP23, EP25
		EP24, EP26
	EM7 Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.	EP27
		EP27
		EP27
	EM8 En todo triángulo la suma de sus ángulos es igual a dos rectos.	EP28, EP29
		EP28, EP29
		EP28, EP29
	EM9 En un triángulo el lado mayor se encuentra situado frente al ángulo mayor	EP30, EP31
		EP30, EP31
		EP30, EP31
	EM10 Cuadro de las paralelas	EP32, EP33
		EP32, EP33
		EP32, EP33

Elaboración propia.

2.3.5. Descripción y definición de los elementos que permiten establecer la semejanza de figuras proporcionales.

En muchas ocasiones no es posible trabajar directamente sobre la longitud, el ángulo o el área que se desea medir. Por ese motivo es necesario establecer un conjunto de elementos que permitan la transformación de las figuras planas sin que esa transformación modifique ciertas condiciones iniciales de la figura.

El concepto de semejanza que aceptamos en este MER, y que definimos a continuación, permite establecer esas transformaciones.

Semejanza: Dos figuras son semejantes si sus ángulos interiores son iguales y sus lados comparados en el mismo orden son proporcionales.

2.3.5.1. Primer nivel de concreción.

Para construir los elementos de semejanza vamos a definir un nuevo EG: la proporcionalidad. Dada la naturaleza geométrica de este trabajo, vamos a definir la proporcionalidad desde los conceptos geométricos. Esta aproximación geométrica a la proporcionalidad podría haberse planteado desde otros campos de las Matemáticas pero hemos preferido mantener como teoría generadora de nuestros elementos la Geometría plana euclidea, por ese motivo, la construcción del EG de la proporcionalidad se hará adaptando la obra de Euclides.

EG 4 Proporcionalidad.

En el libro V de los elementos se desarrolla una teoría geométrica de la proporcionalidad, que dada la naturaleza de este MER nos va a servir como guía a la hora de establecer los EG, los EM y los EP relativos al trabajo con la semejanza.

A modo de demostración, exponemos en el anexo 2 una serie de 4 desarrollos parciales del EG4 que permitirán demostrar la definición de proporcionalidad que utilizaremos en este MER.

A partir de estos 4 desarrollos parciales podemos enunciar el EG de la proporcionalidad que utilizaremos en este MER de la siguiente manera:

EG 4: Si cuatro líneas BF, BC, AB y BG son tales que la relación entre la primera y la segunda es igual a la relación entre la tercera y la cuarta, entonces el rectángulo que tiene por altura y por base la primera y cuarta de éstas líneas es equivalente al rectángulo que tiene por altura y por base la segunda y la tercera.

O dicho de otra manera cuatro cantidades están en proporción cuando la primera entre la segunda es igual a la tercera entre la cuarta.

Además del EG4 sobre proporcionalidad descrito anteriormente, dentro de la relatividad institucional de nuestro MER, vamos a definir dos figuras como semejantes cuando tengan los ángulos correspondientes iguales y los lados homólogos proporcionales.

2.3.5.2. Segundo nivel de concreción.

A partir de **EG4** vamos a definir tres EM que nos van a permitir construir el conjunto de EP relativos a las escalas. Dentro de este MER se considera fundamental la ampliación y la reducción de figuras planas ya que, gracias a estas tareas, es posible la construcción de planos a escala y la realización de cálculos en un nivel del espacio que sean trasladables a otros niveles del espacio. Los conceptos de proporcionalidad y semejanza son la respuesta a las limitaciones que aparecen en la medición al trabajar en el meso y en el macro-espacio. Por tanto dentro de la relatividad de nuestro MER la semejanza adquiere sentido cuando ante una dificultad de medida se produce un cambio de tamaño para representar una figura en un nivel del espacio diferente.

En este apartado se definirán tres EM esenciales para poder transformar las figuras entre los diferentes niveles del espacio previstos manteniendo la semejanza.

EM11 Proporcionalidad directa.

Cuando disponemos de tres de las cuatro longitudes proporcionales entre sí podemos obtener la magnitud desconocida aplicando este EM de la siguiente manera.

Multiplicamos la longitud primera por la cuarta o la segunda por la tercera en función de cuál de ellas sea la desconocida. Una vez resuelta esta multiplicación dividimos el resultado por la tercera longitud conocida. El resultado así obtenido es la cuarta longitud deseada.

Este EM es equivalente al desarrollo parcial $EG4_4$ (anexo2) realizado en la construcción del EG de proporcionalidad y nos va a permitir obtener el valor de las medidas de longitud de una figura semejante una vez se conoce el tamaño de un mismo lado en la figura original y en la figura semejante.

EM12 Razón de semejanza para longitudes.

La razón de semejanza entre dos longitudes proporcionales pueden obtenerse dividiendo una entre otra. La obtención de la razón de semejanza entre dos longitudes permite ampliar figuras mediante la multiplicación de la longitud a ampliar por la razón de semejanza. De forma inversa para la reducción de figuras podemos dividir la longitud a reducir por la razón de semejanza para obtener la longitud proporcional. Este EM es esencial para la conversión de figuras de un nivel del espacio a otro.

EM13 Razón de semejanza para áreas.

La razón de semejanza entre dos áreas puede obtenerse dividiendo ambas superficies y calculando la raíz cuadrada del resultado de la división. En las figuras semejantes la razón de semejanza está actuando en las dos dimensiones de la figura por ese motivo para obtener la razón de semejanza hemos de realizar la raíz cuadrada. Gracias a este EM los cálculos de áreas realizados en una figura semejante pueden trasladarse a la figura original sin necesidad de medir allí de nuevo.

Antes de dar comienzo a la descripción del tercer nivel de concreción de esta segunda categoría vamos a exponer una tabla que recoge los EG y EM tratados hasta el momento.

Tabla 12.

Relación entre el EG4 y los EM derivados del mismo.

EG	**EP**
Proporcionalidad (EG4)	EM11 Proporcionalidad directa
	EM12 Razón de semejanza para longitudes
	EM13 Razón de semejanza para superficies

Elaboración propia.

2.3.5.3. Tercer nivel de concreción.

EP34 Calcular la altura de un rectángulo semejante a uno dado que tenga una base conocida y una altura diferente.

Para obtener analíticamente las dimensiones de un rectángulo equivalente del que conocemos la base, podemos utilizar el EM de la proporcionalidad directa (EM11), donde los datos conocidos serían la base y altura del rectángulo dado y la base del rectángulo equivalente.

EP35 Obtener analíticamente las medidas de una figura semejante a otra cuando se conocen todos sus datos y al menos la medida de una de las dimensiones en la figura semejante y cual es su correpondiente en la original.

Para obtener las distintas dimensiones de la figura semejante se procede de forma sucesiva a la realización de varias proporcionalidades directas en la que dos de los datos utilizados son las dimensiones conocidas de la figura original y la figura semejante y el tercer dato es la dimensión de la figura original de la que se pretende obtener la medida a escala.

Este procedimiento se realiza de forma sucesiva hasta completar la figura.

EP36 Obtener analíticamente una medida real a partir de su figura a escala conocida la escala.

En muchas ocasiones debemos calcular medidas reales a partir de planos. Para realizar este EP, y apoyándonos en las reglas de proporcionalidad, podemos medir la distancia en el plano y aplicar la técnica de la proporcionalidad directa para obtener su valor real. Para la utilización de este EP utilizaremos los datos relativos a la escala y el dato obtenido al realizar la medición en el plano.

EP37 Obtener analíticamente una medida a escala a partir de una figura real conocida la escala.

En muchas ocasiones nos interesará realizar un plano a escala de una figura real. Para realizar este EP y apoyándonos en las reglas de proporcionalidad, podemos medir la distancia real y aplicar el EM de la proporcionalidad directa para obtener su valor real. Para la utilización de este EM utilizaremos los datos relativos a la escala que deseemos establecer y el dato obtenido al realizar la medición en la figura real.

EP38 Obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una ampliación de la original utilizando cualquier razón de semejanza.

Para obtener las dimensiones de la figura semejante basta con aplicar un simple procedimiento de multiplicación de las dimensiones de la figura original por la razón de semejanza que se quiera utilizar.

EP39 Obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando cualquier razón de semejanza.

Para obtener las dimensiones de la figura semejante basta con aplicar un simple procedimiento de división de las dimensiones de la figura original por la razón de semejanza que se quiera utilizar.

EP40 Obtener analíticamente la medida de un área real a partir de su escala.

Cuando se trabaja con figuras semejantes a escala, debemos tener en cuenta que la escala empleada se aplica a todas las dimensiones de la figura. Por ese motivo cuando multiplicamos las dimensiones de la figura para obtener el área estamos aplicando la escala por duplicado en cada dimensión y en cada una de las medidas. La medición del área obtenida mediante cualquiera de los EP de medición de áreas debe por tanto multiplicarse por la escala al cuadrado para obtener el área real (EM13).

EP41 Obtener analíticamente la medida de un área a escala a partir de un área real.

Tal y como se ha explicado en el EP anterior todas las medidas se ven afectadas por la escala que se desee aplicar por ese motivo para obtener el área de una figura a escala a partir de sus medidas reales debemos dividir el dato obtenido en el área real por el cuadrado de la escala deseada (EM13).

2.3.5.4. Cuadro resumen de los elementos de proporcionalidad definidos.

A continuación se presentan el cuadro resumen de las praxeologías definidas para facilitar al lector su consulta.

Tabla 13.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG4.

EG	EM	EP
Proporcionalidad (EG4)	EM11 Proporcionalidad directa	EP34, EP35, EP 36, EP37
	EM12 Razón de semejanza para longitudes	EP38, EP39
	EM13 Razón de semejanza para áreas	EP40, EP41

Elaboración propia.

2.3.6. Descripción y definición de los elementos que permiten el trazado de figuras planas.

Dentro de la Geometría elemental es necesario definir instrumentos que permitan el trazado de líneas rectas y el trazado de líneas curvas. Históricamente este papel fue asignado a la regla sin graduar y al compás. Estas herramientas junto a la definición de los EG de las paralelas y las perpendiculares nos van a permitir generar un cuerpo de herramientas de trazado válido dentro de los límites que este MER abarca. Consideramos que la inclusión de estos elementos de carácter sintético es especialmente importante para el trabajo de la Geometría en los últimos cursos de la Educación Secundaria y el Bachillerato en línea con los planteamientos de Gascón (2002 y 2003) y nos desmarcamos por tanto dentro de la relatividad de este MER de la división legislativa que ha llevado un gran número de estos elementos hacia las asignaturas de educación plástica y dibujo técnico.

Aunque no lleva asociado dentro de este MER ningún EG particular y utiliza los EG ya definidos, nos gustaría incluir dentro de este punto el concepto de congruencia de figuras. En ocasiones cuando dentro de la superficie a medir existen obstáculos que dificultan la medida puede ser recomendable trazar una figura congruente a la que se pretende medir en un terreno despejado próximo. Por ese motivo es bueno tener claro el concepto de congruencia de figuras y estudiar el conjunto de elementos que permiten asegurar que dos figuras son congruentes entre sí junto a los elementos de trazado.

Para aclarar el concepto de congruencia que aceptaremos dentro de este MER se ofrece la siguiente definición:

Congruencia de figuras: Las figuras congruentes son aquellas que pueden hacerse coincidir mediante superposición. Coinciden en forma y tamaño pero difieren en posición. Se desprende del octavo postulado que haciendo corresponder partes o porciones de figuras que son congruentes las figuras serán iguales en todos los aspectos.

2.3.6.1. Primer nivel de concreción.

EG 5: Regla y compás.

La recta y el círculo suponen las figuras elementales sobre las que se construye la

Geometría plana. En la introducción a los Elementos de Euclides realizada por Vega encontramos lo siguiente:

> Por otra parte, en los postulados (i)-(iii) late una tradición consciente no sólo de la efectividad de un método elemental de construcción, sino de sus limitaciones. Según Pappo (Col. III 54-56; IV 270-272), los geómetras habían llegado a distinguir tres tipos de problemas: los planos, para cuya solución bastaban las líneas rectas y círculos; los sólidos, que suponían el empleo de cónicas; los lineales, que pedían curvas más complicadas, como las "cuadratices" de Hipias o las espirales de Arquimedes. Quizás llevara su tiempo reconocer que no todo problema de la Geometría plana es un problema plano. Problemas como la bisección del ángulo, la duplicación del cuadrado, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo son problemas bien conocidos en la tradición matemática anterior a Euclides. Todos ellos pueden plantearse en Geometría plana; pero solo los dos primeros admiten solución efectiva con el simple uso de unas figuras elementales (la recta y el círculo) y de las configuraciones compuestas por ella. Euclides ofrece un criterio de discriminación al respecto: Sea A un problema planteado en los términos de la geometría plana; A es un problema plano sólo si es efectivamente soluble por el procedimiento de regla y compás; luego, si A es un problema plano, A tiene una construcción efectiva sobre la base sentada en los Elementos. (Vega, 1991, p. 55).

La regla y el compás representan un conjunto de tecnologías que permiten abordar la solución de un gran número de tareas y que justifican en última estancia las técnicas válidas para la solución de las mismas.

Dentro de este MER tenemos en cuenta los diferentes niveles del espacio y por tanto entenderemos las herramientas que concretan la regla y el compás en un sentido amplio aceptando que en el macro-espacio el uso de cuerdas tensas puede servir de regla y el trazado de curvas a partir de cuerdas ancladas en un punto será igualmente válido y equivalente al compás euclideo. Naturalmente es muy poco realista tratar de emular las construcciones válidas en el micro-espacio, en el meso o en el macro-espacio de este modo. Gracias a los sistemas de coordenadas se pueden realizar construcciones precisas en el meso y en el macro-espacio, sin embargo, dejamos deliberadamente de lado en este MER los sistemas de coordenadas y preferimos abordar el trazado rudimentario en el meso y en el macro-espacio mediante cuerdas.

Creemos que la limitación de las técnicas en estos niveles del espacio puede ser una fuente interesante de cuestiones que podrían dar lugar a líneas de trabajo futuras y ampliaciones de nuestro MER pero que dentro de las limitaciones de este trabajo no van a ser abordadas.

La regla y el compás, y sus equivalentes en los distintos niveles del espacio, son, por tanto, los medios elementales elegidos para afrontar los problemas planos de trazado en este MER.

> Puede que los matemáticos alejandrinos de estricta observancia euclídea trataran de imponer además una directriz de parsimonía en este sentido: si A es un problema de Geometría plana, ha de abordarse su solución con estos medios elementales antes de proceder de modo expeditivo a su solución por otros procedimientos más complicados (como las curvas empleadas en los problemas lineales) o de dudoso origen (como los recursos de carácter mecánico), cuyo uso no está sancionado por la práctica seguida en los Elementos. (Vega, 1991, p.56).

EG 6: Perpendiculares y paralelas.

A pesar de que el trazado de paralelas y perpendiculares podría obtenerse como un producto de EG5 dada la importancia que tienen dentro de la relatividad institucional de este MER vamos a aceptar además del uso de rectas y circunferencias el uso de las herramientas de escuadra y cartabón dentro de este EG lo que le da un carácter propio. El trazado de paralelas y perpendiculares constituye una actividad central en la mayoría de los EM relacionadas con el trazado y la construcción de figuras. Asimismo la definición de unos ejes ortonormales es un elemento imprescindible a la hora de establecer los ejes de coordenadas que van a servir de referencia para la Geometría analítica plana posterior.

Como se ha indicado en las definiciones la recta perpendicular es la que forma un ángulo recto con otra recta. Dentro de los límites de este MER aceptaremos como evidente que esta recta recorre el camino más corto entre un punto exterior a una recta y la misma recta como puede apreciarse en la figura 23.

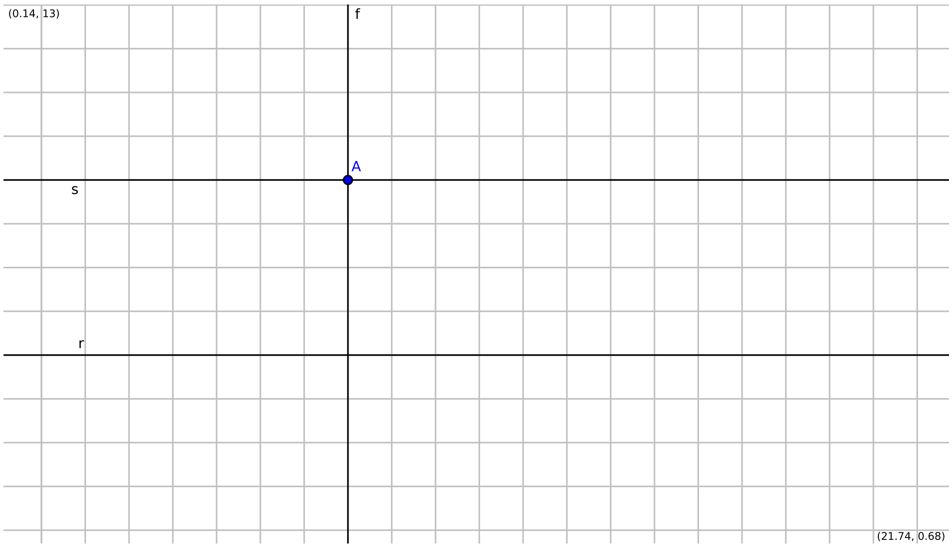


Figura 23. Recta perpendicular a una recta por un punto exterior. Elaboración propia

Esta propiedad de la recta perpendicular junto al axioma 4, donde se asegura que todos los ángulos rectos son iguales, es clave para realizar cálculos de distancias, medidas de ángulos y construcciones geométricas. Por ese motivo en este MER consideramos el trazado de perpendiculares como parte de un EG que permite la concreción de un gran número de EM de trazado.

El trazado de paralelas es una consecuencia directa del quinto axioma. De hecho, tal y como se ha visto en el desarrollo del saber sabio, su aceptación o no es la que condiciona la creación de otras geometrías alternativas a la Geometría Euclidea. En nuestro MER no vamos a considerar otras Geometrías diferentes a la Euclídea, por lo que para nosotros el trazado de una paralela a una recta solo puede dar como resultado una única recta que en ningún caso variará su distancia a la recta inicial y que por tanto no la cortará nunca.

Gracias al trazado de rectas paralelas y perpendiculares podremos, como ya se ha indicado anteriormente, construir y trazar la mayoría de figuras, establecer unos ejes de coordenadas y definir adecuadamente algunas de las figuras principales. Por ese motivo consideraremos el trazado de paralelas como un EG.

Cabe destacar aquí, que al igual que hicimos en el EG anterior, este MER se va a abordar desde distintos niveles del espacio y que, por tanto, las técnicas y tareas pueden variar en función del nivel del espacio. Sin embargo, el macro-espacio considerado no supera el kilómetro y se considera idealmente plano, por lo que la EG que permite el trazado de las paralelas y las perpendiculares se considera valida, para los distintos niveles del espacio, en los términos definidos anteriormente.

2.3.6.2. Segundo nivel de concreción.

La demostración de los EM aquí comprendidos está completamente desarrollada en el saber sabio geométrico, no obstante en este MER haremos un esfuerzo por detallar la mayoría de estos EM.

Únicamente en aquellos casos donde el EM sea especialmente relevante para este MER o tenga una demostración alcanzable para los alumnos del primer ciclo de secundaria nos detendremos a describir la demostración. En estos casos y para facilitar la lectura remitiremos al lector al Anexo 2 para ver la demostración completa.

A partir del **EG 5** podemos deducir un conjunto de EM que permiten solucionar algunos de los EP más elementales.

En concreto podemos entender como EM que emanan del uso de la regla y el compás los siguientes:

EM14 Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado igual al lado del triángulo.

Para construir un triángulo equilátero a partir de un segmento que es igual al lado del triángulo basta con trazar dos arcos de circunferencia con centro en los extremos del segmento y radio la longitud del mismo. El punto dónde se corten ambos arcos será el tercer vértice del triángulo equilátero buscado. Uniendo los extremos del segmento con el vértice hallado se obtendrá el triángulo equilátero.

EM15 Poner en una línea recta un segmento igual a uno dado en un punto dado como extremo perteneciente a la línea recta.

Para poner un segmento dado sobre una línea a partir de un extremo conocido perteneciente a la misma basta con trazar un arco con centro en el extremo dado y radio igual al segmento dado.

EM16 Dados dos segmentos desiguales, quitar del mayor un segmento igual al menor.

Para quitar a un segmento mayor uno menor se traza un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos del segmento mayor y radio el segmento menor. El segmento que se obtiene desde el punto de corte obtenido hasta el otro extremo del segmento mayor es el segmento buscado.

EM17 Dividir en dos partes iguales un ángulo formado por lados rectos dados. Bisectriz.

Sea el ángulo definido por los segmentos AB y AC. Para definir la recta que divide en dos partes iguales al ángulo BAC, procederemos de la siguiente forma. Con centro en A y radio cualquiera se traza una circunferencia que corte a los segmentos AB y AC en los puntos D y E. Con el mismo radio y centro en D se traza una segunda circunferencia y con centro en E y radio igual a la utilizada se traza una tercera circunferencia. Ambas circunferencias se cortarán en un punto F interior al ángulo dado que se encontrará a la misma distancia de los segmentos que componen el ángulo. Si unimos el punto A con el punto F tendremos una recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

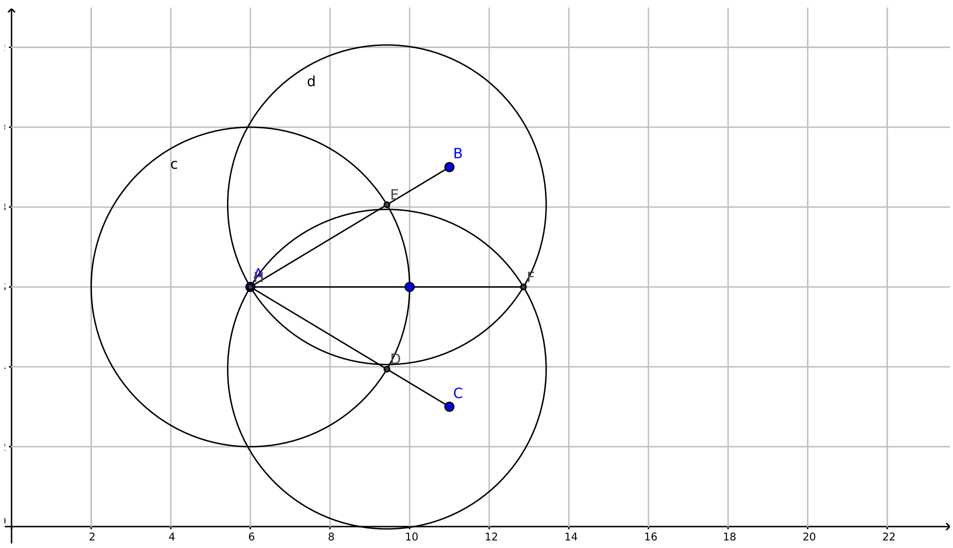


Figura 24. Biséctriz de un ángulo formado por lados rectos. Elaboración propia.

EM18 Dividir en dos partes iguales un segmento dado. Mediatriz.

Para obtener la mediatriz debemos trazar dos arcos de circunferencia utilizando como radios los extremos del segmento y como radio una longitud superior a la mitad del segmento inicial. Prolongando los arcos de circunferencia de forma que se corten por la parte superior e inferior del segmento dado y uniendo los puntos de corte superior e inferior de los arcos de circunferencia se obtiene la mediatriz del segmento buscado.

EM19 Construir un triángulo con tres segmentos que son iguales a tres segmentos dados. Pero es necesario que dos de los segmentos dados tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante.

Para construir un triángulo a partir de tres segmentos debemos trazar dos arcos con centro en los extremos de uno de los segmentos y con radios iguales a la longitud de los otros dos segmentos. Si unimos el punto de corte de los dos arcos así trazados con los extremos del segmento utilizado como base obtendremos el triángulo buscado.

A partir del **EG 6** podemos deducir un conjunto de EM que permiten solucionar algunos de las EP más elementales.

En concreto podemos entender como EM que emanan del trazado de perpendiculares y paralelas y del uso de las herramientas de la regla, el compás, la escuadra y el cartabón (EG6) los siguientes:

EM20 Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.

Para trazar una línea que forme un ángulo recto desde un punto dado en ella basta con colocar la escuadra o el cartabón sobre la línea dada haciendo coincidir el vértice del ángulo recto de la herramienta con el punto desde el que se quiere trazar la línea que forma el ángulo recto.

Otra alternativa es trazar un arco de circunferencia cualquiera con centro en al punto sobre el que se quiere trazar la línea recta y utilizar los puntos de corte del arco de circunferencia con la línea recta para trazar una mediatriz como en EM18.

EM21 Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.

Para trazar una línea que forme un ángulo recto desde un punto dado que no esté en ella basta con colocar la escuadra o el cartabón sobre la línea dada haciendo coincidir uno de los lados que forma el ángulo recto de la herramienta con la línea dada y el otro lado con el punto desde el que se quiere trazar la línea que forma el ángulo recto.

Otra alternativa es trazar un arco de circunferencia cualquiera con centro en al punto exterior desde el que se quiere trazar la línea que forma el ángulo recto y con radio suficiente como para cortar la línea desde la que se quiere trazar la línea recta y utilizar los puntos de corte del arco de circunferencia con la línea recta para trazar una mediatriz como en EM18.

EM22 Trazar una recta paralela a otra por un punto externo.

Si colocamos la escuadra y el cartabón de forma que el ángulo recto de uno de los instrumentos quede apoyado sobre uno de los lados del otro instrumento, podemos obtener un instrumento para trazar rectas paralelas de la siguiente forma.

Hacemos coincidir uno de los lados que forma el recto en la escuadra o el cartabón con la recta dada. Colocamos el otro instrumento de forma que quede apoyado sobre el lado que forma el recto y que no coincide con la recta dada. Sin mover el instrumento que sirve de apoyo desplazamos el otro instrumento hasta que uno de los lados que forma el recto coincida con el punto externo. Trazamos la recta que contiene al punto externo y que coincide con el lado que forma el recto.

Un alternativa a esta técnica con regla y compás se puede hacer trazando EM21 y EM20 de forma sucesiva.

EM23 Trazar un cuadrado a partir de una recta dada conocido su lado.

Para trazar un cuadrado basta con aplicar EM20 desde los extremos del lado que va actuar como base, una vez trazadas las perpendiculares trasladar el lado del cuadrado sobre las rectas trazadas como en EM15 y luego EM22 para trazar una paralela a la base que pase por los extremos superiores de los lados trazados sobre las perpendiculares.

EM24 Construir un ángulo formado por líneas rectas igual a un ángulo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos que actúa como vértice.

Para trazar un ángulo igual a uno dado trazamos un arco de circunferencia en el ángulo dado con centro en el vértice y cualquier radio. Sin modificar el radio trazamos un arco con centro en el punto de la recta que queremos que sea el vértice del ángulo. En el ángulo dado trazamos un arco que tenga por centro el punto de corte entre una de las rectas que forman el ángulo y por radio la distancia entre los dos puntos de corte obtenidos al trazar el primer arco. Sin modificar el radio trazamos un arco con centro en el punto de corte entre la recta dada y el arco trazado en el paso anterior. Para terminar trazamos la recta que une el vértice y el punto de corte entre los dos arcos trazados.

EM25 Cuadro de los triángulos.

Bajo este EM agrupamos varios EM particulares referidos a la congruencia de triángulos. A continuación describimos los EM particulares y ofrecemos una figura aclarativa.

$EM25_1$: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber, los subtendidos por lados iguales serán también iguales respectivamente (Fig. 25).

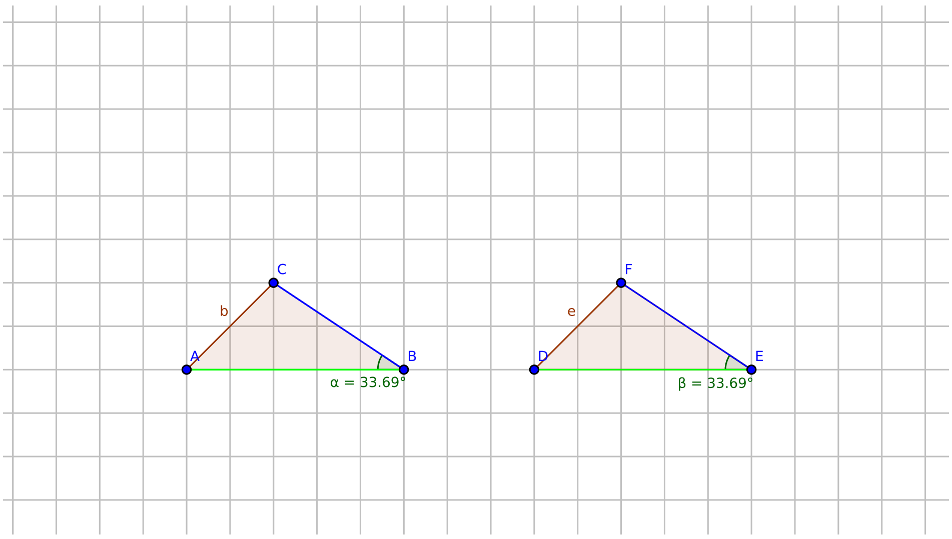


Figura 25. Dos triángulos con lados iguales y ángulo comprendido igual son iguales entre sí. Elaboración propia.

EM25$_2$: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales (Fig. 26).

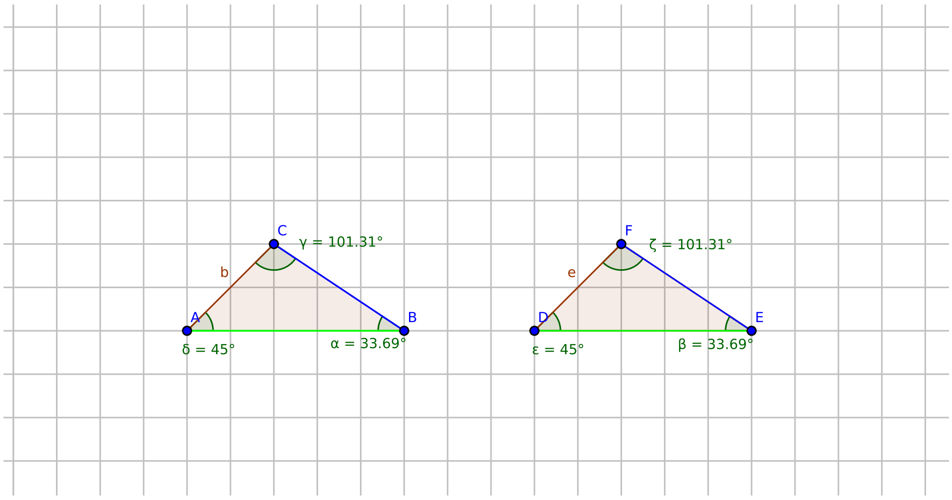


Figura 26. Dos triángulos con lados iguales tienen ángulos iguales. Elaboración propia.

EM25$_3$: Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes, y el ángulo restante igual al ángulo restante (Fig. 27).

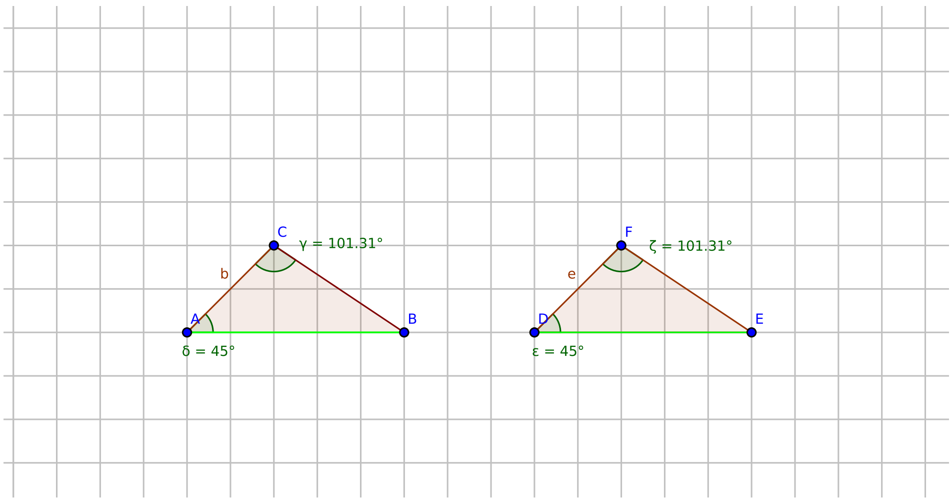


Figura 27. Dos triángulos con 2 lados iguales y 1 ángulo igual son iguales. Elaboración propia.

Los 12 EM anteriores se basan en el uso de la regla y el compás y en el trazado de paralelas y perpendiculares. Hay que matizar aquí que, aunque esencialmente estos EM son iguales en los distintos niveles del espacio, los instrumentos en los que se apoyan son diferentes y por ese motivo es necesario reinterpretar el listado anterior en cada uno de los niveles de espacio, como se verá en la descripción de los EP.

Antes de dar comienzo a la descripción del tercer nivel de concreción de esta tercera categoría vamos a exponer una tabla que recoge los EG y EM tratados hasta el momento.

Tabla 14.

Relación entre el EG5 y los EM derivados del mismo.

EG	EM
Regla y compás (EG5)	EM14 Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado igual al lado del triángulo.
	EM15 Poner en un línea recta un segmento igual a uno dado en un punto dado como extremo perteneciente a la línea recta.
	EM16 Dados dos segmentos desiguales, quitar del mayor un segmento igual al menor.
	EM17 Dividir en dos partes iguales un ángulo formado por lados rectos dado. Bisectriz.
	EM18 Dividir en dos partes iguales un segmento dado. Mediatriz.
	EM19 Construir un triángulo con tres segmentos que son iguales a tres segmentos dados. Pero es necsario que dos de los segmentos dados formados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante.

Elaboración propia.

Tabla 15.

Relación entre el EG6 y los EM derivados del mismo.

EG	EM
Perpendiculares y paralelas (EG6)	EM20 Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.
	EM21 Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.
	EM22 Trazar una recta paralela a otra por un punto externo.
	EM23 Trazar un cuadrado a partir de una recta dada conocido su lado.
	EM24 Construir un ángulo formado por líneas rectas igual a un ángulo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos que actúa como vértice.
	EM25 Cuadro de triángulos

Elaboración propia.

2.3.6.3. Tercer nivel de concreción.

EP42 Trazar un triángulo equilátero conocido su lado en el micro-espacio

A partir del lado conocido AB se traza con compás un arco con centro en A y radio AB. A continuación se traza un arco con centro en B y radio AB. El lugar del plano donde ambos arcos se cortan es el vértice C. Uniendo A con C y B con C se obtiene el triángulo equilátero pedido.

Los siguientes EP pueden replicarse en el meso y en el macro-espacio mediante cuerdas tensas aunque naturalmente puede ser imposible de realizar si existen obstáculos en el terreno o si las distancias son demasiado grandes. En los EP descritos a continuación aceptaremos por tanto que los trazados que se pueden hacer mediante regla y compás en el micro espacio y en meso-espacio (regla y compás de pizarra) se pueden realizar en el macro-espacio mediante el uso de cuerdas tensas (que actuarían como rectas) y de cuerdas tensas ancladas sobre un punto (que actuarían como compás).

EP43 Trazar un trapecio isósceles cuya base menor sea igual a los lados oblícuos y sea conocida.

Para trazar este trapecio se parte de la base menor conocida AB. Se traza un arco con centro en A y radio AB. A continuación se traza un arco con centro en B y radio AB. El lugar del plano donde ambos arcos se cortan es el punto C perteneciente a la base mayor.

A continuación se traza un arco con centro en C y radio AC. El lugar del plano donde se corta el arco trazado y los arcos con centro en A y B y radio AB son los puntos D y E pertenecientes a la base mayor y que marca los vértices pertenecientes a la base mayor del trapecio buscado.

Si unimos los puntos A y D los puntos D y E y los puntos E y B obtenemos el trapecio pedido.

EP44 Trazar un hexágono regular a partir de su lado.

Para trazar un hexágono regular, del que conocemos la medida de su lado, trazamos una circunferencia de radio igual al lado del hexágono regular que queremos construir. Utilizando EM15 podemos cortar la circunferencia en 6 partes iguales utilizando el compás y manteniendo una apertura igual al radio de la circunferencia. Uniendo los puntos que dividen a la circunferencia obtenemos la figura que queríamos obtener.

EP45 Trasladar un segmento conocido sobre una línea recta a partir de un determinado punto sobre la línea en el micro-espacio

Dado el segmento AB y el punto C perteneciente a la recta r desde dónde se va a trasladar el segmento AB, para trasladar el segmento AB se debe trazar un arco con centro en C y radio AB. El lugar del plano donde se corten la recta r y el arco trazado al que denominaremos D, será el extremo del segmento que queríamos trasladar.

EP46 Trazar el segmento resultante de restar dos segmentos diferentes entre sí en el micro-espacio

Dado el segmento AB mayor que el segmento CD. Para obtener el segmento resultante de restar CD a AB hay que trazar un arco con centro en A y radio CD. El lugar del plano donde el arco trazado corte al segmento AB al que denominaremos E será uno de los extremos del segmento buscado, siendo el otro extremo el punto B.

EP47 Obtener el incentro de un triángulo

Para obtener el incentro de un triángulo es necesario trazar las bisectrices de los ángulos del mismo tal y como se explicó en EM17. El lugar geométrico del plano donde se corten las tres bisectrices será el incentro buscado.

EP48 Obtener el circuncentro de un triángulo

Para obtener el circuncentro de un triángulo es necesario trazar las mediatrices a cada uno de sus lados tal y como se explicó en EM18. El lugar geométrico del plano donde se corten las tres mediatrices será el incentro buscado.

EP49 Trazar un triángulo a partir de sus lados

Dados los lados del triángulo AB, BC y AC se puede trazar el triángulo definido por esos tres lados de la siguiente manera:

Se traza un arco con centro en A y radio AC. Se traza un arco con centro en B y radio BC. El lugar del plano donde se encuentran ambos arcos y al que denominaremos C permitirá trazar los lados AC y BC.

EP50 Trazar un cuadrilatero a partir de sus lados y su diagonal

Si se dispone de los lados de un cuadrilatero y sus diagonales se puede trazar el cuadrilatero pedido aplicando dos veces EP49, considerando como primer triángulo a trazar el formado por los lados AB, AD y la diagonal BD y como segundo triángulo a trazar el formado por los lados BC, CD y la diagonal AC.

EP51 Trazar un polígono regular a partir de sus lados y sus diagonales

Si se dispone de los N lados de un polígono regular y sus diagonales se puede trazar el polígono regular pedido aplicando N-2 veces la tarea EP49. En este caso los triángulos que deben considerarse son los formados por dos lados consecutivos y por la diagonal que une el primer vértice con el tercer vértice de los lados considerados.

EP52 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella con regla y compás (micro, meso y macro-espacio)

Para resolver este EP podemos trazar una circunferencia cualquiera (mediante compás o cuerda) con centro en el punto de origen de la perpendicular. Los puntos de corte entre la circunferencia y la recta se encontrarán situados a la misma distancia del punto de origen de la perpendicular. Si utilizamos El EM de la mediatriz (EM18) de un segmento obtendremos la perpendicular deseada.

EP53 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella con escuadra y cartabón (micro-espacio y meso-espacio)

Para resolver este EP basta con colocar la escuadra o el cartabón de forma que uno de los lados que forman el recto coincida con la base y que el origen del otro lado se sitúe sobre el punto desde el que se quiere trazar la perpendicular. Una vez colocado en esta posición se puede proceder a trazar la perpendicular.

Hemos descartado este EP para el macro-espacio ya que el uso de escuadra y cartabón puede producir pequeños errores en el inicio de la línea que se traduzcan en grandes errores al final de la misma.

EP54 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella mediante plegado (micro-espacio)

Para obtener la perpendicular por plegado podemos proceder de la siguiente forma:

Se dobla el papel de forma que el doblez coincida con la recta. Una vez obtenido ese doblez se vuelve a doblar el papel por el punto de origen de la perpendicular haciendo coincidir los dos lados en los que queda dividida la recta. El doblez resultante coincide con la recta perpendicular.

Cómo es obvio siempre que hagamos referencia a EP de plegado solo serán válidos si se consideran superficies que puedan doblarse como es el caso del papel que se suele usar en el micro-espacio.

EP55 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto externo a ella con regla y compás (micro, meso-espacio)

Para resolver este EP podemos trazar una circunferencia cualquiera que corta la recta con centro en el punto exterior a la recta. Los puntos de corte entre la circunferencia y la recta se encontrarán situados a la misma distancia del punto de origen de la perpendicular. Si utilizamos el EM de la mediatriz de un segmento (EM18) obtendremos la perpendicular deseada.

Hay que destacar, en este caso, que en el macro-espacio a pesar de disponer de una cuerda suficientemente grande debido a las dimensiones consideradas en general no es viable realizar está construcción. El trazado de una perpendicular por un punto exterior a una recta supera los EG de regla y compás y de paralelas y perpendiculares y deberá abordarse desde otro conjunto de elementos.

EP56 Trazar la altura de una figura geométrica mediante escuadra y cartabón, regla y compás y plegado (micro y meso-espacio)

La altura de una figura se puede obtener trazando la perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto. En este sentido la base actuaría como recta y el vértice opuesto como punto exterior a la misma. Por este motivo este EP puede realizarse de forma similar a los EP 55, 57 o 58 y está sometido a las mismas restricciones relativas al espacio por lo que no será necesario detallarlo aquí.

EP57 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto externo a ella con escuadra y cartabón (micro-espacio)

Para resolver este EP basta con colocar la escuadra o el cartabón de forma que uno de los lados que forman el recto coincida con la base y que el otro lado pase por el punto desde el que se quiere trazar la perpendicular. Una vez colocado en esta posición se puede proceder a trazar la perpendicular.

Esta situación se considera muy improbable en el meso-espacio e imposible en el macro-espacio ya que lo normal es que el punto exterior se encuentre a una distancia de la recta superior a la longitud del instrumento utilizado para trazar.

EP58 Trazar una perpendicular a una recta desde un punto externo a ella mediante plegado (micro-espacio)

Para obtener la perpendicular por plegado podemos proceder de la siguiente forma:
Se dobla el papel de forma que el doblez coincida con la recta. Una vez obtenido ese doblez se vuelve a doblar el papel por el punto exterior a la recta haciendo coincidir los dos lados en los que queda dividida la recta original. El doblez resultante coincide con la recta perpendicular.

EP59 Trazar una paralela a una recta desde un punto externo a ella mediante regla y compás (micro y meso-espacio)

Si trazamos una perpendicular a la recta que pase por el punto externo mediante regla y compás como en EP55 y posteriormente una perpendicular a la recta trazada por un punto interno a ella (que coincide con el punto exterior por el que queríamos trazar la recta paralela) como en EP52. Obtenemos la recta paralela pedida.

EP60 Trazar una paralela a una recta desde un punto externo a ella con escuadra y cartabón (micro-espacio)

Para trazar una paralela por un punto exterior debemos colocar la escuadra y el cartabón de forma que el ángulo recto de una de ellas quede perpendicular y pueda deslizar por uno de los lados de la otra (esta situación es improbable en el meso-espacio e imposible en el macro-espacio). Una vez hecho esto colocamos el ángulo recto de forma que coincida con la recta dada. Fijamos la otra regla y deslizamos el recto hasta que el lado perpendicular coincida con el punto externo. Una vez en esa posición trazamos la recta paralela a la dada.

EP61 Trazar una paralela a una recta desde un punto externo a ella mediante plegado (micro-espacio)

Si procedemos como en el EM21 y levantamos una perpendicular a r que pase por el punto externo mediante plegado (EP58) y luego una perpendicular mediante plegado desde un punto contenido en la recta como en EP54 obtenemos la recta paralela solicitada.

EP62 Trazado de un rectángulo dados sus lados (micro y meso-espacio)

Los rectángulos al ser figuras definidas por lados paralelos y perpendiculares entre sí son figuras directamente construibles mediante el EG6.

Tomamos como base uno de los lados dado y levantamos perpendiculares desde sus extremos (EM20) para realizar esta acción se pueden usar los EP 52, 53 y 54, con centro en uno de los extremos y radio el lado no utilizado obtenemos los puntos de corte C y D. Uniendo ambos puntos obtenemos el rectángulo solicitado. Siempre que sea posible, podremos realizar este EP en el macro-espacio aunque la segunda parte de la tarea puede verse comprometida debido al terreno o a la longitud de los lados. Por ese motivo, esta tarea se contempla aquí únicamente para el micro y el meso-espacio.

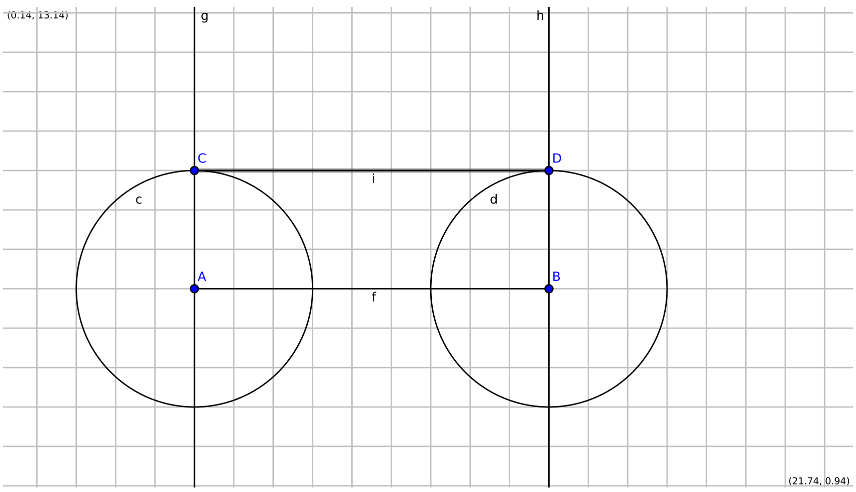


Figura 28. Construcción de un rectángulo dados sus lados. Elaboración propia

EP63 Trazar un paralelogramo conocidos sus lados y sus ángulos.

Construimos el ángulo interior constituido por los dos lados desiguales (EM24) y trasladamos sobre él los dos lados correspondientes AB y AC .

Levantamos por el extremo de la base (B) una paralela a AC (EM22) y trasladamos sobre esa paralela el lado AC haciendo coincidir uno de los extremos con B.

Unimos los extremos C y D y ya tenemos la figura pedida.

EP64 Trazar un trapecio conocidos sus ángulos y sus lados

Construimos los ángulos interiores constituidos por uno de los lados paralelos y los dos lados oblicuos (EM24) y trasladamos sobre los ángulos construidos los lados BC y AD. Unimos los puntos CD y obtenemos la figura pedida.

EP65 Trazar un polígono con un número de lados que sea múltiplo de 4 o de 6

Para trazar un polígono de 8 lados podemos proceder de la siguiente manera:

Trazamos un cuadrado como en EM23. Trazamos las mediatrices a sus lados como en EM18. Las mediatrices de los lados se cortarán en un punto que estará a la misma distancia de los cuatro vértices del cuadrado. Desde ese punto se traza la circunferencia que circunscribe el cuadrado. Los puntos donde las mediatrices cortan a la circunferencia estarán a la misma distancia de los vértices iniciales y por tanto señalarán los cuatro vértices restantes.

Repitiendo el proceso de trazar mediatrices entre dos vértices consecutivos de un octógono podemos obtener un polígono regular de 16 lados y así sucesivamente.

Este mismo EP tomando como origen un hexágono regular permitiría crear figuras regulares con un número de lados igual a 12, 24, 48 …

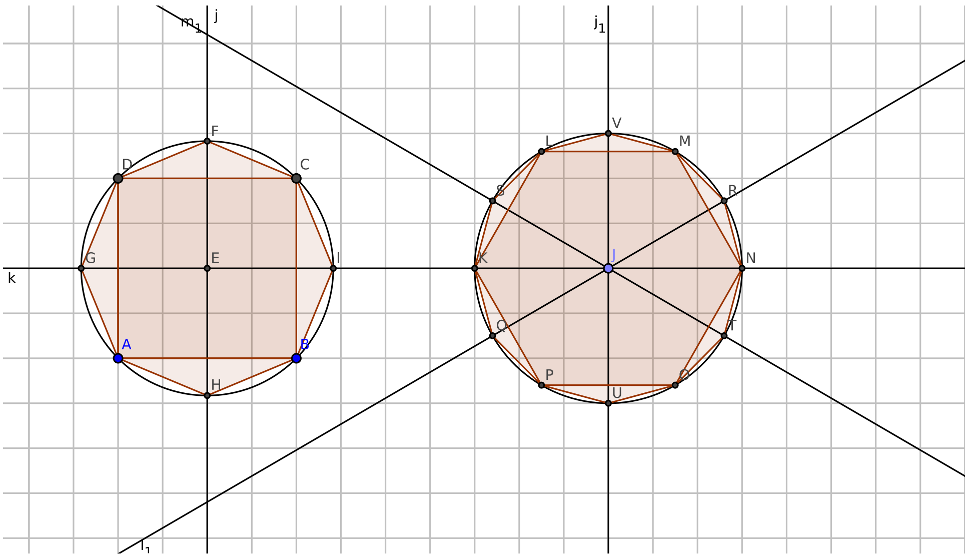


Figura 29. Octógono y dodecágono regular. Elaboración propia

EP66 Trazar un triángulo conocido un ángulo y los dos lados que lo abarcan

Construimos el ángulos interior dado sobre dos líneas rectas (EM24). Sobre las rectas trasladamos los dos lados dados uniendo los extremos de ambos lados no comunes obtenemos el triángulo solicitado.

Los siguientes EP se justifican a partir del EM26.

EP67 Trazar un triángulo conocidos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos

Trazamos el lado conocido AB y desde los extremos A y B construimos los ángulos dados (EM24). Si prolongamos las líneas de los ángulos trazados estás se cortarán en un punto C que coindirá con el tercer vértice del triángulo buscado.

EP68 Trazar un triángulo igual a uno dado

Son varias los EM que se pueden usar en esta tarea dependiendo de los datos que se quieran utilizar. Por sencillez se podría usar EM19 para trazar el triángulo a partir de sus lados. En caso de no poder usar uno de los lados podríamos utilizar EM25 para utilizar indistintamente dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado.

EP69 Trazar un polígono irregular igual a uno dado

Para trazar un polígono iregular igual a uno dado existen varias posibilidades la primera de ellas y haciendo uso de la definición de igualdad consiste en copiar un lado y trazar desde sus extremos los ángulos que forma con los lados consecutivos. Una vez trazado este primer trío de elementos se va trazando de forma sucesiva el resto de lados y ángulos de la figura.

Otras posibilidad especialmente cuando el polígono está dividido en triángulos internamente es ir construyendo los distintos triángulos interiores a partir de EM19 y EM25. De este modo se puede reproducir la figura a partir de los triángulos disponibles.

EP70 Trazar un paralelogramo igual a uno dado

Para copiar un paralelogramo dado se puede proceder de la siguiente manera: prolongamos los lados horizontales generando dos rectas paralelas. Sobre una de las rectas prolongadas transportamos un lado y el ángulo que forma con la "horizontal". Desde el otro extremo del lado trasladado levantamos una paralela al lado "inclinado" del ángulo trasladado. Dónde la recta inclinada que conforma el ángulo y su paralela corten a la paralela superior obtendremos los vértices del paralelogramo requerido.

Otras posibilidad, especialmente cuando el paralelogramo tiene trazadas sus diagonales, es ir construyendo una de las parejas de triángulos interiores, formada a partir de una de las diagonales, a partir de EM19 y EM25. De este modo se puede reproducir la figura a partir de los triángulos disponibles.

EP71 Trazar un trapecio igual a uno dado

Este EP se resuelve de forma parecida a EP70. Trasladamos los ángulos interiores constituidos por uno de los lados paralelos y los dos lados oblicuos (EM27) y trasladamos sobre los ángulos construidos los lados BC y AD. Unimos los puntos CD y obtenemos la figura pedida.

Otras posibilidad especialmente cuando el trapecio tiene trazadas sus diagonales es ir construyendo una de las parejas de triángulos interiores, formada a partir de una de las diagonales, a partir de EM19 y EM25. De este modo se puede reproducir la figura a partir de los triángulos disponibles.

EP72 Trazar una figura semejante a otra mediante una ampliación de la original utilizando relaciones sencillas (doble, triple, diez veces más)

Para obtener una figura semejante a otra utilizando relaciones sencillas podemos proceder redimensionando la base a partir de la relación deseada. Para realizar esto se puede trazar una recta y transportar tantas veces como sea necesario la base original sobre ella.

Una vez hecho esto se pueden construir los ángulos de la figura original desde los extremos del segmento anterior. Si prolongamos las rectas que forman los ángulos así obtenidos y trasladamos sobre ellas los lados de la figura original tantas veces como indique la relación deseada podemos ir obteniendo de forma sucesiva los lados de la figura semejante a la original.

Este proceso se puede realizar de forma sucesiva hasta completar la figura.

EP73 Trazar una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando relaciones sencillas (½, ¼, ⅛)

Dividimos los lados iguales haciendo uso de EM18 en tantas partes como indique la relación sencilla que se desee obtener.

Trazamos una recta y trasladamos sobre ella una de las partes del lado original. Sobre esta parte del lado original trasladamos los ángulos y prolongamos sus lados. Sobre la prolongación trasladamos una parte del lado contiguo y que se corresponda con el lado contiguo de la figura original.

De forma sucesiva se van trasladando el resto de lados hasta completar la figura.

EP74 Trazar una figura semejante a otra mediante una ampliación de la original utilizando cualquier razón de semejanza

Si la razón de semejanza incluye una parte fraccionaria antes de proceder como en EP68 se debe dividir cada uno de los lados mediante $EG4_3$ (anexo 2) en tantas partes como indique el denominador de la fracción. Una vez construido el fragmento correspondiente a la parte fraccionaria se procede como en EP68 pero trasladado el número entero de partes y la parte fraccionaria sobre cada uno de los lados.

EP75 Trazar una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando cualquier razón de semejanza

Para obtener el lado reducido debemos utilizar $EG4_3$ (anexo 2) dos veces. Se elige una medida al azar que se usará para realizar la división y se divide en tantas partes como indique el denominador de la parte fraccionaria de la razón de semejanza.

Se trazan cada uno de los lados a reducir y se dividen utilizando tantas veces como indique la parte entera de la razón de semejanza la unidad de referencia construida y utilizando tantas veces como indique el numerador de la parte fraccionaria de la razón de semejanza la unidad de referencia dividida.

Una vez construidos los fragmentos correspondiente a cada lado se procede como en EP69 pero trasladado el número entero de partes y la parte fraccionaria sobre cada uno de los lados.

2.3.6.4. Cuadro resumen de los elementos de trazado de figuras planas definidos

A continuación se presenta el cuadro resumen de los elementos de trazado definidos para facilitar al lector su consulta.

Tabla 16.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG5

EG	EM	
Regla y compás (EG5)	EM14 Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada	EP42, EP43, EP44
		EP42, EP43, EP44
		EP42, EP43, EP44
	EM15 Poner en un punto dado como extremo un segmento igual a uno dado	EP45
		EP45
		EP45
	EM16 Dados dos segmentos desiguales, quitar del mayor un segmento igual al menor	EP46
		EP46
		EP46
	EM17 Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado. Bisectriz	EP47
		EP47
		EP47
	EM18 Dividir en dos partes iguales un segmento dado. Mediatriz	EP48
		EP48
		EP48
	EM19 Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos de las rectas dadas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que el restante.	EP49,EP50,EP51
		EP49,EP50,EP51
		EP49,EP50,EP51

Elaboración propia.

Tabla 17.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG6

EG	EM	
Paralelas y perpendiculares (EG6)	EM20 Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella	EP52, EP53, EP54
		EP52 y EP53
		EP52
	EM21 Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella	EP55, EP56, EP57, EP58
		EP55 y EP56
	EM22 Trazar una recta paralela a otra por un punto externo	EP59, EP60, EP61
		EP59
	EM23 Trazar un cuadrado a partir de una recta dada conocido su lado	EP62
		EP62
	EM24 Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos	EP63, EP64, EP65, EP66, EP67, EP68, EP69, EP70, EP71, EP72, EP73, EP74, EP75
		EP63, EP64, EP65, EP66, EP67, EP68, EP69, EP70, EP71, EP72, EP73, EP74, EP75
		EP63, EP64, EP65, EP66, EP67, EP68, EP69, EP70, EP71, EP72, EP73, EP74, EP75
	EM25 Cuadro de los triángulos	EP68, EP69, EP70, EP71

Elaboración propia.

2.3.7. Descripción y definición de los elementos que permiten la descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de las figuras planas.

Antes de proceder con la definición de los elementos de este bloque vamos a dar una definición de equivalencia válida dentro de este MER.

Equivalencia: Dos figuras planas son equivalentes en el área cuando ambas encierran el mismo área.

La equivalencia es un tema fundamental dentro de la Geometría y permite, mediante la aplicación de los elementos que describiremos a continuación, obtener las fórmulas de las figuras planas elementales. Estas fórmulas son objeto de estudio en la enseñanza secundaria pero la aproximación que se propone en este MER pretende servir al proceso de construcción del alumno mediante inducción y descubrimiento y en ningún caso debe verse como una aproximación descriptiva y axiomática.

2.3.7.1. Primer nivel de concreción.

Para la construcción de los EM y la resolución de los EP que emanan de este bloque vamos a utilizar el EG de la descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras.

Agrupar en un único EG todos estos procesos es algo únicamente válido dentro de la Geometría elemental que abarca este MER. En ampliaciones del mismo posteriores y centradas en la transformación de figuras se debería valorar la separación de este EG en varios.

EG 7. Descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras

A partir de los axiomas 6 al 10 podemos establecer un EG que permita obtener una figura equivalente a una dada mediante su descomposición en figuras interiores más sencillas, que mediante giros y traslaciones permitan recomponer la figura en otra figura equivalente en área más sencilla de abordar. La suma de las áreas de todas las figuras interiores formadas será igual al área de la figura total, lo que garantiza la condición de equivalencia.

Este EG nos va a permitir construir las fórmulas para el cálculo de áreas de este MER que serán consideradas como EM. Por ese motivo aceptamos la descomposición su traslación, giro y simetría y su posterior recomposición como un EG que se debe concretar en los diferentes EM y EP que veremos en este apartado.

Como aclaración diremos que, dentro del alcance de este MER aceptaremos que una figura se puede trasladar, girar o generar simetricamente con respecto a un eje dentro del mismo plano si tras realizar el giro, la traslación o la simetría los lados y los ángulos que subtienden no varían.

2.3.7.2. Segundo nivel de concreción.

El conjunto de EM que se obtienen de este EG es una parte determinante de nuestro MER y permite el cálculo de áreas de un gran número de figuras planas. Las fórmulas habituales para el cálculo de áreas se inducen a partir de las fórmulas conocidas y trabajadas en el EG 7 gracias a los EM y los EP definidos a continuación.

EM26 Descomposición de un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos trazando la altura sobre su lado más largo.

Cuando trazamos una altura de un triángulo de forma que esta caiga en el interior del mismo estamos dividiendo la figura en dos triángulos. Cada uno de estos dos triángulos está construido a los lados de una recta perpendicular a otra y por tanto formarán con la base sendos rectos. A modo de ejemplo se ofrece la figura 30:

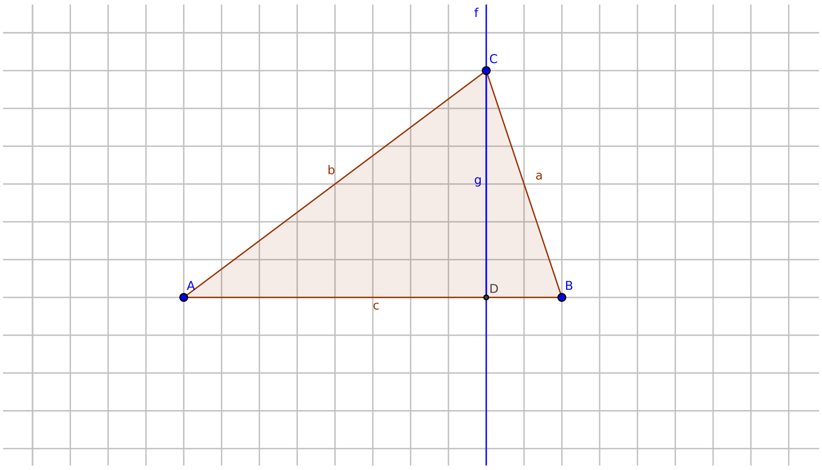


Figura 30. Descomposición de un triángulo en dos rectos. Elaboración propia

EM27 Descomposición de un polígono convexo cualquiera en triángulos: Triangulación

Cualquier polígono plano se puede descomponer en triángulos si se trazan todas las diagonales que emanan de un único vértice como se puede ver en la figura 31:

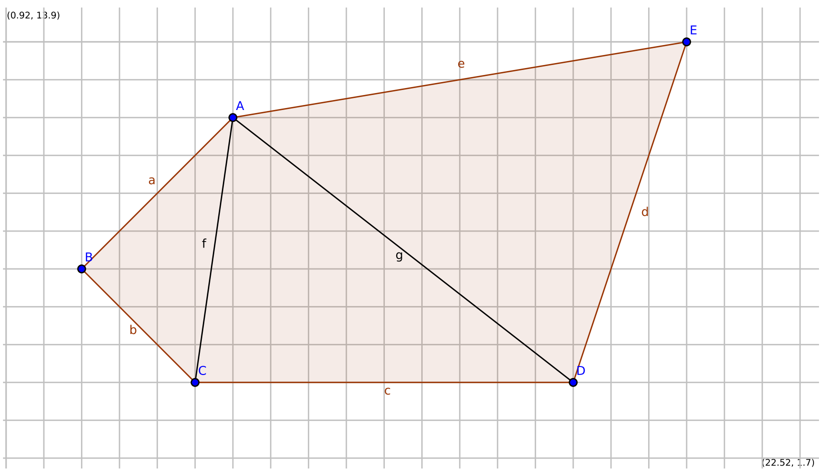


Figura 31. Triangulación de un polígono irregular. Elaboración propia

Si los polígonos son regulares, una segunda posibilidad es unir el centro del polígono con cada uno de los vértices que componen la figura como puede verse en la figura 32:

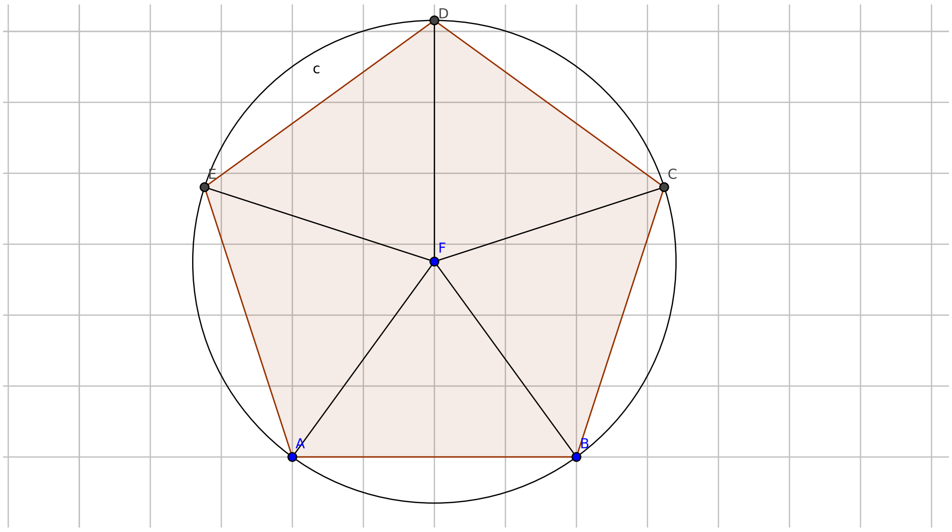


Figura 32. Triangulación de un polígono regular. Elaboración propia

EM28 Fórmula del área de un rombo

Gracias a la EG 7 podemos dividir un rombo en cuatro triángulos iguales a partir de sus diagonales y formar un rectángulo como se puede ver en la figura 33:

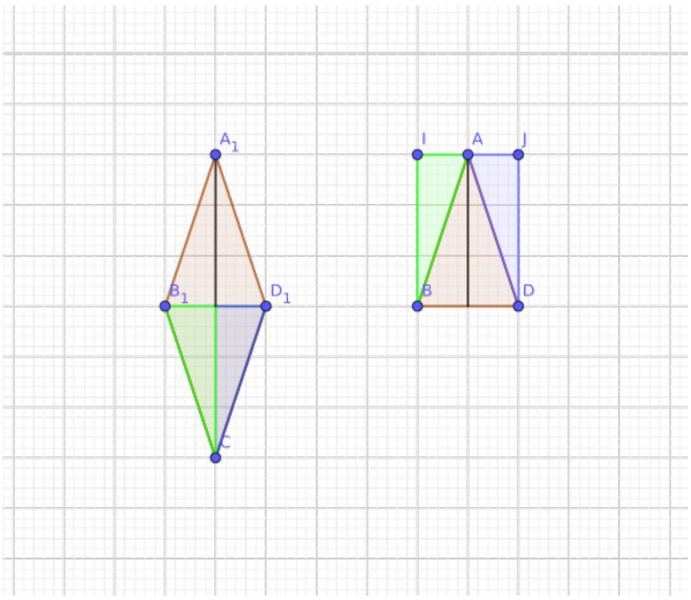


Fig 33. Descomposición y recomposición de un rombo a partir de sus diagonales. Elaboración propia

Obtenemos que la fórmula para obtener el área de un rombo es multiplicar una de las diagonales (que actúa de base) por la mitad de la otra diagonal (que actúa de altura).

De forma algebraica puede expresarse como: $A = \frac{Dd}{2}$

Donde D es la diagonal mayor y d es la diagonal menor.

EM29 Fórmula del área de un trapecio

Dado el trapecio ABCD podemos trazar las alturas a la base mayor que pasan por los vértices superiores C y D. La figura así descompuesta queda separada en dos triángulos rectángulos y un rectángulo cómo puede verse en la figura 34:

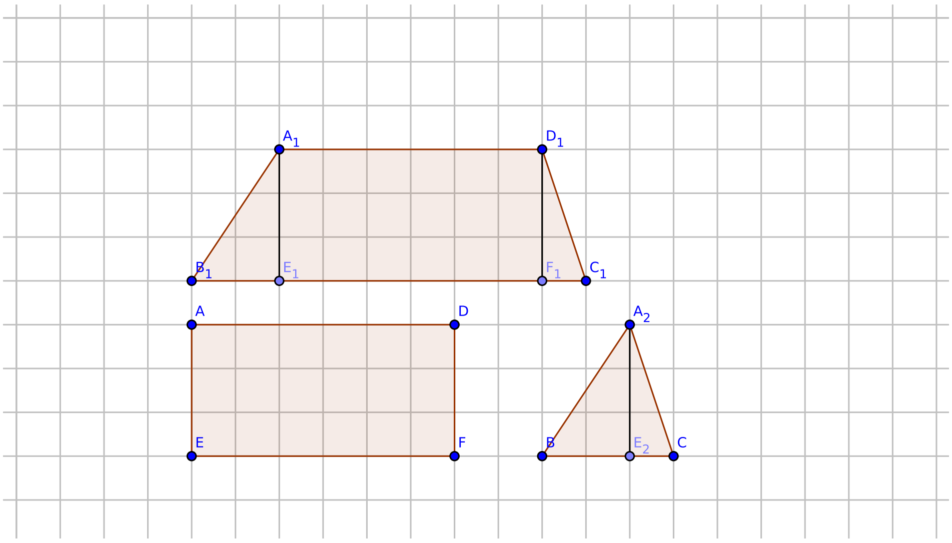


Figura 34. Descomposición de un trapecio a partir de sus alturas. Elaboración propia

El área del trapecio sería por tanto:

$$\boxed{A = bh + \frac{(B-b)h}{2}}$$

Donde b es la base menor, B es la base mayor y h es la altura.

Aunque la fórmula anterior es correcta en los libros de texto se suele dar por buena la fórmula:

$$\boxed{A = \frac{(B+b)h}{2}}$$

A continuación, explicamos el proceso que puede llevar de una a otra. Si en la primera fórmula extraemos el factor común altura obtenemos que el área del triángulo puede expresarse como:

$$A=(b+\frac{B}{2}-\frac{b}{2})h$$

Si agrupamos los términos Base menor la fórmula resultante queda como:

$$A=(\frac{B}{2}+\frac{b}{2})h$$

Que es lo que queríamos demostrar.

EM30 Fórmula del área de un paralelogramo cualquiera

Trazamos una perpendicular a uno de los lados de forma que sea interna y pase por el vértice opuesto (EM8) la figura queda dividida como en la figura 35:

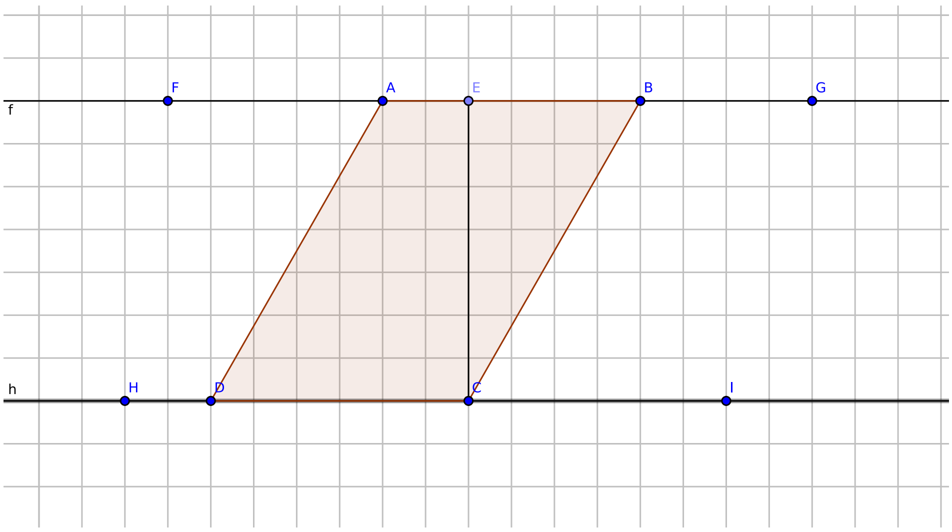


Figura 35. Descomposición de un paralelogramo a partir de la altura. Elaboración propia.

Al tratarse de dos paralelas que son cortadas por una recta común podemos utilizar (EM10) y asegurar que el ángulo EBC es el suplementario de FAD, del mismo modo podemos decir que el ángulo DCB es el suplementario de HDA. Si utilizamos el EG 7 para construir un rectángulo a partir de las figuras AECD y EBC obtenemos una figura equivalente a la original como se puede ver en la figura 36:

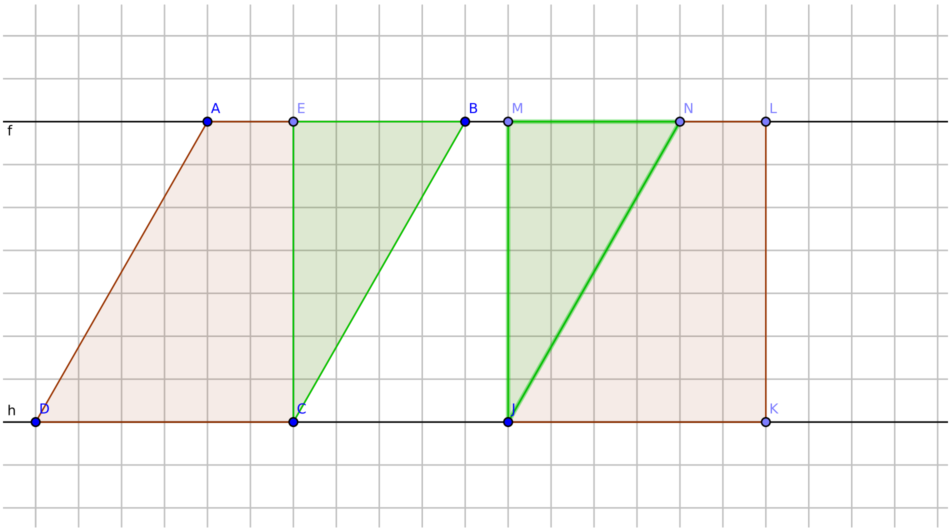


Figura 36. Composición de un rectángulo a partir de las figuras formadas al dividir un paralelogramo utilizando la altura a uno de sus lados. Elaboración propia.

Una alternativa análoga a esta descomposición realizada a partir de otra perpendicular la tenemos en la figura 37 y 38.

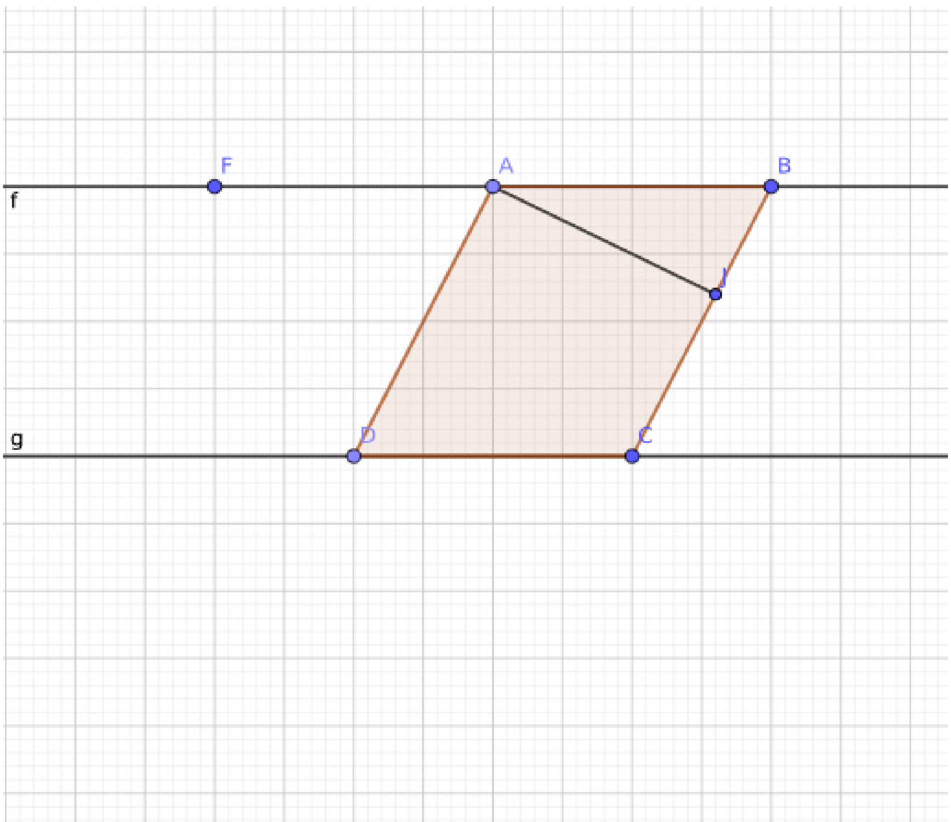


Figura 37. Descomposición de un paralelogramo a partir de la altura. Elaboración propia.

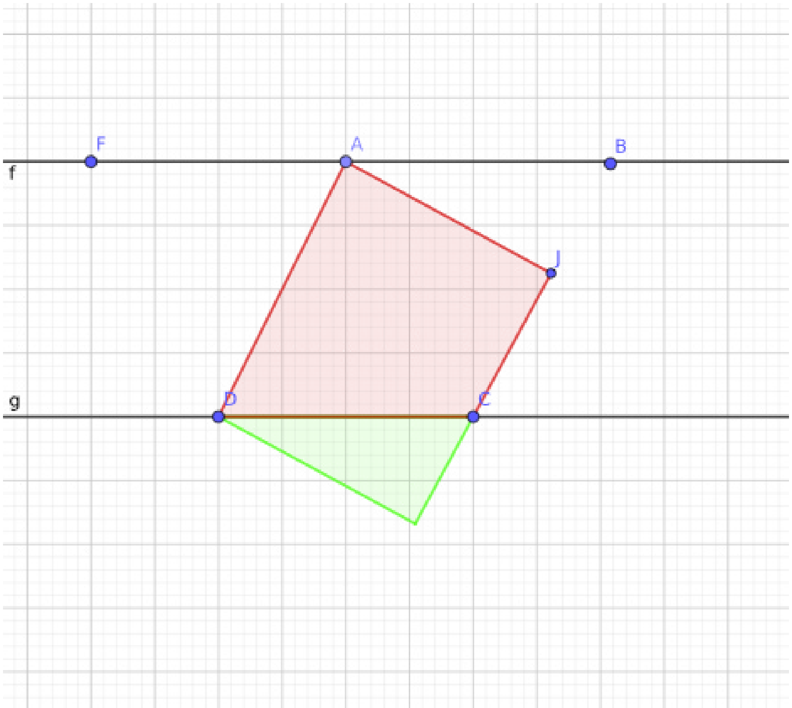


Figura 38. Composición de un rectángulo a partir de las figuras formadas al dividir un paralelogramo utilizando la altura a uno de sus lados. Elaboración propia.

Obtenemos que la fórmula para obtener el área de un paralelogramo es multiplicar una de los lados (que actúa de base) por la altura que se obtiene al trazar la perpendicular desde la base decidida al vértice opuesto.

De forma algebraica puede expresarse como:

$A=Bh$

Donde B es la longitud del lado que actúa como base y h es la altura obtenida al trazar la perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto.

EM31 Fórmula del área de un polígono regular

Si utilizamos EM27 podemos dividir el polígono desde el centro de la circunferencia circunscrita en tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono. La fórmula se puede obtener calculando el área de uno de los triángulos y multiplicando el resultado por el número de lados. Sin embargo la fórmula habitual aparece normalmente en términos de perímetro y apotema por lo que es necesario aclarar cómo se puede expresar la fórmula obtenida al multiplicar los triángulos en términos de perímetro y apotema.

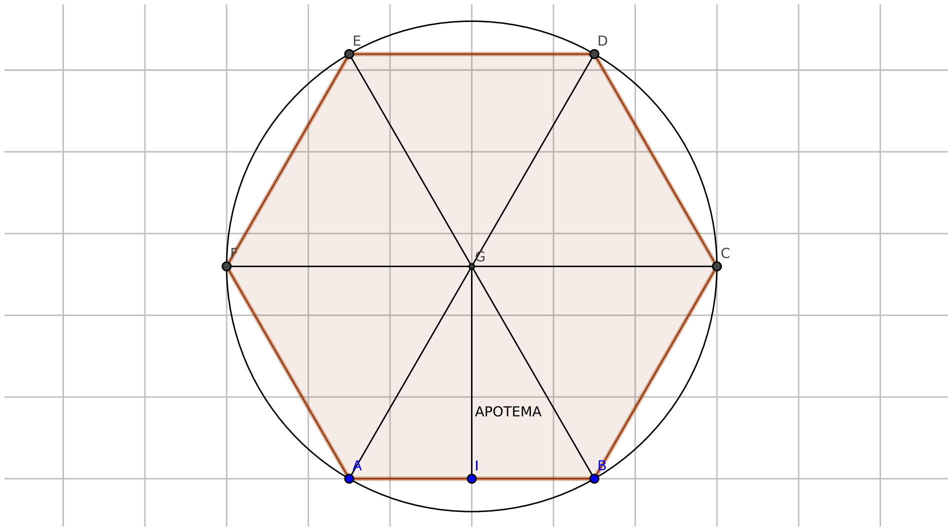


Figura 39. Triangulación de un polígono regular señalando la apotema. Elaboración propia.

Si tomamos como base del triángulo uno de los lados y como altura la apotema del polígono es fácil ver que el término apotema hace referencia en realidad a la altura del triángulo. Se produce por tanto una sustitución del término altura por apotema. El perímetro es la suma de todos los lados y puede obtenerse multiplicando la longitud de un lado por el número de ellos. En nuestro caso, al multiplicar el área del triángulo por el número de lados y aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación estamos multiplicando la base del triángulo, es decir el lado, por el número de lados. Estos dos términos se pueden agrupar por tanto bajo el nombre de Perímetro.

Para clarificar esta explicación vamos a explicitar aquí el desarrollo algebraico de la misma utilizando la nomenclatura de la figura 39:

$$A=\left(\frac{Bh}{2}\right)n$$

Donde B es la base del triángulo ABG, h es la altura del triángulo ABG y n es el número de lados del polígono.

Si sustituimos la altura del triángulo ABG por el término apotema del polígono y multiplicamos la longitud de la Base por el número de lados (perímetro del polígono). Podemos escribir la expresión algebraica de la siguiente manera:

$$A=\frac{Pa}{2}$$

EM32 Fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo que comparte base y está entre las mismas paralelas.

Si dividimos un paralelogramo utilizando su diagonal, obtenemos dos triángulos idénticos, por lo tanto de aquí se deduce que el área de un triángulo es la mitad de la superficie del paralelogramo que comparte base con él y que tiene la misma altura. Una generalización de este EM que vamos a usar posteriormente podría enunciarse de la siguiente manera:

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo.

Por tanto de forma algebraica y partiendo de EM30 podemos decir que el área de un triángulo es:

$$A = \left(\frac{Bh}{2}\right)$$

Una vez establecidos el conjunto de EM que permiten obtener las áreas de las figuras planas a partir de fórmulas vamos a definir a continuación dos EM relativos al cálculo de ángulos interiores y conjugados dada la importancia relativa que tienen estos EM dentro de la Geometría elemental.

EM33 Fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular

Cualquier polígono regular puede descomponerse a partir de EM27 en un número de triángulos igual al número de lados menos 2. Como sabemos por EM8 los ángulos interiores de un triángulo son equivalentes a dos rectos. La suma de los ángulos interiores de un polígono regular sera equivalente a multiplicar por 180 el número de triángulos en los que puede descomponerse.

Al tratarse de una figura regular, los ángulos interiores abarcarán una misma amplitud y por tanto serán todos iguales. Gracias a esta condición podemos deducir la siguiente fórmula:

$$\text{Ángulo interior de un polígono regular} = (n-2)\frac{180}{n}$$

Siendo n el número de lados.

Este EM puede inducirse a partir del estudio de los casos particulares para 3, 4 y 5 lados.

EM34 Fórmula de los ángulos conjugados de un polígono regular

Dos ángulos son conjugados cuando juntos suman 360º. En cada vértice de un polígono se pueden identificar un ángulo interior y un ángulo conjugado. Para obtener la medida del ángulo conjugado a un vértice en un polígono regular podemos usar la siguiente fórmula:

$$\text{Ángulo conjugado de un vértice de un polígono regular} = 360 - \left((n-2)\frac{180}{n}\right)$$

En este MER se ha decidido no incluir ningún EM que aborde el cálculo de los ángulos exteriores, no obstante podría ser interesante su inclusión en futuras ampliaciones del mismo.

Antes de dar comienzo a la descripción del tercer nivel de concreción de esta primera categoría vamos a exponer una tabla que recoge los EG y EM tratados hasta el momento.

Tabla 18.

Relación entre el EG7 y los EM derivados del mismo

EG	EM
Descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras (EG7)	EM26 Descomposición de un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos trazando la altura sobre su lado más largo.
	EM27 Descomposición de un polígono convexo cualquiera en triángulos. Triangulación.
	EM28 Fórmula del área de un rombo
	EM29 Fórmula del área de un trapecio
	EM30 Fórmula del área de un paralelogramo cualquiera
	EM31 Fórmula del área de un polígono regular
	EM32 Fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo que comparte base y está entre las mismas paralelas
	EM33 Fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular
	EM34 Fórmula de los ángulos conjugados de un polígono regular

Elaboración propia.

2.3.7.3. Tercer nivel de concreción.

EP76 Calcular la superficie de un triángulo no rectángulo a partir de una altura que cae dentro del lado contrario

Para realizar este EP los estudiantes deben recurrir al EM de dividir un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos mediante el trazado de la altura desde la base. Una vez realizada esta división se puede proceder como en EP22 con cada uno de los triángulos obtenidos.

A continuación vamos a mostrar varios EP en los que vamos a utilizar la triangulación gráfica para descomponer diferentes polígonos y obtener su superficie a partir de la suma de las superficies interiores triangulares en las que se divide.

EP77 Triangulación de un polígono convexo a partir de un vértice

La forma más evidente de triangular un polígono a partir de un solo vértice es unir todos los vértices del polígono con el vértice elegido menos los dos contiguos.
Esta tarea sería una aplicación directa de EM27.

EP78 Triangulación de un polígono cualquiera a partir de varios vértices

Para resolver esta tarea una posibilidad es ir uniendo vértices no consecutivos de forma que no corten en ningún caso los lados del polígono original mediante segmentos. De esta forma obtenemos un conjunto de figuras interiores con un número de vértices y lados inferior al polígono original. Volvemos a aplicar este EP de forma sucesiva las veces que sea necesario hasta que todas las figuras interiores sean una sucesión de triángulos. Para aclarar esta tarea ofrecemos la figura 40 y 41:

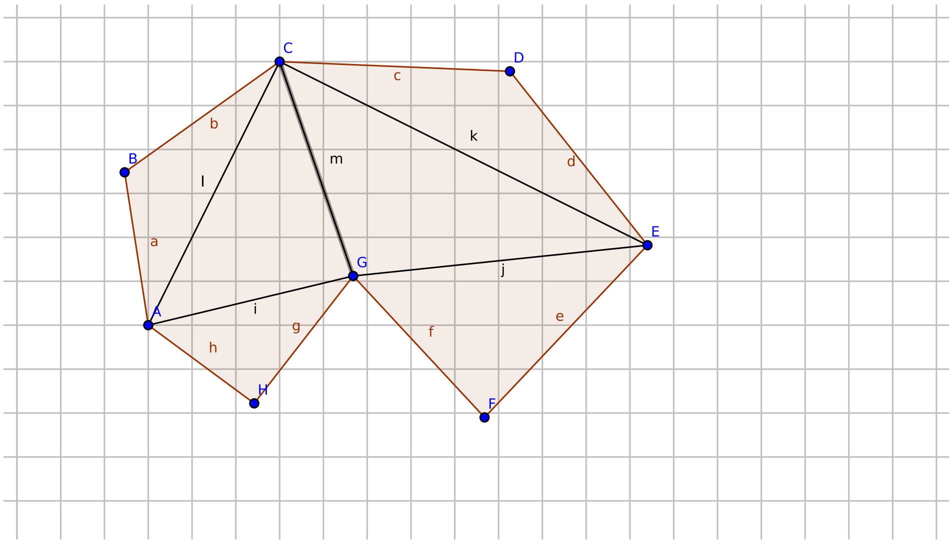


Figura 40. Triángulación de un polígono usando un vértice. Elaboración propia.

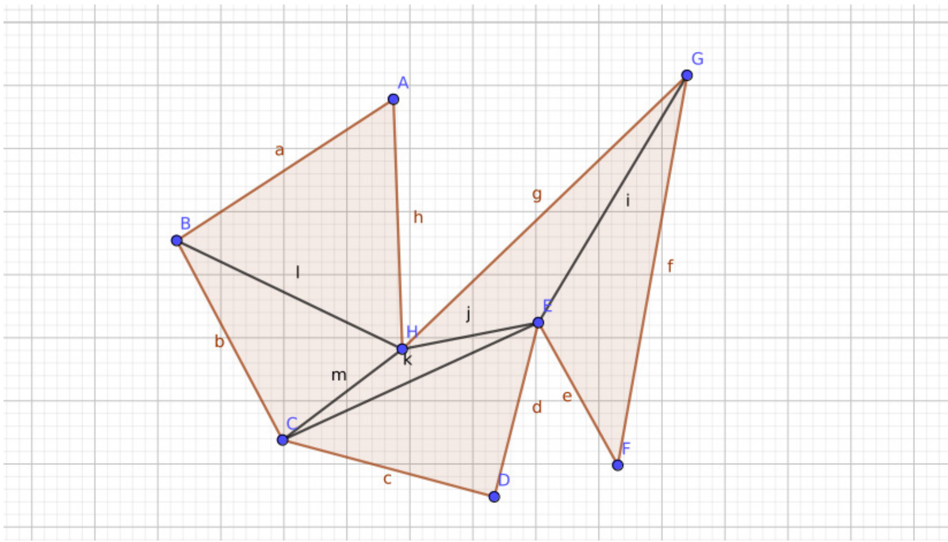


Figura 41. Triángulación de un polígono usando más de un vértice. Elaboración propia

EP79 Calcular el área de un cuadrado mediante triangulación

Los cuadrados, al igual que el resto de polígonos convexos se pueden descomponer en triángulos de muchas formas diferentes. La más elemental es trazar una diagonal del cuadrado y calcular el área de los triángulos rectángulos así obtenidos como en EP22.

EP80 Calcular el área de un rombo mediante triangulación

Procedemos a descomponer la figura en cuatro triángulos rectángulos. Una vez dividida calculamos el área de uno de ellos y multiplicamos por 4. Este EP permite una reconstrucción del EM que permite calcular la superficie a partir de sus diagonales mediante el uso de una fórmula.

EP81 Calcular el área de un trapecio mediante triangulación

El trapecio admite la posibilidad de descomponerse en varias figuras y calcular el área mediante la suma de todas las áreas parciales. En este sentido podemos dividir la figura levantando las perpendiculares a los extremos de la base menor. De esta forma se obtienen dos triángulos y un rectángulo como se ha visto en EM29. Si dividimos el rectángulo a partir de su diagonal, obtenemos una descomposición del trapecio en 4 triángulos. Calculando las áreas parciales de cada triángulo y sumándolas, se obtiene la superficie del trapecio.

Otra posibilidad, aunque mucho menos utilizada, es trazar la línea que une los extremos de la base menor con el punto medio del lado mayor lo que da como resultado la división del trapecio en tres triángulos. Calculando las áreas parciales de cada triángulo y sumándolas, se obtiene el área del trapecio.

EP82 Calcula el área de un paralelogramo cualquiera mediante triangulación

Si trazamos una de las diagonales del paralelogramo, la figura queda dividida en 2 triángulos. Calculando las áreas parciales de cada triángulo y sumándolas, se obtiene el área del paralelogramo.

EP83 Calcular el área de un polígono regular mediante triangulación

Para calcular el área de un polígono regular, podemos proceder descomponiendo la figura desde el centro y formando tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono. Una vez dividida la figura, se puede obtener el área de la figura calculando el área de uno de esos triángulos y multiplicando por el número de lados. Resolver el EP de este modo permite recomponer el EM de la fórmula del área de un polígono regular.

EP84 Calcular el área de un polígono irregular convexo mediante triangulación

Los polígonos irregulares, como ya se ha visto en EP77 y 78, se pueden triangular. Una vez hecha esa triangulación se puede calcular las áreas parciales de cada triángulo y sumarlas para obtener el área del polígono irregular.

A continuación, vamos a definir una serie de EP que permiten aplicar de forma aritmética las fórmulas que hemos definido en este punto como EM y que se pueden inducir a partir de los EP vistos hasta este momento.

EP85 Calcular el área de un rombo conocidas sus diagonales

Para calcular el área de un rombo, podemos medir las diagonales del rombo y aplicar la fórmula correspondiente (EM28).

EP86 Calcular el área de un trapecio conocidas las bases y la altura

Para calcular el área de un trapecio, los estudiantes pueden utilizar el EM con la fórmula de un trapecio (EM29) y utilizar las bases y la altura para obtener el resultado pedido.

EP87 Calcular el área de un paralelogramo conocidas su base y su altura

Se aplica directamente el EM de la fórmula de un paralelogramo (EM30) para obtener el área mediante una simple multiplicación de la base por la altura.

EP88 Calcular el área de un polígono regular conocidas su apotema y su lado

Para calcular el área de un polígono regular conocida la apotema, se aplica el EM de la fórmula para calcular el área de un polígono regular (EM31).

EP89 Calcular el área de un triángulo a partir de un paralelogramo que tenga una base y una altura con la misma medida.

En ocasiones, es posible tener un triángulo y un paralelogramo que compartan base y altura en los distintos niveles del espacio. Esta situación es especialmente frecuente cuando estamos ante figuras que se encuentran delimitadas por las mismas paralelas.

Cuando un paralelogramo y un triángulo se encuentran en estas circunstancias puede ser más sencillo obtener la medida de la altura del paralelogramo especialmente cuando la altura del triángulo considerada "caiga fuera de la base". En estos casos, el área del triángulo se puede obtener calculando el área del paralelogramo y dividiendo esta área por la mitad.

EP90 Calcular el área de un paralelogramo a partir de un triángulo que tenga una base y una altura con las mismas medidas que el paralelogramo.

En ocasiones, es posible tener un triángulo y un paralelogramo que compartan base y altura en los distintos niveles del espacio. Esta situación es especialmente frecuente cuando estamos ante figuras que se encuentran delimitadas por las mismas paralelas. Cuando un paralelogramo y un triángulo se encuentran en estas circunstancias puede ser más sencillo obtener la medida de la altura del triángulo especialmente cuando el triángulo sea rectángulo y el paralelogramo presente lados oblicuos. En estos casos, el área del paralelogramo se puede obtener calculando el área del triángulo rectángulo y multiplicando esta área por dos.

Una vez definidos los EP que permiten calcular las áreas de las diferentes figuras planas elementales mediante la aplicación directa de las fórmulas definidas en este punto de forma aritmética vamos a definir a continuación dos EP para calcular los ángulos interiores y conjugados de figuras poligonales.

EP91 Obtención de los ángulos interiores de una figura poligonal regular

Para obtener los ángulos interiores de una figura poligonal los estudiantes pueden apoyarse en el EM que asegura que los ángulos interiores se pueden obtener a partir de la expresión:

$$\text{Ángulo interior de un polígono regular} = (n-2)\frac{180}{n}$$

EP92 Obtención de los ángulos conjugados de una figura poligonal

El ángulo conjugado a uno dado es tal que completa un giro completo. Por ese motivo para obtener el ángulo exterior a un polígono regular, calcularemos el ángulo interior mediante el EP 91 y una vez obtenido restaremos a 360º el ángulo obtenido.

2.3.7.4. Cuadro resumen de los elementos de descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición definidos.

A continuación, se presenta el cuadro resumen de los elementos definidos para facilitar al lector su consulta.

Tabla 19.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG7

EG	EM	EP
Descomposición, traslación, giro y recomposición de figuras (EG7)	EM26 Descomposición de un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos trazando la altura sobre su lado más largo.	EP76
	EM27 Descomposición de un polígono cualquiera en triángulos. Triangulación	EP77, EP78, EP79, EP80, EP81, EP82, EP83, EP84
	EM28 Fórmula del área de un rombo	EP85
	EM29 Fórmula del área de un trapecio	EP86
	EM30 Fórmula del área de un paralelogramo cualquiera	EP87
	EM31 Fórmula del área de un polígono regular	
	EM31 Fórmula del área de un polígono regular	EP88
	EM32 Fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo que comparte base y está entre las mismas paralelas.	EP89, EP90
	EM33 Fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular	EP91
	EM34 Fórmula de los ángulos conjugados de un polígono regular	EP92

Elaboración propia.

2.3.8. Descripción y definición de los elementos que permiten realizar cálculos directos o indirectos de las figuras planas.

En muchas ocasiones, cuando trabajamos de forma analítica en cualquiera de los niveles del espacio, necesitamos obtener alguna medida a partir de otras conocidas. Para realizar este trabajo vamos a construir los EG del Teorema de Tales y del Teorema de Pitágoras. Hay que señalar aquí que estos EG podrían ampliarse con la inclusión de EG trigonométricos o EG basados en vectores. Sin embargo, dentro de la relatividad de este MER consideraremos estos contenidos fuera de la Geometría elemental.

2.3.8.1. Primer nivel de concreción.

EG 8. Teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales. Dos segmentos cualesquiera de una de estas son proporcionales a los dos segmentos correspondientes de la otra. AB es a BD como EF es a FH. Para aclarar este Teorema proponemos la siguiente figura:

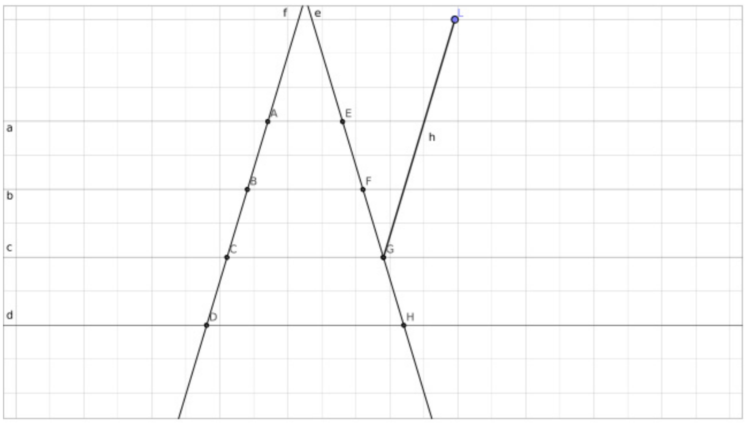


Figura 42. Representación del Teorema de Tales. Elaboración propia

El Teorema de Tales también puede establecerse de la siguiente manera: si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

EG 9. Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras es uno de los temas más estudiados y demostrados a lo largo del tiempo. Como ya se ha dicho en la evolución del saber sabio, es muy probable que su origen se remonte hasta los antiguos Egipto y Mesopotamia. En este MER vamos a dar una definición desde el punto de vista más Geométrico utilizando la definición tal y como aparece en los elementos.

Dentro de este MER consideraremos el Teorema de Pitágoras como un EG que nos va a permitir posteriormente describir un conjunto de EM y resolver un número de los EP previstos.

La definición que vamos a utilizar aquí es la siguiente:

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Por razones de claridad expositiva la demostración del Teorema de Pitágoras puede consultarse en el Anexo II.

2.3.8.2. Segundo nivel de concreción.

Para comenzar este segundo nivel de concreción vamos a definir 6 EM que se derivan directamente del Teorema de Tales (EG8).

EM35 Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

Gracias a EM8 podemos afirmar que si dos triángulos tienen dos ángulos iguales el tercero de ellos también lo será. Mediante rotación, traslación y simetría es posible encajar el triángulo menor dentro del triángulo mayor haciendo coincidir uno de los ángulos iguales. En esta posición se cumple la segunda de las definiciones que hemos dado para el Teorema de Tales (EG8).

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado, cuyos lados van desde el vértice común a los puntos de corte de las rectas que contienen a los lados.

EM36 Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales

Si utilizamos el Teorema de Tales a la inversa, podemos afirmar que si dos lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes del otro triángulo ambos triángulos se pueden dibujar de forma que el tercer lado sea paralelo y por tanto cumpla el Teorema de Tales.

EM37 Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

Mediante rotación, traslación y simetría, es posible encajar el triángulo menor dentro del triángulo mayor haciendo coincidir los ángulos iguales. En este posición se cumple la primera de las definiciones que hemos dado al EG8 del Teorema de Tales. Actuando como rectas transversales los lados de los triángulos que forman el ángulo compartido, como rectas paralelas el lado abarcado por el triángulo compartido y como segmentos los lados del triángulo menor y del triángulo mayor.

EM38 Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

En esta ocasión nos encontramos con un caso particular de EM35 ya que por ser rectángulos ambos tienen un ángulo de 90º y por las condiciones del enunciado podemos asegurar que al menos uno de los ángulos agudos es igual. Cumplimos de este modo las condiciones del EM anterior.

EM39 Todos los triángulos obtenidos al trazar paralelas interiores a unos de sus lados son semejantes.

Si trazamos paralelas interiores a uno de los lados y las prolongamos hasta que corten a los otros lados estaremos formando una sucesión de triángulos semejantes al original ya que los triángulos así obtenidos cumplen el segundo enunciado del Teorema de Tales que hemos propuesto como EG8.

EM40 En un triángulo rectángulo los triángulos obtenidos al trazar la altura sobre la hipotenusa son semejantes entre sí.

Al dividir un triángulo rectángulo por la altura trazada desde la hipotenusa se obtiene dos triángulos rectángulos que comparten un ángulo con el original y que son rectos. Por ese motivo se puede afirmar que los tres triángulos así obtenidos tienen los ángulos iguales entre sí. Si utilizamos el EG de rotación podemos haciendo coincidir los ángulos menores ver como los tres catetos menores quedan paralelos entre sí, por tanto aplicando el EG 8 podemos decir que dichos triángulos son semejantes. Que es lo que queríamos demostrar.

Una vez establecidos los 6 EM relativos al Teorema de Tales vamos a proceder a describir 4 EM que emanan del Teorema de Pitágoras (EG9). En la descripción de estos EM utilizaremos un triángulo rectángulo genérico donde los catetos serán representados como a y b y donde la hipotenusa será representada como c.

EM41 Suma del área de dos cuadrados desiguales colocando sus lados de forma que formen un recto

Como se deduce a partir de EG 9 la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos son equivalentes a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa por ese motivo para obtener de forma gráfica la suma de dos cuadrados desiguales bastaría con colocarlos formando un ángulo recto y construir el cuadrado que se forma sobre la hipotenusa.

EM42 Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto

En este caso estamos realizando una lectura inversa del Teorema de Pitágoras que nos permite asegurar que si tres lados cumplen el Teorema entonces necesariamente los lados menores formarán un ángulo recto,

EM43 Fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo

Si tenemos un triángulo rectángulos de catetos a y b e hipotenusa c. Para obtener el cateto desconocido podemos utilizar la siguiente transformación del Teorema de Pitágoras: b al cuadrado es igual a c al cuadrado menos a al cuadrado.

EM44 Fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus catetos

Si tenemos un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c. Para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo podemos utilizar la siguiente fórmula: c al cuadrado es igual a a al cuadrado más b al cuadrado.

Antes de dar comienzo a la descripción del tercer nivel de concreción de esta quinta categoría vamos a exponer una tabla que recoge los EG y EM tratados hasta el momento.

Tabla 20.

Relación entre el EG8 y los EM derivados del mismo

EG	EM
Teorema de Tales (EG8)	EM35 Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.
	EM36 Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales
	EM37 Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
	EM38 Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.
	EM39 Todos los triángulos obtenidos al trazar paralelas interiores a unos de sus lados son semejantes.
	EM40 En un triángulo rectángulo los triángulos obtenidos al trazar la altura sobre la hipotenusa son semejantes entre sí.

Elaboración propia.

Tabla 21.

Relación entre el EG9 y los EM derivados del mismo

EG	EM
Teorema de Pitágoras (EG9)	EM41 Suma del área de dos cuadrados desiguales colocando sus lados de forma que formen un recto
	EM42 Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto
	EM43 Fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo
	EM44 Fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus catetos

Elaboración propia.

2.3.8.3. Tercer nivel de concreción.

EP93 Obtener el lado desconocido de un triángulo a partir de los datos de un triángulo conocido que tiene dos ángulos iguales al triángulo inicial.

Gracias a EM35 podemos asegurar que ambos triángulos son semejantes y establecer las relaciones entre los lados de los dos triángulos. Si colocamos los triángulos en posición de Tales y establecemos la comparación entre el lado mayor, el lado mediano y el lado menor podemos generar una situación de proporcionalidad en la que a partir de 3 datos se puede obtener el cuarto. Podemos aplicar aquí EM11.

EP94 Obtener el ángulo desconocido de un triángulo a partir de los datos de un triángulo conocido que tiene los lados proporcionales al triángulo inicial.

Gracias a EM36 podemos asegurar que ambos triángulos son semejantes y establecer las relaciones entre los ángulos de los dos triángulos. Si colocamos los triángulos en posición de Tales y establecemos la igualdad entre el ángulo mayor, el ángulo mediano y el ángulo menor habremos encontrado el valor del ángulo desconocido.

EP95 Obtener el ángulo y el lado desconocido de un triángulo a partir de los datos de un triángulo conocido que tiene un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales al triángulo inicial.

Gracias a EM37 podemos asegurar que ambos triángulos son semejantes y establecer las relaciones entre los ángulos y los lados de los dos triángulos. Si colocamos los triángulos en posición de Tales y establecemos la igualdad entre el ángulo y el lado mayor, el ángulo y el lado mediano y el ángulo y el lado menor, podemos resolver la tarea como en EP93 y EP94.

EP96 Dado un triángulo rectángulo del que se desconocen dos lados, contenido en un triángulo rectángulo mayor de datos conocidos de forma que uno de los ángulos agudos coincida en ambos. Obtener los dos lados desconocidos.

A partir de EM38 podemos afirmar que ambos triángulos son semejantes. Si establecemos la comparación entre la hipotenusa, el cateto mediano y el cateto menor de ambos triángulos podemos generar una situación de proporcionalidad en la que a partir de 3 datos se puede obtener el cuarto. Podemos aplicar aquí EM11.

EP97 Obtener un triángulo rectángulo semejante menor en área a uno dado en posición de Tales.

Para obtener un triángulo semejante menor basta con trazar perpendiculares a uno de los catetos que forman el ángulo agudo.

EP98 Obtener un triángulo rectángulo semejante mayor en área a uno dado en posición de Tales.

Para obtener un triángulo semejante mayor basta con prolongar los lados que forman el ángulo agudo y posteriormente trazar paralelas a uno de los catetos que forman el ángulo agudo exterior al triángulo original de forma que estas paralelas queden perpendiculares al otro cateto.

EP99 Obtener la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo a partir de sus lados.

Si trazamos la altura sobre la hipotenusa se forman dos triángulos rectángulos semejantes al original según EM40. A partir de aquí cada uno de los catetos originales es a su vez la hipotenusa de uno de los triángulos semejantes que se acaban de construir. Gracias a esto es posible establecer una proporción entre las hipotenusas y uno de los catetos que permita obtener la altura del triángulo rectángulo mediante la aplicación de EM11.

EP100 Obtener el cateto de un triángulo rectángulo del que se conoce la altura sobre la hipotenusa y los otros dos lados.

Si trazamos la altura sobre la hipotenusa se forman dos triángulos rectángulos semejantes al original según EM40. A partir de aquí cada uno de los catetos originales es a su vez la hipotenusa de uno de los triángulos semejantes que se acaban de construir y la altura es a la vez el cateto menor y el cateto mayor de los triángulos construidos. Gracias a esto es posible establecer una proporción entre las hipotenusas y la altura que permita obtener el cateto del triángulo rectángulo mediante la aplicación de EM11.

EP101 Calcular el lado de un cuadrado equivalente en área a la suma de las superficies de dos cuadrados desiguales

Para poder calcular el lado de un cuadrado equivalente a dos cuadrados desiguales podemos recurrir al EG9 del Teorema de Pitágoras y tomar como catetos los lados de los cuadrados conocidos. La hipotenusa resultante será igual al lado del cuadrado que se desea obtener.

EP102 Comprobar que un triángulo es rectángulo conociendo sus lados

Dada una terna de medidas de lados si el lado mayor al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los lados menores se puede asegurar que el ángulo mayor es un ángulo recto.

EP103 Comprobar si dados tres números naturales cualquiera forman una terna pitagórica

Para comprobar si tres números naturales forman una terna pitagórica basta con comprobar si el número mayor al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los números menores.

EP104 Calcular el cateto desconocido de un triángulo rectángulo del que se conocen los otros dos lados

El Teorema de Pitágoras permite resolver esta tarea del siguiente modo:

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

EP105 Calcular la altura de un triángulo isósceles conocidos sus lados

Para calcular la altura de un triángulo se puede recurrir al EM que permite dividir un triángulo en dos triángulos rectángulos a partir de la perpendicular a la base (EM40). Una vez obtenidos los dos triángulos rectángulos y teniendo en cuenta que la base queda dividida por la mitad se puede utilizar EP104 para obtener la altura del triángulo.

EP106 Calcular la apotema de un polígono regular conocida su base y el radio de la circunferencia circunscrita

Para obtener la apotema de un polígono regular del que se conoce base y radio de la circunferencia circunscrita podemos dividir el polígono en triángulos mediante EM27. Una vez dividido en triángulos podemos obtener la altura del triángulo resultante mediante el EP104.

EP107 Calcular la altura de un trapecio isósceles a partir de sus lados

Para obtener la altura de un trapecio podemos trazar las perpendiculares a la base menor a partir de sus extremos. De esta forma obtendremos un triángulo cuya base será el resultado de restar a la base mayor la base menor y dividir el resultado por dos y cuya hipotenusa será el lado oblicúo del trapecio. Con estos datos y procediendo como en EP104 se puede obtener la altura del trapecio.

EP108 Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen los dos catetos

El Teorema de Pitágoras permite resolver esta tarea del siguiente modo:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

EP109 Calcular el lado de un rombo a partir de sus diagonales

Las diagonales de un rombo dividen a este en cuatro triángulos rectángulos que tienen por base la mitad de una diagonal y por altura la mitad de la otra diagonal. Si procedemos como en EP108 podemos obtener el lado del rombo.

2.3.8.4. Cuadros resumen de los elementos que permiten realizar cálculos directos o indirectos definidos.

A continuación se presentan el cuadro resumen de los elementos definidos:

Tabla 22.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG8

EG	EM	EP
Teorema de Tales (EG8)	EM35 Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.	EP93
	EM36 Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales	EP94
	EM37 Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.	EP95
	EM38 Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus lados agudos.	EP96
	EM39 Todos los triángulos al trazar perpendiculares a algunos de los lados de un ángulo son semejantes.	EP97, EP98
	EM40 En un triángulo rectángulo los triángulos obtenidos al trazar la altura sobre la hipotenusa son semejantes entre sí.	EP99, EP100

Elaboración propia.

Tabla 23.

Cuadro resumen de los elementos derivados del EG9

EG	EM	EP
Teorema de Pitágoras (EG9)	EM41 Suma de dos cuadrados desiguales colocando sus lados de forma que formen un recto	EP101
	EM42 Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes el triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto (I,48)	EP94
	EP102, EP103	EP95
	EM38 Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus lados agudos.	EP96
	EM43 Fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo	EP104, EP105, EP106, EP107
	EM44 Fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus catetos	EP108, EP109

Elaboración propia.

2.3.9. Conclusiones tras la construcción del MER.

El MER construido en este trabajo ha sido sometido a múltiples modificaciones y ampliaciones a lo largo del mismo. Su construcción nos ha permitido definir el conjunto de saberes que van a ser tenidos en cuenta bajo el concepto de Geometría elemental. Esta definición se ha hecho atendiendo a la historia de la Geometría, a los niveles de razonamiento esperables en el primer ciclo de la educación secundaria española y a los diferentes niveles del espacio donde se pueden estudiar las praxeologías geométricas.

Con este apartado cumplimos uno de los objetivos fijados para nuestro trabajo y conseguimos emanciparnos de las restricciones epistemológicas impuestas por las diferentes instituciones, lo que nos permite investigar nuestro objeto de estudio desde una posición externa al proceso de transposición didáctica sufrido por el saber sabio Geométrico.

Por definición asumimos que este MER es incompleto e incorpora nuestra visión epistemológica sobre la Geometría elemental y que, por tanto, es susceptible de ser revisado, ampliado o redefinido por otros investigadores o en futuros trabajos del mismo autor.

Los MER como herramienta teórica de análisis, externa y explicita, en permanente proceso de revisión, ampliación y mejora es una de las contribuciones de la TAD al estudio de la didáctica de las Matemáticas.

2.4. Evolución de la transposición didáctica de la Geometría elemental en España (1945-2015)

Para analizar la dimensión económico-institucional que presentamos a continuación, vamos a analizar el recorrido histórico y legislativo que se ha producido en España en los últimos 65 años. El conjunto de docentes e instituciones dedicados a la enseñanza de la Geometría proviene de diferentes modelos, y es por ese motivo que el conjunto de posicionamientos epistemológicos institucionales es diverso y se presenta de forma entremezclada ante el investigador.

Revisando la evolución histórica y teniendo en cuenta las posiciones epistemológicas que subyacen en las diferentes legislaciones, podemos entender el conjunto de posiciones epistemológicas que están presentes en las instituciones educativas actuales.

Tener en cuenta estos posicionamientos es clave a la hora de poder valorar el tipo de respuesta y las restricciones esperables en las instituciones ante nuestro planteamiento.

2.4.1. Evolución de las posiciones epistemológicas institucionales.

El periodo temporal objeto de estudio comienza en 1945. En el año 1953 se produce la última reforma de calado de la Ley Moyano de 1857 (BOE de 9 de septiembre de 1857) para la enseñanza media. La elección de este periodo para iniciar nuestro estudio permite comprender la enseñanza histórica de las Matemáticas que se había realizado hasta ese momento y sirve de base para ir comprendiendo las reformas posteriores.

Para abordar el periodo temporal que abarca desde 1953 hasta la actualidad lo dividiremos en 5 bloques que tienen en cuenta la situación social, económica, política y la situación educativa que se deriva de ello. En cada uno de los bloques analizaremos primero el nivel de codeterminación de la sociedad en sus vertientes política, económica y social, para luego centrarnos específicamente en las leyes educativas y en los libros de texto utilizados. Debido a la propia naturaleza del trabajo vamos a prestar especial atención a la Geometría que se enseñaba en la etapa de Secundaria y Bachillerato. En ampliaciones del trabajo posteriores sería interesante estudiar la evolución en otras etapas educativas.

2.4.2. Desde 1945 hasta 1959.

Para estudiar este punto realizaremos un análisis social, económico y político que tiene sus raíces en el final de la Guerra Civil Española. Educativamente, como ya se ha dicho, en el año 1953, y posteriormente en 1957, se realizan las últimas modificaciones de la Ley Moyano vigente desde 1857. Por último, en el ámbito matemático nos encontramos en un momento en el que se comienzan a fraguar cambios en su enseñanza.

2.4.2.1. Situación social, económica y política.

Tras el desenlace de la Guerra Civil se creó un estado totalitario nacional-católico de inspiración fascista. La Ley de Jefatura del Estado (BOE-A-1939-11756) concentró el poder en Franco sin limitación alguna. En los sucesivos gobiernos de este periodo se equilibraba el poder entre las diferentes familias políticas: ejército, Iglesia, monárquicos, falangistas, franquistas integrales, tradicionalistas y tecnócratas.

Los fundamentos ideológicos de la dictadura eran muy variados y podemos apoyarnos en los trabajos de Fusi y Calvo (1997), Barrera (2002) y Fusi y Palafox (2009) para exponer algunos de los más importantes:

- Militar: se creía en los principios de la milicia como la jerarquía, la disciplina y el sacrificio.
- Antiliberal: se pensaba que el desarrollo de la libertad política en España había traído caos y desunión al país.
- Antimasón: se opinaba que la Historia de la Humanidad de los últimos siglos era el resultado de una enorme conspiración masónica.
- Anticomunista: el comunismo generaba inestabilidad social y ataques a la religión.
- Nacionalista: el concepto de patria era exacerbado. Se trataba de un régimen muy centralizado que no reconocía los nacionalismos históricos.
- Católico: tenía profundas convicciones religiosas.

Socialmente, la dictadura contaba con varios apoyos. Uno de los principales fue la Iglesia que, debido a los diversos acontecimientos acaecidos tanto en el periodo republicano como en la Guerra Civil, tomó claro partido por el bando nacional calificando a la guerra como cruzada. El apoyo eclesiástico concedió legitimidad social y apoyo popular. El segundo de los apoyos claves era el ejército que, a pesar de algunas disensiones, era absolutamente leal a la dictadura. Por último, una parte importante de la sociedad civil del país fue partidaria del bando nacional en la guerra. A nivel político, el partido del movimiento movilizó a las masas, controló los medios de comunicación y organizó burocráticamente el régimen.

En la parte que apoyó al bando republicano, las ejecuciones, los presos políticos, el control dictatorial y las malas condiciones de vida apagaron la oposición interna. Además de esta situación interior hay que destacar un fuerte exilio inicial que fue evolucionando a permanente a lo largo de estos años.

> La represión de la posguerra afectó a un número muy elevado de personas: puede situarse alrededor de las 30.000- 50.000 ejecuciones pero también debe hacerse mención de los condenados a muerte que pasaron años esperando la ejecución, sin que ésta se llevara a cabo. Como término de comparación puede citarse que en Francia las ejecuciones previo juicio de pasados colaboracionistas no llegaron a 800. Conocemos mejor la cifra de los presos, que venía a ser unos 270.000 en 1939 y 124.000 en 1942; no disminuyó de forma sustancial hasta 1950, pero aun en esa fecha los 30.000 presos eran tres veces más que en los años de la Segunda República, antes de que comenzaran los momentos de mayor insetabilidad social. En la década de los cincuenta el número de personas encarceladas era ya inferior a la media en Europa. Tras una fuerte represión inicial el régimen, por tanto, comenzaba a ser aceptado de forma pasiva. […] La evidencia más obvia de la división de España en dos, vencedores y vencidos, aparece en la perduración de un exilio de gran importancia numérica pero también cualitativa. Cuando la guerra civil concluía había unos 450.000 refugiados en Francia. Una parte considerable de ellos acabaron regresando a España y convirtiéndose en una especie de exilio interior, pero algo menos de la mitad se convirtieron en una emigración permanente. (Martín, Martínez y Tusell, 1998, p.697).

A la década de los 50 se llega tras un largo periodo de represión interna y aislamiento internacional que habían dejado el país en una situación muy debilitada, sin participación política ni derecho de huelga y con una fuerte censura de la prensa y la radio.

> Represión, regimentación y recatolización deben completarse con la cuarta nota que caracterizó la primera década del Nuevo Estado: el aislamiento exterior, la ruptura de vínculos que durante decenios anteriores había establecido un esforzado núcleo de españoles. Determinaron esta opción por el aislamiento factores de muy diversa índole: desde la política de industrialización autárquica a la exclusión de Naciones Unidas, la retirada de embajadores y el cierre temporal de la frontera francesa tras la Segunda Guerra Mundial. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006, p.508).

Entre 1945 y 1951 España destaca por el aislamiento internacional: no entró en la ONU, fue expulsada de organismos internacionales y los embajadores fueron llamados a sus países (excepto Portugal, Suiza, Irlanda y Vaticano). A consecuencia de esto, durante este mismo periodo se establecen diferentes políticas destinadas a romper este aislamiento.

> La evolución política del régimen en el periodo comprendido entre 1945 y 1951 estuvo centrada en un esfuerzo por aparentar que era un régimen diferente, despojándolo de los signos externos más semejantes al fascismo. […] El régimen pretendió dar una nueva imagen mediante la promulgación de una serie de leyes fundamentales que aparentaban libertades semejantes a las existentes en otros países de Europa. (Martín, Martínez y Tusell, 1998 , p.714).

Económicamente, durante estos primeros años, diferentes políticas establecieron un plan económico autárquico, que intentaba que España se abasteciera de materias primas y fuentes de energía propias renunciando al comercio exterior.

Los intentos para salir de ese aislamiento dieron paso en los años 50 a una serie de reformas con el objetivo de presentar a España como un país europeo posicionado claramente contra el bloque comunista.

> Como ya se ha indicado, mucho más que el fracaso de la oposición o la evolución interior del régimen fue el estallido de la guerra fría la causa que explica el mantenimiento

> del franquismo cuando las circunstancias parecían propicias para hacerlo desaparecer. Así hubo de probarse con el transcurso del tiempo: cuando, en el año 1950, se planteó el conflicto de Corea, comenzó una rápida rehabilitación internacional de España que tuvo su punto culminante en 1953, año cumbre también de aquélla, con el paulatino regreso a los organismos internacionales. (Martín, Martínez y Tusell, 1998 , p.715).

Durante toda la década de los 50 España se alineó con EE.UU. En 1951 se autorizó a EE. UU. la utilización de bases militares (Rota, Torrejón, Zaragoza y Morón), a cambio de ayuda económica. En 1955 recibió el apoyo de EE.UU. a la solicitud de ingreso en la ONU. En 1959 este acercamiento culminaría con la visita a Madrid del presidente Eisenhower, lo que supuso la salida definitiva del aislamiento.

También se buscaron lazos de amistad con la América de habla hispana (la Argentina de Perón principalmente) y con los países árabes (al no reconocer al estado de Israel). España retornó a foros internacionales: FAO (1950), UNESCO (1952), FMI (1955) y ONU (1955). Además, se firmó el Concordato con la Santa Sede (1953) y se concedió la independencia a Marruecos (1956), cuando Francia tomó la misma decisión.

> En 1959 la España de Franco era ya un miembro de pleno derecho de la comunidad internacional. Incluso había cristalizado un nuevo modelo de política exterior española: pactos con Portugal, vínculos especiales con América (salvo con México, uno de los países, junto con Israel y los países comunistas, que no reconoció a Franco), amistad con los países árabes, acuerdos de seguridad con Estados Unidos. (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p.738).

A la vez que se producía el proceso de integración internacional España fue abandonando una política económica autárquica, de control y de intervención que había producido pobres resultados y se apostó por un apoyo a la industria que permitiese el crecimiento y la industrialización del país.

> Desde 1951 se había operado una cierta flexibilización económica e introducido algunos mecanismos de mercado. En la década de los cincuenta entraron en funcionamiento factorías del INI como SEAT (automóviles), ENSIDESA (siderurgia) y Escombreras (refinería); se terminaron los aeropuertos internacionales de Madrid y Barcelona; iniciaron su servicio trenes modernos (TALGO, TAF); el empresario Eduardo Barreiros inició la fabricación de motores y vehículos industriales; se llevó a cabo un plan integral de electrificación y regadío en Badajoz (y se trazó otro para Jaén) y se construyeron nuevos y numerosos embalses (entre ellos, los gigantescos de Entrepeñas y Bunedía) […] Desde la perspectiva de 1959, el cambio más sustancial que se había producido desde el fin de la guerra civil veinte años antes, era que España había dejado de ser un país predominantemente agrario para ser un país semiindustrializado. (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p.739).

Este desarrollo económico generó nuevos problemas, se produjo un fuerte aumento del déficit comercial al aumentar la demanda de carburantes, materias primas, semifacturadas y facturadas y material de transporte. La demanda interna no podía absorver el incremento de la producción industrial produciéndose la saturación de la oferta de algunos productos manufacturados. Se optó por incrementos salariales que dispararon la inflación.

> Los desequilibrios y estrangulamientos provocados por la coexistencia de la vieja inercia autárquica con las medidas liberalizadoras habían llevado a la economía española a una situación de bancarrota. Agotamiento de reservas, déficit de la balanza de pagos, aumentos salariales demagógicamente concedidos por el ministerio de Trabjao, feudo de Falange, pronto superados por la inflación, protestas estudiantiles, malestar social evidenciado en las huelgas de Madrid, Asturias y Barcelona: todo se alió para provocar una crisis de gobierno en febrero de 1957. Su solución llevó por primera vez a importantes ministerios económicos a dos miembros de Opus Dei, Alberto Ullastres, en Comercio, y Mariano Navarro, en Hacienda, Laureano López Rodó, prominente figura de ese mismo instituto religioso, se hizo cargo de la Secretaría General Técnica del

> ministerio de la Presidencia, bajo la titularidad del almirante Carrero Blanco. Se trataba de la llegada de una nueva élite de poder a los centros de decisión política y económica, con un objetivo muy preciso: acometer una reforma de la Administración que sirviera de base a un desarrollo económico. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006 , p.516).

Esta situación de crisis económica se vio agravada por la concesión unilateral de independencia de Marruecos realizada por Francia (1956) que llevó a España a una pequeña guerra en Ifni. Adicionalmente se produjeron en este periodo los primeros movimientos de protesta llevados a cabo por los estudiantes universitarios y por la nueva clase obrera nacida de la industrialización.

> El régimen de Franco superó con facilidad la crisis de 1956-1959. Algunas detenciones y sanciones de distinto tipo pusieron fin a la agitación universitaria. La promesa de una futura retrocesión de Ifni acabó con la guerra de Marruecos. El plan de estabilización de 1959 y las medidas que le precedieron permitieron superar la crisis económica. Pero los desórdenes habían vuelto a las calles, estallaron huelgas y el país estuvo al borde de la suspensión de pagos internacional. Las presiones hacia cambios sustantivos- sobre todo en política económica- se hicieron irrestibles (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p.742).

El final de este periodo estuvo marcado por sucesivas reformas de la Administración del Estado y por la estabilización y liberalización económicas. España se incorporó a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE en lo sucesivo) , al Fondo Monetario Internacional (FMI en lo sucesivo) y al Banco Internacional De Reconstrucción y Fomento. Con el asesoramiento y financiación de estos organismos España se alineó con el resto del mundo occidental y abandonó la autarquía, el intervencionismo en la economía y el aislamiento.

2.4.2.2. Situación educativa.

En el ámbito educativo, Joaquín Ruiz Jiménez, Ministro de Educación, inicia un proceso de modernización de la enseñanza incorporándose a foros internacionales y grupos de investigación didáctica de otros países.

En Primaria se introducen por primera vez programas por materias. El 27 de Febrero de 1953 aparece en el BOE un nuevo plan de estudios para las Enseñanzas Medias (BOE-A-1953-2404). El Bachillerato se estructura en seis cursos: los cuatro primeros son comunes y se consideran Bachillerato Elemental, los dos últimos se dividen en letras y ciencias y se denominan Bachillerato Superior. Tanto el Bachillerato Elemental como el Superior terminaban con un examen nacional denominado reválida que daba acceso a los títulos de Bachiller Elemental y Bachiller Superior respectivamente.

Adicionalmente a estos 6 cursos, se establece un curso puente con la universidad denominado Preuniversitario que se organizaba y evaluaba parcialmente desde la universidad.

Lo más destacado de este plan es la inclusión de orientaciones metodológicas y cuestionarios por asignaturas. El plan fue renovado en 1957 sin modificaciones fundamentales.

Este periodo de reforma educativa terminó con una crisis de gobierno en torno a la figura del Ministro de Educación, Joaquín Ruiz Jiménez. Su programa educativo y cultural había buscado aperturismo en la enseñanza media y superior, por lo que se culpó al ministro de la agitación estudiantil (1954-56) y fue cesado.

> La llegada de Ruiz Giménez al ministerio supuso su colaboración con la otra Falange, la cultural, situada en una posición muy distinta. El ministro intentó la vuelta a España de destacados intelectuales exiliados, situó en el rectorado de algunas universidades a personas de conocido talante aperturista, como Laín y Tovar, e incluso tuvo problemas con la Iglesia en materias educativas. El talante aperturista de este ministerio acabó deslizándose hacia unas posiciones juzgadas como heterodoxas. Cuando en febrero de 1956, se produjo una serie de incidentes callejeros de cierta gravedad entre falangistas y estudiantes, Franco sustituyó a Ruiz Giménez por Rubio y al falangista Fernández Cuesta por Arrese. (Martín, Martínez y Tusell, 1998 , p.717).

2.4.2.3. Situación de la educación matemática.

En el área de Matemáticas las normas didácticas establecidas en los cuestionarios son resumidas como sigue:

> 1. Se da primacía a las Matemáticas y se aumentan sus contenidos, debido a la prolongación del período escolar y por la orientación hacia la iniciación profesional.
> 2. Se defienden los siguientes métodos didácticos: la repetición, ejercicios constantes de mecanismos de cálculo, aprendizaje escalonado, adecuación del trabajo a las diferencias individuales.
> 3. Se dan normas sobre los enunciados de los problemas y su resolución. (Rico y Sierra, 1994, p.132).

Al igual que otros muchos aspectos, la educación matemática está notablemente influida por el nivel de codeterminación de la sociedad y se establece un férreo control estatal que busca modelos educativos que fomenten la repetición memorística y el pensamiento acrítico.

Durante la década de los 50 aparecen algunos artículos sobre enseñanza de las Matemáticas en la revista de educación Bordón, fundada en esa misma época, lo que índica el comienzo de un interés hacia la educación matemática que se va asentando en el profesorado.

Entre todos los autores destaca Puig Adam, quien participa en la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM). En este foro es un miembro muy activo y coincide con los autores más destacados del momento en educación matemática, como Emma Castelnuovo. Su presencia en este foro permite la celebración en Madrid de la XI reunión internacional. Se trata de una figura clave ya que publicó más de 20 libros y más de 100 artículos sobre las Matemáticas y su enseñanza.

Un resumen de su pensamiento e influencia aparece en un artículo del propio Puig Adam de 1955 que sintetiza su pensamiento sobre metodología:

> Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar esa conciencia didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las

sugerencias que estimo más fundamentales:

1, No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.

2, No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.

3, Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

4, Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.

5, Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

6, Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

7, Promover en todo lo posible la autocorrección.

8, Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

9, Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

10, Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento. (Rico y Sierra, 1994, p.137).

Puig Adam fue un renovador de la enseñanza de las Matemáticas en España y consiguió, a través de publicaciones y cursos, difundir las corrientes más modernas entre un grupo reducido de profesores que actuaron a su vez de renovadores en años posteriores. Su fallecimiento en 1960 truncó esta corriente renovadora y supuso un retroceso en los años siguientes.

Un análisis de los libros de texto, como los de Marcos y Martínez (1960a, 1960b,), Baratech-Estevan (1960) y Postigo (1965), revela que la educación geométrica durante este periodo mantuvo el enfoque euclídeo, siendo habitual el estudio de los axiomas y las demostraciones sin conexión con la realidad y con un alto nivel de abstracción y rigor formal. La enseñanza inicial era basada en los elementos de Euclides y se reservaba para los últimos cursos la Geometría analítica, para los alumnos en el Bachillerato de ciencias.

Un ejemplo del tipo de obra con el que habían estudiado los profesores lo tenemos en Sánchez y Sabras (1937). El nivel de abstracción es alto, es decir, la presencia de ejemplos numéricos es escasa y se utiliza continuamente un sistema de lecciones que son sucesivas demostraciones basadas en los axiomas y postulados ya demostrados.

Este esquema euclídeo se trasladaba a la enseñanza secundaria, como se puede ver en los libros de texto ya mencionados. A modo de resumen es revelador el siguiente párrafo:

> En este curso se comienza a estudiar razonadamente la Geometría plana. La experiencia indica cuán costosas se hacen al pequeño en un principio las demostraciones geométricas. Interesa no desanimarse por las primeras dificultades. Insistir hasta que su inteligencia vaya haciéndose al método lógico de esta ciencia. Así se cumplirá una de las principales finalidades de la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato (Marcos y Martínez, 1960a, p. 8).

Como se puede ver, la transposición didáctica realizada en esta época es de corto recorrido y se estudia la Geometría de una forma muy cercana al saber sabio. Hay que destacar que la posición ontológica dominante es que las Matemáticas son verdades universales y necesarias a las que se llega desde la razón. El enfoque epistemológico es euclidianista. La ausencia de una noosfera clara, al no existir participación del profesorado en las decisiones ni cuerpos universitarios dedicados a la Didáctica o la Psicología Educativa, limitaba ampliamente el efecto de la transposición didáctica. La educación, carente de esa noosfera, está directamente sometida al control político que, aunque repite el modelo histórico de los Elementos, marca pautas claras para el fomento de un aprendizaje memorístico individual y acrítico a pesar de, como se ha visto, ser conscientes de las dificultades que eso conllevaba para los alumnos.

2.4.3. La década de los 60.

Esta década es especialmente significativa en términos económicos, al producirse el denominado desarrollismo. Educativamente, se va fraguando un cambio importante que culminará en la LGE de 1970 (BOE-A-1969-915). Por último, en el ámbito matemático nos encontramos en un momento en el que se produce una verdadera revolución, que se denominó Matemáticas Modernas y que analizaremos en profundidad.

2.4.3.1. Situación social, económica y política.

Desde 1957 se forman gobiernos con equilibrio entre falangistas, militares y tecnócratas. Se pusieron en marcha planes de estabilización y comercio impulsados por dos ministros tecnócratas: Navarro Rubio, Hacienda, y Ullastres Calvo, Comercio. La economía creció mucho en poco tiempo y comenzaron los Planes de Desarrollo, siendo López Rodó Ministro del Desarrollo.

En el período 1962-69 hubo cuatro gobiernos, con mayor presencia tecnócrata, que consiguieron el mayor grado de aperturismo que tuvo el régimen. Los acontecimientos más importantes, según aparecen en Fusi y Palafox (1997) y Fusi y Calvo (2009), fueron los siguientes:

- Las conversaciones con el Mercado Común dirigidas por Fernando de Castiella, ministro de Exteriores, que desembocaron en un acuerdo preferente de comercio.
- La Ley de Prensa (BOE-A-1966-3501), impulsada por Fraga, Ministro de Información y Turismo, que eliminaba la censura previa (reservada para casos de guerra o emergencia nacional), pero contemplaba el secuestro de publicaciones y sanciones económicas o penales para quien escribiera algo en contra del régimen.
- La Ley Orgánica del Estado (BOE-A-1967-5), que fue sometida a referéndum y que con el término de democracia orgánica intentó dar apariencia de liberalización política al régimen.
- La campaña de los 25 Años de Paz que conmemoraba el final de la Guerra Civil.
- La elección de Juan Carlos de Borbón como sucesor (BOE-A-1969-915).

La represión, aunque menor que en los años cuarenta y cincuenta, seguía existiendo: se creó el Tribunal de Orden Público (TOP) (1963) para juzgar delitos políticos; se ejecutó a Julián Grimau, acusado de crímenes cometidos en Barcelona durante la Guerra Civil. Sin embargo comienza a fraguarse una oposición superadora de la Guerra Civil que incluye a la generación posterior a la guerra. En la reunión de Múnich (1962), un encuentro de 118 personas de diferentes tendencias políticas, se firmó una resolución contra la dictadura. Varios de sus participantes fueron condenados al exilio; en la universidad se destituyó en 1965 a algunos profesores que apoyaban la petición de cambios (como Aranguren o Tierno Galván), se expulsó a centenares de universitarios y se decretó el cierre temporal de la Universidad de Madrid.

> La clase media, por su parte, experimentó durante los años cincuenta y sesenta un cambio moral y de cultura política ilustrado por el hecho de que muchos hijos de los vencedores de la Guerra Civil tomaron partido por la democracia y contra la dictadura, terreno en el que encontraron a muchos hijos de los vencidos. Las conversaciones y pactos entre grupos de la oposición socialista, comunista y nacionalista, con grupos disidentes del régimen- monárquicos, liberales, demócrata-cristianos, antiguos falangistas- se mantenían sobre el supuesto de que la Guerra Civil había sido una catastrofe, que era preciso una mutua amnistía como primer paso de un proceso constituyente y que el único horizonte posible para reconstruir una convivencia política entre españoles era una democracia que equiparará a España a Estados de Europa occidental. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006 , p.522).

El motor del cambio fue el Plan de Estabilización (BOE-A-1959-9920) y el Primer Plan de Desarrollo (BOE-A-1963-22668). Este modelo conllevó: devaluación de la peseta, reducción del gasto público y liberalización de las importaciones. Era una decidida apuesta por la libertad económica. Todo ello se vio acompañado por la llegada de remesas de dinero de emigrantes españoles en Europa y por el crecimiento del turismo: España pasó de 2.863.700 turistas en 1959 a los 27.359.200 en 1975 (Carreras y Tafunell, 2005) (se incluyen gráficos de evolución de turistas e ingresos por turismo en España entre 1959 y 1975, según datos de Carreras y Tafunell, 2005, p.642, en la Figura 43).

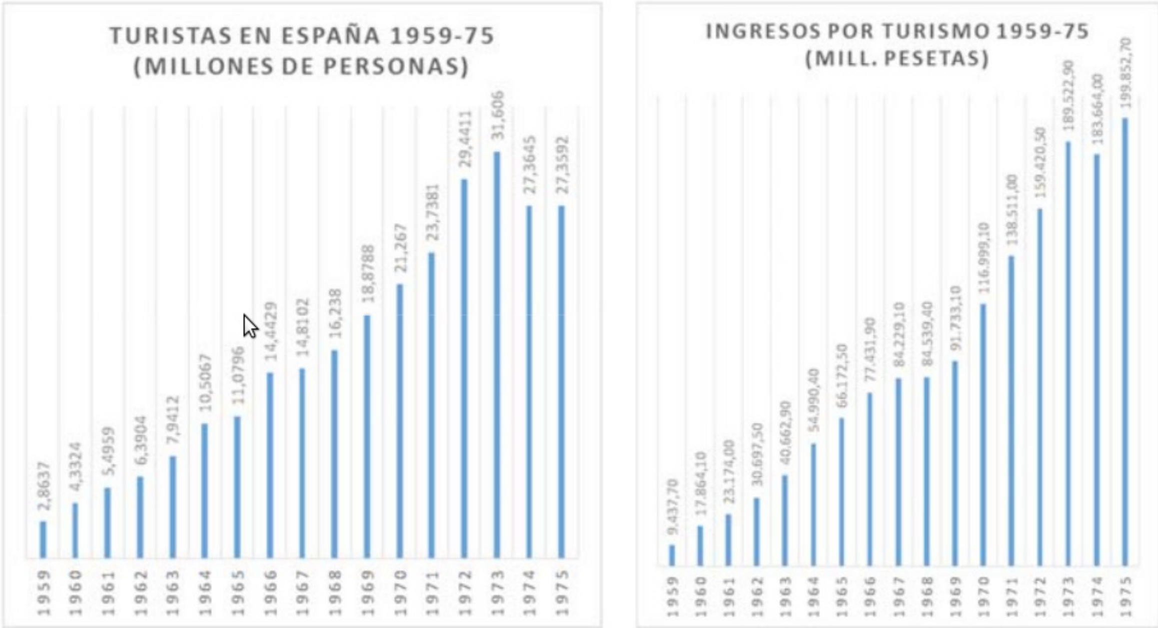


Figura 43. Datos de evolución turística en España entre 1959 y 1975. Elaboración propia a partir de Carreras y Tafunell, 2005, p. 642.

Hubo un aumento de población, pasándose de los 30.528.539 habitantes según el censo de 1960 a los 34.040.657 en 1970 (Instituto Nacional de Estadística, 2017). La tasa bruta de mortalidad descendió y la natalidad se mantuvo en valores altos (ver figura 44).

