UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE INFORMÁTICA

Departamento de Ingeniería de Software e Inteligencia Artificial

TESIS DOCTORAL

Generalizaciones de las medidas de especificidad de la T-transitividad para conjuntos difusos intervalo valorados

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Ramón González del Campo Rodríguez Barbero

Director

Luis Garmedia Salvador

Madrid, 2013

Generalizaciones de las medidas de especificidad y de la $\mathcal{T}$-transitividad para conjuntos difusos intervalo valorados

Tesis doctoral presentada por el doctorando Ramón González del Campo Rodríguez Barbero para la obtención del título de doctor en Ingeniería Informática en el departamento de Ingeniería del Software e Inteligencia Artificial *de la* Universidad Complutense de Madrid

Dirigida por el profesor Luis Garmendia.

2.012

Agradecimientos

A mi familia, especialmente a mi hermana Vicky, por su ayuda y comprensión.

A Luis Garmendia por su apoyo constante y buena disposición sin las cuales este trabajo hubiera resultado imposible.

A Javier Montero el soporte económico de su proyecto de investigación que ha hecho posible la financiación de congresos y el desarrollo de las publicaciones.

También quiero agradecer Adela Salvador, R.R. Yager, Jordi Recasens, Bernard De Baets, Humberto Bustince y a todos aquellos los que han ayudado con ideas, colaborado, revisado, ilusionado y aportado su valioso tiempo.

Resumen

Los conjuntos difusos intervalo valorados, $\mathcal{IVFS}s$, han demostrado ser útiles en aquellos problemas en los que es preciso modelar la incertidumbre y la vaguedad. Sin embargo, su desarrollo teórico ha sido relativamente escaso y limitado a un tipo concreto de t-normas, las t-normas t-representables, que reducen los $\mathcal{IVFS}s$ a simples conjuntos difusos superpuestos $\mathcal{FS}s$ renunciando a explotar todo el potencial de esta valiosa generalización de los conjuntos borrosos y de la teoría general de conjuntos.

El objetivo de esta tesis consiste en paliar, en parte, esta carencias teóricas poniendo el énfasis en t-normas generalizadas cualesquiera (ya sean t-representables, pseudo t-representables o no). En concreto, se ha pretendido estudiar las posibilidades de extensión del concepto de medida de especificidad como medida de utilidad de la información contenida en un conjunto borroso intervalo valorado, y de la tranquilidad a la hora de tomar una decisión, y de la medida de especificidad bajo una similaridad de Yager cuando el conocimiento se ve aumentado con una relación de similaridad intervalo valorada; estudiar la extensión de la idea de cierre T-transitivo para una relación $\mathcal{IVFR}s$; y por último la extensión para $\mathcal{IVFS}s$ del teorema de Lee que son aportaciones clave en el estudio de relaciones de T-indistinguibilidad, una importante generalización de las relaciones de equivalencia clásica que necesitan un marco teórico y que tienen un enorme potencial en futuras aplicaciones.

Índice

1. Objetivos y organización de la memoria **5**

1.1. Objetivos 5

1.2. Organización de la memoria 6

2. Estado del arte **8**

2.1. Conjuntos difusos 8

2.2. Medidas de información para conjuntos difusos 11

2.2.1. Especificidad de un conjunto difuso 11

2.3. Relaciones difusas 14

2.3.1. Cierre T-transitivo de una relación difusa 15

2.4. Conjuntos difusos intervalo-valorados 16

2.4.1. Introducción 16

2.4.2. Definiciones previas 18

2.4.3. Conectivas 19

2.5. Otras extensiones de $\mathcal{FS}s$ 22

2.5.1. Conjuntos difusos intuicionistas 22

2.5.2. Conjuntos $\mathcal{L}$-difusos 23

2.5.3. Conjuntos $\mathcal{L}$-difusos intuicionistas 24

2.5.4. Conjuntos difusos intervalo-valorados intuicionistas 24

2.5.5. Conjuntos difusos de tipo 2 25

2.6. Algunas aplicaciones 25

3. Alfa-cortes para $\mathcal{IVFR}s$ **28**

4. Especificidad para $\mathcal{IVFR}s$ **30**

4.1. Especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados 30

4.2. Especificidad conjuntos difusos intervalo valorados bajo similaridades generalizadas 36

5. Cierre $\mathcal{T}$-transitivo para $\mathcal{IVFR}s$ **37**

5.1. Existencia del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de relaciones $\mathcal{L}$-difusas 38

5.2. Cierre $\mathcal{T}$-transitivo de relaciones difusas intervalo valoradas 39

5.3. Algoritmo para calcular el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación difusa intervalo valorada 42

6. Transitividad débil para $\mathcal{IVFR}s$ **47**

7. Cierres débiles para $\mathcal{IVFR}s$ **49**

7.1. Cierres débiles para $\mathcal{IVFR}s$ bajo una propiedad $\mathcal{P}$ 50

7.2. Tipos de cierre y tipos de transitividad para $\mathcal{IVFR}s$ 50

7.3. Cierres débiles bajo $\mathcal{T}$-transitividad para t-normas t-representables 53

7.4. Comparando cierres $\mathcal{T}$-transitivo y cierres débiles $\mathcal{T}$-transitivos para $\mathcal{IVFR}s$ 53

8. Descomposición de similaridades **55**

8.1. Algoritmo para descomponer una $\mathcal{IV}$-similaridad en $\mathcal{IV}$-subsimilaridades . . 57

9. Conclusiones **59**

10. Trabajo futuro **61**

A. Apéndice: Publicaciones asociadas a esta memoria de tesis **70**

1. Objetivos y organización de la memoria

1.1. Objetivos

1. Extender la noción de alfa-corte para $\mathcal{IVFS}s$ verificando que son relaciones de equivalencia si y solo si la relación es una Inf_L-indistinguibilidad.

2. Definir axiomáticamente el concepto de especificidad y las medidas de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$.

3. Obtener medidas de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$ que generalicen conceptos análogos para $\mathcal{FS}s$.

4. Estudiar la posibilidad de extender la noción de cierre $\mathcal{T}$-transitivo para relaciones $\mathcal{L}$-difusas en concreto su existencia y su unicidad.

5. Encontrar expresiones y algoritmos que permitan calcular su cierre $\mathcal{T}$-transitivo tanto para t-normas t-representables como para cualquier t-norma generalizada.

6. Definir un nuevo concepto de transitividad, la $\mathcal{T}$-transitividad débil, que permita representar la idea de transitividad para las $\mathcal{IVFR}s$ que no exija que todos los intervalos de una relación sean comparables.

7. Investigar la relación que este nuevo concepto de transitividad ($\mathcal{T}$-transitividad débil) tiene con la clásica $\mathcal{T}$-transitividad para $\mathcal{FR}s$ y $\mathcal{IVFR}s$.

8. Estudiar una nueva noción de cierre transitivo bajo una propiedad $\mathcal{P}$ que relaje la condición de que exista una relación que cumpla $\mathcal{P}$ y que sea la más cercana a la relación cuyo cierre se está calculando.

9. Estudiar tanto las propiedades de existencia y unicidad del cierre clásico como de este nuevo cierre (cierre débil) para las propiedades $\mathcal{T}$-transitividad y $\mathcal{T}$-transitividad débil.

10. Estudiar si el cierre débil bajo $\mathcal{T}$-transitividad débil proporciona relaciones ”más cercanas” que el cierre clásico bajo $\mathcal{T}$-transitividad.

11. Generalizar el concepto de relación borrosa similaridad y t-puente de una similaridad para $\mathcal{IVFS}s$.

12. Estudiar la descomposición de una similaridad "generalizada" ($\mathcal{IV}$-similaridad) en dos sub-similaridades generalizadas.

1.2. Organización de la memoria

- En la sección 2 se resume un en estado del arte en este campo. El resto de las secciones contienen los resultados originales de la investigación.

- En la sección 3 se resumen los resultados obtenidos en los artículos "Specificity for interval-valued fuzzy sets" publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) [37] y "Specificity for interval-valued fuzzy sets" aceptado en la revista International Journal of Computational Intelligence Systems con un factor de impacto JCR 1,471 en 2010 aunque pendiente de publicación [38]. Se muestran los resultados obtenidos sobre la extensión de la noción de alfa-cortes para $\mathcal{IVFS}s$.

- En la sección 4 se resumen los resultados obtenidos en los artículos "Specificity for interval-valued fuzzy sets" publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) [37] y "Specificity for interval-valued fuzzy sets" aceptado en la revista International Journal of Computational Intelligence Systems con un factor de impacto JCR 1,471 [38]. Se muestran los resultados obtenidos sobre la extensión de las medidas de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$.

- En la sección 5 se resume el artículo "Transitive Closure of $\mathcal{L}$-fuzzy Relations and Interval-valued Fuzzy Relations" [35] publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A). Se estudia la existencia y unicidad del cierre $\mathcal{T}$-transitivo para relaciones $\mathcal{L}$-difusas y para $\mathcal{IVFR}s$ se ofrecen expresiones analíticas y un algoritmo para su cálculo.

- En la sección 6 se resume los resultados contenidos en el artículo "Weak $\mathcal{T}$-transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations" [30], que se adjunta aceptado en el congreso WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) pero no publicado aún, sobre la propiedad débil $\mathcal{T}$-transitividad frente a la $\mathcal{T}$-transitividad "clásica".

- En la sección 7 se resume los resultados contenidos en el artículo "Weak $\mathcal{T}$-transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations" [30], aceptado en el congreso WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) pero no publicado aún, sobre la relación entre los distintos tipos de cierre frente a los distintos tipos de transitividad.

- En la sección 8 se resume los resultado contenidos en el artículo "Decomposition of $\mathcal{IV}$-similarities" [34] publicada en las actas del XVI Congreso español sobre tecnologías y lógicas fuzzy (ESTYLF 2012), sobre la extensión del teorema de Lee para $\mathcal{IVFR}s$.

- En la sección 9 se resumen las conclusiones de la memoria.

- En el apéndice A se incluyen los artículos sobre los que se fundamenta la memoria.

2. Estado del arte

2.1. Conjuntos difusos

En 1.965 Lotfi Zadeh presentó una teoría sobre un nuevo tipo de conjuntos, los conjuntos difusos o conjuntos borrosos, que son conjuntos con una frontera no definida. En el artículo *"Fuzzy Sets"* se muestra la base teórica de los conjuntos borrosos y constituye el punto de partida de las investigaciones posteriores sobre el tema.

La teoría clásica de conjuntos de Cantor no puede modelar fenómenos reales cuyas características son "imprecisas" o "vagas". En concreto, imprecisión y vaguedad son características del lenguaje humano en cuyo procesamiento la teoría de Cantor se enfrenta con problemas difíciles de superar. Algunos ejemplos de está situación: en la frase "Juan es alto" no existe ninguna referencia concreta a una medida, es decir, no sabemos la altura de Juan; podemos afirmar que "Pepe es alto" y, sin embargo, ambos pueden no medir lo mismo. El predicado "ser alto" contiene una gran imprecisión que, paradójicamente, no impide hablar y comunicar ideas sobre la altura de las personas como hacemos habitualmente los humanos. Otros ejemplos de imprecisión: "ser caro", "hacer calor", "x es un número mucho más grande que y", "ser aconsejable", etc.

Desde que Zadeh inventara el concepto de conjunto difuso son muchas, y muy variadas, las diferentes ramas de investigación que aplican estas ideas en Física, Ingeniería, Estadística, Medicina, Teoría de grafos, Ciencias sociales, etc.

A continuación se presentan los conceptos básicos de este tipo de conjuntos.

Sea $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un universo finito.

Definición 2.1 *Un conjunto clásico, A, en un universo X es una función* $f_A : X \to \{0, 1\}$.

Utilizando los conjuntos clásicos es imposible representar el conjunto de los individuos "altos" sin hacer referencia a la altura mínima que partiría el universo de personas en los conjuntos nítidos de "altos" y "no altos".

Definición 2.2 *Un conjunto difuso A en un universo X es una función* $\mu_A : X \to [0, 1]$.

La función A se denomina función de pertenencia y su valor para cada elemento del universo, $A(e_i)$, grado de pertenencia de e_i.

Las siguientes definiciones generalizan los conceptos de igualdad, incluso, intersección, unión y complemento del álgebra de conjuntos clásicos:

Definición 2.3 *[60] Sean A y B dos conjuntos difusos sobre X y μ_A y μ_B sus correspondientes funciones de pertenencia. Diremos que A es igual a B, $A = B$, si se cumple $A(e_i) = B(e_i)$ para todo $i : 1 \ldots n$.*

Definición 2.4 *[60] Sean A y B dos conjuntos difusos sobre X y μ_A y μ_B sus correspondientes funciones de pertenencia. Diremos que A está contenido en B, $A \subseteq B$, si se cumple $A(e_i) \leq B(e_i)$ para todo $i : 1 \ldots n$.*

Definición 2.5 *[60] Un operador $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ es una t-norma si satisface:*

- *T(1,x)=x, T(1,0)=0 (condiciones de contorno)*
- *T(x,y)=T(y,x) (simétrica)*
- *T(x,T(y,z))=T((x,y),z) (asociativa)*
- *Si $w \leq x$ y $y \leq y$ entonces $T(w, y) \leq T(x, z)$ (monótona)*

Una t-norma es una generalización de la conjunción. Generaliza la tabla lógica del operador AND con la que se define la intersección de conjuntos clásicos.

Ejemplo 2.1 *Los siguientes operadores son ejemplos de t-normas continuas:*

- *T(x,y)=min(x,y) (Mínimo)*
- *T(x,y)=x*y (Producto)*
- *T(x,y)=max(0,x+y-1) (t-norma de Lukasiewicz)*

La intersección de dos conjuntos difusos μ_A y μ_B sobre un universo X se puede definir con un operador de t-norma T de la manera siguiente:

$$\mu_{A\cap B} = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

para todo x en X.

Definición 2.6 *[60] Un operador $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una t-conorma si satisface:*

- *S(0,x)=x, S(0,x)=x (condiciones de contorno)*
- *S(x,y)=S(y,x) (simétrica)*
- *S(x,S(y,z))=S((x,y),z) (asociativa)*
- *Si $w \leq x$ y $y \leq y$ entonces $S(w,y) \leq S(x,z)$ (monótona)*

Una t-conorma es una generalización de la disjunción. Generaliza la tabla lógica del operador OR con la que se define la unión de conjuntos clásicos.

Ejemplo 2.2 *Los siguientes operadores son ejemplos de t-conormas:*

- *S(x,y)=max(x,y) (Máximo)*
- *S(x,y)=x+y-x*y (Suma probabilista)*
- *S(x,y)=max(1,x+y) (t-conorma de Lukasiewicz)*

La unión de dos conjuntos difusos μ_A y μ_B sobre un universo X se puede definir con un operador de t-conorma S de la manera siguiente:

$$\mu_{A\cup B} = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

para todo x en X.

Definición 2.7 *[60] Un operador $N : [0,1] \to [0,1]$ es una negación si satisface:*

1. $N(0) = 1$, $N(1) = 0$

2. N es no creciente

Si N satisface además $N(N(x)) = x$ se denomina negación fuerte.

Estas negaciones son una generalización del operador lógico NOT con la que se define el complemento de conjuntos clásicos.

El complemento de un conjunto difuso μ_A sobre un universo X se puede definir con un operador de negación N de la manera siguiente:

$$\mu_{\overline{A}} = N(\mu_A(x))$$

para todo x en X.

Definición 2.8 *Sea A un conjunto difuso. Sus alfa-cortes (o subconjuntos de nivel α), A_α, se definen para todo $\alpha \in [0, 1]$ como:*

$$A_\alpha = \{a_j : A(a_j) \geq \alpha\} \textit{ para todo } j \in [1..n].$$

2.2. Medidas de información para conjuntos difusos

El desarrollo de aplicaciones pone de manifiesto la necesidad de nuevas formas de medir aspectos propios de la teoría de conjuntos borrosos como el grado de borrosidad (entropía) o de nitidez de un conjunto borroso o el grado de información específica o utilidad proporcionada por un conjunto borroso dado por la salida de un sistema experto para tomar una decisión.

2.2.1. Especificidad de un conjunto difuso

El concepto de especificidad proporciona una medida de la cantidad de información contenida en un conjunto difuso. Es una medida que tiende a medir en qué grado un conjunto difuso tiene un solo elemento y solo uno, lo cual sería útil para tomar una decisión en la que se elige un elemento del universo. Está fuertemente relacionada con el inverso de la cardinalidad de un conjunto difuso.

Las medidas de especificidad fueron introducidas por Yager [69] que mostró su utilidad como una medida de la tranquilidad en la toma de decisiones.

Dubois y Prade [22] han investigado las propiedades y las aplicaciones de las medidas de especificidad mostrando el papel clave de este concepto en la teoría del razonamiento aproximado.

Higashi y Klir [45] proponen un concepto similar denominado *no-especificidad.*

El concepto de especificidad está muy relacionado con el concepto de granularidad introducido por Yager [79].

Sea $X = \{e_1, ..., e_n\}$ un universo finito.

Definición 2.9 *Un conjunto difuso μ en X es normal si existe un elemento $e_i \in X$ tal que $\mu(e_i) = 1$*

Definición 2.10 *[70] Sea $[0,1]^X$ la clase de los conjuntos difusos en X. Sea x_j el j^{th} mayor grado de pertenencia de μ. Una medida de especificidad es una función Sp:$[0,1]^X \to [0,1]$ tal que:*

- *$Sp(\mu) = 1$ si y solo si μ es un singleton.*
- *$Sp(\emptyset) = 0$*
- *$Sp(\mu)$ depende de x_j de la siguiente manera:*
  1. $\frac{\partial Sp(\mu)}{\partial a_1} > 0$
  2. $\frac{\partial Sp(\mu)}{\partial a_j} \leq 0$ *para todos* $j \geq 2$

Una medida más débil de especificidad puede ser definida:

Definición 2.11 *Sea $[0,1]^X$ la clase de los conjuntos difusos en X. Sea x_j el j^{th} mayor grado de pertenencia de μ. Una medida de especificidad es una función Sp:$[0,1]^X \to [0,1]$ tal que:*

- *$Sp(\mu) = 1$ if μ es un singleton.*

- $Sp(\emptyset) = 0$

- *Si μ y η son conjuntos difusos normales en X y $\mu \subset \eta$, entonces $Sp(\mu) \geq Sp(\eta)$.*

Definición 2.12 *[72] Sean Sp y Sp' dos medidas de especifidad. Sp es más estricta que Sp', denotado por $Sp \leq Sp'$, si para todos los conjuntos, μ, se verifica: $Sp(\mu) \leq Sp'(\mu)$.*

Yager introdujo [70] la medida de especificidad lineal en un universo finito X como:

$$Sp_{\overrightarrow{w}}(\mu) = a_1 - \textstyle\sum_{j=2}^{n} w_j a_j$$

donde a_j es el j^{th} mayor grado de pertenencia de μ y $\{w_j\}$ es un conjunto de pesos que verifican:

- $w_j \in [0, 1]$

- $\Sigma_{j=2}^{n} w_j = 1$

- $\{w_j\}$ es no creciente.

Yager también define una medida de especificidad bajo el conocimiento de una similaridad para resolver el problema de la chaqueta de Yager [71].

Definición 2.13 *[71] Sea μ un conjunto difuso en X y sea S una similaridad $S : X \times X \to [0, 1]$. Sea π_α el conjunto de clases de equivalencia del α-corte de S. El conjunto de clases de equivalencia bajo el conocimiento de S μ_α/S es el subconjunto de clases de equivalencia del α-corte de S definido de la siguiente manera: una clase de equivalencia de α-corte de S pertenece a μ_α/S si su intersección con el α-corte de μ_α es no vacío.*

Definición 2.14 *[71] Sea $[0, 1]^X$ el conjunto de conjuntos difusos en X. Sea μ un conjunto difuso en X y sea S una similaridad $S : X \times X \to [0, 1]$. La especificidad de μ bajo S es definida de la siguiente manera:*

$$Sp(\mu/S) = \textstyle\int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{card(\mu_\alpha/S)} d\alpha$$

En [27] podemos ver cómo es posible generar para $\mathcal{FS}s$ medidas de especificidad utilizando t-normas, t-conormas y negaciones.

2.3. Relaciones difusas

Definición 2.15 *Sean X_1, X_2 universos. Una relación difusa R, viene representada por la función $R : X_1 \times X_2 \rightarrow [0,1]$ de tal forma que $R(e_k, e_q)$ es el grado de relación entre e_k y e_q donde $e_k \in X_1, e_q \in X_2$.*

Esta definición se puede generalizar fácilmente para n universos.

Definición 2.16 *Una relación difusa $R : X \times X \rightarrow [0,1]$ es α-reflexiva si $R(a_i, a_i) \geq \alpha$ para todo $i \in [1..n]$.*

Una relación difusa es reflexiva si es 1-reflexiva.

Definición 2.17 *Una relación difusa es simétrica si $R(a_i, a_j) = R(a_j, a_i)$ para todo $i, j \in [1..n]$.*

Definición 2.18 *Dada una t-norma T, una relación difusa R es T-transitiva si*

$$T(R(a_i, a_k), R(a_k, a_j)) \leq R(a_i, a_j)$$

para todo $i, j, k \in [1..n]$.

Definición 2.19 *Una relación difusa se denomina T-preorden si es reflexiva y T-transitiva.*

Definición 2.20 *[79] Una relación difusa se denomina T-indistinguibilidad si es reflexiva, simétrica y T-transitiva. En concreto, si una relación difusa es reflexiva, simétrica y min-transitiva se denomina similaridad.*

En concepto de alfa-corte permite entender un conjunto difuso utilizando un conjunto de conjuntos clásicos que representan su "granularidad".

Definición 2.21 *Sea R una relación difusa $R : X^2 \rightarrow [0,1]$. Sus alfa-corte (o subconjuntos de nivel α), $R_\alpha : X^2 \rightarrow \{0,1\}$ se definen como:*

$$R_\alpha(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(e_i, e_j) \geq \alpha; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.3.1. Cierre T-transitivo de una relación difusa

Definición 2.22 *[4] Sea una propiedad P y sea $R : X^2 \to [0,1]$ una relación difusa en un universo finito X. El cierre bajo la propiedad P de R es la relación difusa $R^{\mathcal{P}} : X \times X \to [0,1]$ que satisface:*

1. *$R^{\mathcal{P}}$ satisface P.*
2. *$R \subseteq R^{\mathcal{P}}$.*
3. *Si $R \subseteq R'$ y R' satisfacen P entonces $R^{\mathcal{P}} \subseteq R'$.*

El siguiente resultado se demuestra fácilmente a partir del tercer axioma de la definición de cierre transitivo.

Lema 2.1 *Sea R una relación difusa. Entonces el cierre de R bajo la propiedad P es único.*

Una de las más importantes, probablemente la más importante, propiedades de una relación difusa es la T-transitividad. Es importante tanto para universos finitos (sistemas de toma de decisiones multicriterio [24]), como para universos infinitos [17, 47, 50].

Definición 2.23 *Una relación difusa R en X y una t-norma T es T-transitiva si:*

$$T(R(a_i, a_k), R(a_k, a_j)) \leq R(a_i, a_j)$$

para todo a_i, a_j, a_k en X.

A continuación se muestran algunos resultados previos sobre T-transitividad:

Teorema 2.1 *[3] Sea T una t-norma arbitraria en un universo arbitrario X. Sea R una relación difusa, entonces el cierre T-transitivo de R, R^T, siempre existe.*

Corolario 2.1 *[3] El cierre T-transitivo de R, R^T, es único.*

Definición 2.24 *Sea una t-norma T, la enésima potencia de T, $R^{(n)_T}$, de una relación difusa R en X se define recursivamente de la siguiente manera:*

1. $R^{(1)_T} \equiv R$

2. $R^{(n)_T} \equiv R^{(n-1)_T} \circ_T R$

donde $\circ_T$ *es el operador de composición* $sup - T$

Definición 2.25 *[3] Una t-norma* T *se dice que preserva el supremo si satisface:*

$$T(\sup\{x_i\}, y) = \sup\{T(x_i, y)\}$$

Teorema 2.2 *[3] Sea una relación difusa* R *en un universo arbitrario* X*. Sea* T *una t-norma que preserva el supremo. Entonces su cierre transitivo viene dado por la expresión:*

$$R^T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} R^{(k)_T}$$

Teorema 2.3 *[3] Sea una relación difusa* R *en un universo finito* X *con cardinalidad* n*. Sea* T *una t-norma. Entonces su cierre transitivo viene dado por la expresión:*

$$R^T = \bigcup_{k=1}^{n} R^{(k)_T}$$

Teorema 2.4 *[3] Sea una relación difusa reflexiva* R *en un universo finito* X *con cardinalidad* n*. Sea* T *una t-norma. Entonces su cierre transitivo viene dado por la expresión:*

$$R^T = R^{(n-1)_T}$$

En [25, 26, 32, 51] se muestran otras formas de encontrar relaciones difusas T-transitivas cercanas a una relación difusa dada.

