UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FILOSOFÍA
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia

LA EQUIVALENCIA MATEMÁTICA ENTRE MECÁNICAS CUÁNTICAS Y LA IMPREDECIBILIDAD EN LA TEORÍA DEL CAOS. DOS CASOS DE ESTUDIO PARA EL DEBATE REALISMO-INSTRUMENTALISMO.

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Miguel Madrid Casado

Bajo la dirección del doctor

Andrés Rivadulla

Madrid, 2009

- **ISBN:** 978-84-692-6021-0

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
*****
DEPARTAMENTO DE LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

La equivalencia matemática entre Mecánicas Cuánticas y la impredecibilidad en la Teoría del Caos

Dos casos de estudio para el debate realismo-instrumentalismo

Carlos Miguel MADRID CASADO

Tesis Doctoral en Filosofía dirigida por el Prof. Andrés Rivadulla

«De hecho, a más ciencia, mayor misterio.»

Vladimir Nabokov, *Opiniones contundentes*

«En cierto modo cabría decir que "filosofar" no es pensar en Kant,

sino en Newton a través de Kant o de Einstein.»

Gustavo Bueno, *Los dioses olvidados*

ÍNDICE

CASO DE ESTUDIO II
La impredecibilidad en la Teoría del Caos

AGRADECIMIENTOS

Cambiar la matemática por la filosofía supuso un salto cuántico que revolucionó mi posición. Poco a poco la incertidumbre del momento se desvaneció y ambos saberes, científico uno y humano otro, aparecieron como duales y complementarios. De todos modos, esta perturbación de mi trayectoria vital no hubiera sido posible sin la modificación en las condiciones iniciales que practicó mi profesor de filosofía del bachillerato, José Lasaga, así como otros profesores de matemática de la licenciatura, que encaminaron mis caóticos pasos hacia ese atractor extraño que es la lógica, la historia y la teoría de la ciencia. No hay razón para no agradecer su generosidad a las muchas personas que me han dado impulso durante estos cuatro años de trabajo, desde mi familia y amigos hasta todos aquellos compañeros y profesores del doctorado –en especial, Andrés Rivadulla- con quienes he compartido algo más que mi tiempo. Asimismo, también debo dar las gracias a las revistas cuyas páginas han ido acogiendo con mayor o menor fortuna una parte de lo que aquí se cuenta:

- «A vueltas con Ortega, la Física y Einstein», *Revista de Occidente* 294 (2005) 5-20.

- «Ochenta años de la equivalencia entre Mecánicas Cuánticas», *Revista Española de Física* 20/3 (2006) 57.

- «De la equivalencia matemática entre la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria», *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 10/1 (2007) 103-128.

- «A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics», *Latin American Journal of Physics Education* 2/2 (2008) 104-108.

- «Do mathematical models represent the World? The case of quantum mathematical models», en José L. González Recio (ed.): *Nature & Life. Philosophical Essays on Physics and Biology*, Georg Olms Verlag, Hildersheim, 2009, en prensa.

- «Edward Lorenz (1917-2008): ¿Padre de la Teoría del Caos?», *Revista Española de Física* 22/3 (2008) 38-40.

- «A vueltas con Kant y las Matemáticas», *El Basilisco* 34 (2004) 73-80.

- «Teoría del cierre categorial aplicado a la Mecánica Cuántica», *El Catoblepas* 48 (2006) 17.

- «El Nuevo Experimentalismo en España: entre Gustavo Bueno e Ian Hacking», *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía* XI (2006) 153-169.

- «El análisis husserliano de la matematización de la naturaleza a comienzos del siglo XXI», *Nexo. Revista de Filosofía de la Universidad Complutense* II (2004) 79-101.

- «Kant y el helecho de Barnsley» en Agustín Vicente, Patricia de la Fuente, Cristina Corredor, Juan Barba & Alfredo Marcos (eds.): *Actas del IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, SLMFCE, Valladolid, 2004, 350-352.

- «La ciencia como representación y la equivalencia entre mecánicas cuánticas» en Fernando Martínez Manrique & Luis Miguel Peris-Viñe (eds.): *Actas del V Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, SLMFCE, Granada, 2006, 373-376.

- «Las Matemáticas del Cambio Climático», *Encuentros Multidisciplinares. Revista de Investigación y Divulgación de la Universidad Autónoma* IX/26 (2007) 2-14.

Collado Villalba, Madrid

A MODO DE INTRODUCCIÓN

—Usted no es caso normal.
—¿No?
—No.
—¿Pues qué soy?
—Un caso de estudio.
—Yo seré un caso de estudio; pero nadie me quiere estudiar.

Pío Baroja, *El árbol de la ciencia*

El objetivo de esta tesis doctoral es analizar dos casos paradigmáticos de modelización teórica que pueden arrojar luz al debate abierto entre filósofos realistas e instrumentalistas de la Física de comienzos del siglo XXI. Por un lado, estudiaremos un ejemplo a priori desfavorable al realismo científico, a saber: la *equivalencia matemática* que media en Física Cuántica entre el formalismo de la Mecánica Matricial y el formalismo de la Mecánica Ondulatoria. Por otro lado, estudiaremos un ejemplo desfavorable, de modo inmediato, al instrumentalismo, pero también, aunque de un modo mediato, al realismo científico: la *impredecibilidad* que exhiben los sistemas dinámicos que maneja la actual Física del Caos.

A continuación, de modo casi telegráfico, realizamos una descripción concisa de los principales ítems de la tesis doctoral. Naturalmente, dentro de esta panorámica, hacemos mayor hincapié en las tesis sostenidas e impugnadas que en los argumentos empleados para apuntalarlas o derribarlas.

Preliminar: Capítulo 1 – El mito del realismo científico

Actualmente, el debate en filosofía de la física se plantea en buena parte en términos del conflicto entre realismo e instrumentalismo, o, con mayor generalidad, entre realismo y antirrealismo. Este capítulo preliminar plasma una aproximación genuinamente *sintética* a dicha disputa, con objeto de destruir lo que llamamos el *mito del realismo científico*, mejor dicho, *mito de la unicidad del realismo científico*; con más propiedad: no existe algo así como el realismo científico, sino que lo que efectivamente existen son realismo*s* científico*s*. De paso, también llevamos a cabo una ofensiva contra el mito opuesto, es decir, contra el *mito de la unicidad del antirrealismo científico*. Tras estudiar el conjunto heterogéneo de tesis que caen bajo la denominación de realismo científico (por oposición, del antirrealismo científico), comprobamos que no existe un subconjunto de las mismas que haya sido o que sea núcleo doctrinal común a toda filosofía realista (antirrealista) de la ciencia. En especial, distinguimos entre tesis ontológicas (*realismo de entidades*, *realismo de teorías*, *realismo progresivo*, *antirrealismo de entidades*, &c.) y epistemológicas (*realismo adecuacionista*, *realismo no adecuacionista*, *antirrealismo pragmatista*, &c.), y analizamos diversas gnoseologías (Bas van Fraassen, Ron Giere, Ian Hacking, Nancy Cartwright, Gustavo Bueno, &c.). Además, dejamos constancia de que existen *realismos no estándar*, como el *realismo estructural* o el *realismo experimental*, de los que nos ocuparemos más adelante.

Fijamos, pues, el sistema de referencia idóneo desde el que poder analizar posteriormente nuestro par de casos de estudio.

Caso I – La equivalencia matemática entre Mecánicas Cuánticas

Nuestra investigación sobre este caso de estudio es doble. Por una parte, se analiza en detalle este ejemplo de matematización entresacado de la historia de la Física teórica y que –como intentaremos mostrar- no ha recibido suficiente atención por parte de los teóricos de la ciencia. Y, por otra, se destilan al completo las consecuencias filosóficas que se derivan de este caso de estudio, curiosamente descuidado, para el debate sobre el realismo científico en el ámbito de la Física. Estamos en condiciones de adelantar a grandes rasgos nuestra tesis: (1) la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria son, vía isomorfismo, equivalentes; (2) esto nos da ocasión para analizar las posibles relaciones entre las teorías, los modelos y los sistemas reales; (3) el isomorfismo entre las Mecánicas Cuánticas no implica que sus sistemas empíricos sean isomorfos entre sí; y (4) esto nos permite formular un argumento contra el realismo científico estructural contemporáneo.

Planteamiento: Capítulo 2 – De la equivalencia interteórica

Este primer capítulo enfoca el problema del análisis de las relaciones de equivalencia entre teorías y modelos teóricos de la física. Intentando plasmar intuiciones extraídas de ejemplos paradigmáticos del quehacer de los físicos, distinguimos cuatro clases de equivalencia: la equivalencia *formal*, la equivalencia *lógica*, la equivalencia *matemática* y la equivalencia *empírica*. En principio, la *equivalencia formal* se manifiesta en dos modulaciones: la *equivalencia lógica* y la *equivalencia matemática*. Así, la noción de equivalencia lógica captura la idea de *traducción* entre teorías físicas que no son sino reformulaciones unas de otras (ejemplo: las Mecánicas Lagrangiana y Hamiltoniana, porque el lagrangiano puede expresarse en función del hamiltoniano y recíprocamente). A su vez, la noción de equivalencia matemática captura la idea de *isomorfía isométrica* entre las estructuras matemáticas subyacentes a dos teorías físicas (caso paradigmático: las Mecánicas Matricial y Ondulatoria). (La isomorfía entre espacios métricos de la Física garantiza que se presenten idénticas características *cualitativas*, mientras que la isometría –conservación de métricas o, en su caso, normas y/o productos escalares- garantiza idénticas características *cuantitativas*; y subrayemos que la petición de isometría no es redundante pese a lo que leemos en mucha literatura especializada, por cuanto existen espacios métricos isomorfos no isométricos, y, además, este concepto hará de puente entre las equivalencias *fuerte* y *débil* que sólo distinguen la mayoría de autores.) Por último, sostenemos que: (i) la equivalencia lógica *implica* equivalencia matemática (porque, por así decir, la traducción de teoremas a teoremas justifica también la conservación de las características cualitativas y cuantitativas de la isomorfía isométrica); (ii) la equivalencia formal –sea lógica o matemática- *implica* equivalencia empírica (porque la propiedad de isometría asegura idénticas predicciones numéricas en el paso a la empiria); y (iii) los recíprocos de (i) y (ii) no son, en general, ciertos.

Nudo: Capítulo 3 – De la equivalencia entre las Mecánicas Matricial y Ondulatoria

Este capítulo apoya la tesis de que la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria son *formalmente equivalentes* en virtud de su *equivalencia matemática* (de ningún modo son *lógicamente equivalentes*, pese a que suela afirmarse, puesto que existen sentencias no intertraducibles, a saber: el valor concreto de la función de onda en un punto espacial cualquiera carece de traducción, pues las matrices no poseen al espacio como dominio).

Históricamente, tanto los padres fundadores de la Mecánica Cuántica (por ejemplo, Schrödinger, Heisenberg o Einstein) como prestigiosos físicos cuánticos (p. ej. Bohm o Borowitz), filósofos de la física (van Fraassen o Beller) e historiadores de la ciencia (Jammer o Sánchez Ron) han dado por supuesto que la equivalencia entre la Mecánica Matricial de Heisenberg y la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger quedó firmemente demostrada por el propio Schrödinger en su artículo «Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen» (1926) y, simultáneamente, por Eckart en «Operator Calculus and the Solution of the Equation of Quantum Dynamics» (1926), unificándose ambos modelos matemáticos a partir de los trabajos de Dirac. Sin embargo, cuando se acude a tales artículos y se estudian con gafas de filósofo de la matemática, se detectan numerosas imprecisiones que invalidan la prueba de equivalencia matemática, desde lagunas científicas (¡el *iso*morfismo de Schrödinger-Eckart no es tal!) hasta lagunas filosóficas (¡casi se demuestra la equivalencia entre *observables* pero falta la de *estados*!). A nuestro entender, hay que esperar hasta 1932 (¡¡seis años después!!), para encontrar la primera prueba consistente de equivalencia y la primera unificación rigurosa de la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria en una Mecánica Cuántica más universal y abstracta: nos referimos al tiempo en que von Neumann dio a conocer su monumental obra *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.

Encabeza este capítulo un proyecto de reconstrucción racional de la Mecánica Matricial de 1925 y de la Mecánica Ondulatoria de 1926, empleando cierta «cartografía» diseñada al efecto. Tras este ejercicio de filosofía aplicada, estudiamos las «pruebas» de equivalencia de Schrödinger y Eckart (quedará para mejor ocasión estudiar la «prueba» que, simultáneamente, ideó Pauli). En pocas y groseras pinceladas, Schrödinger y Eckart no consiguen probar la equivalencia matemática por dos razones. Una de rango científico (si se prefiere: formal, de primer grado), otra de rango filosófico (si se prefiere: conceptual, de segundo grado). Primera, porque lo que llevan a cabo ni siquiera funciona. Tanto Schrödinger como Eckart logran probar que la Mecánica Ondulatoria está contenida en la Mecánica Matricial, pero fracasan a la hora de demostrar el contenido inverso. De otro modo, el isomorfismo isométrico de Schrödinger-Eckart no es, en realidad, isomorfismo: a cada operador ondulatorio le hace corresponder una matriz, pero no asegura que a cada matriz le corresponda un operador ondulatorio. Segunda, Schrödinger y Eckart (casi) probaron la equivalencia entre *observables*, pero les quedó mostrar lo mismo entre *estados*, mas esto último era imposible probarlo en 1926 al carecer la Mecánica de Heisenberg de un «espacio de estados» tan nítidamente definido como lo estaba el de la Mecánica de Schrödinger.

Después, nos acercamos a ese «pastiche o amalgama» de matemática ondulatoria y matricial que es la Teoría de las Transformaciones de Dirac. Tras las «pruebas» –mejor, «pistas» o «indicios»- de equivalencia entre mecánicas cuánticas, Dirac fue el pionero en establecer la distinción entre *estados* y *observables* del sistema físico, y no se olvide que la carencia de esta distinción fue lo que produjo el fallo en las pruebas de equivalencia de Schrödinger y Eckart. Dirac dio con la clave y respondió al enigma. Pero, aunque ya dispuso de todas las piezas del rompecabezas, no atinó a hacerlas encajar, porque las forzó demasiado en su intento de que ambas Mecánicas Cuánticas por fin casaran a la perfección (al recurrir a la ficción conocida como función *delta* de Dirac). Con el paso del tiempo, von Neumann llegaría a solucionar estas patologías mediante la aplicación del análisis funcional que había perfeccionado su maestro Hilbert. La gran meta del magisterio de von Neumann fue, precisamente, alcanzar esta equivalencia y unificación canónicas largo tiempo buscadas y no encontradas (Schrödinger, Eckart, Pauli, Jordan, Dirac...).

Desenlace: Capítulo 4 – Contra el realismo científico estructural

La esencia de este cuarto capítulo consiste en formular, a partir de lo dicho en los capítulos 2 y 3, un argumento contra el realismo científico. Pero, atención, no contra toda variedad de realismo –lo que, haciendo uso del contenido del capítulo 1, sería caer en el mito del realismo científico-, sino contra el *realismo estructural* –id est, contra aquella extendida doctrina realista, debida a John Worrall y puesta al día por Steven French, James Ladyman y muchos más defensores, que mantiene que las teorías o los modelos científicos son verdaderos o falsos en función de su adecuación (isomorfismo, homeomorfismo, homomorfismo, homología, similitud...) con la estructura de la realidad-. Inicialmente, tras presentar el *estructuralismo realista*, repasamos sucintamente las teorías sobre la representación científica que múltiples filósofos de la ciencia han venido desarrollando durante los últimos años, incluyendo las propuestas por Brent Mundy, Bas van Fraassen, Steven French, James Ladyman, Newton da Costa, Otávio Bueno, Ron Giere, Paul Teller, Javier Echeverría, Andoni Ibarra y Thomas Mormann.

Nuestro argumento contra el realismo científico de signo estructural, es decir, contra aquella variedad de realismo científico que sostiene que las estructuras científicas pueden representar o representan las estructuras fenoménicas del mundo, con otras palabras, que las teorías y los modelos teóricos de la ciencia pueden ser o son isomorfos, homeomorfos o similares a los sistemas de la realidad, lo entresacamos de la historia de la física cuántica, a partir de la consideración de la búsqueda de equivalencia matemática entre la Mecánica Cuántica Matricial y la Mecánica Cuántica Ondulatoria (1925-1932). A continuación, bosquejamos nuestro argumento antirrealista por medio de una *reductio ad absurdum*. En esencia consiste en preguntarse lo siguiente: si el modelo teórico de la Mecánica Matricial (a partir de ahora: MM) y el modelo teórico de la Mecánica Ondulatoria (a partir de ahora: MO) son isomorfos al ser *matemáticamente equivalentes*, entonces, suponiendo que la relación entre estos modelos teóricos y los sistemas reales que aspiran a representar (denotémoslos, respectivamente, por A y B) es –pongamos por caso- de isomorfismo... ¿qué *elementos de realidad* son también isomorfos?, de otro modo, ¿deben los sistemas del mundo (A y B) que prescriben ambos modelos teóricos (MM y MO) ser también isomorfos o, en su defecto, homeomorfos o similares? Si, como va dicho, suponemos que la relación que guardan los modelos teóricos con el mundo es de isomorfismo (es decir, MM y A son isomorfos al tiempo que MO y B también lo son), deduciremos una contradicción. En efecto, como es conocido, la composición de isomorfismos es isomorfismo y, por consiguiente, si A es isomorfo a MM, MM es isomorfo a MO y MO es isomorfo a B, entonces A ha de ser isomorfo a B. Pero, *realmente*, ¿A y B son isomorfos, *id est*, los sistemas del mundo a que refieren MM y MO son isomorfos?

Tras un estudio comparado de MM y MO, podremos concluir que, pese a la relación sintáctica de equivalencia que media entre ambas mecánicas, aparecen diferencias semánticas irreconciliables cuando «miramos al mundo» alternativamente desde MM o desde MO: en especial, la ontología matricial es corpuscular, manteniendo una visión discontinuista del mundo cuántico, mientras que la ontología ondulatoria se sustenta en una visión continua de los procesos atómicos. En suma, los modelos teóricos MM y MO prescriben imágenes ónticas A y B totalmente incompatibles y, por tanto, difícilmente isomorfas, al menos cuando entendemos la noción de representación como isomorfismo desde una perspectiva realista, esto es, afectando tanto a los fenómenos observables como a los fenómenos inobservables, con otros términos, cuando nos fijamos en las ontologías subyacentes desde el punto de vista del filósofo realista estructural.

Es fácil comprobar que este argumento por reducción al absurdo también funcionará contra cualquier tipo de estructuralismo realista que sostenga que es posible codificar la noción de representación científica mediante una relación simétrica *y* transitiva, como, por ejemplo, las relaciones de homeomorfismo o similaridad. Efectivamente, suponiendo esta clase de relación y aplicando la simetría y la transitividad, llegaríamos a que A y B habrían de ser homeomorfos o similares (nótese que MM y MO lo son al ser matemáticamente equivalentes, e. d. isomorfos e isométricos, puesto que dos estructuras isométricas ya son homeomorfas y, evidentemente, similares, semejantes). Pero, ¿acaso son A y B homeomorfos o similares? ¿Cómo podrían ser homeomorfos si topológicamente son tan distintos (A discontinuo / B continuo) o similares si metafísicamente son tan profundamente disimilares (A corpuscular / B ondular)? De nuevo, nos encontramos en un callejón sin salida.

En resumidas cuentas, argumentaremos que debe retirarse el presupuesto de que todos los modelos de la física teórica, dicho así, sin precaución alguna, *representan*, ya que nuestro caso de estudio pone de manifiesto que disponemos de dos modelos teóricos que no sólo son empíricamente equivalentes sino formalmente equivalentes, pese a no serlo ontológicamente. Nuestro reto al realismo estructural no es sino una minuciosa reformulación de la tesis quineana de la infradeterminación: «dos teorías físicas pueden ser lógicamente incompatibles pero empíricamente equivalentes» y hasta formalmente equivalentes (añadiríamos nosotros). El conocimiento de la naturaleza, en cuanto alcanza niveles macro y microcósmicos, ha de renunciar a asentarse sobre la idea realista de representación, cuyo empleo debiera restringirse a contextos únicamente mesocósmicos.