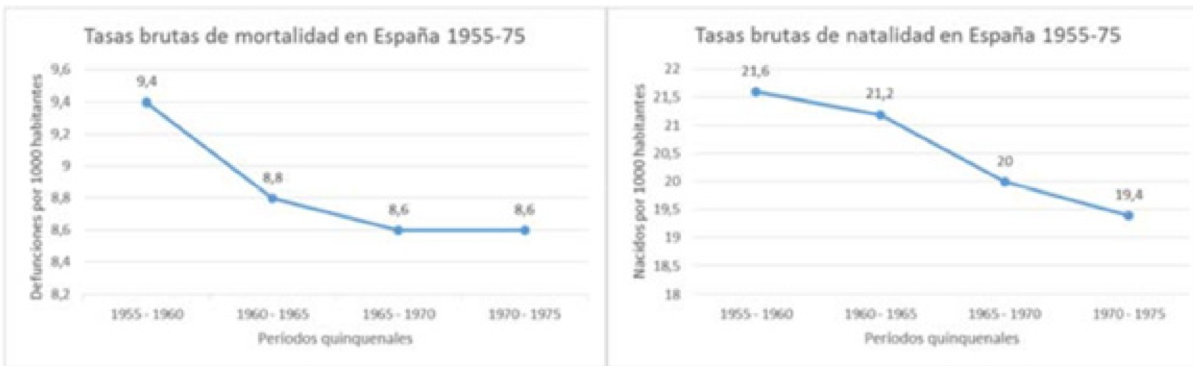


Figura 44. Tasas brutas de mortalidad en España de 1955 a 1975. Elaboración propia a partir de los datos del instituto nacional de estadística (2017).

En el trabajo de Palomares (2006) y de Jover, Gómez y Fusi (2001) podemos encontrar algunos datos representativos de este periodo entre los que destacan los siguientes:

- Entre 1960-70 se produjeron más de dos millones de desplazamientos a zonas urbanas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao) y algo menos de dos a Europa Occidental (Francia, Suiza, Alemania, Bélgica). Conllevando diferencias de riqueza entre regiones y creación de suburbios en las afueras de las ciudades.
- Si en 1939 el sector predominante era el primario, en 1975 el terciario o servicios daba empleo al 40% de la población, el secundario o de industria al 38%, dejándole el 22% al agrícola-ganadero.
- En renta per cápita, el aumento fue espectacular. España tenía a principios de los 60, 1.160 dólares por cabeza y en 1975 alcanzó 2.841.
- En industria de consumo se produjo un despegue en la producción de electrodomésticos (300.000 frigoríficos en 1966, un millón en 1974), vivienda (masiva construcción privada) y automóviles (250.000 en 1966, 700.000 en 1974).
- Entre 1960 y 1969 se pasó de 4 frigoríficos por cada 100 hogares a 63, de 1 televisión por cada 100 hogares a 62 y de 4 automóviles por cada 100 hogares a 24.

> La modernización del país debió mucho a tres factores: al éxodo rural, a la revolución turística y a la nueva publicidad que desde la televisión, principal instrumento de cambio de mentalidad, como bien vieron los obispos, estimulaba a los españoles al consumo y al bienestar, identificados con automóviles, vacaciones al sol, viajes, electrodomésticos, aperitivos internacionales, y perfumería de lujo. (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p.755).

En el ámbito de las prestaciones sociales: se creó la Seguridad Social (BOE-A-1963-22667) y hubo asistencia médica, prestaciones por desempleo, indemnizaciones por discapacidad y pensiones de jubilación.

En la Iglesia se produjo una cierta apertura a partir del Concilio Vaticano II (iniciado por Juan XXIII en 1962 y clausurado por Pablo VI en 1965). De ahí derivó, por ejemplo, la Ley de Libertad Religiosa (BOE-A-1967-10949).

En general se trata de un periodo de profundos cambios demográficos y económicos que se controlan social y políticamente mediante políticas de protección social, cambios de gobierno y represión interna. Estos cambios, que en particular exigían reducir drásticamente el analfabetismo, tuvieron su reflejo en el sistema educativo.

> El desarrollo pilotado por los hombres del Opus Dei provocó la más formidable estatalización de la enseñanza en la historia de España.
>
> Hubo dos razones para el cambio: la demanda social de una educación técnica y moderna, y la crisis interna de la Iglesia. Los distintos gabinetes que desde 1959 gobernaron España fueron muy conscientes de que el crecimiento del país necesitaba al menos una fuerte expansión cuantitativa de la educación. Lo señaló el ya citado informe del Banco Mundial de 1962, al indicar que la educación española estaba muy por debajo de las necesidades mínimas de la economía. En consecuencia, bajo los ministerios de Lora Tamayo (1962-1968) y Villar Palasí (1968-1973), la inversión en educación se convirtió en objetivo prioritario del régimen. (Jover, Gómez y Fusi, 2001, pp.758-759).

2.4.3.2. Situación educativa.

La escuela en España en el período comprendido entre 1960 y 1970 se caracteriza por el crecimiento en el nivel de escolarización. Podemos tomar la escolarización en educación primaria en dicho periodo como un índice del grado de alfabetización de la sociedad española. Así, éste se incrementa:

- En 1960, según el Instituto Nacional de Estadística (1971), en primaria (comprendiendo el nivel los períodos preescolar y de escolaridad obligatoria) son 3.387.400 alumnos matriculados, que, en porcentaje con respecto a la población entre 2 y 13 años (6.628.811 individuos según censo de 1960 (Instituto Nacional de Estadística, 1961)) es el 51,1%.
- En 1970, el mismo dato es del 62,3%, 819.900 matriculados en preescolar y 3.929.600 en EGB, según Instituto Nacional de Estadística (1975), en una población de entre 2 y 13 años de 7.618.996 individuos según censo de 1970 del Instituto Nacional de Estadística, (1971), y el porcentaje de alumnos matriculados

en EGB en relación a la población de entre 6 y 13 años, 5.029.517 según censo de 1970 del Instituto Nacional de Estadística, (1971) es del 78,1%.

- En 1975, según Instituto Nacional de Estadística, (1975, p. 21), la escolaridad en el período de escolaridad obligatoria es muy próximo al 100%.

Durante la década de los 60 se produce en España un desarrollismo de la mano de los ministros tecnócratas. Paralelamente, en Europa se produce un giro hacia la escuela comprensiva que rompe con la estructura bipolar en la que la mayoría de la población únicamente estudiaba educación primaria y sólo una minoría alcanzaba la enseñanza media y universitaria. Se propone una sola vía de educación básica, de amplia duración para toda la población. En España, el esfuerzo se centra en la Educación Primaria de la mano de Lora Tamayo, debido a las necesidades de una población alfabetizada para el desarrollo económico. En 1964 y 1965 tal y como aparece en (Puelles, 2002, p. 344) se establecen niveles mínimos para todas las materias a los que se añaden unas normas prácticas para su aplicación que incluían controles a final de curso.

> Si en 1962 España gastaba en educación sólo el 1,42 por 100 de su renta nacional, en 1973 gastaba el 2,68 por 100. En 1964 el ministro Lora Tamayo empezó, además una intensa campaña de alfabetización de adultos y extendió la escolaridad hasta los 14 años; aumentó sensiblemente el número de becas; creó el bachillerato radiofónico; abrió 98 institutos sólo en 1962-63, y creó una amplia red de escuelas comarcales y transportes en zonas rurales.
>
> Los resultados fueron más que discretos: el porcentaje de analfabetos quedó reducido en 1968 al 1,8 por 100; entre 1962 y 1968, el número de alumnos en la enseñanza primaria aumentó en un millón; la universidad se duplicó en el mismo tiempo (87608 estudiantes en 1962; 168992 en 1968). (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p. 759).

Adicionalmente, y gracias al fuerte desarrollo económico, se prepara el terreno para aumentar el número y la calidad de los profesores. Se reforman los estudios de magisterio (BOE-A-1967-2626) exigiendo el acceso desde el bachillerato superior y se garantiza el acceso al cuerpo de funcionarios a los mejores expedientes. Además de esta reforma se amplía el número de facultades dedicadas a la educación matemática [17], conscientes del papel central que juegan estas en el desarrollo. Estas nuevas facultades comenzaron a dar titulados a finales de la década.

Durante esta década, España se preparó para afrontar una reforma educativa moderna, consolidando estudios, generando foros y revistas de divulgación, mejorando y aumentando la formación de profesores y tratando de estar al día de los últimos avances en el área de las Matemáticas a nivel internacional. La culminación de este periodo se produce con la publicación en 1969 del informe "La educación en España bases para una política educativa" (MEC, 1969), el llamado Libro Blanco de la reforma educativa que es la antesala de la primera ley general de educación del siglo XX. En esta publicación se cifra el déficit de puestos escolares para el tramo de edad de los 6 a los 14 años en 800.000. A pesar de los avances mencionados la realidad del sistema educativo español sigue siendo muy precaria como se puede ver en el siguiente párrafo

> En resumen: de cada 100 alumnos que iniciaron la Enseñanza Primaria en 1951, llegaron a ingresar 27 en la Enseñanza Media; aprobaron la reválida de Bachillerato Elemental 18 y 10 el Bachillerato Superior; aprobaron el Preuniversitario 5 y culminaron estudios universitarios 3 alumnos en 1967. (MEC, 1969, p.24).

2.4.3.3. Las Matemáticas Modernas.

La disciplina de Matemáticas en el período que nos ocupa se caracteriza por la reforma de las Matemáticas Modernas, que es clave para entender los cambios producidos en la educación matemática en los últimos 50 años. Por este motivo, en este punto explicaremos en qué consisten y cuáles fueron sus principales aportaciones.

En la segunda mitad del siglo XIX y en la primera mitad del siglo XX se produjeron una serie de cambios en las Matemáticas que produjeron un fuerte distanciamiento entre la matemática sabia y la matemática escolar. Los avances que se produjeron son muchos, pero podemos destacar los siguientes por su relación con el tema que nos ocupa:

17 Se pasa de 3 facultades (Barcelona, Madrid y Zaragoza) a 10: Santiago, Granada, Sevilla, Valencia, Valladolid, Salmanca y La Laguna.

- La construcción de las geometrías no euclídeas por Hilbert, Bolyai y Lobacheski supuso una revolución en el saber sabio acerca de qué se entiende por Geometría. Su carácter extremadamente abstracto dificulta mucho la transposición didáctica directa en la Educación Secundaria.
- Los movimientos estructuralistas que intentan encontrar bajo el concepto de estructura el método común a todas las disciplinas matemáticas. Con este enfoque trabajan varios matemáticos como Hilbert o Russel y en los años 50 los matemáticos del grupo Bourbaki. Este era un grupo de alumnos franceses de escuelas normales que se propuso redactar una obra similar a dichos Elementos, es decir, un compendio o libro de referencia que contuviera los principales desarrollos matemáticos existentes tanto en la matemática clásica como de la moderna (Warusfel, 1971).
- La creación de la teoría de conjuntos ofrece un elemento explicativo unitario.
- En la rama de Análisis se realiza una construcción rigurosa del conjunto de los números reales.

En oposición a este envejecimiento del saber enseñado surge un movimiento en torno a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y al Grupo Belga de pensamiento matemático (CBPM) que propone que, de la misma manera que la matemática clásica se había desarrollado a partir de los Elementos de Euclides, la matemática del siglo XX se desarrollará a partir del trabajo del grupo Bourbaki. Papy (1968), exponente reconocido del movimiento de Matemática Moderna en la escuela, expone sobre las Matemáticas:

> Los progresos realizados a lo largo del último siglo la han modificado y humanizado en sus fundamentos y hoy la hacen más familiar, más inteligible, más precisa, más accesible, más interesante.
>
> Hoy es posible proceder en forma totalmente distinta hacer participar a los principiantes en la construcción activa del edificio matemático a partir de situaciones simples y familiares.

> Los cinco primeros capítulos introducen al lector en el universo de la matemática actual que construye la teoría de conjuntos. Se trata, por supuesto, de una exposición ingenua y descriptiva, que se ha querido, sin embargo, presentar de manera tal que un estudio posterior de más hondura no exija ningún reacondicionamiento fundamental. (Papy, 1968, p.9).

Las ideas claves son, por tanto, que la Matemática Moderna se debe basar en el uso de conjuntos y de grandes estructuras pasando a utilizar herramientas que permitan un avance más rápido del conocimiento y el aprendizaje.

> En la conceptuación de Papy y sus colaboradores del CBPM, las estructuras-madre, según las defiende Bourbaki, serían análogas a las herramientas de la industria ya que permiten la economía de pensamiento y evitan la repetición de razonamientos; deben ser introducidas progresivamente según se va construyendo el edificio matemático, ya que presentadas al final cuando está ya construido no tiene ningún sentido. El hilo conductor de todo el proceso es el método axiomático; en la enseñanza del Centro se utilizará el método axiomático progresivo que consiste en que los axiomas no se dan desde el principio sino que se van introduciendo a lo largo de la teoría, de modo progresivo y motivado" (Sierra, 2008, p. 7).

Didácticamente, se agrupan los contenidos y los métodos para enseñarlos, por lo que la reforma de la enseñanza es global. En Sierra (2008) se citan varios elementos de renovación:

- La idea de que los conceptos fundamentales de la Matemática de nuestro tiempo están en el conocimiento común.
- La necesidad de partir de situaciones pedagógicas adecuadas para refinar de modo progresivo ese conocimiento común hasta convertirlo en conocimiento matemático.
- Creación de medios pedagógicos esencialmente no verbales, como los diagramas de Venn, los grafos, o las bandas dibujadas.
- Pedagogía de la afectividad, con la creación de cuentos matemáticos.

Para llevar a cabo esta reforma se divide la etapa de secundaria y bachillerato en dos periodos. La secundaria inferior (12 a 15 años) y la secundaria superior (15 a 18 años).

> En la secundaria inferior se organizan cuatro grandes núcleos: Conjuntos, relaciones y funciones, números naturales y enteros y geometría afín y métrica del plano.
>
> Ciñéndome a la geometría, hay que señalar que el objetivo de la reforma del CBPM en el secundario inferior es la reconstrucción del edificio geométrico hasta llegar a la estructura de π_0 como espacio vectorial euclídeo definido sobre el cuerpo de los números reales (Sierra, 2008, p.8).

La organización temporal propuesta en el área de Geometría es introducir los axiomas de incidencia y orden y estudiar traslaciones; establecer la estructura del plano como espacio vectorial real construyendo simultáneamente el cuerpo de los números reales; llegar a la estructura de espacio vectorial euclídeo y trabajar con dicho espacio.

En la secundaria superior, sección científica, se estudian tres grandes bloques: Álgebra Lineal, Análisis y Aritmética.

El área de Geometría se somete al Álgebra Lineal y se estudian de forma analítica los espacios vectoriales de dimensión finita, el plano vectorial euclídeo, la geometría del espacio y las formas bilineales y cuadráticas.

> En cuanto a la supresión de la enseñanza de la geometría sustituida por el álgebra,… En el fondo de esta polémica subyace una cuestión epistemológica. Dieudonné y Papy no captan el sentido del debate sobre el papel a asignar a la geometría en la enseñanza porque desde su punto de vista dicho problema no existe. Papy está plenamente convencido de que está enseñando geometría porque identifica la geometría con el álgebra lineal en concordancia con la idea de "álgebra geométrica" de Artin (1957), que es fuente de inspiración de su renovación de la enseñanza de las Matemáticas. (Sierra, 2008, p.13).

En España, de forma general se intenta conseguir una enseñanza matemática más activa y menos individual que se acercaba, al menos sobre el papel, a las prácticas usuales en Europa.

En la Educación Secundaria se introducen algunas nociones de Matemáticas Modernas en Bachillerato en el periodo comprendido entre los los congresos internacionales de Royaumont de 1959 y Dubrovnik de 1960 promovidos por la OCDE.

Se da un paso en el Bachillerato y según recogen Rico y Sierra (1994) se incluye, entre los temas a tratar los conjuntos, las operaciones fundamentales con conjuntos, el producto de conjuntos, las relaciones binarias, aplicaciones entre conjuntos, concepto de función, la equivalencia, la simetrización de un semigrupo, los grupos, la reversibilidad de las operaciones y el espacio vectorial. Como puede apreciarse en estos bloques propuestos se trata de un giro radical en la enseñanza que abandonaba los contenidos tradicionales y abraza los contenidos propuestos por la Matemática Moderna.

En los Cuestionarios de Bachillerato Elemental (BOE-A-1967-15919, p.13429) se incluye, como orientación metodológica "Resaltar el sentido unitario de la Matemática fundiendo todas las nociones en unidades funcionales basadas en la teoría de los conjuntos, en las ideas de correspondencia y de relación y en las estructuras algebraicas fundamentales." Además, se justifica la distribución de contenidos en cursos por la construcción de dichas estructuras algebraicas:

> La distribución de las materias en los distintos cursos se ha hecho procurando agrupar los temas alrededor de ciertas estructuras algebraicas fundamentales, que no se citan explícitamente en nunguna parte de cuestionario, y prescindiendo de la separación entre Aritmética y Geometría.
>
> Por ello, el primer curso se centra en la estructura semigrupo (numéros naturales, segmentos).
>
> El segundo curso en la de grupo y anillo (númeors enteros, segmentos orientados, movimientos, ángulos como giros).
>
> En el tercero aparece la estructura de cuerpo con los números racionales. (BOE-A-1967-15919, p. 13430).

Esta propuesta se llevó a cabo de forma experimental en varios centros oficiales y no oficiales de todo el país durante la década de los 60 (BOE-A-1967-15919, p. 13429) y se fue dando a conocer a través de revistas científicas como La Revista de Enseñanza Media y Vida Escolar. Se trataba de realizar una implantación de arriba abajo y de ir preparando el sistema pedagógico a la nueva corriente mediante información y cursos al profesorado.

Se percibe la importancia de los cambios y se invierte tiempo, recursos y esfuerzos en dominar los nuevos contenidos. Sin embargo, la ausencia de especialistas en Didáctica de las Matemáticas hace que los aspectos metodológicos sean pasados por alto.

La educación geométrica durante este periodo mantuvo el enfoque euclídeo en el Bachillerato Elemental pero incorpora de forma experimental elementos más estructuralistas, basados en la Matemática Moderna en el Bachillerato Superior. La Geometría aparece integrada en libros de textos más generales que incluyen varias áreas de las Matemáticas.

Un ejemplo del tipo de obra con el que estudiaban en el final de este período lo constituyen Marcos y Martínez (1960a, 1960b) y Marcos y Martínez (1967). En él se puede ver, una evolución hacia unas Matemáticas Modernas con la presencia de teoría de conjuntos y nociones topológicas. Se utiliza un sistema basado en temas a diferencia del sistema de lecciones anterior. Representa una epistemología euclideanista de las Matemáticas aunque basada en la teoría de conjuntos y una Geometría que, aunque se utilice como preparación para el Álgebra Geométrica, sigue siendo no experiencial e hipotética deductiva.

2.4.3.4 Ley General de Educación de 1970.

Como se ha dicho anteriormente en 1969 se publica el Libro Blanco y se produce un fuerte debate educativo que trata de superar el modelo anterior y acompasar el sistema educativo al desarrollo económico.

> Ello puso de relieve que la inversión iniciada en 1964 debía ir acompañada de una radical reforma de estructuras y métodos de todo el sistema educativo.
>
> Eso fue lo que intentó hacer el ministro Villar Palasí, que desde 1968 diseñó la que su subsecretario Díez Hochleiter llamó la nueva estrategia de la educación

> contenida en el Libro Blanco publicado al año siguiente, uno de los textos más debatidos y polémicos de la hstoria educativa del franquismo. El Libro Blanco supuso una devastadora crítica de la labor educativa hasta entonces realizada por el régimen, de un sistema educativo socialmente discriminatorio y favorable a las familias de clase media y alta, deun sistema desequilibrado regionalmente a favor de las provincias prósperas, de un sistema basado en planes de estudio rígidos y arcaicos y en una pedagogía memorística y repetitiva. (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p. 760).

Este debate en torno a la educación cristalizó en 1970 en una Ley General de Educación. Desde la aprobación de la Ley Moyano de 1857 se habían producido numerosas reformas parciales de la educación, pero es el 4 de agosto de 1970 cuando se aprueba la Ley General de la Educación (Ley 14/1970) (en adelante LGE) (BOE-A-1969-915) que reorganiza todo el sistema educativo, definiendo de nuevo la escuela y la pedagogía.

Desde el preámbulo se pueden observar referencias a lo que se considera una ley de educación moderna. Términos claves como universalidad, preparación profesional, igualdad de oportunidades o formación permanente aparecen desde el principio.

> El sistema educativo nacional asume actualmente tareas y responsabilidades de una magnitud sin precedentes. Ahora debe proporcionar oportunidades educativas a la totalidad de la población, para dar así plena efectividad al derecho de toda persona humana a la educación y ha de atender a la preparación especializada del gran número y diversidad de profesionales que requiere la sociedad moderna. Por otra parte, la conservación y el enriquecimiento de la cultura nacional, el progreso científico y técnico, la necesidad de capacitar al individuo para afrontar con eficacia las nuevas situaciones que le deparará el ritmo acelerado del mundo contemporáneo y la urgencia de contribuir a la edificación de una sociedad más justa constituyen algunas de las arduas exigencias cuya realización se confía a la Educación. (BOE-A-1969-915, p. 12525).
>
> Entre los objetivos que se propone la presente Ley son de especial relieve los

siguientes. Hacer partícipe de la educación a toda la población española, basando su orientación en las más genuinas y tradicionales virtudes patrias; completar la educación general con una preparación profesional que capacite para la incorporación fecunda a la vida del trabajo; ofrecer a todos la igualdad de oportunidades educativas, sin más limitaciones que la de la capacidad para el estudio; establecer un sistema educativo que se caracterice por su unidad, flexibilidad e interrelaciones, al tiempo que se facilita una amplia gama de posibilidades de educación permanente y una estrecha relación con las necesidades que plantea la dinámica de la evolución económica y social del país. Se trata, en última instancia, de construir un sistema educativo permanente, no concebido como criba selectiva de los alumnos, sino capaz de desarrollar al máximo la capacidad de todos y cada uno de los españoles. (BOE-A-1969-915, p. 12526).

En la justificación institucional de la LGE se hace referencia a la petición de disponer un "sistema educativo más justo, más eficaz, más acorde con las aspiraciones y con el ritmo dinámico y creador de la España actual" (BOE-A-1969-915, pág. 12526), viéndose un reflejo en la pedagogía y la escuela del nivel social.

La ley establecía una etapa obligatoria y gratuita denominada Educación General Básica (EGB) que iba desde los 6 a los 14 años. Adicionalmente los alumnos podían cursar un Bachillerato Unificado Polivalaente (BUP) de 3 años y un Curso de Orientación Universitaria (COU) que completaban la educación hasta los 18 años.

La universidad quedaba dividida en 3 niveles: la diplomatura de 3 cursos, la licenciatura de 5 cursos y el doctorado.

Esta ley fue acompañada de la creación de centros escolares y la ampliación de plantillas, lo que permitió la escolarización total en España por primera vez en su historia.

[…] el gran esfuerzo realizado en el decenio 1964-74 en el ámbito de la escolarización. Efectivamente, el grupo de edad 6-14 años pasó de una tasa de escolarización del 87,3% al 100%, el tramo 14-18 años de un 10,05% a un 40,8%, y el de 18-22 años de un 7,6% a un 16,4%. (Puelles, 2000, p.34).

En el desarrollo de la ley para el área de Matemáticas, se puede observar cómo se introduce la teoría de conjuntos desde los primeros cursos de EGB (MEC, 1971) y cómo se añaden ejemplos de topología junto a la Geometría elemental.

En las orientaciones pedagógicas para la EGB (MEC, 1971) se observa que en la tercera etapa de la EGB se profundizaba en el formalismo matemático mediante el trabajo con los conjuntos de enteros y racionales. En Geometría se mantiene el estudio de magnitudes longitud, superficie y volumen.

A modo de ejemplo presentamos en la Tabla 24 una comparativa de los contenidos trabajados en tres libros de los distintos planes para los alumnos de 13 años:

Tabla 24

Comparativa de contenidos de libros de texto de 1960 a 1976.

Plan del 57	**Plan del 67**	**LGE del 70**
Potencias y raíces de números naturales. Divisibilidad, m.c.m y M.C.D. Fracciones y proporciones. Medida de magnitudes. Regla de tres simple y compuesta. Interés, descuento, rentas y valores. Ángulos y arcos. Polígonos. Proporcionalidad de segmentos. Semejanza de triángulos y polígonos. Teorema de Pitágoras. Circunferencia y círculo. Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. (Marcos y Martínez, 1960a)	Relaciones binarias en un conjunto. Relaciones de equivalencia y orden. Funciones y gráficas, Fracciones. Números racionales: Adición, sustración, multiplicación, división y sus propiedades. Transposición de factores y divisores. Potencias y raíces. Proporcionalidad de segmentos. Semejanza de triángulos y polígonos. Razón de las áreas y construcción de polígonos semejantes. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de la circunferencia. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales. Inecuaciones. Aritmética comercial (Marcos y Martínez, 1967)	Combinatoria. Probabilidad y Estadística. Del anillo de los polinomios al cuerpo de las razones algebraicas. Hacia el número real. Funciones polinómicas de variable real. Ecuaciones e inecuaciones. Sucesiones de números reales. Progresiones. El cuerpo de los números complejos. (Valdés y Marsinyach, 1976)

Elaboración propia.

Como se puede ver, la transposición didáctica realizada en esta década viene marcada por un movimiento de renovación internacional. En este caso, la noosfera del movimiento de las Matemáticas Modernas va a imponer una transposición didáctica para acercar el saber sabio al saber enseñando. Hay que destacar que la posición ontológica y epistemológica dominante sigue siendo la misma: las Matemáticas son verdades universales y necesarias a las que se llega desde la razón que se estudian mediante el método axiomático. Sigue habiendo una ausencia en la noosfera del profesorado, los movimientos psicológicos y los cuerpos universitarios dedicados a la Didáctica, lo que sin duda contribuyó al desconocimiento y a la poca aceptación de las Matemáticas Modernas.

La disciplina de Matemáticas se organiza siguiendo el movimiento estructuralista y de la Matemática Moderna. Sin embargo, aquel enfoque internacional no era el más adecuado para la situación real del sistema educativo español:

> Con carácter general, podemos afirmar que los esfuerzos de la sociedad española durante estos años por integrarse en el marco europeo y por superar el atraso científico y cultural hacen que muchas innovaciones curriculares se reciban acríticamente y traten de incorporarse a nuestro sistema educativo, sin reflexión propia ni análisis previo sobre la conveniencia de su adaptación a nuestras necesidades específicas; esto es lo que ocurrió con el programa de las Matemáticas modernas (Rico, 1997, p.28).

2.4.4. Las Décadas de los 70 y los 80.

Las siguientes dos décadas están marcadas por la transición y consolidación de la Democracia. Los cambios sociales, económicos y políticos son tan profundos que paralizan la reforma de la educación hasta 1989, a pesar del consenso para que se realizase la reforma desde la instauración de la Democracia.

2.4.4.1. Situación social, económica y política del tardofranquismo.

Desde los últimos años sesenta se puso de relieve el agotamiento del régimen, al mostrar dificultades para afrontar los conflictos que derivaban del choque entre sus principios y una sociedad moderna.

España era, en 1970, un país industrial, altamente urbanizado, dinámico, secularizado, competitivo y en vías de alcanzar nuevos y mejores niveles de desarrollo.

Desde el punto de vista político, la cuestión era saber hasta que punto esa sociedad cabía en un régimen que, en el mejor de los casos, podía ser definido como un régimen autoritario y de poder personal. (Jover, Gómez y Fusi, 2001 , p. 765).

En Barreda (2002) y en Martín, Martínez y Tusell (1998) podemos ver algunas de las claves del periodo denominado tardofranquista que sintetizamos a continuación:

- Los Ministros de Exteriores, Castiella y López Bravo, consiguieron privilegios comerciales con la CEE y renovaron la colaboración con EEUU. Se concedió la independencia a Guinea Ecuatorial (1968).
- La erosión del Partido del Movimiento era evidente: la afiliación descendía, la edad media de sus integrantes subía y el SEU, sindicato oficial universitario, quedó disuelto en 1965.
- En 1973, Franco dio paso a un nuevo gobierno en el que, aunque se mantenía como Jefe del Estado, renunciaba a la Presidencia de Gobierno, ocupando dicho puesto Carrero Blanco.
- Durante este periodo, la oposición fue consolidándose aumentando la presencia de los movimientos obreros, sobre todo del Partido Comunista de España (PCE) y Comisiones Obreras (CCOO).
- El Partido Socialista Obrero Español (PSOE) cobró nueva vida en el XIII Congreso del partido celebrado en Suresnes (París) en 1974, cuando González se hizo con su dirección.
- La prensa jugo un papel importante en la difusión de ideas de corte democrático a la que se unió parte de los colegios de abogados, especialmente los abogados más jóvenes con una interpretación más progresista y democrática de la legislación. Los artículos firmados por el grupo Tácito y publicados en el diario católico Ya tuvieron una amplia repercusión.
- En la Universidad hubo una protesta endémica hasta casi 1975 aunque de menor intensidad que la realizada la década anterior.

- En Cataluña resurgió la reivindicación nacionalista que se canalizó inicialmente alrededor de la figura de Jordi Pujol y del partido Convergencia Democrática de Cataluña fundado en 1974.
- En el País Vasco, el grupo terrorista Euzkadi Ta Askatasuna (ETA), creado en 1959, recurrió al terrorismo desde 1968. Fue fuertemente perseguido por el régimen mediante detenciones y estados de excepción en el País Vasco. El grupo terrorista se fue radicalizando a lo largo de la década llegando a asesinar a 36 personas entre octubre de 1974 y octubre de 1975.
- El 20 de diciembre de 1973 fue asesinado por ETA Carrero Blanco, le sucedió Arias Navarro. En 1974, Juan Carlos I asumió por primera vez la Jefatura del Estado, aunque Franco la retomó al recuperarse su salud ese mismo año. Franco falleció el 20 de noviembre de 1975.

Según Fusi y Calvo (1997) y Fusi y Palafox (2009), se puede afirmar que la libertad económica trajo consigo la demanda de libertad política. El auge del turismo, 30 millones en 1975, del cine y, ya en los setenta, de películas y series principalmente americanas en televisión, mostraba, a pesar del control censor, modelos de vida diferentes. Todo ello se unió al cada vez más lejano recuerdo de la guerra y al cambio crítico de parte de la Iglesia, para influir en las maneras de pensar en tres direcciones: mayor secularización social, pretensión de nuevas formas de vida acordes con las occidentales (ocio, electrodomésticos, televisión, automóviles, liberación sexual) y la aparición de un pensamiento democrático que demandaba diálogo en vez de confrontación.

2.4.4.2. Situación social, económica y política desde 1975 hasta 1989.

Desde 1975 a 1982 se produjo el paso a un régimen democrático. El contexto internacional fue favorable, al terminar otras dictaduras como la de Grecia (1973) o Portugal (1974).

Tras la muerte de Franco, Juan Carlos I asumió la jefatura del Estado. En julio de 1976 se nombra presidente a Suárez. La primera medida que Suárez tomó fue la Ley para la Reforma Política (BOE-A-1977-165), con rango de ley fundamental (la 8ª del régimen), redactada por Fernández-Miranda; significaba la puesta en marcha de un régimen democrático. Las Cortes franquistas, votaron su aprobación en noviembre de 1976. Con ello establecían su propia desaparición.

La Ley fue aprobada en referéndum popular el 15 de diciembre con el apoyo del 94% de los votantes. Otras medidas, como la Ley de Amnistía (BOE-A-1977-24937) o la legalización de los partidos políticos (BOE-A-1977-3663) (incluido el PCE), favorecieron el paso a la Democracia.

> Con el nombramiento de Suárez comenzó la fase decisiva entre la crisis del régimen franquista y la instauración de la democracia. El nuevo gobierno se presentó con una declaración programática en la que reconocía por vez primera la soberanía popular, prometía una amplia amnistía, anunciaba su decisión de someter a referéndum una Ley para la Reforma Política y prometía la celebración de elecciones generales antes del 30 de junio del año siguiente. Para llevar a cabo este programa presentaría ante las Cortes un proyecto de Ley para la Reforma Política, en cuya gestación alguna parte tuvo el presidente de las Cortes, que significaría el fin de hecho de esas Cortes y la convocatoria de elecciones generales por sufragio universal, directo y secreto, en el plazo de un año. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006, pp. 535-536).

En junio de 1977 se convocaron las primeras elecciones democráticas. Las Cortes, convertidas en constituyentes, nombraron una comisión de siete juristas de diferente procedencia ideológica; 3 de Unión de Centro Derecha (UCD), 1 de Alianza Popular (AP), 1 del PSOE, 1 del PCE y 1 del nacionalismo catalán), para la redacción de una nueva constitución. La Constitución de 1978 fue sometida a referéndum el 6 de diciembre de 1978. En Barrera (2002), Valdeón, Pérez y Juliá, (2006) y en Lara y Lara, (2018) podemos ver los principios que la vertebran y que se recogen a continuación:

- Definición de España como Estado social y democrático de derecho.
- Organización territorial descentralizada, el llamado Estado de las Autonomías.
- Monarquía parlamentaria que atribuye al Rey las funciones de Jefatura del Estado, Jefatura de las Fuerzas Armadas, la representación de España y el sancionar las leyes.
- Reconocimiento de derechos individuales (igualdad ante la ley, propiedad y libertades, incluida la religiosa dentro de un Estado no confesional) y sociales (educación, sanidad).

- Establecimiento de la división de poderes: legislativo, (Cortes Generales bicamerales, Congreso y Senado, cuyos miembros son elegidos por sufragio universal), ejecutivo (presidente del gobierno, elegido por el Congreso, y sus ministros) y judicial (independiente, que incluye un Tribunal Constitucional, para garantizar que la legislación se ajuste a la Constitución).

Mientras se estaba realizando la Constitución el país estaba sumido en una fuerte crisis económica que se abordó de forma paralela a la Constitución mediante un pacto social que se conoce como los Pactos de la Moncloa: ante la gravísima crisis económica que padecía el país, se firmó en octubre, por partidos políticos, organizaciones empresariales y sindicatos, un acuerdo de contenido económico, preparado por el ministro de Hacienda Fuentes Quintana, para reducir el déficit público, la inflación y el gasto público.

Una vez aprobada la Constitución se convocaron nuevas elecciones generales el 1 de marzo de 1979. Los resultados electorales dieron respaldo al trabajo realizado por Suárez que obtuvo 168 escaños. El PSOE fue la segunda fuerza con 121 seguido de lejos por el PCE con 23. Los partidos nacionalistas y regionalistas aumentaron su presencia con 28 escaños. El arco parlamentario se completó con 9 diputados vinculados al partido de Fraga Alianza Popular (AP) y un diputado del partido de Blas Piñar situado a la derecha del espectro político. En Barreda (2002) se describen las dificultades del gobierno de Suárez para gobernar y la división dentro de UCD que acabó provocando la dimisión de Suárez en enero de 1981.

> Una vez abandonada la “alta política” que le había encumbrado a los más altos índices de popularidad y prestigio, no supo en cambio, enfrentarse a los problemas de ordinaria administración y gobierno que precisaban de solución en el país en esta nueva fase postconstitucional […]
>
> Aún cosecharía Suárez algunos éxitos iniciales, tales como las negociaciones tensas y difíciles que mantuvo con catalanes y vascos para la aprobación de sus respectivos estatutos de autonomía de Sau y Guernica […]
>
> Varios temas estaban dividiendo a las familias de UCD: la política educativa

> y universitaria, la introducción de la televisión privada, la posible ley del divorcio, el desarrollo de las autonomías, etc., evidenciándose la cada vez más patente falta de unidad y de dirección interna. (Barrera, 2002, pp. 150-151).

El 23 febrero, mientras tenía lugar la votación en el Congreso para elegir al nuevo presidente de gobierno de la UCD, Calvo Sotelo, el teniente coronel de la Guardia Civil Tejero lo asalta en connivencia con otros militares. Esta intentona fracasó.

> El golpe venía a culminar una serie de intentos gestados por sectores ultraconservadores del Ejercito, los cuales animados por grupos civiles de extrema derecha con quienes compartían su absoluto rechazo del sistema democrático y el sentimiento de considerarse traicionados al haber sido desmontada la dictadura. La actitud del Gobierno (considerada como débil) ante la violencia terrorista, la legalización del PCE y la "ruptura" de España mediante el Estado de las Autonomías eran cuestiones inadmisibles para esta vertiente continuista del franquismo. (Lara y Lara, 2018, p. 646).

El nuevo gobierno aprobó la Ley del divorcio, rechazada por la Iglesia, y la incorporación de España en la OTAN, rechazada a su vez por la izquierda. Calvo Sotelo, debilitado por las divisiones internas de su partido, UCD, se vio obligado a adelantar las elecciones a octubre de 1982. Estas elecciones fueron ganadas por mayoría absoluta por el PSOE, que se mantuvo en el Gobierno 4 legislaturas. Con el cambio de Gobierno se puede dar por concluida la transición a la Democracia.

> En suma, a la altura de octubre de 1982 se puede considerar concluida la transición. El balance de la misma, atendiendo a los términos comparativos que ya han sido señalados, únicamente puede ser calificado como positivo. No sólo se fundó un orden constitucional basado en el consenso, sino que se trató de una experiencia histórica común en un país que ha estado caracterizado la mayor parte de su existencia por visiones contrapuesta acerca de su pasado. (Martín, Martínez y Tusell, 1998, pp. 805-806).

Para explicar las claves de los dos primeros gobiernos socialistas vamos a basarnos en los trabajos de Barrera (2002), Martín, Martínez y Tusell (1998) y Lara y Lara (2018). Algunas de las claves las resumimos a continuación:

En la 1ª legislatura (1982-86), González estableció tres ejes de actuación:

- Plan de estabilización: Luchó contra la crisis económica, subiendo los tipos de interés, devaluando la peseta e impulsando una reconversión industrial, y a partir de 1985 la economía comenzó a recuperarse;
- Reformas políticas y sociales: Se aprobaron todos los estatutos de autonomía excepto Ceuta y Melilla, se promulgó la LODE (BOE-A-1985-12978) que ampliaba la enseñanza obligatoria hasta 16 años y la LRU (BOE-A-1983-23432) que establecía la autonomía a la Universidad, se aprobó la Ley General de Sanidad (BOE-A-1986-10499) que establecía el sistema nacional de salud gratuito, se despenalizó el aborto, se reformó el ejército y se reguló la objeción de conciencia del servicio militar;
- Política exterior: España ingresó en la Comunidad Económica Europea (CEE) y se mantuvo en la estructura política de la Organización para el Tratado del Atlántico Norte (OTAN).

> Si la promulgación de la Constitución simbolizó el fin de la transición política, la firma del Acta de adhesión a la Comunidad Europea el 12 de junio de 1985 simbolizaba el cumplimiento de la consolidación democrática. Fin de un largo periplo, de una voluntad permanentemente frustrada de ser como los europeos, de un retraimiento ensimismado en conflictos interiores. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006, pp. 549-550).

En la 2ª legislatura (1986-89): España creció económicamente y generó empleo. Sin embargo, la liberalización del mercado de trabajo provocó que CC.OO. Y la Unión General de los Trabajadores (UGT) convocaran una huelga general en 1988.

El cambio político, social y económico producido por la transición y los primeros gobiernos democráticos fue completado por un fuerte impulso cultural en todos los ámbitos que merece la pena destacar antes de dar paso a la situación educativa. En Martín, Martínez y Tusell (1998) encontramos los siguientes hechos destacables:

- Regreso de conocidos intelectuales como Madariaga y Sánchez Albornoz.
- Reconocimientos artísticos a varios artistas como Chillida y Tapies.
- Recuperación del Guernica y de la obra de Picasso.
- Premios a personalidades relevantes no reconocidas anteriormente como Albertí y Zambrano.
- Recuperación del tema de la Guerra Civil desde nuevos puntos de vista como: La Vaquilla de Berlanga, Las bicicletas son para el verano de Fernán Gómez o La leyenda del visionario de Umbral.
- Obtención del primer óscar del cine español por la película *Volver a empezar* de Garci.
- Exposiciones antológicas de Picasso, Dalí, Velázquez y Goya.
- Puesta en marcha del Museo de arte contemporaneo Reina Sofía y de ferias de arte contemporaneo como ARCO.
- Renovación de la oferta cultural y recuperación del entorno histórico de las ciudades.
- Aparición de nuevos novelistas como Marías y Muñoz Molina, pintores como Barceló y Sicilia y directores de cine como Trueba o Almodovar.

> Había, pues, motivos para la euforia, y con ese espíritu se emprendió la etapa siguiente. El partido, sin fisuras; el gobierno, unánime en la dirección marcada por el presidente; la economía, a las puertas de una furte expansión; el crédito internacional, más que subido; la sociedad confiada. Era España, por fin vertebrada, libre de su historia conciencia de fracaso, que había puesto fin, gracias a la generación que había alcanzado en los años sesenta el uso de razón política, a su ancestral anomalía. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006, p.550).

2.4.4.3. Situación educativa.

A mediados de los 70, se realizan dos informes relevantes sobre la situación educativa: el informe de la Comisión de Evaluación de la Ley General de Educación, en cumplimiento del decreto 186/1976 de 6 de febrero (BOE-A-1976-3352), y el informe FOESSA de 1978 (Casal, 1978). Como conclusión general, podemos decir de ambos que señalaban el desajuste que se estaba produciendo entre la situación política, social y económica y la ley educativa.

> En opinión de la Comisión evaluadora de la Ley de 1970, se encontraba necesitada de una revisión profunda que atendiera a las siguientes realidades: una situación política, económica y social diferente; un creciente proceso de urbanización con exigencias ineludibles; una gratuidad insuficiente en el caso de la Educación Básica; una escasa entidad del gasto público dedicado a la Educación, uno de los más bajos de Europa a pesar del esfuerzo realizado; una urgente demanda de descentralización del sistema educativo; un incumplimiento grave del principio de igualdad de oportunidades; una flagrante falta de calidad del sistema. (Puelles, 2000, p.35).

A comienzo de los 80, se plantea una nueva reforma de las Enseñanzas Medias que no llega a imponerse debido al cambio de gobierno. Se hereda por tanto una situación que debe hacer frente a un aumento del número de estudiantes en todos los niveles y a un fracaso escolar muy elevado que oscilaba entre el 25% y el 30% (Puelles, 2000).

Durante esta década se producen una serie de cambios en el sistema educativo con una fuerte pugna política, que prepararon el terreno para la aprobación de una nueva ley general de educación.

> En el área de enseñanza, la LODE, que regulaba el derecho a la educación, se convirtió en el principal caballo de batalla. Fue aprobada en marzo de 1984 bajo el ministerio de José María Maravall. A través de la discusión originada se demostró como el artículo 27 de la Constitución, que establecía dicho derecho, podía ser interpretado de acuerdo con criterios ideológicos bastante antagonistas. La ambigüedad calculada con que fue

> redactado para satisfacer a unos y otros hizo inevitable la controversia pública. […]
>
> Se abrió en torno a la LODE una fuerte batalla política y social por la oposición que encontró en AP, que presentó unas dos mil enmiendas al proyecto, y en los sectores más afectados por la reforma, esto es, la enseñanza privada. […]
>
> En el tira y afloja de las posturas enfrentadas el texto se suavizó con el fin de compatibilizar los posibles derechos en colusión. Se introdujo, por ejemplo, el explícito reconocimiento del ideario o carácter propio del centro, de un modo tal que la propia Conferencia Episcopal lo juzgó tolerable. A los centros privados "concertado" (esto es, aquellos que quisieran recibir subvenciones) se les exigía requisitos como la absoluta gratuidad de la enseñanza, la admisión de alumnos según criterios de proximidad de sus viviendas al centro y la existencia de los llamados Consejos Escolares: órganos de dirección de los centros educativos, en los que debían participar representantes de padres, profesores y alumnos. (Barrera, 2002, p. 188).

Los cambios políticos, demográficos, sociales y económicos, la aspiración a formar parte de la Comunidad Económica Europea y los ya mencionados fallos y críticas a la ley anterior predisponían la creación de un nuevo marco normativo que vería la luz en la década posterior.

Demográficamente, se produce un aumento muy fuerte de la natalidad en la década de los 60 y algo menos en los 70 que el sistema educativo debe absorber. Paralelamente, se produce la incorporación de la mujer al mercado laboral, lo que hace que aumente mucho la demanda de plazas escolares de Educación Infantil.

Económicamente, la economía española se sitúa en los 80 como la de una sociedad industrializada y de servicios, alcanzando la categoría de país desarrollado. A pesar de este cambio, el país presenta altos niveles de inflación, una tasa elevada de desempleo y un nivel educativo muy pobre.

En este contexto, la Universidad es vista como el factor clave para que España se acerque al grupo de países más desarrollados del espacio europeo y, en 1983, se aprueba la Ley de Reforma Universitaria (BOE-A-1983-23432).

Esta ley supuso un mayor grado de autonomía universitaria, una organización en torno a Áreas de Conocimiento y Departamentos y un auge de los programas de Doctorado e Investigación (Rico y Sierra, 1994).

Durante esta época se produjo un fuerte debate sobre la formación del profesorado, que no consiguió superar la estructura anterior y que mantuvo una titulación de 3 años para el cuerpo de maestros de primaria y una formación de 4 o 5 años para el cuerpo de profesores de secundaria.

> La regulación de la formación del profesorado se cierra en falso en esta reforma universitaria. No solo es problema de los profesores de matemáticas; es una cuestión más importante, ya que afecta a todo el sistema educativo. La universidad española, institucionalmente, no contempla aún en la década de los 90 los temas educativos como prioritarios y, entre ellos, la formación del profesorado. A estas dificultades no es ajeno el propio mundo de los especialistas en educación y en didáctica. (Rico y Sierra, 1994, p. 178).

En junio de 1987, se presenta el Proyecto para la Reforma de la Enseñanza en los niveles de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Formación Profesional para debate. Este documento es sometido a debate por parte de la noosfera durante el siguiente año y se recogen aportaciones de sindicatos, AMPAS, Asociaciones de Estudiantes, empresarios del sector, representantes de la Iglesia y personalidades de la cultura y la educación. Con este trabajo quedan definidos la estructura y las orientaciones de los nuevos programas.

> Así lo entendió el ministro Maravall quien en junio de 1987 presentó las líneas maestras de la reforma del sistema educativo en forma de propuesta para debate. Un debate que se desarrolló ampliamente durante los meses siguientes y que permitió ir conociendo los consensos y las divergencias sobre los distintos aspectos de los cambios educativos propuestos, empezando por lo más elemental, la propia necesidad de llevar adelante una reforma. Algo sobre lo que existía una práctica unanimidad.

> Con énfasis distintos, con análisis no siempre compartidos, pero lo cierto es que sectores educativos, Administraciones Públicas y partidos políticos coincidían en la necesidad de introducir cambios sustanciales en la ordenación establecida en el sistema educativo de 1970 (Pérez, 2000, p.15).

2.4.4.4. Situación de la educación matemática.

Para las Matemáticas es un periodo especialmente crítico. Internacionalmente, a partir de mediados de los 70 se critica ampliamente el movimiento de las Matemáticas Modernas y aparece la ya mencionada Didáctica de las Matemáticas como ciencia independiente. Adicionalmente, se consolida el constructivismo y se lanzan nuevas posiciones epistemológicas de la mano de Lakatos (1981), que abogan por el descubrimiento y la experimentación.

Por otro lado, la situación real en el sistema es de caos y controversia respecto al modelo a seguir:

> Existe un cierto acuerdo que, en lo que respecta a la educación matemática, la Ley General de Educación pretendía una reforma ambiciosa, que entroncaba con la reforma de la formación inicial de Maestros a realizar en las Escuelas Universitarias. La falta de criterios propios y de especialistas en el campo de la educación matemática hicieron derivar la reforma de los programas matemáticos a un caos metodológico que, salvo contadas excepciones, creó más confusión que beneficios. Por un lado, el profesorado no estaba profesionalmente preparado para llevar a cabo la reforma; los cursos de adaptación, pensados para resolver el problema, fueron insuficientes, su implantación fue apresurada y gran parte de los Maestros se enteraron de la reforma por el BOE, a diferencia de lo que había ocurrido con la reforma de los cuestionarios de Bachillerato de la década anterior. Muchos maestros, en los primeros años, estudiaron los nuevos contenidos que tenían que impartir casi simultáneamente a sus alumnos, con esfuerzo personal considerable, sin orientación adecuada y con gran celo profesional; tampoco se hizo uso adecuado de los recursos humanos disponibles ya que al no existir una ley de plantillas, maestros especialistas en Matemáticas y Ciencias podían ser destinados a otras asignaturas,

> lo que ocurrió ocasionalmente, y , recíprocamente, especialistas en Ciencias Humanas y Filología tuvieron que impartir Matemáticas. (Rico y Sierra, 1994, p.149).

Se puede decir que se produjo una separación artificial entre las Matemáticas Modernas y las tradicionales que confundía a alumnos, padres y profesores. En general, se deterioró el cálculo y se abandonó la geometría intuitiva escolar. Durante toda la década se produjeron fuertes debates sobre el nivel de los alumnos al entrar en Bachillerato. Como consecuencia de esto surgen algunos autores como Ruiz (1979) que reivindican un enfoque diferente para la enseñanza de las Matemáticas.

> Obra clara y práctica destinada a demostrar la evidente capacidad de cualquier ser humano interesado en entender y aprender. Obra amplia, ordenada, coherente, eficaz… Obra hecha a favor del lector. Obra destinada a acabar con la evidente aversión existente hacia las Matemáticas. Obra que alguien, en representación de la clase didáctica española, debía a la Sociedad. (Ruiz, 1979, p. 6).

El fracaso escolar, la nueva situación política y la falta de concreción del programa anterior dieron paso a los programas renovados de 1981 y 1982. Estos programas fueron un intento de reconciliación entre profesores e inspectores que fue muy criticado por las incoherencias en su estructura (Rico y Sierra, 1994) y que no llegó a aplicarse debido al cambio de gobierno de 1982.

El camino que siguió el Bachillerato fue diferente: en 1975 se aprueba el decreto que regula el BUP y el COU. Además, se diseña una formación común que da acceso a la universidad o a la formación profesional de segundo grado.

En Matemáticas, se mantiene la orientación estructuralista partiendo de las nociones de anillo y cuerpo y dando mucho peso al Álgebra y al Análisis. La Geometría vectorial aparece en segundo curso y la trigonometría y la Geometría Euclídea del plano en tercero.

Esta organización introduce primero la Geometría analítica y después la sintética, por lo que se puede apreciar el claro abandono de la Geometría Euclídea como forma de organización y estudio de esta área de las Matemáticas.

En materia de profesorado, se estableció una separación entre los maestros que cursaban una diplomatura con especialización de 3 años y que impartían la EGB y los licenciados que realizaban un curso de adaptación pedagógica para impartir BUP y COU.

La formación matemática de los diplomados era muy pequeña y la formación pedagógica de los licenciados estaba claramente desprestigiada por la falta de interés de las universidades ya mencionada.

La siguiente cita es un resumen de las críticas a estos programas:

> Una de las materias escolares en las que la inadaptación entre individuo y modelo se ha hecho más evidente es, sin duda alguna, las matemáticas. El aprendizaje escolar de dicha materia se ha convertido en campo abonado a la inadaptación intelectual. En este sentido, el progresivo aumento del número de niños que fracasan en el aprendizaje escolar de las matemáticas, ha puesto en evidencia la necesidad de cuestionar las bases en las que se apoya un modelo pedagógico que produce fracaso. (Sastre, 1981, como se cita en Rico y Sierra, 1994, p.163).

Un aspecto muy relevante para las Matemáticas durante esta época es la creación en la noosfera de un movimiento asociativo importante de profesores de matemáticas que da lugar a la creación de reuniones, jornadas y congresos y a la aparición de revistas de educación matemática como Épsilon, Números o Suma que aun siguen publicándose.

En la enseñanza Primaria y Secundaria se mantienen los programas de 1970 pero se favorece la investigación y la experimentación especialmente en los últimos cursos de la EGB y en los primeros del BUP, para preparar la reforma que dará lugar a la LOGSE. Entre 1983 y 1987 se produce el debate público de los documentos que van a formar parte del nuevo proyecto; las sociedades de profesores, los equipos ministeriales y las revistas científicas participan en ese proceso actuando como noosfera.

En resumen, la transposición didáctica realizada en estas dos décadas responde perfectamente al esquema mostrado en las figuras 3 y 4. En primer lugar se produce una renovación política, social y económica que da lugar a la elección de nuevos saberes a enseñar.

Por primera vez participa en la elección y transposición de esos saberes una noosfera que incluye a matemáticos, psicólogos, profesores en activo, organizaciones sociales y empresariales,… Esta noosfera va a consensuar una transposición didáctica que abandona las Matemáticas Modernas como paradigma y que acepta los postulados del constructivismo como forma de enseñanza-aprendizaje. Hay que destacar que la posición ontológica y epistemológica dominante da un vuelco y gira hacia una idea de las Matemáticas como creación humana que se realiza desde la experiencia a las que se llega desde un hacer matemático cuasi-experimental o constructivista.

2.4.4.5. La Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

El 3 de octubre de 1990 se aprueba la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) (BOE-A-1990-24172). Los cambios más significativos de la ley que recoge Pérez (2000, pp. 18-23) fueron:

1. La extensión de la educación obligatoria hasta los 16 años, que igualaba el final de la educación obligatoria con la edad mínima para empezar a trabajar.
2. Gratuidad y obligatoriedad de la educación desde los 6 hasta los 16 años.
3. Reestructuración de los niveles educativos en infantil (0-6 años), Primaria (6-12 años), Secundaria (12 a 16 años), Bachillerato (16 a 18 años) y Formación Profesional de grado medio (16 a 18 años) y grado superior (18 a 20 años).
4. Desarrollo curricular descentralizado en el que el Gobierno Central fija los contenidos mínimos que constituyen los aspectos básicos del currículo y el resto de las administraciones, respetando esos contenidos mínimos, establecerán el currículo de los distintos niveles, etapas y modalidades.
5. Organización por áreas de conocimiento de la Educación Primaria y Secundaria.
6. Un título específico sobre calidad de la enseñanza que tenía en cuenta la cualificación y formación de los docentes, los recursos, la función directiva, la innovación e investigación educativa, la orientación educativa y profesional y la inspección y la evaluación académica.
7. El principio de igualdad educativa, para el que se establecen medidas y programas para compensar las desigualdades educativas de toda clase.

En relación al área de Matemáticas, encontramos un cambio fundamental al abandonarse la organización de las Matemáticas Modernas y sustituirse por una enseñanza más experimental y heurística que se organizaba teniendo en cuenta las aportaciones de las corrientes constructivistas.

Resumimos a continuación los 10 puntos que aparecen en Rico y Sierra (1994, pp. 197-198) y que recogen la orientación filosófica del documento:

1. Las Matemáticas están en continua evolución y se relacionan con otros conocimientos. Las Matemáticas sirven como modelo de la realidad.
2. Para aprender Matemáticas se debe utilizar un razonamiento empírico-deductivo. La deducción formal es posterior.
3. Las Matemáticas son un potente instrumento de transmisión de información.
4. La construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.
5. El conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y a partir de la actividad realizada por los alumnos sobre los objetos.
6. Las Matemáticas tienen una estructura vertical interna que determina la adquisición de algunos conocimientos antes que otros. Es importante enseñar primero procedimientos generales de uso variado.
7. El conocimiento matemático es importante por la posibilidad de su uso en otros dominios.
8. Hay que desarrollar la parte instrumental de las Matemáticas por su capacidad de herramienta en otras áreas, la necesidad de aplicarlas en muchas aspectos de la vida adulta y su capacidad para preparar a los estudiantes para las nuevas tecnologías.
9. Se acepta y se pide equilibrio entre los aspectos conceptuales y los procedimentales.
10. Se da más importancia a los conocimientos y procedimientos generales que sean aplicables al mayor número de situaciones posibles.

En este sentido, la Geometría se recupera en la enseñanza obligatoria no en la concepción clásica euclídea, sino en la medida en que el conocimiento de la forma es importante para el arte o el diseño y el conocimiento de la superficie y los volúmenes son importantes para algunas profesiones y actividades cotidianas. Lo importante en esta ley no es el valor matemático del método lógico deductivo o las demostraciones que se consideran fuera de las capacidades de los alumnos de la educación obligatoria, en línea con los planteamientos de Van Hiele ya explicados, sino la influencia de la Geometría en el lenguaje y aspectos importantes y generales para la aplicación práctica como el Teorema de Pitágoras o las fórmulas para calcular áreas sencillas.

Un ejemplo del tipo de libro con el que se estudiaba lo tenemos Vizmanos y Anzola (1997). En esta obra se introduce la unidad incidiendo en los conocimientos previos del alumno, desde la realidad cercana. Las fórmulas se presentan de forma directa sin demostración previa y se proponen ejercicios de aplicación inmediata de las mismas. Centrando el estudio en los aspectos procedimentales. Como ya se ha dicho la presión de la noosfera llevó a un cambio ontológico y epistemológico en el que las Matemáticas son una creación humana que se realiza desde la experiencia a las que se llega desde un hacer matemático cuasi-experimental o constructivista.

> Las Matemáticas constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos que tienen en común un determinado modo de representar la realidad. Nacen de la necesidad de resolver determinados problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir, modelizar situaciones reales y dar consistencia y rigor a los conocimientos científicos. Las caracteriza la naturaleza lógica-deductiva de su aprendizaje. Participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de la "forma de hacer matemáticas" (Vizmanos y Anzola, 1997, p.6).

2.4.5. Desde 1990 hasta 2015.

En este periodo se produce la normalización democrática y la alternancia entre partidos, y se desarrolla y moderniza el país en todos los aspectos. Educativamente es un periodo complicado con cambios de ley de origen político que no alcanzan el consenso necesario. Por otro lado, la inmersión plena en el espacio europeo de educación y las evaluaciones externas nacionales e internacionales afectan a los contenidos y a la orientación de las asignaturas que llevan a cabo las distintas administraciones.

2.4.5.1. Situación social, económica y política.

Para explicar las claves del tercer y cuarto gobierno socialista vamos a basarnos en los trabajos de Barrera (2002), Valdeón, Pérez y Juliá (2006) y Jover, Gómez y Fusi (2001). Algunas de las claves las resumimos a continuación:

La 3ª legislatura socialista (1989-93) estuvo marcada por: la primera guerra del Golfo (1991); las celebraciones del año 1992 (Juegos Olímpicos de Barcelona, Exposición Universal de Sevilla, Madrid Capital Europea de la cultura), que sirvieron para mostrar al exterior el moderno cambio del país; y por el estallido de los primeros casos de corrupción y de los escándalos de la guerra sucia contra ETA.

> Había sonado el momento de la normalización.
>
> Espejo de este talante fueron los grandes fastos de 1992: los juegos olímpicos en Barcelona, exposición universal en Sevilla. Para cuando las luces del festejo se apagaron, de aquel talante solo quedaron las cenizas. El seguimiento de la huelga general que el sindicato hermano había convocado con éxito en 1988 ya había sido un aldabonzao sobre el difuso malestar extendido por la sociedad más por la forma de hacer política que por las políticas concretas desarrolladas por el gobierno. Luego, al año siguiente comenzaron a revelarse prácticas irregulares de financiación del partido, tráfico de influencias, cobro de comisiones, enriquecimiento de cargos públicos; en palabra, apareció en el centro del debate público la voz vitanda: corrupción. (Valdeón, Pérez y Juliá, 2006, p.550).

En 1993 se convocaron nuevas elecciones generales en medio de otra grave crisis económica mundial: se disparó la inflación, quebraron numerosas empresas y aumentó el paro.

En la 4ª legislatura (1993-96), el PSOE volvió a ganar las elecciones, pero por mayoría simple. Para gobernar, González tuvo que negociar un pacto de apoyo con Convergencia i Unió (CiU).

El gobierno sufrió un fuerte desgaste por los casos sucesivos de corrupción: uso de información privilegiada del gobernador del Banco de España, Mariano Rubio; uso de fondos reservados y huida del director de la Guardia Civil, Luis Roldán; detención de la cúpula de interior de los años 80 por el caso GAL. A estos problemas se sumó una nueva huelga general (1994).

En los aspectos positivos se recuperó la economía a partir de 1994-95, se aprobaron los estatutos de Ceuta y Melilla, se aprobó un nuevo Código Penal (1995) y se firmó el Pacto de Toledo (1995) con todas las fuerzas políticas, que garantizó el sistema público de pensiones.

Internacionalmente se firmó el tratado de Maastricht, se volvió a presidir la Unión Europea se celebraron la Conferencia Euro-mediterranea y el Consejo europeo y se nombró como secretario general de la OTAN a Javier Solana.

En 1996 tras la retirada de apoyo de CiU al gobierno del PSOE se convocaron nuevas elecciones que culminaron en una victoria sin mayoría absoluta del PP.

Para explicar las claves de los dos primeros gobiernos del PP vamos a basarnos en los trabajos de Barrera (2002), Valdeón, Pérez y Juliá (2006) y Jover, Gómez y Fusi (2001) y Lara y Lara (2018). Algunas de las claves las resumimos a continuación:

En la 1ª Legislatura del Partido Popular (1996-2000), este partido ganó las elecciones por mayoría simple y pactó con CiU y Partido Nacionalista Vasco (PNV). Aznar llevó a cabo una política económica liberal de la mano de Rato, Ministro de Economía, reduciendo impuestos, gasto público y privatizando empresas estatales. El resultado provocó un crecimiento económico con creación de empleo y aumento de la renta per cápita. Además, España cumplió las condiciones de convergencia de Maastricht y formó parte del grupo inicial de países que adoptó el Euro como moneda. El país ingresó en la estructura militar de la OTAN y se suprimió el servicio militar obligatorio. Un hecho relevante en política interior fue la tregua indefinida anunciada por ETA en septiembre de 1998 y que duró 15 meses.

> Tampoco habría "segunda transición". No tenía por qué haberla, España era una democracia estable cuya salud política no necesitaba nuevas rupturas históricas, sino, en todo caso – Si así lo quería la opinión-, ciclos de gobierno distintos. Aznar entendió que, tras la larga era de gobierno socialista y tras la etapa de intensa crispación política que se había vivido entre 1991 y 1996, el país parecía querer tranquilidad y reposo, pragmatismo y poca ideología: lo que, en consecuencia,iba a ofrecer, iba a ser, ante todo, estabilidad gubernamental, austeridad y crecimiento económico y paz social. (Jover, Gómez y Fusi, 2001, p.835).

En la 2ª Legislatura (2000-04), el PP volvió a ganar, en esta ocasión por mayoría absoluta. Mantuvo un crecimiento económico más atenuado. Además, los sindicatos impulsaron una huelga general en 2002, debido a estar en contra de la reforma del mercado laboral. A pesar de todo la tasa de desempleo se redujo hasta el 10,97% en 2004.

En otros ámbitos la legislatura estuvo marcada por problemas de origen internacional y su repercusión interna: el atentado de las torres gemelas provocó que España se alinease junto a Portugal, Reino Unido y EEUU en la guerra contra el terrorismo, la crisis de las "vacas locas" desató una alerta sanitaria en 2001, el hundimiento del Prestige frente a la costa gallega provocó una marea negra sin precedentes y el accidente aéreo del Yak-42 con 62 militares españoles abordo que regresaban de Afganistan suposo la mayor tragedia militar sufrida por el Ejercito español en tiempos de paz.

El final de la legislatura estuvo marcado por los atentados del 11 de marzo de 2004, tres días antes de las elecciones, en los que fallecieron 200 personas y que provocaron la movilización de 11,4 millones de personas en todo el país bajo el lema "Con las víctimas, con la constitución, por la derrota del terrorismo".

En las elecciones de 2004 ganó el PSOE, siendo Rodríguez Zapatero Presidente de Gobierno. Señalaremos a continuación algunos aspectos relevantes de esta primera legislatura siguiendo el trabajo de Lara y Lara (2018):

- Se ordenó la retirada de las tropas españolas desplegadas en Irak.
- Se nombró por primera vez a una mujer como vicepresisenta del Gobierno: María Teresa Fernández de la Vega.
- Se desarrollaron las siguientes disposiciones político-sociales: reconocimiento del matrimonio homosexual (BOE-A-2005-11364), modernización de la Ley del divorcio (BOE-A-2005-11864), Ley educativa LOE (BOE-A-2006-7899), la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y atención a las personas en situación de dependencia (BOE-A-2006-21990), la Ley para la igualdad efectiva entre mujeres y hombres (BOE-A-2007-6115), la creación de los juzgados de violencia sobre la mujer y la subida del salario mínimo a 600 euros en 2008.
- Se produjo la reforma de los estatutos de autonomía de Cataluña, Andalucía y Valencia.

- Se produjo el el rechazo al Plan Ibarretxe, donde el lehendakari vasco proponía que Euskadi fuese un estado asociado al español.
- El crecimiento económico se mantuvo por encima del de los vecinos europeos, lo que trajo el mínimo histórico de desempleo en 2007 (8,3%).

En la 2ª Legislatura (2008-12), el PSOE renovó la victoria electoral. Siguiendo el trabajo de Lara y Lara (2018) esta legislatura estuvo marcada por los siguientes aspectos:

- El Gobierno fue el primero en la historia de España en que el Consejo de Ministros estaba formado por una mayoría de mujeres (9 de 17). Por primera vez la cartera de Defensa fue asumida por una mujer: Carme Chacón.
- Se aprobó una nueva Ley del aborto (BOE-A-2010-3514) con fuerte contestación de la Iglesia y de las federaciones de familias.
- Entre septiembre y octubre de 2011 la organización terrorista ETA anunció el cese definitivo como banda armada.
- En 2008 la tendencia económica cambió, iniciándose una crisis mundial que elevó el desempleo a lo largo de toda la legislatura (13,9% en 2008, 21,52% en 2011 y una tasa superior al 23% con casi 5 millones reconocidos oficialmente en mayo de 2012).
- Se produjo la reforma del artículo 135 de la Constitución para incluir el principio de estabilidad presupuestaria con un acuerdo entre PSOE y PP (BOE-A-2011-15210).
- El 15 de mayo de 2011 dio comienzo un movimiento civil de oposición al sistema institucional y político español que se caracterizó por las concentraciones permanentes en espacios públicos como la puerta del Sol de Madrid o la Plaza de Cataluña en Barcelona.

Las medidas del gobierno no dieron la vuelta a la situación, y el fuerte desgaste desembocó en el adelanto de las elecciones el 20 de noviembre de 2011.

En estas nuevas elecciones se produce la victoria del Partido Popular con mayoría absoluta, siendo el siguiente presidente Rajoy. En Lara y Lara (2018) se señalan los siguientes aspectos de esta legislatura:

- Se inició una política de recorte del gasto público para controlar el déficit que culminó con un ajuste de 65000 millones de euros en 2 años, la subida del IVA, la reducción del subsidio de desempleo a partir del sexto mes, la eliminación de desgravación en el IRPF por compra de vivienda y la supresión de la paga extra de Navidad a los funcionarios.
- Se lleva a cabo una nueva reforma laboral para combatir los efectos de la crisis económica que es contestada por los sindicatos con una huelga general en 2012.
- El desempleo siguió ascendiendo hasta los seis millones (enero 2013).
- La prima de riesgo española se sitúa por encima de los 600 puntos básicos por encima del bono alemán en julio de 2012 lo que provoca la imposibilidad de financiar la deuda española en los mercados.
- Se produce la abdicación de Juan Carlos I en su hijo Felipe de Borbón el 2 de junio de 2014.

En general, durante este periodo (1990-2015) se producen importantes cambios en casi todos los ámbitos de la sociedad española que pueden resumirse de la siguiente manera:

- Políticos: Se consolida la democracia, a pesar del terrorismo y el separatismo. Las distintas ideologías se canalizan por cauces democráticos.
- Sociales: Descenso de la natalidad (de las más bajas del mundo), recepción de migración (12,2% en 2011), extensión de las nuevas tecnologías de ocio y comunicación, desarrollo del estado del bienestar aumentando el nivel de riqueza hasta niveles próximos a la media europea.
- Económicos: Desarrollo de liberalización económica (privatización de empresas y bancos públicos), reconversión industrial, crecimiento sector terciario (71,6% de la población activa en 2010) y empresas con proyección mundial (Grupo Inditex, Telefónica, Repsol, Banco de Santander, BBVA).
- Cultura: Estos años trajeron el incremento de la oferta cultural. Aumentó la pluralidad política con la aparición de nuevos medios (El País, El Mundo, La Razón, Público, 20 minutos, Antena 3, Cuatro, Telecinco, La Sexta). Ha habido un

reconocimiento internacional de la cultura española (premio Nobel a Cela en 1989, o el premio Pritzker de arquitectura a Moneo, 1996). La libertad de expresión favoreció nuevas formas de cultura popular.

- Mentalidad y opinión: Se produce una secularización social. Además aparecen nuevos modelos familiares que conviven con la estructura familiar tradicional. Se logran importantes avances en la equiparación laboral y social de la mujer con el hombre. Aparecen actitudes más tolerantes hacia la diferencia sexual, étnica e ideológica de la sociedad.

España es un activo socio europeísta participando en la elaboración y firmando todos los acuerdos importantes que se han venido sucediendo:

- Acta Única (1986).
- Tratado de Schengen (1991).
- Tratado de la Unión Europea o de Maastricht (1992).
- Tratado de Niza (2003).
- Constitución Europea (2004).

España ha manifestado igualmente su respaldo a los procesos de ampliación de la Unión hacia la Europa del norte y este, hasta llegar a los 27 estados que la componen actualmente.

2.4.5.2. Situación educativa.

La situación educativa durante estos años viene marcada por los sucesivos cambios de gobierno. La LOGSE se aprobó sin el apoyo del grupo popular y tuvo un proceso de implantación lento dentro de un marco económico de crisis. Durante el segundo gobierno popular se aprobó una nueva ley, la LOCE (BOE-A-2002-25037), con el único apoyo de Coalición Canaria. Esta ley fue suspendida en 2004 por el gobierno socialista, que aprobó a su vez una nueva ley, la LOE (BOE-A-2006-7899), sin el apoyo popular. El conflicto sigue abierto en la actualidad con la modificación a la LOE que propone la LOMCE (BOE-A-2013-12886) de nuevo sin el consenso de los partidos de la oposición.

Más allá de la orientación política, estas leyes han ido configurando la situación educativa actual. Entre 1997 y 1998 el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación realizó la primera evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria hecha en España. Esta evaluación pretendía establecer una radiografía fiable del sistema educativo en su conjunto. Es importante destacar, como dice el responsable del estudio García (2000, p.135), que en la evaluación del estudio "todavía conviven las procedentes de dos legislaciones distintas la de 1970 y la de 1990".

Los resultados de este análisis ofrecieron un resultado muy preocupante en cuanto al rendimiento escolar que resumimos en el siguiente cuadro, basándonos en los datos suministrados por García (2000):

Tabla 25

Rendimiento medio de los alumnos.

Edad	14 años	16 años
Claramente insatisfactorio	25%	33%
Resultados dudosos	45%	44,5%
Claramente satisfactorios	30%	22,5%

Elaboración propia a partir de García (2000).

En el mismo informe se estudia la actitud del profesorado hacia los planes de estudio y métodos de enseñanza propuestos por la LOGSE y se observa que en el año 1998 "La valoración que teóricamente merece al profesorado el diseño de la ESO es, en líneas generales, alto, si bien se emiten críticas y dudas sobre la aplicabilidad del modelo en las situaciones concretas de centro y aula" (García, 2000, p.138). El informe fue bien recibido pero fue utilizado de forma partidista para elogiar o criticar a la LOGSE:

> El diagnóstico del sistema educativo hecho público en 1998, y relativo especialmente, como hemos visto, a la Educación Secundaria Obligatoria, tuvo un gran eco en la opinión pública y fue bien recibido por la crítica especializada, en España y fuera de ella, pero no contentó demasiado a dos grupos de lectores: los que esperaban de él una más

> o menos completa descalificación de la LOGSE y los que, por el contrario, hubieran deseado que ésta saliera completamente inmune a la prueba…. Pese a las deficiencias detectadas y a la necesidad de corregirlas, no hay necesidad de sustituir a la LOGSE, [...] (García, 2000, p.150).

A estos aspectos habría que añadir la descentralización del sistema educativo, es decir las transferencias en materia de educación a las comunidades autónomas. Por tanto en este trabajo seguiremos la legislación estatal y, cuando sea necesario, la legislación autonómica de la Comunidad de Madrid.

En el año 2000 siendo ministra del Castillo, se plantea una reforma del sistema educativo que daría lugar a la LOCE en 2002. Las razones para la misma las podemos ver a continuación:

> Durante esta época se han reestructurado las relaciones internacionales…, se han producido cambios profundos en el orden económico, tecnológico y social, ha habido una crisis económica seguida de una etapa expansiva,…, se está produciendo un fenómeno migratorio desde los países pobres hacia los ricos, y que va a transformar a las sociedades y culturas más homogéneas, ha existido alternancia política y se ha completado un proceso de descentralización educativa… Es necesario, por tanto, impulsar nuevas reformas que tengan en cuenta los cambios sociales y tecnológicos que se están produciendo… (Marchesi, 2000, p. 306).

Dentro del ámbito puramente matemático nos encontramos, con una confusión grande entre los educadores españoles fruto del cambio de paradigma y de las nuevas responsabilidades que impone la educación holística..

> Desde la LOGSE se les pide que temperen (si no que abandonen) la concepción de los objetivos como especificaciones de logros de los alumnos (estos quedan para la evaluación en términos de capacidades); que modifiquen la metodología; que revisen su concepción de la enseñanza y el aprendizaje; que evalúen de otra manera; que den una

> hora menos de clase por semana en Secundaria Obligatoria; que cambien algunos de los contenidos y su manera de concebirlos.
>
> Desde los diferentes currículos nacionales (si no desde las propias Matemáticas) se abandona inexorablemente el paradigma Bourbakista que fundamentó el currículo anterior basado en las Matemáticas Modernas. (Rico,1997, p.98).

Además de esta confusión generada, la revolución tecnológica que se produce durante estos años lleva a cuestionar el impacto que estos avances van a tener en la propia disciplina y en su transposición educativa.

El cambio de paradigma lleva a un enfoque más constructivista y se pide a los profesores que cambien el pensamiento secuencial propio del método axiomático por un pensamiento más creativo y divergente.

> Una clase no debería poder describirse- como ocurre hoy en día tan a menudo- con los únicos términos claves "relato" (explicación) y "lógica de la disciplina". La enseñanza y el aprendizaje son un arte que el Profesor y los alumnos practican en común, cada uno en su papel, donde hay lugar para la duda, los sentimientos, el aliento, el debate, la escucha mutua, la compasión o el control de conocimientos (Rico, 1997, p. 98).

2.4.5.3. La Ley Orgánica de Educación (LOE).

La LOE se aprobó el 6 de abril de 2006. Esta ley derogó todas las anteriores incluida la LOCE de 2002, que no pudo ponerse en marcha. Los aspectos más relevantes de la LOE son:

1. Consideración de la educación como el medio más adecuado para ayudar a construir la personalidad de los jóvenes [...] integrando la dimensión cognoscitiva, afectiva y axiológica.
2. Preocupación por ofrecer una educación capaz de responder a las cambiantes necesidades y demandas que plantean las personas y los grupos sociales.
3. Exigencia de proporcionar una educación de calidad a todos los ciudadanos de ambos sexos, en todos los niveles del sistema educativo.

4. Necesidad de que todos los componentes de la comunidad educativa colaboren [...], combinar calidad y equidad y sustentarlo sobre el principio de esfuerzo compartido.
5. Compromiso decidido con los objetivos educativos que plantea la Unión Europea para los próximos años basados en la convergencia de los sistemas educativos nacionales de educación y formación [...] es vital la capacitación del capital humano implicado en la educación.
6. Para llevar a cabo el principio de construir una verdadera sociedad del conocimiento basada en una verdadera ciudadanía activa será necesario trabajar en las siguientes direcciones: concebir la formación como un proceso permanente que se desarrolla durante toda la vida: proporcionar a los jóvenes una educación completa que abarque los conocimientos y las competencias básicas (enseñar a hacer y enseñar a aprender) que resultan necesarias en la sociedad actual, y ofrecer posibilidades a personas jóvenes y adultas de combinar el estudio y la formación con la actividad laboral u otras actividades.
7. [...] flexibilizar el sistema educativo por medio de la creación de caminos de ida y vuelta hacia el estudio y la formación… la concesión de un espacio propio de autonomía a los centros docentes que conllevará una periódica evaluación del empleo de sus recursos y sus resultados.
8. [...] acometer una simplificación y una clarificación normativa, con el máximo respeto al reparto de competencias que en materia educativa establece la Constitución… (Escamilla y Lagares, 2006, p.45).

Como se puede ver, la LOE intenta hacer frente al reto de formar ciudadanos para una sociedad del siglo XXI, donde la formación se realiza durante toda la vida y que tiene entre sus fines más importantes la formación de ciudadanos activos que tengan una alta empleabilidad. Así mismo, destacamos la integración que debe realizar la ley en las estructuras europeas y en las autonómicas, lo que la somete inevitablemente a fuertes tensiones. Por último, hay que señalar el intento de mejorar la calidad del sistema mediante la evaluación interna y externa del mismo.

2.4.5.4. La educación en la Comunidad Autónoma de Madrid.

En el sistema educativo actual gran parte de las competencias educativas están transferidas a las comunidades autónomas. En este trabajo de investigación analizaremos la situación legislativa de la Comunidad de Madrid por la situación geográfica de los sujetos investigados, aunque sería muy interesante realizar, un estudio comparativo de la enseñanza de la Geometría en las distintas comunidades autónomas.

En este apartado vamos a describir el desarrollo descendente de la legislación, sin entrar a profundizar en los distintos Decretos y Órdenes.

Para seguir el desarrollo normativo vamos a enumerar las 5 fases del proceso:

1. Aprobación por las Cortes. LOE.
2. Desarrollo de la estructura, las materias específicas y las enseñanzas mínimas a través de Reales Decretos por el Gobierno central: RD 1467/2007 (BOE-A-2007-19184) Y RD 1631/2006 (BOE-A-2007-238).
3. Establecimiento de los currículos que incluyan las enseñanzas mínimas a través de Decretos autonómicos: Decreto 67/2008 (BOCM-A-2008-2599), Decreto 23/2007 (BOCM-A-2007-1972) y Resolución de 30 de septiembre de 2009, de la Dirección General de Educación Secundaria.
4. Regulación mediante ordenes de la organización académica de las enseñanzas. Orden 3347/2008 y Orden 3320-01/2007.
5. Ordenes que regulan situaciones especiales como la enseñanza de adultos o a distancia.

Para ampliar este apartado véase Tébar (2012 y 2013).

2.4.5.5. La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

Esta investigación se ha realizado entre octubre de 2013 y febrero de 2019. Durante este periodo se ha producido un nuevo cambio legislativo. El 9 de Diciembre de 2013 se publica la LOMCE (BOE-A-2013-12886) siendo Ministro Wert. La denominación del artículo único de la LOMCE índica: “Modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo”. La fórmula elegida ha sido por tanto la modificación parcial de la LOE que permanece en vigor incorporando los cambios de la LOMCE. Sin embargo, los primeros análisis de la LOMCE ya señalan que se trata de una reforma en profundidad.

> Pero la modificación relevante de buena parte de los contenidos de la LOMCE (sólo quedan sin cambios la Educación Infantil, el profesorado, pendiente de regulación propia, y la inspección del sistema educativo) va más allá de una "modificación parcial"… (Montero, 2013, p.13).

Es importante, por tanto, mantener abierto este punto y estudiarlo en detalle en el siguiente capítulo para detectar el tipo de enfoque que se da al estudio de la Geometría en la legislación actual. Recogeremos así en este apartado únicamente un primer análisis que nos permita concluir el estudio de la dimensión económico-institucional.

La implantación en Secundaria y Bachillerato prevista se hizo en el curso 2015-2016 para los cursos 1º y 3º de secundaria y en el curso 1º de Bachillerato y en el curso 2016-2017 para los cursos 2º y 4º de secundaria y en el curso de 2º de Bachillerato.

2.4.5.6. Situación actual del currículo en Matemáticas.

El 5 de enero de 2007 se publicó en el BOE el decreto que regulaba las enseñanzas mínimas. Lo más destacado es la incorporación de las competencias básicas en el anexo I. En el área de Matemáticas la competencia matemática se define como:

> Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

> Así mismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos,…) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales, identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los derivados de los razonamientos válidos.
>
> La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.), que contienen elementos o soportes matemáticos así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.
>
> Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisen. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella.
>
> En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible.
>
> Por ello, su desarrollo en la educación secundaria obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una

amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente- en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad. (BOE-A-2007-238, p. 687).

Como se puede ver, la introducción de las competencias supone un nuevo giro epistemológico hacia el modelo logístico. Las Matemáticas tienen un objetivo de aplicabilidad al mundo real y están al servicio de la empleabilidad de los ciudadanos. Lo fundamental es, por tanto, el saber hacer. La construcción del bloque práctico de las praxeologías, la resolución de problemas reales es por tanto el centro de la metodología propuesta por la LOE.

Los contenidos matemáticos quedan repartidos en 6 bloques: La resolución de problemas, Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y Probabilidad.

En cuanto a las Matemáticas en Bachillerato encontramos lo siguiente:

Las matemáticas constituyen un conjunto amplio de conocimientos basados en el estudio de patrones y relaciones inherentes a estructuras abstractas. Aunque se desarrollen con independencia de la realidad física, tienen su origen en ella y son de suma utilidad para representarla. Nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar situaciones reales y dar rigor a los conocimientos científicos,… Participar en la adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su “forma de hacer”. Este “saber hacer matemáticas” es un proceso laborioso que comienza con una intensa actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones previas necesarias para la formalización. A menudo, los aspectos conceptuales no son más que medios para la práctica de estrategias, para incitar a la exploración, la formulación de conjeturas, el intercambio de ideas y la renovación de los conceptos ya adquiridos.

Los contenidos de Matemáticas, como materia de modalidad en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología giran sobre dos ejes fundamentales: la geometría y el análisis. (BOE-A-2007-19184, p. 45448).

Respecto a la Geometría se señala lo siguiente:

La Geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, descubrir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas. (BOE-A-2007-238, p. 751).

Es importante destacar el papel que juega en la enseñanza de la Geometría la Educación Plástica y Visual en Secundaria. El trabajo realizado desde esta área aporta al alumno algunas destrezas básicas de trazado de formas y uso de regla y compás. Pervive en esta área, aunque de forma casi testimonial, la Geometría Sintética que debería ser base de la Geometría Analítica.

> Por último, aprender a desenvolverse con comodidad a través del lenguaje simbólico es objetivo del área, así como profundizar en el conocimiento de aspectos espaciales de la realidad mediante la geometría y la representación objetiva de las formas. Las capacidades descritas anteriormente contribuyen a que el alumnado adquiera competencia matemática. (BOE-A-2007-238, p. 722).

En Bachillerato, el Dibujo Técnico da continuidad a la Geometría Sintética. Esta asignatura es optativa para los alumnos y su contenido es fundamentalmente Geometría, como se puede ver a continuación:

> Los contenidos de la materia se pueden agrupar en tres grandes apartados interrelacionados entre sí, aunque con entidad propia: La geometría métrica aplicada, para resolver problemas geométricos y de configuración de formas en el plano: la geometría descriptiva, para representar sobre un soporte bidimensional formas y cuerpos volumétricos situados en el espacio; y la normalización, para simplificar, unificar y objetivizar las representaciones gráficas. (BOE-A-2007-19184, p. 45415).

2.4.6 Posiciones epistemológicas dominantes en las instituciones.

El análisis histórico realizado ha permitido visibilizar los distintos enfoques epistemológicos que han existido en la sociedad española. Las posiciones basadas en el euclidianismo fueron dominantes en la primera parte del periodo analizado. Posteriormente, a partir de la LOGSE emergen las posiciones cuasi experimentales y las constructivistas, y en una época más reciente dominan las posiciones logícistas.

Sin embargo, el cambio epistemólogico legislativo no se traduce de inmediato en un cambio epistemológico en las instituciones y en el cuerpo docente. Por ese motivo, debemos tener en cuenta que, al realizar nuestra propuesta, vamos a encontrarnos con una realidad diversa de posiciones epistemológicas que van a estar en conflicto dentro del sistema educativo y que van a condicionar en parte la respuesta generada en esta investigación.

Nuestra investigación apuesta por un modelo constructivista y, puesto que este modelo ha sido referente en la legislación y sigue vivo en las instituciones, podemos esperar que será parcialmente aceptado en las instituciones pero que encontrará también algunas resistencias por parte de las instituciones y los docentes con modelos epistemológicos eucliadianos y logicistas.

2.5. Análisis de determinación didáctico.

Antes de poder desarrollar la respuesta que emana de nuestro MER debemos estudiar el conjunto de restricciones que pueden amenazar su implantación en la institución de Educación Secundaria en España.

Para el estudio de esta dimensión nos vamos a apoyar en la herramienta de los niveles de coodeterminación que proporciona la TAD.

El siguiente esquema, ya explicado con anterioridad, nos va a servir de eje conductor en este capítulo.

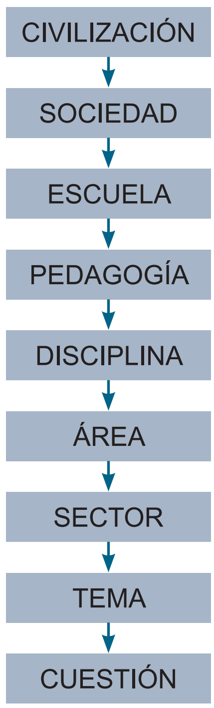


Figura 45. Escala de los niveles de codeterminación didáctica (Bosch y Gascón, 2007, p.12).

De este modo, los niveles de determinación sirven como herramienta para estudiar las limitaciones e identificar el ámbito que es causa de ellas. La identificación causal adecuada es, por tanto, clave para la realización de propuestas que sean viables y que aporten soluciones a los errores detectados.

Nuestra intención a la hora de identificar las restricciones transpositivas en el momento actual es comprender cuáles son las limitaciones que se producen en el proceso de estudio actual de la Geometría elemental. Con esta comprensión de las restricciones se posibilita la elaboración de una respuesta que sea viable dentro de las instituciones actuales y que por tanto permita la superación de esas restricciones.

2.5.1. El nivel de la Civilización.

El alcance de este trabajo impide realizar un análisis detallado de todas las restricciones que aparecen dentro del nivel de la Civilización. Sin embargo, queremos indicar algunos aspectos esenciales que influyen en las praxeologías que se pueden abordar en los centros de Educación Secundaria españoles.

En concreto, nos vamos a centrar en la realidad que supone la sociedad de la información para la enseñanza. en los conceptos, internacionalización y globalización y en las instituciones supranacionales que influyen en la visión de la educación que se tiene en la actualidad.

2.5.1.1. La internacionalización y la globalización.

Las relaciones entre los diferentes estados-nación se han ido intensificando a lo largo del tiempo hasta generar una red que afecta a gran parte de los modelos y estructuras sociales. En este trabajo no profundizaremos en las diferencias entre ambos conceptos y aceptaremos la siguiente visión de McGrew (1992):

> La internacionalización y la globalización se utilizan cada vez más para describir las tendencias hacia la intensificación de las relaciones globales de interacción e intercambio, la interconexión mundial en los campos de la comunicación social y la armonización transnacional de los modelos y estructuras sociales. (McGrew, 1992, tal y como aparece en Luzón y Torres, 2013, p.54).

Las relaciones globales entre países tienen también un impacto en el ámbito educativo que hay que comprender para detectar las posibles restricciones que estas relaciones imponen.

En Luzón y Torrés (2013) podemos ver la influencia en el ámbito educativo.

> Los estudios comparados han puesto de manifiesto tendencias globalizadoras en el ámbito educativo como consecuencia de los procesos de migración, de difusión y de contacto cultural entre diferentes contextos económicos, geográficos o culturales, que explican, en suma, la proyección del saber local y de una superación de las fronteras en la producción, difusión de saber y de modelos institucionales pedagógicos,…(p. 55).

En el trabajo anterior se señalan algunas claves que limitan la autonomía de los diferentes estados y que actúan como restricciones. Señalamos, a modo de referencia, las más importantes:

1. Ningún estado es autónomo respecto a su base económica. Los Estados forman parte de sistemas económicos más amplios.
2. Ningún Estado es autónomo desde un enfoque cultural y educativo. Los sistemas educativos no se pueden explicar exclusivamente mediante factores nacionales.
3. La educación actual ha crecido y se ha expandido como consecuencia de la transformación de las perspectivas políticas, religiosas y culturales de la sociedad contemporánea basadas en las ideas de modernización y progreso.
4. Los sistemas educativos presentan rasgos comunes, entre los que destacan una estructura administrativa controlada y financiada por el Estado, un sistema escolar diferenciado por niveles sucesivos con planes propios y exámenes al final de cada etapa, una organización por grupos de edad y en unidades de tiempo uniformes y un sistema de certificados y títulos para vincular la trayectoria escolar y laboral.

Como puede verse, los rasgos comunes a los sistemas educativos suponen una primera fuente de restricciones y dificultan las propuestas que intentan alterar la organización temporal o por grupos de edad que se realiza en las instituciones de educación secundaria.

2.5.1.2. La sociedad de la información.

En este segundo apartado que desarrolla el nivel Civilización vamos a profundizar en el concepto sociedad de la información y en sus implicaciones para la práctica educativa. Ubicamos este apartado en este punto al considerar que el fenómeno que vamos a estudiar supera las fronteras de un país y es característico del mundo occidental. Para tratar este punto abordaremos, en primer lugar, el desarrollo histórico de la sociedad; en segundo lugar, realizaremos una concreción del concepto diferenciándolo de otros conceptos similares como la sociedad del conocimiento; y, por último, analizaremos la influencia de la sociedad de la información en la práctica educativa.

2.5.1.2.1. El desarrollo histórico de la sociedad.

Para comenzar nuestro análisis vamos partir de los trabajos de Treacy y Wiersema (1997), Paradela (2001) y Friss (2003) tal y como aparece en Alfonso (2016) y vamos a exponer cuales han sido los principales cambios sociales a lo largo de la historia:

1. Economías agrarias: De la recolección y la caza, se pasó a la economía agrícola que se centraba en crear provisiones, cultivar, cosechar y domesticar animales. Se empleaba el trabajo físico. Los conocimientos por si mismos no eran generalmente reconocidos ni se constituían un componente fundamental de esas sociedades.
2. Economías de recursos naturales: El foco es la dominación explicita de los recursos naturales, tales como minerales y productos agrícolas. El papel de la multitud era facilitar la conversión de los recursos en bienes vendibles y llevarlos a los mercados. Los conocimientos se transmitían por "pupilaje", del maestro al aprendiz.
3. Revolución industrial: Durante los siglos XVIII y XIX la conversión de recursos naturales y la fabricación de productos fueron mejor organizados para lograr mayor eficiencia en esos procesos. Los conocimientos se transmitían por aprendizaje en centros especializados, básicamente universidades.
4. Revolución del producto: En la primera mitad del siglo XX se empezó a poner énfasis en la sofisticación de los productos y en el concepto de servicios para

mejorar el producto. El nuevo foco era el liderazgo del producto a través de la variabilidad y la sofisticación. El papel de los profesionales y artesanos cambió de forma que la experiencia llego a ser importante.

5. Revolución de la información: En la segunda mitad del siglo XX continúa ese foco, pero combinándose ahora con la excelencia operativa y el liderazgo de los productos. Las tecnologías de la información fueron más asequibles y se produjo como resultado un mayor control en la fabricación, logística y el comercio. (Alfonso, 2016, p. 237).

Como se puede ver en Alfonso (2016) los recursos evolucionaron desde la tierra en las sociedades pre-industriales hacia la maquinaria en las sociedades industriales, posteriormente esa evolución en los recursos evolucionó hasta la información en las sociedades post-industriales. Paralelamente a esta evolución se pasó de una tecnología centrada en la mano de obra, a una tecnología centrada en el capital, que dio paso en la sociedad post-industrial a una tecnología centrada en el conocimiento.

Son muchos los factores que han permitido esta evolución hacia la sociedad de la información. El proceso de avance tecnológico, especialmente en el mundo de las telecomunicaciones, ha sido una de las claves fundamentales como vemos en el trabajo de Balderas (2009):

> Como parte de este proceso imparable, apareció el telégrafo y otros múltiples inventos que desembocaron en la tecnología basada en satélites, que hizo posible que la televisión se convirtiera en un medio mundial de comunicación. Así, en 1969 se estableció la primera red global de telefonía, y en la década de los años noventa el uso del cable de fibra óptica, que elevó exponencialmente la capacidad de las redes de telefonía. A finales del siglo XX el mundo contaba ya con una sólida red global de telecomunicaciones que hizo del mundo, un lugar más pequeño y distinto. Para 1970 los medios de generación de riqueza y de los avances se trasladaban de los sectores industriales a los sectores de servicios y a la mercancía intangible: el pensamiento; cambios que iban transformando diferentes espacios de la vida como el trabajo, la visión y percepción del tiempo y las formas de relacionarse afectivamente con los demás.

> Es decir, todos y cada uno de los espacios de vida. En la sociedad o era de la información, la mayor parte de los empleos están asociados a la generación y almacenamiento de todo tipo de información y a los llamados "no lugares", y en este sentido, los sectores relacionados con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), desempeñan un papel particularmente importante. La mercancía era el pensamiento y ya no la mercancía tangible como en la época industrial. (p. 77)

Podemos ver en esta evolución, como las tecnologías de carácter comunicativo y de información "han tenido un desarrollo explosivo en la última parte del siglo XX y el comienzo del siglo XXI, al punto que han dado forma a lo que se denomina Sociedad del Conocimiento o de la Información" Martín, López y González (2013, p. 1).

Como se puede observar en la última cita, el concepto de sociedad del conocimiento aparece como sinónimo del concepto sociedad de la información. Sin embargo, en nuestro trabajo hemos optado por el término sociedad de la información tal y como explicaremos en el siguiente apartado.

2.5.1.2.2. Diferencia entre sociedad de la información y sociedad del conocimiento.

Según Balderas (2009), autores como Bell o Giddens consideran que ambos términos son sinónimos mientras que otros autores como Beck, Bauman o Luhmann señalan que son categorías totalmente distintas que señalan dos fases diferentes de la modernidad. En nuestro caso vamos a tener en cuenta la diferencia entre ambos conceptos basándonos en la siguiente distinción:

> No resulta fácil separar ambos términos, aunque no son exactamente equivalentes. Mientras que la información alude a un conjunto de datos que están organizados sobre un asunto determinado, siendo transmitida a través de algún medio de comunicación, el conocimiento no es algo que lo tenga un individuo, como si fuera un objeto que se puede poner delante de nosotros para aprenderlo de modo objetivo. El conocimiento es resultado de una actitud vital: el deseo de conocer lo que es objeto de indagación, discurriendo o con preguntas. (Mínguez y Hernández, 2013, p. 195).

Teniendo claro esta distinción podemos ver que la sociedad del conocimiento es una etapa posterior que supera la acumulación y el procesamiento de la información y que como dice Balderas (2009):

> […] la era del conocimiento es una etapa evolutiva hacia la que se dirige la humanidad, una etapa posterior a la actual era de la información, y hacia la que se llegará sólo si la información deja de ser una masa de datos indiferenciados y se asume como fuente de poder y no como poder mismo. (p. 78).

Dentro de este trabajo vemos en este punto una relación directa con el paradigma de visita a las obras y el paradigma de cuestionamiento del mundo propuesto por Chevallard (2013a).

> En la actualidad se aborda el análisis de problemas más profundamente vinculados a otro tipo de brecha: los problemas relacionados con el acceso masivo a las fuentes de información y sus efectos en el desarrollo de la sociedad del conocimiento. Desde nuestra perspectiva, si bien se ha generalizado el uso de los recursos informáticos, queda por justificar que la sociedad de la información haya dado lugar a oportunidades reales de desarrollo social e individual; de desarrollo de una sociedad en la que el conocimiento compartido, mediante el uso del entorno digital, haya incrementado las posibilidades y oportunidades de construcción de conocimiento válido y de desarrollo individual y social. Dicho de otro modo, la existencia de la sociedad de la información, no justifica ni garantiza la existencia de la sociedad del conocimiento. (Barroso, 2013, p. 72).

Una vez aclarado, tal y como aparece en Barroso (2013), que la sociedad de la información está constituida por datos y que la sociedad del conocimiento está constituida por los significados que aportan sentido a los datos, vamos a aclarar a continuación el concepto de sociedad de información que tendremos en cuenta en este trabajo. “La Sociedad de la Información se identifica por la alteración en los ámbitos económico, político y de organización social cuyo elemento distintivo es el empleo de los medios tecnológicos y digitales” (Sampedro, 2015, p.18). Los mismos “comportan nuevas maneras de trabajar, de comunicarnos, de relacionarnos, de aprender, de pensar y, en suma, de vivir” (Coll y Monereo, 2008, p.19).

Esta nueva forma de vivir es fuente de restricciones importantes que deben tenerse en cuenta a la hora de plantear una respuesta. Podemos esquematizar e identificar algunas de ellas a partir del trabajo de Trejo (2001):

- Exuberancia: Tenemos a nuestro alcance una vasta extensión en cuanto a cantidad de datos.
- Omnipresencia: La información se encuentra por todas partes y sin límites de fronteras y abarca desde lo público a lo privado.
- Irradiación: Las distancias geográficas y de tiempo se reducen al mínimo, la velocidad de comunicación es casi instantánea y el alcance de la información que producimos alcanza a personas desconocidas y llega a lugares a los que no tenemos acceso.
- Multilaterialidad/centralidad: Se recibe información por todas partes, aunque la mayor parte de la información surja de unos determinados sitios.
- Interactividad/unilaterialidad: Los usuarios son tanto consumidores como productores de información.
- Desigualdad: A pesar de su expansión en los últimos años existen diferencias a nivel global en el acceso a la información y en la evolución hacia una sociedad de la información.
- Heterogeneidad: El acceso a la información y la capacidad de ser un elemento activo en la creación de la misma ha multiplicado las actitudes, opiniones, pensamientos y circunstancias que son visibles y están accesibles.
- Desorientación: La gran cantidad de información que se produce y se difunde a diario causa confusión y aturdimiento personal y colectivo.
- Ciudadanía pasiva: El consumo prevalece sobre la creatividad y capacidad de reflexión y análisis (el intercambio mercantil es más frecuente que el intercambio de conocimientos).

La sociedad actual basada en la información plantea una serie de restricciones que, combinadas con las restricciones propias de la transmisión monumentalista de las obras, pueden limitar la incorporación de respuestas que busquen la evolución hacia un paradigma de cuestionamiento del mundo y por tanto dificultar que se pueda alcanzar la sociedad del conocimiento.

2.5.1.2.3. Impacto de la sociedad de la información en la educación.

El fuerte cambio social y las nuevas restricciones que emanan de él han llevado a muchos autores a plantear cambios en el sistema educativo. Aunque el sistema educativo español se analizará posteriormente en el nivel de codeterminación Social nos gustaría destacar que en un plano más amplio se está planteando la necesidad de afrontar cambios profundos en la formación de los futuros ciudadanos.

Ante estos fenómenos, es necesario emprender acciones, desde los diferentes ámbitos de la realidad social incluyendo el educativo, para superar los errores de la modernidad, facilitando que los ciudadanos puedan aprender y comprender las causas y consecuencias de los problemas de insostenibilidad (Novo, 2009), afrontar las incirtidumbres y los desafios planteados en las sociedades "líquidas" actuales (Bauman, 2007) y participar en la consecución de un desarrollo humano inclusivo, ambiental y socialmente sostenible.

> Las actuales sociedades de la información y del conocimiento, sustentadas por la revolución de las TICs, no pueden caracterizarseúnicamente por el acceso de grandes masas a conocimientos e informaciones parciales en cantidades casi ilimitadas, ni por la introducción de reflexividad en la producción de conocimiento individual y colectivo mediante pertinentes procesos de descubrimiento, investigación, innovación, colaboración en el tratamiento de la información, o gestión del saber. Es necesario, además, introducir un imperativo ético, que tenga que ver con cuestiones relacionadas con la protección del medio ambiente, la reducción de la pobreza, la igualdad de sexos, la promoción de la salud, los derechos humanos, la comprensión cultural y la paz, la producción y el consumo responsables, el acceso igualitario a las TIC, etc. (Aznar y Martínez, 2013, p.40).

Para afrontar este cambio a nivel general se ha potenciado la presencia de las TIC en los centros educativos, esta corriente se apoya en el uso de la tecnología e información disponible para la transformación de la educación. En Roa Becerra (2013), se señala el amplio desarrollo que ha tenido esta política en los centros educativos y se señalan las posibilidades que aportan las TIC a la enseñanza de las Matemáticas.

En el caso concreto de las matemáticas, el aprendizaje de esta materia conlleva procesos complejos que requieren de una gran diversidad de metodologías para lograr la máxima eficacia posible. El uso de las TIC se adapta bien a esta materia: la utilización de imágenes, gráficas, hojas de cálculo, etc. en calculadoras, ordenadores y móviles abre el abánico de recursos disponibles para los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Las TIC pueden apoyar a las investigaciones de los alumnos en varias áreas de las matemáticas, como números, medida, geometría, estadística, álgebra, pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas. La existencia, versatilidad y poder de las TIC hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los alumnos, así como examinar la mejor forma en que puedan aprenderlas.

Este es el momento de establecer el vínculo entre el constructivismo y la matemática educativa asistida por las tecnologías de información y comunicación. Cabe preguntarse, entonces: ¿cómo usar las TIC con un enfoque constructivista en matemática educativa? Al respecto, Sánchez (2000) da los siguientes enunciados:

- Como herramientas de apoyo al aprender, con las cuales se pueden realizar actividades que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas superiores en los alumnos.
- Como medios de construcción que faciliten la integración de lo conocido y lo nuevo.
- Como extensoras y amplificadoras de la mente, a fin de que expandan las potencialidades del procesamiento cognitivo y la memoria, lo cual facilita la construcción de aprendizajes significativos.
- Como medios transparentes o invisibles al usuario, que hagan visible el aprender e invisible la tecnología.
- Como herramientas que participan en un conjunto metodológico orquestado, lo que potencia su uso con metodologías activas como proyectos, trabajo colaborativo,

> mapas conceptuales e inteligencias múltiples, donde aprendices y facilitadores coactúen y negocien significados y conocimientos, teniendo a la tecnología como socios en la cognición. (Castillo, 2008, p.185).

Esta apuesta por el uso de las TIC como llave del cambio educativo puede suponer una restricción importante a otros enfoques y ha sido criticada por algunos autores como Mínguez y Hernández (2013):

> Resulta harto evidente que nuestras aulas se han nutrido cada vez más de recursos técnicos, de nuevas tecnologías, que han desdibujado el carácter netamente humano de la educación. Con esa realidad y la puesta en marcha de medidas políticas a favor de la incorporación de las TIC en los procesos educativos, se ha extendido una mentalidad tecnológica que ha determinado el aprendizaje escolar, afectando al desempeño docente y a la valoración de los resultados educativos, entre otros aspectos cruciales. (p, 197).

En este apartado hemos visto como el cambio educativo que demanda la sociedad de la información se ha enfocado inicialmente hacia la incorporación de las TIC a los centros dando importancia a que los estudiantes y profesores utilicen las TIC para buscar información y procesarla y para que los procesos de enseñanza-aprendizaje incorporen su uso en todas las materias del currículo. Este acento en el uso de la tecnología supone una restricción para la construcción de respuestas alternativas.

2.5.1.3. El papel de las instituciones supranacionales.

Existen múltiples instituciones supranacionales que están influyendo desde sus respectivos ámbitos de actuación en el sistema educativo actual. En este trabajo vamos a valorar el papel que juegan tres de estos organismos en el problema de investigación que abordamos: la Organización de las Naciones Unidas para la Ciencia, la Educación y la Cultura (UNESCO), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y la Unión Europea (UE.Estos organismos son especialmente relevantes, como puede deducirse a partir de la siguiente cita:

> Su función se centra tanto en la difusión e intercambio del conocimiento y del saber, como en la creación de narrativas y relatos sobre grandes temas como identidad, ciudadanía, desarrollo, calidad o equidad y, más recientemente, también se han convertido en actores educativos supranacionales con capacidad para gobernar los sistemas educativos a nivel internacional o supranacional. (Martens, Rusconi y Leuze, 2007; Wiseman, Pilton y Lowe, 2011; tal y como aparece citado en Luzón y Torres, 2013, p.58).

2.5.1.3.1. La UNESCO.

La UNESCO, relacionada con la ONU, fue creada tras la Segunda Guerra Mundial. Sus siglas, Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, dan a entender el papel que debía tener esta institución para la difusión de políticas educativas a nivel mundial. En un principio recogió el papel de algunas instituciones supranacionales que habían ejercido su influencia en la primera mitad del siglo XX, como la Organización Internacional de la Educación (OIE).

> La UNESCO ha jugado un papel decisivo en la difusión de políticas, narrativas y conocimiento educativo a lo largo de su historia. Si bien durante los primeros años estuvo más centrada en el reconocimiento y defensa de derechos universales, además de políticas centradas en la educación para el desarrollo. A comienzos de la década de los sesenta optó por un enfoque más pragmático y técnico centrado en la expansión de la educación nacional y en la modernización de los sistemas educativos a través de la financiación y de la asistencia técnica a los países menos desarrollados. (Luzón y Torres, 2013, p.59).

No entra en el marco de este trabajo criticar el trabajo desarrollado por la UNESCO, pero cabe destacar que su papel al trasladar los conceptos de educación occidentales a países en vías de desarrollo ha sido criticado en algunas ocasiones.

Junto a la ayuda técnica y financiera, la UNESCO también ha servido para el establecimiento de algunas mediciones estadísticas sobre los sistemas educativos que han ido recopilando información desde mediados de los 60.

De los informes realizados por la UNESCO destacaremos, por su trascendencia, el informe *La Educación encierra un tesoro*, denominado también, Informe Delors (1996). A continuación se señalan algunos de los puntos más importantes del mismo y su influencia en la visión del papel que debe jugar la educación en el siglo XXI.

En este informe se asume que la educación es el instrumento necesario para el progreso de la humanidad y se pone el foco en los niños y adolescentes. Una idea central del mismo es el concepto de la Educación permanente que se considera clave para poder desarrollar una sociedad basada en el conocimiento.

Para conseguir este desarrollo el informe señala cuatro pilares básicos, tal y como aparece en Gradoli (2015):

1. Aprender a conocer: Este principio aborda la necesidad de conjugar una cultura general amplia con el estudio a fondo de unas pocas materias.
2. Aprender a hacer: Se debe trabajar para la adquisición de unas competencias generales que permitan hacer frente a situaciones imprevistas y que faciliten el trabajo en equipo.
3. Aprender a convivir: La comprensión de los demás y del mundo debe permitir el entendimiento y el diálogo pacífico.
4. Aprender a ser: Pone el énfasis en el papel personal y en el desarrollo de la memoria, el raciocinio, la imaginación, las aptitudes físicas, el sentido estético y la facilidad para comunicar con los demás.

En una primera parte el informe aborda relaciones planetarias que afectan a la educación: la superpoblación, la mundialización de las actividades, los flujos de información y moneda, la comunicación universal… Estas relaciones planetarias deben abordarse desde la comprensión de los demás y de uno mismo. Por ese motivo son clave la cohesión social y la participación democrática. Por otra parte el progreso producido durante la segunda mitad del siglo XX ha generado nuevos retos en materias de desigualdad, ecología y sostenibilidad que deben abordarse desde el desarrollo humano.

En la segunda parte se desarrollan los pilares básicos de la educación y el concepto de educación para toda la vida. El papel que debe jugar la educación en el informe Delors puede resumirse en la siguiente cita:

> Es por todo esto que en el futuro habrá que imaginar concepciones innovadoras del tiempo de trabajo en que se tomen más en cuenta las preferencias individuales de los trabajadores y la flexibilidad que necesitan las empresas. Por ejemplo la formación alternada o sistema "dual" donde se complementa la formación con el trabajo, las licencias sabáticas por estudio, la jubilación flexible, o la propuesta de Jaques Delors: una duración de la vida activa de 40.000 horas antes del 2010, lo que permitiría a los ciudadanos dedicar más tiempo a la educación a lo largo de la vida y que la educación esté en el centro mismo de la sociedad. Gradoli (2015, p. 11).

La tercera parte se centra en todos los niveles educativos y en el papel de los políticos y de la cooperación internacional para educar en la aldea planetaria. Cabe destacar en esta última parte los 6 principios u orientaciones universales que se deben tener presentes y que se recogen a continuación:

1. La educación es un derecho fundamental de la persona humana.
2. La formación, formal o no formal, debe ser útil a la sociedad.
3. La equidad, la excelencia y la pertinencia debe regir toda política educativa.
4. Los acuerdos a alcanzar deben basarse en datos contrastados de amplio consenso y alcanzables en un plazo medio.
5. Se deben tomar en consideración los Derechos Humanos, la tolerancia y el entendimiento mutuo, la democracia, la responsabilidad, la universalidad, la identidad cultural, la búsqueda de la paz, la salvaguarda del medio ambiente, el reparto de los conocimientos, la lucha contra la pobreza, la regulación demográfica y la salud.
6. La responsabilidad sobre la Educación incumbe a la sociedad en su conjunto.

2.5.1.3.2. La OCDE.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico ha tenido una fuerte influencia en la educación tal y como se vio en el punto anterior en relación a las matemáticas modernas.

Actualmente, su influencia está más relacionada con la producción de datos educativos y con su capacidad de influencia sobre las políticas educativas a todos los niveles.

Son muchos los informes sobre educación, pero sin duda el más influyente en la actualidad es el denominado informe PISA. El informe se basa en una prueba estandarizada para los estudiantes de todos los países miembros de un mismo grupo de edad que intenta dar cuenta del nivel educativo de los países participantes en función de los resultados obtenidos en las pruebas.

En el ámbito matemático el informe tiene una influencia decisiva al plantear en detalle los aspectos que deben contemplarse en la competencia matemática. Por ese motivo detallaremos a continuación el modelo de competencia matemática que define y que supone una restricción importante dada su influencia en la legislación que analizaremos posteriormente..

2.5.1.3.3. La competencia matemática del informe PISA.

Las pruebas PISA se han realizado desde el año 2000 cada 3 años. El foco de atención de las pruebas ha ido variando entre la competencia matemática, la competencia científica y la competencia lectora. Las pruebas de 2003 y de 2012 estuvieron centradas en la competencia matemática.

El término de competencia matemática en PISA es muy rico en matices y para su descripción vamos a basarnos en el análisis realizado por Rico (2007).

1. La competencia como dominio de estudio.

El informe PISA propone un modo global de entender cómo deben hacerse las matemáticas y cual es la propia naturaleza del conocimiento matemático.

El objetivo básico de la educación matemática debe ser el aprender a matematizar a través de la resolución de problemas. Para realizar este proceso el alumno debe seguir las siguientes fases:

- Traducir los problemas extraídos de un contexto del mundo real al mundo matemático. Este proceso se denomina matematización horizontal.

- Una vez traducido, se plantea la cuestión en términos matemáticos y se utilizan conceptos y destrezas matemáticas para su resolución. Este proceso se denomina matematización vertical.
- Una vez resuelto el problema se reflexiona sobre el proceso completo y se valora de forma crítica el resultado y el proceso seguido.

2. Las competencias son un conjunto de procesos generales que se ponen en práctica para resolver un problema matemático.

El proyecto PISA establece 8 subcompetencias o procesos generales que orientan las tareas y ayudan a establecer el análisis de resultados y a analizar los niveles de rendimiento. A continuación se ofrece una lista de ellas:

- Pensar y razonar
- Argumentación
- Comunicación
- Construcción de modelos
- Formulación y resolución de problemas
- Representación
- Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico
- Empleo de soportes y herramientas (OECD, 2004, p. 40).

3. Las competencias generales requeridas se pueden dividir en seis niveles de complejidad que se distinguen por el tipo de demanda cognitiva requerido. Los niveles de complejidad permiten medir el grado de adquisición de la competencia matemática. Por ese motivo, si se establecen tareas de distintos grados de complejidad el docente puede determinar el nivel aproximado de competencia del alumno.

Los niveles de complejidad previstos para los estudiantes de 15 años se listan a continuación, tal y como aparecen en OCDE (2005, p. 47):

Primer nivel. Los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Son capaces de identificar información y llevan a cabo procedimientos rutinarios al seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Segundo nivel: Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

Tercer nivel: Los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. También son capaces de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

Cuarto nivel: Los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

Quinto nivel: Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos de este nivel pueden trabajar estrategicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Sexto nivel: Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas, simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos de este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

4. Las competencias reflejan el nivel alcanzado por los alumnos y se pueden determinar empíricamente por medio de una escala.

La resolución de tareas de dificultad creciente, el número de subcomptencias que el alumno es capaz de realizar y el grado de complejidad con el que lo hace permiten determinar el grado de adquisición de la competencia matemática.

Como hemos visto en este apartado el enfoque basado en competencias planteado por PISA supone una clara restricción a tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas al ser la competencia matemática una de las tres competencias que son evaluadas cada tres años por esta institución.

2.5.1.3.4. La Unión Europea.

La Unión Europea ha definido una serie de estrategias para convertir Europa en el centro del conocimiento, la innovación, la investigación y la formación mundial. La definición de esta estrategia se ha ido desarrollando desde el año 1998 a través de sucesivos encuentros que han ido construyendo el Espacio Europeo de Educación Superior y que pretenden convertir la Universidad del siglo XXI en un centro de conocimiento. Las estrategias empleadas se pueden agrupar en cinco grandes bloques:

- Conectar con la sociedad de la información: Para concretar este bloque se debe tener en cuenta que el conocimiento es saber y saber hacer, se deben integrar las TIC, se debe trabajar para el desarrollo de competencias generales para el empleo que fomenten el pensamiento crítico y que permitan la adaptación al cambio.
- Fomentar la Integración Supranacional: Para ir integrando los distintos sistemas educativos se establecen acreditaciones a nivel europeo, se flexibilizan los itinerarios y se fomentan los programas de movilidad del Personal Docente e Investigador, el Personal de Administración y Servicios y los estudiantes.
- Formación Permanente: La formación permanente es el camino para actualizar las plantillas, reinsertar a los desempleados y realizar programas de formación de adultos a través de la Universidad de mayores.
- Dimensión social: La educación debe prestarse en condiciones de igualdad de oportunidades y equidad, de forma sostenible, favoreciendo la cohesión social y la ciudadanía activa y permitiendo la empleabilidad y la difusión del conocimiento.
- La universidad como centro de conocimiento: La universidad debe convertirse en un motor de la investigación, la creación y la innovación y debe dar difusión a sus descubrimientos a través de la formación y de la integración en el sector productivo.

La Unión Europea con sus políticas educativas ha vinculado la educación con la economía y con la posición global. Por ese motivo, como vemos en Mínguez y Hernández (2013), la educación desde el punto de vista europeo debe estar centrada en el crecimiento económico:

> Esa mentalidad ha sido presentada como una nueva oportunidad para poner al día a la educación en "condiciones competitivas ventajosas" y que el conocimiento se convierta en un poderoso motor del crecimiento económico. Así pues, la educación centrada en el crecimiento económico apuesta por la formación en conocimientos, competencias y destrezas cognitivas básicas que están al servicio del mercado laboral. Y es que cada

vez resulta más evidente que las reformas educativas, aplicadas a la escuela y a la universidad, se han vinculado al discurso de la eficiencia y de la rentabilidad. Y ello es consecuencia del nuevo concepto de educación adoptado por la Comisión Europea: la inversión en competencias para lograr mejores resultados socioeconómicos. (p. 197).

2.5.1.4. Restricciones que emanan del nivel de la Civilización.

Como se ha visibilizado en la descripción de este nivel son muchas y muy variadas las restricciones que emanan de él. Los fenómenos de internacionalización y globalización hacen que los sistemas educativos nacionales estén relacionados e influidos por las relaciones globales entre países. Esas relaciones globales han llevado a que la evolución hacia una sociedad de la información sea un hecho en nuestro entorno. En este contexto, las instituciones supranacionales señalan los diferentes caminos e introducen conceptos como la educación basada en competencias o el aprendizaje para toda la vida que pretenden alinear a los distintos estados hacia unos objetivos comunes. La educación es vista cono un derecho fundamental transformador que debe ejercer un papel central en el nuevo contexto social y económico.

En línea con estas restricciones podemos comprender mejor la dimensión ecológica: aquellas propuestas educativas que se apoyen en las TIC que se alineen con el enfoque basado en competencias y que contribuyan al pensamiento crítico, a la adaptabilidad al cambio, al fomento de las relaciones sociales y a la capacidad de aprender por uno mismo tendrán muchas más posibilidades de ser viables. Por el contrario, aquellas que permanezcan centradas en el trabajo del saber enciclopédico, en la competitividad individual y en la adquisición de saberes inmutables tendrán muchas menos posibilidades de sobrevivir a medio plazo.

2.5.2. El nivel de la Sociedad.

En el nivel de la sociedad es donde se deciden (en una civilización dada) qué saberes deben ser objeto de estudio en la enseñanza reglada que todo ciudadano debe conocer.

En este apartado vamos a centrarnos en los fines y en el enfoque educativo que se persiguen en la legislación vigente en España.

2.5.2.1 Finalidad del sistema educativo español.

En el preambulo de la LOMCE (Ley orgánica 8/2013, BOE-A-2013-12886) encontramos la información necesaria para analizar los fines que se dan al sistema educativo en España. A continuación vamos a destacar los más importantes:

- La educación debe ser el principal instrumento de movilidad social y es el motor del bienestar de un país. El nivel educativo alcanzado es la clave para competir en un panorama internacional y para acceder a puestos de trabajo de alta cualificación.
- El objetivo del sistema es encauzar a los estudiantes hacia las trayectorias más adecuadas a sus capacidades para facilitar su empleabilidad y su espíritu emprendedor.
- El sistema educativo debe ser de calidad, inclusivo, integrador y exigente para garantizar la igualdad de oportunidades.
- Uno de los objetivos de la legislación es ubicar la educación en el centro de la sociedad y de la economía. La transformación social depende de la educación con la implicación de toda la sociedad.
- Las sociedades se están fracturando a través del conocimiento. Es necesario disponer de conocimientos, competencias y habilidades para aprender y hacer aprendiendo. Hay que reducir el abandono temprano y mejorar los niveles formativos para superar los estándares de calidad internacionales.
- La formación se proyecta a lo largo de toda la vida por lo que las habilidades cognitivas no son suficientes y deben enriquecerse con competencias transversales y actitudes de confianza, entusiasmo, constancia y aceptación del cambio.
- La estrategia Europa 2020 y las pruebas de evaluación internacionales como PISA tienen una alta objetividad y señalan el camino a seguir: Mejorar los bajos resultados, reducir las elevadas tasas de abandono y mejorar el escaso número de alumnos excelentes. Se debe lograr menos de un 10% de abandono escolar y al menos un 40% de personas con formación superior.
- Se refuerza la autonomía de los centros, la gestión de la dirección, las evaluaciones externas al finalizar cada etapa, la racionalización de la oferta y la flexibilidad

de las trayectorias. La mayor parte de estas medidas son recomendaciones de la OCDE y buscan mejorar las puntuaciones en las pruebas internacionales.

- Se diseñan pruebas externas al final de cada etapa homologables internacionalmente y centradas en la adquisición de competencias.

Como puede verse en las ideas señaladas anteriormente, el sistema educativo español previsto en la legislación vigente está en perfecta sintonía con el nivel de codeterminación anterior. Las referencias a la globalización, a las instituciones supranacionales (OCDE) y la asunción como propias de los objetivos marcados por la Unión Europea permiten ver cómo las restricciones ya señaladas afectan al nivel de la sociedad.

2.5.2.2 Enfoque educativo del sistema educativo español.

Si nos fijamos en el enfoque educativo dentro del preambulo de la LOMCE (Ley orgánica 8/2013, BOE-A-2013-12886) encontramos los siguientes puntos clave:

- El alumno es el centro del sistema educativo y debe procurarse que sea autónomo y crítico.
- Los conocimientos permiten construir el talento pero son las competencias las que materializan el talento de las personas.
- Los cambios en la sociedad de la información demandan perfiles de ciudadanos diversos que sepan organizarse mediante la colaboración y el trabajo en equipo. La fortaleza está en la mezcla de competencias y conocimientos diversos.
- El sistema educativo debe posibilitar el aprendizaje de cosas distintas y la enseñanza de formas diferentes.
- La globalización y el impacto de las nuevas tecnologías hacen que sea distinta la manera de aprender, comunicarse, concentrarse… por eso es necesario un cambio metodológico, dónde el alumno sea el centro activo del proceso de aprendizaje.
- Se refuerzan las materias troncales que contribuyan a la adquisición de las competencias fundamentales, se fomenta la incorporación de las TIC y los idiomas extranjeros y se refuerza la formación profesional y los valores democráticos.

En los anteriores puntos, vemos cómo se apuesta por una renovación metodológica centrada en las competencias y cómo se apuesta por el papel activo de los alumnos que deben ser capaces de desarrollarse de forma autónoma y crítica pero que también deben ser capaces de colaborar y trabajar en equipo incorporando las TIC y los idiomas.

Este enfoque renovador se ha desarrollado en sucesivos reales decretos y disposiciones autonómicas. Ejemplo de este desarrollo en el Anexo II de la orden ECD/65/2015 (BOE-A-2015-738) donde se dan orientaciones para facilitar el desarrollo de estrategias metodológicas que permitan trabajar por competencias en el aula. Entre las aportaciones más notables de este documento destacamos las siguientes:

- Todo proceso de enseñanza-aprendizaje debe partir de una planificación rigurosa que incluya objetivos, recursos, métodos didácticos y modos de evaluación y retroalimentación del proceso.
- Los métodos didácticos se sitúan entre las metas legislativas y los condicionantes en los que tiene lugar la enseñanza. La naturaleza de la materia, las condiciones socioculturales, la disponibilidad de recursos y las características de los alumnos.
- El docente es un orientador, promotor y facilitador del desarrollo competencial de los alumnos. Debe fomentar la realización de tareas o situaciones problema concretas que los alumnos deben resolver movilizando distintos conocimientos, destrezas, valores y actitudes.
- Se debe partir de los conocimientos previos y atender a la diversidad respetando ritmos y estilos de aprendizaje y combinando el trabajo individual con el cooperativo.
- El alumno debe ser activo, autónomo, consciente y responsable de su aprendizaje.
- Los profesores deben generar curiosidad y necesidad por adquirir los conocimientos, las destrezas y las actitudes y valores presentes en las competencias. Deben ayudar de forma variada para que comprendan lo que aprenden, sepan para qué lo aprenden y sean capaces de usar lo aprendido en distintos contextos dentro y fuera del aula,
- Las metodologías deben facilitar la participación, implicación y adquisición y uso de conocimientos en contextos y situaciones reales. Metodologías activas y

contextualizadas que deben apoyarse en estructuras de aprendizaje cooperativo.

- Los estudiantes a través del aprendizaje por proyectos, los centros de interés, el estudio de casos o el aprendizaje basado en problemas deben aprender a trabajar de forma activa, experimentando de forma compartida mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas.
- El aprendizaje orientado a la acción para conseguir un resultado práctico dónde se puedan realizar proyectos interdisciplinares reales donde se pongan en juego un conjunto amplio de competencias.
- Evaluación continua y compartida basada en evidencias e información extensas sobre el aprendizaje del alumnado. Portfolios.
- Uso de variedad de materiales y recursos, prestando especial atención a las TIC y a los recursos virtuales.

Como puede verse en estas 11 ideas clave no solo se insiste en el papel activo y en el aprendizaje por competencias, sino qué se aportan referencias muy concretas sobre cómo llevarlo a cabo. El aprendizaje cooperativo, los proyectos, el aprendizaje basado en problemas, los centros de inteŕes, los estudio de caso y los portfolios son ejemplos de ello.

2.5.2.3. Restricciones que emanan del nivel de la Sociedad.

A las restricciones ya señaladas en el nivel de la civilización y que, como se ha visto en este nivel, están presentes en la legislación vigente, se añaden nuevas restricciones relativas al enfoque del sistema educativo que afectan a lo que se puede plantear en los centros educativos españoles.

En el punto anterior hemos visto cómo hay una intención educativa que combina posicionamientos constructivistas con posicionamientos logístas. El alumno es quien construye socialmente su propio aprendizaje con la ayuda de un docente. Este debe favorecer esa construcción social mediante una diversidad de recursos, metodologías y sistemas de evaluación que favorezcan el aprendizaje activo, contextualizado y cooperativo y la evaluación formativa, continua y compartida. Además el acento de ese aprendizaje se sitúa en el saber hacer y en aprender haciendo, siendo especialmente relevante la aplicabilidad a contextos y situaciones reales donde se integren las distintas competencias.

Por tanto vemos en este nivel un nuevo conjunto de restricciones que señalan la forma de llevar a cabo procesos de innovación educativa en los centros españoles. Estas restricciones son clave y condicionan mucho el tipo de innovación que será viable, y que cuenta con un fuerte respaldo legislativo, y el tipo de innovación que a priori no es viable.

2.5.3. El nivel de la Escuela.

La Sociedad ha organizado un Sistema Educativo de naturaleza parcialmente obligatoria que se lleva a cargo en torno a un conjunto de centros educativos. Esta organización en torno a "escuelas" tiene un alto impacto en la labor que puede finalmente ejercer el docente en el aula. Para llevar a cabo nuestro análisis de restricciones, debemos tener en cuenta que, independientemente de los niveles anteriores, antes de realizar nuestra propuesta debemos llevar a cabo un análisis del centro educativo donde se va a llevar a cabo.

2.5.3.1. Elementos a estudiar en el nivel de la Escuela.

Los aspectos que se pueden tener en cuenta en este nivel de codeterminación son muy numerosos y podrían ir, siguiendo a Bosch y Gascón (2009), desde cómo se debe preparar una reunión con padres hasta qué influencia pueden tener las comunidades de profesores sobre los programas. Como vemos en este nivel, surgen un conjunto de restricciones por el hecho de tener un Sistema Educativo Obligatorio que se lleva a cabo en centros escolares regulados. En este contexto, las reuniones con padres son necesarias al existir un colectivo de alumnos atendidos por un profesor. Del mismo modo, la propia estructura del sistema hace que aparezcan colectivos de profesores que trabajan sobre una misma disciplina y que, por tanto, pueden asociarse y ejercer un papel sobre los programas educativos.

En nuestro trabajo de investigación, hemos optado por señalar algunos puntos dentro de este nivel que, según nuestro criterio, deben estudiarse antes de realizar una propuesta o intervención, y que permiten estudiar algunas de las condiciones óptimas para que esta pueda llevarse a cabo. Las restricciones que emanan de este nivel y que particularizaremos en detalle en un apartado posterior, para la institución donde se llevará a cabo la investigación, son las siguientes:

- Contexto escolar donde se lleva a cabo la investigación.

Es necesario estudiar la ubicación de la escuela dentro del territorio y los diferentes estadísticos sobre la población del mismo. En concreto, es interesante analizar las ramas de actividad económica, los incrementos o descensos de población, los movimientos migratorios, la edad de los habitantes, la situación social y económica...

- La oferta educativa disponible para las familias.

Se ha de tener en cuenta que dentro de los diferentes municipios, barrios o zonas suelen existir varias ofertas educativas disponibles para las familias. A la hora de estudiar las posibles restricciones que emanan de este nivel es necesario conocer la posición relativa del centro en cuestión, frente a los centros cercanos. Es importante conocer los resultados previos en las evaluaciones externas y la opinión de las familias sobre los distintos centros disponibles.

- El tipo de centro educativo.

En España, a diferencia de lo que ocurre en otros países, son tres las posibilidades a la hora de clasificar los centros. Por lo que en este nivel hay que tener en cuenta si el centro es público, concertado o privado. Además de este dato, estudiar los valores que rigen la actuación educativa en los mismos es determinante. En el caso de los centros concertados y privados es relevante estudiar si pertenecen a colectivos o agrupaciones de centros más amplias y en qué medida esa adscripción a proyectos educativos influye.

- La oferta educativa y el tamaño del centro.

En ocasiones, una fuente de restricciones puede ser la oferta educativa del centro. En muchos casos es de destacar la influencia que puede tener que los alumnos vayan avanzando en las distintas etapas educativas dentro del mismo proyecto educativo. Además es muy relevante conocer el tamaño del centro gracias al dato de lineas ofertadas y número total de alumnos.

El hecho de disponer de más de una linea supone en muchos casos la necesidad de coordinar el trabajo entre profesores dentro de un mismo curso. El hecho de unificar sistemas de calificación, pruebas y temporalizaciones puede ser una restricción importante para atender a la diversidad del alumnado o consensuar cambios, y debe tenerse en cuenta.

- La organización interna de la institución.

Dentro de la autonomía que tienen los centros en España, el tipo de organización que presenta la escuela influye de cara a estudiar las posibles restricciones que provengan de los órganos de gestión y dirección. Como se vio en el nivel anterior, el papel del director es especialmente relevante y se ha reforzado a partir de la última reforma educativa. Este aspecto es particularmente reseñable y puede variar mucho entre los centros públicos, concertados o privados. El hecho de que la toma de decisiones sea más asertiva-directiva o más consensuada-democrática es una restricción a tener en cuenta.

- El tipo de profesores que imparten la materia.

En España están definidas las condiciones de formación y de formación inicial para el ejercicio de la docencia en la Educación Secundaria, el Bachillerato y la Formación Profesional. En el Real Decreto (BOE-A-2015-8043) encontramos la siguiente información sobre las condiciones de formación y de formación inicial del profesorado de Matemáticas:

> Matemáticas: Cualquier título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto del área de Ciencias Experimentales y de la Salud o de las Enseñanzas Técnicas o cualquier título oficial de Graduado o Graduada de la rama de conocimiento de Ciencias o de Ingeniería y Arquitectura y además acreditar una experiencia docente o una formación superior adecuada para impartir el currículo de la materia. (p. 10).

Al contrario de lo que podría esperarse, el colectivo de profesores de Matemáticas en los centros de Educación Secundaria españoles no presenta una titulación clara para acceder a la profesión docente. Asimismo, la formación pedagógica inicial presenta grandes diferencias, ya que nos encontramos con dos colectivos bien diferenciados: hasta 2008 los profesores cursaban un Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) de corta duración y generalmente con un nivel de exigencia bajo; a partir de 2008, los profesores cursan un máster habilitante de 60 créditos ECTS y que incluye la obligatoriedad de cursar asignaturas de psicología, pedagogía, sociología y de especialidad y de realizar prácticas y un trabajo de fin de máster.

Vemos en este punto una fuente de restricciones destacada y que debe analizarse y tenerse en cuenta.

2.5.3.2. Restricciones que emanan del nivel de la Escuela.

A las restricciones ya señaladas en los niveles de la Civilización y la Sociedad hemos de añadir un conjunto de restricciones que provienen de este nivel y que son clave a la hora de proponer o llevar a cabo cualquier innovación o intervención educativa. La existencia de un sistema educativo obligatorio que se desarrolla dentro de unas instituciones concretas, como son los centros de enseñanza, es una restricción crucial a la hora de plantear una propuesta. La necesidad de llevar a cabo la misma dentro de una institución es, en sí mismo, una restricción que nos obliga a tener en cuenta la zona, la situación social y económica, el tipo de centros disponibles y la titularidad de los mismos, el tamaño y la oferta educativa o la necesidad de coordinación y la forma de tomar decisiones. Además de lo anterior, es especialmente relevante conocer la formación pedagógica de los profesores y los conocimientos sobre la disciplina que es esperable que tengan. Asimismo, tienen influencia las creencias que tienen sobre qué son las matemáticas y cómo se aprenden.

Como puede verse, este nivel supone un salto cualitativo en el nivel de concreción de restricciones y exige que a la hora de plantear respuestas a las mismas sea necesario realizar un estudio pormenorizado de estas.

2.5.4. El nivel de la Pedagogía.

Este nivel de análisis completa el nivel anterior al profundizar en las características internas de las escuelas. Para comprender mejor este nivel de codeterminación vamos a fijarnos en las preguntas analizadas en Bosch y Gascón (2009). En este trabajo vemos como en torno a este nivel de codeterminación aparecen aspectos como: la actitud del profesor el primer día de clase, la forma en que se colocan los alumnos en el aula, cómo se atienden los problemas de comportamiento, la gestión de las tareas para casa, el tipo de material disponible, la distribución del horario escolar o la forma de organizar, secuencial o paralelamente, los diferentes bloques de contenido. Nos movemos, por tanto, dentro del conjunto de restricciones que afectan a todas las disciplinas dentro de las diferentes etapas educativas.

2.5.4.1. Elementos a estudiar en el nivel de la Pedagogía.

Dada la naturaleza tan amplia de las restricciones que provienen de este nivel, en este trabajo de investigación, vamos a poner el foco en tres aspectos concretos que creemos son especialmente importantes y serán objeto de estudio más detallado en un apartado posterior cuando analicemos la institución concreta dónde se llevará a cabo la investigación:

- El número, el agrupamiento y la diversidad de los alumnos en el aula.

Parece evidente que hay que considerar el número de alumnos por profesor y si existen o no desdobles o agrupamientos por niveles de rendimiento.

Además de estos factores es relevante comprender que todos los alumnos son diversos en relación con la materia y que hay que conocer y valorar, no solo los conocimientos previos y el rendimiento en las pruebas, sino el desarrollo de sus competencias, su relación emocional con la asignatura, sus estilos de aprendizaje y sus necesidades educativas.

La concepción del alumno como elemento central y activo del proceso hace absolutamente necesario tener en cuenta sus características a la hora de valorar las posibles restricciones.

- El tiempo dedicado a la asignatura y los horarios previstos.

Como ya se ha indicado en el nivel de la Sociedad, se ha producido en los últimos años un incremento de las horas dedicadas a las asignaturas troncales. En concreto, el número mínimo de horas recogido en la legislación para la asignatura de Matemáticas es de 4 horas a la semana en días distintos a lo largo del primer ciclo de Educación Secundaria. A esta cantidad mínima de horas a la semana hay que añadir en algunos casos una hora adicional (especialmente en los centros privados y concertados).

A pesar de ser un dato importante, en nuestro caso vemos este elemento no desde el punto de vista del rendimiento, sino desde el punto de vista de las posibilidades temporales para llevar a cabo una determinada actividad. La duración de las sesiones y la distribución horaria de esas horas son una fuente de restricciones. Cuando estudiamos lo que es posible llevar a cabo en un centro hay que considerar que el tiempo de las sesiones, el momento del día en que están ubicadas y la influencia de las sesiones previas y posteriores puede producir fuertes restricciones al proceso.

- Las instalaciones disponibles.

Aunque la legislación española señala claramente los requisitos mínimos sobre instalaciones que deben tener los centros educativos en función de la etapa, es necesario conocer el número y tipo de instalaciones disponibles. Disponer de salas de informática, laboratorios, espacios deportivos o bibliotecas y la dotación de los mismos es una fuente de restricciones a tener en cuenta a la hora de llevar a cabo cualquier propuesta.

2.5.4.2. Restricciones que emanan del nivel de la Pedagogía.

A las restricciones ya señaladas en los niveles anteriores se suman ahora las restricciones que provienen de los estudiantes implicados, del tiempo disponible y la organización del mismo y de la disponibilidad de recursos materiales.

El número de alumnos y sus características es una fuente de restricciones muy relevante que debe abordarse desde la inclusión y la atención a la diversidad.

Además de los movimientos y enfoques de la educación supranacionales, de la legislación vigente, de las características socio-económicas y organizativas de los centros, es importante tener en cuenta el tiempo relativo y la calidad del mismo que se otorga a la disciplina y las características de los implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se va a llevar a cabo.

Por último, las instalaciones disponibles y los materiales a disposición del docente suponen un punto a tener en cuenta que hará más o menos factible la realización de determinadas propuestas pedagógicas.

2.5.5. El nivel de la Disciplina.

En este nivel vamos a centrarnos en las restricciones específicas que afectan a las matemáticas en el primer ciclo de la educación secundaria. Para analizar estas restricciones vamos a apoyarnos en el Real Decreto 1105/2014 (BOE-A-2015.37) en el que se establece el currículo básico para la disciplina de matemáticas.

2.5.5.1. Elementos a estudiar en el nivel de la Disciplina..

A continuación recogemos las ideas fundamentales que se recogen y que nos van a permitir detectar las restricciones a las que esta sometida esta disciplina:

- La finalidad de las matemáticas es múltiple, es instrumental, permite interpretar el mundo, tiene un componente de belleza intrínseca y desarrolla las habilidades cognitivas como la creatividad, la comunicación precisa, la argumentación y la capacidad de aprender a aprender.
- Se presentan en múltiples tareas cotidianas y en múltiples contextos por lo que es necesario adquirir el hábito de pensamiento matemático para establecer hipótesis y contrastarlas, elaborar estrategias de resolución de problemas y tomar decisiones.
- Las matemáticas deben contribuir al pensamiento lógico-deductivo, al pensamiento algorítmico, a la capacidad de observación e interpretación de fenómenos, a la creatividad y al pensamiento geométrico-espacial.
- Debe contribuir al desarrollo de las competencias clave, y en especial al desarrollo de la competencia matemática. Por eso debe trabajarse especialmente la capacidad de pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar símbolos matemáticos y comunicarse con las Matemáticas.
- Los contenidos de la asignatura de Matemáticas están al servicio de la adquisición de la competencia matemática y son el instrumento para desarrollar el pensamiento y comprender, modelizar y transformar los fenómenos de la realidad.
- La resolución de problemas y los proyectos de investigación son los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se debe

partir de hechos concretos hasta lograr alcanzar otros más abstractos.

- Las situaciones problemáticas interdisciplinares y reales son esenciales para desarrollar el pensamiento lógico y creativo y para llevar a cabo investigaciones que desarrollen la habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas.
- Los nuevos conocimientos deben adquirirse apoyándose en los conocimientos previos y en contextos cercanos para que se aproxime al conocimiento de forma intuitiva. Se debe ampliar progresivamente la aplicación a problemas relacionados con fenómenos naturales y sociales y a otros contextos menos cercanos a su realidad inmediata.
- El currículo básico de Matemáticas no es un conjunto de bloques independientes, se debe desarrollar de forma global, pensando en las conexiones internas de la materia.
- El eje fundamental de la asignatura es el bloque “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”. Los procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático como la resolución de problemas, los proyectos de investigación matemática, la matematización y la modelización junto al desarrollo de la actitud adecuada hacia el trabajo científico y la utilización de la tecnología se deben desarrollar de forma simultanea al resto de bloques de contenido.