2.4. Conjuntos difusos intervalo-valorados

2.4.1. Introducción

Los conjuntos difusos, $\mathcal{FS}$, fueron introducidos por Zadeh en 1.965 [75]. Desde entonces muchas generalizaciones de conjuntos difusos han sido propuestas para modelar la incertidumbre y la vaguedad en variables lingüísticas sustituyendo el intervalo unidad por otras estructuras como, por ejemplo, los retículos [12, 29, 46]. Los conjuntos difusos de tipo 2 ($\mathcal{FS}2$), introducidos por Zadeh [76, 77, 78], han sido una de estas generalizaciones. Un conjunto difuso de tipo 2 en un universo de discurso X, $\mathcal{FS}2$, es un conjunto difuso cuya función de pertenencia es otro conjunto difuso en [0,1]:

$$A = \{((x, u), \mu_A(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in [0, 1]\}$$

Los conjuntos difusos de tipo 2 han sido ampliamente estudiados y aplicados en muchos casos en los que la incertidumbre puede ser mejor expresada por un conjunto difuso que por un solo valor numérico. El problema con los conjuntos difusos de tipo 2 consiste en su complejidad computacional y la dificultad para un experto de seleccionar el adecuado conjunto difuso como grado de pertenencia de un objeto a una etiqueta lingüística. Esta es la razón por la que algunas simplificaciones han sido propuestas, tales como el uso de solo algunas familias de conjuntos difusos como las trapezoidades y triangulares. Un tipo mas simple de conjuntos difusos de tipo 2 son los conjuntos $\mathcal{L}$-difusos en los cuales los elementos del universo le son asignados un valor en un retículo $\mathcal{L}$.

Los conjuntos difusos intervalo-valorados ($\mathcal{IVFS}s$) [31] fueron introducidos en los años 60 por Grattan-Guinness [41], Jahn [48], Sambuc [59] y Zadeh [76]. Son extensiones de los conjuntos difusos clásicos en los que el grado de pertenencia entre 0 y 1 es sustituido por un intervalo en $[0, 1] \times [0, 1]$. Pueden modelar fácilmente la incertidumbre y la vaguedad porque, a veces, es más fácil para los expertos dar un "intervalo de pertenencia" que un valor de pertenencia a los objetos de un universo. $\mathcal{IVFS}s$ son un caso especial de conjunto difuso de tipo 2 que simplifican los cálculos mientras preservan su expresividad.

Los conjuntos difusos intuicionistas en X ($\mathcal{IFS}s$), introducidos por Atanassov [2], son también una extensión de los conjuntos difusos clásicos en los que cada elemento tiene un grado de pertenencia, μ, y un grado de no pertenencia, ν, que satisfacen: $\mu + \nu \leq 1$.

$A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X, \mu(x), \nu(x) \in [0, 1]\}$

El valor $\pi = 1 - \mu - \nu$ es una medida de la incertidumbre. Las relaciones difusas intuicionistas han sido ampliamente estudiadas (see [7, 8, 19, 21]).

2.4.2. Definiciones previas

Definición 2.26 *[15]* $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$ *es un retículo que satisface:*

1. $L = \{[x_1, x_2] \in [0,1]^2$ *con* $x_1 \leq x_2\}$.

2. $[x_1, x_2] \leq_L [y_1, y_2]$ *si y solo si* $x_1 \leq y_1$ *y* $x_2 \leq y_2$

Además, de forma trivial tenemos:

$[x_1, x_2] <_L [y_1, y_2]$ si y solo si $x_1 < y_1, x_2 \leq y_2$ o $x_1 \leq y_1, x_2 < y_2$
$[x_1, x_2] =_L [y_1, y_2]$ si y solo si $x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

$0_L =_L [0,0]$ and $1_L =_L [1,1]$ son el menor y el mayor elemento de L respectivamente. $\mathcal{L}$ es un retículo completo.

Definición 2.27 *[16] Sea* $\{[v_i, w_i]\}$ *un conjunto de intervalos en* L*. El supremo y el ínfimo son definidos de la siguiente forma:*

1. $Meet\{[v_i, w_i]\} \equiv [infimun\{v_i\}, infimun\{w_i\}]$

2. $Joint\{[v_i, w_i]\} \equiv [supremun\{v_i\}, supremun\{w_i\}]$

Definición 2.28 *[15] Un conjunto intervalo-valorado difuso* A *en un universo* X *es una función:*

$$A = \{(a, [x_1, x_2]) \mid a \in X, [x_1, x_2] \in L\}$$

Definición 2.29 *[15] Sea* X *un universo* A *y* B *dos conjuntos intervalo-valorados. La igualdad entre* A *y* B *se define:* $A =_L B$ *if and only if* $A(a) =_L B(a)$ $\forall a \in X$.

Definición 2.30 *[15] Sea* X *un universo y* A *y* B *dos conjuntos intervalo-valorados difusos. La inclusión de* A *en* B *se define:* $A \subseteq_L B$ *si y solo si* $A(a) \leq_L B(a)$ $\forall a \in X$.

2.4.3. Conectivas

Definición 2.31 *[15] En conjuntos intervalo-valorados una función negación $\mathcal{N}$ es una función decreciente, $\mathcal{N} : L \to L$, que satisface:*

1. $\mathcal{N}(0_L) =_L 1_L$
2. $\mathcal{N}(1_L) =_L 0_L$

Si se cumple $\mathcal{N}(\mathcal{N}([x_1, x_2])) =_L [x_1, x_2]$ para todo $[x_1, x_2]$ en L entonces $\mathcal{N}$ se denomina negación involutiva.

Definición 2.32 *En conjuntos intervalo-valorados una función negación fuerte $\mathcal{N}$ es una función involutiva, $\mathcal{N} : L \to L$, que satisface:*

1. $\mathcal{N}(0_L) =_L 1_L$
2. $\mathcal{N}(1_L) =_L 0_L$

Ejemplo 2.3 *Sea $\mathcal{N}$ la función involutiva definida por la función:*

$$\mathcal{N} : L \to L$$
$$\mathcal{N}([x_1, x_2]) =_L [1 - x_2, 1 - x_1]$$

Entonces $\mathcal{N}$ es un operador de negación para conjuntos intervalo-valorados. Es trivial probar que se cumple: $\mathcal{N}(0_L) =_L 1_L$, $\mathcal{N}(1_L) =_L 0_L$ and $\mathcal{N}(\mathcal{N}([x_1, x_2])) =_L [x_1, x_2]$.

De forma similar se definen las t-normas generalizadas en el retículo $\mathcal{L}$.

Definición 2.33 *[15] Una t-norma generalizada $\mathcal{T}$ es una función estrictamente creciente, simétrica y asociativa, $\mathcal{T} : L^2 \to L$, que verifica: $\mathcal{T}(1_L, [x_1, x_2]) =_L [x_1, x_2]$ for all $[x_1, x_2]$ in L.*

Es fácil probar:

$$\mathcal{T}(Sup_L\{[v_i,w_i]\},[y_1,y_2]) \geq_L Sup_L\{\mathcal{T}([v_i,w_i],[y_1,y_2])\}$$
$$\mathcal{T}(Inf_L\{[v_i,w_i]\},[y_1,y_2]) \leq_L Inf_L\{\mathcal{T}([v_i,w_i],[y_1,y_2])\}$$

Debido a la asociatividad $\mathcal{T}$ la conjunción de tres o mas intervalos puede ser inductivamente definida como:

$$\mathcal{T}(a,\mathcal{T}(b,c)) =_L \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,b),c) =_L a \triangle b \triangle c \text{ where } \triangle =_L \mathcal{T}.$$

donde $a =_L [a_1,a_2]$, $b =_L [b_1,b_2]$ y $c =_L [c_1,c_2]$.

$\underline{T([x_1,x_2],[y_1,y_2])}$ y $\overline{T([x_1,x_2],[y_1,y_2])}$ representan el menor y mayor valor respectivamente de $T([x_1,x_2],[y_1,y_2])$.

Definición 2.34 *[3] Sea $\{x_i\}$ en $[0,1]$. Una t-norma generalizada T en $([0,1],\leq)$ es continua por la izquierda si satisface:*

$$T(Sup\ x_i,y) = Sup\ T(x_i,y)$$

La continuidad por la derecha puede ser definida de forma similar. Esta propiedad también es conocida como sup-preservancia.

Definición 2.35 *[15] Una t-norma generalizada $\mathcal{T}$ es t-representable en $\mathcal{L}$ si existen dos t-normas: T_1 y T_2 (T_1,T_2, en ([0,1],$\leq$)) que verifica:*

$$\mathcal{T}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) =_L [T_1(x_1,y_1),T_2(x_2,y_2)]$$

donde $T_1(v,w) \leq T_2(v,w)$ $\forall v,w \in [0,1]$.

Sea $x =_L [x_1,x_2]$ y $y =_L [y_1,y_2]$ dos intervalos en L:

Ejemplo 2.4 $\mathcal{T} =_L [min(x_1,y_1),min(x_2,y_2)]$ *es t-representable en ([0,1],$\leq$).*

Ejemplo 2.5 *La siguiente t-norma generalizada $\mathcal{T}$ es t-representable:*

$$\mathcal{T}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) =_L [x_1 * y_1, x_2 * y_2]$$

Ejemplo 2.6 *Existen dos generalizaciones de la t-norma de Lukasiewicz [16]:*

- $T_w([x_1, x_2], [y_1, y_2]) =_L$
  $[max(0, x_1 + y_1 - 1), max(0, x_2 + y_2 - 1)]$

- $T_W([x_1, x_2], [y_1, y_2]) =_L$
  $[max(0, x_1 + y_1 - 1), max(0, x_1 + y_2 - 1, x_2 + y_1 - 1)]$

T_w *es t-representable pero* T_W *no.*

Definición 2.36 *[15] Una t-conorma generalizada $\mathcal{S}$ es un operador creciente, conmutativo y asociativo $\mathcal{S} : L^2 \to L$, que satisface: $\mathcal{S}(0_L, [x_1, x_2]) =_L [x_1, x_2]$ y $\mathcal{S}(1_L, [x_1, x_2]) =_L 1_L$.*

Debido a la asociatividad de $\mathcal{S}$ es posible escribir:

$$\mathcal{S}(a, \mathcal{S}(b, c)) =_L \mathcal{S}(\mathcal{S}(a, b), c) =_L a \bigtriangledown b \bigtriangledown c \text{ donde } \bigtriangledown =_L \mathcal{S}.$$

Por ejemplo, $\mathcal{S} = Sup_L$ es una t-conorma generalizada.
Consideremos las siguientes definiciones.

Definición 2.37 *Sea $\{[v_i, w_i]\}$ en L. Una t-norma generalizada $\mathcal{T}$ es continua por la izquierda si y solo si:*

$$\mathcal{T}(Sup_L\{[v_i, w_i]\}, [y_1, y_2]) =_L Sup_L\{\mathcal{T}([v_i, w_i], [y_1, y_2])\}$$

La continuidad por la derecha puede ser definida de forma similar.

Definición 2.38 *Dada una t-norma generalizada $\mathcal{T}$ y una negación generalizada $\mathcal{N}$, el operador:*

$$\mathcal{T}^*_{\mathcal{N}} =_L \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}([x_1, x_2]), \mathcal{N}([y_1, y_2]))$$

es una t-conorma generalizada llamada t-conorma dual de $\mathcal{T}$ con respecto a $\mathcal{N}$.

Una t-norma, una negación y la t-conorma dual de $\mathcal{T}$ con respecto a $\mathcal{N}$ es llamada tripleta de Morgan.

2.5. Otras extensiones de $\mathcal{FS}s$

A continuación se exponen las extensiones de los conjuntos difusos más conocidas. En [20] se muestran algunas relaciones entre estas extensiones.

2.5.1. Conjuntos difusos intuicionistas

Los conjuntos difusos intuicionistas $\mathcal{IFS}s$ fueron introducidos en 1.983 por Atanassov. A diferencia de los conjuntos difusos clásicos, los conjuntos difusos intuicionistas dan un grado de pertenencia y un valor de no pertenencia para cada elemento.

Definición 2.39 *[2] Un conjunto intuicionista A es una función que asigna a cada elemento a de X un grado de pertenencia y un grado de no pertenencia:*

$$A = \{(a, \mu(a), \nu(a)) \mid a \in X, \mu(a), \nu(a) \in [0, 1]\}$$

donde $\mu(a) + \nu(a) \leq 1$. El valor $\pi(a) = 1 - \mu(a) - \nu(a)$ se interpreta como una medida de la incertidumbre para a.

Definición 2.40 *[2] Sean A y B dos conjuntos difusos intuicionistas, la unión, intersección y el complemento se definen de la siguiente manera:*

- $A \cup B = \{(x, max\mu_A(a), \mu_B(a)), (x, min\nu_A(a), \nu_B(a))$ *para todo* $a \in X\}$

- $A \cap B = \{(x, min\mu_A(a), \mu_B(a)), (x, max\nu_A(a), \nu_B(a))$ *para todo* $a \in X\}$

- $A^c = \{(x, \nu_A(a), \mu_A(a))$ *para todo* $a \in X\}$

Gau y Buehrer definieron los conjuntos vagos [28]. Sin embargo, Bustince y Burillo [10] demostraron que la noción de conjunto vago es la misma que la de conjunto difuso intuicionista.

2.5.2. Conjuntos $\mathcal{L}$-difusos

Sea $(L, \leq_L, N)$ un retículo completo donde N es un operador unario, involutivo y no creciente. En los conjuntos $\mathcal{L}$-difusos, $\mathcal{F}_L s$, a cada elemento del universo se le asigna un elemento de $\mathcal{L}$.

Definición 2.41 *[29] Un conjunto $\mathcal{L}$-difuso A en un universo X puede ser representado por la función:*

$$A = \{(a, w) \mid a \in X, w \in L\}$$

Definición 2.42 *[29] Sean A y B dos conjuntos $\mathcal{L}$-difusos, la unión, intersección y el complemento se definen de la siguiente manera:*

- $A \cup B = sup(A(a), B(a))$ *para todo* $a \in X$.
- $A \cap B = inf(A(a), B(a))$ *para todo* $a \in X$.
- $A^c = N(A(a))$ *para todo* $a \in X$.

Definición 2.43 *[18] Sea X un universo A y B dos conjunto L-difusos. La inclusión de A en B se define como: $A \subseteq_L B$ si y solo si $A(a) \leq_L B(a)$ para todo $a \in X$.*

Definición 2.44 *[18] Una función t-norma generalizada $\mathcal{T}$ es un operador monótono creciente,simétrico y asociativo, $\mathcal{T} : L^2 \to L$, que satisface: $\mathcal{T}(1_L, w) =_L w$ para todo w en L.*

Definición 2.45 *[67] Sean X_1 y X_2 dos universos de discurso. Una relación L-difusa $R : X_1 \times X_2 \to L$ es una función:*

$$R = \{((a, b), w) \mid a \in X_1, b \in X_2, w \in L\}$$

2.5.3. Conjuntos $\mathcal{L}$-difusos intuicionistas

En los conjuntos $\mathcal{L}$-difusos intuicionistas $\mathcal{IF_L S}s$ a cada elemento del universo se le asigna un valor de pertenencia y otro de no pertenencia, siendo ambos valores elementos de un retículo.

Sea $(L, \leq_L, N)$ un retículo completo donde N es un operador unario, involutivo y no creciente. En los conjuntos L-difusos $\mathcal{F}_L s$ a cada elemento del universo se le asigna un elemento de L.

Definición 2.46 *[2] Un conjunto L-difuso intuicionista es una función que asigna a cada elemento a de X dos elementos de L.*

$$A = \{(a, \mu_A(a), \nu_A(a) \textit{ tal que } a \in X \textit{ y } \mu_A(a), \nu_A(a) \in L\}$$

donde se satisface: $\mu_A(a) \leq_L N(\nu_A(a))$

Definición 2.47 *[2] Sean A y B dos conjuntos L-difusos intuicionistas, la unión, intersección y el complemento se definen de la siguiente manera:*

- $A \cup B = \{(x, sup\mu_A(a), \mu_B(a)), (x, inf\nu_A(a), \nu_B(a)) \textit{ para todo } a \in X\}$
- $A \cap B = \{(x, inf\mu_A(a), \mu_B(a)), (x, sup\nu_A(a), \nu_B(a)) \textit{ para todo } a \in X\}$
- $A^c = \{(x, \nu_A(a), \mu_A(a)) \textit{ para toto } a \in X\}$

2.5.4. Conjuntos difusos intervalo-valorados intuicionistas

Los conjuntos difusos intervalo-valorados intuicionistas $\mathcal{IVIFS}s$ son un caso particular de los conjuntos L-difusos intuicionistas en los que el retículo es el conjunto de intervalos en [0,1]

Definición 2.48 *[2] Sean dos conjuntos difusos intervalo-valorados $\mu_A : X \to [0,1]^2, \nu_A : X \to [0,1]^2$ Un conjunto L-difuso intuicionista es una función que asigna a cada elemento a de X dos elementos de L.*

$$A = \{(a, \mu_A(a), \nu_A(a) \ \textit{tal que} \ a \in X \ \ y \ \mu_A(a), \nu_A(a) \in L\}$$

donde se satisface: $sup \mu_A(a) + \nu_A(a) \leq 1$

$\mu_A(a) \leq_L N(\nu_A(a))$

Definición 2.49 *[2] Sean A y B dos conjuntos L-difusos intuicionistas, la unión, intersección y el complemento se definen de la siguiente manera:*

- $A \cup B = \{(x, [sup(\underline{\mu_A(a)}, \underline{\mu_B(a)}), sup(\overline{\mu_A(a)}, \overline{\mu_B(a)})], [(x, inf(\underline{\nu_A(a)}, \underline{\nu_B(a)}), (x, inf(\overline{\nu_A(a)}, \overline{\nu_B(a)})]$ *para todo* $a \in X\}$
- $A \cap B = \{(x, [inf(\underline{\mu_A(a)}, \underline{\mu_B(a)}), inf(\overline{\mu_A(a)}, \overline{\mu_B(a)})], [(x, sup(\underline{\nu_A(a)}, \underline{\nu_B(a)}), (x, sup(\overline{\nu_A(a)}, \overline{\nu_B(a)})]$ *para todo* $a \in X\}$
- $A^c = \{(x, \nu_A(a), \mu_A(a))$ *para toto* $a \in X\}$

2.5.5. Conjuntos difusos de tipo 2

El concepto de conjunto difuso de tipo 2 (*type 2 fuzzy set*) fue introducido por Zadeh en 1.975 como una generalización de los conjuntos difusos:

Definición 2.50 *[76] Dado un conjunto* X*, un conjunto difuso de tipo 2,* A*, se define de la siguiente forma:*

$$A = \{(a, x, \mu_a(x) \mid a \in A, x \in [0, 1])\}$$

La función $\mu_a(x)$ representa en grado en el que el valor x es el valor de pertenencia de a a A.

2.6. Algunas aplicaciones

La generalización del la regla de inferencia a través del modus ponens con $\mathcal{IVFS}s$ [11, 15, 39] constituye una pieza clave para el razonamiento aproximado tal y como Tursken lo definió [65]. En general, podemos dividir los métodos en dos categorías: los que usan una adaptación de la regla composicional de inferencia de Zadeh [75] y los que no. La idea de aplicar la regla composicional de inferencia al modus ponens generalizado con $\mathcal{IVFS}s$ lleva a estudiar las relaciones difusas intervalo-valoradas $\mathcal{IVFR}s$. Las propiedades de $\mathcal{IVFR}s$ son analizadas y la composición de tales relaciones es estudiada en [11, 6, 19, 57]. A continuación estas relaciones se utilizan para el cómputo del modus ponens generalizado. Arnould y Tano [1] han construido un sistema experto que utiliza reglas con $\mathcal{IVFS}s$ utilizando el la regla composicional de inferencia de Zadeh. Las aplicaciones que no utilizan la regla composicional de inferencia utilizan el algoritmo propuesto por Gorzalczany en [40].

En [12,64,65,68,70,116,119] se pueden encontrar varios métodos para obtener una conclusión a partir de un sistema de reglas que procesan intervalos, además del procesamiento del modus pones generalizado con $\mathcal{IVFS}s$.

En los problemas de toma de decisiones se procesan muchos tipos de información. La imprecisión suele ser casi siempre una característica de la información. En [23] se analizan varios métodos de procesamiento de la información representada mediante $\mathcal{IVFS}s$. En [43, 52] se pueden ver más métodos de procesamiento de información cuanto se combina información numérica, intervalos y variables lingüísticas. Se pueden ver más aplicaciones en toma de decisiones utilizando $\mathcal{IVFS}s$ en [54, 55, 63].

En el procesamiento de imágenes con $\mathcal{IVFS}s$ se han obtenido muy buenos resultados. Uno de los problemas claves en este tipo de problemas consiste en decidir si un punto pertenece o no al borde de un objeto. En general, se considera que un punto pertenece al borde de un objeto si hay un cambio de intensidad lo suficientemente grande con los puntos adyacentes. En [5] se muestra cómo asociando cada punto a un $\mathcal{IVFS}$ se puede representar el cambio de intensidad respecto de sus adyacentes a través de la longitud del intervalo. El método dado en [5] para detectar los bordes de un objeto sobrepasa a los detectores clásicos que podemos encontrar en la literatura sobre el tema. En [9, 13, 64] se muestra cómo este tipo de conjuntos difusos proporcionan buenos resultados en aquellos casos en los que los expertos no saben determinar fácilmente si un punto pertenece a un objeto o al fondo de la imagen. En general, el uso de $\mathcal{IVFS}s$ en el procesamiento de imágenes proporciona resultados iguales o mejores que otros métodos. Esto se debe a que $\mathcal{IVFS}s$ poseen características que los conjuntos difusos clásicos no poseen. En [66] se muestra cómo se puede eliminar el ruido de una imagen utilizando algoritmos que procesen $\mathcal{IVFS}s$

En *computing with words* definida por Zadeh en [80] $\mathcal{IVFS}s$ se muestran como una herramienta útil para procesar palabras que tienen asociados diferentes significados según en contexto en el que se encuentren. Varios autores consideran necesario utilizar esta generalización de los conjuntos difusos [53].

$\mathcal{IVFS}s$ han sido utilizados también en programación lineal difusa [14, 44]; en economía [62, 74]; en medicina [58, 56]; en robótica [49, 42, 68]; en teoría de la posibilidad [15] y en control [39, 61].

En la mayor parte de los tipos de aplicaciones que se han presentado se ha demostrado que se obtienen mejores resultados utilizando $\mathcal{IVFS}s$ en lugar de $\mathcal{FS}s$ cuando se tiene una gran imprecisión en los grados de pertenencia. Además el utilizar $\mathcal{IVFS}s$ no incrementa la complejidad de los algoritmos, solamente se incrementa el número de operaciones necesarias para cada algoritmo.

3. Alfa-cortes para $\mathcal{IVFR}s$

En esta sección se resumen los resultados obtenidos en los artículos "Specificity for interval-valued fuzzy sets" publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) [37] y "Specificity for interval-valued fuzzy sets" aceptado en la revista International Journal of Computational Intelligence Systems con un factor de impacto JCR 1,471 [38].