Caso II – La impredecibilidad en la Teoría del Caos

Nuestra investigación sobre este caso de estudio se articula en dos etapas. En una primera, nos enfrentamos con la delimitación precisa de conceptos tales como los de determinismo, predecibilidad, estabilidad y reversibilidad. Y en una segunda, aclarados estos términos, buscamos averiguar hasta qué punto el nacimiento y desarrollo de la actual física y matemática del caos, dominada por la impredecibilidad de sus sistemas, supone un obstáculo para las filosofías realistas e instrumentalistas de la ciencia que hacen demasiado hincapié en la predicción.

Planteamiento y nudo: Capítulo 5 – Del binomio determinismo / predecibilidad

Nuestro estudio se detiene, primeramente, en el esclarecimiento del binomio determinismo/predecibilidad, que tantos quebraderos de cabeza ya diera a Laplace. Frente a los que los identifican (por ejemplo, Popper o Prigogine), nos alineamos con René Thom, distinguiendo el plano ontológico en que se mueve el primer concepto del plano epistemológico en que permanece el segundo (distinción que retoma sugerencias de Baruch Espinosa y Luis de Molina). El *determinismo* es un concepto *ontológico* porque remite a la clase de legalidad que opera en el propio mundo, mientras que la *predecibilidad* es una noción *epistemológica* porque sólo remite a nuestra capacidad de computabilidad. Por decirlo rápidamente: el determinismo cae del lado de la *cosa-en-sí* (noúmeno), mientras que la predecibilidad lo hace del lado de la *cosa-para-nosotros* (fenómeno). A continuación, aportamos caracterizaciones rigurosas de ambas (también destinamos algo de espacio y tiempo para centrarnos en el análisis de la estabilidad y la reversibilidad).

En especial, diferenciamos dentro de la idea de determinismo dos sentidos principales que no suelen separarse ni disociarse. Por una parte, un sentido más matemático (muy presente en la Teoría del Caos), en el que la especie del determinismo se despliega –por así decir- en dos subespecies: a) el *determinismo diferencial* (como herencia de los estudios de Russell, que también aparece en trabajos de Poincaré, Hessen y Thom, y que pone en conexión el determinismo con la modelización mediante ecuaciones diferenciales); y b) el *determinismo único* (como herencia de los estudios de Montague, que también aparece en trabajos de Earman, y que define el determinismo por que a un mismo estado de cosas siempre le siga una misma historia). Tras analizar sus posibles interrelaciones (es verdad que b)→a) pero es falso que a)→b)), concluimos que resulta viable hablar de dos grados de determinismo (*fuerte* y *débil*), antes de adentrarse de lleno en el indeterminismo.

Por otra parte, un sentido más físico (muy presente en la Teoría Cuántica), en el que el determinismo pasa por ser que todas las variables físicas estén bien definidas a un mismo tiempo, circunstancia que no ocurre en el ámbito atómico (especialmente, nos ocupamos de la cuestión cuántica, con otros términos, del problema de la interpretación del formalismo mecánico-cuántico en su relación con el indeterminismo). Además, ilustramos nuestras tesis filosóficas con multitud de ejemplos provenientes de la ciencia, contrastando la potencia de nuestras definiciones en la clasificación de la Mecánica Clásica, Mecánica Relativista, Mecánica Estadística, Mecánica Cuántica, Mecánica del Caos...

Desenlace: Capítulo 6 – La impredecibilidad de los sistemas caóticos y la disputa realismo-instrumentalismo

Habida cuenta de que aún persisten espesas nieblas en torno a las ideas gnoseológicas que manejan los físicos y los matemáticos del caos (basta constatar las numerosas discrepancias existentes entre dos filósofos del caos como son Peter Smith y Stephen Kellert), nos veremos obligados a comenzar este capítulo haciendo un repaso crítico de la historia y las principales nociones que caen bajo la Teoría del Caos.

Tras dejar constancia de la moda del caos tanto en el cine como en la literatura, nos embarcamos en un viaje hacia las fuentes de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos. Así, recorremos los tres ríos que desembocan en el mar de la Dinámica: el de la Mecánica Racional de Newton, el de la Mecánica Analítica de Lagrange-Hamilton y el de la Teoría General de los Sistemas Dinámicos de Poincaré. Precisamente, Poincaré se constituye por derecho propio como nuestro principal protagonista. Enfrentado a una serie de problemas sin resolver desde los tiempos del gran Isaac, y que quitaron el sueño a más de un físico matemático del XVIII y del XIX (como al ministro del Interior de Napoleón, Laplace), el genial matemático francés desarrolló una suerte de nueva matemática. Poincaré realizó sustanciosos avances –y no siempre en sentido positivo- en el estudio del *problema de los tres cuerpos* así como en la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar. Realmente, puede decirse que Poincaré descubrió el *caos determinista*. Sin embargo, los pioneros trabajos de Poincaré tardaron en recibir continuidad. Con el paso de los años, entrado el siglo XX, dos serían las tradiciones que continuaran la obra de Poincaré: a un lado del océano, la tradición norteamericana de Birkhoff y Smale; y, al otro lado del telón de acero, la tradición soviética encabezada por Kolmogorov y Arnold. Pero sería a comienzos de los 60 cuando el caos revolucionase el panorama científico gracias al redescubrimiento del *efecto mariposa* por parte de Lorenz, cuyos artículos estimularían durante décadas trabajos de detección y tratamiento del caos en las más diversas regiones del saber: desde el campo de la matemática pura (Yorke), pasando por la matemática aplicada (Feigenbaum), a la física (Ruelle) o la biología (May).

A continuación y antes de sumergirnos en el análisis de la impredecibilidad que exhiben los sistemas caóticos, redefinimos con precisión qué es el caos determinista y en qué clase de dinámicas puede esperarse. Después, nos acercamos a los trabajos de Laplace, Maxwell, Hadamard, Duhem y Poincaré para comprobar cómo se fue y se ha ido encajando el hecho de que existen ciertos sistemas físicos deterministas cuya predicción deviene imposible. De hecho, ofrecemos como ejemplo de predicción imposible uno de rabiosa actualidad: el cambio climático. El tiempo y el clima son, como solemos olvidar y ya notara Poincaré, prácticamente impredecibles, a causa de su gran complejidad combinada con la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Con esto, llegamos al núcleo filosófico de nuestro caso de estudio. Es vértice común de la mayoría de realismos e instrumentalismos científicos hacer descansar la *cientificidad* en la *predecibilidad*, con otros términos, el *poder predictivo* se constituye como una condición necesaria –¿y suficiente?- de las disciplinas científicas. Ahora bien, el carácter científico de la moderna Teoría del Caos es innegable (al menos desde una perspectiva sociológica de la ciencia) y, sin embargo, la predecibilidad de los sistemas caóticos parece brillar por su ausencia. Por tanto, hay que sortear la supuesta inutilidad predictiva de los modelos caóticos. ¿Cómo pueden las teorías o los modelos con caos determinista ser *instrumentos* científicos útiles si falla la predecibilidad? ¿Se puede subsanar esta manifiesta incompatibilidad entre la filosofía instrumentalista de las teorías y la Teoría del Caos? ¿O acaso está mejor preparado el realismo científico para solventar los enigmas que el nuevo paradigma de las ciencias del caos plantea? ¿Pero no afecta también la carencia de predecibilidad a la filosofía realista de la ciencia? A la hora de aclarar la popular impredecibilidad de los sistemas caóticos, mostramos que en realidad no es tan alarmante como ciertos divulgadores del *caos posmoderno* nos han hecho creer: ciertos resultados garantizan cierto éxito predictivo. Lo que sucede es que la predicción resultante no es, en general, *cuantitativa* (como la de la mecánica celeste laplaciana) sino *cualitativa*, y esto nos conduce a perfilar la noción, de nuevo cuño, de *predicción topológica*, en homenaje a Poincaré. Y esta patología constituye, de modo inmediato, una carencia para aquellos enfoques instrumentalistas *excesivamente* predictivistas en teoría de la ciencia; aunque también, de modo mediato, para aquellos enfoques realistas que ceden el protagonismo a la predicción. En ciencia, como patentiza la Teoría del Caos, la predicción no lo es todo, porque a veces no se da de modo suficientemente rico o de la clase que se desea. Finalmente, como colofón a este caso de estudio, esbozamos una serie de correcciones que una filosofía –realista o instrumentalista- de la ciencia ha de emprender si quiere, a un mismo tiempo, seguir manteniendo la ecuación cientificidad = predecibilidad y dar cabida en su seno a las ciencias del caos.

Fin: Capítulo 7 – Realismo sin metafísica, instrumentalismo sin relativismo

En este último capítulo, comparamos las conclusiones que hemos obtenido en ambos casos de estudio e intentamos destilar una valoración final que encuadramos en el marco de las corrientes actuales dentro de la disputa realismo-instrumentalismo en filosofía de la ciencia. Nuestro análisis del papel que los modelos teóricos juegan en la física cuántica y del caos nos obliga, *a fortiori*, a reconocer el siguiente dilema: o bien consolidamos un realismo científico de corte *construccionista* o *intervencionista*, o bien aceptamos un *razonable* instrumentalismo; puesto que las alternativas *representacionista* y *predictivista* del cuadrilema originario han quedado refutadas.

Por su parte, como ejemplo actual de realismo científico más allá de la representación y la predicción, reconocemos al realismo experimentalista propio del *nuevo experimentalismo* liderado por Ian Hacking y en cuyas filas se cuentan filósofos e historiadores de la ciencia de la talla de Peter Galison, Allan Franklin o Deborah Mayo. El nuevo experimentalismo todavía no es muy conocido en España, pero proponemos que el filósofo español Gustavo Bueno mantiene bastantes ideas comunes con el filósofo experimentalista Ian Hacking. Ambos centran su atención sobre la propia práctica experimental, concibiendo la ciencia como intervención o manipulación, y resolviendo la cuestión del realismo científico desde nuevas claves. El realismo experimental de Hacking y el realismo materialista de Bueno guardan posiciones paralelas.

En cualquier caso, una vez que la filosofía de la ciencia –con sus casi doscientos años de existencia– ha despertado del sueño de la razón del XX que le dicta a las distintas ciencias cómo tienen que proceder, es decir, una vez hemos abandonado el ideal de la prescripción en aras de la descripción, no cabe sino reconocer que la mayor o menor potencia de una teoría de la ciencia se mide por su capacidad para estar al tanto del funcionamiento de las ciencias modernas, como la física cuántica o la física del caos.

Y nos gustaría concluir estas breves notas indicativas de por dónde discurre nuestra *exploración metacientífica* señalando que este proyecto doctoral aspiraba a mezclar en su crisol a filosofía, matemáticas y física, haciendo honor a la meta que para el nuevo milenio se marcaba la *UNESCO*, en las *Declaraciones del Año Mundial 2000 de las Matemáticas y del Año Mundial 2005 de la Física*:

> ...promocionar el conocimiento y el uso de las Matemáticas en todo el mundo, habida cuenta de que constituyen un pilar fundamental de la cultura, no sólo por ser el lenguaje de la Ciencia, sino por lo que suponen como bagaje necesario para entender el mundo en que vivimos.

La pregunta es en qué medida lo hemos logrado, o no.

CAPÍTULO 1

EL MITO DEL REALISMO CIENTÍFICO

Porque, ¿qué realidad es la de ese realismo?

Miguel de Unamuno, *Tres novelas ejemplares y un prólogo*

A comienzos del siglo XXI, una parte importante del debate actual en filosofía de la física se plantea en términos del conflicto entre realismo e instrumentalismo, o, más en general, entre realismo y antirrealismo. Tanto el realismo científico como el antirrealismo se nos presentan, en principio, como dos concepciones de la ciencia bien perfiladas pero antagónicas.

Este capítulo preliminar tiene por objeto realizar una aproximación genuinamente *sintética* a dicha disputa. Como es natural, son posibles dos clases muy distintas de acercamiento al estado de la cuestión: o bien se practica una presentación *diacrónica*, o bien se practica una *sincrónica*. En lo que sigue, apostaremos por una aproximación sincrónica al debate sobre el realismo científico, puesto que esto será suficiente para los fines que perseguimos en la presente investigación. Pretendemos atacar lo que podemos convenir en llamar el *mito del realismo científico*, mejor dicho, el *mito de la unicidad del realismo científico*; con más propiedad: no existe algo así como el realismo científico, sino que lo que efectivamente existen son realismo*s* científico*s*. De paso, también atacaremos el mito opuesto, es decir, el *mito de la unicidad del antirrealismo científico*. Y es que el realismo y el antirrealismo científicos son visiones de la ciencia opuestas; con otras palabras, si φ es una tesis realista entonces $\neg\varphi$ es una tesis antirrealista (con todos los matices que haya que añadir). Para probar nuestra hipótesis de trabajo, estudiaremos el conjunto heterogéneo de tesis que caen bajo la denominación de realismo científico (por oposición, del antirrealismo científico), y comprobaremos que no parece que exista un subconjunto de las mismas que haya sido o que sea núcleo doctrinal común a toda filosofía realista (antirrealista) de la ciencia. Si tomamos como referencia de nuestros análisis al realismo es porque creemos que éste es, desde un punto de vista lógico e histórico, anterior al antirrealismo (éste se caracterizaría, en esencia, por la negación dialéctica de las tesis realistas previas). Intentamos mostrar que no todo realismo científico es un realismo metafísico y, por oposición, que no todo antirrealismo científico es un antirrealismo relativista. Reconocemos que nuestra tesis no es nueva, pero lo que sí que va a ser original es la forma de argumentarla.

1. Las tesis del realismo y del antirrealismo

En el contexto de la teoría del conocimiento, el realismo habitualmente aparece desglosado en tres tesis: *realismo ontológico* (existe un mundo externo), *realismo epistemológico* (ese mundo externo es cognoscible) y *realismo semántico* (ese mundo externo es cognoscible y el conocimiento es comunicable mediante el lenguaje). Sin embargo, cuando nos adentramos en terrenos propiedad de la teoría de la ciencia, resulta necesario realizar algunas disquisiciones más.

Comencemos echando un vistazo a las definiciones de *realismo* y de *antirrealismo* que propone Hacking (1996, 39):

> El *realismo científico* dice que las entidades, los estados y los procesos descritos por teorías correctas realmente existen. [...] Aun cuando nuestras ciencias no puedan considerarse totalmente correctas, el realista sostiene que nos aproximamos a la verdad. Nuestro objetivo es el descubrimiento de la constitución interna de las cosas y el conocimiento de lo que habita los más distantes confines del universo.
>
> El *antirrealismo* nos dice lo opuesto: [...] Las teorías son adecuadas o útiles o admisibles o aplicables, pero no importa qué tanto admiremos los triunfos especulativos y tecnológicos de las ciencias naturales, no deberíamos considerar verdaderas ni siquiera sus teorías más reveladoras.

Podemos, además, complementar el *antirrealismo* con la siguiente tesis genuinamente *instrumentalista*:

> Quizás de lo que se trata es de resolver problemas, y las diversas teorías abstractas son como otros tantos instrumentos de los que echamos mano con gran libertad, en función del problema que se nos presente. En este sentido, la introducción de una nueva teoría sería comparable con la introducción de una nueva máquina en el mercado, que no elimina los modelos anteriores, pero quizás los sustituye en algunas tareas e incluso a la larga puede llegar a arrinconarlos. (Jesús Mosterín en Rivadulla (1986, 16))

Seguramente, ambas definiciones adolecen de cierta vaguedad, pero para empezar a trabajar nos van a valer. En primer lugar, observamos que el antirrealismo parece venir dado por una omisión de ciertas tesis realistas –ya sea porque éstas se ponen en entredicho o porque, directamente, se descartan-. Y, en segundo lugar, notamos que en el realismo se conjugan una serie de tesis de diversa estirpe *gnoseológica*.

Entenderemos, dentro de los límites de esta tesis doctoral: (i) gnoseología como filosofía o teoría de la ciencia –y no sólo del conocimiento científico, pues la ciencia no se reduce al conjunto de sus actos de conocimiento al contener múltiples constructos de diversa naturaleza-; (ii) epistemología como teoría del conocimiento verdadero; y (iii) ontología como teoría filosófica que alude a los elementos de realidad que conforman una determinada estructura –en nuestro caso, científica-.

Así, unas tesis realistas son ontológicas (por ejemplo, los términos, las funciones y las relaciones descritos por teorías científicas existen *realmente*) y otras son epistemológicas (p. ej., la ciencia es el medio óptimo para conocer *verdaderamente* el mundo). Se hace necesaria una clasificación por separado de las mismas. Teniendo en cuenta la distinción hecha, clasificaremos las tesis gnoseológicas realistas (por oposición, las antirrealistas) en dos grandes grupos. Por un lado, las de rango ontológico. Por otro lado, las de rango epistemológico. Concordamos, pues, con el esqueleto de esquema diseñado por Hellman (1983), aunque nosotros no daremos tanta beligerancia a determinadas tesis de índole semántica, por cuanto pensamos con van Fraassen (1996, 80) que «la principal lección de la filosofía de la ciencia del siglo XX bien puede ser la siguiente: ningún concepto que sea esencialmente dependiente del lenguaje tiene en absoluto importancia filosófica». Además, restringiremos la cuestión de la verdad en ciencia al ámbito epistemológico (porque éste aborda el estudio de relaciones sujeto-objeto), separándola del ontológico (más centrado en relaciones objeto-objeto). Este punto, como recoge Echeverría (1999, 301), puede resultar extraño a ojos de realistas a lo Newton-Smith, que sostienen que las tesis ontológicas del realismo (pongamos por caso, *entity-realism* & *theory-realism*) no pueden desligarse de las epistemológicas (digamos, *truth-realism*), puesto que van implícitas. Sin embargo, citaremos, en apoyo de nuestra concepción, a Devitt (1984, 227), para quien «ninguna doctrina de la verdad es, en modo alguno, constitutiva del realismo», y es que este último defiende que:

> Usamos nuestra visión de lo que es conocido para llegar a nuestra visión del proceso de conocimiento. De este modo, la metafísica (ontología) es puesta antes de la epistemología. (Devitt: 1984, 79)

No cabe duda de que esto es muy discutible, pero puede afirmarse sin perjuicio de la posterior intrincación dialéctica entre tesis ontológicas y epistemológicas. A nuestro juicio, la ontología científica es parcialmente independiente de la epistemología debido a que los constructos científicos se enajenan, en parte, de la actividad humana que los produjo y, por consiguiente, sus peculiares relaciones con el mundo ya no son sólo de raigambre sujeto-objeto (científico-mundo) sino también objeto-objeto (modelo-mundo), a la manera que la Gran Muralla China es independiente de sus arquitectos hasta el punto de que podría ser visualizada desde el espacio por animales no-linneanos («extraterrestres») que no tendrían por qué sospechar, necesariamente, que el planeta está habitado. En resumen, como apunta Estany (1993, 46):

> El problema con la polémica sobre realismo/antirrealismo es que dicha polémica es estéril, e incluso confusa, si antes no establecemos la ontología, lo cual significa determinar qué se entiende por real. No obstante, la concepción sobre lo real está en función de cómo se establezca la relación entre «mente» y «mundo real».

A la hora de enunciar las tesis del realismo científico permitiremos cierta anchura en su expresión, ya que no deseamos cometer lo que Harré (1986, 4) ha llamado la «falacia de la alta redefinición»: una tesis, sea realista o antirrealista, demasiado fuerte podría inhabilitar inmediatamente a cualquier proyecto filosófico que la asumiera.

Las tablas –cuyas matrices clasificadoras están inspiradas en Diéguez (1998, cap. 3), Moulines (1992, cap. 2), Hellman (1983) y Psillos (2000)- que ofrecemos a continuación pretenden acogerse a estos criterios:

TESIS ONTOLÓGICAS	
***Realismo de entidades* (*R_e*)** La mayoría de las entidades (teóricas y observacionales) de la mayoría de las teorías científicas existen.	***Antirrealismo de entidades* (*A_e*)** Las entidades científicas (en especial, las teóricas) sólo son ficciones eficaces de existencia bastante dudosa.
***Realismo de teorías* (*R_t*)** Los procesos, descritos por teorías científicas, que acontecen a tales entidades son, con excepciones, reales.	***Antirrealismo de teorías* (*A_t*)** Los procesos que describen las teorías científicas sólo son instrumentos para la predicción de fenómenos.