2.5.5.2. Restricciones que emanan del nivel de la Disciplina.

Vemos en este nivel cómo se continua vertebrando el enfoque ya estudiado en los niveles de la Civilización y la Sociedad. Las Matemáticas se plantean desde la realidad inmediata y partiendo de los conocimientos previos para que los alumnos puedan construir su conocimiento a partir de ahí. Además, se insiste en la necesidad de trabajar a partir de problemas, proyectos e investigaciones para modelizar y matematizar la realidad. Vemos también como los contenidos pasan de ser un fin en sí mismos para convertirse en los instrumentos para el desarrollo de las competencias. El abandono de los posicionamientos euclidianistas es claro, y se apuesta por planteamientos constructivistas y logicistas.

La descripción e ideas planteadas en este nivel supone una fuerte restricción sobre qué son las Matemáticas y sobre cómo deben estudiarse. Las propuestas tradicionales basadas en el rol del profesor y en la adquisición de algoritmos cerrados de cálculo están claramente amenazadas por las restricciones que emanan de este nivel.

2.5.6. Los niveles del área, sector, tema y cuestión.

En los siguientes niveles, área, sector, tema y cuestión, se establece una organización descendente que permite ir concretando las distintas praxeologías hasta las cuestiones a estudiar. Sin una organización de este tipo las cuestiones aparecen aisladas y corren el peligro de no responder a las necesidades de la sociedad a la que pertenece la institución donde se estudian, como vemos en la siguiente cita:

> La jerarquía indicada es la que se observa habitualmente: una cuestión (digamos, de matemáticas) se refiere normalmente a un tema que, a su vez, pertenece a un sector que se incluye en un área, etc. Por ejemplo, la cuestión "¿Cuáles son las simetrías de un rectángulo no cuadrado?" se considera hoy en día, en la mayoría de los sitemas escolares en los que se estudia esta cuestión, como perteneciendo al tema de las "Simetrías de polígonos", que se incluye en el sector de las "Transformaciones del plano", que se incluye dentro del área de la Geometría, que pertenece a la disciplina Matemáticas.
>
> Puede ser que la jerarquía observada sea más o menos compleja. Pero lo que importa subrayar es que, si no se construye esta jerarquía, entonces la probabilidad de que se estudie esta cuestión en la escuela y en el aula es casi nula- lo que puede llegar a ser un problema serio de instrucción pública, como sucede por ejemplo con cuestiones como "¿Puede el hachís crear dependencia fácilmente?", "¿El uso del preservativo protege bien del SIDA y de embarazos no deseados?", etc. (Chevallard, 2001b, p. 3).

En la legislación ya mencionada que desarrolla el currículo básico de Matemáticas aparece un cuadro sobre el bloque de Geometría que establece los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables. Partiendo de esa información vamos a ir analizando los distintos niveles de este apartado.

2.5.6.1. El nivel de Área.

El área en el que trabajamos dentro de esta investigación es el área de Geometría. Esta área constituye uno de los 5 bloques que se desarrollan dentro de la asignatura de Matemáticas y ya ha sido trabajada durante la etapa educativa anterior y se seguirá trabajando en la etapa posterior. Constituye, por tanto, uno de los ejes vertebradores de la asignatura en todos los niveles educativos.

Entre las distintas restricciones que aparecen sobre esta área y su forma de tratarla encontramos las siguientes:

- Contenidos vertebradores para este bloque son el planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos geométricos, la práctica de procesos de matematización y modelización en contextos reales y la utilización de medios tecnológicos para facilitar la comprensión de propiedades geométricas.
- Como criterios de evaluación vertebradores para este bloque se señalan, describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos geométricos, desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana geométrica evaluando la eficacia y las limitaciones de los modelos utilizados y construidos.

Como puede verse, las restricciones en este nivel dan continuidad a las ya mencionadas y se enfatizan los contextos reales, las investigaciones y la búsqueda de patrones. Es interesante señalar la presencia de las TIC y la importancia no solo de matematizar y modelizar sino de evaluar y ser capaz de ver las limitaciones de los modelos.

2.5.6.2. El nivel del Sector.

Dentro de la Geometría, el sector que se desarrolla en este trabajo es el relativo a la Geometría plana euclídea. Es interesante que en este nivel se están considerando tanto los aspectos análiticos de la Geometría plana como los aspectos sintéticos.

Encontramos aquí que una restricción a tener en cuenta es que deben trabajarse tantos los elementos básicos de la Geometría como las construcciones geométricas sencillas a las que dan lugar.

2.5.6.3. El nivel del Tema.

Dentro de la Geometría plana euclídea que se trabaja en este nivel podemos encontrar 5 temas fundamentales:

1. Relaciones y propiedades de las figuras en el plano, figuras elementales y clasificación de triángulos y cuadriláteros.
2. Ángulos, relaciones, medida y cálculo en figuras planas,
3. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.
4. El Teorema de Pitágoras y la semejanza de figuras.
5. Construcciones geométricas sencillas.

Como puede verse, una restricción en este nivel es la ausencia de los procesos de medición de longitudes y áreas o la ausencia de trabajar los procesos de descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras. Además de esto se observa una visión limitada de la Geometría sintética ya que en los temas fundamentales no se incluyen estos contenidos y solo se hace una referencia al trazo de la mediatriz y la bisectriz sin entrar a enlazar estas construcciones con el resto de elementos del bloque lo que da lugar a una situación de autismo temático de estos contenidos.

2.5.6.4. El nivel de la Cuestión.

Para terminar con este análisis de los niveles de coodeterminación nos centraremos en el nivel de la cuestión, para lo cual comenzamos enumerando la lista de 10 estándares de aprendizaje evaluables que aborda la legislación (BOCM-A-2015-1, pp. 103-104):

- Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, centrales, diagonales, apotemas, simetrías,...
- Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos

y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.

- Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.
- Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.
- Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.
- Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud del arco y el área de un sector circular y las aplica para resolver problemas geométricos.
- Comprende los significados aritméticos y geométricos del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.
- Aplica el Teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contenidos reales.
- Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies de figuras semejantes.
- Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

Como puede verse en la redacción de estos estándares, se trata de integrar bajo una misma cuestión los conocimientos, las competencias y los valores. La mayor restricción en este punto es que al convertir los estándares en el objetivo a alcanzar se puede producir un sesgo hacia algunos contenidos concretos y una atomización y descontextualización de los mismos que lleve a pruebas de evaluación estandarizadas y no relacionadas con los procesos, métodos y actitudes que deberían ser el eje fundamental.

2.5.7. Restricciones transpositivas de la sociedad de la información para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría elemental en el primer ciclo de la Educación Secundaria.

A lo largo de este apartado hemos ido describiendo los distintos grupos de restricciones que afectan a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Geometría elemental en los primeros años de la Educación Secundaria. Se podría decir que a la hora de plantear nuestra respuesta a estas restricciones debemos tener en cuenta tres grandes grupos de restricciones que procedemos a señalar a continuación:

Grupo 1. Restricciones de los niveles Civilización y Sociedad.

La educación es el factor clave para enfrentarse a los cambios sociales y económicos y es un derecho que se extiende a lo largo de toda la vida. La necesidad de tener ciudadanos críticos que se adapten al cambio y que sepan aprender por sí mismos y en colaboración con los demás hace que la educación basada en contenidos deba evolucionar hacia una educación basada en competencias.

Para llevar a cabo este nuevo enfoque educativo es necesario que sea el alumno el que, desde la participación activa contextualizada, construya su propio aprendizaje de forma cooperativa. Las metodologías activas basadas en situaciones reales y en la aplicabilidad de los contenidos son las más adecuadas dentro de este enfoque.

El papel del profesor debe ser el de guía y el de creador de situaciones de aprendizaje diversas en recursos, metodologías y sistemas de evaluación.

Grupo 2. Restricciones de los niveles Escuela y Pedagogía.

Todos los procesos de enseñanza-aprendizaje se desarrollan dentro de un contexto social y económico específico que debe ser tenido en cuenta a la hora de construir una respuesta educativa. Del mismo modo, las características de la institución en cuanto a titularidad, tamaño, ideario, oferta, instalaciones y recursos disponibles es un elemento clave de cara a estudiar la viabilidad de cualquier propuesta.

Aparte de estas condiciones locales y externas propias de cada institución, los procesos educativos se realizan entre grupos humanos y en un espacio y tiempo determinado que hay que considerar. La formación del profesorado y sus creencias, las características de los alumnos, su motivación y forma de aprender, sus conocimientos previos y su relación emocional con la asignatura son elementos centrales en cualquier propuesta.

Grupo 3. Restricciones de los niveles Disciplina, Área, Sección, Tema y Cuestión.

Por último, la disciplina de Matemáticas, y en particular la Geometría plana del primer ciclo de Secundaria, marca una nueva serie de restricciones especificas entre las que destacan la necesidad de partir del entorno cercano e inmediato de los alumnos para ir evolucionando a partir de ahí hacia contextos más generales y abstractos y la necesidad de trabajar a partir de problemas e investigaciones para aprender a modelizar y matematizar la realidad. En este proceso es muy importante incorporar las TIC.

Respecto a la Geometría plana tratada, esta no contempla los procesos de medida ni de desomposición, traslación, giro, simetría y recomposición y tampoco da la suficiente importancia a la Geometría sintética. A pesar de las recomendaciones generales de trabajo contextualizado, se siguen manteniendo como centrales los procesos descontextualizados y centrados en el microespacio de clasificación de figuras y cálculo de dimensiones desconocidas, perímetros y áreas en figuras ya representadas. El trabajo en base a figuras regulares y estandarizadas y el tratamiento de las medidas angulares y de la circunferencia y el círculo sin un contexto bien definido en los estándares hace que se aprecie una falta de concreción del modelo competencial en los últimos niveles de codeterminación que puede servir de justificación para mantener una enseñanza monumentalista en las aulas, lo que sin duda es una restricción notable a tener en cuenta.

2.6. Diseño teórico del REI que emana del problema de investigación.

A lo largo de esta investigación hemos ido utilizando las diversas herramientas que propone la TAD para establecer nuestra visión epistemológica de la Geometría Elemental, la evolución histórica de la transposición didáctica que se ha hecho de la Geometría Elemental y el conjunto de restricciones en los diferentes niveles de codeterminación que condicionan el conjunto de respuestas posibles para la enseñanza de la Geometría Elemental. El desarrollo teórico expuesto nos permite en este apartado definir una respuesta que aborde nuestro problema de investigación y que formulamos con la siguiente tarea:

- Diseñar un REI que permita detectar fenómenos didácticos presentes en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría elemental y que pueda sobrevivir en la ecología existente analizada, superando las restricciones transpositivas de las épocas anteriores y presentes.

Plantear una propuesta de trabajo que sirva de respuesta posible a las restricciones transpostitivas de la sociedad actual para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría elemental dentro de las instituciones de Educación Secundaria es el objetivo de este apartado. Para la elaboración de nuestra respuesta vamos a utilizar tres herramientas definidas por la TAD y que van a ser especialmente relevantes en este punto: La transposición didáctica, la modelización y los Recorridos de Estudio e Investigación.

Como ya hemos visto desde la TAD se han introducido herramientas de análisis que permiten abordar el estudio de la problemática didáctica desde un punto de vista global. En este apartado utilizaremos la herramienta de la transposición didáctica para definir el saber a enseñar que emana de nuestro MER.

En segundo lugar abordaremos las características que tiene la modelización dentro de la TAD. El concepto de modelización ha sido ampliamente utilizado Sin embargo, dentro de la TAD tiene un significado propio ya explicado anteriormente y que será el utilizado aquí.

No obstante, la TAD no solo aporta un medio de análisis del problema sino que se preocupa también de estudiar la forma en la que se debe realizar la enseñanza. Desde principios del siglo XXI autores como Chevallard (2004) vienen denunciando la pedagogía basada en el inventariado de saberes. Según este autor los alumnos van progresando a lo largo de los años, estudiando un conjunto de obras muertas, carentes de sentido para el alumno y de las que no se ofrece una justificación de por qué han de ser estudiadas. Los alumnos estudian Matemáticas como visitantes de un museo. Pueden observar y visitar los saberes que estudian pero deben hacerlo desde la distancia hacia un objeto ajeno que se presenta como cerrado y totalmente construido. Se espera del alumno, que estudie y reconozca el objeto, y que lo admire y disfrute, aunque desconozca para que puede servir. Es decir, se estudian las obras matemáticas no por su utilidad o función sino por ellas mismas. De este modo la obra matemática no es cuestionable y se considera transparente para la didáctica, que no se cuestiona el saber a estudiar. Este fenómeno ya ha sido descrito anteriormente y puede resumirse en la expresión "monumentalización de saberes", descrita por Chevallard (2004).

Como alternativa a esta visión monumentalista del saber, la TAD propone una pedagogía basada en el cuestionamiento del mundo que podríamos denominar pedagogía de investigación (Chevallard 2007), y que se ha materializado en los últimos años en la metodología denominada Recorridos de Estudio e Investigación.

En este apartado utilizaremos los REI para construir nuestra respuesta a las restricciones transpositivas para la enseñanza de la Geometría elemental en los primeros cursos de educación secundaria.

2.6.1. Recorrido de Estudio e Investigación propuesto para le enseñanza-aprendizaje de la Geometría Elemental en el primer ciclo de la Educación Secundaria.

Siguiendo los planteamientos anteriores, a lo largo de las diferentes etapas escolares el alumno debería realizar un proceso similar de reencuentro con las distintas obras matemáticas geométricas que le permitiese avanzar en su capacidad de razonamiento. Para avanzar en esa trayectoria, la legislación educativa establece en los distintos niveles de codeterminación un ordenamiento por cursos, bloques y temas que deberían conducir al desarrollo del conocimiento Geométrico.

Para la construcción de este REI se ha intentado dejar de lado esta organización escolar, que entendemos como una restricción transpositiva y no como algo intrínseco al estudio geométrico. Esta visión transpositiva de la legislación nos permite independizarnos de un aspecto muy limitante para la investigación y plantear una respuesta a las restricciones detectadas en el análisis realizado en el marco teórico.

Para la elaboración de nuestra propuesta tendremos en cuenta el MER desarrollado en el marco teórico y las restricciones transpositivas detectadas. Como se verá a continuación este REI plantea un camino propio para estudiar y responder a las restricciones transpositivas existentes.

El saber geométrico sabio, tal y como se ha visto, se ha desarrollado en niveles sucesivos de abstracción a lo largo del tiempo. Postulamos en este trabajo que cada nivel ha sido clave en el desarrollo de los niveles posteriores y surge a partir de las limitaciones del conocimiento anterior. Este desarrollo histórico del saber sabio es similar al que pueden realizar los alumnos a lo largo de su trayectoria educativa y nos permite visualizar el aprendizaje histórico como una modelización de abstracción progresiva común.

Los alumnos van a construir su visión espacial geométrica a partir del espacio en el que viven. A medida que los estudiantes van interactuando con el espacio generan una modelización de una parte de ese espacio. Esa modelización parcial del espacio es la que permite dar los primeros pasos en el estudio de la Geometría. El proceso de estudio pone a prueba la modelización construida y lleva a nuevos procesos de modelización. A lo largo del siguiente REI plantearemos la Geometría como un proceso continuo de modelización progresiva y continua que nace en el espacio y en la percepción y que se desarrolla en la geometría y en la representación.

La modelización geométrica que se plantea es, por tanto, coherente con los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele. Debido a la edad en la que pretendemos actuar los alumnos, de forma mayoritaria, partirán del Nivel 2 de razonamiento y se enfrentarán a la tarea de adquirir el Nivel 3. Sin embargo, las fases de aprendizaje propuestas en el modelo son demasiado rígidas y dan un papel muy determinante al profesor que no lo hacen adecuado para trabajar mediante los Recorridos de Estudio e Investigación que emanan de este trabajo.

Por último, los distintos niveles del espacio a estudiar, como se ha visto en el MER, aportan una serie de restricciones importantes sobre el conjunto de técnicas y tareas que saben realizar los alumnos. Las limitaciones que emanan de la aplicación de unas técnicas que provienen del micro-espacio al meso-espacio y al macro-espacio y viceversa provoca en el alumno la necesidad de generar nuevos procesos de modelización para adaptarse a las diferentes demandas.

2.6.1.1. Descripción del REI mediante una arborescencia de preguntas y respuestas.

Una vez considerado el proceso de transposición didáctica que debe tenerse en cuenta para concretar nuestro MER y aclarado el concepto de modelización que vamos a tener en cuenta a la hora de concretar nuestro REI, vamos a proceder a realizar una propuesta del mismo mediante una sucesión de preguntas y respuestas esperables a priori. Antes de avanzar en este punto tenemos que destacar que en la construcción de este REI se producen algunas situaciones de desbordamiento del MER propuesto y que nos dan una idea de la potencia de esta herramienta planteada por la TAD para superar las restricciones de área, sección, tema y cuestión. Para aclarar esta idea ofrecemos la siguiente figura:

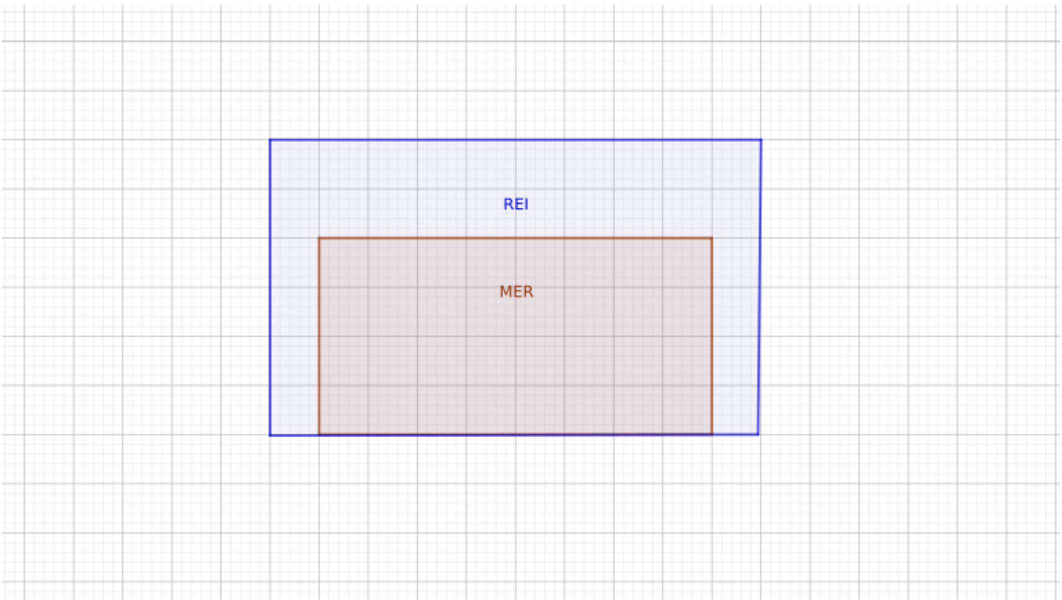


Fig. 46. Relación entre el REI y el MER propuestos. Elaboración propia.

La pregunta que da origen al proceso es la siguiente:

$Q_{0:}$ ¿Cómo se puede dividir el espacio que ocupa una parcela en partes iguales?

Con esta cuestión generatriz partiremos del espacio y realizaremos una concreción geométrica que nos permita dar respuesta a esta pregunta. De este modo podemos pensar el espacio tal y como plantea Boule (2005).

La cuestión generatriz se plantea en el ámbito del macro-espacio por lo que en primer lugar hay que plantearse cómo se puede trabajar con un espacio que supera el ámbito al que están más habituados, el micro-espacio. Surge por tanto una primera modelización basada en la exploración y observación del macro-espacio que vamos a definir de la siguiente manera:

M_{0}: Problemas que requieren observar y explorar geométricamente el macro-espacio que nos rodea.

La relación con el macro-espacio supera los conocimientos de la Educación Primaria. En el primer curso de Secundaria se trabaja la medida de una forma teórica (en los libros de texto de este nivel consultados se suele tratar antes el tema de sistema métrico decimal que los temas de Geometría). En otras asignaturas y cursos han realizado medidas en el micro-espacio. Sin embargo, cómo medir en el macro-espacio requiere una aproximación nueva.

Estadio 1

La exploración y la observación cualitativa del entorno alcanza rápidamente sus límites. Para poder enfrentar el problema se debe establecer algún sistema que permita realizar una medida no subjetiva. Las cuestiones derivadas que pueden dar lugar a este proceso de modelización van a tener que ver con el propio sentido etimológico del término Geometría, es decir, medir la tierra.

Surge por tanto la primera cuestión derivada de la generatriz.

Q_1: ¿Cómo se puede realizar una medición de longitud no subjetiva de una región en el macro-espacio?

El problema de medir una zona real en el meso-espacio o en el macro-espacio supone un desafío que no se puede responder con los conocimientos sobre cómo medir en el micro-espacio. Este conflicto entre el micro y el macro-espacio para afrontar la tarea planteada es el origen de una cadena de cuestiones y respuestas que va a llevar a construir el modelo matemático de la medida real en el macro-espacio.

R_1: Medida en el macro-espacio a partir de unidades antropométricas.

El uso de las medidas basadas en el propio sujeto se remonta a los primeros intentos de medir realizados por el hombre. Esta respuesta presenta el problema de la relatividad entre sujetos y de la relatividad del propio sujeto al realizar la medida. Aunque su uso es claramente insuficiente para resolver el problema, forma parte de la propia experiencia de aprendizaje que hemos ido teniendo respecto al espacio a lo largo de nuestra vida. Cuando el individuo se compara con el macro-espacio toma consciencia de su existencia y empieza a establecer mentalmente el nuevo concepto. La división entre micro-espacio, meso-espacio y macro-espacio se construye desde la experiencia directa.

R_2: Utilización de instrumentos de medición del micro-espacio (regla, escuadra, compás,…) para medir en el macro-espacio.

La necesidad de disponer de una unidad de medida constante e independiente del sujeto lleva a la utilización de herramientas que han demostrado ser útiles en el micro-espacio. El uso de reglas y escuadras de pequeño tamaño representa una solución al problema de la relatividad entre medidas. Sin embargo, cuando el espacio a estudiar es muy grande o se carece de líneas rectas que permitan tener referencias, la simple superposición de reglas no es capaz de solventar la problemática planteada.

Esta exploración inicial coincide con el planteamiento de nuestro MER donde como paso previo a la resolución de nuestra cuestión inicial se deben definir los instrumentos de medida válidos. Delimitar el problema de la medida y detectar aquellas herramientas que serán válidas va a permitir construir la primera modelización. Abordamos por tanto la construcción de la EG 1 descrita en nuestro MER.

Estadio 2

En el proceso de construcción del modelo matemático surge en seguida la necesidad de establecer una unidad de medida común e invariante con el tiempo. Esta unidad debe llevar aparejada uno o varios instrumentos de medida que permitan la medición. Surgen por tanto dos nuevas preguntas derivadas de la anterior.

Q_2: ¿Qué unidad de medida es la más adecuada para medir longitudes en el macro-espacio?

Q_3: ¿Qué instrumentos de medición son los que nos permiten medir longitudes en el macro-espacio?

Para responder a estas preguntas se deben revisar los EM matemáticos relativos a la medición de longitudes (EG1). Además de la medición de longitudes surge en este punto una situación de desborde del MER construido al tener que utilizar el alumno los conocimientos previos sobre unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI en lo sucesivo) y la conversión de unidades dentro del mismo. El hecho de que estas preguntas surjan como parte de un problema real aporta significatividad a los conceptos y es coherente con el planteamiento de los sistemas de referencia utilizados para construir nuestro MER y con el planteamiento de cuestionamiento del mundo propuesto por la TAD y seguido en este trabajo.

R_3: Utilización del Sistema Internacional de Unidades.

El SI se basa en un sistema posicional decimal y es ampliamente trabajado en la Educación Primaria. La utilización de las distintas unidades de medida para enfrentarse al macro-espacio permite que se vinculen las diferentes unidades de medida internacionales con los distintos valores de la variable "tamaño del espacio". Milímetros, centímetros y decímetros adquieren sentido como unidades para medir el micro-espacio. El decímetro, metro y decámetro tienen utilidad e importancia en el meso-espacio. El decámetro, el hectómetro y el kilómetro adquieren valor en el macro-espacio.

Los cambios de unidades surgen de forma natural al ser necesarios para ir adaptándose a los distintos tamaños.

Para responder a Q_3 se dan algunas dificultades ante la ausencia de técnicas asociadas al uso de herramientas en el macro-espacio. La utilización de herramientas flexibles como cintas métricas o cuerdas junto a la utilización de elementos presentes en la construcción pueden servir como respuesta a la pregunta planteada. Este tipo de herramientas suponen una concreción de las herramientas planteadas en el EG1 para el macro-espacio.

Las herramientas concretas para el trazado de rectas y circunferencias que se plantean teóricamente en el EG5 se reinterpretan aquí para ser útiles en el macro-espacio.

Con las unidades de medida escogidas y las herramientas de medida seleccionadas, los sujetos pueden proceder a medir longitudes de una superficie real. Durante la medición aparece una nueva dificultad: la medida de los cambios de dirección en el contorno. A partir de aquí surge una nueva pregunta derivada:

Q_4: ¿Cómo se pueden medir los cambios de dirección en el macro-espacio?

Aparece aquí el EG3 relativo a medición de ángulos cuya medida permitirá cuantificar el cambio de dirección que se produce entre dos líneas rectas. El concepto de ángulo y su medición sigue un proceso de revisión similar al de longitud, las técnicas aprendidas en cursos pasados para el micro-espacio no son aplicables directamente en el macro-espacio. Los sujetos deberán revisar las posibles unidades de medida disponibles y algunas de las herramientas con las que se puede trabajar para medir ángulos en el macro-espacio. Este proceso lleva asociado las siguientes respuestas:

R_4: Medida de los ángulos a partir del cuerpo

Los primeros intentos para medir un ángulo se realizan a partir de nuestro propio cuerpo. El ángulo es aquí el espacio comprendido entre los dos brazos extendidos. Este técnica es muy poco precisa y salvo en situaciones de perpendicularidad, donde esta puede detectarse a simple vista, es claramente insuficiente.

R_5: Medida de ángulos a partir de instrumentos del micro-espacio (compás y transportador de ángulos)

Al igual que ocurría con la longitud, a la hora de medir ángulos en grandes espacios se puede recurrir a los instrumentos ya conocidos del micro-espacio. Los instrumentos aportan precisión y la posibilidad de medir ángulos diferentes al recto. Sin embargo, son muy poco frecuentes los lugares del macro-espacio donde se pueda superponer un transportador de ángulos o donde se pueda utilizar un compás. Las técnicas basadas en estos instrumentos son insuficientes para afrontar la problemática asociada.

Para responder a este punto, al igual que en el proceso anterior, es necesario formular dos nuevas preguntas.

Q_5: ¿Qué unidad de medida es la más adecuada para medir ángulos en el macro-espacio?

Q_6: ¿Qué instrumentos de medición son los que nos permiten medir ángulos en el macro-espacio?

Las unidades de medida de ángulos presentan graves dificultades. Por un lado, utilizan un sistema sexagesimal y, por otro, es complicado haber tenido alguna experiencia directa de utilización de estas unidades en la vida real. Para enfrentarse a Q_5 es necesario producir una respuesta nueva que permita realizar el cambio de unidades angulares.

R_6: Cambio de unidades en medidas angulares

Para trabajar esta respuesta es importante comprender el sistema sexagesimal en el que se basan las medidas angulares. Para realizar esta conversión no decimal se deben realizar tareas de suma y resta de ángulos. Se produce de nuevo aquí una situación de desborde del MER al tener que contemplar las operaciones básicas en el sistema sexagesimal. Por razones prácticas, los alumnos del primer ciclo pueden aceptar como suficiente la unidad mínima de un grado. Esta simplificación es acorde al nivel de precisión que se puede conseguir con las herramientas disponibles y simplifica muchos de los problemas derivados de la operativa aritmética en un sistema sexagesimal.

Para responder a Q_6 se deben encontrar nuevas herramientas de medida como el goniómetro. Este instrumento está compuesto por una regla y un transportador de ángulos, que se cortan en un punto A. Para aclarar esta herramienta ofrecemos la siguiente figura:

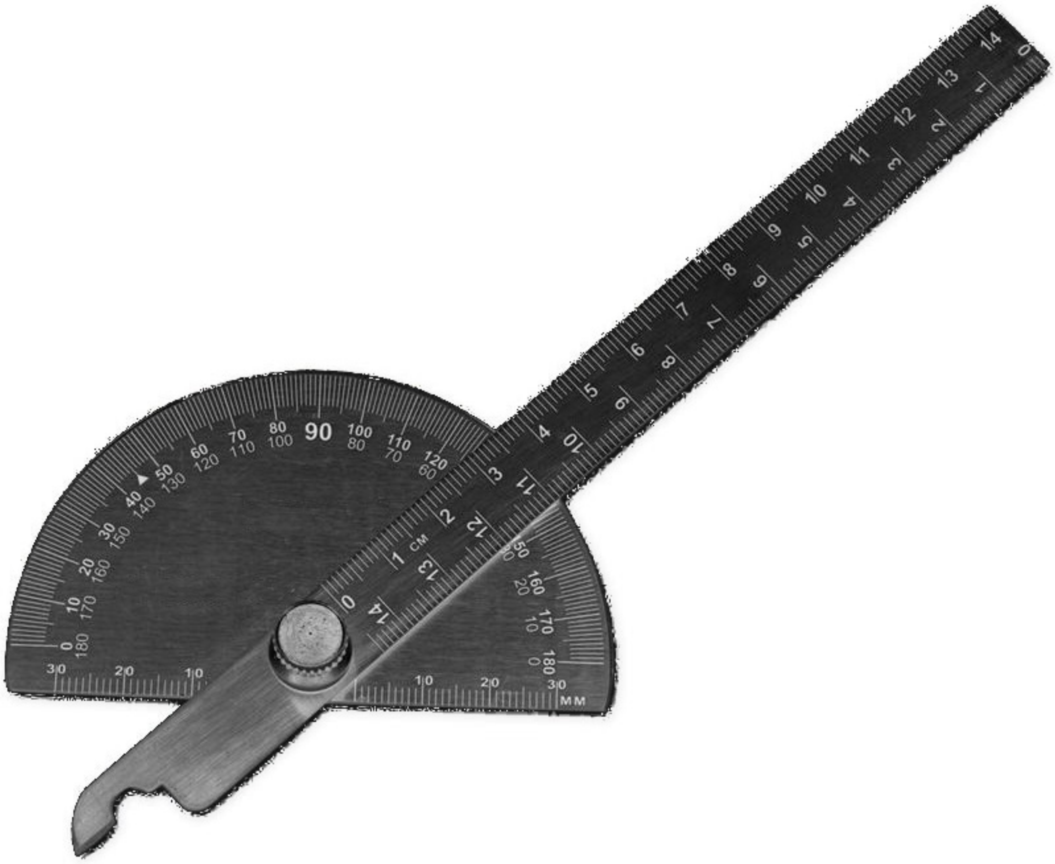


Figura 47. Medición mediante portaángulos. Elaboración propia.

Sin embargo, las dificultades del terreno y la falta de experiencia en el manejo de estos instrumentos pueden limitar el uso y pueden, por tanto, no ser capaces de generar una respuesta suficiente.

Estadio 3

Los temas de medida y los conceptos de longitud y ángulo que deben estudiar los sujetos adquieren un sentido real. En este punto se pueden estudiar todas las técnicas y tareas matemáticas referidas a la medida de longitud y de ángulos y estudiar los posibles cambios de unidades.

Sin embargo, las medidas realizadas en el macro-espacio están sujetas a un gran margen de error consecuencia directa de la debilidad de los instrumentos empleados y de la falta de habilidad para realizar las mediciones por parte de los sujetos. Durante la comparación de las medidas obtenidas surgen dos nuevas cuestiones a estudiar.

Q_7: ¿Cómo se puede cuantificar el error cometido en una medida?

Q_8: ¿Cómo se puede realizar una estimación de las dimensiones reales a partir de una serie de medidas?

El error y la medida de la dispersión no son temas directamente relacionados con la Geometría, pero su aparición en este momento del REI nos permite ver que este planteamiento supera las restricciones impuestas por la compartimentación de los contenidos en temas y que puede ayudar a superar el autismo temático y la monumentalización de saberes. Para responder a Q_7 y Q_8 aparecen las siguientes respuestas.

R_7: Técnicas relativas a la cuantificación del error.

Para cuantificar los errores hay que estudiar los límites de medida que presentan los instrumentos de medida que estamos usando y validar la calidad del proceso de medición. La unidad mínima de medida que tienen los instrumentos permite saber el error mínimo que vamos a cometer. Sin embargo la evaluación de la calidad del proceso no puede hacerse mediante una técnica concreta. Establecer protocolos a la hora de medir y realizar varias mediciones de cada longitud son procedimientos difícilmente aplicables en la Educación Secundaria y que en el caso de darse nos llevarían a Q_8.

R_8: Técnicas relativas al estudio estadístico de una serie de datos.

Para poder estimar la dimensión real de una medida a partir de una serie de datos los alumnos van a tener que realizar alguna tarea de tratamiento estadístico. Las tareas más inmediatas van a ser las relativas a las medidas de la centralización. Los conceptos de moda, mediana y media van a permitir dar respuesta a Q_8. En cuanto a la dispersión, es poco probable que se estudie de forma matemática pero sí puede realizarse una primera aproximación mediante el descarte de algunas medidas que queden muy alejadas de la media estadística.

Estadio 4

La dificultad de enfrentarse a la tarea de medir en el macro-espacio debe conducir a los estudiantes al cuestionamiento de la modelización realizada. La debilidad principal es la que se deriva de los instrumentos de medida y de la falta de un sistema de coordenadas en el macro-espacio para realizar los cálculos. La representación de la realidad en el micro-espacio aparece ahora como una solución posible. Superado el obstáculo de representar fielmente la realidad en un mapa los alumnos pueden hacer uso de las herramientas disponibles en el micro-espacio para realizar las siguientes mediciones de forma más precisa. Para dar respuesta a estas preguntas los alumnos deben realizar una nueva modelización que supere la medida y sus relaciones y que dé paso a nuevos conceptos matemáticos.

Una nueva cuestión emerge del problema y da pie a una nueva modelización que se apoya en una praxeología diferente. La nueva modelización puede definirse como:

M_1: Problemas relativos a la representación fiable en el micro-espacio de las longitudes y relaciones angulares del meso y el macro-espacio.

La representación de la realidad es una constante en el ser humano desde sus orígenes. Detrás de esta nueva modelización se esconden los conceptos matemáticos de igualdad escalado y semejanza. Para realizar una representación semejante (como en el MER) al objeto representado es importante explorar las condiciones que deben mantenerse. Los conceptos emergen de la necesidad de encontrar una forma eficaz de plasmar el espacio real del macro-espacio en un objeto manejable en el micro-espacio.

Es importante destacar que el uso de las TIC que proporciona la sociedad de la información brinda oportunidades de medición nuevas. Aplicaciones como Google Maps® o el catastro digital permiten obtener imágenes aéreas de los espacios que pretendemos medir. De esta forma, la llegada a esta nueva modelización podría hacerse no solo como respuesta a las limitaciones del modelo anterior sino directamente desde la exploración de las diferentes respuestas predefinidas existentes en la red. Vemos en este punto las posibilidades de ampliación del medio disponible y la posibilidad de que este medio se enriquezca por parte de todos los implicados en el estudio.

Desde un punto de vista didáctico, entendemos que la aproximación a partir de la medición es la base para desarrollar la necesidad de representación a escala como reflejamos en el MER. Por ello, independientemente de las posibilidades de las TIC en este asunto, asumiremos que para favorecer el proceso de modelización geométrica es necesario trabajar en la construcción de un modelo sobre la medida del macro-espacio previamente.

Estadio 1

Cuando nos enfrentamos a la realización de una representación en el micro-espacio de un espacio del meso-espacio o del macro-espacio inevitablemente surgen nuevas preguntas relacionadas con la igualdad y semejanza de las figuras. Las condiciones sobre cómo debe ser esa representación para que sea fiel a la realidad representada llevan al planteamiento de las siguientes cuestiones:

Q_9: ¿Cómo reducir un objeto para representarlo sin alterar su forma?

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Q_{11}: ¿Cómo se puede realizar una representación precisa de las diferentes formas geométricas del macro-espacio?

Estadio 2

La modelización de la igualdad y de la semejanza supone para los estudiantes la incorporación de nuevos elementos matemáticos no presentes en la modelización de la medida del macro-espacio. El modelo matemático que aparece aquí incorpora tres grupos de técnicas nuevas:

- Las relaciones de semejanza entre figuras basadas en el Teorema de Tales. (EG8)
- La proporcionalidad. (EG4)
- El trazado y la construcción de figuras geométricas. (EG5 y EG6)

Para dar respuesta a Q_9 los estudiantes deben estudiar cuáles son las técnicas basadas en la proporcionalidad que permiten reducir todas las medidas de un objeto.

R_9: Técnicas relativas a la división de números y superficies

Para reducir un objeto basta con realizar una división de cada una de sus medidas de longitud por un mismo divisor. Esta respuesta emana directamente de una visión intuitiva del EG 4. Aplicando este EG obtenemos una figura similar a la original de tamaño reducido. Sin embargo, con esta técnica las figuras obtenidas no siempre guardan una relación de semejanza con la figura original. Emerge en este punto la necesidad de contemplar los ángulos.

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras

Para obtener un objeto semejante a otro, tal y como se ha definido en nuestro MER, se deben verificar que:

Dos figuras son semejantes si sus ángulos interiores son iguales y sus lados comparados en el mismo orden son proporcionales.

De estas condición surge de forma natural una aproximación al Teorema de Tales (EG8). El Teorema es aquí una conclusión lógica al trabajo que se está realizando y se aleja mucho del enfoque vacío y teórico que suele explicarse en la asignatura de Educación Plástica y Visual para dividir un segmento en partes iguales. Como se puede ver en este punto, el paradigma de cuestionamiento del mundo permite superar el autismo entre disciplinas.

Una vez comprendido cómo se puede asegurar que dos figuras son semejantes, surge la cuestión de conocer la relación de semejanza entre dos figuras ya representadas. La pregunta Q_{10} es importante en la sociedad de la información. Como ya se ha dicho, la presencia de las TIC hace que sea posible obtener representaciones aéreas de los terrenos que pretendemos estudiar. Esta posibilidad viene acompañada de la posibilidad de cambiar de escala utilizando un deslizador. Por este motivo la escala utilizada y su manejo son necesarias para poder trabajar en esta modelización.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

La escala existente entre un plano y la realidad es un factor clave para el estudio de las figuras semejantes. Si la escala no es conocida será necesario tomar una medida real y la misma medida en el plano y realizar un proceso de proporcionalidad directa que nos permita establecer qué está representando en un centímetro del plano.

Gracias a la proporcionalidad directa se puede expresar la EG4 mediante una fórmula tal y como suele aparecer en los libros de texto. El estudio de esta relación mediante las reglas de proporcionalidad permitirá establecer el concepto de razón de semejanza. La fórmula y el concepto son aquí un punto final del camino recorrido y no el punto de partida habitual en la tradicional visión monumentalista. En este punto cobra especial importancia el trabajo de los EM y EP relativos a la proporcionalidad.

Realizar una reducción de las longitudes reales no es suficiente para asegurarse una correcta representación en el micro-espacio. Para responder a Q_{10} los alumnos deberán incorporar las técnicas de Geometría sintética y de dibujo técnico que les permitirán dibujar con precisión. El trazado de paralelas y perpendiculares recogido en EG6 y de los EM y EP que de él emanan es clave para empezar a trabajar en la construcción de figuras. Del mismo modo, los EM y EP descritos en el apartado de regla y compás (EG5) del MER van a ser claves a la hora de construir los ángulos formados por dos rectas que se cortan y a la hora trazar las figuras geométricas fundamentales necesarias en este punto.

R_{12}: Respuestas basadas en el uso de la regla y el compás.

Para representar fielmente las figuras del macro-espacio es necesario la utilización de los instrumentos de dibujo. Las construcciones con regla y compás son fértiles y complejas y han sido agrupadas en nuestro MER bajo el término de técnicas y tareas del género sintético. En el tema que nos ocupa se pueden destacar las siguientes:

- Trazar desde un punto la perpendicular a una recta.
- Trazar desde un punto exterior a la recta una paralela.
- Trazar la mediatriz de un segmento.
- Trazar un ángulo concreto utilizando regla y compás.
- Dibujar polígonos regulares e irregulares conocidos sus lados y sus ángulos
- Dividir un segmento en partes iguales o proporcionales a otros dados con los instrumentos de dibujo sin medir longitudes.

Estas tareas son comunes en la asignatura de Educación Plástica y Visual. La diferencia fundamental aquí es que responden a una cuestión derivada de nuestro problema original.

De nuevo aparece aquí una superación de las restricciones derivadas de la compartimentación de saberes, de la división disciplinar del currículo.

Estadio 3

Una vez obtenido el plano que representa el espacio real de la parcela, ya sea mediante su trazado en el plano a partir de las medidas tomadas o a través de un plano obtenido por otros medios, se deben explorar las diferentes posibilidades que se derivan del trabajo con escalas. Surgen aquí nuevas cuestiones relativas a la escala:

Q_{12}: ¿Cómo se pueden representar las distintas medidas reales en el plano una vez conocida la razón de semejanza que existe entre ellas?

Q_{13}: ¿Cómo se puede comprobar que una distancia en el plano representa la medida real una vez conocida la razón de semejanza existente entre ellas?

Las respuestas a Q_{12} y Q_{13} se basan en la relación de proporcionalidad descrita en el EG 4. Su aplicación a esta cuestión permitirá realizar las conversiones de las medidas reales a la escala conveniente. En este punto se trabajarán los EM y EP que emanan de la proporcionalidad (EG4).

R_{13}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del micro-espacio al macro-espacio.

Si la escala es conocida podremos transformar las medidas reales obtenidas en nuestra medición en medidas del plano. Este proceso se basa en el concepto y la definición de la proporcionalidad directa.

Estadio 4

Con la representación del espacio real respetando las reglas de semejanza y los EM y EP de trazado de figuras geométricas surge una nueva pregunta derivada de la diferencia entre perímetro y área. Hasta ahora sólo se ha trabajado dando importancia a la longitud por lo que es esperable que se intente construir la respuesta a la pregunta generatriz a partir del perímetro.

Q_{14}: ¿La división del perímetro en partes iguales da como resultado áreas iguales?

El intento de dar respuesta a esta pregunta no puede realizarse con los conceptos modelizados de medida de longitudes, semejanza y escala. La división de la superficie, a partir del perímetro no es suficiente al obtenerse una respuesta negativa a la pregunta Q_{14}. Para dividir el espacio en partes iguales no basta con que las figuras tengan el mismo perímetro. Debemos realizar una nueva modelización que incorpore ahora el cálculo de áreas. Esta nueva modelización puede definirse como:

M_2: Problemas relativos a la división del espacio representado en partes que tengan el mismo área.

Detrás de esta nueva modelización aparecen los conceptos matemáticos de medición de una superficie (EG2). Los conceptos de semejanza ya no son suficientes, pues dos figuras no semejantes pueden tener el mismo área y, evidentemente, dos figuras semejantes no iguales tienen distinta área. Por otro lado la aplicación de la escala sufre modificaciones al actuar sobre una superficie, ya que para representar la mitad de un área no se puede dividir cada uno de los lados de la figura por la mitad.

Estadio 1

Al explorar estas cuestiones los alumnos deben comenzar de nuevo con la medición. El modelo se extiende ahora en dos dimensiones y las unidades de medida deben ampliarse. En este punto es importante explorar la nueva unidad de medida desde el punto de vista de la forma geométrica. El metro cuadrado no se obtiene multiplicando dos medidas unidimensionales de 1 metro. El metro cuadrado es una unidad de medida bidimensional con la forma de un cuadrado de 1 metro de lado. Partiendo de la definición de una nueva unidad de medida de forma cuadrada los alumnos pueden ir redescubriendo lo que es y no es importante a la hora de calcular áreas. En este punto emergen nuevas cuestiones:

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Estadio 2

Para responder a estas cuestiones es necesario utilizar algunas tecnologías y técnicas ya utilizadas y construir una tecnología nueva de la que emanarán nuevas técnicas y tareas.

R_{14}: Técnicas basadas en el conteo

La obtención del área buscada se realiza aquí a través de la división del espacio a medir en cuadrados. Para afrontar estás cuestiones los estudiantes pueden proceder dividiendo el espacio en cuadrados mediante el trazado de paralelas y perpendiculares (EG 6). Una vez obtenida esa cuadricula se procederá al conteo.

Es importante destacar aquí que la unidad de medida construida puede generar un número no entero de divisiones. Lo que a su vez puede generar nuevas cuestiones derivadas.

Q_{18}: ¿Cómo se puede establecer una unidad de medida de superficies que genere un número entero de divisiones?

Q_{19}: ¿Cómo se puede establecer una unidad de medida de superficie que genere un número entero de divisiones en dos o más figuras?

R_{15}: Respuesta basada en el común divisor

De nuevo tenemos que recurrir aquí a algunas técnicas aritméticas no contempladas en nuestro MER. Para obtener un número de divisiones entero es necesario que el cuadrado elegido tenga de lado una longitud que sea un divisor común de la base y la altura del rectángulo a medir. Sin embargo, es fácil suponer que esta técnica tiene una limitación en cuanto al límite físico de la cuadricula que se puede generar. Por ese motivo es interesante que se estudie el máximo común divisor.

R_{16}: Respuesta basada en la base y en la altura

Cuando se cuentan cuadrados para medir el área de un rectángulo es fácil deducir que el proceso se puede simplificar si se realiza una multiplicación de la longitud de la base por la longitud de la altura, esto permite construir el EG2. La fórmula para calcular el área de un rectángulo se obtiene a partir de la visualización de la multiplicación como producto de medidas. Las preguntas Q_{18} y Q_{19} quedan obsoletas al poder realizar multiplicaciones con números reales del tamaño que se desee. La cuestión del tamaño de la unidad de medida de superficies se supera.

Con la respuesta a Q_{15} se puede dar el salto a Q_{16}. La respuesta a esta cuestión supone un problema nuevo. Una superficie triangular no admite su división en cuadriculas enteras. Para superar esta limitación de la respuesta anterior es necesario construir nuevas técnicas. En nuestro caso, y aunque la técnica que deseamos construir es la especificada en el MER, contemplaremos en este REI otras posibilidades por su potencial para generar nuevas tecnologías y técnicas en otras áreas de las matemáticas.

R_{17}: Calcular el área por defecto

Si realizamos la menor de las cuadriculas posible determinada y contamos únicamente los cuadrados contenidos totalmente dentro del triángulo, obtenemos una medida del área triangular inferior al real.

R_{18}: Calcular el área por exceso

Si realizamos la menor de las cuadriculas posible por el instrumento y contamos todos los cuadrados contenidos parcial o totalmente dentro del triángulo, obtenemos una medida del área triangular superior al real.

De la aplicación de R_{17} y R_{18} puede surgir de nuevo la posibilidad de establecer algún procedimiento estadístico para realizar una estimación del área encerrada. Surgen de nuevo aquí las preguntas Q_7 y Q_8.

Estas respuestas pueden suponer un buen punto de partida para nuevos REI que aborden los métodos de exhaución o que aborden una primera aproximación al cálculo.

La fórmula para calcular el área de un triángulo ya ha sido presentada en cursos previos, pero dada la naturaleza de este REI intentaremos abordar la cuestión a partir del área rectangular, tal y como se hizo en el MER.

De esta forma surgen todas las técnicas basadas en la descomposición y recomposición de figuras (EG7) que se obtienen al descomponer superficies no rectángulares y realizar giros, traslaciones y simetrías para recomponer figuras equivalentes. Algunas de estas técnicas pueden generar nuevas cuestiones, como se verá a continuación.

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común y la altura correspondiente idéntica.

Si construimos un rectángulo cuya base coincida con uno de los lados del triángulo y cuya altura coincida con la altura que se puede trazar desde el lado que coincide con la base, obtenemos una superficie rectangular cuya área se puede calcular mediante R_{16}.

A partir de esta respuesta surgen dos nuevas cuestiones.

Q_{20}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Q_{21}: ¿Cuál es la relación existente entre el área del rectángulo y el área del triángulo contenido?

Para dar respuesta a Q_{20} debemos repasar las condiciones que hemos aceptado para considerar a la longitud de uno de los lados del rectángulo como base y a la longitud del otro lado como altura.

Los rectángulos pueden definirse como figuras de cuatro lados cuyos lados son iguales dos a dos y forman ángulos de 90º.

La elección de uno de los lados como base y la elección del otro lado como altura responde a la visualización del rectángulo como filas y columnas. Las propiedades de la multiplicación hacen que los lados tomados como base y como altura sean intercambiables entre sí. El concepto de altura en el caso de los rectángulos implica que esta sea vista necesariamente como un segmento perpendicular a la base que tiene uno de sus extremos en un vértice exterior a la base y el otro extremo en un punto que pertenece a la base.

Para responder a Q_{20} será necesario explicitar la definición anterior y aplicarla a los distintos tipos de triángulos existentes.

R_{20}: Trazado de la altura de un triángulo

Una vez establecida la definición de altura de nuestro MER podemos trazar la altura dibujando una perpendicular a la base que pase por el vértice opuesto.

El trazado es sencillo cuando la altura tiene uno de sus vértices sobre la base. Pero, ¿que pasa cuándo el triángulo es obtusángulo y la base elegida no es el lado mayor?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor?

Para responder a Q_{22} es necesario redefinir el concepto de altura que surge de un rectángulo. La altura es el segmento perpendicular a la base que tiene uno de sus extremos en un vértice exterior a la base y el otro extremo en la línea recta que contiene a la base. Con esta nueva definición el proceso de trazar la altura se amplia con un paso previo: dibujar la línea que contiene a la base.

Una vez establecida la forma de calcular la altura de un triángulo de cualquier tipo debemos encontrar la respuesta a Q_{21}.

Es importante tener en cuenta que aunque la fórmula para calcular el área de un triángulo es conocida, resulta fundamental que se establezca la relación existente entre el área del triángulo y del rectángulo que lo contiene tal y como se describió en el MER. Para hacer ese estudio se pueden utilizar las siguientes técnicas:

R_{21}: Respuestas manipulativas para deducir la fórmula del área de un triángulo.

Si partimos de los siguientes dibujos

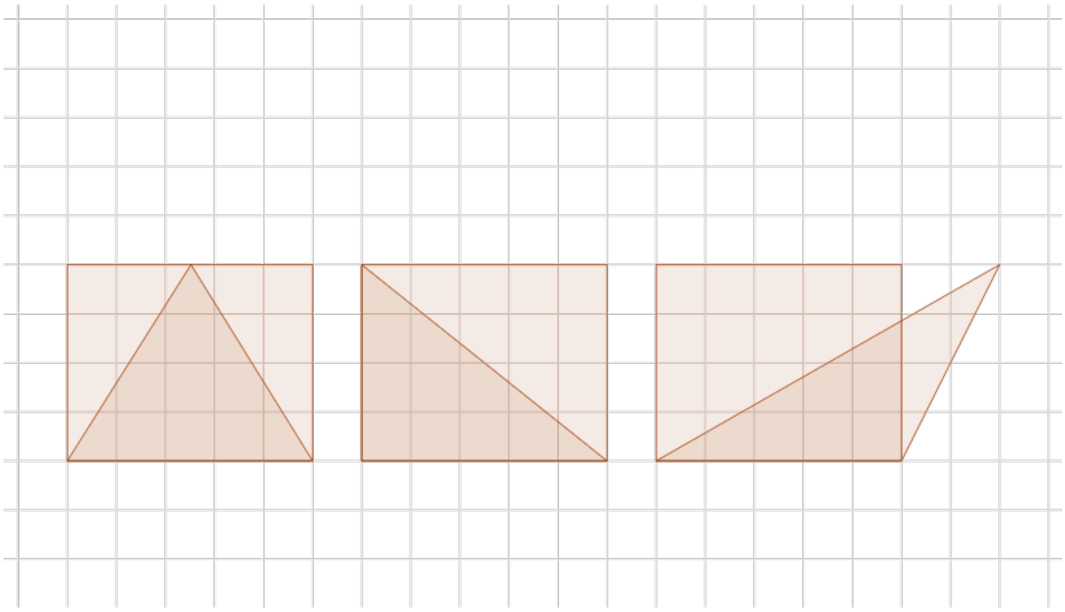


Figura 48. Triángulos y rectángulos con la misma base y altura. Elaboración propia.

En los dos primeros casos se puede demostrar mediante plegado o mediante el EG7 que la superficie del triángulo está contenida dos veces en cada uno de los rectángulos construidos. Sin embargo, en el tercer caso la cuestión no puede resolverse mediante plegado. Hace falta recurrir a la transformación del rectángulo en una figura de área equivalente lo que da lugar a un nuevo tipo de respuesta.

R_{22}: Respuesta mediante descomposición y recomposición para deducir la fórmula del área de un triángulo.

El rectángulo construido a partir del triángulo obtusángulo puede transformarse en un paralelogramo que tenga la misma superficie deslizando el vértice superior derecho hasta hacer coincidir el lado oblicúo con el del triángulo original. De esta forma se obtiene la siguiente figura:

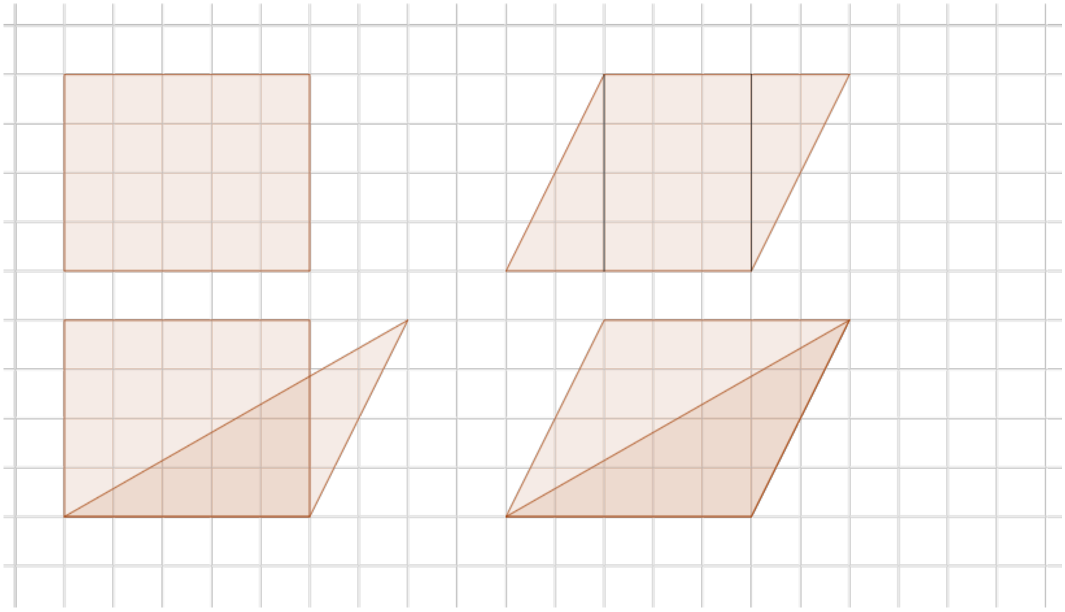


Figura 49. Transformación de un rectángulo en un paralelogramo de la misma base y altura. Elaboración propia.

Siguiendo un proceso similar al planteado en la anterior figura, mediante descomposición y recomposición se puede demostrar que la figura construida a partir del rectángulo ocupa el doble de la superficie del triángulo original.

Con estas demostraciones se puede responder a Q_{21} y determinar que el área de un triángulo es la mitad del área del rectángulo construido a partir de su base y su altura. Además, es importante señalar que el trabajo de descomposición y recomposición es clave para inducir técnicas muy importantes como las referidas a las áreas de figuras encerradas entre las mismas paralelas y que comparten base.

Es importante en este punto del REI no dar nada por supuesto y trabajar, aunque sea de forma elemental, las fórmulas conocidas de cursos anteriores. Este proceso es muy interesante para construir la nueva modelización geométrica de cálculo de áreas y para la adquisición de la EG 7 y de sus técnicas y tareas derivadas.

Para responder a Q_{17} se pueden descomponer las figuras poligonales en polígonos de 3 o 4 lados. Y obtener la superficie a partir de la suma de las superficies parciales.

Tal y como vimos en el MER, partiendo de las áreas de los rectángulos y triángulos contenidos en un polígono se pueden deducir fórmulas propias para obtener el área de cualquier figura poligonal. Estas fórmulas no aparecen aisladas y vacías, sino que aparecen dentro de un proceso de investigación sobre la realidad. Es el alumno quien las incorpora a su modelización y las redescubre.

R_{23}: Respuestas basadas en la triangulación de figuras poligonales

Para triangular una figura poligonal, tal y como se ha visto en el MER, basta con trazar las diagonales desde uno de los vértices a todos los vértices no consecutivos de esa forma se obtienen dos triángulos menos que el número de lados que pueden estudiarse de forma independiente.

R_{24}: Respuestas basadas en la división de figuras poligonales en partes rectangulares y triangulares

Un método habitual para calcular la superficie de un polígono es dividir el espacio en rectángulos, cuadrados y triángulos. En estás divisiones se prioriza cuadricular el mayor espacio posible y se limitan los espacios triangulares a los lados "oblícuos", como se aprecia en la siguiente figura.

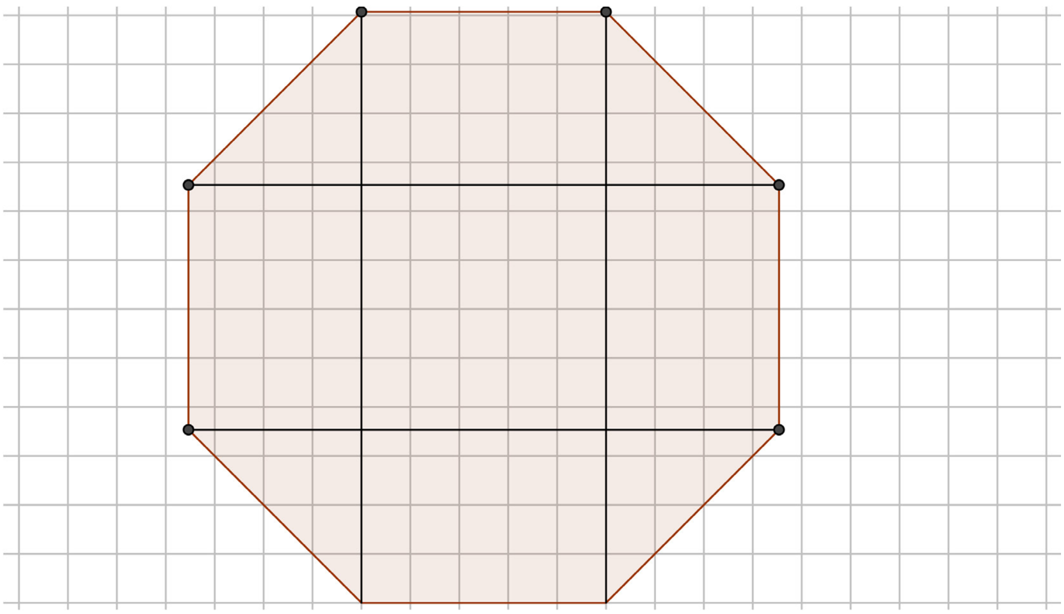


Figura 50. Descomposición de un hexágono regular en rectángulos y triángulos. Elaboración propia.

Estadio 3

Son varias las preguntas que pueden surgir a partir de la triangulación de figuras poligonales:

Q_{23}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{24}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un trapecio isósceles a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{25}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un rombo a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Con el modelo construido de unidades de superficies, cálculo de áreas rectangulares y triangulares y el proceso de descomposición por triangulación o triangulación y cuadratura, se pueden deducir las fórmulas más habituales de áreas de figuras planas tal y como se describió en el MER. Esta modelización permite dar respuesta a una parte de la cuestión generatriz. El trabajo en este estadio de la modelización permite, durante su explotación, dar respuesta a las preguntas Q_{23}, Q_{24} y Q_{25} del siguiente modo.

R_{25}: Métodos de obtención de las fórmulas de áreas de un polígono regular a partir de su centro geométrico utilizando técnicas de triangulación

Como se vio en el MER, los polígonos regulares se pueden dividir en tantos triángulos iguales entre sí como número de lados tenga el polígono trazando lineas que vayan desde el centro del polígono hasta cada uno de los vértices.

La triangulación a partir del centro limita el problema al cálculo del área de uno de los triángulos obtenidos y a su multiplicación por el número de lados.

Como ya se dijo en el MER, es necesario realizar aquí algunos pasos para justificar la fórmula habitual en los libros de texto para el área de un polígono. Esta expresión, como ya se vio, utiliza los términos de perímetro y apotema, lo que carece de sentido al incluir vocabulario que oculta el verdadero origen de la expresión. Se trata de uno de los mayores exponentes del monumentalismo con el que se explica la Geometría en la institución escolar, presentando un producto cerrado y final y ocultando el verdadero proceso de deducción y demostración de la fórmula. En nuestro planteamiento de descubrimiento del mundo, la fórmula del área de un polígono regular surge de descomponer la figura en triángulos, obtener el área de uno de ellos y multiplicar por el número de triángulos. A partir de aquí se pueden realizar sucesivas transformaciones, tal y como se indicó en el MER, que conducen a la fórmula habitual de los libros de texto.

Para responder a Q_{24} podemos apoyarnos en las respuestas R_{23} y R_{24}. De nuevo se produce aquí un problema de monumentalización en los libros de texto al presentar la fórmula bajo su aspecto final ya operado.

A partir de R_{23} podemos descomponer el trapecio isósceles. Aunque son varias las triangulaciones posibles, tal y como mostrábamos anteriormente, nos centraremos en la triangulación que se hace utilizando como punto de división el punto medio de la base mayor.

El área de este trapecio puede obtenerse a partir de la suma de las áreas de los tres triángulos. Con la siguiente expresión:

$$A=\frac{bh}{2}+\frac{Bh}{2}$$

Para poder operar esta fórmula algebráicamente hacen falta conocimientos que superan los disponibles dentro del marco de este REI. Como ya se detalló, en el MER se puede alcanzar la fórmula mostrada en los libros a partir de la triangulación. De nuevo aparecen aquí posibles superaciones del marco temático que pueden servir de cuestiones generatrices para futuros procesos de modelización algebraica.

R_{26}: Transformaciones de la figura original mediante descomposición y recomposición

Otra posibilidad para obtener el área de un trapecio isósceles es transformar el trapecio en un rectángulo con altura igual a la del trapecio original y la base igual a la siguiente expresión, $b+\frac{B}{2}-\frac{b}{2}$.

Esta posibilidad ya fue descrita en el MER y permite obtener la siguiente expresión para el área del trapecio:

$$A=\left(b+\frac{B}{2}-\frac{b}{2}\right)h$$

La obtención de la fórmula general es análoga a la anterior.

Aunque en este REI no hemos incluido las distintas demostraciones algebraicas, es importante destacar que nos parece más interesante calcular el área del trapecio a partir de su descomposición en rectángulos y triángulos que aplicar una fórmula algebraica.

La respuesta a Q_{25} es similar a la realizada para Q_{24} y ya fue descrita en nuestro MER. El trazado de las diagonales del rombo permite observar que existen 4 triángulos de base y altura iguales a la mitad de las diagonales. A partir de aquí se puede operar de nuevo de forma algebraica y obtener la fórmula habitual incluida en los libros de texto.

La pregunta Q_{25} también se puede resolver mediante descomposición y recomposición de la figura transformando el rombo en un rectángulo tal y como se hizo en el MER.

Es importante señalar que la idea de diagonal surge aquí a partir de la triangulación lo que aporta significado a la diagonal que aparece en la fórmula al vincularla con la base y con la altura de los triángulos que aparecen en la descomposición.

Estadio 4

Con la modelización progresiva realizada se puede calcular de forma aproximada el área de la parcela en el plano. En este punto, se pueden estudiar gran parte de las EM y EP previstos en el MER sobre cálculo de áreas. Sin embargo, surgen varias preguntas que exploran los límites de la modelización elaborada y que van a permitir el desarrollo de tres posibles modelizaciones nuevas.

Q_{26}: ¿Cómo se pueden trasladar las divisiones realizadas en el micro-espacio al macro-espacio?

Q_{27}: ¿Cómo se pueden medir objetos tridimensionales?

Q_{28}: ¿Cómo se puede calcular el área de figuras con líneas curvas?

Las modelizaciones que surgen a partir de aquí podrían ser:

M_3: Problemas relativos a cómo trasladar lo calculado en el micro-espacio al macro-espacio.

Con las medidas de áreas en papel surge una nueva dificultad al tratar de trasladar esas medidas a la realidad. Se debe realizar un reescalado y una ampliación de las medidas realizadas en el micro-espacio y replicar los trazos realizados en papel en el macro-espacio. Lo que lleva a una nueva remodelización del problema.

M_4: Problemas relativos a cómo medir y explorar objetos tridimensionales en el micro-espacio.

La evolución planteada a lo largo de este REI supone el ir ampliando los conceptos de medida a las diferentes dimensiones presentes en la realidad. El trabajo del volumen se puede iniciar a partir de la modelización realizada sobre áreas. Sin embargo, consideramos que en este punto es mejor terminar de responder a la cuestión generatriz planteada a través de M_3. Una vez respondida está cuestión se podría proceder a la construcción de un objeto tridimensional que sirviera de base para un nuevo REI. En nuestro caso nos autoimpondremos una limitación en este punto.

M_5: Problemas relativos a cómo realizar la medición de figuras geométricas con lados curvilíneos.

En este punto pueden surgir nuevas preguntas muy interesantes sobre la medición de áreas de figuras y curvas. Estas preguntas darían paso a la necesidad de una nueva modelización que las incluyese y que no es necesario que surja en todos los casos debido a las restricciones autoimpuestas relativas al ciclo en el que estamos trabajando. Por ese motivo, no desarrollaremos esta modelización en este REI, aunque sin duda es un aspecto más a tener en cuenta para la realización de ampliaciones a nuestro modelo.

Las 3 opciones de modelización podrían surgir en este punto en función de los distintos cursos que tome la investigación del REI. Esta multitud de opciones es una demostración de la capacidad de los REI para generar un proceso denso y rico de estudio a partir de una única pregunta generatriz. En nuestro caso, y como ya se ha indicado, desarrollaremos aquí las modelizaciones que están más próximas a nuestro MER. Por tanto, retomamos a partir de este punto M_3.

M_3: Problemas relativos a cómo trasladar lo calculado en el micro-espacio al macro-espacio.

Para poder trasladar las mediciones y cálculos realizados en el micro-espacio de nuevo al macro-espacio es necesario realizar una nueva modelización. El proceso para trasladar la líneas de separación que dividen el área en partes iguales requiere que los alumnos incorporen algunos elementos matemáticos que les permitan llevar a cabo el traslado de las figuras del micro-espacio al macro-espacio (replanteo de la obra). En este punto surge la necesidad de establecer unos ejes de coordenadas que permitan trasladar lo trabajado en el micro-espacio a la parcela real. Para asegurar matemáticamente la perpendicularidad en el macro-espacio es necesario inducir aunque sea parcialmente el Teorema de Pitágoras (EG 9). De nuevo encontramos en la Historia una posibilidad a partir del método de la cuerda.

Estadio 1

Inicialmente el alumno se topa con los problemas de escala ya trabajados en modelizaciones anteriores. El problema de ampliar de nuevo la figura representada genera una nueva pregunta derivada.

Q_{29}: ¿Cómo se pueden ampliar los datos obtenidos en el micro-espacio para poder trabajar en el macro-espacio?

La aplicación del EG4 de proporcionalidad y los EM y EP asociados al mismo ya conocidos permiten afrontar con garantías esta cuestión aplicando de forma invertida las ya realizadas en la modelización anterior.

Sin embargo, cuando los estudiantes quieren llevar esas medidas directamente al macro-espacio se encuentran con la ausencia de un sistema de referencia que les permita asegurar la perpendicularidad y el paralelismo de las líneas construidas en el micro-espacio.

Estadio 2

Para replicar los trazos realizados sobre el papel el alumno deberá incorporar nuevos elementos matemáticos. Surge por tanto una nueva cuestión.

Q_{30}: ¿Cómo se puede establecer un sistema de referencia que permita asegurar el trazado de paralelas y perpendiculares en el macro-espacio?

La respuesta a esta pregunta lleva, por tanto, a la incorporación de nuevas tecnologías que permitan asegurar los trazados en el macro-espacio.

R_{27}: Trazado de rectas perpendiculares y paralelas en el Macro-espacio

Para realizar el traslado de las figuras del micro-espacio al macro-espacio se comienza con el trazado de un "origen de coordenadas perpendicular". En este punto, aunque es posible la utilización de escuadras de grandes dimensiones se suele utilizar el método de la cuerda. El método de la cuerda se basa en una terna pitagórica muy conocida. Si disponemos de una cuerda dividida en 12 partes iguales podemos trazar un triángulo rectángulo tensando la cuerda y formando un triángulo cuyos lados sean equivalentes a 3, 4 y 5 partes de la cuerda respectivamente. La solución se presenta aquí sin ningún tipo de justificación por lo que necesariamente surgen nuevas cuestiones que hay que responder.

Q_{31}: ¿Se pueden generar ternas proporcionales igualmente válidas mediante las técnicas de proporcionalidad?

Q_{32}: ¿Existen otras ternas que no provengan de la terna 3,4,5 y que también generen un triángulo rectángulo?

Q_{33}: ¿Hay algún método de comprobación que permita asegurar que dados los tres lados de un triángulo este es rectángulo?

Para justificar la generación, la relación y la eficacia de las ternas el alumno debe incorporar el EG9 sobre el Teorema de Pitágoras.

R_{28}: Obtención del Teorema de Pitágoras a partir de las ternas pitagóricas conocidas

En este punto el profesor puede introducir la existencia de las ternas pitagóricas o puedo pedir que los alumnos busquen información sobre ellas de forma que se responda afirmativamente a Q_{31}. A partir de ese punto, los alumnos pueden proceder mediante tareas manipulativas para buscar alguna otra terna no generada a partir de la terna original y sus proporcionales. Esta búsqueda es muy compleja y es posible que los alumnos abandonen la cuestión Q_{32} antes de encontrar la terna 5, 12, 13. Sin embargo, la riqueza del medio a nivel tecnológico del que disponen los estudiantes puede dar lugar a que encuentren un buen número de ellas a través de Internet. Como planteamiento de nuestro REI nos interesa que los alumnos intenten inducir una fórmula a partir de la terna 3, 4, 5 y sus proporcionales. Por ese motivo, una vez resuelta Q_{31} es bueno que los alumnos trabajen Q_{33} antes de buscar en Internet u otras fuentes las respuestas a Q_{32} y Q_{33}.

Estadio 3

La incorporación del Teorema de Pitágoras no solo permite justificar y realizar el replanteo de la obra en el macro-espacio. La posibilidad de obtener una medida de un lado a partir de los otros dos es un requisito necesario cuando queremos salvar un obstáculo del terreno sobre el que no podemos medir. Surgen aquí nuevas preguntas en relación a los usos posibles de la tecnología recién adquirida.

Q_{34}: Si conocemos dos lados de un triángulo rectángulo ¿podemos calcular el lado desconocido?

Q_{35}: ¿Podemos asegurar que un triángulo es rectángulo si sus lados verifican el Teorema de Pitágoras?

R_{29}: Obtención de lados desconocidos en un triángulo rectángulo mediante técnicas aritméticas o algebraicas.

En los primeros cursos de Educación Secundaria, el álgebra está aún en un nivel muy básico. Por eso es posible que los alumnos sean capaces de obtener la hipotenusa a partir de los catetos pero tengan dificultades para obtener un cateto a partir de la hipotenusa y el otro cateto. De nuevo podemos apreciar una superación del MER en este punto. Para responder estas cuestiones los alumnos deben iniciarse en el álgebra o proceder mediante técnicas aritméticas como el tanteo para resolverlas. En esta propuesta no vamos a profundizar en este punto al alejarse del tema principal de nuestra investigación pero, al igual que las cuestiones relativas a la estadística, a partir de esta respuesta pueden surgir nuevas preguntas generatrices que den lugar a nuevos REI.

El Teorema de Pitágoras es una herramienta poderosa para la obtención de medidas indirectas, pero es bueno plantear aquí algunas situaciones que no sea posible resolver por este medio, surgen por tanto nuevas preguntas en este punto:

Q_{36}: ¿En un triángulo del que se conocen únicamente sus lados como podemos calcular su área por medios analíticos?

Q_{37}: ¿Si tenemos dos triángulos semejantes y no rectángulos que coinciden en uno de sus ángulos como podemos calcular los lados desconocidos de uno de los triángulos a partir del otro?

Q_{38}: ¿Si tenemos un triángulo rectángulo dividido en dos triángulos rectángulos como podemos calcular un lado desconocido del triángulo mayor o del triángulo menor a partir de los datos del otro triángulo?

Las preguntas anteriores nos llevan al estudio de otros Teoremas interesantes para el cálculo de medidas indirectas que pueden resultar muy útiles en muchas situaciones.

R_{30}: Obtención de lados desconocidos en un triángulo mediante técnicas basadas en el Teorema de Tales y en los conceptos de semejanza.

Aunque no fueron incluidos en nuestro MER se podría realizar una superación del mismo en este punto mediante la inclusión de algunas técnicas como la fórmula de Herón, o los Teoremas del cateto y de la altura que aunque difíciles de inducir por parte de los alumnos constituyen un cuerpo técnico muy importante para la resolución de problemas geométricos. Estos conceptos suelen aparecer en cursos posteriores y no es habitual encontrarlos en los primeros cursos de Secundaria. Sin embargo, su posible aparición en este punto de nuestro REI como consecuencia de la necesidad de operar en el micro-espacio y trasladar en el macro-espacio, da cuenta de lo fértil que puede ser esta metodología si se parte de las preguntas generatrices adecuadas.

Estadio 4

Una vez superados los problemas derivados de realizar la división del área de la parcela en partes iguales y trasladar esos cálculos al macro-espacio podemos decir que la pregunta generatriz ha sido suficientemente satisfecha. A partir de este punto se podrían explorar las modelizaciones 4 y 5 ya mencionadas anteriormente. El trabajo con superficies no rectilíneas y el trabajo con una nueva dimensión serían nuevos desafíos que no podrían resolverse con las modelizaciones realizadas y que, por tanto, obligarían a continuar el proceso.

Estas nuevas modelizaciones no serán cubiertas en el transcurso de esta investigación dando por terminado aquí el REI propuesto y teniendo muy en cuenta cuáles han sido las preguntas no resueltas y los posibles puntos de inicio de otros REI que emanarían de este.

2.6.1.2 Consideraciones sobre el REI propuesto.

La transformación de nuestro MER teniendo en cuenta las restricciones transpositivas, la transposición didáctica y la modelización se ha concretado en un REI que sobrepasa los límites previstos y que trabaja las praxeologías abordadas en nuestro MER.

Es importante resaltar que la construcción de nuestro REI ha tratado de incorporar el mayor número de contenidos y objetivos geométricos que se contemplan en la legislación. Gracias a esto podemos asegurar que el REI propuesto es posible llevarlo a cabo dentro de los primeros cursos de Educación Secundaria en las instituciones escolares. Sin embargo, en otros niveles de codeterminación se han intentado superar algunas de las restricciones integrando los niveles de cuestión, tema, sector y área y sobrepasando, en algunos casos, restricciones impuestas en los niveles pedagógico y de escuela.

3.

El trabajo de campo

Capítulo 3

El trabajo de campo

El REI teórico propuesto en el apartado anterior fue llevado a cabo en una institución educativa concreta y aplicado a un curso de primero de educación secundaria durante un mes.

En este apartado describimos, en primer lugar, el contexto de la investigación. En segundo lugar, aclaramos la definición de los REI cooperativos. Esta matización al REI diseñado a priori es una consecuencia de incorporar algunas restricciones particulares a la experimentación para que esta fuese posible en la institución escogida. Por último, se detalla el fundamento metodológico seguido en la investigación, aclarando las aportaciones de la investigación interpretativa, los antecedentes de investigación cualitativa dentro de la TAD, el diseño seguido en la investigación y el método de análisis previsto.

3.1 Introducción

El presente trabajo se inscribe dentro del marco de investigación educativa propuesto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Este marco de investigación presenta unos instrumentos propios de investigación que se han ido construyendo y perfeccionando a lo largo de los últimos años. Nuestra elección de este marco determina la selección de los hechos, el análisis de los datos, la construcción de los problemas abordados y las respuestas que es posible obtener.

Al inscribir esta investigación dentro del marco de investigación propuesto por la TAD, nuestro problema de investigación se ha construido mediante la agregación de un conjunto de dimensiones que matizan el problema y amplían su estudio. Las consecuencias de esta decisión son variadas:

- Necesidad de construir un MER utilizando el concepto de praxeología que propone la TAD.
- Necesidad de estudiar los procesos de transposición didáctica y las restricciones transpositivas.
- Utilización de la herramienta REI para el diseño de una respuesta a las restricciones detectadas.

- Descripción, análisis y desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del modelo didáctico general propuesto por la TAD.

La metodología utilizada para el análisis del estudio de caso se basa en la utilizada por Serrano (2013) y ha pasado de forma no secuencial por las siguientes fases:

(a) Diseño matemático: Análisis a priori del ámbito matemático objeto de estudio y elaboración de un MER contextualizado que se materializa en un árbol de praxeologías de dificultad creciente.

(b) Diseño didáctico: Mapa de posibles cuestiones y posibles respuestas (que toman la forma de organizaciones matemáticas) a estas cuestiones, generando nuevas cuestiones. Es lo que designamos como esqueleto matemático del REI. Construcción de las posibles secuencias de enseñanza, concreción de los dispositivos de estudio (medios y respuestas disponibles, formulación de la cuestión inicial, organización de los grupos de estudiantes, reparto de roles) y previsión de producciones resultantes por parte del grupo de alumnos. Es lo que designamos como organización didáctica a priori.

(c) Experimentación y observación clínica: Desarrollo efectivo del REI en el aula, gestionado por un profesor-investigador y, siempre que sea posible, con la presencia de un observador. Trabajo cooperativo regular con el observador para consensuar la toma de decisiones y la gestión de nuevos dispositivos de estudio, si es preciso.

(d) Selección de información a partir del diario de sesiones del observador, apuntes de los alumnos, material docente, grabación de las sesiones, cuestionario final a los alumnos, entrevista con los alumnos y entrevista con el profesor observador.

(e) Análisis y evaluación: Análisis de la información recogida y evaluación del proceso en términos de organizaciones matemáticas movilizadas, momentos didácticos vividos, roles efectivamente desarrollados por el profesor y los alumnos (topogénesis), dialéctica de los medios y los media disponibles (mesogénesis) y gestión temporal del proceso (cronogénesis). Asimismo se evaluará el propio diseño del REI y su gestión en el aula en base a la adecuación entre la organización didáctica a priori y los gestos de ayuda al estudio puestos en práctica por el profesor.

(f) Desarrollo: Revisión y optimización de la propuesta de REI de cara a nuevas experimentaciones. Entre los criterios de optimización pueden figurar propuestas de modificación del MER en el que se sustenta el REI. Es lo que designamos como organización didáctica a posteriori.

El objetivo final de nuestro estudio de caso es analizar, mediante técnicas cualitativas, el funcionamiento habitual de los sistemas docentes, el funcionamiento cuando se introducen cambios controlados y la viabilidad de los mismos como respuesta a la restricciones para la enseñanza de la Geometría elemental.

De forma global, podemos considerar que el trabajo de investigación que presentamos tiene tres focos principales: el estudio de las restricciones que afectan a la Geometría, la construcción de un MER para el estudio de la Geometría elemental y un REI que lo desarrolle y la realización de un estudio de caso que corresponde a la experiencia realizada con las herramientas diseñadas en el primer curso de secundaria durante el curso académico 2015/16.

Se asumen, por tanto, las condiciones en las que se sitúa el centro donde se realizó la experiencia tanto a nivel particular como a nivel general. Por ese motivo, una vez descritas y fijadas esas condiciones, se estudia las posibilidades de realizar la investigación dentro de una organización escolar rompiendo con la enseñanza tradicional de las matemáticas en este nivel educativo. Adicionalmente se analiza la potencialidad de los REI como dispositivos viables y apropiados para una enseñanza funcional de las matemáticas entendidas como una herramienta de modelización de situaciones reales de agrimensura, al tiempo que permite estudiar las restricciones que afectan a estos nuevos dispositivos y que conjeturamos poseen un alcance general.

3.2 Aclaraciones previas sobre el contexto de la investigación

La institución educativa donde se realizó la experiencia es un elemento esencial a la hora de realizar la implantación de nuestro REI, los niveles de codeterminación relativos a la institución aportan restricciones que se recogen en este apartado y que han sido determinantes para llevar a cabo nuestra propuesta condicionando, como se verá en este apartado, la naturaleza del propio REI.

3.2.1 Contexto escolar donde se lleva a cabo la investigación

En este primer punto vamos a describir algunos elementos clave del municipio en el que se llevó a cabo la investigación.

El colegio se ubica en un municipio localizado al noroeste de la Comunidad de Madrid, a una distancia de 52 km de la capital. El municipio se ubica dentro de la denominada Sierra de Madrid, entorno que se caracteriza por las actividades relacionadas con el ocio de montaña, la hostelería y la ganadería. Esta población se ocupa, principalmente en el sector servicios, que ha dejado en segundo plano, aunque todavía pervive, al sector agrario.

Figura 51. Mapa de municipios. Elaboración propia a partir de www.comunidad.madrid

Según los datos disponibles en la comunidad de Madrid, la actividad por ramas en el municipio está concentrada fundamentalmente en los servicios.

Serie	Unidad	2015
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de minería, industria y energía	Porcentaje	3,65 (A)
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de servicios a empresas y financieros	Porcentaje	27,76 (A)
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de servicios de distribución y hostelería	Porcentaje	29,08 (A)
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de otros servicios de	Porcentaje	28,00 (A)
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de agricultura y ganadería de	Porcentaje	0,67
Porcentaje del Producto Interior Bruto Municipal de la rama de construcción	Porcentaje	10,86 (A)

Figura 52. Porcentaje del PIB Municipal por ramas. http://www.madrid.org/iestadis/fijas/efemerides/almudena.htm

Según el Instituto Nacional de Estadística, el municipio ha experimentado un incremento lineal de la población desde el año 2000 hasta el año 2010, notándose, sin embargo, una consolidación en los últimos seís años, con pequeños avances y retrocesos, tal y como se observa en el gráfico adjunto (Fig. 58).

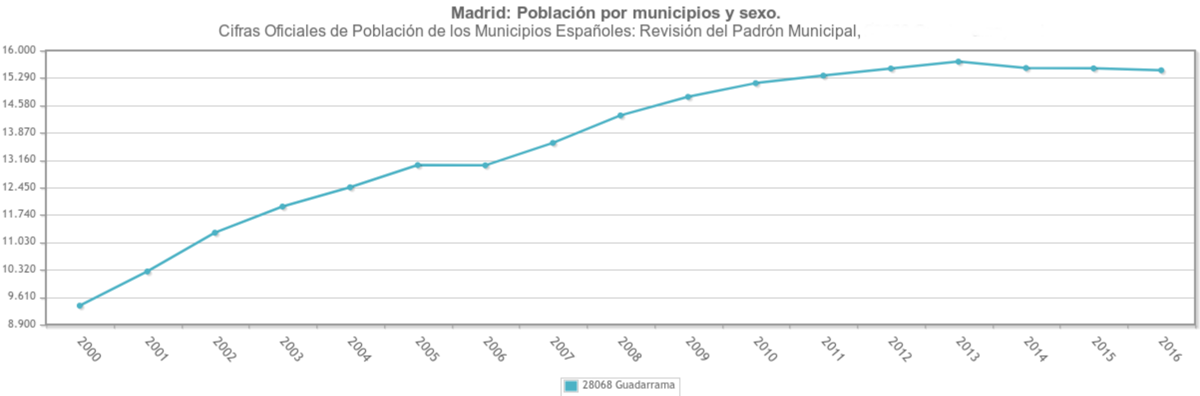


Figura 53. Datos de población del municipio. https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/categoria.htmc=Estadistica_P&cid=1254734710990

Partiendo de la población total, es conveniente conocer los movimientos migratorios presentes en el municipio. Para ello, se adjunta el padrón continuo a 1 de enero, de 2015 estudiando la población por sexo, municipios, nacionalidad y edad.

02 INEbase / Estadística del Padrón continuo

Estadística del Padrón Continuo a 1 de enero de 2015. Datos por municipios

28.- Madrid, Comunidad de

Población por sexo, municipios, nacionalidad (español/extranjero) y edad (grandes grupos)

Unidades: personas

	Total				españoles				extranjeros			
	Total	Menores de 16 años	De 16 a 64 años	De 65 y más años	Total	Menores de 16 años	De 16 a 64 años	De 65 y más años	Total	Menores de 16 años	De 16 a 64 años	De 65 y más años
Ambos sexos												
28068-Guadarrama	15.538	2.909	10.259	2.370	13.722	2.560	8.853	2.309	1.816	349	1.406	61
Hombres												
28068-Guadarrama	7.688	1.543	5.115	1.030	6.808	1.377	4.431	1.000	880	166	684	30
Mujeres												
28068-Guadarrama	7.850	1.366	5.144	1.340	6.914	1.183	4.422	1.309	936	183	722	31

Figura 54. Estadística del padrón continuo. https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=2881&L=0

Estos datos no sólo reflejan el importante peso que tiene la población entre 16 y 64 años (66,02% de población adulta), sino también la notable población inmigrante asentada en la localidad. La mayor parte de este colectivo proviene de Rumanía, Bulgaria y Marruecos y, según los datos publicados en el INE, suponen el 11,68% del total de la población. En la siguiente tabla se detalla el número de habitantes según la nacionalidad registrados en el municipio a 1 de enero de 2015, evidenciando el asentamiento de población rumana, búlgara y marroquí en el municipio.

02 INEbase

00.- Nacional

Población por sexo, municipios y nacionalidad (principales nacionalidades).

Unidades: personas

	Total Población	Españoles	Total Extranjeros	Bulgaria	Rumanía	Marruecos
Hombres						
	7.688	6.808	880	165	112	258
Mujeres						
	7.850	6.914	936	138	154	225

Figura 55. Población por sexo y nacionalidad. https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=2881&L=0

A fecha 1 de enero de 2015, el municipio contaba con el siguiente número de habitantes (por grupos quinquenales):

02 INEbase / Estadística del Padrón continuo

Estadística del Padrón Continuo a 1 de enero de 2015. Datos por municipios

28.- Madrid, Comunidad de

Población por sexo, municipios y edad (grupos quinquenales).

Unidades: personas

	Total	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99	100 y más
Ambos sexos																						
	15.538	842	946	926	826	759	855	988	1.288	1.441	1.445	1.221	897	734	662	524	409	340	257	132	33	13
Hombres																						
	7.688	451	516	482	418	386	435	477	621	695	751	619	455	352	326	258	184	131	89	31	10	1
Mujeres																						
	7.850	391	430	444	408	373	420	511	667	746	694	602	442	382	336	266	225	209	168	101	23	12

Figura 56. Grupos quinquenales de edad. https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=2881&L=0

De dicha población, el número de niños y adolescentes en edad escolar era el siguiente:

02 INEbase / Estadística del Padrón continuo

Estadística del Padrón Continuo a 1 de enero de 2015. Datos por municipios

28.- Madrid, Comunidad de

Población por sexo, municipios y edad (grupos quinquenales).

Unidades: personas

	0-4	5-9	10-14	15-19
Ambos sexos				
	842	946	926	826
Hombres				
	451	516	482	418
Mujeres				
	391	430	444	408

Figura 57. Niños y adolescentes en edad escolar. https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=2881&L=0

Una vez estudiado los sectores productivos, el número de habitantes del municipio, la procedencia de los mismos y el número de niños y adolescentes en edad escolar, se da un salto a las propuestas educativas en el municipio y se acota el centro en cuestión.

3.2.2. El centro

La oferta de centros Educativos en el municipio es variada en relación con la población. En lo que se refiere a la Educación Secundaria Obligatoria, esta localidad dispone de un instituto público. Las propuestas privadas son más numerosas y se amplía hasta 3 el número de centros que ofrecen Enseñanza Secundaria Obligatoria. En esta investigación los Centros Privados de Enseñanzas Concertadas (CEPC) serán nombrados como: Centro Privado de Enseñanzas Concertadas 1 (centro donde se llevó a cabo la investigación), Centro Privado de Enseñanzas Concertadas 2 y Centro Privado de Enseñanzas Concertadas 3.

El Centro Privado de Enseñanzas Concertadas 1 pertenece a una Sociedad Cooperativa de Trabajo Asociado, cuyo origen se remonta a mediados de los años 80. El Grupo Cooperativo gestiona ocho colegios en la Comunidad de Madrid.

El colegio se encuentra situado a las afueras del municipio en una finca de su propiedad. Los alrededores del colegio están formados por fincas de uso agrícola sin explotar, urbanización de vivienda nueva y varias parcelas con viviendas unifamiliares. A un kilómetro del centro se encuentra las instalaciones municipales de deporte, un parque público, la escuela de música y la dehesa del municipio.

La construcción del colegio data del año 2007-2008, siendo su utilidad desde su construcción la de centro educativo de infantil, primaria, secundaria y bachillerato. Recientemente se ha incorporado una oferta de ciclos formativos de grado medio y superior.

El centro contaba con más de 1600 alumnos matriculados en el curso 2015/2016, distribuidos en doce aulas de educación infantil, veinticuatro de educación primaria, catorce de educación secundaria, cuatro de Bachillerato y cuatro de Formación Profesional. Según el propio centro, los estudiantes proceden en su mayoría del municipio al que pertenece y de los municipios colindantes. Cuenta con una Asociación de Madres y Padres de Alumnos, una Asociación Cultural, un Club Deportivo y una Escuela de Música. El grupo al que pertenece pública una revista mensual con información relativa a los colegios que se distribuye de forma gratuita a los alumnos. Sus ideales están recogidos en un documento público que se puede consultar en la página web y en el hall del colegio y se centra en los valores de honestidad, solidaridad, tolerancia y democracia.

Las instalaciones comprenden tres edificios docentes, un edificio de administración y un polideportivo. El centro dispone de varios tipos de aulas, tal y como exige la legislación. Las aulas de uso habitual disponen de 30 puestos individuales que se distribuyen en función de lo que dispone el tutor del aula, y cuentan con pizarra, proyector, sistema de audio, tablones de anuncios y armario. En la etapa de secundaria los profesores disponen de un ordenador portátil individual. Además de estas salas, el centro dispone de aulas específicas de tecnología, tecnología de la información y la comunicación, sala de informática, aula de música, aula de plástica y laboratorios de física, química y ciencias naturales.

En cuanto a instalaciones deportivas, cuenta con diversos campos de fútbol, baloncesto y voley al aire libre y con un polideportivo cubierto con piscina. Además el centro posee un salón de actos, un gabinete médico, un gabinete psicopedagógico, una biblioteca, sala de profesores, comedor y cocina. También dispone de un edificio dedicado a la administración con salas para las entrevistas de los docentes con los padres de los alumnos.

Son numerosas las ampliaciones del currículo que oferta el centro en Educación Infantil, Primaria y Secundaria a través del Club Deportivo, la Escuela de Música y la Asociación Cultural. En particular, en la etapa de Educación Secundaria el centro ofrece clases de natación, refuerzo de Matemáticas y Lengua y promueve el bilingüismo, favoreciendo la inclusión de los alumnos en el proyecto CBC (Colegios Bilingües Cooperativos) y la preparación para los exámenes oficiales de Cambridge (en la etapa de Educación Secundaria y Bachillerato niveles KET, PET y FIRST). Dichas ampliaciones suponen cinco horas extra curriculares a la semana.

El centro dispone de horario ampliado de 7 a 9h y de 17h a 19h. Además cuenta con comedor, actividades extraescolares y campamentos en los periodos de Navidad, Semana Santa y verano.

El colegio colabora estrechamente con el Ayuntamiento. Anualmente, el Ayuntamiento del Municipio ofrece determinados cursos y charlas a todos los centros educativos del mismo, para acercar a los alumnos realidades evidentes en función de la edad. El departamento de Orientación del colegio organiza en el centro dichos cursos. Normalmente, suelen ofertar cursos de sexualidad, alcoholismo, drogadicción, educación vial y violencia de género.

Por otro lado, el colegio colabora con organizaciones no gubernamentales en diversos programas de ayuda, el medio de colaboración es que toda la comunidad educativa colabore a través de las cooperativas escolares y la compra de objetos como semillas o camisetas.

Las medidas de atención a la diversidad que contempla el centro son la optatividad, la diversificación curricular, adaptaciones curriculares y metodológicas y la organización de los recursos materiales y personales para alumnos con necesidades educativas especiales.

El colegio cuenta con órganos colegiados (consejo escolar, claustro y equipo directivo), órganos unipersonales (director, jefes y subjejefes de estudio, jefes de departamento, coordinadores de ciclo y coordinadores TIC, de la escuela de música, de la asociación cultural y del club deportivo).

La coordinación docente consta de los departamentos didácticos, los tutores y profesores, el departamento de orientación, la comisión de coordinación pedagógica, los coordinadores de ciclo y los equipos de ciclo.

Por otro lado, el consejo rector y los equipos directivos y de apoyo a los centros de la cooperativa, regulan la parte económica, la formación, la asistencia tecnológica y la gestión de personal.

En cuanto a la colaboración con las familias, la Asociación de Madres y Padres de alumnos se encarga de coordinar diferentes actividades, en función de la etapa y transmite a la dirección los comunicados del resto de madres y padres de los alumnos, ya sean quejas o felicitaciones.

En relación a la comunicación con las familias, son varias las vías que emplea el centro en este sentido. Desde jefatura de estudios, se hace llegar a los padres o tutores de los alumnos los avisos generales del centro. No obstante, son los tutores o profesores los que, a través de la plataforma Alexia o el teléfono, transmiten la información más relevante y diaria a los padres.

El centro utiliza varios blogs y tiene presencia en redes sociales para mostrar las actividades que se llevan a cabo. Asimismo dispone de aulas virtuales en la plataforma Moodle, aunque su uso en el curso 2015/2016 es minoritario y muy restringido.

El decreto del currículo en el que se basaba el centro, durante el transcurso de la investigación, en la etapa de Educación Secundaria, por estar ubicado en la Comunidad de Madrid, debe atender a las directrices del decreto autonómico de la Comunidad de Madrid, Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (BOCM-A-2015-1).

3.2.3. Datos estadísticos, resultados académicos y comparación con otros centros del Municipio.

En este punto recogemos los datos públicos relativos al centro en el que se llevó a cabo la investigación y a los otros centros de Educación Primaria y Secundaria del municipio que aparecen publicados en el buscador de colegios de la página web de la comunidad de Madrid (madrid.org).

Tabla 26.

Número de alumnos por nivel educativo

Centro	Número de alumnos	Número de alumnos en Infantil	Número de alumnos en Primaria	Número de alumnos en Secundaria	Número de alumnos en Bachillerato	Número de alumnos en FP Grado medio	Número de alumnos en FP Grado superior
CPEC 1	1621	327	659	343	105	149	38
CPEC 2	304	52	142	110			
CPEC 3	1139	228	513	311	87		
CEIP+IES	1673	310	648	486	229		

Elaboración propia a partir de los datos públicos disponibles en http://www.madrid.org/wpad_pub/run/j/BusquedaSencilla.icm?tipoBusqueda=PROX

Tabla 27.

Resultados académicos en pruebas externas

Centro	% Titulación ESO	CDI Matemáticas 6º de Primaria	Nota CDI Matemáticas 3º de Secundaria (% de aprobados)	Nota media PAU
CEPC 1	95,45%	7,99 (91,67%)	6,31 (74,12%)	6,74
CEPC 2	92,59%	6,05 (52,63%)	5,6 (67,74%)	NA
CEPC 3	96,43%	7,16 (89,66%)	5,27 (58,06%)	6,45
CEIP+IES	80,31%	5,38 (49,36%)	4,07 (38,52%)	6,03
CAM	86,38%	7,05 (73,6%)	5,34 (57,9%)	6,32

Elaboración propia a partir de los datos disponibles en http://www.madrid.org/wpad_pub/run/j/BusquedaSencilla.icm?tipoBusqueda=PROX

Como puede verse, el CEPC 1 es el centro privado-concertado con mayor número de alumnos del municipio y el centro que obtuvo los mejores resultados académicos en pruebas externas de todos los niveles durante el curso 2015/2016 en la zona.

3.2.4. La clase.

En este punto vamos a detallar algunos datos relevantes sobre la organización del curso de 1º de la ESO sobre el que se realizó la experimentación. Los aspectos aquí comentados no pudieron ser controlados por el investigador, por lo que serán considerados restricciones transpositivas que emanan de la institución.

En primer lugar vamos a considerar los aspectos organizativos que afectaban al curso escogido:

El aula de clase:

La clase estaba ubicada en la primera planta del edificio de secundaria, en el mismo pasillo se ubicaban los tres cursos de primero de la ESO, los cuatro cursos de segundo de la

ESO, dos cursos de 6º de Primaria que por razones de espacio no pudieron ser ubicados en el edificio de primaria, dos aulas de desdoble y un baño. El aula disponía de 28 puestos individuales distribuidos en 4 filas de siete puestos cada una separadas por un pasillo en grupos de 4 y 3 puestos respectivamente. Todos los puestos estaban orientados hacia la pizarra que disponía de un panel deslizante de madera para proyectar las imágenes de un proyector. El aula tenía varias ventanas en el lado derecho de la pizarra que daban a un patio destinado a los alumnos de educación infantil.

Las dimensiones del aula eran de 7 metros de ancho por 9 metros de largo que daban una superficie total de 63 metros cuadrados.

La composición del grupo:

El grupo elegido estaba compuesto por 27 alumnos (14 chicas y 13 chicos). La nacionalidad principal era la española (25 alumnos) con dos estudiantes de países del este que habían vivido en España desde su infancia y que por tanto no presentaban diferencias frente al resto de compañeros.

En cuanto a la atención a la diversidad, había 2 alumnos diagnosticados por el departamento de orientación como de altas capacidades, 2 alumnos con déficit de atención y 2 alumnos con una repetición en la etapa de primaria.

Tras la evaluación inicial, se habían asignado 3 alumnos a la clase de refuerzo de Matemáticas que cursaban en lugar de la asignatura de Francés dos veces por semana. Estos alumnos presentaban especiales dificultades en el área de Matemáticas y habían tenido problemas en la misma en la etapa anterior.

La asignatura de Matemáticas:

El centro, en su proyecto educativo, había potenciado este área al que se dedicaban 5 horas semanales (una al día). El horario de las sesiones era siempre por la mañana en la tercera o cuarta franja. Adicionalmente, se contaba con un cuarto profesor para generar un grupo de desdoble heterogéneo en el que los alumnos iban cambiando al finalizar cada tema. Durante la realización de la experiencia no se realizó desdoble en la asignatura y se optó por la presencia de un segundo profesor en el aula, que realizó labores de apoyo, observación y grabación. Asimismo, se contó con la presencia de un profesor en prácticas que actuó como observador y como cámara.

Rendimiento académico del grupo antes de la experiencia:

El grupo donde se realizó la experiencia presentaba unos resultados académicos algo inferiores a los otros dos grupos de primero de la ESO en el área de Matemáticas (Nota media de 6.51 frente a notas medias de 6.6 y 7).

3.2.5. Características de la metodología educativa del contexto escolar donde se lleva a cabo la investigación.

El colegio en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tenía por objetivos prioritarios la obtención de buenos resultados en las pruebas externas y el fomento de los valores de trabajo y respeto. El trabajo de aula que se realizaba para el logro de estos objetivos era fundamentalmente monumentalista.

No obstante, el centro estaba inmerso en un proceso de implantación gradual de la metodología de aprendizaje cooperativo que se llevaba implantando desde hacía 4 años de forma progresiva (un curso cada año). En el curso 2015-2016 se iniciaba la experiencia en primero de la ESO y se pretendía su incorporación definitiva en ese curso para el año 2016-2017. La metodología cooperativa fue un requisito del centro educativo para la realización de la experiencia de trabajo mediante el REI. Por ese motivo, se considera el aprendizaje cooperativo como una característica propia de nuestra investigación y se considera en este punto necesario aclarar los aspectos principales de esta metodología que se tuvieron en cuenta en el contexto de nuestra investigación.

Para realizar está incorporación a la metodología, según las directrices marcadas por el centro, se realizó una formación presencial de docentes del centro durante el mes de julio de 2015 en la que se definieron los aspectos fundamentales del aprendizaje cooperativo que se iban a tener en cuenta.

3.2.6. Aprendizaje cooperativo.

El aprendizaje cooperativo según Pifarré y Sanuy (2001) es un método instruccional que se centra en el alumno y pretende favorecer el aprendizaje de determinadas estrategias a partir de un intercambio de información que se da entre pequeños grupos de alumnos. La oportunidad que tienen los estudiantes de ayudarse mutuamente en la resolución de problemas, de negociar nuevos significados, de desarrollar nuevas estrategias y construir un nuevo conocimiento repercute positivamente en su aprendizaje.

Lew Barnett fue quien introdujo en España la metodología de aprendizaje cooperativo, sin embargo según Cassany (2004) los autores más destacados en esta propuesta son David W. Johnson y Roger T. Johnson, Robert Slavin y Spencer Kagan.

Según Echeíta (2012), las cinco condiciones básicas (y sus características), en las que se sustenta el aprendizaje cooperativo y en las que hay mayor acuerdo a la hora de dar cuenta de sus efectos positivos sobre el aprendizaje y la participación del alumnado son:

- Interdependencia positiva entre los participantes: Los alumnos entienden que están vinculados entre sí de tal modo que, en el desarrollo de sus tareas de aprendizaje, ninguno puede tener éxito (en definitiva aprender), si no tienen éxito todos, y por ello mismo el aprendizaje eficaz de aquellos con los que se coopera redunda también en el propio aprendizaje y rendimiento.
- Responsabilidad personal y rendimiento individual: Cada alumno debe tener asignada una tarea y en lo posible un rol y ser responsable de realizar su parte de trabajo. Como resultado de participar en un grupo cooperativo se debe esperar un producto colectivo, pero cada alumno también debe progresar, mejorar su rendimiento, con relación a su punto de partida y a sus capacidades.
- Interacción promotora, cara a cara: El trabajo cooperativo se apoya en una interacción directa, «cara a cara», y no sólo se reúnen para compartir información y opiniones, sino que producen trabajos a través del esfuerzo y los aportes conjuntos, basándose en el compromiso y el afecto por el otro.

- Habilidades sociales: Para contribuir al éxito del esfuerzo cooperativo se necesitan actitudes y destrezas interpersonales sin cuyo concurso el trabajo no progresará.
- Evaluación periódica: Es imprescindible una evaluación regular de carácter formativo que implique a profesores y alumnos, y que permita conocer fortalezas y debilidades, avances o retrocesos en el proceso, así como dinámicas psicosociales negativas y, con todo ello, tomar medidas correctoras y de mejora. Para ayudar a mantener explícita esta evaluación formativa son muy útiles:

1. Los planes/cuadernos de equipo, que se deben convertir en el primer producto cooperativo del grupo y que suelen incorporar: nombre, identificación, objetivos, compromisos, reparto de tareas y roles, recursos, tiempos…
2. Las evaluaciones del equipo, que deben ser momentos formales para revisar: ¿Qué hemos aprendido? ¿qué dificultades hemos tenido? ¿en qué hemos fallado? ¿qué debemos mejorar?
3. Las evaluaciones grupales, al terminar una unidad didáctica o un proyecto de trabajo y en las que de modo espontáneo o estructurado (rúbricas) se pueda reconocer y valorar no sólo el trabajo realizado, sino también cómo lo hemos realizado y cómo se ha sentido cada uno al hacerlo.
4. La observación del profesor, para estar pendiente, entre otras cuestiones, de las dinámicas interactivas negativas.

Pujolàs (2009) afirma también que es necesario plantearse al poner en práctica la aplicación de aprendizaje cooperativo estas preguntas:

¿Han participado activamente, de forma equitativa o al menos han tenido la oportunidad de hacerlo todos los alumnos? ¿Han aportado su parte y han sido responsables de la misma?

¿Han tenido a lo largo de la actividad la necesidad, la oportunidad de interactuar, interpelar, discutir, corregirse, argumentar, y defender su punto de vista y/o aceptar el punto de vista de los demás?

La respuesta debe ser afirmativa en ambos casos para que la estructura de la actividad utilizada sea cooperativa. De esta forma evitaremos estructuras pseudo-cooperativas que no aportan las ventajas de este tipo de aprendizaje.

Introducir una estructura cooperativa en las aulas y utilizar de forma habitual los equipos de aprendizaje cooperativo en la manera de enseñar los contenidos, puede resultar complicado y trabajoso, ya que supone introducir cambios importantes en la práctica docente. Sin embargo, es un reto que se debe intentar por los beneficios que supone no solo en el aprendizaje de los alumnos sino en su formación como personas (Pujolás, 2009). El adolescente a lo largo de la secundaria debe aprender a trabajar en equipo, habilidad que es cada vez más imprescindible en la sociedad del siglo XXI.

En la misma línea, Torrego y Negro (2012) señalan que es necesario pensar en otra escuela, en otra aula, que tenga las siguientes características:

- El grupo como elemento fundamental. La necesidad de apoyo y ayuda ha de ser considerada como una parte más del propio proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Heterogeneidad: los alumnos son fundamentalmente diferentes, aprenden de distinto modo, por distintos procedimientos, y es necesaria esta heterogeneidad, entre otros motivos, porque es imprescindible para el aprendizaje.
- Actividad. El papel del alumno será activo. El alumno tiene que controlar su aprendizaje, conocer el objetivo. Y el conocimiento no se presentará en su forma final, definitiva, lo importante no será sólo lo que está en los libros, sino lo que el alumno puede descubrir. Y estos principios se plasman en el aprendizaje cooperativo.

González y Carrillo (2016) consideran que el empleo de la metodología de aprendizaje cooperativo en el aula aumenta significativamente el rendimiento de los estudiantes, su motivación hacia la asignatura y sus habilidades sociales entre compañeros, imprescindible para un desarrollo personal completo. En definitiva, “genera sentimientos de cooperación”, lo que potencia la adopción de responsabilidades a nivel individual y grupal y promueve la implicación de los estudiantes en el equipo.

3.2.6.1. Estructuras de aprendizaje

En el aula, se pueden encontrar tres estructuras de aprendizaje diferentes: de tipo individualista, competitivo o cooperativo (Pujolàs, 2009), en función de cómo oriente el docente las sesiones. Es decir, en el caso de que el profesor, tras explicar los contenidos correspondientes a su asignatura y/o añadir ejemplos, sugiera a sus alumnos que lleven a cabo una serie de problemas del libro de forma individual, guardando silencio, entonces los alumnos adoptarán un rol individualista, donde únicamente se centran en que su trabajo salga bien, sin prestar atención al trabajo de sus iguales.

Si presentamos el caso de un docente que, tras explicar los contenidos correspondientes a su asignatura, sugiere a los alumnos que lleven a cabo una serie de problemas del libro de forma individual, con el añadido de que quien realice más ejercicios de los propuestos tendrá una mejor calificación y aquel que termine los ejercicios el primero y bien, tendrá una puntuación extra en la nota, entonces los alumnos adoptarán un rol competitivo, donde prevalece el trabajo individual y la consideración del compañero como contendiente.

Si, por el contrario, nos encontramos ante un docente que organiza a los alumnos en equipos de trabajo, les plantea que lleven a cabo los mismos ejercicios que los anteriores docentes con la diferencia de que deben atender a las necesidades de los compañeros a la hora de resolver los ejercicios para que todos logren terminar las actividades con éxito, sin la necesidad imperiosa de mantener la clase en silencio, simplemente animándoles a adecuar el tono de voz para no importunar al resto de compañeros, proporciona un clima adecuado en el aula, con la finalidad de que los alumnos trabajen en un ambiente distendido. Entonces los alumnos adoptarán un rol cooperativo, donde prevalece el trabajo grupal y la consideración del compañero como cooperante.

La estructura cooperativa se caracteriza por la cooperación entre integrantes de un equipo según Pujolàs (2008 y 2009) entre las ventajas de esta estructura de aprendizaje podemos encontrar las siguientes:

- Se comparte el trabajo y las vivencias en el centro.
- Se favorece la ayuda mutua y la participación activa.

- Se beneficia a todos los alumnos, no sólo a los menos capacitados.
- Se potencian las relaciones positivas entre los miembros del equipo y entre los alumnos y el docente.
- Aumenta el rendimiento de los estudiantes.
- Se asume una responsabilidad individual pero también colectiva, es decir, tomando cada miembro un rol diferente dentro del grupo y asumiendo la responsabilidad que acarrea ese rol.
- Se aumenta la motivación puesto que los alumnos reciben retroalimentación continua del trabajo realizado.

El aprendizaje cooperativo implica una forma de trabajar donde los alumnos son el eje alrededor del cual va a girar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello, son varios los aspectos que deben cambiarse en el aula. La disposición de la clase, el establecimiento de algunas normas, rutinas y señales, el uso de técnicas cooperativas, la asunción de roles dentro de los equipos…

3.2.6.2. Las primeras acciones y gestos.

El aprendizaje cooperativo requiere que se favorezca la cohesión del grupo en las horas de tutoría y al inicio de curso, desarrollando actividades para promover el conocimiento mutuo tales como “La pelota”, “La entrevista” o “La maleta” (Pujolàs, 2009). Por otro lado, es conveniente trabajar dinámicas para mostrar la importancia del trabajo en equipo y sensibilizar al alumnado para trabajar de forma cooperativa, como “Mis profesiones preferidas” y “Mundo de colores”.

Las actividades introductorias al trabajo cooperativo llevan implícitas la adquisición de determinadas normas de trabajo esenciales para que las sesiones fluyan con normalidad. Así, es clave la adopción de estrategias para la gestión del aula, estrategias que permiten mantener un ambiente de trabajo adecuado mientras se trabaja en clase, mantener el silencio cuando el docente debe exponer contenidos en la pizarra o explicar alguna cuestión, o captar la atención de los estudiantes. Se debe establecer con los alumnos que cada vez que se levante la mano derecha a la vez que se pone el dedo índice de su mano izquierda sobre la boca significaba que se les va a contar algo importante, por lo que deben mantener silencio. Es necesario que en el momento en que el docente realice ambos gestos, los alumnos lo imiten, de forma que hasta que todos los alumnos no tengan su mano derecha levantada y el dedo índice de su mano izquierda sobre la boca, el docente no habla, lo que requiere que los alumnos se llamen la atención, unos a otros.

Otra estrategia en el trabajo cooperativo es la reestructuración de la clase. Dicha metodología requiere que los alumnos estén dispuestos en el aula en equipos base de cuatro personas. Como no se sabe si en el resto de materias los estudiantes tendrán colocadas sus mesas en la misma situación, el docente debe utilizar un gesto para indicar el cambio de situación de aula: mano derecha levantada y rotación del dedo índice. Este gesto se puede emplear tanto para que los alumnos cambien las mesas de posición individual (mesas separadas) a posición en equipo (mesas juntas), si los alumnos van a trabajar en equipo en el aula, como viceversa.

3.2.6.3. El cuaderno de equipo.

Una vez establecidas e interiorizadas las dinámicas anteriores se debe favorecer la organización mediante la incorporación del instrumento didáctico conocido como "cuaderno de equipo". Las partes del cuaderno de equipo, según Pujolàs (2009), son:

- Nombre del equipo: Los integrantes del equipo base se pondrán de acuerdo para asignarle al equipo un nombre, incluso añadir un logotipo que les identifique. Este nombre y el logotipo, si lo tuvieran, se escribirá en la portada del cuaderno.
- Nombre de los miembros del equipo: En otra hoja, los integrantes del equipo añadirán sus nombres. Además, pueden incluir una fotografía que les guste o incluso escribir alguna característica que les identifique.
- Cargos y funciones: En este apartado, los estudiantes escribirán los cargos que les han sido asignados por el docente (Mayordomo y Onrubia, 2015, p. 180) y las funciones correspondientes a cada rol.
- Normas de funcionamiento: En relación a las normas de funcionamiento,

los alumnos podrán incluir las propias del aula y/o escribir normas específicas del equipo base. Es realmente importante la priorización de normas y, sobre todo, el cumplimiento posterior de las mismas tras la aprobación de todos los miembros del equipo.

- “Planes del Equipo” y revisiones periódicas para la mejora: El Plan de Equipo se determina para un periodo concreto y puede incluir el cargo que ejerce cada miembro del mismo, los objetivos planteados por los alumnos en ese periodo e, incluso, los compromisos individuales, añadiendo el nombre y la firma de cada uno.
- “Diario de Sesiones”: Tras las sesiones de trabajo, el responsable-coordinador del equipo, con la ayuda del resto de integrantes del mismo, escribirá de manera resumida lo que se ha hecho en la sesión y cómo ha ido, lo que permitirá mejorar en las sucesivas sesiones.
- Revisiones periódicas del equipo: Al finalizar el Plan de Equipo, los componentes del equipo realizarán una revisión. En las revisiones periódicas de equipo es recomendable analizar de qué manera ha ejercido cada uno su rol, detallando qué ha hecho bien y en qué necesita mejorar.

Asimismo, se debe examinar si se han satisfecho los objetivos planteados en el Plan de Equipo, si se han cumplido los compromisos individuales detallados en el Plan de Equipo y, por último, se realiza una valoración crítica del trabajo cooperativo.

3.2.6.4. Las técnicas cooperativas.

La otra pieza fundamental para que se produzca una dinámica de aprendizaje cooperativo son las técnicas. Existe un gran número de técnicas y dinámicas cooperativas que se han ido desarrollando dentro de esta metodología a lo largo del tiempo. En general estas técnicas se pueden agrupar en torno a distintos ejes principales, así podemos tener técnicas o estrategias generales como la lectura compartida, la estructura 1-2-4, los lápices al centro o el folio giratorio y técnicas cooperativas específicas como el número, el saco de dudas o la cadena de preguntas.

En nuestro caso, la institución ya había introducido algunas de ellas en la etapa de Educación Primaria, por lo que se solicitó a los estudiantes que señalasen aquellas con las que habían trabajado de antemano. De entre las señaladas por los estudiantes, se eligieron las siguientes para el trabajo cooperativo durante la experimentación realizada y que podemos ver explicadas en detalle en Pujolàs (2009):

- 1-2-4: En primer lugar, los estudiantes piensan el ejercicio o problema de manera individual (1). A continuación, ponen en común las aportaciones con el compañero de al lado (2), complementando las respuestas individuales. Por último, los cuatro integrantes del equipo (4) intercambian las aportaciones hasta llegar a la respuesta.

- Lápices al centro: En esta técnica, el profesor presenta una serie de ejercicios o problemas y cada alumno se responsabiliza de uno de ellos, determinando el orden de realización de los mismos. En primer lugar, los alumnos leen rápidamente el ejercicio de manera individual, realizando las anotaciones que consideren oportunas. A continuación, todos los lápices se sitúan en el centro de la mesa y el alumno responsable del primer ejercicio lo leerá en voz alta. En este momento, los estudiantes deben hablar acerca de cómo resolver el ejercicio, no pueden escribir. Cuando todos los miembros del equipo tienen claro cómo resolverlo, se cogen los lápices y cada uno resuelve en su cuaderno el ejercicio, sin poder preguntar a sus compañeros.

- El número: En esta técnica, cada estudiante tiene asignado un número, el que le corresponde por orden alfabético, por ejemplo. Los alumnos deben resolver la tarea propuesta en un tiempo determinado, asegurándose de que el resto de compañeros del equipo entienden cómo hacerla. Cuando se agota el tiempo, el docente elige un número y la persona que tiene asignado ese número debe explicar el ejercicio al grupo clase.

- Números iguales juntos: Los estudiantes deben resolver una tarea propuesta por el docente. Para ello, decidirán cómo se debe realizar y todos se aseguran de que el resto de compañeros del equipo base saben hacerla correctamente en el tiempo indicado. Una vez agotado el tiempo, el docente elegirá un número del 1 al 4 y el alumno que tenga asignado ese número en cada equipo base deberá salir a la pizarra a resolver el ejercicio.

- Folio giratorio por parejas: Los alumnos comienzan a resolver el ejercicio o problema de dos en dos. Para ello, un miembro de la pareja escribe su aportación y el otro revisa que ésta sea correcta. Transcurrido un tiempo, las dos parejas se intercambian el folio, debiendo corregir lo que ha hecho la otra pareja y continuando el ejercicio. Es decir, el folio rota de una pareja a otra dentro del grupo.

Es importante destacar que cada miembro de la pareja debe escribir en el folio de forma alterna, para que los dos tengan la oportunidad de resolver el ejercicio.

- Uno por todos: Esta técnica se emplea para evaluar al equipo. Para ello, el profesor escoge un cuaderno de ejercicios de un integrante del equipo para corregirlo. La calificación obtenida será extensible al resto de compañeros del mismo equipo.

3.2.6.5. Criterios para el agrupamiento.

En relación a los criterios del agrupamiento, Pujolàs (2009) apunta a la formación de equipos base de cuatro o cinco estudiantes. Para realizar los equipos se atenderán a diferentes aspectos claves, tales como el género, las capacidades, el rendimiento, la motivación hacia la asignatura, de forma que se logre una composición heterogénea.

Una manera común de formar los equipos cooperativos es la que expone Pujolàs (2009, p.17), agrupando a un alumno con rendimiento y capacidad altos, con dos alumnos de rendimiento medio y un cuarto alumno, de rendimiento bajo.

En el proceso de agrupación, además de atender a la capacidad, motivación y rendimiento, siempre se debe intentar atender a criterios de género (compensar el número de chicas y chicos en los equipos de base) y de etnia (mezclar alumnos de distintas procedencias), entre otros.

3.2.6.6. Roles cooperativos.

Los miembros de un equipo de aprendizaje cooperativo deben tener una doble responsabilidad: aprender lo que el profesor les enseña y asegurarse de que lo aprendan sus compañeros. Comparten por lo tanto con el profesorado la responsabilidad de enseñar. Su participación en el proceso debe ser directa y activa: nadie puede aprender por otro (Pujolàs, 2009).

El uso de roles en los equipos tiene muchas ventajas (Torrego y Negro, 2012):

- Ayuda a esclarecer y diferenciar las distintas habilidades y su función en la vida del grupo.
- Procura una doble perspectiva: cuando se desempeña el rol se aprenden unas cosas y cuando se observa en otros se aprenden otras completándose así el aprendizaje.
- Fomenta la autoestima: todos son capaces de ejercer todos los roles.
- Fomenta el autoconocimiento: reconocen si se sienten mejor en un rol que en otro.
- Previene la exclusión: nadie se queda sin desempeñar roles, todos participan.

Pujolás (2009) afirma que es saludable para el aprendizaje cooperativo que los cargos del equipo roten con el tiempo. A lo largo de las unidades didácticas y actividades asociadas se tratará que los alumnos tengan roles diferentes. En el transcurso de la actividad, si es necesario se pueden también añadir nuevas funciones o quitarlas por el bien de la optimización del trabajo.

El trabajo cooperativo demanda múltiples funciones dentro del grupo cooperativo para que el trabajo pueda realizarse con las aportaciones de todos los miembros del grupo. Johnson, Johnson y Holubec (1999) realizan una descripción de los roles que se pueden desempeñar dentro del trabajo cooperativo que nos va a servir de guía en este trabajo. Según estos autores, se puede afirmar que una de las maneras más eficaces de asegurarse de que todos los miembros del grupo trabajen juntos de manera productiva es la asignación de roles. Los roles se clasifican en ese trabajo en función de su función de la siguiente manera:

- Roles que ayudan a la conformación del grupo:
  a) Supervisor del tono de voz. Es el encargado de que todos los miembros del grupo hablen en un tono bajo.

b) Supervisor del ruido. Es el encargado de que todos los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido.
c) Supervisor de turnos. Controla que los miembros del grupo se turnen para realizar la tarea asignada.

- Roles que ayudan al grupo a alcanzar sus objetivos y mantener relaciones de trabajo eficaces:
  a) Encargado de explicar ideas o procedimientos y transmitir las ideas y opiniones de cada uno.
  b) Encargado de llevar un registro anotando las decisiones y redactando el informe del grupo.
  c) Encargado de fomentar la participación y asegurarse de que todos aporten al grupo.
  d) Observador encargado de registrar la frecuencia con que los miembros del grupo adoptan las actitudes deseadas.
  e) Orientador encargado de revisar las instrucciones, reafirmar el propósito de la tarea asignada, marcar los límites de tiempo y sugerir procedimientos más eficaces para afrontar la tarea.
  f) Encargado de ofrecer apoyo verbal y no verbal mediante la consulta y el elogio de las ideas y las conclusiones de los demás.
  g) Encargado de aclarar y reformular lo que dicen los otros miembros del grupo para clarificar los puntos tratados.
  h) Generador de respuestas: produce y somete a consideración del grupo otras respuestas factibles además de las ya aportadas por otros miembros del grupo.

- Roles que ayudan a los alumnos a formular lo que saben e integrarlo con lo que están aprendiendo:
  a) Sintetizador encargado de reformular las principales conclusiones del grupo, o lo que se ha leído o analizado del modo mas completo y exacto posible.

b) Corrector de cualquier error en las explicaciones de otro miembro que resume y completa cualquier dato importante que se haya omitido.
c) Encargado de verificar la comprensión asegurándose de que todos los miembros del grupo sepan explicar cómo se llega a la respuesta o a la conclusión.
d) Investigador y mensajero: consigue el material necesario para el grupo y se comunica con los otros grupos y con el docente.
e) Analista: relaciona los conceptos y las estrategias actuales con el material previamente estudiado y con los marcos cognitivos existentes.

- Roles que ayudan a incentivar el pensamiento de los alumnos y mejorar su razonamiento:
  a) Crítico de ideas, no de personas, cuestiona los planteamientos que surgen criticando sus ideas, al mismo tiempo que les transmite su respeto.
  b) Encargado de buscar fundamentos pidiendo a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos.
  c) Encargado de diferenciar: establece las diferencias entre las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo para que todos entiendan y sopesen los diversos puntos de vista.
  d) Encargado de ampliar las ideas y conclusiones de los miembros del grupo agregando nueva información o señalando consecuencias.
  e) Inquisidor: hace preguntas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión.
  f) Productor de opiniones: supera la respuesta inicial del grupo y genera varias opiniones factibles entre las cuales optar.
  g) Verificador de la realidad: valida el trabajo del grupo en función de las instrucciones, del tiempo y del sentido común.
  h) Integrador de las ideas y de los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición integradora.

Los roles definidos durante la experiencia descrita en el estudio de caso se crearon basándose en la teoría anterior y se utilizaron durante toda la experiencia. En las siguientes tablas se resumen los roles y sus funciones:

Tabla 28.

Tareas y técnicas del rol Líder-Ejecutivo

Tareas	Técnicas
- Se encarga de explicar y transmitir las tareas a todos los miembros	- Hay que hacer esto,…
- Orienta el trabajo del grupo y está atento a los roles y al proceso de trabajo	- Tú tienes que encargarte de,…
- Lleva el registro del grupo, redacta informes sobre las decisiones o presentaciones del grupo	- Yo llevo el registro del grupo y redacto los informes,…
- Verifica la validez del trabajo del grupo	- Déjame que compruebe lo que has hecho… tienes que…
- Se encarga de animar para ampliar y mejorar los resultados de cada tarea.	- Mejora tu parte con esto…
- Presenta o representa al grupo.	- Mi equipo ha concluido que…
- Se comunica en tareas con otros grupos.	- Mi equipo ha preparado esto,… Tenemos la siguiente duda…

Elaboración propia

Tabla 29

Tareas y técnicas del rol Pensador-innovador

Tareas	Técnicas
- Estar atento para que todos hayan entendido las instrucciones. Las explica.	- ¿Habéis entendido las instrucciones?, nos piden esto,….
- Se asegura de que todos sepan llegar a la conclusión del resultado de la tarea.	- ¿Sabéis llegar hasta el final?, explícame el razonamiento
- Plantea preguntas que animan a profundizar más sobre la actividad.	- ¿Qué pasaría si,..?¿entonces, qué,…?
- Lidera el uso de las estrategias cognitivas.	- Utilicemos la siguiente estrategia,….
- Ánima al grupo para obtener más respuestas.	- Aportemos más ideas ¿De qué otra manera se puede hacer?
- Integra las ideas de todos en las respuestas.	- Teniendo en cuenta las ideas de todos, la respuesta es,…
- Media en conflictos sobre ideas y opiniones.	- ¿En qué te basas para eso?¿por qué?
-Anima a buscar fundamentos para defender las propuestas o respuestas.	

Elaboración propia

Tabla 30

Tareas y técnicas del rol Mediador-Integrador

Tareas	Técnicas
- Fomenta la participación	- ¿Qué opinas tú? ¿qué se te ocurre hacer?
- Se asegura de que todos los miembros participen y contribuyan por igual con sus ideas y opiniones	- Nos falta tu opinión, ¿tú qué dices?
- Está atento a controlar el tiempo de cada intervención para que todos puedan hablar	- Se ha terminado tu turno, ahora le toca a,…
- Anima en el reparto de tareas	- ¿Qué tal llevas tu parte de la tarea?
- Ofrece apoyo verbal y no verbal a las ideas y a la participación de cada miembro	- Ánimo con tú parte, ¿necesitas ayuda?¿en qué puedo ayudarte?
- Media entre conflictos emocionales	- Vamos a resolver esta diferencia que tenéis, contadme que ocurre,… vamos a hacer los siguiente…

Elaboración propia.

Tabla 31

Tareas y técnicas del rol Ordenador-Burocrático

Tareas	Técnicas
- Controla el tono de voz para que todos, hablen, de modo que se pueda trabajar	- Estamos hablando demasiado alto,… bajad el tono
- Está atento al tiempo de cada actividad y al tiempo total del proyecto	- El tiempo avanza, hay que ir terminando esta parte,…
- Controla el orden de los materiales	- Dejad las cosas en su sitio, vamos a ser ordenados,…
- Recoge los materiales al final y al principio de cada tarea	- Tomad los materiales,… Entregadme las cosas,…
- Controla que los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido	- Por favor, no hagáis tanto ruido al moveros,…
- Registra frecuencias y tiempos.	- Yo registro los tiempos.

Elaboración propia

3.3. Los REI Cooperativos.

Para avanzar en la creación de un currículo basado en el cuestionamiento del mundo es necesario experimentar con metodologías y dinámicas de aula que lleven a cabo los planteamientos teóricos de la TAD.

Como resultado de las restricciones metodológicas derivadas del aprendizaje cooperativo presente en la institución en esta investigación se optó por incorporar esta metodología a los REI propuestos por la TAD.

Entendemos que ambas metodologías se pueden combinar de forma que la suma de las partes sea mayor que el todo. Los REI cooperativos utilizan, por tanto, los preceptos descritos para los REI al tiempo que la mesogénesis y la topogénesis se ven enriquecidas favoreciendo la cooperación entre iguales y el estudio compartido, es decir, incorporando los aspectos esenciales del aprendizaje cooperativo. Un esquema inicial de esta propuesta podría ser el siguiente:

1. Se plantea a un grupo de estudiantes (X) una cuestión generatriz (Q) dirigida por un profesor (y) (o grupo de profesores Y). La cuestión generatriz Q debe ser lo suficientemente fértil como para que los estudiantes necesiten iniciar un proceso de estudio para darle respuesta. Este punto está vinculado al momento del primer encuentro.
2. El profesor (y) organiza la clase en grupos cooperativos (Xi) en los que se reparten roles (R) entre los estudiantes (X). De esta forma se dispone de tres niveles de actuación, a saber, uno en gran grupo, S(X,y,Q), otro en grupo reducido, $S(x^i_j, R^i_j,(y+x^i_j)_j,Q)$, en el que cada integrante del grupo ejerce su rol y el de profesor, y uno individual, $S(x^i_j,y,Q)$.
3. Los grupos de estudiantes (X_i) exploran las respuestas existentes (R^o) a la cuestión inicial. El profesor (y) dirige esa exploración proporcionando recursos al medio y dinamizando la búsqueda de información mediante técnicas cooperativas simples (TCS) como las descritas en Duran (2012). Por tanto, a los sistemas anteriores se les incorpora una cuarta componente, TCS. Esta fase está dominada por el momento exploratorio.
4. Se ponen en común las cuestiones derivadas (Q_i), tanto resueltas (Q^R_i) como no resueltas (Q^{RN}_i), que han ido surgiendo en el proceso de estudio, así como las respuestas ($R^\heartsuit_i$) obtenidas. Se explicita la técnica o conjunto de técnicas que sirven de base para dar respuesta a la cuestión objeto de estudio (Q o Q_i), y se aborda

la justificación tecnológico-teórica de dichas técnicas. Por tanto, esta fase está dominada por el momento de institucionalización.

5. Una vez explicitadas la técnica o conjunto de técnicas que permiten dar respuesta a Q o Q_i, el sistema S(X,y,Q) se modifica temporalmente por el sistema $S(X_i,(y+x_j^i)_j,Q)$, los grupos cooperativos recogen el proceso y los resultados anteriores en los cuadernos de equipo y el profesor (y) tiene como tarea conseguir que todos los integrantes de la comunidad de estudio pregunten, explicquen, argumenten y comprendan la técnica o técnicas obtenidas, para lo cual aplicará las técnicas cooperativas pertinentes. Una vez el grupo se asegura que cada uno de sus miembros es capaz de producir una respuesta deseada a partir de la técnica estudiada, el sistema se modifica de nuevo temporalmente para que cada alumno tenga la oportunidad de trabajar individualmente, $S(x_j^i,y,Q)$. Este momento viene dominado por los momentos del trabajo de la técnica y de evaluación.
6. El profesor y los estudiantes comprueban que han sido capaces de dar una respuesta funcional ($R^\heartsuit$) a la cuestión estudiada (Q o Q_i) y utilizan todos los elementos y recursos disponibles para evaluar el estudio realizado. En este proceso son especialmente interesantes las observaciones de (y), las técnicas cooperativas complejas que permiten a (y o X_i) comprobar la aplicación de $R^\heartsuit$, las autoevaluaciones (x_j^i sobre x_j^i) y coevaluaciones (X_i sobre x_j^i) y los registros grupales e individuales de la actividad matemática realizada. Esta fase viene dominada para el alumno por la evaluación de la obra matemática estudiada en su conjunto y para el profesor por la evaluación del proceso de estudio realizado en su conjunto.
7. Se ponen sobre las mesa las cuestiones no resueltas (Q_i^{RN}) y se indaga sobre las bases y los límites de las técnicas trabajadas. Se escoge cuál de las preguntas derivadas va a ser estudiada a continuación y el ciclo vuelve a comenzar. El momento tecnológico-teórico domina esta parte.

Las fases descritas con anterioridad no deben ser entendidas de una forma lineal en la que se producen secuencialmente los momentos de estudio, se trata de una estructura dinámica que se puede producir en cualquier orden y repitiendo muchas veces una misma fase.

Como se puede ver, en el desarrollo de las fases descritas, la incorporación de la metodología cooperativa al REI definido anteriormente produce una secuencia de aula coherente con los momentos de estudio propuestos por la TAD y que permitió la realización de nuestro estudio dentro del proyecto de innovación presente en la institución.

El desarrollo de esta variante no explorada hasta el momento por la TAD, a la que denominamos REI cooperativos, constituye junto al MER desarrollado para la Geometría elemental y el REI elaborado a priori a partir de ese MER, una de las principales aportaciones originales de este trabajo.

3.4 Fundamento metodológico.

En este apartado vamos a describir los fundamentos de investigación cualitativa seguidos en este trabajo, las fases que se han seguido para diseñar la investigación y el método elegido para el análisis de los datos.

3.4.1 Aportaciones de la investigación interpretativa a nuestro estudio.

Para comprender un fenómeno desde la experiencia de sus participantes es necesario realizar una investigación de tipo interpretativo. Para estudiar las situaciones que se producen al llevar a cabo un REI en una institución concreta, identificar los caminos y las fases que siguen los estudiantes para resolver la cuestión generatriz y valorar los significados e ideas que se desarrollan ante esta situación y su viabilidad dentro de la institución vamos a situarnos en un primer momento en un plano descriptivo que nos permita tener una visión de conjunto. Posteriormente, vamos a avanzar hacia un plano interpretativo para comprender las posibilidades de llevar a cabo esta metodología en la institución de Educación Secundaria. Esto nos permitirá valorar las carencias y fortalezas de este tipo de enseñanza y proponer una serie de modificaciones al REI planteado en aras a su mejora.

Según Pérez (1996) y Velasco y Díaz de Rada (1999) la realidad posee dos dimensiones o tramas que que hemos de tener en cuenta a la hora de estudiar un grupo: Una dimensión que nace de la descripción de un acontecimiento o suceso que es observable (llamada trama descriptiva) y una dimensión subjetiva en la que intervienen las interpretaciones de las personas que participan en dicho acontecimiento o quienes lo contemplan y estudian (llamada trama etnográfica o interpretativa).

En nuestro caso, intentaremos dar respuesta a ambas dimensiones describiendo primero e interpretando después. En este trabajo tendremos en cuenta no solo el punto de vista del investigador, sino que trataremos de entender la posición de los participantes a partir de los registros de datos y del material textual y gráfico de los alumnos recogido durante la experiencia y las interpretaciones y comentarios que realizaron los profesores observadores durante la experiencia.

La combinación de la descripción de los diálogos que se producen durante las sesiones y de los significados que se traslucen de sus producciones escritas permite explorar con una mayor profundidad los pensamientos de los participantes.

La pretensión de esta investigación no es la de aportar una serie de gráficas y porcentajes sobre el número de veces que aparece una determinada pregunta o sobre los errores más frecuentes detectados en la resolución de ejercicios. Creemos que ese enfoque, aunque interesante y necesario, es demasiado reduccionista para responder a la pregunta de si los REI son una respuesta adecuada y viable a las restricciones transpositivas detectadas en la enseñanza de la Geometría elemental en la Educación Secundaria.

Las discusiones y diálogos que se producen en el proceso de estudio, las respuestas que se construyen y las preguntas que surgen y las que no permiten comprender mucho mejor el fenómeno fundamental de nuestra investigación y conocer con mucho más detalle el desarrollo que puede tener el REI propuesto en el primer curso de secundaria. Este conocimiento en profundidad nos ayuda a ofrecer explicaciones más detalladas acerca de los objetivos planteados y comprender mejor las condiciones que deben darse y los resultados esperables del estudio de la Geometría elemental a través de los REI.

3.4.2 La investigación cualitativa en la TAD. Antecedentes.

La investigación cualitativa tiene una gran tradición dentro de la TAD. Encuadramos nuestro trabajo de investigación como una aportación más a los trabajos cualitativos realizados dentro de este paradigma de investigación.

A continuación exponemos un breve listado de algunas de la Tesis doctorales que han precedido a este trabajo de investigación dentro de la TAD y que consideramos como referencias importantes para este trabajo:

García, (2005) La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funicionales. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Rodriguez, (2005) Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Sierra, (2006) Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas de los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Baquero, (2009) Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Ruiz, (2010) La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Serrano, (2013) La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica. Tesis doctoral. Universidad Ramón Llul.

Oliveira, (2015) Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional. Tesis Doctoral. Escuela Universitaria Técnica Industrial de Vigo.

3.4.3. Diseño de la investigación

La experimentación práctica de este trabajo pretende fundamentalmente comprobar las posibilidades de realización y supervivencia del REI generado a partir de nuestra investigación. El diseño cualitativo por el que hemos optado trata de aportar un visión holística del proceso. Nuestro diseño persigue entender en detalle muchos de los aspectos que hacen posible o dificultan su implantación en una institución real.

El investigador que se ubica en la tradición cualitativa asume que él como investigador no es esencialmente distinto de los investigados y que puede comunicarse y entenderse con ellos. Así que, más que explicar, lo que se desea es entender y comunicar ese entendimiento a los destinatarios de su informe. (León y Montero, 2015, p. 440)

La tradición cualitativa ofrece diversas metodologías de investigación. En nuestro caso, la metodología elegida fue el estudio de caso. El estudio de caso para Yin (1989) consiste en una descripción y análisis detallado de unidades sociales o entidades educativas únicas. Siguiendo al mismo autor, nuestro diseño de investigación tiene un objetivo descriptivo y pretende analizar en detalle una experiencia de aula basada en el REI propuesto para entender, profundizar, descubrir y analizar las situaciones únicas que se generaron en la institución elegida.

Pérez Serrano (1994), tal y como se cita en Bisquerra (2009, pp. 304-305), señala las siguientes características de los estudio de caso: es particularista, descriptivo, heurístico e inductivo.

Es particularista porque está enfocado a comprender profundamente una realidad singular.

Es descriptivo porque como producto final de un estudio de caso se obtiene una rica descripción de un evento de tipo cualitativo.

Es heurístico porque ilumina la comprensión del lector sobre el caso: puede descubrirle nuevos significados, ampliar su experiencia o bien confirmar lo que sabe.

Es inductivo porque trata de descubrir relaciones y conceptos a partir del examen minucioso del sistema donde tiene lugar el caso objeto de estudio.

Una vez decidida la modalidad de investigación cualitativa, nos apoyamos en Stake (1998) para definir el proceso de investigación. Según este autor para el desarrollo de este método se siguen cinco fases:

1. La selección y definición del caso

En nuestra investigación se optó por realizar la experiencia en el centro educativo donde el investigador y autor de este trabajo llevaba ejerciendo como docente desde 2008.

En el curso 2015-2016 el centro escogido, como ya se ha mencionado, estaba realizando un plan de innovación y mejora en el curso de 1º de la ESO que pretendía incorporar de forma progresiva el aprendizaje cooperativo en toda la Educación Secundaria. Apoyándonos, en este plan se propuso la realización de nuestro REI incorporando al mismo la metodología de aprendizaje cooperativo. Este hecho, como ya se ha explicado, dio origen a la variante de los REI cooperativos.

El problema y el objetivo planteado fue, por tanto, el estudio en detalle del trabajo geométrico realizado por un grupo de 1º de la ESO mediante el REI cooperativo propuesto en este trabajo.

2. Elaboración de una lista de preguntas

La observación inicial necesita de un conjunto de preguntas que guíen la atención en un primer momento. Una vez avanzada la investigación, este conjunto de preguntas se fue reformulando y concretando en un número más reducido de preguntas.