Objetivo conseguido:

1 Extender la noción de alfa-cortes para $\mathcal{IVFS}s$.

Se define el α_1, α_2 corte de un conjunto difuso intervalo valorado μ en un universo X:

Definición 3.1 *Sea μ un conjunto difuso intervalo valorado en un universo X. Los α_1, α_2 cortes de μ son subconjuntos de X definidos de la siguiente manera:*

$$\mu_{\alpha_1,\alpha_2} = \{a_i \mid \mu(a_i) \geq_L [\alpha_1, \alpha_2]\}$$

Se define el α_1, α_2 corte de una relación difusa intervalo valorada R en un universo X:

Definición 3.2 *Sea R una relación intervalo valorada $R : X^2 \to L$. El α_1, α_2 corte de R, R_{α_1,α_2}, es una relación nítida (no difusa) definida para todo α_1, α_2 en [0,1] de la siguiente manera:*

$$R_{\alpha_1,\alpha_2}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & R(a_i, a_j) \geq_L [\alpha_1, \alpha_2]; \\ 0, & en \;\; otro \;\; caso. \end{cases}$$

Dada una relación difusa intervalo valorada, $R = [R_{down}, R_{up}]$, se caracteriza su α_1, α_2 corte, R_{α_1,α_2}:

Lema 3.1 *Sea $R = [R_{down}, R_{up}]$ una relación difusa intervalo valorada en X donde R_{down} y R_{up} son relaciones difusas en X, esto es, $R(a_i, a_j) = [R_{down}(a_i, a_j), R_{up}(a_i, a_j)]$ para todo a_i, a_j en X. Entonces, $R_{\alpha_1,\alpha_2}(a_i, a_j) = 1$ si y solo si $R_{down\,\alpha_1}(a_i, a_j) = 1$ y $R_{up\,\alpha_2}(a_i, a_j) = 1$*

Se demuestra que R_{α_1,α_2}, para todo $[\alpha_1, \alpha_2]$ en $[0,1]^2$, determina R.

Proposición 3.1 *El conjunto de todos los α_1, α_2 cortes de una relación difusa intervalo valorada R determina R.*

Se demuestra que R_{α_1,α_2} es una relación de equivalencia si y solo si R es una similaridad intervalo valorada. Por el contrario, para otras t-normas generalizadas distintas de [min,min] R_{α_1,α_2} no es una relación de equivalencia.

Teorema 3.1 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada. R_{α_1,α_2} para cada α_1, α_2 es una relación de equivalencia si y solo si R es una Inf_L-indistinguibilidad generalizada.*

Teorema 3.2 *Sea $R : X^2 \to L$ una $\mathcal{T}$-indistinguibilidad generalizada (con $\mathcal{T} \neq Inf_L$). Entonces, existen algunos α_1, α_2, tal que R_{α_1,α_2} no es una relación de equivalencia.*

Se ofrece una caracterización de las clases de equivalencia para conjuntos difusos intervalo valorados.

Corolario 3.1 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada. Entonces, R es una Inf_L-indistinguibilidad si y solo si $\underline{R}_{\alpha_1}$ y $\overline{R}_{\alpha_2}$ son relaciones de equivalencia para todo α_1, α_2.*

El concepto de conjunto de clases de equivalencia para conjuntos difusos intervalo valorados es muy útil a la de extender el concepto de especificidad bajo similaridades para $\mathcal{FS}s$ (ver sección 4.2).

4. Especificidad para $\mathcal{IVFR}s$

En esta sección se resumen los resultados obtenidos en los artículos ”Specificity for interval-valued fuzzy sets” publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A) [37] y ”Specificity for interval-valued fuzzy sets” aceptado en la revista International Journal of Computational Intelligence Systems con un factor de impacto JCR 1,471 aunque no publicado aún [38].

Se considera que se han cumplido los siguientes objetivos:

2 Obtener para los $\mathcal{IVFS}s$ definiciones axiomáticas de especificidad y especificidad bajo similaridades.

3 Obtener medidas concretas de especificidad para los $\mathcal{IVFS}s$.

4.1. Especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados

Se pretende una extensión del concepto de especificidad sobre $\mathcal{FS}s$ a los conjuntos $\mathcal{IVFR}s$.

La principal dificultad de la generalización de medidas de especificidad para $\mathcal{IVFR}s$ radica en el hecho de que el conjunto de los intervalos no posee una relación de orden total sino parcial. Por ejemplo, una generalización de las definiciones axiomáticas de especificidad o de la medida lineal de especificidad de Yager suponen conocer el j ésimo mayor grado de pertenencia de un conjunto. Esto es problemático pues nada garantiza que dados dos intervalos sean comparables (en el sentido de que podamos decir que uno es mayor que el otro) según el orden leq_L.

En [32] se encuentra un estudio preliminar de los autores sobre este tema.

El problema es resuelto mediante la introducción de los *operadores de transformación* que permita decidir entre una pareja de intervalos el ”mayor”. Se desea una generalización de la relación de orden $\leq_L$. Por lo tanto, se desea que el intervalo [1,1] sea el mayor y el intervalo [0,0] el menor. Se propone una definición axiomática de los operadores de transformación:

Definición 4.1 *Un operador* $f(x,y) : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ *con* $x \leq y$ *se denomina operador de transformación si es continuo, creciente y verifica:*

1. $f(1,1) = 1$
2. $f(0,0) = 0$
3. $f(0,x) > 0$ *for all* $x \in (0,1]$
4. $f(x,1) < 1$ *for all* $x \in [0,1)$

Ejemplo 4.1 *Algunos operadores de transformación:*

- $f(x,y) = \frac{x+y}{2}$
- $f(x,y) = \alpha * x + \beta * y$ *con* $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0$
- $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$

A partir del operador de transformación se establece una relación de orden (total) entre intervalos $\leq_f$ de la siguiente manera: $[x,y] \leq_f [z,t]$ si y solo si $f(x,y) \leq f(z,t)$.

Con esta relación de orden se establece la f-lista de un conjunto $\mathcal{IVFS}s$ que contiene sus grados de pertenencia ordenados según el orden $\leq_f$.

Definición 4.2 *Sea* μ *un conjunto difuso intervalo valorado en* X *y* $\{[x_{1_q}, x_{2_q}]\}$ *para todo* $q :$ $1..n$ *sus intervalos de pertenencia. Sea* f *un operador de transformación. Entonces, la f-lista de* μ *es el conjunto de todos los intervalos de pertenencia de* X*, ordenados decrecientemente con el operador* f*, esto es,* $[x,y] \leq_f [z,t]$ *si y solo s* $f(x,y) \leq f(z,t)$.

Ejemplo 4.2 *Sea* X *un universo con cardinalidad 5. Sea* μ *el siguiente conjunto difuso intervalo-valorado:*

$$\mu = \{[0{,}8, 0{,}9]/e_1, [0{,}2, 0{,}4]/e_2, [0{,}8, 1{,}0]/e_3, [0{,}1, 0{,}2]/e_4, [0{,}0, 0{,}1]/e_5\}$$

Entonces, si $f(x,y) = (x+y)/2$*:*

[x,y]	*f(x,y)*
[0.8,0.9]	*0.85*
[0.2,0.4]	*0.30*
[0.8,1.0]	*0.90*
[0.1,0.2]	*0.15*
[0.0,0.1]	*0.05*

La f-lista de μ es:

$$\{[0{,}8, 1{,}0], [0{,}8, 0{,}9], [0{,}2, 0{,}4], [0{,}1, 0{,}2], [0{,}0, 0{,}1]\}$$

Sobre esta relación de orden, $\leq_f$, se propone una definición axiomática de la especificidad para $\mathcal{IVFR}s$. En concreto, se desea que la especificidad sea 1 si y solo si el conjunto es un "singleton"; que para el conjunto vacío la especificidad sea 0, y que sea creciente si el mayor intervalo crece, según $\leq_L$, y decreciente si crecen, según$\leq_L$, los demás.

Se ofrecen generalizaciones de conjuntos *singleton* y conjuntos *normales* para $\mathcal{IVFR}s$.

Definición 4.3 *Un conjunto difuso intervalo valorado μ en X es un singleton si existe un elemento $a_i \in X$ tal que $\mu(a_i) = 1_L$ y $\mu(a_j) = 0_L$ (para todo $j \neq i$) para los demás.*

Definición 4.4 *Un conjunto difuso intervalo valorado μ en X es normal si existe un elemento $a \in X$ tal que $\mu(a) = 1_L$.*

Definición 4.5 *Sea $([0,1]^2)^X$ el conjunto de los conjuntos difusos intervalo valorado en X. Sea f un operador de transformación. Sea $\{[x_{1_q}, x_{2_q}]\}$ para todo $q = 1..n$ la f-lista de μ. Una f-medida de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados es una función $Sp_f : ([0,1]^2)^X \rightarrow [0,1]$ tal que:*

- *$Sp_f(\mu) = 1$ si y solo si μ es un singleton.*
- *$Sp_f(\emptyset) = 0$.*
- *Si $[x_{1_1}, x_{2_1}]$ se incrementa (según $\leq_L$) entonces $Sp_f(\mu)$ se incrementa.*

- *Si* $[x_{1_q}, x_{2_q}]$ *se incrementa (según* $\leq_L$*) entonces* $Sp_f(\mu)$ *se decrementa para todo* $q : 2..n$.

Definición 4.6 *[33] Sea* $([0,1]^2)^X$ *el conjunto de los conjuntos difusos intervalo valorado en X. Una medida débil de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados es una función Sp:*$([0,1]^2)^X \rightarrow [0,1]$ *tal que:*

- $Sp(\mu) = 1$ *si y solo si* μ *es un singleton.*

- $Sp(\emptyset) = 0$

- *Si* μ *y* η *son conjuntos difusos intervalo valorados normales en* X *y* $\mu \subseteq_L \eta$*, entonces* $Sp(\mu) \geq Sp(\eta)$.

Se muestra la relación entre ambas definiciones axiomáticas de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados.

Lema 4.1 *Si* Sp_f *es una f-medida of especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados entonces* Sp_f *es una medida débil de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados.*

Ejemplo 4.3 *En [73] Yager muestra un caso particular de función de transformación, f, (llamada* Q_F*). Sea* μ *un conjunto difuso intervalo valorado en* X *con* $\mu(a_q) = [x_{1_q}, x_{2_q}]$ *para todo* $q : 1..n$.

$$Q_F(a_i) = f(x_{1_q}, x_{2_q}) \text{ tal que } x \leq f(x,y) \leq y \text{ para todo } x,y.$$

Sea a_i *el elemento de* X *que maximiza* Q_F*. Entonces, la siguiente expresión es una medida de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados:*

$$Sp = Q_F(a_i) - \tfrac{1}{n-1} \textstyle\sum_{\forall k \neq i} Q_F(a_k).$$

Se caracterizan las medidas de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados según su operador de transformación.

Definición 4.7 *Un operador* $G : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ *es un operador de especificidad si es continuo y creciente para el primer argumento, decreciente para los demás y satisface:*

- $G(1, 0.., 0) = 1$
- $G(0, 0.., 0) = 0$

Lema 4.2 *Sea μ un conjunto difuso en X. Sea $\{\mu(a_i)\}$ para todo $i = 1..n$ la lista de grados de pertenencia de μ ordenada decrecientemente. Sea $G : [0,1]^n \to [0,1]$ un operador de especificidad. Entonces $G(\mu(a_1), ..., \mu(a_n))$ es una medida of especificidad para $\mathcal{FS}s$.*

Lema 4.3 *Sea μ un conjunto difuso intervalo valorado en X y Sp_f cualquier f-medida de especificidad sobre μ. Sea $\{[x_{1_q}, x_{2_q}]\}$ para todo $q : 1..n$ la f-lista de μ. Entonces, existe un operador de especificidad $G : [0,1]^n \to [0,1]$ tal que:*

$$Sp_f(\mu) = G(f(x_{1_1}, x_{2_1}), ..., f(x_{1_n}, x_{2_n})) \tag{1}$$

Corolario 4.1 *Sea G una medida de especificidad para $\mathcal{FS}s$. Sea f un operador de transformación. Entonces $G(f(x_{1_1}, x_{2_1}), ..., f(x_{1_n}, x_{2_n}))$ es una f-medida para $\mathcal{IVFS}s$.*

Se determina cuándo una medida de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados es más estricta que otra. Esta relación (una medida de especificidad es más estricta que otra) se caracteriza mediante la relación entre sus operadores de transformación.

Definición 4.8 *Sean Sp_f y Sp'_g dos medidas de especificidad. Sp_f es más estricto que Sp'_g, denotado por $Sp_f \leq Sp'_g$, si para todo conjunto, μ, se verifica: $Sp_f(\mu) \leq Sp'_g(\mu)$.*

Teorema 4.1 *Sp_f es más estricto que Sp'_g si y solo si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo x, y.*

Además, se proporciona una forma de generar medidas de especificidad utilizando t-normas, t-conormas y negaciones para $\mathcal{FS}s$ junto con operadores de transformación.

Teorema 4.2 *Sea f un operador de transformación y $\{\alpha_i\}$ un conjunto de pesos que satisface:*

- $\alpha_j \in (0, 1]$
- $\Sigma_{j=2}^n \alpha_j = 1$

- $\{\alpha_j\}$ *es no creciente.*

Sean T, T', S *y* N, *dos t-normas, una t-conorma y una negación (in [0,1],*$\leq$*) respectivamente. Sea* $\{f(x_{1_k}, x_{2_k})\}$ *la f-lista de un conjunto difuso intervalo valorado* μ*. Entonces*

$$Sp_f(\mu) = T(f(x_{1_1}, x_{2_1})_1, N(S(T'(\alpha_2, f(x_{1_2}, x_{2_2}))), ...$$

$$..., T(\alpha_n, f(x_{1_n}, x_{2_n})))))$$

es una f-medida de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados.

Ejemplo 4.4 *Sea* $T(a,b) = Max\{0, a+b-1\}$,

$N(a) = 1 - a$,

$S(a,b) = Min\{1, a+b\}$,

$T'(a,b) = a * b$:

- *Con* $f(x,y) = \frac{x+y}{2}$, *se obtiene:*

$$Sp_f(\mu) = \frac{1}{2}(x_{1_1} + x_{2_1}) - \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (x_{1_j} + x_{2_j})$$

- *Con* $f(x,y) = \alpha * x + \beta * y$ *con* $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0$, *se obtiene:*

$$Sp_f(\mu) = \alpha * x_{1_1} + \beta * x_{2_1} - \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (\alpha * x_{1_j} + \beta * x_{2_j})$$

- *Con* $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, *se obtiene:*

$$Sp_f(\mu) = \frac{1}{2}(x_{1_1}^2 + x_{2_1}^2) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} \alpha_j * (x_{1_j}^2 + x_{2_j}^2)$$

Los dos primeros casos son extensiones de la medida de especificidad lineal de Yager para $\mathcal{IVFS}s$.

4.2. Especificidad conjuntos difusos intervalo valorados bajo similaridades generalizadas

Se propone una definición axiomática de las medidas de especificidad para conjuntos difusos intervalo valorados bajo similaridades generalizadas.

Definición 4.9 *Sea Sp una medida de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$. $Sp(\mu/S)$ es una medida de especificidad bajo una similaridad generalizada S si se verifica:*

1. $Sp(\mu/S) = 1$ *si y solo si* μ *es un singleton.*

2. $Sp(\emptyset/S) = 0$.

3. $Sp(\mu/Id) = Sp(\mu)$.

4. $Sp(\mu/S) \geq Sp(\mu)$.

Se puede observar que una similaridad generalizada, siempre que no sea la identidad, aumenta el conocimiento que puede contener un $\mathcal{IVFS}$.

Se ofrece una generalización de la medida de especificidad bajo similaridades de Yager . Para ello se define el conjunto de clases de equivalencia basado en el concepto de α_1, α_2 corte de una relación difusa intervalo valorada mostrado en la sección 3.

Definición 4.10 *Sea μ un conjunto difuso intervalo valorado en X y S una similaridad $S : X \times X \to [0, 1]$. Sea π_{α_1,α_2} el conjunto de clases de equivalencia de los α_1, α_2 cortes de S. El conjunto de clases de equivalencia bajo el conocimiento de S $\mu_{\alpha_1,\alpha_2}/S$ es el subconjunto de clases de equivalencia de los α_1, α_2 cortes de S definidos de la siguiente forma: una clase de equivalencia del α_1, α_2 corte de S pertenece a $\mu_{\alpha_1,\alpha_2}/S$ si su intersección con μ_{α_1,α_2} es no vacía.*

Ejemplo 4.5 *Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sea $\mu = \{[0{,}6, 0{,}8]/e_1 + [0{,}7, 0{,}8]/e_2 + [0{,}8, 0{,}8]/e_3 +$*

$[0{,}9, 1{,}0]/e_4\}$ *y*

$$S = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}1, 0{,}2] & [0{,}1, 0{,}2] & [0{,}1, 0{,}2] \\ [0{,}1, 0{,}2] & [1,1] & [0{,}7, 0{,}8] & [0{,}5, 0{,}6] \\ [0{,}1, 0{,}2] & [0{,}7, 0{,}8] & [1,1] & [0{,}5, 0{,}6] \\ [0{,}1, 0{,}2] & [0{,}5, 0{,}6] & [0{,}5, 0{,}6] & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$R_{0{,}7{,}0{,}8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\pi_{0{,}7{,}0{,}8} = \{\{e_1\}, \{e_2, e_3\}, \{e_4\}\}$ $\mu_{0{,}7{,}0{,}8} = \{e_2, e_3, e_4\}$ *y* $\pi_{0{,}7{,}0{,}8}/S = \{\{e_2, e_3\}, \{e_4\}\}$

Proposición 4.1 *Sea μ un conjunto difuso intervalo valorado en X y S una similaridad $S : X \times X \to [0,1]$. Entonces:*

$$Sp(\mu/S) = 2 * \int_0^{\widehat{\alpha_2}} \int_0^{\alpha_2} \frac{1}{card(\mu_{\alpha_1,\alpha_2}/S)} d\alpha_1 \, d\alpha_2 + \int_{\widehat{\alpha_1}}^{\widehat{\alpha_2}} \int_0^{\widehat{\alpha_1}} \frac{1}{card(\mu_{\alpha_1,\alpha_2}/S)} d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

Es una medida de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$.

5. Cierre $\mathcal{T}$-transitivo para $\mathcal{IVFR}s$

En esta sección se muestran los logros más importantes y se resume el artículo "Transitive Closure of $\mathcal{L}$-fuzzy Relations and Interval-valued Fuzzy Relations" [35] publicado en las actas del congreso WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A).

Se han conseguido los siguientes objetivos:

4 Estudiar la posibilidad de extender la noción de cierre $\mathcal{T}$-transitivo para relaciones $\mathcal{L}$-difusas en concreto su existencia y su unicidad.

5 Encontrar expresiones y algoritmos que permitan calcular su cierre $\mathcal{T}$-transitivo tanto para t-normas t-representables como para cualquier t-norma generalizada para $\mathcal{IVFR}s$.

Se pretende estudiar la posibilidad de definir un cierre transitivo de una relación difusa intervalo valorada bajo una t-norma generalizada. En concreto, se pretende investigar las condiciones que se tienen que cumplir para su existencia y unicidad. También se pretende encontrar expresiones analíticas y/o algoritmos que permitan su cálculo.

5.1. Existencia del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de relaciones $\mathcal{L}$-difusas

Dado que el conjunto de los intervalos es un retículo completo se plantea la posibilidad de extender la definición de cierre transitivo de una relación difusa intervalo valorada para un retículo genérico $\mathcal{L}$. También se plantea las cuestiones de su existencia y unicidad.

Sea $\mathcal{L}$ un retículo completo. Se definen las relaciones $\mathcal{L}$-difusas:

Definición 5.1 *Sean X_1 y X_2 dos universos. Una relación $\mathcal{L}$-difusa $R : X_1 \times X_2 \to \mathcal{L}$ es una función:*

$$R = \{((a,b),[x,y]) \mid a \in X_1, b \in X_2, [x,y] \in \mathcal{L}\}$$

donde $x = \underline{R(a,b)}$ y $y = \overline{R(a,b)}$.

Se define la reflexividad, simetría y $\mathcal{T}$-transitividad para relaciones $\mathcal{L}$-difusas:

Definición 5.2 *Una relación $\mathcal{L}$-difusa $R : X^2 \to \mathcal{L}$ es reflexiva si:*

$$R(a,a) =_{\mathcal{L}} 1_{\mathcal{L}} \ \forall a \in X$$

Definición 5.3 *Una relación $\mathcal{L}$-difusa $R : X^2 \to \mathcal{L}$ es simétrica si:*

$$R(a,b) =_{\mathcal{L}} R(b,a) \ \forall a,b \in X$$

Definición 5.4 *Una relación $\mathcal{L}$-difusa $R : X^2 \to \mathcal{L}$ es $\mathcal{T}$-transitiva si:*

$$\mathcal{T}(R(a,b),R(b,c)) \leq_{\mathcal{L}} R(a,c) \ \forall a,b,c \in X$$

Se definen las indistinguibilidades $\mathcal{L}$-difusas:

Definición 5.5 *Una relación $\mathcal{L}$-difusa $R : X^2 \to L$ es una $\mathcal{T}$-indistinguibilidad generalizada si es reflexiva, simétrica y $\mathcal{T}$-transitiva.*

Se define el cierre $\mathcal{P}$ para relaciones $\mathcal{L}$-difusas.

Definición 5.6 *Sea P una propiedad. Sea $R : X^2 \to \mathcal{L}$ una relación $\mathcal{L}$-difusa en un universo X. El cierre P de R es la relación $R^{\mathcal{P}} : X \times X \to \mathcal{L}$ que satisface:*

1. *$R^{\mathcal{P}}$ satisface P.*

2. *$R \subseteq_{\mathcal{L}} R^{\mathcal{P}}$.*

3. *Si $R \subseteq_{\mathcal{L}} R'$ y R' satisface P entonces $R^{\mathcal{P}} \subseteq_{\mathcal{L}} R'$.*

5.2. Cierre $\mathcal{T}$-transitivo de relaciones difusas intervalo valoradas

Se demuestra que el cierre $\mathcal{T}$-transitivo siempre existe para relaciones $\mathcal{L}$-difusas y es único.

Teorema 5.1 *Sea $R : X^2 \to \mathcal{L}$ una relación $\mathcal{L}$-difusa en un universo X y sea $\mathcal{T}$ cualquier t-norma generalizada. Entonces, el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R siempre existe.*

Lema 5.1 *Si R es una relación difusa intervalo valorada, su cierre $\mathcal{T}$-transitivo es único.*

Se caracteriza el cierre $\mathcal{T}$-transitivo para t-normas t-representables.

Proposición 5.1 *Si $\mathcal{T}$ es una t-norma t-representable con T_1 y T_2 ($\mathcal{T} = [T_1, T_2]$) entonces la relación difusa intervalo valorada $R : X^2 \to L$ es $\mathcal{T}$-transitiva si y solo si $\underline{R}$ es T_1-transitiva y $\overline{R}$ es T_2-transitiva.*

Como paso previo a la definición de la n-ésima potencia de una relación difusa intervalo valorada se define la composición $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ de relaciones difusas intervalo valoradas para t-normas y t-conormas cualesquiera.

Definición 5.7 *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$ t-normas y t-conormas generalizadas. Sea $\bigtriangledown$ la t-conorma generalizada n-aria definida a partir de $\mathcal{S}$ por asociatividad. Sean R_1 y R_2 dos relaciones intervalo valoradas en un universo finito $X = \{c_1, ..., c_m\}$. La composición $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ de R_1 se R_2 se define como:*

$$(R_1 \diamond_{(\mathcal{S}\mathcal{T})} R_2)(c_q, c_r) =_L \bigtriangledown_{c_k \in X} \mathcal{T}(R_1(c_q, c_k), R_2(c_k, c_r))$$

donde $\bigtriangledown_{c_k \in X} \mathcal{T}(R_1(c_q, c_k), R_2(c_k, c_r)) =_L \mathcal{T}(R_1(c_q, c_1), R_2(c_1, c_r)) \bigtriangledown ... \bigtriangledown \mathcal{T}(R_1(c_q, c_m), R_2(c_m, c_r))$.

Se utiliza la composición $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ para caracterizar la $\mathcal{T}$-transitividad de una relación intervalo valorada.

Lema 5.2 *R es $\mathcal{T}$-transitiva si y solo si $R \diamond_{Sup_L \mathcal{T}} R \subseteq_L R$.*

Dado que la t-conorma máximo, Sup_L, es con mucho la más utilizada se definen las potencias de una relación difusa intervalo valorada bajo una t-norma generalizada de la siguiente manera:

Definición 5.8 *Dada una t-norma generalizada, $\mathcal{T}$, la $\mathcal{T}$-potencia enésima $R^{(n)\mathcal{T}}$ de una relación difusa intervalo valorada R en X se define recursivamente como:*

1. $R^{(1)\mathcal{T}} \equiv R$
2. $R^{(n)\mathcal{T}} \equiv R^{(n-1)\mathcal{T}} \diamond_{Sup_L \mathcal{T}} R$

Se caracteriza el cierre $\mathcal{T}$-transitivo para una relación difusa intervalo valorada bajo t-normas t-representables.