Realismo progresivo (R_p)	*Antirrealismo progresivo* (A_p)
El progreso científico es un hecho pues con el cambio de teorías científicas se acumulan procesos y/o entidades reales.	El progreso científico, entendido como incorporación de procesos y/o entidades reales, no es un hecho probado.

TESIS EPISTEMOLÓGICAS	
Realismo adecuacionista: Las teorías científicas son verdaderas o falsas en función de su adecuación (correspondencia, isomorfismo, similitud, analogía...) con la realidad. ***Realismo no adecuacionista:*** Las teorías científicas son verdaderas o falsas en función de otros criterios de verdad (verdad como aceptabilidad racional o como construcción de identidad sintética...).	***Antirrealismo pragmatista:*** Las teorías no son verdaderas o falsas sino exitosas o no exitosas. ***Antirrealismo coherentista:*** Las teorías no son verdaderas o falsas sino coherentes o incoherentes entre sí. ***Antirrealismo relativista:*** Elegimos entre teorías científicas alternativas condicionados por nuestro contexto sociocultural y no en razón de su verdad, éxito o coherencia.

Un comentario inicial es que entre las tesis ontológicas realistas y antirrealistas median relaciones de oposición muy claras, id est, si φ es una tesis ontológica realista entonces ¬φ es una tesis ontológica antirrealista, a saber: $\neg R_e \leftrightarrow A_e$; $\neg R_t \leftrightarrow A_t$; $\neg R_p \leftrightarrow A_p$. Mientras que, por contra, entre las tesis epistemológicas realistas y antirrealistas este nítido antagonismo parece diluirse, en efecto: el realismo adecuacionista no sólo puede ser impugnado desde posiciones pragmatistas sino también coherentistas, relativistas e, incluso, desde un realismo no adecuacionista.

Otro comentario interesante es que entre las diferentes tesis ontológicas realistas median ciertas relaciones de consecuencia lógica:

$$R_p \to R_t \qquad (1)$$
$$R_t \to R_e \qquad (2)$$

Para justificar *(1)* basta darse cuenta de que si se asume que el progreso científico es una realidad (*realismo progresivo*), entonces hay que aceptar que ya, a día de hoy, nuestras teorías científicas describen correctamente algunos procesos del mundo (*realismo de teorías*). Y sirva para justificar *(2)* que si nuestras teorías científicas nos describen ciertos procesos que acaecen en el mundo (*realismo de teorías*), entonces gran parte de las entidades que involucran no pueden carecer de referente (*realismo de entidades*).

Finalmente, por transitividad en *(1)* y *(2)*, deducimos trivialmente que:

$$R_p \to R_e \qquad (3)$$

y, por oposición en *(1)*, *(2)* y *(3)*, obtenemos que:

$$R_p \to R_t \Leftrightarrow \neg R_t \to \neg R_p \Leftrightarrow A_t \to A_p \qquad (4)$$
$$R_t \to R_e \Leftrightarrow \neg R_e \to \neg R_t \Leftrightarrow A_e \to A_t \qquad (5)$$
$$R_p \to R_e \Leftrightarrow \neg R_e \to \neg R_p \Leftrightarrow A_e \to A_p \qquad (6)$$

En aras de la concisión, omitimos el complementar la justificación *lógico formal* de *(4)*, *(5)* y *(6)* con su correspondiente justificación *lógico material*.

Nuestra intención, tras haber realizado esta *sintética* aproximación al debate realismo-antirrealismo, no es otra que probar que ningún subconjunto de tesis realistas pasa, de hecho, por contenido inamovible de todo realismo científico. Para ello, si se nos permite la expresión, haremos *geometría de las ideas*, de otro modo, asociaremos a cada filosofía de la ciencia realmente existente un cierto punto de un espacio geométrico tetradimensional, y analizaremos las relaciones que estas filosofías guardan entre sí como si de puntos se tratara. Sólo así lograremos manejarnos desde una perspectiva absolutamente neutral –sin tomar partido- con la disputa entre realismos y antirrealismos científicos.

Representaremos cada teoría de la ciencia existente por algún punto del siguiente espacio discreto:

$$\Sigma \equiv \{(x_1, x_2, x_3; x_4) \in \{0,1\}^3 \times \{a, n, p, c, r\}\}$$

donde interpretaremos cada entrada del cuadrivector de coordenadas de un punto como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_1 = \begin{cases} 1 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{R_e}\text{»} \\ 0 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{A_e}\text{»} \end{cases} \\[2ex]
x_2 = \begin{cases} 1 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{R_t}\text{»} \\ 0 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{A_t}\text{»} \end{cases} \\[2ex]
x_3 = \begin{cases} 1 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{R_p}\text{»} \\ 0 \equiv \text{«aseveración de la tesis } \boldsymbol{A_p}\text{»} \end{cases} \\[2ex]
x_4 = \begin{cases} a \equiv \text{«aseveración del } \textit{realismo adecuacionista}\text{»} \\ n \equiv \text{«aseveración del } \textit{realismo no adecuacionista}\text{»} \\ p \equiv \text{«aseveración del } \textit{antirrealismo pragmatista}\text{»} \\ c \equiv \text{«aseveración del } \textit{antirrealismo coherentista}\text{»} \\ r \equiv \text{«aseveración del } \textit{antirrealismo relativista}\text{»} \end{cases}
\end{array} \right.$$

Evidentemente, existen puntos de Σ que carecerán de sentido en nuestra interpretación. Por ejemplo, ¿qué filosofía de la ciencia podría venir representada por el punto de coordenadas (0, 1, 1; a)? Lógicamente, ninguna. Y la razón es que, como hemos mostrado, el *realismo de teorías* implica el *realismo de entidades*, i. e. $\boldsymbol{R_t \rightarrow R_e}$ o, equivalentemente, en términos geométricos, $x_2=1 \rightarrow x_1=1$. De otra manera, el modelo geométrico Σ debe necesariamente satisfacer ciertas condiciones (p. ej. $x_3=1 \rightarrow x_2=1$, $x_2=0 \rightarrow x_3=0$, &c.), que hereda del previo modelo lógico, para adquirir, semánticamente hablando, sentido.

2. Realismo(s) científico(s)

Ofrecemos seguidamente una tabla que recoge, utilizando el simbolismo propuesto, algunas de las principales gnoseologías realistas (que, más abajo, son presentadas concisamente, atendiendo en especial a la justificación de las coordenadas que les asignamos).

GNOSEOLOGIAS	**COORDENADAS**
Karl Popper *(realismo conjetural)*	(1, 1, 1; a)
Mario Bunge *(realismo crítico)*	(1, 1, 1; a)
Ilkka Niiniluoto *(realismo crítico)*	(1, 1, 1; a)
Ronald Giere *(realismo constructivo)*	(1, 1, 1; a)
Gustavo Bueno *(realismo materialista)*	(1, 1, 1; n)
Hartry Field *(realismo materialista)*	(1, 1, 0; n)
Hilary Putnam *(realismo interno)*	(1, 0, 0; n)
Ian Hacking *(realismo experimentalista)*	(1, 0, 0; p)

Estamos en condiciones de acometer, por fin, el prometido ataque al *mito de la unicidad del realismo científico*. A la vista de la tabla, hemos de formularnos la siguiente pregunta: ¿existe algún conjunto de tesis realistas tal que su aceptación sea condición *necesaria* y *suficiente* para la catalogación de una filosofía de la ciencia como propiamente *realista*? O expresado, equivalentemente, en términos geométricos: ¿cuál es la mínima variedad lineal (recta, plano, hiperplano...) que contiene *a* y *sólo a* los puntos determinados por las gnoseologías realistas que aparecen en el cuadro de arriba? Y es, precisamente en este instante, cuando la artificiosa construcción que venimos desarrollando muestra toda su utilidad: resulta manifiestamente claro que la única característica común que presentan todas estas gnoseologías realistas es yacer en el hiperplano de ecuación $x_1=1$, esto es, volviendo a traducir, compartir la tesis ontológica del *realismo de entidades* ($\boldsymbol{R_e}$). Entonces, ¿estamos en situación de afirmar que dicho rasgo en común ha de ser, *a fortiori*, condición necesaria y suficiente de toda filosofía *realista* de la ciencia? No. De ningún modo. Y como demostración de esta negativa basta considerar como contraejemplo que una filósofa *instrumentalista* como es

Cartwright acepta el *realismo de entidades* (***R***) pese a tener una orientación decididamente *antirrealista* en lo tocante a la verdad de las teorías científicas. En resumen, no se establecen puntos de contacto, entre la pluralidad de gnoseologías realistas que fundamenten poder hablar con propiedad de *Realismo Científico* –de ahí el juego tipográfico del título de esta sección-.

- **El *realismo conjetural* de Karl Popper: (1, 1, 1; a)**

Es cierto que el propio Popper habló de *realismo crítico* en vez de *realismo conjetural*, pero, a nuestro modo de ver, esta última etiqueta resulta mucho más significativa y la tomamos prestada de Rivadulla (1986, 295). Además, así podremos distinguirla de la empleada por Bunge. La crítica radical de Popper al inductivismo, al verificacionismo y al fundacionalismo último del método científico no pueden confundirse con la asimilación de una postura antirrealista. Deductivismo, falsacionismo y falibilismo metodológico aparecen combinados en la obra popperiana con una defensa, a capa y espada, de la definición de verdad de Tarski (x_4=a) y de la idea reguladora de la aproximación a la verdad por parte de la ciencia (i. e. x_3=1 y, por tanto, recuérdese, x_2=1 y x_1=1). Con respecto al realismo adecuacionista, Popper (1983, 51) escribe: «La obra de Alfred Tarski demuestra que podemos operar con la idea de verdad objetiva, en el sentido de correspondencia con los hechos, sin caer en antinomias». Y con respecto al realismo progresivo añade: «Una afirmación fundamental de mi concepción es la de que la ciencia aspira a elaborar teorías *verdaderas*, aunque nunca podamos estar seguros de si una teoría particular es o no verdadera, y que la ciencia *puede* progresar (y sabe que progresa) inventando teorías que, comparadas con las anteriores, pueden ser consideradas como mejores aproximaciones a lo verdadero» (1983, 217). Desde luego, esta cita pone de manifiesto el carácter conjetural del realismo científico popperiano.

- **El *realismo crítico* de Mario Bunge: (1, 1, 1; a)**

Mario Bunge denomina a su propia teoría de la ciencia con la misma etiqueta que en su día eligiera Karl Popper. Nos referimos al *realismo crítico*. Esta posición mantiene, como apunta Rivadulla (2004b, 142), bastantes puntos de contacto con el realismo científico defendido por la Escuela de Helsinki (Raimo Tuomela, Ilkka Niiniluoto, &c.), porque, entre otros motivos, esta escuela finlandesa recupera intuiciones de Popper apelando a ideas de Bunge. A juicio de Bunge (1978, 282), tanto el inductivismo carnapiano como el refutacionismo popperiano resultan erróneos, porque «la teoría y la experiencia nunca chocan de frente», ni para bien (inducción de una hipótesis) ni para mal (refutación de otra hipótesis). El análisis de la metodología de la ciencia permite, en opinión de Bunge (1978, 19), extraer las siguientes tesis, características de su filosofía realista de la ciencia: (i) hay cosas en sí, esto es, objetos cuya existencia no depende de nuestra mente; (ii) las cosas en sí son cognoscibles, bien que parcialmente y por aproximaciones sucesivas antes que exhaustivamente y de un solo plumazo; (iii) el conocimiento de una cosa en sí se alcanza conjuntamente mediante la teoría y el experimento. A este denso realismo se une, según comenta Bunge (1978, 19), que «tanto el físico teórico como el experimental usan el concepto de verdad y pueden incluso sentirse insultados si se les dice que no van en pos de la verdad» (a la luz de lo expuesto queda clara nuestra asignación de x_1=1, x_2=1, x_3=1 y x_4=a).

- **El *realismo crítico* de Ilkka Niiniluoto: (1, 1, 1; a)**

La filosofía de la ciencia de Niiniluoto se asienta en la creencia popperiana de que la ciencia progresa en la medida en que consigue encontrar información crecientemente verosímil acerca de la realidad. En sus propias palabras: «Mientras los instrumentalistas intentan analizar el desarrollo de la ciencia en términos de éxito pragmático sin genuino progreso cognitivo –es decir, sin decir nada acerca del contenido de las teorías científicas a nivel ontológico- los realistas pueden afirmar que la mejor explicación de la existencia de éxito pragmático en la ciencia es la asunción de que la ciencia ha hecho progreso en sentido realista» (Niiniluoto en Rivadulla (1986, 280)). El principal objetivo de este teórico de la ciencia ha sido formular una definición de verosimilitud que no esté lastrada por dificultades técnicas, para estimar cuánto nos hemos acercado a la verdad y así fundamentar una definición de progreso científico (por tanto, x_3=1 y, consiguientemente, x_2=1 y x_1=1). Niiniluoto comprende la verosimilitud como distancia a la verdad en sentido tarskiano (x_4=a), pues, a su juicio, ni la coherencia (x_4=c) ni el éxito (x_4=p) pueden suplir el rol desempeñado por la verdad como correspondencia en la ciencia. De todos modos, a diferencia de Popper y Bunge, Niiniluoto (1987, 141-2) reconoce que la idea tarskiana de verdad no es absoluta sino relativa: «cada sistema conceptual escoge, por decirlo así, sus propios hechos a partir de algo (llamémoslo MUNDO) que no está todavía conceptualizado o dividido en partes [...] pero de ahí no se sigue que el mundo sea completamente plástico o maleable en cualquier forma que queramos».

- **El *realismo constructivo* de Ronald Giere: (1, 1, 1; a)**

Ron Giere formuló su teoría de la ciencia en abierta oposición a la de Bas van Fraassen. Ambos convergen en el enfoque (*semántico* y *constructivista*), pero divergen en lo concerniente al debate acerca del realismo científico: el primero es realista, mientras que el segundo es antirrealista.

Las teorías científicas, desde su óptica, constan de una familia de modelos (proyectiles, péndulos, cuerdas de violín...) y de un conjunto de hipótesis teóricas («la Tierra y la Luna conforman, aproximadamente, un sistema gravitacional newtoniano de dos partículas»...). La familia de modelos que contiene una teoría científica viene dada mediante definiciones teóricas, y sus modelos suelen ser semejantes entre sí. Por su parte, el conjunto de hipótesis teóricas contenido en una teoría enlaza los modelos con los sistemas del mundo real. Estas hipótesis pueden ser verdaderas o falsas, pero la relación esencial en ciencia, según Giere, no es la de verdad sino la de *similaridad*. Desde su perspectiva semántica (≠ sintáctica), los agentes científicos trabajan con modelos que, al no ser entidades lingüísticas, no son susceptibles de verdad, sino sólo de guardar similitud, en mayor o menor grado respecto de ciertos aspectos, con los sistemas reales: «una teoría de la verdad no es un requisito previo para una teoría adecuada de la ciencia» (1988, 81). Reconocemos que esto podría ser motivo suficiente para desechar nuestra asignación de x_4=a; pero, a nuestro juicio, Giere sigue moviéndose en la estela de la idea de verdad como adecuación: una cosa es que haya renunciado a su modulación lingüística como *correspondencia* y otra cosa, muy diferente, que haya abandonado la imagen de las teorías científicas como representaciones *adecuadas* del mundo. Concordamos, pues, con Diéguez (1998, 242) cuando escribe: «la noción de similitud, tal como Giere la emplea, -a diferencia de la adecuación empírica de la que habla van Fraassen- expresa una correspondencia entre un modelo teórico y el mundo análoga en todo a la que la noción de verdad expresa entre un enunciado y el mundo».

El *realismo constructivo* es constructivo porque concibe los modelos teóricos como constructos humanos, y es realista porque acepta tanto el *realismo de teorías* (x_2=1) como el *realismo de entidades* (x_1=1), así se expresa Giere (1988, 7 y 124):

> Cuando una teoría científica es aceptada, se considera que la mayor parte de los elementos de la misma representan (en algún respecto y en algún grado) aspectos del mundo. [...] No puede haber ninguna duda de que los físicos nucleares que yo he observado son realistas en el sentido de que creen que algo está dando vueltas en el ciclotrón, atravesando sus conductos y golpeando los objetivos.

Además, Giere sostiene que puede hablarse de progreso científico en la dimensión que atañe a la ganancia en *detallismo* de nuestros modelos teóricos (x_3=1).

- **El *realismo materialista* de Gustavo Bueno: (1, 1, 1; n)**

La teoría de la ciencia de Bueno recibe el nombre de *teoría del cierre categorial* y consiste en un *constructivismo materialista*. Las ciencias son, para Bueno, construcciones con las cosas mismas. Construcciones, pues, *objetivas*, que son materializadas gracias a las operaciones de los científicos empleando múltiples aparatos.

Las ciencias construyen, según Bueno, modelos que buscan manipular realidades antes que representarlas o interpretarlas, de ahí su radical carácter materialista, pues presuponen sujetos que manejan entidades físicas. Las ciencias no nos desvelan cómo es el Mundo, sino que lo *hacen*. Y para ello incorporan a sus respectivos campos los propios objetos con que trabajan: la matemática a sus signos (números, incógnitas, rectas, curvas...), la física a las partículas (electrones, protones, neutrones...) que controla en los ciclotrones, la química a los reactivos (ácidos, bases...) que mezcla en los matraces... De esta forma, verbigracia, no se dirá que la geología se ocupa de los minerales, así, en general, dicho sin precaución alguna: ¿es que acaso los minerales del exoplaneta HD177830b de la constelación de Volpécula caen bajo el farol de estudio de la ciencia geológica? De ningún modo. La ciencia geológica sólo se ocupa de los minerales que están a su alcance. Pura tautología. Al alcance de sus geólogos o, en su defecto, de sus instrumentos, esto es, de los minerales terrestres que manejan en museos geomineros o en yacimientos, de los minerales extraterrestres provenientes de meteoritos e, incluso, de los minerales marcianos fotografiados y perforados por los robots de la NASA que están actualmente sobre la superficie del planeta rojo. Luego sólo últimamente estas porciones de rocas de Marte se han incorporado, valga la redundancia, al cuerpo de la geología.