La lista de las preguntas iniciales que nos planteamos fue la siguiente:

- ¿Qué preguntas de las previstas en el REI se van alcanzando?
- ¿Cuáles son las respuestas generadas por el grupo para responder a la pregunta inicial?
- ¿Se produce la participación de la mayoría de los alumnos?
- ¿Las respuestas que generan son matemáticamente aceptables?
- ¿Será posible no recurrir a la clase magistral?
- ¿Los alumnos se implican de forma activa en la resolución de la pregunta generatriz?
- ¿Qué papel juega el libro de texto?
- ¿Cuánto tiempo necesitan para ir respondiendo a cada pregunta?
- Si se desvían en sus respuestas del camino definido en el REI, ¿hacia qué áreas de las matemáticas se dirigen?
- ¿Es compatible el trabajo cooperativo con el trabajo a través de REI?
- ¿Qué influencia tiene que el profesor que lleva a cabo la experiencia sea el investigador?
- ¿Condicioná el investigador el tipo de respuestas que se generan?
- ¿Cuál será el papel de las familias?
- ¿Cuál será el papel del resto de profesores? ¿Acudirán los alumnos a ellos para buscar respuestas?
- ¿Surgirán problemas con la institución?
- Una vez concluido el proceso, ¿serán capaces de superar las pruebas de evaluación planteadas por el departamento de Matemáticas?

- ¿Se producirán diferencias en la forma de actuar en función del rendimiento previo demostrado en la asignatura?
- ¿Se trabajarán todos los estándares previstos por la legislación para ese curso?
- ¿Qué material será necesario para ir desarrollando correctamente la actividad?
- ¿Será posible utilizar espacios diferentes al aula para realizar el REI?
- ¿Qué papel van a jugar las TIC a la hora de resolver las preguntas que vayan surgiendo?
- ¿Será posible cubrir los EG, EM y EP definidos en el MER?
- ¿Qué momentos de estudio se darán con más frecuencia?
- El REI diseñado a priori, ¿está suficientemente desarrollado o habrá que realizar modificaciones y ampliaciones del mismo?

3. Localización de las fuentes de datos

La clase en la que se realizará la experiencia será la fuente principal de datos. Además, servirán como fuentes secundarias los profesores presentes en el aula durante la realización de la experiencia y los resultados obtenidos por otro grupo de primero de la ESO que no participarán en la experiencia.

Las estrategias cualitativas seleccionadas para el estudio de caso fueron la observación formal e informal, el análisis de la documentación producida por los alumnos en su proceso de estudio, la realización de cuestionarios informales en distintos momentos del proceso, las grabaciones de audio y vídeo efectuadas durante las sesiones por el centro como parte del proceso de implantación de los REI cooperativos, los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación que el departamento didáctico del centro propuso tanto del grupo que realizó el REI cooperativo como del grupo que no lo hizo.

4. Análisis e interpretación

Mediante la descripción detallada de todo el proceso se buscarán contenidos recurrentes o relevantes que permitan establecer unos ejes temáticos y establecer correspondencias entre preguntas, respuestas, situaciones y sujetos.

A partir del análisis realizado, se intentarán sacar conclusiones sobre la validez de la propuesta basada en REI cooperativos.

En el análisis e interpretación utilizaremos la noción de momentos de estudio definidos anteriormente, el conjunto de paraxeologías definidas en nuestro MER y el árbol de preguntas y respuestas construido en nuestro REI a priori.

5. Elaboración del informe

Se contará la experiencia de forma cronológica, con descripciones minuciosas y relevantes de los eventos y lugares. Con este tipo de informe se pretende que el lector se traslade a la experiencia de aula y tenga una experiencia vicaria que le permita sacar sus propias conclusiones.

Para concluir con este apartado matizaremos que el Estudio de Caso propuesto en esta investigación sera intrínseco según la clasificación de Stake (1998). Utilizaremos la descripción que se hace del estudio intrínseco de casos en Bisquerra (2009) para aclarar este último punto:

> El estudio intrínseco de casos tiene el propósito básico de alcanzar una mayor comprensión del caso en sí mismo. Interesa intrínsecamente y queremos aprender sobre él en particular. No se persigue generar ninguna teoría ni generalizar los datos. El producto final es un informe de carácter básicamente descriptivo. Por ejemplo un caso intrínseco puede darse cuando un profesor llama a un investigador para resolver un problema del aula. (p. 314).

3.4.4. Método de análisis de datos.

Para terminar este capítulo y dada la importancia del método de análisis, en este apartado vamos a profundizar en el método elegido para el análisis de datos. Para ello, y dado el papel principal que van a tener las grabaciones realizadas durante las sesiones de clase, vamos a prestar un especial interés a las investigaciones que hacen uso de registros audiovisuales.

Tal y como aparece en De las Heras (2014), el método de análisis de contenido surge en el periodo de entreguerras y se desarrolla a partir de la Segunda Guerra Mundial para estudiar los medios de comunicación de masas y los discursos públicos de todo tipo. Originariamente el análisis se centra en establecer pequeñas unidades de análisis fácilmente medibles lo que lleva al análisis cuantitativo mediante documentos estandarizados. Con la emergencia de las ciencias sociales a mediados del siglo XX aparecen las críticas al análisis reduccionista y al análisis cuantitativo del contenido. Autores como McKerman (1999) señalan la idoneidad del análisis cualitativo de los datos y abogan por su adecuación a la realización de estudios en Educación.

En este trabajo vamos a seguir la aproximación propuesta en de las Heras (2014), que a su vez se basa en el procedimiento propuesto por Ball y Smith (1992), y que incorpora aportaciones de los modelos de Mayring, de Bell y de Rose.

En el análisis de nuestros registros audiovisuales vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Definir las preguntas o problema de investigación.

Nuestro trabajo pretende identificar tendencias en la forma de abordar la construcción de respuestas a la pregunta generatriz del REI cooperativo. Identificar aquellos caminos que se siguen con mayor frecuencia, qué momentos del proceso de estudio aparecen más a menudo y que dificultades aparecen en el aula al llevar a cabo un REI.

2. La recogida de datos: definir el material que se va a estudiar.

Para la recogida de datos emplearemos el material producido durante las sesiones, las encuestas realizadas a los participantes, los diarios de sesiones elaborados por el investigador, la grabación audiovisual de las sesiones realizadas, las entrevistas y conversaciones con los profesores observadores y los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación.

La población que interviene en nuestra investigación son los alumnos que cursaban 1º de la ESO durante el curso 2015/2016.

3. Definir el contexto de la obtención de los datos.

El material para llevar a cabo el REI fue definido por el investigador a partir del MER construido para abordar el estudio de la Geometría elemental. Durante la realización de las sesiones se fue creando material nuevo ad hoc que surgió de la investigación de los alumnos en función de las respuestas construidas en las sesiones precedentes.

En el proceso estaba involucrado el departamento didáctico de Matemáticas y el equipo directivo del centro, la experiencia se llevó a cabo dentro del plan de innovación de la Institución.

Durante las sesiones estuvieron presentes el profesor-investigador, el profesor de apoyo de 1º de la ESO y una estudiante de prácticas, ejerciendo estos últimos de cámaras.

Los documentos que se recogieron provinieron del trabajo cooperativo realizado por los grupos de estudiantes durante las sesiones. La prueba de evaluación que se realizó a los alumnos fue decidida por el departamento didáctico de Matemáticas y los resultados de la misma fueron proporcionados por los profesores del departamento que participaron en la evaluación de la misma.

Durante las sesiones los grupos cooperativos disponían de un cuaderno de equipo en el aula donde diariamente iban recogiendo los avances en el REI que realizaban. Adicionalmente el profesor-investigador fue realizando un diario de sesiones donde describía la sesión realizada. El diario se completaba con la revisión rápida de la sesión grabada. Los registros audiovisuales quedaban a disposición del centro en el disco duro de la cámara utilizada y eran descargados al ordenador del profesor-investigador para su estudio.

Los docentes participantes mantuvieron en todo momento una disposición y una implicación ejemplar. Por otro lado la disposición e implicación de los alumnos fue muy alta, como se verá posteriormente en los resultados de las encuestas practicadas.

Los documentos fueron recogidos in situ por el investigador y no fueron editados ni manipulados de ninguna forma. La existencia de una correspondencia exacta entre los documentos que se ven en las grabaciones y los documentos recopilados dan cuenta de su autenticidad y credibilidad.

La selección del material y las evidencias de los documentos y grabaciones se realizó en un momento posterior de la investigación en la que el investigador ya no ejercía como docente en el centro educativo en cuestión.

4. Selección del material: La muestra

Para el presente estudio se tomó el grupo de Educación Secundaria donde se llevó a cabo el trabajo de campo, con un total de 27 alumnos. Adicionalmente se recogieron datos cuantitativos de otro grupo del mismo curso con 28 alumnos adicionales. La experiencia se llevó a cabo durante 20 sesiones de clase que se realizaron dentro del horario lectivo asignado a la asignatura de Matemáticas. En estas sesiones, el papel de los alumnos fue especialmente activo y se pusieron en marcha grupos cooperativos de 4 alumnos que ejercían roles diferenciados y técnicas cooperativas de trabajo. El cuaderno de cada equipo y sus producciones individuales fueron igualmente analizados.

Al tratarse de una población reducida, en nuestro estudio hemos optado por considerar todo el material recogido sin realizar ninguna selección del mismo. Por ese motivo se han tenido en cuenta todos los minutos de grabación, las muestras de material recogidas, las encuestas realizadas y los resultados de las pruebas de evaluación realizadas.

5. Idear las categorías de análisis.

Aunque como se ha indicado en el apartado precedente se han tenido en cuenta todos los materiales recogidos, es necesario establecer el proceso de categorización y codificación adoptado para hacer asequible el estudio de los datos analizados.

Para realizar la categorización se ha utilizado la herramienta de los momentos de estudio definida por la TAD y las herramientas construidas en los capítulos precedentes es decir el MER y el REI cooperativo a priori.

El análisis de los momentos de estudio que aparecen y con qué frecuencia posibilita valorar el conjunto de las sesiones y detectar carencias en el proceso.

El MER, con su descripción de praxeologías, permite clasificar con precisión los EG, EM y EP que aparecieron en el aula.

El REI cooperativo diseñado, con su arborescencia de preguntas y respuestas, ayuda a establecer que cuestiones y que respuestas se construyen en el aula.

Las herramientas anteriores cumplen los criterios de exahustividad y de precisión, y permiten al investigador clasificar con detalle el momento de estudio que está teniendo lugar, las preguntas que se están abordando, las respuestas que se están generando y las praxeologías que se están estudiando e investigando.

6. El análisis de los datos

La recogida de datos de la investigación se realizó entre el día 5 de abril de 2016 y el 3 de mayo de 2016. Durante estos días se preveía una sesión diaria lo que suponía un total de 21 sesiones. Sin embargo, durante el transcurso de la investigación se realizaron una serie de actividades extraordinarias, visita al teatro y dos sesiones de formación a cargo de movimiento contra la intolerancia, que redujeron en 2 y media el número de sesiones previstas. Se consiguió recuperar una de estas sesiones con una sesión de tarde cedida por la asignatura de Educación Plástica y Visual.

Adicionalmente a las sesiones realizadas, una vez por semana se revisaban las grabaciones, se mantenían conversaciones con los otros profesores presentes en las sesiones y se recogía el material producido por los alumnos de forma individual y cooperativa.

Para la organización de los datos se ha optado por utilizar los momentos de estudio definidos por la TAD y los instrumentos creados en el marco de esta investigación, el MER y el REI.

Los momentos de estudio nos permiten realizar una primera división de la sesión. Creemos que está primera clasificación nos va a permitir al finalizar nuestro análisis descriptivo determinar el peso relativo que ha tenido cada uno de los momentos descritos por la TAD en nuestro estudio de caso. Estudiar los momentos también nos va a permitir determinar la aportación del profesor y de los estudiantes dentro del modelo de REI cooperativo propuesto.

Dentro de cada uno de los momentos vamos a utilizar el MER y el REI construidos en este trabajo para describir y clasificar las praxeologías, cuestiones y respuestas movilizadas durante la experimentación. Como ya se indicó en su momento, el MER y el REI que emana de ese MER son dos herramientas dinámicas que se enriquecen en todo momento con la investigación que se ha llevado a cabo. Al utilizar estas herramientas en nuestra descripción podemos comprobar si las praxeologías definidas y las cuestiones y respuestas pensadas a priori son suficientemente detalladas o si por el contrario durante la experimentación se han producido situaciones de desborde de las herramientas previstas.

Un valor adicional del uso de estas herramientas es que nos permite cuantificar en detalle el número de praxeologías abordadas y el número de praxeologías no tratadas. Así mismo gracias a las herramientas generadas podemos valorar si se han abordado las cuestiones y respuestas previstas o si por el contrario se han seguido otros caminos de estudio que deberían tenerse en cuenta en el futuro.

Para terminar de organizar los datos recogidos se utilizarán algunos elementos de estadística descriptiva que nos permitan cuantificar las respuestas a los cuestionarios, pruebas y exámenes recogidas durante la investigación. La comparación de los resultados en la prueba de evaluación final realizada entre el grupo en el que se realizó la experiencia y el otro grupo del mismo curso se realizará también de forma descriptiva. El análisis cuantitativo de esta prueba tiene por objeto enriquecer la descripción e interpretación del caso de estudio y en ningún caso se pretende generalizar los resultados aquí obtenidos.

Una vez aclarados estos puntos, se procederá al análisis de los datos obtenidos en la presente tesis doctoral y se tendrán en cuenta los datos categorizados de cada sesión y los datos cualitativos y cuantitativos recogidos tanto del grupo de estudio como del otro grupo del mismo curso presente en el centro.

A modo de síntesis, la información de cada sesión quedará recogida de la siguiente manera:

1. Datos de la sesión
2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas
3. Descripción de la sesión señalando explicitamente los siguientes puntos:
    - Los momentos de estudio que se abordan
    - Las preguntas y respuestas abordadas
    - Las praxeologías estudiadas

Con las herramientas teóricas descritas se procederá a la descripción de las sesiones analizando los diálogos y producciones de los alumnos que ayuden a mostrar las praxeologías, las cuestiones y respuestas abordadas y los momentos de estudio llevados a cabo.

3.4.5. Garantizar la calidad de la investigación. Criterios tenidos en cuenta en el presente trabajo

El quinto y último apartado lo dedicaremos a detallar los criterios de calidad que han sido tenidos en cuenta en la presente investigación. En Bizquerra (2009, p. 287) encontramos la siguiente reflexión acerca de la investigación cualitativa y que recogemos a modo de guía:

> El rigor de la investigación consiste en el grado de certeza de sus resultados, es decir, del conocimiento que ha producido. El conocimiento científico resultante de la investigación cualitativa es un conocimiento construido a partir del estudio de un contexto particular (ideográfico), además de integrar descripciones y narraciones realizadas a partir de las percepciones de los protagonistas (práctico y subjetivo). Su propósito es reflejar una forma de hacer y de ser en una realidad determinada. Estos aspectos hacen que, como consecuencia, sea necesario tener en cuenta unos procedimientos que aseguren que la descripción e interpretación sobre la realidad estudiada corresponda realmente a la forma de sentir, de entender y de vivir de las personas que han proporcionado la información y que forman parte de ésta.

Para poder asegurar la calidad de la investigación en este trabajo vamos a abordar la credibilidad, la transferibilidad, la dependencia y la confirmabilidad siguiendo el trabajo de Bartolomé (1986) tal y como se cita en Bisquerra (2009, p. 289).

3.4.5.1. Credibilidad.

Para otorgar valor de verdad a la investigación realizada y tratar de asegurar que los resultados se ajusten a la realidad, en este trabajo se aplicaron las siguientes estrategias:

1.- Observación persistente: Durante el curso 15-16 en el que se realizó la intervención el profesor investigador fue tutor del grupo experimental y profesor de Matemáticas junto al profesor observador. Este hecho asegura la inmersión persistente y prolongada durante los meses anteriores y posteriores a la investigación en el contexto natural de los alumnos. Las acciones realizadas a través del plan tutorial, el conocimiento de la realidad de los alumnos a través de las reuniones con las familias y con el resto del equipo docente y la convivencia total de más de una semana en un viaje organizado por el centro permiten asegurar que la investigación se haya realizado desde un enfoque global.

2.- Triangulación: Durante la investigación se han utilizados datos que provenían de diferentes orígenes. Resultados previos en exámenes de la materia, pruebas de evaluación inicial del bloque de contenido tratado, producciones de los alumnos durante la intervención realizada, registros audiovisuales y de campo de las sesiones realizadas, cuadernos de equipo, autoevaluaciones y coevaluaciones de los distintos grupos cooperativos y puestas en común con el resto de profesores presentes para comentar las sesiones llevadas a cabo.

3.- Participación en congresos nacionales e internacionales. Durante el transcurso de la investigación parte de los resultados han sido sometidos al juicio de otros investigadores en cuatro congresos (Roa, Hidalgo y Garbayo, 2016a y b; Roa e Hidalgo, 2017; Roa e Hidalgo, 2018), lo que confirma que los comités científicos de los congresos han considerado válidos los resultados presentados en las comunicaciones.

4.- Declaración de sesgos del investigador. El investigador de este estudio es Diplomado en Magisterio, Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones, Graduado en Ingeniería Audiovisual y Máster en Estudios Avanzados de Pedagogía. En el momento de la intervención tenía 18 años de experiencia como profesor en educación reglada y no reglada y era profesor en el centro donde se realizó la intervención desde su apertura en el curso 2008-2009. Era profesor de la asignatura objeto de estudio junto al profesor observador y era tutor del grupo experimental.

3.4.5.2. Transferibilidad.

El trabajo realizado mediante REI cooperativos en el bloque de Geometría y para el curso de 1º de la ESO es inédito en España, por lo que se ha optado por no realizar ningún muestreo de los datos recogidos y utilizar todos ellos para realizar una descripción exhaustiva que suministre la mayor cantidad de información a otros investigadores. Se espera que gracias a este enfoque se pueda partir de esta experiencia para reconocer situaciones parecidas en otros contextos.

Se espera que los resultados de este estudio puedan servir de hipótesis de partida en futuros trabajos.

3.4.5.3. Dependencia.

Para asegurar la consistencia de los datos se ha intentado transcribir un número suficiente de diálogos entre alumno y profesor y mostrar evidencias gráficas de las producciones y puestas en común realizadas. Con este enfoque se pretende evitar en la medida de lo posible la información basada en percepciones, creencias y significados. En este sentido la construcción de un MER con su definición de praxeologías directamente observables y la construcción de un REI con su arborescencia de preguntas y respuestas buscan subsanar, mediante la clasificación minuciosa de las praxeologías abordadas y de los momento de estudio y cuestiones abordadas, la estabilidad de los datos y el proceso de estudio seguido. La construcción previa del MER y del REI permite asegurar una fuerte permanencia y solidez de los datos en el tiempo.

3.4.5.4. Confirmabilidad.

De cara a intentar ser lo más objetivo y neutral posible, en este trabajo se ha hecho el esfuerzo de explicitar el posicionamiento del investigador y de construir los instrumentos que se iban a utilizar para abordar el estudio de caso en función de las posiciones epistemológicas y de las restricciones encontradas en todos los niveles de codeterminación.

Para asegurar la consistencia de los datos presentados se utiliza la técnica de seguimiento para auditoria seguida en otros estudios de caso descriptivos como el de Pamplona (2014, p. 79). Esta técnica consiste en dejar rastro sobre cómo se ha llegado hasta los resultados para que otros investigadores puedan juzgar la consistencia de los resultados en función de los datos de origen analizados. Para que esta auditoría pueda realizarse en este trabajo se han incluido los siguientes puntos:

- Análisis de las dimensiones epistemológica, económico-institucional y ecológica.
- Construcción de un MER sobre Geometría elemental.

- Diseño teórico del REI que emana del MER anterior.
- Descripción detallada del diseño de investigación
- Descripción detallada del contexto educativo, de la institución y del grupo experimental.
- Explicación del proceso de recogida de datos y descripción exhaustiva de las sesiones.
- Análisis cualitativo de los cambios en la topogénesis, mesógénesis y cronógenesis detectados en las sesiones, de los EG, EM, EP abordados, de las cuestiones y respuestas del REI a priori y de los momentos de estudio detectados.
- Análisis estadístico y descriptivo detallado de los datos sobre rendimientos en las pruebas pre-test y post-test realizadas, presentando los datos obtenidos sin muestreo.

3.4.5.5. Ética.

En este estudio se ha seguido un protocolo estricto para evitar los dilemas éticos que pudiesen surgir de la recogida y de la difusión de los resultados.

En relación a estos aspectos en esta investigación se ha contado con el beneplácito de la institución educativa en la que se llevó a cabo este trabajo, enmarcando esta investigación dentro del proyecto de innovación del centro.

El trabajo se llevó a cabo con la colaboración del Departamento Didáctico de Matemáticas del centro y se debatió su planificación, alcance y resultados en las reuniones ordinarias de coordinación, dejando registro en el acta de las mismas.

Como parte del proyecto de innovación del centro, el profesor investigador participó en unas jornadas de transmisión de resultados dentro del grupo cooperativo en las que se presentaron resultados parciales, vídeos e imágenes relativas al aprendizaje cooperativo experimentado durante la intervención y que fueron supervisadas por el coordinador del proyecto de innovación del centro.

Todos los alumnos participantes contaban con las autorizaciones pertinentes de sus tutores legales para el tratamiento y uso de las imágenes.

Adicionalmente a estos pasos, se consideraron las siguientes cuestiones adicionales:

- Presentar la investigación que se va a realizar y los objetivos a los responsables directos del profesor-investigador.
- Solicitar los datos de las pruebas de evaluación y los permisos para analizarlos a los profesores directamente implicados y al Departamento Didáctico.
- Tomar las medidas oportunas para asegurar el anonimato y la confidencialidad de los datos, no asociando nunca los datos a los nombres de los alumnos ni a los nombres de los cursos analizados.
- Cuidar especialmente la información gráfica seleccionada, evitando que en ella aparezcan datos personales de ningún tipo, ni imágenes de rostros o de partes físicas reconocibles.
- Renombrar a los alumnos por orden de intervención en cada uno de los diálogos transcritos de forma que no sea posible asociar la denominación dada en los diálogos con otros diálogos y con otros datos del estudio.
- Desordenar el orden de los alumnos del grupo control y del grupo experimental que se presentan en el estudio cuantitativo de forma que no exista correspondencia con los listados de clase que manejaban los profesores del centro durante ese curso.

4.

Experimentación del REI y análisis de las restricciones didácticas encontradas.

Capítulo 4

Experimentación del REI y análisis de las restricciones didácticas encontradas.

En este capítulo vamos a centrarnos en la experimentación del REI llevada a cabo con el doble objetivo de describir e interpretar con el mayor detalle posible lo ocurrido. Para realizar este trabajo descriptivo e interpretativo vamos a describir, siguiendo el esquema del punto anterior, cada una de las sesiones realizadas. Una vez realizado este análisis descriptivo realizaremos un estudio interpretativo de lo encontrado. Para finalizar este capítulo expondremos el análisis y la interpretación cualitativa y cuantitativa de la experimentación.

4.1. Sesiones

Nuestra investigación de la experimentación del REI realizado comienza con la descripción detallada de las sesiones realizadas entre el 5 de abril de 2016 y el 3 de mayo de 2016.

4.1.1. Sesión del 5 de abril de 2016.

1. Datos de la Sesión

Número de Sesión	1
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

El objetivo de la sesión es realizar una evaluación inicial de los conocimientos previos y presentar a los alumnos la cuestión generatriz a abordar durante el REI cooperativo.

La cuestión que se espera abordar es la siguiente:

Q_0: ¿Cómo se puede dividir el espacio que ocupa una parcela en partes iguales?

3. Descripción de la sesión

La sesión estuvo dividida en 2 momentos de estudio. Un primer momento dedicado a la evaluación y un segundo momento dedicado al primer encuentro.

Antes de abordar la cuestión inicial se planteó a los estudiantes una autoevaluación en la que debían utilizar una escala del 1 al 4 para calificar algunas frases relacionadas con la Geometría elemental.

La escala utilizada fue la siguiente:

1. Lo puedo, explicar a mis compañeros
2. Lo entiendo pero no lo puedo explicar
3. No lo entiendo aunque lo he visto
4. No lo sé, no lo he visto

Las frases sobre la Geometría elemental planteadas fueron las siguientes:

1. Conozco cómo se trazan las principales rectas y segmentos (paralelas, perpendiculares, bisectrices y mediatrices).
2. Sé medir un ángulo y transportarlo.
3. Sé lo que son los ángulos complementarios, suplementarios, adyacentes y consecutivos.
4. Conozco el valor que tienen los ángulos interiores de un cuadrado, un pentágono y un hexágono regular.
5. Reconozco los ejes de simetría de una figura y sé construir figuras simétricas.
6. Sé clasificar las figuras planas en función de sus propiedades.
7. Conozco lo que es la altura y la mediana de un triángulo.
8. Conozco las fórmulas de áreas y perímetros de las distintas figuras planas y sé utilizarlas correctamente.
9. Sé descomponer una figura en otras más sencillas.
10. Conozco la fórmula del Teorema de Pitágoras y sé aplicarla en distintos contextos.
11. Sé determinar cuándo dos figuras planas diferentes tienen la misma área.
12. Sé dibujar una figura idéntica a una dada.
13. Conozco el Teorema de Tales y sé aplicarlo para aumentar o reducir una figura.

A continuación vamos a agrupar las frases en 3 grupos: frases con un número de respuestas 1 o 2 superior al 75%, frases con un número de respuestas 1 o 2 entre el 25% y el 75% y frases con un número de respuestas 1 o 2 inferior al 25%.

- Frases con una autoevaluación de respuestas positivas superior al 75%.
  - Conozco como se trazan las principales rectas y segmentos (Paralelas, perpendiculares, bisectrices y mediatrices).
  - Sé medir un ángulo y transportarlo.
  - Conozco el Teorema de Tales y sé aplicarlo para aumentar o reducir una figura.
- Frases con una autoevaluación de respuestas positivas entre el 25% y el 75%.
  - Sé lo que son los ángulos complementarios, suplementarios, adyacentes y consecutivos.
  - Conozco el valor que tienen los ángulos interiores de un cuadrado, un pentágono y un hexágono regular.
  - Reconozco los ejes de simetría de una figura y sé construir figuras simétricas.
  - Sé clasificar las figuras planas en función de sus propiedades.
  - Sé determinar cuándo dos figuras planas diferentes tienen la misma área.
  - Conozco las fórmulas de áreas y perímetros de las distintas figuras planas y sé utilizarlas correctamente.
  - Sé dibujar una figura idéntica a una dada.
  - Sé descomponer una figura en otras más sencillas.
- Frases con una autoevaluación de respuestas positivas inferior al 25%.
  - Conozco lo qué es la altura y la mediana de un triángulo.
  - Conozco la fórmula del Teorema de Pitágoras y sé aplicarla en distintos contextos.

La información ofrecida por esta autoevaluación se puede resumir en 3 puntos:

1- La mayoría de las frases presentadas sobre conceptos de la Geometría elemental abordados por el REI son reconocidas por los estudiantes pero no dominadas.

2.- Existe una sensación de dominio en las frases que plantean elementos de Geometría sintética. Este hecho se achaca a que los alumnos llevaban trabajando desde enero de ese año tareas de Geometría sintética en la asignatura de Educación Plástica y Visual.

3. El Teorema de Pitágoras no es conocido ni ha sido abordado en cursos anteriores.

Este momento se abordó en 4 fases: una primera fase a cargo del profesor de presentación del REI, una segunda fase de diálogo entre profesor y alumnos en gran grupo en la que se acotó la cuestión generatriz, una tercera fase en la que se trabajó en grupos cooperativos y una fase final de puesta en común.

Fase 1: Presentación a cargo del profesor

Una vez acabado el cuestionario se colocó la clase en grupos cooperativos y el profesor tomó la palabra para explicar la pregunta que da origen al proceso de estudio.

La explicación inicial fue la siguiente:

Profesor: A lo largo de las siguientes semanas vamos a trabajar de forma cooperativa para intentar resolver entre todos el siguiente problema:

Supongamos que hemos heredado la parcela del colegio totalmente vacía. En ella queremos construir una vivienda para cada uno, de forma que todos tengamos la misma área para construir.

¿Cómo se puede dividir la parcela del colegio en 27 áreas iguales?

Como puede verse, la cuestión generatriz se presentó a los estudiantes adaptada a su contexto escolar y al número de estudiantes presente en la clase.

Fase 2: Diálogo entre profesor y alumnos en gran grupo

Los alumnos realizaron diferentes preguntas. El sentido de las preguntas, como se verá en los extractos de diálogos reproducidos, está orientado por dos objetivos: definir mejor el problema estableciendo las condiciones exactas que se deben cumplir y tratar de simplificar las condiciones iniciales para tratar de dar una respuesta rápida al problema planteado.

Algunos de los diálogos que ejemplifican el acotamiento del problema se recogen a continuación:

Alumno 1: ¿Debemos tener en cuenta las cuestas?

Profesor: Al tratarse de una construcción la empresa constructora se encarga de dejar la parcela totalmente plana igualando el terreno.

Alumno 2: ¿Se van a tener en cuenta las calles?

Profesor: Buena pregunta, eso es algo que cada uno de los grupos deberá decidir a la hora de afrontar el proyecto.

Alumno 2: Yo creo, que se debe poder acceder a todas las parcelas, no se puede acceder a tu casa pasando por la parcela del vecino.

Profesor: Tienes razón, seguramente será una cuestión que tendréis que tener en cuenta más adelante.

Alumno 3: El trabajo que vamos a hacer por grupos, ¿es competitivo?

Profesor: No, vamos a trabajar en grupos pero siempre vamos a debatir nuestras respuestas en común, por lo que todos vamos a poder beneficiarnos de las ideas que surjan de otros grupos e incorporarlas a nuestro proyecto si lo estimamos oportuno.

Estos diálogos demuestran lo importante que resulta para los alumnos la concreción del problema en el mundo real y cercano y la clarificación de las condiciones de trabajo. Las preguntas aquí no giran aún en la búsqueda de objetos matemáticos para resolver el problema. Los ejemplos anteriores muestran una fase anterior a la matematización en la que los estudiantes están aún imaginado cómo resolver o afrontar la cuestión en el contexto real y en la que están preocupados por la organización del trabajo que se plantea.

Una vez resueltas estas cuestiones aparecen otras cuestiones que sí hacen referencia a objetos matemáticos. Los diálogos que se recogen a continuación son muestra de ello:

Alumno 1: El colegio tiene lados de la parcela que no son rectos.

Profesor: Cierto, tendremos que encontrar la forma de medirlos también.

Alumno 1: ¿Se podrían dejar los lados irregulares para zonas comunes?

Profesor: De nuevo es una cuestión que tendremos que valorar en cada grupo a la hora de plantear nuestra respuesta, ten en cuenta que estamos ante un problema abierto *donde la solución no es única.*

Alumno 2: Yo creo que podemos utilizar el Teorema de Tales para medir la sombra del colegio y calcular la superficie con eso.

Profesor: Bueno, parte de lo que dices puede ser cierto, seguramente cuando más adelante pongamos en común nuestras respuestas, podremos elegir aquella que nos parezca más adecuada. Cuando pongamos en común nuestras respuestas tendréis la posibilidad de explicar a los demás vuestras ideas. No es un problema cerrado. Cada grupo debe buscar su solución incorporando lo que los demás aportan.

Los profesores no tenemos la respuesta, os daremos algunas respuestas a problemas concretos, os ofreceremos fichas y libros de trabajo pero también seréis vosotros los que debéis buscar vuestras propias respuestas buscando en Internet, en otros libros… El trabajo lo haremos entre todos y con las respuestas de todos. Cada grupo elaborará su respuesta.

Vemos en estos diálogos cómo algunos alumnos están pensando en posibles soluciones al problema pero lo hacen ya introduciendo elementos matemáticos en la pregunta que demuestran que se está produciendo el contraste entre los objetos matemáticos conocidos y la cuestión generatriz.

Adicionalmente en la respuesta del profesor se aprovecha para indicar algunos cambios que se van a dar en la metodología de aula. En concreto se hace referencia a la topogénesis, con las referencias al trabajo compartido entre estudiantes y profesores, a la cronogénesis, con las referencias a un problema abierto y por tanto no lineal, y a la mesogénesis, con las referencias a las aportaciones que pueden realizar los alumnos y a la multiplicidad de fuentes posibles y no definidas de antemano.

Fase 3: Trabajo en grupo cooperativo.

Se plantea a los estudiantes que utilicen la técnica cooperativa folio giratorio para responder a tres preguntas:

- ¿Qué conocemos?

- ¿Qué desconocemos?
- ¿Qué necesitamos para realizar la tarea?

Estas tres preguntas buscan que todos los estudiantes se centren en la cuestión generatriz y prepara el terreno para dar paso al momento exploratorio en la siguiente sesión.

Fase 4: Puesta en común del trabajo cooperativo

Los últimos minutos se utilizan para poner en común las respuestas a las preguntas anteriores de todos los grupos de forma que se pueda comenzar la siguiente sesión a partir de esta primera reflexión.

A continuación se presentan las respuestas a las distintas preguntas tal y como quedaron reflejadas en la pizarra:

- ¿Qué conocemos?
  - » Unidades de medida.
  - » Figuras geométricas.
  - » Medir en el papel las figuras geométricas.
  - » La cantidad de parcelas que tenemos que hacer.
  - » Que existe una maqueta del colegio en la recepción.
  - » Que las parcelas son planas.
  - » Que se pueden hacer reglas de 3.
  - » Que el Teorema de Tales sirve para redimensionar figuras.

- ¿Qué desconocemos?
  - » Tamaño del colegio, de las parcelas y de las casas.
  - » Si nuestro diseño va a dedicar espacio a calles y zonas comunes.
  - » No sabemos dónde están los planos del colegio y dónde obtenerlos si existen.
  - » No sabemos realizar trabajos de construcción ni de obra.
  - » No sabemos la forma que tiene la parcela del colegio.
  - » No sabemos si tenemos límite de tiempo y de dinero para realizar las divisiones.

- ¿Qué necesitamos para realizar la tarea?
  - » Área del terreno y su forma.
  - » El Sistema Métrico Decimal.
  - » Los planos del colegio.
  - » Las medidas del colegio.
  - » Los materiales que vamos a usar para realizar las divisiones y el dinero del que disponemos.
  - » Calculadoras.
  - » Un metro gigante.
  - » Un helicóptero con cámara.
  - » Un ordenador con acceso a Internet.
  - » Reglas de diferentes tamaños.
  - » La maqueta de la recepción del colegio.

Vemos en esta puesta en común cómo aparecen referencias a varios EG de los contemplados en nuestro MER, en concreto vemos referencias a:

EG 1: La distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une.

Unidades de medida, medir en el papel las figuras geométricas, las medidas del colegio.

EG 2: El área encerrada por una figura rectangular es equivalente a la suma de las unidades de superficie que están contenidas dentro de ella.

Área del terreno y su forma, figuras geométricas

EG 4: Proporcionalidad

Que se pueden hacer reglas de 3

EG 8: Teorema de Tales

Que el Teorema de Tales sirve para redimensionar figuras

También podemos observar indicios del conflicto que surge relativo a los diferentes niveles del espacio, viendo ya desde el principio que surgen dudas sobre la validez de las técnicas del micro-espacio en el macro-espacio. Presentamos varios ejemplos:

- Medir en el papel.
- Que existe una maqueta.
- Que el Teorema de Tales sirve para redimensionar figuras.
- No sabemos donde están los planos.
- No sabemos realizar trabajos de construcción y de obra.
- Los materiales que vamos a usar para realizar las divisiones, un metro gigante, reglas de diferentes tamaños,…

Como puede verse, esta primera sesión ha estado dominada por el momento del primer encuentro y se han dado pasos hacia el primer estadio de la modelización a realizar, dedicando la mayor parte del tiempo a delimitar el problema y a empezar a plantear aquellos aspectos del problema que van a permitir construir un primer modelo para responder a la cuestión generatriz.

4.1.2. Sesión del 6 de abril de 2016.

1. Datos de la Sesión

Número de Sesión	2
Hora de inicio-fin	8:15-9:10
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

El objetivo de la sesión es comenzar con la modelización M_0 y las primeras cuestiones derivadas. Se espera abordar las siguientes cuestiones y las siguientes respuestas.

Q_1: ¿Cómo se puede realizar una medición no subjetiva de una región en el macro-espacio?

Q_2: ¿Qué unidad de medida es la más adecuada para medir longitudes en el macro-espacio?

Q_3: ¿Qué herramientas son las que nos permiten medir longitudes en el macro-espacio?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_1: Medida en el macro-espacio a partir de unidades antropométricas.

R_2: Utilización de herramientas del micro-espacio (regla, escuadra, compás) para medir el macro-espacio.

R_3: Utilización del Sistema Internacional de Unidades.

3. Descripción de la sesión

Durante la sesión se pueden observar 2 momentos de estudio.

Durante los primeros minutos de la clase se da continuidad a lo puesto en común al final de la clase anterior. El profesor va guiando una reflexión respecto a las preguntas planteadas y durante la misma se seleccionan tres posibilidades para comenzar a afrontar la tarea. La toma de imágenes aérea a partir de un helicóptero con cámara, la medición sobre la maqueta del centro situada en el hall y la medición directa en el macro-espacio.

Dada la inviabilidad del uso de un helicóptero, y como lo previsto en esta sesión es comenzar con las tareas de medición, el profesor sugiere a los alumnos utilizar la sesión para intentar la tercera de las maneras, la medición directa en el macro-espacio.

Por razones de organización, dentro de la institución, se opta por no sacar a los alumnos al exterior del centro y se decide llevar a los alumnos a un espacio interior, el aula de tecnología de la información y de la comunicación. Este aula es la más grande del colegio, a excepción del salón de actos, por lo que permite que los alumnos puedan trabajar en grupos sin molestarse. Sin embargo, trabajar en este espacio supone una modificación a lo previsto ya que en lugar de abordar la medición en el macro-espacio, se afronta la medición en el meso-espacio.

Una vez realizado el traslado se distribuye a los alumnos por grupos cooperativos a lo largo del aula de forma que exista una separación entre grupos de varios metros. Se indica a los alumnos que deben medir la habitación y realizar un plano de la misma. El profesor deja en un lugar central del aula varias cajas con reglas, escuadras y cartabones de pizarra. Algunos alumnos preguntan si hay flexómetros y se les indica que no, pero que pueden traerlos de casa si lo estiman oportuno para futuras sesiones.

La mitad de la sala está provista de sillas de pala y pizarra y la otra mitad está dedicada a sala de informática, con 25 puestos fijos dotados de ordenador de sobremesa, mesa y silla que se sitúan a lo largo de las paredes formando una U.

Figura 58. Sala de tecnología de la información y la comunicación. Elaboración propia.

Los alumnos comienzan las mediciones utilizando varios procedimientos de forma simultanea. Los procedimientos observados fueron:

- Medir la sala utilizando pasos.

Figura 59. Medición del meso-espacio utilizando pasos. Elaboración propia.

- Medir la sala poniendo un pie tras otro.

Figura 60. Medición del meso-espacio utilizando pies. Elaboración propia.

- Utilizar las reglas de pizarra para medir directamente sobre la pared a la altura de la vista, señalando con el dedo el lugar marcado por el final de la regla y trasladando la regla haciendo coincidir el inicio de la misma con el lugar señalado.

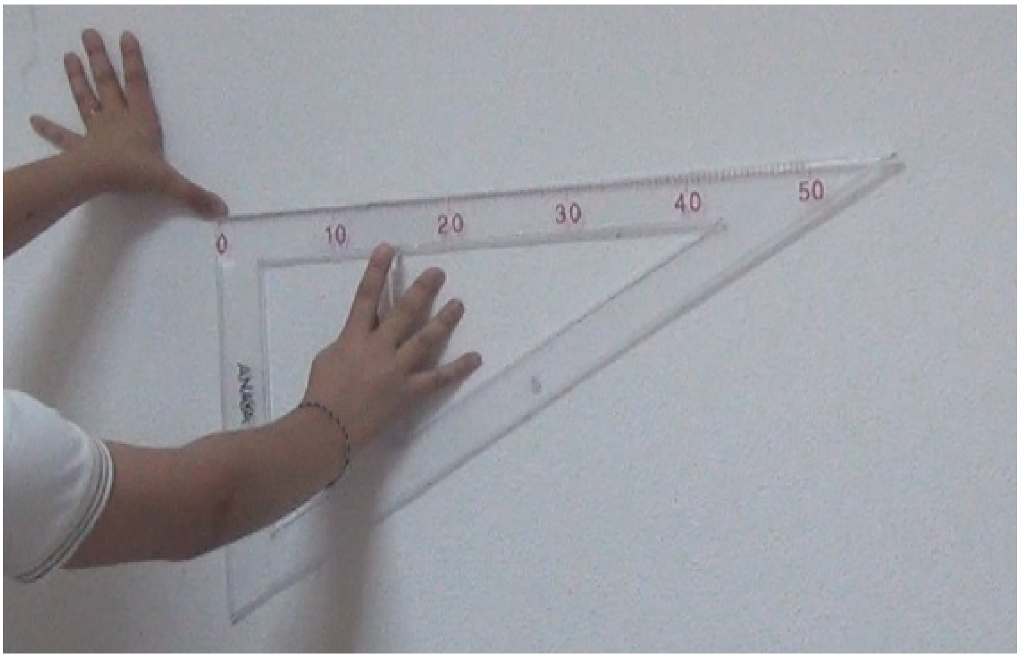


Figura 61. Medición del meso-espacio utilizando reglas de pizarra. Elaboración propia.

- Asumir que la sala es un paralelogramo y asumir que una pared es igual a la que está situada frente a ella.

Figura 62. Medición del meso-espacio asumiendo paralelismo. Elaboración propia.

- Realizar una simplificación del espacio eliminado columnas, puertas y ventanas y asumir que el espacio a medir es rectángular.

- Utilizar el mapa de evacuación situado sobre la puerta.

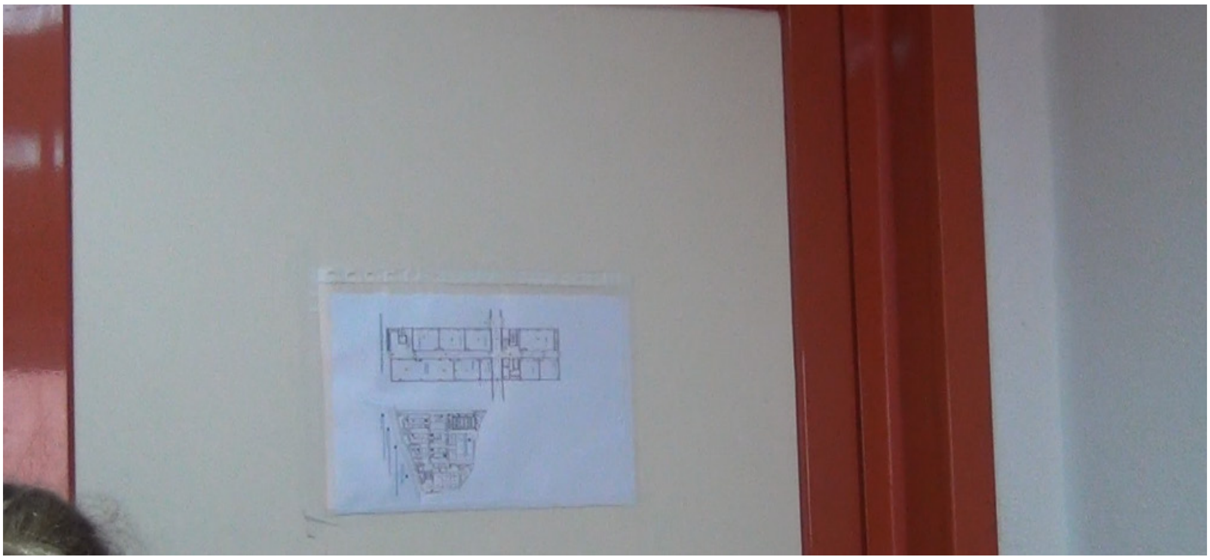


Figura 63. Medición del meso-espacio utilizando el plano de evacuación. Elaboración propia.

Todos estos intentos son claramente representativos del momento exploratorio donde los alumnos están invirtiendo tiempo en la búsqueda de una técnica que resuelva la cuestión que estamos abordando. Las tareas abordadas aquí son EP2 y EP8 (medir la longitud de un lado y el perímetro en el meso-espacio) y ambas utilizan EM1 (La distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une). También podemos apreciar en la medida mediante traslación de reglas el EM15 (Poner en una línea recta un segmento igual a uno dado en un punto dado como extremo perteneciente a la línea recta), y del EP 45 (trasladar un segmento conocido sobre una línea a partir de un punto). No obstante en nuestro MER preveíamos esta técnica para el trazado en el micro-espacio, no tanto para la medición en el meso-espacio.

Los planos realizados durante esta sesión son planos que no guardan ninguna relación de escala con la habitación medida. Sin embargo, uno de los grupos ha caído en la cuenta que en las puertas existe un plano a escala y que tal vez la solución podría hacerse a partir del EM12 (Razón de semejanza para longitudes) y del EP38 (obtener análiticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante ampliación de la original). Se trata de una idea que aparece aquí por primera vez pero que no tiene desarrollo por el momento. El diálogo que se produce sobre está técnica se reproduce a continuación:

Alumno 1: Profe, podemos usar el plano de evacuación para medir todo el cole a partir de nuestras mediciones.

Profesor: Puede ser,… De las mediciones que habéis hecho vosotros en la realidad a esta (señalando el plano de la habitación medida) y de esta a esta (señalando el plano de la planta y su ubicación en el plano general) seguro que hay alguna manera de que con las medidas que hemos tomado hoy se puedan sacar las medidas de todo el colegio.

A lo mejor podemos añadir una idea nueva a las que teníamos del helicóptero y la maqueta. Guardad la idea para la puesta en común de mañana.

De las cuestiones previstas podemos decir que se ha abordado una modificación a Q_1:

Q_{1b}: ¿Cómo se puede realizar una medición no subjetiva en el meso-espacio?

Las respuestas esperadas a esta cuestión han sido las previstas:

R_1: Medida del macro-espacio a partir de unidades antropométricas.

R_2: Utilización de herramientas del micro-espacio (regla, escuadra, compás) para medir el macro-espacio.

Las cuestión Q_2 adaptada al meso-espacio se ha tratado de forma natural y todos los grupos han usado la respuesta esperada utilizando unidades del sistema internacional. Incluso las mediciones basadas en pies y pasos eran transformadas a centímetros multiplicando el número de pasos o pies por los centímetros que ocupaba un paso o un pie, con el consiguiente error.

Q_{2b}: ¿Qué unidad de medida es la más adecuada para medir longitudes en el meso-espacio?

R_3: Utilización del sistema internacional de medida.

La pregunta Q_3 no ha sido abordada en esta sesión y tan solo una alumna manifiesta en voz alta sus dudas sobre la posibilidad de medir de esta forma en el macro-espacio.

Q_3: ¿Qué herramientas son las que nos permiten medir longitudes en el macro-espacio?

No ha sido tratada como tal en esta sesión.

Para concluir la sesión se vuelve a la clase y se pone en común los planos obtenidos, el profesor señala que ninguno de los planos realizados ha sido realizado a escala y que en ellos se representan mediante segmentos de cualquier tamaño las medidas tomadas. Aunque en algunos casos ayudados por la cuadricula del papel aparece el EP 62 (trazado de un rectángulo dado sus lados) en la mayoría de los casos el trazado es a mano alzada.

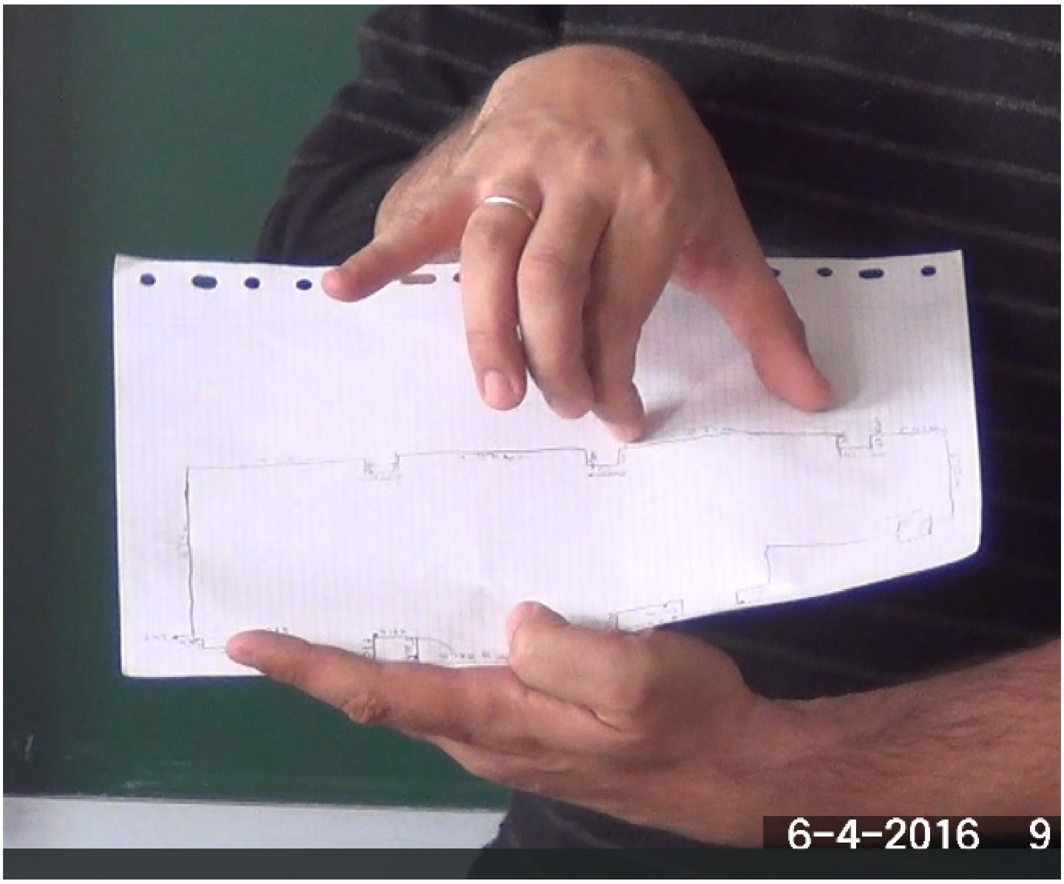


Figura 64. Plano de la clase de tecnología de la información y la comunicación que no guarda una relación de semejanza con el aula real. Elaboración propia.

En esta puesta en común uno de los grupos plantea la posibilidad de utilizar hojas cuadriculadas para representar las longitudes medidas y propone una primera razón de semejanza en la que un cuadrado del papel representará 10 cm. Reproducimos el diálogo aquí:

Profesor: ¿Tenéis alguna idea para resolver este problema?

Alumno 1: A lo mejor con cuadraditos.

Profesor: Entonces vais a utilizar un cuadradito que... ¿Cuánto va a medir?

Alumno 2: ¡Un centímetro! O sea… 10 centímetros.

Profesor: ¿Un cuadradito son 10 centímetros?

Alumno 1: Pero algunas medidas tienen decimales…

Alumno 2: No importa podemos utilizar medio cuadradito para cuando tengamos 5 centímetros.

Profesor: Tendremos que pensar entre todos cuanto va a representar un cuadrito.

Alumno 2: ¡10 centímetros!

Profesor: Bueno esta tarea no es para ahora, la veremos en la clase siguiente pero así ya la vais pensando. Tenemos unas medidas, tenemos una hoja con cuadritos. Tendremos que pensar qué valor le damos a esos cuadritos para representar nuestra habitación y representarla bien.

En este diálogo se ve de nuevo la aparición de EM12 y de EP39. Ante la falta de tiempo de la sesión el profesor plantea la siguiente pregunta (esta cuestión es similar a Q_8 y aparece aquí sin haber agotado aún la modelización M_0):

¿Cómo representar en el papel un plano a escala de la sala medida?

Se anima a los alumnos a buscar en Internet, en libros, preguntando a otros profesores,…

El trabajo durante esta sesión es un buen ejemplo del estadio 2 de la modelización M_0 abordada. Los alumnos, una vez conocidos y delimitados los aspectos relevantes del problema inicial, han pasado a estudiar las distintas técnicas matemáticas que sirven para ir acercándose a la cuestión estudiada.

Algunos de los planos realizados en esta sesión se muestran a continuación:

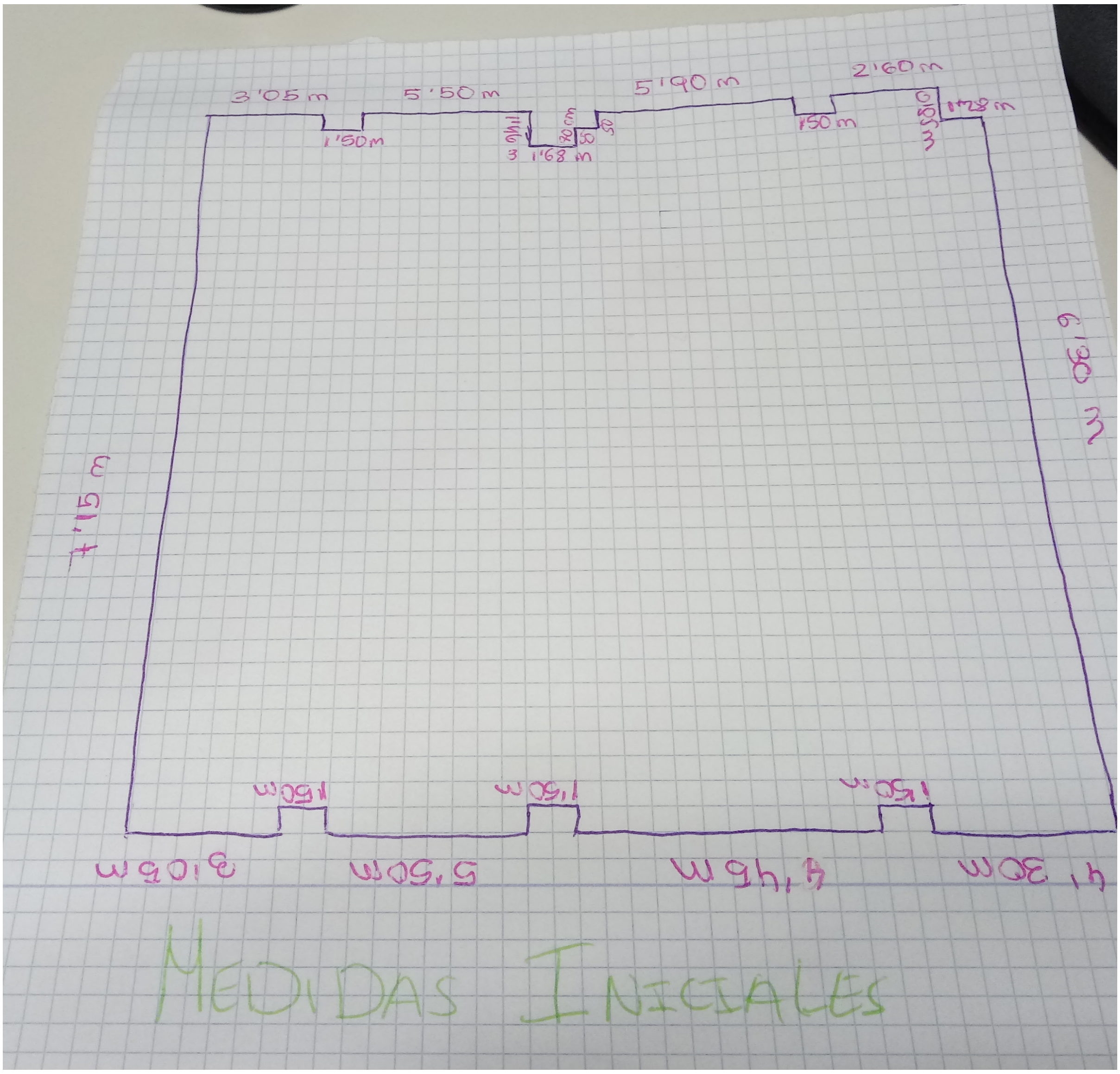


Figura 65. Plano de la clase de tecnología de la información y la comunicación que no guarda una relación de semejanza con el aula real 2. Elaboración propia.

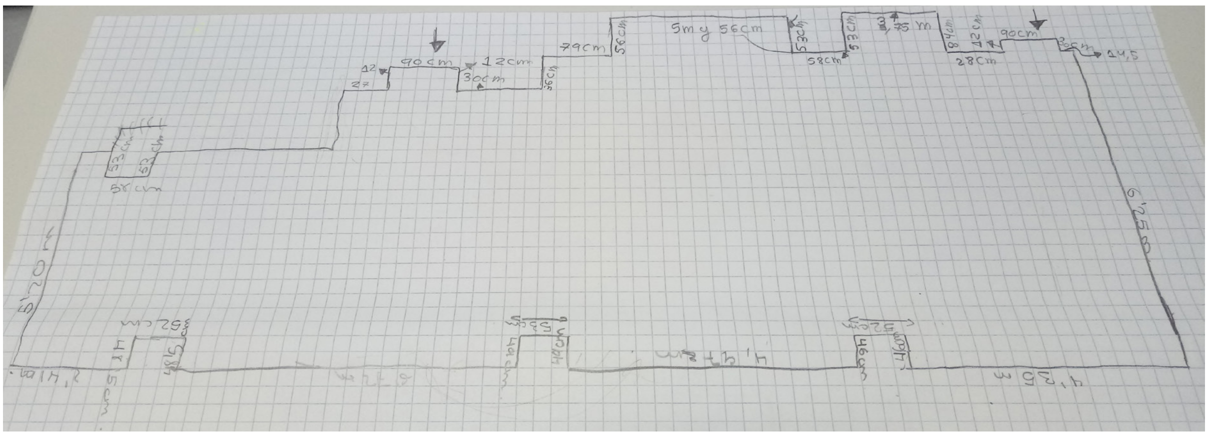


Figura 66. Plano de la clase de tecnología de la información y la comunicación que no guarda una relación de semejanza con el aula real 3. Elaboración propia.

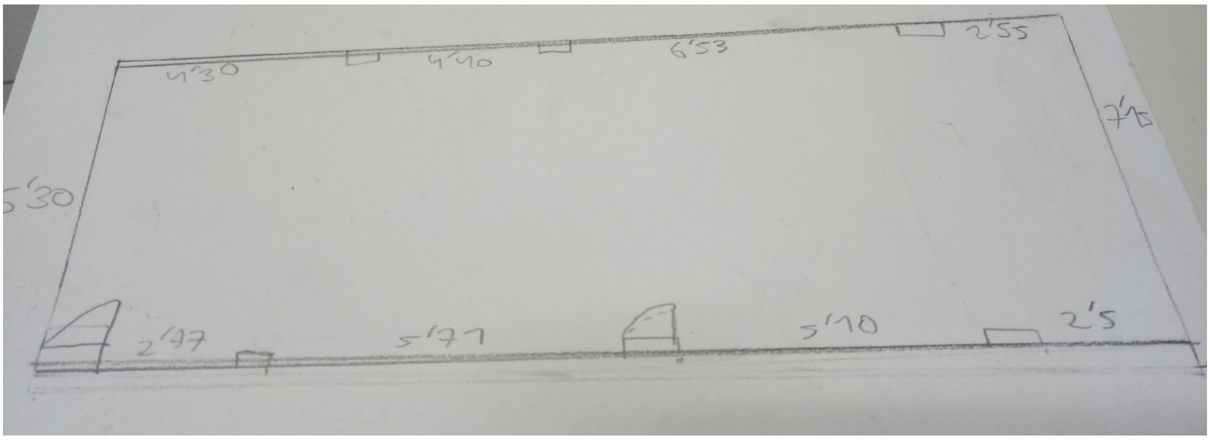


Figura 67. Plano de la clase de tecnología de la información y la comunicación que no guarda una relación de semejanza con el aula real 3. Elaboración propia.

4.1.3. Sesión del 7 de abril de 2016.

1. Datos de la Sesión

Número de Sesión	3
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior ya se avanzó la idea de las escalas, sin embargo aun no se habían agotado las cuestiones relativas a M_0. Por ese motivo, en esta sesión se insiste en las cuestiones relativas a las medidas y se decide avanzar al estadio 3 de la modelización e interpretar el trabajo realizado y los resultados obtenidos.

El objetivo de la sesión es valorar lo obtenido gracias a la modelización M_0 y visibilizar la necesidad de un nuevo modelo basado en la representación a escala.

Al trabajar en el meso-espacio en un aula que solo presenta ángulos rectos se abandona por el momento las cuestiones previstas relativas a las medidas de ángulos Q_4, Q_5 y Q_6.

Por tanto, se espera abordar las siguientes cuestiones y las siguientes respuestas:

Q_7: ¿Cómo se puede cuantificar el error cometido en una medida?

Q_8: ¿Cómo se puede realizar una estimación de las dimensiones reales a partir de una serie de medidas?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_7: Técnicas relativas a la cuantificación del error.

R_8: Técnicas relativas al estudio estadístico de una serie de datos.

3. Descripción de la sesión

Está sesión está dominada completamente por el momento exploratorio, aunque aparece al final de la misma el momento tecnológico-teórico, como se verá a continuación.

La clase comienza con una introducción por parte del profesor recordando algunos de los aspectos que deben ir quedando recogidos en el portfolio individual de los alumnos.

Una vez aclarado ese punto, el profesor indica a los alumnos que saquen los planos elaborados el día anterior para poner en común las medidas realizadas y elaborar entre todos un plano consensuado. Se espera trabajar aquí las cuestiones Q_7 y Q_8.

Para completar esa tarea el profesor traza un rectángulo en la pizarra y pide a los grupos por turnos que le vayan describiendo las irregularidades a incluir en el rectángulo para representar fielmente el plano de la clase medida.

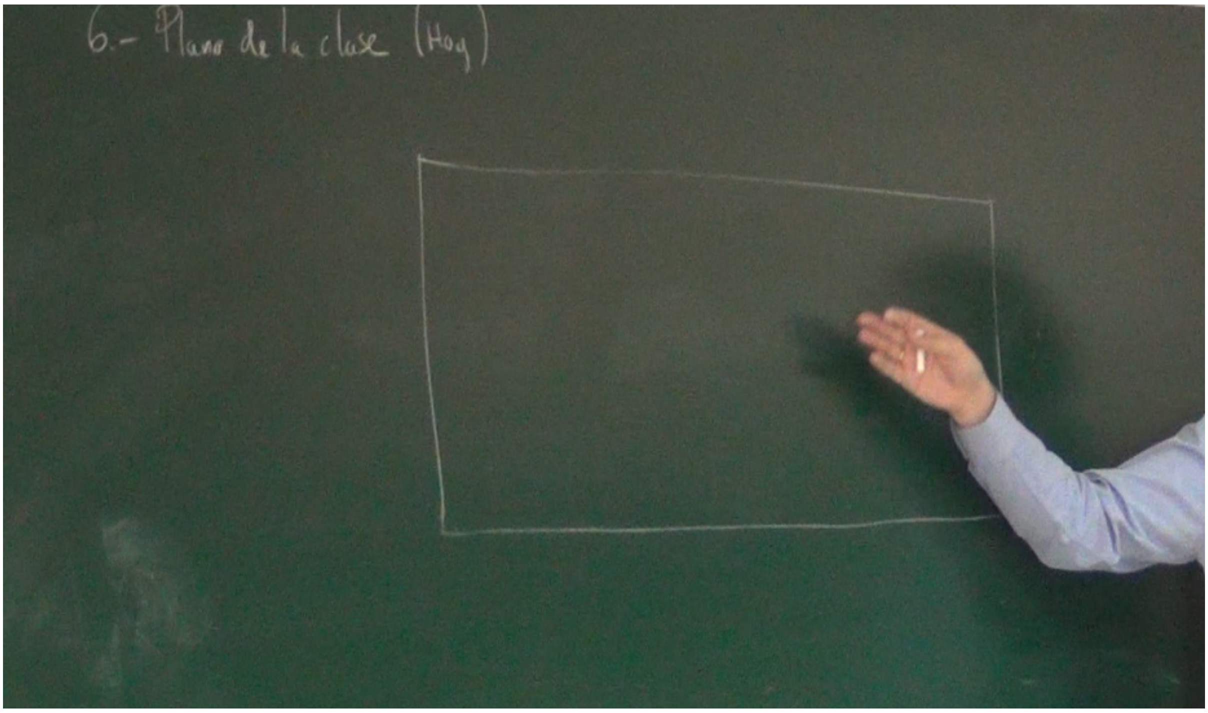


Figura 68. Puesta en común de las irregularidades y medidas tomadas en el aula de tecnología de la información y de la comunicación. Elaboración propia.

Una vez representado el plano con las irregularidades, se ponen en común las medidas correspondientes a los dos lados cortos del rectángulo. Los valores obtenidos por los grupos para las medidas de la pared izquierda son 5,6m, 6,30m, 5,30m, 6,25m, 5,78m y 6,75 m. Los valores obtenidos para las medidas de la pared derecha son 6m, 7,20m, 6,85m, 7,15m y 5,20m.

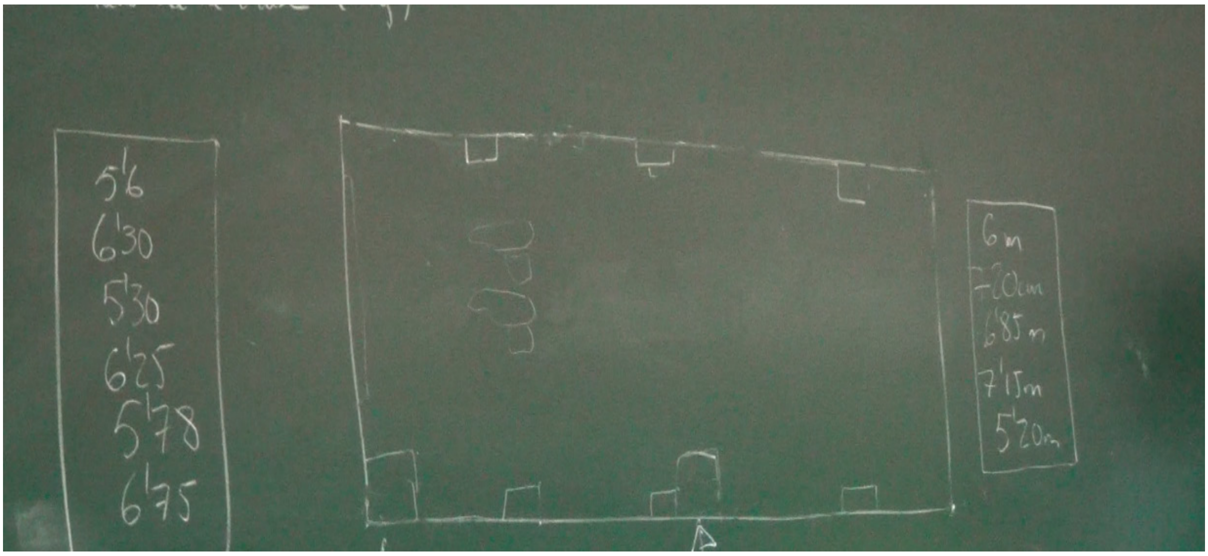


Figura 69. Puesta en común de las medidas tomadas por los grupos para los dos lados cortos del aula de tecnología de la información y de la comunicación. Elaboración propia.

Los alumnos se percatan de que las medidas obtenidas no son iguales y que se producen diferencias muy significativas. El profesor propone utilizar la técnica cooperativa 1-2-4 para buscar una solución a las diferencias obtenidas. Las soluciones ofrecidas por los alumnos tras la dinámica son las siguientes:

1. Calcular la media de las medidas. El profesor después de preguntar cómo ha de hacerse la media encarga a uno de los grupos que calcule la media de la pared izquierda, los alumnos calculan una media de 5,163m. A pesar de ser errónea (el valor correcto es 5,99m) ningún alumno de la clase cuestiona el valor obtenido por el grupo.

2. Calcular la moda. El profesor encarga a uno de los grupos obtener la moda de la pared derecha al no tener valores repetidos el grupo opta por dar como bueno un valor de 6,5m realizando un cálculo estimativo sin base matemática. La clase tampoco cuestiona este resultado.

Se puede ver aquí la respuesta R_8 (técnicas relativas al estudio estadístico de una serie de datos), también podemos ver que los contenidos relativos a la estadística, aunque conocidos en parte, aún no son sólidos y que, por tanto, los alumnos aún no han realizado una modelización correcta de estos conceptos. El profesor aprovecha las respuestas basadas en el tratamiento estadístico de los datos para introducir la idea de dispersión indicando que la fiabilidad de la media o la moda en este caso son cuestionables al existir diferencias de medida muy grandes. Vemos aquí una oportunidad para establecer una cuestión generatriz interesante para abordar la estadística en el primer ciclo que no se abordó en nuestro estudio de caso por alejarse del tema a tratar, pero que da cuenta de lo rica que es la metodología de los REI cooperativos propuesta.

3. Valorar los distintos métodos utilizados para obtener los valores aportados y en función de cómo han sido obtenidos descartar algunos datos y elegir otros.

Esta aportación está mucho más relacionado con R_7 (técnicas relativas a cuantíficar el error). El profesor explica parte de sus observaciones del día anterior y recuerda cómo en algunos casos se hicieron las mediciones utilizando pasos o trasladando los instrumentos de medida a la altura de la vista. De esta forma se trata de visibilizar los errores que pueden darse al medir de este modo. En dos de los grupos se indica que se utilizaron las baldosas del suelo o los baldosines de la pared para realizar la medición (está técnica de medida no fue observada ni se pudo comprobar en las grabaciones realizadas). Los datos obtenidos de este modo para la pared derecha fueron de 7,15m y de 7,20m. El método de medición aparece como clave para validar las respuestas. Exponemos a continuación un ejemplo del diálogo realizado por la clase en este punto.

Profesor: Yo estuve viendo el vídeo de la sesión de ayer y vi gente que medía con pasos, vi gente que medía así,.. (y escenifica la medición por pasos), vi gente en el vídeo que cogía las reglas las ponía sobre la pared, marcaba con el dedo y movía la regla…

Alumno 1: ¡Eso no valía!

Profesor: Vi gente,…

Alumno 2: Nosotros usamos los cuadraditos

Alumno 3: Una baldosa mide 40cm.

Profesor: (dirigiéndose a Alumno 2) Si tu me propones esa idea de medir utilizando una unidad de medida que está fija y que por tanto no se mueve como una regla, te podría mandar a medir ahora mismo. Has planteado un método de medida más fiable que colocar la regla a mano alzada sobre la pared. ¿No te parece?

Alumno 4: Podríamos coger un metro

Profesor: ¡Exactamente! Ahora estamos pensando antes de medir. ¿Es la única posibilidad de medir correctamente, no? La de los pasos que hacía (alumno 1) no era mala porque ellos habían medido primero el pie, lo malo es que cuando mido así es fácil que me desvíe.

Alumno 1: Íbamos sobre las líneas.

Profesor: Bueno, puede ser un método bueno coger la medida de un zapato y usarlo para medir pero,… ¿Tiene alguna ventaja frente a usar una regla?

Alumno 5: Al final es usar una regla diferente, que es un zapato.

Profesor: El grupo 6 quiere aportar algo. Adelante portavoz del grupo 6.

Alumno 6: Nosotros hemos usado las baldosas del suelo.

Profesor: Vale, es parecido al que ha planteado la alumna 2, pero uno usando los baldosines de la pared y otro las baldosas del suelo.

Alumno 6: La diferencia es que nosotros ya usamos ese método.

Alumno 2: ¡Y nosotros!

Profesor: Y, ¿qué valores os ha dado a vosotros la pared de la derecha?

Alumno 6: Nuestra medida es de 720 cm.

Alumno 2: Y la nuestra es de 715 cm.

Profesor: Bueno pues fijaos que pasa aquí, dos grupos que han utilizado independientemente el método de las baldosas que estaban colocadas, han dado mediciones bastante próximas entre sí. Por lo menos parece que estos dos métodos me van a generar medidas que no son tan diferentes entre sí. Parece que el método de las baldosas es más fiable que el de colocar la regla a mano alzada sobre la pared ¿no?

Ante la disparidad de resultados se plantea la posibilidad de medir de nuevo, el profesor aprovecha esa idea para plantear que aunque está dispuesto a volver a medir antes de realizar esas nuevas mediciones hay que pensar y elegir primero el método de medida más adecuado. Se plantea que medir es comparar un determinado segmento con una unidad de referencia y ver cuantas veces está esta unidad contenida en ese segmento (EG 1) y que por tanto es necesario asegurarse de que se utiliza la distancia más corta entre dos puntos (EM1). Se plantea a los grupos una nueva pregunta acerca de qué método consideran más adecuado para llevar a cabo la medición (EP 1) de la longitud de un lado de la figura.

Los alumnos optan por 2 posibles métodos:

1. Utilizar las baldosas o los baldosines del suelo y de la pared.

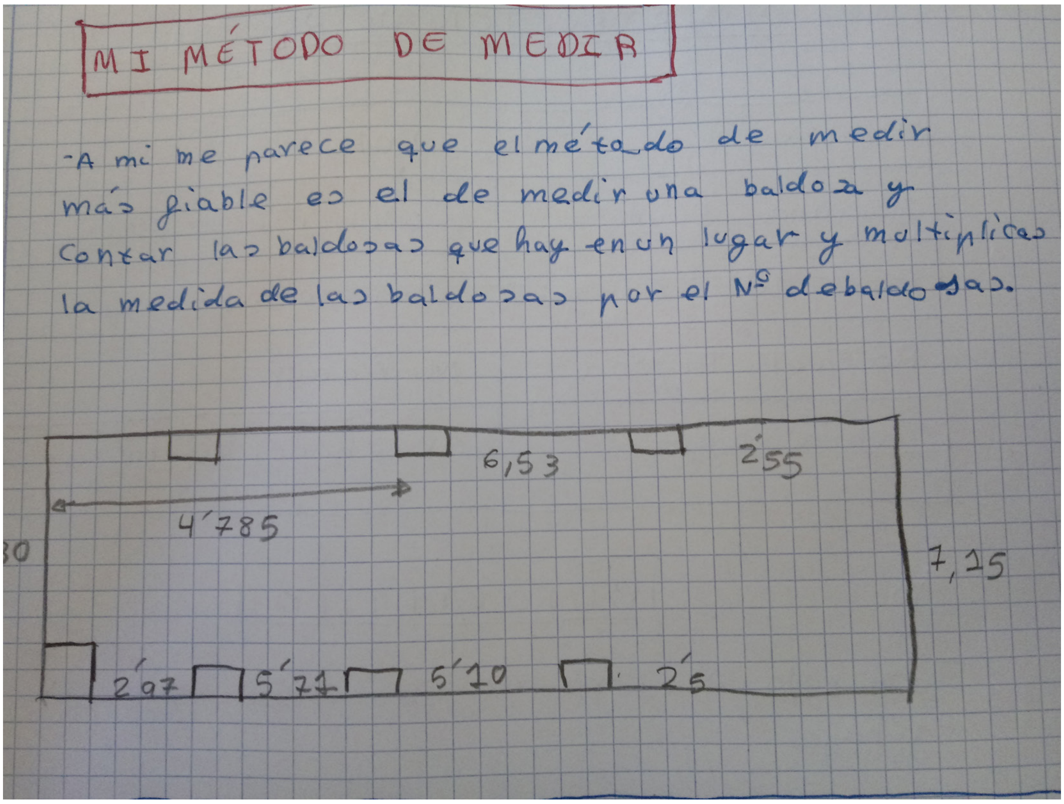


Figura 70. Resumen del método 1 para medir elegido por uno de los grupos. Elaboración propia.

2. Utilizar la parte superior de los baldosines de la pared para utilizarla de guía sobre la que trasladar las reglas. (La parte inferior de las paredes está cubierta de baldosines hasta una altura de 1,20 metros)

Figura 71. Uso de la parte superior de los baldosines para medir apoyando las reglas. Elaboración propia.

Al poner en común los métodos los grupos señalan que el segundo de ellos tiene el inconveniente de que las escuadras y cartabones utilizados no están graduadas en los extremos por lo que habría que tener en cuenta este hecho cuando se utilicen.

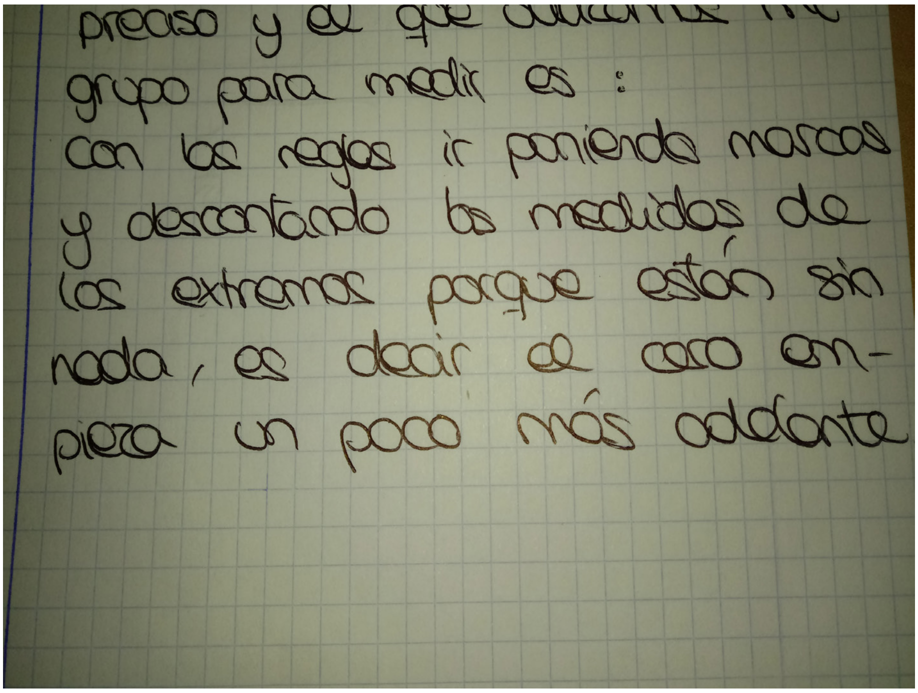

preciso y el que
grupo para medir es:
con las reglas ir poniendo marcas
y descontando las medidas de
los extremos porque están sin
nada, es decir el cero em-
pieza un poco más adelante

Figura 72. Resumen del método 2 para medir elegido por uno de los grupos. Elaboración propia.

Algunos alumnos sugieren la idea de medir únicamente uno de los lados cortos y uno de los lados largos y copiar esas medidas en los lados paralelos. Sin embargo, rápidamente son corregidos por otros alumnos que destacan que al existir irregularidades debido a puertas y columnas es mejor no asumir que ambos lados son iguales.

Gracias a esta reflexión tecnologíca-teórica se espera poder dar por concluido el momento de estudio exploratorio relativo a la medición de longitudes y dar paso en la siguiente sesión al momento del trabajo de la técnica.

El profesor índica que la actividad propuesta para esa sesión consistía en poner en común las medidas y elaborar un plano a escala con las medidas consensuadas pero que ante las diferencias de medición es importante no avanzar todavía y rehacer la actividad de medición. Este punto es importante porque se señala que el proceso de estudio e investigación es abierto y que las cuestiones surgidas en esta sesión sobre la validez de las medidas son parte del proceso de estudio e investigación.

Se llega a la conclusión en el grupo de que el proceso de medición no es sencillo y que debe hacerse siguiendo una metodología pensada con antelación que otorge fiabilidad al proceso. Vemos aquí un ejemplo de avance y retroceso en el proceso de modelización al avanzar hacia el estadio 3 e interpretar el trabajo realizado se decide retroceder de nuevo al estadio 2 y replantearse el modelo matemático construyendo uno nuevo.

En esta sesión nos hemos alejado del EG4 (proporcionalidad) y hemos centrado todo el proceso en el EG 1 (la distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une), aunque en todo momento estamos hablando de las medidas realizadas en el meso-espacio, en realidad lo tratado aquí en cuanto a errores y tratamiento de una serie de medidas es válido en el micro y en el macro-espacio. Por lo que de forma directa o indirecta se están abordando los EP que van desde EP1 hasta EP3 y desde el EP6 hasta el EP 9 y se está tratando de consolidar el EM1 (medición de la distancia entre dos puntos).

Para finalizar la sesión se plantea una pregunta que deben pensar de cara a la siguiente sesión:

¿Cuál es el método ideal para realizar la medición del aula solicitada?

El profesor aprovecha la idea del método 1 para plantear que si se va a usar de referencia las baldosas hay que asegurarse de que estas estén correctamente alineadas y que no hay defectos de construcción. Por tanto plantea la siguiente pregunta (y hace referencia por primera vez a una cuestión, similar a Q_{30}, que se prevé importante en la ultima modelización prevista M_3):

¿Cómo podemos asegurarnos de que las paredes están correctamente alineadas?

Uno de los alumnos contesta que un método posible es utilizar la escuadra y el cartabón para trazar una línea perpendicular a la pared (esta tarea es el EP57 de nuestro MER) y comprobar si la pared se acerca o se aleja de esa línea de forma uniforme. Aquí se intuye una idea intuitiva de paralelismo similar a la planteada en el MER: dos líneas son paralelas si siempre guardan la misma distancia. Y es una respuesta similar a la esperada para Q_{30}.

Durante la sesión uno de los grupos plantea que ellos han realizado una medida de la superficie de la sala restando al rectángulo en el que está inscrita la sala las superficies de las zonas irregulares (tenemos aquí una primera aparición del EG 2, El EM 4 y el EP 20). El profesor agradece la aportación pero indica que el objetivo ahora es ser capaces de medir adecuadamente el perímetro de la sala como paso intermedio para calcular el área. Se produce aquí una situación habitual donde en función de las reflexiones realizadas en los grupos aparecen diferentes caminos y velocidades de resolución. El profesor en este punto tiene que realizar una función de reconducir a los grupos hacia el objetivo general propuesto pero estando alerta por si el camino elegido por alguno de los grupos es más interesante o fértil para la investigación.

4.1.4. Sesión del 8 de abril de 2016 (a).

1. Datos de la Sesión

Número de Sesión	4
Hora de inicio-fin	09:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior se reflejó la importancia del método de medición realizado para dar dar validez a las medidas tomadas en el meso-espacio. Una vez consensuados los métodos en esta sesión se retoman las cuestiones Q_1 y Q_3.

El objetivo de la sesión es consensuar lo obtenido en el proceso de medición gracias a la modelización M_0 y visibilizar la necesidad de un nuevo modelo basado en la representación a escala.

Por tanto, se espera abordar las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_1: ¿Cómo se puede realizar una medición no subjetiva de una región en el meso-espacio?

Q_3: ¿Qué instrumentos de medición son los que nos permiten medir longitudes en el meso-espacio?

Q_9: ¿Cómo reducir un objeto para representarlo sin alterar su forma?

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_2: Utilización de instrumentos de medición del micro-espacio para medir en el macro-espacio.

R_3: Utilización del Sistema Internacional de Unidades.

R_9: Técnicas relativas a la división de números y superficies.

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

3. Descripción de la sesión

En esta sesión se desarrollan dos momentos: un primer momento marcado por el trabajo de la técnica que sirve para cerrar M_0 y un segundo momento del primer encuentro que se produce al iniciar la modelización M_1 (problemas relativos a la representación fiable en el micro-espacio de las longitudes y relaciones angulares del meso y el macro-espacio).

La sesión comienza en la pizarra asignando a los grupos las paredes del aula TIC, para que todos los grupos realicen las mediciones pero sin la necesidad de que todos ellos midan el aula completa. Una vez repartido el espacio se baja a la sala TIC y se procede a medir utilizando una de las dos técnicas señaladas el día anterior.

En la sala los grupos utilizan las baldosas para realizar una primera medición y luego utilizan las reglas para completar la medición de aquellas baldosas que están incompletas. En algunas ocasiones se verifica la medida obtenida contando las baldosas con la medida realizada utilizando las reglas sobre la guía del baldosín o sobre el suelo. Se observa como existe desconfianza en la técnica.

Figura 73. Verificación de la medida obtenida contando baldosas. Elaboración propia.

Es importante que se dedique este tiempo a volver a medir una vez consensuada la técnica de medición para que los alumnos, mediante la práctica repetitiva de mediciones, puedan mejorar su dominio y pongan a punto la EM1 a través de los EP2 y EP8 (medir la longitud de un lado y del perímetro de una figura plana en meso-espacio)..

En ningún caso se plantea a los estudiantes medir la diagonal de la sala y esta tarea prevista en el MER (EP4 a EP6) podía haber supuesto realizar de nuevo una revisión de los métodos encontrados en M_0 al no ser estos válidos para la medición de líneas oblicuas. Se considera un error no haber planteado esta cuestión en este momento. Ya que podría haberse planteado una interesante situación basada en el momento de la institucionalización que no se realizó o la aparición del Teorema de Pitágoras.

Una vez terminadas las mediciones se sube de nuevo a la clase y se ponen en común las medidas obtenidas. El plano consensuado queda de la siguiente manera.

Pared izquierda (según fotografía): 6,30m

Pared superior (según fotografía): 4,78m + 6,53m+ 2,55m = 13,86m

Pared derecha (según fotografía): 7,15m

Pared inferior (según fotografía): 2,97m + 5,71m + 5,10m + 2,5 m = 16,28m

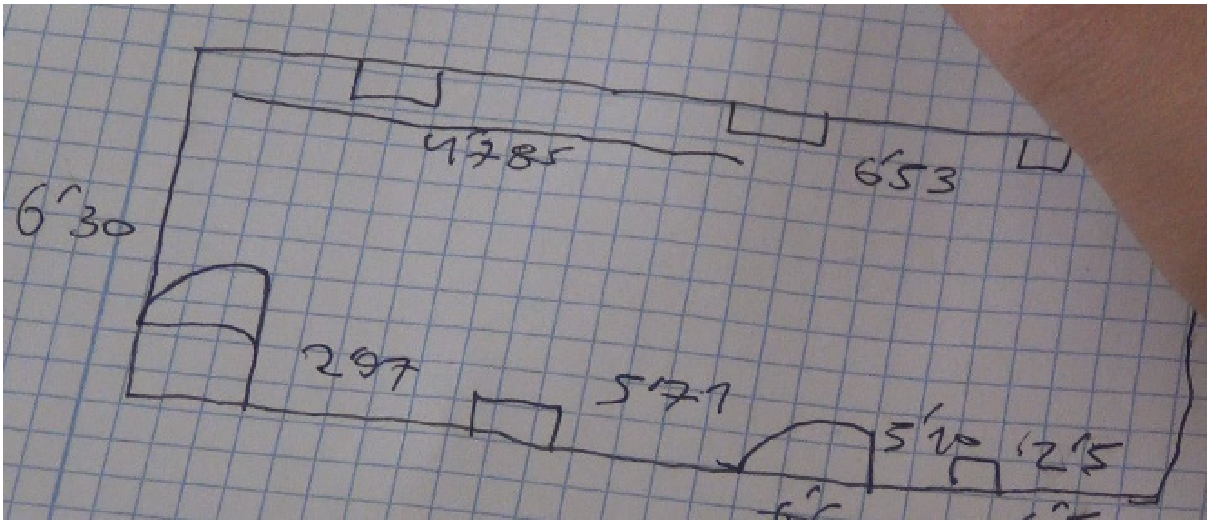


Figura 74. Medidas obtenidas tras la puesta en común de los grupos. Elaboración propia.

En un primer momento, la diferencia de medidas entre la pared superior y la inferior no es reconocida por ningún alumno al no haber realizado la suma de las mediciones parciales.

Se evidencia en ese error que uno de los grupos no ha comprendido aún el método de medición propuesto y no lo ha aplicado correctamente.

El trabajo de modelización M_1 (problemas relativos a la representación fiable en el micro-espacio de las longitudes y relaciones angulares del meso y el macro-espacio) se introduce a partir del siguiente diálogo:

Profesor: Tenéis un plano de la clase, que por supuesto no se corresponde con la realidad, porque 4,78 metros no puede ocupar lo mismo que 2,97 metros (dice mientras señala esas medidas en la pizarra). Esto no está dibujado de forma proporcionada ni a escala ni nada por el estilo. Son solamente las mediciones en un croquis o de un boceto que hemos hecho. Os voy a dar a cada grupo una hoja de papel de diferente tamaño. (se reparten hojas de papel que oscilan entre un DIN A7 hasta un DIN A3). Quiero mesas despejadas con un único papel en el centro y quiero a todo el mundo pensando ¿Cómo conseguimos hacer un plano que sea proporcional a las medidas que hemos realizado y que se ajuste lo mejor posible al papel en blanco suministrado?

Con el planteamiento de esta pregunta se pretende que los alumnos comiencen a pensar en Q_9, Q_{10} y Q_{11} fijando las unidades a representar y suministrando papeles en blanco de diferentes tamaños.

Se distribuye a los alumnos en grupos cooperativos y se plantea que se aborde la actividad mediante la técnica cooperativa 1-2-4.

Inicialmente los grupos utilizan en todos los casos la escala 1cm=1m independientemente del tamaño del papel entregado. Los primeros dibujos del plano a escala se realizan sin utilizar un procedimiento que garantice la perpendicularidad de los lados.

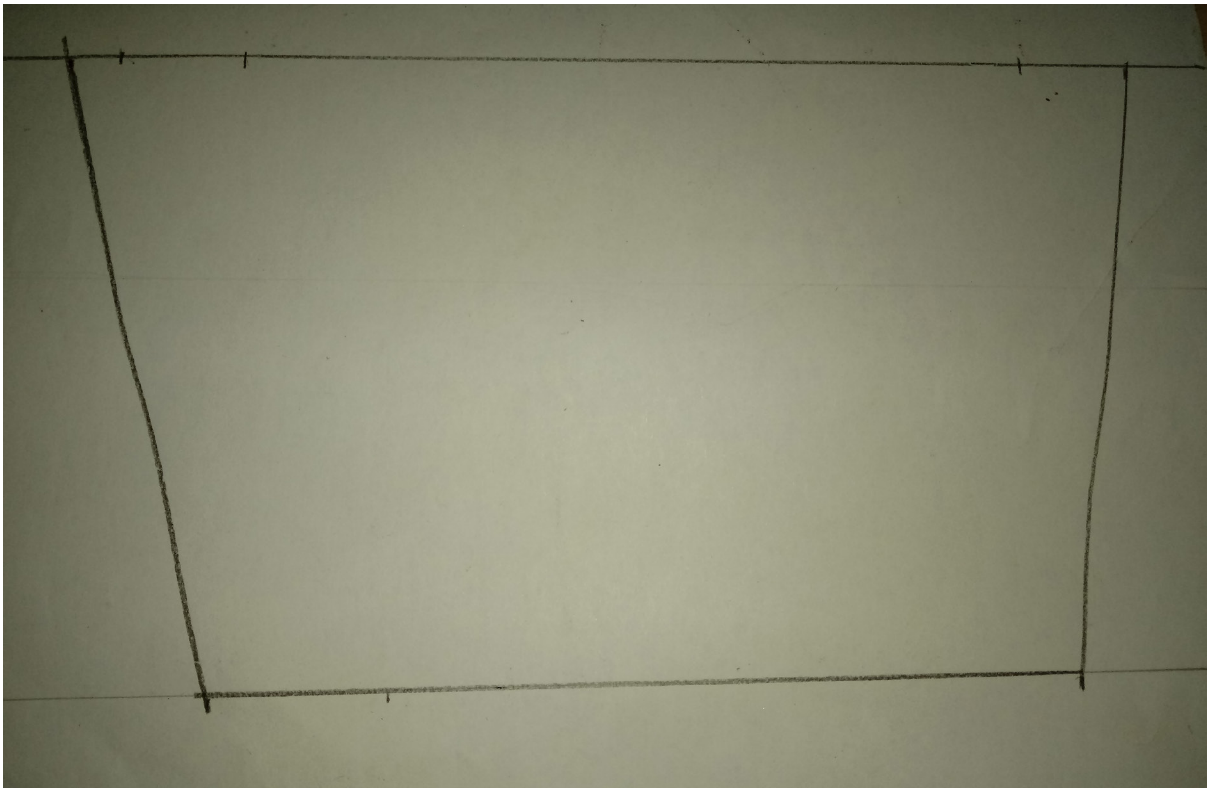


Figura 75. Plano de aula TIC con lados no perpendiculares. Elaboración propia.

Según va avanzando la actividad varios grupos se dan cuenta de que debe haberse producido algún tipo de error en la medida. En la mayoría de los casos se asume que el dato erróneo es el correspondiente al primer dato del lado superior (4,78m). El profesor indica que más tarde él comprobará personalmente el dato y que continúen trasladando el resto de medidas.

A continuación reproducimos un diálogo entre el profesor y uno de los grupos cooperativos:

Profesor: Contadme un poquito ¿Qué es lo que habéis hecho?¿Cómo habéis decidido actuar?

Alumno 1: Que un centímetro sea un metro.

Profesor: Que un centímetro sea un metro, vale. Estaría bien que eso lo anotéis en algún sitio del papel para que no se nos olvide.

Alumno 2: Debe haber algo mal, mira aquí pone 4,78 y nos da… 9. Entonces…

Profesor: A ver, tu tienes en el croquis 4,78 y aquí cuando mides con la regla tienes… 9. (se comprueba la medida como se puede ver en la siguiente imagen).

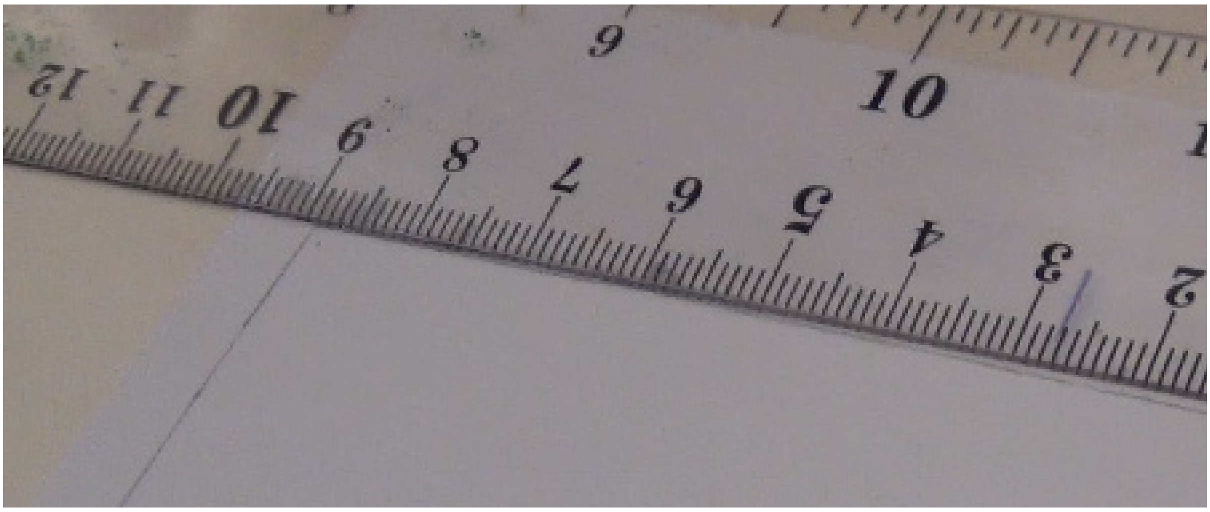


Figura 76. Comprobación de la medida errónea en croquis mediante regla graduada. Elaboración propia.

Profesor: Entonces ¿Qué tenéis que hacer? ¿Qué vais a hacer?

Alumna 2: No sé.

Alumno 3: Yo sí, esto (señalando a la medición de la regla) *es menos que esto* (señalando al croquis) *cortaría un poco de ahí* (señalando al dibujo a escala)

Profesor: Pues hazlo.

Alumno 3: No se puede, la pared no se uniría.

Alumna 2: Yo creo que está mal la medida.

Profesor: Vale luego lo comentamos en la puesta en común y si es necesario realizo yo una comprobación de esa medida.

La escala 1cm=1m en la mayoría de los casos deja gran parte del papel disponible en blanco por lo que el profesor va indicando grupo a grupo que la actividad se considerará correcta si el espacio no utilizado es el menor posible. Con esta indicación la mayoría de los grupos empieza un procedimiento de tanteo para comprobar qué medida de escala es la que más se ajusta al papel.

Al finalizar la sesión todos los grupos ponen en cuestión la medida realizada en la pared superior.

La sesión termina en este punto con la pregunta:

¿Cómo podemos calcular la escala que hace que la representación del plano se ajuste lo más posible a los bordes de un papel dado?

Durante este primer momento los alumnos movilizan los EP de medición de longitudes en el micro-espacio EP1 y EP7. Además al establecer que 1 centímetro del plano equivale a 1 metro de la realidad los alumnos están aplicando el EG 4 de proporcionalidad. Y aplican el caso más sencillo de EM11 y EM12 (proporcionalidad directa y razón de semejanza para longitudes) a través de los EP37 y EP39 (Obtener analíticamente una medida a escala a partir de una figura real conocida la escala y obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando cualquier razón de semejanza).

Sorprende que no se ponga en práctica ningún EM del EG 6 relativo al trazado de paralelas y perpendiculares.

Los estudiantes se enfrentan por primera vez al trabajo de representar dos figuras semejantes, y en el trabajo inicial con los objetos matemáticos relativos a la semejanza parecen prestar únicamente atención a la relación de proporcionalidad que debe existir entre las figuras semejantes sin tener en cuenta en ningún momento las relaciones angulares.

Dentro de la modelización M_1 los alumnos parecen haber decidido que el elemento determinante para reproducir una figura del meso-espacio en el micro-espacio es que la relación entre los lados originales y representados deben guardar en todos los casos la misma razón de proporcionalidad.

4.1.5. Sesión del 8 de abril de 2016 (b)

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	5
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	26
Profesores presentes	Profesor investigador y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior se reflejó la importancia del método de representar a escala las medidas obtenidas en el meso-espacio. Sin embargo, solo se pudo abordar de un modo inicial esta actividad.

El objetivo de la sesión es explorar las diferentes técnicas que permitan reducir las medidas obtenidas de forma que se obtenga un plano a escala de la clase medida. Los alumnos están trabajando en el primer estadio de M_1, tratando de delimitar que aspectos son relevantes a la hora de realizar una representación fiable del meso-espacio en el micro-espacio. También se espera abordar el segundo estadio de la modelización y que se comiencen a estudiar las distintas técnicas para llevarlo a cabo.

Se espera que esta sesión esté dominada por el momento exploratorio. En el que se aborden las siguientes cuestiones:

Q_9: ¿Cómo reducir un objeto para representarlo sin alterar su forma?

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Q_{11}: ¿Cómo se puede realizar una representación precisa de las diferentes formas geométricas del macro-espacio?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_9: Técnicas relativas a la división de números y superficies.

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

R_{12}: Respuestas basadas en el uso de regla y compás.

Es importante señalar que para que la representación sea adecuada los alumnos deberán movilizar por primera vez algunos conocimientos relativos a la Geometría sintética.

3. Descripción de la sesión

Está sesión está caracterizada por el momento exploratorio que se produce al invertir tiempo en la búsqueda de una técnica que resuelva la obra matemática que se aborda en la modelización M_1 (problemas relativos a la representación fiable en el micro-espacio de las longitudes y relaciones angulares del meso y el macro-espacio).

Para dar comienzo a la sesión el profesor delimita claramente la tarea que se va a llevar a cabo. Los alumnos deberán realizar un plano a escala del aula medida trasladando las medidas consensuadas. Para forzar la necesidad de que los alumnos reflexionen sobre la escala necesaria, se añade la condición de que el plano que realicen debe ajustarse lo máximo posible a los bordes de un DIN A3.

Para realizar esta actividad los alumnos deben trabajar el EM 1 (medición de distancia entre dos puntos) y los EM 11 y 12 (proporcionalidad directa y razón de semejanza para longitudes) a partir del EP 1 (medir la longitud de un lado de una figura plana en el micro-espacio) y los EP 37 y 39 (Obtener analíticamente una medida a escala a partir de una figura real conocida la escala y obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando cualquier razón de semejanza). Para cumplir los criterios exigidos en la actividad la mayoría de los grupos utilizan un procedimiento de tanteo a partir de la longitud del lado más largo a representar y de las dimensiones del lado más largo del papel disponible. Se buscan valores por exceso y por defecto hasta que en la mayoría de los casos se establece que la escala debe quedar comprendida entre 2 y 3 cm por metro.

Un ejemplo de este proceso lo tenemos recogido en el siguiente diálogo:

Profesor: ¿Qué vais a hacer? ¿Cómo estáis organizando el trabajo?

Alumno 1: Ahora estamos viendo con qué cantidad de centímetros podríamos dibujarlo para que nos cupiese. Hemos probado con 4 nos pasamos totalmente, con 3 nos seguimos pasando y ahora vamos a probar con 2.

Profesor: Estáis probando entonces con las distintas escalas ¿no?

Alumno 2: Sí.

Profesor (dirigiéndose al alumno 3 del grupo)*: ¿Cuánto crees tú?*

Alumno 3: Uno y medio, dos.

Profesor (dirigiéndose al alumno 2 del grupo)*: ¿Y tú? ¿Cuánto crees que va a salir?*

Alumna 2: ¿En total?

Profesor: Sí. ¿Qué escala vais a usar al final?

Alumna 2: uno con dos

Profesor: Pues,… me parece buena idea que vayáis tanteando y qué vayáis descubriendo hasta donde tenéis que llegar y ya veremos qué escala os sale al final. Luego vengo y me contáis.

Como puede verse, los alumnos están practicando con diferentes razones de semejanza para obtener la más adecuada a las condiciones exigidas. Gracias a esas condiciones se abandona la escala inicial vista en la sesión anterior de 1cm = 1m. Y se va induciendo la idea de que el concepto de escala admite cualquier posibilidad. Durante el proceso los alumnos también realizan cálculos sencillos de proporcionalidad directa, lo que les permite determinar si el lado más largo a representar sobrepasa o no el papel disponible. Vemos aquí ejemplos de EP 37 y EP 39 (obtener analíticamente una medida a escala a partir de una figura real conocida la escala y obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una reducción de la original utilizando cualquier razón de semejanza).

Dentro de este momento exploratorio sorprende encontrar en uno de los grupos la duda de si es posible utilizar una escala para la dimensión horizontal y otra escala diferente para la dimensión vertical. Con la ayuda del profesor se ponen varios ejemplos para comprobar mediante inducción si esa técnica es o no válida para responder a Q_9 y a Q_{11}. Dentro del grupo parece que la idea está siendo criticada por lo que el profesor propone aplicar esa idea para ampliar un cuadrado de dimensiones 1 x 1 (EP 38 obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante mediante una ampliación de la original). Al aplicar dos escalas diferentes al lado horizontal y vertical los alumnos descartan la idea inicial al visibilizar que la figura representada ha dejado de ser cuadrada.

Mientras los grupos van procediendo por tanteo, uno de los alumnos plantea la posibilidad de medir el lado más largo del papel y el lado más largo de la figura a representar para obtener la escala máxima aplicable. Tras realizar los cálculos dentro de su grupo se obtiene una medida máxima de escala de 2,473 cm por metro. Tenemos aquí un ejemplo de EP35 (obtener las medidas de una figura semejante cuando se conocen todos sus datos y la medida de una de las dimensiones en la figura semejante) que aparece por primera vez como resultado de esta exploración.

Al cabo de varios minutos todos los grupos han llegado a una escala en el entorno de los 2,5 cm por metro. En ese momento el profesor detiene la actividad y plantea una puesta en común.

Es interesante señalar que los grupos asumen que la figura a escala es rectangular y que a pesar de las columnas y entrantes que se producen por las puertas no es necesario tener en cuenta ningún dato referido a los ángulos internos de la figura a representar. Incluso hay un grupo que después de representar 3 de los lados con longitudes diferentes unen los vértices para obtener el cuarto de los lados lo que da como resultado un plano que presenta un lado oblicuo que no se corresponde con la realidad.

Para el trazado de los lados perpendiculares únicamente se observa la utilización de EP53 (trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella con escuadra y cartabón).

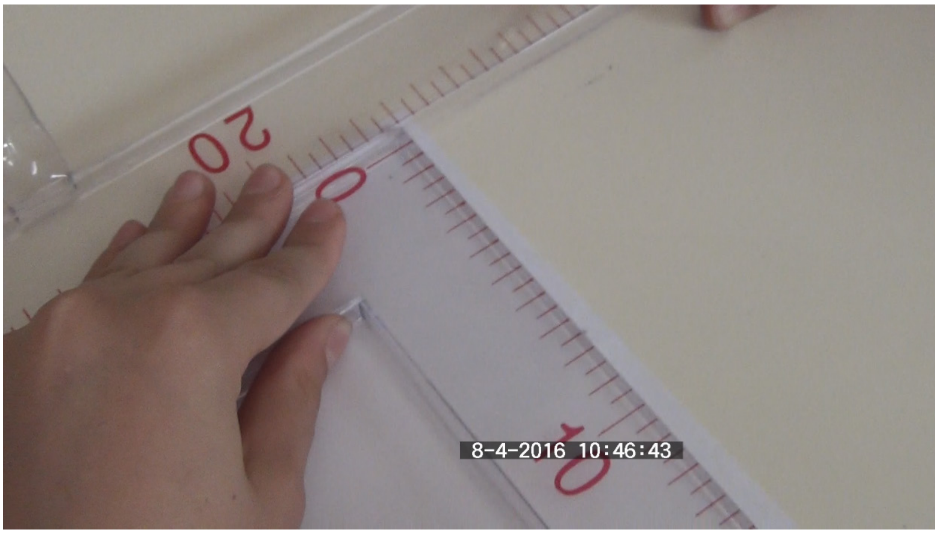


Figura 77. Trazado de perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella con escuadra y cartabón. Elaboración propia.

Los conceptos de semejanza que se empiezan a inducir es que dos figuras son semejantes si sus lados son proporcionales.

Durante la puesta en común se da paso al portavoz del grupo que ha descubierto el EP 35 35 (obtener las medidas de una figura semejante cuando se conocen todos sus datos y la medida de una de las dimensiones en la figura semejante) para que toda la clase pueda incorporar ese EP a su repertorio. El siguiente diálogo ejemplifica esta puesta en común.

Profesor: Hemos estado probando, hemos estado haciendo medidas, hemos medido una medida real, la hemos comprobado de nuevo utilizando las baldosas, hemos pasado esa medida a un papel pequeño utilizando una escala de 1cm = 1m, ahora lo vamos a pasar a un papel grande.

Y de todos los grupos me gustaría que el portavoz del grupo 3 nos explicase cuál ha sido la forma que ellos han encontrado para ajustar lo máximo posible al papel que tenemos.

*Alumno 1: Pues, sumas todas las medidas que tenemos de una de l*as paredes.

Profesor (manda callar a los grupos mediante la señal de silencio)*: A ver, escuchamos, es una buena idea, como es una buena idea la compartimos. Todo el mundo escucha la aportación que ha sacado el grupo 3. Venga escuchamos.*

Alumno 1: Sumas todos los metros de un lado de la pared.

Profesor (va señalando en el plano de la pizarra esas sumas, los alumnos olvidan sumar las columnas)

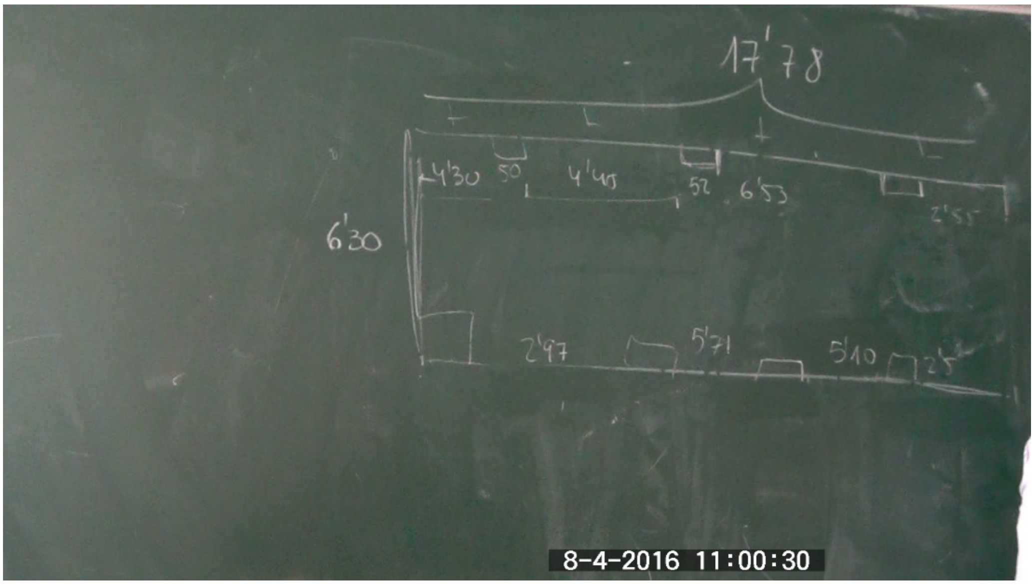


Figura 78. Puesta en común del EP 35. Elaboración propia.

Alumno 1: Ahora mides todos los centímetros que tenga uno de los lados del papel.

Profesor: ¿Y nos da?

Alumno 1: 44cm.

Profesor: ¿Cómo tengo que hacer para ajustar lo más posible al papel una medición?

Si mi papel es de 44 cm ¿Cómo voy a hace para ajustar 17,78m?

Alumno 1: Dividimos 44 entre 17,78.

Profesor (escribiendo la división en la pizarra): Si dividimos 44 entre 17,78 da 2,47. El grupo lo que ha hecho es… Me ajusto al papel completo, una vez ya conozco que son 44cm, mido la distancia más grande que tengo que poner en el papel. Y una vez tengo ambos datos si divido obtengo el valor más alto que puedo utilizar de escala. ¿y si mañana tuviésemos una medida de papel distinta?

Tras este diálogo se pide a los grupos como tarea final que utilizando la técnica del folio giratorio dejen recogido en el cuaderno de equipo las distintas formas que han aprendido para ajustar una medida real al papel dejando el menor margen posible.

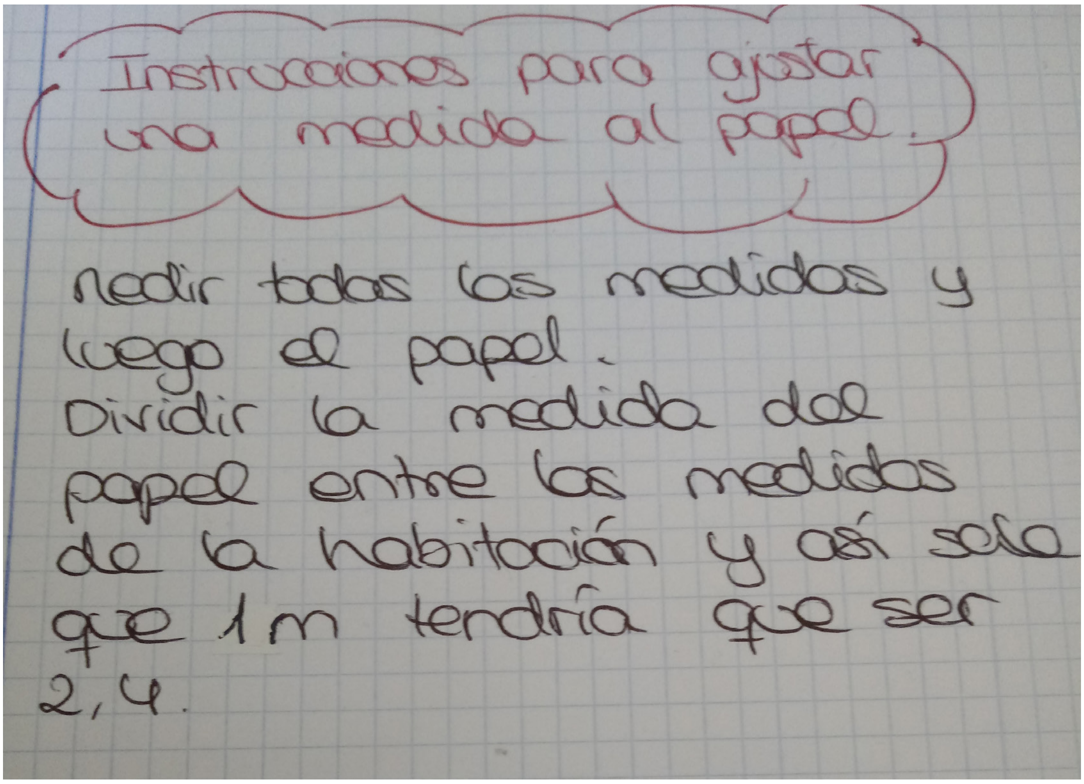


Figura 79. Instrucciones para ajustar la escala al tamaño de papel recogidas en el cuaderno de equipo. Elaboración propia.

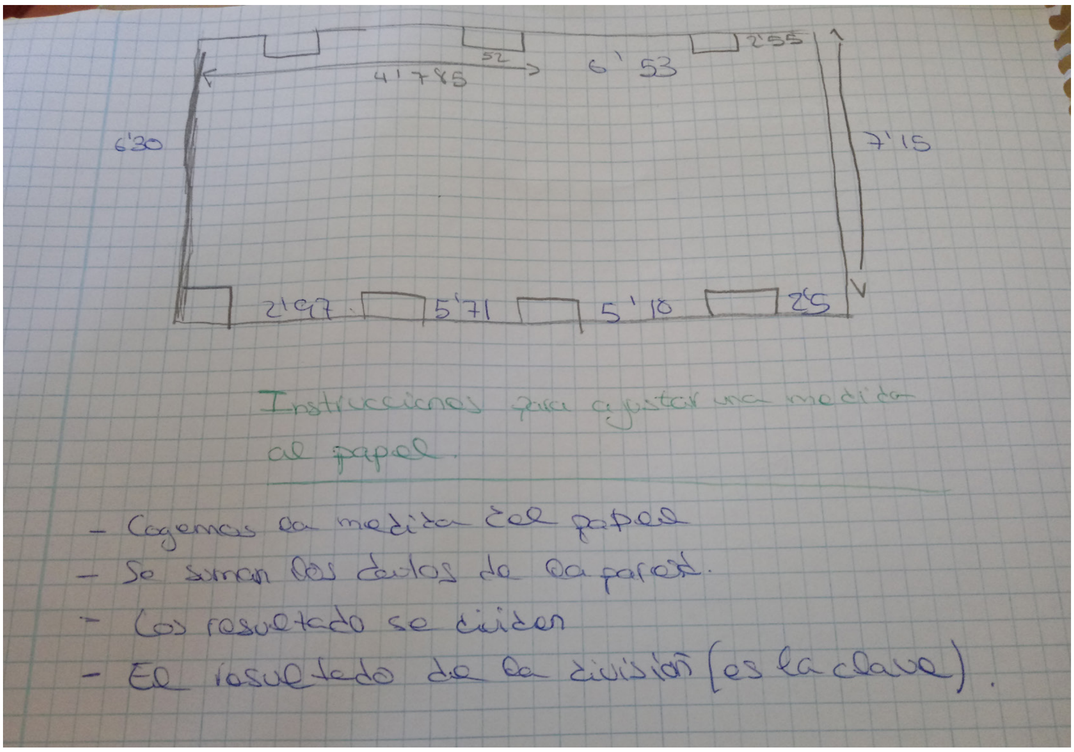


Figura 80. Instrucciones para ajustar la escala al tamaño de papel recogidas en el cuaderno de equipo 2. Elaboración propia.

4.1.6. Sesión del 11 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	6
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior se pusieron en común distintas formas para ajustar una medida real al papel dejando el menor margen posible. Entre todas ellas emergió el EP35 (obtener las medidas de una figura semejante cuando se conocen todos sus datos y la medida de una de las dimensiones en la figura semejante) en uno de los grupos y se puso en común.

El objetivo de la sesión es recopilar lo descubierto hasta el momento en relación a M_0 y M_1. Los alumnos van a tener que responder en sus cuadernos a una serie de preguntas que pretenden controlar el grado de comprensión del proceso de estudio e investigación en cada estudiante. Se trata, por tanto, de una sesión claramente dominada por el momento de evaluación.

Se espera abordar las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_1: ¿Cómo se puede realizar una medición de longitud no subjetiva de una región en el meso-espacio?

Q_2: ¿Qué unidad de medida es la más adecuada para medir longitudes en el meso-espacio?

Q_3: ¿Qué instrumentos de medida son los que nos permiten medir longitudes en el Meso-espacio?

Q_9: ¿Cómo reducir un objeto para representarlo sin alterar su forma?

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Q_{11}: ¿Cómo se puede realizar una representación precisa de las diferentes formas geométricas del macro-espacio?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_1: Medida del macro-espacio a partir de unidades antropométricas.

R_2: Utilización de instrumentos de medida del micro-espacio (regla, escuadra, compás,…) para medir el macro-espacio.

R_3: Utilización del Sistema internacional de Unidades.

R_9: Técnicas relativas a la división de números y superficies.

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

R_{12}: Respuestas basadas en el uso de regla y compás.

3. Descripción de la sesión

Esta sesión está caracterizada por el momento de la evaluación que se produce al invertir tiempo en controlar cuál es el grado de comprensión de las tareas obtenidas en el proceso de estudio e investigación de cada estudiante.

Se comienza la sesión supervisando la realización de la actividad encargada y se comprueba que en muchos casos no se ha realizado. En este punto se puede ver que al no seguir un proceso tradicional con ejercicios muy concretos y disponibles en el libro de texto los alumnos no asignan el mismo valor a las tareas que se están realizando.

Una vez comprobada la tarea, se coloca la clase por parejas y siguiendo la dinámica de gemelos pensantes se les plantea la siguiente ficha:

1. Para medir el aula de tecnología del colegio hemos utilizado diferentes métodos, señala una ventaja y un inconveniente de cada uno.

Método	Ventaja	Inconveniente
Medir con pasos		
Medir con pies		
Medir utilizando reglas		
Medir utilizando baldosas		

2. Si quisiésemos medir el campo de fútbol del colegio ¿Qué método sería el más adecuado? ¿Cómo lo harías?

3. Si quisiésemos medir la zona que ocupa el huerto escolar ¿Qué método sería el más adecuado? ¿Cómo lo harías?

4. Después de medir queremos representar lo medido en un plano. Si la medida que hemos hecho es de 18,5 metros y lo queremos representar en una hoja de papel que tiene 29 cm ¿Qué distancia real representará 1 cm del papel?

5. En el plano anterior tenemos un lado del aula que ocupa 6,75 cm. ¿Cuál sería su tamaño real si usásemos la misma proporción del ejercicio anterior?

Con las 3 primeras preguntas se espera visibilizar que los alumnos han incorporado efectivamente el EM1 (medición de la distancia entre dos puntos) y que son capaces de entender la necesidad de utilizar unas unidades estandarizadas y de realizar las mediciones apoyándose en instrumentos que no estén sujetos a variaciones.

Las dos últimas preguntas van encaminadas a evaluar el grado de adquisición del EM 11 (proporcionalidad directa). Añadiendo además, en la última pregunta, el EP36 (obtener analíticamente una medida real a partir de su figura a escala conocida la escala), no visto hasta el momento y que supone de hecho la aplicación inversa del EP35 (obtener las medidas de una figura semejante cuando se conocen todos sus datos y la medida de una de las dimensiones en la figura semejante) descubierto en la sesión precedente

Se deja un tiempo de 30 minutos para resolver las actividades planteadas y posteriormente se realiza la puesta en común de los resultados.

Durante este tiempo el profesor va supervisando la actividad de pareja en pareja y se detecta que la gran mayoría de los alumnos tienen dificultades para resolver los problemas 4 y 5. En muchos casos se recurre a un procedimiento de tanteo, demostrando de ese modo que los EP 35 y 36 a pesar de haberse puesto en común aun no se han incorporado en todos los casos. En algunos casos el EM12 es utilizado de forma errónea lo que demuestra un intento de buscar una mecanización en la resolución del problema sin utilizar un proceso reflexivo.

El resultado de la actividad 4 es que un centímetro representa 0,637m. Sin embargo el resultado correcto solo es resuelto por un 44,4% de las parejas.

Un ejemplo de la dificultad en esta tarea lo podemos ver en el siguiente diálogo:

Profesor: ¿Qué estáis haciendo ahora? ¿Qué estáis pensando?

Alumna 1: El 4.

Profesor: El 4 y ¿tenéis alguna idea?

Alumna 2: No.

Alumna 1: Porque pensábamos que iba a ser,.. o sea, que si esto eran 29 metros le tocaría a 1 centímetro por metro.

Profesor: Ajá.

Alumna 1: Entonces hemos restado lo que le falta a 18,5 para llegar a 29, pero ahí nos hemos quedado.

Profesor: (dirigiéndose a la alumna 2) *¿y tú tienes alguna idea diferente?*

Alumna 2: No yo pienso lo mismo que ella.

Profesor: Ok, pues ahora cuando pongamos en común habrá que estar atentos para rellenar esta parte.

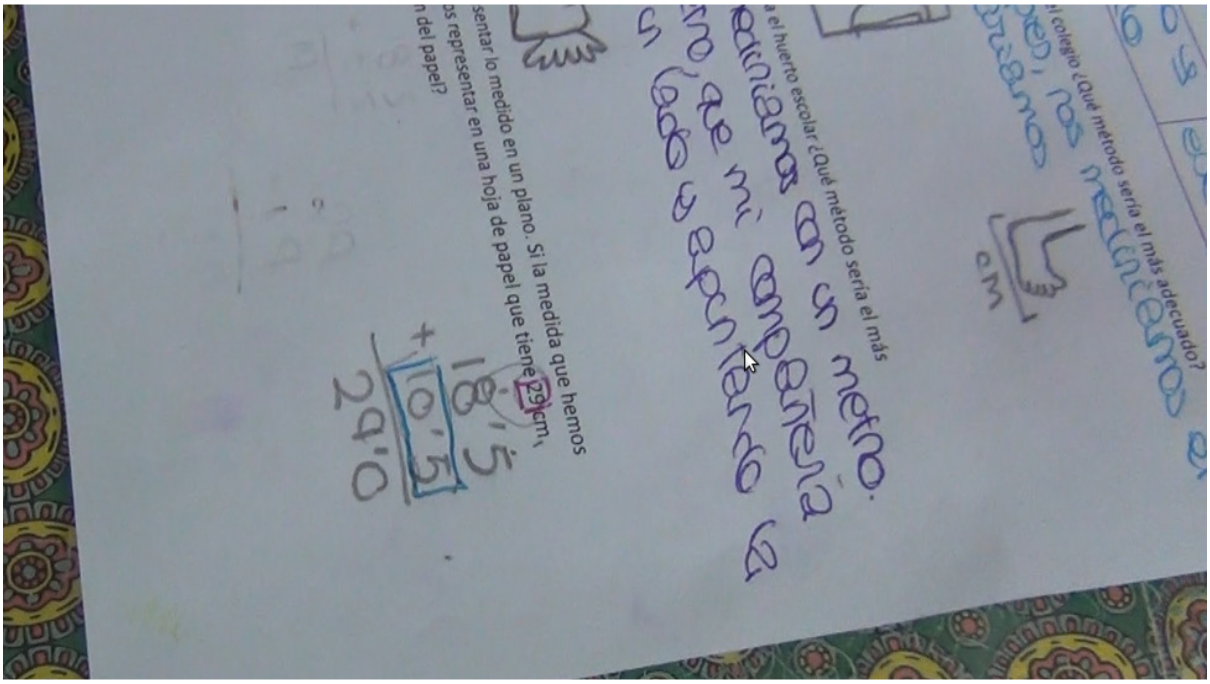


Figura 81. Respuesta errónea a la pregunta 4 utilizando concepto aditivos. Elaboración propia.

El enunciado de este ejercicio, como se indicó anteriormente, es el siguiente:

4. Después de medir queremos representar lo medido en un plano. Si la medida que hemos hecho es de 18,5 metros y lo queremos representar en una hoja de papel que tiene 29 cm ¿Qué distancia real representará 1 cm del papel?

En este caso los alumnos están intentando utilizar los tres datos numéricos que aparecen en el enunciado pero no saben cómo establecer correctamente la proporcionalidad entre los distintos elementos y recurren a otras técnicas conocidas como las relativas a las operaciones con números naturales. Vemos aquí como el EG4 sobre proporcionalidad aún no emerge como el más adecuado para resolver estas cuestiones y este hecho es coherente con un estadio inicial de la modelización.

En algunos ejemplos aún no se ha dado el paso de representar la medida real ajustándose al tamaño del papel mediante la obtención de una razón de semejanza obtenida analíticamente. Se opta en cambió por buscar por tanteo razones de semejanza o escalas que se correspondan con números naturales, 1cm = 1m,…

Un ejemplo de este procedimiento lo tenemos en el siguiente diálogo:

Profesor: A ver ¿cómo habéis hecho vosotros esto?

Alumno 1: Primeros pensábamos cómo se podía hacer y luego escribíamos todo.

Alumno 2: Luego lo juntábamos y lo poníamos.

Profesor: Vale, ¿cómo habéis hecho, por ejemplo, este último?

Alumno 1: Pues si, 18,5 metros, o sea,… 1centímetro,… no es al revés, 1 metro es 1 centímetro.

Alumno 2: Un centímetro representa un metro en la realidad.

Profesor: Entonces,… ¿Cuánto os va a ocupar en el papel entonces?

Alumno 1: 18,5 centímetros

Profesor: Y ¿Qué pasa con los centímetros restantes? Porque el enunciado dice que tenemos hasta 29 centímetros.

Alumno 2: Ya, pero es que hemos probado a multiplicar 18,5 por 2 y…

Alumno 1: No se puede.

Alumno 2: Sale 37,5.

Profesor: ¿Y entre uno y dos?

Alumna 2: Uno con cinco, también podría ser…

Profesor: ¿Habéis probado?

Alumna 2: No lo hemos probado

Profesor: Pues con esta ideilla que has sacado seguir trabajando para que no sobre tanto papel.

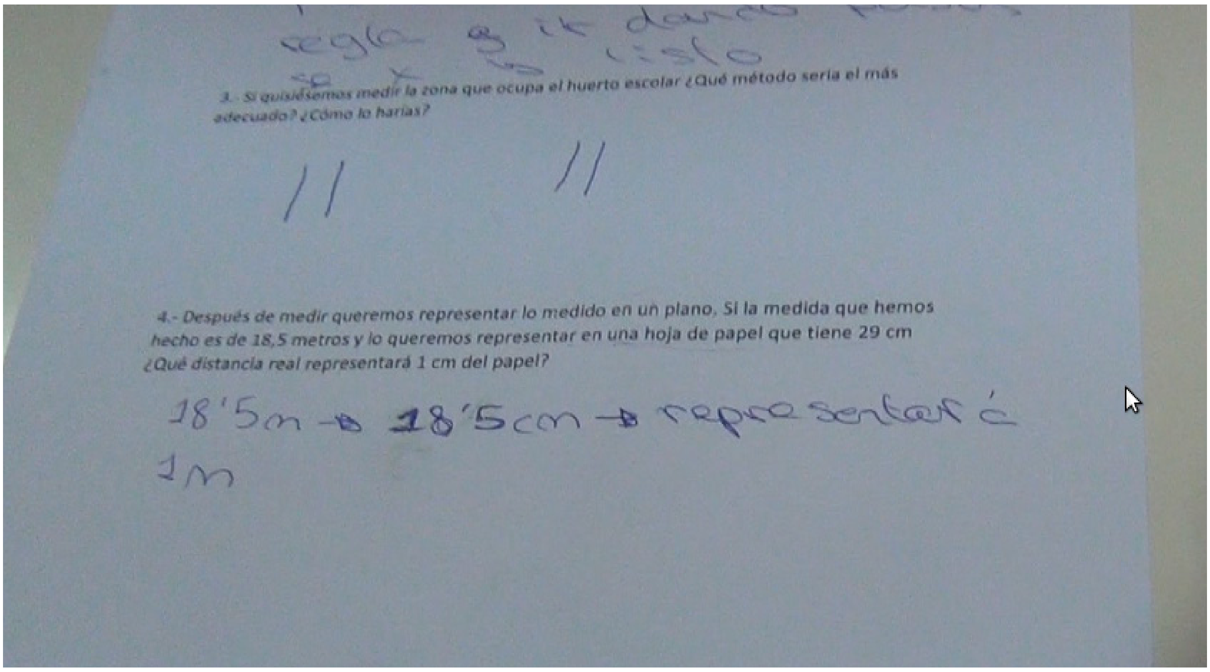


Figura 82. Respuestas a la pregunta 4 utilizando la conversión 1 cm. igual a 1 m. Elaboración propia.

Por último, en el resto de los casos observamos que se ha alcanzado la respuesta correcta utilizando el procedimiento puesto en común durante la sesión anterior.

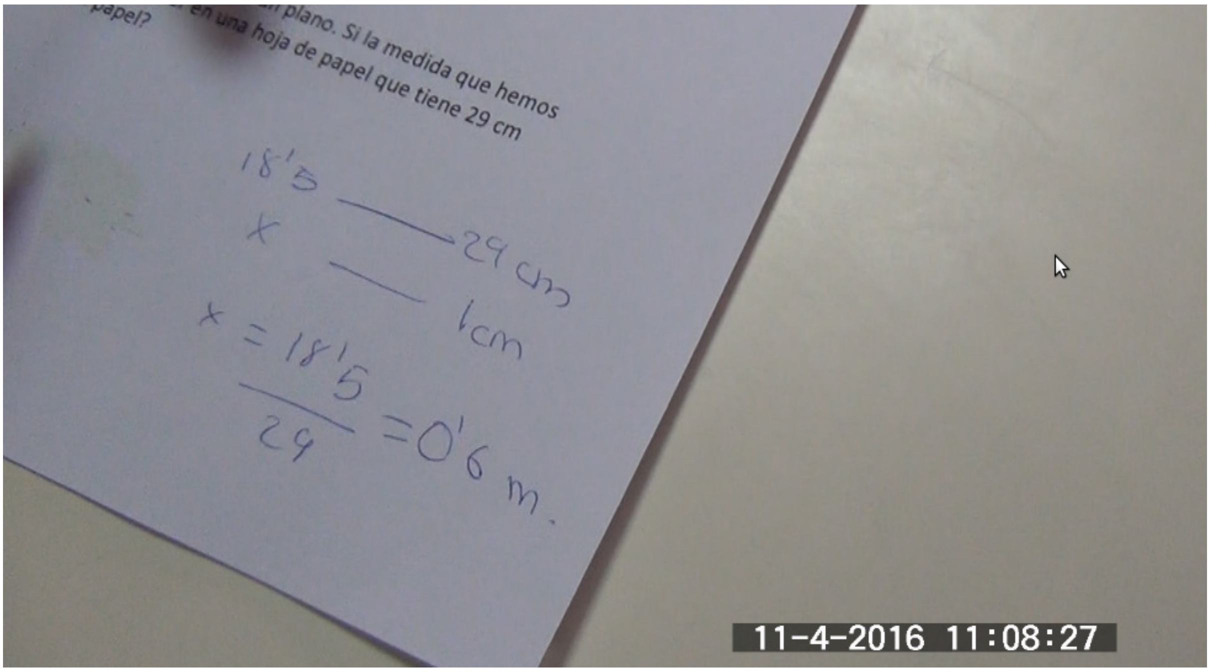


Figura 83. Respuestas a la pregunta 4 utilizando el método puesto en común en la sesión 5. Elaboración propia.

El resultado de la actividad 5 es que 6,75 cm representan 4,32m en la realidad. Sin embargo, los errores del ejercicio anterior sumados a los errores propios de este ejercicio, que se resuelve con un EP no practicado con anterioridad (EP36) hacen que el porcentaje de respuestas correctas sea de un 16,6% de las parejas.

Un ejemplo de estas dificultades lo podemos ver en el siguiente fragmento de conversación:

Profesor: ¿Cómo vais? ¿En qué os habéis atascado?

Alumna 1: En el último.

Profesor: ¿En el último? Y ¿que dice el último?

Alumna 2: En el plano anterior tenemos un lado del aula que ocupa 6,75 cm. ¿Cuál sería su tamaño real si usásemos la misma proporción del ejercicio anterior?

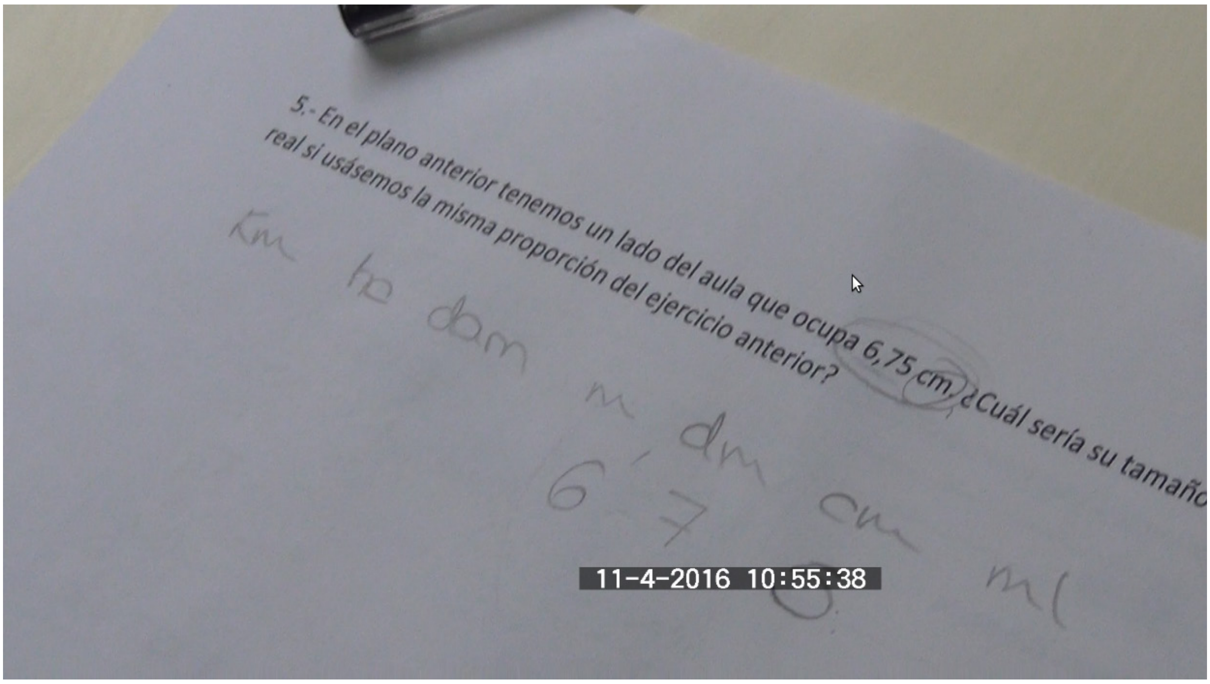


Figura 84. Respuesta errónea a la pregunta 5 abordada desde los cambios de unidades en el Sistema Internacional de Unidades. Elaboración propia.

Profesor: Como estáis haciendo gemelos pensantes,… ¿Qué tenéis que hacer?

Alumno 1: Pensar entre las dos

Profesor: ¿Y después?

Alumno 2: Pues, …, eh… escribirlo.

Profesor: Vale, entonces primero ponemos en común y luego pasamos a limpio la respuesta las dos. Vale, entonces… estáis en esta duda y ¿qué se os ha ocurrido?

Alumno 1: Pues, pasarlo a metros con la tabla de unidades de medida. Pero,… el tamaño real ya está en metros.

Alumno 2: Pero, yo digo si es 6,75 centímetros el 6 debería estar aquí (señalando la posición debajo de los centímetros) el 7 en milímetros y el 5 ahí en la nada. Y dice que no. Y después cambiarlo a metros, pero es que no me hace caso.

Como se puede ver en este caso los alumnos están tratando de resolver el problema expresando los datos del problema en otra unidad de medida, las técnicas qué están intentando aplicar son técnicas relativas al cambio de unidades y no a la proporcionalidad. Al haber visto en un momento anterior del curso los cambios de unidades los alumnos no están interpretando el problema en términos de proporcionalidad lo que demuestra el poco desarrollo que ha tenido aun en algunos alumnos el proceso de estudio e investigación relativo a M_1.

Los EP35 y 36 basados en el EM11 (proporcionalidad directa) es el que permite en algunos casos obtener las respuestas correctas como vemos en las siguientes imágenes.