Teorema 5.2 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma t-representable ($\mathcal{T} = [T_1, T_2]$) y sea $R = [\underline{R}, \overline{R}]$ una relación difusa intervalo valorada. Entonces $R^{\mathcal{T}} = [\underline{R}^{T_1}, \overline{R}^{T_2}]$.*

Se obtienen expresiones para la enésima $\mathcal{T}$-potencia de una relación difusa intervalo valorada bajo t-normas t-representables y pseudo t-representables.

Lema 5.3 *Si $\mathcal{T}$ es t-representable con T_1, T_2 en ([0,1],$\leq$) entonces:*

$$R^{(n)_{\mathcal{T}}} = [\underline{R^{(n)_{T_1}}}, \overline{R^{(n)_{T_2}}}]$$

Lema 5.4 *Si $\mathcal{T}$ es pseudo-t-representable con T, entonces:*

$$R^{(n)_{\mathcal{T}}} = [\underline{R^{(n)_{T}}}, max_{k:1..n}\{\underline{R^{(k-1)_{T}}} \circ_T \overline{R} \circ_T \underline{R^{(n-k)_{T}}}\}]$$

Se ofrecen distintas expresiones del cierre $\mathcal{T}$-transitivo para relaciones difusas intervalo valoradas dependiendo de la naturaleza de la t-norma generalizada: una t-norma generalizada cualquiera, una t-norma t-representable o una t-norma pseudo t-representable.

Teorema 5.3 *Sean X un universo arbitrario y sea $\mathcal{T}$ una t-norma que preserva el supremo. El cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ \forall k \in \mathbb{N}}\{R^{(k)_{\mathcal{T}}}\}$$

Corolario 5.1 *Si $\mathcal{T}$ es t-representable con T_1, T_2 in ([0,1],$\leq$), el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ \forall k \in \mathbb{N}}\{[\underline{R^{(k)_{T_1}}}, \overline{R^{(k)_{T_2}}}]\}$$

Corolario 5.2 *Si $\mathcal{T}$ es pseudo-t-representable con T, el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ \forall k \in \mathbb{N}}\{[\underline{R^{(n)_{T}}}, max_{q:1..k}\{\underline{R^{(q-1)_{T}}} \circ_T \overline{R} \circ_T \underline{R^{(k-q)_{T}}}\}]\}$$

Teorema 5.4 *Sea X un universo finito con cardinalidad n. El cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ k=1..n}\{R^{(k)_{\mathcal{T}}}\}$$

Corolario 5.3 *Si $\mathcal{T}$ es t-representable con T_1, T_2 en ([0,1],$\leq$), el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ k=1..n}\{[\underline{R^{(k)_{T_1}}}, \overline{R^{(k)_{T_2}}}]\}$$

Corolario 5.4 *Si $\mathcal{T}$ es pseudo-t-representable con T, el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ k=1..n}\{[\underline{R^{(n)_{T}}}, max_{q:1..k}\{\underline{R^{(q-1)_{T}}} \circ_T \overline{R} \circ_T \underline{R^{(k-q)_{T}}}\}]\}$$

Teorema 5.5 *Sea X un universo finito con cardinalidad n. Si R es una relación localmente reflexiva, el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L Sup_{L\ k=1..n-1}\{R^{(k)_{\mathcal{T}}}\}$$

Corolario 5.5 *Si $\mathcal{T}$ es t-representable con T_1, T_2 in ([0,1],$\leq$), el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L \{[\underline{R^{(n-1)_{T_1}}}, \overline{R^{(n-1)_{T_2}}}]\}$$

Corolario 5.6 *Si $\mathcal{T}$ es pseudo-t-representable con T, el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es:*

$$R^{\mathcal{T}} =_L \{[\underline{R^{(n-1)_T}}, max_{q:1..n-1}\{\underline{R^{(q-1)_T}} \circ_T \overline{R} \circ_T \underline{R^{(n-1-q)_T}}\}]\}$$

5.3. Algoritmo para calcular el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación difusa intervalo valorada

Sea R una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X con cardinalidad n y sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada. El cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R, $R^{\mathcal{T}}$, se puede computar utilizando el siguiente algoritmo:

for k $\leftarrow$ 1 **until** n **do**
  for i $\leftarrow$ 1 **until** n **do**
    for j $\leftarrow$ 1 **until** n **do**
      R(i,j)$\leftarrow$ $Sup_L(R(i,j), \mathcal{T}(R(i,k), R(k,j)))$
    end for
  end for
end for

A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada $Inf_L(\{[x_1,x_2],[y_1,y_2]\}) =_L [Min(x_1,y_1), Min(x_2,y_2)]$ y sea $R : X \times X \to L$ la siguiente relación difusa intervalo valorada:*

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

El cómputo del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es el siguiente:

$$k = 1: \; R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 2: \; R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}8] \\ & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 3: \; R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 4: \; R^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.2 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada $T_w([x_1, x_2], [y_1, y_2]) =_L [max(0, x_1 + y_1 - 1), max(0, x_2 + y_2 - 1)]$ y sea $R : X \times X \to L$ la siguiente relación difusa intervalo valorada:*

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

El cómputo del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es el siguiente:

$$k = 1: \ R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 2: \ R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}7] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 3: \ R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}8] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 4: \ R^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}8] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.3 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada $T([x_1, x_2], [y_1, y_2]) =_L [W(x_1, y_1), Min(x_2, y_2)]$ y sea $R : X \times X \to L$ la siguiente relación difusa intervalo valorada:*

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

El cómputo del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es el siguiente:

$$k=1:\ R=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k=2:\ R=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0{,}2,0{,}8] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k=3:\ R=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0{,}2,0{,}9] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k=4:\ R^{\mathcal{T}}=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0{,}2,0{,}9] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.4 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada $T_W([x_1,x_2],[y_1,y_2]) =_L [max(0,x_1+y_1-1), max(0,x_1+y_2-1,x_2+y_1-1)]$ y sea $R : X \times X \to L$ la siguiente relación difusa intervalo valorada:*

$$R=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

El cómputo del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de R es el siguiente:

$$k=1:\ R=\begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6,0{,}8] & [0{,}6,0{,}9] & [0,0] \\ & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6,0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 2: \; R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}5] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 3: \; R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}5] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$k = 4: \; R^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}6, 0{,}8] & [0{,}6, 0{,}9] & [0{,}2, 0{,}5] \\ & [1,1] & [0{,}4, 0{,}9] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & [1,1] & [0{,}6, 0{,}9] \\ & & & [1,1] \end{pmatrix}$$

6. Transitividad débil para $\mathcal{IVFR}s$

En esta sección se detallan los teoremas y proposiciones más interesantes del artículo "Weak $\mathcal{T}$-transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations" [30] que se adjunta aceptado en el congreso WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A), sobre la propiedad débil $\mathcal{T}$-transitividad frente a la $\mathcal{T}$-transitividad "clásica".

Los objetivos logrados son:

6 Definir un nuevo concepto de transitividad, la $\mathcal{T}$-transitividad débil, que permite representar de una forma menos restrictiva la idea de T-transitividad para $\mathcal{IVFS}s$.

7 Investigar la relación que este nuevo concepto de transitividad ($\mathcal{T}$-transitividad débil) tiene con la clásica $\mathcal{T}$-transitividad para $\mathcal{FR}s$ y $\mathcal{IVFR}s$.

La noción de $\mathcal{T}$-transitividad para $\mathcal{IVFR}s$ anteriormente expuesta [36] se deriva de una generalización de la noción de T-transitividad para $\mathcal{FR}s$. Sin embargo, esta propiedad impone una condición muy fuerte ya que exige que todos los intervalos sean comparables. Dado que el conjunto de los intervalos es un retículo es posible relajar la transitividad "clásica" de tal forma que la desigualdad solamente se exija para intervalos comparables. Esta nueva propiedad, que también es una generalización de la T-transitividad para $\mathcal{FR}s$, se denomina $\mathcal{T}$-transitividad débil.

Definición 6.1 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada y R una relación difusa intervalo valorada en X. R es débil $\mathcal{T}$-transitiva si:*

$$\mathcal{T}(R(a,b), R(b,c)) \not>_L R(a,c)$$
para todo a, b, c en X

De forma similar se puede definir la débil $\mathcal{T}$-transitividad para $\mathcal{FR}s$:

Definición 6.2 *Sea T una t-norma y R una relación difusa en X. R es débil T-transitiva si:*

$$T(R(a,b), R(b,c)) \not> R(a,c) \text{ para todo } a, b, c \text{ en } X$$

Dado que para el conjunto de valores de pertenencia para $\mathcal{FR}s$ la relación "ser menor o igual que" es lo mismo que la relación "no ser mayor que", T-transitividad y T-transitividad débil coinciden.

Teorema 6.1 *Sea $\mathcal{FR}s^T$ el conjunto de las $\mathcal{FR}s$ T-transitivas . Sea $\mathcal{FR}s^{debil-T}$ el conjunto de las $\mathcal{FR}s$ débil T-transitivas. Entonces:*

$$\mathcal{FR}s^T = \mathcal{FR}s^{debil-T}$$

Sin embargo, para $\mathcal{IVFR}s$ esta situación no se cumple

Teorema 6.2 *Sea $\mathcal{IVFR}s^T$ el conjunto de las $\mathcal{IVFR}s$ $\mathcal{T}$-transitivas. Sea $\mathcal{IVFR}s^{debil-T}$ el conjunto de las $\mathcal{IVFR}s$ débil $\mathcal{T}$-transitivas. Entonces:*

$$\mathcal{IVFR}s^T \subseteq \mathcal{IVFR}s^{debil-T}$$

No todas las relaciones difusas intervalo valoradas débil $\mathcal{T}$-transitivas son $\mathcal{T}$-transitivas:

Ejemplo 6.1 *Sea el universo $X = \{a_1, a_2, a_3\}$. Sea $R : X \times X \to L$ la siguiente relación:*

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}4, 0{,}6] & [0{,}4, 0{,}6] \\ [0{,}4, 0{,}6] & [1,1] & [0{,}5, 0{,}5] \\ [0{,}4, 0{,}6] & [0{,}5, 0{,}5] & [1,1] \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{T} = Inf_L$ entonces R no es Inf_L-transitiva porque:

$$Inf_L(R(a_2, a_1), R(a_1, a_3)) = [0{,}4, 0{,}6] \not\leq_L R(a_2, a_3) = [0{,}5, 0{,}5]$$

pero R es débil Inf_L-transitiva porque:

$$Inf_L(R(a_i, a_k), R(a_k, a_j)) \not>_L R(a_i, a_j)$$
$$\textit{para todo } a_i, a_j, a_k \in X$$

Cuadro 1: Relación entre T-transitividad y débil T-transitividad

Tipo de relacion difusa	T-transitividad vs debil T-transitividad
$\mathcal{FR}s$	$\mathcal{FR}s^T = \mathcal{FR}s^{debil-T}$
$\mathcal{IVFR}s$	$\mathcal{IVFR}s^T \subseteq \mathcal{IVFR}s^{debil-T}$

7. Cierres débiles para $\mathcal{IVFR}s$

En esta sección se detallan los teoremas y proposiciones más interesantes del artículo "Weak $\mathcal{T}$-transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations" [30] que se adjunta aceptado en el congreso WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence (CORE A), sobre la propiedad débil $\mathcal{T}$-transitividad frente a la $\mathcal{T}$-transitividad "clásica", sobre la relación entre los distintos tipos de cierre frente a los distintos tipos de transitividad.

Los objetivos logrados son:

8 Definir un nuevo concepto de cierre transitivo, cierre débil, para la propiedad de $\mathcal{T}$-transitividad y $\mathcal{T}$-transitividad débil.

9 Probar la existencia y unicidad tanto para el cierre clásico como para este nuevo cierre.

10 Estudiar si el cierre débil bajo $\mathcal{T}$-transitividad débil proporciona relaciones "más cercanas" que el cierre clásico bajo $\mathcal{T}$-transitividad.

Dado que la $\mathcal{T}$-transitividad suele ser una propiedad deseable se suele imponer generando el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación difusa (ya sea intervalo valorada o no). Sin embargo, la relación resultante puede ser demasiado diferente de la original. De aquí surge la necesidad de buscar alternativas al cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación difusa intervalo valorada.

En esta sección se plantea la "relajación" de las desigualdades estrictas entre intervalos a través de dos maneras: sustituyendo la $\mathcal{T}$-transitividad por la débil $\mathcal{T}$-transitividad y definiendo un nuevo tipo de cierre, un cierre "débil" no como la relación difusa intervalo valorada más pequeña que satisface una propiedad $\mathcal{P}$ sino como aquella relación que satisface una propiedad $\mathcal{P}$ tal que no existe ninguna relación que satisfaga la propiedad y sea menor que ella.

7.1. Cierres débiles para $\mathcal{IVFR}s$ bajo una propiedad $\mathcal{P}$

Se define el cierre débil bajo una propiedad $\mathcal{P}$ para relaciones difusas intervalo valoradas.

Definición 7.1 *Sea P una propiedad de $\mathcal{IVFR}s$. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X. El P cierre débil de R es la relación difusa intervalo valorada $R^{\sim\mathcal{P}} : X^2 \to L$ que satisface:*

1. *$R^{\sim\mathcal{P}}$ satisface P.*

2. *$R \subseteq_L R^{\sim\mathcal{P}}$.*

3. *No existe ninguna relación R' que cumple P tal que $R \subseteq_L R' \subset_L R^{\sim\mathcal{P}}$.*

Es de destacar que si R satisface P, entonces: $R =_L R^{\sim\mathcal{P}} =_L R^{\mathcal{P}}$.

La existencia de $R^{\mathcal{P}}$ conlleva la existencia de $R^{\sim\mathcal{P}}$ y su unicidad.

Lema 7.1 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada en universo finito X. Si $R^{\mathcal{P}}$ existe entonces $R^{\sim\mathcal{P}}$ existe.*

Lema 7.2 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X. Si $R^{\mathcal{P}}$ existe, entonces $R^{\sim\mathcal{P}}$ existe, es único y verifica que:*

$$R^{\sim\mathcal{P}} =_L R^{\mathcal{P}}$$

7.2. Tipos de cierre y tipos de transitividad para $\mathcal{IVFR}s$

Se investiga la relación entre el cierre ”clásico” y el cierre débil bajo las propiedades de $\mathcal{T}$-transitividad y débil $\mathcal{T}$-transitividad.

El cierre débil bajo $\mathcal{T}$-transitividad de una relación difusa intervalo valorada siempre existe.

Lema 7.3 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa en universo finito X. El cierre débil bajo $\mathcal{T}$-transitividad de R existe, es único y $R^{\sim\mathcal{T}} = R^{\mathcal{T}}$.*

El cierre débil bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad de una relación difusa intervalo valorada no es único. Los lemas 7.4 y 7.5 demuestran esta circunstancia para las t-normas t-representables.

Lema 7.4 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valuada no débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. No existe ninguna relación S débil $\mathcal{T}$-transitiva tal que $S \subseteq_L [\underline{R}^{T_1}, \overline{R}]$ si $\underline{R}^{T_1} \subseteq \overline{R}$.*

Lema 7.5 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valuada no débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. No existe ninguna relación S débil $\mathcal{T}$-transitiva tal que $S \subseteq_L [\underline{R}, \overline{R}^{T_2}]$.*

Se demuestra que el cierre bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad de una relación difusa intervalo valorada no siempre existe.

Lema 7.6 *El cierre bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad de R no siempre existe.*

Pueden existir varios cierres débiles bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad de una relación difusa intervalo valorada.

Lema 7.7 *Sea R una relación difusa intervalo valorada en un universo X y $\mathcal{T}$ una t-norma generalizada arbitraria. Entonces, pueden existir varios cierres débiles bajo débil $\mathcal{T}$-transitivos de R.*

Ejemplo 7.1 *Sea el universo $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada:*

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [1,1] & [0,0{,}9] \\ [1,1] & [1,1] & [0{,}4,0{,}6] \\ [0,0{,}9] & [0{,}4,0{,}6] & [0,0] \end{pmatrix}$$

R no es débil $\mathcal{T}$-transitiva para la t-norma generalizada:

$$\mathcal{T}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [min(x_1, y_1), min(x_2, y_2)]$$

debido a que $\mathcal{T}(R(a_3, a_2), R(a_2, a_3)) = [0{,}4, 0{,}6] >_L R(a_3, a_3) = [0, 0]$.

Es de destacar que existen varias aproximaciones débil $\mathcal{T}$-transitivas que contienen R no comparables, por ejemplo:

$$R_1^{\sim debil-\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [1,1] & [0,0{,}9] \\ [1,1] & [1,1] & [0{,}4,0{,}6] \\ [0,0{,}9] & [0{,}4,0{,}6] & [0,0{,}9] \end{pmatrix}$$

$$R_2^{\sim debil-\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [1,1] & [0,0{,}9] \\ [1,1] & [1,1] & [0{,}4,0{,}6] \\ [0,0{,}9] & [0{,}4,0{,}6] & [0{,}4,0{,}6] \end{pmatrix}$$

De hecho, existen infinitas aproximaciones superiores débil $\mathcal{T}$-transitivas. Sea $\{S_k : X^2 \to L\}$ el conjunto de las relaciones difusas intervalo valoradas definidas de la siguiente manera:

$$S_k(a_i,a_j) = \begin{cases} [z_{k_1}, z_{k_2}], & \text{si } a_i = a_3 \wedge a_j = a_3; \\ R(a_i,a_j), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $[z_{k_1}, z_{k_2}]$ es incomparable con [0,0.9] y [0.4,0.6], es decir, es falso que $[z_{k_1}, z_{k_2}] >_L [0,0{,}9]$ o $[z_{k_1}, z_{k_2}] <_L [0,0{,}9]$ (algo similar ocurre para [0.4,0.6]). Entonces, es fácil probar que S_k es débil $\mathcal{T}$-transitiva para todo k. Más aún, no exist ninguna relación difusa intervalo valoradas débil $\mathcal{T}$-transitiva S_{min} tal que $S_{min} \subseteq_L S_k$ para todo k $\square$.

Nota: todas las aproximaciones superiores débil $\mathcal{T}$-transitivas mostradas están contenidas en el cierre $\mathcal{T}$-transitivo [36] de R:

$$R^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [1,1] & [0,0{,}9] \\ [1,1] & [1,1] & [0{,}4,0{,}9] \\ [0,0{,}9] & [0{,}4,0{,}9] & [0{,}4,0{,}9] \end{pmatrix}$$

En el cuadro 2 se ofrece un resumen de la existencia y unicidad de los tipos de cierre frente a los tipos de $\mathcal{T}$-transitividad.

Cuadro 2: Tipos de cierre y tipos de $\mathcal{T}$-transitividad

Cierres vs propiedad	T-transitividad	débil T-transitividad
cierre	Siempre existe y es único	No existe siempre
cierre débil	Siempre existe y es único	Puede haber varios

7.3. Cierres débiles bajo $\mathcal{T}$-transitividad para t-normas t-representables

Se investigan los cierres débiles bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad para t-normas t-representables. Se buscan expresiones analíticas que permitan su cálculo.

Lema 7.8 *Sea $\mathcal{T}$ una t-norma t-representable tal que $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X. Si $\underline{R}$ es T_1-transitiva o $\overline{R}$ es T_2-transitiva entonces R es débil $\mathcal{T}$-transitiva.*

Teorema 7.1 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. Sea $R^{T_1}_{down}$ definida como $[\underline{R}^{T_1}, \overline{R}]$. Si $\underline{R}^{T_1} \subseteq \overline{R}$ entonces $R^{T_1}_{down}$ es un $R^{\sim debil-\mathcal{T}}$.*

Teorema 7.2 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. Sea $R^{T_2}_{up}$ definida como $[\underline{R}, \overline{R}^{T_2}]$. Entonces $R^{T_2}_{up}$ es un $R^{\sim debil-\mathcal{T}}$.*

7.4. Comparando cierres $\mathcal{T}$-transitivo y cierres débiles $\mathcal{T}$-transitivos para $\mathcal{IVFR}s$

Se demuestra que los cierres débiles bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad ofrecen aproximaciones superiores más cercanas que los cierres bajo $\mathcal{T}$-transitividad para una relación difusa intervalo valorada.

Teorema 7.3 *Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X. Entonces*

$$R^{\sim debil-\mathcal{T}} \not\supseteq_L R^{\mathcal{T}}$$

Lema 7.9 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada no débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. Si $R^{T_1}_{down}$ existe, entonces se satisface:*

$$R^{T_1}_{down} \subseteq_L R^{\mathcal{T}}$$

Lema 7.10 *Sea $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ una t-norma t-representable. Sea $R : X^2 \to L$ una relación difusa intervalo valorada no débil $\mathcal{T}$-transitiva en un universo finito X. Entonces se satisface:*

$$R^{T_2}_{up} \subseteq_L R^{\mathcal{T}}$$

Lema 7.11 *Sea R una $\mathcal{IVFR}$. Sea S una $\mathcal{IVFR}$ definida como $S(a_i, a_j) = [\underline{R(a_i, a_j)}, R'(a_i, a_j)]$ tal que $\underline{R(a_i, a_j)} \leq R'(a_i, a_j)$. Si S es débil $\mathcal{T}$-transitiva, entonces S es un cierre débil bajo $\mathcal{T}$-transitividad débil de R.*

Lema 7.12 *Sea R una $\mathcal{IVFR}$. Puede existir un cierre débil bajo débil $\mathcal{T}$-transitividad de R que no esté contenido en el cierre débil $\mathcal{T}$-transitivo de R.*

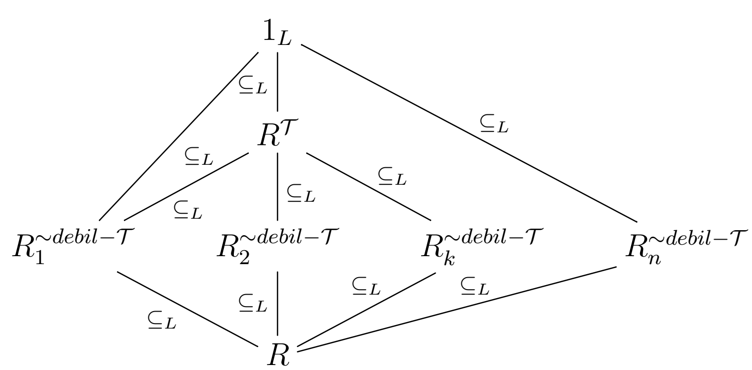


Figura 1: El retículo de cierres de una $\mathcal{IVFR}$

8. Descomposición de similaridades

En esta sección se resume el artículo ”Decomposition of IV-similarities” [34] que se adjunta, publicado en las actas dell XVI Congreso español sobre tecnologías y lógicas fuzzy (ESTYLF 2012).

Los objetivos logrados en él son:

11 Generalizar el teorema de Lee para $\mathcal{IVFR}s$.

12 Generalizar el concepto de similaridad y t-puente de una similaridad para $\mathcal{IVFR}s$.

Definición 8.1 *Sea $\mathcal{M}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [min(x_1, y_1), min(x_2, y_2)]$ una t-norma generalizada. Sea R una relación difusa intervalo valorada en un universo X. R es una $\mathcal{IV}$-similaridad si es reflexiva, simétrica y $\mathcal{M}$-transitiva.*

Definición 8.2 *Sean R y S dos $\mathcal{IV}$-similaridades en los universos X_1 y X_2 con cardinalidades n_1 y n_2 respectivamente. Sea $[t_1, t_2]$ un intervalo en $[0, 1]^2$ tal que $[t_1, t_2] \leq_L \wedge(\wedge(R(a_i, a_j)), \wedge(S(a_k, a_l)))$ para todo i,j,k,l. Entonces el $[t_1, t_2]$-puente entre R y S es una relación difusa intervalo valorada en $X_1 \cup X_2$. B se define de la siguiente manera:*

$$B_{[t_1,t_2];R,S} = \begin{pmatrix} R & ([t_1, t_2])_{n_1\times n_2} \\ ([t_1, t_2])_{n_2\times n_1} & S \end{pmatrix}$$

donde $[t_1, t_2]$ es denominado el intervalo puente.