En consecuencia, por ejemplo, la *Ley de Acción de Fuerzas* de la Mecánica Clásica no será vista como una Ley de la Naturaleza sino como el modo físico clásico de manejarse (p. ej. predictivamente) con ciertos objetos (planos inclinados, péndulos, resortes...) cuando les imponemos funcionar bajo ciertas construcciones controladas (p. ej. manualmente) por nosotros (dejamos deslizarse una bola de plomo por el plano inclinado, soltamos el péndulo desde diferentes posiciones iniciales, variamos la pesa que mueve el resorte...). Sin embargo, «la teoría del cierre categorial no es instrumentalista, por cuanto reconoce la objetividad de las ciencias» (Bueno: 1992, 1148):

> El desarrollo de las teorías cuánticas suscitó dificultades filosóficas que llevaban a muchos a considerar a estas teorías como «anticientíficas»; en rigor, las «dificultades filosóficas» podían

identificarse con las dificultades de admitir las tesis cuánticas desde la filosofía adecuacionista de la verdad de las teorías. Pero puesto que las teorías cuánticas mostraban su efectividad científica, lo que propiamente se exigía debiera ser cambiar los supuestos adecuacionistas, es decir, cambiar la teoría de la ciencia por la que se regía el fundador de la física cuántica, Max Planck. Otra cosa es la dirección en que se haga este cambio de la teoría de la ciencia natural. La escuela de Copenhague creyó suficiente acogerse a formas de teorías convencionalistas de la ciencia, considerando que el objetivo de la teoría física no es tanto *conocer* el mundo real –y esto quería decir: re-presentarlo adecuadamente- sino *predecir* los sucesos que puedan tener lugar dentro de nuestras coordenadas experimentales [...] Para retirar la idea adecuacionista de la ciencia manteniendo una visión realista (pero materialista) de la misma, es preciso algo más que una crítica localizada (a la ciencia astronómica, a la física cuántica...); es preciso regresar más atrás de la idea misma de conocimiento y alcanzar una visión no representacionista (adecuacionista) del conocimiento científico. (Bueno: 1992, 1288 y 1293)

Por consiguiente, Gustavo Bueno prescinde de la teoría de la verdad como *adecuación* (Bueno (1995, 33): «el adecuacionismo sólo tiene sentido en el supuesto de que la materia tenga una estructura previa isomórfica a las formas científicas [...] pero, ¿cómo podríamos conocer científicamente tal estructura de la materia al margen de las propias formas científicas?»), pero no de la verdad en ciencia (Bueno (1982, 125): «las verdades científicas son los eslabones o nudos que atan a los hilos en su tejido: sin las verdades, la trama de la ciencia se aflojaría hasta terminar por deshacerse»); y propone su teoría de la verdad como *identidad sintética* (x_4=n), que pretende describir cómo transcurre el proceso denominado *cierre categorial* que conduce a la elaboración de cada *teorema científico*. Esta concepción de la verdad científica alcanza en Bueno un planteamiento nada metafísico y que, a nuestro juicio, colinda con el pragmatista (sin olvidar la notoria proximidad entre las gnoseologías de Gustavo Bueno e Ian Hacking). Si Lenin escribió que la praxis demuestra la verdad de la física, Bueno radicaliza este aserto y sostiene que la praxis *es* la verdad de la física (*verum est factum*): «a la manera como la "verdad" de una máquina –podríamos decir: la característica de una "máquina verdadera", frente a una máquina fingida, pintada o de ficción-, consiste en que ella "funcione"» (1992, 146). De este modo, un potente argumento *ad rem* (aunque también *ad hominem*) a favor del realismo (materialista) en cuántica es que lo aceptaremos cuando dispongamos en nuestras casas de un ordenador cuántico que aproveche la superposición de estados o cuando nos estalle cerca una bomba atómica... Bueno asimila tanto el *realismo progresivo* (x_3=1) como el *realismo de entidades* (x_1=1) y *de teorías* (x_2=1). Sin obviar que, fiel a su materialismo, Bueno no entiende por *conocer* un acto especulativo, sino una aprehensión del funcionamiento real de las cosas bajo nuestras construcciones científicas.

- **El *realismo materialista* de Hartry Field: (1, 1, 0; n)**

En el realismo científico materialista de Field «se cuestiona la idea de verdad [adecuacionista] y se considera que los términos científicos son nombres convencionales, pero se afirma que los objetos del mundo son anteriores e independientes de las mentes que los investigan» (Echeverría: 1999, 302). En palabras de Field (1982, 553 y 555): «los conceptos que usamos para describir el mundo no son inevitables [...] pero la afirmación de que dos teorías correctas pueden diferir en su ontología no implica la dependencia mental o teórica de los objetos» (x_1=1 y x_2=1).

Nuestro autor defiende la viabilidad de un proyecto materialista cimentado en un *nominalismo matemático* y en una *semántica fisicalista*. Con respecto a lo primero, partiendo únicamente de una ontología formada por puntos espacio-temporales, asegura la posibilidad de una sorprendente «ciencia sin números». Y con respecto a lo segundo, ensaya una reducción de las propiedades *intencionales* a propiedades *físicas*; por ejemplo, de la referencia: «*x* refiere a *y* sii *x* está conectado con *y* mediante una cadena *causal* del tipo apropiado» (Putnam: 1982, 195). De hecho, Field renuncia a la teoría *tarskiana* de la verdad en favor de una teoría *fisicalista* de la verdad, de mayor espectro y que concede que la gran mayoría de nuestros términos científicos están *referencialmente indeterminados*, e. d. sólo refieren parcialmente (x_4=n). Sin embargo, Field (1973, 480) advierte que no debe pensarse que cada una de las revoluciones acaecidas en la historia de la ciencia ha envuelto un *refinamiento denotacional* de los términos científicos implicados (consecuentemente, x_3=0).

- **El *realismo interno* de Hilary Putnam: (1, 0, 0; n)**

Hilary Putnam es un filósofo que ha atravesado en su desarrollo como pensador varias etapas. A veces no muy bien diferenciadas. Siguiendo indicaciones de Alvarado Marambio (2002, 26-55) distinguimos tres, a saber: (1ª) el *realismo metafísico*; (2ª) el *realismo interno*; y (3ª) el *realismo pragmático*. Nosotros nos centraremos fundamentalmente en su segunda navegación (*realismo interno*), por cuanto pensamos que el *realismo pragmático* no se cuenta ya entre las filas realistas, pues como se percata Rivadulla (2004b, 145): «redefinir *verdad* como *aceptabilidad racional en condiciones epistémicas ideales* aplaza, pero no evita, la decisión de prescindir del realismo».

Para Putnam (1981, 49), el realismo metafísico que mantuvo –emparentado con el realismo convergente de Boyd- consistía básicamente en las tres siguientes premisas: (i) existe un mundo prefabricado (*ready-made world*), esto es, un mundo de objetos independiente del sujeto; (ii) existe un Punto de Vista del Ojo de Dios (*God's-Eye View*), esto es, una y sólo una descripción verdadera del mundo en sí mismo; (iii) la verdad es la adecuación (correspondencia) entre nuestros enunciados científicos y las cosas del mundo real (id est, x_1=1, x_2=1, x_3=1 y x_4=a). Putnam va a dirigir un ataque en toda regla contra la tercera asunción, es decir, contra el *oscuro* modo en que, supuestamente, ideas y hechos se adecúan: hablamos del argumento de la teoría de modelos. Fundándose en el teorema de Löwenheim-Skolem (si un conjunto Γ de oraciones de un sistema formal de primer orden numerable tiene un modelo normal de cualquier cardinalidad, entonces tiene un modelo normal de cardinal ω), afirma:

> Es posible, de hecho, interpretar nuestro lenguaje, en el sentido de 'interpretar' usado en la teoría de modelos contemporánea, de tal modo que los enunciados de cualquier teoría consistente 'coincidan con la realidad' conforme a una correspondencia adecuada. Incluso si las condiciones de verdad para todos los enunciados de nuestro lenguaje estuvieran fijadas de algún modo, todavía sería posible encontrar una correspondencia bajo la cual todo enunciado de nuestro lenguaje retenga sus condiciones de verdad presentes (hasta la equivalencia lógica), aunque las referencias de las palabras individuales cambien tan radicalmente que la palabra 'cereza' termine refiriéndose a los gatos y la palabra 'estera' a los árboles. (Putnam: 1992, 78)

En otras palabras, nos hemos topado con la traslación de la Paradoja de Skolem de la teoría de conjuntos a la teoría de la referencia. Además, como, según Putnam, (iii) depende de (ii) y de (i), la crítica puede extenderse a las suposiciones del *ready-made world* y del *God's-Eye View* –para Field (1982, I), por contra, el trío de premisas resulta lógicamente independiente-.

Recurre para ello a un *exemplo* que ha hecho fortuna. El realista metafísico puede perfectamente *pensar* que todos los seres humanos no somos sino *cerebros en una cubeta* conectados a un superordenador -*¿Matrix?*- que nos proporciona virtualmente las sensaciones que conforman nuestro mundo habitual. Así, hasta la mejor teoría científica que elaborásemos sería falsa, porque no describiría el mundo tal como en realidad es. Ahora bien, Putnam comenta que la mejor teoría científica imaginable no puede no ser verdadera. Supongamos que, efectivamente, somos cerebros en una cubeta y pensamos 'somos cerebros en una cubeta'. A primera vista, diríamos, con el realista metafísico que también así lo piensa, que este enunciado es verdadero. Pero, como va advertido, determinar la referencia de las palabras no es fácil. Si echamos una segunda ojeada a la cuestión, nos daremos cuenta de que el enunciado 'somos cerebros en una cubeta' es traducible a 'somos cerebros en una cubeta-virtual', es decir, cuando mencionamos la palabra 'cubeta' no nos estamos refiriendo a las 'cubetas-reales' en que flotan nuestros cerebros sino a las 'cubetas-virtuales' que todos conocemos. Y como basta una mirada en derredor para hacernos conscientes de que no somos cerebros en una cubeta-virtual, resulta que el enunciado 'somos cerebros en una cubeta' es falso. En conclusión, la hipótesis de que somos cerebros en una cubeta se autorrefuta. Y con ella se hacen añicos las ideas del *God's-Eye View* y del *ready-made world*, puesto que ellas eran las que daban pie a pensar tan absurda hipótesis, al hacernos asumir que existe un mundo en sí que únicamente admite una posible descripción –para Devitt (1984, cap. 11), una cosa es que no podamos *pensar* que somos cerebros en una cubeta y otra cosa, bien distinta, que no podamos *serlo*-.

El realismo interno se define principalmente por el siguiente lema: «la mente y el mundo construyen conjuntamente la mente y el mundo» (1981, XI). De otro modo, las cosas no las pone nuestra mente (rechazo del idealismo metafísico) pero, al mismo tiempo, tampoco son independientes por completo de ella (rechazo del realismo metafísico). Nos encontramos, pues, por decirlo con Hacking (1996, 132), ante un realismo empírico y un nominalismo trascendental. Estas ideas de raigambre kantiana se complementan con la matización, llevada a cabo por Putnam (1987, 77), de que el realismo interno no conserva la dicotomía fenómeno/noúmeno: «nos vemos forzados a reconocer con William James que la pregunta acerca de qué parte de nuestra red de creencias refleja el mundo en 'sí mismo' y qué parte es nuestra 'contribución conceptual' no tiene más sentido que la pregunta: ¿camina un hombre más esencialmente con su pierna izquierda o con su pierna derecha?».

El realismo interno propone la *aceptabilidad racional* como imagen de la verdad: una teoría científica es verdadera si y sólo si, en condiciones epistémicas ideales, es predictivamente-retropredictivamente exitosa, coherente, comprehensiva y simple, es decir, nos encontramos con una objetividad con 'o' minúscula, equivalentemente, con una objetividad para nosotros. La verdad *internalista* es, pues, cierta coherencia ideal entre nuestro sistema de creencias y nuestras experiencias, en tanto aparecen representadas dentro de tal sistema (x_4=n). Sin perjuicio de que se mantenga simultáneamente que los electrones existen en el mismo sentido que existen las sillas o nuestras sensaciones. Pues, como Putnam (1981, 198-200) bosqueja, en virtud del *razonable* Principio del Beneficio de la Duda, de igual modo que *creemos* que 'hierba' refiere y sigue refiriendo a lo mismo que hace cien años –pese a que ahora sabemos *bien* qué es la fotosíntesis- *debemos creer* que 'electrón' lo hace. De otro modo, los electrones existen porque 'los electrones existen' es verdadera, en el sentido putnamiano, al ser *racionalmente aceptable* (en suma, x_3=0 y x_2=0, pero x_1=1).

- **El *realismo experimentalista* de Ian Hacking: (1, 0, 0; p)**

Cuenta Hacking que se convirtió al realismo científico cuando un físico de la Universidad de Stanford le describió cierto experimento encaminado a detectar la existencia de cargas eléctricas de valor igual a una fracción de la carga del electrón (quarks): se tomaron dos bolas diminutas de niobio cargadas eléctricamente y se trataba de observar cómo variaba la carga de esas bolas cuando interaccionaban levemente entre sí (si se medía algún transvase de carga entre ambas con valor fraccionario, el experimento resultaría satisfactorio). Entonces, Hacking preguntó cómo se las habían arreglado en el laboratorio de Stanford para hacer que las bolitas de niobio tuviesen cargas distintas a fin de que interactuasen, y el físico contestó que las rociaban con positrones para aumentar la carga o con electrones para disminuirla. Y esta respuesta fue toda una revelación para Hacking (1996, 41): «*Hasta donde a mí concierne, si se puede rociar algo con ellos, entonces son reales*».

Según Hacking, la ciencia posee dos funciones: la representación y la intervención. De la primera, se ocupa la teoría. De la segunda, el experimento. Pero ambas aparecen intrincadas dialécticamente: «Representamos para intervenir, e intervenimos a la luz de representaciones» (1996, 49). La actividad científica se canaliza a través de la tríada especulación-cálculo-experimentación.

La disputa sobre el realismo científico aparece casi siempre anclada en el marco de la representación, en términos de teoría y verdad, pero, para nuestro autor (1996, 303), «cada prueba de una representación no es más que otra representación», con lo que jamás nos conectamos con el mundo, permaneciendo la cuestión del realismo inconclusa. Desligándose del *problema de la verdad* y del *realismo de teorías* (por tanto, x_4=p, x_3=0 y x_2=0), Hacking va a hacer hincapié en el decisivo *realismo de entidades* (x_1=1), pues «la realidad tiene que ver con la causalidad, y nuestras nociones de la realidad se forman a través de nuestras habilidades para cambiar el mundo» (1996, 173). Hacking es, por así decir, antirrealista acerca de las teorías científicas y, al mismo tiempo, realista acerca de las entidades manipuladas por los científicos en la práctica, ya que «el trabajo experimental proporciona la mejor evidencia para el realismo científico» (Hacking: 1996, 291).

3. Antirrealismo(s) científico(s)

A continuación, ofrecemos una tabla que recoge, utilizando el simbolismo propuesto, algunas de las principales gnoseologías antirrealistas (que, más abajo, procedemos a presentar atendiendo sobremanera a la justificación de las coordenadas que les asignamos).

GNOSEOLOGIAS	COORDENADAS
Stephen Toulmin *(instrumentalismo clásico)*	(1, 0, 0; p)
Nancy Cartwright *(instrumentalismo causalista)*	(1, 0, 0; p)
Bas van Fraassen *(empirismo constructivo)*	(0, 0, 0; p)
Elliot Sober *(empirismo contrastivo)*	(0, 0, 0; p)
Larry Laudan *(pragmatismo antirrealista)*	(0, 0, 0; p)
Richard Rorty *(pragmatismo relativista)*	(0, 0, 0; r)

Kurt Hübner *(historicismo antirrealista)*	(0, 0, 0; n)
Thomas S. Kuhn *(historicismo relativista)*	(0, 0, 0; r)

Para atacar el mito opuesto, el *mito de la unicidad del antirrealismo científico*, vamos a extender el argumento usado contra el mito realista. Repitamos, cambiando lo que haya que cambiar, las consabidas preguntas: ¿existe algún conjunto de tesis antirrealistas tal que su aceptación sea condición *necesaria* y *suficiente* para la catalogación de una filosofía de la ciencia como propiamente *antirrealista*? ¿cuál es la mínima variedad lineal (recta, plano, hiperplano...) que contiene *a* y *sólo a* los puntos determinados por las gnoseologías antirrealistas que aparecen en el cuadro de arriba? A la vista de la tabla, constatamos que todas las gnoseologías instrumentalistas están contenidas en el plano de ecuaciones $x_2=0$ y $x_3=0$ y que, por tanto, equivalentemente, las únicas tesis candidatas a núcleo esencial de todo antirrealismo científico serían el *antirrealismo de teorías* (A_t) y el *antirrealismo progresivo* (A_p). Sin embargo, un filósofo *realista* de la ciencia como es Hacking también las comparte. Por consiguiente, remarcamos de nuevo que no hay puntos de contacto entre la pluralidad de gnoseologías antirrealistas que fundamenten poder hablar con propiedad de *Antirrealismo Científico* – de ahí, nuevamente, el juego tipográfico en el título de esta sección-.

- **El *instrumentalismo clásico* de Stephen Toulmin: (1, 0, 0; p)**

El gran mérito de Toulmin reside en haber abierto brecha en la Concepción Heredada del Círculo de Viena. Toulmin combatió la interpretación neopositivista de las ciencias como cálculos axiomáticos, pues «su posición general respecto a las teorías científicas es instrumentalista» (Echeverría: 1999, 75). Así, concibe al físico como un «agrimensor de fenómenos», que echa mano de tal o cual teoría en función de sus necesidades, de igual manera que el agrimensor traza esta o aquella línea en función de lo que desea medir (Toulmin: 1964, 129). Para este filósofo, «las leyes de la naturaleza en sí no son ni verdaderas ni falsas» (1964, 92-93). Conforme van desarrollándose nuevas teorías científicas, aparecen nuevos problemas y desaparecen viejos problemas (por lo hasta ahora dicho, x_4=p y $x_3=0$). En lo que atañe al debate realismo-antirrealismo, Toulmin (1964, 164) atina a distinguir implícitamente las tesis del realismo *de teorías* y *de entidades*, puesto que no se deben «confundir dos cuestiones distintas: la cuestión de la aceptabilidad de las teorías y la cuestión de la realidad de las entidades teóricas». Su postura consiste en defender un *antirrealismo de teorías* al tiempo que un *realismo de entidades* (esto es, respectivamente, $x_2=0$ y $x_1=1$). Toulmin (1964, 156) asevera que las teorías son instrumentos, pero que, en ningún caso, «al cambiar de método de representación, cambiamos la realidad del mundo».

- **El *instrumentalismo causalista* de Nancy Cartwright: (1, 0, 0; p)**

Esta filósofa de la ciencia insiste, como se hace eco Echeverría (1999, 306 n. p.), en el aspecto práctico experimental de la ciencia partiendo de postulados instrumentalistas. Cartwright concibe básicamente tres niveles en ciencia, a saber: el de las leyes teóricas, el de los modelos y el de las leyes fenomenológicas; conectándose el primero y el tercero por medio del segundo. Cartwright (1983, 2) indica que ella «defiende una clase de antirrealismo que acepta lo fenomenológico y rechaza lo teorético». En realidad, Cartwright invoca una visión instrumentalista de las teorías científicas: una teoría no es ni una colección de afirmaciones ni una colección de modelos, sino una herramienta para construir modelos (Cartwright & Suárez: 2008, 62).

Y es que nuestra filósofa mantiene que las leyes de la física *mienten* y aboga por un *antirrealismo de teorías* (x_2=0) fundado en el rechazo de la *inferencia a la mejor explicación*. Del hecho de que nuestras leyes teóricas sean explicativas no puede inferirse que sean verdaderas, ya que el científico usa, regularmente, distintos modelos teóricos mutuamente incompatibles para un mismo campo fenoménico (x_4=p). Sin embargo, esto no es óbice para que mantenga, al tiempo, un *realismo de entidades* (x_1=1) consolidado sobre la *inferencia de la causa más probable*. Si los materialistas aceptan aquellas *entidades teóricas* que sirven para construir, los causalistas –como Cartwright- aceptan las que sirven para causar: «el razonamiento causal aporta buenas bases para nuestras creencias en las entidades teóricas [...] la explicación de un efecto mediante una causa tiene un componente existencial que no es un ingrediente extra opcional» (1983, 6 y 91). Y, como era de esperar (porque $x_2=0 \rightarrow x_3=0$), Cartwright (2002, 70-1) cuestiona duramente el *realismo progresivo*: «tenemos una buena razón para ser suspicaces con respecto al refinamiento ilimitado de nuestras teorías, pues muchos de sus conceptos centrales son abstractos y no describen correctamente una situación a menos que una descripción más concreta sea también obtenida».[1]

- **El *empirismo constructivo* de Bas van Fraassen: (0, 0, 0; p)**

La posición filosófica de van Fraassen se opone a toda variedad de realismo científico y se caracteriza por un antirrealismo de raigambre empirista, que Hacking (1996, 61) reseña como un positivismo contemporáneo y Cartwright (1983, 56), por su parte, como un instrumentalismo sofisticado: «la ciencia se propone ofrecernos teorías que son empíricamente adecuadas; y la aceptación de una teoría involucra como creencia solamente que ella es empíricamente adecuada» (van Fraassen: 1996, 28).

Las teorías científicas, desde su enfoque semántico (≠ sintáctico), consisten, más que en conjuntos de teoremas enunciados en cierto lenguaje, en conjuntos de modelos cuyas subestructuras empíricas aspiran a representar isomórficamente las apariencias.