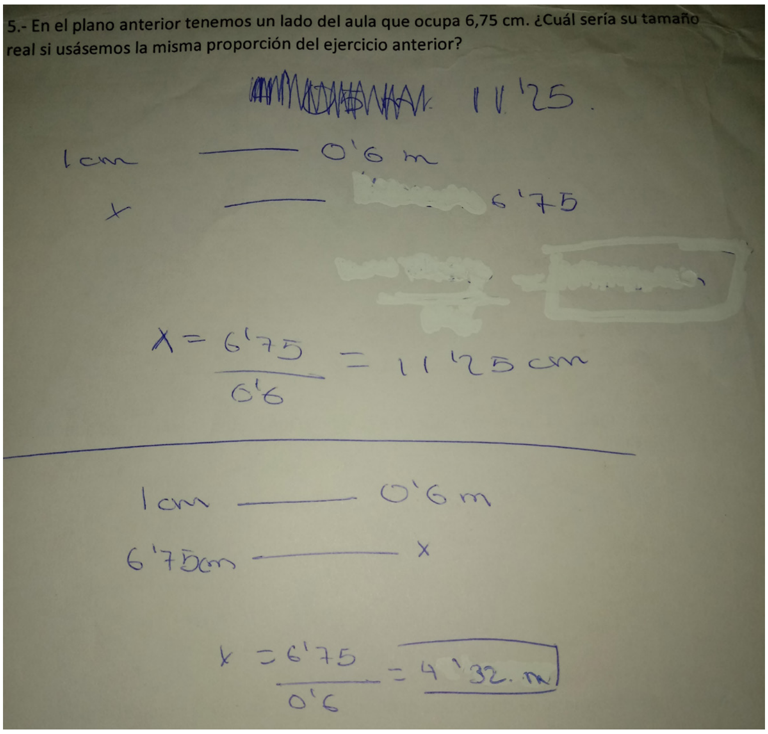
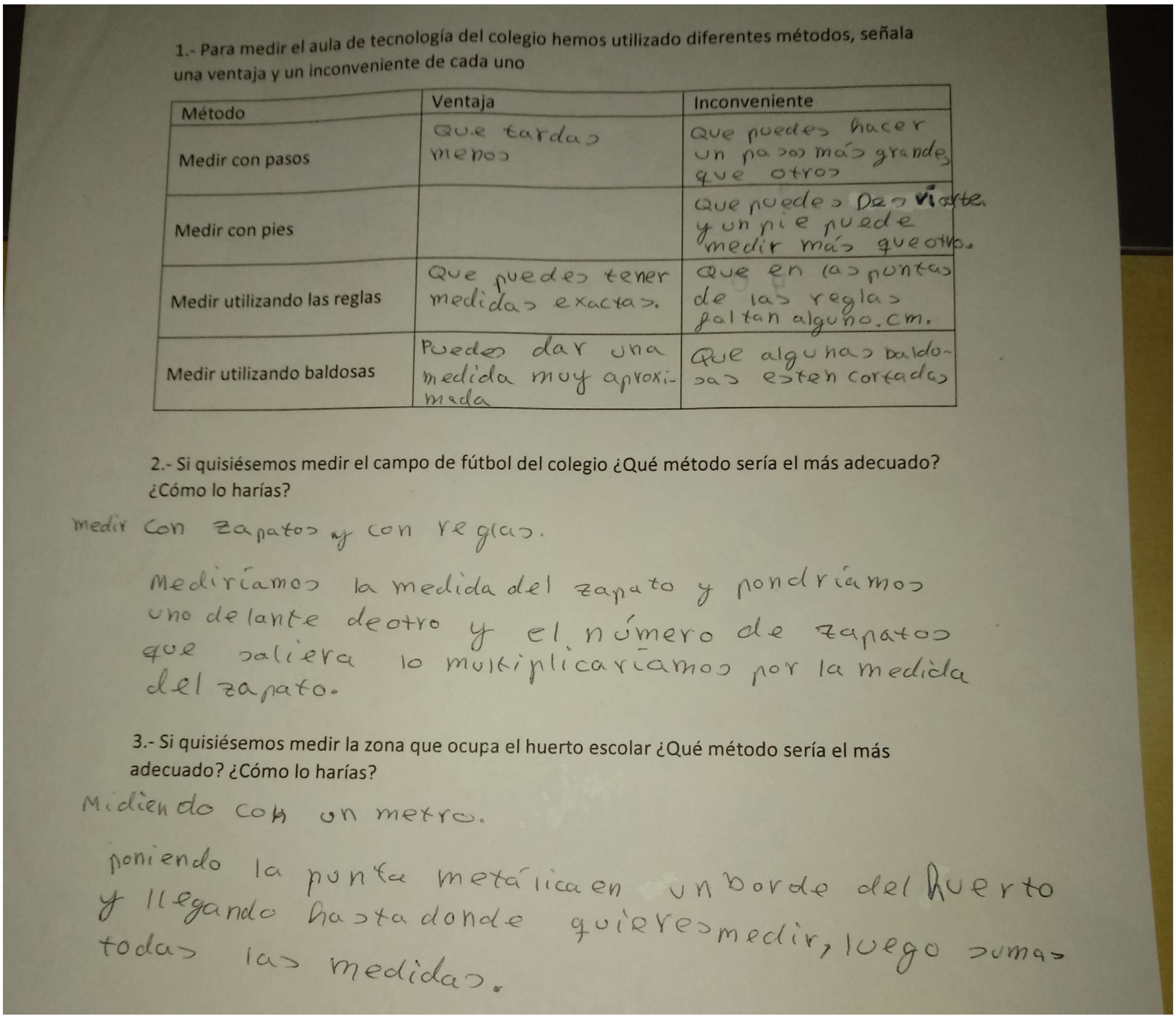


Figura 85. Respuestas a la pregunta 5 dónde se ven dudas a la hora de plantear la proporcionalidad directa. Elaboración propia.

Durante la puesta en común solo da tiempo a poner en común el ejercicio 1 y 2, en el primer caso parece que los alumnos han interiorizado adecuadamente las ventajas y desventajas de los distintos métodos empleados. Lo que permite evaluar junto al profesor observador que los alumnos han incorporado adecuadamente el EG1 (la distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une). Un ejemplo de ello se produce en las respuestas a la segunda pregunta, donde la presencia de líneas en el campo de fútbol hace que la idea generalizada para medirlo sea la medición por pies o mediante la ayuda de cintas métricas de las dimensiones del campo siguiendo las líneas ya dibujadas en el mismo (la distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une).



1.- Para medir el aula de tecnología del colegio hemos utilizado diferentes métodos, señala una ventaja y un inconveniente de cada uno

Método	Ventaja	Inconveniente
Medir con pasos	Que tardas menos	Que puedes hacer un pasos más grandes que otros
Medir con pies		Que puedes Des viarte. y un pie puede medir más que otro.
Medir utilizando las reglas	Que puedes tener medidas exactas.	Que en las puntas de las reglas faltan alguno.cm.
Medir utilizando baldosas	Puedes dar una medida muy aproximada	Que algunas baldosas esten cortadas

2.- Si quisiésemos medir el campo de fútbol del colegio ¿Qué método sería el más adecuado? ¿Cómo lo harías?

medir con zapatos y con reglas.

Mediríamos la medida del zapato y pondríamos uno delante deotro y el número de zapatos que saliera lo multiplicaríamos por la medida del zapato.

3.- Si quisiésemos medir la zona que ocupa el huerto escolar ¿Qué método sería el más adecuado? ¿Cómo lo harías?

Midiendo con un metro.

poniendo la punta metálica en un borde del huerto y llegando hasta donde quieres medir, luego sumas todas las medidas.

Figura 86. Respuestas a las preguntas sobre medidas. Elaboración propia.

Una última idea que se incorpora para responder a las preguntas 2 y 3 es obtener la imagen del colegio a partir de Google Maps®. La idea es comentada por varios alumnos y supone la aceptación tácita de que la mejor manera de enfrentarse a la medición de una superficie en el macro-espacio es a partir de la medición en el micro-espacio de una figura semejante a la original sobre la que se debe aplicar el EG4 relativo a la proporcionalidad.

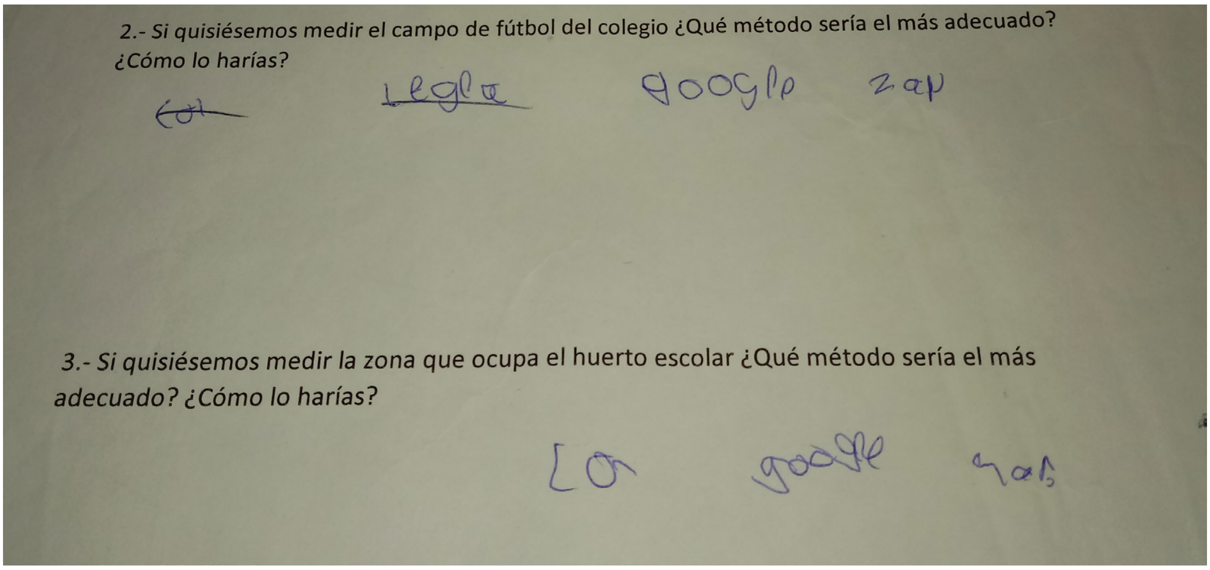


Figura 87. Obtención de las superficies a medir mediante Google Maps. Elaboración propia.

El uso de Google Maps® supone que los alumnos no necesitan trazar ellos mismos la figura semejante y por tanto supone el abandono de los EG 5 y 6 relativos a la Geometría sintética, al menos de forma provisional.

Tenemos aquí un buen ejemplo de como los REI se enriquecen con las aportaciones realizadas por los propios alumnos y como esas aportaciones alteran la arborescencia de cuestiones y respuestas planteadas por el investigador. En esta ocasión, las posibilidades tecnológicas de la sociedad de la información suponen una restricción importante para que surjan de forma espontánea a partir de la cuestión generatriz los EG5 y 6.

No obstante y atendiendo al carácter abierto del REI propuesto se decide tener en cuenta las posibilidades de Google Maps® en las siguientes sesiones.

4.1.7. Sesión del 12 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	7
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior se evaluó el grado de adquisición individual de las dos modelizaciones vistas hasta el momento. Como resultado de esa evaluación se observó la necesidad de trabajar las técnicas relativas a la proporcionalidad y de institucionalizar el trabajo a partir de la técnica EM12 (razón de semejanza para longitudes).

El objetivo de la sesión es, mediante un ejercicio guiado, trabajar las técnicas relativas a la proporcionalidad y explorar las posibilidades de los planos obtenidos a través de Google Maps® para obtener el perímetro de la parcela del centro. Se espera con este ejercicio trabajar repetidamente la técnica por lo que la sesión será principalmente utilizada para el momento de trabajo de la técnica y una vez realizado el ejercicio se procederá a su institucionalización a través de la puesta en común.

Por tanto se espera abordar las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Q_{12}: ¿Cómo se pueden representar las distintas medidas reales en el plano una vez conocida la razón de semejanza que existe entre ellas?

Q_{13}: ¿Cómo se puede comprobar que una distancia en el plano representa la medida real una vez conocida la razón de semejanza existente entre ellas?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

R_{13}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del micro-espacio al macro-espacio.

3. Descripción de la sesión

Para completar la primera parte relativa a la medición y a la escala el profesor plantea una ficha de trabajo guiada en la que se trabajará con varias de las ideas que han ido surgiendo en las sesiones precedentes. La ficha entregada incorpora el plano consensuado del aula TIC, el plano de evacuación del colegio donde se encuentra representada la planta del aula TIC y la parcela general del colegio sin escala (con esta parte se pretende trabajar Q_{10}) y una imagen aérea sacada de Google Maps® con la parcela del colegio y una escala (para trabajar Q_{12} y Q_{13}). Se indica a los alumnos que deben intentar obtener el perímetro del colegio con los datos suministrados en la hoja.

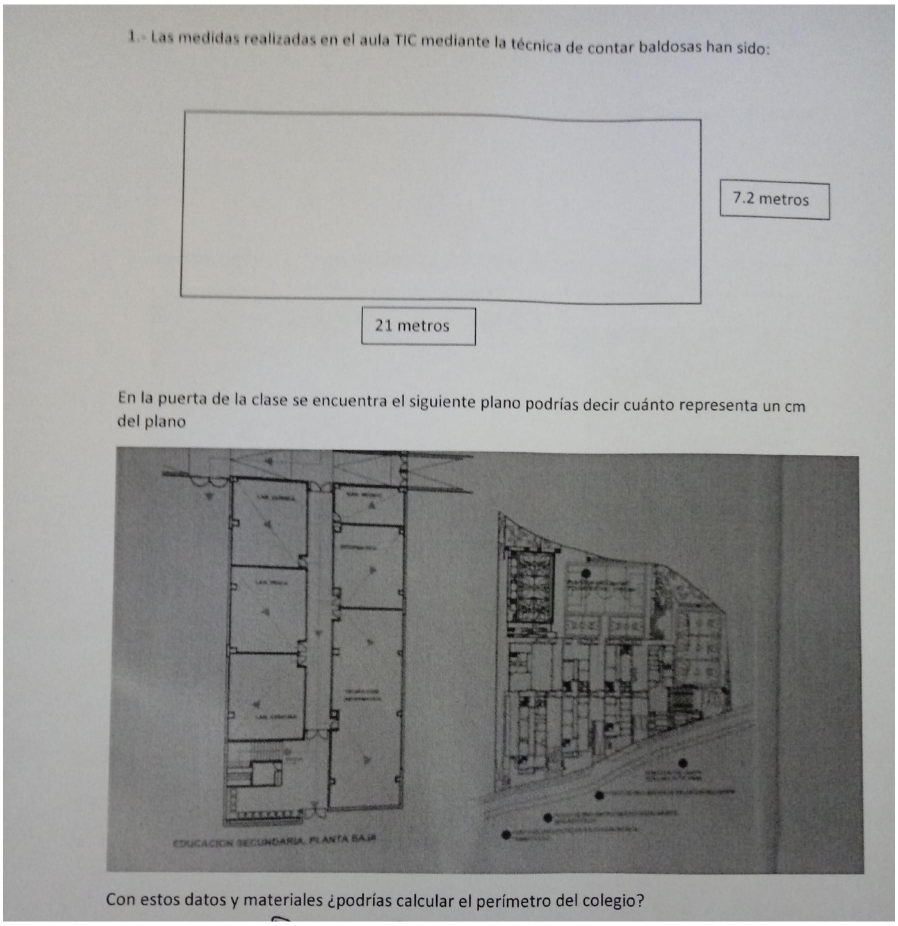


Figura 88. Ficha de trabajo para obtener la escala de un plano a partir de las medidas tomadas en el meso-espacio. Elaboración propia.

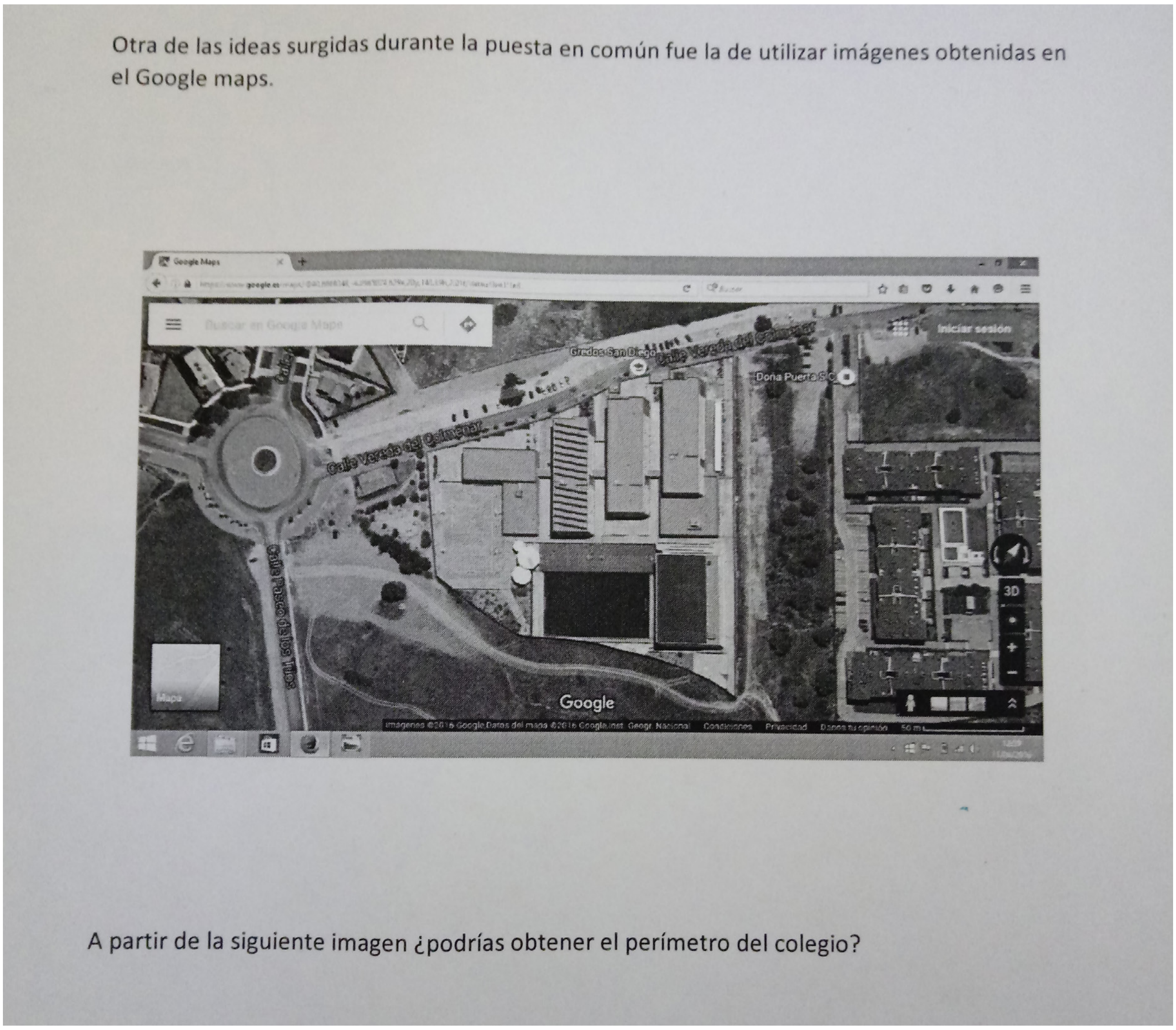


Figura 89. Ficha de trabajo para obtener la medida en el macro-espacio a partir de un plano con escala. Elaboración propia.

La actividad se realiza en grupos cooperativos apoyándose en la técnica lápices al centro de forma que primero se debe consensuar la respuesta y luego cuando todos la tengan claro se debe escribir en las hojas individuales.

El ejercicio que se basa en las medidas tomadas en la sala TIC y en los planos de evacuación se deja de lado inicialmente y la mayoría de los grupos opta por resolver en primer lugar el ejercicio basado en la imagen área del colegio donde sí aparece la escala.

Como uno de los lados del colegio es totalmente recto la mayoría de los grupos empiezan a calcular el perímetro desde ahí utilizando EP1 (medir la longitud de un lado de una figura plana en el micro-espacio).

A continuación reproducimos uno de los diálogos entre el profesor y uno de los grupos que surge a raíz de esta actividad y que ejemplifica la aproximación inicial.

Profesor: Hola, ¿cómo vais? ¿lo tenéis?

Alumno 1: Sí.

Profesor: A ver, el portavoz del grupo que me cuente lo que habéis pensado.

Alumno 2: A ver, aquí está la escala y si pones la regla aquí sale que un centímetro y medio en esta escala es 50 metros en la realidad.

Figura 90. Medición con regla de los centímetros que marca la escala del plano. Elaboración propia.

Profesor: Ajá…

Alumno 2: Entonces voy a empezar por medir esta pared (señalando el lado recto) aquí sale ahora cinco con cuatro, entonces lo podría aproximar hasta cinco con cinco.

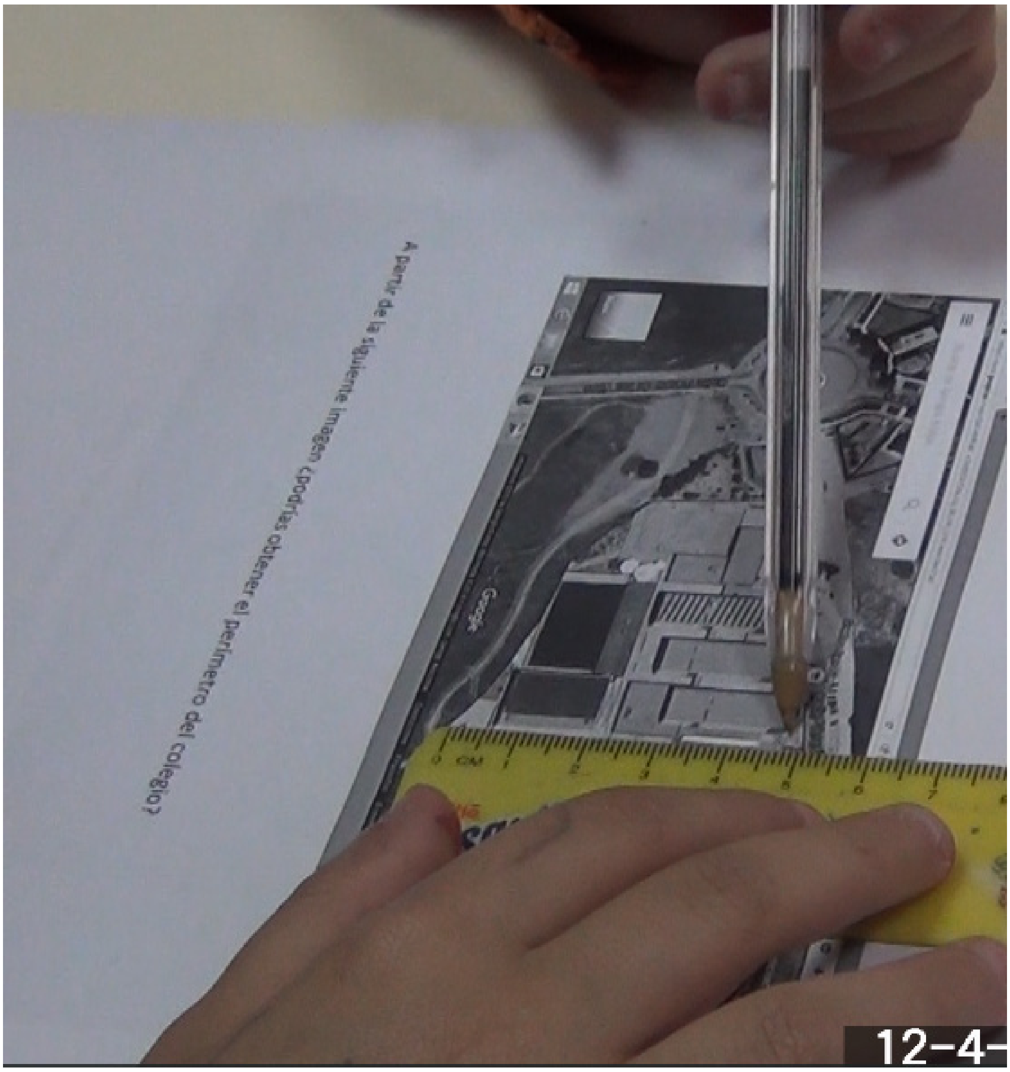


Figura 91. Medición con regla del lado más largo de la parcela sobre el plano. Elaboración propia.

Profesor: *Vamos a intentar hacerlo lo más preciso ¿no? Mejor usad 5,4 para que nos salga lo mejor posible. La idea que tenéis es muy buena, lo estáis haciendo muy bien pero vamos a intentar ser lo más precisos posible en nuestros cálculos ¿vale?*

Poco a poco vemos que los grupos van llegando a la misma técnica de resolución y vemos que se empieza a utilizar el concepto de escala. Se trata, por tanto, de una realización de los EP 36 y 38 (obtener analíticamente una medida real a partir de su figura escala conocida la escala y obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante mediante una ampliación de la original) de forma repetida lo que permite trabajar los EM 11 y 12 (proporcionalidad directa y razón de semejanza para longitudes).

En el siguiente diálogo vemos como aumenta la seguridad con la técnica. El portavoz de uno de los grupos explica el procedimiento que va a seguir para resolver la tarea del perímetro a partir del plano de Google Maps® con escala suministrado.

Profesor: Entonces portavoz ,¿cómo vais a hacer?

Alumno1: Pues medimos cuántos centímetros hay y dividimos entre 1,5 (la escala suministrada es tal que 1,5 centímetros representan 50 metros) y después eso son 50 metros cada número con lo que multiplicamos por 50 y ya está.

Profesor: Vale, pues antes de escribirlo tenéis que aseguraros de que todos los miembros del grupo lo han entendido.

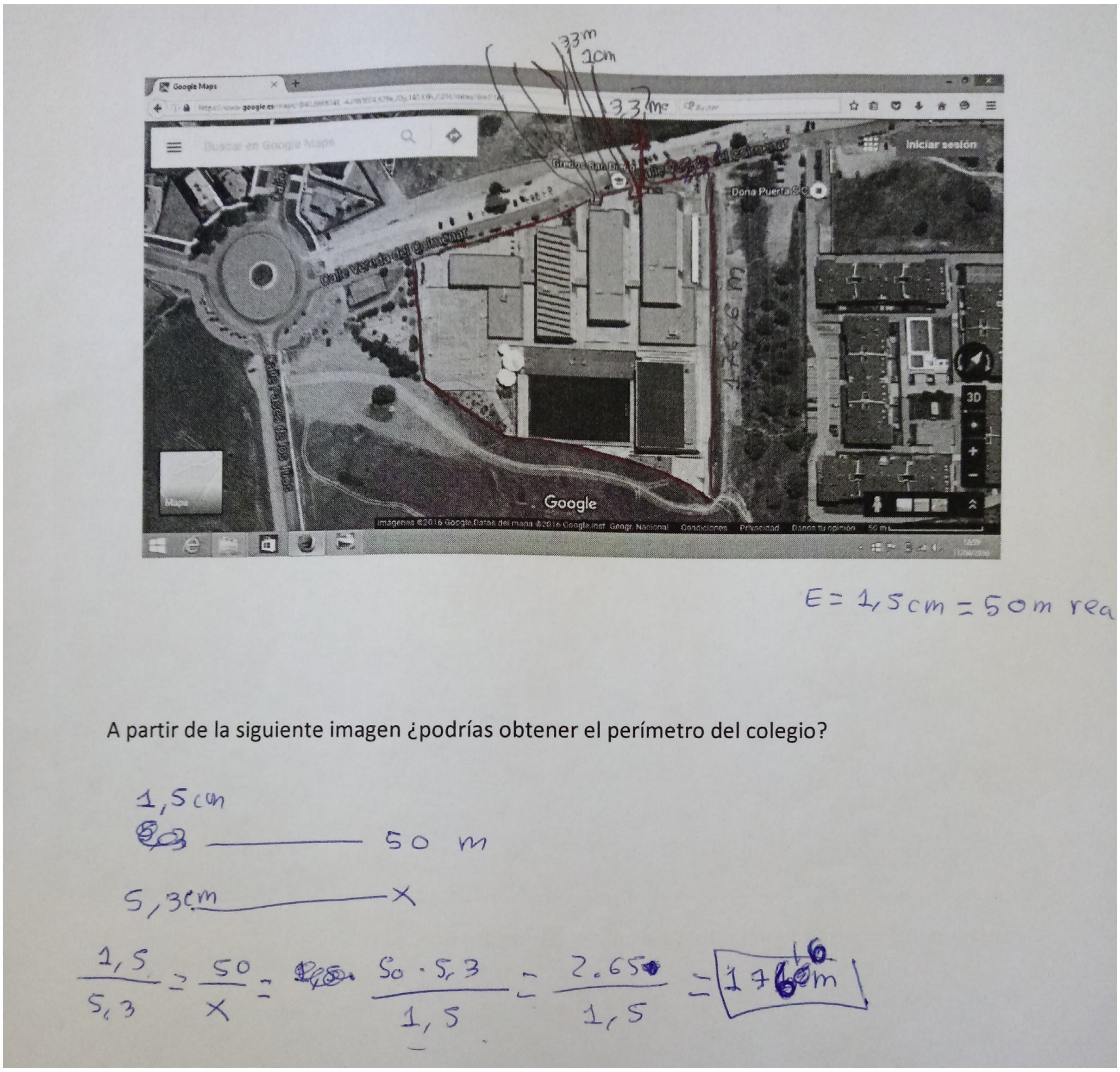


Figura 92. Aplicación de escala para obtener medida real. Elaboración propia.

Vemos aquí como el EM11 (proporcionalidad directa) se combina con el EM 12 (razón de semejanza para longitudes) y permite poco a poco ir construyendo los EM que configuran el EG 4 4 (proporcionalidad) a partir de la praxis.

Una vez que los alumnos han pensado el procedimiento se procede a hacer mediciones del perímetro realizando algunas simplificaciones de las zonas irregulares de la parcela que faciliten los cálculos. Algunos grupos intentan retomar el ejercicio basado en las medidas obtenidas en el aula real y tratan de obtener la escala del plano a partir del plano de evacuación.

Es interesante destacar que algunos alumnos prefieren buscar alternativas de cálculo mental a la resolución algorítmica, lo que supone un buen indicador de cómo se está tratando de justificar la técnica general.

En el siguiente diálogo vemos una muestra de esto:

(En uno de los grupos, un alumno cuestiona el resultado obtenido por sus compañeros mediante proporcionalidad directa (1766 metros) y trata de demostrarles que no es correcto)

Profesor: ¿Cómo es tu forma de resolverlo?

Alumno 1: Es que el mio es muy raro.

Profesor: Bueno, no importa ¿nos los explicas?

Alumno 1: Mira, un centímetro y medio son 50 metros.

Profesor: Sí.

Alumno 1: Entonces, 0,75 centímetros serán 25 metros.

Profesor: Sí, correcto.

Alumno 1: 0,75 por 7 son 5,2 centímetros (la medida de uno de los lados obtenida con la regla era de 5,3).

Profesor: Sí, entonces…

Alumno 1: El lado serán siete veces 25.

Profesor: (tomando una calculadora realiza el cálculo siguiendo la regla de 3 planteada por los otros compañeros) *El resultado es de 176,6 metros.*

Alumno 1: ¡176 metros! Ves, eso si que estaría bien, se ajusta a lo nuestro, pero es que un kilómetro...

A partir de aquí la mayoría de las conversaciones derivan en cómo realizar la aproximación más precisa de las zonas irregulares de la parcela.

Algunos alumnos cometen errores de cálculo lo que conduce a errores en el resultado. Sin embargo, de forma generalizada se consigue que los planteamientos de proporcionalidad directa (EM11) o de los cálculos a partir de la razón de semejanza (EM12) sean correctos o se consigan plantear bien después de las puestas en común grupales. El progreso general hace que se vayan obteniendo algunas de las medidas que conforman el perímetro del colegio, lo que será útil en la siguiente sesión y permitirá afrontar la cuestión Q_{14} que debe dar lugar a una nueva modelización.

Como la actividad no se termina y queda por resolver la primera parte se decide continuar con la resolución de la sesión en la siguiente clase.

4.1.8. Sesión del 13 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	8
Hora de inicio-fin	8:15-9:10
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior se intentó, a partir de dos ejercicios, que los alumnos trabajasen con la modelización M_1 para que visibilizasen todo el proceso de investigación que había llevado a las técnicas para realizar una representación fiable en el micro-espacio de las longitudes y relaciones angulares del meso y el macro-espacio. Adicionalmente, se incorporó una imagen área de la parcela del colegio recogiendo una de las ideas aportadas por lo estudiantes. La inclusión de este plano obtenido de forma indirecta abre una nueva modelización (M_3) al dar por bueno los estudiantes que la imagen así obtenida es una imagen a escala del centro educativo.

El objetivo de la sesión es continuar con el ejercicio guiado del día anterior e intentar trabajar las técnicas relativas a la proporcionalidad en las dos direcciones del macro al micro

(M_1) y del micro al macro (M_3).

Se espera con este ejercicio trabajar repetidamente la técnica por lo que la sesión será principalmente utilizada para el momento de trabajo de la técnica y una vez realizado el ejercicio se procederá a su institucionalización a través de la puesta en común.

Por tanto se espera abordar las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{10}: ¿Cómo se puede obtener la relación existente entre las medidas reales y las representadas?

Q_{12}: ¿Cómo se pueden representar las distintas medidas reales en el plano una vez conocida la razón de semejanza que existe entre ellas?

Q_{13}: ¿Cómo se puede comprobar que una distancia en el plano representa la medida real una vez conocida la razón de semejanza existente entre ellas?

Q_{29}: ¿Cómo se pueden ampliar los datos obtenidos en el micro-espacio para poder trabajar en el macro-espacio?

De forma tangencial se espera poder conducir el trabajo de los alumnos hacia la pregunta:

Q_{14}: ¿La división del perímetro en partes iguales da como resultado áreas iguales?

Las respuestas esperadas a estas cuestiones son:

R_{10}: Técnicas relativas a la semejanza entre figuras.

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

R_{13}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del micro-espacio al macro-espacio.

3. Descripción de la sesión

La sesión comienza realizando un momento de institucionalización de los EM 11 y 12 (proporcionalidad directa y razón de semejanza para longitudes) para que estos puedan ser aplicados en las dos direcciones objetivo de la sesión

La introducción del profesor es la siguiente:

Profesor: En primer lugar bajamos al aula TIC y realizamos las medidas de ese espacio, obteniendo los siguientes valores para ese aula (dibuja un boceto y señala el ancho y el largo). Posteriormente hemos obtenido el plano de todo el edificio a partir de los planos de evacuación y dentro de ese plano está la clase que nosotros medimos, lo que nos permite establecer una escala del plano de evacuación. En el plano de evacuación junto al edificio tenemos el plano de la parcela del cole que cómo veis es un poco irregular. Por lo que una vez conozcamos las dimensiones del edificio podemos realizar el mismo procedimiento que hemos usado para obtener la escala entre el plano y el edificio y obtener así la escala del plano del colegio ¿Vale? La mayoría de vosotros utilizando esas medidas podriais establecer una escala para el plano.

Paralelamente a esto teníamos el plano obtenido en Google Maps, que había salido como una aportación de uno de los grupos, si no recuerdo mal el grupo 6. Y en ese mapa viene una escalita dibujada que pone 50 metros.

La mayoría de los grupos estabais obteniendo las medidas de algunos lados de la parcela midiendo con las reglas en el papel y aplicando los valores de la escala para obtener el valor real del lado representado.

Vamos a ver cómo lo habéis planteado dentro de cada uno de los grupos...

Se realiza una puesta en común de los enunciados de los ejercicios en la pizarra y se pregunta directamente a los grupos sobre cómo han obtenido las medidas de los lados. Durante la puesta en común la mayoría de los grupos están de acuerdo en que han sido capaces de medir sin dificultades el lado recto de la parcela pero que han tenido dificultades con los lados irregulares. Por ese motivo se solicitan aportaciones a los grupos sobre cómo resolver ese problema y se abre un momento exploratorio sobre una cuestión no prevista: ¿Cómo se pueden medir los lados irregulares de una figura no poligonal en el micro-espacio?

Las ideas principales que surgen de este momento exploratorio se recogen a continuación:

- Aproximar el recinto del colegio a un polígono irregular.
- Cuadrar la parcela ignorando algunas partes difíciles de medir.

Como se puede ver este es un punto en el que se podría comenzar una Modelización no prevista dentro del REI a priori y que da cuenta de lo fértil que puede ser esta metodología para descubrir cuestiones generatrices fértiles que permitan abordar el estudio de otras obras matemáticas que desbordan la Geometría elemental prevista.

En uno de los grupos, un alumno da por resuelta la cuestión de los lados irregulares y plantea la siguiente idea que nos va a permitir posteriormente trabajar la pregunta Q_{14}. La idea aportada por el alumno es la siguiente:

Profesor: ¿Alguna aportación más?

Alumno 1: Pues ayer en mi casa, desarrollé la teoría de que mientras una figura bidimiensional tenga siempre las mismas medidas en cuanto a lados su área será la misma, entonces si medimos el perímetro del colegio podríamos calculando una especie de cuadrado con un triángulo para después separarlo y ver cuanto ocupa en total.

Profesor: Vale, creo (nombre) que has dado un salto un poquito grande, ahora estamos intentando calcular la longitud de los lados irregulares para obtener un perímetro. Lo que tú planteas es que una vez tengamos la longitud de los lados, y por tanto el perímetro, se puede transformar eso en otra figura y eso me va a permitir obtener el área.

Alumno 1: Sí.

Profesor: Pero en cualquier caso necesitamos el dato del perímetro ¿no?

Alumno 1: Ya lo tengo.

Profesor: ¿Lo tenéis? ¿Cómo lo habéis hecho? Porque había zonas que son irregulares.

Alumno 1: Hemos cogido un papel y lo hemos utilizado como regla curva, el papel como es flexible se puede adaptar a la figura y medir el perímetro.

Profesor: Vale, a ver si lo entiendo, habéis utilizado una "regla flexible" y en vuestro caso lo habéis hecho a través de papel. Entonces habéis dicho, como una regla no se puede doblar pues yo voy a doblar el papel siguiendo el contorno y luego estiro el papel y lo mido ¿no?

Alumno 1: Eso es.

Profesor: ¿Hay alguna otra forma de medir siguiendo este método pero utilizando algún un objeto cotidiano que se os ocurra?

Alumno 2: ¡Una cuerda!

Profesor: Eso también podría valer, con una cuerda podríamos medir una curva siguiendo el contorno y luego estiramos el trocito y obtenemos la medida del contorno. Bueno una vez terminada esta puesta en común aclarada la forma de calcular la medida real a partir de un plano con escala vamos a intentar calcular el perímetro sorteando el problema de los lados irregulares con alguno de los métodos que hemos puesto en común.

El profesor índica a los alumnos que utilizando la técnica 1-2-4 dediquen un minuto a decidir cuál de la ideas aportadas por los grupos van a tener en cuenta para medir el perímetro durante esa sesión.

Tres grupos optan por realizar el cálculo aproximando del recinto del colegio creando un polígono irregular. Cuatro grupos optan por utilizar una medición mediante un instrumento flexible como la cuerda para calcular el recinto.

El profesor suministra hilo a los grupos para que puedan trazar el perímetro mediante un herramienta flexible si así lo han decidido.

Durante el desarrollo de la actividad se observa como se ha normalizado el uso de los EP 36 y 38 (obtener analíticamente una medida real a partir de su figura escala conocida la escala y obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante mediante una ampliación de la original) para la realización de los cálculos como se puede apreciar en la siguiente imagen.

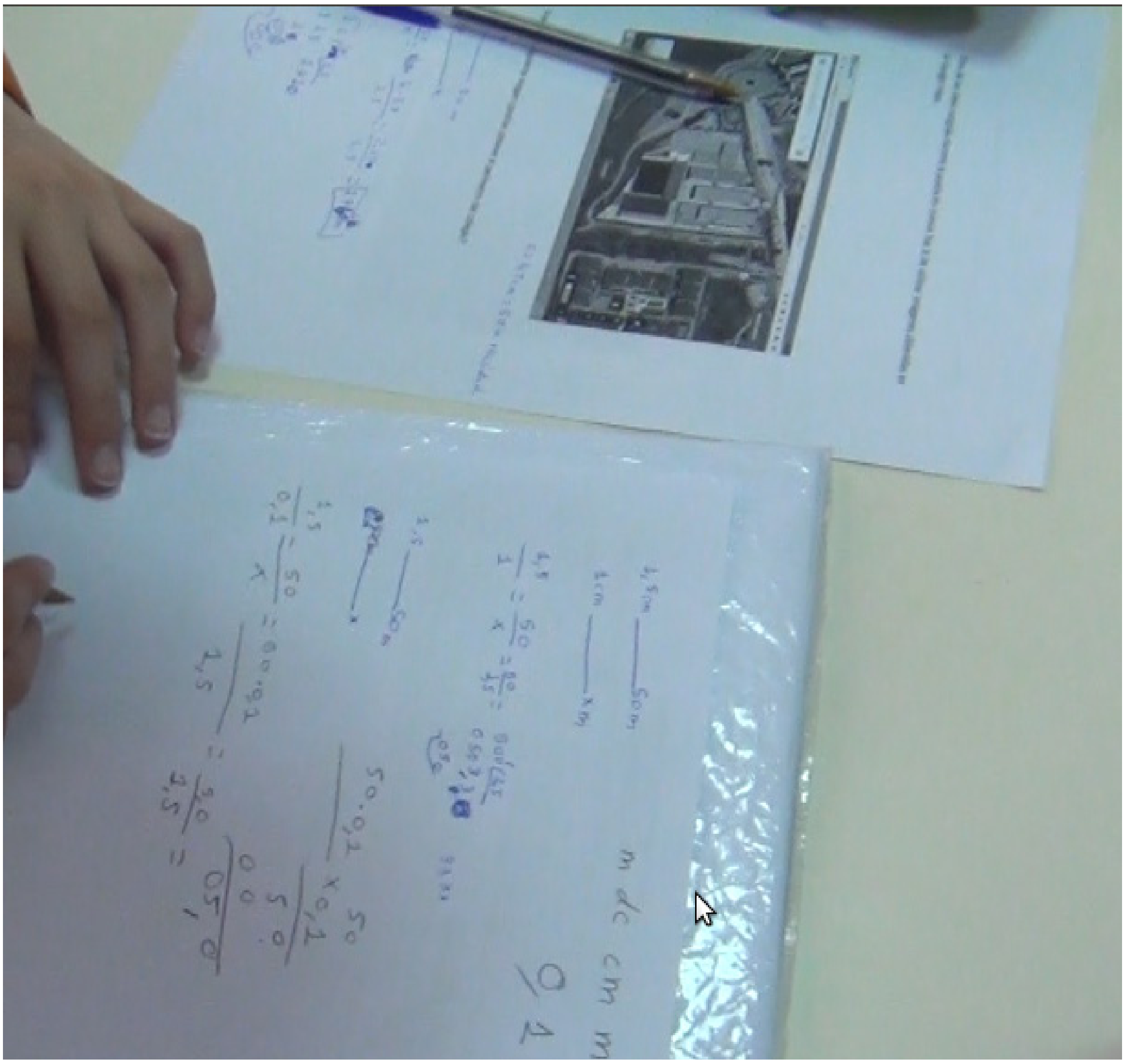


Figura 93. Aplicación sucesiva de la escala para obtener el perímetro en el macro-espacio a partir de un plano a escala. Elaboración propia.

Por otra parte, el trabajo con reglas flexibles empieza a dar sus frutos y los alumnos van perfilando el perímetro de la imagen con la ayuda de los hilos y de papel celo, en la siguiente imagen se aprecia ese trabajo.

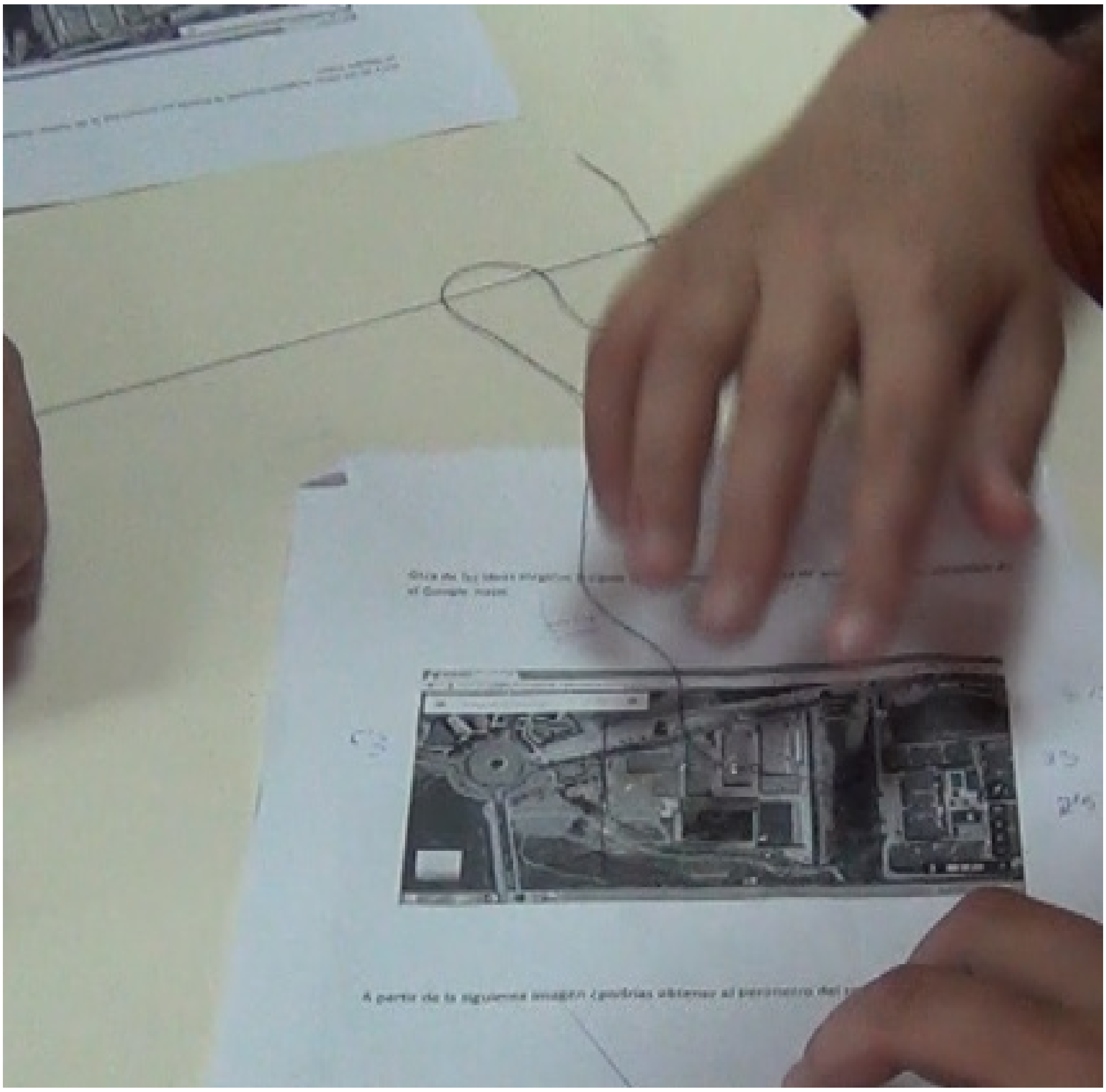


Figura 94. Medición del perímetro mediante hilos. Elaboración propia.

La incorporación de las “reglas flexibles” permite ampliar el EG1 relativo a la medición entre dos puntos e incorpora una técnica no prevista en nuestro MER, que permite medir líneas curvas o irregulares dadas en un plano. Tenemos aquí un ejemplo de cómo se enriquece el REI a partir de las aportaciones de los estudiantes.

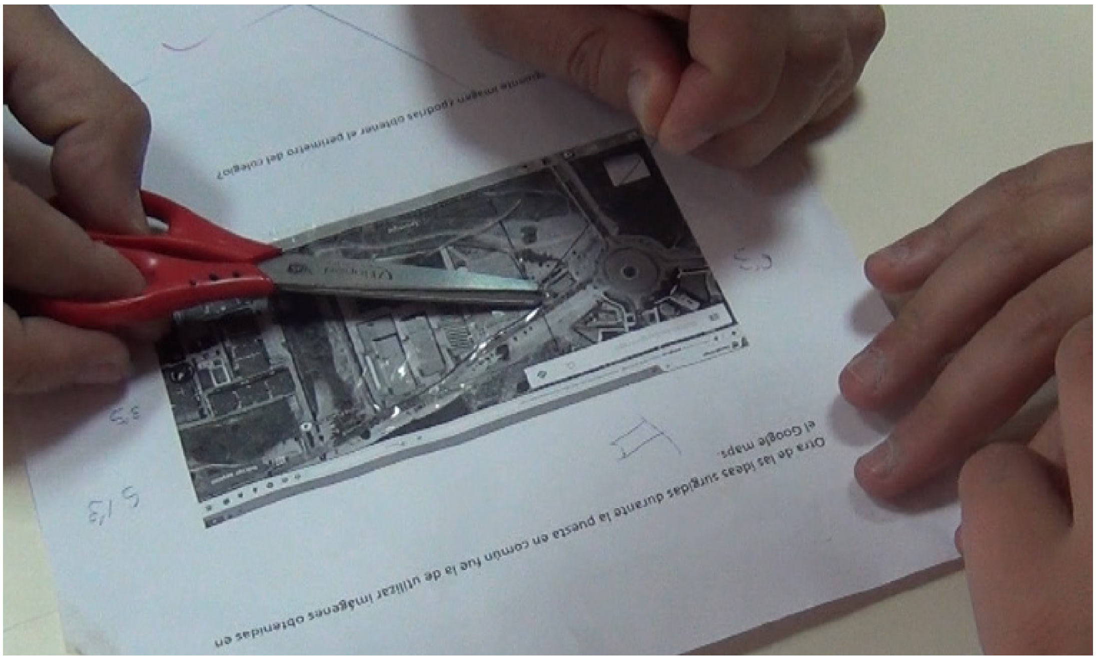


Figura 95. Medición del perímetro mediante hilos 2. Elaboración propia.

El proceso seguido por los grupos que han optado por la "regla flexible" también desemboca en los cálculos mediante los EM 11 y 12 (proporcionalidad directa y razón de semejanza para longitudes).

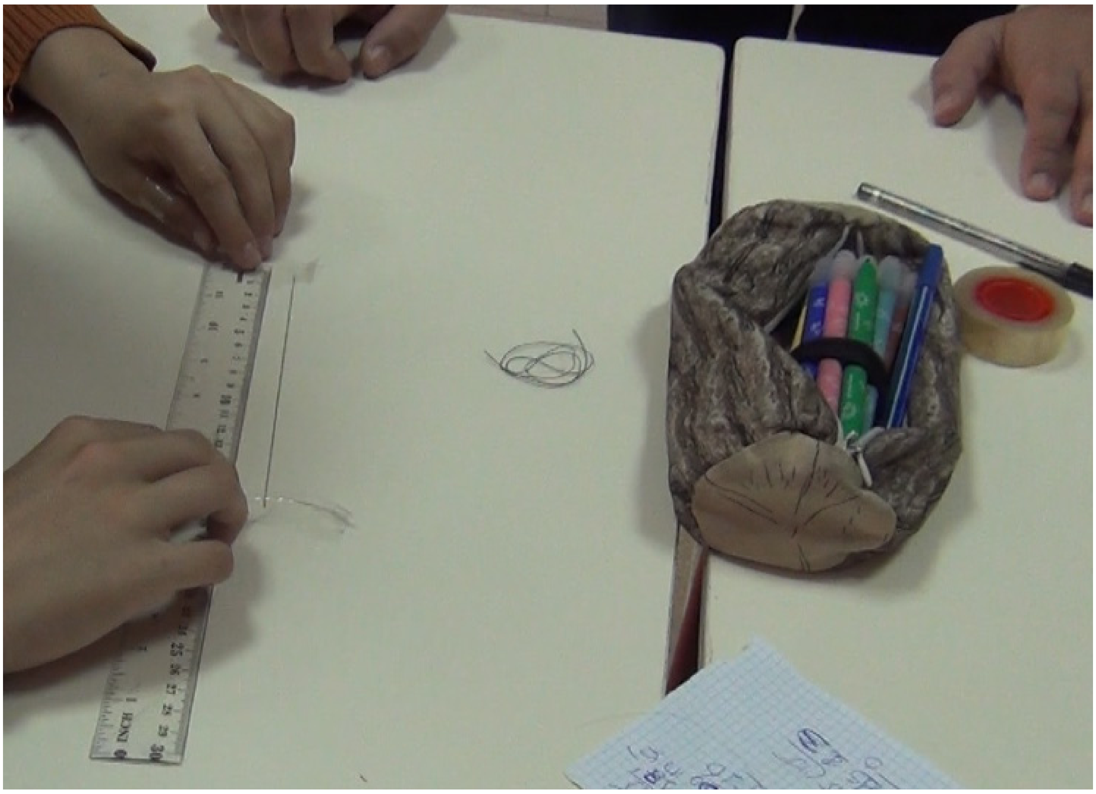


Figura 96. Medición del perímetro mediante hilos 3. Elaboración propia.

Para terminar la sesión, se realiza una puesta en común de las medidas realizadas y se va dando la palabra a los distintos portavoces de los grupos para que indiquen el tipo de método que han utilizado, la distancia en centímetros obtenida en el plano y el cálculo del perímetro real realizado. Los resultados obtenidos fueron:

Grupo 1. Perímetro medido en el plano 17,2 cm, perímetro real 573,33 m

Grupo 2. Perímetro real 68,8m. El profesor ante este dato pregunta si creen que con 68 pasos se puede rodear todo el colegio. Como la respuesta es negativa el grupo revisa sus cálculos. En la revisión posterior obtienen una medida de 650m.

Grupo 3. Perímetro real 566,6m

Grupo 4. Perímetro real 606,6m

Grupo 5. Perímetro real 553,3m

Grupo 6. Perímetro real 585,3m

Grupo 7. Perímetro real 580m

Los cuatro últimos grupos han usado el método basado en la cuerda y deciden calcular la media de sus medidas obteniendo una media de 581,3m. Vemos de nuevo un desborde del MER previsto que ya apareció en la sesión 3 y cómo los alumnos vuelven a afrontar la cuestión Q_8 y a utilizar la respuesta R_8 de una forma natural para realizar la estimación de una dimensión real a partir de una serie de medidas utilizando técnicas estadísticas.

Para terminar la sesión se solicita a los grupos que creen una "pregunta de examen" utilizando el plano del colegio con escala.

En la creación de estas preguntas encontramos algunos errores relativos a los conceptos de longitud y superficie que demuestran que los alumnos están asumiendo que la modelización realizada para las longitudes es válida para superficies. Estamos por tanto en un tercer estadio de la modelización donde estamos explorando si hemos conseguido dar respuesta a las preguntas iniciales y si esa respuesta es completa y satisfactoria.

En el siguiente diálogo vemos un ejemplo de ello:

Profesor: ¿Cómo sería vuestra pregunta?

Alumno 1: Sabiendo que nuestro colegio tiene...

Profesor: ¿Qué tiene?

Alumno 2: Pon un área de la valla.

Alumno 1: ¿Usamos la media?

Profesor: Sí, podemos usar la media de 581 metros.

Alumno 1: O sea, tiene un perímetro de 581 metros.

Profesor: ¡Ojo! (nombre del alumno 2) tu has dicho área. Te refieres a la valla o al espacio que queda encerrado por la valla.

Alumno 2: A la valla.

Profesor: ¿Entonces?

Alumno 2: Perímetro.

Alumno 1: ¿Cómo seguimos?

Alumno 2: ¿Cuántos colegios podemos vallar con 2 kilómetros?

Alumno 3: ¡Cuadrados! ¿No serían kilómetros cuadrados?

Alumno 1: No, son kilómetros a secas, todavía no hemos usado los cuadrados.

Profesor: Entonces, vuestra pregunta quedaría más o menos así. Si un colegio tiene un perímetro de 580 metros ¿cuántas veces podríamos cercar el colegio con 2 Km de valla?

El profesor se dirige al siguiente grupo.

Profesor: Contadme ¿cuál es vuestra pregunta?

Alumno 1: Si el perímetro es,… no sé que….

Profesor: Venga, podemos usar 581 en lugar de no sé que.

Alumno 1: Vale. Si el perímetro es 581 metros,…

Profesor: No es necesario que utilicéis el perímetro podemos pensar un problema utilizando la escala como hemos hecho hoy.

Alumno 2: ¡Si el perímetro es 581 metros! ¿Cuál es el área?

Profesor: ¿Os vale esa?

Alumno 3: Y ¿cómo se calcula el área?

Profesor: Ah, ¿Cómo calculamos el área? Esa va a ser nuestra siguiente pelea.

Alumno 1: Vale, pues ya está esa.

Profesor: Ahora ya sabemos calcular el perímetro, ahora tendremos que calcular áreas.

Alumno 4: Pero si esto es amorfo ¿Cómo quieres que calculemos el área?

Alumno 3: A ver, si es cuadrado sí porque es lado por lado pero con esa forma...

Profesor: Pues, no sé, pero tienen que entrar 27 parcelas iguales ahí, así que me parece que vamos a tener que seguir pensando.

Alumno 4: Compramos más tierra hasta que sea cuadrado...

Profesor: Me parece que sale más barato pensar.

Vemos de nuevo aquí una cierta confusión a la hora de medir superficies, que será aprovechada en la siguiente sesión utilizando Q_{14} para preguntar si es posible conocer el área que encierra una figura conociendo su perímetro.

4.1.9. Sesión del 14 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	9
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	26
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

El principal objetivo de la sesión es trabajar con la pregunta Q_{14} para visibilizar los problemas no resueltos con la modelización M_1 creada. Se trata, por tanto, de explorar nuevas preguntas derivadas que surjan a partir de ahí y que den lugar al proceso de modelización M_2.

El momento de estudio que va a dominar la sesión es el de institucionalización, ya que vamos a estudiar a qué problemas se pueden aplicar las técnicas obtenidas para calcular el perímetro y a qué problemas no. El concepto de perímetro, de proporcionalidad y de medidas unidimensionales deben confrontarse con el de área, proporcionalidad de las superficies y medida bidimensional. Como resultado de esa confrontación se espera aclarar los elementos que forman parte del entorno tecnológico-teórico de M_0 y M_1 y cuáles no.

Un objetivo adicional de la sesión es movilizar algunos de los conocimientos previos relativos a la medición de superficies.

Se espera abordar por tanto las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{14}: ¿La división del perímetro en partes iguales da como resultado áreas iguales?

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Las respuesta esperada a Q_{14} es una respuesta negativa que visibilice los límites de la modelización llevada a cabo hasta el momento y que permita dar paso a las preguntas relativas a M_2 en las siguientes sesiones.

En cuanto a las preguntas que dan inicio a M_2 se espera que se obtengan respuestas relativas al uso algorítmico de fórmulas memorizadas. Por tanto es previsible que veamos respuestas basadas en la base y la altura (R_{16}).

3. Descripción de la sesión

La sesión comienza con una descripción breve de los pasos seguidos hasta obtener el perímetro del colegio que de forma aproximada se fija en 570 metros.

A continuación se recuerda que el objetivo del REI es dividir la parcela en 27 partes iguales. Y se plantea la siguiente pregunta:

¿Podemos obtener el área de una figura a partir de su perímetro?

Se genera un turno abierto de preguntas dónde los alumnos plantean e intentan argumentar sus opiniones. A continuación se recoge una transcripción de esa ronda abierta.

Profesor: ¿Podemos usar el perímetro para calcular el área? Sí, no y ¿por qué? Manos arriba y doy el turno de palabra.

Alumno 1: No se puede.

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 1: Porque no.

Profesor: Primera opción porque no. ¡Venga más!

Alumno 2: No se puede porque para calcular el área es lado por lado y…

Profesor: O sea que, para calcular el área hay una fórmula que tu conoces que es lado por lado.

Alumno 2: Sí

Alumno 3: Pero eso es para el cuadrado

Alumno 4: Hay otra fórmula que es base por altura

Alumno 5: No, el perímetro del colegio no tiene una fórmula regular entonces no se puede calcular el área.

Profesor: Vale ¿si el perímetro tuviese una forma regular se podría calcular el área?

Alumno 5: Con el perímetro sí.

Profesor: Si yo tuviera el perímetro del cole así (dibuja un cuadrado en la pizarra) *¿Podría calcular el área?*

Alumno 5: Sí

Profesor: Vale

Alumno 5: Pero si la forma es así (señalando al dibujo irregular que representa el colegio) se tendría que hacer algo.

Profesor: ¿Se podría hacer algo para pasar de aquí a aquí (dice mientras une con flechas las figuras del dibujo irregular y el cuadrado)

Alumno 6: Sí, como hacer un triángulo ¿no?

Alumno 7: Si dividimos el dibujo en partes regulares se podría ¿no?

Profesor: O sea que lo que tu propones es dividir, dividir el área en trozos más pequeños y,…

Alumno 7: Sí

Profesor: Vale vamos a ponerlo por aquí (y escribe dividir en la pizarra) dividir en trozos más *pequeños e ir calculando ¿no?*

Alumno 8: Hay que dividir el perímetro entre 4.

Profesor: O sea que sí se puede ¿no? Estaríamos en la opción del Sí. Hay que dividir el perímetro en 4 y ¿qué mas?

Alumno 8: y luego hay que multiplicarlo lado por lado.

Profesor: Entonces (escribe en la pizarra Perímetro entre 4 igual al lado) y luego ya,… puedo hacer lado por lado.

Alumno 5: Eso sería sólo si fuera un cuadrado.

Profesor: A ver, aquí dicen que eso sería para un cuadrado. Y si no es cuadrado como nos pasa a nosotros. ¿Sirve o no sirve?

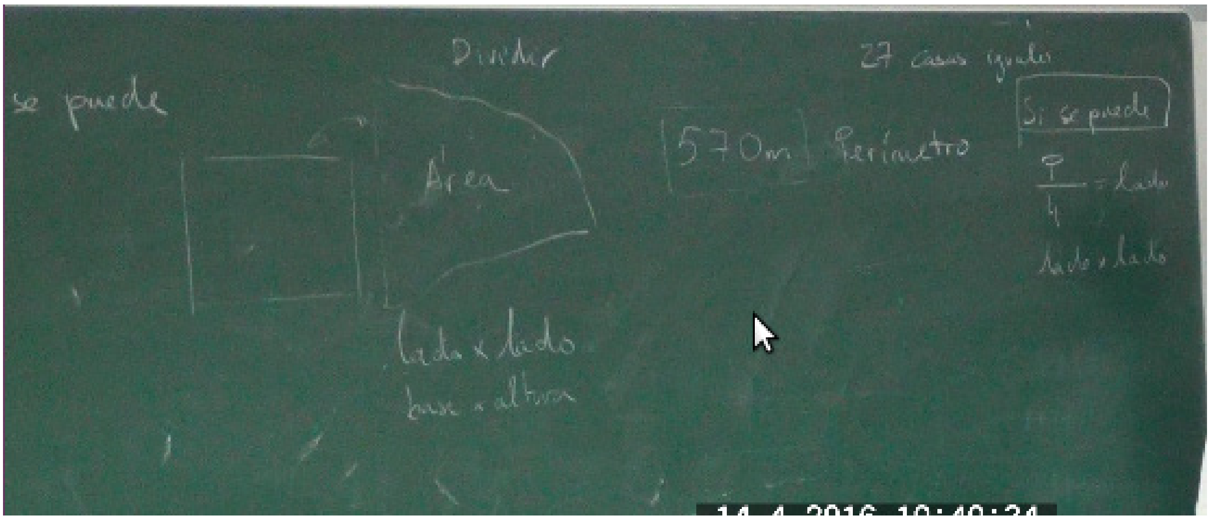


Figura 97. Pizarra dónde se han ido volcando las distintas aportaciones de los grupos. Elaboración propia.

Alumno 9: Pues, antes de ayer establecí mi teoría según la cual el área de una figura se podría calcular transformando cualquier figura en un cuadrado.

Profesor: Despacito, despacito,… Primero (el alumno 9) dice sí se puede. Porque con el perímetro se puede transformar la figura en un cuadrado y así calcular el área de la figura.

Alumno 9: Sí

Profesor: Vale, sigue.

Alumno 9: Supongamos que tenemos esta figura (dice mientras hace una figura irregular con *una goma) después sería medir el perímetro. Después quedaría algo así (dice transformando la figura formada por la goma en un rectángulo) y después transformarlo en una medida cuadrada (dice cambiando una vez más la goma y formando un cuadrado) para poder calcular su área.*

Figura 98. Alumno mostrando la transformación de un perímetro irregular en un perímetro regular. Elaboración propia.

Profesor: Vale. Si me permites yo tengo aquí una cosa (dice mientras saca una cuerda) *lo hago porque es más largo y se ve mejor. Entonces, veamos si te he entendido bien* (nombre de Alumno 9). *Para que luego podamos hacer una especie de votación entre las opciones no se puede y sí se puede.* (Dice mientras ata los dos extremos de la cuerda). *Tenemos un perímetro en este caso, este de aquí* (dice mientras forma un rectángulo con la cuerda) *o una cosa así sin forma* (dice mientras modifica la figura rectángular para formar una figura irregular). *La idea de* (nombre del alumno 9) *es: cogemos esta forma que no tiene ninguna forma regular pero como es la misma cuerda, pues yo la voy a colocar de otra forma* (cambia la figura irregular de nuevo a rectángulo) *y de esta forma el área encerrada por esta forma y esta otra (*cambia de nuevo a la figura irregular) *es la misma. Esa es tu idea ¿no?*

Figura 99. Puesta en común realizada por el profesor en la que se explica a la clase la opción del estudiante que afirma que se puede obtener el área de una figura a partir de su perímetro. Elaboración propia.

Alumno 9: Sí

Profesor: Esta área que está aquí dentro se puede medir transformándolo en un cuadrado.

Alumno 10: Es la misma área.

Profesor: ¿Es la misma área?

Alumno 5: No, no es la misma área

Profesor: Vale, creo que te he entendido y era así tu teoría ¿no?

Alumno 9: Asiente con la cabeza

Profesor: Entonces, tenemos dos opciones. Por aquí decía el alumno 1 que no se podía a partir del perímetro medir el área ¿vale? Por aquí nos han salido otras opciones que no tienen que ver con el perímetro que era la de dividir la figura en trozos diferentes. Nos han salido recordatorios o ideas que tenemos en la cabeza (dice mientras señala las fórmulas de lado por lado y base por altura escritas en la pizarra) de superficies de lado por lado o base por altura que nos suenan. Y por aquí decía el *alumno 8 que sí se podía, que dividimos entre 4 el perímetro que tenemos y el área lo calculamos haciendo lado por lado. Y el alumno 9 decía que tenía la teoría de que… había estado pensando que sí se conoce el perímetro de una figura irregular podemos transformar el perímetro en una figura regular reconocible (Hace con las cuerda las figuras de un cuadrado y un triángulo) y calcular el área de esa superficie más sencilla. Sería el mismo método propuesto por el alumno 8.*

Pero el alumno 9 va más allá y afirma que también valdría este (hace un triángulo con la cuerda) o que valdría este (hace un rectángulo). Entonces la pregunta es: Esta área que encierra la cuerda (hace un cuadrado) es el mismo que este (hace un triángulo). El perímetro es el mismo, yo no cambio la cuerda. La cuerda es siempre la misma.

A continuación se pide a los alumnos que se coloquen a la izquierda o a la derecha de la clase y deciden si se puede obtener el área a partir del perímetro o no se puede. En total 16 alumnos se mueven al sí y 10 al no.

Profesor: Tarea: vamos a tener que comprobar si la teoría de la cuerda que relaciona perímetro y área es correcta. Es decir, si yo mantengo el mismo perímetro, aunque modifique la forma, el área encerrada sigue siendo la misma. Esta área (hace un rectángulo) esta área (hace un cuadrado) esta área (hace un triángulo) y esta área (hace un pentágono) son exactamente la misma porque todas tienen el mismo perímetro ¿no? ¡Pues habrá que comprobarlo!

En el diálogo anterior vemos la aparición de varios EM y EP que pertenecen al EG 2 (el área encerrda por una figura rectangular es equivalente a la suma de las unidades de superficie que están contenidas dentro de ella). Así, cuando los alumnos comentan la forma de calcular el área de un cuadrado vemos cómo aparecen los EP 14 y 18 (calcular la superficie de un cuadrado a partir de la medición de su lado y calcular la superficie de un rectángulo a partir de la medición de sus lados). Cuando se propone por parte de otro alumno la posibilidad de medir una superficie dividiendo el espacio interior en áreas de figuras regulares vemos el EP15. Aunque finalmente la sesión se encamina a analizar las posibilidades del perímetro a la hora de obtener el área encerrada, la aparición en la puesta en común del EG 2 da una idea de los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre este tema y nos permitirá diseñar mejor las siguiente sesiones.

Para continuar la sesión, el profesor hace la señal de grupos cooperativos y reparte trozos de cuerda entre los grupos para que puedan estudiar el problema. Se pide a los alumnos que con la cuerda atada por los extremos creen figuras regulares y calculen con ayuda de la regla y con las fórmulas que conocen (EP14, EP18 y EP22 EP22 cuadrado, rectángulo y triángulo) el área que ocupan.

A continuación presentamos la explicación y los ejemplos que se hacen dentro de los grupos cooperativos por parte del profesor para aclarar la actividad:

Profesor: ¿Tenemos cuerda?

Alumno 1: Sí.

Profesor: Perfecto, la idea es la siguiente mira, atáis la cuerda y... ¿Tenéis regla? ¿tenéis posibilidad de medir?

Alumno 2: Sí aquí.

Profesor: Pues tenéis que comprobar que el área de las figuras formadas con este perímetro que representa la cuerda se mantiene. Aquí tenéis la cuerda. Supongo que un triángulo sabéis medir, un cuadrado, un rectángulo, incluso podríamos hacer un pentágono si os acordáis de como se calcula su área. ¿Vale?

La pregunta es si el perímetro no cambia ¿el área encerrada por la cuerda es la misma en todos estos casos? (ejemplifica varios casos como se ve en las siguientes imágenes)

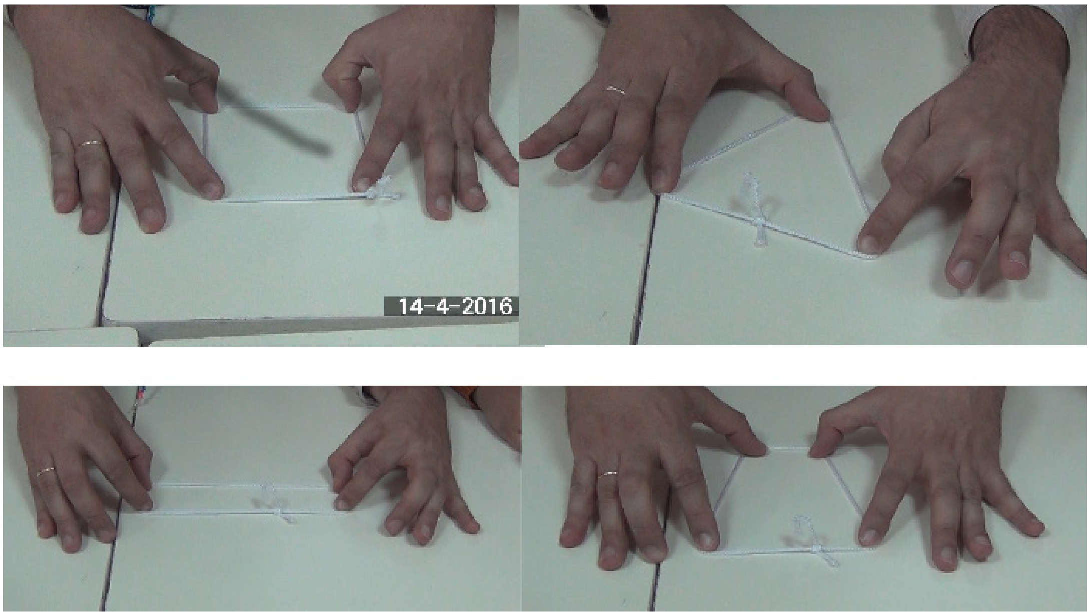


Figura 100. Construcción de varias figuras geométricas a partir de una misma cuerda por parte del profesor. Elaboración propia.

Los grupos cooperativos empiezan las discusiones de forma verbal pero, ante la imposibilidad de demostrar sus argumentos visualmente, poco a poco caen en la cuenta de que la mejor manera de argumentar es trazar las figuras y hacer mediciones.

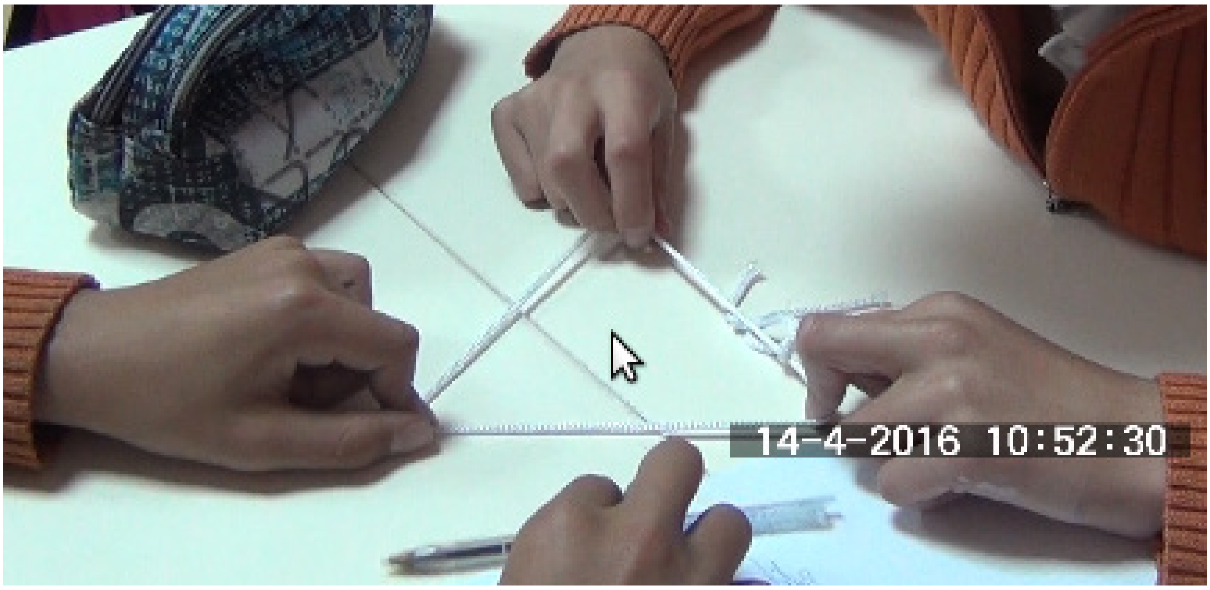


Figura 101. Construcción de varias figuras geométricas a partir de una misma cuerda por parte de los estudiantes. Elaboración propia.

Figura 102. Medición de los lados de las diferentes figuras para calcular sus áreas.. Elaboración propia.

Una vez todos los grupos han realizado las medidas y tienen la conclusión. Se vuelve a hacer la puesta en común.

Se va dando la palabra a cada grupo y todos afirman lo mismo: no se puede obtener el área a partir del perímetro porque las áreas encerradas cambian.

Para cerrar la sesión el profesor plantea el siguiente ejercicio en la pizarra:

Si tenemos una cuerda de 12 cm y formamos un cuadrado de lado 3 y un rectángulo de lados 1 y 5. ¿Cuál sería el área de esas figuras?

Área del cuadrado: 9 cm^2 - Área del rectángulo: 5 cm^2

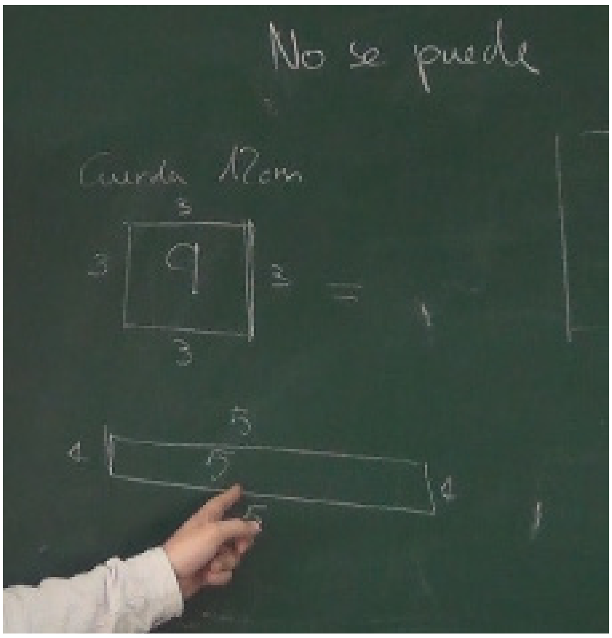


Figura 103. Explicación en la pizarra con dos figuras de igual perímetro y distinta área. Elaboración propia.

Aprovechando ese problema el profesor plantea la pregunta:

Si mantenemos un perímetro de 12 cm ¿qué figura geométrica de las que podemos formar genera el mayor área posible?

El profesor advierte que esa pregunta es demasiado complicada pero que si alguien quiere intentarlo puede empezar preguntándose cuál es la superficie de 4 lados y 12 cm de perímetro que más área ocupa.

Vemos aquí la posibilidad de abordar problemas sencillos de maximización que podrían servir de base como cuestiones generatrices de modelizaciones no previstas en el MER y que permiten ver posibles ampliaciones de nuestro modelo no previstas.

4.1.10. Sesión del 15 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	10
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

El objetivo principal de la sesión es dar comienzo a la modelización M_2, por lo que la sesión estará dominada principalmente por el momento del primer encuentro y el momento exploratorio.

Durante la sesión los estudiantes se enfrentarán por primera vez a la medición de la superficie de la parcela del colegio a partir de un plano a escala del mismo. Esta cuestión a abordar es nueva dentro del REI y se espera que los alumnos utilicen los EM y EP del EG 2 (el área encerrada por una figura rectangular es equivalente a la suma de las unidades de superficie que están contenidas dentro de ella) para llevarlas a cabo, y que exploren la división de la parcela irregular haciendo uso de los EG sintéticos 5 y 6 (regla y compás y perpendiculares y paralelas).

Se espera que durante la sesión se aborden las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Q_{18}: ¿Cómo se puede establecer una unidad de medida de superficies que genere un número entero de divisiones?

Q_{19}: ¿Cómo se puede establecer una unidad de medida de superficies que genere un número entero de divisiones en dos o más figuras?

Q_{20}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que surjan las siguientes respuestas:

R_{14}: Técnicas basadas en el conteo

R_{15}: Respuestas basadas en el común divisor

R_{16}: Respuestas basadas en la base y en la altura

R_{17}: Calcular el área por defecto

R_{18}: Calcular el área por exceso

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común y la altura correspondiente idéntica.

3. Descripción de la sesión

La sesión comienza recordando la conclusión de la clase anterior. Una vez recordado que el dato del perímetro calculado no es suficiente para calcular el área, se procede a iniciar una actividad de medición de áreas.

Se reparte a los grupos cooperativos un papel en DIN A3 con la figura de la parcela del colegio y la escala con la que está ha sido realizada.

Los grupos cooperativos hacen un primer volcado de ideas mediante la técnica cooperativa de lápices al centro y una vez decidido el método que van a seguir comienzan a trabajar. Los grupos empiezan a experimentar con las técnicas de cuadricular y triangular la figura y en la mayoría de los casos optan por una solución mixta. De manera informal todos los grupos consideran que el área total de la figura se puede obtener como resultado de sumar todas las área parciales que se pueden obtener mediante descomposición (EG7 composición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras).

En el siguiente diálogo vemos un ejemplo de esta primera aproximación:

Alumno 1: Yo tengo una idea mira,…

Alumno 2: Pero en rectángulo no vale.

Alumno 3: Hay que dividirlo en formas geométricas y luego en cuadrados.

Alumno 1: Sí mira, por ejemplo podemos hacer un rectángulo desde aquí.

Alumno 2: ¡Que no vale! Este lado no es recto.

Alumno 1: No pero mira, esto sí que vale (desplazando la regla para trazar paralelas al lado de la parcela regular)

Alumno 4: De todos modos podríamos hacer varios rectángulos.

Alumno 3: Si hacemos rayas de 1 y luego medimos, la altura es el área.

Alumno 4: También podemos usar otras figuras ¿no?

Alumno 1: ¡Claro! Haciendo aquí un triángulo grande y de aquí a aquí (señalando las diagonales)

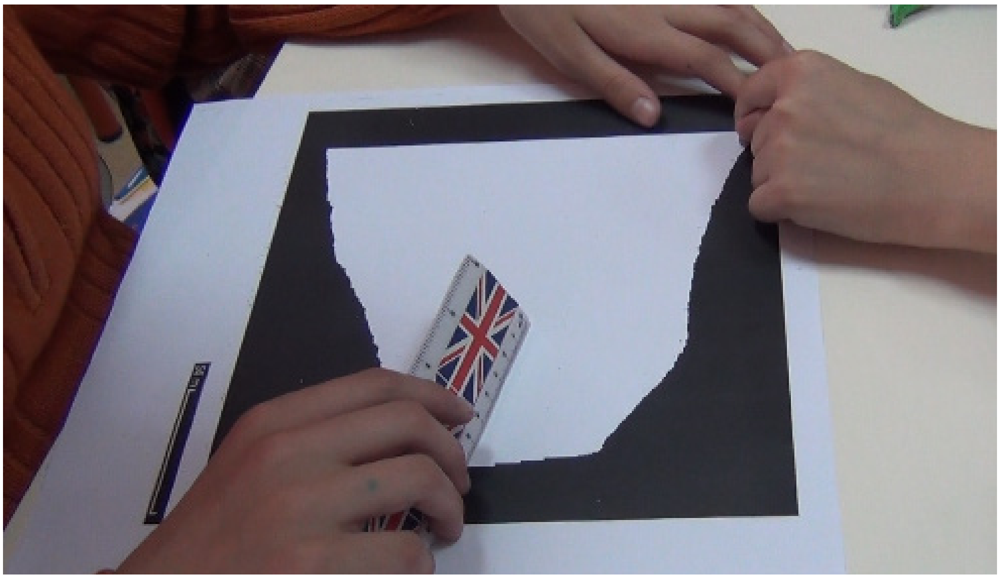


Figura 104. Discusión sobre como descomponer la parcela en figuras más sencillas Elaboración propia.

Alumno 2: Pero así faltarían más picos.

Alumno 4: Sí, falta un pico.

Alumno 3: Podemos empezar dividiendo la figura en 2 (Dice trazando con el dedo una diagonal)

Alumno 2: Vale, ¡empieza!

En este diálogo observamos un ejemplo del momento exploratorio en el que los alumnos buscan entre los distintos EM y EP cuál de ellos puede resolver la cuestión matemática que estamos estudiando. En concreto en el diálogo anterior se observan los EP15 (medir por defecto la superficie), EP18 (medición de la superficie de un rectángulo a partir de sus lados), EP19 (sumar la superficie de dos rectángulos), EP21 (dividir un rectángulo en partes iguales), EP22 (calcular la superficie de un triángulo), EP60 (trazar una paralela a una recta desde un punto externo a ella), EP77 (triangulación a partir de un vértice), EP78 (triángulación a partir de varios vértices) y EP84 (calcular la superficie de un polígono irregular convexo mediante triángulación). Como puede verse esta pregunta es muy fértil y permite movilizar EM y EP relativos a varios EG.

En otros grupos vemos el uso de perpendiculares (EP 53 y 55) para realizar la división del plano como se aprecia en la siguiente figura.

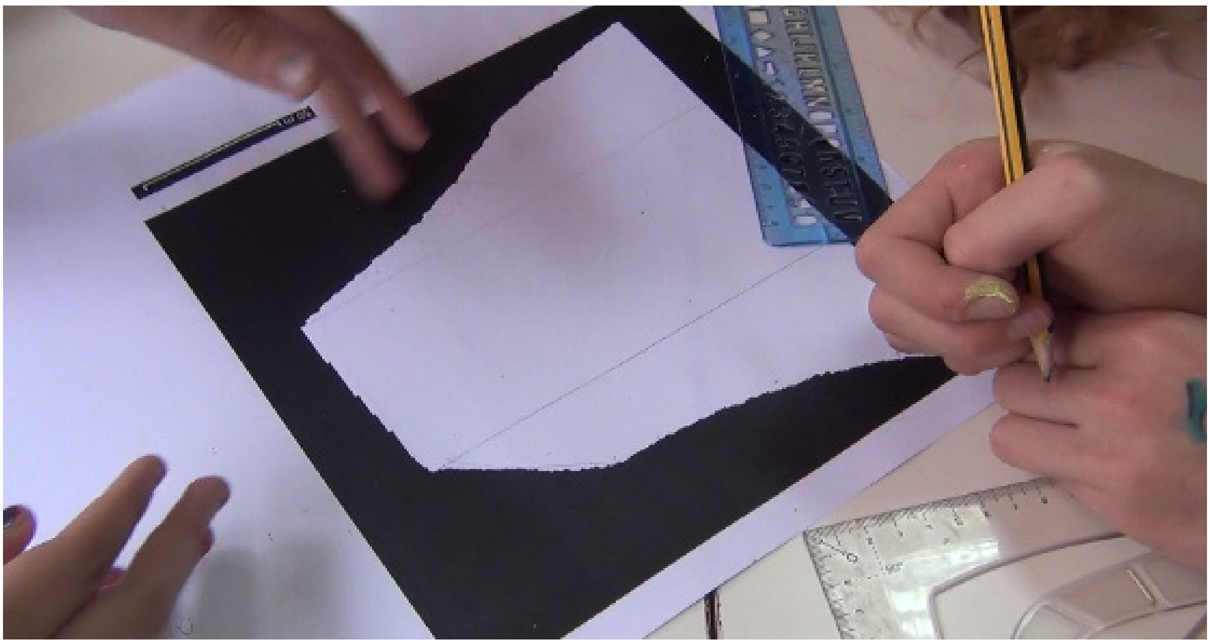


Figura 105. Trazado de perpendiculares mediante reglas. Elaboración propia.

También surge en uno de los grupos la posibilidad de cuadricular la figura para así obtener el área total de la misma mediante conteo de cuadrados. Vemos esta idea (EP15 medición por defecto de la superficie contando el número de unidades de superficie contenidas) en el siguiente fragmento de conversación:

Profesor observador: ¿Qué idea tenéis?

Alumno 1: Dividir el plano en formas iguales, para que aunque no sea totalmente fiable, tener una aproximación (por defecto).

Alumno 2: ¡Mira! Si lo dividimos en figuras geométricas idénticas de las que sepamos el área, como triángulos, rectángulos o cuadrados, a partir de ahí, como tenemos sus áreas los contamos y sumamos.

En uno de los grupos, ante la dificultad de cuadrar los limites de la parcela, se decide cuadrar la figura mediante dos rectángulos grandes y dejar el resto de zonas para espacios comunes, como se puede apreciar en la siguiente imagen.

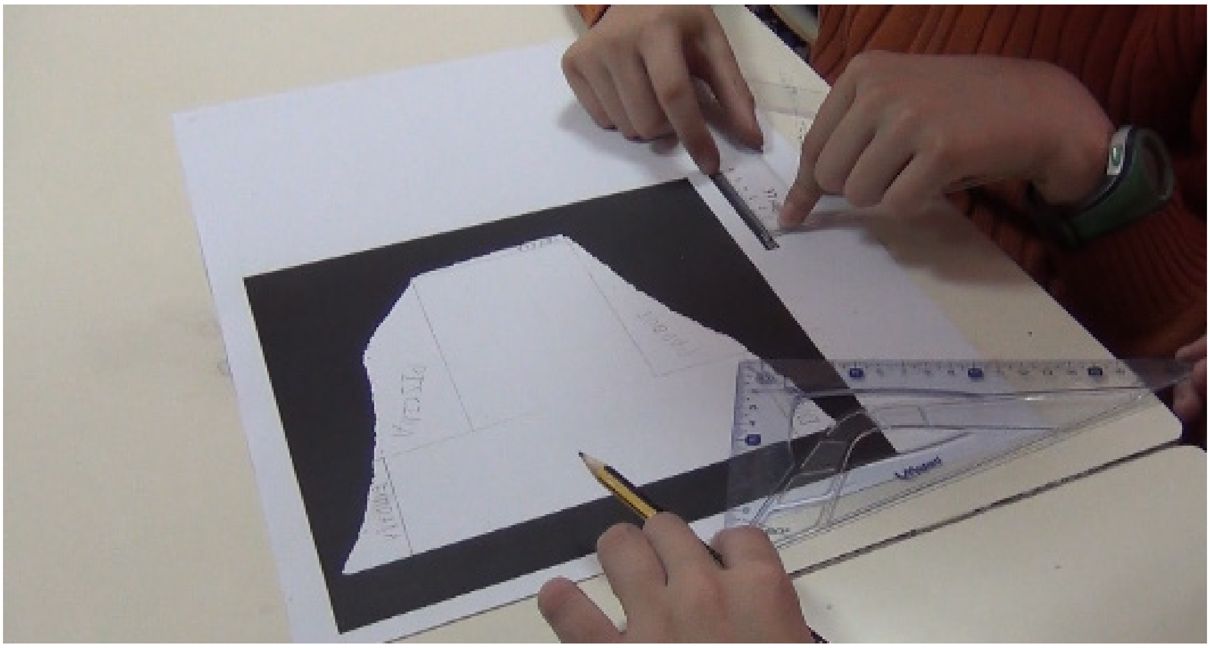


Figura 106. División interior de la parcela en dos rectángulos interiores. Elaboración propia.

Se observa en algún grupo la idea de triangular completamente la parcela dada (EP84) como se puede apreciar en la siguiente imagen.

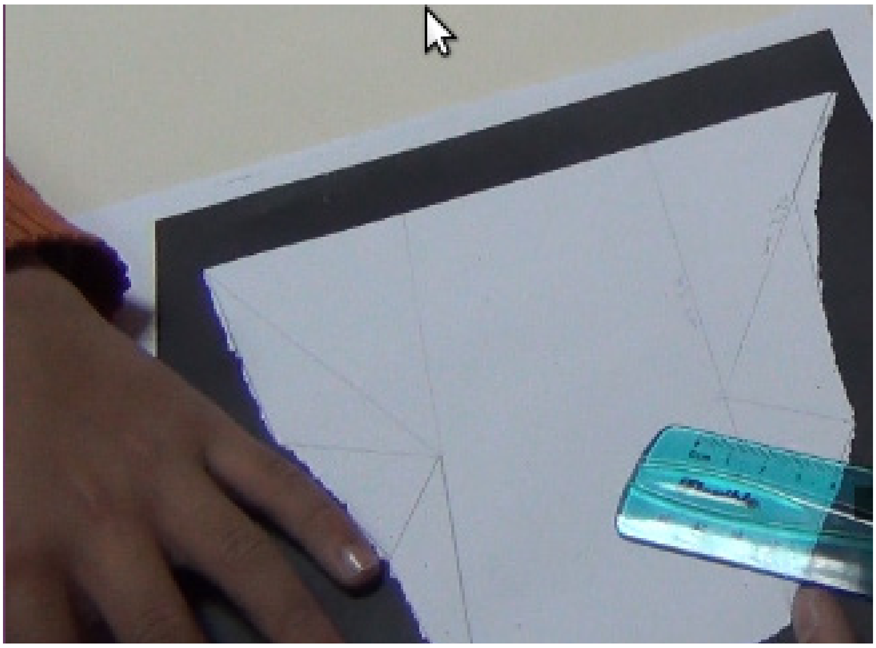


Figura 107. División interior de la parcela mediante triangulación. Elaboración propia.

Otras soluciones intentan ir aproximándose a los bordes con rectángulos o cuadrados de tamaño decreciente, intentando de ese modo obtener el área de la figura encerrada por defecto.

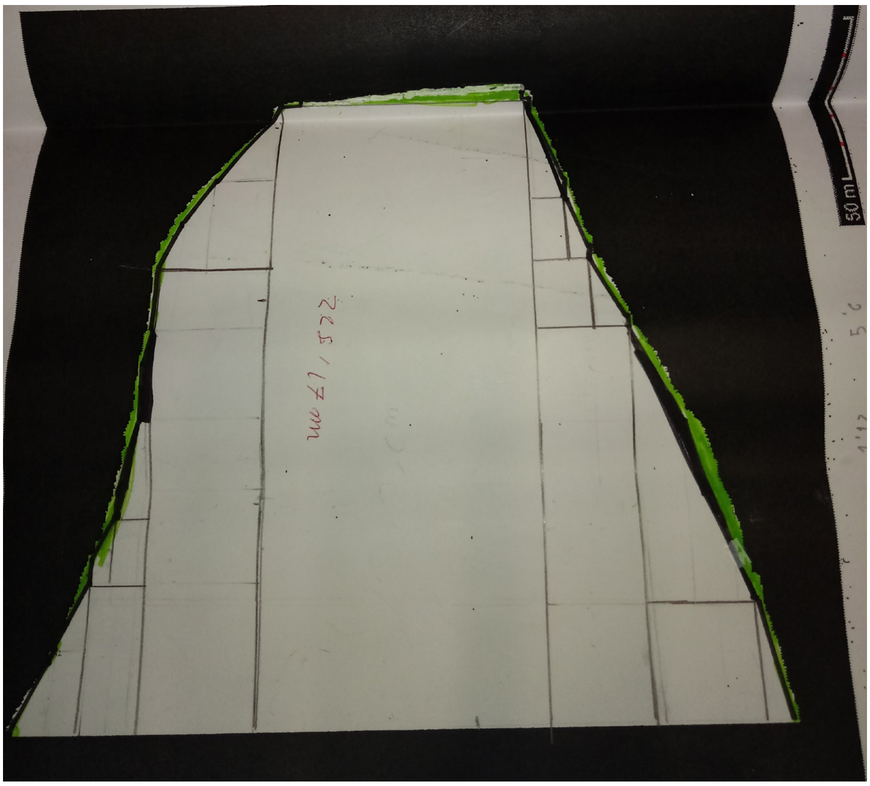


Figura 108. División interior de la parcela mediante rectángulos y cuadrados de tamaño decreciente. Elaboración propia.

El proceso de división de la figura se realiza en un primer momento sin utilizar técnicas sintéticas y se confía en la habilidad de trazar rectas paralelas y perpendiculares "a ojo".

Tras invertir toda la clase en el cálculo sucesivo de las figuras que componen en el área total, los grupos cooperativos dan una primera aproximación al área total muy inferior al área real representada. Esto se produce fundamentalmente por 2 motivos: la eliminación de grandes zonas de la parcela que no se incluyen ante la dificultad de calcular áreas irregulares y los errores en el trazado y en la medición de longitudes de lados y alturas.

A pesar de este primer resultado, la sesión ha servido para tener un primer encuentro y realizar un fértil proceso exploratorio que se podrá poner en común en las siguientes sesiones.

4.1.11. Sesión del 19 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	11
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior los alumnos abordaron la medición de áreas mediante el uso de algunas fórmulas conocidas de cursos anteriores. Sin embargo, el conocimiento de esas formulas no es cuestionado y se aceptan de forma acrítica y sin razonar. Se opta, por tanto, por introducir una sesión que trabaje el Momento tecnológico-teórico de forma que los alumnos puedan justificar los EM4 (fórmula de la superficie de un rectángulo), EM5 (fórmula de la superficie de un triángulo rectángulo) y EM 26 (descomposición de un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos trazando la altura sobre su lado más largo) a partir de los EG 2 (el área encerrada por una figura rectángular es equivalente a la suma de unidades de superficie que están contenidas dentro de ella) y EG 7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras).

El objetivo principal de la sesión es justificar los EM utilizados para el cálculo de áreas necesarios para llevar a cabo la modelización M_2, por lo que la sesión estará dominada principalmente por el momento tecnológico-teórico.

Durante la sesión los estudiantes se enfrentarán por primera vez a la demostración informal de fórmulas geométricas. Esta cuestión a abordar es nueva dentro del REI y se espera que los alumnos lleguen a las diferentes demostraciones combinando el razonamiento individual, el razonamiento en grupos cooperativos y el razonamiento en gran grupo.

Se espera que durante la sesión se aborden las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{20}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Q_{21}: ¿Cuál es la relación existente entre el área del rectángulo y el área del triángulo contenido?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor ?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que aparezcan las siguientes respuestas:

R_{14}: Técnicas basadas en el conteo.

R_{16}: Respuestas basadas en la base y en la altura.

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común la altura correspondiente idéntica.

R_{19}: Trazado de la altura de un triángulo.

R_{21}: Respuestas manipulativas para deducir la fórmula del área de un triángulo.

R_{22}: Respuestas mediante descomposición y recomposición para deducir la fórmula del área de un triángulo.

3. Descripción de la sesión

El profesor comienza la sesión haciendo un pequeño resumen de los métodos utilizados en la sesión anterior para realizar la actividad. Como el objetivo de la sesión es trabajar el momento tecnológico-teórico, se comienza mediante una explicación inicial por parte del profesor en la que se recuerda el concepto de unidad de superficie y en la que se razona, mediante el diálogo, la fórmula de la superficie de un rectángulo.

A continuación recogemos la transcripción de este momento introductorio:

Profesor: He estado echando un vistazo a los planos y la mayoría de vosotros estáis haciendo o bien cuadrados o bien rectángulos y completando los huecos con triangulitos. Mas o menos eso es lo que estáis haciendo la mayoría de los grupos. Habría que recordar cual es la unidad de superficie.

Alumno 1: Metro cuadrado.

Profesor: Entonces,... más o menos sabemos que (dice mientras dibuja un cuadrado de un metro de lado en la pizarra),... esto, ¿qué es?

Varios alumnos: ¡un metro cuadrado!

Profesor: Vale, 1 metro cuadrado, unidad de superficie, ¿no?

Varios alumnos: Sí.

Profesor: Entonces, cuando yo quiero medir un rectángulo o un cuadrado, o mejor dicho cuánta superficie ocupa un rectángulo, como en la mayoría de vuestros planos, ¿qué hacemos?

Alumno 1: ¿Para saber la superficie?

Profesor: Eso es.

Alumno 1: Pues,... tendrías que coger eso (señalando el metro cuadrado) *y ver cuántos caben.*

Profesor: Y ver cuantos caben ¿no? O sea que podríamos ir haciendo cuadrados a escala en nuestro plano y vamos a suponer que nos queda algo tan bonito cómo esto (dice mientras dibuja varias líneas horizontales y verticales que dividen el triángulo en 15 partes)

Alumno: ¿Bonito?

Profesor: Qué superficie ocupa este rectángulo que tengo yo aquí.

Varios alumnos: ¡15!

Profesor: ¡15 metros cuadrados! ¿Por qué?

Alumno 2: Porque dentro hay 15 cuadrados.

Profesor: Entonces, esta área ocupa 15 metros cuadrados, porque dentro caben 15 ¿no?. Entonces tenemos dos opciones para ir calculando superficies: podemos ir contando uno a uno, cuántos metros hay ahí o, ¿qué otra cosa podemos hacer?

Alumno 3: Base por altura.

Profesor: Pero,… eso yo no lo entiendo, matízamelo un poco.

Alumno 3: Multiplicando 3 por 5.

Profesor: Multiplicando 3 por 5 ¿no? O sea que la superficie que ocupa esto sería de 3 por 5, porque tenemos 3 filas y 5 columnas. Te parece que de momento en lugar de decir base por altura ¿digamos filas por columnas?

Alumno 3: Vale.

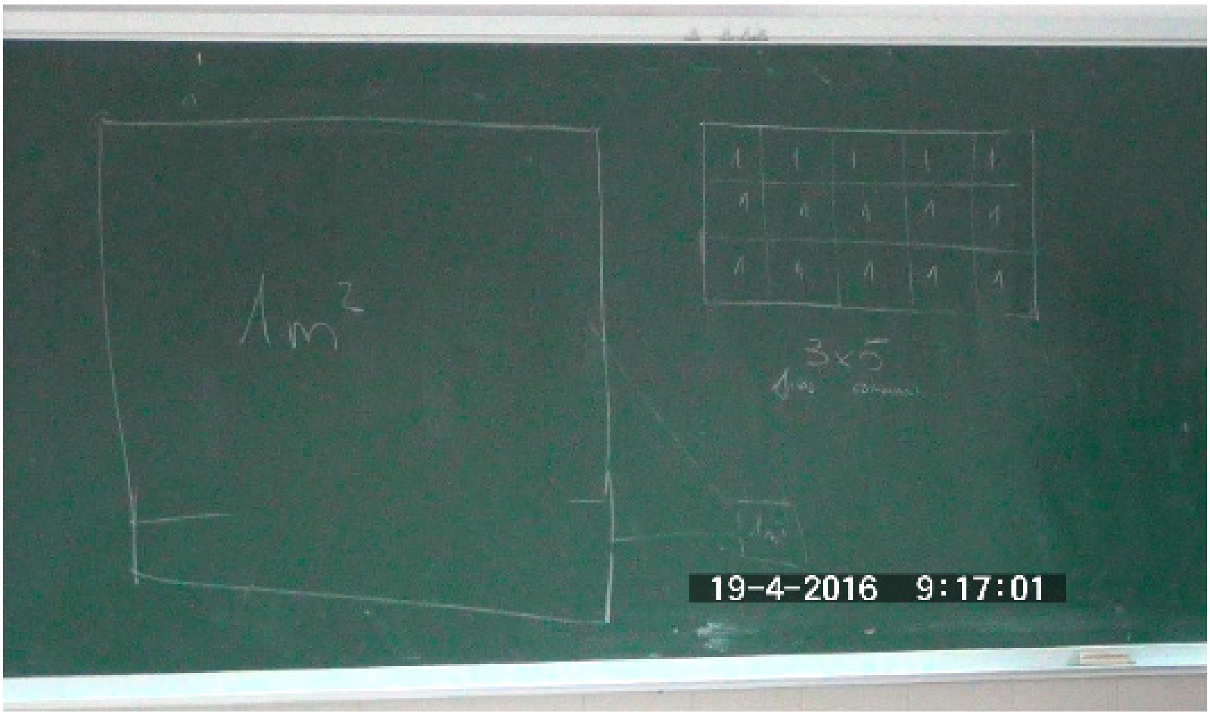


Figura 109. Pizarra en la que se van dibujando los elementos del diálogo entre profesor y alumnos. Elaboración propia.

Profesor: Tengo 3 filas y tengo 5 columnas en cada fila. Por eso cuando multiplico obtengo 15. Esto más o menos lo tenemos claro luego a partir de aquí podemos empezar a construir lo demás.

Vemos en esta secuencia cómo se retoma la idea de que la medida es la comparación con una unidad de referencia, en este caso se utiliza como unidad de referencia una superficie bidimensional en forma de cuadrado, lo que aporta significatividad a las unidades de superficie utilizadas en el sistema internacional de unidades.

A partir de este punto se plantean una serie de preguntas que movilizan los EP 17 y 18 (medir la superficie de un rectángulo contando las unidades de superficie contenidas o a partir de la medición de sus lados) y que permiten justificar el EM4 (fórmula de la superficie de un rectángulo) a partir del conteo. La multiplicación de la longitud de la base por la longitud de la altura cobra sentido al coincidir con la representación gráfica de la multiplicación de las unidades contenidas en n filas y m columnas. Con esta secuencia se ayuda a construir la justificación de las fórmulas para el cálculo de superficies a partir del EG 2 de medición de una superficie que la sustenta.

Una vez justificado el EM4, el foco de la clase se desplaza hacia la justificación del EM5 (Fórmula de la superficie de un triángulo rectángulo). En el siguiente diálogo se aprecia como se presenta esta nueva cuestión a resolver.

Profesor: ¿Conocéis alguna otra fórmula? De verdad, que no lo sé, lo pregunto sinceramente. ¿Alguien os ha dado alguna vez el área de un triángulo?

Alumno 1: Sí, es base por altura.

Varios alumnos: ¡no! Es base por altura partido por 2.

Profesor: Entonces es base por altura o base por altura partido por 2 ¿cuál os suena más?

Alumno 2: Era esa, partido por dos.

Profesor: A vosotros os han enseñado entonces esto que la superficie es base por altura partido por dos.

Alumno 3: y ¿Cuál es la altura del área?

Profesor: Claro, ¿Cómo sabemos la altura de un triángulo? Venga alguien que no haya participado todavía.

Alumno 4: Se mide la altura desde el centro.

Profesor: ¿Desde el centro?

Alumno 4: Desde el piquito.

Profesor: Desde el vértice.

Alumno 4: Eso, desde el vértice hacia abajo.

Profesor: ¿Hago así? (Dice mientras traza una linea vertical)

Alumno 4: Sí.

Profesor: Esto es la altura.

Alumno 4: Sí.

Profesor: Y si nos dan el triángulo así (Dibuja un triángulo rectángulo apoyado sobre la hipotenusa)

Alumno 5: Igual por la mitad.

Profesor: ¿Igual? ¿Qué hago?

Alumno 6: Del pico hacia abajo. (El profesor dibuja la altura)

Alumno 7: No, no, porque así no queda simétrico

Alumno 8: La de abajo, esa, por la que sube.

Profesor: ¿Te refieres a esta? (Señalando uno de los catetos)

Varios alumnos: No, esa no es.

Alumno 8: Pero no lo tienes que hacer ahí lo tienes que hacer fuera del triángulo.

Profesor: Así (dice mientras traza una línea perpendicular a la base y exterior al triángulo)

Varios alumnos: Pero es lo mismo.

Alumno 8: Sí así, de ahí a ahí sería la altura.

*Profesor: Estamos de acuerdo en que está de aquí es igual a esta de aquí (*señalando ambas líneas) *son iguales ¿no?*

Varios alumnos: Sí, son iguales.

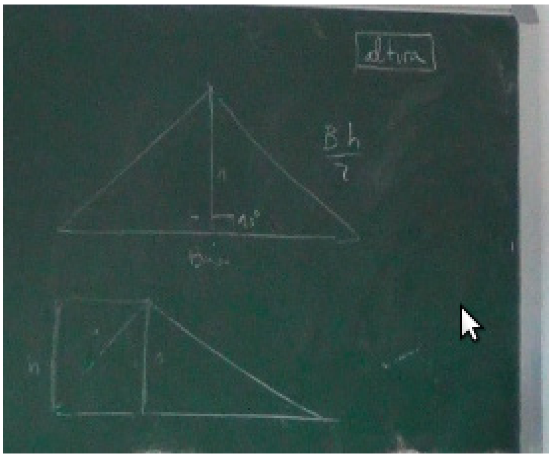


Figura 110. Triángulos con alturas trazadas. Elaboración propia.

Profesor: Bueno pues tendríamos que ser capaces de generar una idea de altura, es decir una definición de altura que nos permita no equivocarnos. ¿Cómo podemos expresar con palabras, qué es la altura?

(silencio)

Profesor: La primera idea que está en el aire es, ¿tiene algo que ver con el punto medio del lado del triángulo?

Varios alumnos: No

Profesor: Vale de acuerdo pues esa idea vamos a descartarla. La altura, ¿qué condición cumple?

Alumno 8: Es recta.

Profesor: Es recta, pero ¿Cómo podemos decir eso un poco más…?

Alumno 9: Que está en 90º con la base.

Profesor: Vale, muy importante, aparece un matiz. La altura para ser altura tiene que formar 90º. Si yo coloco la escuadra aquí tiene que formar un ángulo de 90º si no, no es altura. Luego en la definición de altura vamos a tener que añadir 90º por algún sitio. Qué mas cosas le ponemos.

Alumno 10: Hasta el punto más alto.

Profesor: Así que la altura sería la distancia,… ¿Cómo lo explico?

Alumno 10: La recta que une la base con el punto más alto formando 90º con la base.

En esta secuencia vemos cómo por primera vez aparece la idea de ángulo en el REI siendo esta la primera vez que los alumnos han mencionado el concepto de grado. Esta parte del proceso de justificación está centrada en la construcción de una definición y gira en torno al EP56 (Trazar la altura de una figura) que aparece aquí por primera vez.

También observamos que el lenguaje utilizado por los estudiantes es muy poco técnico y que el vocabulario geométrico es muy pobre. Este hecho es señalado en el modelo de Van Hiele y demuestra que los estudiantes se encuentran aún en los niveles de razonamiento iniciales del modelo.

Con esa definición el profesor plantea a los alumnos una comparación entre el rectángulo y el triángulo representados en la pizarra y entre sus fórmulas. Los alumnos señalan que la única diferencia entre ambas es el término partido por dos de la expresión para el triángulo.

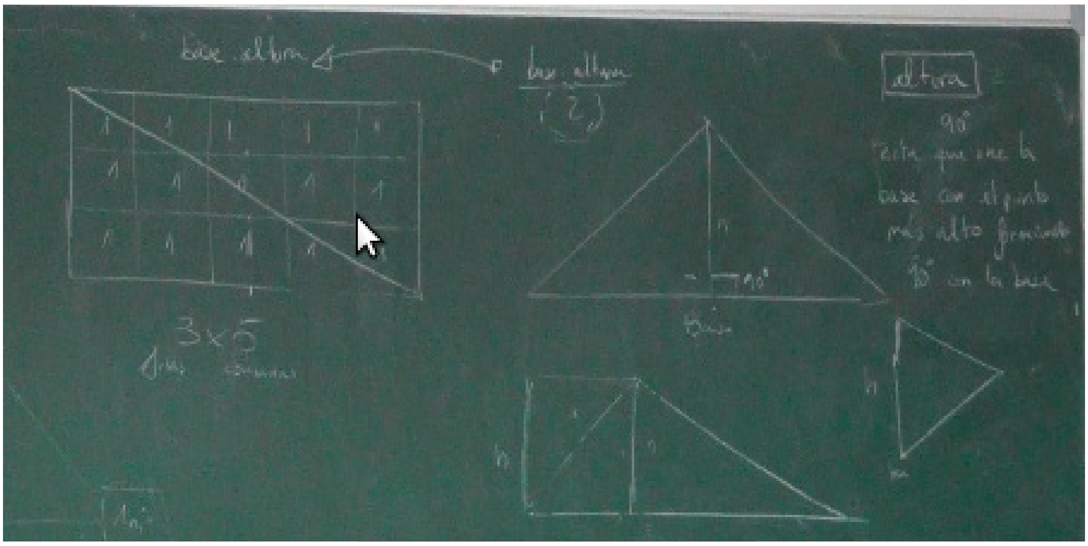


Figura 111. Comparación entre el rectángulo y el triángulo y las fórmulas para calcular sus áreas. Elaboración propia.

El profesor traza entonces una línea paralela a los lados verticales que divide al rectángulo en dos partes iguales y pregunta si esa puede ser el área de un triángulo. Los alumnos sugieren que se divida el rectángulo en dos utilizando la diagonal. El profesor realiza esa división y se ve claro que el rectángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos unidos por su hipotenusa. Todos los alumnos están de acuerdo en que un rectángulo se divide en dos triángulos si se utiliza la diagonal (EM5).

El profesor apoyándose en la figura del triángulo isósceles representada en la pizarra realiza una nueva pregunta:

¿Qué rectángulo se podría trazar para incluir este triángulo de forma que este fuese la mitad del rectángulo construido ? Esta pregunta invita a los alumnos a trabajar el EM26 (descomposición de un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos trazando la altura) y el EM 32 (fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo que comparte base y está entre las mismas paralelas). Estos EM se trabajan a partir del EP76 (calcular la superficie de un triángulo no rectángulo a partir de una altura que cae dentro del lado contrario) y del EP 89 (calcular la superficie de un triángulo a partir de un paralelogramo que tenga una base y una altura con la misma medida) no abordados hasta ese momento.

Se plantea a los alumnos que mediante la técnica de folio giratorio cada componente del grupo dibuje un triángulo diferente y colocado de distinta manera. Una vez hecho esto, y de nuevo mediante folio giratorio, cada alumno del grupo debe intentar trazar el rectángulo que contiene dos veces al triángulo dibujado.

Una vez explorada esa primera actividad el profesor representa los siguientes cuatro triángulos y asigna uno a cada miembro del grupo en función de su rol. Los triángulos del ejercicio son los de la figura 117:

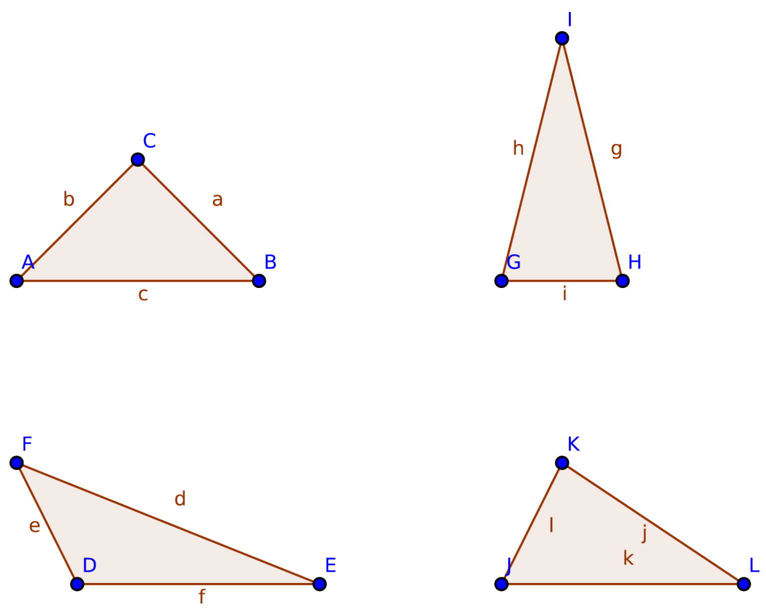


Figura 112. Triángulos dados a los grupos para ser inscritos dentro de rectángulos con la misma base y la misma altura. Elaboración propia.

Los alumnos encajan los triángulos en los rectángulos (EP22) y realizan la comprobación de la fórmula del área de un triángulo a partir de su relación con la fórmula de un rectángulo demostrada anteriormente. Para realizar esas demostraciones los diferentes grupos utilizan cuatro procedimientos diferentes:

1. Calculando el área de ambas figuras a partir del conteo de los cuadrados que ocupan ambas figuras (EP17).
2. Recortando las distintas piezas dibujadas y comprobando que efectivamente el triángulo original encaja dos veces en el rectángulo que tiene la misma base y la misma altura. Este procedimiento supone una primera incursión en el EG7 y permite realizar las primeras traslaciones, giros, simetrías y composiciones y recomposiciones de figuras.

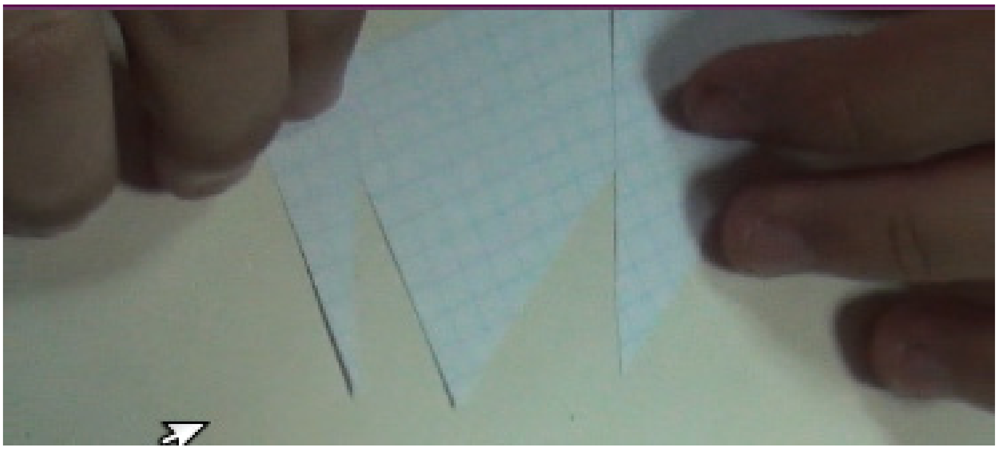


Figura 113. Recorte de las distintas piezas dibujadas para realizar una demostración informal de la fórmula para calcular el área de un triángulo. Elaboración propia.

3. Midiendo con las reglas y aplicando las fórmulas que están siendo estudiadas (EP18 y EP22).
4. Mediante plegado (EP54 trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella mediante plegado) se doblan los rectángulos para visibilizar cómo se solapa el triángulo original con el triángulo exterior al original que se forma al trazar el rectángulo que lo contiene (procedimiento solo válido para el triángulo isósceles ABC).

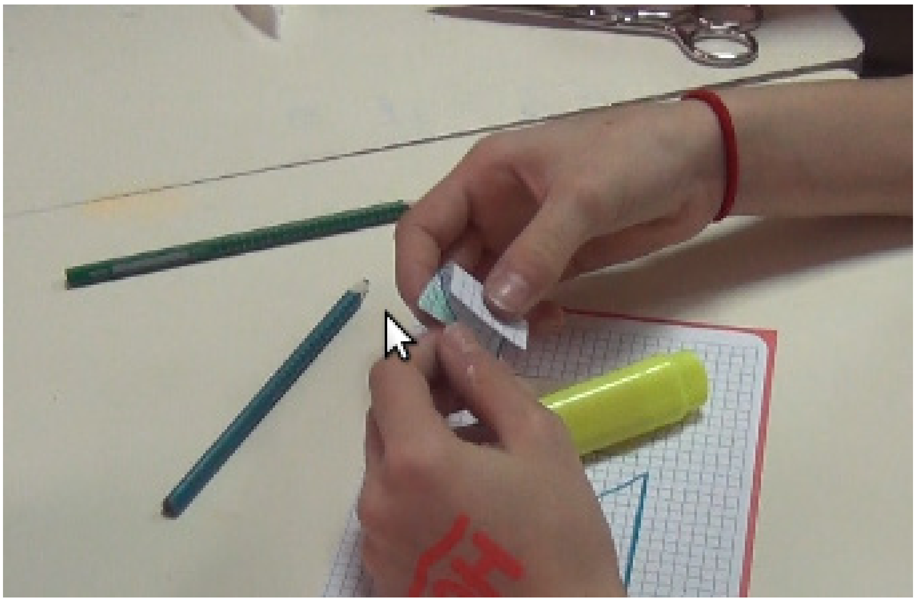


Figura 114. Plegado de un rectángulo con un triángulo inscrito para realizar una demostración informal de la fórmula para calcular el área de un triángulo. Elaboración propia.

De los triángulos representados, el triángulo escaleno FDE presenta problemas de demostración ya que al trazar la altura sobre la prolongación de la base, los alumnos tienden a englobar la figura en un rectángulo cuya base se extiende hasta el punto sobre el que se levanta la altura. Lo que lleva a que las bases del triángulo y el rectángulo no coincidan.

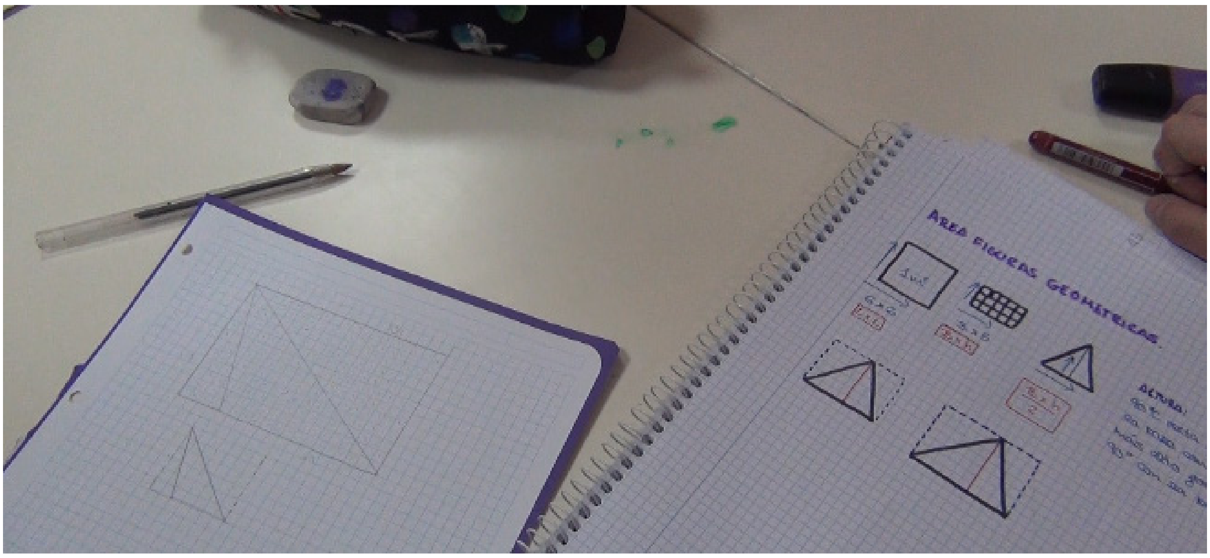


Figura 115. Error al inscribir el triángulo obtusángulo en un rectángulo que tenga la misma base. Elaboración propia.

Una vez va quedando claro que tan solo uno de los ejercicios presenta problemas para la demostración se pide a los grupos que busquen la solución entre los 4 miembros del grupo cooperativo al ejercicio del triángulo cuya altura se construye sobre la prolongación de la base (EP 56 trazar la altura de una figura).

Finalmente se hace una puesta en común en la que se van viendo los distintos EM empleados para hacer las demostraciones: (plegado, cálculo mediante fórmulas, conteo, descomposición y recomposición,...).

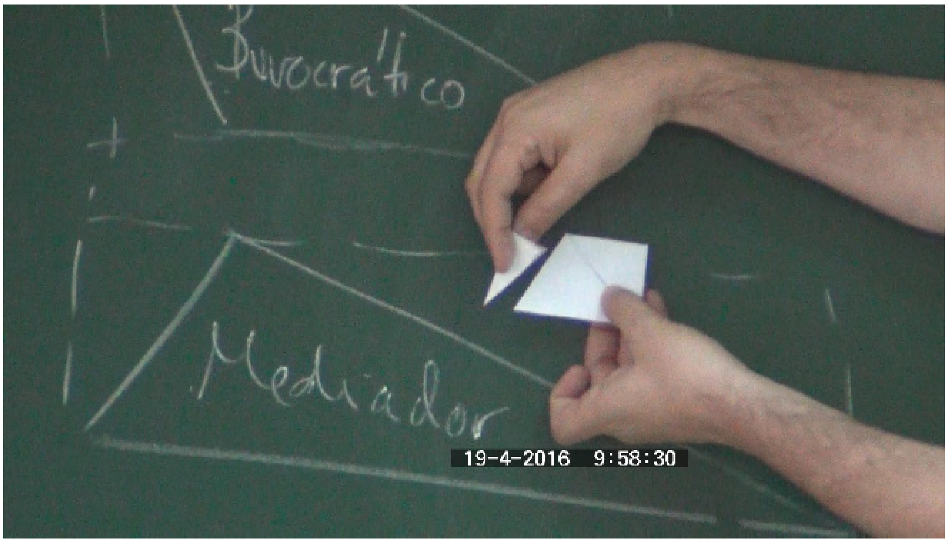


Figura 116. Puesta en común de la descomposición y recomposición de un triángulo inscrito en un triángulo. Elaboración propia.

El profesor remarca durante la puesta en común de los tres triángulos no obtusángulos que las bases del triángulo y del rectángulo y las alturas son iguales.

Cuando llega el turno del triángulo, que presentaba problemas, el profesor pide a los alumnos que expliquen por qué no han podido demostrar la fórmula en ese triángulo. Una alumna responde diciendo que el triángulo y el rectángulo dibujados no tienen la misma base y que por tanto sus áreas no guardan la relación de dos a uno. Otra alumna sugiere rotar el triángulo de forma que el lado mayor actúe de base y así evitar que la altura del mismo caiga fuera. Por último, otro alumno plantea que si se traza una paralela al lado mayor que pase por el vértice opuesto obtenemos un “rectángulo inclinado” pero que contiene dos veces al triángulo pedido.

La sesión finaliza remarcando que la fórmula $A=\frac{Bh}{2}$ ha sido demostrada en todos los casos.

4.1.12. Sesión del 20 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	12
Hora de inicio-fin	8:15-9:10
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En la sesión anterior los alumnos abordaron la tarea de demostrar la fórmula para calcular el área de un triángulo a partir de la fórmula para calcular el área de un rectángulo (EM 32). Las formulas conocidas de cursos anteriores se aceptan ahora de forma crítica y después de haber sido razonadas. Se opta por utilizar una sesión adicional que trabaje el Momento tecnológico-teórico de forma que los alumnos puedan justificar los EM 27, EM 28, EM 29, EM 30, EM 31 Y EM 32 (descomposición de un polígono convexo en triángulos, fórmula de la superficie del rombo, el trapecio isósceles, el paralelogramo y los polígonos regulares) a partir del EG 7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras).

Así, el objetivo principal de la sesión es seguir justificando los EM utilizados para el cálculo de áreas necesarios para llevar a cabo la modelización M_2, por lo que la sesión seguirá estando dominada principalmente por el momento tecnológico-teórico.

Durante la sesión los estudiantes continuarán con la demostración informal de fórmulas geométricas y harán parte del trabajo a partir de un EG no tratado en clase hasta ahora pero que surgió de forma espontánea en la sesión anterior (EG 7). Esta sesión es similar a la anterior y se espera que los alumnos lleguen a las diferentes demostraciones combinando el razonamiento individual, el razonamiento en grupos cooperativos y el razonamiento en gran grupo.

Se espera que durante la sesión se aborden las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Q_{23}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{24}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un trapecio isósceles a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{25}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un rombo a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor ?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que aparezcan las siguientes respuestas:

R_{14}: Técnicas basadas en el conteo.

R_{23}: Respuestas basadas en la triangulación de figuras poligonales.

R_{24}: Respuestas basadas en la división de figuras poligonales en partes rectangulares y triangulares.

R_{25}: Métodos de obtención de las fórmulas de áreas de un polígono regular a partir de su centro geométrico utilizando técnicas de triangulación.

R_{26}: Transformaciones de la figura original mediante descomposición y recomposición.

3. Descripción de la sesión

La sesión comienza haciendo un recordatorio rápido de la clase anterior y recordando las fórmulas para calcular la superficie de un rectángulo y de un triángulo obtenidas.

A continuación el profesor representa el rombo en la pizarra y solicita a los alumnos que aporten todo lo que recuerden sobre esa figura de cursos anteriores. Los alumnos señalan las siguientes características:

- Se puede dividir en triángulos
- Tiene 4 lados
- Se puede convertir en un cuadrado si deformamos los lados
- Tiene dos ángulos rectos (la clase corrige este punto e indica que normalmente tiene dos ángulos agudos y dos obtusos)

Al mencionar los alumnos los ángulos y teniendo en cuenta lo difícil que estaba siendo que apareciese este concepto en el desarrollo del REI el profesor aprovecha para introducir los EM 8 (fórmula de la suma de los ángulos de un triángulo) y EM 33 (fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular) y se explica a los alumnos que los ángulos interiores de un triángulo suman siempre 180º y que para saber los ángulos interiores de otra figura basta dividir esta en triángulos a partir de las diagonales desde uno de sus vértices (EP 91).

Se ejemplifica con el rombo esta cuestión a partir de la diagonal mayor indicando que al dividir el rombo en dos triángulos se puede afirmar que los ángulos interiores del mismo sumarán 360º.

Aclarado este punto el profesor vuelve a preguntar por las características del rombo y los alumnos amplían las ya señaladas con las siguientes:

- Tiene los lados iguales
- Sus ángulos son iguales 2 a 2 y suman 360º.

En este punto, una alumna índica que conoce una fórmula para calcular el área de un rombo. La fórmula para calcular su superficie es $A=\frac{Dd}{2}$

Varios alumnos recuerdan esa fórmula de cursos pasados y uno de ellos índica que todo es mucho más claro si se dibuja una caja alrededor. El profesor aprovecha esa idea para inscribir el rombo en un rectángulo cuyos lados coincidan en longitud con las diagonales del rombo. Esta idea es similar al EP 22 (calcular la superficie de un triángulo a partir de lamediciónde los lados y la altura) y al EP 89 (calcular la superficie de un triángulo a partir de un paralelogramo que tenga una base y una altura con la misma medida) ya explorado en la clase anterior y supone una aplicación del EM5 (fórmula de la superficie de un triángulo rectángulo) y del EM32 (fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo que comparte base y está entre las mismas paralelas) a una tarea similar a la ya realizada no contemplada en el MER.

Gracias al dibujo realizado, los alumnos se dan cuenta que las diagonales pueden ser vistas como base y altura del rectángulo que lo contiene y que por tanto la fórmula memorizada en otros cursos en realidad puede deducirse de la fórmula del rectángulo trabajada en la sesión anterior. Es interesante señalar que los alumnos no hayan utilizado en este punto el EP80 (triangulación) a pesar de que el dibujo lo sugería y hayan utilizado las diagonales tal y como se plantea en EP85.

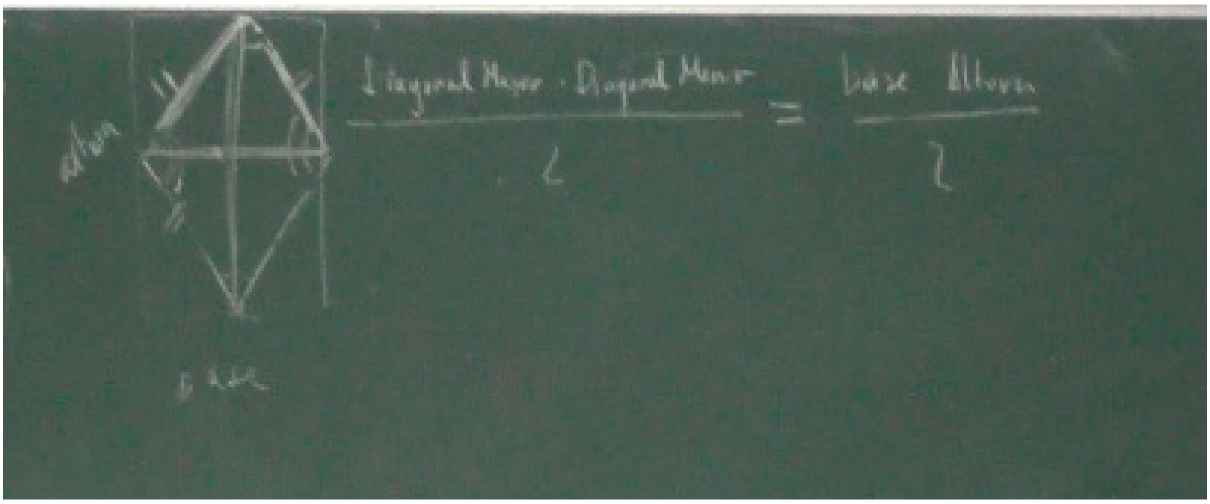


Figura 117. Inscripción de un rombo en un rectángulo cuyos lados coinciden en longitud con las diagonales del rombo. Elaboración propia.

Una vez acabado con el rombo, el profesor pregunta si conocen alguna otra figura y los alumnos responden que conocen el trapecio. Se dibuja un trapecio en la pizarra y se solicita a los alumnos de nuevo que señalen aquello que conocen de cursos anteriores sobre el trapecio. Los alumnos señalan las siguientes características:

- Dos lados iguales pero no paralelos y dos lados paralelos pero no iguales (la figura representada por el profesor fue la de un trapecio isósceles)
- Tiene dos ángulos obtusos y dos agudos y al igual que el rombo estos suman 360º.
- Se puede dividir en dos triángulos y un cuadrado o en dos triángulos escalenos.

Los alumnos intentan utilizar de nuevo la técnica anterior tratando de generalizar una vía de demostración. Sin embargo la recomposición del trapecio en un rectángulo no consigue que la base del rectángulo así obtenido coincida con ninguna de las bases del trapecio original.

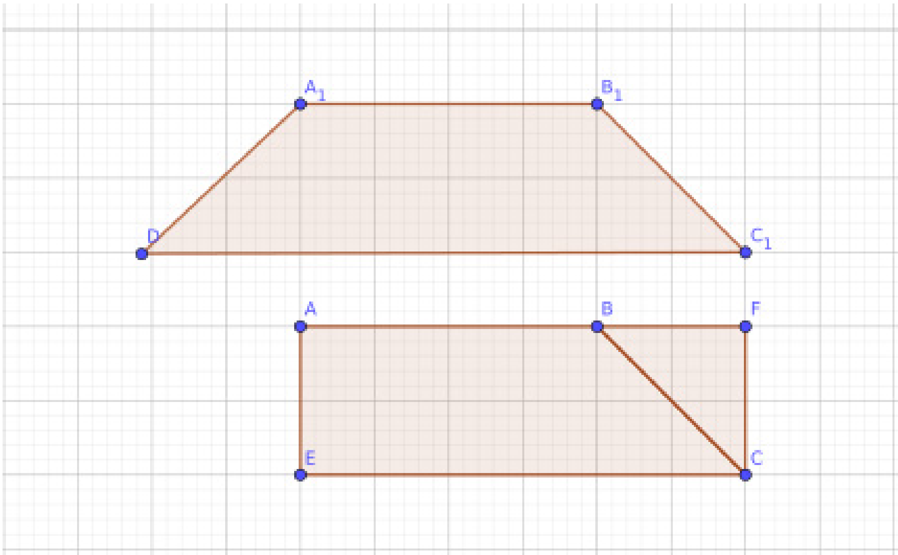


Figura 118. Recomposición del trapecio en un rectángulo de base distinta a las bases del trapecio. Elaboración propia.

Ante este problema uno de los alumnos se aventura a formular una fórmula para calcular la superficie del trapecio a partir de las bases del mismo. A continuación reproducimos ese diálogo en el que el alumno está intentando buscar una técnica que permita abordar la cuestión matemática que se está estudiando y que supone un ejemplo del momento exploratorio relacionado con la demostración informal de fórmulas para el cálculo de áreas.

Profesor: ¿Había alguna forma, como en el caso del rombo, para calcular el área del trapecio?

Alumno 1: Base menos techo partido de dos, más base por altura.

Profesor: ¿Cómo? A ver, dime que pongo.

Alumno 1: Base

Profesor: Base

Alumno 1: menos techo

Profesor: Menos techo

Alumno 1: Partido de dos, mas paréntesis base por altura

Profesor: Base por altura,… ¿Así?

Alumno 1: ¡No, espera! Cambia la segunda base por techo.

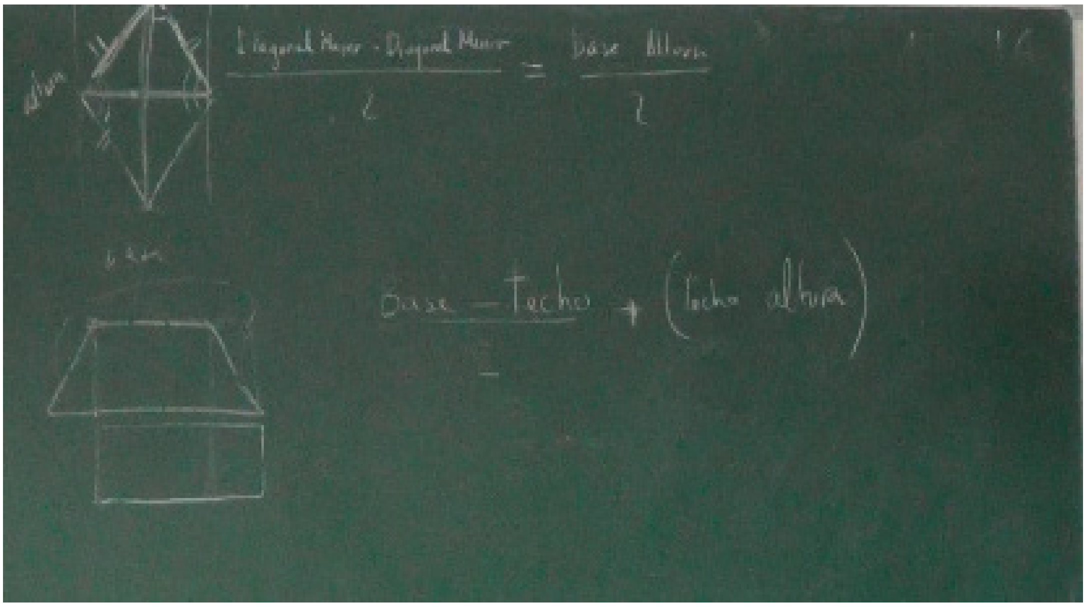


Figura 119. Intento de formular una expresión para el cálculo del área de un trapecio. $A = \frac{Base - Techo}{2} + (Techo \; x \; altura)$. Elaboración propia.

Alumno 2: y ¿Cómo has calculado eso?

Profesor: Es una idea (nombre del alumno 2). *Yo no digo ni que esté bien ni que este mal, de hecho tendríamos que comprobarlo.*

Alumno 2: No,… Espera,… esa fórmula sólo funciona teniendo en cuenta que Base es el lado más largo y techo el más corto.

Profesor: Te parece entonces que en lugar de base y techo pongamos base larga y base corta.

Alumno 1: Vale.

Profesor: Vamos a hacer una cosa, cuando empecemos el cooperativo te sugiero que pongamos números a los lados de nuestro ejemplo e intentemos ver si nuestra fórmula funciona o si podemos encontrar otra. En cualquier caso me gustaría decir que algo de todo esto hay, pero que la fórmula de los libros suele ser algo diferente a la tuya, tal vez podamos partiendo de esta idea acercarnos a esa fórmula igual que en el caso del rombo hemos llegado de esta (señalando la formula de la diagonal) *a esta otra* (señalando la fórmula escrita en términos de base y altura del rectángulo que contiene al rombo).

Vemos en este diálogo una primera versión de EP86 (calular la superficie de un trapecio conocidas las bases y la altura) y la importancia de dejar tiempo a los alumnos para formular hipótesis con su propio vocabulario y para tratar de realizar sus pequeñas demostraciones o refutaciones de esas ideas. Es muy importante señalar que esta situación de clase es muy difícil de encontrar en una clase tradicional dónde los alumnos no se cuestionan los conceptos presentados por los profesores. La metodología basada en los REI cooperativos genera una mayor probabilidad de que estos intercambios se produzcan y los alumnos pueden aprender matemáticas haciendo matemáticas.

Para evitar que la clase se detenga en ese punto, el profesor decide continuar y pregunta a los alumnos por otras figuras que conozcan. Los alumnos apuntan el paralelogramo. El profesor representa un paralelogramo en la pizarra. Los alumnos comentan que parece igual que el rombo pero rotado y el profesor aclara que el rombo, como se ha dicho, tiene los 4 lados iguales, mientras que el paralelogramo no cumple esa característica.

Los alumnos especulan con la fórmula del paralelogramo y argumentan que probablemente se pueda calcular la superficie como base por altura. Surgen dos ideas diferentes para justificar esta afirmación:

- Un alumno señala que el paralelogramo se puede triangular utilizando una de las diagonales y que al hacerlo de esa forma obtenemos dos triángulos iguales por lo que la suma de los ángulos interiores del paralelogramo sumará 360º y se podrá calcular el área a partir de ellos. Se trata de una aplicación del EM 30 (fórmula de la superficie de un paralelogramo cualquiera) y del EP 87 (calcular la superficie de un paralelogramo conocidas su base y altura) que aparece aquí por primera vez.

Figura 120. Descomposición de un paralelogramo en dos triángulos a partir de una de sus diagonales. Elaboración propia.

- Otro alumno argumenta que si se traza la altura la figura queda descompuesta en un triángulo y un cuadrilatero y que si trasladamos el triángulo al otro lado se forma un rectángulo que se podría calcular como base por altura, EP 87 que se justifica por descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición.

Figura 121. Descomposición de un paralelogramo y recomposición en un rectángulo con la misma base y altura. Elaboración propia.

Este es un ejemplo de cómo los alumnos empiezan a abordar los problemas que se van planteando desde el EG 7 y de cómo están abandonando la aceptación acrítica y no razonada de las fórmulas por un planteamiento basado en el momento tecnológico-teórico en el que se busca justificar las técnicas.