Se muestra cómo la relación difusa intervalo valorada $B_{[t_1,t_2];R,S}$ ”hereda” la reflexividad, simetría y (min,min)-transitividad de R y S.

Lema 8.1 *Sean R y S dos $\mathcal{IVFR}s$ reflexivas en universos X_1 y X_2. Entonces $B_{[t_1,t_2];R,S}$ es una relación difusa intervalo valorada en $X_1 \cup X_2$ reflexiva.*

Lema 8.2 *Sean R y S dos $\mathcal{IVFR}s$ simétricas en universos X_1 y X_2. Entonces $B_{[t_1,t_2];R,S}$ es una relación difusa intervalo valorada en $X_1 \cup X_2$ simétrica.*

Lema 8.3 *Sean R y S dos relaciones difusas intervalo valorada $(min - min)$-transitivas en universos X_1 y X_2 con cardinalidades n_1 y n_2 respectivamente. Sea $B_{[t_1,t_2];R,S}$ el $[t_1, t_2]$-puente entre R y S. Entonces, $B_{[t_1,t_2];R,S}$ es una relación difusa intervalo valorada (min,min)-transitiva.*

Teorema 8.1 *Sean R y S dos $\mathcal{IV}$-similaridades en universos X_1 y X_2. Sea $B_{[t_1,t_2];R,S}$ el $[t_1, t_2]$-puente entre R y S. Entonces, $B_{[t_1,t_2];R,S}$ es una $\mathcal{IV}$-similaridad en $X_1 \cup X_2$.*

Se demuestra que una $\mathcal{IV}$-similaridad posee un intervalo mínimo.

Lema 8.4 *Sea R una relación difusa intervalo valorada en un universo finito X. Si R es una $\mathcal{IV}$-similaridad entonces existe un intervalo $R(a_p, a_q)$ tal que $R(a_p, a_q) \leq_L R(a_i, a_j)$ para todo i, j.*

Se define y estudia el concepto de I-subsimilaridad para generalizar el teorema de Lee.

Definición 8.3 *Sea R una $\mathcal{IV}$-similaridad en X. Sea $I \subseteq X$ un subconjunto de X. Una subsimilaridad de R restringida a T $(R)_I$ se define como $(R)_I : I \times I \to [0,1]^2$ tal que $(R)_I(a_r, a_s) = R(a_r, a_s)$ para todo a_r y a_s están en I. $(R)_I$ se denota I-subsimilaridad de R.*

Lema 8.5 *Sea R una $\mathcal{IV}$-similaridad en X. Cualquier I-subsimilaridad de R en $I \subseteq X$ es una $\mathcal{IV}$-similaridad.*

Lema 8.6 *Sea C una $\mathcal{IV}$-similaridad y $C(a_p, a_q)$ el mínimo valor de C. Sea $I = \{a_i \mid a_i \in X$ y $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$ y $I' = X \setminus I$. Entonces, $C(a_i, a_j) >_L C(a_p, a_q)$ para todo a_i y a_j en I'.*

Lema 8.7 *Sea C una $\mathcal{IV}$-similaridad y $C(a_p, a_q)$ el mínimo valor de C. Sea $I = \{a_i \mid a_i \in X$ y $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$ y $I' = X \setminus I$. Entonces, $C(a_i, a_j) =_L C(a_p, a_q)$ para todo a_i en I y para todo a_j en I'.*

Teorema 8.2 *Sea C una $\mathcal{IV}$-similaridad en un universo X con cardinalidad n. Entonces, existen dos similaridades (R, S) y un intervalo $[t_1, t_2]$ que verifica:*

$$C = P_\pi(B_{[t_1,t_2];R_{n_1\times n_1},S_{n_2\times n_2}})$$

para alguna permutación π.

n_1 y n_2 son las cardinalidades de los universos de R y S respectivamente y $[t_1, t_2]$ es el valor mínimo de R y S.

8.1. Algoritmo para descomponer una $\mathcal{IV}$-similaridad en $\mathcal{IV}$-subsimilaridades

Se expone un algoritmo que descompone una $\mathcal{IV}$-similaridad en dos $\mathcal{IV}$-subsimilaridades con:

- *Entrada*: Una $\mathcal{IV}$-similaridad C en X con cardinalidad n tal que $n \geq 2$.
- *Salida*: Dos $\mathcal{IV}$-subsimilaridades R,S en X_1, X_2 tal que $X = X_1 \cup X_2$ y un intervalo puente t tal que $C = P_\pi(B_{[t_1,t_2];R,S})$
- El algoritmo funciona de la siguiente manera:
  - *Paso 1*: Búsqueda del intervalo mínimo de C (siempre existe por el lema 8.4): $t = [a_p, a_q]$.
  - *Paso 2*: Elección de X_1 tal que $X_1 \subset X$. Cálculo de I tal que $I = \{a_i \mid a_i \in X_1$ y $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$
  - *Paso 3*: Cálculo de $R \leftarrow C_I$ y $S \leftarrow C_{X\setminus I}$

A continuación se ofrece un ejemplo.

Ejemplo 8.1 *Sea C una $\mathcal{IV}$-similaridad:*

$$C = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}1, 0{,}2] & [0{,}8, 1] \\ [0{,}1, 0{,}2] & [1,1] & [0{,}1, 0{,}2] \\ [0{,}8, 1] & [0{,}1, 0{,}2] & [1,1] \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}8,1] \\ [0{,}8,1] & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} [1,1] \end{pmatrix}$$

y

$$t = [0{,}1, 0{,}2]$$

$$B_{t;R,S} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0{,}8,1] & [0{,}1,0{,}2] \\ [0{,}8,1] & [1,1] & [0{,}1,0{,}2] \\ [0{,}1,0{,}2] & [0{,}1,0{,}2] & [1,1] \end{pmatrix}$$

9. Conclusiones

La teoría de conjuntos borrosos, no sólo es una potente herramienta de inteligencia artificial que permite modelar y aprender información con incertidumbre, también es una extensión de la teoría de conjuntos clásica, el caso particular en que la información es nítida. Sin embargo esta generalización da lugar a múltiples lógicas, con propiedades algebraicas diferentes, que sólo coinciden en ser iguales en el caso nítido. El estudio teórico de las diferentes familias de lógicas, especialmente las continuas, hace que las numerosas aplicaciones, especialmente en control, tengan un sólido fundamento teórico.

La teoría de conjuntos borrosos intervalo valorados, a su vez, extiende la teoría de conjuntos borrosos al caso particular en que los intervalos de pertenencia son puntos en [0, 1]. Esta extensión enriquece enormemente el ámbito de estudio teórico, al valorar las características del universo de discurso sobre un retículo, sin relación de orden total. La nueva extensión ofrece numerosos campos nuevos de estudio todavía inexplorados. En esta tesis se exploran y se aportan resultados sobre la extensión de dos de ellos: las medidas de especificidad de conjuntos borrosos intervalo valorados y la T-transitividad de relaciones borrosas.

En el campo de las medidas de especificidad, partiendo de los conceptos de R. R. Yager sobre medidas de utilidad de la información, encontramos que sus medidas requieren la ordenación de los grados de pertenencia, cosa que no se puede hacer en un retículo sin la aportación y definición de una función de transformación. Algunos resultados concretos son:

- Una definición axiomática de las medidas de especificidad parametrizada por los operadores de transformación.
- Una expresión que permite generar medidas de especificidad para $\mathcal{IVFS}s$.
- Una extensión para $\mathcal{IVFS}s$ de las medidas de especificidad bajo el conocimiento añadido de similaridades.

En el estudio de relaciones borrosas, se encuentran de especial importancia en aplicaciones las similaridades, T-indistinguibilidades para representar información de como se parecen objetos de un universo, ya que generalizan las relaciones de equivalencia, y los T-preórdenes que encuentran aplicaciones para representar conjuntos de reglas y aplicar el modus ponens generalizado y hacer razonamiento aproximado. Todas estas relaciones requieren la importante propiedad T-transitiva, que permite garantizar la obtención de todo el conocimiento aprendible y genera consecuencias de Tarski cuando se aplica la regla composicional de inferencia. Al ser las relaciones borrosas un retículo, se puede estudiar dicha propiedad imponiendo la comparación (T-transitividad generalizada) sólo imponiéndola cuando los grados son comparables, garantizando que no hay ciclos intransitivos (T-transitividad generalizada débil). Así mismo, aparecen nuevos conceptos del importante cierre transitivo e importantes resultados cuando de aplican a los nuevos conceptos de propiedad transitiva generalizada, que se resumen en los siguientes:

- El cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación $\mathcal{L}$-difusa siempre existe y es único.
- Se han extendido el concepto de potencia de $\mathcal{IVFR}s$ y se han encontrado expresiones de tales potencias para t-normas t-representables y t-normas pseudo-t-representables.
- Se han encontrado expresiones que relacionan el cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una $\mathcal{IVFR}$ con sus potencias para universos de cardinalidad finita y una t-norma generalizada genérica.
- Se propone un algoritmo para el cálculo del cierre $\mathcal{T}$-transitivo de una relación $\mathcal{IVFR}$ para universos de cardinalidad finita y una t-norma generalizada genérica.
- Se ha demostrado que para conjuntos $\mathcal{FS}s$ la débil T-transitividad coincide con la T-transitividad. Para $\mathcal{IVFR}s$ toda relación $\mathcal{T}$-transitiva también es débil $\mathcal{T}$-transitiva. Sin embargo, la inversa no es cierta.
- Se ha demostrado que para conjuntos $\mathcal{FS}s$ la débil T-transitividad coincide con la T-transitividad. Para $\mathcal{IVFR}s$ toda relación $\mathcal{T}$-transitiva también es débil $\mathcal{T}$-transitiva. Sin embargo, la inversa no es cierta.

Finalmente, se ha demostrado que el teorema de Lee es extensible para $\mathcal{IVFR}s$.

10. Trabajo futuro

- Generalizar el concepto de especificidad, k-especificidad, para $\mathcal{IVFS}s$.

- Investigar los conceptos de similaridad generalizada débil, $\mathcal{T}$-indistinguibilidad generalizada débil.

- Estudiar la estructura de las similaridades y similaridades débiles intervalo valoradas.

- Extender el teorema de representación a las $\mathcal{T}$-indistinguibilidades y/o $\mathcal{T}$-indistinguibilidades débiles intervalo valoradas.

Referencias

[1] Arnould, T., and Tano, S. Interval-valued fuzzy backward reasoning. *IEEE-FS 3* (Nov. 1995), 425–437.

[2] Atanassov, K. *Intuitionistic Fuzzy Sets*. Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 1999.

[3] Baets, B. D., and Meyer, H. D. On the existence and construction of t-transitive closures. *Inf. Sci. 152*, 1 (2003), 167–179.

[4] Bandler, W., and Kohout, L. Special properties, closures and interiors of crisp and fuzzy relations. *Fuzzy Sets and System 26* (1988), 317–331.

[5] Barrenechea, M. *Image Processing with Interval-Valued Fuzzy Sets. Edge Detection. Contrast*. PhD thesis, UPNA, 2005.

[6] Bilgic, T. Interval-valued preference structures. *European Journal of Operational Research 105*, 1 (February 1998), 162–183.

[7] Burillo, P., and Bustince, H. Intuitionistic fuzzy relations (part i). *Mathware Soft Comput 2* (1995), 5–38.

[8] Burillo, P., and Bustince, H. Structures on intuitionistic fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems 78* (1996), 293–303.

[9] Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., and Orduna, R. Image thresholding computation using atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *JACIII* (2007), 187–194.

[10] Bustince, H., and Burillo, P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst. 79* (May 1996), 403–405.

[11] Bustince, H., and Burillo, P. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets Syst 113* (2000), 205–219.

[12] Bustince, H., Herrera, F., and Montero, J. *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, vol. 220 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing.* Hardcover, 2008.

[13] Bustince, H., Mohedano, V., Barrenechea, E., and Pagola, M. An algorithm for calculating the threshold of an image representing uncertainty through a-ifss. *Proceedings of 11th Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* (2006), 2383–2390.

[14] Chiang, J. Fuzzy linear programming based on statistical confidence interval and interval-valued fuzzy set. *Eur. J. Oper. Res 129* (2001), 65–86.

[15] Cornelis, C., Deschrijver, G., and Kerre, E. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application. *Int. J. Approx. Reasoning 35*, 1 (2004), 55–95.

[16] Cornelis, C., Deschrijver, G., and Kerre, E. Advances and challenges in interval-valued fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems 157*, 5 (2006), 622–627.

[17] De Baets, B., Mareš, M., and Mesiar, R. T-partitions of the real line generated by idempotent shapes. *Fuzzy Sets Syst. 91* (October 1997), 177–184.

[18] Deschrijver, G. A representation of t-norms in interval-valued l-fuzzy set theory. *Fuzzy Sets And Systems 159*, 13 (2008), 1597–1618.

[19] Deschrijver, G., and Kerre, E. E. On the composition of intuitionistic fuzzy relations. *Fuzzy Sets Syst. 136*, 3 (2003), 333–361.

[20] Deschrijver, G., and Kerre, E. E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets Syst. 133*, 2 (2003), 227–235.

[21] Deschrijver, G., and Kerre, E. E. On the cuts of intuitionistic fuzzy compositions. *Kuwait Journal of Science and Engineering 32*, 1 (2005), 17–38.

[22] Dubois, D., and Prade, H. The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning. In *Proceedings of the nternational Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems-Selected and Extended Contributions* (London, UK, 1987), Springer-Verlag, pp. 75–84.

[23] Dziech, A., and Gorzalczany, M. B. Decision making in signal transmission problems with interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst. 23* (August 1987), 191–203.

[24] Fodor, J., and Roubens, M. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer academic publishers, 1994. Index. Bibliogr. : p. 239-251.

[25] Garmendia, L., and Recasens, J. How to make t-transitive a proximity relation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7*, 1 (2009), 200–207.

[26] Garmendia, L., Salvador, A., and Montero, J. Computing a t-transitive lower approximation or opening of a proximity relation. *Fuzzy Sets and Systems 160*, 14 (2009), 2097–2105.

[27] Garmendia, L., Yager, R., Trillas, E., and Salvador, A. General measures of specificity of fuzzy sets under t-indistinguishabilities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14*, 4 (2006), 568–572.

[28] Gau, W., and Buehrer, D. Vague sets. *IEEE Trans 23*, 2 (2003), 610–614.

[29] Goguen, J. L-fuzzy sets. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications 18* (1967), 145–174.

[30] González-del Campo, R., and Garmendia, L. Weak t -transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations. Aceptado en WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence.

[31] Gonzalez del Campo, R., and Garmendia, L. Conjuntos difusos intervalorados: Estado del arte. In *Jornadas internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería* (15–16 Junio 2009), pp. 321–331.

[32] Gonzalez del Campo, R., and Garmendia, L. Specificity, uncertainty and entropy measures of interval-valued fuzzy sets. In *EUROFUSE Workshop Preference Modelling and Decision Analysis* (16–18 Septiembre 2009), pp. 273–278.

[33] González-del Campo, R., and Garmendia, L. Specificity, uncertainty and entropy measures of interval-valued fuzzy sets. *Proceedings EUROFUSE Workshop Preference Modelling and Decision Analysis* (2009), 273–278.

[34] González-del Campo, R., and Garmendia, L. Decomposition of iv-similarities. In *XVI Congreso Español sobre tecnología y lógica fuzzy ESTYLF 2012* (2012), pp. 60–64.

[35] González-del Campo, R., Garmendia, L., and De Baets, B. Transitive closure of l-fuzzy relations and interval-valued fuzzy relations. In *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence* (2010), pp. 3141–3148.

[36] González-del Campo, R., Garmendia, L., and Recasens, J. Transitive closure of interval-valued relations. In *Proceedings IFSA-EUSFLAT'09* (2009), pp. 837–842.

[37] González-del Campo, R., Garmendia, L., and Yager, R. Specificity for interval-valued fuzzy sets. In *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence* (2010), pp. 2866–2870.

[38] González-del Campo, R., Garmendia, L., and Yager, R. Specificity for interval-valued fuzzy sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems 5*, 3 (2012), 452–459.

[39] Gorzalczany, M. B. Interval-valued fuzzy controller based on verbal model of object. *Fuzzy Sets Syst. 28* (October 1988), 45–53.

[40] Gorzalczany, M. B. An interval-valued fuzzy inference method: some basic properties. *Fuzzy Sets Syst. 31* (June 1989), 243–251.

[41] Grattan-Guiness, I. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. *Math. Logik. Grundladen Math 22* (1975), 149–160.

[42] Hagras, H. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. *IEEE Trans. Fuzzy Syst 12*, 4 (2004), 524–539.

[43] Herrera, F., Martinez, L., and Sanchez, P. J. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research 166*, 1 (2005), 115–132.

[44] H.F.Wang, and M.L.Wang. A fuzzy multiobjective linear programming. *Fuzzy Sets Syst 86*, 1 (1997), 61–72.

[45] Higashi, M., and Klir, J. G. Measures of uncertainty and information based on possibility distributions. *International Journal of General Systems 9* (1983), 3–58.

[46] J. Montero, D. G., and H., B. On the relevance of some families of fuzzy sets. *Fuzzy Sets And Systems 158* (2007), 2429–2442.

[47] Jacas, J. On the generators of t-indistinguishability operators. *Stochastica 12* (1988), 49–63.

[48] Jahn, K. Intervall-wertige Mengen. *Math. Nach. 68* (1975), 115–132.

[49] J.F. Baldwin, B. P. Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic. *Fuzzy Sets Syst 3* (1980), 193–219.

[50] Klawonn, F., and Kruse, R. Equality relations as a basis for fuzzy control. *Fuzzy Sets and Systems 54* (1994), 147–156.

[51] López, V., and Recasens, J. An algorithm to compute the transitive closure, a transitive approximation and a transitive opening of a fuzzy proximity. *Mathware and Soft Computing 16*, 2 (2009), 175–191.

[52] Martínez, L., Liu, J., Ruan, D., and Yang, J.-B. Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes. *Inf. Sci. 177* (April 2007), 1533–1542.

[53] Mendel, J. M. Computing with words and its relationships with fuzzistics. *Inf. Sci. 177* (February 2007), 988–1006.

[54] Pankowska, A., and Wygralak, M. On hesitation degrees in if-set theory. In *ICAISC* (2004), pp. 338–343.

[55] Pankowska, A., and Wygralak, M. General if-sets with triangular norms and their applications to group decision making. *Inf. Sci. 176*, 18 (2006), 2713–2754.

[56] Roy, M., and Biswas, R. I-v fuzzy relations and sanchez's approach for medical diagnosis. *Fuzzy Sets Syst 47* (1992), 35–38.

[57] Roy, M. K., and Biswas, R. I-v fuzzy relations and sanchez's approach for medical diagnosis. *Fuzzy Sets Syst. 47* (April 1992), 35–38.

[58] Sambuc, R. *Function Phi-Flous, Application a l'aide au Diagnostic en Pathologie Thyroidienne.* PhD thesis, University of Marseille, 1975.

[59] Sanchez, E., and Sambuc, R. Fuzzy relationships. phi -fuzzy functions. application to diagnostic aid in thyroid pathology. *Proceedings of an International Symposium on Medical Data Processing* (1976), 513–524.

[60] Schweizer, B., and Sklar, A. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math 10* (1960), 313–334.

[61] Sepulveda, R., Castillo, O., Melin, P., Rodriguez-Diaz, A., and Montiel, O. Experimental study of intelligent controllers under uncertainty using type-1 and type-2 fuzzy logic. *Inf. Sci 177* (2007), 2023–2048.

[62] Serguieva, A., and Hunter, J. Fuzzy interval methods in investment risk appraisal. *Fuzzy Sets Syst 142*, 3 (2004), 443–466.

[63] Szmidt, E., and Kacprzyk, J. Group decision making under intuitionistic fuzzy preference relations. In *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* (1998), IPMU, pp. 172–178.

[64] Tizhoosh, H. Image thresholding using type-2 fuzzy sets. *Pattern Recognit 38* (2005), 2363–2372.

[65] Türkşen, I. B., and Bilgiç, T. Interval valued strict preference with zadeh triples. *Fuzzy Sets Syst. 78* (March 1996), 183–195.

[66] Wang, S. T., Chung, F. L., Li, Y. Y., Hu, D. W., and Wu, X. S. A new gaussian noise filter based on interval type-2 fuzzy logic systems. *Soft Comput. 9* (May 2005), 398–406.

[67] Winter, M. A new algebraic approach to l-fuzzy relations convenient to study crispness. *Information Sciences 139*, 3–4 (2001), 233–252.

[68] Wu, K. Fuzzy interval control of mobile robots. *Comput. Electr. Eng 22*, 3 (1996), 211–229.

[69] Yager, R. Measuring tranquility and anxiety in decision making: an application off uzzy sets. *International Journal of General Systems 8* (1982), 139–146.

[70] Yager, R. Ordinal measures of specificity. *International Journal of General Systems 17* (1990), 57–72.

[71] Yager, R. Similarity based measures of specificity. *International Journal of General Systems 19* (1991), 91–106.

[72] Yager, R. On measures of specificity. In *Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications*, O. Kaynak, L. Zadeh, B. Turksen, and I. Rudas, Eds. Springer, 1998.

[73] Yager, R. Containment and specificity for type-2 fuzzy sets. *International Journal Of Fuzzy Systems 9* (2007), 55–66.

[74] Yao, J., and Shih, T. Fuzzy revenue for fuzzy demand quantity based on interval-valued fuzzy sets. *Comput. Fuzzy Syst 29* (2002), 1495–1535.

[75] Zadeh, L. Fuzzy sets. *Information And Control 8* (1965), 338–353.

[76] Zadeh, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. *Information Sciences 8* (1975), 199–249.

[77] Zadeh, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning II. *Information Sciences 8* (1975), 301–357.

[78] Zadeh, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III. *Information Sciences 9* (1975), 43–80.

[79] Zadeh, L. A. Similarity relations and fuzzy orderings. *Inform. Sci. 3* (1971), 177–200.

[80] Zadeh, L. A. From computing with numbers to computing with words - from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. In *Intelligent Systems and Soft Computing: Prospects, Tools and Applications* (London, UK, 2000), Springer-Verlag, pp. 3–40.

A. Apéndice: Publicaciones asociadas a esta memoria de tesis

Relación de publicaciones que avalan la tesis:

- González del Campo, R., Garmendia, L., and De Baets, B. Transitive closure of l-fuzzy relations and interval-valued fuzzy relations. In *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence* (2010), pp. 3141–3148.

- González del Campo, R., Garmendia, L., and Yager, R. Specificity for interval-valued fuzzy sets. In *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence* (2010), pp. 2866–2870.

- González-del Campo, R., Garmendia, L., and Yager, R. Specificity for interval-valued fuzzy sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems 5*, 3 (2012), 452–459.

- González del Campo, R., and Garmendia, L. Weak t -transitivity and weak closures of interval-valued fuzzy relations. Aceptado en WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence.

- González del Campo, R., and Garmendia, L. Specificity for interval-valued fuzzy sets. In *XVI Congreso Español sobre tecnología y lógica fuzzy ESTYLF 2012* (2012), pp. 60–64.

IEEE Computational Intelligence Society

IEEE Celebrating 125 Years of Engineering the Future

INTERNATIONAL NEURAL NETWORK SOCIETY

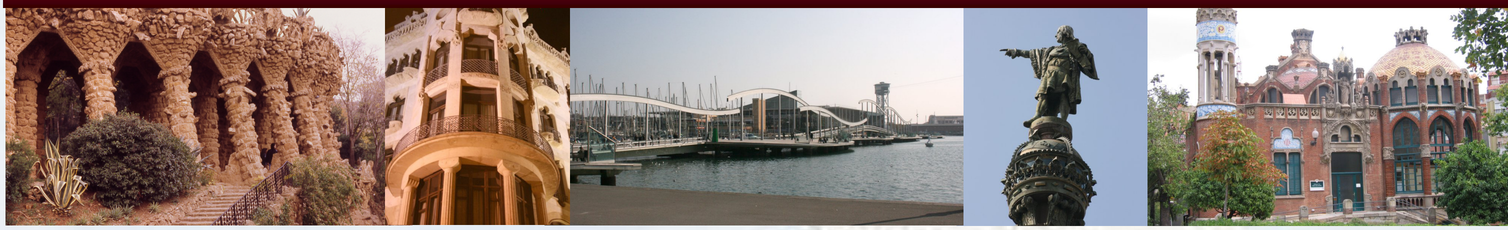
WCCI 2010

2010 IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE

JULY 18-23, 2010, BARCELONA, SPAIN

Barcelona International Convention Centre (CCIB)

2010 IEEE Conference on Fuzzy Systems



CALL FOR PAPERS

The annual IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) will be held jointly with the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) and the IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE CEC) as part of the 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Cross-fertilization of the three technical disciplines and newly emerging technologies is strongly encouraged.