[1] La teoría de la ciencia de Andrés Rivadulla coincide, en esencia, con esta concepción racional de la ciencia, que elude, al tiempo, su imagen como espejo de la naturaleza, propia del realismo, y el irracionalismo relativista. Rivadulla (2004c, 425) sostiene que existe una racionalidad *instrumental* intrínseca a la empresa científica: «La comparación de teorías, *bien* con respecto a su relación matemática *o* su poder predictivo, da la respuesta a la pregunta por la racionalidad del cambio teórico»; de hecho, Rivadulla (2003, 14) extrae tal conclusión de la historia de la física: «La mecánica newtoniana se deriva matemáticamente de la teoría de la relatividad tomando en ésta el límite $v/c \rightarrow 0$, e. d. en situaciones físicas de campos gravitatorios débiles y velocidades pequeñas comparadas con la de la luz en el vacío. Por su parte, la mecánica clásica constituye también un caso límite de la mecánica cuántica cuando la constante de Planck tiende a cero. [...] Cuando la derivación matemática no es posible, como sucede entre la astronomía copernicana y los modelos astronómicos griegos, la racionalidad de la elección teórica la garantiza el hecho de que el *balance predictivo* resulta abrumadoramente favorable a la astronomía copernicana. En general, cuando una teoría contiene a otra como caso límite, el balance predictivo es siempre concluyentemente favorable a la teoría reductora». Y Rivadulla (2004, 135) también desconfía de que la tesis del *realismo progresivo* resulte adecuada en ciencia: «Un problema, como el de la gravedad, por ejemplo, no se puede considerar que esté resuelto por las teorías actuales [...] el éxito no indica que el problema haya sido resuelto, ya que también podría haberlo sido por otras teorías competidoras, en cuyo caso lo más razonable sería decir simplemente que disponemos de varias teorías exitosas acerca del mismo fenómeno». En suma, su *instrumentalismo pragmatista* queda identificado, como el antirrealismo de Cartwright, con (1, 0, 0; p).

Una teoría científica se dice, entonces, empíricamente adecuada si es el caso que existe al menos un modelo cuya subestructura empírica es isomorfa a los fenómenos. En otros términos, el *empirismo* de van Fraassen se traduce en que las teorías científicas meramente *salvan fenómenos*, es decir, describen *literalmente* lo observable. ¿Dónde aparece su *construccionismo*? En que la actividad científica no posee como meta el descubrimiento de la verdad –que afectaría tanto a lo observable como a lo inobservable- sino la elaboración –construcción- de modelos correctos con respecto a los fenómenos observables. Pero, ¿cuáles son esos fenómenos observables que debemos *salvar*? Aquellos que es posible registrar considerando nuestro propio cuerpo biológico como aparato de medición. Por ejemplo, para van Fraassen, un satélite de Júpiter es observable –puesto que podríamos acercarnos en una nave espacial y verlo a simple vista- mientras que un electrón resulta inobservable –puesto que no podemos ni podremos empequeñecernos cual Alicia en el País de las Maravillas para visualizarlo-. El electrón no es ni más ni menos que un recurso destinado a que las teorías resulten adecuadas empíricamente (por consiguiente, queda claro que $x_1=x_2=x_3=0$ y $x_4=p$).

- **El *empirismo contrastivo* de Elliot Sober: (0, 0, 0; p)**

La teoría de la ciencia de Sober está en diálogo con la de van Fraassen: ambos son empiristas, pero cada uno a *su* estilo. El punto de arranque de nuestro autor es la crítica –recogida en Sober (1990) y (1993)- que realiza contra los argumentos abductivos típicos del realismo científico –inferencias a la mejor explicación- y del realismo matemático –argumentos de indispensabilidad-. A continuación, tomando como base una perspectiva empirista, sostiene que el *Likelihood Principle* («una observación O favorece una hipótesis teórica H_1 sobre otra H_2 sii se verifica la siguiente relación entre sus probabilidades condicionadas: $p(O|H_1) > p(O|H_2)$») sirve como principio discriminante entre teorías: «una teoría compite con otras teorías; las observaciones reducen nuestra incertidumbre sobre esa competición discriminando entre alternativas» (Sober: 1993, 39). Inmediatamente, Sober añade que esto no debe entenderse, de ningún modo, como que una determinada teoría científica compite con todas sus posibles alternativas. Una teoría dada sólo compite con las teorías alternativas disponibles en su momento histórico. Según Sober, si no existen teorías alternativas, los científicos la contrastan con su negación. La misión de la ciencia es resolver problemas guiándose, en lo posible, por estas indicaciones; luego, en cada época histórica, se aceptan aquellas teorías científicas sobre entidades, estados o procesos que presentan mayor probabilidad condicionada por la base empírica accesible, estando tal valor sujeto a revisión (ergo $x_3=0$, $x_2=0$, $x_1=0$ y $x_4=p$).

- **El *pragmatismo antirrealista* de Larry Laudan: (0, 0, 0; p)**

La principal lección que, según Laudan (1993, 34), podemos extraer de la historia de la ciencia es: «típicamente, las teorías posteriores no implican a sus antecedentes, ni las captan como casos límite, ni mantienen en forma global e indiscriminada todas las consecuencias empíricas conocidas» ($x_3=0$). La sucesión histórica de teorías científicas aporta evidencia suficiente para concluir que el cambio científico no respeta ni su contenido lógico ni su contenido empírico:

> Pero ni en la ciencia ni en ningún otro ámbito necesitamos hacer que el progreso dependa de cierto tipo de acumulación global. [...] Decir a los científicos que deben buscar teorías verdaderas, cuando aceptas que no hay manera segura de considerar como verdadera a ninguna

> teoría, o ni siquiera como «más verdadera que otra», es incitarles para que se sumen a una tarea imposible y absurda. (Laudan: 1993, 35 y 71)

En opinión de Laudan, debemos sustituir la verdad por la efectividad a la hora de resolver problemas como meta de la ciencia (x_4=p):

> La ciencia en su totalidad, desde mi punto de vista, consiste en una actividad dedicada a resolver problemas. [...] Si una teoría no consigue resolver problemas que juzgamos especialmente urgentes e importantes, debemos tratar de localizar otra teoría que resuelva esos problemas. [...] Pero el que una teoría bien comprobada falle en resolver determinados problemas que queremos resolver, no es razón para rechazar la teoría. Si una teoría es la mejor contrastada entre todas las rivales, es decir, entre todas las contrarias a ella que conozcamos, esa debe ser la teoría elegida entre todas las rivales. [...] Pero enfrentados ante una falsa elección, del tipo lo tomas o lo dejas, entre una teoría mal contrastada que resuelve el problema que nos interesa y una teoría bien contrastada, pero que no resuelve ese problema, la teoría de la inferencia deja muy claro cómo debemos proceder en nuestra elección. (Laudan: 1993, 46-47)

En consecuencia, Larry Laudan admite un *antirrealismo de teorías* y *de entidades* (x_2=0 y x_1=0), pues ambas no son sino meras herramientas destinadas a rendir en el funcionamiento de la ciencia; pero este pragmatismo no se desplaza en la órbita relativista: «si esas creencias o teorías flotaran enteramente libres y no reflejasen nada de nada sobre el mundo mismo, entonces sería impensable que nos permitieran manipular el mundo tan efectivamente como de hecho lo hacemos» (1993, 190).

- **El *pragmatismo relativista* de Richard Rorty: (0, 0, 0; r)**

El neoyorquino Richard Rorty no es, ciertamente, un modelo de teórico de la ciencia: sus provocativos análisis están orientados a reducir la gnoseología y la epistemología a la hermenéutica. Pero conviene advertir que pueden soslayarse si atendemos a que van dirigidos contra unas disciplinas constituidas en Tribunal de la Razón, lo cual es desde hace mucho tiempo *rara avis*. Además, para establecer su reducción, Rorty se sirve de las críticas al mito de lo dado (Sellars), al sueño de la confrontación entre el esquema conceptual y la realidad (Davidson) y a la distinción analítico/sintético (Quine); pero, como esgrime Diéguez (1998, 232-242), al partir de esas premisas, para demostrar la imposibilidad de tales disciplinas, se está ya poniendo de relieve que la conclusión es errónea, puesto que se trata de premisas precisamente gnoseológicas y epistemológicas.

La obra rortiana es uno de los principales pilares del antirrepresentacionalismo contemporáneo. Para Rorty, no hay manera de llegar a saber si nuestros pensamientos representan la realidad, porque no podemos salirnos de nuestra propia piel para comprobar, cual putnamiano Ojo Divino, si tal engarce es el caso. La ciencia no es, pues, el máximo exponente de conocimiento, sino un simple útil para manejarnos con el mundo:

> No es más verdadero el que «los átomos son lo que son porque usamos 'átomo' como lo hacemos» que el que «usamos 'átomo' como lo hacemos porque los átomos son lo que son». [...] *Ambas* son pseudo-explicaciones. (Rorty: 1991, Introd.)

Del mismo modo, carece de sentido preguntar si el discurso astrofísico es más correcto que el discurso astrológico, puesto que inclinarnos por el primero frente al segundo sólo muestra nuestro compromiso etnocéntrico con ciertos patrones culturales típicamente occidentales. La ciencia es, por tanto, un instrumento que no puede reclamar clase alguna de objetividad, porque lo único que patentiza el mal llamado –según Rorty- *progreso científico* es el absolutismo de la ciencia en el insolidario panorama cultural de Occidente (nótese: x_3=0, x_2=0, x_1=0, y x_4=r, ni siquiera x_4=c).

- **El *historicismo antirrealista* de Kurt Hübner: (0, 0, 0; n)**

La teoría de la ciencia de Hübner está contenida en su obra de 1978 titulada, con buscada resonancia kantiana, *Kritik der wissenschaftlichen Vernunft*, y consiste en una teoría historicista, bien temperada, de la física, que fundamenta sus condiciones de posibilidad en su propia historia. Para nuestro autor, el cambio científico es esencialmente la búsqueda de la armonización de las discrepancias entre diversos sistemas científicos coetáneos. Este cambio se trasluce en dos tipos distintos de progreso científico: el *progreso I* ligado a periodos de *explicación* –comparable a la *ciencia normal* kuhniana- y el *progreso II* ligado a periodos de *mutación* –comparable a la *revolución científica* kuhniana-. Sin embargo, el distanciamiento con Kuhn sobreviene cuando Hübner sostiene que su perspectiva historicista no puede equipararse con la relativista, pues el *automovimiento* de las ciencias no es arbitrario sino consecuente con diversas estipulaciones que, a su vez, también pueden evolucionar a lo largo del tiempo: «jugamos al juego de la experiencia pero con consecuencias más o menos obligatorias y con un reiterado y también fundamentado cambio de las condiciones» (Hübner: 1981, 140).

En lo tocante al debate realismo-antirrealismo, Hübner rechaza tanto el *realismo progresivo* –asevera que ni el *progreso I* ni el *progreso II* crecen acumulativamente- (luego x_3=0) como el *de entidades* y el *de teorías*, ya que Hübner (1981, 129) mantiene que «la ciencia no proporciona necesariamente una imagen permanentemente mejorada y ampliada de los mismos objetos y del mismo contenido empírico» (ergo x_1=0 y x_2=0). De hecho, Hübner asimila la manida *tesis de inconmensurabilidad* de entidades homónimas de diferentes sistemas científicos: «tanto en la física actual como en la antigua encontramos expresiones tales como masa, impulso, velocidad, tiempo, espacio; sin embargo, a menudo, significan cosas totalmente distintas según el contexto teórico en el que las utilicemos: dentro del marco de la física cartesiana, de la newtoniana o de la einsteniana» (1981, 128). Pero sin olvidar, y esto resulta francamente sorprendente, que Hübner no renuncia a la verdad en ciencia. Tras criticar la noción popperiana de *verdad absoluta* a la que la ciencia vaya acercándose progresivamente, Hübner propone una noción *relacional*, que no *relativista*, de verdad en ciencia: *verdad* como *verdad con respecto a un conjunto de estipulaciones* (por consiguiente, x_4=n).

- **El *historicismo relativista* de Thomas S. Kuhn: (0, 0, 0; r)**

El giro historicista kuhniano, como es de todos conocido, está en grave conflicto con la tesis realista acerca del progreso científico. Esta discrepancia quedó escenificada en la egregia polémica entre el propio Kuhn y Popper a lo largo de las sesiones del Coloquio Internacional sobre Filosofía de la Ciencia celebrado en Londres en 1965. Según Kuhn, no hay motivo para creer en el crecimiento o en la acumulación del saber científico (x_3=0). Este pesimismo se sustenta en su eximia tesis de inconmensurabilidad entre paradigmas científicos: «las diferencias entre paradigmas sucesivos son necesarias e irreconciliables» (Kuhn: 1971, 165). Este fenómeno, según Kuhn y Feyerabend, no solamente afectaría a la mentada concepción acumulativa y continuista del corpus científico de Popper y Lakatos, sino también al propio contenido real del mismo ($x_2 = x_1$

= 0). Dicho en corto, los científicos que trabajan en dos paradigmas contiguos emplean, en opinión de Kuhn, conceptos teóricos –referentes a entidades, estados o procesos- de significado distinto, aunque sean homónimos: «aunque el mundo no cambia con un cambio de paradigma, el científico después trabaja en un mundo diferente» (Kuhn: 1971, 191). Además, desde la óptica kuhniana, el cambio entre paradigmas, mediante una revolución científica, es una sustitución traumática que no tiene por qué ver con causas epistémicas (pongamos por caso, un *experimentum crucis*), sino más bien con causas psico-sociales (en consecuencia, x_4=r): «las revoluciones científicas se inician con un *sentimiento* creciente, a menudo restringido a una estrecha subdivisión de la comunidad científica, de que un paradigma existente ha dejado de funcionar adecuadamente en la exploración de un aspecto de la naturaleza» (Kuhn: 1971, 149; cursivas mías).

4. Realismos no estándar

Acabamos de comprobar que existen múltiples clases de realismos científicos (y, paralelamente, de antirrealismos). Pero dejamos constancia de que, junto a los realismos clásicos de Popper, Bunge, Niiniluoto... existen otros realismos no estándar. Algunos de los cuales van a constituirse en protagonistas de nuestros dos casos de estudio. Nos referimos, respectivamente: al *realismo estructural*, defendido por John Worrall, Steven French y James Ladyman, que explicaremos en el capítulo 4; y al *realismo experimental*, propugnado por Ian Hacking o Gustavo Bueno, del que algo ya hemos hablado, y que se explicará en detalle en el capítulo 7. En cualquier caso, la trama de conceptos forjada en este capítulo 1 nos servirá una y otra vez de marco de trabajo.

5. Conclusiones

A continuación recopilamos de modo sumario lo que hemos obtenido a lo largo de estas líneas:

1) La idea de realismo científico no es una idea clara y distinta.
2) No se puede hablar de realismo científico como si de una filosofía bien definida se tratase; a lo sumo puede usarse tal nombre para denominar a un conjunto ni de lejos homogéneo de filosofías de la ciencia que a menudo son incompatibles entre sí, y en consecuencia tal designación lingüística puede resultar equívoca.
3) Por oposición, lo mismo puede predicarse del antirrealismo científico.

La principal conclusión que puede sacarse de haber derribado los falsos mitos de *la unicidad del realismo científico* y de *la unicidad del antirrealismo científico* es que las habituales identificaciones que suelen realizarse entre, por un lado, racionalismo y realismo, y, por otro lado, irracionalismo y antirrealismo, son excesivamente simplistas. Antirrealismo y racionalismo no son mutuamente excluyentes: se puede perfectamente sostener que existe una racionalidad intrínseca en la evolución de la ciencia (así, Laudan). Análogamente, realismo e irracionalismo tampoco son excluyentes: encastillarse en un realismo de corte metafísico como el del *cientismo* es buena prueba de ello (así, Bunge). Se imponen los grises que median entre el blanco del realismo más metafísico y el negro del antirrealismo más relativista; en suma, navegar entre Escila y Caribdis.

Caso I

La equivalencia matemática entre Mecánicas Cuánticas

La teoría cuántica quiere autobuses con un número limitado de rutas,
y el cuadro científico ofrece caballos galopando sobre praderas.

Alfred Norton Whitehead, *Science and the Modern World*.

CAPÍTULO 2

DE LA EQUIVALENCIA INTERTEÓRICA

A continuación, definimos ciertas nociones filosóficas (equivalencia *formal*, equivalencia *lógica*, equivalencia *matemática*, equivalencia *empírica*) imprescindibles para el futuro diagnóstico de nuestro caso de estudio físico-cuántico. Estas nociones son definidas desde una perspectiva sintáctica, porque consideramos que las relaciones interteóricas de equivalencia tienen lugar en ámbitos puramente sintácticos (la semántica sólo entra en juego cuando «miramos al mundo»). Intentamos, pues, plasmar intuiciones extraídas de ejemplos paradigmáticos provenientes del quehacer cotidiano de los físicos. Antes o después, nos tropezamos con la mayoría de conceptos que aparecen en el clásico *The Structure of Science* de Nagel (1961), y que tanta polémica levantaron entre los posteriores teóricos de la ciencia: reducción (homogénea e inhomogénea), equivalencia, recubrimiento, inclusión, teorización, límites asintóticos... El objeto de estas definiciones es describir las posibles relaciones entre teorías científicas.

1. Equivalencia formal

Comencemos buscando una definición de *equivalencia formal*. Sospechamos que la definición que presentemos de equivalencia formal ha de ser tal que garantice lo que luego llamaremos *equivalencia empírica*, es decir, si dos teorías científicas son formalmente equivalentes, entonces deben de hacer idénticas afirmaciones empíricas. De hecho, como analizaremos con detalle en el siguiente capítulo, esta intuición impulsó a Schrödinger (1926b) a buscar una «identidad formal» entre su Mecánica Ondulatoria y la Mecánica Matricial de Heisenberg:

> Considerando las extraordinarias diferencias entre los puntos de partida y los conceptos de la Mecánica Cuántica de Heisenberg y la teoría que ha sido designada como Mecánica «Ondulatoria» o «Física», y ha sido descrita aquí, es muy extraño que estas dos teorías nuevas concuerden *cada una con la otra* con respecto a los hechos conocidos en que difieren de la teoría cuántica antigua. [...] En lo que sigue, la íntima *conexión interna* entre la Mecánica Cuántica de Heisenberg y mi Mecánica Ondulatoria será desvelada. Desde la base formal matemática, uno bien podría hablar de la *identidad* de las dos teorías. (Schrödinger: 1982, 45-6)

Además, parece muy natural que como existen dos ciencias formales (Lógica y Matemática), pues desglosemos la equivalencia formal en dos *sub*equivalencias, a saber: la *equivalencia lógica* y la *equivalencia matemática*. En consecuencia, *Definición 1* Dos teorías científicas T_1 y T_2 son *equivalentes formalmente* si y sólo si son *lógicamente equivalentes* o *matemáticamente equivalentes*.

Observamos que el «o» de la definición no debe entenderse como «exclusivo». Y es que, por ejemplo, alguien que considere que no hay diferencia entre Lógica y Matemática, verá nuestro análisis sobre la equivalencia matemática como una repetición (si se quiere, rebuscada o pedante) de lo dicho sobre la equivalencia lógica; por ello, para curarnos en salud, permitimos cierto margen de ambigüedad en nuestra *definición 1*: son concebibles dos teorías T_1 y T_2 que, simultáneamente, sean lógica y matemáticamente equivalentes (aunque, a la luz de las definiciones que daremos, la equivalencia lógica resultará ser más *fuerte* que la equivalencia matemática).

2. Equivalencia lógica

La intuición que queremos que recoja la definición de equivalencia lógica es la de *intertraducibilidad* entre teorías científicas que no son sino reformulaciones unas de otras:

Definición 2 Diremos que dos teorías científicas T_1 y T_2 son *lógicamente equivalentes* (notación: $T_1 = T_2$) si y sólo si T_1 es *reducible* a T_2 ($T_1 \leq T_2$) y T_2 es *reducible* a T_1 ($T_2 \leq T_1$).

Definición 3 Y diremos que T_1 es reducible a T_2 ($T_1 \leq T_2$) si existe una función inyectiva f de *Fórmulas*(T_1) a *Fórmulas*(T_2) (preservando que la igualdad vaya a la igualdad, las constantes a constantes, las funciones n-arias a funciones n-arias, los predicados n-arios a predicados n-arios...) tal que, si α es un teorema de T_1, entonces $f(\alpha)$ sea un teorema de T_2.