El profesor, para dar por finalizada la puesta en común, introduce una figura más: el hexágono regular. Una alumna comenta que recuerda que la fórmula es perímetro por radio entre dos. Como vemos el aprendizaje no razonado o memorístico hace que se sustituya un término poco utilizado, como la apotema, por uno más familiar, como el radio, y que no haya nadie en la clase que señale esto como incorrecto.

Otro alumna argumenta que se puede dividir en 6 triángulos iguales desde el centro de la figura (EP 83 que aparece por primera vez). La descomposición se presenta de nuevo como una forma de tratar de justificar una fórmula aunque de momento no se ha podido establecer la relación entre las fórmulas habituales y esa triangulación.

Se pide a los alumnos que en función de sus roles dibujen de forma exacta en su cuaderno un rombo, un trapecio isósceles, un paralelogramo y un hexágono regular e intenten descomponer y recomponer las figuras en forma de rectángulos o triángulos. Cada miembro del grupo en función de su rol debe trazar una de las figuras. En este caso la disposición en cooperativo permite que se consulten dudas entre ellos. Se espera con esta tarea que los alumnos recurran a alguna de los EM y EP sintéticos de trazado de figuras pertenencientes a los EG 5 y 6 (regla y compás y paralelas y perpendiculares) para poder posteriormente tratar de demostrar mediante el EG 7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición) algunas de las fórmulas presentadas en la puesta en común inicial.

Los alumnos no recurren a las técnicas sintéticas a la hora de trazar las figuras, por lo que las composiciones y recomposiciones que plantean no pasan de ser pequeños bocetos.

Figura 122. Trazado de un hexágono a mano alzada. Elaboración propia.

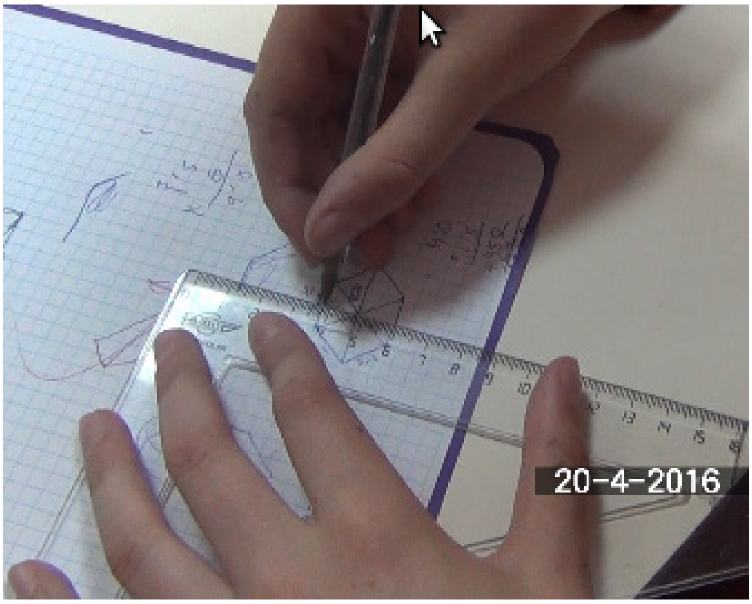


Figura 123. Trazado de un hexágono a mano alzada y medición de la apotema “a ojo”. Elaboración propia.

En algunos casos, ante la recomendación del profesor de realizar el dibujo de forma precisa, algunos alumnos recurren a la regla y al compás para trazar las figuras y se consigue por primera vez que aparezcan en algunos grupos los EP 42 (trazar un triángulo equilátero conocido su lado), EP 44 (trazar un hexágono regular a partir de su lado), EP 52 (trazar una perpendicular a una recta desde un punto situado sobre ella con regla y compás), EP 70 (trazar un paralelogramo igual a uno dado) y EP 71 (trazar un trapecio igual a uno dado).

Figura 124. Trazado de un hexágono con regla y compás. Elaboración propia.

En uno de los grupos, el mismo alumno que planteó la fórmula para calcular el área del trapecio propone una fórmula para calcular el área del hexágono. Reproducimos aquí la conversación mantenida con este alumno:

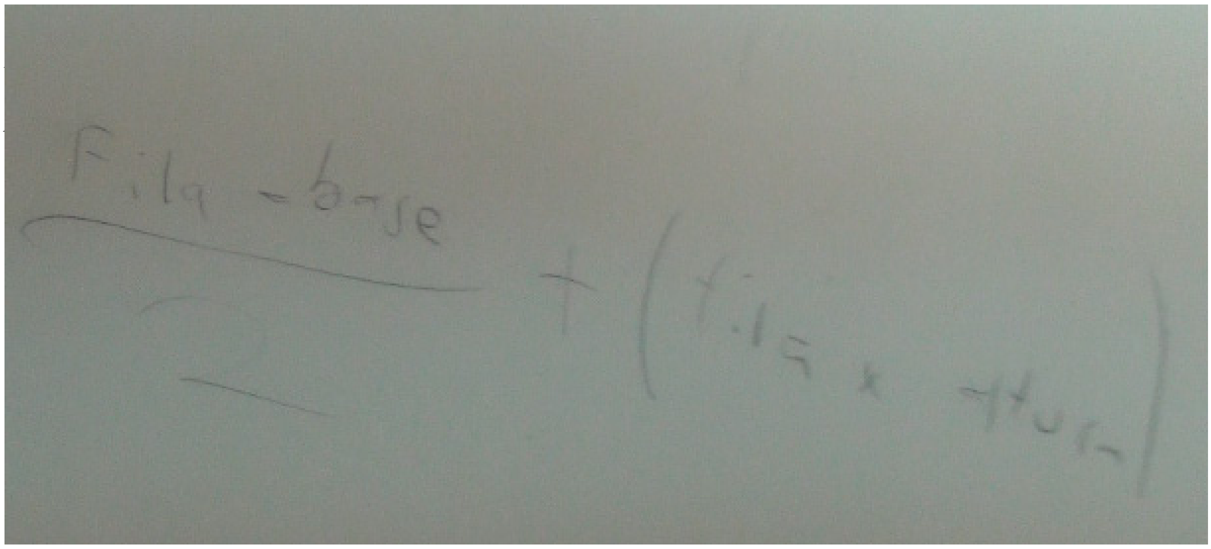


Figura 125. Expresión informal de la fórmula de un hexágono regular. Elaboración propia.

Alumno: Sería Fila menos base entre dos más fila por altura entendiendo Fila como esto, base como esto y altura.

El alumno dibuja un hexágono y señala como base el lado inferior del hexágono como fila la diagonal que une los dos vértices intermedios y que equivale a dos radios y como altura la distancia entre el lado superior e inferior del hexágono.

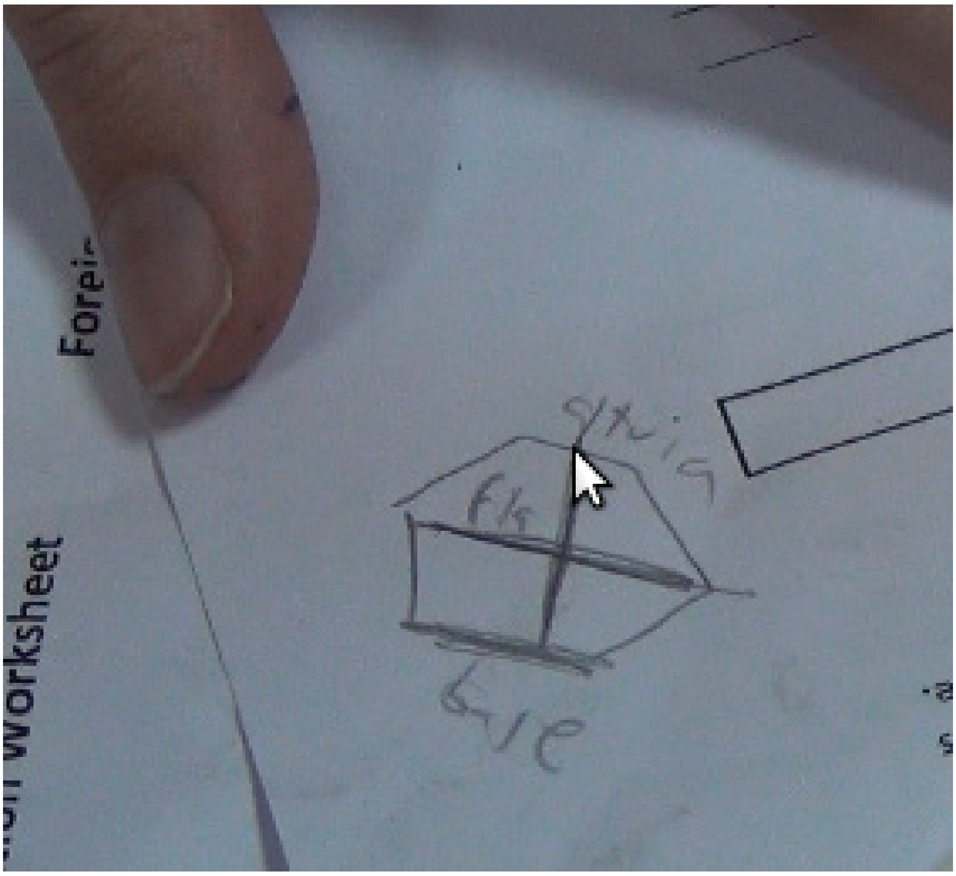


Figura 126. Aclaración del alumno de la terminología elegida para su expresión. Elaboración propia.

Profesor: Y ¿cómo puedes comprobar que eso se cumple?

Alumno: No sé,… Simplemente haría Fila menos base entre 2 (Hace un dibujo de un hexágono con dos diagonales perpendiculares a la base que dividen al hexágono en un rectángulo y dos triángulos, señala la altura de uno de los triángulos) *para saber el área de los dos espacios* (señala dos rectángulos que contienen a los dos triángulos).

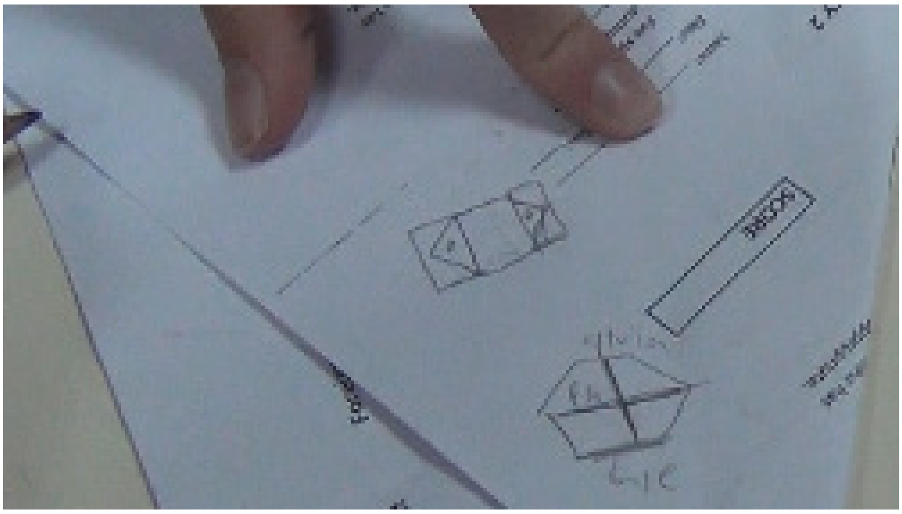


Figura 127. Trazado de un hexágono a mano alzada con dos diagonales perpendiculares a la base. Elaboración propia.

Como el rectángulo está formado por dos triángulos al dividir entre dos tenemos el área de estas dos (dice señalando los triángulos del hexágono) y luego más…

Profesor: *Que sería un rectángulo*

Alumno: *Sí base por altura* (rectifica en la segunda parte de la fórmula inicial la palabra fila por base).

La fórmula final obtenida es $A=\frac{Fila-base}{2}+(Base\,x\,altura)$

Está fórmula es incorrecta ya que el primer término debe multiplicarse por la altura. Superado ese pequeño detalle que en la explicación que da el alumno es la idea que ha tenido la fórmula sería correcta. En este tipo de razonamientos, aunque excepcional se puede observar el proceso de inducción-deducción propio de la actividad matemática y permite ver a los alumnos, gracias a este planteamiento de sesiones, los caminos y las idas y venidas que son necesarias para llegar a una determinada técnica matemática. Dejar tiempo para que los alumnos vayan descubriendo y elaborando sus propias justificaciones teóricas de las técnicas puede llegar a ser muy fértil.

Por falta de tiempo la actividad no puede ser puesta en común y el profesor índica que se seguirá trabajando al día siguiente.

4.1.13. Sesión del 21 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	13
Hora de inicio-fin	10:05-10:35
Alumnos presentes	26
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

Las sesiones del día 21 y 22 se ven modificadas por el programa de acción tutorial del centro ya que se programan dos sesiones de prevención de consumos con la Fundación Proyecto Hombre no previstos por el profesor-investigador. Esta sesión se reduce a la mitad de tiempo y la sesión del día siguiente tiene que ser anulada.

Por estos motivos, los objetivos se modifican y se decide realizar una sesión resumen en la que se produzca la institucionalización de las fórmulas trabajadas en las sesiones anteriores. Se espera por tanto fijar las técnicas relativas a las fórmulas para calcular las superficies de las figuras planas previstas en el MER.

Las fórmulas conocidas de cursos anteriores se aceptan ahora de forma crítica y después de haber sido razonadas, y será el profesor el encargado de institucionalizar las justificaciones encontradas por los alumnos mediante una puesta en común apoyada de una explicación magistral.

Se opta, por tanto, por utilizar esta media sesión para trabajar el momento de la institucionalización, de forma que se puedan fijar los EM4 (fórmula de la superficie de un rectángulo), EM5 (fórmula de la superficie de un triángulo rectángulo), EM8 (fórmula de la suma de los ángulos de un triángulo), EM26 (descomposición de un triánguo cualquiera en dos triángulo rectángulos), EM27 (descomposición de un polígono convexo cualquiera en triángulos), EM28 (fórmula de la superficie de un rombo), EM29 (fórmula de la superficie de un trapecio), EM30 (fórmula de la superficie de un paralelogramo), EM31 (fórmula de la superficie de un polígono regular), EM32 (fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo) y EM33 (fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular) a partir del EG2 (el área encerrada por una figura rectángular es equivalente a la suma de las unidades de superficie contenidas) y el EG7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras). Así, el objetivo principal de la sesión es institucionalizar los EM utilizados para el cálculo de áreas necesarios para llevar a cabo la modelización M_2.

Se espera que durante la sesión se aborden las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Q_{20}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Q_{21}: ¿Cuál es la relación existente entre el área del rectángulo y el área del triángulo contenido?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor ?

Q_{23}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{24}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un trapecio isósceles a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{25}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un rombo a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que aparezcan las siguientes respuestas:

R_{16}: Respuestas basadas en la base y en la altura

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común y una altura correspondiente idéntica

R_{20}: Trazado de la altura de un triángulo

R_{22}: Respuestas mediante descomposición y recomposición para deducir la fórmula del área de un triángulo.

R23: Resuestas basadas en la triangulación de figuras poligonales.

R24: Respuestas basadas en la división de figuras poligonales en partes rectangulares y triangulares.

R25: Métodos de obtención de las fórmulas de áreas de un polígono regular a partir de su centro geométrico utilizando técnicas de triangulación.

R26: Transformaciones de la figura original mediante descomposición y recomposición.

3. Descripción de la sesión

Se realiza una puesta en común del trabajo realizado con las áreas de los rombos, los trapecios isósceles y los hexágonos. Incidiendo en la suma de los ángulos interiores de las diferentes figuras y en la relación existente entre las fórmulas habituales de los libros de texto y las obtenidas en la sesión anterior.

Un ejemplo de esta institucionalización está contenido en el siguiente extracto:

Profesor: La fórmula que aparece en los libros de texto para calcular el área de un rombo es diagonal mayor por diagonal menor entre 2, pero ¿de dónde sale esa fórmula?

Si encerramos el rombo en un rectángulo ¿Qué pasa?

Alumno 1: Que es la misma que el área del rectángulo ¿no?

Profesor: Podemos decir, (señalando los triángulos interiores y exteriores al rombo) que cada uno de estos triángulos es igual a su pareja. Con lo cual el área del rombo es justo la mitad del área del rectángulo ¿Cúal es el área del rectángulo?

Alumno 2: Base por altura.

Profesor: Base por altura, ¿vale? Luego para todo el mundo el área de un rombo es la base por la altura entre dos del rectángulo que lo inscribe (cuyos lados coinciden con las diagonales del rombo).

Si os fijáis esta línea de aquí (señalando la diagonal menor) *coincide con la base y esta línea de aquí* (señalando la diagonal mayor) *coincide con la altura. Por eso se puede poner diagonal mayor por diagonal menor o se puede poner base por altura, teniendo en cuenta que aquí la base y la altura del rectángulo son iguales a las diagonales.*

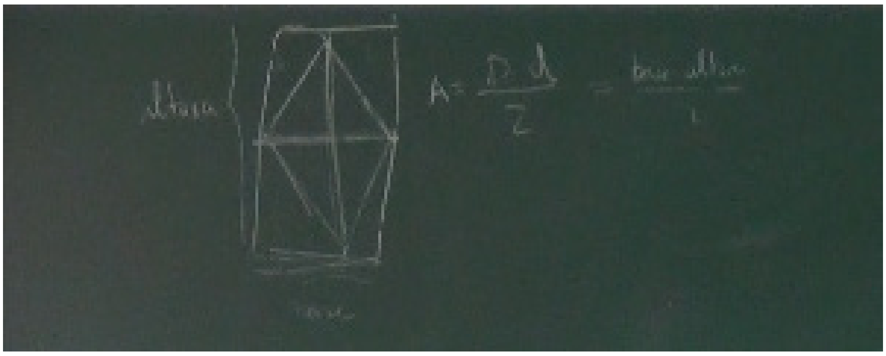


Figura 128. Rombo inscrito en rectángulo cuyos lados tienen la misma longitud que las diagonales del rombo inscrito y fórmula. Elaboración propia.

Profesor: Lo que quiero que veáis es que, el que se inventó esta fórmula, en realidad lo hizo pensando en un rectángulo y viendo la relación con él. Todas las fórmulas de geometría de áreas las podemos reducir a rectángulos y triángulos, de ahí vienen todas aunque sean raras.

¿Cuál viene en los libros para esta figura (dice mientras dibuja un hexágono)*?¿La conocéis?*

Alumno 4: No.

Alumno 5: Sí apotema por algo

Profesor: ¿Cuál?

Alumno 5: Apotema por algo.

Alumno 6: Por los lados que hay.

Alumno 7: Por el perímetro.

Profesor: Os la digo yo ¿Vale? Perímetro por apotema partido por 2.

¡Ojo! Vamos a ver aquí de dónde viene esta fórmula, porque perímetro por apotema es una expresión un poco extraña. Entonces ¿De dónde viene esa fórmula?

Alumno 4: ¿De triángulos?

Profesor: De triángulos exactamente (el profesor divide el hexágono en triángulos a partir del centro). *Entonces si os fijáis el lado del hexágono se corresponde con la base del triángulo y esta línea (dice mientras traza la apotema) a la que llamamos apotema se corresponde con la…*

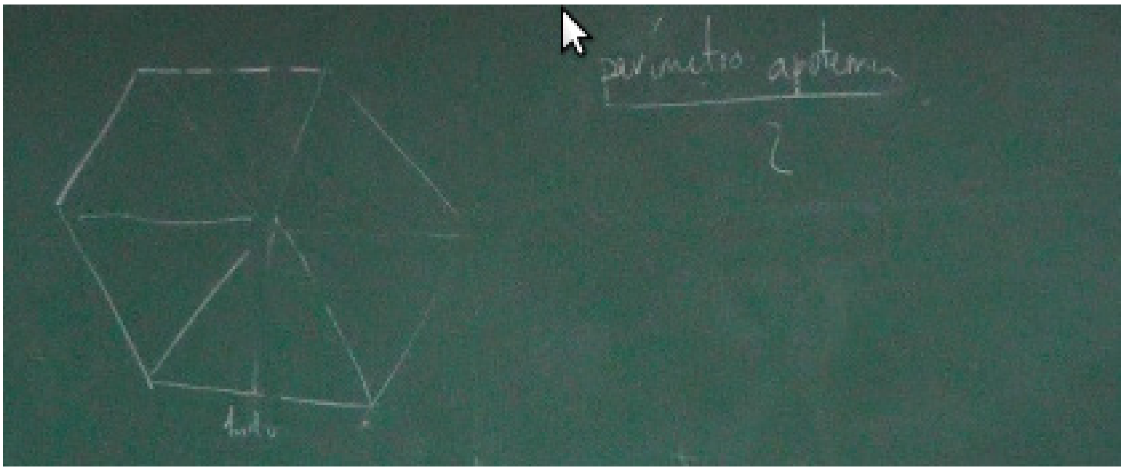


Figura 129. Hexágono regular descompuesto en triángulos a partir del centro y fórmula. Elaboración propia.

Alumno 5: Altura del triángulo.

Alumno 8: O la mitad de la altura del hexágono.

Profesor: Eso es la altura del triángulo o siguiendo el razonamiento del otro día de alguno de los grupos podría ser la mitad de la altura del hexágono. Perímetro es la suma de los lados y la apotema sabemos ahora de donde viene. Si reconvertimos la expresión en base por altura y realizamos el área del triángulo por seis, podemos decir que el área del hexágono es seis veces el área del triángulo es decir seis veces la base o lado por la altura. ¿Qué pasa? Que cuando multiplico seis veces el lado me da el perímetro, por eso en los libros en lugar de poner 6 veces el lado la fórmula que suele venir en los libros es perímetro por apotema partido por dos.

Lo que pasa es que cuando usamos la fórmula que viene en los libros es muy probable que se nos olvide la fórmula, por eso no me gusta como fórmula, prefiero que uno la razone. De hecho, el otro día salieron algunas fórmulas interesantes en alguno de los grupos. En ese grupo habían empezado a elaborar una fórmula e iban muy bien encaminados. (el profesor dibuja un nuevo hexágono y lo divide en un rectángulo central y dos triángulos laterales).

El rectángulo central no es un problema porque tengo la base y la altura, las bases de los triángulos tampoco son un problema porque coinciden con la altura del *hexágono y el problema se reduce a saber ¿cuánto vale este trocito (señalando la altura de los triángulos laterales).*

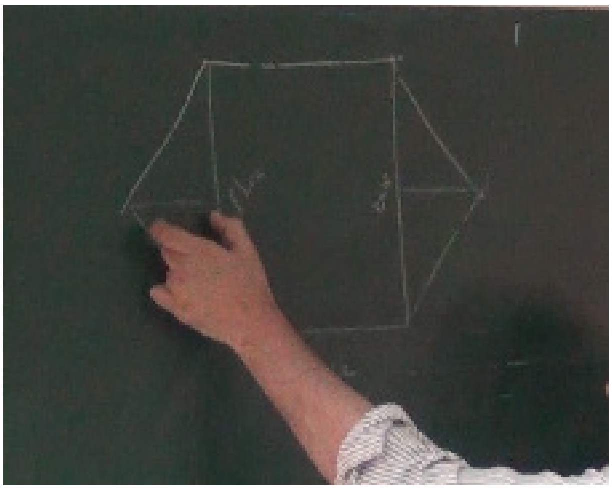


Figura 130. Descomposición de un hexágono regular en un rectángulo y dos triángulos a partir de las diagonales. Elaboración propia.

En ese grupo se les ocurrió una forma, por lo que he visto repasando el vídeo. Se les ocurrió coger toda la distancia horizontal a la que llamaron fila y restarle la base. A partir de ahí salía una fórmula en la que en lugar de utilizar la palabra perímetro y apotema se usaban las palabras fila, altura y base, pero estaba bien ¿vale? Eso es lo que a mi me importa aprender a razonar de dónde viene una fórmula, aprender una fórmula de cabeza no sirve de mucho, se olvida rápido. Es siempre mejor darle una vuelta y razonar.

La faena hoy es que no me puedo entretener. Me encantaría detenerme ahí y sacar de nuevo la fórmula entre todos.

Como se ve en el extracto anterior esta sesión está dominada por el profesor y el tiempo se utiliza principalmente en explicitar las relaciones entre los términos diagonal mayor, diagonal menor, apotema y perímetro y las bases y la altura de los triángulos y rectángulos obtenidos por descomposición de figuras.

También vemos la insistencia en mantener un carácter proactivo y crítico en el que el alumno se hace preguntas en lugar de recurrir a la memorización de las fórmulas, se da por tanto valor al razonamiento matemático para deducir el valor del área mediante descomposición de la figura en triángulos y rectángulos.

En la puesta en común del área de un trapecio isósceles algunos grupos han utilizado palabras propias como techo y suelo para referirse a las bases del trapecio, el profesor aclara que la forma habitual es la de base menor y la de base mayor y que a partir de ese momento se va a referir a estos lados de esa forma. La fórmula obtenida por los grupos es la suma del área de las tres figuras que se obtienen al trazar las alturas desde la base mayor. El resultado obtenido es:

A = base menor x altura + (Base mayor - base menor) x altura

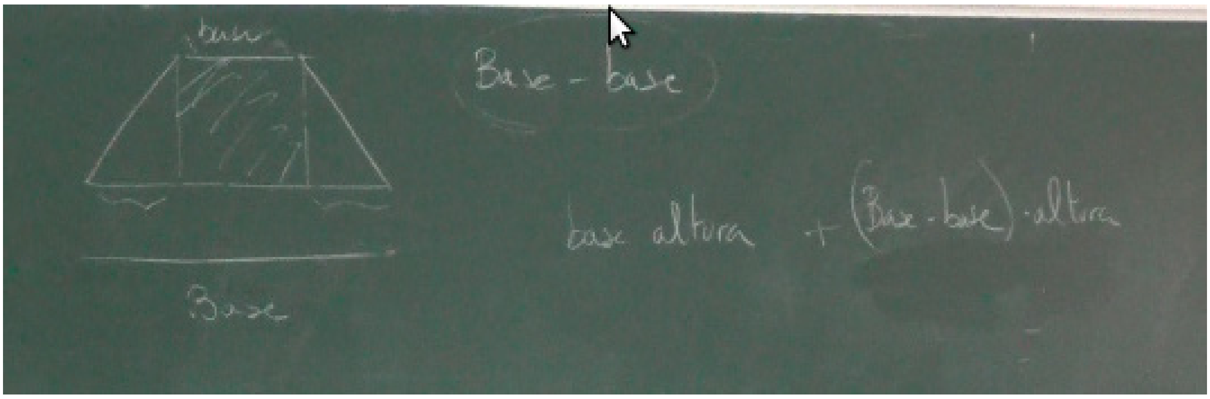


Figura 131. Descomposición de un hexágono regular en un rectángulo y dos triángulos a partir de las diagonales. Elaboración propia.

La ausencia de conocimientos de álgebra en este curso hace que las fórmulas se escriban utilizando palabras completas. Por este mismo motivo no se realiza la demostración de cómo se puede transformar la fórmula obtenida por los alumnos en la fórmula habitual de los libros de texto y se da por bueno que los trapecios que se estudiarán serán isósceles o suministrarán los datos suficientes para que se puedan descomponer en triángulos y rectángulos.

Para completar la sesión se hace una pequeña incursión en el trabajo de la técnica y se ponen algunos ejemplos numéricos para que los alumnos puedan concretar numéricamente lo razonado durante la institucionalización. Sin embargo, este proceso de trabajo de la técnica queda muy por debajo del necesario.

4.1.14. Sesión del 25 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	14
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

Una vez institucionalizadas las fórmulas para el cálculo de superficies de áreas planas, el objetivo de la sesión es conseguir calcular el área total de la parcela. Se trata de trabajar las técnicas obtenidas en las sesiones anteriores para descomponer la figura de la parcela en figuras geométricas más sencillas y proceder a calcular el área de las mismas mediante medición directa de las longitudes sobre el plano.

Así, el objetivo principal de la sesión es obtener el área total de la parcela para poder obtener la superficie de las 27 divisiones en las que se quiere dividir la parcela. El objetivo es culminar el proceso llevado a cabo en la modelización M_2, por lo que la sesión estará dominada principalmente por el momento de trabajo de la técnica.

Durante la sesión, los estudiantes tendrán que hacer uso de EG 1 (la distancia más corta entre dos puntos es equivalente a la longitud del segmento que los une), EG 2 (el área encerrada por una figura rectangular es equivalente a la suma de las unidades de superficie contenidas), EG 4 (proporcionalidad), EG 6 (perpendiculares y paralelas) y EG 7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras) para medir distancias, superficies, realizar cálculos de proporcionalidad para trasladar las medidas de los planos a la realidad, trazar líneas paralelas y perpendiculares para obtener bases y alturas y descomponer un polígono irregular en formas más sencillas.

Esta sesión pretende cerrar el proceso de formulación matemática que permite obtener los datos necesarios para responder a la cuestión generatriz. Se espera que los alumnos lleguen a la solución gracias al razonamiento en grupos cooperativos.

Se espera que durante la sesión se aborden la mayor parte de las cuestiones y respuestas relativas a la modelización M_2. Algunas de las cuestiones y respuestas a trabajar serán:

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Q_{21}: ¿Cuál es la relación existente entre el área del rectángulo y el área del triángulo contenido?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor ?

Q_{23}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{24}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un trapecio isósceles a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{25}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un rombo a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que aparezcan las siguientes respuestas:

R_{16}: Respuestas basadas en la base y en la altura

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común y una altura correspondiente idéntica

R_{20}: Trazado de la altura de un triángulo

R_{22}: Respuestas mediante descomposición y recomposición para deducir la fórmula del área de un triángulo.

R_{23}: Resuestas basadas en la triangulación de figuras poligonales.

R_{24}: Respuestas basadas en la división de figuras poligonales en partes rectangulares y triangulares.

R_{25}: Métodos de obtención de las fórmulas de áreas de un polígono regular a partir de su centro geométrico utilizando técnicas de triangulación.

R_{26}: Transformaciones de la figura original mediante descomposición y recomposición.

3. Descripción de la sesión

En esta sesión se va a continuar con el trabajo iniciado en la sesión 10 de cálculo de la superficie total de la parcela. Esta tarea se va abordar de nuevo después del trabajo realizado sobre las fórmulas para calcular la superficie de las figuras planas elementales

EM4 (fórmula de la superficie de un rectángulo), EM5 (fórmula de la superficie de un triángulo rectángulo), EM8 (fórmula de la suma de los ángulos de un triángulo), EM26 (descomposición de un triánguo cualquiera en dos triángulo rectángulos), EM27 (descomposición de un polígono convexo cualquiera en triángulos), EM28 (fórmula de la superficie de un rombo), EM29 (fórmula de la superficie de un trapecio), EM30 (fórmula de la superficie de un paralelogramo), EM31 (fórmula de la superficie de un polígono regular), EM32 (fórmula del área de un triángulo a partir del área de un paralelogramo) y EM33 (fórmula de los ángulos interiores de un polígono regular) a partir del EG2 (el área encerrada por una figura rectángular es equivalente a la suma de las unidades de superficie contenidas) y el EG7 (descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición de figuras). Por ese motivo en esta ocasión la sesión se inicia directamente con el trabajo en grupos cooperativos.

El profesor distribuye a los grupos una representación en DIN A3 de la parcela del colegio y la escala utilizada para que procedan a calcular el área total de la parcela mediante descomposición. Para llevar a cabo esta tarea, además de las fórmulas para calcular las áreas de figuras planas, se espera que los alumnos utilicen los EM relativos a la medición (EM1 medición de la distancia entre dos puntos), los EM relativos a la proporcionalidad (EM11 proporcionalidad directa, EM12 razón de semejanza para longitudes y EM13 razón de semejanza para superficies), los EM relativos al trazado de figuras y de perpendiculares y paralelas (EM20 trazar una recta que forme ángulos rectos con una recta dada, EM21 trazar una línea perpendicular a una recta desde un punto dado que no esé en ella y EM22 trazar una paralela a otra por un punto externo) y los EM relativos a la descomposición, traslación, giro, simetría y recomposición (EM26, EM 27, EM 28, EM 29, EM 30, EM31 y EM32). Se trata de una sesión dónde no se abordan técnicas nuevas y dónde tiene todo el protagonismo el trabajo de las técnicas ya estudiadas.

Los alumnos, al carecer de una fórmula para la figura de la parcela, descomponen la figura en cuadrados, rectángulos, paralelogramos y triángulos y resuelven por partes las figuras obtenidas por descomposición. A continuación vemos algunos ejemplos de este trabajo en las siguientes figuras:

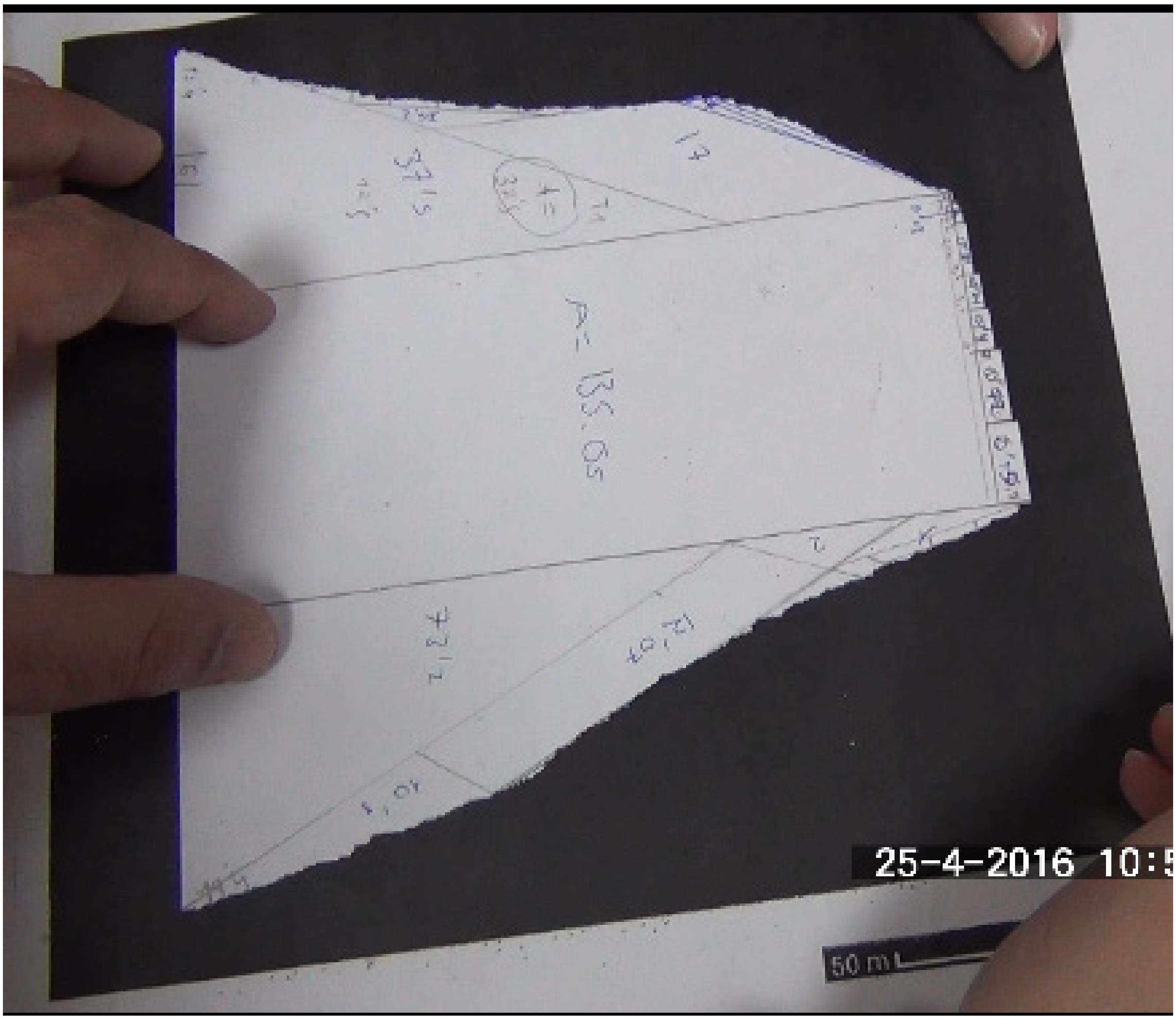


Figura 132. Descomposición del plano de la parcela en 5 rectángulo, 2 paralelogramos y 7 triángulos. Elaboración propia.

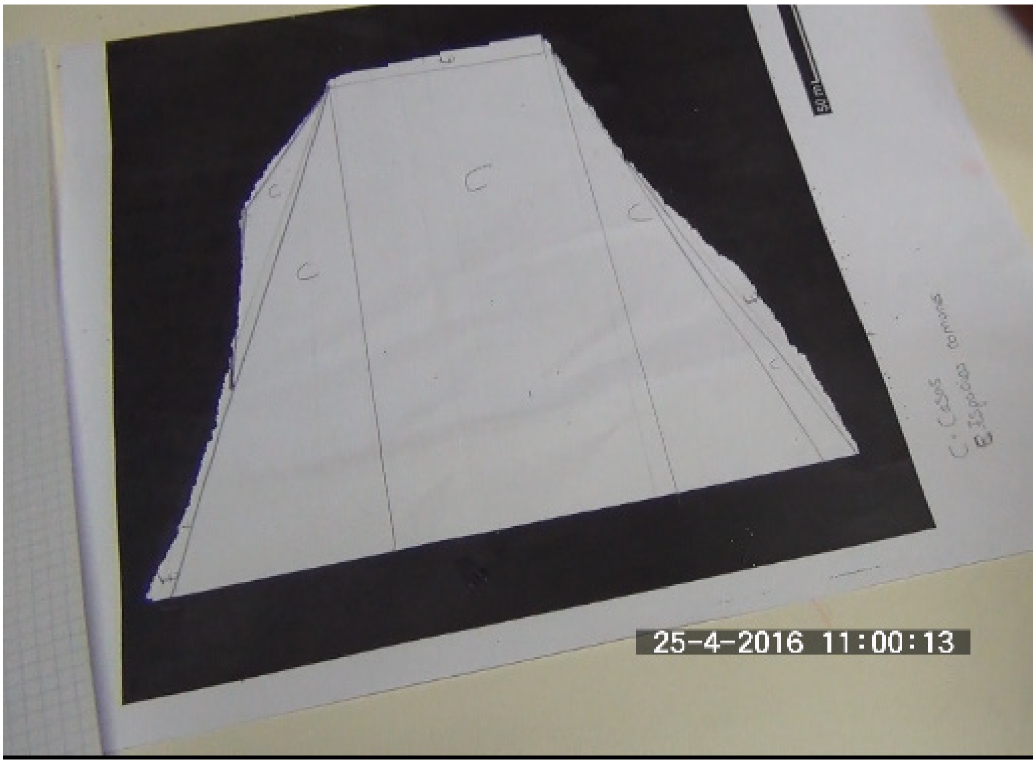


Figura 133. Descomposición del plano de la parcela en 1 rectángulo y 6 triángulos. Elaboración propia.

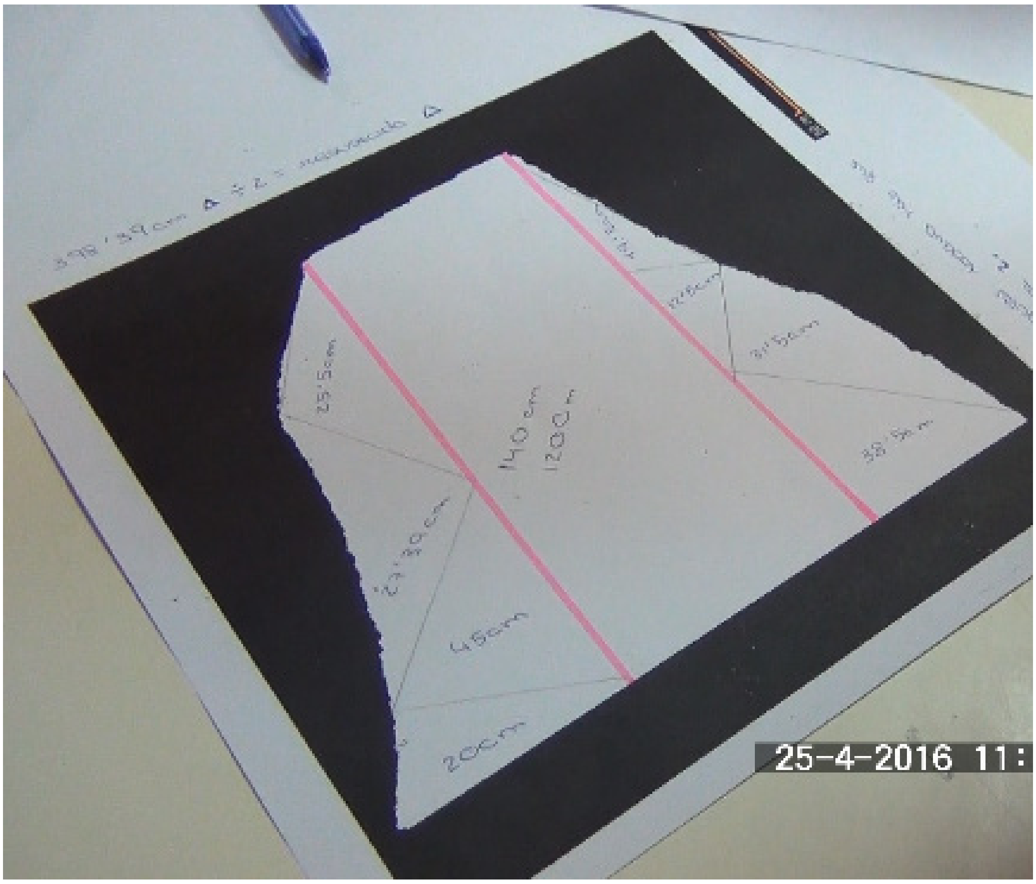


Figura 134. Descomposición del plano de la parcela en 1 rectángulo y 8 triángulos. Elaboración propia.

Una vez aclaradas las dudas, el profesor va a cada uno de los grupos cooperativos y centra la atención en la tarea principal: obtener el área total de la superficie de la parcela que ocupa el colegio.

En el siguiente diálogo vemos cómo el profesor va realizando con los diferentes grupos el procedimiento para calcular alguna de las superficies en las que se ha descompuesto la parcela.

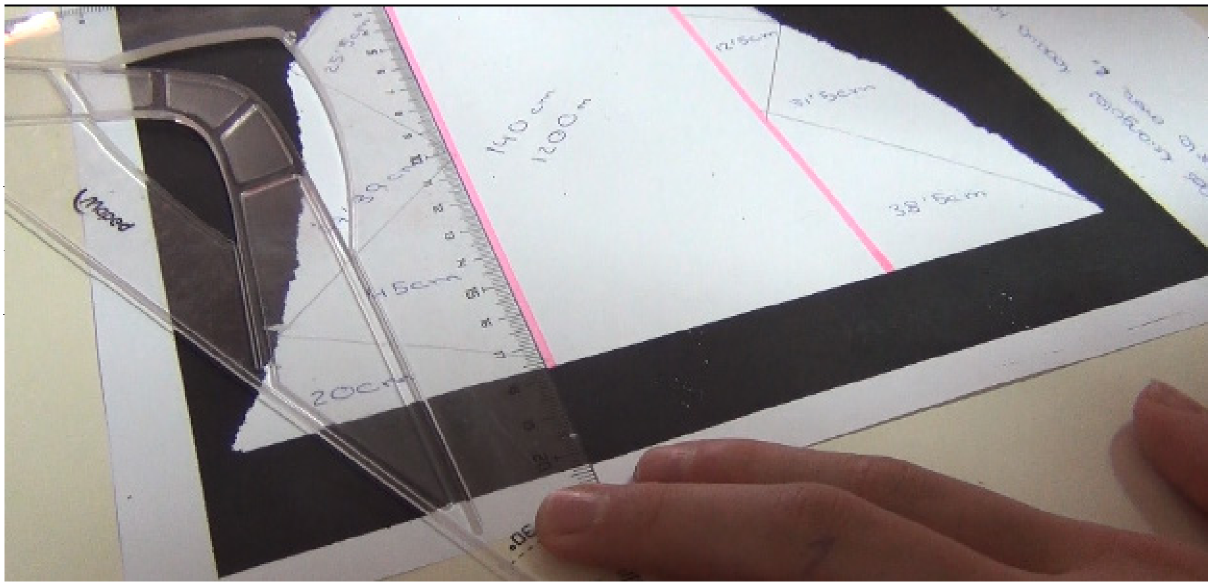


Figura 135. Medición mediante regla graduada de uno de los lados del rectángulo principal. Elaboración propia.

Alumno 3: A ver, el área son 140 centímetros y luego lo calculamos en metros reales y daría 1200 metros.

Profesor: De acuerdo, pero quiero que lo comprobemos ¿Cómo es el área de esta figura? ¿Esta figura qué es?

Alumno 1: Un rectángulo.

Profesor: Un rectángulo ¿Cómo se hace el área de un rectángulo?

Alumno 1: Base por altura.

Profesor: Base por altura, correcto. Pero,.. enseñadme el cálculo que quiero verlo con vosotros.

Alumno 2: Lo hacemos en sucio ¿vale?

Profesor: Sí, no me importa, veamos ¿Cuánto vale exáctamente de largo? Aquí hay que ser muy precisos.

Alumno 4: 18

Alumno 3: 17 con algo.

El alumno 1 coge la regla y comprueba de nuevo que son 17,7.

Alumno 1: Son 17,7.

Profesor: 17,7, me vale. ¿Y de ancho?

Alumno 1: 8,3 (midiendo de nuevo)

Profesor: Perfecto burocrático apúntalo, 17,7,.. por 8,3.

Alumno 2: 17,7 por 8,3.

Profesor: A ver mediador, toma la calculadora y ve haciendo los cálculos.

Alumno 4: (toma la calculadora y realiza el cálculo) *146,91*

Profesor: 146,91 ¿qué?

Alumno 3: Pues centímetros.

Profesor: ¿centímetros? Sólo así centímetros.

Alumno 3: ¿Cuadrados?

Profesor: ¡Cuadrados claro! ¿Estamos calculando superficies no?

*Alumno 3: O sea que lo que tenemos está mal (*refiriéndose al dato de 140 cm y 1200 m que aparece en la hoja)

Profesor: Espera vamos a dejar eso de momento. Ya tenemos esta medida (señalando 146,91) lo que si habéis hecho bien es intentar convertir la medida del plano en una medida real. ¿Puedo convertir ese dato en metros en la realidad?

Alumno 1: Sí.

Profesor: ¿Cómo?

Alumno 1: Con la escala.

Profesor: Perfecto y cuánto mide mi escala.

Alumno 1: Mide 5,9

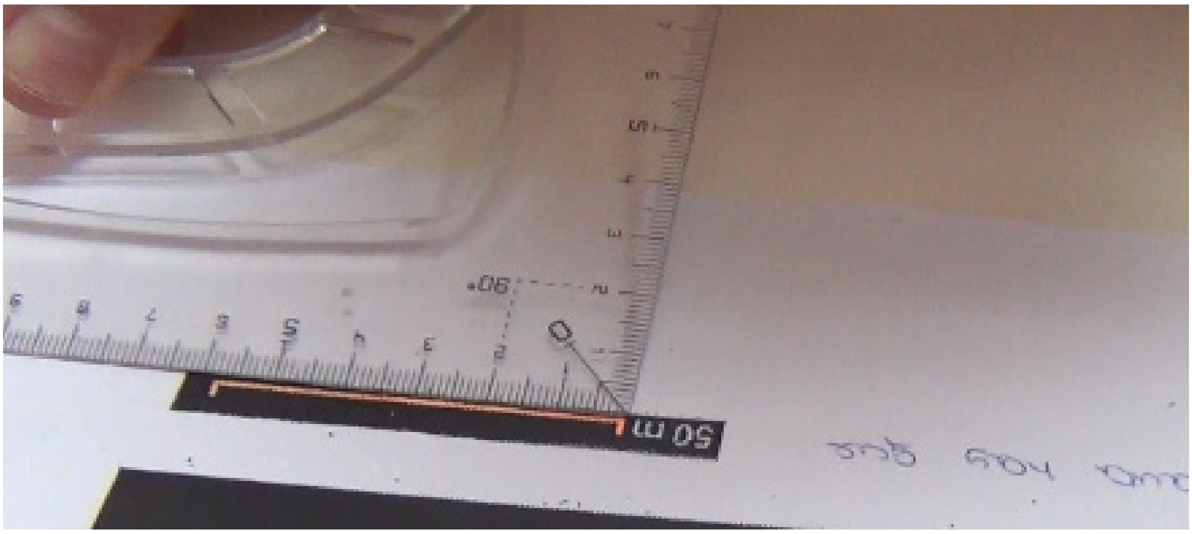


Figura 136. Medición mediante regla graduada de la escala. Elaboración propia.

Profesor: O sea que 5,9 son 50 metros. ¿Cómo se hace entonces? Si sabemos que 5,9 cm son 50m ¿cómo paso yo estas medidas que tengo aquí de 17,7cm y de 8,3 cm a metros?

Alumno 1: Se divide…

Alumno 2: Con una regla de 3.

Profesor: ¡Con una regla de 3!, Muchas gracias. Venga pues plantead la regla de 3. Recordad que de cada dato que saquéis en el plano tendréis que hacer la regla de 3 y luego calcular el área. Venga os voy a ayudar yo a hacer este trocito (refiriéndose al rectángulo) Venga, cómo se planteaba la regla de 3, ¿qué tengo que poner?

Alumno 2: Creo que 50 metros son…

Alumno 1: 5,9 centímetros.

Alumno 4: Y aquí (señalando debajo de 50m) 17, 7 cm.

Alumno 2: Pero,… ¡Como que 17,7 cm! ¿Por qué no usamos directamente 146?

Profesor: Bueno olvidate de momento de 146 y vamos a hacerlo paso a paso. Cada medida del plano la vamos a pasar a metros y luego vamos a calcular el área.

Alumno 2: Vale. (la Alumno escribe la regla de 3)

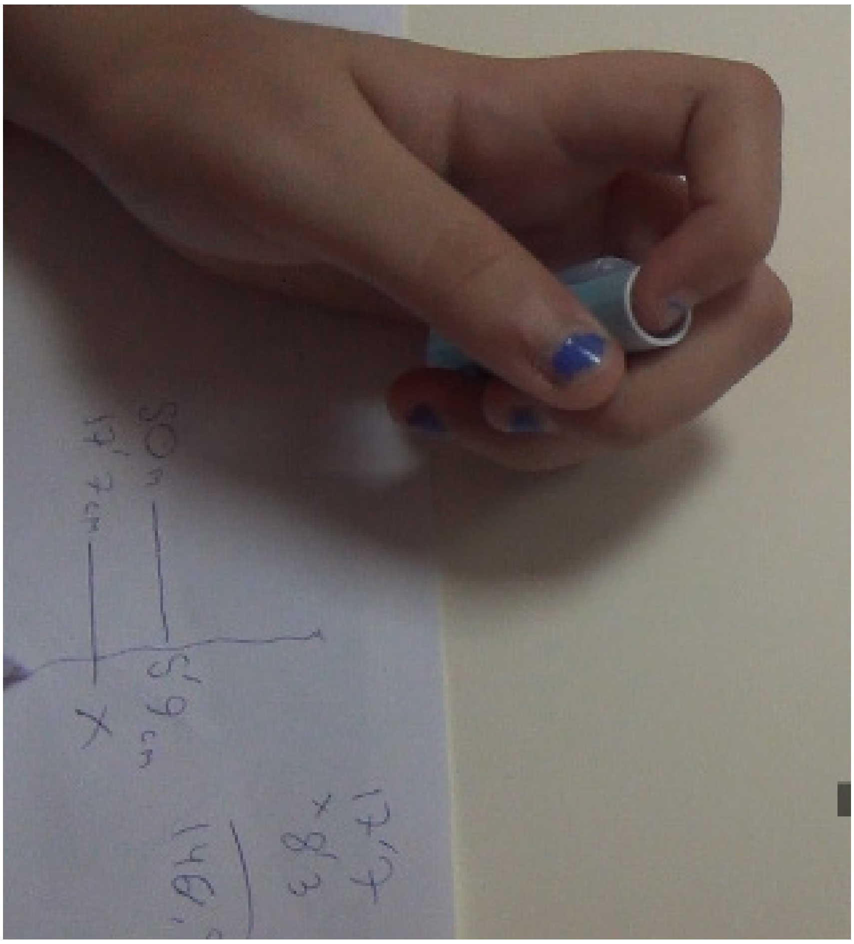


Figura 137. Planteamiento de la proporcionalidad directa para transformar las medidas del plano a las medidas reales. Elaboración propia.

Profesor: Espera vamos a poner unas divisiones aquí (Dice mientras traza dos líneas verticales) *Este dato de aquí que pone 50 metros ¿qué representa?*

Alumno 4: La vida real.

Profesor: Pues ponme ahí vida real.

Alumno 2: Pero, entonces eso no va aquí (dice mientras tacha el dato de 17,7).

Profesor: Eso es, y esto es el plano. Pues todo el rato es lo mismo se hace una proporcionalidad directa o una semejanza entre el plano y la vida real y cuando ya tengo los datos trasladados a la vida real, calculo la superficie haciendo base por altura.

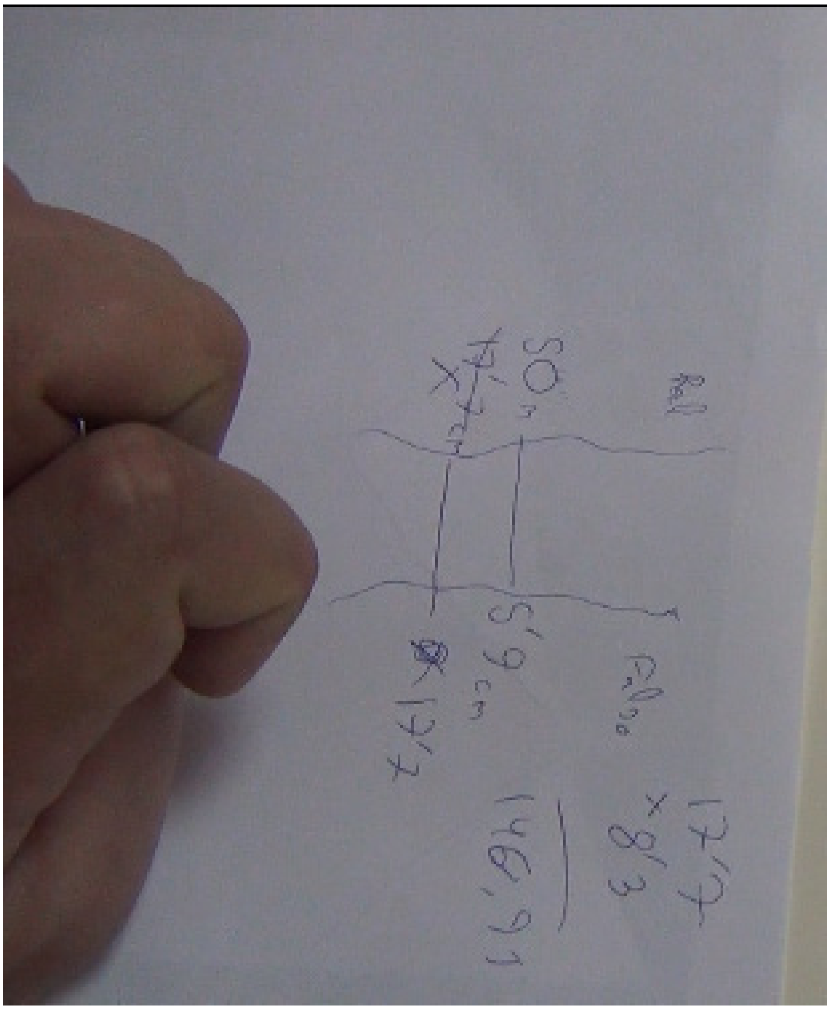


Figura 138. Planteamiento de la proporcionalidad directa para transformar las medidas del plano a las medidas reales y cálculos. Elaboración propia.

Profesor: Venga pues vamos a calcular con ayuda de esta calculadora este primero.

Alumno 1: ¿Podemos calcular con la calculadora?

Profesor: Sí, el mediador puede usar la calculadora.

Alumno 4: 17,7 por 50,… entre 5,9,… 150.

Profesor: (señalando el plano) *entonces esta medida del cole desde aquí hasta aquí es de 150 metros.*

Los alumnos realizan sin ayuda el cálculo del ancho del rectángulo y obtienen 70, 34 metros. Con esos dos datos los alumnos calculan la superficie del rectángulo en la vida real y obtienen una superficie de 10551 metros cuadrados.

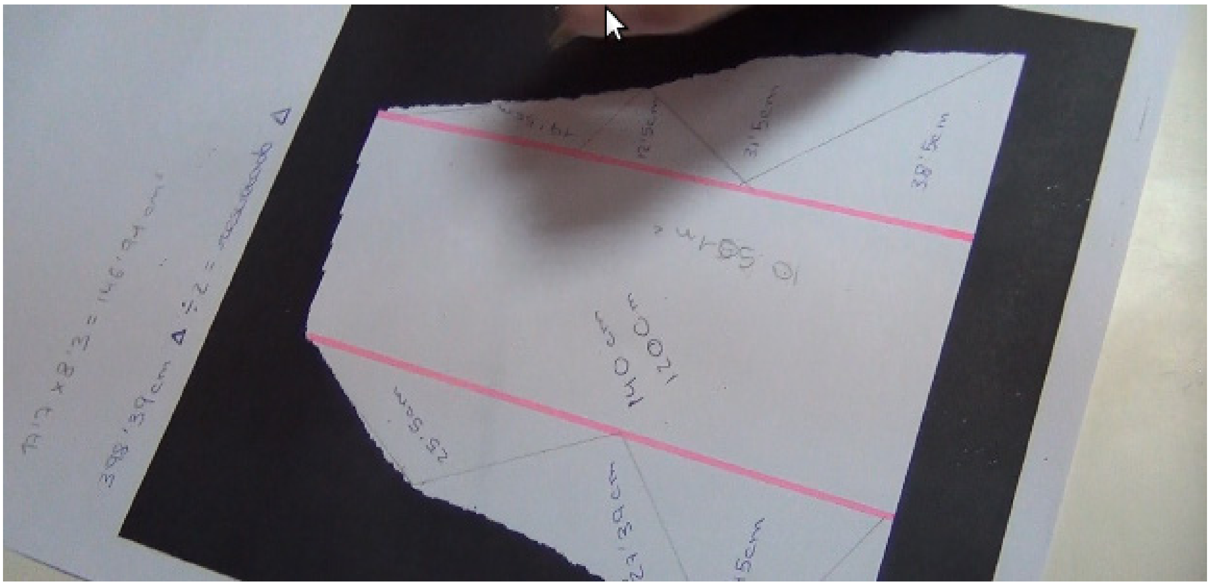


Figura 139. Plano de la parcela descompuesto en 1 rectángulo y 7 triángulos con medidas inciciales. Elaboración propia.

En este diálogo vemos cómo los alumnos necesitan aún practicar sucesivamente los distintos pasos de la técnica que han ido desarrollando para afianzar el procedimiento. Sin embargo con la ayuda del profesor, el burocrático de cada grupo va dejando esos pasos por escrito.

Solamente en uno de los grupos aparece una idea diferente a la división en figuras planas que se recoge a través de este diálogo y que se utilizará más adelante.

Profesor: Aquí, ¿Cómo lo habéis planteado?

Alumno 1: Les he dicho que podríamos medir esto (señalando la escala de 50 metros) dividirlo entre 5 y luego hacer cuadraditos que cada uno fuera de 10 metros por 10 metros en la realidad y luego dividir toda esta superficie.

Alumno 2: Los cuadraditos quedarían de 1,2 centímetros en el plano.

Profesor: O sea que lo que vais a hacer es una cuadrícula.

Alumno 1: Sí y luego contar los cuadraditos.

Alumno 2: Va a costar mucho.

Profesor: Bueno pero el hacer una cuadrícula parece un buen método.

Alumno 2: Yo creo que es más lento.

Profesor: ¿Es más lento? No lo sé, tendréis que probarlo. ¡Venga adelante!

Como fruto de estos diálogos se detecta cierta confusión a la hora de aplicar la proporcionalidad a longitudes o superficies (EM12 y EM13) no siendo los alumnos aun capaces de dar una explicación a las diferencias obtenidas. Al no tener en cuenta que la escala es válida solo para transformar longitudes y que no puede utilizarse directamente para transformar áreas medidas en el plano los alumnos obtienen unos valores de superficie real que no son correctos.

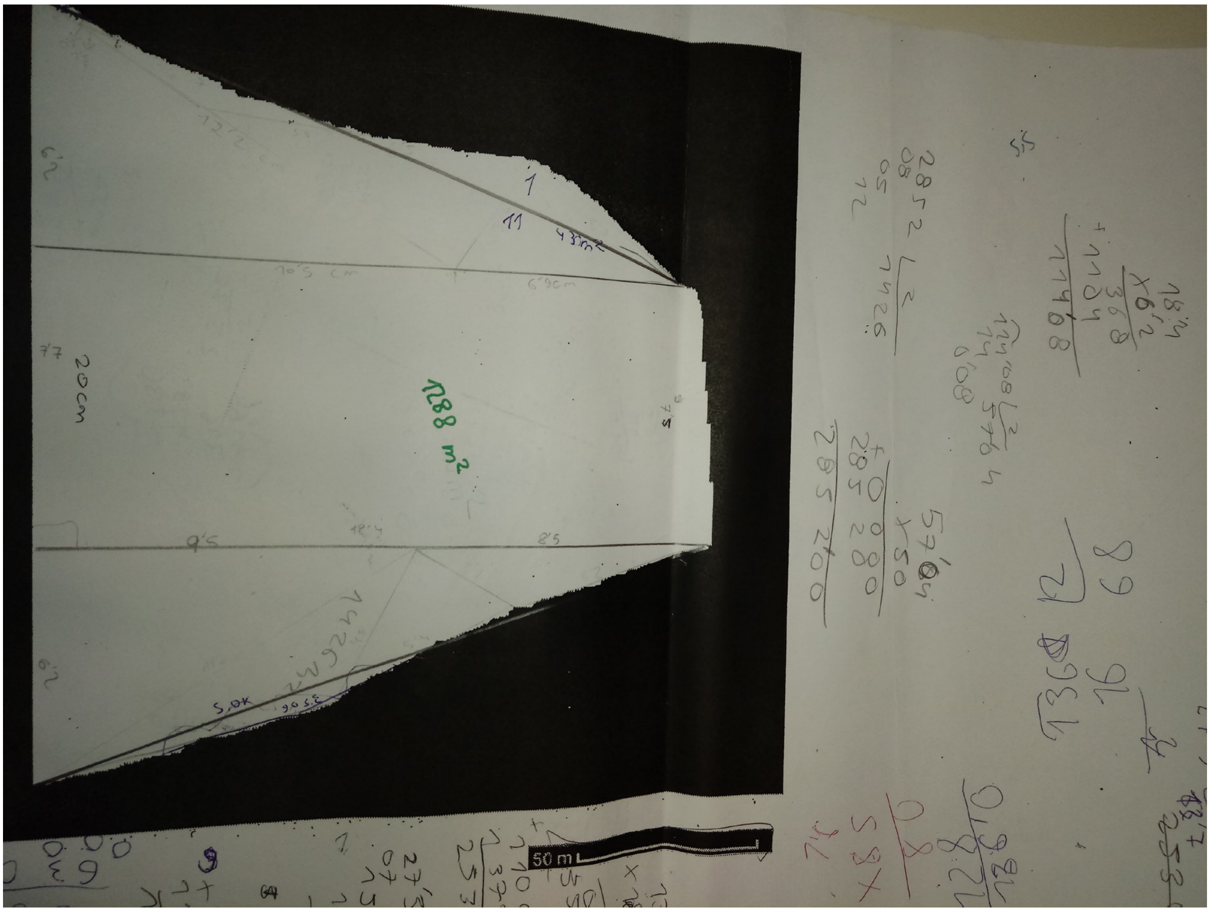


Figura 140. Plano de la parcela descompuesto en 1 rectángulo y 2 triángulos y cálculos del área del triángulo situado a la derecha de la figura dónde se ve que una vez calculada el área se plantea una proporcionalidad directa. Elaboración propia.

Al no dar tiempo a realizar la puesta en común se decide dejar para la siguiente sesión la pregunta sobre los EM12 y 13 y las preguntas relativas a los dos métodos que han aparecido durante la sesión para calcular el área de la parcela: los EM basadas en la descomposición y los EM basados en el conteo de una cuadrícula.

4.1.15. Sesión del 26 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	15
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En esta sesión se va a enfrentar a los alumnos a una tarea para tratar de visibilizar las diferencias existentes entre la razón de semejanza para longitudes y la razón de semejanza para superficies que ya surgió en la sesión anterior. Esta confrontación entre los EM12 y 13 (razón de semejanza para longitudes y para superficies) pretende que los alumnos comprendan los cambios que se producen en el EG 4 de proporcionalidad al trabajar en una o dos dimensiones.

Esta sesión es consecuencia directa de la anterior y pretende trabajar el momento de la institucionalización, dejando a los alumnos que induzcan mediante ejercicios qué EM se utiliza en cada momento, qué elementos es necesario tener en cuenta y a qué tipos y subtipos de tareas se pueden aplicar los EM 12 y 13 (razón de semejanza para longitudes y para superficies).

Se espera que durante la sesión se aborden principalmente las preguntas:

Q_{12}: ¿Cómo se puede representar las distintas medidas reales en el plano una vez conocida la razón de semejanza ?

Q_{26}: ¿Cómo se pueden trasladar las divisiones realizadas en el micro-espacio al macro-espacio?

Se espera que ambas cuestiones se resuelvan haciendo uso de la respuesta:

R_{11}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del macro-espacio al micro-espacio.

R_{13}: Respuestas relativas a la proporcionalidad directa del micro-espacio al macro-espacio.

3. Descripción de la sesión

La clase comienza haciendo una revisión de las medidas obtenidas por los grupos. Se aprecia que existen diferencias muy significativas entre los grupos que han obtenido valores entre los 5000 y los 22000 metros cuadrados.

En esta sesión se cuenta con la presencia de un profesor de física del centro como observador. Antes de avanzar, se le da la palabra y plantea si no existe alguna manera relacionada con la física de medir el área de la superficie del colegio.

Uno de los alumnos presente plantea como posibilidad construir un vaso que tuviese la misma forma que la superficie del colegio e introducir una cantidad definida de litros de agua. El profesor aprovecha para introducir la idea de volumen e indica que ese "vaso" tendría un volumen que se podría calcular multiplicando el área de la base por la altura y que el planteamiento del alumno es correcto y permitiría obtener la superficie de la base. El profesor les anima a buscar información en la red sobre esos posibles métodos. Vemos de nuevo aquí la posibilidad de desbordar el MER y el REI previstos gracias a las aportaciones de los propios alumnos y la posibilidad de enriquecer este tipo de sesiones con las aportaciones provenientes de otras áreas y sujetos.

Sin embargo, como la mayoría de los alumnos no siguen esa línea de razonamiento, el profesor decide volver a la idea original de estudiar las discrepancias obtenidas en la medición realizada por los grupos.

Para realizar esta comparativa se pide a los grupos que se coloquen en cooperativo y se reparte a cada miembro del equipo una figura diferente, en función de su rol, para que calcule su área por descomposición. Los alumnos deberán trabajar utilizando la técnica 1-2-4 y una vez terminada la tarea llegar a consenso primero en parejas y luego en el grupo de cuatro para comprobar entre todos las soluciones. Para evaluar la tarea, el profesor utilizará la técnica uno por todos y escogerá al azar uno de los trabajos del grupo y evaluará a todos los alumnos del grupo en base a esa tarea. Se indica a los alumnos que deben partir la hoja de respuesta en dos partes iguales y escribir en un lado las operaciones y en el otro los pasos que van dando.

Las figuras que se entregan son:

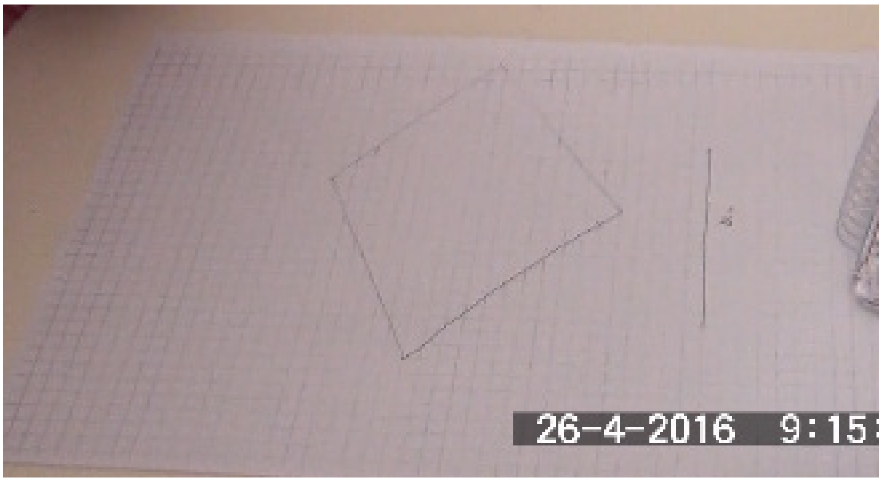


Figura 141. Rombo a mano alzada y escala Elaboración propia.

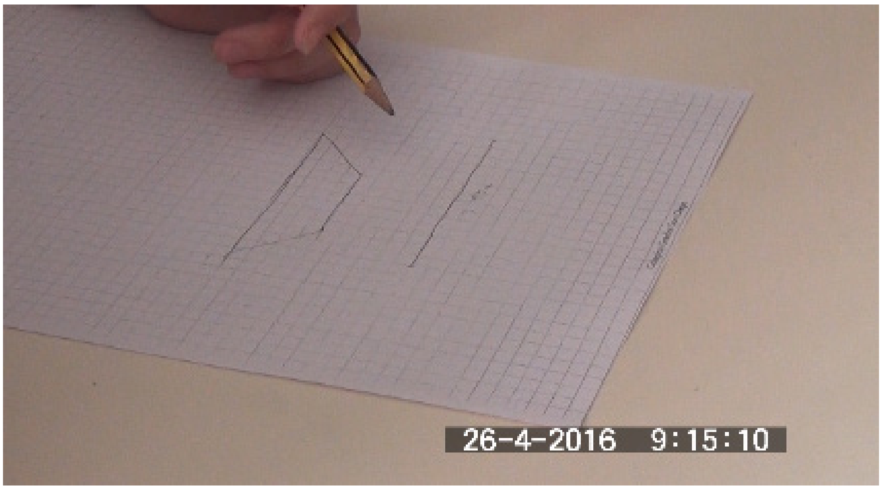


Figura 142. Trapecio isósceles a mano alzada y escala. Elaboración propia.

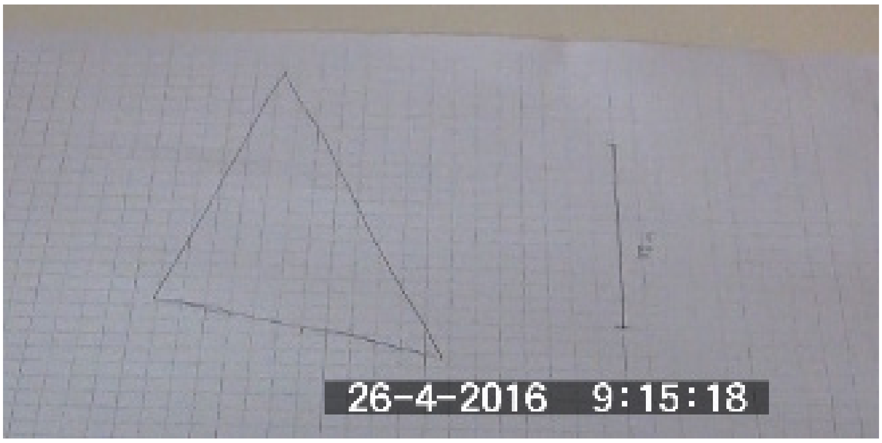


Figura 143. Triángulo escaleno a mano alzada y escala. Elaboración propia.

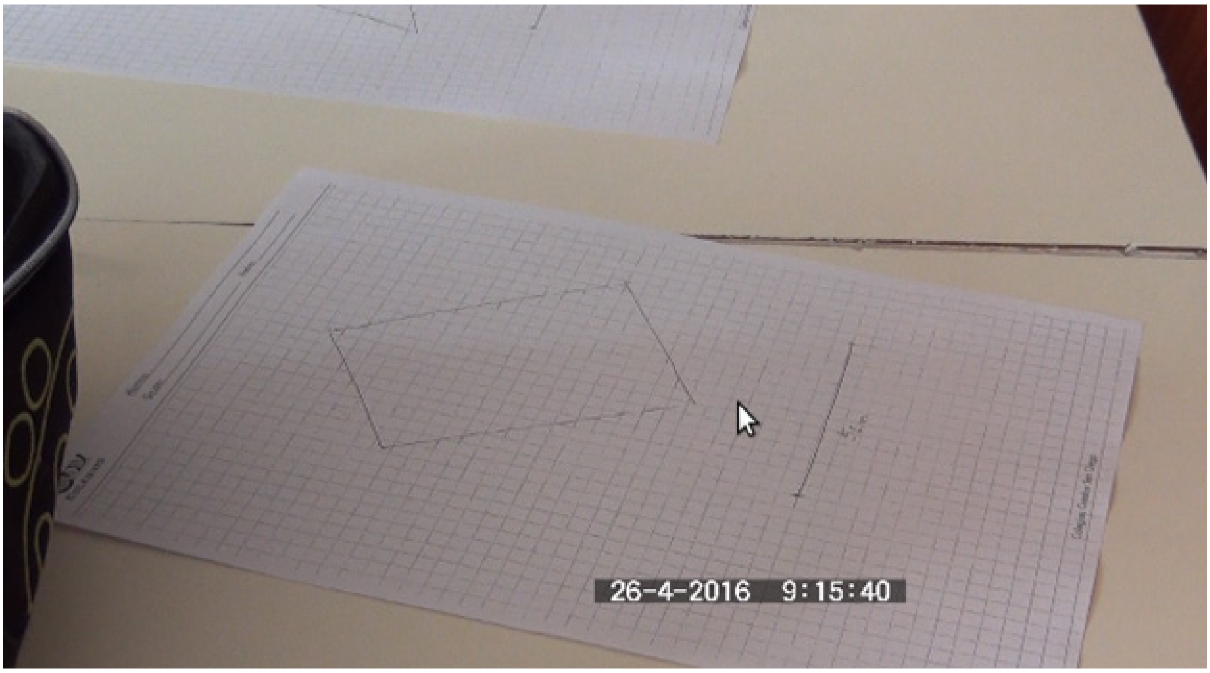


Figura 144. Rectángulo a mano alzada con lados no paralelos al borde del papel y escala. Elaboración propia.

Todas las figuras tienen una escala diferente asociada.

La pregunta que se plantea es:

¿Qué superficie real abarca la figura a escala representada en el plano?

En general, los alumnos son capaces de calcular las distintas áreas de las figuras, utilizando la recomposición y las fórmulas aprendidas en las sesiones previas haciendo uso de EP18 (calcular la superficie de un rectángulo a partir de la medición de sus lados), EP76 (calcular la superficie de un triángulo no rectángulo a partir de una altura que cae dentro del lado contrario), EP 80 (calcular la superficie del rombo por triángulación), EP 81 (calcular la superficie del trapecio mediante triangulación), EP 85 (calcular la superficie de un rombo conocias sus diagonales), EP86 (calcular la superficie de un trapecio conocidas las bases y la altura) .

Las únicas dificultades que aparecen en la medición tienen que ver con el trazado de la altura de los triángulos escaleno. Una vez más los alumnos tienden a no utilizar técnicas sintéticas para el trazado de las líneas perpendiculares lo que provoca errores de medición.

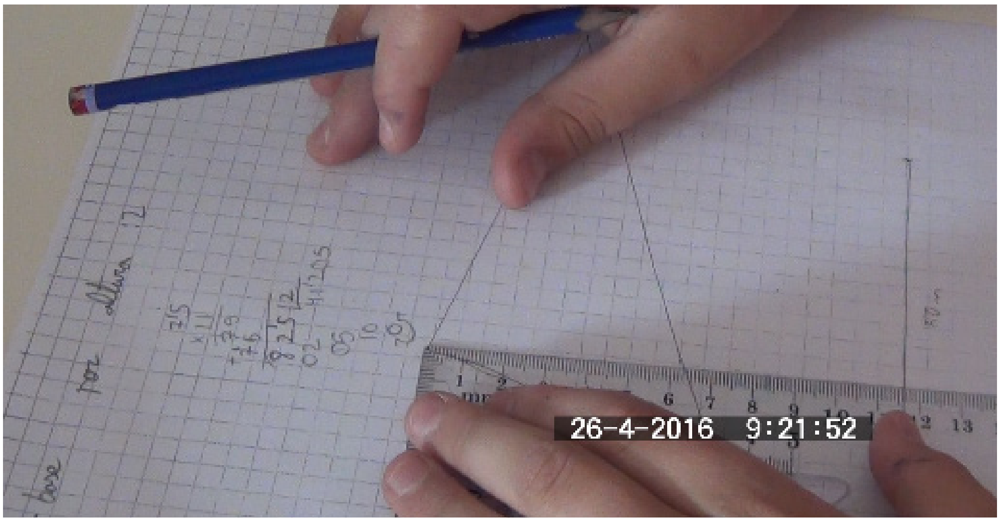


Figura 145. Trazo de la “altura” de un triángulo que no es perpendicular a la base. Elaboración propia.

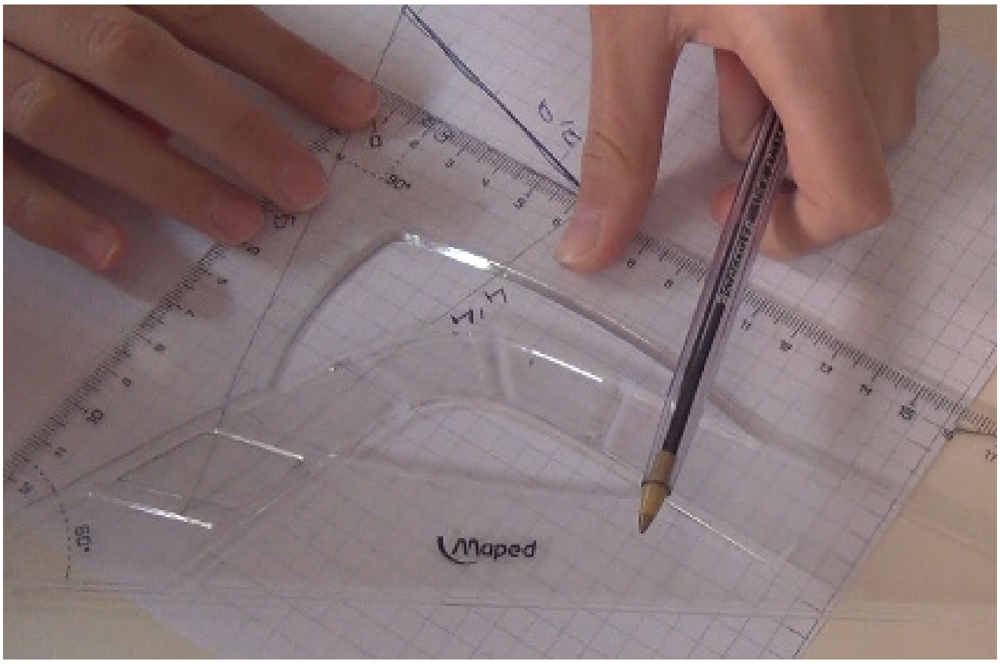


Figura 146. Trazo de la “altura” de un triángulo perpendicular al borde del papel pero no a la base del triángulo. Elaboración propia.

El profesor tiene que plantear sus dudas de forma explícita sobre algunas de las alturas trazadas para forzar a los alumnos a que con la ayuda de otros miembros del grupo se tracen adecuadamente.

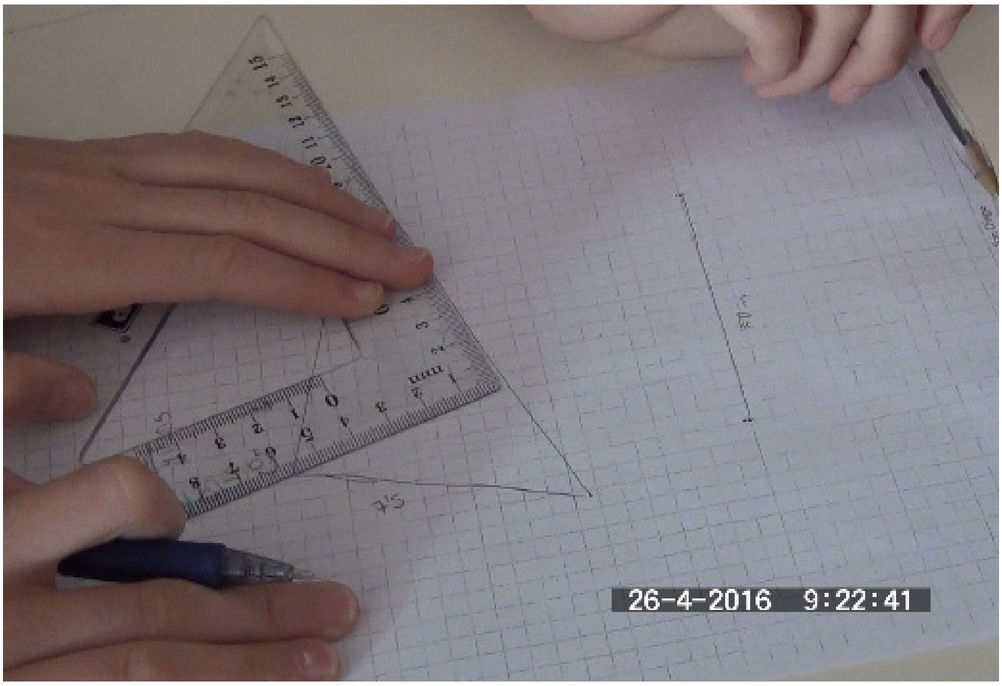


Figura 147. Trazo de la altura de un triángulo. Elaboración propia.

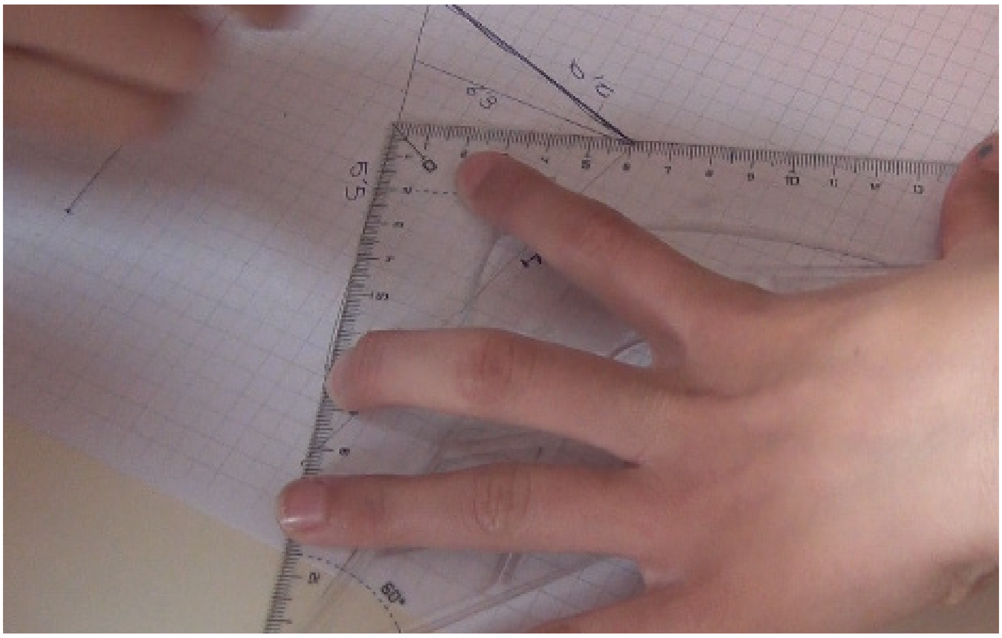


Figura 148. Trazo de la altura de un triángulo comparado con el trazo erróneo anterior. Elaboración propia.

Cuando la mayoría de los alumnos han terminado sus cálculos se procede a realizar la puesta en común prestando especial atención a los pasos realizados.

Figura 149. Pasos recogidos por un estudiante para el cálculo del área en el macro-espacio de un rombo representado a escala en el micro-espacio. Elaboración propia.

Los pasos descritos por los alumnos son (Caso A):

1. Clasificar la figura
2. Medir en el plano los lados (en cm)
3. Pasar los cm a metros en la realidad (proporcionalidad directa)
4. Calcular el área real

Se produce una discrepancia entre los grupos y se plantea una segunda alternativa (caso B):

1. Clasificar la figura
2. Medir en el plano los lados (en cm)
3. Calcular el área en el plano
4. Pasar el área del plano utilizando la escala

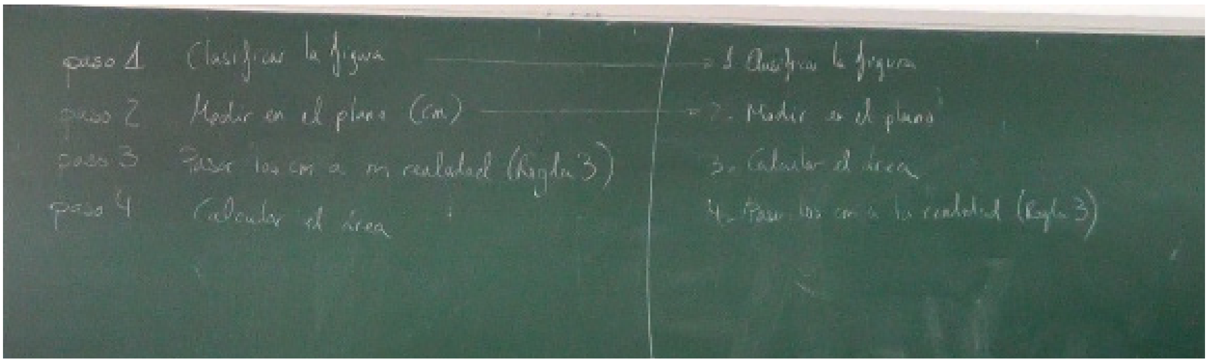


Figura 150. Pasos recogidos en la puesta en común para el cálculo de áreas en el macro-espacio de figuras representadas a escala en el micro-espacio. Elaboración propia.

El profesor plantea que con esos dos métodos no se llega al mismo resultado y que por tanto hay que decidir cuál de los dos métodos es el correcto. Se pide a los grupos que debatan entre ellos cuál de los dos métodos es el correcto argumentando el porqué. Los alumnos se encuentran en esta situación porque disponen del EM12 pero aun no han inducido el EM13, están por tanto trabajando en las limitaciones del EM 12 y analizando si esta sigue siendo válida (caso A) o si esta ha dejado de ser válida y requiere una nueva formulación (caso B). Estamos forzando a los alumnos a encontrar los límites y usos del EM 12. Los EP movilizados en esta parte son el EP38 (obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una ampliación de la original utilizando cualquier razón de semejanza) y el EP 40 (obtener analíticamente la medida de una superficie real a partir de su escala).

En uno de los grupos, a sugerencia del profesor, se representa un cuadrado de 4 cm de lado y un cuadrado de 24 cm de lado, en este caso los alumnos deciden que la escala es 6 a 1.

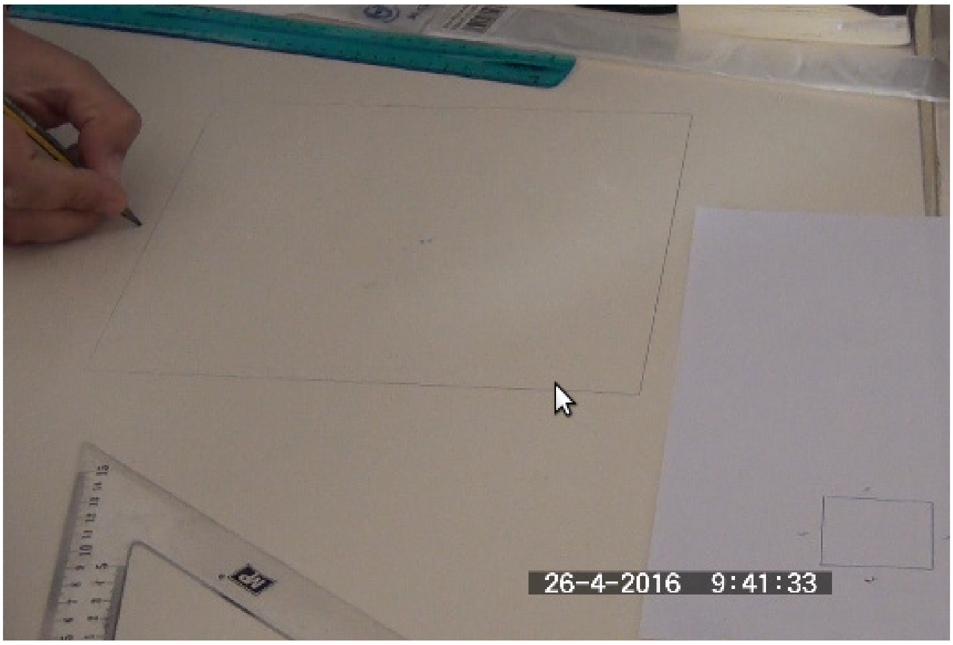


Figura 151. Cuadrado de 4cm de lado y cuadrado de 24 cm de lado para comprobar que método (A o B) da el resultado correcto. Elaboración propia.

Aplican los dos métodos decididos por la clase y comprueban que el primero de ellos es el correcto ya que permite obtener el área de la figura grande a partir de su representación a escala. Gracias a este ejercicio los alumnos se dan cuenta que no es posible establecer una proporcionalidad directa utilizando centímetros y centímetros cuadrados.

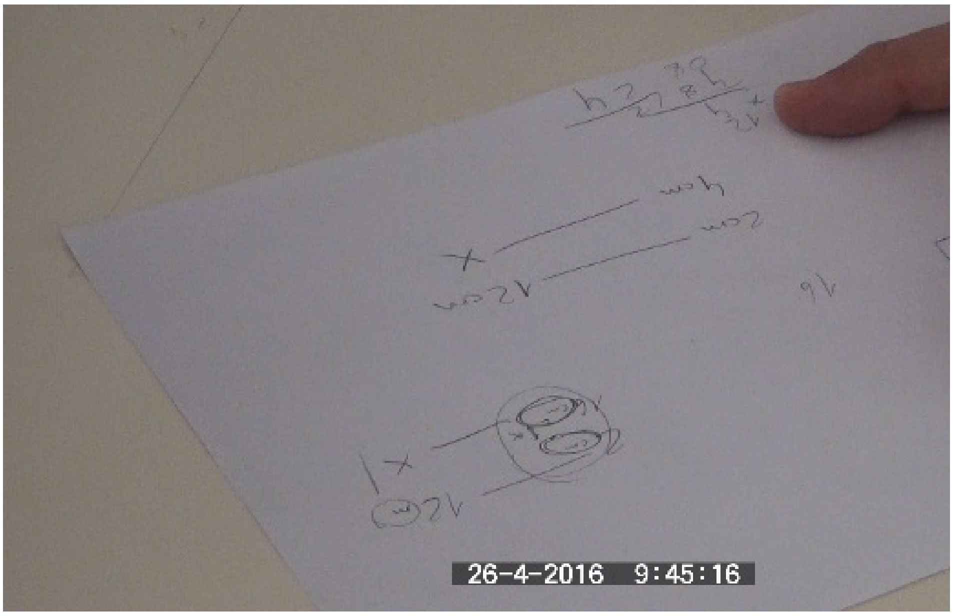


Figura 152. Operaciones para comprobar la validez del caso A y B. Elaboración propia.

Vamos a ver en la puesta en común cómo se plantea a toda la clase un ejercicio similar en la pizarra. Se presenta un cuadrado de 30 cm de lado y uno de 3 cm de lado. Los alumnos rápidamente ven la escala de 1 a 10.

Se resuelve el ejercicio por los dos métodos en cuestión y se comprueba que el método A da la medición correcta de 900 cm^2 mientras que el método B da una medida de 90 cm^2.

En la transcripción de esta puesta en común se observa la posición epistemológica que se está aplicando en este REI:

Profesor: Vamos a ver, cuando uno tiene dudas,… hacer Matemáticas es exactamente eso, yo sé que os cuesta, yo sé que es difícil, pero hacer Matemáticas es encontrar el patrón, encontrar la forma, encontrar el método, eso es lo que estamos haciendo y cuando uno busca, explora o investiga un método a veces encuentra una opción y a veces encuentra otra y no sabe decidir si ese método es correcto o el otro lo es.

Ante eso qué hay que hacer, buscar un ejemplo, buscar una forma, razonar los pasos y comprobar cuál de los dos métodos vale. En Matemáticas hay una forma de demostrar algo que es muy útil, que se llama reducción al absurdo. Qué es la reducción al absurdo, es elegir uno de los dos métodos y llevar al método a que se contradiga, a que cometa un error. ¿Cómo lo vamos a hacer? Utilizando algo que yo sepa que es 100% cierto.

Entonces, en este caso, yo voy a utilizar algo que sé que es 100% cierto. Voy a utilizar una figura fácil como el cuadrado y me voy a fabricar un cuadrado real en la pizarra, sin ningún tipo de escala, que sea de 30 por 30 centímetros.

(El profesor toma una regla de uno de los alumnos y construye un cuadrado de 30 por 30 en la pizarra).

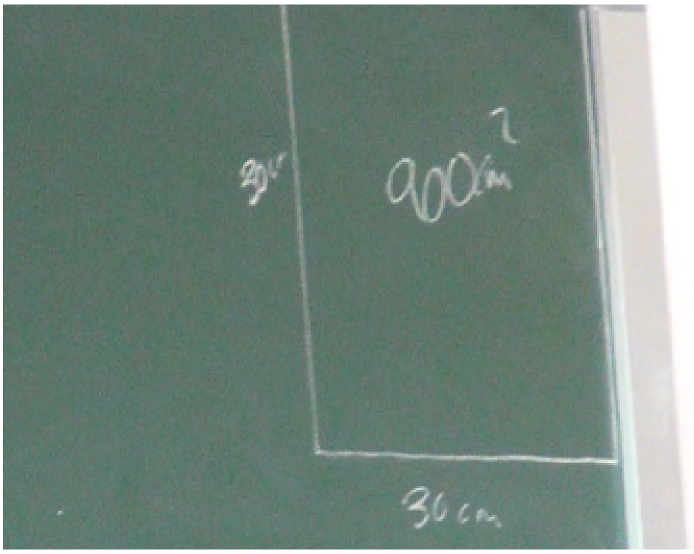


Figura 153. Cuadrado de 30cm de lado dibujado en la pizarra durante la puesta en común. Elaboración propia.

Profesor: Aquí he dibujado un cuadrado de 30 por 30 centímetros, en total este cuadrado ocupa una superficie de 900 centímetros cuadrados. ¡Eso es cierto, 100% cierto, porque yo he cogido mi regla y he medido 30 por 30 y al multiplicarlo he obtenido 900! Este cuadrado de aquí tiene 900 centímetros cuadrados, ahí dentro hay 900 cuadraditos de 1 centímetro por 1 centímetro. Porque hay 30 filas de 30 cuadraditos cada una. ¿De dónde surge mi problema? Mi problema viene de que yo no estoy midiendo fuera en el patio, estoy midiendo sobre un plano. Luego este cuadrado lo hemos reducido para representarlo en un plano y lo voy a reducir a una escala que en este caso me interesa de 3 centímetros. En lugar de tener un cuadrado real de 30 por 30, voy a tener un cuadrado a escala de 3 por 3 centímetros. Y hay por tanto una escala que me índica cómo ha sido representado en el papel. En este caso estoy utilizando una escala en la que 3 centímetros del plano representan 30 centímetros de la realidad.

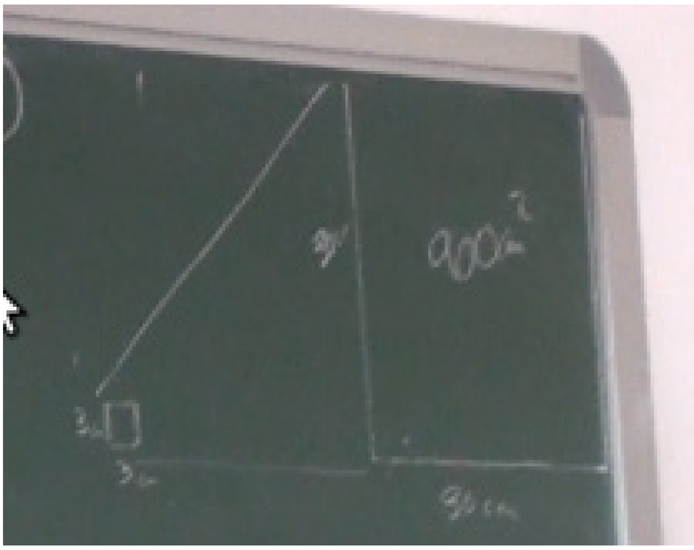


Figura 154. Cuadrado de 30cm de lado y cuadrado de 3 cm de lado para comprobar que método (A o B) da el resultado correcto. Elaboración propia.

Profesor: Estos son los datos, que ahora tenemos nosotros y con los que voy a aplicar el método A y el método B. Primer paso, clasificar la figura. ¿Qué figura es?

Varios alumnos: Cuadrado.

Profesor: Segundo, medir en el plano ¿Cuánto mide en el plano?

Varios alumnos: 3 centímetros.

Profesor:¡Ahora viene la duda! ¿Qué hago? ¿Transformo la medida del plano a la medida real? O ¿Calculo el área en el plano? Voy a hacer los dos y vamos a ver qué ocurre. Si yo paso los centímetros del plano a la realidad, cada 3 centímetros ¿cuánto me ocupan en la realidad?

Alumno 1: 30

Profesor: Luego en este paso diría como 3 centímetros son 30 centímetros en la realidad, el cuadrado del plano está representando un cuadrado de 30 por 30. Y su área por tanto será de 900 centímetros cuadrados. Luego el método A me da el resultado correcto.

Vamos a hacer el método B. Clasificamos la figura ¿Qué es?

Varios alumnos: Un cuadrado.

Profesor: ¿Cuánto mide en el plano?

Varios alumnos: 3 por 3

Profesor: Calculemos el área ¿Cuánto sería el área de la figura en el plano?

Varios alumnos : 9

Profesor: Y ahora aplico la proporcionalidad directa. 3 centímetros en el plano son 30 centímetros en la realidad. Por tanto 9 centímetros cuadrados serán x. ¿Cuánto me daría este cálculo?

Alumno 2: 900

Alumno 3: No, sería 270 entre 3.

Profesor: ¿y eso es?

Alumno 3: 90.

Profesor: Este me da 90 (señalando el método B) y este me da 900 señalando el método A. Luego señores el método correcto es el A. Pero el A no es correcto porque yo como profesor lo diga, no se trata de que yo venga y diga el A es correcto apuntarlo en vuestros cuadernos, siempre que tengáis este ejercicio tenéis que hacerlo así.
¡No! Es mucho más rico, mucho más interesante, llegar al proceso en grupo o por uno mismo, encontrar el patrón y aplicarlo siempre. Todo el mundo debe aplicar el A en el futuro porque en nuestro estudio hemos encontrado que el B nos lleva a un contraejemplo. Nos ha conducido a un resultado falso, sabemos que 90 centímetros cuadrados no es cierto, son 900. Luego el método B me lleva a cometer un error y por eso lo descarto. Pero ¿por qué es incorrecto?

Alumno 4: Porque estás usando en la regla de 3, centímetros y centímetros cuadrados y eso no se puede hacer.

Profesor: Eso es, ojo con las "reglas de 3". No es lo mismo aplicar reglas de proporcionalidad a longitudes que a superficies, en superficies tengo que aplicar la proporcionalidad al ancho y al largo, a la base y a la altura, por eso cuando sólo aplico la proporcionalidad una vez el ejercicio no sale.

Vemos en este dialogo cómo se están institucionalizando por parte del profesor algunos elementos tecnológico-teóricos para mostrar a los alumnos cómo pueden determinar el alcance que tienen las técnicas que han ido obteniendo por inducción de la práctica.

Una vez aclarado el método se vuelve a plantear el ejercicio original para que los grupos puedan obtener la medición del área real del plano a escala del colegio.

Los alumnos copian el método A en sus cuadernos y se deja un tiempo final para que en todos los grupos se puedan solucionar las dudas que tengan entre compañeros.

4.1.16. Sesión del 27 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	16
Hora de inicio-fin	8:15-9:10
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

Esta sesión viene marcada por la restricción institucional que supone la realización de la prueba escrita en todos los cursos de primero de la ESO el día 29 de abril.

En este caso el profesor-investigador, tras el trabajo realizado durante el proceso de cálculo de superficies planas, decide proponer una prueba de evaluación individual sobre el cálculo de la superficie del centro educativo en la que se pueda realizar un control del grado de comprensión e incorporación del proceso de estudio e investigación llevado a cabo por cada estudiante. Esta sesión está controlada por tanto por el momento de la evaluación y pretende evaluar si los alumnos pueden dar el salto a enfrentarse a la modelización M_3.

Las cuestiones y respuestas que se esperan abordar en esta sesión son las siguientes:

Q_{12}: ¿Cómo se pueden representar las distintas medidas reales en el plano una vez conocida la razón de semejanza que existe entre ellas?

Q_{15}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura rectangular?

Q_{16}: ¿Cómo se puede calcular el área de una figura triangular?

Q_{17}: ¿Cómo se puede calcular el área de otras figuras poligonales?

Q_{20}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo?

Q_{21}: ¿Cuál es la relación existente entre el área del rectángulo y el área del triángulo contenido?

Q_{22}: ¿Cómo se puede calcular la altura de un triángulo obtusángulo cuya base no es el lado mayor ?

Q_{23}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{24}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un trapecio isósceles a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{25}: ¿Existe alguna fórmula para calcular el área de un rombo a partir de la fórmula del área de un triángulo?

Q_{26}: ¿Cómo se pueden trasladar las divisiones realizadas en el micro-espacio al macro-espacio?

Para dar respuesta a estas cuestiones se espera que aparezcan las siguientes respuestas:

R_{16}: Respuestas basadas en la base y en la altura

R_{17}: Calcular el área por defecto

R_{18}: Calcular el área por exceso

R_{19}: Inscribir un triángulo en un rectángulo que tenga una base común y una altura correspondiente idéntica

R_{20}: Trazado de la altura de un triángulo

R_{22}: Respuestas mediante descomposición y recomposición para deducir la fórmula del área de un triángulo.

R_{23}: Respuestas basadas en la triangulación de figuras poligonales.

R_{24}: Respuestas basadas en la división de figuras poligonales en partes rectangulares y triangulares.

R_{25}: Métodos de obtención de las fórmulas de áreas de un polígono regular a partir de su centro geométrico utilizando técnicas de triangulación.

R_{26}: Transformaciones de la figura original mediante descomposición y recomposición.

3. Descripción de la sesión

Durante está sesión se suministra a los alumnos una hoja individual con el plano del colegio y la escala que en uno de los lados tiene el área en blanco dividida en una serie de figuras planas de las que se suministran sus medidas y en otro de los lados tiene la parcela del colegio dividida por una cuadricula. El ejercicio se plantea a modo de prueba individual de examen por lo que los alumnos trabajan durante toda la sesión en la resolución del ejercicio.

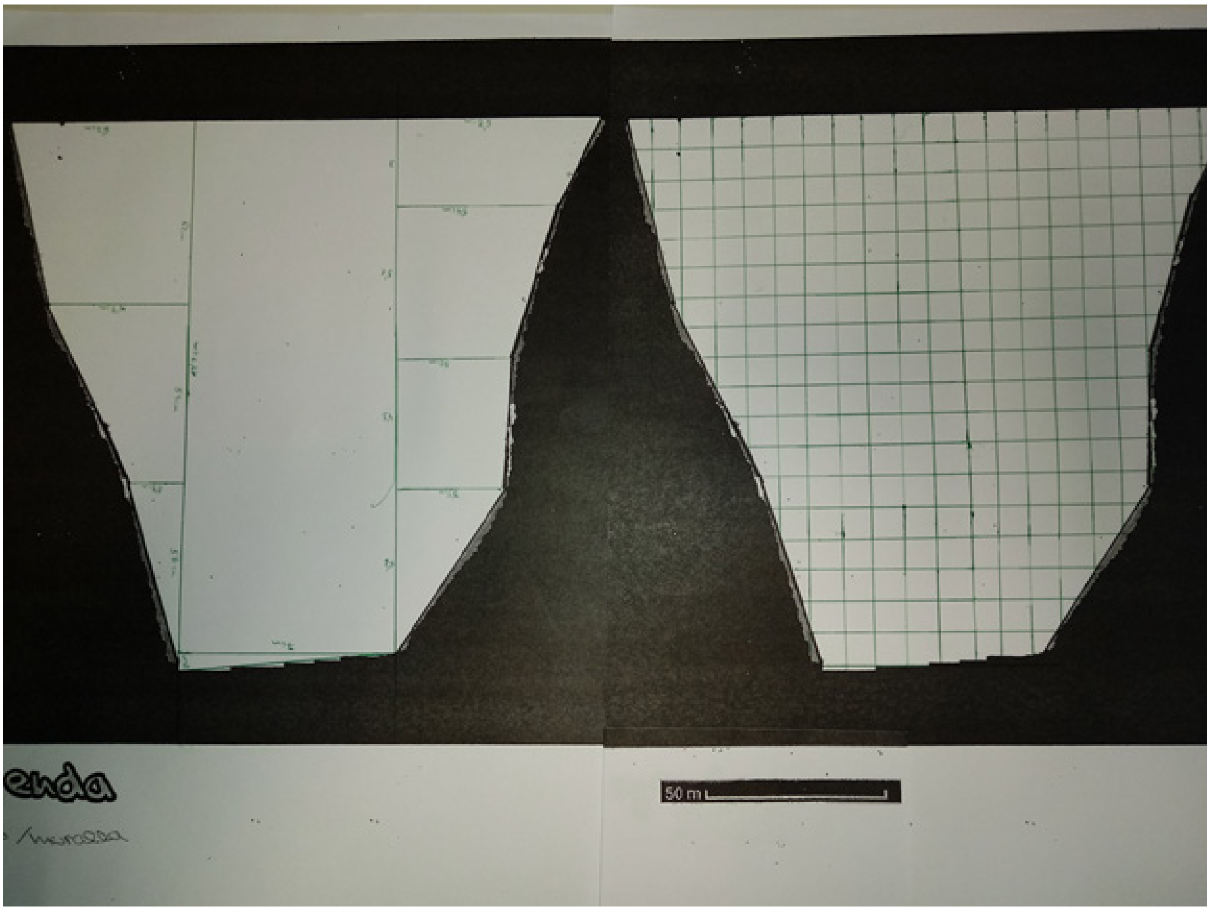


Figura 155. Ejercicio de cálculo de la superficie de la parcela propuesto a los estudiantes. Elaboración propia.

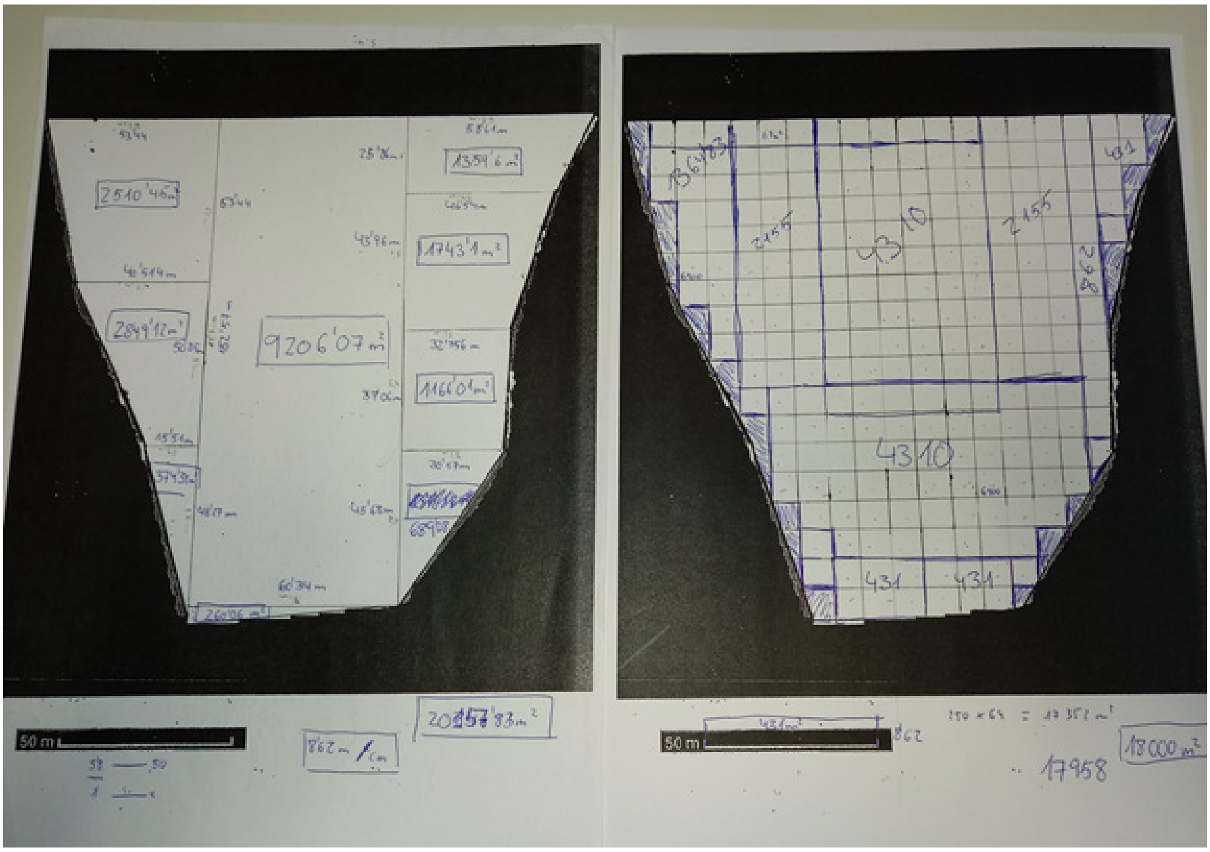


Figura 156. Ejercicio de cálculo de la superficie de la parcela propuesto a los estudiantes. Con solución. Elaboración propia.

Para evaluar la parte de la prueba que utiliza la parcela cuadriculada se utiliza la siguiente rúbrica:

Nivel 1 El alumno no realiza un recuento adecuado y no es capaz de utilizar la información dada para calcular el valor que representa cada división de la cuadrícula.

Nivel 2 El alumno realiza un recuento adecuado y no es capaz de utilizar la información dada para calcular el valor que representa cada división de la cuadrícula.

Nivel 3 El alumno realiza un recuento adecuado, es capaz de utilizar la información dada para calcular el valor que representa cada división de la cuadrícula y obtiene un resultado por defecto (sin considerar cuadros atravesados parcialmente).

Nivel 4 El alumno realiza un recuento adecuado, es capaz de utilizar la información dada para calcular el valor que representa cada división de la cuadrícula y obtiene un resultado aproximado por exceso o por defecto que incluye los cuadros atravesados parcialmente.

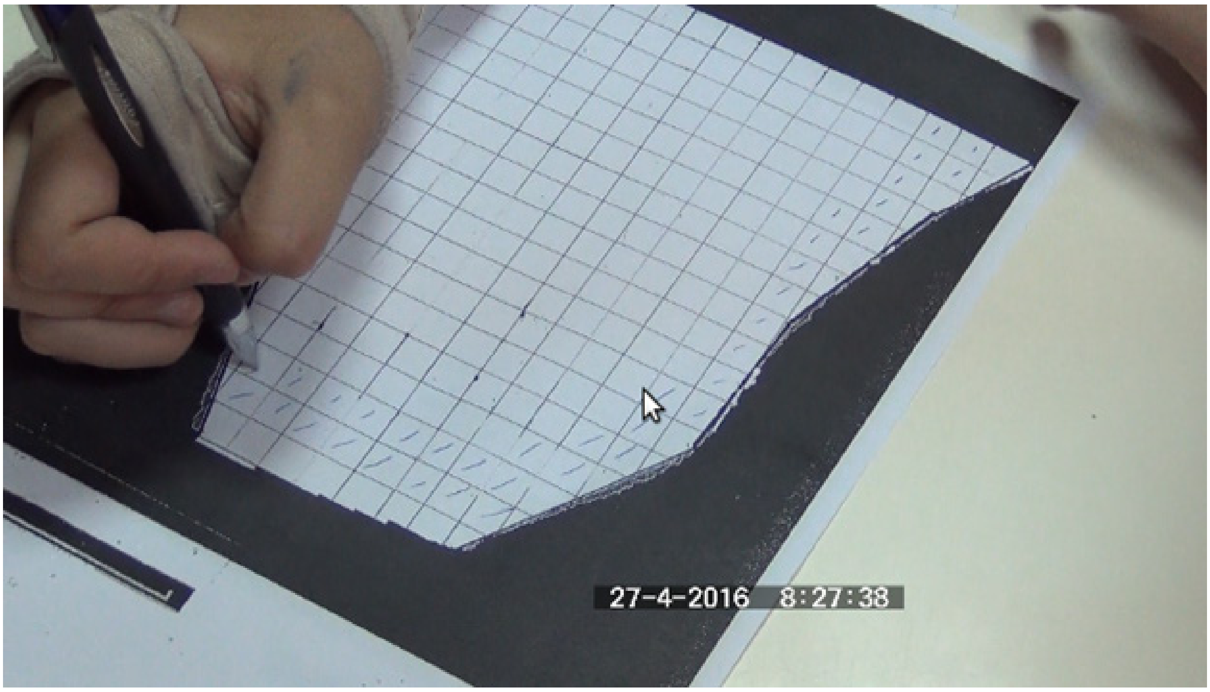


Figura 157. Alumno resolviendo la prueba mediante conteo. Elaboración propia.

Tabla 32

Nivel alcanzado en la prueba que utiliza la parcela cuadriculada.

Nivel alcanzado	N.º de alumnos (Porcentaje de alumnos)
No abordado	20 (74,07%)
Nivel 1	0 (0%)
Nivel 2	4 (14,81%)
Nivel 3	2 (7,4%)
Nivel 4	1 (3,7%)

La resolución del ejercicio utilizando la parcela cuadriculada fue minoritaria dentro del grupo y en todos los casos fue complementaria a la resolución basada en la descomposición. A continuación mostramos algunos ejemplos de resolución del ejercicio mediante este método.

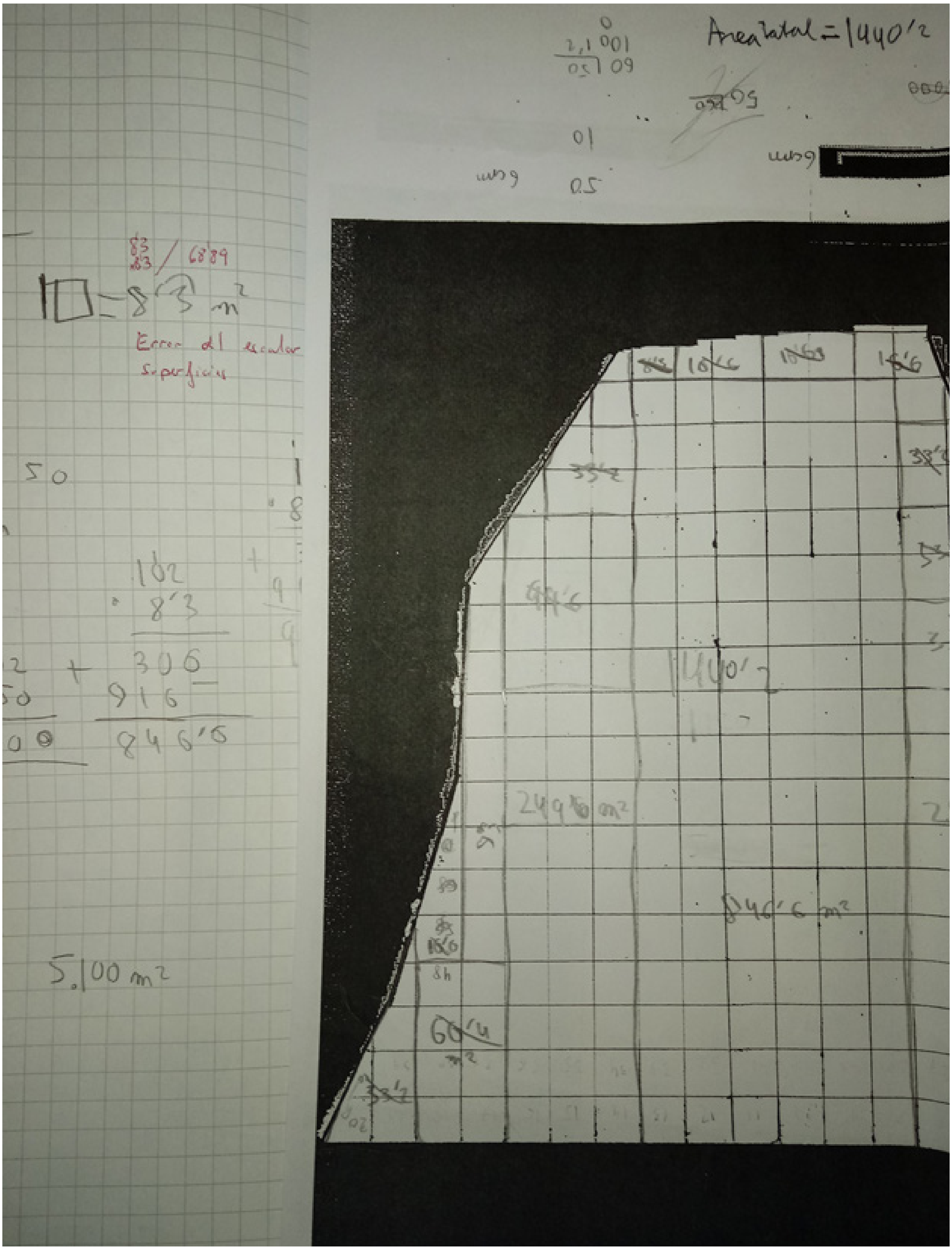


Figura 158. Resolución por conteo en la que se aprecia un error de escalado. Elaboración propia.

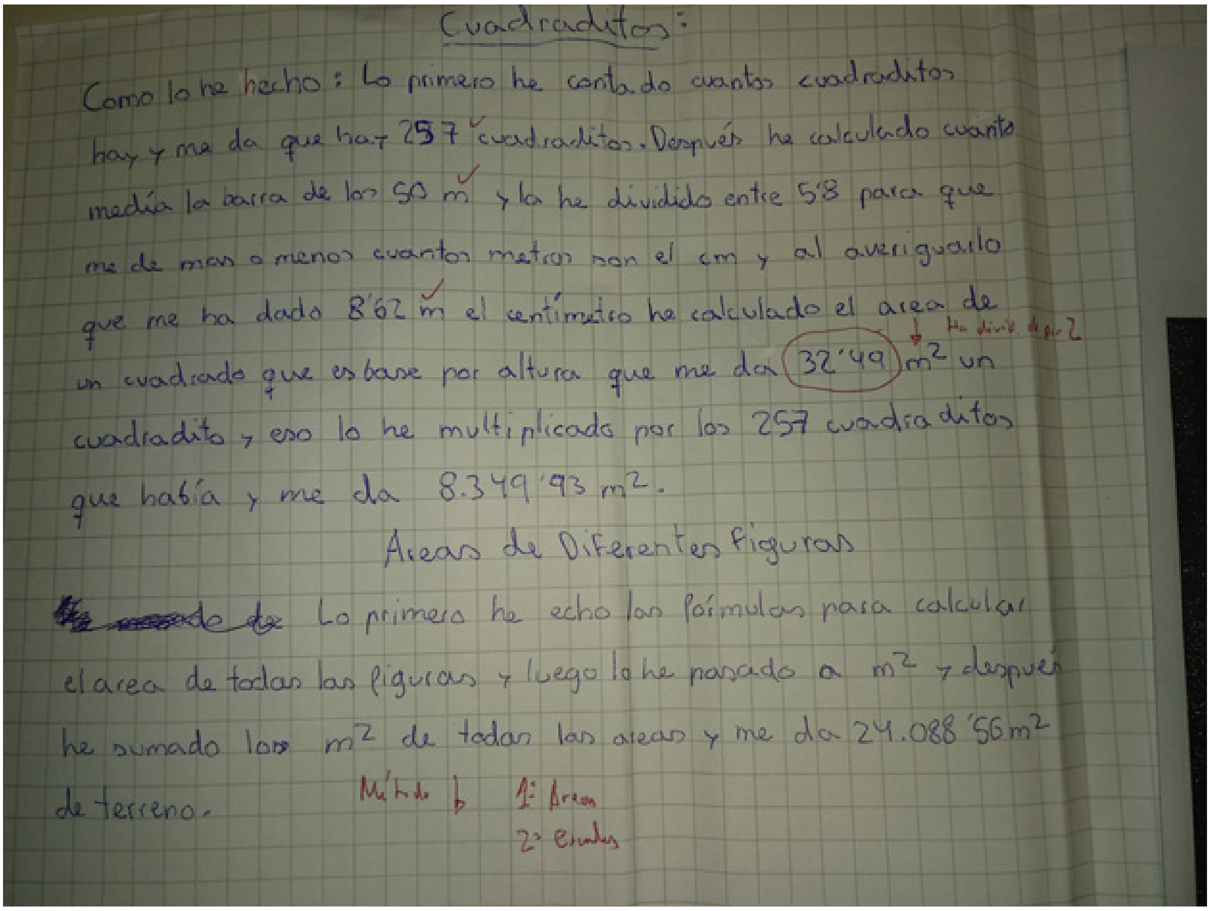

Cuadraditos:
Como lo he hecho: Lo primero he contado cuantos cuadraditos hay y me da que hay 257 cuadraditos. Después he calculado cuanto medía la barra de los 50 m y la he dividido entre 5'8 para que me de mas o menos cuantos metros son el cm y al averiguarlo que me ha dado 8'62 m el centímetro he calculado el area de un cuadrado que es base por altura que me da 32'49 m² un cuadradito y eso lo he multiplicado por los 257 cuadraditos que había y me da 8.349'93 m².
Areas de Diferentes figuras
Lo primero he echo las fórmulas para calcular el area de todas las figuras y luego lo he pasado a m² y después he sumado los m² de todas las areas y me da 24.088'56 m² de terreno.
Método b 1: Areas
2: Escalas

Figura 159. Explicación del estudiante del método seguido para obtener el área de la parcela. Elaboración propia.

Para evaluar la parte de la prueba que utiliza la descomposición en figuras planas se utiliza la siguiente rúbrica:

Nivel 1 El alumno no conoce las fórmulas o se equivoca al calcular las áreas de las superficies que componen la figura

Nivel 2 El alumno utiliza las fórmulas para calcular el área de las figuras planas de una forma correcta pero no usa un método correcto para obtener el valor real de la superficie.

Nivel 3 El alumno utiliza un método correcto para calcular el área de las figuras planas, es correcto en el método empleado para obtener la medición real de la superficie, pero comete errores en los cálculos o no es capaz de alcanzar el resultado final por falta de tiempo

Nivel 4 El alumno utiliza un método correcto para calcular el área de las figuras planas, es correcto en el método empleado y en los cálculos para obtener la medición real de la superficie y es capaz de alcanzar un resultado final con un error mínimo.

Tabla 33

Nivel alcanzado en la prueba que utiliza la parcela cuadriculada.

Nivel alcanzado	Nº de alumnos (Porcentaje de alumnos)
Nivel 1	5 (18,51%)
Nivel 2	8 (29,62%)
Nivel 3	9 (33,33%)
Nivel 4	5 (18,51%)

Como puede verse, el resultado de la prueba arroja que aunque la mayoría de los alumnos son capaces de calcular áreas mediante descomposición en triángulos y rectángulos y aplicar correctamente las fórmulas, cerca de la mitad de la clase tiene dificultades a la hora de aplicar las escalas a la semejanza de superficies. De los alumnos que aplican el método correcto la gran mayoría son incapaces de terminar el ejercicio al realizar una descomposición con demasiadas figuras y tener que realizar un gran número de cálculos con valores decimales. En las siguientes figuras vemos algunos ejemplos de resolución.

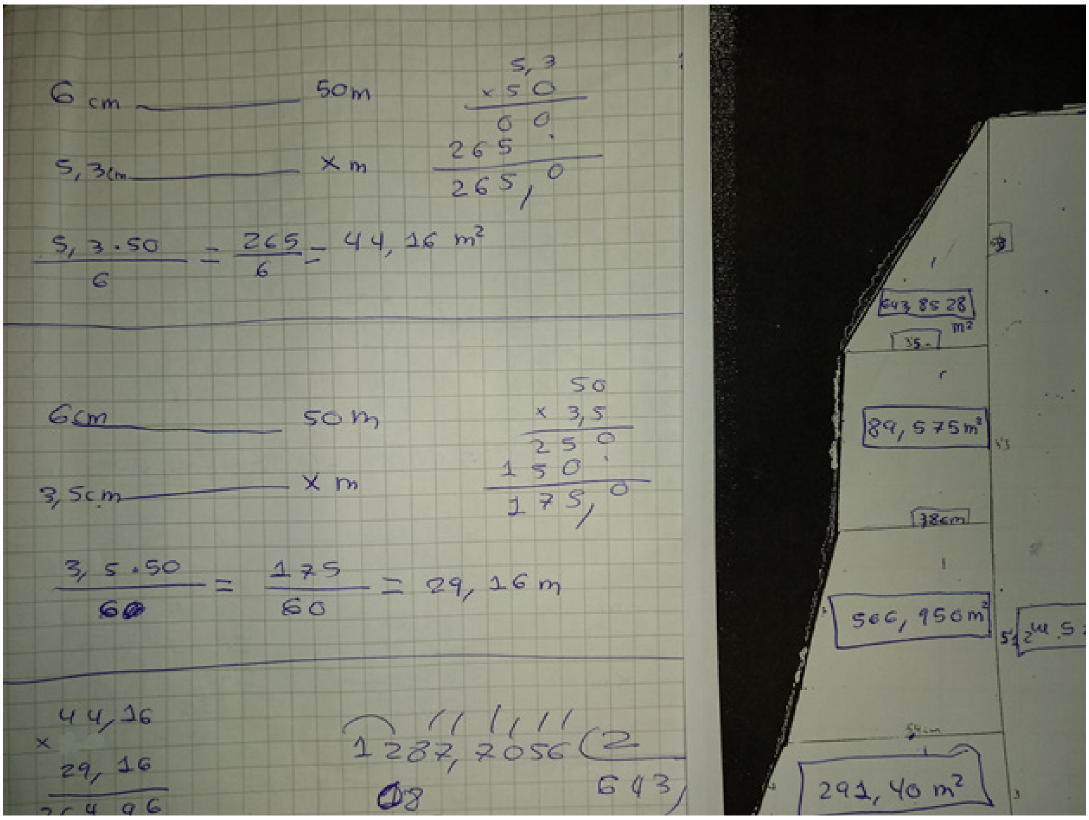


Figura 160. Resolución por descomposición donde se aprecian errores entre la proporcionalidad aplicada a longitudes y la proporcionalidad aplicada a superficies. Elaboración propia.

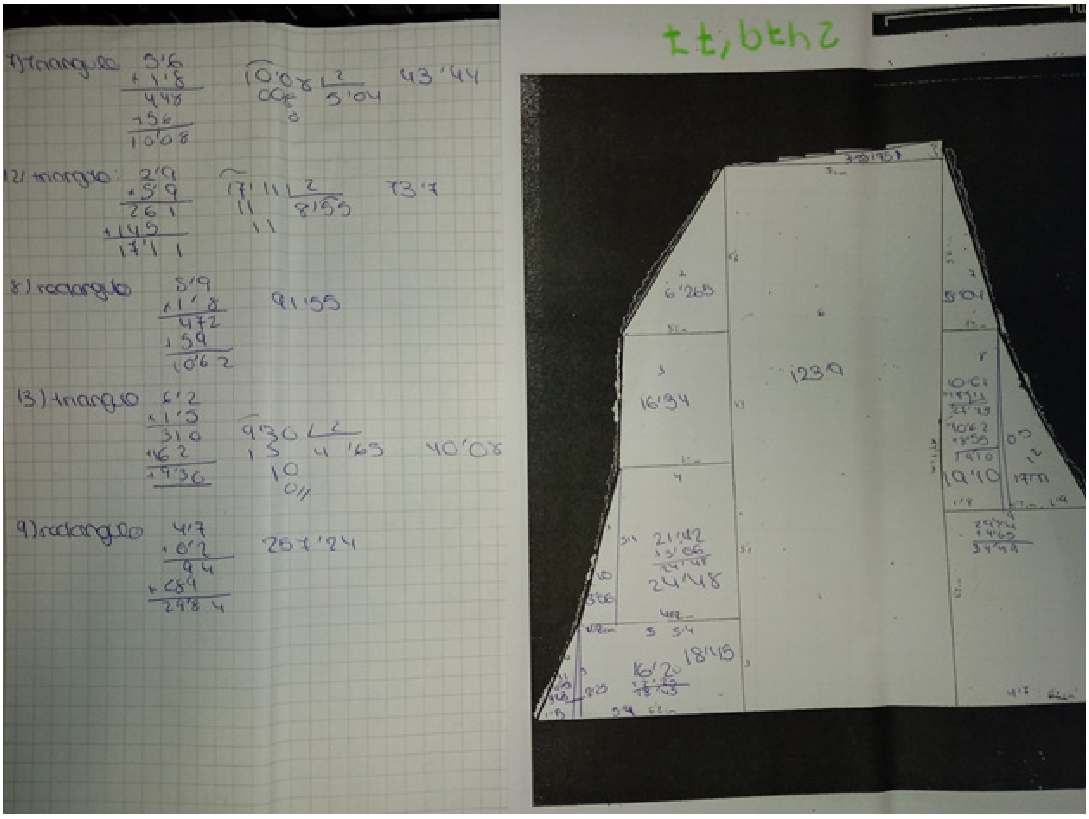


Figura 161. Resolución por descomposición donde se aprecian errores a la hora de aplicar la escala. Elaboración propia.

La aplicación de escalas a superficies es un contenido previsto en la legislación para el curso de 2º de la ESO. Como en este caso la experiencia se realizó en 1º de la ESO se opta por continuar con el REI permitiendo a los alumnos que repitan el ejercicio en sus casas con un guión sobre cómo hacerlo.

El resultado obtenido en esta medición es que la parcela del colegio ocupa alrededor de los 20000 metros cuadrados. Se considera este dato como medición de consenso y aplicando la división en 27 partes iguales se obtiene un valor de parcela individual aproximado de 740 metros cuadrados.

4.1.17. Sesión del 28 de abril de 2016 (a).

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	17
Hora de inicio-fin	10:05-11:00
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

El objetivo principal de la sesión es dar comienzo a la modelización M_3, se espera poder trasladar la medición teórica del tamaño de las parcelas obtenida en el plano al macro-espacio. Para dar comienzo a esta modelización se plantea una sesión basada en el momento del primer encuentro y en el momento exploratorio en la que los alumnos aborden los problemas derivados de intentar trazar una figura cuadrada de 27 metros de lado (740 m²) en el macro-espacio.

La necesidad de asegurar la perpendicularidad de los lados en el macro-espacio se espera que sea la clave para comenzar a trabajar con el EG 9 de nuestro MER.

Las preguntas y respuestas que se espera abordar en esta sesión son:

Q_{26}: ¿Cómo se pueden trasladar las divisiones realizadas en el micro-espacio al macro-espacio?

Q_{29}: ¿Cómo se pueden ampliar los datos obtenidos en el Micro-espacio para poder trabajar en el macro-espacio?

Q_{30}: ¿Cómo se puede establecer un sistema de referencia que permita asegurar el trazado de paralelas y perpendiculares en el macro-espacio?

Q_{31}: ¿Se pueden generar ternas proporcionales igualmente válidas mediante las técnicas de proporcionalidad?

Q_{32}: ¿Existen otras ternas que no provengan de la terna 3,4,5 y que también generen un triángulo rectángulo?

Q_{33}: ¿Hay algún método de comprobación que permita asegurar que dados los tres lados de un triángulo, este es rectángulo?

Se espera que dichas cuestiones se resuelvan haciendo uso de las respuestas:

R_{27}: Trazado de rectas perpendiculares y paralelas en el macro-espacio.

R_{28}: Obtención del Teorema de Pitágoras a partir de ternas pitágoricas conocidas.

3. Descripción de la sesión

El profesor introduce la sesión confirmando que en función de los métodos utilizados el valor de la superficie del colegio obtenida está entre los 18000 y los 20000 metros cuadrados. Para facilitar los cálculos se acepta como consenso una parcela de 20.000 metros cuadrados que serviría para obtener 27 parcelas individuales de 740 metros cuadrados.

El profesor plantea a los alumnos la siguiente pregunta:

¿Si mi parcela es cuadrada y ocupa 740 metros cuadrados cuánto vale el lado del cuadrado?

Los alumnos han realizado este ejercicio con anterioridad en el tema relativo a potencias y raíces por lo que rápidamente se llega al consenso de que para obtener el lado es necesario realizar la raíz cuadrada. En nuestro caso el valor del lado obtenido es de 27,2 metros.

Aunque la sesión prevista suponía bajar al patio para medir una parcela cuadrada de 27 metros de lado, ese día está lloviendo en el municipio, por lo que se descarta bajar al patio a trazar la parcela.

El profesor lanza la pregunta ¿Cómo se comienza una obra? Se espera, gracias a este primer encuentro, sondear las dificultades que piensan que tendrían a la hora de trazar un cuadrado en el patio de 27 x 27 metros.

En el siguiente diálogo entre el profesor y los alumnos se observa cómo se van introduciendo diferentes objetos matemáticos para abordar esta nueva modelización en el macro-espacio y cómo se llega a la necesidad de tener en cuenta los ángulos para asegurar el trazado en el macro-espacio:

Profesor: Volvamos a nuestra suposición inicial, tenemos nuestra parcela totalmente vacía y queremos trazar nuestra primera división cuadrada de 27 metros de lado ¿Cómo se comienza una obra?

Alumno 1: Yo había pensado que si cogemos una cuerda de 27 metros y la tensamos luego vamos señalando en el suelo con unos clavos los lados y tendríamos un cuadrado ¿no?

Profesor: Entonces tú dices que señalemos en él cuatro esquinas usando una cuerda para garantizar que cada par de esquinas esté a 27 metros ¿no?

Alumno 1: Eso es.

Alumno 2: Pero, eso sólo no vale, para hacer un muro hay que poner dos cuerdas una encima de otra y que las dos estén muy tensas para que el muro salga recto.

Profesor: Seguro que una manera de empezar podría ser parecida a esta, pero ¿seguro que nos saldría cuadrado?

Alumno 3: Tendríamos que medir bien.

Profesor: Si de acuerdo, pero primero tendremos que trazar nuestra figura en el campo ¿Cómo lo hacemos?

Alumno 3: Claro pero eso se puede hacer dibujando más o menos.

Profesor: ¿Más o menos? Yo quiero un cuadrado perfecto. ¿Cómo empiezo?

Alumno 3: Pues tensamos una cuerda de 27 metros y clavamos dos estacas en los bordes y ya tenemos uno de los lados.

Profesor: Y luego ¿Qué hago?

Alumno 3: Pues las otras tres igual ¿no? Coges otra cuerda de 27 metros la atas a una de las *estacas y cuando llegues al final ya tienes otro pico.*

Profesor: Vale supongamos que haces ese proceso y al final consigues unir las 4 esquinas. Podría tener un problema, hay una figura que se llama rombo que tiene los lados iguales y que podría surgir como resultado del método anterior. Que tendría 27, 27, 27 y 27 metros de lado (dice señalando una figura en la pizarra) y no es cuadrado. ¿Por qué no es cuadrado?

Alumno 4: Porque sus lados no son iguales.

Profesor: Si sus lados son iguales pero no es un cuadrado. ¿Por qué?

Alumno 5: Por sus ángulos.

Profesor: Entonces en una obra es muy importante asegurarse que cuando yo ponga las estacas los ángulos que haya entre dos de los lados no sean ángulos cualesquiera. ¿Cuánto tendrían que medir esos ángulos?

Varios alumnos: 90 grados.

Profesor: Luego, es muy importante trazar un ángulo de 90º para empezar a trazar las parcelas ¿no? Y supongo que también os gustará que las paredes de vuestras casas estén rectas ¿no?

Alumno 6: Yo tengo un tío que hace casas y eso y he visto que ponen al principio unas cuerdas y luego van poniendo los ladrillos entre medias.

Profesor: Eso es, se traza un segundo cuadrado interior de forma que quede el tamaño del muro entre ambos y de esa forma se van luego construyendo los muros pero seguimos teniendo el mismo problema ¿Cómo traza un albañil un ángulo de 90º?