Call for Contributed Papers

The annual IEEE FUZZ-IEEE is one of the leading events in the field of fuzzy systems. It covers all topics in fuzzy systems including,

- **Fuzzy logic and fuzzy set theory**
- **Lattice theory and multi-valued logics**
- **Approximate reasoning**
- **Type-2 fuzzy logic**
- **Rough sets and random sets**
- **Fuzzy mathematics**
- **Possibility theory and imprecise probability**
- **Fuzzy decision making and decision support systems**
- **Fuzzy optimization and design**
- **Fuzzy man-machine interfaces, emotional computing**
- **Fuzzy computing with words, granular computing**
- **Fuzzy systems for agent technology**
- **Hybrid fuzzy systems (fuzzy-neuro-evolutionary-rough)**
- **Fuzzy image and multimedia processing**
- **Medical, financial, industrial and other real-world applications**
- **Fuzzy document retrieval systems and text mining**
- **Fuzzy systems for natural language processing**
- **Fuzzy information processing**
- **Fuzzy and rough data analysis, fuzzy statistics**
- **Fuzzy data mining and forecasting**
- **Fuzzy systems modeling and identification**
- **Fuzzy control and intelligent systems**
- **Fuzzy systems for robotics**
- **Fuzzy pattern recognition**
- **Fuzzy clustering**
- **Fuzzy systems architectures and hardware**
- **Fuzzy web intelligence**
- **Fuzzy sets in bioinformatics**
- **Fuzzy databases, fuzzy data summarization**
- **Emerging areas**

FUZZ-IEEE 2010 will feature a world-class conference that aims to bring together researchers and practitioners in the field of fuzzy systems and computational intelligence from all around the globe. Technical exchanges within the research community will encompass keynote lectures, special sessions, tutorials and workshops, panel discussions as well as poster presentations. In addition, participants will be treated to a series of social functions, receptions, and networking to establish new connections and foster everlasting friendship among fellow counterparts. Prospective authors are invited to contribute high-quality papers to FUZZ-IEEE 2010. All papers are to be submitted electronically through the IEEE WCCI 2010 website. For general inquiries about FUZZ-IEEE 2010, please contact Conference Chair Piero Bonissone at bonissone@crd.ge.com. For Program inquiries please contact Bernadette Bouchon-Meunier at Bernadette.Bouchon-Meunier@lip6.fr. For general inquires about WCCI 2010 please contact Pilar Sobrevilla at pilar.sobrevilla@upc.edu.

Call for Special Sessions

The FUZZ-IEEE 2010 Program Committee solicits proposals for special sessions within the technical scopes of the congress. Special sessions, to be organized by international recognized experts, aim to bring together researchers in special focused topics. Papers submitted for special sessions are to be peer-reviewed with the same criteria used for the contributed papers. Researchers interested in organizing special sessions are invited to submit formal proposal filling in the form available on the web site http://www.wcci2010.org/special-sessions.

Call for Tutorials and Workshops

FUZZ-IEEE 2010 will also feature pre-congress tutorials and workshops, covering fundamental and advanced fuzzy computation topics. A tutorial or workshop proposal should include title, outline, expected enrollment, and presenter/organizer biography. We invite you to submit proposals to the Tutorial and Workshop Co-chairs: Dimitar Filev at dfilev@ford.com or Keeley Crockett at K.Crockett@mmu.ac.uk.

Call for Competitions

FUZZ-IEEE 2010 will host competitions to stimulate research in fuzzy systems, promote fair evaluations, and attract students. The proposals for new competitions should include descriptions of the problems addressed, motivations and expected impact on fuzzy systems, data description, evaluation procedures and established baselines, schedules, anticipated number of participants, and a biography of the main team members. We invite you to submit proposals to the Competitions Co-Chairs: Hao Ying at hao.ying@wayne.edu and Paul Gader at pgader@cise.ufl.edu. Competitions will be made available via the WCCI conference website.

Website: http://www.wcci2010.org; E-mail:contact@wcci2010.org

Important Dates

Competition proposals	**November 15, 2009**
Special Sessions proposals	**December 13, 2009**
Notification of Special Session acceptance	**December 22, 2009**
Paper submission	**January 31, 2010**
Tutorial and Workshop proposal	**February 14, 2010**
Notification of Tutorial and Workshop acceptance	**February 22, 2010**
Notification of paper acceptance	**March 15, 2010**
Final paper submission	**May 2, 2010**
Early registration	**May 23, 2010**

IEEE WCCI Sponsor
IEEE Computational Intelligence Society (CIS)

IJCNN Joint Sponsor
International Neural Network Society (INNS)

IEEE- CEC
Previously sponsored by the former Evolutionary Programming Society and the Institution of Engineering and Technology

IEEE WCCI 2010 Organizing Committee

General Chair
Pilar Sobrevilla, Spain

Publicity Chair
Luis Magdalena, Spain

Finance Chair
Piero Bonissone, USA

Local Arrangement Chair
Eduard Montseny, Spain

FUZZ-IEEE 2010 Organizing Committee

Conference Chair
Piero Bonissone, USA

Program Chair
Bernadette Bouchon-Meunier, France

Technical Co-Chairs
James Keller, USA
Senen Barro, Spain
Fernando Gomide, Brazil
Masahiro Inuiguchi, Japan
Trevor Martin, UK
Rudolf Kruse, Germany

Special Sessions Co-Chairs
Maria Rifqi, France
Mika Sato-Ilic, Japan

Tutorial and Workshop Co-Chairs
Dimitar Filev, USA
Keeley Crockett, UK

Competitions Co-Chairs
Hao Ying, USA
Paul Gader, USA

WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence
July, 18-23, 2010 - CCIB, Barcelona, Spain FUZZ-IEEE

Transitive Closure of L-fuzzy Relations and Interval-valued Fuzzy Relations

Ramón González-del-Campo, L. Garmendia and B. De Baets

***Abstract*— This paper introduces some concepts of interval-valued fuzzy relations and some of their properties: reflexivity, symmetry, T-transitivity, composition and local reflexivity. The existence and uniqueness of T-transitive closure of and L-fuzzy relations is proved. An algorithm to compute the T-transitive closure of finite interval-valued fuzzy relations. Some properties and some examples is given for t-representable and t-pseudo representable generalized t-norms.**

I. Introduction

Fuzzy sets, $\mathcal{FS}$, were introduced by Zadeh in 1.965 [20]. Since then many generalizations of fuzzy sets have been proposed to model the uncertainty and the vagueness in linguistic variables replacing the unit interval by another structure such as posets or lattices [6], [15], [13]. One of these generalizations are type-2 fuzzy sets, $\mathcal{FS}2$, [21], [22], [23] were introduced by Zadeh. A Type-2 fuzzy set A on a universe of discourse X, $\mathcal{FS}2$, is a fuzzy set whose membership function is another fuzzy set on [0,1]:

$$A = \{((x,u), \mu_A(x,u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in [0,1]\}$$

Type-2 fuzzy sets have been widely studied and applied since in many cases the uncertainty can be better expressed by a fuzzy set than by a single numeric value. The problem with type 2 fuzzy sets though is their computational complexity and the difficulty for an expert to select the adequate fuzzy subset as membership degree of an object to a linguistic label. This is why some simplifications have been proposed, such as the use of only some families of fuzzy sets such as triangular and trapezoidal ones. A more simple kind of type-2 fuzzy set are the $\mathcal{L}$-fuzzy set in which the elements of an universe are valued on a lattice $\mathcal{L}$.

Interval-valued fuzzy sets ($\mathcal{IVFS}$) were introduced in the 60s by Grattan-Guinness [14], Jahn [16], Sambuc [18] and Zadeh [21]. They are extensions of classical fuzzy sets where the membership value between 0 and 1 is replaced by an interval in [0,1]. They easily allow to model uncertainty and vagueness because sometimes it is easier for experts to give a "membership interval" than a membership degree to objects on a universe. $\mathcal{IVFS}$ are a special case of type-2 fuzzy sets that simplifies the calculations while preserving their richness as well. The intuitionistic fuzzy sets on X ($\mathcal{IFS}$) introduced by Atanassov [1] are also a extension of fuzzy sets in which each element has a membership degree, μ, and a non-membership degree, ν satisfying: $\mu + \nu \leq 1$.

$A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X, \mu(x), \nu(x) \in [0,1]\}$

The value $\pi = 1 - \mu - \nu$ is a measure of the uncertainty. Intuitionistic relations are been studied widely (see [3], [4], [10], [12]).

This paper is organized as follows: In section three the $\mathcal{T}$-transitive closure of $\mathcal{L}$-fuzzy relations is defined and it is showed that it always exists and it is unique. In section four $\mathcal{T}$-transitive closure of interval-valued fuzzy relations is studied. Traditionally, the study of conjunctions between interval-valued fuzzy sets has been reduced to be modeled with t-representable t-norms. However, not all generalized t-norms are t-representable. Moreover, some of the non t-representable t-norms sometimes satisfy even more properties than t-representable t-norms [7]. Probably the most important property a fuzzy relation can fulfil is transitivity with respect a given t-norm. Since many times the data are given by a proximity relation P (i.e.: a reflexive and symmetric but not necessarily transitive fuzzy relation), there are some methods to obtain a transitive relation close to P to replace it when transitivity is required. The most popular way to do this is calculating its transitive closure. In section four we introduce the concept of T-transitive closure for an interval-valued fuzzy relation and its expression in a finite universe for any generalized t-norm. A few methods to compute it and some examples are given.

II. Preliminaries

A. $\mathcal{L}$-fuzzy sets

Let $\mathcal{L}$ be a lattice and meet and joint its operators infimum and supremum. Let $<_{\mathcal{L}}$ be its order relation. Let $1_{\mathcal{L}}$ and $0_{\mathcal{L}}$ be the greatest and the lowest elements respectively.

Definition 2.1: [13], [9] A $\mathcal{L}$-fuzzy set A on a universe X can be represented by the mapping:

$$A = \{(a, w) \mid a \in X, w \in \mathcal{L}\}$$

Definition 2.2: [9] Let X be a universe and A and B two $\mathcal{L}$-fuzzy sets. The inclusion of A in to B is defined as: $A \subseteq_{\mathcal{L}} B$ if and only if $A(a) \leq_{\mathcal{L}} B(a)$ $\forall a \in X$.

Definition 2.3: [9] A generalized t-norm function $\mathcal{T}$ is a monotone increasing, symmetric and associative operator, $\mathcal{T} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$, that satisfies: $\mathcal{T}(1_{\mathcal{L}}, w) =_{\mathcal{L}} w$ for all w in $\mathcal{L}$.

Definition 2.4: [19] Let X_1 and X_2 be two universes of discourse. A $\mathcal{L}$-fuzzy relation $R : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathcal{L}$ is a mapping:

$$R = \{((a,b), w) \mid a \in X_1, b \in X_2, w \in \mathcal{L}\}$$

Ramón González-del-Campo is with the Department SIC, Complutense University of Madrid, Spain (email: rgonzale@estad.ucm.es).

L. Garmendia is with the Department ISIA, Complutense University of Madrid, Spain (email: lgarmend@fdi.ucm.es).

B. De Baets is with the Ghent University, Belgium (email: bernard.debaets@ugent.be).

[15] D. Gomez J. Montero and Bustince H. On the relevance of some families of fuzzy sets. *Fuzzy Sets And Systems*, 158:2429–2442, 2007.
[16] K.U. Jahn. Intervall-wertige mengen. *Math. Nach.*, 68:115–132, 1975.
[17] H. Naessens, H. De Meyer, and De B. Baets. Algorithms for the computation of t-transitive closures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(1):541–551, 2002.
[18] E. Sanchez and R. Sambuc. Fuzzy relationships. phi -fuzzy functions. application to diagnostic aid in thyroid pathology. *Proceedings of an International Symposium on Medical Data Processing*, pages 513–524, 1976.
[19] M. Winter. A new algebraic approach to l-fuzzy relations convenient to study crispness. *Information Sciences*, 139(3–4):233–252, 2001.
[20] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information And Control*, 8:338–353, 1965.
[21] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning i. *Information Sciences*, 8:199–249, 1975.
[22] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning ii. *Information Sciences*, 8:301–357, 1975.
[23] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning iii. *Information Sciences*, 9:43–80, 1975.

IEEE Computational Intelligence Society

IEEE Celebrating 125 Years of Engineering the Future

INTERNATIONAL NEURAL NETWORK SOCIETY

WCCI 2010

2010 IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE

JULY 18-23, 2010, BARCELONA, SPAIN

Barcelona International Convention Centre (CCIB)

2010 IEEE Conference on Fuzzy Systems

CALL FOR PAPERS

The annual IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) will be held jointly with the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) and the IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE CEC) as part of the 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Cross-fertilization of the three technical disciplines and newly emerging technologies is strongly encouraged.

Call for Contributed Papers

The annual IEEE FUZZ-IEEE is one of the leading events in the field of fuzzy systems. It covers all topics in fuzzy systems including,

- **Fuzzy logic and fuzzy set theory**
- **Lattice theory and multi-valued logics**
- **Approximate reasoning**
- **Type-2 fuzzy logic**
- **Rough sets and random sets**
- **Fuzzy mathematics**
- **Possibility theory and imprecise probability**
- **Fuzzy decision making and decision support systems**
- **Fuzzy optimization and design**
- **Fuzzy man-machine interfaces, emotional computing**
- **Fuzzy computing with words, granular computing**
- **Fuzzy systems for agent technology**
- **Hybrid fuzzy systems (fuzzy-neuro-evolutionary-rough)**
- **Fuzzy image and multimedia processing**
- **Medical, financial, industrial and other real-world applications**
- **Fuzzy document retrieval systems and text mining**
- **Fuzzy systems for natural language processing**
- **Fuzzy information processing**
- **Fuzzy and rough data analysis, fuzzy statistics**
- **Fuzzy data mining and forecasting**
- **Fuzzy systems modeling and identification**
- **Fuzzy control and intelligent systems**
- **Fuzzy systems for robotics**
- **Fuzzy pattern recognition**
- **Fuzzy clustering**
- **Fuzzy systems architectures and hardware**
- **Fuzzy web intelligence**
- **Fuzzy sets in bioinformatics**
- **Fuzzy databases, fuzzy data summarization**
- **Emerging areas**

FUZZ-IEEE 2010 will feature a world-class conference that aims to bring together researchers and practitioners in the field of fuzzy systems and computational intelligence from all around the globe. Technical exchanges within the research community will encompass keynote lectures, special sessions, tutorials and workshops, panel discussions as well as poster presentations. In addition, participants will be treated to a series of social functions, receptions, and networking to establish new connections and foster everlasting friendship among fellow counterparts. Prospective authors are invited to contribute high-quality papers to FUZZ-IEEE 2010. All papers are to be submitted electronically through the IEEE WCCI 2010 website. For general inquiries about FUZZ-IEEE 2010, please contact Conference Chair Piero Bonissone at bonissone@crd.ge.com. For Program inquiries please contact Bernadette Bouchon-Meunier at Bernadette.Bouchon-Meunier@lip6.fr. For general inquires about WCCI 2010 please contact Pilar Sobrevilla at pilar.sobrevilla@upc.edu.

Call for Special Sessions

The FUZZ-IEEE 2010 Program Committee solicits proposals for special sessions within the technical scopes of the congress. Special sessions, to be organized by international recognized experts, aim to bring together researchers in special focused topics. Papers submitted for special sessions are to be peer-reviewed with the same criteria used for the contributed papers. Researchers interested in organizing special sessions are invited to submit formal proposal filling in the form available on the web site http://www.wcci2010.org/special-sessions.

Call for Tutorials and Workshops

FUZZ-IEEE 2010 will also feature pre-congress tutorials and workshops, covering fundamental and advanced fuzzy computation topics. A tutorial or workshop proposal should include title, outline, expected enrollment, and presenter/organizer biography. We invite you to submit proposals to the Tutorial and Workshop Co-chairs: Dimitar Filev at dfilev@ford.com or Keeley Crockett at K.Crockett@mmu.ac.uk.

Call for Competitions

FUZZ-IEEE 2010 will host competitions to stimulate research in fuzzy systems, promote fair evaluations, and attract students. The proposals for new competitions should include descriptions of the problems addressed, motivations and expected impact on fuzzy systems, data description, evaluation procedures and established baselines, schedules, anticipated number of participants, and a biography of the main team members. We invite you to submit proposals to the Competitions Co-Chairs: Hao Ying at hao.ying@wayne.edu and Paul Gader at pgader@cise.ufl.edu. Competitions will be made available via the WCCI conference website.

Website: http://www.wcci2010.org; E-mail:contact@wcci2010.org

Important Dates

Competition proposals	November 15, 2009
Special Sessions proposals	December 13, 2009
Notification of Special Session acceptance	December 22, 2009
Paper submission	January 31, 2010
Tutorial and Workshop proposal	February 14, 2010
Notification of Tutorial and Workshop acceptance	February 22, 2010
Notification of paper acceptance	March 15, 2010
Final paper submission	May 2, 2010
Early registration	May 23, 2010

IEEE WCCI Sponsor
IEEE Computational Intelligence Society (CIS)

IJCNN Joint Sponsor
International Neural Network Society (INNS)

IEEE- CEC
Previously sponsored by the former Evolutionary Programming Society and the Institution of Engineering and Technology

IEEE WCCI 2010 Organizing Committee

General Chair
Pilar Sobrevilla, Spain

Publicity Chair
Luis Magdalena, Spain

Finance Chair
Piero Bonissone, USA

Local Arrangement Chair
Eduard Montseny, Spain

FUZZ-IEEE 2010 Organizing Committee

Conference Chair
Piero Bonissone, USA

Program Chair
Bernadette Bouchon-Meunier, France

Technical Co-Chairs
James Keller, USA
Senen Barro, Spain
Fernando Gomide, Brazil
Masahiro Inuiguchi, Japan
Trevor Martin, UK
Rudolf Kruse, Germany

Special Sessions Co-Chairs
Maria Rifqi, France
Mika Sato-Ilic, Japan

Tutorial and Workshop Co-Chairs
Dimitar Filev, USA
Keeley Crockett, UK

Competitions Co-Chairs
Hao Ying, USA
Paul Gader, USA

WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence
July, 18-23, 2010 - CCIB, Barcelona, Spain FUZZ-IEEE

Specificity for interval-valued fuzzy sets

Ramón González-del-Campo, L. Garmendia and Ronald R. Yager

***Abstract*— In this paper some axiomatic definitions about specificity for interval-valued fuzzy sets are proposed. Some examples of measures of specificity for interval-valued fuzzy sets are showed. It is also defined a extension of the notion of alpha cut for interval-valued fuzzy sets and a generalized similarity for interval-valued fuzzy relations. An axiomatic definition of specificity of interval-valued fuzzy sets under the knowledge of a generalized similarity is proposed.**

Keywords: Specificity measure, interval-valued fuzzy set, similarity, T-indistinguishability.

I. Introduction

Interval-valued fuzzy sets ($\mathcal{IVFS}$) were introduced in the 60s by Grattan-Guinness [7], Jahn [8], Sambuc [9] and Zadeh [16]. They are extensions of classical fuzzy sets where the membership degree of the elements on the universe of discourse (between 0 and 1) is replaced by an interval in $[0,1] \times [0,1]$. They easily allow to model uncertainty and vagueness generalizing the fuzzy sets. Sometimes it is easier for experts to give a "membership interval" than a membership degree to objects on a universe. $\mathcal{IVFS}$ are a special case of type-2 fuzzy sets that simplifies the calculations while preserving their richness as well.

The concept of specificity provides a measure of the amount of information contained in a fuzzy set. It is strongly related to the inverse of the cardinality of a set. Specificity measures were introduced by Yager [10], [11] showing its usefulness as a measure of tranquility when making a decision. The output information of expert systems and other knowledge-based system should be both specific and correct to be useful.

Measures of specificity have been widely analyzed [3], [4], [5], for intuitionistic fuzzy sets [14], for interval-valued fuzzy sets and for type 2 fuzzy sets [13].

II. Preliminaries

Let $X = \{a_1, ..., a_n\}$ be a finite set.

***Definition** 2.1:* A fuzzy set μ on X is normal if there exists an element $x \in X$ such that $\mu(x) = 1$

***Definition** 2.2:* [11] Let $[0,1]^X$ be the class of fuzzy sets of X. Let a_j be the j^{th} greatest membership degree of μ. A measure of specificity is a function Sp:$[0,1]^X \to [0,1]$ such that:

- $Sp(\mu) = 1$ if and only if μ is a singleton.
- $Sp(\emptyset) = 0$
- $Sp(\mu)$ depends on a_j in that way:
  1) $\frac{\partial Sp(\mu)}{\partial a_1} > 0$
  2) $\frac{\partial Sp(\mu)}{\partial a_j} \leq 0$ for all $j \geq 2$

It is also defined a weaker measure of specificity:

***Definition** 2.3:* [11] Let $[0,1]^X$ be the class of fuzzy sets of X. A weak measure of specificity is a function Sp:$[0,1]^X \to [0,1]$ such that:

- $Sp(\mu) = 1$ if and only if μ is a singleton.
- $Sp(\emptyset) = 0$
- If μ and η are normal fuzzy sets in X and $\mu \subset \eta$, then $Sp(\mu) \geq Sp(\eta)$.

***Definition** 2.4:* Let Sp and Sp' be two measures of specificity. Sp is more strict than Sp', denoted by $Sp \leq Sp'$, if for all sets, μ, it verifies: $Sp(\mu) \leq Sp'(\mu)$.

Yager introduced [11] the linear measure of specificity on a finite space X as:

$$Sp_{\overrightarrow{w}}(\mu) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j a_j$$

where a_j is the j^{th} greatest membership degree of μ and $\{w_j\}$ is a set of weights verifying:

- $w_j \in [0,1]$
- $\Sigma_{j=2}^{n} w_j = 1$
- $\{w_j\}$ is not increasing.

***Definition** 2.5:* [15] A fuzzy relation $R : X^2 \to [0,1]$ is a similarity relation if it is reflexive, symmetric and transitive under the t-norm minimum ($Min(R(a,b), R(b,c)) \leq R(a,c)$ for all a, b, c in X).

Yager also a defines a measure of specificity under the knowledge of a similarity to solve the Yager's jacket problem [12].

***Definition** 2.6:* [12] Let μ be a fuzzy set on X and let S be a similarity $S : X \times X \to [0,1]$. Let π_α be the set of classes of equivalence of the α-cut of S. The set of classes of equivalence under the knowledge of S μ_α/S is the subset of equivalence classes of the α-cut of S defined in that way: a equivalence class of the α-cut of S belongs to μ_α/S if its intersection with the α-cut of μ_α is not empty.

***Definition** 2.7:* [12] Let $[0,1]^X$ be the set of fuzzy sets on X. Let μ be a fuzzy set on X and let S be a similarity $S : X \times X \to [0,1]$. The specificity of μ under S is defined as follows:

$$Sp(\mu/S) = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{card(\mu_\alpha/S)} d\alpha$$

***Definition** 2.8:* [2] Let $= (L, \leq_L)$ be a lattice of intervals in [0,1] that satisfies:

1) $L = \{[x_1, x_2] \in [0,1]^2$ with $x_1 \leq x_2\}$.
2) $[x_1, x_2] \leq_L [y_1, y_2]$ if and only if $x_1 \leq y_1$ and $x_2 \leq y_2$

Also by definition:

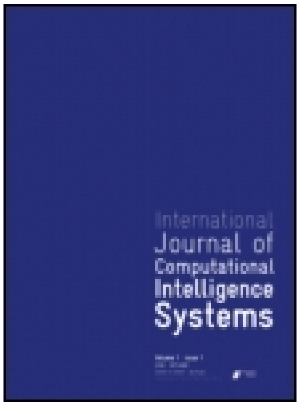
$[x_1, x_2] <_L [y_1, y_2] \Leftrightarrow x_1 < y_1, x_2 \leq y_2$ or $x_1 \leq y_1, x_2 < y_2$

$[x_1, x_2] =_L [y_1, y_2] \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

Ramón González-del-Campo is with the Department SIC, Complutense University of Madrid, Spain (email: rgonzale@estad.ucm.es).