En resumen, fusionando este par de definiciones:

Definición 4 T_1 y T_2 son *lógicamente equivalentes* ($T_1 = T_2$) si y sólo si: (i) existe una función inyectiva f de *Fórmulas*(T_1) a *Fórmulas*(T_2) (preservando que la igualdad vaya a la igualdad, etc.) tal que, si α es un teorema de T_1, entonces $f(\alpha)$ es un teorema de T_2; y (ii) existe una función inyectiva g de *Fórmulas*(T_2) a *Fórmulas*(T_1) (preservando que la igualdad vaya a la igualdad, etc.) tal que, si α es un teorema de T_2, entonces $g(\alpha)$ es un teorema de T_1.

En suma, T_1 y T_2 son *lógicamente equivalentes* si T_2 no es más que otra formulación o presentación de T_1 y recíprocamente (T_1 no es más que otra formulación o presentación de T_2). Llamaremos «traducción de T_1 a T_2» a f y «traducción de T_2 a T_1» a g. Y, atención, nótese que, en ningún momento, estamos exigiendo que $f = g^{-1}$ (i. e. f biyección), en otras palabras, que la «traducción» de T_1 a T_2 (función f) sea, exactamente, la inversa de la «traducción» de T_2 a T_1 (función g). La razón es que hacerlo así restringiría demasiado el campo de aplicación de la *definición 4*. Estas definiciones se hacen eco de la propuesta de Quine (1975, 320): «dos formulaciones expresan la misma teoría si existe una reconstrucción de los predicados que transforma la primera teoría en una lógicamente equivalente a la otra».

La Física proporciona numerosos ejemplos de esta posibilidad. Uno de ellos es la equivalencia (lógica) que media entre las formulaciones de la Mecánica Cuántica a la

Feynman (Borowitz: 1973, 194-6) y en forma variacional (Borowitz: 1973, 451-6), fundadas en que cada «ley de movimiento» puede, generalmente, expresarse como «principio variacional». Otro de ellos es la equivalencia (lógica) que media entre la Mecánica Relativista que supone que existe una masa relativista dependiente de la velocidad y la Mecánica Relativista que rechaza tal suposición, puesto que su única diferencia radica en una mera coordinación de fórmulas –sin discrepancia empírica- a la hora de escribir el momento relativista (Field 1973 & Rivadulla 2004c). Y otros ejemplos son las equivalencias lógicas que median entre las versiones de la Mecánica Clásica de Newton, Lagrange, Hamilton y Hamilton-Jacobi, &c. Curiosamente, al igual que acontece con los límites clásicos de la Teoría de la Relatividad y de la Teoría Cuántica (Rivadulla: 2004, cap. IV), sucede, con respecto a la equivalencia entre las Mecánicas de Newton, Lagrange, Hamilton y Hamilton-Jacobi, que resultados aceptados por gran mayoría de físicos son impugnados por algunos filósofos de la ciencia. Así, por un lado, Bunge (1967, 2.6) desarrolla dichas equivalencias lógicas desde una visión axiomática, y concluye (1967, 125):

> H [Mecánica Hamiltoniana] y L [Mecánica Lagrangiana] son lo mismo con respecto a sus *conjuntos de fórmulas*, todas las cuales son mutuamente traducibles *vía* el código: $p = \partial L / \partial \dot{q}$, $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $L = p\dot{q} - H$ [*H* hamiltoniano, *L* lagrangiano]. Respecto a HJ [Mecánica de Hamilton-Jacobi], también puede mantenerse como equivalente a L dado que sus dos funciones fuente, *H* y *S* [acción], se definen explícitamente en términos de *L*. Dicho en corto, respecto a sus conjuntos totales de fórmulas, HJ=L, L=H [ergo, también, HJ=H]. [...] La relación lógica entre estas teorías protofísicas de evolución y CM [Mecánica de Newton] es de inclusión: CM $\subset$ L y análogamente para las otras.[2]

Mientras que, por otro lado, Díez & Moulines (1997, 379) comentan:

> La cuestión de la equivalencia «Newton-Lagrange» sigue, en realidad, abierta. Con más razón aún puede decirse ello de otros ejemplos que suelen aducirse en la física, como la supuesta equivalencia entre la mecánica de Newton y la de Hamilton, o entre la mecánica ondulatoria y la mecánica de matrices en la física cuántica; lo más probable es que éstos sean sólo casos de equivalencia empírica.

Quizá, el problema radique en que Díez & Moulines (1997, 378) sólo distinguen dos tipos generalísimos de equivalencia –equivalencia fuerte o estricta y equivalencia débil o empírica- y reducen la equivalencia estricta, por decirlo en nuestro vocabulario, a una *hiper*equivalencia lógica:

> Aunque conceptos y leyes de una y otra teoría sean distintos, hay una correspondencia plena y biunívoca entre ambas teorías, de modo que todo lo que puede decirse en la primera teoría puede traducirse sin pérdida de información a la segunda, y viceversa. Es decir, hay una correspondencia exacta entre ambas teorías tanto a nivel conceptual como a nivel del contenido de sus afirmaciones respectivas.

Esto es, si comparamos su definición de tintes estructuralistas con nuestra *definición 4*, ambos exigen que la «traducción» de T_2 a T_1 sea exactamente la inversa de la «traducción» de T_1 a T_2. Formalmente: están exigiendo $f = g^{-1}$; condición, pues, como ya matizamos, demasiado restrictiva, ya que las traducciones en un sentido y en otro pueden diferir al depender del contexto. Como si dijéramos, *cum grano salis*, nuestra

[2] Para Bunge, el otro contenido –que acabaría por justificar la equivalencia- se da cuando «completamos» H, L y HJ, puesto que, según él, son teorías físicas sólo «parcialmente interpretadas», al contrario que la «totalmente interpretada» CM.

definición permitiría que «callejón» fuera traducido al inglés como «lane» y que, posteriormente, fuera volcado al español como «callejuela»; por el contrario, su definición exigiría forzosamente que revirtiera en «callejón». Moulines y Díez bien pueden sostener que sólo media equivalencia débil («ese paralelismo sólo se da a nivel de los datos empíricos») entre las cuatro representaciones de la Mecánica Clásica y, en especial, entre Mecánica Matricial y Mecánica Ondulatoria, pues del hecho de que no cuenten con la posibilidad de una equivalencia *matemática* más *suave*, o menos *potente*, que la equivalencia *lógica* se sigue que arrinconen nuestro caso de estudio a una mera instancia de equivalencia empírica, cuando eso es precisamente lo que debe explicarse mediante alguna equivalencia de mayor orden, más universal.

3. Equivalencia matemática

Habida cuenta de que todas las teorías físicas presuponen indispensablemente una mínima estructura matemática de espacio métrico, puesto que ésta es requisito necesario para que sean realizables mediciones y se pueda hablar de unidades de medida (¡hasta el *análisis dimensional* presupone los números reales!), proponemos la siguiente definición para la noción de equivalencia matemática:

Definición 5 Diremos que dos teorías científicas T_1 y T_2 son *matemáticamente equivalentes* si la estructura matemática que subyace a T_1 es isomorfa e isométrica a la estructura matemática que subyace a T_2.

Obviamente, esta definición no es un sin sentido, ya que el hecho de que las estructuras matemáticas de la Física sean, al menos, espacios métricos hace que tenga sentido la pregunta por la isomorfía e isometría. La isomorfía, interpretada obviamente como isomorfía topológica (homeomorfía), garantiza que ambas teorías presenten idénticas características *cualitativas* (morfológicas, topológicas), mientras que la isometría (conservación de longitudes, esto es, de distancias o, en su caso, normas y productos escalares) garantiza idénticas características *cuantitativas* (métricas), y por tanto iguales predicciones numéricas en el paso a la empiria.

Habitualmente, se encuentra en la literatura especializada que lo único que ha de exigirse es *isomorfía*, pero resulta necesario pedir también *isometría*. Como prueba de este comentario, supongamos dos teorías científicas T_1 y T_2 cuyas estructuras matemáticas sean, respectivamente, $C(K)$ (en palabras, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el *conjunto fractal de Cantor* K) y $C([0,1])$ (en palabras, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[0,1]$). Entonces, ambas estructuras matemáticas son isomorfas (es decir, presentan idénticas propiedades *cualitativas*, topológicas), pero no son isométricas (es decir, no presentan idénticas propiedades *cuantitativas*, pues al pasar de una a otra no se conservan las longitudes), como demostró Miljutin (Habala & Hájek & Zizler: 1996, 178).[3] Por consiguiente, tenemos delante dos teorías científicas isomorfas pero no matemáticamente equivalentes, al faltarnos su isometría (*iso*=igual, *metría*=medida). Podría pensarse que este contraejemplo es *ad hoc*, tal vez por su sutileza matemática, pero nótese que la estructura matemática sobre la que se edifica la Mecánica Cuántica es muy parecida a las mencionadas (de hecho, $C([0,1])$ es «denso» en $L^2([0,1])$, en otras palabras, el

[3] $C(K)$ y $C([0,1])$ son isomorfos (topológicamente) debido a que K y $[0,1]$ son compactos no numerables metrizables; pero no son isométricos porque si lo fueran, por el teorema de Banach-Stone, K sería isomorfo (topológicamente) a $[0,1]$, contradicción.

primer espacio es, por así decir, el esqueleto del segundo, que es, como tendremos ocasión de ver, el substrato matemático de la Mecánica Cuántica Ondulatoria).

Finalmente, como se percata Bunge (1978, 230), «no hay en la literatura física sino un solo caso en el que se haya alegado el isomorfismo [isométrico] de dos teorías, es el de la mecánica ondulatoria (o la «imagen» de Schrödinger de la Mecánica Cuántica) y la mecánica matricial (o la «imagen» de Heisenberg de la Mecánica Cuántica)».

4. Equivalencia lógica *versus* equivalencia matemática

En principio, parece lógico sostener:

<u>*Proposición 6*</u> *Equivalencia lógica* $\Rightarrow$ *Equivalencia matemática*; pero, en general: $\neg$(*Equivalencia matemática* $\Rightarrow$ *Equivalencia lógica*).

La razón es que la equivalencia lógica resulta más *fuerte* que la equivalencia matemática en tanto en cuanto la traducción de teoremas a teoremas justifica la conservación de las características cualitativas y cuantitativas de la isomorfía isométrica.

Por supuesto, en general, el recíproco no es cierto, porque, por ejemplo, el enunciado mecánico-ondulatorio:

$$\text{«} P(electrón \in V) = \int_V \psi^* \psi dq \text{»}$$

no es traducible a la Mecánica de Matrices, al carecer ésta del añadido «probabilitario» que contiene aquélla (Beller (1983, 474): «el programa matricial original excluía la interpretación probabilista») –sin perjuicio de que sus estructuras matemáticas subyacentes (espacios de Hilbert) sean, como examinaremos en el próximo capítulo, isomorfas e isométricas entre sí-.

Muller (1997b, 240 n.p.) propone otro ejemplo de sentencia intraducible:

$$\text{«}\psi(\vec{r}) = (\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)i\text{»}$$

porque, aunque, en virtud del isomorfismo isométrico Φ entre los espacios de configuración de la Mecánica Ondulatoria L^2 (e. d. donde yace ψ) y de la Mecánica Matricial ℓ^2, obtuviéramos la traducción $\Phi(\psi)$ en ℓ^2, el valor concreto de la función de onda ψ en el punto espacial $\vec{r}$ carecería de traducción mecánico-matricial, pues los elementos de ésta no poseen como dominio el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ sino los números naturales $\mathbb{N}$.[4]

[4] Precisamente, como explicaremos, para sortear esto y poder probar la equivalencia matemática entre mecánicas cuánticas, von Neumann hubo de restringirse –como agudamente señala Kronz (1999, 33-34)- a las clases de equivalencia de funciones de Lebesgue, que no están definidas sobre puntos sino sobre intervalos.

5. Equivalencia empírica

Definimos la equivalencia empírica como sigue:

Definición 7 Dos teorías científicas T_1 y T_2 son *equivalentes empíricamente* si y sólo si realizan idénticas afirmaciones empíricas.

Reconocemos que, dada una teoría T, discriminar sus afirmaciones empíricas es complicado -¡aquí entra en juego la polémica sobre la distinción teórico-observacional!- y ello lastra nuestra *definición 7*, pero concordamos con Giere (1988, 95) en que:

> Más importante que estos argumentos filosóficos es el hecho de que esta distinción no se encuentra en la práctica científica. En los libros de texto de mecánica no se distingue entre la observabilidad de las fuerzas como opuestas a sus posiciones. Tampoco se plantea ninguna dificultad de principio para medir las fuerzas como opuestas a las posiciones.

Matización que, pensamos, es compartida ampliamente por los físicos (sean teóricos, experimentales o físicos matemáticos) y *salva* la pertinencia de nuestra definición de más arriba.

6. Equivalencia formal *versus* equivalencia empírica

Proponemos que las relaciones que estas nociones guardan entre sí vienen expresadas así:

Proposición 8 *Equivalencia formal* $\Rightarrow$ *Equivalencia empírica*; pero, en general:
$\neg$(*Equivalencia empírica* $\Rightarrow$ *Equivalencia formal*).

La segunda aseveración es trivial, puesto que ese recíproco no es cierto porque, por ejemplo, la astronomía newtoniana y la astronomía kepleriana son equivalentes empíricamente (porque predicen igual), pese a no ser equivalentes formalmente (porque aquélla posee una superestructura dinámica –soportada sobre una base cinemática- que imposibilita que sean lógicamente equivalentes –¡la *Ley de Gravitación Universal* resulta intraducible!- o matemáticamente equivalentes –¡la estructura matemática de la astronomía kepleriana no es isomorfa e isométrica a la de la newtoniana, puesto que ésta incorpora nociones dinámicas de las que aquélla carece!-).[5] Con respecto a la primera aseveración, a primera vista, los vínculos interteóricos que se establecen con la equivalencia formal (traducibilidad / isomorfía isométrica) justifican la obtención de las mismas consecuencias empíricas (de hecho, propusimos nuestra definición de equivalencia formal guiados por el espíritu de salvaguardar esta intuición). No obstante, nos resta tratar el siguiente fleco: suele acontecer históricamente que, dadas dos teorías T_1 y T_2 formalmente equivalentes, su equivalencia empírica sólo sea constatada en un dominio limitado de fenómenos. Lógicamente, esto podría argumentarse como crítica a nuestra *proposición 8*, defendiéndose que la equivalencia formal no implica la

[5] En efecto, el espacio métrico ($\mathbb{R}^3$, $d_{\text{euclídea}}$) de la astronomía kepleriana (es decir, el espacio tridimensional dotado con la distancia euclídea) no es ni siquiera isomorfo al espacio métrico ($\mathbb{R}^3 \times C(\mathbb{R}^3\text{-}\{0\})$, $d_{\text{euclídea}} \times d_\infty$) de la astronomía newtoniana (es decir, lo mismo de antes más un espacio abstracto que da cabida a las fuerzas newtonianas), pues éste contiene, como se ve, un sobreañadido consistente en un espacio funcional que estructura a las fuerzas, a la dinámica.

equivalencia empírica. Verbigracia, cuando Schrödinger demostró su «identidad matemática formal» entre las Mecánicas Ondulatoria y Matricial, éstas sólo verificaban ser empíricamente equivalentes en una región fenoménica acotada. Esto es, existían experimentos para los que la Mecánica Ondulatoria *hablaba*, mientras que la Mecánica Matricial aún *callaba* (como aducen Beller (1983, 485) y Wigner (1960, 7), ya que, frente al método matricial, el método ondulatorio era susceptible de ser extendido al estudio de sistemas cada vez menos idealizados). Una vía de solución a esta dificultad sería modificar nuestra *definición 7* de equivalencia empírica a fin de proteger nuestra *proposición 8*. El cambio a efectuar es el siguiente:

*Definición 7** Dos teorías científicas T_1 y T_2 son *equivalentes empíricamente* si y sólo si no pueden realizar afirmaciones empíricas diferentes.

Nótese que así sí inmunizamos nuestra intuición condensada en la *proposición 8*. Ahora bien, surge el problema de que, por ejemplo, si una teoría T_1 ha sido reducida satisfactoriamente a otra teoría T_2 más rica, pues serían, de acuerdo a la *definición 7**, empíricamente equivalentes, pese a que puede existir cierto fenómeno sobre el que T_2 *hable* y, sin embargo, T_1 *calle*, porque es más pobre (esto ocurre entre la Mecánica de Newton y la Teoría de la Relatividad de Einstein). La única vía de solución que imaginamos es hablar, más que de equivalencia empírica, de *complementariedad empírica* en la *definición 7**. Sin embargo, dentro de los límites de este trabajo de investigación, por simplificar, nos bastará con la *definición 7*, es decir, salvo que se indique lo contrario, prescindiremos de la *definición 7**.

Por último, debemos recalcar que en ningún instante nos hemos referido a noción semántica alguna, de otro modo, nos ha bastado con nociones meramente sintácticas; de hecho, la definición de equivalencia interteórica como isomorfismo entre modelos de una teoría no ha hecho presencia en nuestra disertación.

7. Cartografía de una teoría o de un modelo teórico de la Física

De cara a presentar críticamente las Mecánicas Matricial y Ondulatoria, precisamos analizar la estructura genérica de una teoría o de un modelo teórico de la Física. Usualmente, a la hora de estudiar los elementos que componen una determinada teoría física, suele recurrirse, o bien a un *criterio normativo*, o bien a un *criterio descriptivo*. Sirvan como ilustración, los proceders de Bueno (1992) o de Bunge (1967). El primero considera un criterio de raigambre lógica y, a partir de él, deduce los elementos estructurales de una teoría física. El segundo, a diferencia, emplea un criterio consistente en constatar los elementos estructurales que conforman de facto una teoría física. Hasta donde alcanzamos a comprender, una fructífera metodología puede ser la de cruzar el criterio *normativo* de Bueno (1992) con el criterio *descriptivo* de Bunge (1967), de esta manera, conjuraremos el peligro de caer en el escolasticismo o en el mero inventario; como añade Estany (1993, 60): «el binomio descripción/prescripción no tiene por qué verse como una disyunción exclusiva, lo cual no significa mantener una postura ecléctica ni hacer síntesis de los dos polos, sino ver la descripción y la prescripción como dos caras de una misma moneda».

En lo que afecta a las teorías o a los modelos teóricos –aceptamos la definición de Rivadulla (2004, 136): «un modelo teórico es una teoría restringida a un fenómeno o a un dominio muy específico de fenómenos»- de la Física, nos encontramos con tres clases de elementos participantes: los objetos O que se investigan, los sujetos S que investigan y los signos σ que son utilizados en tales actividades. Por consiguiente, la estructura general de una teoría (modelo teórico) queda vertebrada en torno a tres *ejes*: sintáctico (estudio de σ), semántico (estudio de *O*) y pragmático (estudio de *S*). Es curioso comprobar cómo podríamos, groseramente, representar los vaivenes de la filosofía de la ciencia en el siglo XX como los giros que la misma ha presentado desde, primero, el eje sintáctico (e. g. neopositivismo), segundo, el eje semántico (e. g. estructuralismo) y, tercero, el eje pragmático (e. g. epistemología postkuhniana); en consecuencia, la inclusión de este trío de ejes en nuestra «geografía» de la teoría física no parece gratuita. A su vez, cada eje consta de una terna de componentes que recogen las posibles relaciones que pueden establecerse entre la materia de estudio de ese eje (σ, *O* ó *S*) según se analice a través de objetos *O*, sujetos *S* o signos σ. En suma:

- Componentes del eje sintáctico:
  (σ; *O*) = términos; (σ; *S*) = operaciones; (σ; σ) = relaciones.

EJE SINTÁCTICO	EJEMPLOS
Términos	$E,\ n,\ v,\ h$
Operaciones	$n \cdot h \cdot v$
Relaciones	$E = nhv$

- Componentes del eje semántico:
  (*O*; *O*) = referenciales; (*O*; *S*) = fenómenos; (*O*; σ) = estructuras.

EJE SEMÁNTICO	EJEMPLOS
Referenciales	Átomos, electrones, fotones
Fenómenos	Espectros atómicos
Estructuras	Modelo atómico de Bohr

- Componentes del eje pragmático:
  (*S*; *O*) = normas; (*S*; *S*) = autologismos; (*S*; σ) = dialogismos.