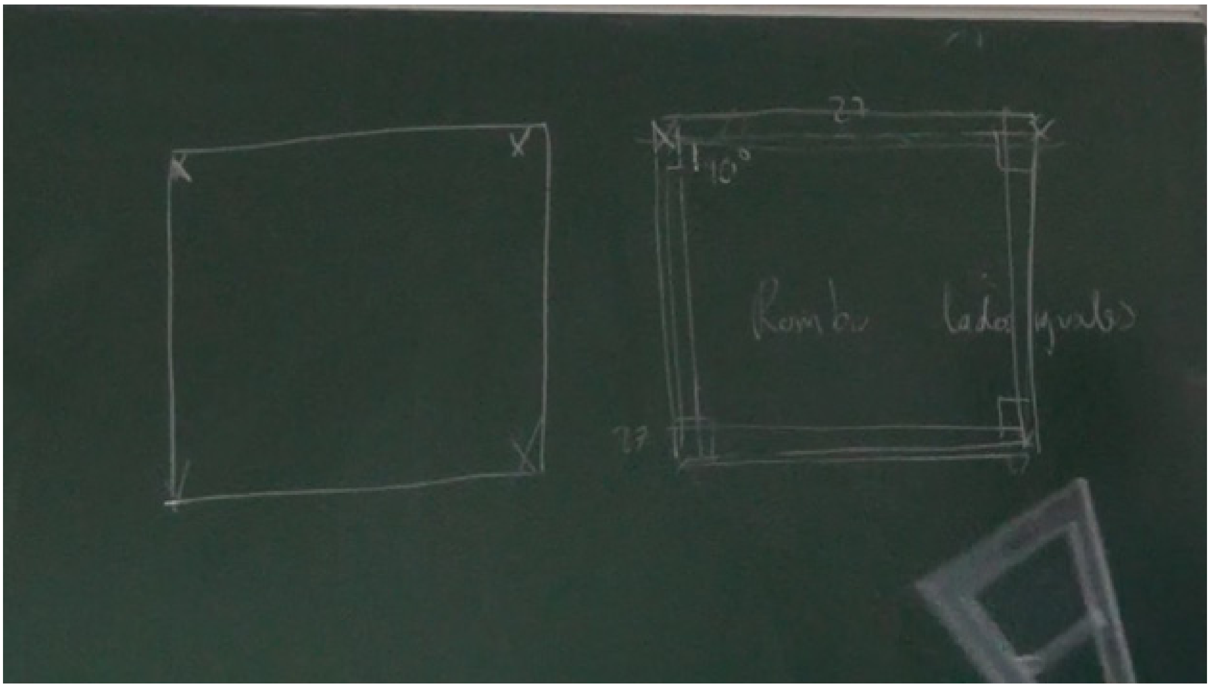


Figura 162. Volcado de información en la pizarra durante la puesta en común. Elaboración propia.

Gracias a estas primeras ideas y a su deficiencias los alumnos llegan a la conclusión con ayuda del profesor de que es esencial construir un ángulo de 90º.

Para desatascar el proceso, el profesor explica que están ante un problema histórico que tardó mucho tiempo en ser resuelto y que los primeros en dar una solución a este problema fueron los egipcios que utilizaban el denominado método de la cuerda.

El profesor ejemplifica el denominado método de la cuerda con una cuerda que tiene 12 nudos situados a la misma distancia y que consiste en formar un triángulo rectángulo cuyas lados tengan 3,4 y 5 segmentos separados por nudos. De esa forma se puede asegurar, aunque no se pueda justificar de momento, que el ángulo formado por los lados que miden 3 y 4 nudos forman 90º.

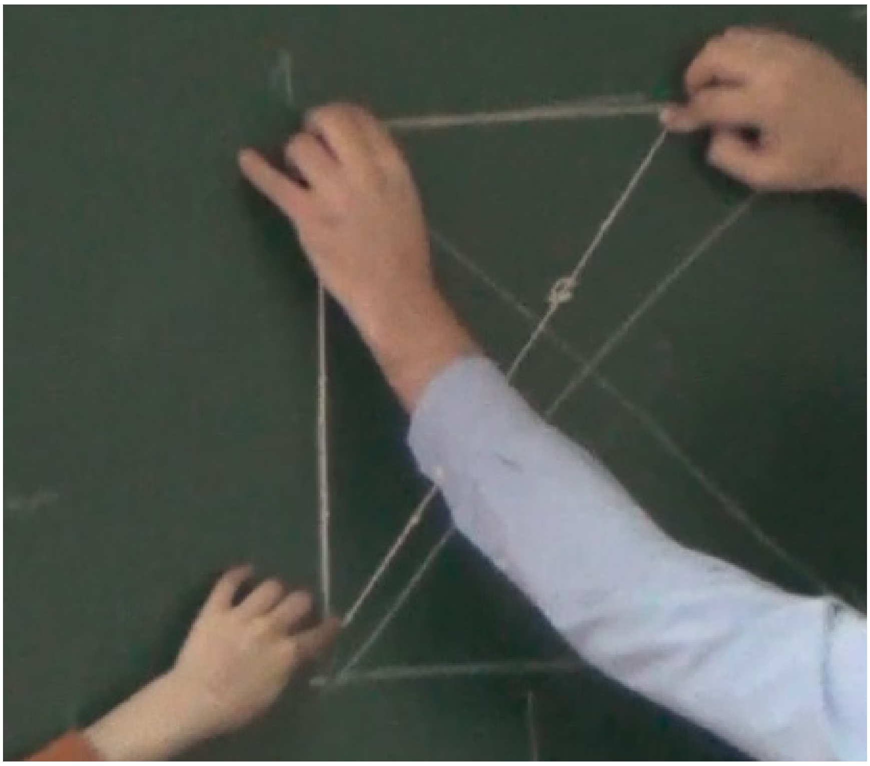


Figura 163. Ejemplo del uso del método de la cuerda para el trazado de un ángulo recto. Elaboración propia.

Se explica a los alumnos que la terna 3,4,5 funciona independientemente de la unidad (centímetros, decímetros o metros) que utilicemos para dividir la cuerda en 12 trozos iguales.

Un alumno pregunta si funcionarían entonces cualquier terna proporcional a 3,4,5 y el profesor confirma que así es. Se aprovecha para comentar que en la Tablilla Plimton aparecen otras ternas no proporcionales a 3,4,5 y que si se utilizan como lados de un triángulo también forman un ángulo recto.

Se pide a los alumnos que traten de recordar de cursos pasados alguna expresión relacionado con los triángulos rectángulos. En el siguiente diálogo se puede ver cómo los alumnos movilizan unos conocimientos previos inexactos y cómo se lanzan a abordar la tarea de buscar una técnica que permita resolver la obra matemática que están estudiando:

Profesor: ¿Alguien conoce algún matemático famoso que tuviese relación con los triángulos rectángulos?

Alumno 1: Pitágoras

Profesor: Gracias (nombre del alumno 1) *y ¿qué dijo o hizo Pitágoras?*

Alumno 2: Que el triángulo es base por altura entre dos.

Profesor: No, no es eso.

Alumno 3: Que cateto más cateto es igual a cateto al cuadrado.

Profesor: ¿Sí? O sea que 3 más 4 es igual a 3 al cuadrado. No funciona, algo tiene que ver pero no funciona.

Alumno 2: Los catetos tienen que ser perpendiculares

Profesor: Sí, un cateto por definición son los lados que forma un ángulo recto dentro de un triángulo rectángulo.

Alumno 3: No, era cateto más cateto igual a hipotenusa al cuadrado.

Profesor: Vale, aparece una palabra nueva, hipotenusa, entonces, según la fórmula de (nombre del alumno 3) *que está pensando… Los catetos que son los lados que forman el ángulo de 90 son iguales a la hipoténusa al cuadrado, es decir que 3 más 4 es igual a 5 al cuadrado.*

Alumno 3: A mi me suena eso.

Profesor: Te suena pero ¿es verdad? Tu crees que lo que he puesto es verdad.

Alumno 3: No, no sale porque 7 no es igual a 25.

Profesor: Bueno no sale pero algo tiene que ver y nos vamos acercando. Venga vamos a darle un giro más a esta fórmula.

Alumno 4: Pero 5 más 4 es 9 y 3 al cuadrado es 9.

Profesor: O sea que si yo pongo cateto al cuadrado igual a hipotenusa más cateto. Si funciona. Y ¿vale cualquier cateto?

Alumno 4: No, es cateto menor al cuadrado.

Alumno 5: El cateto menor es igual al cateto mediano menos, abre paréntesis el cateto mayor menos el cateto menor, cierra paréntesis.

Profesor: Con cateto mayor te refieres a hipotenusa ¿no?

Alumno 5: Sí eso, hipotenusa.

Profesor: Entonces si yo pongo 3 es igual a 4 menos 5 menos 4, esto se cumple ¿no?

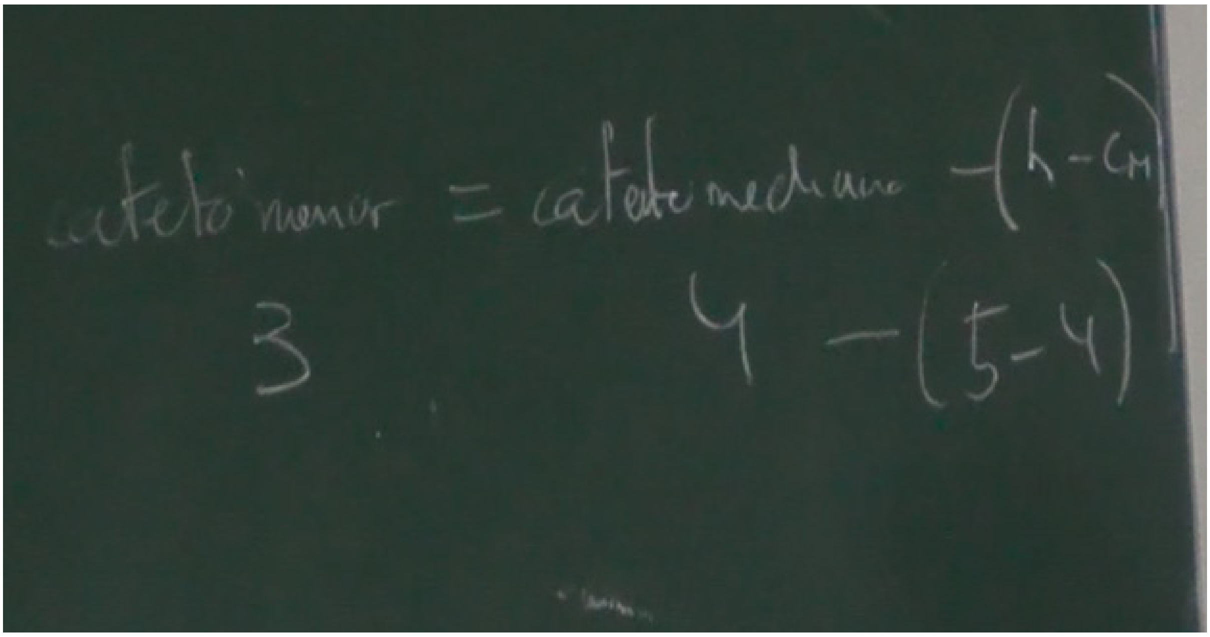


Figura 164. Primeros intentos de construir una expresión para justificar el método de la cuerda. Elaboración propia.

Alumno 5: Sí, se cumple siempre.

Profesor: De acuerdo, te voy a dar otra terna pitagórica que también sirve para generar triángulos rectángulos 5, 12 y 13. Vamos a probar con tu fórmula. 5 es igual a 12 menos 13 menos 12. Me parece que en esa terna pitagórica no funciona.

Alumno 4: ¡Y en la mía!

Profesor: Vamos a ver,… 5 al cuadrado ¿es lo mismo que 12 más 13? En esta funciona.

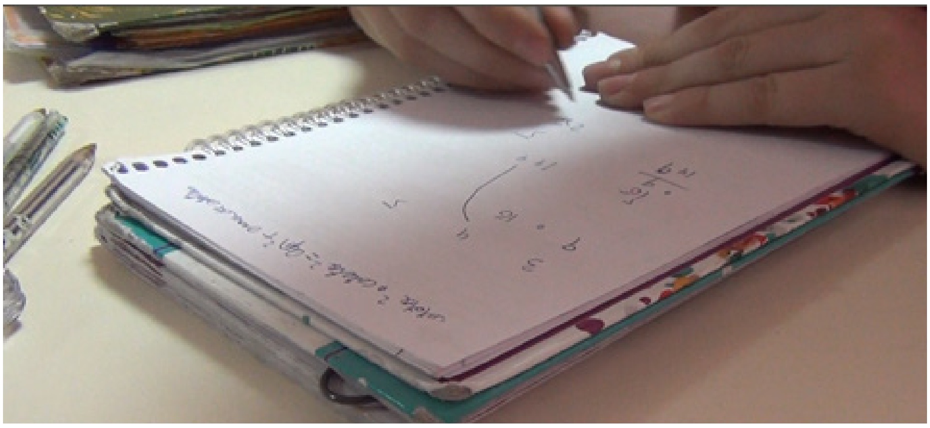
Alumno 4: Lo ves, es la mía seguro.

Profesor: Bueno vamos a buscar en wikipedia (dice mientras busca con el móvil) *ternas pitagóricas, se llaman así. (después de unos segundos escribe en la pizarra las ternas 3, 4 y 5, 5, 12 y 13, 7, 24 y 25 y 8, 15 y 17).*

La expresión cateto menor = cateto mayor – (hipotenusa– cateto mayor) deja de funcionar con la terna 5, 12 y 13. Sin embargo la expresión hipotenusa + cateto mayor = cateto menor al cuadrado si funciona también para esta terna. La comprobación con la terna 7, 24 y 25 también se cumple. Pero cuando llegamos a la terna 8, 15, 17 la expresión falla.

El profesor pide a los estudiantes que en grupos cooperativos y usando la técnica 1-2-4 intenten encontrar una fórmula que funcione con estas cuatro ternas y que incluya las palabras cateto menor, cateto mayor e hipotenusa.

Nos encontramos en una parte de la sesión basada en el momento exploratorio que busca que los alumnos induzcan la fórmula del Teorema de Pitágoras a partir de ternas conocidas, en este caso podríamos decir que los alumnos formulan su hipótesis y tratan de verificar las cuatro ternas en base a ella como en el EP 103 (comprobar si dados tres números naturales cualquiera forman una terna pitagórica).



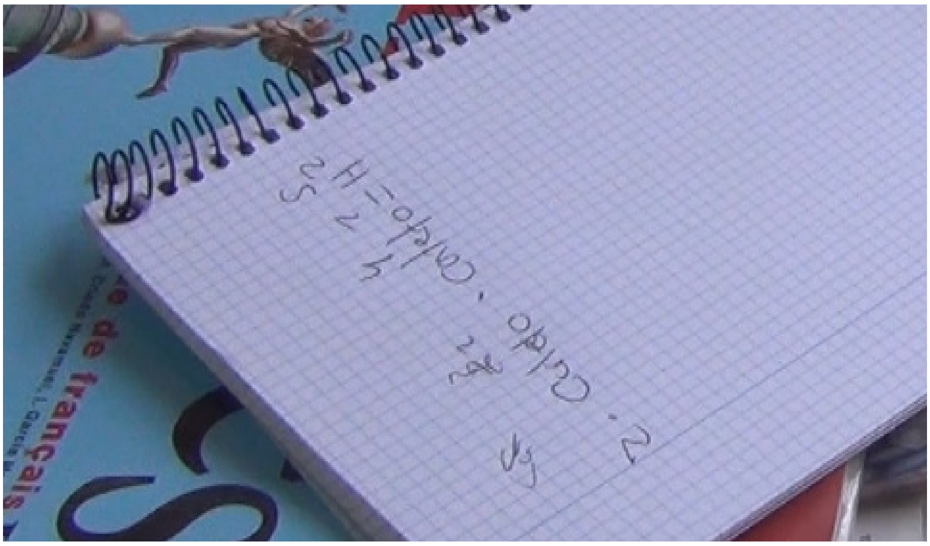


Figura 165. Búsqueda de una expresión prealgebraica para el Teorema de Pitágoras a partir de ternas conocidas. Elaboración propia.

Los grupos trabajan en cooperativo mediante la técnica 1, 2, 4 y tratan de llegar a un consenso sobre cuál puede ser esa fórmula. Tras la actividad se ponen en común las siguientes fórmulas:

cateto menor al cuadrado + cateto mayor al cuadrado – hipotenusa al cuadrado = 0

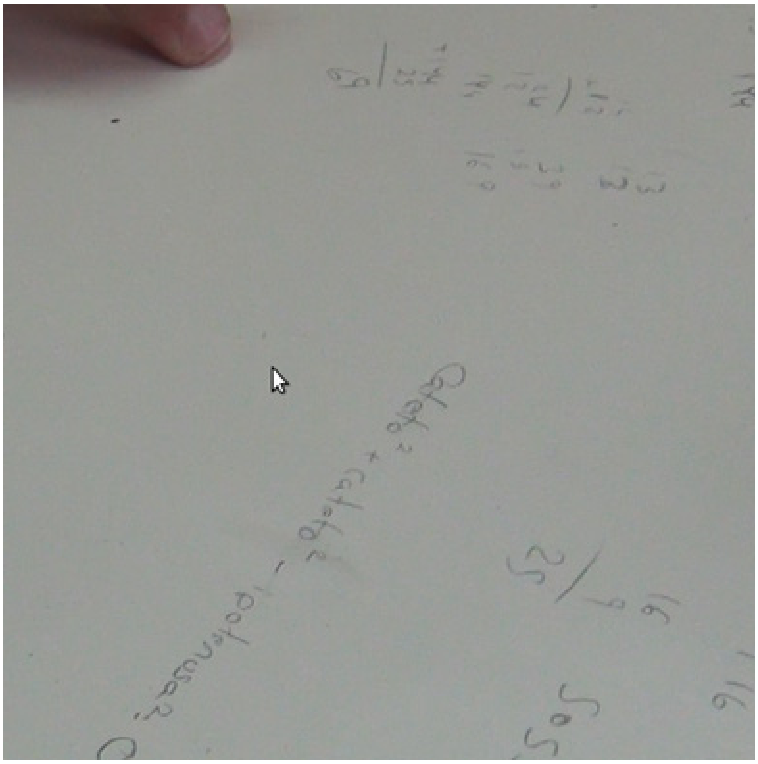


Figura 166. Ejemplo de expresión prealgebraica para el Teorema de Pitágoras a partir de tanteo. Elaboración propia.

cateto menor al cuadrado + cateto mayor al cuadrado = hipotenusa al cuadrado

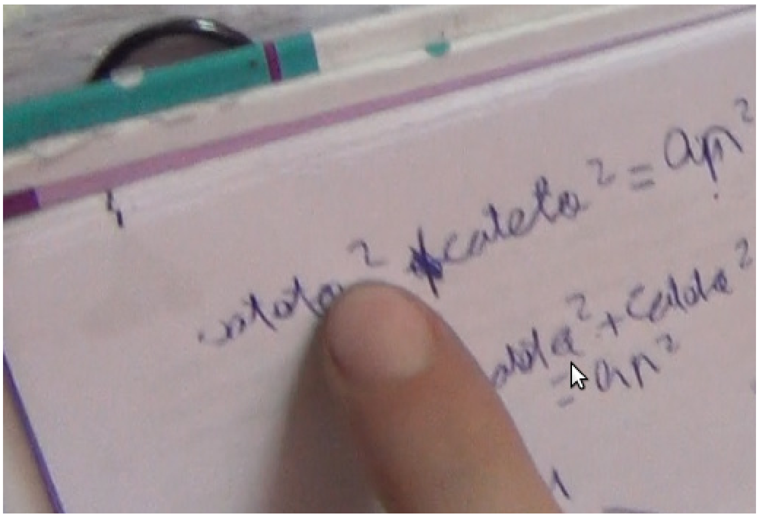


Figura 167. Expresión prealgebraica para el Teorema de Pitágoras obtenida por uno de los grupos. Elaboración propia.

cateto menor al cuadrado = (cateto mayor + hipotenusa) x (hipotenusa - cateto mayor)

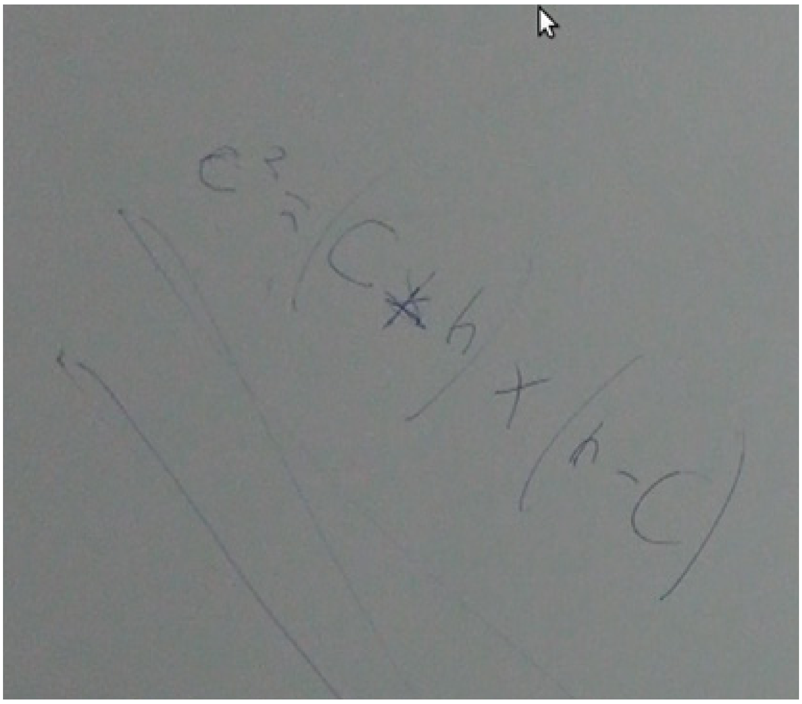


Figura 168. Expresión prealgebraica para el Teorema de Pitágoras obtenida por uno de los grupos 2. Elaboración propia.

Con la puesta en común de estas tres fórmulas el profesor afirma que todas ellas son correctas y que se proseguirá a partir de ahí el próximo día.

4.1.18. Sesión del 28 de abril de 2016 (b).

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	18
Hora de inicio-fin	14:30-15:20
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En esta sesión previa al examen parcial planteado por el departamento didáctico se opta por trabajar problemas relativos a triángulos rectángulos a partir de las fórmulas obtenidas en la sesión de la mañana.

La sesión está dedicada al momento de la técnica y se espera trabajar con los alumnos los EM 43 (fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo) y EM 44 (fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus lados) a partir de problemas que se deben resolver desde los EP 104 (calcular el cateto desconocido de un triángulo rectángulo del que se conocen los otros dos lados), EP 105 (calcular la altura de un triángulo isósceles conocidos sus lados), EP 106 (calcular la apotema de un polígono regular conocida su base y el radio de la circunferencia circunscrita) , EP 107 (calcular la altura de un trapecio isósceles a partir de sus lados), EP 108 (calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen los dos catetos) y EP 109 (calcular el lado de un rombo a partir de sus diagonales).

La necesidad de asegurar con soltura esas tareas de cara al examen hace que la sesión gire en torno a una única pregunta de la modelización M_3.

Las pregunta y respuesta que se espera abordar en esta sesión es:

Q_{34}: Si conocemos dos lados de un triángulo rectángulo ¿Podemos calcular el lado desconocido a partir del Teorema de Pitágoras?

Se espera que dicha cuestión se resuelva haciendo uso de la respuesta:

R_{29}: Obtención de lados desconocidos en un triángulo rectángulo mediante técnicas aritméticas o algebraicas.

3. Descripción de la sesión

Para dar comienzo a la sesión el profesor vuelve a escribir las tres fórmulas obtenidas en la sesión anterior.

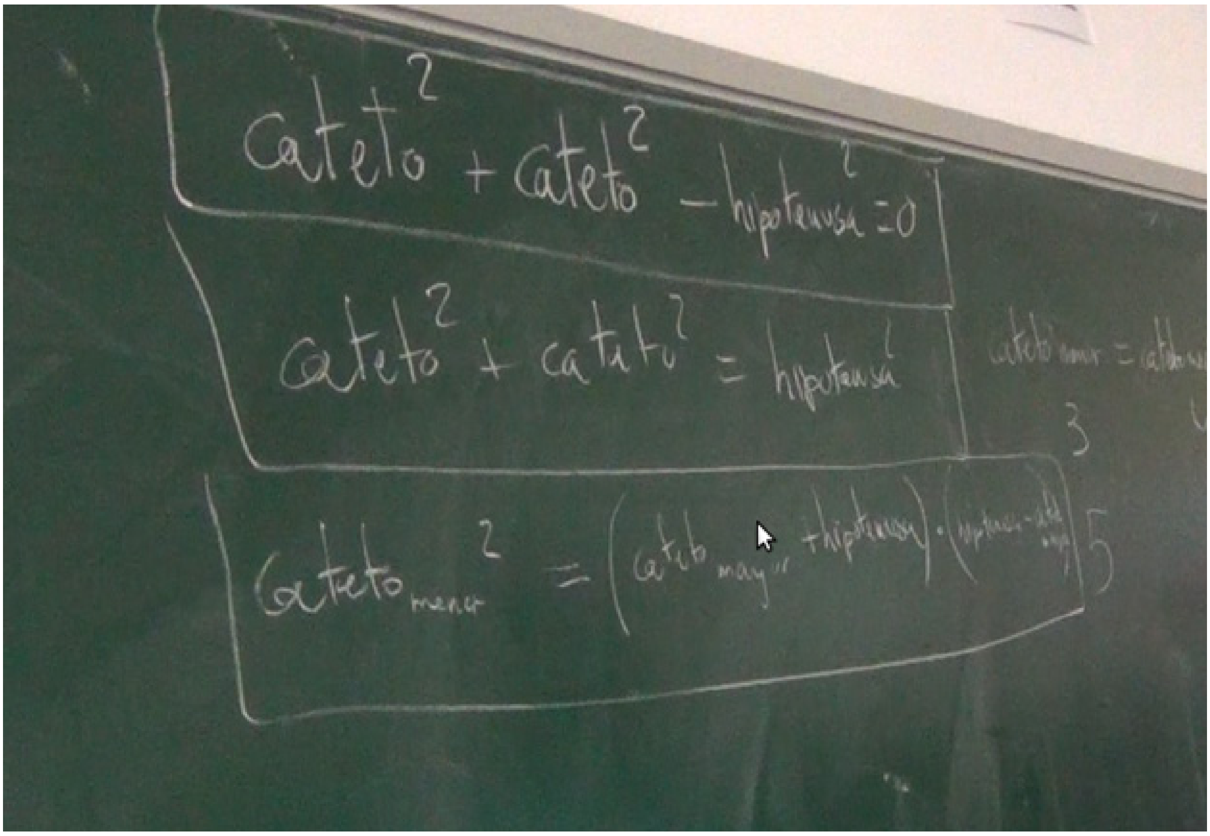


Figura 169. Expresiones prealgebraicas para el Teorema de Pitágoras obtenidas en la sesión 17. Elaboración propia.

Hay que recordar que los alumnos de este curso aun no han comenzado a trabajar con el bloque de álgebra lo que hace que las relaciones entre las fórmulas anteriores no sean evidentes.

Para iniciar el momento del trabajo de la técnica el profesor solicita a los grupos que trabajen con las fórmulas anteriores para resolver cuatro triángulos rectángulos en los que se desconoce uno de sus lados (EP 104 calcular el cateto desconocido conocidos los otros dos lados y EP 108 calcular la hipotenusa conocidos los catetos). Los alumnos deben resolver los ejercicios utilizando la técnica cooperativa números iguales juntos. En este caso los alumnos trabajan con los cuatro problemas y se explican entre ellos la forma de resolverlos. Una vez acabado el tiempo el profesor saca al azar a cuatro alumnos para que resuelvan en la pizarra el ejercicio asignado.

Los ejercicios que se presentan a los alumnos son:

Ejercicio 1: Cateto menor = 3, cateto mayor = 4, hipotenusa = x

Ejercicio 2: Cateto menor = 12, cateto mayor = 16, hipotenusa = x

Ejercicio 3: Cateto menor = x, cateto mayor = 12, hipotenusa = 13

Ejercicio 4: Cateto menor = 9, cateto mayor = x, hipotenusa = 15

Los dos primeros ejercicios dónde la hipotenusa es desconocida son resueltos con relativa facilidad aunque en el segundo ejercicio al ser números grandes el alumno que sale a la pizarra tiene dificultades al llegar a la expresión 400 menos hipotenusa al cuadrado igual 0. El profesor solicita ayuda a la clase y le indican que debe hacer la raíz cuadrada de 400 para saber la solución. Vemos aquí una dificultad en la técnica que debido a la falta de tiempo no se justifica y que en consecuencia da lugar a un aprendizaje mecánico no deseado en muchos casos.

Los dos últimos ejercicios presentan una mayor dificultad al ser expresiones donde el dato desconocido es el cateto. Los alumnos que salen a la pizarra no son capaces de resolver el ejercicio en un caso plantean la expresión 144 más cateto menor al cuadrado igual a 169 y en el otro resuelven el ejercicio de forma errónea al interpretar la hipotenusa como cateto. El profesor lanza la pregunta a la clase, a continuación transcribimos el diálogo que se produce:

Profesor: Estos dos ejercicios (señalando al 3 y al 4) *no son correctos de momento. ¿Alguien puede ayudar a estos compañeros?*

(Varios alumnos levantan la mano)

Alumno 1: ¡El ejercicio 3 tiene truco!

Profesor: ¿Tiene truco? Explícate.

Alumno 1: ¡El resultado es 5!

Profesor: Estoy de acuerdo el resultado es 5 pero ¿cómo lo has sabido?

Alumno 1: Es una cosa de esas de esta mañana.

Profesor: ¿Una cosa?

Alumno 1: Si un grupo de números de esos egipcios.

Profesor: ¿Una terna?

Alumno 1: Sí, eso, una terna. Esta mañana probamos y cuando salen el 12 y el 13, el otro es 5.

Profesor: Me parece muy buena respuesta pero ¡ojo! Tenemos que asegurarnos que esos números coincidan con los catetos y la hipotenusa, si no no funcionará.

(El profesor escribe de nuevo algunas ternas y recuerda a que llamamos cateto y a que llamamos hipotenusa)

Para que nos quede claro, catetos son los lados del triángulo que forman el ángulo recto y la hipotenusa siempre es el lado que queda justo enfrente del ángulo recto. En un triángulo rectángulo siempre se va a cumplir que los catetos son los dos números pequeños de la terna y la hipotenusa el número más grande.

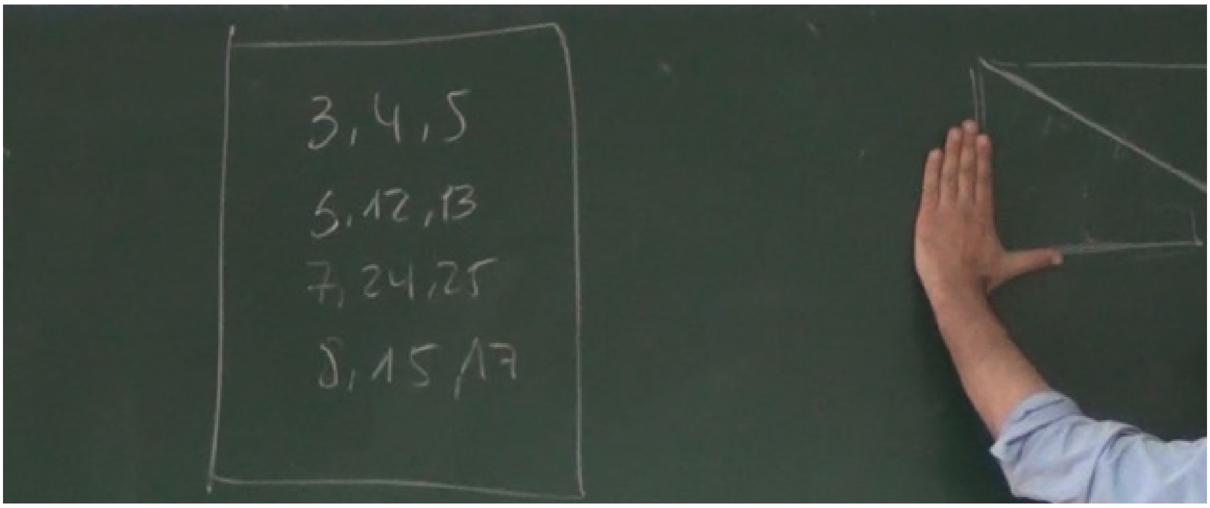


Figura 170. Ternas pitágoricas trabajadas y recordatorio de las características del cateto. Elaboración propia.

Profesor: Y ¿qué pasa con el ejercicio 4?

Alumno 2: Que se han equivocado.

Profesor: Y en tu grupo ¿cómo lo habéis hecho?

Alumno 2: Hemos usado la fórmula que inventamos esta mañana y nos queda que el cateto (olvida decir al cuadrado) es igual a cateto más hipotenusa por hipotenusa menos cateto, es decir que el cateto es igual a 15+9 por 15-9. O sea 24 por 6. O sea 144.

Profesor: El cateto entonces es 144 ¿no?

Alumno 2: Sí eso es.

Alumno 3: ¡Pero cómo va a ser un cateto tan grande! Falta hacer la raíz.

Alumno 2: A sí, sí, eso es falta la raíz.

Profesor: Venga os ayudo en este caso, la raíz de 144 es 12 y ese es el resultado correcto.

Como vemos en estos diálogos el trabajo de los EM 43 y EM 44 (fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo y fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus lados) es aún muy débil, por lo que el profesor decide hacer una pequeña puesta en común y escribir los pasos para resolver los problemas cuando falte un cateto y cuando falte la hipotenusa.

En la puesta en común se fijan los siguiente métodos:

- **Método 1 (Falta la hipotenusa)**
  - » Paso 1: Se hace el cuadrado de cada cateto.
  - » Paso 2: Se suman.
  - » Paso 3: Hacemos la raíz cuadrada del resultado.
- **Método 2 (Falta un cateto)**
  - » Paso 1: Sumamos el cateto que tenemos y la hipotenusa.
  - » Paso 2: Restamos la hipotenusa y el cateto que tenemos.
  - » Paso 3: Multiplicamos ambos números.
  - » Paso 4: Hacemos la raíz cuadrada del resultado.

Como vemos, se produce aquí el momento de la institucionalización de forma un poco precipitada y, aunque recoge la aportación de los grupos y son técnicas surgidas de su propio proceso de reflexión, en la mayoría de los alumnos ese proceso aún no se ha realizado completamente.

Para terminar la sesión el profesor indica que deben practicar los métodos anteriores con unos ejercicios del libro de texto y señala algunos ejercicios dónde aparecen EP 104 (calcular el cateto desconocido de un triángulo rectángulo del que se conocen los otros dos lados), EP 105 (calcular la altura de un triángulo isósceles conocidos sus lados), EP 106 (calcular la apotema de un polígono regular conocida su base y el radio de la circunferencia circunscrita), EP 107 (calcular la altura de un trapecio isósceles a partir de sus lados), EP 108 (calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen los dos catetos) y EP 109 (calcular el lado de un rombo a partir de sus diagonales).

Se pide a los grupos que únicamente es necesario encontrar el triángulo rectángulo en el ejercicio y escribir si ese problema se resolvería por el método 1 o por el método 2 (EM43 y EM44 respectivamente).

En los últimos minutos de la sesión se recuerda a los alumnos que en la prueba escrita del día siguiente entrará todo lo visto en las sesiones y que deben repasar escalas, áreas de figuras planas y ejercicios de triángulos rectángulos.

4.1.19. Sesión del 29 de abril de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	19
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

Sesión dedicada al examen parcial sobre Geometría planteado por el Departamento Didáctico de Matemáticas del centro.

Esta sesión está dominada por el momento de la evaluación.

3. Descripción de la sesión

El examen planteado por el Departamento sigue la línea del centro de realizar una evaluación continua de todo lo visto hasta ese momento en el curso. Por ese motivo, la prueba se diseña con cuatro puntos iniciales dónde los alumnos deben responder de nuevo a ejercicios ya trabajados con anterioridad y con seis puntos sobre la materia nueva y aún no preguntada.

Respecto a los ejercicios planteados para Geometría, prima el cálculo algorítmico frente al razonamiento y los ejercicios se plantean sin relación con aspectos de la vida cotidiana aunque si tienen relación con aspectos intramatemáticos. Se trata de una prueba de evaluación de contenidos procedimentales y basados en el cálculo, con un nivel de razonamiento bajo basado en la reproducción. En la prueba se pueden observar el EP18 (calcular la superficie de un rectángulo a partir de la medición de sus lados), el EP22 (calcular la superficie de un triángulo a partir de la medición de sus lados y su altura), el EP36 (obtener analíticamente una medida real a partir de su figura a escala conocida la escala), el EP38 (obtener analíticamente las longitudes de una figura semejante a otra mediante una ampliación de la original utilizando cualquier razón de semejanza), el EP78 (triángulación de un polígono cualquiera a partir de varios vértices), el EP80 (calcular la superficie de un rombo mediante triángulación), el EP81 (calcular la superficie de un trapecio mediante triángulación), el EP85 (calcular la superficie de un rombo conocidas sus diagonales), el EP86 (calcular la superficie de un trapecio conocidas las bases y la altura), el EP91 (obtener los ángulos interiores de una figura poligonal regular), el EP104 (calcular el cateto desconocido de un triángulo rectángulo del que se conocen los otros dos lados) y el EP108 (calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen los dos catetos).

Como se ha visto, el trabajo realizado durante el REI fue mucho más contextualizado y abordó tareas de medición, de trazado, de composición y recomposición y de inducción y deducción de técnicas que en la prueba prevista por el Departamento no se contemplaron. Aún así, y siguiendo con la metodología de realizar un estudio de caso descriptivo, se decidió recoger los datos obtenidos en cada uno de los ejercicios del examen en todos los alumnos del grupo experimental y en todos los alumnos de otro grupo del mismo curso que no participaron en la experiencia y que actuarían como grupo control.

Los resultados de los datos estadísticos obtenidos suponen una fuente adicional de información para nuestro estudio de caso y serán analizados en detalle como parte de la descripción de la experiencia realizada. Por razones de extensión y de claridad del texto estos datos se verán en un punto posterior de este mismo capítulo

Durante la sesión los alumnos dispusieron de 55 minutos para realizar la siguiente prueba de evaluación propuesta por el Departamento Didáctico:

Nº 1.- Realiza las siguientes operaciones (2,5 puntos)

a) $15 + 4 \cdot (3 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2) =$

b) $3 \cdot 4 - 6 \cdot (10 - 4 \cdot 2) =$

c) $[(-9) - (+6)] : (-5) =$

d) $(2 - 8) + (5 - 7) - (-9 + 6) - (-5 + 7) =$

e) $(9^2)^3 \cdot 9 =$

f) $(2^3 \cdot 2) : (2^2)^2 =$

g) $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}=$

h) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{4}=$

i) Pasa 2.5 km a m.

j) Pasa 2,5 km^2 a m^2.

Nº 2.- Ordena los siguientes números decimales de mayor a menor (0.75 puntos)

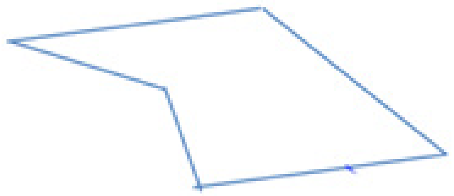
0.0028 0.28 0.25 1.05 0.009 1.02

Nº 3.- Calcula todos los divisores de los números siguientes ¿Cuál de ellos es primo? (0.75 puntos)

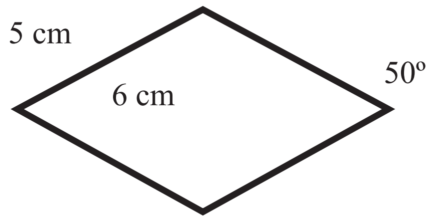
a) 12
b) 56
c) 47

Nº 4.- En un plano, 1 cm. representa 50 metros reales. Si la distancia entre dos puntos es de 8,5 cm. ¿Cuánto metros hay en la realidad entre estos dos puntos? (1 punto)

Nº 5.- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de este polígono?¿Por qué? (1 punto)



Nº 6.- Sabiendo que un ángulo de un rombo mide 50º, que su diagonal menor son 6cm y que su lado es de 5cm. Halla los demás ángulos y el valor de la diagonal mayor. (1 punto)



Nº 7.- Calcula el área de los siguientes polígonos: (1.5 puntos)

a) Trapecio isósceles de bases 10 y 18 m y altura 6m.

b) Rombo de diagonales 4 y 6 m.

Nº 8.- Si de un rectángulo de 9 cm de largo y 6 de ancho, cortamos en las cuatro esquinas un triángulo rectángulo de catetos iguales y de 3cm. ¿Cuánto vale la hipotenusa de los triángulos rectángulos? ¿Qué área tiene la figura recortada? (1.5 puntos)

4.1.20. Sesión del 3 de mayo de 2016.

1. Datos de la sesión

Número de Sesión	20
Hora de inicio-fin	9:10-10:05
Alumnos presentes	27
Profesores presentes	Profesor investigador – Profesor de desdoble (observador) y Profesor en prácticas (cámara)

2. Objetivos de la sesión en términos de cuestiones y respuestas esperadas

En las sesiones anteriores los alumnos abordaron la inducción del Teorema de Pitágoras a partir de las ternas pitagóricas y se trabajaron e institucionalizaron los EM43 y EM44 (fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo y fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus lados). Sin embargo el conocimiento de esos EM obtenido gracias a la inducción y a las puestas en común no ha sido cuestionado suficientemente y se ha aceptado por algunos alumnos de forma acrítica y sin razonar. Se opta, por tanto, por introducir una última sesión que trabaje el momento tecnológico-teórico de forma que los alumnos puedan justificar de forma deductiva los EM41 (suma del área de dos cuadrados desiguales colocando sus lados de forma que formen un recto), EM42 (si en un trángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, el ángulo comprendido por los lados restantes es recto), EM43 (fórmula para obtener el cateto desconocido de un triángulo rectángulo) y EM44 (fórmula para obtener la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus lados) a partir del EG 9 (Teorema de Pitágoras).

Así, el objetivo principal de la sesión es justificar los EM utilizados para el cálculo de los lados desconocidos de un triángulo rectángulo necesarios para llevar a cabo la modelización M_3, por lo que la sesión estará dominada principalmente por el momento tecnológico-teórico.

Durante la sesión los estudiantes se enfrentarán por primera vez a la demostración informal del Teorema de Pitágoras obtenido por inducción en la sesión 17. Esta cuestión a abordar se corresponde con el Nivel 3 de Van Hiele y es nueva dentro del REI. Se espera que los alumnos lleguen a las diferentes demostraciones combinando el razonamiento individual, el razonamiento en grupos cooperativos y el razonamiento en gran grupo.

Se espera que durante la sesión se aborden las siguientes cuestiones y respuestas:

Q_{31}: ¿Se pueden generar ternas proporcionales igualmente válidas mediante las técnicas de proporcionalidad?

Q_{32}: ¿Existen otras ternas que no provengan de la terna 3,4,5 y que también generen un triángulo rectángulo?

Q_{33}: ¿Hay algún método de comprobación que permita asegurar que dados los tres lados de un triángulo este es rectángulo?

Q_{34}: Si conocemos dos lados de un triángulo rectángulo, ¿podemos calcular el lado desconocido a partir del Teorema de Pitágoras?

Q_{35}: ¿Podemos asegurar que un triángulo es rectángulo si sus lados verifican el Teorema de Pitágoras?

Se espera que dichas cuestiones se resuelvan haciendo uso de las respuestas:

R_{28}: Obtención del Teorema de Pitágoras a partir de ternas pitagóricas conocidas.

R_{29}: Obtención de lados desconocidos en un triángulo rectángulo mediante técnicas aritméticas o algebraicas.

3. Descripción de la sesión

La clase comienza recordando que para conseguir el objetivo inicial de dividir la parcela del colegio en 27 trozos iguales es necesario ser capaz de trazar en el macro-espacio cuadrados de 740 metros cuadrados y que la única forma de conseguir cuadrados es ser capaz de trazar ángulo rectos. Una vez recordada la importancia clave de trazar ángulos rectos se recuerdan los logros obtenidos al inducir las fórmulas del Teorema de Pitágoras y su desarrollo posterior en dos EM que permiten obtener el lado desconocido de un triángulo rectángulo.

Se plantea, por parte del profesor, la necesidad de demostrar el Teorema de Pitágoras para cualquier dimensión de sus lados y para poder abordar este tema se plantea realizar un recorrido por el proceso histórico seguido hasta su demostración.

Se comienza planteando la hipótesis de cómo se puede obtener la terna 3, 4, 5 sin conocer el Teorema de Pitágoras. Para ello se explica que los egipcios utilizaban varas de medir del mismo tamaño y que si intentamos construir un triángulo rectángulo con varas fijas el primer triángulo que aparece es el que tiene por lados 3, 4 y 5 varas respectivamente. Se pide a los grupos que intenten construir un triángulo rectángulo a partir de un estuche de rotuladores (EP 49 trazar un triángulo a partir de sus lados). Los grupos comprueban que si intentan construir un triángulo rectángulo utilizando una terna diferente los triángulos solo se pueden construir si la suma de los dos lados menores es mayor que el lado mayor (EM 19 construir un triángulo dados tres segmentos pero necesariamente dos de los segmentos dados tomados juntos de cualquier manera deben ser mayores que el restante) y que el triángulo así construido no será rectángulo salvo en el caso que utiliza 3, 4 y 5 rotuladores respectivamente para construir los lados del triángulo.

Figura 171. Construcción de un triángulo rectángulo utilizando segmentos iguales (rotuladores). Elaboración propia.

Una vez aclarado el origen de la terna 3, 4, 5 se explica que probablemente el descubrimiento de otras ternas proporcionales y no proporcionales se produjo de la misma manera experimental. A partir de esta ternas y de un proceso similar al realizado en la clase se sabe que la fórmula conocida como Teorema de Pitágoras puede ser obtenida mediante inducción.

Una vez definida la fórmula, cateto cuadrado más cateto cuadrado igual a hipotenusa cuadrado, el profesor plantea que se pueden interpretar esos cuadrados de la formula geométricamente como cuadrados y que por tanto la fórmula utilizada representa que cuando construimos tres cuadrados que tengan por lado la longitud de los catetos y de la hipotenusa, la suma de las superficies de los cuadrados obtenidos a partir de los catetos será igual a la superficie del cuadrado obtenida a partir de la hipotenusa (EM 41 suma del área de dos cuadrados desiguales colocando sus lados de forma que formen un recto), y EM 42 (si en un trángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, el ángulo comprendido por los lados restantes es recto). Para apoyar esta explicación geométrica el profesor aporta dos puzzles en cartón pluma para poder realizar una demostración del Teorema de Pitágoras mediante descomposición y recomposición de los cuadrados formados a partir de los lados del triángulo rectángulo.

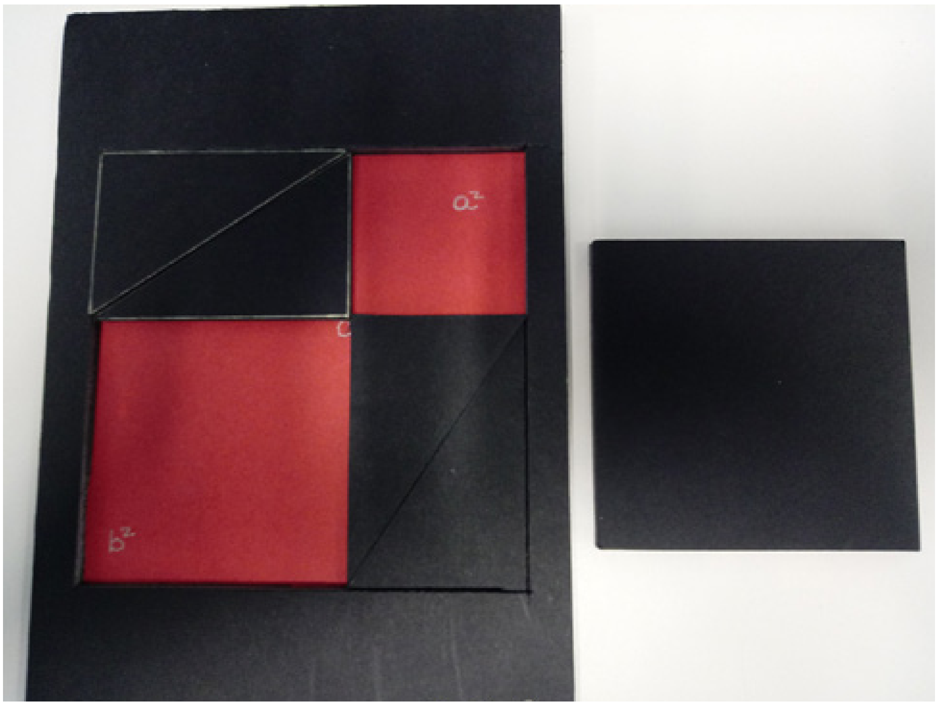


Figura 172. Material manipulativo 1 para comprobar el Teorema de Pitágoras (catetos al cuadrado). Elaboración propia.

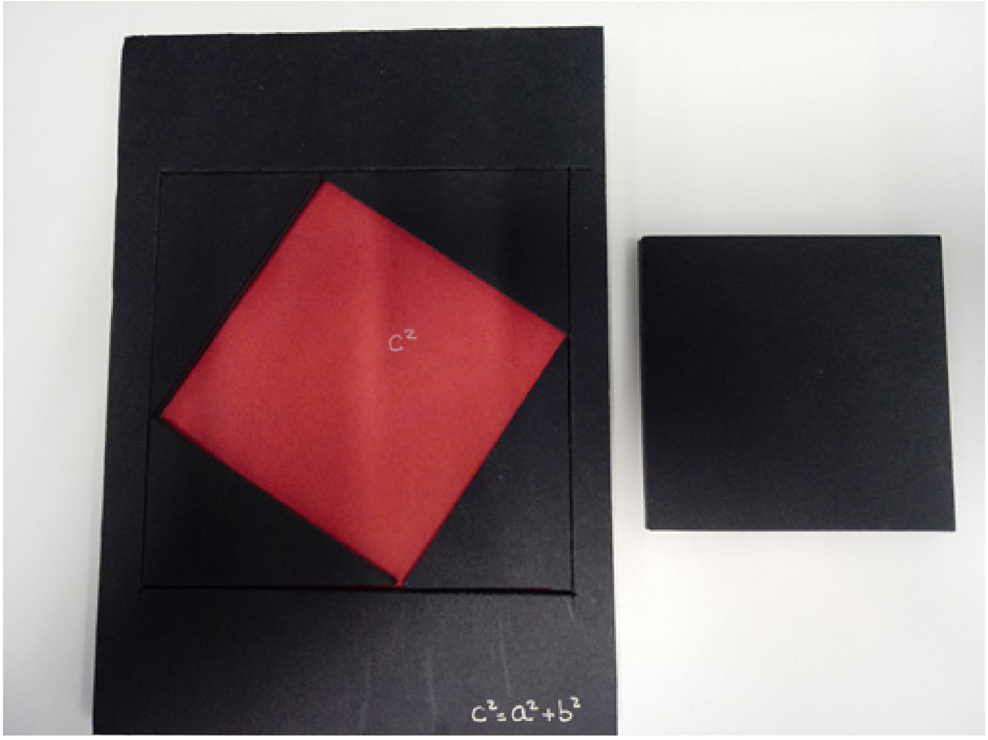


Figura 173. Material manipulativo 1 para comprobar el Teorema de Pitágoras (hipotenusa al cuadrado). Elaboración propia.

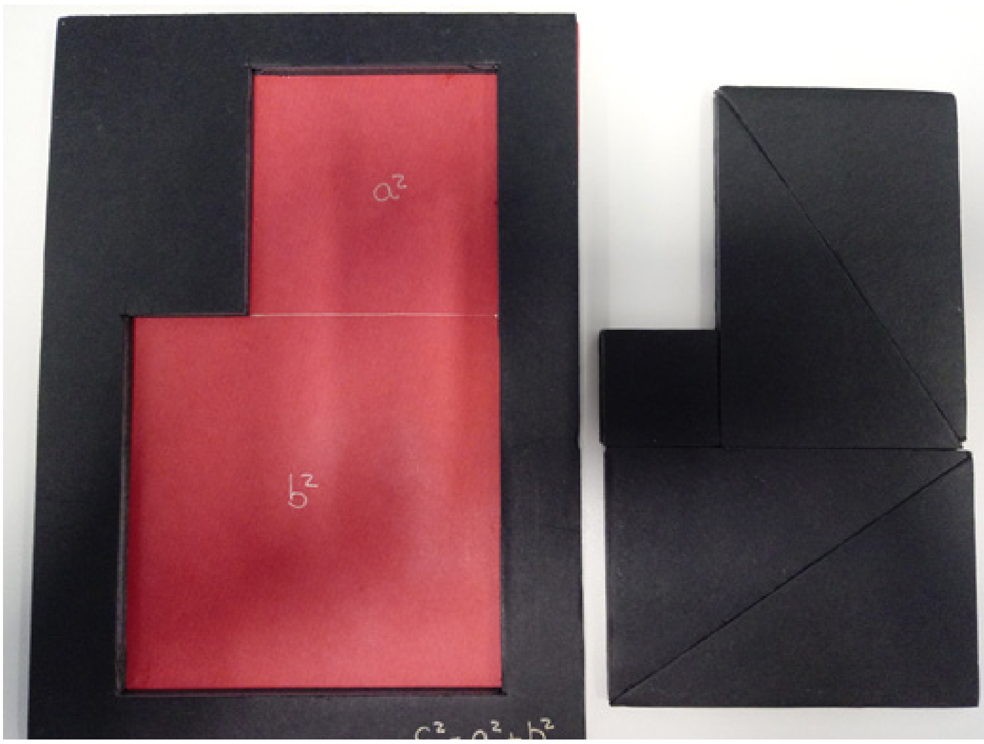


Figura 174. Material manipulativo 2 para comprobar el Teorema de Pitágoras (catetos al cuadrado). Elaboración propia.

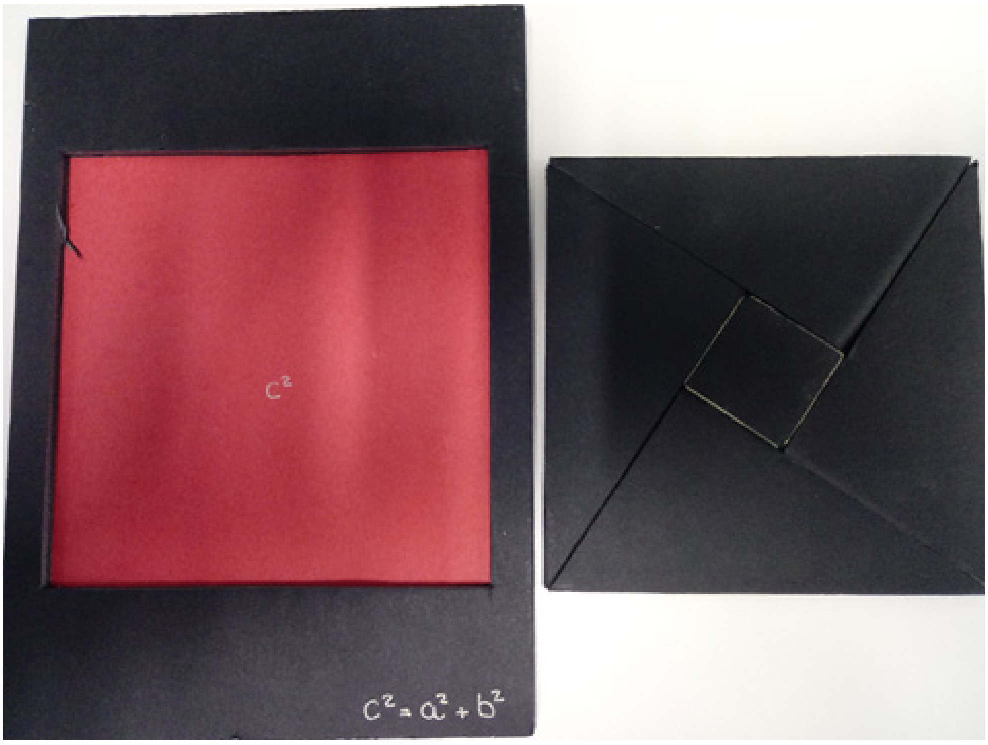


Figura 175. Material manipulativo 2 para comprobar el Teorema de Pitágoras (hipotenusa al cuadrado). Elaboración propia.

En el siguiente diálogo vemos la explicación del material manipulativo que tendrán los grupos para realizar la demostración del Teorema de Pitágoras:

Profesor: Vamos a construir primero un cuadrado utilizando la hipotenusa como lado. ¿Cuál sería el cuadrado que nace de esta hipotenusa? Aquí lo vemos.

Figura 176. Explicación del material manipulativo 2 en la que se muestra que uno de los lados representa el cuadrado construido a partir de la hipotenusa. Elaboración propia.

Si yo levanto un cuadrado desde la hipotenusa de este triángulo rectángulo tendría este cuadrado. Ahora si yo levanto un cuadrado desde el cateto menor… Me saldría este.

Figura 177. Explicación del material manipulativo 2 en la que se muestra que uno de los lados representa el cuadrado construido a partir del cateto menor Elaboración propia.

Y si yo levanto un cuadrado desde el cateto mayor… Me saldría este.

Figura 178. Explicación del material manipulativo 2 en la que se muestra que uno de los lados representa el cuadrado construido a partir del cateto mayor Elaboración propia.

El Teorema de Pitágoras lo que dice es que la suma del área del cuadrado construido a partir del cateto menor más la suma del área del cuadrado construido a partir del cateto mayor tienen que ser igual al área del cuadrado construido a partir de la hipotenusa. (Muestra los dos lados del material)

Figura 179. Explicación del material manipulativo 2 en la que se muestra los dos lados del material. Elaboración propia.

La demostración que vamos a intentar realizar consiste en resolver los puzzles de ambos lados del material utilizando las mismas piezas. Si las piezas son las mismas y me permiten rellenar ambos lados podemos asegurar que la suma de los cuadrados de los catetos será igual a la suma del cuadrado construido sobre la hipotenusa y dado que podemos fabricar este puzzle utilizando cualquier triángulo rectángulo habremos demostrado que el teorema de Pitágoras obtenido en las sesiones anteriores a partir de las ternas es válido en cualquier caso.

A continuación se deja a los grupos cooperativos el material manipulativo para que puedan comprobar por ellos mismos y de forma manipulativa la veracidad del Teorema de Pitágoras. Cuando todos los grupos han comprobado que se verifica, el profesor realiza una puesta en común con la solución.

Figura 180. Demostración del Teorema de Pitágoras en gran grupo con el material manipulativo 2. Elaboración propia.

Se aprovecha la puesta en común para demostrar mediante otro puzzle diferente (material manipulativo 1) la demostración del Teorema de Pitágoras. Por falta de tiempo no se deja a los alumnos tiempo para resolverlo ellos mismos.

Figura 181. Demostración del Teorema de Pitágoras en gran grupo con el material manipulativo 1. Elaboración propia.

Por último y para finalizar la sesión con una demostración más visual se proyecta en la pizarra digital un vídeo con la demostración del Teorema de Pitágoras a partir del volcado del líquido contenido en un cuadrado formado a partir de la hipotenusa en dos recipientes cuadrados obtenidos a partir de los catetos.

Figura 182. Demostración visual del Teorema de Pitágoras. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=nWGWByVKBIg

4.2. Análisis e interpretación cualitativa de la experimentación realizada.

A lo largo del capítulo 4 hemos ido realizando una descripción detallada de las sesiones de clase. En este apartado vamos a analizar, desde un punto de vista cualitativo, los aspectos encontrados durante la experimentación del REI y vamos a interpretar, desde los planteamientos propuestos desde la TAD, lo ocurrido durante el transcurso de la misma.

4.2.1. La topogénesis: Cambiar el rol del profesor y del alumno

El primer aspecto que vamos a analizar son los cambios de rol que se han producido durante la experimentación en los roles del profesor y de los alumnos.

4.2.1.1. Profesor

El profesor que ha dirigido las sesiones que se han descrito tiene un rol de mediador y guía a lo largo del proceso y cede el protagonismo y la responsabilidad del aprendizaje a los estudiantes. A lo largo de las sesiones, como se puede ver en la descripción de las mismas, el profesor se interesa por los procesos de razonamiento que están teniendo lugar en los grupos cooperativos y en las reflexiones en gran grupo. En la mayoría de los casos, el profesor abre el diálogo desde una pregunta y establece una conversación con los estudiantes cediéndoles el protagonismo y respondiendo a las preguntas con nuevas preguntas que les permitan verbalizar sus ideas y contrastarlas con las de los compañeros. Tenemos ejemplos de este cambio en los diálogos recogidos y descritos en el capítulo 4.

Además de este cambio, a la hora de introducir y gestionar las preguntas que dan lugar al proceso de estudio e investigación, el profesor de la experimentación muestra una actitud no lineal hacia la investigación que se está llevando a cabo y no tiene inconveniente en:

- Volver a realizar un ejercicio, como cuando se baja a medir de nuevo el aula TIC (sesión 4).
- Dejar que los estudiantes sigan una línea de razonamiento equivocada hasta que caigan en la cuenta de sus errores, como cuando se intenta obtener el área a partir del perímetro (sesión 9).
- Aceptar las diferentes aportaciones de los estudiantes e incorporarlas al desarrollo

de la investigación, como cuando se acepta la inclusión de imágenes obtenidas desde Google Maps® (sesión 6).

- No tomar partido cuando se plantean dos métodos alternativos de resolución, como en la sesión 15 a la hora de decidir entre el método A y el método B propuestos.

Un ejemplo del cambio de rol lo tenemos cuando comparamos el carácter directivo y de respuesta cerrada que se produce en la sesión 18 ante la presión de preparar a los estudiantes para el examen y el carácter dialogante y de descubrimiento compartido que se produce en la inducción de las fórmulas para calcular el área de las figuras planas que se desarrolla en la sesión 12.

4.2.1.2. Estudiantes

Los cambios señalados para el profesor también afectan a los estudiantes. A lo largo de la experimentación estos han asumido nuevas responsabilidades y han mantenido una actitud mucho más abierta y crítica hacia lo que se estaba planteando y han ejercido un papel más activo tanto en las actividades que se llevaban a cabo en gran grupo como en las actividades que se llevaban a cabo en grupos cooperativos o de forma individual. Los estudiantes, como se ve en la sesión 17, han realizado actividades que requieren un rol mucho más activo y dónde la experimentación y la manipulación tienen un papel importante. La participación en las puestas en común es muy alta llegando, como en la sesión 9, a participar hasta 9 estudiantes en la construcción de una respuesta a una pregunta.

Además de la participación y del papel activo, en muchas sesiones se detecta cómo los estudiantes afrontan las preguntas y tratan de buscar sus propias respuestas a pesar de las dificultades asociadas a la falta de conocimientos previos, especialmente de álgebra (sesiones 12, 13 ó 17).

Otro ejemplo de cambio de rol en los estudiantes lo tenemos en los diálogos recogidos en las sesiones dónde son los propios estudiantes los que producen nuevas respuestas a la pregunta generatriz (sesión 1), plantean nuevas preguntas no previstas por el profesor (sesión 11) e introducen obras nuevas en el medio suministrado por el profesor (sesión 2).

En la experimentación del REI realizada podemos ver cómo el cambio de rol en el profesor y en los alumnos enriquece el proceso de obtención de la respuesta deseada a la cuestión generatriz con las aportaciones del profesor y de los estudiantes y cómo no son excluidas las obras, respuestas y preguntas que van surgiendo como resultado de la investigación gracias a este cambio de roles.

4.2.2. Cronogénesis: Modificar el tiempo de estudio.

El tiempo de estudio es una de las variables más restrictivas a la hora de llevar a cabo un proceso de estudio e investigación. En las sesiones llevadas a cabo en la experimentación del REI vemos cómo se producen cambios importantes en el tiempo de estudio si comparamos el desarrollo de las sesiones descritas con el desarrollo de una clase tradicional mediada por un libro de texto. El esquema habitual de una clase tradicional se organiza en torno a sesiones que suelen ser autoconclusivas y que se suceden linealmente hasta que finaliza el tema objeto de estudio. Un esquema general de esta organización en temas divididos en apartados que se abordan en una sesión podría resumirse de la siguiente manera: presentación de la teoría por parte del profesor, resolución de ejercicios paso a paso por parte del profesor relativos a la teoría vista, resolución de dudas, trabajo individual de ejercicios similares a los explicados, resolución de los ejercicios individuales en la pizarra y trabajo de ejercicios similares para realizar en casa a modo de repaso. Frente a este esquema, en las sesiones vistas en la experimentación, podemos ver los siguientes cambios:

- El proceso de estudio no es lineal y es abierto. Como vemos en las sesiones 17 y 18, el estudio e investigación se aparta en ocasiones de lo previsto en el REI a priori.
- Durante el proceso se exploran y tantean muchos caminos antes de llegar a una situación de consenso. Este proceso de exploración, como vimos en las sesiones 2, 3 y 4, dilata el tiempo de estudio.
- Aparecen preguntas derivadas no previstas que, aunque aportan sentido y significatividad a lo estudiado, pueden llevar a caminos sin salida o caminos que se alejan del tema objeto de estudio, como en las sesiones 3 y 8.

- El proceso es más dilatado ya que los estudiantes deben conjeturar, inducir, construir sus propios métodos y luego deben tener una actitud de revisión crítica hacia los mismos (sesión 17).
- El estudio es en ocasiones impredecible, lo que lleva a explorar caminos que pueden no ser los más optimizados en tiempo, como en los procesos de medición de las sesión 2.

En la experimentación del REI realizada se aprecia cómo el cambio del tiempo de estudio enriquece el proceso de obtención de la respuesta deseada a la cuestión generatriz, pero puede chocar con las necesidades de la institución de cumplir unos programas en un tiempo determinado programado para su estudio con antelación (sesión 18).

4.2.3. Mesogénesis: Cambiar el medio.

Para poder llevar a cabo un REI que permita dar respuesta a la cuestión generatriz es necesario que el profesor y los estudiantes se vayan enfrentando a las cuestiones que vayan surgiendo a partir de las respuestas establecidas disponibles en las redes de conocimiento. La elaboración del medio que permite dar respuesta a la cuestión generatriz comienza con un medio parcialmente construido por el profesor, en nuestro caso el REI diseñado a priori, y se completa con la investigación que lleva a cabo el grupo de estudiantes junto al profesor.

En la experimentación descrita del REI podemos observar cómo el medio que se fue construyendo en el transcurso del estudio y la investigación. Era un medio abierto que fue recogiendo las aportaciones de los alumnos y del profesor. Tenemos ejemplos de las mismas en las sesiones: helicóptero para tomar fotos áreas (sesión 1), uso de planos de evacuación (sesión 2), utilización de la maqueta del centro (sesión 1), uso de Google Maps® (sesión 6),… Adicionalmente, los profesores también contribuyeron a ese medio: uso de métodos mecánicos para calcular la superficie de la parcela (sesión 15), incorporación de ternas pitágoricas a partir de Internet (sesión 17), visualizado de demostraciones del Teorema de Pitágoras (sesión 20),...

Además de la incorporación de aportaciones de alumnos y profesores durante la experimentación, se ha hecho uso de múltiples fuentes y soportes, a saber, el uso de reglas de pizarra (sesiones 2 y 4), elementos de mobiliario del centro (sesión 4), cuerdas e hilos para medir (sesión 8), uso de las TIC (sesión 6) o el uso de materiales manipulativos (sesión 20).

Por último, durante la experimentación se incorporaron y se dejaron de estudiar obras, preguntas y respuestas que no estaban previstas, como la incorporación de los ejercicios de maximización (sesión 9), la construcción de expresiones con lenguaje prealgebraico para calcular las áreas de las figuras planas (sesión 11 y 12) o la medición de superficies a partir del volumen (sesión 15). Entre los temas que se dejaron de estudiar destaca la poca presencia de la Geometría sintética y las escasas apariciones de los ángulos y de las medidas angulares.

Así, durante la experimentación del REI realizada el medio fue abierto e incorporó obras, preguntas y respuestas no previstas que surgieron y ampliaron la investigación realizada y que se apoyaron en múltiples fuentes y soportes.

4.2.4. Aspectos del MER que se abordaron durante las sesiones.

En la descripción exhaustiva de las 20 sesiones realizadas durante la experimentación del REI cooperativo desarrollado se han señalado los diferentes elementos del MER que fueron abordados. A modo de resumen podemos decir que:

- Se observaron 60 EP de un total de 109 previstos lo que supone un 55,04%.
- Se observaron 27 EM de un total de 44 lo que supone un 61,36%.
- Los EM y EP observados pertenecían a 8 de los 9 EG previstos, un 88,8% del total.

En las siguientes tablas se incluye un resumen de todos los EG, EM y EP observados por sesión:

Tabla 34

EG abordados en las diferentes sesiones

EG/ N.º de sesión	EG 1	EG 2	EG 3	EG 4	EG 5	EG 6	EG 7	EG 8	EG 9
1	X	X		X				X	
2	X			X	X	X			
3	X	X				X			
4	X			X					
5	X			X		X			
6	X			X					
7	X			X					
8	X			X					
9	X	X							
10	X	X				X	X		
11	X	X				X	X		
12		X	X		X	X	X		
13		X	X				X		
14	X	X		X		X	X		
15	X	X		X		X	X		
16		X		X			X		
17									X
18									X
19		X		X			X		X
20					X				X
TOTAL	13	11	2	11	3	8	8	1	4

Elaboración propia.

Tabla 35

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 1

EM/ N.º de sesión	EM1	EM2	EM3
1			
2	EP2, EP8		
3	EP1, EP2, EP3, EP7, EP8, EP9		
4	EP1, EP2, EP7, EP8		
5	EP1		
6			
7	EP1, EP7		
8	EP1, EP7		
9	EP1, EP7		
10	EP1		
11	EP1		
12			
13			
14	EP1, EP4		
15	EP1		
16			
17			
18			
19			
20			
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	7/9	0/2	0/2

Elaboración propia.

Tabla 36

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 2

EM/ N.º de sesión	EM4	EM5
1		
2		
3	EP20	
4		
5		
6		
7		
8		
9	EP14, EP15, EP18	EP22
10	EP15, EP17, EP18, EP19, EP21	EP22
11	EP17, EP18	EP22
12		EP22
13	EP14, EP18	EP22
14	EP14, EP15, EP16, EP18, EP19	EP22
15	EP18	
16	EP14, EP15, EP 16, EP18, EP19	EP22
17		
18		
19	EP18	EP22
20		
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	8/8	1/1

Elaboración propia.

Tabla 37

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 3

EM/ N.º de sesión	EM6	EM7	EM8	EM9	EM10
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12			X Uso de la técnica para realizar EP91 no de una tarea asociada a ella		
13			X Uso de la técnica para realizar EP91 no de una tarea asociada a ella		
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	0/4	0/1	1/2	0/2	0/2

Elaboración propia.

Tabla 38

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 4

EM/ N.º de sesión	EM11	EM12	EM13
1			
2		EP38, EP39	
3			
4	EP37	EP39	
5	EP35, EP37	EP 38, EP39	
6	EP35, EP36		
7	EP36	EP38	
8	EP36	EP38	
9			
10			
11			
12			
13			
14	EP35, EP36	EP38	
15	EP35, EP36	EP38	EP40
16	EP35, EP36	EP38	EP40
17			
18			
19	EP36	EP38	
20			
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	3/4	2/2	1/2

Elaboración propia.

Tabla 39

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 5

EM/ Nº de sesión	EM14	EM15	EM16	EM17	EM18	EM19
1						
2		EP45				
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12	EP42, EP44					
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						EP49
Total de EP vistos respecto a los pre-vistos en el MER	2/3	1/1	0/1	0/1	0/1	1/3

Elaboración propia.

Tabla 40

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 6

EM/ Nº de sesión	EM20	EM21	EM22	EM23	EM24	EM25
1						
2				EP62		
3		EP57				
4						
5	EP53					
6						
7						
8						
9						
10	EP53		EP60			
11	EP54	EP 56	EP59, EP60, EP61			
12	EP52					EP70, EP71
13						
14	EP53	EP56, EP57	EP60			
15	EP53	EP56				
16						
17						
18						
19						
20						
Total de EP vistos respecto a los pre-vistos en el MER	3/3	2/4	2/3	1/1	0/9	2/4

Elaboración propia.

Tabla 41

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 7

EM/ N.º de sesión	EM26	EM27	EM28	EM29	EM 30	EM31	EM32	EM33	EM34
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10		EP77,EP78, EP84							
11	EP 76						EP 89		
12		EP 83	EP85	EP86	EP 87	EP88	EP 89	EP91	
13	EP76	EP77, EP80, EP81, EP82, EP83	EP 85	EP86	EP87	EP88	EP89	EP91	
14	EP76	EP77, EP78, EP83, EP 84		EP86					
15	EP76	EP80, EP81	EP85	EP86					
16	EP76	EP77, EP78, EP83, EP 84		EP86					
17									
18									
19		EP78, EP80, EP81	EP85	EP86				EP91	
20									
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	1/1	7/8	1/1	1/1	1/1	1/1	1/2	1/1	0/1

Elaboración propia.

Tabla 42

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 8

EM/ Nº de sesión	EM35	EM36	EM37	EM38	EM39	EM40
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
Total de EP vistos respecto a los previstos en el MER	0/1	0/1	0/1	0/1	0/2	0/2

Elaboración propia.

Tabla 43

EM y EP abordados en las diferentes sesiones de la EG 9

EM/ Nº de sesión	EM35	EM36	EM37	EM38
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17		EP103		
18			EP104, EP105, EP106, EP107	EP108. EP109
19			EP104	EP108
20	EP101	EP102, EP103		
Total de EP vistos respecto a los pre-vistos en el MER	1/1	2/2	4/4	2/2

Elaboración propia.

Las tablas anteriores nos muestran los diversos EP y EM que fueron observados a lo largo de la experimentación y nos permite ver como las primeras sesiones están orientadas hacia el trabajo de la medida de longitudes y de escalas de los datos obtenidos en el meso-espacio, como en las sesiones centrales ese trabajo evoluciona hacia la medida de superficies y hacia la obtención de las fórmulas de las figuras planas y como finalmente el trabajo se dirige hacia el Teorema de Pitágoras como elemento clave para el trazado de las medidas tomadas en el micro-espacio al macro-espacio. Del mismo modo se puede observar como las medidas angulares, los trazados haciendo uso de regla y compás o el trabajo a partir del Teorema de Tales tienen una importancia muy pequeña y cuando aparecen lo hacen de forma dispersa y puntual.

4.2.5. Aspectos del REI a priori que se trabajaron durante las sesiones.

En las sesiones descritas en el capítulo 4 se abordaron 30 de las de las 38 cuestiones, lo que supone un 78,94% y 25 de las 30 respuestas previstas, lo que supone un 83,33%.

Como puede verse en las siguientes tablas a lo largo de las sesiones se abordaron de forma sucesiva las 4 modelizaciones previstas y gran parte de la arborescencia de preguntas y respuestas.

Tabla 44

Modelizaciones abordadas

Modelización/ Número de sesión	M0	M1	M2	M3
1	X			
2	X			
3	X			
4	X	X		
5		X		
6	X	X		
7		X		
8		X		X
9		X	X	
10			X	
11			X	
12			X	
13			X	
14			X	
15		X	X	
16		X	X	
17			X	X
18				X
19		X	X	X
20				X
Total de sesiones en las que se trabaja cada una de las modelizaciones	5	9	10	5

Elaboración propia.

4.2.5.1. Cuestiones y respuestas abordadas por modelización

Tabla 45

Modelización M_0

Estadio/ Número de sesión	Cuestiones abordadas	Respuestas abordadas
1		
2	Q1, Q2, Q3	R1, R2, R3
3	Q7, Q8,	R7, R8
4	Q1, Q3	R2, R3
5		
6	Q1, Q2, Q3	R1, R2, R3
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
Total de cuestiones y respuestas vistas respecto a las previstas en el REI	5/8	5/8

Elaboración propia.

Tabla 46

Modelización M_1

Estadio/ Número de sesión	Cuestiones abordadas	Respuestas abordadas
1		
2		
3		
4	Q9, Q10	R9, R10, R11
5	Q9, Q10, Q11	R9, R10, R11, R12
6	Q9, Q10, Q11	R9, R10, R11, R12
7	Q10, Q12,Q13,	R10, R11, R13
8	Q10, Q12, Q13, Q14,	R10, R11, R13
9	Q14	
10		
11		
12		
13		
14		
15	Q12,	R11, R13
16	Q12	R11
17		
18		
19	Q10	R11
20		
Total de cuestiones y respuestas vistas respecto a las previstas en el REI	6/6	5/5

Elaboración propia.

Tabla 47

Modelización M_2

Estadio/ Número de sesión	Cuestiones abordadas	Respuestas abordadas
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9	Q15, Q16	R16
10	Q15, Q16, Q17, Q18,Q19,Q20	R14, R15, R16, R17, R18, R19
11	Q15, Q16, Q20, Q21, Q22,	R14, R16, R19, R20, R21, R22
12	Q17, Q22, Q23, Q24, Q25,	R14, R23, R24, R25, R26
13	Q15, Q16, Q17, Q20, Q21, Q22, Q23, Q24, Q25	R16, R19, R20, R22, R23, R24, R25, R26
14	Q15, Q16, Q17, Q21, Q22, Q23, Q24, Q25	R16, R19, R20, R22, R23, R24, R25, R26
15	Q26	
16	Q15, Q16, Q17, Q20, Q21, Q22, Q23, Q24, Q25, Q26	R16, R17, R18, R19, R20, R22, R23, R24, R25, R26
17	Q26	
18		
19	Q24, Q25	R25
20		
Total de cuestiones y respuestas vistas respecto a las previstas en el REI	12/14	13/13

Elaboración propia.

Tabla 48

Modelización M_3

Estadio/ Número de sesión	Cuestiones abordadas	Respuestas abordadas
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8	Q29	
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	Q29, Q30, Q31, Q32, Q33,	R27, R28
18	Q34,	R29
19		
20	Q31, Q32, Q33,Q34, Q35	R28 , R29
Total de cuestiones y respuestas vistas respecto a las previstas en el REI	7/10	3/4

Elaboración propia.

4.2.6. Momentos de estudio abordados durante las sesiones.

Los momentos de estudio han sido referentes, junto al MER y junto al REI, para describir las sesiones realizadas en el aula. Como se puede ver en la siguiente tabla todos ellos fueron abordados en distintos momentos del REI aunque en referencia a partes distintas de la obra..

Tabla 49

Momentos de estudio abordados

Momento de estudio/ Número de sesión	Momento del primer encuentro	Momento exploratorio	Momento del trabajo de la técnica	Momento tecno-lógico-teórico	Momento de la institucionaliza-ción	Momento de la evaluación
1	X					X
2	X	X				
3		X		X		
4	X		X			
5		X				
6						X
7			X		X	
8		X	X		X	
9					X	
10	X	X				
11				X		
12				X		
13			X		X	
14			X			
15			X		X	
16						X
17	X	X				
18			X		X	
19						X
20				X		
Total	5	6	7	4	6	4

Elaboración propia.

Como se puede ver en la tabla todos los momentos de estudio descritos por la TAD tuvieron su importancia durante la experiencia realizada, aunque destaca el momento de la técnica podemos decir de forma general que todos ellos tuvieron un peso similar durante las sesiones.

4.2.7. Técnicas cooperativas utilizadas durante las sesiones.

En la descripción de las sesiones se han ido señalando las técnicas cooperativas que se fueron empleando en las diferentes sesiones. En la siguiente tabla se muestran las técnicas observadas en cada sesión y se muestra cuándo se realizó parte del trabajo previsto mediante grupos cooperativos:

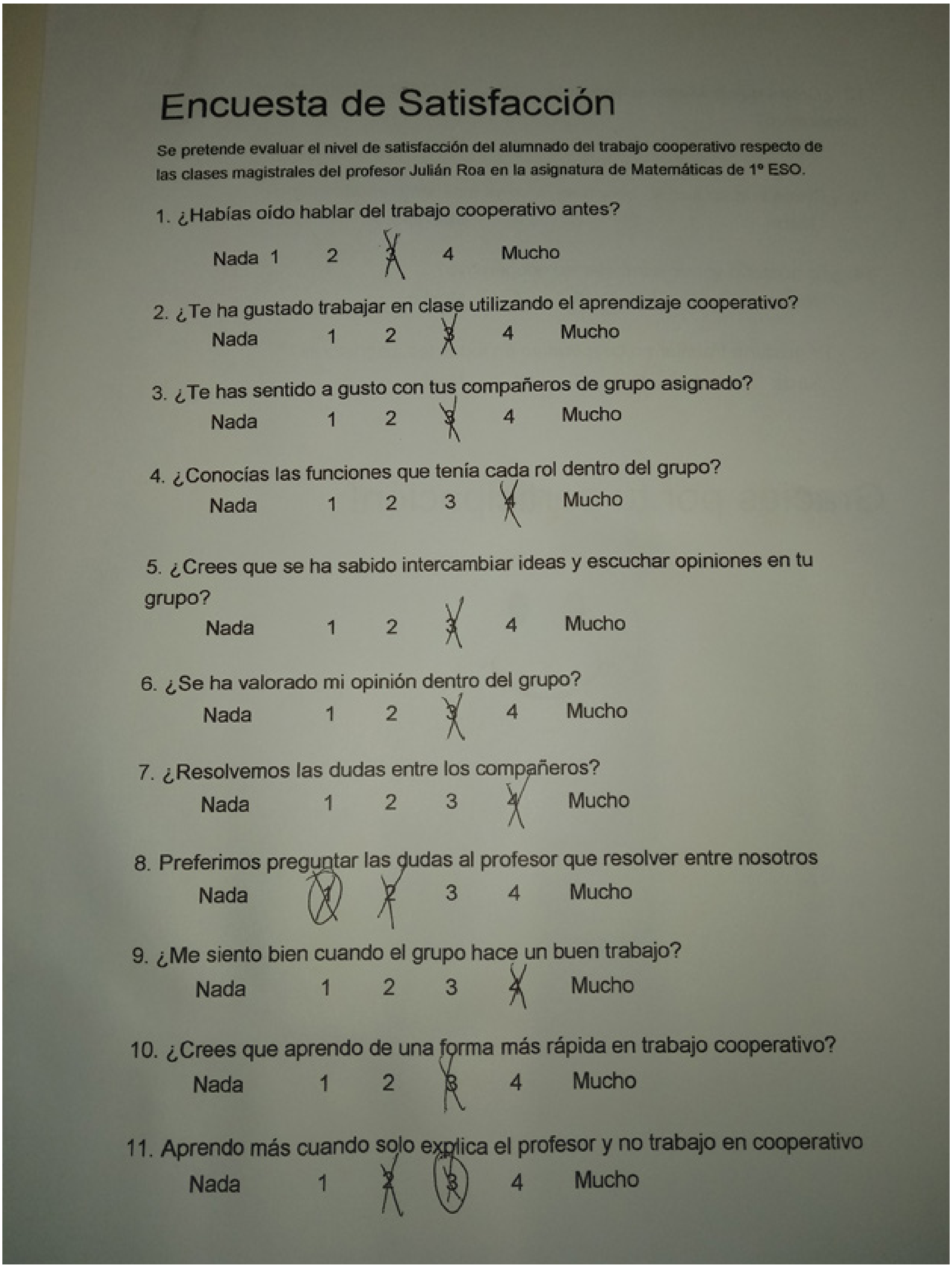
Tabla 50

Técnicas cooperativas utilizadas

Tećnica cooperativa/ Número de sesión	1-2-4	Lápices al centro	El número/ la frontera	Números iguales juntos/gemelos pensantes	Folio giratorio	Uno por todos	Trabajo por roles sin técnica asociada
1					X		X
2							X
3	X						X
4							X
5	X				X		X
6				X			X
7		X					X
8	X						X
9			X				X
10		X					X
11					X		X
12							X
13							X
14							X
15	X					X	X
16							
17	X						X
18				X		X	X
19							
20							X
Total	5	2	1	2	3	2	18

Elaboración propia.

El trabajo por roles y los debates y ayudas mutuas realizados durante el trabajo en grupos han sido un elemento importante para favorecer la participación y para permitir que las ideas que iban surgiendo como parte del proceso de estudio e investigación en los niveles individual y grupal fueran recogidas en el gran grupo y devueltas a los grupos para su comprensión individual. En las descripciones se ha visto cómo este flujo de lo individual a lo colectivo y de lo colectivo a lo individual ha sido ampliamente utilizado en la experiencia. También se considera de gran valor el uso de ciertas señales cooperativas como la del silencio o la de agruparse/desagruparse. El cuaderno de equipo, aunque fue recogido junto a las producciones individuales, tuvo un papel relevante en la experiencia y fue un documento muy útil para ir diseñando las sesiones de clase en función de los logros alcanzados y reflejados en este instrumento de evaluación continua. Durante las sesiones, los alumnos tuvieron que realizar como parte del aprendizaje cooperativo la coevaluación grupal del trabajo realizado por cada uno de los integrantes del grupo y una autoevaluación de lo que había supuesto la experiencia (Fig 183 y Fig. 184).



Encuesta de Satisfacción

Se pretende evaluar el nivel de satisfacción del alumnado del trabajo cooperativo respecto de las clases magistrales del profesor Julián Roa en la asignatura de Matemáticas de 1º ESO.

1. ¿Habías oído hablar del trabajo cooperativo antes?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

2. ¿Te ha gustado trabajar en clase utilizando el aprendizaje cooperativo?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

3. ¿Te has sentido a gusto con tus compañeros de grupo asignado?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

4. ¿Conocías las funciones que tenía cada rol dentro del grupo?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

5. ¿Crees que se ha sabido intercambiar ideas y escuchar opiniones en tu grupo?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

6. ¿Se ha valorado mi opinión dentro del grupo?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

7. ¿Resolvemos las dudas entre los compañeros?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

8. Preferimos preguntar las dudas al profesor que resolver entre nosotros

   Nada 1 2 3 4 Mucho

9. ¿Me siento bien cuando el grupo hace un buen trabajo?

   Nada 1 2 3 4 Mucho

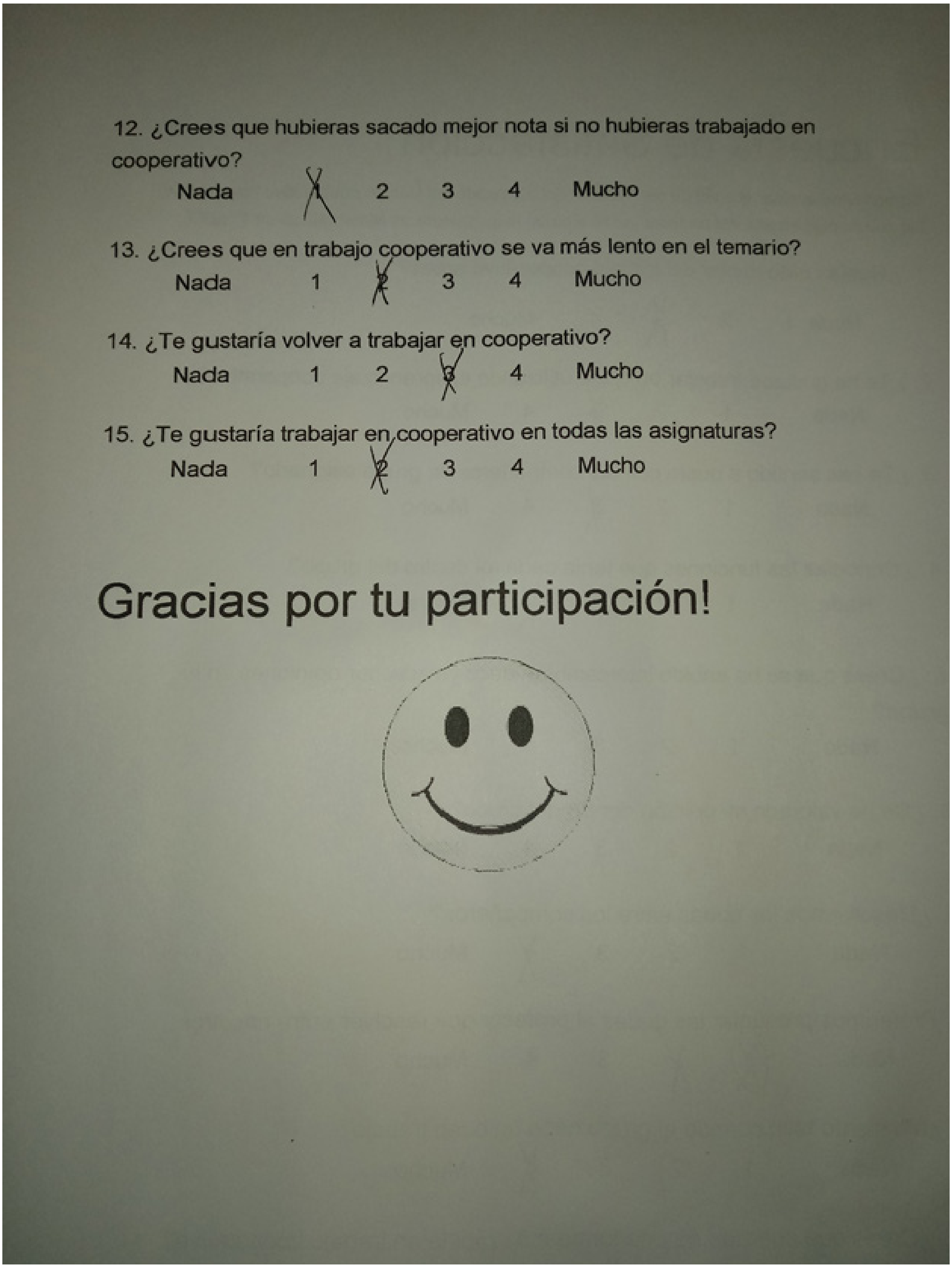
10. ¿Crees que aprendo de una forma más rápida en trabajo cooperativo?

    Nada 1 2 3 4 Mucho

11. Aprendo más cuando solo explica el profesor y no trabajo en cooperativo

    Nada 1 2 3 4 Mucho

Figura 183. Encuesta de autoevaluación sobre el trabajo cooperativo realizado. Elaboración propia.



12. ¿Crees que hubieras sacado mejor nota si no hubieras trabajado en cooperativo?

Nada 1 2 3 4 Mucho

13. ¿Crees que en trabajo cooperativo se va más lento en el temario?

Nada 1 2 3 4 Mucho

14. ¿Te gustaría volver a trabajar en cooperativo?

Nada 1 2 3 4 Mucho

15. ¿Te gustaría trabajar en cooperativo en todas las asignaturas?

Nada 1 2 3 4 Mucho

Gracias por tu participación!

Figura 184. Reverso de la encuesta de autoevaluación sobre el trabajo cooperativo realizado. Elaboración propia.

4.2.8. El cuestionamiento del mundo.

A lo largo de la experimentación se ha visto cómo los estudiantes tenían una actitud receptiva hacia las cuestiones abiertas y cómo se abordaban estas cuestiones dando respuestas que superaban las respuestas cerradas y preconstruidas habituales del enfoque monumentalista. En la experimentación los estudiantes no sólo construían respuestas, sino que las evaluaban de forma crítica. Las obras matemáticas aparecían como medio y herramienta para dar respuesta a la cadena de cuestiones que iban surgiendo y que no habían sido planificadas de antemano en su totalidad. En este último apartado del análisis cualitativo de la experimentación realizada vamos a comprobar los aspectos del alumno descrito por Chevallard (2013) para que se lleve a cabo una metodología de cuestionamiento del mundo que se han visto y descrito en las sesiones.

1. Actitud de ser herbartiano. La actitud abierta hacia el estudio de preguntas que no se saben responder de forma inmediata se ha observado especialmente en las diversas sesiones dominadas por el momento exploratorio (sesiones 2, 3, 5, 8 , 10 y 17). Las diversas modelizaciones abordadas por los estudiantes dan cuenta de la cadena de respuestas parciales y descubrimientos que van realizando los estudiantes hasta obtener la respuesta deseada que es válida dentro de la institución. La actitud de hacerse preguntas y de estudiar prolongadamente para obtener respuestas ha sido sucesivamente reflejada en los diálogos, avances y retrocesos descritos en las sesiones.
2. Actitud procognitiva. Durante la experimentación realizada se puede apreciar como los estudiantes se enfrentan repetidamente a la búsqueda de respuestas que demandan conocimientos que no son conocidos por los estudiantes. La medición de superficies en el macro-espacio, las diferencias entre la proporcionalidad de longitudes y superficies, la construcción de expresiones sin conocimientos de álgebra o la inducción del Teorema de Pitágoras a partir de ternas pitágoricas dan cuenta de la actitud procognitiva buscada.
3. Actitud exotérica. En las sesiones descritas se observa, especialmente en los cambios de modelización, la necesidad y el compromiso de estudiar indefinidamente

y de seguir buscando modelos de complejidad creciente para dar respuesta a las cuestiones abordadas. Un buen ejemplo de esta actitud la tenemos en la sesión 9 ante el descubrimiento de la imposibilidad de obtener el área a partir del perímetro.

4. Actitud de problematización. Cuestionar y formular nuevas preguntas es algo que va surgiendo a lo largo de la experimentación realizada. Esta actitud de "cuestionamiento del mundo" es especialmente visible en las sesiones donde se observa el rechazo a las soluciones no razonadas y mecánicas y el abandono de la actitud acrítica que se observa en varios momentos de la experimentación, como en la sesión 11, cuando se cuestionan y razonan las fórmulas para calcular superficies de figuras planas conocidas de otros cursos, o en la sesión 7, cuando a pesar de los cálculos realizados se cuestiona como imposible la medida obtenida para el lado de la parcela.

5. Actitud de enciclopedista ordinario. El enfoque epistemológico hacia el aprendizaje que se describe en la sesión 15 lleva implícita la búsqueda de una manera de aprender y la necesidad de estar abierto a nuevos conocimientos a pesar de no tener muchos conocimientos previos sobre el tema. Una cristalización de esa forma de aprender planteada por el profesor en la sesión 15 la tenemos en la inducción realizada por los grupos cooperativos de tres expresiones prealgebraicas para el Teorema de Pitágoras descrita en la sesión 17.

4.3. Análisis de los datos cuantitativos recogidos durante el estudio

En este apartado vamos a realizar un estudio estadístico de los datos obtenidos en la prueba de evaluación realizada en la sesión 19. Mediante un diseño pretest-postest vamos a completar el estudio de caso descriptivo realizado, describiendo y analizando el posible efecto que ha tenido sobre el rendimiento de la asignatura en términos de calificaciones en una prueba estandarizada basada en contenidos.

Las calificaciones obtenidas en los exámenes son una referencia interesante en nuestro estudio de caso y permiten aportar información relevante sobre un aspecto que es ampliamente reconocido por la comunidad educativa para explicar el rendimiento.

En Cascón (2000, p.8) se presentan algunas razones para considerar las calificaciones como forma de explicar el rendimiento académico:

> 1) Uno de los problemas sociales, y no sólo académicos, que están ocupando a los responsables políticos, profesionales de la educación, padres y madres de alumnos, y a la ciudadanía, en general, es la consecución de un sistema educativo efectivo y eficaz que proporcione a los alumnos el marco idóneo donde desarrollar sus potencialidades.
> 2) Por otro lado, el indicador del nivel educativo adquirido, en este estado y en la practica totalidad de países desarrollados y en vías de desarrollo, ha sido, sigue y probablemente seguirán siendo las calificaciones escolares. A su vez, éstas son reflejo de las evaluaciones y/o exámenes donde el alumno ha de demostrar sus conocimientos sobre las distintas áreas o materias, que el sistema considera necesarias y suficientes para su desarrollo como miembro activo de la sociedad.

Son muchas las variables que influyen en el rendimiento académico y en la adquisición de la competencia matemática de los estudiantes. El trabajo realizado durante las clases, las interacciones con los demás estudiantes, el proceso de estudio inductivo y deductivo llevado a cabo, las diferentes experiencias manipulativas y vinculadas a la vida cotidiana… son en sí mismas tan relevantes o más que el resultado obtenido en la resolución de la prueba de evaluación propuesta por el Departamento Didáctico. Sin embargo, y a pesar de considerar que la prueba propuesta no mide todos los aspectos relativos al rendimiento académico y a la adquisición de la competencia matemática, en las paginas siguientes vamos a centrarnos en el estudio cuantitativo de las calificaciones obtenidas en esa prueba para tener un dato más a considerar en nuestro estudio de caso descriptivo.

El grado de incidencia de la metodología desarrollada en el rendimiento es mucho mayor que el que puede medirse con la prueba propuesta, no obstante, dada la importancia de las calificaciones en nuestra sociedad y sistema educativo, creemos que es absolutamente necesario aportar un análisis detallado de todas las evidencias recogidas durante la investigación.

Para la realización de este análisis vamos a considerar los resultados de dos grupos, control y experimental, de 28 y 27 estudiantes respectivamente que cursaban 1º de la ESO en el centro en que se llevó a cabo la experiencia. En ambos grupos vamos a analizar y comparar los resultados obtenidos por los estudiantes antes y después de abordar el bloque de Geometría, considerando como pretest la nota media obtenida en todos los exámenes realizados con anterioridad por los estudiantes en la asignatura y como post-test la nota del examen que se centra en los contenidos tratados en nuestro trabajo en el aula.

4.3.1. Consideraciones relativas al diseño de los exámenes que se realizaban en el centro.

En el centro donde se realizó el estudio de caso, el sistema de calificación otorgaba un 40% de peso a los exámenes parciales, un 40% a los exámenes de evaluación y un 20% al trabajo diario y a la actitud de los estudiantes. Por ese motivo, a la hora de considerar los datos a tener en cuenta como pretest se decidió no incorporar a los mismos el 20% que correspondía a los apartados de trabajo diario y actitud.

En relación a los exámenes, el Departamento Didáctico utilizaba un sistema de evaluación continua, de forma que todas las pruebas se construían teniendo en cuenta todos los contenidos vistos con anterioridad en el curso. El peso relativo de los contenidos ya trabajados con anterioridad oscilaba dependiendo de la prueba entre el 40% y el 60%. Los exámenes parciales y los exámenes de evaluación no presentaban diferencias en su dificultad ni en su construcción, por lo que a la hora de considerar los datos se decidió tomar como pre-test la media obtenida en todos los exámenes anteriores.

Otro aspecto a tener en cuenta es que los exámenes se realizaban siempre a la misma hora en todos los grupos y que la prueba presentada a los alumnos era elaborada de forma conjunta y consensuada por el Departamento Didáctico.

En relación al postest debemos decir que como se mostró en la sesión 19 los cuatro primeros puntos del examen realizado eran relativos a los contenidos ya vistos por los estudiantes y que por tanto se analizarán de forma separada al resultado obtenido en los seis puntos relativos a la parte de Geometría. Este diseño de la prueba es interesante para nuestro estudio ya que nos permite añadir un elemento más a analizar y nos permite, discriminar mejor si se produjo algún aumento o bajada de rendimiento general y qué parte del resultado del examen se puede atribuir a los conocimientos previos y qué parte a los nuevos conocimientos.

Respecto a las preguntas planteadas en el examen, en términos generales podemos decir que se trata de un modelo clásico de examen centrado en evaluar la adquisición de contenidos algorítmicos y en los procedimientos, sin contemplar otros aspectos clave de la competencia matemática como la aplicabilidad a situaciones de la vida cotidiana o la capacidad de utilizar razonamientos inductivos o deductivos para justificar o demostrar las afirmaciones y conclusiones obtenidas. También es importante señalar que en ningún momento se plantean ejercicios en los que sea relevante medir o realizar tareas sintéticas de algún tipo.

4.3.2. Consideraciones relativas al rendimiento en el bloque de Geometría.

A la hora de realizar este análisis hay que tener en cuenta que existen diferencias en el rendimiento en función del contenido evaluado. Como se vio en el capítulo 1, los resultados de pruebas de evaluación externas muestran una disonancia entre la competencia matemática adquirida con respecto al bloque de Números y operaciones y la relativa al bloque de Geometría. En este estudio cuantitativo se va a comparar el resultado obtenido en los exámenes precedentes con el resultado obtenido en una prueba posterior a la intervención. En este caso, todos los exámenes anteriores habían evaluado el bloque de contenidos relativo a los Números y sus operaciones. En cambio, en la prueba utilizada como post-test se incluían contenidos relativos al bloque de Geometría. El cambio en el tipo de contenidos evaluado debe ser considerado a la hora de analizar los datos obtenidos.

El conjunto de pruebas analizadas en el capítulo 1 indica que el rendimiento en los contenidos de Geometría no es del todo comparable al rendimiento obtenido en otros bloques de contenido, como el bloque de Números. Parece existir una cierta evidencia que indica que el rendimiento esperado en España para el bloque de Geometría será inferior al rendimiento obtenido por los mismos sujetos en los bloques relativos a Números.

En el trabajo de análisis cuantitativo de los datos recogidos en esta investigación, asumimos que el resultado esperado al comparar la media de las notas obtenidas en los exámenes anteriores (relativos a los contenidos de Números) y la nota obtenida en el examen realizado tras la intervención (relativo al bloque de Números y al bloque de Geometría) dará como resultado un descenso en la calificación obtenida en el post-test. Este descenso se debería producir como consecuencia de un descenso en la calificación obtenida en el bloque de Geometría.

Para poder valorar mejor el rendimiento en el post-test, además del resultado global en la prueba se analizarán por separado las preguntas relativas a los contenidos sobre Números y las preguntas relativas a Geometría, en las que si ha podido tener efecto la intervención realizada.

4.3.3. Comparación estadística de las calificaciones obtenidas antes y después de la intervención.

Para llevar a cabo el análisis cuantitativo de la intervención realizada se seguirá un diseño cuasiexperimental pretest-postest basado en las calificaciones obtenidas en los diferentes exámenes realizados por dos grupos de alumnos del mismo centro. Como ya se ha dicho, para el estudio utilizaremos como pre-test la nota que se obtiene al hacer la media de todas las calificaciones obtenidas por los estudiantes en los distintos exámenes parciales y de evaluación realizados hasta el momento de la intervención. Como post-test utilizaremos las calificaciones obtenidas en las dos partes en las que se puede dividir el examen realizado: la parte de contenidos ya vistos y relativos al bloque de Números y la parte de contenidos nuevos relativos a Geometría.

Esta prueba, como ya se ha explicado con anterioridad, se realiza tras 18 sesiones de intervención y fue elaborada por el Departamento Didáctico del centro y realizada el mismo día y a la misma hora por los dos grupos analizados. El examen fue corregido y calificado por los profesores del Departamento sin intervención del profesor investigador.

Consideramos como grupo experimental el grupo de 1º de la ESO dónde se llevó a cabo el REI y como grupo control un grupo de 1º de la ESO de características similares del mismo centro en el que se siguió una metodología tradicional.

Los datos recopilados serán sometidos a un análisis de varianza multivariante o MANOVA que servirá para verificar la influencia de los distintos niveles de varios factores en el comportamiento de una o más variables, en este caso se ha utilizado para comprobar tanto el efecto intra-sujetos (observando si hay cambios entre pretest y posttest) e inter sujetos, comparando el grupo en el que se ha realizado la intervención con el grupo en el que no se ha realizado.

Por otra parte, para analizar entre qué grupos existen diferencias se ha analizado el Test de Bonferroni como prueba "post hoc" ya que se ha verificado la homogeneidad de las varianzas.

Los datos obtenidos por el MANOVA y el test de Bonferroni se completarán con un análisis descriptivo de los parámetros estadísticos de centralización y dispersión recogidos en los dos grupos.

Para el análisis estadístico se emplean los siguientes programas informáticos:

- SPSS versión 24 para Windows
- Excell Profesional Plus 2010

El Departamento Didáctico suministró todos los datos necesarios para llevar a cabo este estudio.

4.3.4. Análisis del rendimiento en términos de calificaciones dentro del grupo control.

Para comenzar el análisis, presentamos la tabla con las calificaciones obtenidas por el grupo control:

Tabla 51

Calificaciones medias obtenidas en el conjunto de exámenes anteriores (pre-test) y calificación obtenida en el examen realizado tras el estudio del bloque de Geometría (post-test) por estudiante en el grupo control.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test
Alumno 1	7,07	6,75
Alumno 2	5,5	4,75
Alumno 3	7,11	8
Alumno 4	4,5	4,75
Alumno 5	6,79	5
Alumno 6	5,82	5
Alumno 7	5,36	8,25
Alumno 8	3,82	3,25
Alumno 9	4,46	3,25
Alumno 10	6,43	5,75
Alumno 11	5,39	4,5
Alumno 12	6,29	8,25
Alumno 13	6,11	4,5
Alumno 14	5,57	6
Alumno 15	3,43	2
Alumno 16	6,04	6
Alumno 17	3,61	3,25
Alumno 18	7,25	7,25
Alumno 19	5,25	5,75
Alumno 20	2,96	3
Alumno 21	7,50	8,75
Alumno 22	5,43	5,75
Alumno 23	4,93	5
Alumno 24	5,39	5,5
Alumno 25	6,11	
Alumno 26	4,79	6
Alumno 27	4,50	2,75
Alumno 28	6,18	9
Nota media	5,4854	5,4815

Elaboración propia

Para completar la primera aproximación estadística a los datos vamos a señalar la frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test y en el post-test:

Tabla 52

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test del grupo control

Calificaciones Pre-test grupo control	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)	1	3,6%	3,6%
[3,4)	3	10,7%	14,3%
[4,5)	5	17,9%	32,2%
[5,6)	8	28,6%	60,8%
[6,7)	7	25%	85,8%
[7,8)	4	14,2%	100%
[8,9)			
[9,10]			
Total Suspensos	9	32,2%	
Total Aprobados	19	67,8%	

Elaboración propia

Tabla 53

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el post-test del grupo control

Calificaciones Pre-test grupo control	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)	2	7,4%	7,4%
[3,4)	4	14,8%	22,2%
[4,5)	4	14,8%	37%
[5,6)	7	25,9%	62,9%
[6,7)	4	14,8%	77,7%
[7,8)	1	3,7%	81,4%
[8,9)	4	14,8%	96,3%
[9,10]	1	3,7%	100%
Total Suspensos	10	37,03%	
Total Aprobados	17	62,96%	

Elaboración propia

Analizando los datos anteriores, podemos observar que el alumno 25 no realizó la prueba de post-test y que se conserva la nota media del grupo control. Sin embargo se produce un aumento en la dispersión tras el trabajo con el bloque de Geometría que se traduce en un aumento ligero del número de suspensos. El porcentaje de aprobados desciende desde el 67.9% hasta el 62,96%. Si analizamos en detalle los datos relativos a los alumnos suspensos, que pasan a aprobar observamos que los alumnos 23 y 26 han evolucionado positivamente desde el suspenso hasta el aprobado y que en los alumnos 2, 11 y 13 la evolución ha sido a la inversa pasando de aprobar a suspender.

Si realizamos un análisis descriptivo de los datos el resultado en términos de media, desviación típica y coeficiente de variación (CV) de las notas pre-test y post-test los resultados son los siguientes:

Tabla 54

Análisis descriptivo del grupo control de 1º ESO en el pre-test y en el post-test

	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,4854	1,18	21,51%	28
Post-test	5,4815	1,91	34,84%	27

Elaboración propia

Mediante este análisis podemos observar cómo se ha producido un aumento importante en la dispersión entre el pre-test y el post-test. Los datos obtenidos, especialmente en el post-test, presentan una alta dispersión, lo que nos lleva a concluir que la media obtenida es poco representativa de los datos. Este resultado es coherente con la diversidad presente en los grupos heterogéneos de Educación Secundaria y con la variabilidad esperada en una única prueba de evaluación.

Si realizamos un análisis de centralización a partir de la mediana y los cuartiles obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 55

Medida de la centralización del Grupo control en el pre-test y en el post-test

	Percentil 25	Mediana	Percentil 75
Pre-test	4,57	5,46	6,26
Post-test	4,5	5,5	6,75

Elaboración propia

Vemos como el comportamiento de ambos grupos de datos es similar en el pre-test y en el post-test con una tendencia a la mejora de los resultados en la parte alta de los percentiles lo que parece señalar que aunque no hay mejora en la nota media los alumnos del primer percentil han empeorado sus notas y los del último percentil las han mejorado.

Es importante señalar que el desplazamiento en la mediana en 4 centésimas mantiene la mediana en el aprobado lo que supone que no haya muchos estudiantes que cambien su calificación de suspenso a aprobado.

A continuación vamos a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el post-test de los 28 alumnos del grupo control.

Tabla 56

Notas obtenidas en el pre-test y post-test del grupo control y diferencias entre ellas.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	7,07	6,75	-0,32
Alumno 2	5,5	4,75	-0,75
Alumno 3	7,11	8	0,89
Alumno 4	4,5	4,75	0,25
Alumno 5	6,79	5	-1,79
Alumno 6	5,82	5	-0,82
Alumno 7	5,36	8,25	2,89
Alumno 8	3,82	3,25	-0,57
Alumno 9	4,46	3,25	-1,21
Alumno 10	6,43	5,75	-0,68
Alumno 11	5,39	4,5	-0,89
Alumno 12	6,29	8,25	1,96
Alumno 13	6,11	4,5	-1,61
Alumno 14	5,57	6	0,43
Alumno 15	3,43	2	-1,43
Alumno 16	6,04	6	-0,04
Alumno 17	3,61	3,25	-0,36
Alumno 18	7,25	7,25	0
Alumno 19	5,25	5,75	0,5
Alumno 20	2,96	3	0,04
Alumno 21	7,50	8,75	1,25
Alumno 22	5,43	5,75	0,32
Alumno 23	4,93	5	0,07
Alumno 24	5,39	5,5	0,11
Alumno 25	6,11		
Alumno 26	4,79	6	1,21
Alumno 27	4,50	2,75	-1,75
Alumno 28	6,18	9	2,82
Nota Media	5,4854	5,4815	-0,0039

Elaboración propia

De los 28 alumnos del grupo control, 1 no realiza el post-test, 1 no cambia su nota, 13 mejoran la calificación del post-test con respecto al pre-test y 13 empeoran la calificación del post-test con respecto al pre-test. Lo que supone que 48,14% de los estudiantes mejoran su rendimiento y que un 48,14% de los estudiantes lo empeoran.

Tabla 57

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo control que mejoran sus resultados del pre-test al post-test y diferencia obtenida.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 3	7,11	8	0,89
Alumno 4	4,5	4,75	0,25
Alumno 7	5,36	8,25	2,89
Alumno 12	6,29	8,25	1,96
Alumno 14	5,57	6	0,43
Alumno 19	5,25	5,75	0,5
Alumno 20	2,96	3	0,04
Alumno 21	7,50	8,75	1,25
Alumno 22	5,43	5,75	0,32
Alumno 23	4,93	5	0,07
Alumno 24	5,39	5,5	0,11
Alumno 26	4,79	6	1,21
Alumno 28	6,18	9	2,82
Nota Media del subgrupo de alumnos que mejoran sus resultados	5,48	6,46	0,98

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que mejoran sus resultados tienen una nota media similar a la del grupo control en el pre-test descartando que la mejora de resultados se haya producido solo para alumnos de una determinada característica. La mejora promedio producida es de alrededor de un punto, lo que es muy relevante en términos académicos.

Destacan dentro de este grupo las subidas del alumno 7, del alumno 12 y del alumno 28 con subidas respectivas de 2,89, 1,96 y 2,82 puntos. En ninguno de estos casos se da la circunstancia de que fueran alumnos con una calificación promedio de suspenso lo que podría indicar que las mejoras más significativas se han producido en el cuartil superior como se había indicado anteriormente.

Si nos detenemos en los 13 alumnos que no han mejorado sus resultados, observamos lo siguiente:

Tabla 58

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo control que empeoran sus resultados del pre-test al post-test y diferencia obtenida.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	7,07	6,75	-0,32
Alumno 2	5,5	4,75	-0,75
Alumno 5	6,79	5	-1,79
Alumno 6	5,82	5	-0,82
Alumno 8	3,82	3,25	-0,57
Alumno 9	4,46	3,25	-1,21
Alumno 10	6,43	5,75	-0,68
Alumno 11	5,39	4,5	-0,89
Alumno 13	6,11	4,5	-1,61
Alumno 15	3,43	2	-1,43
Alumno 16	6,04	6	-0,04
Alumno 17	3,61	3,25	-0,36
Alumno 27	4,50	2,75	-1,75
Nota Media del subgrupo de alumnos que empeoran sus resultados	5,30	4,36	-0,94

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que empeoran sus resultados tienen una nota media ligeramente inferior a la del grupo control en el pre-test, lo que podría indicar que el empeoramiento de resultados se haya producido con más intensidad en el cuartil inferior. El empeoramiento promedio producido es de alrededor de un punto lo que es relevante en términos académicos y muy similar a la mejora producida en el grupo de estudiantes que mejoraron sus calificaciones.

Destaca dentro de este grupo que se hayan producido bajadas tan relevantes como las subidas ya comentadas. Señalamos a los alumnos 5, 13, 15 y 27 con bajadas respectivas de 1,79, 1,61, 1,43 y 1,75. En el caso del alumno 13 se da la circunstancia que era un alumno con una calificación promedio de aprobado que baja a suspenso.

Para finalizar el análisis de los datos obtenidos en el grupo control, vamos a estudiar con detalle los resultados en la parte de post-test relativos al bloque de Números y los resultados relativos al bloque de Geometría. Este análisis secundario es especialmente relevante para analizar la posible bajada de rendimiento en el bloque de Geometría y para valorar si la mejora en los resultados del bloque de Números se produce en igual medida en el grupo control. Como se indicó en el apartado precedente, el rendimiento esperado para la primera prueba de evaluación sobre el bloque de Geometría es que se produzca un descenso significativo en el rendimiento.

Tabla 59

Resultados en el pre-test y en el bloque de Números y en el bloque de Geometría del post-test en el grupo control

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test Números	Nota Post-test Geometría
Geometría	7,07	6,75	-0,32
Alumno 1	7,07	9,38	5
Alumno 2	5,5	6,88	3,33
Alumno 3	7,11	9,38	7,08
Alumno 4	4,5	7,50	2,92
Alumno 5	6,79	7,50	3,33
Alumno 6	5,82	6,88	3,75
Alumno 7	5,36	8,75	7,92
Alumno 8	3,82	6,25	1,25
Alumno 9	4,46	5,63	1,67
Alumno 10	6,43	8,13	4,17
Alumno 11	5,39	7,50	2,50
Alumno 12	6,29	10	7,08
Alumno 13	6,11	6,88	2,92
Alumno 14	5,57	8,13	4,58
Alumno 15	3,43	3,75	0,83
Alumno 16	6,04	8,75	4,17
Alumno 17	3,61	6,25	1,25
Alumno 18	7,25	8,75	6,25
Alumno 19	5,25	8,75	3,75
Alumno 20	2,96	5,63	1,25
Alumno 21	7,50	8,13	9,17
Alumno 22	5,43	6,25	5,42
Alumno 23	4,93	5	5
Alumno 24	5,39	7,50	4,17
Alumno 25	6,11		
Alumno 26	4,79	7,50	5
Alumno 27	4,50	5,63	0,83
Alumno 28	6,18	9,38	8,75
Nota Media	5,4854	7,4096	4,1977

Elaboración propia

Una primera conclusión del análisis de la prueba post-test confirma la bajada de rendimiento esperable en el bloque de Geometría, ya que tan solo 1 alumno consigue obtener una mejor nota en el bloque de Geometría que en el bloque de números, 1 alumno obtiene el mismo resultado y 25 alumnos obtienen un mejor resultado en el bloque de Números.

Como primera aproximación descriptiva a los datos desagregados, señalamos la frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test, en el post-test de números y en el post-test de Geometría:

Tabla 60

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test del grupo control

Calificaciones Pre-test grupo control	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)	1	3,6%	3,6%
[3,4)	3	10,7%	14,3%
[4,5)	5	17,9%	32,2%
[5,6)	8	28,6%	60,8%
[6,7)	7	25%	85,8%
[7,8)	4	14,3%	100%
[8,9)			
[9,10]			
Total Suspensos	9	32,1%	
Total Aprobados	19	67,9%	

Elaboración propia

Tabla 61

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el bloque de Números del post-test del grupo control

Calificaciones Post-test, bloque de números, grupo control	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)			
[3,4)	1	3,7%	3,7%
[4,5)			
[5,6)	4	14.8%	18,5%
[6,7)	6	22,2%	40,7%
[7,8)	5	18,6%	59,2%
[8,9)	7	25,9%	85,1%
[9,10]	4	14,8%	100%
Total Suspensos	1	3,7%	
Total Aprobados	26	96,3%	

Elaboración propia

Tabla 62

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el bloque de Geometría del post-test del grupo control

Calificaciones Post-test, bloque de geometría, grupo control	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)	2	7,4%	7,4%
[1,2)	4	14,8%	22,2%
[2,3)	3	11,1%	33,3%
[3,4)	4	14,8%	48,1%
[4,5)	4	14,8%	62,9%
[5,6)	4	14,8%	77,7%
[6,7)	1	3,7%	88,8%
[7,8)	3	11,1%	92,5%
[8,9)	1	3,7%	96,2%
[9,10]	1	3,7%	100%
Total Suspensos	17	63,00%	
Total Aprobados	10	37,00%	

Elaboración propia

Si analizamos los datos anteriores, podemos observar cómo se produce una mejora en la nota media de casi 2 puntos en el bloque de Números que se traduce en un aumento muy importante del número de aprobados, todos menos uno, en ese bloque y cómo se produce un empeoramiento en la nota media de 1,29 puntos en el bloque de Geometría tras el trabajo realizado en ese bloque. Al desagregar los datos en dos grupos se observa que la media se ha mantenido estable en el rendimiento del post-test gracias a una mejora muy notable en el resultado de los contenidos ya trabajados sobre el bloque de Números y que en relación al bloque de Geometría se observa un fuerte descenso que es coherente con lo descrito en el apartado precedente. Si nos fijamos únicamente en los resultados del pre-test y en los resultados del post-test del bloque de

Geometría observamos como se produce un fuerte aumento en el porcentaje de suspensos al evaluar el bloque de Geometría.

Un análisis en detalle de los datos relativos a los alumnos que han pasado de aprobar el pre-test a suspender el post-test sobre Geometría permite observar que los alumnos 2, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 16, 19 y 24 han evolucionado negativamente desde el aprobado hasta el suspenso y que tan solo los alumnos 23 y 26 han evolucionado de forma inversa, del suspenso al aprobado, como consecuencia de una mejora inferior a las 3 décimas.

Si realizamos un análisis descriptivo de los datos, el resultado en términos de media, desviación típica y CV de las notas pre-test, post-test del bloque de Números y post-test del bloque de Geometría el resultado obtenido es el siguiente:

Tabla 63

Análisis descriptivo del grupo control en el pre-test y en el pos-test del bloque de Números y en el post-test del bloque de Geometría

	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,4854	1,18	21,51%	28
Post-test Números	7,4074	1,52	20,52%	27
Post-test Geometría	4,1978	2,37	56,45%	27

Elaboración propia

Mediante este análisis podemos observar como tanto en el pre-test como en el post-test de Números los datos presentan una dispersión similar aunque elevada. Sin embargo, en el post-test sobre Geometría la dispersión de los datos obtenidos es mayor, lo que nos lleva a concluir que la media obtenida es poco representativa de los datos. Este resultado es coherente con la diversidad presente en los grupos heterogéneos de Educación Secundaria y con un descenso significativo de los resultados en el bloque de Geometría.

Si realizamos un análisis de centralización a partir de la mediana y los cuartiles obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 64

Medida de la centralización del grupo control en el pre-test y en los bloques de Números y de Geometría del pos-test

	Percentil 25	Mediana	Percentil 75
Pre-test	4,57	5,46	6,26
Post-test Números	6,25	7,5	8,75
Post-test Geometría	2,5	4,17	5,42

Elaboración propia

Vemos como el comportamiento de los grupos de datos difiere entre el pre-test y los diferentes post-test y a su vez entre estos. En el caso del post-test del bloque de Números vemos cómo se producen acusadas mejoras en todos los cuartiles, lo que indica una mejora de resultados en todos los niveles de rendimiento.

En el caso del post-test del bloque de Geometría vemos cómo se produce un descenso notable en todos los percentiles con respecto a los anteriores que se va atenuando según aumenta el percentil. Se observa, por tanto, una fuerte bajada de rendimiento que afecta de forma especialmente grave a los alumnos de percentiles más bajos.

A continuación vamos a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el post-test del bloque de números de los 28 alumnos del grupo control.

Tabla 65

Notas obtenidas en el pre-test y en el bloque de Números del post-test del grupo control y diferencias entre ellas.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test Números	Diferencia Post-test números- Pre-test
Alumno 1	7,07	9,38	2,31
Alumno 2	5,5	6,88	1,38
Alumno 3	7,11	9,38	2,27
Alumno 4	4,5	7,50	3
Alumno 5	6,79	7,50	0,71
Alumno 6	5,82	6,88	1,06
Alumno 7	5,36	8,75	3,39
Alumno 8	3,82	6,25	2,43
Alumno 9	4,46	5,63	1,17
Alumno 10	6,43	8,13	1,7
Alumno 11	5,39	7,50	2,11
Alumno 12	6,29	10	3,71
Alumno 13	6,11	6,88	0,77
Alumno 14	5,57	8,13	2,56
Alumno 15	3,43	3,75	0,32
Alumno 16	6,04	8,75	2,71
Alumno 17	3,61	6,25	2,64
Alumno 18	7,25	8,75	1,5
Alumno 19	5,25	8,75	3,5
Alumno 20	2,96	5,63	2,67
Alumno 21	7,50	8,13	0,63
Alumno 22	5,43	6,25	0,82
Alumno 23	4,93	5	0,07
Alumno 24	5,39	7,50	2,11
Alumno 25	6,11		
Alumno 26	4,79	7,50	2,71
Alumno 27	4,50	5,63	1,13
Alumno 28	6,18	9,38	3,2
Nota Media	5,4854	7,4096	1,9242

Elaboración propia

De los 27 alumnos del grupo control que hicieron la prueba todos ellos mejoran la calificación del post-test del bloque de Números con respecto al pre-test, lo que supone que el 100% de los estudiantes mejoran su rendimiento.

La mejora promedio producida es de 1,9242 puntos. Teniendo en cuenta que durante las sesiones previas a la prueba no se trabajaron esos contenidos, todo parece indicar que la dificultad de los contenidos preguntados fue inferior a otros exámenes o que al tratarse de una evaluación continua los alumnos estaban muy familiarizados con estas cuestiones.

Dentro de este grupo destaca la subida de los alumnos 4, 7, 12, 19 y 28 con subidas de 3, 3,39, 3,71, 3,5 y 3,2 puntos respectivamente. En el alumno 4 está subida permite pasar de una calificación promedio de suspenso a una calificación de aprobado.

Procedemos ahora a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el bloque de Geometría del post-test de los 27 alumnos del grupo control que realizaron la prueba post-test.

Tabla 66

Notas obtenidas en el pre-test y en el bloque de Geometría del post-test del grupo control y diferencias entre ellas.

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test Geometría	Diferencia Post-test de geometría- Pre-test
Alumno 1	7,07	5	-2,07
Alumno 2	5,5	3,33	-2,17
Alumno 3	7,11	7,08	-0,03
Alumno 4	4,5	2,92	-1,58
Alumno 5	6,79	3,33	-3,46
Alumno 6	5,82	3,75	-2,07
Alumno 7	5,36	7,92	2,56
Alumno 8	3,82	1,25	-2,57
Alumno 9	4,46	1,67	-2,79
Alumno 10	6,43	4,17	-2,26
Alumno 11	5,39	2,50	-2,89
Alumno 12	6,29	7,08	0,79
Alumno 13	6,11	2,92	-3,19
Alumno 14	5,57	4,58	-0,99
Alumno 15	3,43	0,83	-2,6
Alumno 16	6,04	4,17	-1,87
Alumno 17	3,61	1,25	-2,36
Alumno 18	7,25	6,25	-1
Alumno 19	5,25	3,75	-1,5
Alumno 20	2,96	1,25	-1,71
Alumno 21	7,50	9,17	1,67
Alumno 22	5,43	5,42	-0,01
Alumno 23	4,93	5	0,07
Alumno 24	5,39	4,17	-1,22
Alumno 25	6,11		
Alumno 26	4,79	5	0,21
Alumno 27	4,50	0,83	-3,67
Alumno 28	6,18	8,75	2,57
Nota Media	5,4854	4,1977	-1,2877

Elaboración propia

De los 27 alumnos del grupo control 6 mejoran la calificación del bloque de Geometría del post-test con respecto al pre-test, lo que supone un 22,2% de los estudiantes que mejoran su rendimiento. Teniendo en cuenta lo ya comentado sobre el rendimiento para el bloque de Geometría, que aumenten la nota 6 alumnos y que en algunos casos esas subidas sean mínimas se considera un hecho esperado.

Tabla 67

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo control que mejoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Geometría y diferencia obtenida

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test Geometría	Diferencia Post-test de geometría- Pre-test
Alumno 7	5,36	7,92	2,56
Alumno 12	6,29	7,08	0,79
Alumno 21	7,50	9,17	1,67
Alumno 23	4,93	5	0,07
Alumno 26	4,79	5	0,21
Alumno 28	6,18	8,75	2,57
Nota Media	5,84	7,15	1,31

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que mejoran sus resultados tienen una media superior a la del grupo control. Además, las dos subidas menores se corresponden con las notas más bajas en el pre-test de este grupo de alumnos, por lo que se puede atribuir la mejora a un grupo de alumnos con un rendimiento medio-alto. La mejora promedio producida es de 1,31 puntos.

Dentro de este grupo destaca la subida de los alumnos 7, 21 y 28 con subidas respectivas de 2,56, 1,67 y 2,57 puntos. En los tres casos se da la circunstancia que eran alumnos con una calificación promedio de aprobado.

Si analizamos ahora los 21 alumnos que no han mejorado sus resultados observamos lo siguiente:

Tabla 68

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo control que empeoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Geometría y diferencia obtenida

Grupo control	Nota Pre-test	Nota Post-test Geometría	Diferencia Post-test de geometría- Pre-test
Alumno 1	7,07	5	-2,07
Alumno 2	5,5	3,33	-2,17
Alumno 3	7,11	7,08	-0,03
Alumno 4	4,5	2,92	-1,58
Alumno 5	6,79	3,33	-3,46
Alumno 6	5,82	3,75	-2,07
Alumno 8	3,82	1,25	-2,57
Alumno 9	4,46	1,67	-2,79
Alumno 10	6,43	4,17	-2,26
Alumno 11	5,39	2,50	-2,89
Alumno 13	6,11	2,92	-3,19
Alumno 14	5,57	4,58	-0,99
Alumno 15	3,43	0,83	-2,6
Alumno 16	6,04	4,17	-1,87
Alumno 17	3,61	1,25	-2,36
Alumno 18	7,25	6,25	-1
Alumno 19	5,25	3,75	-1,5
Alumno 20	2,96	1,25	-1,71
Alumno 22	5,43	5,42	-0,01
Alumno 24	5,39	4,17	-1,22
Alumno 27	4,50	0,83	-3,67
Nota Media	5,35	3,35	-2

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que empeoran sus resultados tienen una media muy similar a la del grupo lo que indica que el empeoramiento de resultados se ha producido independientemente del rendimiento previo. El empeoramiento promedio producido es de 2 puntos lo que, aún siendo muy relevante, era un resultado esperable para el bloque de Geometría.

Destaca dentro de este grupo que se hayan producido bajadas tan relevantes como las subidas ya comentadas. Señalamos especialmente la bajada de los alumnos 5, 8, 9, 11, 13, 15, 17 y 27 con bajadas de 3,46, 2,57, 2,79, 2,89, 3,19, 2,6, 2,36 y 3,67 respectivamente. En el caso de los alumnos 5, 11 y 13 se da la circunstancia de que eran alumnos con una calificación promedio de aprobado que baja a suspenso.

4.3.5. Análisis del rendimiento en términos de calificaciones dentro del grupo experimental.

Para continuar con el estudio, vamos a presentar el análisis descriptivo de los datos obtenidos por el grupo experimental.

Tabla 69

Calificaciones medias obtenidas en el conjunto de exámenes anteriores (pre-test) y calificación obtenida en el examen realizado tras el estudio del bloque de Geometría (post-test) por estudiante en el grupo experimental.

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test
Alumno 1	4,07	2,5
Alumno 2	4,75	4,5
Alumno 3	3,5	4,5
Alumno 4	5,54	4,25
Alumno 5	4,54	4,5
Alumno 6	6,96	7,25
Alumno 7	6,46	9,5
Alumno 8	6,75	5,25
Alumno 9	4,68	4,75
Alumno 10	4,79	4,25
Alumno 11	4,63	5
Alumno 12	4,71	5
Alumno 13	4,89	6
Alumno 14	4,42	5
Alumno 15	2,04	1,25
Alumno 16	7,86	7
Alumno 17	4,32	6,25
Alumno 18	7,61	6,25
Alumno 19	6,32	7
Alumno 20	5,89	7,50
Alumno 21	5,86	5,5
Alumno 22	3,31	4,75
Alumno 23	4,81	4
Alumno 24	6,82	7,75
Alumno 25	3,3	5
Alumno 26	9,43	10
Alumno 27	7,93	6,75
Nota media	5,41	5,60
Nota Media	5,4854	4,1977

Elaboración propia

Para completar la primera aproximación estadística a los datos se calcula la frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test y en el post-test:

Tabla 70

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test del grupo experimental

Calificaciones Pre-test grupo experimental	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)	1	3,7%	3,7%
[3,4)	3	11,1%	14,8%
[4,5)	11	40,7%	55,5%
[5,6)	3	11,1%	66,6%
[6,7)	5	18,5%	85,1%
[7,8)	3	11,1%	96,2%
[8,9)			
[9,10]	1	3,7%	100%
Total Suspensos	15	55,5%	
Total Aprobados	12	44,5%	

Elaboración propia.

Tabla 71

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el post-test del grupo experimental

Calificaciones Post-test grupo experimental	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)	1	3,7%	3,7%
[2,3)	1	3,7%	7,4%
[3,4)			
[4,5)	8	29,6%	37%
[5,6)	6	22,2%	59,2%
[6,7)	4	14,8%	74,03%
[7,8)	5	18,5%	92,5%
[8,9)			
[9,10]	2	7,4%	100%
Total Suspensos	10	37,1%	
Total Aprobados	17	62,9%	

Elaboración propia.

Analizando los datos anteriores, podemos ver que se produce una mejora de 0,19 puntos en la nota media que se traduce en un aumento importante del número de aprobados tras la intervención. Sin embargo se produce un aumento en la dispersión tras el trabajo con el bloque de Geometría que se traduce en un aumento notable del número de aprobados. El porcentaje de aprobados asciende desde el 44.4% hasta el 62,96%. Si analizamos en detalle los datos relativos a los alumnos suspensos, que pasan a aprobar observamos que los alumnos11, 12, 13, 14, 17 y 25 han evolucionado positivamente desde el suspenso hasta el aprobado y que en el alumno 4 la evolución ha sido a la inversa pasando de aprobar a suspender.

Si realizamos un análisis descriptivo de los datos el resultado en términos de media, desviación típica y coeficiente de variación (CV) de las notas pre-test y post-test es el siguiente:

Tabla 72

Análisis descriptivo del grupo experimental de 1º ESO en el pre-test y en el post-test

	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,4144	1,68	31,05%	27
Post-test	5,6019	1,89	33,73%	27

Elaboración propia.

Mediante este análisis podemos observar cómo se ha producido un aumento en la dispersión entre el pre-test y el post-test. Los datos obtenidos presentan una alta dispersión, lo que nos lleva a concluir que la media obtenida es poco representativa de los datos. Este resultado es coherente con la diversidad presente en los grupos heterogéneos de Educación Secundaria y con la variabilidad esperada en una única prueba de evaluación.

Si realizamos un análisis de centralización a partir de la mediana y los cuartiles obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 73

Medida de la centralización del Grupo experimental en el pre-test y en el post-test

	Percentil 25	Mediana	Percentil 75
Pre-test	4,42	4,81	6,75
Post-test	4,5	5	7

Elaboración propia.

Vemos como el comportamiento de ambos grupos de datos es similar en el pre-test y en el post-test con una tendencia a la mejora de los resultados en todos los percentiles, lo que parece señalar que la mejora en la nota media detectada se ha producido en todos los cuartiles.

Es importante señalar que el desplazamiento en la mediana en 19 centésimas lleva a esta hasta al 5, lo que supone que muchos más estudiantes cambien su calificación del suspenso al aprobado.

A continuación vamos a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el post-test de los 27 alumnos del grupo experimental.

Tabla 74

Notas obtenidas en el pre-test y post-test del experimental y diferencias entre ellas.

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	2,5	-1,57
Alumno 2	4,75	4,5	-0,25
Alumno 3	3,5	4,5	1
Alumno 4	5,54	4,25	-1,29
Alumno 5	4,54	4,5	-0,04
Alumno 6	6,96	7,25	0,29
Alumno 7	6,46	9,5	3,04
Alumno 8	6,75	5,25	-1,5
Alumno 9	4,68	4,75	0,07
Alumno 10	4,79	4,25	-0,54
Alumno 11	4,63	5	0,37
Alumno 12	4,71	5	0,29
Alumno 13	4,89	6	1,11
Alumno 14	4,42	5	0,58
Alumno 15	2,04	1,25	-0,79
Alumno 16	7,86	7	-0,86
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 18	7,61	6,25	-1,36
Alumno 19	6,32	7	0,68
Alumno 20	5,89	7,50	1,61
Alumno 21	5,86	5,5	-0,36
Alumno 22	3,31	4,75	1,44
Alumno 23	4,81	4	-0,81
Alumno 24	6,82	7,75	0,93
Alumno 25	3,3	5	1,7
Alumno 26	9,43	10	0,57
Alumno 27	7,93	6,75	-1,18
Nota media	5,41	5,60	0,19

Elaboración propia.

De los 27 alumnos del grupo experimental, 15 mejoran la calificación del post-test con respecto al pre-test y 12 empeoran la calificación del post-test con respecto al pre-test. Lo que supone que un 55,55% de los estudiantes mejoran su rendimiento y que un 44,45% de los estudiantes lo empeoran.

Tabla 75

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que mejoran sus resultados del pre-test al post-test y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 3	3,5	4,5	1
Alumno 6	6,96	7,25	0,29
Alumno 7	6,46	9,5	3,04
Alumno 9	4,68	4,75	0,07
Alumno 11	4,63	5	0,37
Alumno 12	4,71	5	0,29
Alumno 13	4,89	6	1,11
Alumno 14	4,42	5	0,58
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 19	6,32	7	0,68
Alumno 20	5,89	7,50	1,61
Alumno 22	3,31	4,75	1,44
Alumno 24	6,82	7,75	0,93
Alumno 25	3,3	5	1,7
Alumno 26	9,43	10	0,57
Nota media	5,31	6,35	1,04

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que mejoran sus resultados tienen una media similar a la del grupo experimental en el pre-test, descartando que la mejora de resultados se haya producido solo para alumnos de una determinada característica. La mejora promedio producida es de alrededor de un punto.

Destacan dentro de este grupo las subidas del alumno 7, del alumno 17 y del alumno 25 con subidas respectivas de 3,04, 1,93 y 1,7 puntos. En los dos últimos casos se da la circunstancia que eran alumnos con una calificación promedio de suspenso.

Analizamos los 12 alumnos que no han mejorado sus resultados:

Tabla 76

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que empeoran sus resultados del pre-test al post-test y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	2,5	-1,57
Alumno 2	4,75	4,5	-0,25
Alumno 4	5,54	4,25	-1,29
Alumno 5	4,54	4,5	-0,04
Alumno 8	6,75	5,25	-1,5
Alumno 10	4,79	4,25	-0,54
Alumno 15	2,04	1,25	-0,79
Alumno 16	7,86	7	-0,86
Alumno 18	7,61	6,25	-1,36
Alumno 21	5,86	5,5	-0,36
Alumno 23	4,81	4	-0,81
Alumno 27	7,93	6,75	-1,18
Nota media	5,54	4,66	-0,88

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que empeoran sus resultados tienen una media similar a la del grupo experimental en el pre-test, descartando que el empeoramiento de resultados se haya producido solo para alumnos de una determinada característica. El empeoramiento promedio producido es de 0,88 puntos lo que, aún siendo relevante, no es tan acusado como la mejora producida en términos académicos en el grupo de estudiantes que mejoraron sus calificaciones.

Destaca dentro de este grupo que no se hayan producido bajadas tan relevantes como las subidas ya comentadas. Señalamos a los alumnos 1, 4, 8, 18 y 27 con bajadas respectivas de 1,57, 1,29, 1,5, 1,36 y 1,7. En el caso del alumno 4 se da la circunstancia que era un alumno con una calificación promedio de aprobado que baja a suspenso.

Para finalizar el análisis de los datos obtenidos en el grupo experimental, vamos a estudiar con detalle los resultados en la parte de post-test relativos al bloque de Números y los resultados relativos al bloque de Geometría. Este análisis secundario es especialmente relevante para analizar la intervención realizada basada en el REI. Como se indicó en el apartado precedente, el rendimiento esperado en la primera prueba de evaluación sobre el bloque de Geometría es que se produzca un descenso significativo en el rendimiento. Dado que ese descenso no se ha producido en el análisis de la prueba global es necesario confirmar cúal es el resultado por bloques.

Tabla 77

Resultados en el pre-test y en el bloque de Números y en el bloque de Geometría del post-test en el grupo experimental

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test Números	Nota Post-test Geometría
Alumno 1	4,07	3,75	1,67
Alumno 2	4,75	4,38	4,58
Alumno 3	3,5	7,5	2,5
Alumno 4	5,54	3,75	4,58
Alumno 5	4,54	7,5	2,5
Alumno 6	6,96	8,13	6,67
Alumno 7	6,46	8,75	10
Alumno 8	6,75	6,25	4,58
Alumno 9	4,68	5,63	4,17
Alumno 10	4,79	4,38	4,17
Alumno 11	4,63	6,25	4,17
Alumno 12	4,71	6,88	3,75
Alumno 13	4,89	4,38	7,08
Alumno 14	4,42	4,38	5,42
Alumno 15	2,04	1,88	0,83
Alumno 16	7,86	8,75	5,83
Alumno 17	4,32	6,25	6,25
Alumno 18	7,61	9,38	4,17
Alumno 19	6,32	6,88	7,08
Alumno 20	5,89	8,13	7,08
Alumno 21	5,86	6,88	4,58
Alumno 22	3,31	6,25	3,75
Alumno 23	4,81	5,63	2,92
Alumno 24	6,82	6,88	8,33
Alumno 25	3,3	5,63	4,58
Alumno 26	9,43	10	10
Alumno 27	7,93	9,38	5
Nota media	5,41	6,43	5,04

Elaboración propia

Una primera conclusión del análisis de la prueba post-test confirma la bajada de rendimiento esperable en el bloque de Geometría, aunque de forma mucho menos acusada que la descrita en el grupo control. Destaca que 7 alumnos consigan obtener una mejor nota en el bloque de Geometría que en el bloque de Números, 2 alumnos obtengan el mismo resultado y 18 alumnos obtengan un mejor resultado en el bloque de Números.