L. Garmendia is with the Department ISIA, Complutense University of Madrid, Spain (email: lgarmend@fdi.ucm.es).

Ronald R. Yager is with the Iona College, USA (email: yager@panix.com).



International Journal of Computational Intelligence Systems
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.tandfonline.com/loi/tcis20

Specificity for interval-valued fuzzy sets

Ramón González-del-Campo [a] , Luis Garmendia [b] & Ronald R. Yager [c]
[a] DSIC, Universidad Complutense de Madrid, Spain
[b] DISIA, Universidad Complutense de Madrid, Spain
[c] Iona College, USA

Available online: 28 May 2012

To cite this article: Ramón González-del-Campo, Luis Garmendia & Ronald R. Yager (2012): Specificity for interval-valued fuzzy sets, International Journal of Computational Intelligence Systems, 5:3, 452-459

To link to this article: http://dx.doi.org/10.1080/18756891.2012.696908

International Journal of Computational Intelligence Systems, Vol. 5, No. 3 (June, 2012), 452-459

Specificity for interval-valued fuzzy sets

Ramón González-del-Campo [1] , Luis Garmendia [2] , Ronald R. Yager [3]

[1] *DSIC, Universidad Complutense de Madrid, Spain*
E-mail: rgonzale@estad.ucm.es
[2] *DISIA, Universidad Complutense de Madrid, Spain*
E-mail: lgarmend@fdi.ucm.es
[3] *Iona College, USA*
E-mail: yager@panix.com

Received 30 November 2011
Accepted 1 December 2011

Abstract

In this paper some axiomatic definitions about specificity for interval-valued fuzzy sets are proposed. Some examples of measures of specificity for interval-valued fuzzy sets are showed. It is also defined a extension of the notion of alpha cut for interval-valued fuzzy sets and a generalized similarity for interval-valued fuzzy relations. An axiomatic definition of specificity of interval-valued fuzzy sets under the knowledge of a generalized similarity is given.

Keywords: Specificity measure, Interval-valued fuzzy set, Similarity, T-indistinguishability.

1. Introduction

Interval-valued fuzzy sets ($\mathscr{IVFS}$) were introduced in the 60s by Grattan-Guinness [7], Jahn [8], Sambuc [9] and Zadeh [16]. They are extensions of classical fuzzy sets where the membership degree of the elements on the universe of discourse (between 0 and 1) is replaced by an interval in $[0,1]\times[0,1]$. They easily allow to model uncertainty and vagueness generalizing the fuzzy sets. Sometimes it is easier for experts to give a "membership interval" than a membership degree to a characteristic of objects on a universe. $\mathscr{IVFS}$ are a special case of type-2 fuzzy sets that simplifies the calculations while preserving their richness as well.

The concept of specificity provides a measure of the amount of information contained in a fuzzy set. It is strongly related to the inverse of the cardinality of a set. Specificity measures were introduced by Yager [10,11] showing its usefulness as a measure of tranquility when making a decision. The output information of expert systems and other knowledge-based system should be both specific and correct to be useful.

Measures of specificity have been widely analyzed [3,4,5], for intuitionistic fuzzy sets [14], for interval-valued fuzzy sets and for type 2 fuzzy sets [13].

2. Preliminaries

Let $X=\{e_1,...,e_n\}$ be a finite set.

Definition 2.1 *A fuzzy set μ on X is normal if there exists an element $x\in X$ such that $\mu(x)=1$.*

Definition 2.2 [11] *Let a_j be the j^{th} greatest membership degree of μ. A measure of specificity is a func-*

IEEE Computational Intelligence Society

2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems

The annual IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) will be held jointly with the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) and the IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE CEC) as part of the 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence (IEEE WCCI), June 10-15, 2012, International Convention Centre, Brisbane, Australia. Cross-fertilization of the three technical disciplines and newly emerging technologies is strongly encouraged.

Call for Contributed Papers

The annual FUZZ-IEEE is one of the leading events in the field of fuzzy systems. It covers all topics in fuzzy systems including:

Fuzzy logic and fuzzy set theory
Lattice theory and multi-valued logics
Approximate reasoning
Type-2 fuzzy logic
Rough sets and random sets
Fuzzy mathematics
Possibility theory and imprecise probability
Fuzzy decision making and decision support systems
Fuzzy optimization and design
Fuzzy man-machine interfaces, emotional computing
Fuzzy computing with words, granular computing
Fuzzy systems for agent technology
Hybrid fuzzy systems (fuzzy-neuro-evolutionary)
Fuzzy image and multimedia processing
Medical, financial, industrial applications
Fuzzy document retrieval systems, text mining
Fuzzy systems for natural language processing
Fuzzy information processing
Fuzzy and rough data analysis, fuzzy statistics
Fuzzy data mining and forecasting
Fuzzy systems modeling and identification
Fuzzy control and intelligent systems
Fuzzy systems for robotics
Fuzzy pattern recognition
Fuzzy clustering
Fuzzy systems architectures and hardware
Fuzzy web intelligence
Fuzzy sets in bioinformatics
Fuzzy databases, fuzzy data summarization
Emerging areas

FUZZ-IEEE 2012 will feature a world-class conference that aims to bring together researchers and practitioners in the field of fuzzy systems and computational intelligence from all around the globe. Technical exchanges within the research community will encompass keynote lectures, special sessions, tutorials and workshops, panel discussions as well as poster presentations. In addition, participants will be treated to a series of social functions, receptions, and networking to establish new connections and foster everlasting friendship among fellow counterparts

Prospective authors are invited to contribute high-quality papers to FUZZ-IEEE 2010. All papers are to be submitted electronically through the IEEE WCCI 2012 website http://www.ieee-wcci2012.org/.

For FUZZ-IEEE inquiries, please contact Conference Chair Bernadette Bouchon-Meunier: Bernadette.Bouchon-Meunier@lip6.fr.
For Program inquiries please contact Program Chair James M. Keller: KellerJ@missouri.edu.

Call for Special Sessions

The FUZZ-IEEE 2012 Program Committee solicits proposals for special sessions within the technical scopes of the Congress. Special sessions, to be organized by international recognized experts, aim to bring together researchers in special focused topics. Papers submitted for special sessions are to be peer-reviewed with the same criteria used for the contributed papers. Proposals should include the session title, a brief description of the scope and motivation, biographic and contact information of the organizers. Researchers interested in organizing special sessions are invited to submit formal proposal to the Special Session Chair:

Laszlo T. Koczy at koczy@tmit.bme.hu.

Call for Tutorials and Workshops

FUZZ-IEEE 2012 will also feature pre-Congress tutorials and workshops, covering fundamental and advanced topics on fuzzy systems. A tutorial or workshop proposal should include title, outline, expected enrollment, and presenter/organizer biography. We invite you to submit proposals to the Tutorial and Workshop Chair:
Scott Dick at dick@ee.ualberta.ca.

Call for Competitions

FUZZ-IEEE 2012 will host competitions to stimulate research in fuzzy systems, promote fair evaluations, and attract students. The proposals for new competitions should include descriptions of the problems addressed, motivations and expected impact on fuzzy systems, data description, evaluation procedures and established baselines, schedules, anticipated number of participants, and a biography of the main team members. We invite you to submit proposals to the Competitions Chair:

Simon Lucas at sml@essex.ac.uk.

General Enquires for IEEE WCCI 2012 should be sent to the General Chair:
Hussein Abbass at h.abbass@adfa.edu.au

Sponsors

IEEE WCCI Sponsor
IEEE Computational Intelligence Society (CIS)

IEEE CEC
IEEE Computational Intelligence Society (CIS)
Previously sponsored by the former Evolutionary Programming Society and the Institution of Engineering and Technology

EPS Evolutionary Programming Society

IET

FUZZ-IEEE Organization Committee

Conference Chair
Bernadette Bouchon-Meunier, France

Program Chair
James M. Keller, USA

Technical Co-Chairs
Hisao Ishibuchi, Japan
Sansanee Auephanwiriyakul, Thailand
Vladik Kreinovich, USA
Fernando Gomide, Brazil
Christophe Marsala, France
Keeley Crockett, UK

Special Sessions Chair
Laszlo T. Koczy, Hungary

Tutorial and Workshop Chair
Scott Dick, Canada

Competitions Chair
Simon Lucas, UK

Important Dates

Competition proposals submission deadline
October 17, 2011

Special sessions proposal submission deadline
November 21, 2011

Special session decision notification
November 28, 2011

Paper submission deadline
December 19, 2011

Tutorial and Workshop proposal submission deadline
January 16, 2012

Tutorial and Workshop decision notification
January 23, 2012

Paper acceptance notification date
February 20, 2012

Final paper submission deadline
April 2, 2012

Early registration
April 2, 2012

Conference dates
June 10-15, 2012

Dear Author(s),

Congratulations! On behalf of the FUZZ-IEEE 2012 Technical Program Committee and the program chairs, we are pleased to inform you that your paper:

Paper ID: 244
Author(s): Ramon Gonzalez-del-Campo and Luis Garmendia
Title: Weak T-transitivity and weak closures of Interval-valued Fuzzy Relations

has been accepted for presentation at the 2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems and for publication in the conference proceedings published annually by IEEE. This email provides you with all the information you require to complete your paper and submit it for inclusion in the proceedings. A notification of the presentation format (oral or poster) and timing of that presentation will be sent by the end of May.

Here are the steps you must follow:

1. Please see the attached FORMATTING REQUIREMENTS and REVIEWERS' COMMENTS for your paper, which are intended to help you to improve your paper for final publication. The listed comments should be addressed, as acceptance is conditional on appropriate response to the requirements and comments.

2. Please prepare your manuscript for final camera ready submission following the same PDF format guidelines as for the initial submission. Papers are limited to eight (8) pages in length, must be IEEE Xplore-compatible, and must follow the formatting instructions provided at:

http://www.ieee-wcci2012.org

When you have completed your paper and are ready to submit it, please go to:

http://ieee-cis.org/conferences/fuzzieee2012/upload.php?PaperID=244

to submit your final camera-ready paper. On this page you will need to use the following password:

aua862cr

which is valid only for a single submission of your final camera-ready paper and you cannot submit any subsequent revision. Final papers MUST be submitted by April 2, 2012. Any papers submitted after this date run the risk of not being included in the proceedings. The paper must be re-submitted even if the reviewers indicated that no changes are required.

IMPORTANT: Please note that once you submit your paper, you cannot submit any subsequent revision. All papers submitted through the web site are considered to be in final form and ready for publication. Do not submit your paper until you are ready. A good suggestion is to have a few colleagues review your paper to provide final remarks on its suitability before submitting it through the web site. In addition please note that the proceedings will be printed in black and white, not in color and it is the author's responsibility to ensure that all figures/plots can be printed and understood in black and white.

3. In order for your paper to be published in the conference proceedings, a *signed IEEE Copyright Form* must be submitted for each paper. FUZZ-IEEE 2012 has registered to use the IEEE Electronic Copyright (eCF) service. The confirmation page shown after submitting your final paper contains a button linking directly to a secure IEEE eCF site which allows electronic completion of the copyright assignment process. In case it fails, please have the completed IEEE Copyright Form, found at http://www.ieee.org/web/publications/rights/copyrightmain.html, emailed it to the Publication Co-Chair, Daryl Essam (d.essam@adfa.edu.au).

IMPORTANT: No paper can be published in the proceedings without being accompanied by a Completed IEEE Copyright Transfer Form. You must complete and submit this form to have your paper included in the conference proceedings.

4. Register for the conference at http://www.ieee-wcci2012.org by clicking on the conference registration link on the right-hand side of the main page.

IMPORTANT: Each paper must have a corresponding registered author to be included in the proceedings. Papers that do not have an associated registered author will not be included in the proceedings. The deadline for author registration is April 2, 2012 so be sure to register by that time to ensure that your paper is included in the proceedings. Registering late may mean that your paper may not appear in the proceedings. Please ensure that you complete your registration early.

5. Make your hotel reservation for the FUZZ-IEEE 2012 with information obtained on the hotel reservation link "Accommodation" of the main FUZZ-IEEE 2012 page at http://www.ieee-wcci2012.org.

If you have any questions regarding the reviews of your paper please contact James M. Keller <fuzzieee2012@ieee-cis.org>. Thank you for participating in what promises to be an excellent meeting.

Sincerely, James M. Keller <fuzzieee2012@ieee-cis.org>

FORMATTING REQUIREMENTS

Your paper does not need any formatting changes.

REVIEWERS' COMMENTS

REVIEW NO. 1

```
Originality:              Accept
Significance of topic:    Strong Accept
Technical quality:        Strong Accept
Relevance to FUZZ-IEEE 2012:Strong Accept
Presentation:             Accept
Overall rating:           Strong Accept

Reviewer's expertise on the topic: High
Suggested form of presentation:    Oral
Best Paper Award nomination:       Yes
```

Comments to the authors:

1. The "a extension of ..." in the 2nd line of the 3 paragraph in Section I should be "an extension of ...".

2. In the 6 line of the last paragraph in Section I, "In Section 6" should be "In Section VI".

3. The font size of TABLE II could be larger for easily reading.

4. The "T" in the Caption and Head of TABLE I sould be in script for being consistent with the symbol defined in the text.

REVIEW NO. 2

```
Originality:              Accept
Significance of topic:    Accept
Technical quality:        Weak Accept
Relevance to FUZZ-IEEE 2012:Accept
Presentation:             Weak Accept
Overall rating:           Accept
```

```
Reviewer's expertise on the topic: Medium
Suggested form of presentation:    Any
Best Paper Award nomination:       No
```

Comments to the authors:

The paper proposed a property of weak transitivity iand weak closure in

interval-valued Fuzzy Sets. Theoritically, the proposed properties are

interesting. However, it is needed to implement the concept in the relation the

real world application.

REVIEW NO. 3

```
Originality:              Neutral
Significance of topic:    Neutral
Technical quality:        Neutral
Relevance to FUZZ-IEEE 2012:Neutral
Presentation:             Neutral
Overall rating:           Neutral
```

```
Reviewer's expertise on the topic: Low
Suggested form of presentation:    Any
Best Paper Award nomination:       No
```

Comments to the authors:

I have not sufficient expertise to this area today.

Weak $\mathcal{T}$-transitivity and weak closures of Interval-valued Fuzzy Relations

Ramón González-del-Campo and Luis Garmendia

***Abstract*— In this paper a new weak transitive property for interval-valued fuzzy relations ($\mathcal{IVFR}s$) is introduced. Weak $\mathcal{T}$-transitivity is equivalent to $\mathcal{T}$-transitivity when the $\mathcal{IVFR}$ is a fuzzy relation and $\mathcal{T} = (T, T)$ for a triangular norm T. Otherwise it is a weaker property than $\mathcal{T}$-transitive one relaxing the need that all intervals must be comparable and must satisfy all the transitive inequalities by just the need of not having comparable non $\mathcal{T}$-transitive cycles. This paper also defines a weak concept of closure, and it is proved that it exists is just one $\mathcal{T}$-transitive and weak $\mathcal{T}$-transitive closure, it does not exists a $\mathcal{T}$-transitive weak closure, but there are many weak $\mathcal{T}$-transitive weak closures of an $\mathcal{IVFR}s$.**

I. Introduction

Fuzzy sets ($\mathcal{FS}$) were introduced by Zadeh in 1965 [20]. Since then many generalizations of fuzzy sets have been proposed to model the uncertainty and the vagueness in linguistic variables replacing the unit interval by another structure such as posets or lattices [7], [13], [17]. One of these generalizations are type-2 fuzzy sets [21], [22], [23] introduced by Zadeh. A Type-2 fuzzy set A on a universe of discourse X, $\mathcal{FS}2$, is a fuzzy set as a mapping whose membership function is another fuzzy set on [0,1]:

$$A = \{((x, u), \mu_A(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in [0, 1]\}$$

Type-2 fuzzy sets have been widely studied and applied since in many cases the uncertainty can be better expressed by a fuzzy set than by a single numeric value. The problem with type-2 fuzzy sets though is their computational complexity and the difficulty for an expert to select the adequate fuzzy subset as membership degree of an object to model a linguistic label. This is the reason why some simplifications have been proposed. One of the most popular and useful simplification is the use of interval-valued fuzzy sets.

Interval-valued fuzzy sets ($\mathcal{IVFS}s$) were introduced in the 60s by Grattan-Guinness [16], Jahn [18], Sambuc [19] and Zadeh [21]. They are extensions of classical fuzzy sets where the membership value between 0 and 1 is replaced by an interval in $[0, 1] \times [0, 1]$. They easily allow to model uncertainty and vagueness because sometimes it is easier for experts to give a "membership interval" than a membership degree to describe a characteristic of objects on a universe. $\mathcal{IVFS}$ are a special case of type-2 fuzzy sets that simplifies the calculations while preserving their richness as well.

Intuitionistic fuzzy sets on X ($\mathcal{IFS}s$) were introduced by Atanassov [1] are also an extension of fuzzy sets in which each element has a membership degree, μ, and a non-membership degree, ν satisfying: $\mu + \nu \leq 1$.

$A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X, \mu(x), \nu(x) \in [0, 1]\}$

The value $\pi = 1 - \mu - \nu$ is a measure of the uncertainty.

Intuitionistic fuzzy relations ($\mathcal{IFR}s$) have been studied widely [3], [4], [5], [10], [11], [12]. The structure of intuitionistic fuzzy relations is similar to the interval-valued fuzzy relations ($\mathcal{IVFR}s$) as both are mappings $X_1 \times X_2 \rightarrow [0, 1]^2$. However, the semantics are not similar because $\mathcal{IVFR}s$ are usually used to define an interval degree that characterizes a relationship between couples of objects and $\mathcal{IR}$ give a degree of relationship and a degree of non relationship.

When the objects to relate are on the same universe X, a very strong property that a fuzzy relation ($\mathcal{FR}$) can fulfil is transitivity with respect to a given t-norm. However, the transitive property for interval-valued fuzzy relations [15] is a much stronger condition because it needs that all intervals must be comparable in the inequality that defines $\mathcal{T}$-transitivity. Due to the fact that the set of intervals in [0,1] is a lattice, it is possible to relax the "classical" transitivity by satisfying the inequality just when the intervals are comparable. This new property is called weak transitivity. In this paper weak transitivity is defined and is compared with fuzzy $\mathcal{T}$-transitivity for $\mathcal{FR}$ and $\mathcal{IVFR}s$.

Sometimes imposing fuzzy $\mathcal{T}$-transitivity to $\mathcal{FR}s$ or $\mathcal{IVFR}s$ by computing the $\mathcal{T}$-transitive closure [15] gives in a completely different $\mathcal{IVFR}$, with much more higher interval degrees. So it looks important to look for a weaker condition to impose coherence not in contradiction to $\mathcal{T}$-transitivity and resulting in a much closer closure to a given $\mathcal{IVFR}$.

The computation of any P closure to an $\mathcal{IVFR}$ for a given property P, must find the lowest $\mathcal{IVFR}$ containing a given $\mathcal{IVFR}$ and satisfying P. This is a strong condition as the P closure must be under many $\mathcal{IVFR}s$. Sometimes it is enough to find a weaker closure satisfying P with no other $\mathcal{IVFR}$ satisfying P in between. For some properties such as $\mathcal{T}$-transitivity both kinds of closures are the same but for others (such as weak $\mathcal{T}$-transitivity) they are not. However,

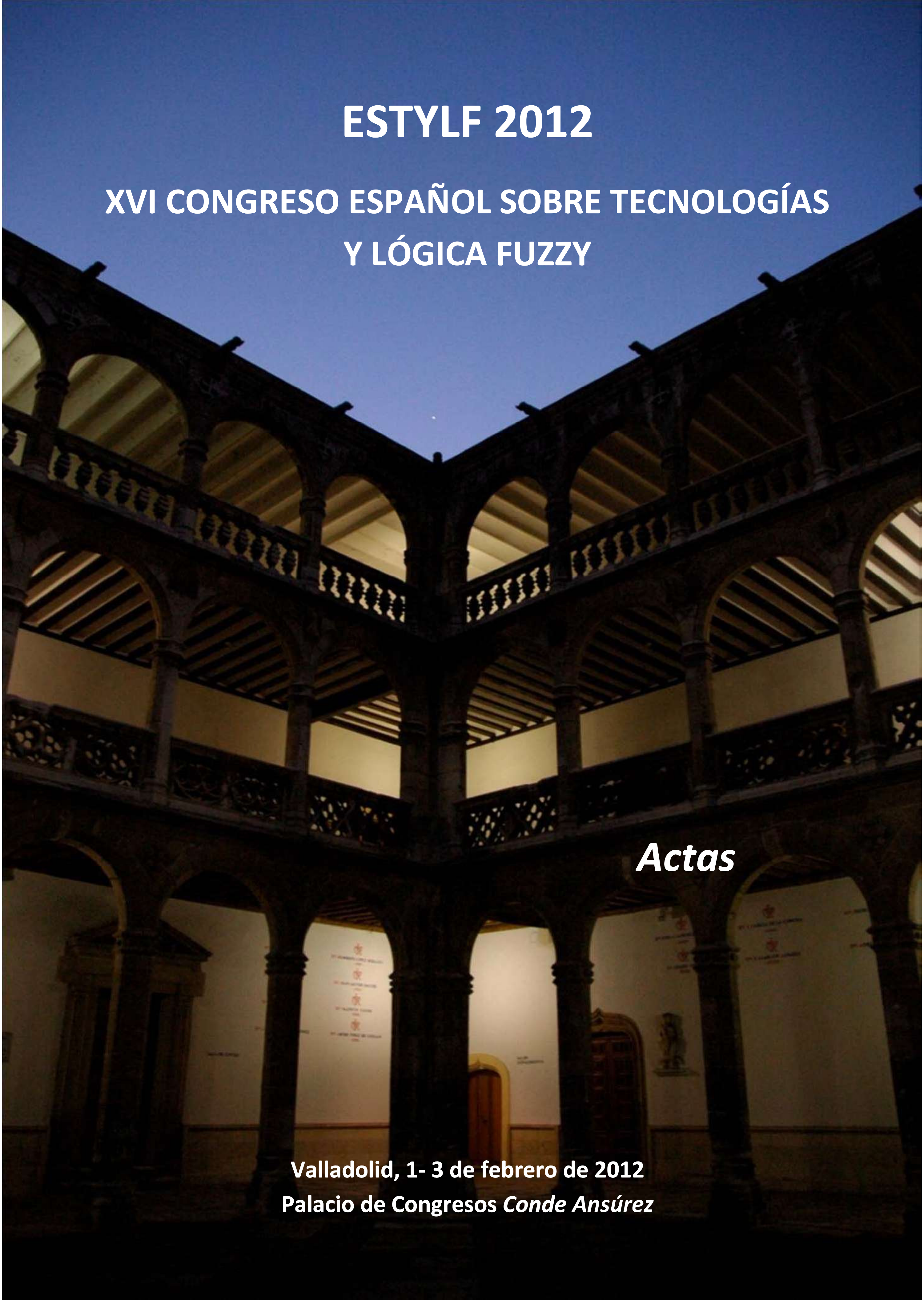
This paper also defines a weak concept of closure, and show that even though it does not exist a weak $\mathcal{T}$-transitive closure, there exist many weak $\mathcal{T}$-transitive weak closures of an $\mathcal{IVFR}s$. Weak closures are always equal or closer $\mathcal{IVFR}$ to a given $\mathcal{IVFS}$ than usual closures. Some properties of weak $\mathcal{T}$-transitivity for $\mathcal{IVFR}s$ when using t-representable t-norms are given and some examples of weak $\mathcal{T}$-transitive weak closures using t-representable t-norm are given.

Ramón González-del-Campo is with the Department SIC, Universidad Complutense de Madrid, Spain (email: rgonzale@estad.ucm.es).

L. Garmendia is with the Department ISIA, Universidad Complutense de Madrid, Spain (email: lgarmend@fdi.ucm.es).

ESTYLF 2012

XVI CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY



Actas

Valladolid, 1- 3 de febrero de 2012

Palacio de Congresos *Conde Ansúrez*

ORGANIZADORES:

Universidad de Valladolid
European Society for Fuzzy Logic and Techonology

EDITORES:

Gregorio I. Sainz Palmero
Jesús Alcalá Fernández
Rubén García Pajares
Bonifacio Llamazares
María Jesús de la Fuente Aparicio

ENTIDADES COLABORADORAS:

Ministerio de Ciencia e Innovación. Gobierno de España.
Universidad de Valladolid.
VIAS y CONSTRUCCIONES, S. A.
Fundación CARTIF.