EJE PRAGMÁTICO	EJEMPLOS
Normas	Principios teoréticos
Autologismos	Motivaciones heurísticas
Dialogismos	Congresos, debates, charlas

Y, antes de concluir este capítulo, nos gustaría hilar una serie de observaciones sobre la urdimbre gnoseológica propuesta. En primer lugar, siguiendo a van Fraassen (1996, 30), diremos que los *términos* son teóricos o no-teóricos (con respecto a una determinada teoría física), mientras que los *referenciales* son, por contra, observables o inobservables. En segundo lugar, por *fenómenos* entenderemos los datos extraídos de observaciones, medidas o experimentos, mientras que por *estructuras* entenderemos no sólo los modelos, sino también las hipótesis, leyes y principios –según su nivel de generalidad- que comprenden. Y, en tercer lugar, las *normas* incluyen, además, lo que Bunge (1967, 86) denomina como «zerological principles», es decir, los principios *filosóficos* de causalidad, localidad...

CAPÍTULO 3

DE LA EQUIVALENCIA MATEMÁTICA ENTRE LA MECÁNICA MATRICIAL Y LA MECÁNICA ONDULATORIA

> First I was in Göttingen, then in Oxford and Cambridge.
> Now I am suffering from indigestion caused by the endless
> Heisenberg-Born-Dirac-Schrödinger sausage-machine-physics-mill.
>
> Paul Ehrenfest, *Carta a Albert Einstein del 26 de agosto de 1926*

El propósito de este tercer capítulo es sostener la tesis de que la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria son *formalmente equivalentes* en virtud de su *equivalencia matemática*. Una vez hemos visto en el anterior capítulo que no son *lógicamente equivalentes*[6], tenemos que mostrar que sí son *matemáticamente equivalentes*, esto es, que sus estructuras matemáticas subyacentes son isomorfas e isométricas entre sí. Y esta cualidad justificará su *equivalencia empírica*, como esgrimieron Schrödinger –en su artículo al respecto (como vimos)- o von Neumann (1949, 12):

> La estructura conceptual adoptada y las normas prácticas se expresan de modo bastante diferente en la teoría de las matrices y en la ondulatoria. Sin embargo, ya desde un principio proporcionaron siempre los mismos resultados, incluso en aquellos puntos donde una y otra hacían patentes detalles que discrepaban de las primitivas concepciones de la teoría cuántica. Este notable hecho quedó explicado desde luego por la demostración que de su equivalencia matemática dio Schrödinger.

Históricamente, tanto los padres fundadores de la Mecánica Cuántica (véase, por ejemplo, Schrödinger (1982, xi y 46), Heisenberg (1962, 198), (1972, 90) y (1977, 3), o Einstein (1981, 282)) como prestigiosos físicos cuánticos (por ejemplo, Bohm (1989, 383) o Borowitz (1973, 287)), filósofos de la física (p. ej. van Fraassen (1991, 450) o Beller (1983, 470)) e historiadores de la ciencia (Jammer (1989, 271) o Mehra & Rechenberg (1982, 279)) han dado por supuesto que la equivalencia entre la Mecánica Matricial de Heisenberg y la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger quedó firmemente demostrada por el propio Schrödinger en su artículo «Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen» y, simultáneamente, por Eckart en «Operator Calculus and the Solution of the Equation of Quantum

[6] ¡Existen enunciados no intertraducibles! Pero, curiosamente, sigue opinándose lo contrario. En efecto, Jammer (1989, 271) se refiere a «la prueba de Schrödinger de intertraducibilidad de un formalismo en otro» o Cadenas Gómez (2002, 175 n. p. 3) habla de que «el lenguaje matricial de Heisenberg es equivalente al lenguaje ondulatorio de Schrödinger» (también Diéguez: 2005, 271).

Dynamics» (cf. Schrödinger (1926) y Eckart (1926)), unificándose ambos modelos matemáticos a partir de los trabajos de Dirac. Sin embargo, cuando se acude a tales artículos y se estudian detenidamente desde una perspectiva filosófico-matemática, se detectan numerosas imprecisiones que invalidan la prueba de equivalencia. A nuestro entender, hay que esperar hasta 1932 (¡¡seis años después!!), para encontrar la primera prueba consistente de equivalencia y la primera unificación rigurosa de la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria en una Mecánica Cuántica más universal y abstracta: nos referimos al tiempo en que von Neumann dio a conocer su monumental obra *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (cf. von Neumann (1949); por cierto, libro traducido al español antes que al inglés). De hecho, hasta la reciente obra de Sánchez Ron (2001, 466) comete esta imprecisión histórica que pretendemos aclarar. Y es que muy pocos han sido los que han logrado arrojar luz sobre el análisis físico, filosófico e histórico –tan confuso y oscuro hasta nuestros días (como ya ha quedado reflejado)- de esta equivalencia matemático-cuántica. Así, Jammer (1989, 273) y Bombal (1999, 133) perciben lagunas, pero no entran a especificarlas. Doncel (2002, 22) acierta al afirmar que Schrödinger sólo probó una equivalencia «parcial», pero adjudica la unificación a Dirac. Rioja (2004, 265), por su parte, reconoce la autoría de la unificación a von Neumann. Von Neumann (1949, 322 n. p. 35), a su vez, pone el peso de la prueba en Schrödinger, pero subraya con buen criterio que éste sólo se apoyó en una mitad del isomorfismo isométrico necesario para la equivalencia matemática. Y, últimamente, Muller (1997 y 1997b) es el que más páginas le ha dedicado: llegando a hablar –metafóricamente- del «Mito de la Equivalencia entre Mecánicas Cuánticas». Concordamos con Muller (1997, 35) en que la «verdadera» prueba de equivalencia porta la marca innegable del genial von Neumann, pero discrepamos en las razones y el enfoque que aduce. Pues Muller (1997, 36) mantiene que no sólo la prueba de Schrödinger contiene errores, sino que, contra todo pronóstico, las Mecánicas Matricial y Ondulatoria no eran, de hecho, empíricamente equivalentes; puesto que hubiera sido posible realizar un *experimentum crucis* consistente en lo siguiente: según la Mecánica Ondulatoria a la Schrödinger, resulta concebible cierta región espacial Δ en que

$$e\int_{\Delta} \psi^* \psi dq = \frac{e}{2}$$

esto es, en que la carga eléctrica a detectar sea exactamente la mitad de la carga del electrón. En consecuencia, como la Mecánica Matricial a la Heisenberg no contempla esto –porque, según Muller (1997b, 227), «no hay nada en la Mecánica de Matrices que sugiera que predice algo distinto a *e* para cada volumen espacial Δ»- pues dispondríamos de un experimento discriminatorio entre ambas. Hasta donde se nos alcanza, lo que en realidad acontecería es que dispondríamos de un experimento con respecto al cual la Mecánica Ondulatoria *hablaría* –suponiendo que dicha experiencia fuese también *materialmente* concebible en aquel tiempo[7]- mientras que la Mecánica Matricial *callaría*. Situación que, de acuerdo a lo esbozado en el capítulo previo, no amenazaría la *equivalencia empírica* entendida en el «buen» sentido de *complementariedad empírica*.

En el presente capítulo realizaremos una reconstrucción racional de la Mecánica Matricial de 1925 (a partir de ahora: MM) y de la Mecánica Ondulatoria de 1926 (a partir de ahora: MO) empleando la «cartografía» diseñada en el capítulo anterior. Tras

[7] A día de hoy parece claro que sí, puesto que la existencia de los *quarks* (cargas eléctricas con valor igual a una fracción de *e*) se sustenta precisamente en ello.

ello, estudiaremos las pruebas de equivalencia de Schrödinger (1926) y de Eckart (1926).[8] Después, nos acercaremos a esa «amalgama de matemática ondulatoria y matricial» (sic Cassidy (1997, 10)) que es la Teoría de las Transformaciones de Dirac, para, a continuación, fijarnos en ese diamante finamente pulido que es la equivalencia mecánico-cuántica que von Neumann descubrió pasado el tiempo, y que remite al previo teorema matemático alumbrado más de dos décadas antes por Riesz y Fisher. Y finalizaremos atendiendo a las reminiscencias dejadas por ambas mecánicas en los tratados posteriores de Mecánica Cuántica. A fin de aligerar el texto, se ofrece un *Apéndice* matemático en que se presentan los principales conceptos mecánico-cuánticos involucrados.

1. Andamiaje cuántico

El origen heroico de la teoría de los quanta se remonta al 14 de diciembre de 1900, cuando Planck presentó su ley de radiación del cuerpo «negro» ante la Physikalische Gesellschaft. Su hipótesis meramente formal de que la emisión y la absorción de energía sólo toman lugar en porciones discretas supuso la primera revolución científica de las tres que vislumbraría la Física del siglo XX (Teoría Cuántica, Teoría Relativista y Teoría del Caos). El *dramatis personae* de la «prehistoria» de la Mecánica Cuántica (1900-1925) incluye, amén de Planck, los nombres de Einstein o Bohr. Einstein (1917) refrenda la Ley de Planck y la naturaleza corpuscular de la luz desde consideraciones comprehensivas. Y Bohr (1918) aplica las ideas planckianas en la construcción de su modelo atómico de 1913 para intentar explicar con éxito el espectro del hidrógeno teniendo en cuenta las nuevas consecuencias de la cuantización para la estructura atómica que Sommerfeld estaba sacando a la luz. La Teoría Cuántica Antigua se apuntó éxitos importantes: el espectro del átomo de hidrógeno (Fórmula de Balmer), así como alguna idea de los espectros alcalinos, los efectos Zeeman y Stark, correcciones relativistas... Sin embargo, pese a estos hitos, entre 1900 y 1925 (tiempo en que da comienzo la «historia» de la Mecánica Cuántica con el establecimiento de los cimientos de su formalismo), la teoría de los cuantos fue un puente sobre aguas turbulentas, pues, como pone de relieve Jammer (1989, 208), consistía en un confuso batiburrillo de hipótesis, leyes, principios y recetas de cálculo. «Cada problema debía primero resolverse en términos de la física clásica para después traducir la solución clásica al lenguaje cuántico por medio de las misteriosas reglas de las condiciones de cuantización o cualquier otra "receta", entre las que destaca el llamado *principio de correspondencia* de Bohr» (Bombal: 1999, 122).

Las tres escuelas principales (Copenhague, con Bohr y, luego, Kramers; Munich, con Sommerfeld y sus jóvenes doctorandos Heisenberg y Pauli; Gotinga, con Born –que pronto se convertiría en supervisor del «doctor» Heisenberg, aunque Wien había querido suspenderlo en su tesis por su ignorancia de la física experimental- como figura clave, respaldada por la gran escuela matemática de Hilbert, heredera de Gauss, Riemann y Klein) se percataron enseguida de que la Teoría Cuántica Antigua era momentánea y provisional, por cuanto fracasaba en el átomo de helio y, sobre todo, en presentar una axiomática coherente independiente de las teorías clásicas. Esto dibujaba un panorama desalentador allá por 1924, como recogen Bohr, Kramers y Slater (1924):

[8] Hay una prueba que, simultáneamente, Pauli ideó en carta a Jordan con fecha del 12/4/26 (van der Waerden: 1997, 324). La de Schrödinger se publicó en *Annalen der Physik* el 4/5/26, pero se recibió el 18/3/26, ergo éste no tuvo conocimiento de la prueba similar de aquél (Sánchez Ron: 2001, 468).

> En el estado presente de la ciencia no parece posible obviar el carácter formal de la teoría cuántica, que se muestra en el hecho de que la interpretación de los fenómenos atómicos no envuelve una descripción del mecanismo de los procesos discontinuos que, en la teoría cuántica de los espectros, se designan como las transiciones entre los estados estacionarios del átomo. (van der Waerden: 1968, 159)

Lo que sigue es el estudio de la solución a estos problemas en su faceta *formal*. En principio, el aspecto *interpretativo* cae fuera del campo de atención de este capítulo, pero, empleando palabras de Bohr (1964, 84), «en nuestra disertación no consideraremos las matemáticas puras como rama separada del conocimiento, sino más bien como un refinamiento del lenguaje común, al que proporcionan los medios adecuados de enunciar relaciones para las cuales la expresión verbal ordinaria es imprecisa o embarazosa».

2. Estudio de la Mecánica Matricial

A continuación, presentamos el *epítome* que nos servirá como mapa conceptual para la exploración y reconstrucción filosóficas de la Mecánica de Matrices:

MECÁNICA MATRICIAL	
EJE SINTÁCTICO	
Términos	«amplitudes, frecuencias»
Operaciones	«matrices hamiltonianas»
Relaciones	«ecuaciones canónicas matriciales»
EJE SEMÁNTICO	
Referenciales	«intensidad y frecuencia de la radiación»
Fenómenos	«espectros atómicos»
Estructuras	«explicación del espectro del hidrógeno»
EJE PRAGMÁTICO	
Normas	«reglas de las cantidades cuánticas»
Autologismos	«heurística de la observabilidad»
Dialogismos	«colaboración Heisenberg-Born-Jordan»

2.1 Análisis de los *componentes* del eje sintáctico mecánico-matricial

Hagamos un poco de memoria: convenimos, en el anterior capítulo, que la *cartografía* de un modelo físico-matemático comprendía varias clases de elementos partícipes: los objetos O que se modelizan, los sujetos S que modelizan y los signos σ empleados en tal actividad modelizadora; donde la estructura general del modelo quedaba vertebrada en tres *ejes*: sintáctico (estudio de σ), semántico (estudio de O) y pragmático (estudio de S). Acordamos, a su vez, que cada eje se componía de una serie de elementos que recogían las posibles relaciones que pueden establecerse en la materia de estudio de ese eje (σ, O ó S) según se analice a través de objetos O, sujetos S o signos σ. En el caso que nos ocupa ahora, el *eje sintáctico* consta de *términos* (σ; *O*), *operaciones* (σ; *S*) y *relaciones* (σ; σ), que pasamos a reexponer restringiéndonos por simplicidad a un único grado de libertad (e. d. a una única dimensión).

2.1.1 *Términos: amplitudes y frecuencias*

Los términos de MM son sus elementos constitutivos desde un horizonte puramente formal y consisten en las *amplitudes* y *frecuencias* –introducidas, como más adelante se explicará, a partir de la «heurística de la observabilidad» de Heisenberg-, y que tienen que cumplir una serie de condiciones –motivadas, como también se verá, por las «reglas de las cantidades cuánticas» de Heisenberg- que expresamos por medio del siguiente

Axioma MM_1 Existe un par de conjuntos de números complejos $\{q_{mn}\}$ y $\{p_{mn}\}$ (*amplitudes* de *posición* y *momento*) y existe un conjunto de números reales $\{\nu_{mn}\}$ (*frecuencias*) tales que:

$$q_{mn} = q^*_{nm} \qquad (1)$$
$$p_{mn} = p^*_{nm} \qquad (2)$$
$$\nu_{mn} = -\nu_{nm} \qquad (3)$$
$$\nu_{mn} \neq 0 \quad \text{si} \quad m \neq n \qquad (4)$$
$$\nu_{rs} + \nu_{st} = \nu_{rt} \qquad (5)$$

y tal que las matrices (hermíticas[9]) $Q = (q_{mn} e^{2\pi i t \nu_{mn}})$ y $P = (p_{mn} e^{2\pi i t \nu_{mn}})$ verifican:

$$PQ\text{-}QP = \frac{h}{2\pi i} I \qquad (6)$$

donde *I* es la matriz identidad. ■

El programa matricial interpretó originariamente las «amplitudes»[10] como representantes de «magnitudes de radiación» (*Strahlungsgrössen*), antes que como «probabilidades de transición» (interpretación que sólo se abrió paso después de que, como indica Beller (1983, 481-4), las consideraciones estadísticas de Born aparecieron en escena). En efecto, Heisenberg (1925)[11] entendió las partes reales de tales amplitudes como proporcionales a la intensidad de radiación. Por otra parte, cada ν_{mn} fue interpretada como la frecuencia de la radiación absorbida (si $m < n$) o emitida (si $m > n$) en la transición atómica del estado estacionario *m* al estado estacionario *n*. A la luz de esta interpretación, las condiciones (1)-(3) se tornan muy coherentes. Además, en virtud de ellas, *P* y *Q* son hermíticas, matrices que presentan ciertas propiedades matemáticas especialmente agradables. La condición (4) fue asumida por Jordan en Born & Jordan (1925)[12] como recurso para la demostración de algunos teoremas; de hecho, se adoptó

[9] E. d. coinciden con sus matrices traspuestas conjugadas.
[10] Denominadas literalmente así por Heisenberg (1925).
[11] Cf. van der Waerden (1968, 264).
[12] Cf. van der Waerden (1968, 288).

considerando que ninguna transición atómica acontece con coste energético nulo. Y la condición (5) no es más que la ley fenoménica de combinación de frecuencias de Rydberg-Ritz. Finalmente, la archiconocida condición (6) fue propuesta por Born y Jordan para condensar todas las condiciones cuánticas que manejó inicialmente Heisenberg. Heisenberg (1962, 197) rememora su trabajo:

> Las condiciones cuánticas de Bohr-Sommerfeld cabía interpretarlas como una relación entre las matrices de la teoría de los cuantos y, junto con las ecuaciones del movimiento, bastaban para fijar todas las matrices y, por tanto, las propiedades del átomo observables experimentalmente. [...] Born y Jordan observaron ante todo que las condiciones cuánticas podían escribirse como relaciones de conmutación entre las matrices que representan los impulsos y las coordenadas de los electrones.

De hecho, los dos primeros la llamaron la *condición cuántica exacta*, y Born, Heisenberg & Jordan (1926)[13] afirmaron: «la ecuación (6) es la única de las fórmulas básicas de la Mecánica Cuántica aquí propuesta que contiene la constante de Planck *h*».

2.1.2 *Operaciones: matrices hamiltonianas*

Las operaciones de MM son, exactamente, las realizables con las matrices P y Q; por consiguiente, su contrapartida sintáctica son las funciones de P y Q:

Axioma MM_2 A cada magnitud m le corresponde una matriz (hermítica) M función de P y Q, es decir, $M=F(P,Q)$. En particular, a la magnitud *energía* le corresponde la matriz (hermítica) que viene dada por la *función hamiltoniana*, i. e. $H=H(P,Q)$, donde el espectro matemático $\sigma(H)$ representa los valores admisibles de energía. ■

De igual manera que a la magnitud clásica de posición q se le asocia, de acuerdo al *axioma* MM_1, la matriz de posición Q, «análogamente, a cada magnitud de la mecánica clásica –por ejemplo, al impulso o a la energía de los electrones-, puede asignarse la correspondiente matriz en la mecánica cuántica» (Heisenberg: 1962, 196). Por cierto, obsérvese que la hermiticidad de la matriz hamiltoniana H garantiza que cada autovalor (*Eigenwert*) sea un número real, esto es, que el espectro $\sigma(H)$ sea un subconjunto de números reales y, por tanto, posea sentido interpretarlo como valor observable de energía. A resultas de esta maravillosa coincidencia, el *espectro* matemático de Hilbert (un nombre que él eligió casi por casualidad) acabaría siendo central para explicar los *espectros* físicos de los átomos (Dieudonné: 1982, 171).

2.1.3 *Relaciones: ecuaciones canónicas matriciales*

En MM hallamos la siguiente relación esencial:

Axioma MM_3 Las *ecuaciones canónicas del movimiento* vienen expresadas por estas ecuaciones mecánico-matriciales:

[13] Cf. van der Waerden (1968, 327).