Como primera aproximación descriptiva a los datos desagregados, señalamos la frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test, en el post-test de Números y en el post-test de Geometría:

Tabla 78

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el pre-test del grupo experimental

Calificaciones Pre-test grupo experimental	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)			
[2,3)	1	3,7%	3,70%
[3,4)	3	11,1%	14,8%
[4,5)	11	40,7%	55,5%
[5,6)	3	11,1%	66,6%
[6,7)	5	18,5%	85,1%
[7,8)	3	11,1%	96,2%
[8,9)			
[9,10]	1	3,7%	100%
Total Suspensos	15	55,55%	
Total Aprobados	12	44,44%	

Elaboración propia

Tabla 79

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el bloque de Números del post-test del grupo experimental

Calificaciones Post-test, bloque de números, grupo experimental	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)			
[1,2)	1	3,7%	3,7%
[2,3)			
[3,4)	2	7,4%	11,1%
[4,5)	4	14,8%	25,9%
[5,6)	3	11,1%	37%
[6,7)	8	29,6%	66,6%
[7,8)	2	7,4%	74%
[8,9)	4	14,8%	88,8%
[9,10]	3	11,1%	100%
Total Suspensos	7	25,92%	
Total Aprobados	20	74,07%	

Elaboración propia

Tabla 80

Frecuencia de aprobados y suspensos por franjas de nota en el bloque de Geometría del post-test del grupo experimental

Calificaciones Post-test, bloque de geometría, grupo experimental	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0,1)	1	3,70%	3,7%
[1,2)	1	3,70%	7,4%
[2,3)	3	11,11%	18,5%
[3,4)	2	7,40%	25,9,%
[4,5)	9	33,33%	59,4%
[5,6)	3	11,11%	70,4%
[6,7)	2	7,40%	77,8%
[7,8)	3	11,11%	88,9%
[8,9)	1	3,70%	92,6%
[9,10]	2	7,40%	100%
Total Suspensos	16	59,25%	
Total Aprobados	11	40,74%	

Elaboración propia

Si analizamos los datos anteriores, podemos observar cómo se produce una mejora en la nota media de 1,02 puntos en el bloque de Números que se traduce en un aumento del número de aprobados en ese bloque tras la intervención y cómo se produce un empeoramiento en la nota media de 0,37 puntos en el bloque de Geometría tras la intervención. Al desagregar los datos en dos grupos se observa que la mejora observada en el rendimiento del post-test se debe a una mejora en el resultado de los contenidos ya trabajados sobre el bloque de Números y que son anteriores a la intervención. En relación al bloque de Geometría se observa un resultado ligeramente inferior al pre-test, lo que es coherente con lo descrito en el apartado precedente aunque muy superior al resultado en el mismo bloque de los estudiantes del grupo de control. Si nos fijamos únicamente en los resultados del pre-test y en los resultados del post-test del bloque de Geometría observamos como el porcentaje de aprobados y suspensos apenas cambia entre ambas pruebas.

Un análisis en detalle los datos relativos a los alumnos que han pasado de aprobar el pre-test a suspender el post-test sobre Geometría permite observar que los alumnos 4, 8, 18 y 21 han evolucionado negativamente desde el aprobado hasta el suspenso y que los alumnos 13, 14 y 17 han evolucionado de forma inversa, del suspenso al aprobado.

Si realizamos un análisis descriptivo de los datos, el resultado en términos de media, desviación típica y CV de las notas pre-test, post-test del bloque de Números y post-test del bloque de Geometría el resultado obtenido es el siguiente:

Tabla 81

Análisis descriptivo del grupo experimental en el pre-test y en el pos-test del bloque de Números y en el post-test del bloque de Geometría

	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,4144	1,68	31,05%	27
Post-test Números	6,4352	1,99	30,92%	27
Post-test Geometría	5,0459	2,24	44,39%	27

Elaboración propia

Mediante este análisis podemos observar como tanto en el pre-test como en el post-test de Números y Geometría los datos obtenidos presentan una alta dispersión, lo que nos lleva a concluir que la media obtenida es poco representativa de los datos. Este resultado es coherente con la diversidad presente en los grupos heterogéneos de Educación Secundaria y con un descenso de los resultados en el bloque de Geometría.

Si realizamos un análisis de centralización a partir de la mediana y los cuartiles obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 82

Medida de la centralización del grupo experimental en el pre-test y en los bloques de Números y de Geometría del pos-test

	Percentil 25	Mediana	Percentil 75
Pre-test	4,42	4,81	6,75
Post-test Números	4,37	6,25	8,12
Post-test Geometría	3,75	4,58	6,67

Elaboración propia

Vemos cómo el comportamiento de los grupos de datos difiere bastante entre el pre-test y los diferentes post-test y a su vez entre estos. En el caso del post-test del bloque de Números se mantiene el percentil inferior sin apenas cambios y se observa una clara mejoría de los datos en la mediana y en el cuartil superior, lo que indica una mejora de rendimiento en los perfiles medios y altos y un cierto estancamiento en los perfiles más bajos.

En el caso del post-test del bloque de Geometría se produce un descenso notable en el percentil bajo, ligero en la mediana e irrelevante en el percentil superior. Se observa como la bajada de rendimiento afecta especialmente a los alumnos de percentiles más bajos aunque en menor medida que en el grupo control.

A continuación vamos a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el post-test del bloque de Números de los 27 alumnos del grupo experimental.

Tabla 83

Notas obtenidas en el pre-test y en el bloque de Números del post-test del grupo experimental y diferencias entre ellas.

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de números	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	3,75	-0,32
Alumno 2	4,75	4,38	-0,37
Alumno 3	3,5	7,5	4
Alumno 4	5,54	3,75	-1,79
Alumno 5	4,54	7,5	2,96
Alumno 6	6,96	8,13	1,17
Alumno 7	6,46	8,75	2,29
Alumno 8	6,75	6,25	-0,5
Alumno 9	4,68	5,63	0,95
Alumno 10	4,79	4,38	-0,41
Alumno 11	4,63	6,25	1,62
Alumno 12	4,71	6,88	2,17
Alumno 13	4,89	4,38	-0,51
Alumno 14	4,42	4,38	-0,04
Alumno 15	2,04	1,88	-0,16
Alumno 16	7,86	8,75	0,89
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 18	7,61	9,38	1,77
Alumno 19	6,32	6,88	0,56
Alumno 20	5,89	8,13	2,24
Alumno 21	5,86	6,88	1,02
Alumno 22	3,31	6,25	2,94
Alumno 23	4,81	5,63	0,82
Alumno 24	6,82	6,88	0,06
Alumno 25	3,3	5,63	2,33
Alumno 26	9,43	10	0,57
Alumno 27	7,93	9,38	1,45
Nota media	5,41	6,43	1,02

Elaboración propia

De los 27 alumnos del grupo experimental, 19 mejoran la calificación del post-test del bloque de Números con respecto al pre-test, lo que supone que un 70,37% de los estudiantes mejoran su rendimiento.

Tabla 84

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que mejoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Números y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de números	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 3	3,5	7,5	4
Alumno 5	4,54	7,5	2,96
Alumno 6	6,96	8,13	1,17
Alumno 7	6,46	8,75	2,29
Alumno 9	4,68	5,63	0,95
Alumno 11	4,63	6,25	1,62
Alumno 12	4,71	6,88	2,17
Alumno 16	7,86	8,75	0,89
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 18	7,61	9,38	1,77
Alumno 19	6,32	6,88	0,56
Alumno 20	5,89	8,13	2,24
Alumno 21	5,86	6,88	1,02
Alumno 22	3,31	6,25	2,94
Alumno 23	4,81	5,63	0,82
Alumno 24	6,82	6,88	0,06
Alumno 25	3,3	5,63	2,33
Alumno 26	9,43	10	0,57
Alumno 27	7,93	9,38	1,45
Nota media	6,03	7,4	1,66

Elaboración propia

Como se puede observar los alumnos que mejoran sus resultados tienen una media superior a la del grupo experimental, lo que permite deducir que los alumnos que han mejorado en el bloque de números del post-test son aquellos que presentaban un mejor rendimiento previo. La mejora promedio producida es de 1,58 puntos.

Dentro de este grupo destaca la subida de los alumnos 3, 5 y 22 con subidas respectivas de 4, 2,96 y 2,94 puntos. En los tres casos se da la circunstancia que eran alumnos con una calificación promedio de suspenso.

Analizamos ahora los 8 alumnos que no han mejorado sus resultados:

Tabla 85

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que empeoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Números y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de números	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	3,75	-0,32
Alumno 2	4,75	4,38	-0,37
Alumno 4	5,54	3,75	-1,79
Alumno 8	6,75	6,25	-0,5
Alumno 10	4,79	4,38	-0,41
Alumno 13	4,89	4,38	-0,51
Alumno 14	4,42	4,38	-0,04
Alumno 15	2,04	1,88	-0,16
Nota media	4,65	4,13	-0,52

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que empeoran sus resultados tienen una media muy inferior a la del grupo experimental en el pre-test, 6 de los 8 son alumnos que ya suspendían en el pre-test lo que indica que el empeoramiento de resultados se ha producido principalmente para alumnos con un bajo rendimiento previo. El empeoramiento promedio producido es de 52 centésimas lo que, siendo relevante, no es tan acusado como la mejora producida en términos académicos.

Destaca dentro de este grupo que no han ocurrido bajadas tan relevantes como las subidas ya comentadas. Señalamos únicamente la bajada de casi 2 puntos del alumno 4. En el caso del alumno 4 se da la circunstancia que era un alumno con una calificación promedio de aprobado que baja a suspenso lo que sin duda otorga una importancia mayor a la bajada registrada.

A continuación vamos a realizar una comparativa entre las calificaciones obtenidas en el pre-test y en el post-test del bloque de Geometría de los 27 alumnos del grupo experimental.

Tabla 86

Notas obtenidas en el pre-test y en el bloque de Geometría del post-test del grupo experimental y diferencias entre ellas.

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de geometría	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	1,67	-2,4
Alumno 2	4,75	4,58	-0,17
Alumno 3	3,5	2,5	-1
Alumno 4	5,54	4,58	-0,96
Alumno 5	4,54	2,5	-2,04
Alumno 6	6,96	6,67	-0,29
Alumno 7	6,46	10	3,54
Alumno 8	6,75	4,58	-2,17
Alumno 9	4,68	4,17	-0,51
Alumno 10	4,79	4,17	-0,62
Alumno 11	4,63	4,17	-0,46
Alumno 12	4,71	3,75	-0,96
Alumno 13	4,89	7,08	2,19
Alumno 14	4,42	5,42	1
Alumno 15	2,04	0,83	-1,21
Alumno 16	7,86	5,83	-2,03
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 18	7,61	4,17	-3,44
Alumno 19	6,32	7,08	0,76
Alumno 20	5,89	7,08	1,19
Alumno 21	5,86	4,58	-1,28
Alumno 22	3,31	3,75	0,44
Alumno 23	4,81	2,92	-1,89
Alumno 24	6,82	8,33	1,51
Alumno 25	3,3	4,58	1,28
Alumno 26	9,43	10	0,57
Alumno 27	7,93	5	-2,93
Nota media	5,41	5,04	-0,37

Elaboración propia

De los 27 alumnos del grupo experimental 10 mejoran la calificación del post-test del bloque de Geometría con respecto al pre-test, lo que supone un 37,03% de los estudiantes. Teniendo en cuenta lo ya comentado sobre el rendimiento para el bloque de Geometría, el aumento de la nota de 10 alumnos se considera un hecho relevante.

Tabla 87

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que mejoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Geometría y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de geometría	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 7	6,46	10	3,54
Alumno 13	4,89	7,08	2,19
Alumno 14	4,42	5,42	1
Alumno 17	4,32	6,25	1,93
Alumno 19	6,32	7,08	0,76
Alumno 20	5,89	7,08	1,19
Alumno 22	3,31	3,75	0,44
Alumno 24	6,82	8,33	1,51
Alumno 25	3,3	4,58	1,28
Alumno 26	9,43	10	0,57
Nota media	5,51	6,95	1,44

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que mejoran sus resultados tienen una media muy similar a la del grupo experimental, por lo que no se puede atribuir la mejora a un grupo de alumnos con un rendimiento concreto. La mejora promedio producida es de 1,44 puntos.

Dentro de este grupo destaca la subida de los alumnos 7, 13 y 17 con subidas respectivas de 3,54, 2,19 y 1,93 puntos. En dos, de los tres casos, se da la circunstancia de que eran alumnos con una calificación promedio de suspenso.

Analizamos ahora los 17 alumnos que no han mejorado sus resultados:

Tabla 88

Detalle de los resultados de los estudiantes del grupo experimental que empeoran sus resultados del pre-test al post-test en el bloque de Geometría y diferencia obtenida

Grupo experimental	Nota Pre-test	Nota Post-test bloque de geometría	Diferencia Post-test – pre-test
Alumno 1	4,07	1,67	-2,4
Alumno 2	4,75	4,58	-0,17
Alumno 3	3,5	2,5	-1
Alumno 4	5,54	4,58	-0,96
Alumno 5	4,54	2,5	-2,04
Alumno 6	6,96	6,67	-0,29
Alumno 8	6,75	4,58	-2,17
Alumno 9	4,68	4,17	-0,51
Alumno 10	4,79	4,17	-0,62
Alumno 11	4,63	4,17	-0,46
Alumno 12	4,71	3,75	-0,96
Alumno 15	2,04	0,83	-1,21
Alumno 16	7,86	5,83	-2,03
Alumno 18	7,61	4,17	-3,44
Alumno 21	5,86	4,58	-1,28
Alumno 23	4,81	2,92	-1,89
Alumno 27	7,93	5	-2,93
Nota media	5,35	3,92	-1,42

Elaboración propia

Como se puede observar, los alumnos que empeoran sus resultados tienen una nota media muy similar a la del grupo experimental en el pre-test, lo que indica que el empeoramiento de resultados se ha producido independientemente del rendimiento previo. El empeoramiento promedio producido es de 1,42 puntos lo que, aún siendo relevante, era un resultado esperable para el bloque de Geometría.

Dentro de este grupo destaca que se hayan producido bajadas tan relevantes como las subidas ya comentadas. Señalamos especialmente la bajada de los alumnos 1, 5, 8, 16, 18 y 27 con bajadas de 2,4, 2,04, 2,17, 2,03, 3,44 y 2,93 respectivamente. En el caso de los alumnos

8, 16, 18 y 27 se da la circunstancia de que eran alumnos con una calificación promedio de aprobado que baja a suspenso.

4.3.6. Comparación de resultados entre el grupo control y el grupo experimntal

En el apartado anterior hemos analizado de forma descriptiva los resultados del grupo control y del grupo experimental. Para completar este análisis, en este apartado vamos a proceder a realizar una comparativa entre ambos grupos, una prueba MANOVA y un test de Bonferroni sobre los datos recopilados que nos permita estimar la influencia de la intervención y el tamaño del efecto de la misma.

4.3.6.1. Situación Pre-test

Lo primero en lo que tenemos que fijarnos para completar nuestro análisis es en la situación de partida de los dos grupos. Para realizar este análisis vamos a utilizar algunos parámetros descriptivos y las tablas de frecuencias.

Lo primero que vemos es que hay un alumno en el grupo control que no participó posterioremente en el post-test. Por ese motivo vamos a excluir la influencia de ese alumno en la comparación del pre-test. Si hacemos esto, vemos que la media del grupo control es ligeramente superior a la del grupo experimental, 5,46 frente a 5,41. Sin embargo, cuando comparamos los diferentes cuartiles vemos lo siguiente:

Tabla 89

Comparación de los alumnos del primer cuartil del grupo control y del grupo experimental en el pre-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
4,5	4,42
4,5	4,32
4,46	4,07
3,82	3,5
3,61	3,31
3,43	3,3
2,96	2,04
Media alumnos del primer cuartil = 3,89	Media alumnos del primer cuartil = 3,56

Elaboración propia

En este grupo vemos cómo existe una diferencia superior a la media general a favor del grupo control. Es importante señalar que en el grupo experimental había 3 alumnos con dificultades en Matemáticas que estaban derivados por el Departamento de Orientación a la asignatura de Refuerzo de Matemáticas por sus dificultades previas en la asignatura.

Tabla 90

Comparación de los alumnos del segundo cuartil del grupo control y del grupo experimental en el pre-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
5,43	4,81
5,39	4,79
5,39	4,75
5,36	4,71
5,25	4,68
4,93	4,63
4,79	4,54
Media alumnos del segundo cuartil = 5,22	Media alumnos del segundo cuartil = 4,70

Elaboración propia

En este segundo cuartil observamos la mayor diferencia a favor del grupo control y encontramos el origen del mayor número de suspensos detectado en el grupo experimental (15 frente a 9). Se trata de un grupo crítico para el rendimiento general de la clase ya que pequeñas mejoras en este grupo pueden tener un fuerte impacto en el porcentaje de alumnos que superan la asignatura.

Tabla 91

Comparación de los alumnos del tercer cuartil del grupo control y del grupo experimental en el pre-test.

Comparación de datos del Pre-test del tercer cuartil entre el grupo control y el experimental

Grupo Control	Grupo Experimental
6,29	6,75
6,18	6,46
6,11	6,32
6,04	5,89
5,82	5,86
5,57	5,54
5,5	4,89
Media alumnos del tercer cuartil = 5,93	Media alumnos del tercer cuartil = 5,95

Elaboración propia

En este tercer cuartil vemos cómo la diferencia se inclina hacia el grupo experimental ligeramente y se observa cómo empieza a vislumbrarse una diferencia cada vez mayor en la parte alta de la tabla.

Tabla 92

Comparación de los alumnos del cuarto cuartil del grupo control y del grupo experimental en el pre-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
7,5	9,43
7,25	7,93
7,11	7,86
7,07	7,61
6,79	6,96
6,43	6,82
Media alumnos del cuarto cuartil = 7,025	Media alumnos del cuarto cuartil = 7,77

Elaboración propia

En este último cuartil vemos cómo la situación se invierte claramente a favor del grupo experimental, que presenta unos mejores resultados en notas altas. Es importante señalar en este punto que en el grupo experimental había dos alumnos diagnosticados como de altas capacidades por el Departamento de Orientación del centro, lo que sin duda es muy relevante dentro de este cuartil.

A tenor de lo mostrado podemos ver que, aunque las medias son similares en ambos grupos la alta dispersión señalada y la presencia de alumnos con necesidades educativas especiales nos lleva a concluir que ambos grupos no son equivalentes. Encontramos que el grupo control es más homógeneo y tiene una mejor situación en los dos primeros cuartiles y vemos que el grupo experimental está más polarizado y que tan solo presenta unos mejores resultados en el cuartil superior.

4.3.6.2. Situación post-test bloque de Números

Como pudimos ver en el análisis previo los resultados del post-test no pueden considerarse en conjunto al existir dos partes del examen muy diferenciadas y que presentan resultados totalmente dispares.

Los contenidos evaluados en la parte de Números coinciden con contenidos ya evaluados con anterioridad en los exámenes tenidos en cuenta en el pre-test. Además se da la circunstancia de que en ambos grupos se han producido mejoras muy significativas en esta parte, lo que lleva a pensar que los ejercicios evaluados en este bloque de preguntas fueron de un nivel de dificultad menor que los evaluados con anterioridad y que la exposición repetida a los mismos ejercicios fruto de la evaluación continua propuesta por el Departamento hace que los resultados en estos ejercicios evolucionen de forma favorable.

Si comparamos en detalle ambos grupos a partir de algunos estadísticos vemos que la media obtenida por el grupo control es superior a la media obtenida por el grupo experimental, 7,41 frente a 6,43.

Si analizamos los resultados utilizando los mismos cuartiles que utilizamos en la comparativa del Pre-test vemos lo siguiente:

Tabla 93

Comparación de los alumnos del primer cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Números del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
7,5	4,38
5,63	6,25
5,63	3,75
6,25	7,5
6,25	6,25
3,75	5,63
5,63	1,88
Media alumnos del primer cuartil = 5,81	Media alumnos del primer cuartil = 5,09

Elaboración propia

En ambos grupos se ha producido una mejora importante en el resultado promedio y la diferencia se mantiene favorable al grupo control, tal y como sucedía en el pre-test.

Adicionalmente, vemos como el número de suspensos se ha reducido a 1 en el grupo control y a 3 en el grupo experimental. Así el comportamiento en el grupo de estudiantes que estaban en el primer cuartil según las notas del pre-test para el bloque de Números presenta una mejora significativa en el grupo control y en el grupo experimental, pero mantiene el comportamiento entre ambos grupos del Pre-test.

Tabla 94

Comparación de los alumnos del segundo cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Números del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
6,25	5,63
7,5	4,38
7,5	4,38
8,75	6,88
8,75	5,63
5	6,25
7,5	7,5
Media alumnos del segundo cuartil = 7,32	Media alumnos del segundo cuartil = 5,8

Elaboración propia

En los alumnos de este cuartil, vemos cómo se ha producido una mejora muy importante en ambos grupos, siendo especialmente relevante en el grupo control. El número de suspensos ha desaparecido en el grupo control y se reduce a 2 en el grupo experimental. De nuevo observamos cómo se ha producido una mejora pero que mantiene la tendencia observada entre los grupos en el pre-test.

Tabla 95

Comparación de los alumnos del tercer cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Números del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
10	6,25
9,38	8,75
6,88	6,88
8,75	8,13
6,88	6,88
8,13	3,75
6,88	4,38
Media alumnos del tercer cuartil = 8,12	Media alumnos del tercer cuartil = 6,43

Elaboración propia

En este cuartil vemos que aunque la situación de partida era similar se ha producido una mejora mucho más relevante en el grupo control que en el grupo experimental. Sorprende ver que en el grupo experimental se ha aumentado de 1 a 2 suspensos en este cuartil. Observamos cómo el grupo control supera al grupo experimental claramente a diferencia de lo que ocurría en el pre-test.

Tabla 96

Comparación de los alumnos del cuarto cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Números del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
8,13	10
8,75	9,38
9,38	8,75
9,38	9,38
7,5	8,13
8,13	6,88
Media alumnos del cuarto cuartil= 8,54	Media alumnos del cuarto cuartil = 8,75

Elaboración propia

En este último cuartil vemos cómo se produce de nuevo una mejora relevante en los resultados y cómo se mantienen los resultados del pre-test, quedando por encima el grupo experimental. La diferencia entre ambos grupos es algo menor que la experimentada previamente.

Tras este análisis podemos ver cómo la prueba post-test sobre el bloque de Números mejoró los resultados obtenidos en el pre-test para ambos grupos siendo especialmente buena en el grupo control. En general, el comportamiento por cuartiles se mantuvo fiel a lo observado en el pre-test y se situó claramente a favor del grupo control en todos los cuartiles excepto en el superior.

Este resultado permite descartar que en el post-test realizado se haya producido un rendimiento extraño en alguno de los grupos. Al comportarse de forma coherente con lo observado en el pre-test, podemos asumir que la prueba de post-test se hizo en condiciones normales y sin algún parámetro que pudiese sesgar el análisis del rendimiento en el bloque de Geometría. En este caso, si se produjo algún elemento no contemplado este parece haber favorecido al grupo control.

4.3.6.3. Situación post-test bloque de Geometría

Una vez analizadas las diferencias entre grupos detectadas en el pre-test y el rendimiento en la prueba de post-test en el bloque de Números, vamos a proceder a analizar los datos relativos al bloque de Geometría. Como ya se ha dicho, este bloque suele obtener unos resultados inferiores al de otros contenidos matemáticos, por lo que el análisis de esta parte del post-test nos debería permitir ver si ese descenso en los resultados se ha producido también en la muestra analizada y en qué medida la intervención realizada ha servido para atenuar o corregir ese descenso esperado.

Al igual que hemos hecho en los apartados previos, vamos a utilizar algunos estadísticos descriptivos para estudiar lo ocurrido en esta parte según el rendimiento previo observado.

Si comparamos en detalle ambos grupos, vemos que la media obtenida por el grupo control es inferior a la media obtenida por el grupo experimental, 4,19 frente a 5,04.

Si analizamos los resultados utilizando los mismos cuartiles que utilizamos en la comparativa del Pre-test vemos los siguiente:

Tabla 97

Comparación de los alumnos del primer cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Geometría del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
2,92	5,42
0,83	6,25
1,67	1,67
1,25	2,5
1,25	3,75
0,83	4,58
1,25	0,83
Media alumnos del primer cuartil= 1,43	Media alumnos del primer cuartil = 3,57

Elaboración propia

En este primer cuartil se observa claramente un fuerte descenso en el grupo contro, tal y como se esperaba. Sin embargo, vemos cómo en el grupo experimental no solo no se ha producido ese descenso sino que se ha logrado mantener el resultado del pre-test. Además se produce el hecho relevante de que dos alumnos consiguen aprobar el examen de Geometría a pesar de estar lejos del aprobado en el pre-test. Se observa, por tanto, un efecto positivo de la intervención en este cuartil. Este hecho es muy relevante, sobretodo si se tiene en cuenta que en este grupo había 3 alumnos con necesidades educativas en Matemáticas.

Tabla 98

Comparación de los alumnos del segundo cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Geometría del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
5,42	2,92
4,17	4,17
2,5	4,58
7,92	3,75
3,75	4,17
5	4,17
5	2,5
Media alumnos del segundo cuartil = 4,82	Media alumnos del segundo cuartil = 3,75

Elaboración propia

En este segundo cuartil vemos cómo se produce un descenso del rendimiento en ambos grupos, manteniéndose las diferencias observadas en el pre-test. En este cuartil parece que no ha tenido demasiado efecto la intervención realizada y se ha mantenido el mismo número de suspensos en el grupo experimental que los detectados previamente.

Tabla 99

Comparación de los alumnos del tercer cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Geometría del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
7,08	4,58
8,75	10
2,92	7,08
4,17	7,08
3,75	4,58
4,58	4,58
3,33	7,08
Media alumnos del tercer cuartil = 4,94	Media alumnos del tercer cuartil = 6,42

Elaboración propia

A pesar de partir de una situación similar en el pre-test vemos claras diferencias de resultado en este cuartil entre el grupo control y el experimental. En el grupo control vemos cómo se ha producido el descenso esperado en el bloque. Sin embargo, en el grupo experimental vemos una clara mejora respecto al grupo control y se consigue que los resultados obtenidos en el bloque de Geometría no solo no desciendan respecto a los del pre-test sino que mejoren casi en medio punto. Este aspecto es especialmente relevante y demuestra una clara influencia positiva de la intervención en este grupo.

Tabla 100

Comparación de los alumnos del cuarto cuartil del pre-test del grupo control y del grupo experimental en el bloque de Geometría del post-test.

Grupo Control	Grupo Experimental
9,17	10
6,25	5
7,08	5,83
5	4,17
3,33	6,67
4,17	8,33
Media alumnos del cuarto cuartil = 5,83	Media alumnos del cuarto cuartil= 6,67

Elaboración propia

En este cuartil se observa un descenso en el rendimiento de ambos grupos similar y coherente con lo esperado para el bloque de Geometría. Adicionalmente, se mantienen las diferencias detectadas en el pre-test por lo que la intervención en este cuartil no se considera relevante.

Como se ha podido ver en este análisis los beneficios más relevantes observados, se han producido en el primer y en el tercer cuartil, donde no solo se aprecian diferencias notables entre el grupo control y experimental, sino que no se producen los descensos previstos e incluso se llega a mejorar el resultado.

En cambio, los resultados en el segundo y el cuarto cuartil mantienen los resultados previos y no logran frenar el descenso previsto para el bloque de Geometría, aunque tampoco se aprecia un efecto negativo.

4.3.6.4. Análisis estadístico MANOVA

Para completar este estudio vamos a suministrar aquí los datos obtenidos con el programa SPSS para la prueba MANOVA en el grupo control y en el grupo experimental. Para realizar la prueba tendremos en cuenta los resultados del pre-test y del post-test separando en este último los datos procedentes del bloque de Números y los datos procedentes del bloque de Geometría.

Contemplamos como factor inter-sujetos la pertenencia al grupo experimental o al grupo control.

Contemplamos como factor intra-sujetos la nota del pre-test y la nota del post-test tanto de forma global como de forma desagregada en el bloque de Números y en el bloque de Geometría.

El MANOVA que presentamos aquí analiza las puntuaciones obtenidas en los exámenes realizados con anterioridad a la intervención (pre-test) como covariables, las puntuaciones obtenidas en el post-test como variables dependientes y la intervención realizada como variable independiente.

En el análisis del pre-test y el post-test global se obtuvo que no hay una diferencia significativa entre el rendimiento de los grupos tras la intervención, [$F(1,52) = 0,393$, $p = 0,533$, parcial $\eta^2 = 0,008$, potencia estadística observada = 0,094]. Este hecho ya fue comentado en el análisis anterior al observarse que la nota global en el post-test se obtenía a partir de los resultados de dos bloques de contenidos que no presentaban niveles de rendimiento similares.

En el análisis del pre-test y el post-test sobre Números se obtuvo que existe una diferencia significativa entre el rendimiento de los grupos tras la intervención, [$F(1,52) = 82,560$, $p = 0,000$, parcial $\eta^2 = 0,614$, potencia estadística observada = 1,000]. Este hecho ya fue comentado en el análisis anterior al observase una fuerte subida de la nota en el bloque de Números en ambos grupos, siendo especialmente relevante en el grupo control. Adicionalmente, en el bloque de Números se observa una diferencia significativa a favor del grupo control en el rendimiento tras la intervención $F(1,52) = 8{,}021$, $p = 0{,}007$, parcial $\eta^2 = 0{,}134$, potencia estadística observada = 0,794].

Por último, en el análisis del pre-test y el post-test sobre Geometría se obtuvo que existe una diferencia significativa entre el rendimiento de los grupos tras la intervención, [$F(1,52) = 12{,}345$, $p = 0{,}001$, parcial $\eta^2 = 0{,}192$, potencia estadística observada = 0,932]. Este hecho ya fue comentado en el análisis anterior al observase un descenso de la nota en el bloque de Geometría en ambos grupos, siendo especialmente notable en el grupo control. Adicionalmente, en el bloque de Geometría se observa una diferencia muy cerca de la significancia a favor del grupo experimental en el rendimiento tras la intervención $F(1,52) = 3{,}71$, $p = 0{,}059$, parcial $\eta^2 = 0{,}067$, potencia estadística observada = 0,473].

A lo largo del análisis cuantitativo realizado hemos visto cómo el grupo control tiene un comportamiento similar al esperado para el bloque de Geometría, lo que confirma la necesidad de actuar ante las restricciones detectadas para este bloque si se quiere mejorar el rendimiento en este área de las Matemáticas.

En relación al grupo experimental vemos como la intervención realizada consigue mejorar el rendimiento esperado en el bloque de Geometría consiguiendo que no se produzcan descensos significativos y que en algunos cuartiles se produzca una mejora de rendimiento.

5.

Conclusiones

Capítulo 5

Conclusiones

En este apartado recogeremos los resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación. Para llevarlo a cabo hemos seguido siete fases, que resumimos a continuación:

1. Reflexión sobre la importancia y el estado de la Geometría dentro de la propia disciplina y a nivel social, personal y profesional para transformar un problema docente en un problema de investigación.
2. Construcción de un MER que nos permita abordar la cuestión desde una posición externa al sistema educativo pues no consideramos como transparentes nuestras ideas y modelos de referencia sobre qué es y cómo se estudia la Geometría elemental en Educación Secundaria.
3. Estudio en profundidad de todas las posiciones epistemológicas sobre la educación matemática y su evolución a lo largo del tiempo y análisis de los niveles de codeterminación didácticos y su influencia en el sistema actual para detectar el mayor número posible de restricciones para la enseñanza de la Geometría en Educación Secundaria en la sociedad de la información.
4. Construcción de una respuesta teórica a las restricciones encontradas basada en los REI para modificar el estado actual de la cuestión dentro del universo de lo que es posible en el contexto actual.
5. Estudio en detalle de una institución educativa concreta e incorporación a la respuesta teórica diseñada de los elementos necesarios que respondan a las restricciones propias encontradas en esa institución para que sea posible implementarla.
6. Desarrollo de la propuesta elaborada dentro de las horas habituales dedicadas a la asignatura de Matemáticas y recolección de todas las evidencias posibles sobre el proceso para realizar un estudio de caso de la experiencia.
7. Análisis del estudio de caso realizado para identificar conclusiones y señalar líneas de trabajo que contribuyan a mejorar la educación geométrica elemental.

Como ya dijimos en la justificación, al elevar a problema de investigación la enseñanza de la Geometría elemental en los primeros cursos de Educación Secundaria estamos contribuyendo a estudiar los problemas docentes de una forma adecuada incorporando las dimensiones descritas en el capítulo 1.

Las dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Geometría han sido expuestas a lo largo del trabajo en numerosas ocasiones y hemos podido ver que son muy estables en el tiempo y bastante independientes de la etapa educativa que se aborde.

La importancia social del tema para la sociedad actual, para la propia disciplina y para el desarrollo individual del pensamiento y la competencia matemática han sido expuestas a lo largo de los capítulos 1 y 2.

La investigación realizada ha buscado dar respaldo teórico y práctico a la innovación educativa que se demanda en la sociedad de la información y ha buscado como fin último contribuir a una educación matemática de calidad.

El objetivo de este punto es, por tanto, dar respuesta a los objetivos que nos fijamos en el capítulo 1 para poder tener una visión global del tema tratado y evaluar lo alcanzado en relación a estos objetivos.

5.1. Objetivo 1 "Elaborar un MER sobre la Geometría elemental que permita la emancipación epistemológica"

Este objetivo ha sido investigado en el capítulo 2. Las conclusiones principales para este objetivo son:

Conclusión 1.1. Como investigador tenemos una visión ontológica y epistemológica sobre la Geometría que no es transparente y que condiciona nuestra forma de entender el problema de investigación.

Para poder estudiar la enseñanza de la Geometría elemental en Educación Secundaria es necesario no considerar como transparentes nuestras creencias como investigadores y la propia definición y límites del término Geometría elemental.

La forma de explicitar estas limitaciones a nuestro enfoque de investigación es la construcción de un MER que permita estudiar el problema de investigación desde un punto exterior al sistema que se está analizando y donde se pretende investigar e intervenir.

El sistema construido se ha descrito en detalle en el capítulo 2 y permite seguir la cadena de posicionamientos ontológicos, epistemológicos y de sistemas de referencias relativos seguida para su elaboración.

Conclusión 1.2. Nuestra visión ontológica se sitúa entre las matemáticas como verdades necesarias y universales que se adquieren desde la razón y las matemáticas como creación humana que se realiza desde la experiencia.

La visión ontológica sobre las matemáticas es un tema muy profundo y que ha sido objeto de fuertes discusiones dentro de la propia disciplina a lo largo del tiempo. En nuestro caso, y a pesar de no poder tratar con suficiente profundidad este tema, hemos querido dejar constancia de nuestra posición dentro de este debate histórico y filosófico. Asumimos para este trabajo que las matemáticas son una creación del hombre para intentar comprender la realidad que le rodea y que tiene un origen empírico. Sin embargo, su desarrollo como disciplina lógica y el proceso de abstracción que esto supone ha permitido al hombre superar las limitaciones del conocimiento empírico y descubrir relaciones y patrones no evidentes y difícilmente alcanzables desde la práctica. Las matemáticas son por tanto creación y descubrimiento.

Conclusión 1.3. A la hora de explicitar nuestro MER hemos tenido en cuenta 3 sistemas de referencia relativos. La evolución del saber sabio, el modelo de Van Hiele y los niveles del espacio de Brousseau.

En el capítulo 2 se definen los sistemas de referencia relativos que hemos tenido en cuenta para la creación del MER. La contribución de cada uno de ellos es clave para entender el enfoque de este trabajo de investigación.

Entendemos que el trabajo llevado a cabo por la Humanidad en la construcción de la Geometría puede ser similar al que realicen los estudiantes para su estudio. En este sentido, son los problemas prácticos y las experiencias manipulativas las que van definiendo paso a paso los conceptos, las tareas y las técnicas geométricas. Una vez definidas estas, se puede proceder de forma inversa y tratar de construir la teoría y las tecnologías a partir de unos primeros axiomas evidentes. La inducción en la etapa trabajada precede pues a la deducción y en este sentido se produce una emancipación del saber sabio euclídeo.

El modelo de Van Hiele nos permitió fijar una meta para nuestros estudiantes: el objetivo del MER propuesto es contribuir a la adquisición del nivel 2 del modelo de Van Hiele y a la introducción del nivel 3. Los estudiantes van a trabajar sobre los conceptos geométricos para interiorizar sus propiedades a partir de la experiencia e iniciarse en los procesos de establecer definiciones informales que preparen el camino del método lógico-deductivo. La definición de esta meta fue clave para la selección de las praxeologías que fueron objeto de estudio.

Las aportaciones de Brousseau fueron claves para entender los distintos niveles de organización espacial. El MER no está limitado al micro-espacio, como suele ser habitual, y ve en los distintos niveles del espacio una herramienta para forzar al alumno a construir sus conceptos. El trabajo en los distintos niveles del espacio definidos por Brousseau es de suma importancia para dar significado a muchos de los conceptos Geométricos y, al igual que sucedió en el desarrollo histórico, la necesidad de trabajar en los distintos niveles del espacio fue el camino elegido en este MER para provocar el cambio en los niveles de razonamiento a través de un proceso de modelización sucesiva.

Conclusión 1.4. El MER construido sobre la Geometría elemental es externo al sistema de enseñanza vigente e incorpora elementos de la Geometría Analítica y de la Geometría sintética.

El concepto de Geometría elemental desarrollado en el MER y descrito en el capitulo 2 aglutina bajo un mismo término y con el mismo nivel de importancia aspectos analíticos y sintéticos. La Geometría elemental propuesta y desarrollada en el MER, a diferencia de lo que ocurre en el sistema educativo actual, recupera para la disciplina de Matemáticas los aspectos relativos a la tecnología de regla y compás y a la tecnología de paralelas y perpendiculares.

Gracias a esta visión externa es posible, señalar la restricción que supone para la enseñanza de la Geometría elemental en Secundaria la incorporación de los contenidos de Geometría sintética a la asignatura de Educación plástica y visual y su desaparición en la asignatura de Matemáticas.

Conclusión 1.5. El MER construido permite clasificar los fenómenos didácticos que son visibles en nuestra investigación y puede usarse como escala de observación en el análisis cualitativo posterior.

En la investigación cualitativa es necesario disponer de un sistema que defina las categorías de análisis que se van a utilizar para hacer asequible el estudio de los datos recogidos.

En este sentido, entendemos como un valor adicional al MER desarrollado en el capítulo 2 la utilidad del mismo para establecer un sistema de categorización y codificación de los datos recogidos durante la investigación. La descripción precisa que supone la descripción de EP, EM y EG en la que se apoya nuestro MER permite utilizar el mismo como herramienta de análisis exahustiva y precisa.

Conclusión 1.6. El MER y los sistemas de referencia relativos que lo sostienen permiten construir un árbol de preguntas y respuestas posibles que desarrollen partes del mismo. El REI que se ha generado a partir de esas preguntas y respuestas se ha organizado en torno a modelizaciones sucesivas.

Los sistemas de referencia utilizados en nuestro MER han sido determinantes a la hora de establecer las sucesivas modelizaciones que permiten estructurar el REI. Se han buscado en el desarrollo histórico las cuestiones fértiles que permitiesen generar el proceso de estudio e investigación. Gracias al modelo de Van Hiele ha sido posible establecer la importancia de afrontar las cuestiones y respuestas desde un razonamiento inductivo que permitiese modelizar la realidad a partir de procesos informales de justificación, generalización y demostración. Por último, los niveles sucesivos del espacio y las necesarias relaciones matemáticas entre ellos son la clave para ir progresando dentro de las diferentes modelizaciones previstas y descritas en el capítulo 2.

5.2. Objetivo 2 "Detectar, comprender y analizar las restricciones transpositivas para el estudio de la Geometría elemental en las instituciones de enseñanza secundaria españolas"

Este objetivo ha sido investigado de forma global en el capítulo 2. También se ha estudiado de forma particular en el capítulo 4. Las conclusiones principales para este objetivo son:

Conclusión 2.1. La enseñanza de la Geometría elemental no es algo estable e inmutable a lo largo del tiempo y ha sufrido fuertes transformaciones en los últimos 70 años.

Como se pudo estudiar en el capítulo 2, las transformaciones sociales y los diferentes contextos políticos y económicos han ido transformando el sistema educativo en España. Es relevante señalar que mientras que la Ley de instrucción pública de 1857 estuvo vigente durante más de 100 años, las leyes que la sucedieron han tenido vidas útiles mucho más cortas. La LGE de 1970 estuvo en vigor durante 20 años. La LOGSE de 1990 estuvo en vigor 16 años. La LOE de 2006, aunque aun está en vigor, ha sufrido modificaciones notables a los 7 años de vida. Además, es especialmente importante señalar que ninguna de las leyes educativas en democracia se haya legislado con el consenso entre los dos partidos mayoritarios, lo que supone sin duda una fragilidad notable que aporta aun más inestabilidad al sistema.

Desde el punto de vista geométrico, como se vio en el capítulo 2, la legislación ha evolucionado desde el estudio de lecciones próximas a los elementos de Euclides, hasta las posiciones constructivistas y logístas actuales, pasando por el formalismo de las matemáticas modernas.

Conclusión 2.2 Existen diferentes visiones epistemológicas sobre la Geometría que han ido cambiando con el tiempo. Cada una de ellas ha sido hegemónica en un momento histórico y, por lo tanto, aunque hay evolución en el planteamiento hegemónico, todas ellas siguen vigentes de forma parcial.

Los cambios en el enfoque educativo y en la concepción de las Matemáticas y la Geometría, descritos en el capítulo 2, son notables y suponen una evolución epistemológica muy importante que ha evolucionado desde los planteamientos euclidianistas hasta los planteamientos constructivistas y logistas actuales.

Aunque no se puede inferir que un cambio legislativo implique necesariamente un cambio inmediato en las prácticas docentes, se asume que el cuerpo de profesores en activo ha sido formado bajo diferentes posicionamientos epistemológicos. Si asumimos que los profesores en activo tienen un rango de edad que va desde los 23 hasta los 64 años, nos encontramos que tenemos profesores que han nacido en el intervalo que va desde 1954 hasta 1995. Esto supone que los profesores en activo recibieron su formación matemática escolar (hasta los 16 años) en cuatro leyes educativas con planteamientos totalmente diferentes en relación a las matemáticas que van desde el euclidianismo hasta el constructivismo. Además de esta formación escolar, la formación pedagógica de estos profesionales se ha producido bajo la influencia de las leyes LGE, LOGSE y LOE y, en consecuencia, es necesario señalar que una de las mayores restricciones a las que tenemos que atender como investigadores es precisamente el posicionamiento epistemológico dominante en la institución en la que queremos actuar.

Conclusión 2.3. Las restricciones transpositivas provienen de mucho niveles y hay que estudiarlos todos para poder comprender porque las cosas son como son y estudiar qué condiciones son requeridas para que sean de otra forma.

En el capítulo 2, y haciendo uso de la herramienta de los niveles de codeterminación didáctica, hemos visto cómo el sistema educativo actual está sometido a una serie de restricciones que determinan la transposición didáctica que es posible llevar a cabo entre el saber sabio y el saber enseñado. Al no considerar transparentes estas restricciones, en este trabajo hemos podido señalar la influencia que tienen las instituciones supranacionales en la labor docente y hemos podido establecer la trazabilidad de alguna de esas restricciones a lo largo de los sucesivos niveles. Es especialmente notable en el contexto actual la importancia que ha adquirido el concepto de competencia y el papel central que se da a los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Conclusión 2.4. En la situación educativa española actual podemos señalar tres grupos de restricciones a tener en cuenta y que presionan para que se produzca un cambio en la enseñanza de las Matemáticas.

Como se señaló en el capítulo 2, a la hora de llevar a cabo nuestra investigación y nuestras propuestas hemos de tener en cuenta las restricciones que provienen de los niveles de la civilización y la sociedad, las restricciones que provienen de la institución dónde se va a realizar la propuesta y que se pueden estudiar desde los niveles de la escuela y de la pedagogía y las restricciones que emanan de la propia disiciplina y del área objeto de estudio.

En nuestro caso, gracias a este análisis previo hemos podido tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La visión competencial, activa y contextualizada de la educación actual.
- El aprendizaje cooperativo, las características organizativas del centro y los recursos disponibles.
- Las condiciones y las características educativas de los estudiantes.
- La orientación de la asignatura de Matemáticas hacia los procesos de pensamiento como eje vertebrador.
- Los contenidos mínimos a trabajar dentro de nuestro planteamiento para que este sea compatible y viable con la legislación vigente.

5.3. Objetivo 3: "Diseñar una respuesta teórica al problema de investigación mediante la construcción de un REI que desarrolle el MER sobre Geometría elemental construido"

Este objetivo ha sido investigado en el capítulo 2. Las conclusiones principales para este objetivo son:

Conclusión 3.1. El REI construido desarrolla el MER y trata de abarcarlo completamente. Por otra parte, el REI construido desborda el MER y se relaciona con otras partes de la Geometría y de las Matemáticas.

El MER sobre Geometría elemental se pretende abordar a partir del REI diseñado a priori. Sin embargo, la propia naturaleza contextualizada de las preguntas y respuestas abordadas y las modificaciones que se producen en la topogénesis, la mesogénesis y la cronogénesis hacen que sea muy difícil limitar el estudio y la investigación realizados con un único área y disciplina. En el REI, descrito en el capítulo 2, se establecen al menos relaciones con la Estadística, el Álgebra, la Geometría de los sólidos y la medición de superficies curvas irregulares.

Conclusión 3.2. El árbol de preguntas y respuestas del REI puede usarse como escala de observación cualitativa en el análisis de la investigación.

Al igual que ya se dijo en la conclusión 2.5, el REI es elemento de contraste para establecer un sistema que defina las categorías de análisis necesarias para llevar a cabo un estudio de caso.

En este sentido, entendemos como un valor adicional al REI desarrollado en el capítulo 2 la utilidad del mismo para establecer un sistema de categorización y codificación de los datos recogidos durante la investigación. La descripción precisa que supone la descripción de preguntas y respuestas en la que se apoya nuestro REI permite utilizar el mismo como herramienta de análisis exahustiva y precisa.

5.4. Objetivo 4: "Contribuir a cerrar la brecha entre investigación y aplicación, mediante la implementación en el aula de una propuesta de innovación docente basada en el REI, que se haya construido a partir de la investigación para la enseñanza de la Geometría elemental y que responda a las restricciones para su estudio encontradas por la teoría".

Este objetivo ha sido investigado de forma global en los capítulos 3 y 4. Las conclusiones principales para este objetivo son:

Conclusión 4.1. Las restricciones concretas de los niveles escuela y pedagógico determinan la necesidad de incorporar al REI elementos no contemplados en el análisis general y propios de la institución dónde se lleva a cabo la intervención como el aprendizaje cooperativo.

El aprendizaje cooperativo y los REI son dos metodologías con orígenes teóricos y desarrollos prácticos totalmente diferenciados. En este trabajo se ha desarrollado una nueva propuesta metodológica fruto de las restricciones detectadas en el nivel de la escuela y de la pedagogía que ha propiciado la creación de la propuesta basada en REI cooperativos. La propuesta a nivel teórico fue desarrollada en el capítulo 3 y ha sido compartida en el 6º Congreso Internacional de Teoría Antropológica de Didáctica (Roa e Hidalgo, 2018) y su puesta en práctica ha sido descrita en el capítulo 4.

Conclusión 4.2. Los REI y el aprendizaje cooperativo son compatibles y han generado una propuesta inédita que combina ambos y que se ha descrito bajo el nombre de REI cooperativos.

Como conclusión práctica de la puesta en práctica de los REI cooperativos se ha detectado un alto grado de compatibilidad entre ambas metodologías como se ha descrito en el capítulo 4.

La topogénesis propuesta por ambas metodologías supone un cambio de rol en el profesor y en los alumnos que es compatible. En los REI el alumno es el sujeto activo que estudia e investiga en un ambiente parcialmente construido. En el aprendizaje cooperativo el sujeto activo se amplia al grupo cooperativo donde, gracias a la división de tareas y roles y al uso de técnicas y herramientas cooperativas, se produce un estudio y una investigación que se apoya en la interdependencia positiva y en la responsabilidad personal y el rendimiento individual.

Los cambios propuestos en el REI respecto a la mesogénesis suponen que se incorporen al medio abierto las aportaciones al estudio y las obras, preguntas y respuestas que provengan de otras fuentes y soportes aunque no estén inicialmente previstas o controladas por el profesor. El aprendizaje cooperativo estructura a través del grupo cooperativo el apoyo y la ayuda entre iguales y permite incorporar la heterogeneidad de las aulas al proceso de construcción del medio. Además ambos sistemas se basan en el principio de actividad y dan importancia no solo a los conocimientos sino al propio proceso de descubrimiento. El grupo, los roles, el cuaderno de equipo y las técnicas cooperativas se plantean gracias a esta relación entre metodologías como los vehículos que permiten canalizar y favorecer la aportación de los alumnos al medio.

Por último, la modificación en la cronogénesis que supone el proceso no lineal de estudio y la exploración y la incorporación de las cuestiones derivadas que puedan aparecer no desaparecen con la incorporación del aprendizaje cooperativo, más bien al contrario, estos procesos no lineales de estudio se ven enriquecidos con la incorporación de una estructura intermendia entre el estudiante individual y el gran grupo. Los procesos de exploración y la incorporación de propuestas e ideas al REI se ven favorecidas gracias a la mayor participación e integración de aportes que favorece el aprendizaje cooperativo.

Conclusión 4.3. El análisis de las restricciones de la institución y las posibilidades de información, recursos, tiempo y acceso a muestra nos llevarón a plantear una investigación de estudio de caso que incorpora un cuasi-experimento sobre el rendimiento en una prueba de contenidos geométricos no competencial.

Al tratarse de una primera experimentación con un REI cooperativo sobre Geometría elemental la investigación realizada es de corte cualitativo. Este enfoque es compatible con la Teoría Antopológica de lo Didáctico. El objetivo de nuestro trabajo de investigación está encaminado a la comprensión profunda de cómo se comportan los REI cooperativos dentro de una institución escolar y en el horario habitual de clase. Por ese motivo se optó por un estudio de caso interpretativo. Adicionalmente, el sistema de calificación seguido por el Departamento Didáctico del centro ofrecía la posibilidad de medir el rendimiento en una prueba estándar de contenidos. Aunque el enfoque basado en REI cooperativos está mucho más orientado hacia la adquisición de competencias y procesos de pensamiento, se optó por incorporar al estudio de caso interpretativo un cuasiexperimento que aportase información sobre el rendimiento en contenidos geométricos. Este enfoque pretende ayudar a interpretar mejor la realidad concreta y singular del REI cooperativo realizado y supone un punto de partida para futuras investigaciones. El trabajo realizado puede servir para el establecimiento de hipótesis en trabajos de corte cuantitativo.

Conclusión 4.4 La investigación llevada a cabo en este trabajo es inédita en varios aspectos.

El MER y el REI teórico que lo desarrolla son los primeros que se realizan en España dentro de la TAD para trabajar el área de la Geometría elemental en el primer curso de la Educación Secundaria.

Este trabajo supone la primera aplicación de un REI sobre Geometría elemental en España en un centro de Educación Secundaria dentro del horario habitual de clases, lo que contribuye a dar visibilidad a esta metodología poco utilizada en los centros y a cerrar la brecha entre investigación y práctica.

El trabajo con REI en el primer curso de Enseñanza Secundaria no había sido tratado para ningún área matemática en España dentro de la TAD.

La implementación de un REI que incorpora el aprendizaje cooperativo nunca había sido concebido ni de forma teórica ni de forma práctica y supone una posible alternativa a la enseñanza monumentalista.

Conclusión 4.5. La brecha entre investigación y práctica ha sido cerrada parcialmente con el trabajo basado en REI cooperativos dentro del horario lectivo de la asignatura de Matemáticas.

Al realizar la experiencia basada en REI cooperativos dentro del horario habitual destinado a la asignatura de Matemáticas en un centro educativo de enseñanza obligatoria se ha roto una barrera importante entre investigación y práctica docente. El análisis y desarrollo teórico realizado ha servido para diseñar y poner en marcha una propuesta que ha tenido efectos directos sobre la competencia matemática, la adquisición de contenidos geométricos y la actitud hacia el estudio de la asignatura en un grupo concreto de estudiantes.

5.5. Objetivo 5: "Analizar la viabilidad de la respuesta construida y sus resultados en una institución educativa concreta mediante un estudio de caso".

Este objetivo ha sido investigado de forma global en el capítulo 4. Donde se aporta la descripción de las sesiones y el análisis de los datos cualitativos y cuantitativos recopilados. Las conclusiones principales para este objetivo son:

Conclusión 5.1. Durante el desarrollo de la experiencia se han podido observar 60 EP pertenecientes a 27 EM de 8 EG.

Aunque en su concepción inicial el REI diseñado a priori pretendía cubrir todos los aspectos previstos en el MER, la implementación práctica del mismo ha servido para estudiar el 55,04% de los EP, el 61,36% de los EM y el 88,8% de los EG.

En las tablas presentadas en el capítulo 4 se puede ver el detalle de los elementos del MER abordados.

Conclusión 5.2. Se han abordado 30 cuestiones y 25 respuestas correspondientes a las 4 modelizaciones previstas en el REI.

El REI previsto ha sido seguido a lo largo de la experiencia de forma notable y se ha podido detectar como se han abordado el 78,94% de las cuestiones y el 83,33% de las respuestas previstas.

En las tablas presentadas en el capítulo 4 se puede ver el detalle de las cuestiones y respuestas del REI abordadas.

Además de las cuestiones y respuestas, las cuatro modelizaciones previstas han sido estudiadas a lo largo de la experimentación, demostrando que el camino de estudio e investigación diseñado de abstracción creciente es consistente con el trabajo que se realiza por los estudiantes para abordar la cuestión generatriz.

Conclusión 5.3. A lo largo del REI se han abordado todos los momentos de estudio teorizados por la TAD.

Los momentos de estudio previsto por la TAD se han abordado de una forma uniforme a lo largo de la experimentación. Como se puede ver en la tabla presentada en el capítulo 4, todos los momentos previstos por la teoría han sido trabajados durante la experiencia. Además de este hecho se observa cómo los momentos de estudio no siguen una secuencia lineal predecible y cómo en función del estudio realizado van surgiendo de forma natural.

Al igual que decíamos en las conclusiones 2.5 y 2.8, los momentos de estudio pueden servir para establecer un sistema que defina las categorías de análisis necesarias para llevar a cabo un estudio de caso.

En este sentido, entendemos como un valor adicional a la teoría de los momentos de estudio desarrollada por la TAD la utilidad de los mismos para establecer un sistema de categorización y codificación de los datos recogidos durante la investigación.

Conclusión 5.4. A lo largo del REI se han abordado los principios generales del aprendizaje cooperativo, se han asignado roles, se han utilizado técnicas cooperativas y se han recogido cuadernos de equipo.

Aunque el trabajo mediante aprendizaje cooperativo no fue establecido inicialmente como un objetivo de la investigación, fue necesario realizar una adaptación a las restricciones que provenían de la institución que no supuso una pérdida ni para el REI ni para el aprendizaje cooperativo. Durante la experimentación descrita en el capítulo 4 se ha visto como presenta un alto grado de compatibilidad con los REI.

El trabajo en grupos cooperativos llevado a cabo ha servido para introducir un nivel intermedio de reflexión entre el gran grupo y el nivel individual. Dentro de los mismos se ha podido observar la interdependencia positiva, la responsabilidad personal, el rendimiento individual, la interacción cara a cara y el desarrollo de las habilidades sociales.

Conclusión 5.5. Se han abordado gran parte de los estándares de aprendizaje evaluables recogidos en la legislación para el primer curso de la educación secundaria.

En la siguiente tabla se recogen los 9 estándares de aprendizaje previstos en la legislación de la CAM para el bloque de Geometría de 1º de la ESO y las sesiones dónde se han trabajado.

Tabla 101

Estándares de aprendizaje previstos por la legislación para el bloque de Geometría de 1º de la ESO y sesiones de la experimentación dónde se trabajan.

Estándares de aprendizaje	Sesiones que los trabajan
1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	12, 13 y 19
1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.	9 y 10
1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.	12 y 13
1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.	No tratado
2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	2, 3, 4, 7, 8, 9, 14 y 15
2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.	No tratado
3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema.	17, 18, 19 y 20
3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	17, 18, 19 y 20
6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y perímetros.	2, 3, 4, 7, 8, 9, 14, 15, 16 y 19

Elaboración propia

Conclusión 5.6. Se han abordado gran parte de los estándares de aprendizaje evaluables recogidos en la legislación para el segundo y el tercer curso de la educación secundaria.

En la siguiente tabla se recogen los 14 estándares de aprendizaje previstos en la legislación de la CAM para el bloque de Geometría de 2º y 3º de la ESO y las sesiones donde se han trabajado.

Tabla 102

Estándares de aprendizaje previstos por la legislación para el bloque de Geometría de 2º y 3º de la ESO y sesiones de la experimentación dónde se trabajan.

Estándares de aprendizaje	Sesiones que los trabajan
1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	12, 13 y 19
1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.	9 y 10
1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.	12 y 13
1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.	No tratado
2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	2, 3, 4, 7, 8, 9, 14 y 15
2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.	No tratado
3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema.	17, 18, 19 y 20
3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	17, 18, 19 y 20
4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.	2, 4, 5, 6, 7 y 8
4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.	14, 15 y 16
5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.	No tratado
5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados.	No tratado
5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.	No tratado
6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y perímetros.	2, 3, 4, 7, 8, 9, 14, 15, 16 y 19

Elaboración propia

Conclusión 5.7. El grado de satisfacción recogido mediante encuestas a estudiantes sobre la metodología seguida ha sido muy elevado.

En la encuesta de autoevaluación que se realizó al finalizar el trabajo, el 85 % de los alumnos del grupo experimental manifestó que le había gustado el trabajo realizado durante la experimentación.

En cuanto al trabajo dentro de los grupos, el 81% de los alumnos cree que se ha sabido intercambiar ideas y que ha sido escuchado en su grupo, el 82% cree que se ha valorado su opinión y el 81% opina que se han resuelto las dudas entre los compañeros. Estos datos refuerzan la idea de que el trabajo cooperativo ha supuesto un incremento del intercambio de ideas dentro de los grupos y que la mayoría de los estudiantes han participado en las discusiones y en el estudio e investigación realizado.

El cambio de roles lo podemos apreciar ante la pregunta de si prefieren preguntar al profesor las dudas, en este caso tan solo un 41% de los estudintes manifiesta que prefiere preguntar al profesor.

Otro dato a tener en cuenta es que el 63% manifiesta que aprende más rápido con la metodología empleada y que tan solo el 41% piensa que sus notas hubiesen sido mejores si se hubiese trabajado de forma tradicional.

Al 88% de los estudiantes les gustaría volver a trabajar a través de REI cooperativos en un futuro a pesar de que el 59% piensa que el temario se vería de forma más lenta.

Conclusión 5.8. Se han cubierto muchas de las recomendaciones metodológicas recogidas en la legislación.

De las recomendaciones para el trabajo de las competencias clave que se señalaron en el capítulo 2 como restricciones, con la experiencia realizada basada en REI cooperativos se han conseguido superar las siguientes:

- Se ha trabajado de forma cooperativa como se ha visto en el análisis cualitativo de las sesiones del capítulo 4.

- Los estudiantes han tenido que abordar de forma activa problemas reales contextualizados. Las cuestiones abordadas y descritas en el capítulo 4 provienen del entorno inmediato de los propios estudiantes y se van estudiando a través de la experiencia directa en el propio centro.
- Se han utilizado portfolios y cuadernos de equipo que han sido recogidos y analizados como parte de las producciones de los estudiantes durante la experimentación.
- Se han trabajado las diferentes competencias clave.
- Se han estudiado e investigado los contenidos de Geometría utilizando como eje principal el bloque de procesos.

Conclusión 5.9. Los REI cooperativos pueden ser una alternativa eficaz para el trabajo de la competencia matemática.

Los resultados cualitativos recogidos y descritos en la parte final del capítulo 4 avalan que durante la experimentación se han desarrollado las actitudes herbartianas, procognitivas, exótericas, de problematización y de enciclopedista ordinario descritas por la TAD. Todas estas actitudes son relevantes para el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes y refuerzan la capacidad de los estudiantes para modelizar situaciones contextualizadas y aplicar los conocimientos y contenidos matemáticos a la vida cotidiana.

Conclusión 5.10. Los REI cooperativos pueden ser una alternativa eficaz para el trabajo de los contenidos matemáticas geométricos.

Los resultados cuantitativos recogidos y descritos en la parte final del capítulo 4 avalan que se han producido diferencias significativas entre el grupo control y el grupo experimental y se ha observado una mejora de los resultados en el bloque de Geometría que, aunque no llega a igualar los resultados previos en el bloque de Números en todos los cuartiles, son muy relevantes en los cuartiles 1 y 3.

Los resultados de la prueba estadística MANOVA para el bloque de Geometría señalan que la intervención realizada está en los límites de la significatividad, por lo que puede aceptarse como hipótesis de partida de estudios posteriores que el REI cooperativo sobre Geometría elemental propuesto en este trabajo tiene un efecto positivo en el rendimiento geométrico en pruebas no competenciales.

Conclusión 5.11. El MER sobre Geometría elemental y el REI cooperativo propuesto deben reformularse para dar cabida a los aspectos tratados y no contemplados inicialmente y para replantear los aspectos contemplados pero no tratados.

Dada la naturaleza abierta de los REI, durante la puesta en práctica del mismo se han observado praxeologías, preguntas y respuestas no contempladas que deberían dar lugar a un nuevo desarrollo del MER y el REI propuesto. Así mismo, se ha visto que el REI cooperativo propuesto no ha permitido visibilizar un buen número de las praxeologías previstas, por lo que es necesario ampliar su alcance o elaborar un segundo REI cooperativo que permita abordar los aspectos no tratados e incorporar aquellos no contemplados y que se señalaron en el análisis cualitativo del capítulo 4.

Conclusión 5.12. Se han encontrados cambios muy importantes en la cronogénesis en la topogénesis y la mesogénesis durante el desarrollo de la experimentación.

En el análisis cualitativo realizado sobre la experiencia del capítulo 4 hemos ido señalando aquellos momentos donde se podía apreciar un cambio en la cronogénesis, el la topogénesis y en la mesogénesis. A continuación señalamos los aspectos más importante observados para cada uno de ellos.

Respecto a la cronógenesis: El tiempo de estudio se ha tenido que modificar en varios momentos. El carácter abierto del REI ha llevado a tener que realizar algunos retrocesos en el proceso de estudio y nos ha obligado a invertir más tiempo del previsto en muchos casos.

Además de esto, en algunos momentos las sesiones han tenido que modificarse para adaptarse a unos tiempos cerrados por la institución que marcaban la fecha de la evaluación prevista y que no permitieron realizar un proceso de investigación totalmente libre. Otro aspecto importante a señalar es que el número de sesiones no fue suficiente para abordar completamente la última de las modelizaciones previstas, lo que da fe de lo difícil que es planificar de antemano el tiempo necesario para llevar a cabo el REI cooperativo.

Respecto a la topogénesis: El papel del profesor descrito durante el REI cooperativo siempre estuvo basado en la formulación de preguntas y no en el suministro de respuestas. En todo momento se intentó mantener un papel de guía del proceso y se cedió a los alumnos el protagonismo a la hora de avanzar dentro del estudio e investigación que se estaba realizando. Los alumnos, por su parte, en muchos momentos construyeron sus propias respuestas y plantearon hipótesis y demostraciones informales de muchas obras matemáticas a partir de su propio vocabulario y conocimientos previos. La riqueza de esta forma de trabajar queda patente en muchos de los diálogos recogidos en el capítulo 4 y permite ver el carácter siempre abierto de la investigación y la incorporación de preguntas y respuestas que surge directamente del trabajo individual en grupos cooperativos o en las puestas en común en gran grupo.

Respecto a la mesogénesis: En varios momentos de la experiencia se observa cómo son los alumnos los que aportan información e incorporan obras, preguntas y respuestas. El uso de las TIC para obtener una representación en el micro-espacio de la parcela del colegio o las aportaciones que se realizaban en base a la experiencia de personas de su entorno son ejemplos de estos cambios. Es interesante la presencia de algún profesor invitado de otras materias en la clase que, aunque se realizó de forma puntual, permite ver la riqueza de este tipo de planteamientos y el interés que suscitaba dentro de la propia institución educativa la experimentación que se estaba realizando.

5.6. Otras conclusiones derivadas de la experimentación

Además de las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo relativas a los objetivos de la investigación descritos en el capítulo 1, durante la experimentación del REI realizada se han obtenido otras conclusiones relevantes que pocedemos a señalar a continuación en torno a 3 ejes.

5.5.1. Confirmación del nivel de razonamiento de Van Hiele señalado en el marco teórico.

En el capítulo 2 señalamos las investigaciones realizadas dentro del modelo de Van Hiele que indicaban que el nivel de razonamiento esperable en los estudiantes de primer curso de Educación Secundaria era equivalente al nivel 1 descrito por el modelo. La pertenencia de los estudiantes a este nivel y el trabajo realizado dentro del nivel siguiente del modelo han podido constatarse en diferentes momentos de la descripción e interpretación de la experimentación realizada. En este punto recogemos los 3 ejemplos que consideramos más relevantes:

- Los conocimientos previos detectados en la sesión 1 y vistos en las sesiones cuando aparecían conceptos nuevos (semejanza entre superficies, fórmulas de áreas de figuras planas, Teorema de Pitagoras) son coherentes con el nivel de razonamiento de Van hiele descrito en el capítulo 2.
- El vocabulario utilizado en las demostraciones informales (sesión 11) es muy pobre en términos geométricos, lo que es coherente con un nivel de razonamiento inicial dentro del modelo de Van Hiele.
- La importancia de las sesiones dónde se realizan demostraciones informales, como las de la sesión 12, para el desarrollo de los niveles de razonamiento descritos en el modelo de Van Hiele que permiten establecer hipótesis y expresarlas con su propio vocabulario y que permiten realizar pequeñas demostraciones y refutaciones.

5.5.2. Detección de cuestiones generatrices fértiles.

Dentro del paradigma general de cuestionamiento del mundo descrito por la TAD es importante ir desarrollando un cuerpo de cuestiones generatrices fértiles para el desarrollo del currículo de Matemáticas. En nuestras experimentación han sido varios los momentos en los que se han producido desbordes del MER y REI propuestos, donde se han detectado posibles cuestiones generatrices para el desarrollo de nuevos REI que trabajen otros elementos de las Matemáticas no cubiertos dentro de este trabajo. A continuación señalamos seis de ellos:

- La aparición de la Estadística en la sesión 3 para estimar el valor que debe considerarse en una serie de medidas demuestra, por un lado, la debilidad de los conocimientos estadísticos previos, a pesar de su inclusión en el currículo de Educación Primaria, y por otro, la posibilidad de utilizar como cuestión generatriz de un posible REI sobre Estadística la dispersión obtenida al realizar una serie de medidas en el meso-espacio.
- En la sesión 8 vemos cómo el trabajo en un contexto real puede suponer que se desborde el MER previsto y que aparezcan preguntas sobre cómo realizar la medición de figuras geométricas con lados curvilíneos. Aparece aquí una posible cuestión generatriz para un REI que trabaje la medición del área encerrada bajo una curva.
- En la sesión 9 se observa una situación de desborde del MER en la que se pide a los estudiantes que calculen la superficie máxima de una figura geométrica de perímetro fijo. Esta situación de clase podría dar lugar a una cuestión generatriz para un REI sobre problemas de maximización y minimización.
- En la sesión 10, ante la necesidad de descomponer la parcela, se observan divisiones interiores de tamaño decreciente que pueden servir de pregunta generatriz para un REI sobre Cálculo elemental o para un REI sobre el concepto de fractal.
- En la sesión 15 se realiza una intervención en la que se propone resolver por medios mecánicos y enfoques extramatemáticos problemas de cálculo de superficies. Esta vía de resolución puede ser una cuestión generatriz fértil para un REI sobre métodos mecánicos de resolución.
- En la sesión 20 se realiza la construcción de triángulos utilizando objetos rectilíneos de la misma longitud. Esta actividad podría utilizarse como cuestión generatriz de una actividad de estudio e investigación (AEI) para la obtención de ternas pitagóricas.

5.5.3. Interferencias entre estructuras y conceptos matemáticos encontradas.

Además de describir e interpretar los elementos del MER, las cuestiones y respuestas del REI y los momentos de estudio presentes durante las sesiones, durante la experimentación hemos detectado indicios en el trabajo llevado a cabo dentro de los grupos de fenómenos que pueden suponer interferencias en los procesos de estudio e investigación que se pueden desarrollar en los centros. En este apartado se señalan seis de ellos que deberían ser tenidos en cuenta:

- En la sesión 4 se detectan algunas ideas intuitivas de escala dónde parece existir la idea de que la escala debe hacerse con una correspondencia 1 a 1 entre una unidad de medida conocida y una unidad de medida conocida superior. Se detecta una posible dificultad originada por el trabajo previo de cambios de unidades del Sistema Internacional de Unidades que sería necesario investigar.
- En la sesión 4 se detecta que la idea intuitiva sobre semejanza se hace únicamente en base a la proporcionalidad de los lados, no siendo relevante para los grupos el concepto de ángulo. Parce existir confianza en la percepción visual para detectar diferencias entre la figura real y la representada. Esta confianza en lo visual puede suponer un obstáculo para la aparición de la Geometría sintética al no considerarla relevante para realizar una representación a escala.
- En la sesión 6 se detectan interferencias de las estructuras aditivas para el trabajo con estructuras multiplicativas en algunos grupos e interferencias del trabajo realizado sobre cambio de unidades para el trabajo de proporcionalidad y escala.
- En la sesión 8, en la sesión 14 y en la sesión 15 se detectan errores relativos a los conceptos de longitud y superficie, lo que puede indicar que las modelizaciones realizadas para longitudes pueden interferir en las modelizaciones realizadas para superficies. Es previsible que estas misma dificultades e interferencias se produzcan al abordar modelizaciones de volúmenes. En la sesión 9 se observa esta interferencia cuando se describe el obstáculo epistemológico que se produce entre el área y el perímetro.
- En la sesión 13, en la sesión 17 y en la sesión 18, se aprecian las dificultades derivadas por la falta de conocimientos de álgebra en los estudiantes del primer curso de Educación Secundaria. Las respuestas prealgebraicas, aunque suponen la superación de los niveles de codeterminación de tema, cuestión y área, suponen una dificultad importante similar a la producida en el saber sabio para avanzar en el nivel de razonamiento geométrico. La falta de habilidades algebraicas puede

suponer una dificultad que lleve al aprendizaje acrítico de algunas técnicas.

- En la sesión 15 se observa el fenómeno de cómo la utilización de determinados instrumentos de dibujo, como la escuadra y el cartabón, convierten en transparentes algunas técnicas sintéticas de regla y compás, como el trazado de perpendiculares. Se puede observar un fenómeno de baja transferencia entre la asignatura de Educación Plástica y Visual y la asignatura de Matemáticas que puede suponer un fuerte obstáculo didáctico para el estudio de la Geometría.

Las posibilidades de los REI como metodología clave para desarrollar el paradigma de cuestionamiento del mundo se pueden ver en el estudio de caso descriptivo e interpretativo realizado en este trabajo. Gracias a la experimentación realizada ha sido posible detectar cuestiones generatrices y fenómenos no previstos en nuestro MER y en nuestro REI a priori, lo que da cuenta de la riqueza de este enfoque.

5.7. Problemas abiertos y líneas de investigación futuras

La Tesis aquí presentada, dentro del marco de la TAD, es la primera que aborda, hasta nuestro conocimiento, el estudio de la Geometría elemental (en el primer curso de la Educación Secundaria), en el horario habitual de la asignatura de Matemáticas dentro de una institución educativa española a través de un REI. Por este motivo, son múltiples las cuestiones de investigación que surgen de nuestro trabajo y que se podrían abordar en el futuro. Podemos estructurar estas cuestiones en cuatro categorías: cuestiones relacionadas con la Geometría elemental, cuestiones relacionadas con el MER, cuestiones relacionadas con el REI construido e implementado y cuestiones relativas a la investigación realizada.

5.7.1. Cuestiones relacionadas con la Geometría elemental

El trabajo de investigación realizado se ha centrado en el ámbito matemático de la Geometría elemental. A lo largo del capítulo 2 se ha estudiado este ámbito teniendo en cuenta la evolución del saber sabio, los niveles de razonamiento geométricos definidos por Van Hiele, las aportaciones de Brousseau para la enseñanza de la Geometría y las restricciones transpositivas que provienen de los diferentes niveles de codeterminación. Después del trabajo realizado se han detectado las siguientes preguntas de investigación:

P1: ¿Cuáles son las semejanzas y cuáles son las diferencias entre las restricciones transpositivas detectadas para la enseñanza de la Geometría elemental en España y en otros países?

P2: ¿Qué factores históricos, culturales y tradicionales pueden explicar las similitudes y contrastes encontradas?

P3: ¿Cuáles serían las modificaciones necesarias en cada uno de los niveles de codeterminación para que una propuesta de este tipo pudiera ser instaurada de manera generalizada en las aulas?

P4: ¿Cómo se puede integrar el trabajo en el meso-espacio y en el macro-espacio en el ámbito institucional de la Educación Secundaria?

P5: ¿Es posible abordar todo el programa previsto en el currículo oficial para el bloque de Geometría únicamente utilizandoel dispositivo de los REI?

5.7.2. Cuestiones relacionadas con el MER

La construcción del MER realizada en el capítulo 2 ha supuesto una herramienta imprescindible para el desarrollo de la investigación realizada y ha permitido acotar adecuadamente el concepto de Geometría elemental utilizado en este trabajo. Sin embargo, tras la investigación quedan abiertas varias preguntas que procedemos a detallar a continuación:

P6: ¿El MER elaborado debe incluir nuevos EP, EM y EG no contemplados?

P7: El concepto de Geometría elemental ¿debe ampliarse e incorporar otros conceptos geométricos como la Geometría de los sólidos o la Geometría analítica?

P8: ¿Cómo se podría ampliar el MER propuesto para que permitiese el estudio del área encerrada bajo una curva?

P9: Dada la naturaleza de hipótesis provisional y relativa que supone el MER ¿hasta qué punto se puede utilizar como instrumento de análisis de una investigación cualitativa?

5.7.3. Cuestiones relacionadas con el REI construido e implementado.

El REI sobre Geometría elemental construido e implementado constituye una respuesta a la restricciones transpositivas para la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria en la sociedad de la información. En nuestra investigación ya hemos puesto en evidencia el desarrollo de una propuesta basada en el REI a priori en el horario habitual de la asignatura de Matemáticas y algunas dificultades ligadas a la implementación de este tipo de organizaciones didácticas, como la obligación de evaluar a los estudiantes mediante una prueba final basada en contenidos y respuestas cerradas. Estas dificultades, aunque viables desde un punto de vista legal, suponen en muchos casos, la ruptura de los contratos pedagógicos y didácticos vigentes y ponen en evidencia algunas resistencias dentro de las instituciones. Consideramos interesante ahondar en las siguientes cuestiones en el futuro:

P10: ¿Qué otras cuestiones generatrices podrían plantearse para dar origen al proceso de estudio e investigación?

P11: ¿Cómo se podría aumentar el alcance del REI con cuestiones fértiles para el trabajo sintético y el trabajo con ángulos?

P12: ¿Cómo hacer, en términos didácticos, para pasar de un trabajo de demostración informal inductiva a un trabajo de demostración formal deductiva de las diferentes praxeologías trabajadas?

P13: ¿Qué técnicas didácticas son necesarias para diseñar y gestionar un REI a partir de un MER que lo sustente?

P14: ¿Qué posibilidades de desarrollo tienen los REI a la hora de articular procesos de estudio en otras asignaturas del currículo? ¿Es posible extender esta propuesta metodológica a otros ámbitos formales y no formales?

P15: ¿Qué tipo de formación requerirían los profesores de Educación Secundaria para poder dirigir REI en esta etapa educativa?

P16: ¿Qué tipo de formación tienen que recibir los profesores en formación durante el Máster de Formación del Profesorado y los Grados de Magisterio para poder diseñar y dirigir REI en sus respectivas etapas?

P17: Desarrollar de forma más extensa las características de los REI cooperativos investigando, qué técnicas cooperativas son más adecuadas para llevar a cabo el estudio e investigación.

5.7.4. Cuestiones relativas a la investigación realizada

La investigación contextualizada en el capítulo 3 y descrita e interpretada en el capítulo 4 ha permitido tener una primera visión holística de las posibilidades de la respuesta diseñada desde la TAD para responder a las restricciones transpositivas para la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria en la sociedad de la información. Sin embargo, este primer estudio plantea nuevas cuestiones y líneas de investigación que pueden resultar fértiles en el futuro:

P18: ¿Es posible generalizar los resultados obtenidos de la investigación cualitativa realizada a otras situaciones con un número mayor de participantes, distintos contextos sociales y diferentes instituciones educativas (públicas, concertadas y privadas)?

P19: ¿Es posible utilizar el MER y REI diseñados e implementados en este trabajo para llevar a cabo procesos de estudio sobre Geometría elemental en la formación del profesorado de primaria?

P20: ¿Qué papel tiene la variable del profesor investigador? ¿Es posible diferenciar la persona que dirige la actividad de formación de la persona que realiza la investigación?

P21: ¿Qué incidencia ha tenido la incorporación de la metodología cooperativa en el desarrollo del REI realizado y cómo medirla? ¿Su efecto ha sido positivo?

P22: En entornos cada vez más digitalizados, ¿es posible seguir planteando cuestiones y respuestas relativas a instrumentos de medida tradicionales?

P23: ¿Se debe extender la experiencia a los cursos anteriores y posteriores y realizar un trabajo longitudinal?

P24: ¿Es necesario medir el impacto en la consecución de los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele a través de cuestionarios validados antes y después de la intervención?

P25: Si se pretende evaluar el rendimiento o el efecto que tiene esta modalidad de enseñanza sobre las praxeologías personales de los estudiantes o sobre el desarrollo en la competencia matemática que producen, ¿es necesario diseñar y validar instrumentos de evaluación propios dentro de la TAD que permitan medir el efecto de la intervención realizada?

5.8. Consideraciones finales.

La importancia social del tema elegido y las dificultades detectadas en el rendimiento geométrico se abordaron inicialmente desde un un problema docente muy práctico sobre cómo se puede realizar el estudio de los elementos geométricos que se lleva acabo en la Educación Secundaria española.

La inclusión de las dimensiones epistemológica, económico-institucional y ecológica a la cuestión original en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico provocó la necesidad de elaborar un modelo epistemológico de referencia de la Geometría elemental y un recorrido de estudio e investigación que lo desarrollase teniendo en cuenta las restricciones transpositivas analizadas y detectadas. Este estudio nos condujo a la experimentación de estos dispositivos en el horario habitual asignado a la asignatura de Matemáticas en una institución educativa de la Comunidad de Madrid.

La experimentación descrita e interpretada ha puesto en evidencia rasgos importantes de sus posibilidades institucionales y señalan una respuesta viable para la superación de las restricciones transpositivas detectadas que posibilita la renovación de la enseñanza secundaria de las Matemáticas.

Las cuestiones que se abren al final de este trabajo exceden las cuestiones abordables desde la propia práctica docente dentro de la institución. La figura del profesor debe ampliarse, como decíamos en la introducción al texto, e incorporar los elementos de investigación que permitan abordar problemas de epistemología general y de análisis y comprensión de la transposición didáctica relativa al ámbito de las Matemáticas. Además del conocimiento de la propia disciplina, de la probidad de conducta y de las dotes expositoras, la incorporación de las herramientas que proporciona la didáctica de las Matemáticas junto a la vocación por cultivar el gusto por aprender son un camino que debe estar accesible para todos los profesores y maestros que deseen recorrerlo. Contribuir al enriquecimiento de la figura del profesor y al cierre de la brecha entre investigación y práctica son una meta a la que deben tender algunos de nuestros trabajos futuros.

Madrid, abril de 2019.

6.

Referencias bibliográficas

Referencias bibliográficas

Alderete, M. y Soraire, M. (2011). Didáctica de la Matemática. Programas de Investigación. *Temas de didáctica,* 22, 1-35.

Alfonso, C.I. (2016). La Sociedad de la Información, Sociedad del Conocimiento y Sociedad del Aprendizaje. Referentes en torno a su formación. *Bibliotecas anales de investigación*. 12(2), 325-243.

Alsina, C., Fortuny, J., y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 9 (3), 281-308.

Aznar, P. y Martínez, M. P. (2013). La perspectiva de la sostenibilidad en la sociedad del conocimiento interconectado: gobernanza, educación, ética. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.* 14 (3), 37-60.

Balderas, R. (2009). ¿Sociedad de la información o sociedad del conocimiento?. *El cotidiano*, 158, 75-80.

Ball, M. y Smith, G. (1992). *Analyzing Visual Data*. California: Sage.

Baquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona).

Baratech y Estevan. (1960). *Matemáticas 4º curso de Bachillerato.* Zaragoza: Imp. Librería General.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en educación secundaria. *Campo abierto*, 31(2), 139-153.

Barrera, C. (2002). *Historia del proceso democrático en España. Tardofranquismo, transición y democracia.* Madrid: Editorial Fragua.

Barroso, C. (2013). Sociedad del conocimiento y entorno digital. *Teoría de la Educación Educación y Cultura en la Sociedad de la Información,* 14(3), 61-86.

Bauman, Z. (2007). *Tiempos líquidos. Vivir en una época de incertidumbres.* Barcelona: Tusquets.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática.* Barcelona: Paidós.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Bolea, P. (1995). La transposición didáctica de la Geometría elemental. *Educación abierta: Aspectos didácticos de Matemáticas,* 5, 89-126.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques,* 21 (3), 247-304.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'aalyse des processsus didactiques. En Mercier, A. et Margolinas, C. (Coords), *Balises en Didactique des Mathématiques,* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage: Grenoble.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática,* 18(2), 37-74.

Bosch, M., y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En A. Estepa, L. Ruiz & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 385-406). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Boule, F. (2005). *Reflexiones sobre la Geometría y su enseñanza.* México: Ediciones La Vasija.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Bressan, A., Bogisic, B., y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar Geometría en la educación básica.* Buenos Aires: Novedades educativas.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didacique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1987). Didáctica de las Matemáticas y cuestiones de Enseñanza: Proposiciones para la Geometría. *Les Sciences de l'Education pour l'ere nouvelle,* 1-2, 69-100.

Brousseau, G. (2000). *Les propritéés didactiques de la géométrie Íeémentaire: l´etude de l'espace et de la géométrie.* Trabajo presentado en el Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation Réthymon, Université de Crète.

Burkhardt, (1988). The roles of theory in a śistems'approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 5, 174-177.

CAM (2016). *Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) en la Comunidad de Madrid (2005-2015)*. Madrid: Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid,

Cañón, C. (1993). *La Matemática creación y descubrimiento.* Madrid: Biblos Industria Gráfica.

Cañón, C. (2006). Supuestos epistemológicos en Educación Matemática. *La gaceta de la RSME,* 9(2), 425-438.

Carreras, A. y Tafunell, X. (2005). *Estadísticas históricas de España: siglos XIX y XX.* Bilbao: Fundación BBVA.

Casal, J. (1978). *Síntesis actualizada del III Informe Foessa*. Madrid: La Editorial Católica.

Cascón, I. (2000). *Análisis de las calificaciones escolares como criterio de rendimiento académico.* Trabajo presentado en las Jornadas de investigación de la USAL, Salamanca.

Cassany, D. (2004). Aprendizaje cooperativo para ELE. En *Actas del programa de formación para profesorado de español como lengua extranjera 2003-2004* (pp. 11-30). Munich: Instituto Cervantes de Munich.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME,* 11(2), 171-194 .

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1990). Autour de lénseignement de la Geometrie au collège, *Petit X*, 27, 41-76.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage. (2ª edición).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. En G. Arsac & Alii (Coord.), *La transposiyion didactique à l´épreuve* (pp. 135-180). Paris: La Pensée, Sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: Un point de vue didactique. *Paru dans Skholè*, 7, 45-64.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropoloqique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001a). *Les TPE comme problème didactique.* Trabajo presentado en Séminaire national de didactique, París.

Chevallard, Y. (2001b). *Aspectos problemáticos de la formación docente.* Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM), Escuela de Magisterio de Huesca, Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire.* Trabajo presentado en el 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal).

Chevalllard, Y. (2006). *Steps Towards a New Epistemology in Mathematics Education*, Trabajo presentado en Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Chevallard, Y. (2007). Passé et present de la Théorie Anthropologique de Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2009a). Didactique et formation des enseignants. Trabajo presentado en la UMR ADEF, Poitiers.

Chevallard, Y. (2009b). *Remarques sur la notion d`infrastructure didactique et sur le rôle des PER.* Trabajo presentado en Journées Ampère, l`INRP, Lyon.

Chevallard , Y. (2009c). *La notion de PER: problémes et avancées.* Trabajo presentado en la IUFM, Toulouse.

Chevallard, Y. (2012). *Teaching Mathematics in tomorrowś society: a case for an oncoming counter paradigm*. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161-182.

Chevallard, Y. (2013b). *Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.* Trabajo presentado en Journal du Seminaire TAD/IDD, Université d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori

Chevallard , Y., y Ladage, C. (2010). *Enquêter pour connaître: L'émergence d'un noveau paradigme scolaire et culturel á l'âge de l'internet*. Comunicación presentada en el Instituto de matemáticas, Universidad de Lieja.

Coll, C. y Monereo, C. (2008). *Psicología de la educación virtual.* Madrid: Morata.

D´Ámore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México D.F.: Reverté.

Delors (1996). *La educación encierra un tesoro.* París: UNESCO.

De las Heras, A. M. (2014). *Lenguaje fotográfico y formación en Educación Primaria* (Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid).

Donvito, A., Otero, M. y Sureda, P. (2014). Actitudes de la Pedagogía de la Investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. *Ikastorratza. e- Revista de didáctica,* 12, 1-27.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Duran, D. (2012). Utilizando el trabajo en equipo. Estructurar la interacción a través de métodos y técnicas. En J.C. Torrego García & A. Negro Moncayo (coords.) *El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender a cooperar* (pp. 139-164). Madrid: Alianza Editorial.

Echeita, G. (2012). El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender para cooperar. En J.C. Torrego García & A. Negro Moncayo (coords.) *El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender a cooperar* (pp. 21-46). Madrid: Alianza Editorial.

Escamilla, A., Lagares, A.R. (2006). *La LOE: Perspectiva pedagógica e histórica.* Barcelona: Ed Graó.

Friss (2003). *Modelo para la creación de entornos de aprendizaje*. (Tesis doctoral, Universidad

Politécnica de Madrid).

Fusi, J.P. y Calvo, F. (2009). *El espejo del tiempo.* Madrid: Santillana.

Fusi, J.P. y Palafox, J. (1997). *España 1808-1996. El desafío de la modernidad.* Madrid: Espasa.

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. *Reserches en Didactique des Mathématiques,* 18(1), 7-34.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las Matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, 4(2), 129-159.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre la enseñanza de la Geometría en secundaria. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 44, 41-52.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática,* 26, 99-123.

García, F.J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral, Universidad de Jaén).

García, J.L. (2000). La evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria. En *Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE (pp.* 115-150). Madrid: Grupo Santillana.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 22 (2-3), 237-284.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gómez, J. (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas.* España: RBA.

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos,* 1, 83-115.

Gónzález, N., y Carrillo, G. A. (2016). El aprendizaje cooperativo y la Flipped Classroom: Una pareja ideal mediada por las TICs. *Aularia. El país de las aulas.* 2, 43-48.

González-Pineda, J.A., Núñez, J.C., Álvarez, L., González, P., González-Pumariega, S., Roces, C. (2003) ¿Cómo explicar tanto fracaso en el aprendizaje de las Matemáticas?. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación,* 10 (8), 349-358.

Gradolí, J. (2015). *Resumen de la educación encierra un tesoro*. Trabajo presentado en Problems i corrents contemporanis en educació, Universidad de Valencia.

Gutierrez, A., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis,* 32, 55-70.

Guzmán, M. (1983). Sobre la educación matemática. *Revista de Occidente*, 26, 37-48.

Guzmán, M. (1994). *Enseñanza de las ciencias y la matemática.* OEI: Popular.

Hoffer, A. (1990). La geometría es más que demostración. *Notas de matemática*, 29, 10-24.

Jimenez-Landi. A. (1973). *La institución Libre de Enseñanza.* Madrid: Taurus.

Johnson, D., Johnson, R., y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula.* Barcelona: Paídos.

Jover, J. M., Gómez, G. y Fusi, J.P. (2001). *España: Sociedad, política y civilización (siglos XIX y XX).* Madrid: Debate.

Lakatos, I. (1981). *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers, Vol2.* Cambridge: University Press. [Trad. Española: Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza].

Lara, M. y Lara, L. (2018). *Brevario de Historia de España. Desde Atapuerca hasta la era de la globalización*. Madrid: Edaf.

León, O. y Montero, I. (2015). *Métodos de investigación en Psicología y Educación. Las tradiciones cuantitativa y cualitativa.* Madrid: McGraw-Hill.

Lockhart, P. (2008). El lamento de un matemático. *La Gaceta de la RSME,* 11(4), 739-766.

López de Silanes, F. (2012). *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele enseñanza de la Geometría en España.* Barcelona: Ed. Da Vinci.

Lucas, C. (2015). *Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral. UITI Vigo).

Luzón, A., y Torres, M. (2013). Apuntes sobre la internacionalización y la globalización en educación de la internacionalización de los modelos educativos a un nuevo modelo de gobernanza. *Journal of Supranational Policies of Education*, 1, 53-66.

McKerman, J. (1999). I*nvestigación-acción y currículum*. Madrid: Morata.

Marchesi, A. (2000). Las reformas del futuro. En, *Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE* (pp. 305-335). Madrid: Grupo Santillana.

Marcos, C., y Martinez, J. (1960a). *Aritmética y Geometría. 3º Curso.* Madrid: S.M.

Marcos, C., y Martinez, J. (1960b). *Matemáticas. 4º Curso.* Madrid: S.M.

Marcos, C., y Martínez, J. (1967). *Matemática moderna 3º*. Madrid: Ediciones S.M.

Martens, K., Rusconi, A., y Leuze, K. (2007). *New Arenas od Edcation Governance. The impact of International organizations and Markets on Educational Policy Making.* Nueva York: Palgrave MacMillan.

Martí, M. (2017). La filosofía de las matemáticas de Aristóteles. *Tópicos, Revista de Filosofía,* 52, 43-66.

Martín, J.L., Martínez, C. y Tusell, J. (1998). *Historia de España.* Madrid: Grupo Santillana. Taurus.

Mayordomo, R., y Onrubia, J. (2015). *El aprendizaje cooperativo*. Barcelona: UOC.

McGrew , A. (1992). Conceptualizing global politics. En A. McGrew, P.G. Lewis et al. (eds), *Globalization and the Nation-State.* Cambridge: Polity Press.

MEC. (1969). *La educación en España. Bases para una política educativa.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC. (1971). *Comisión ministerial de planes, programas de estudio y evaluación.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2001). *Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000.* Datos básicos. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2008). *PISA 2003. Matemáticas. Informe Español.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2011). *Evaluación General de Diagnóstico 2010. Educación Secundaria Obligatoria. Segundo Curso. Informe de Resultados.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2013). *PIRLS-TIMS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA. Volumen I. Informe Español*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2014). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Resultados y contexto.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Millán, G. (2004). *Euclides: la fuerza del razonamiento matemático.* Tres Cantos (Madrid): Editorial Nivola.

Mínguez, R. y Hernández, M.A. (2013). Hacia otra educación en la sociedad del conocimiento: cuestiones y propuestas pedagógicas. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 14(3), 191-209.

Montero, A. (2013). La LOMCE, un análisis descriptivo. En C. Marchena (Dir.), *La LOMCE. Claves para el profesorado* (pp. 7-58). Madrid: Anaya.

Novo, M. (2009). *El desarrollo sostenible. Su dimensión ambiental y educativa.* Madrid: Editorial Humanitas.

OECD. (2004) *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problmeas/OCDE*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Madrid: Santillana.

Oliveira, C. (2015). *Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral, Escuela Universitaria Técnica Industrial de Vigo).

Otero, M. (2013). La teoría Antropológica de lo Didáctico. En M. Otero, M. Fanaro, A. Corica, V. Llanos, P. Sureda, V. Parra. *La Teoría Antropológica de lo didáctico en el Aula de Matemática.* Buenos Aires: Dunken.

Palomares, C. (2006). *Sobrevivir después de Franco. Evolución y Triunfo del Reformismo, 1964-1977.* Madrid: Alianza Editorial.

Pamplona, S. (2014). *Evaluación para el aprendizaje en la asignatura sistemas operativos en modalidad online: Un estudio cualitativo basado en la taxonomía de bloom* (Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid).

Papy, G. (1968). *Matematica Moderna.* Buenos Aires: Editorial Universitaria Buenos Aires.

Paradela, L. (2001). *Una Metodología para la gestión del conocimiento*. Madrid: Universidad Polítécnica de Madrid.

Paulos, J.A. (2016). *El hombre anumérico.* Barcelona: Tusquets.

Pérez, Á. I. (1996). Comprender la enseñanza en la escuela. Modelos metodológicos de investigación educativa. En J. Gimeno, & Á. Pérez, *Comprender y transformar la enseñanza* (pp. 115-136). Madrid: Morata.

Pérez, A. (2000). Las razones de la Ley. En, *Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE* (pp.13-25). Madrid: Grupo Santillana. Madrid.

Pérez, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes. Técnicas y Análisis de Datos.* Madrid: La Muralla.

Pifarré, M., y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias,* 19(2), 297-308.

Postigo, L. (1965). *Matemáticas (Aritmética, Geometría, Álgebra, Trigonometría, Geometría analítica, Análisis matemático).* Barcelona: Ramón Sopena.

Puelles, M. (2000). La LOGSE en el Contexto de las reformas escolares. En, *Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE (pp.* 29-51). Madrid: Grupo Santillana.

Puelles, M. (2002). Evolución de la Educación en España durante el Franquismo. En A. Tiana Ferrer, G. Ossenbach Sauter y F. Saenz Fernández, *Historia de la Educación (Edad Contemporanea)* (págs. 329-349). Madrid: UNED.

Puig Adam, P. (1955). El decálogo del profesor de Matemáticas. En J. Benavente, M.J. Palacios & M. D. de Prada (Ed.), *Didáctica de las matemáticas. Homenaje a Puig Adam* (pp. 42-46). Madrid: MEC.

Pujolás., P. (2008). *Nueve ideas clave. El aprendizaje cooperativo.* Barcelona: Graó.

Pujolás, P. (2009). *Aprendizaje cooperativo y educación inclusiva: Una forma práctica de aprender juntos alumnos diferentes.* Trabajo presentado en las VI Jornadas de Cooperación Educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa, Antigua (Guatemala).

Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación matemática e investigación.* Madrid: Síntesis. Madrid.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en educación secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

Roa Becerra, N. R. (2013). Uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas. *Inventum*, 14, 35-43.

Roa, J., Hidalgo, M., y Garbayo, M. (2016a). *Análisis transpositivo de la enseñanza de la geometría desde 1953 hasta 2016.* Trabajo presentado en el XVI Congreso Nacional y VII Congreso Iberoamericano de Pedagogía, Madrid, UCM.

Roa, J., Hidalgo, M., y Garbayo, M. (2016b). *Los Recorridos de Estudio e Investigación para la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria: resultado de una experiencia piloto.* Trabajo presentado en el XVI Congreso Nacional y VII Congreso Iberoamericano de Pedagogía, Madrid, UCM.

Roa, J., e Hidalgo, M. (2017). *Construcción de un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza de la Geometría elemental en el primer ciclo de la educación secundaria obligatoria en España.* Trabajo presentado en el VIII CIBEM, Madrid, UCM.

Roa, J., e Hidalgo, M. (2018). *Alternativa a la enseñanza monumentalista: los REI cooperativos.* Trabajo presentado en el VI CITAD, Grenoble.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid).

Romero, R. (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Ruiz, J.A. (1979). *El libro… y su profesor. Matemáticas clásicas elementales. Por encima de todo ¡se entiende!.* Madrid: Gráficas reunidas.

Ruíz, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona).

Sampedro, B.E. (2015). Las Tic y la educación social en el siglo XXI. *Revista de Educación Mediática y TIC,* 5(1), 8-24.

Sánchez, E. y Sabrás, T. (1937). *Curso de Geometría Elemental.* Barcelona: Establecimiento Tipográfico de A. Ortega.

Sastre, G. (1981). Investigar y cambiar la escuela. *Cuadernos de pedagogía,* 1.

Schneider, M. (2013), Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD: quel prix payer?. En Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C. &

Sierra, T. A. (Éds). (2017). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l, ecole et dans la société* (pp. 157-184). https://citad4.sciencesconf.org

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: Análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesís doctoral, Universitat Ramon Llul).

Sierra, M. (2008). El centre Belge de Pedagogie de la Mathemátique (1958-1973): nota histórica. *Revista Diálogo Educacional*, 8(25), 633-645.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas de los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid).

Stake, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stewart, I. (2012). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10000 años*. Barcelona: Crítica.

Tebar Cuesta, F. (2012) Las Matemáticas y el Bachillerato a lo largo del tiempo. 1ª Parte. *Revista Suma,* 71, 39-46.

Tebar Cuesta, F. (2013). Las Matemáticas y el Bachillerato a lo largo del tiempo. 2ª Parte. *Revista Suma,* 72, 37-44.

Torrego, J.C., y Negro, A, (2012). *Aprendizaje cooperativo en las aulas. Fundamentos y recursos para su implantación.* Madrid: Alianza.

Treacy, M. y Wiersema, F.D. (1997). *The discipline of market leaders: Choose your customers, narrow your focus, dominateyour market.* Reading, Mass: Perseus Books.

Trejo, R. (2001). Vivir en la Sociedad de la Información. Orden global y dimensiones locales en el universo digital. *Ciencia, Tecnología, Sociedad e Innovación*. OEI. 1.

Valdés, J., y Marsinyach, S. (1976). *Entorno I, Matemáticas.* Madrid: Bruño.

Valdeón, J., Pérez, J. Y Juliá, S. (2006). *Historia de España*. Madrid: Espasa Calpe.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Londres, G. Bretaña: Academic Press.

Vega, L. (1991). Introducción a los Elementos de Euclides. En Euclides, *Los elementos.* Barcelona: Gredos.

Velasco, H. M., y Díaz , Á. (1999). *La lógica de la investigación etnográfica. Un modelo de trabajo para etnógrafos de escuela.* Madrid: Trotta.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170.

Villarroya, F. (1994). El empleo de materiales en la Enseñanza de la Geometría. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 21, 95-104.

Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (1997). *Matemáticas 2.* Madrid: S.M.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago: The University of Chicago.

Warusfel, A. (1971). *Las Matemáticas Modernas*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Wiseman, A., Pilton, J., y Loweu, J. (2011). International educational governance models and national policy convergence. En S. Karin Amos (Ed.) *International educational governance* (pp. 3-18). Bingley: Emerald.

Yin, R. (1989). *Case study research. Design and methods.* Londres: Sage.

Legislación consultada

Ley de Instrucción Pública, de 9 de septiembre de 1857. En BOE de 9-9-1857.

Ley de 8 de septiembre de 1939 modificando el título octavo, libro primero, del código Civil. En BOE-A-1939-11756.

Ley de 26 de febrero de 1953 sobre Ordenación de la Enseñanza Media. En BOE-A-1953-2404.

Decreto-Ley 10/1959 de 21 de julio de ordenación económica. En BOE-A-1959-9920.

Ley 194/1963, de 28 de diciembre, por la que se aprueba el Plan de Desarrollo Económico y Social para el periodo 1964/1967 y se dictan normas relativas a su ejecución. En BOE-A-1963-22668.

Ley 14/1966, de 18 de marzo, de Prensa e Imprenta. En BOE-A-1966-3501.

Ley Orgánica del Estado, número 1/1967, de 10 de enero. En BOE-A-1967-5.

Decreto 193/1967, de 2 de febrero, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Enseñanza Primaria. En BOE-A-1967-2626.

Ley 44/1967, de 28 de junio, regulando el ejercicio del derecho civil a la libertad en materia religiosa. En BOE-A-1967-10949.

Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Custionarios del Bachillerato Elemental. En BOE-A-1967-15919.

Ley 62/1969, de 22 de julio, por la que se provee lo concerniente a la sucesión en la Jefatura del Estado. En BOE-A-1969-915.

Ley 193/1963, de 28 de diciembre, sobre Bases de la Seguridad Social. En BOE-A-1963-22667.

Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. En BOE-A-1970-852.

Decreto 186/1976, de 6 de febrero, por el que se crea la Comisión de Evaluación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. En BOE-A-1976-3352.

Ley 1/1977, de 4 de enero, para la Reforma Política. En BOE-A-1977-165.

Real Decreto-Ley 12/1977, de 8 de febrero, sobre el derecho de asociación política. En BOE-A-1977-3663.

Ley 46/1977, de 15 de octubre, de Amnistía. En BOE-A-1977-24937.

Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria. En BOE-A-1983-23432.

Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación. En BOE-A-1985-12978.

Ley 14/1986, de 25 de abril, General de Sanidad. En BOE-A-1986-10499.

Ley 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. En BOE-A-1990-24172.

Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. En BOE-A-2002-25037.

Ley 13/2005, de 1 de julio, por la que se modifica el Código Civil en materia de derecho a contraer matrimonio. En BOE-A-2005-11364.

Ley 15/2005, de 8 de julio, por la que se modifican el Código Civil y la Ley de Enjuiciamiento Civil en materia de separación y divorcio. En BOE-A-2005-11864.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. En BOE-A-2006-7899.

Ley 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia. En BOE-A-2006-21990.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En BOE-A-2007-238.

Ley Orgánica 3/2007, de 22 de marzo, para la igualdad efectiva de mujeres y hombres. En BOE-A-2007-6115.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. En BOE-A-2007-19184.

Decreto 22/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. En BOCM-A-2007-1972.

Decreto 67/2008, de 19 de Junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato. En BOCM-A-2008-2599

Ley Orgánica 2/2010, de 3 de marzo de salud sexual y reproductiva y de la interrupción voluntaria del embarazo. EN BOE-A-2010-3514.

Reforma del artículo 135 de la Constitución Española, de 27 de septiembre de 2011. En BOE-A-2011-15210.

Real Decreto-ley 3/2012, de 10 de febrero, de medidas urgentes para la reforma del mercado laboral. En BOE-A-2012-2076.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. En BOE-A-2013-12886.

Ley Orgánica 3/2014, de 18 de junio, por la que se hace efectiva la abdicación de Su Majestad el Rey Don Juan Carlos I de Borbón. En BOE-A-2014-6476.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En BOE-A-2015-37.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. En BOE-A-2015-738.

Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. En BOCM-A-2015-1.

Real Decreto 665/2015, de 17 de julio, por el que se desarrollan determinadas disposiciones relativas al ejercicio de la docencia en la Educación Secundaria Obligatoria, el Bachillerato, la Formación Profesional y las enseñanzas de regimen especial, a la formación inicial del profesorado y a las especialidades de los cuerpos docentes de Enseñanza Secundaria. En BOE-A-2015-8043.

Anexos

ANEXOS

ANEXO I. DEFINICIONES GEOMÉTRICAS DEL MER PROPUESTO

D 1. Punto

Aquello que es indivisible en partes

D 2. Línea

Una línea es una longitud sin anchura

D 3. Límite

Aquello que es extremo de algo

D 4. Linea recta

La recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos

D 5. Superficie

Es lo que solo tiene longitud y anchura

D 6. Límites de una superficie

Las líneas que definen los extremos de una superficie

D 7. Superficie plana

La menor superficie de todas las que tienen los mismos límites (lados)

D 8. Figura

Es aquello contenido por uno o varios límites

D 9. Ángulo plano

La inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

D 10. Ángulo rectilíneo

Ángulo comprendido entre dos líneas rectas

D 11. Ángulo recto

El ángulo formado al levantar una recta sobre otra que forma dos ángulos adyacentes iguales entre sí cada uno de los cuales tiene un valor de 90º.

D 12. Perpendicular

La recta que levantada sobre otra forma dos ángulos rectos

D 13. Paralela

Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

D 14. Ángulo agudo

Un ángulo agudo es aquel cuya magnitud es menor que la de un recto.

D 15. Ángulo obtuso

Un ángulo obtuso es aquel cuya magnitud es mayor que la de un recto.

D 16. Ángulo llano

Un ángulo llano es aquel cuya magnitud es equivalente a la de dos rectos.

D 17. Círculo

Figura plana comprendida por una línea llamada circunferencia tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura, llamado centro, son iguales entre sí

D 18. Circunferencia

La línea que define el extremo de un círculo cuyos puntos están situados a la misma distancia del centro del círculo.

D 19. Arco de circunferencia

La línea que describe una porción de una circunferencia

D 20. Diámetro

La línea que une dos puntos de una circunferencia pasando por el centro de la misma.

D 21. Radio

El radio es la mitad del diámetro y la distancia entre el centro de una circunferencia y cualquiera de sus puntos.

D 22. Cuerda

La línea que une dos puntos cualquiera de una circunferencia

D 23. Semicírculo

La figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por el cortada.

D 24. Figuras rectilíneas

Son las comprendidas por rectas

D 25. Triláteras

Son las figuras rectilíneas comprendidas por tres rectas

D 26.Triángulo equilátero

Figura trilátera que tiene los tres lados iguales

D 27. Triángulo isósceles

Figura trilátera que tiene dos lados iguales

D 28.Triángulo escaleno

Figuro trilátera que tiene los tres lados desiguales

D 29. Triángulo rectángulo

Figura trilátera que tiene dos lados formando un ángulo recto

D 30. Triángulo obtusángulo

Figura trilátera que tiene dos lados formando un ángulo obtuso

D 31. Triángulo acutángulo

Figura trilátera que tiene sus lados formando ángulos agudos

D 32. Cuadriláteras

Son las figuras rectilíneas comprendidas por cuatro rectas

D 33. Rectángulo

Figura cuadrilátera cuyos lados son perpendiculares entre sí.

D 34. Cuadrado

Figura cuadrilátera rectangular cuyos lados son iguales entre sí.

D 35. Rombo

Figura cuadrilátera de 4 lados iguales pero no rectangulares

D 36. Romboide

Figura cuadrilátera que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales entre sí y no es equilátera ni rectangular

D 37. Paralelogramo

Figura plana de 4 lados cuyos lados son paralelos 2 a 2.

D 38. Trapecio

Figura plana de 4 lados con dos de ellos paralelos entre sí.

D 39. Multiláteras

Son las figuras rectilíneas comprendidas por más de cuatro rectas

D 40. Polígono

Figura plana multilátera formada por 5 o más lados

D 41. Lado

La parte de una recta que determina una figura rectilínea

D 42. Vértice

El punto donde se cortan dos lados de una figura rectilínea

D 43. Diagonal

El segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono

D 44.Altura

La perpendicular a uno de los lado de una figura que pasa por el vértice opuesto a ese lado.

D 45. Apotema

La línea que une el centro de la circunferencia circunscrita de un polígono regular con el punto medio de uno de sus lados.

D 46. Mediana

La línea que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto a ese lado

D 47. Mediatriz

Recta perpendicular a un segmento cuyos puntos están a la misma distancia de los dos extremos de un segmento

D 48. Bisectriz

La línea que separa un ángulo en dos partes iguales.

ANEXO 2. DEMOSTRACIONES.

Demostración del EG4 sobre proporcionalidad.

$EG4_1$: Construcción de dos triángulos que tengan los mismos ángulos pero lados desiguales.

Si tenemos un triángulo abc y un triángulo ABC cuyos ángulos cab y cba son respectivamente iguales a CAB y CBA. Podemos proceder de la siguiente manera para demostrar que el ángulo acb es igual al ángulo ACB.

Si dibujamos acb dentro de ACB de forma que la línea ab comience en A y esté sobre AB y que la línea ac empiece en A y este sobre AC. Se ve (FIG.22) que los ángulos cab y CAB son el mismo y que como los ángulos cba y CBA son iguales la inclinación de los lados bc y BC es la misma y por tanto ambos lados son paralelos. Esta condición de lados paralelos hace que la inclinación de acb sea igual a la inclinación de ACB demostrando así que en un triángulo si dos ángulos son iguales el tercero también lo es.

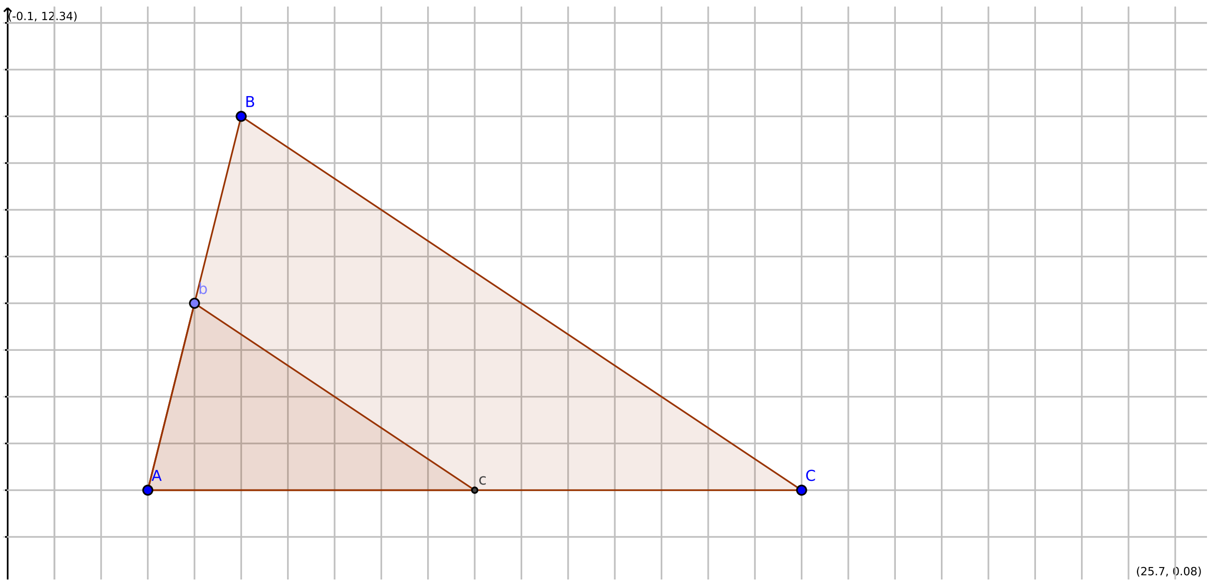


Figura 185. Igualdad del ángulo desconocido. Elaboración propia

Que es lo que queríamos demostrar.

$EG4_2$: Los lados de dos triángulos que se corresponden y tienen los mismos ángulos son proporcionales entre sí.

Si tenemos dos triángulos construidos como en el EG41 y suponemos que el lado ab es la mitad del lado AB deberíamos poder probar que ac es la mitad de AC y que bc es la mitad de BC.

Admitamos que acb tiene la posición ACB. Entonces, si se traza cg paralelamente a AB, podemos ver que al tratarse de un paralelogramo cg es igual a bB y cb es igual a gB (Fig.23).

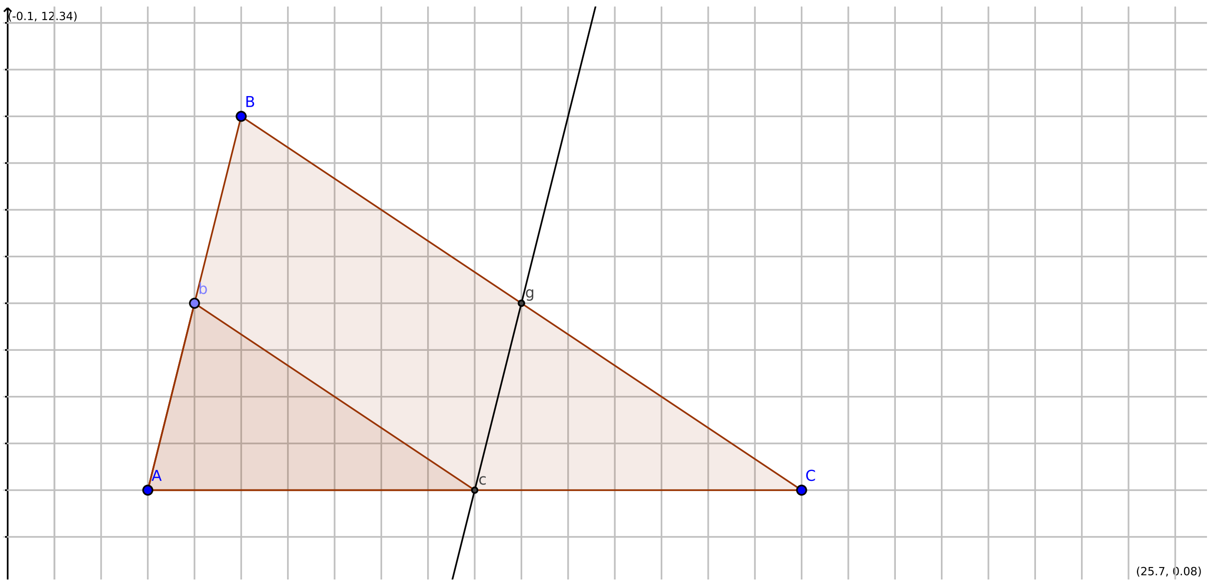


Figura 186. Lados proporcionales en triángulos que se corresponden. Elaboración propia

Al tratarse de dos rectas paralelas los ángulos Ccg y los ángulos Cgc son iguales a los ángulos CAB y CBA. Y como cg es igual a Ab podemos deducir que Ac es igual a cC, es decir que AC es el doble que ac. Que es lo que queríamos demostrar.

Este desarrollo es igualmente válido si el lado ab está contenido cualquier otro número de veces en AB.

La generalización de este principio se puede escribir como: Si los lados AB, BC, AC del triángulo ABC contienen tantas partes P como partes p están contenidas en los lados ab, bc, ac del otro triángulo. Entonces P es la escala con la que se ha construido ABC y p es la escala utilizada para construir abc.

EG4$_3$: Para dividir una línea en un número de partes iguales.

Se levanta una línea que siga un ángulo cualquiera sobre el extremo A del segmento que se pretende dividir. Se llevan sobre esta línea tantas partes como en las que se pretenda dividir el segmento original.

Se traza una línea desde el último de los cortes al que llamaremos C hasta el extremo B y se trazan paralelas a esa línea por cada uno de los cortes. De esta forma se construye una figura similar a la que teníamos en el desarrollo 2 y por tanto se puede afirmar que si AC está dividida en n partes iguales AB también lo estará.

Para aclarar este punto se ofrece la figura 24:

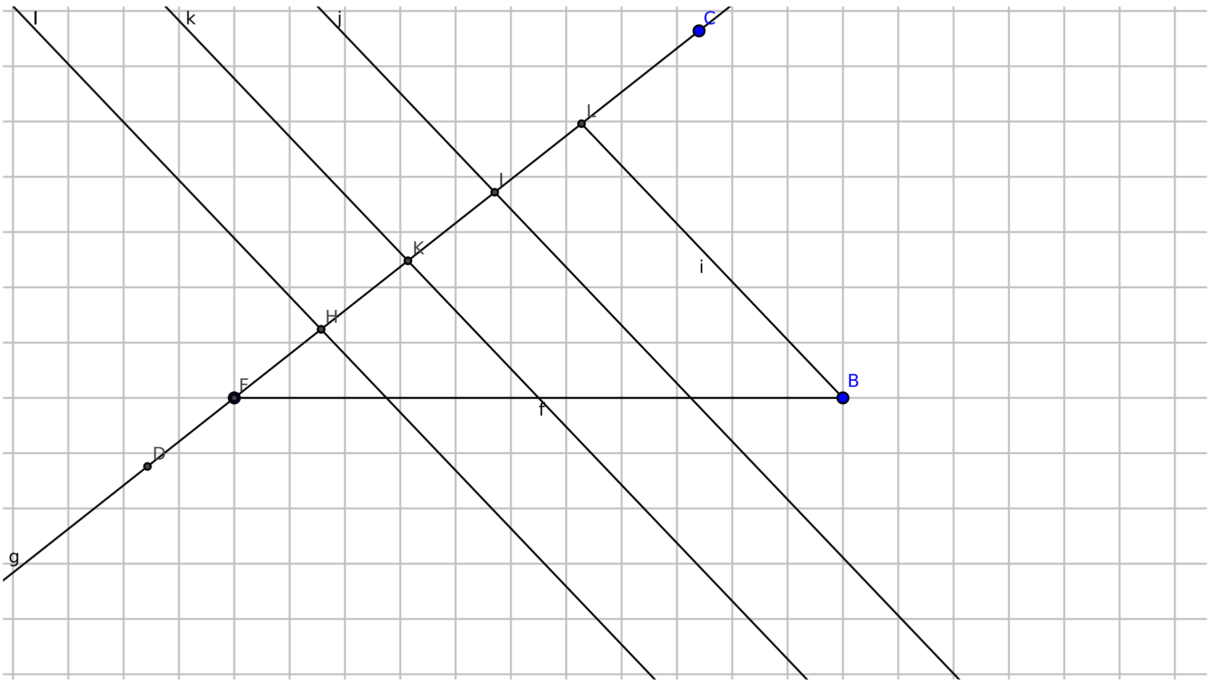


Figura 187. División de un segmento en partes iguales. Elaboración propia

EG4$_4$: Transformar un rectángulo ABCD en otro rectángulo equivalente que tenga una altura diferente dada.

Propongámonos transformar el rectángulo ABCD en otro rectángulo BFEG, que tenga el mismo área y una altura diferente a la que llamaremos BF. El área del rectángulo se puede obtener como el producto de su base por su altura. Si la altura del segundo rectángulo es mayor que la del primero para mantener sus áreas iguales la base del segundo tendrá que ser necesariamente menor que la base del primero.

Dibujamos el rectángulo ABCD de forma que el lado mayor actúe como base y prolongamos los lados verticales AD y BC. Trasladamos sobre la prolongación de BC la altura BF del rectángulo equivalente solicitado.

Levantamos una paralela a AB que pase por F y buscamos el punto de corte con la prolongación de AD. El punto de corte obtenido se denominará I.

Trazamos la diagonal BI que cortará al lado CD en el punto O. Por este punto O se traza una paralela a BF Que cortará a las rectas AB y FI en los puntos E y G y que conformará el rectángulo equivalente solicitado.

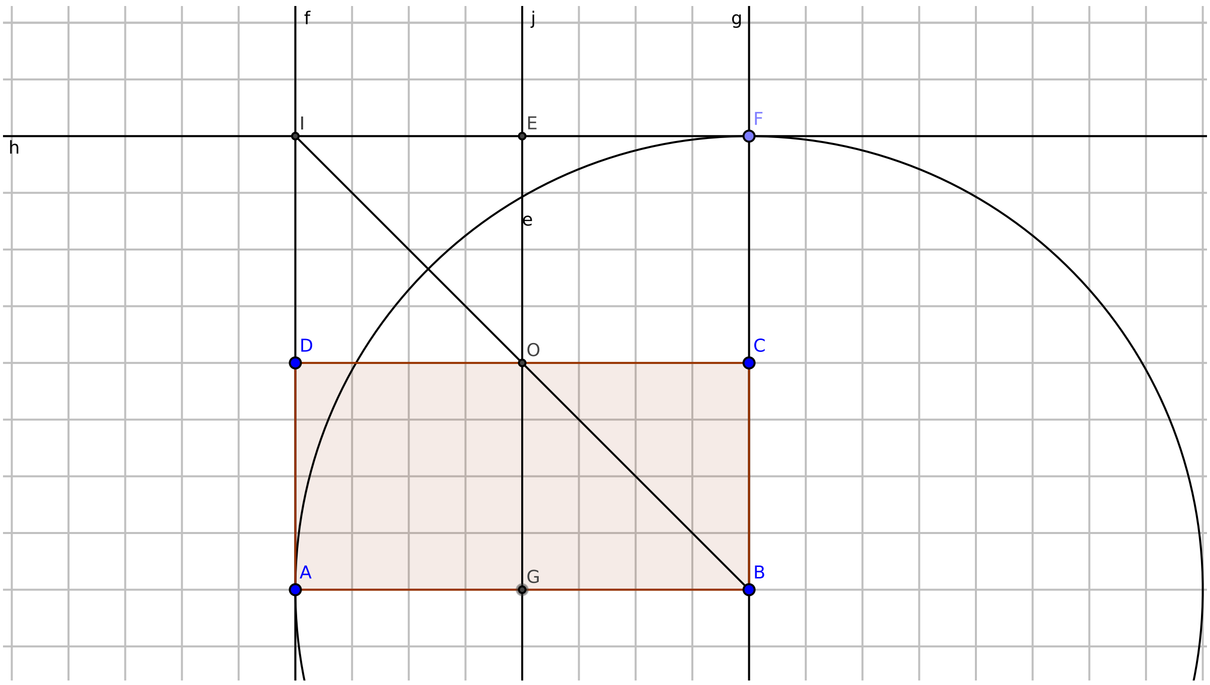


Figura 188. Rectángulo equivalente a uno dado.Elaboración propia

Para probarlo debemos observar el rectángulo ABFI. Este rectángulo se puede dividir a su vez en los triángulos BFI y ABI iguales entre sí. Se puede observar también que los triángulos contenidos DOI y OEI son iguales entre sí y que los triángulos GBO y BCO también lo son.

Por lo tanto si a los triángulos ABI y BFI les quitamos los triángulos DOI y GBO al primero y los triángulos OEI y BCO al segundo, queda que el rectángulo AGOD es igual al rectángulo OCFE. Si añadimos la parte común GBCO a ambos rectángulos obtenemos necesariamente que ABCD es igual a GBFE que es lo que queríamos demostrar.

De la equivalencia de los rectángulos se concluye que AB x BC es lo mismo que BG x BF.

O dicho de otra manera AB es a BG como BF es a BC.

Demostración del Teorema de Pitágoras

A continuación vamos a proceder a realizar una demostración

Sea ABC el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAC.

Digo que el cuadrado de BC es igual a los cuadrados de BA y de AC.

Trácese pues a partir de BC el cuadrado BCDE, y a partir de BA y de AC los cuadrados ABFG y ACHI.

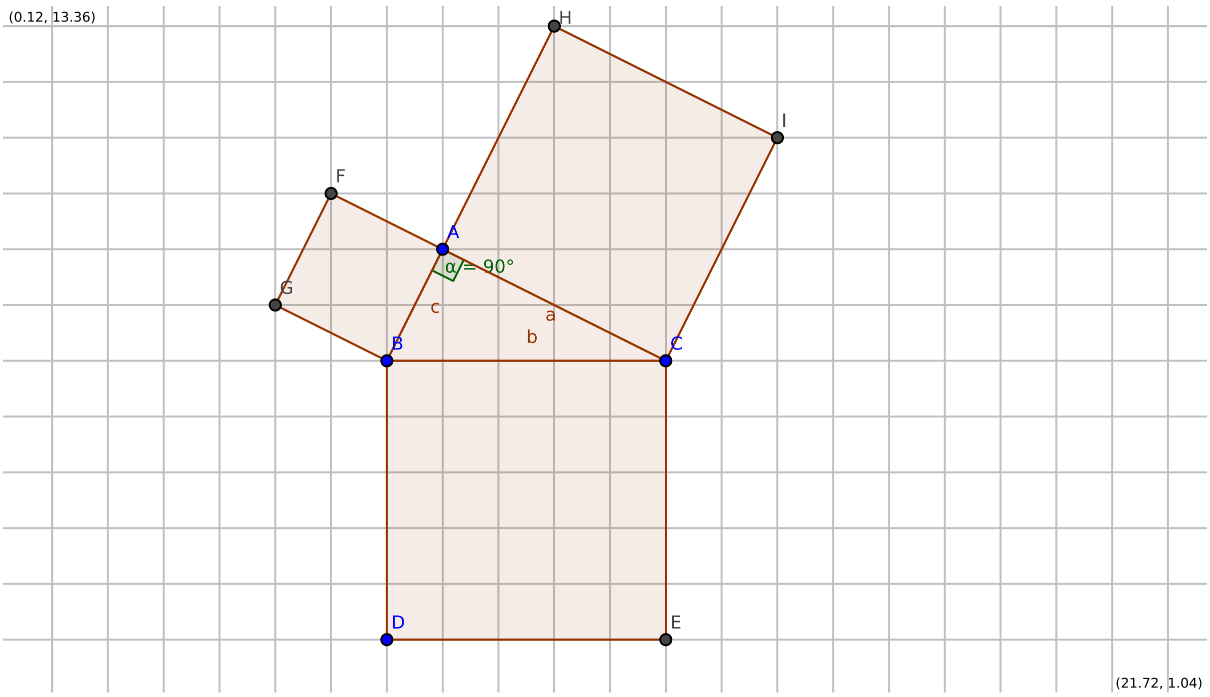


Figura 189. Triángulo rectángulo y cuadrados construidos a partir de sus lados. Elaboración propia

Trácese desde A una paralela a CE y a BD.

Trácese desde A el segmento AD y desde C el segmento GC.

Dado que cada uno de los ángulos BAC y BAF son rectos, entonces en una recta cualquiera BA y por un punto de ella A, las dos rectas AC y AF, no colocadas en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; por tanto , AC y AF están en línea recta. Por la misma razón BA y AH también están en línea recta.

El ángulo DBC es igual al ángulo GBA, porque cada uno de ellos es recto. Si añadimos a ambos el ángulo ABC; entonces el ángulo entero ABD es igual al ángulo GBC puesto que a ambos rectos se les ha añadido un mismo ángulo.

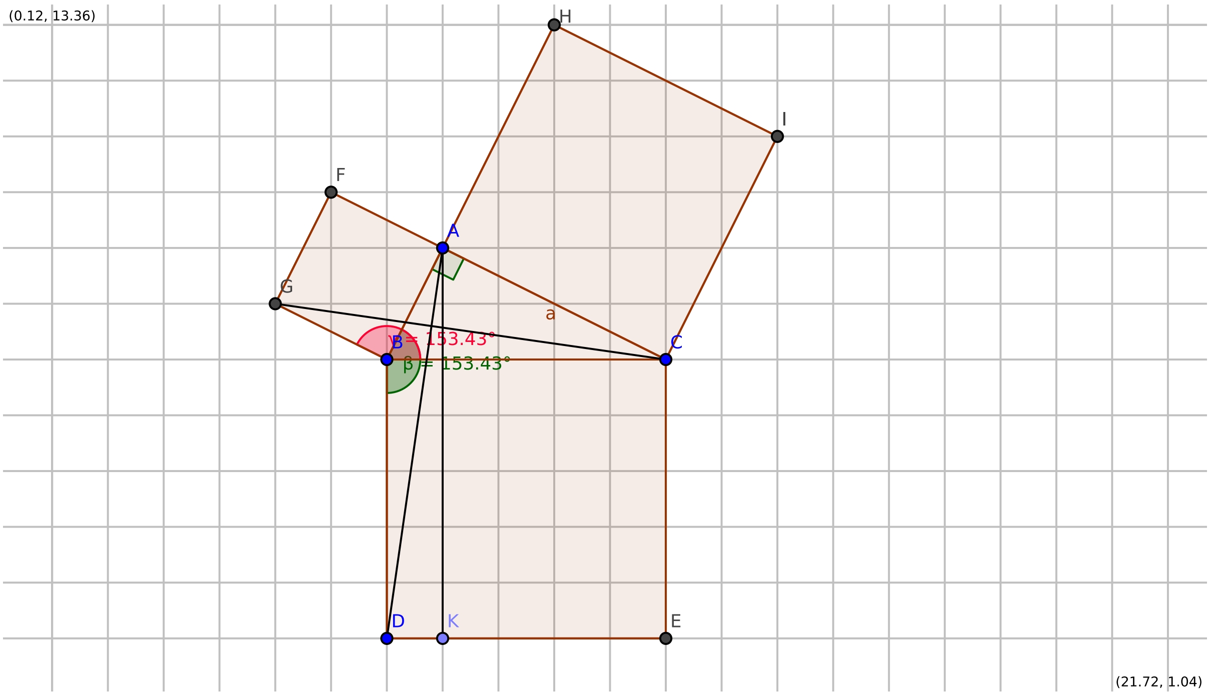


Figura 190. Igualdad de ángulos abd y gbc. Elaboración propia

La base AD es igual a la base GC debido a que BC es igual a BD y a que AB es igual a GB y a que los ángulos comprendidos entre ellos también son iguales. Por tanto los triángulos GBC y ABD son iguales.

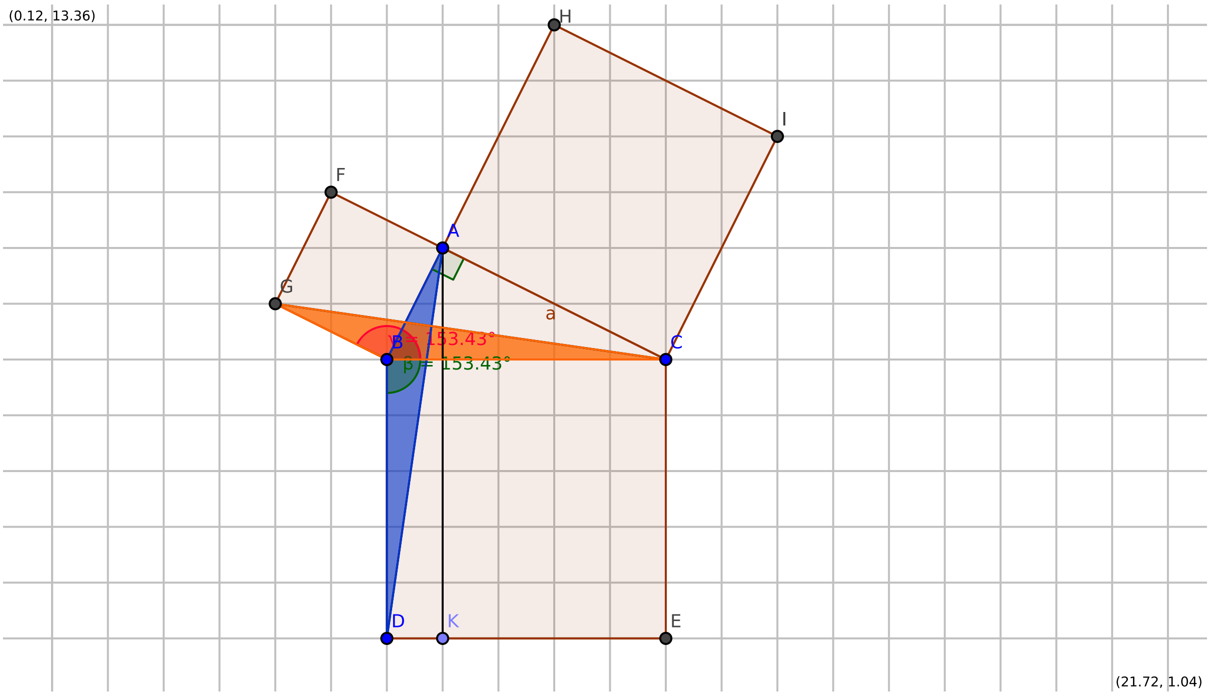


Figura 191. Igualdad de tríangulos ABD y GBC. Elaboración propia

Como el rectańgulo KBDJ y el triángulo ABD comparten la misma base (BD) y están comprendidos entre las misma paralelas podemos decir que la superficie de ABD es la mitad de la superficie de KBDJ.

Por el mismo motivo compartir base y estar comprendidos entre las mismas paralelas el cuadrado ABGF es el doble del triángulo GBC.

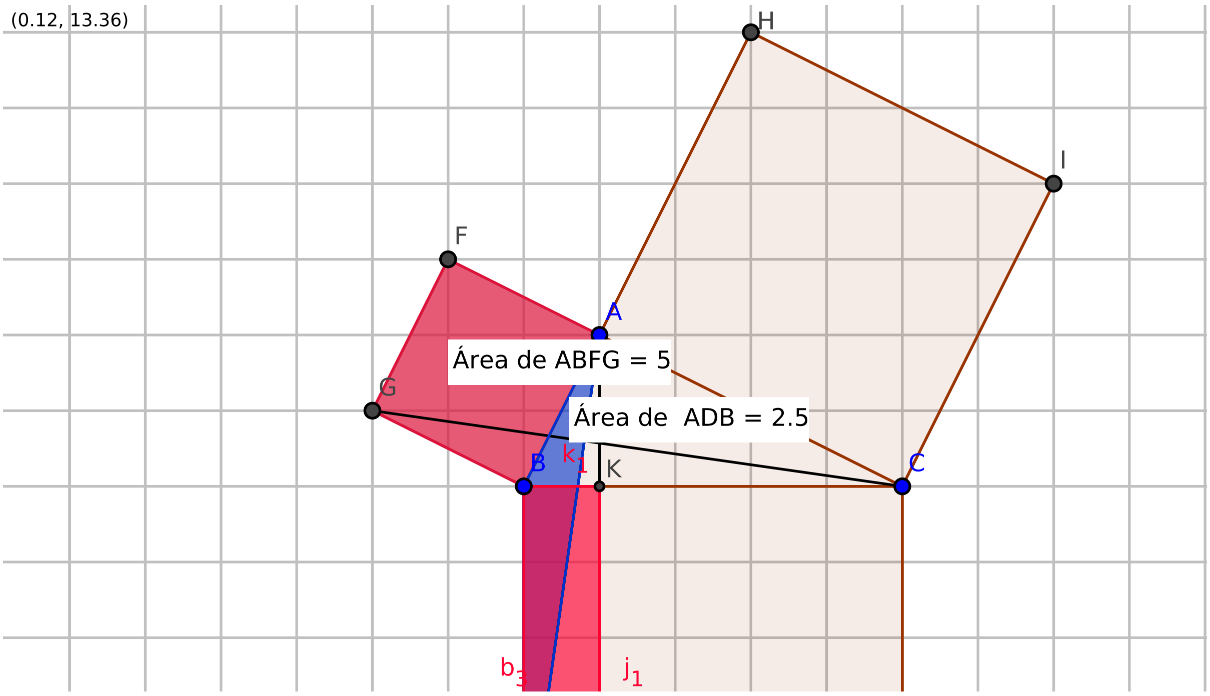


Figura 192. Igualdad de áreas KBDJ y ABFG. Elaboración propia

Y puesto que GBC y ABD sus dobles también lo serán, lo que hace que el cuadrado ABGF sea igual al paralelogramo KBDJ.

De forma semejante se puede demostrar que el rectángulo KCEJ es igual al cuadrado ACIH.

Por tanto la suma de los cuadrados ABGF y ACIH es igual al cuadrado BCDE.

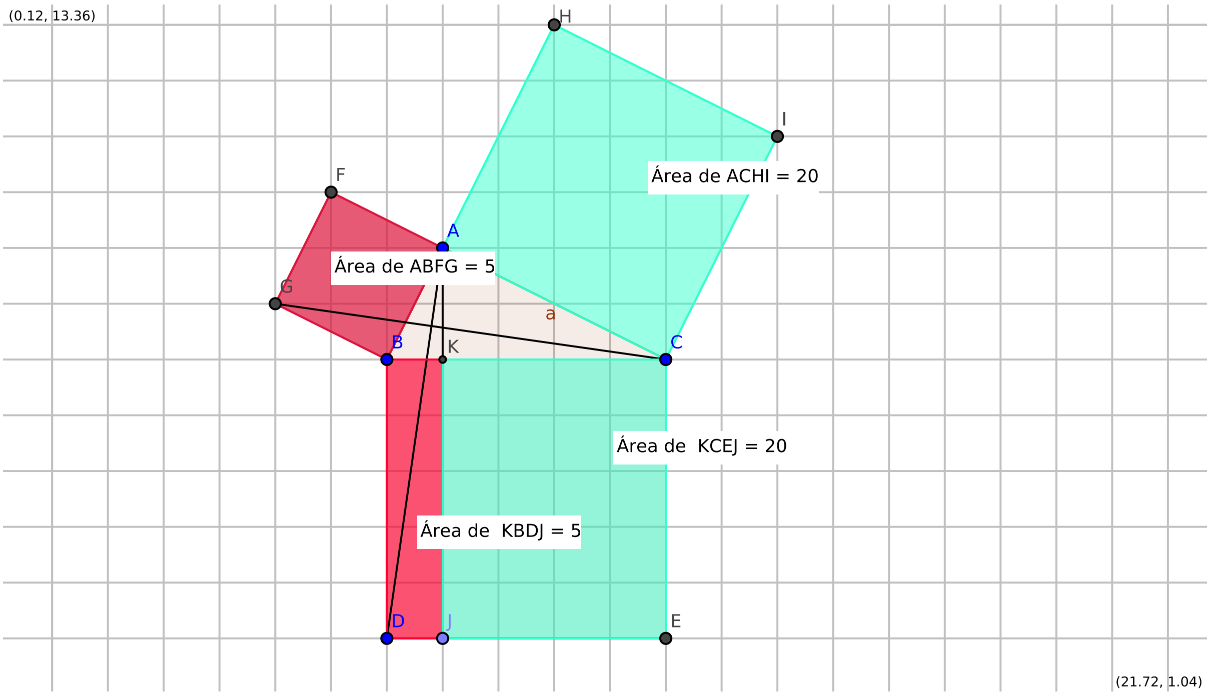


Figura 193. Igualdad de áreas kbdj y abfg. Elaboración propia

Asímismo el cuadrado ABGF ha sido trazado a partir del lado AB el cuadrado ACIH ha sido obtenido a partir de AC y el cuadrado BCDE ha sido obtenido a partir del lado BC.

Por lo tanto

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Que es lo que se quería demostrar.