ISBN: 978-84-615-6653-2

DECOMPOSITION OF $\mathscr{I}\mathscr{V}$-SIMILARITIES

Ramón González-del-Campo[1], **Luis Garmendia**[2]

[1]*DSIC(UCM)*, rgonzale@estad.ucm.es
[2]*DISIA(UCM)*, lgarmend@fdi.ucm.es

Abstract

In this paper an extension of Lee's theorem for interval-valued fuzzy relations is given. An algorithm to compute an $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarity decomposition is given.

Keywords: interval-valued fuzzy relations, $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarity, bridge between two $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarities.

1 Introduction

Interval-valued fuzzy sets ($\mathscr{I}\mathscr{V}\mathscr{F}\mathscr{S}s$) were introduced in the 60s by Grattan-Guinness [12], Jahn [13], Sambuc [18] and Zadeh [21]. They are extensions of classical fuzzy sets where the membership value between 0 and 1 is replaced by an interval in $[0,1]\times[0,1]$. They easily allow to model uncertainty and vagueness: sometimes it is better to give a membership interval than a membership degree to describe a characteristic of objects on a universe. $\mathscr{I}\mathscr{V}\mathscr{F}\mathscr{S}$ are a special case of type-2 fuzzy sets that simplifies the calculations while preserving their richness as well. $\mathscr{I}\mathscr{V}\mathscr{F}\mathscr{S}$ have been widely applied [1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 19, 20].

Lee's theorem [14] was proposed for constructing the max-min equivalence closure of fuzzy similarity matrices.

This paper is organized as follows. In section 2 some basic concepts about interval-valued fuzzy sets are recalled. Lee's theorem for fuzzy relations is recalled as well. In section 3 it is showed that the bridge between two $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarities is a $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarity. Moreover, for any $\mathscr{I}\mathscr{V}$-similarity there exists at least a decomposition into two $\mathscr{I}\mathscr{V}$-subsimilarities. In subsection 3.1 an algorithm to compute the decomposition is given.

2 Preliminaries

Definition 2.1. *[6] Let $(L,\leq_L)$ be a lattice such that:*

1. $L=\{[x_1,x_2]\in[0,1]^2$ *with* $x_1\leq x_2\}$.
2. $[x_1,x_2]\leq_L[y_1,y_2]$ *if and only if* $x_1\leq y_1$ *and* $x_2\leq y_2$. *In particular:*

   $[x_1,x_2]=_L[y_1,y_2]$ *if and only if* $x_1=y_1$ *and* $x_2=y_2$.

$(L,\leq_L)$ is a complete lattice and the supremum and infimum are defined as follows.

Definition 2.2. *[7] Let $\{[v_i,w_i]\}$ be a set of intervals on L. Then*

1. $\wedge\{[v_i,w_i]\}\equiv[infimun\{v_i\},infimun\{w_i\}]$
2. $\vee\{[v_i,w_i]\}\equiv[supremun\{v_i\},supremun\{w_i\}]$

Definition 2.3. *[6] An interval-valued fuzzy set A on a universe X can be represented by the mapping:*

$$A=\{(a,[x_1,x_2])\mid a\in X,[x_1,x_2]\in L\}$$

Definition 2.4. *[6] Let A and B be two interval-valued fuzzy sets on a universe X. The equality between A and B is defined as follows:*

$$A=B \text{ if and only if } A(a)=_L B(a) \text{ for all } a\in X.$$

Definition 2.5. *[6] Let A and B be two interval-valued fuzzy sets on a universe X. The inclusion of A into B is defined as follows:*

$$A\subseteq B \text{ if and only if } A(a)\leq_L B(a) \text{ for all } a\in X.$$

Definition 2.6. *[6] Let A and B be two interval-valued fuzzy sets on a universe X. The intersection between A and B is defined as follows:*

$$A\cap B(a)=_L\wedge(A(a),B(a)) \text{ for all } a\in X.$$

Definition 2.7. *[6] A negation operator for interval-valued fuzzy sets $\mathscr{N}$ is a decreasing function $\mathscr{N}:L\to L$ that satisfies:*

1. $\mathscr{N}(0_L) =_L 1_L$
2. $\mathscr{N}(1_L) =_L 0_L$

where $0_L = [0,0]$ *and* $1_L = [1,1]$.

If $\mathscr{N}(\mathscr{N}([x_1,x_2])) =_L [x_1,x_2]$ *for all* $[x_1,x_2]$ *in L then* $\mathscr{N}$ *is called an involutive negation.*

Definition 2.8. *[6] A strong negation operator for interval-valued fuzzy sets* $\mathscr{N}$ *is a continuous, strictly decreasing and involutive negation operator.*

The t-norm operators are generalized to the lattice L in a straightforward way.

Definition 2.9. *[6] A generalized t-norm function* $\mathscr{T}$ *is a monotone increasing, symmetric and associative operator* $\mathscr{T} : L^2 \to L$ *that satisfies:* $\mathscr{T}(1_L,[x_1,x_2]) =_L [x_1,x_2]$ *for all* $[x_1,x_2]$ *in L.*

Notation. The lowest value of an interval $x = [x_1,x_2]$ is denoted $\underline{x}$ and the highest value of an interval $x = [x_1,x_2]$ is denoted $\overline{x}$, so $x = [x_1,x_2] = [\underline{x},\overline{x}]$.

Definition 2.10. *[6] A generalized t-norm operator* $\mathscr{T}$: $L^2 \to L$ *is t-representable if there are two t-norms* T_1 *and* T_2 *that satisfy:*

1. $\mathscr{T}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) =_L [T_1(x_1,y_1),T_2(x_2,y_2)]$
2. $T_1(v,w) \leq T_2(v,w)$ *for all* $v,w \in [0,1]$

Definition 2.11. *[4] Let* X_1 *and* X_2 *be two universes of discourse. An interval-valued fuzzy relation* $R : X_1 \times X_2 \to L$ *is a mapping:*

$$R = \{((a,b),[x,y]) \mid a \in X_1, b \in X_2, [x,y] \in L\}$$

where $x = \underline{R(a,b)}$ and $y = \overline{R(a,b)}$.

In the rest of the paper, it is assumed that $X_1 = X_2 = X$ and that X is finite.

Definition 2.12. *[10] An interval-valued fuzzy relation* R : $X^2 \to [0,1]^2$ *is reflexive if:*

$$R(a,a) =_L 1_L \text{ for all } a \in X$$

where $1_L = [1,1]$.

Definition 2.13. *[10] An interval-valued fuzzy relation* R : $X^2 \to [0,1]^2$ *is* $[\alpha_1,\alpha_2]$*−reflexive if:*

$$R(a,a) \geq_L [\alpha_1,\alpha_2] \text{ for all } a \in X$$

where $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$ *and* $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Definition 2.14. *[10] An interval-valued fuzzy relation* R : $X^2 \to [0,1]^2$ *is symmetric if:*

$$R(a,b) =_L R(b,a) \text{ for all } a,b \in X$$

Definition 2.15. *[10] Let* $\mathscr{T}$ *be a generalized t-norm operator and let R be an interval-valued fuzzy relation on X. R is* $\mathscr{T}$*-transitive if:*

$$\mathscr{T}(R(a,b),R(b,c)) \leq_L R(a,c) \text{ for all } a,b,c \in X$$

Definition 2.16. *A fuzzy relation* $R : X^2 \to [0,1]$ *is a similarity if R is reflexive, symmetric and* min*-transitive.*

Definition 2.17. *Let B be a similarity on X with cardinality n. Let* $\pi = \{a_k\}$ *be a permutation of the values 1..n. Then* $P_\pi(B)$ *is the similarity where the* k^{th} *element of X is permuted by the element* a_k *of X.*

Lemma 2.1. *[14] Let B be a similarity. Let* π *be any permutation. Then* $P_\pi(B)$ *is a similarity.*

Definition 2.18. *[14] Let R and S be two similarities on universes* X_1 *and* X_2 *with cardinalities* n_1 *and* n_2 *respectively. Let t be an interval in* $[0,1]$ *such that* $t \leq \wedge(\wedge(R(a_i,a_j)),\wedge(S(a_k,a_l)))$ *for all i,j,k,l. Then, the t-bridge between R and S is a similarity defined as follows:*

$$B_{t;R_{n_1\times n_1},S_{n_2\times n_2}} = \begin{pmatrix} R & (t)_{n_1\times n_2} \\ (t)_{n_2\times n_1} & S \end{pmatrix}$$

where $(t)_{n_2\times n_1}$ *and* $(t)_{n_1\times n_2}$ *are a* $n_2 \times n_1$ *matrix and a* $n_1 \times n_2$ *respectively whose elements are t.*

Sometimes it is written $B_{t;R,S}$ instead of $B_{t;R_{n_1\times n_1},S_{n_2\times n_2}}$.

Theorem 2.1. *[14] Let C be a similarity on a universe with cardinality* $n \geq 2$*. Then, there exist two similarities (R, S) and a value t which verifies:*

$$C = P_\pi(B_{t;R_{n_1\times n_1},S_{n_2\times n_2}})$$

for some permutation π.

Note that n_1 *and* n_2 *are the cardinalities of the universes of R and S respectively with* $n = n_1 + n_2$ *and that t is the minimum value of R and S.*

3 Decomposition of $\mathscr{IV}$-similarities into $\mathscr{IV}$-subsimilarities

Let $X = \{a_1,...,a_n\}$ be a finite universe.

Definition 3.1. *Let* $\mathscr{M}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = [min(x_1,y_1),min(x_2,y_2)]$ *be a t-generalized t-norm. Let R be an interval-valued fuzzy relation on a universe X. R is a* $\mathscr{IV}$*-similarity if it is reflexive, symmetric and* $\mathscr{M}$*-transitive.*

Definition 3.2. *Let R and S be two* $\mathscr{IV}$*-similarities on universes* X_1 *and* X_2 *with cardinalities* n_1 *and* n_2 *respectively. Let* $[t_1,t_2]$ *be an interval in* $[0,1]^2$ *such that* $[t_1,t_2] \leq_L \wedge(\wedge(R(a_i,a_j)),\wedge(S(a_k,a_l)))$ *for all i,j,k,l. Then the* $[t_1,t_2]$*-bridge between R and S is an interval-valued fuzzy relation on* $X_1 \cup X_2$*. B is defined as follows:*

$$B_{[t_1,t_2];R,S} = \begin{pmatrix} R & ([t_1,t_2])_{n_1\times n_2} \\ ([t_1,t_2])_{n_2\times n_1} & S \end{pmatrix}$$

where $[t_1,t_2]$ is called the bridge interval.

Lemma 3.1. *Let R and S be two reflexive $\mathscr{IVFR}$s on universes X_1 and X_2. Then $B_{[t_1,t_2];R,S}$ is a reflexive interval-valued fuzzy relation on $X_1 \cup X_2$.*

Proof. Trivial because R and S are reflexive interval-valued fuzzy relations. □

Lemma 3.2. *Let R and S be two symmetric $\mathscr{IVFR}$s on universes X_1 and X_2. Then $B_{[t_1,t_2];R,S}$ is a symmetric interval-valued fuzzy relation on $X_1 \cup X_2$.*

Proof. Cases:

1. If $i,j \le n_1$ then $B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j) = R(a_i,a_j) = R(a_j,a_i) = B_{[t_1,t_2];R,S}(a_j,a_i)$ because R is symmetric.
2. If $i,j > n_1$ then $B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j) = S(a_i,a_j) = S(a_j,a_i) = B_{[t_1,t_2];R,S}(a_j,a_i)$ because S is symmetric.
3. Otherwise, $B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j) = [t_1,t_2] = B_{[t_1,t_2];R,S}(a_j,a_i)$ by construction.

□

Lemma 3.3. *Let R and S be two $(min-min)$-transitive interval-valued fuzzy relations on universes X_1 and X_2 with cardinalities n_1 and n_2 respectively. Let $B_{[t_1,t_2];R,S}$ be the $[t_1,t_2]$-bridge between R and S. Then, $B_{[t_1,t_2];R,S}$ is (min,min)-transitive interval-valued fuzzy relation.*

Proof. It will be proved that $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$ for all i,j,k.
Cases:

1. For $i,j \le n_1$:
   (a) For $k \le n_1$:
   $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) =_L$
   $=_L \mathscr{M}(R(a_i,a_k), R(a_k,a_j))$
   $\le_L R(a_i,a_j) =_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$
   so $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$ is verified due to the fact that R is a $\mathscr{IV}$-similarity.
   (b) $k > n_1$:
   $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) =_L \mathscr{M}([t_1,t_2],[t_1,t_2]) =_L [t_1,t_2] \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$.
2. For $i \le n_1$ and $j > n_1$:
   (a) For $k \le n_1$:
   $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) =_L \mathscr{M}(R(a_i,a_k),[t_1,t_2]) =_L [t_1,t_2] \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$
   (b) For $k > n_1$:
   $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) =_L \mathscr{M}([t_1,t_2],S(a_k,a_j)) =_L [t_1,t_2] \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$
   so $\mathscr{M}(B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_k), B_{[t_1,t_2];R,S}(a_k,a_j)) =_L [t_1,t_2] \le_L B_{[t_1,t_2];R,S}(a_i,a_j)$ for all k.
3. For $i,j > n_1$: similar to case 1 using S instead of R.
4. For $i > n_1$ and $j \le n_1$: similar to case 2 using R instead of S.

□

Theorem 3.1. *Let R and S be two $\mathscr{IV}$-similarities on universes X_1 and X_2. Let $B_{[t_1,t_2];R,S}$ be the $[t_1,t_2]$-bridge between R and S. Then, $B_{[t_1,t_2];R,S}$ is a $\mathscr{IV}$-similarity on $X_1 \cup X_2$.*

Proof. Trivial according to the lemmas 3.1,3.2,3.3. □

Lemma 3.4. *Let R be an interval-valued fuzzy relation on a finite universe X. If R is a $\mathscr{IV}$-similarity then there exists an interval $R(a_p,a_q)$ such that $R(a_p,a_q) \le_L R(a_i,a_j)$ for all i,j.*

Proof. It will be proved using mathematical induction:

1. Base case: Let X be a universe with cardinality 3. Let R be a $\mathscr{IV}$-similarity on X. Then R is as follows:

   $$\begin{pmatrix} 1_L & [y_1,y_2] & [x_1,x_2] \\ [y_1,y_2] & 1_L & [x_1,x_2] \\ [x_1,x_2] & [x_1,x_2] & 1_L \end{pmatrix}$$

   where $[x_1,x_2] \le_L [y_1,y_2]$, so there exists an interval $[y_1,y_2]$ which is minimum.

2. Inductive step: Let X be a universe with cardinality n. Let R be a $\mathscr{IV}$-similarity on X which has a minimum interval. Let's add an element a_{n+1} to the universe. Let S be a $\mathscr{IV}$-similarity on $X \cup \{a_{n+1}\}$ such that $S(a_i,a_j) = R(a_i,a_j)$ for all a_i,a_j in X. It is denoted $S(a_i,a_{n+1})$ as c_i for all $i: 1..n$. For any a_i,a_j in X, it is verified:

   $min(R(a_i,a_j),c_j) \le_L c_i$
   $min(c_i,c_j) \le_L R(a_i,a_j)$
   $min(R(a_i,a_j),c_i) \le_L c_j$

   so $c_i \le_L c_j$ or $c_j \le_L c_i$. In similar way it is possible to prove that $R(a_i,a_j) \le_L c_j$ or $c_j \le_L R(a_i,a_j)$ and $c_i \le_L R(a_i,a_j)$ or $R(a_i,a_j) \le_L c_i$.

   Therefore, there exists a minimum interval in S.

□

Definition 3.3. *Let R be a $\mathscr{IV}$-similarity on X. Let $I \subseteq X$ be a subset of X. A subsimilarity of R restricted to T $(R)_I$ is defined as $(R)_I : I \times I \to [0,1]^2$ such that $(R)_I(a_r, a_s) = R(a_r, a_s)$ for all a_r and a_s are in I. $(R)_I$ is denoted I-subsimilarity of R.*

Lemma 3.5. *Let R be a $\mathscr{IV}$-similarity on X. Any I-subsimilarity of R on $I \subseteq X$ is a $\mathscr{IV}$-similarity.*

Proof. Trivial. □

Lemma 3.6. *Let C be a $\mathscr{IV}$-similarity and let $C(a_p, a_q)$ be the minimum value of C. Let $I = \{a_i \mid a_i \in X$ and $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$ and $I' = X \setminus I$. Then, $C(a_i, a_j) >_L C(a_p, a_q)$ for all a_i and a_j in I'.*

Proof. Trivial by construction of I'. □

Lemma 3.7. *Let C be a $\mathscr{IV}$-similarity and let $C(a_p, a_q)$ be the minimum value of C. Let $I = \{a_i \mid a_i \in X$ and $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$ and $I' = X \setminus I$. Then, $C(a_i, a_j) =_L C(a_p, a_q)$ for all a_i in I and for all a_j in I'.*

Proof. Let's suppose there exists a_r in I and a_s in I' such that $C(a_r, a_s) >_L C(a_p, a_q)$. Let $C(a_r, a'_s)$ be such that r is in I and s' in I'. By lemma 3.6 $C(a_s, a_{s'}) >_L C(a_p, a_q)$ for a_s and a'_s in I'. Then, it is verified $C(a_p, a_q) <_L min(C(a_r, a_s), C(a_s, a_{s'})) \leq_L C(a_r, a_{s'})$ so a_r and a'_s are in I' which contradicts the assumption.

□

Theorem 3.2. *Let C be a $\mathscr{IV}$-similarity on a universe X with cardinality n. Then, there exist two similarities (R, S) and an interval $[t_1, t_2]$ which verifies:*

$$C = P_\pi(B_{[t_1,t_2];R_{n_1 \times n_1}, S_{n_2 \times n_2}})$$

for some permutation π.

Note that n_1 and n_2 are the cardinalities of the universes of R and S respectively and $[t_1, t_2]$ is the minimum value of R and S.

Proof. Let C be a $\mathscr{IV}$-similarity and let $C(a_p, a_q)$ be the minimum value of C according to lemma 3.4.

Let $I = \{a_i \mid a_i \in X \text{ and } C(a_i, a_q) = C(a_p, a_q)\}$ and $I' = X \setminus I$.

$(C)_I$ and $(C)_{I'}$ are $\mathscr{IV}$-similarities according to lemma 3.5

For all a_i in I and for all a_j in I' it is verified $C(a_i, a_j) = C(a_p, a_q)$ according to lemma 3.7.

Let $\pi = \{a_{i_1}, ..., a_{i_{n_1}}, a_{i'_1}, ..., a_{i'_{n_2}}\}$ be a permutation where $a_{i_1}, ..., a_{i_{n_1}}$ belong to I and $a_{i'_1}, ..., a_{i'_{n_2}}$ belong to I'.

Then: $C = P_\pi(B_{[t_1,t_2];R_{n_1 \times n_1}, S_{n_2 \times n_2}})$ where $[t_1, t_2] =_L C(a_p, a_q)$, $n_1 = card(I)$ and $n_2 = card(X \setminus I)$ □

3.1 Algorithm to decompose an $\mathscr{IV}$-similarity into $\mathscr{IV}$-subsimilarities

- *Input*: A $\mathscr{IV}$-similarity C on X with cardinality n such that $n \geq 2$.

- *Output*: Two $\mathscr{IV}$-subsimilarities R,S on X_1, X_2 such that $X = X_1 \cup X_2$ and a brdge interval t such that $C = P_\pi(B_{[t_1,t_2];R,S})$

- The algorithm runs as follows:
  - *Step 1*: Search for the minimum interval of C (it always exists by lema 3.4): $t = [a_p, a_q]$.
  - *Step 2*: Choose X_1 such that $X_1 \subset X$. Compute I such that $I = \{a_i \mid a_i \in X_1$ and $C(a_i, a_q) =_L C(a_p, a_q)\}$
  - *Step 3*: Compute: $R \leftarrow C_I$ and $S \leftarrow C_{X \setminus I}$

Example 3.1. *Let C be a $\mathscr{IV}$-similarity:*

$$C = \begin{pmatrix} [1,1] & [0.1,0.2] & [0.8,1] \\ [0.1,0.2] & [1,1] & [0.1,0.2] \\ [0.8,1] & [0.1,0.2] & [1,1] \end{pmatrix}$$

Then:

$$R = \begin{pmatrix} [1,1] & [0.8,1] \\ [0.8,1] & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} [1,1] \end{pmatrix}$$

and

$$t = [0.1, 0.2]$$

$$B_{t;R,S} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0.8,1] & [0.1,0.2] \\ [0.8,1] & [1,1] & [0.1,0.2] \\ [0.1,0.2] & [0.1,0.2] & [1,1] \end{pmatrix}$$

4 Conclusions

The decomposition of similarities into subsimilarities is a usefull result that can be applied, for example, in optimal computation of min-transitive closures [14]. In this paper those results are extended to decompose and $\mathscr{IV}$-similarity into $\mathscr{IV}$-subsimilarities, including an algorithm to do it.

Acknowledgment

This research is partially supported by the Spanish Ministry of Science and Technology, grant number TIN2009-07901, the Research Group CAM GR35/10-A at Complutense University of Madrid.

References

[1] T. Bilgic. Interval-valued preference structures. *European Journal of Operational Research*, 105(1):162–183, February 1998.

[2] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, and R Orduna. Image thresholding computation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *JACIII*, pages 187–194, 2007.

[3] H. Bustince and P. Burillo. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets Syst*, 113:205–219, 2000.

[4] H. Bustince and P. Burillo. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets Syst.*, 113(2):205–219, 2000.

[5] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, and M. Pagola. An algorithm for calculating the threshold of an image representing uncertainty through a-ifss. *Proceedings of 11th Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 2383–2390, 2006.

[6] C. Cornelis, G. Deschrijver, and E. Kerre. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application. *Int. J. Approx. Reasoning*, 35(1):55–95, 2004.

[7] C. Cornelis, G. Deschrijver, and E. Kerre. Advances and challenges in interval-valued fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(5):622–627, 2006.

[8] G. Deschrijver and E. E. Kerre. On the composition of intuitionistic fuzzy relations. *Fuzzy Sets Syst.*, 136(3):333–361, 2003.

[9] A. Dziech and M. B. Gorzalczany. Decision making in signal transmission problems with interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst.*, 23:191–203, August 1987.

[10] R. González-del Campo, L. Garmendia, and J. Recasens. Transitive closure of interval-valued relations. *Proceedings IFSA-EUSFLAT'09*, pages 837–842, 2009.

[11] M. B. Gorzalczany. Interval-valued fuzzy controller based on verbal model of object. *Fuzzy Sets Syst.*, 28:45–53, October 1988.

[12] I. Grattan-Guiness. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. *Math. Logik. Grundladen Math*, 22:149–160, 1975.

[13] K.U. Jahn. Intervall-wertige Mengen. *Math. Nach.*, 68:115–132, 1975.

[14] H. Lee. An optimal algorithm for computing the max-min transitive closure of a fuzzy similarity matrix. *Fuzzy Sets and Systems*, 123(1):129–136, 2001.

[15] A. Pankowska and M. Wygralak. On hesitation degrees in if-set theory. In *ICAISC*, pages 338–343, 2004.

[16] A. Pankowska and M. Wygralak. General if-sets with triangular norms and their applications to group decision making. *Inf. Sci.*, 176(18):2713–2754, 2006.

[17] M. K. Roy and R. Biswas. I-v fuzzy relations and sanchez's approach for medical diagnosis. *Fuzzy Sets Syst.*, 47:35–38, April 1992.

[18] E. Sanchez and R. Sambuc. Fuzzy relationships. phi -fuzzy functions. application to diagnostic aid in thyroid pathology. *Proceedings of an International Symposium on Medical Data Processing*, pages 513–524, 1976.

[19] E. Szmidt and J. Kacprzyk. Group decision making under intuitionistic fuzzy preference relations. In *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 172–178. IPMU, 1998.

[20] H.R. Tizhoosh. Image thresholding using type-2 fuzzy sets. *Pattern Recognit*, 38:2363–2372, 2005.

[21] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. *Information Sciences*, 8:199–249, 1975.