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial P} \\[2ex] \dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

donde el primer término de las ecuaciones ha de entenderse en el sentido de una derivada con respecto al tiempo y el segundo término como una peculiar diferenciación simbólica de matrices. ■

Evidentemente, como advierten Born & Jordan (1925)[14], estas ecuaciones cuánticas son completamente análogas a las ecuaciones clásicas del movimiento. Por último, estamos en condiciones de describir en qué consiste un *problema mecánico-matricial*, porque, como escriben Born, Jordan & Heisenberg (1926), es posible «mediante la introducción de las "transformaciones canónicas" reducir el problema de integrar las ecuaciones del movimiento a una formulación matemática conocida» (van der Waerden: 1968, 321). Se sabe que, si se dispone de matrices Q y P cumpliendo el trío de axiomas enunciados, entonces H ($=H(P,Q)$, depende de las ya conocidas) es una matriz diagonal tal que los elementos diagonales ($\sigma(H)$) designan los valores energéticos. Recíprocamente, y simplificando, si se dispone de una matriz de energía H ($=H(P,Q)$, por *axioma* MM_2), entonces, para conocer las matrices incógnitas Q y P, debe: (i) determinarse dos matrices Q_0 y P_0 que satisfagan la relación de conmutación (6) y el *axioma* MM_3; y (ii) hallarse una «transformación canónica»[15] S tal que, cuando hagamos $Q= S^{-1}Q_0S$ y $P=S^{-1}P_0S$, la matriz $H=H(P,Q)$ se convierta en una matriz diagonal. En cuyo caso, habremos logrado *resolver* el problema mecánico-matricial, puesto que Q y P (y H) cumplirán el trío de axiomas antedichos; en especial, Q y P verificarán lo relativo a su forma explícita que presupone el *axioma* MM_1 (y H, por su parte, proporcionará los valores energéticos).

Desgraciadamente, las matrices que aparecen en MM son infinitas[16], y la resolución de este *problema de diagonalización* no es tan sencilla como en el caso finito (para matrices hermíticas finitas siempre se puede hallar una transformación canónica diagonalizadora, en otras palabras, una transformación ortogonal a ejes principales). Aparece el *fenómeno del espectro continuo* (esto es, aparte del espectro puntual o discreto de las matrices finitas, aparecen ciertos conjuntos continuos de números reales). Además, para rizar el rizo, las matrices hermíticas infinitas de MM son, habitualmente, no acotadas. Los *Tres Hombres*[17] supusieron que resultados análogos a los que Hilbert y Hellinger demostraron para formas cuadráticas acotadas serían válidos para las formas cuadráticas no necesariamente acotadas de MM (como señalaron en nota a pie de página

[14] Cf. van der Waerden (1968, 279).

[15] Dadas P y Q que satisfacen la relación de conmutación (6), se dice que una matriz S es una *transformación canónica* si y sólo si las matrices $S^{-1}PS$ y $S^{-1}QS$ también satisfacen la relación (6).

[16] Porque los subíndices m y n se supone que varían sobre todos los números naturales.

[17] Resulta curioso constatar que para van der Waerden (1968, 51) el experto en Álgebra Matricial era Born, mientras que para Jammer (1989, 217) era Jordan. Al menos, ambos coinciden en que no era Heisenberg, pues según su propio testimonio: «Ahora los ilustrados matemáticos de Göttingen hablan mucho de matrices hermitianas, pero yo ni siquiera sé lo que es una matriz» (cita en Bombal (1999, 125)).

de su artículo[18]). Sería von Neumann -¡cómo no!- el que acabaría probando varios años más tarde que esta suposición era totalmente correcta.

Figura 1.Werner Heisenbeg y Niels Bohr

2.2 Análisis de los *componentes* del eje semántico mecánico-matricial

2.2.1 *Referenciales: intensidad y frecuencia de la radiación*

Suele leerse que la concepción básica de MM es corpuscular, así Jammer (1989, 270) o Rioja (1995, 120): «como telón de fondo [de MM] está la completa aceptación de la discontinuidad introducida por el cuanto de Planck, la consideración del concepto de partícula como concepto fundamental y el requisito de observabilidad de todas las magnitudes». Sin embargo, nosotros disentimos de este extendido enjuiciamiento. Concordamos, pues, con Beller (1983, 470) en que «la Mecánica Matricial no fue una teoría de corpúsculos antes de la interpretación probabilista de Born: en la aproximación matricial un átomo estaba ligado a un significado electromagnético, no cinemático». Entre otras razones, porque, precisamente, el requisito de observabilidad imposibilitaba un enfoque corpuscular en el corazón de MM. En la versión originaria de MM, espacio y tiempo carecen de sentido, dado que se prescinde de inobservables cinemáticos como la posición o la velocidad del electrón y, además, como Kornel Lanczos demostró, nada cambia en MM si omitimos la variable *t* en su formulario (Beller: 1983, 473). Sinsentido que inhabilita el concepto de corpúsculo (pues éste presupone una localización espacio-temporal). En consecuencia, los referenciales de MM no serán átomos ni electrones, sino las intensidades y las frecuencias de las diversas radiaciones consideradas –que se enlazan con los términos de MM mediante el *axioma* MM_1-. Muller (1997b, 222) despeja dudas:

> La inferencia ("a la mejor explicación") de que las partículas existen realmente fue resistida por Heisenberg y Pauli, quienes dudaban en particular de la "realidad de las partículas". Por

[18] Cf. van der Waerden (1968, 351 n. p. 1).

> otro lado, Born mantuvo la existencia de las partículas como indubitable a la luz de los experimentos con colisiones atómicas realizados por su amigo James Franck en Gotinga; Jordan tomó partido por Born.

A pesar de estas discrepancias sobre la ulterior existencia de los corpúsculos atómicos, siempre hubo consenso en que los referenciales originales de MM presentaban naturaleza observable (frecuencias, intensidades y polarizaciones de radiaciones electromagnéticas).

2.2.2 *Fenómenos: espectros atómicos*

Los fenómenos que tenían que salvar los fundadores de MM eran, como hemos ido insinuando aquí y allá, las tablas de datos –generalmente, intensidades y frecuencias- recogidas en la investigación de los espectros atómicos, de las cuales, por ejemplo, se había inducido la ley fenoménica de combinación de frecuencias de Rydberg-Ritz y la fórmula de Balmer.

2.2.3 *Estructuras: explicación del espectro del átomo de hidrógeno*

Los *Tres Hombres* fueron capaces de probar la Condición de Frecuencia de Bohr ($h\nu_{mn} = H_{mm} - H_{nn}$) y las Leyes de Conservación de la Energía ($\dot{H} = 0$) y del Momento (lineal y angular); aparte de aplicar MM en la modelización idealizada de osciladores (armónicos y no armónicos). Además, MM permitía calcular la intensidad de las líneas espectrales –algo que MO, en principio, no logró (Schrödinger: 1982, 30)- y, felizmente, Pauli (1926) consiguió, en un *tour de force* fantástico, enviado a publicar en enero del 26, deducir el espectro del hidrógeno –aunque, en honor a la verdad, apoyándose en ciertos supuestos y métodos ondulatorios: haciendo uso operacional del operador de Runge-Lenz (Beller: 1983, 485)-.

2.3 Análisis de los *componentes* del eje pragmático mecánico-matricial

2.3.1 *Normas: reglas de las cantidades cuánticas*

Las «reglas de las cantidades cuánticas» son las normas de manipulación de las magnitudes cuánticas heredadas de la teoría cuántica antigua. Podemos distinguir tres etapas en su desarrollo. La primera de ellas remite al fructífero precedente que supuso el Principio de Correspondencia de Bohr; en palabras de Heisenberg (1962, 193):

> La física clásica se presentaba como el caso límite intuitivo de una microfísica fundamentalmente no intuitiva, caso que se verifica con tanta mayor precisión cuanto mayor es la medida en que la constante de Planck desaparece frente a las magnitudes de acción del sistema. De esta concepción de la mecánica clásica como caso límite de la mecánica cuántica se originó también el Principio de Correspondencia de Bohr, que transportó a ésta, al menos cualitativamente, una serie de conclusiones de la mecánica clásica.

Es decir, se requería que la nueva teoría convergiese a la teoría clásica, cuando $h \to 0$.[19] En una segunda etapa, Born (1924) consiguió dar otra vuelta de tuerca a su expresión: bajo los auspicios de Bohr y Heisenberg (como reconoce en nota a pie de página de su artículo[20]), modificó las ecuaciones cuánticas «en el sentido de una transición de las ecuaciones diferenciales a las ecuaciones en diferencias». Sirviéndose del Principio de Correspondencia, Born (1924) discretizó o truncó las ecuaciones. Y en una tercera etapa, Heisenberg (1925) sentó, por fin, las bases de una nueva mecánica (MM). Del mismo modo que, como aduce Rioja (1995, 119), «en la expresión de Fourier del movimiento clásico, especificar la frecuencia, amplitud e intensidad de las ondas luminosas emitidas por el átomo era equivalente a especificar la trayectoria del electrón», Heisenberg concibió que:

> Análogamente, en la mecánica cuántica, el conjunto de todas las amplitudes y fases de la radiación emitida por un átomo puede considerarse también una descripción completa del sistema del átomo, aunque no sea posible interpretarlo en el sentido de una trayectoria electrónica que provoca la radiación. Por tanto, en la mecánica cuántica, en vez de las coordenadas de los electrones aparece un conjunto de magnitudes que corresponden a los coeficientes de Fourier del movimiento clásico en una trayectoria. [...] Tal conjunto de coeficientes puede compararse a una matriz del álgebra lineal. (Heisenberg: 1962, 196)

Es decir, recogiendo el testigo de Born, aplicó su técnica de discretización o truncamiento al Análisis de Fourier inserto en la Física Clásica (Cropper: 1970, 79). Heisenberg sustituyó cada variable clásica por sus coeficientes de Fourier, que hacen referencia a dos niveles atómicos y darían cuenta de la amplitud de la transición entre esos dos estados atómicos; en otras palabras, cada variable clásica promocionaba a *tableros* (tablas, matrices) dependientes de dos niveles atómicos. Como resultado, obtuvo qué magnitud cuántica (Q ó P) había que sustituir por cada magnitud clásica (q ó p). Descubrió qué operación de magnitud cuántica (Q^2 ó P^2) había que poner en lugar de cada operación de magnitud clásica (q^2 ó p^2). De otro modo, la respuesta a la pregunta: «Si en lugar de una magnitud clásica $x(t)$ tenemos una magnitud cuántica, ¿qué magnitud cuántica aparecerá en lugar de $x(t)^2$?» (Heisenberg (1925), en van der Waerden (1968, 263)). En especial, comprobó que las cantidades cuánticas generalmente no conmutaban, a diferencia de las clásicas (i. e. $QP \neq PQ$ pero $qp=pq$). El espíritu de Heisenberg (1925) fue modificar la cinemática salvando la dinámica: «Heisenberg demostró que las ideas cinemáticas ordinarias pueden ser sustituidas de manera consistente por una aplicación formal de las leyes clásicas del movimiento y en la cual el cuanto de acción interviene sólo en ciertas reglas de cálculo relativas a los símbolos que reemplazan a las magnitudes mecánicas» (Bohr: 1988, 149).

2.3.2 *Autologismos: heurística de la observabilidad*

La «heurística de la observabilidad» es la filosofía que, personalmente, Heisenberg implementó en su artículo originario. Hasta 1925, las reglas formales empleadas para calcular, digamos, la energía del átomo de hidrógeno, implicaban relaciones entre magnitudes no observables (la posición y el periodo de revolución del electrón). En 1925, Heisenberg pretendió establecer una mecánica que únicamente

[19] Cf. Haro Cases (1996) para la demostración de que la física clásica constituye un caso límite de la nueva con el rigor propio de los matemáticos. Y cf. Rivadulla (2004, cap. IV) para una demostración más acorde con el hacer de los físicos.

[20] Cf. van der Waerden (1968, 182 n. p. 3): Bohr –de inclinación más filosófica- clarificó ideas y Heisenberg –de tendencia más científica- repasó cálculos.

ensortijara relaciones entre magnitudes observables. Así lo rememora Heisenberg (1972, 80) recordando una conversación con Einstein sobre el tema:

> Las órbitas de los electrones en el átomo no se pueden observar –repliqué-; pero, a partir de la radiación emitida por el átomo en un proceso de descarga, cabe deducir inmediatamente las frecuencias de oscilación y las correspondientes amplitudes de los electrones en el átomo. El conocimiento de la totalidad de los números de oscilación y de las amplitudes es también en la física anterior algo así como un sustitutivo para el conocimiento de las órbitas electrónicas. Y como es razonable admitir en una teoría sólo las magnitudes que pueden ser observadas, me pareció natural introducir sólo estos conjuntos como representantes de las órbitas electrónicas. (Heisenberg: 1972, 80)

Influido por los trabajos de Einstein, Heisenberg adoptó una actitud positivista, muy en la filosofía del *Wienerkreiss*. Hay que añadir que tenía buenas razones para hacerlo: las órbitas electrónicas de Bohr no eran observables por el efecto Compton, establecido en 1922. Cualquier intento de *ver* las órbitas necesita iluminar el átomo con luz de rayos X, y esto inmediatamente lo ioniza y destruye (aquí estaba, en ciernes, el principio de incertidumbre).

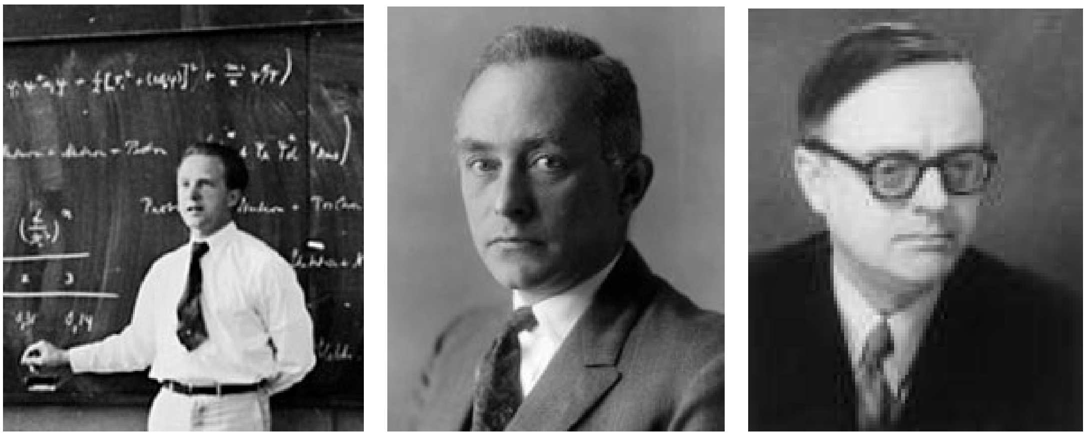


Figura 2. Los «Tres Hombres». De izquierda a derecha: Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan

2.3.3 *Dialogismos: colaboración Heisenberg-Born-Jordan*

Al comienzo, MM no fue conocida por tal nombre, sino como «Mecánica Cuántica de Heisenberg», algo que disgustó, como comentan Mehra y Rechenberg (1982, 279), a Born y Jordan, pues fueron ellos los que propusieron el esquema matricial: «Heisenberg ni siquiera sabía lo que era una matriz» (carta de Born a Einstein del 31 de Marzo de 1948). Pero buceemos un poco más profundo en la historia de la colaboración Born-Jordan-Heisenberg que marcó el nacimiento de MM. El propio Born describe la sensibilidad que imperaba durante los años anteriores como sigue: «nos fuimos convenciendo de que era necesario un cambio radical en los fundamentos de la física, es decir, una nueva clase de mecánica para la que usábamos el término *mecánica cuántica*» (van der Waerden: 1968, 20). Pero fue Heisenberg (1925) quien, en un trabajo que acaba y envía a Born en julio del 25, deshizo el entuerto provocado por el extraño comportamiento de las cantidades cuánticas, al encontrar las leyes simbólicas que lo regían. Sin embargo fueron Born y Jordan (1925) quienes, en un trabajo escrito mientras Heisenberg se tomaba unas vacaciones por las montañas bávaras en el verano del 25, descubrieron la correspondencia existente con la teoría de matrices: «la ley de multiplicación de las cantidades cuánticas de Heisenberg no es sino la bien conocida regla de multiplicación de matrices» (van der Waerden: 1968, 278). Con más exactitud, Born reconoció que los conjuntos de números heisenbergianos *{q}* y *{p}* se comportaban como matrices Q y P (porque, como apunta Jammer (1989, 215), las había estudiado, excepcionalmente, con Rosannes en Breslau). Y Jordan impulsó la axiomatización matricial de la *Quantenmechanik* (porque, como añade Jammer (1989, 217), había asistido a Courant en el estudio hilbertiano de los métodos de la física matemática). La casualidad del fortuito encuentro Born-Jordan en la estación de ferrocarriles de Hanover dio alas al programa matricial. Sin embargo, el exhaustivo trabajo Heisenberg-Born-Jordan, que tuvo lugar en otoño del 25 con Heisenberg vuelto de sus montañas, aunque fue publicado al año siguiente, sufrió una fría acogida a causa de, por decirlo con Mackey (1963, 99), su «mística pero inspirada» heurística: «Gotinga está dividido en dos grupos –argüía Heisenberg ante Pauli en carta del 16 de noviembre del 25-, aquellos que, como Hilbert (o también Weyl, en una carta a Jordan), hablan del gran éxito alcanzado mediante la introducción del cálculo de matrices en física; y aquellos otros que, como Franck, dicen que nunca serán capaces de entender las matrices» (Mehra & Rechenberg: 1982, 231). En efecto, al principio, hasta Pauli reaccionó denegando el ofrecimiento borniano de colaboración en el desarrollo del «tedioso» y «fútil» formalismo mecánico-matricial (sic Pauli en van der Waerden (1968, 37)). Cuando los Tres Hombres intentaron atraérselo por primera vez, Pauli rechazó la invitación con destemplanza: no quería que Max Born estropeara las estupendas ideas de Heisenberg con el espíritu matematicoide de Gotinga.

3. Estudio de la Mecánica Ondulatoria

A continuación, presentamos el *epítome* que nos servirá como mapa conceptual para la exploración y reconstrucción filosóficas de la Mecánica de Ondas:

MECÁNICA ONDULATORIA	
EJE SINTÁCTICO	
Términos	«funciones de onda»
Operaciones	«operadores hamiltonianos»
Relaciones	«ecuación de ondas de Schrödinger»
EJE SEMÁNTICO	
Referenciales	«distribución electromagnética»
Fenómenos	«espectros atómicos»
Estructuras	«explicación de la energía del hidrógeno»
EJE PRAGMÁTICO	
Normas	«principios ondulatorios»
Autologismos	«heurística de la intuitividad»
Dialogismos	«labor investigadora de Schrödinger»

3.1 Análisis de los *componentes* del eje sintáctico mecánico-ondulatorio

Del mismo modo que actuamos con MM, nos restringiremos por simplicidad a un único grado de libertad, es decir, aunque lo usual sea k = 3, tomaremos k = 1 por defecto (k significa dimensiones).

3.1.1 *Términos: funciones de onda*

Los términos de MO son, al igual que en MM, sus elementos constitutivos desde un horizonte puramente formal: nos encontramos con las *funciones de onda* y las condiciones que han de satisfacer –introducidas a partir de los «principios ondulatorios» que manejó Schrödinger-:

Axioma MO₁ Existe una función $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, $x \to \psi(x)$ (función compleja definida sobre números reales, porque k = 1) tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \qquad (\#). \qquad \blacksquare$$

A causa de (#), las funciones ψ pertenecen al espacio funcional $L^2(\mathbb{R})$, porque:

$$L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible Lebesgue y } \|f\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx)^{1/2} < \infty \}$$

por consiguiente, la estructura matemática subyacente a MO es el *espacio métrico* inducido por el *espacio normado* ($L^2(\mathbb{R})$, $\|.\|_2$), que consta de todas las funciones de cuadrado integrable dotadas de una distancia (Kronz: 2004). Originariamente, Schrödinger (1926) y (1928) impuso condiciones más estrictas sobre el ente matemático ψ. Por ejemplo, la petición de recorrido real o de continuidad. Sin embargo, como precisa Jammer (1989, 267-9), la mayoría de estas restricciones poco a poco fueron abandonándose. Bastaba con que la función de onda fuera compleja de cuadrado integrable, e. d. que la integral de su cuadrado sobre todo el espacio fuera finita. La función de onda ψ es el sustituto cuántico de la descripción clásica del sistema físico.

3.1.2 *Operaciones: operadores hamiltonianos*

Las operaciones quedan reflejadas, de modo muy natural, en los operadores. Es cierto que, inicialmente, Schrödinger (1926) no contó con ellos, pero desde Schrödinger (1926b) pasaron a formar parte del acervo de MO:

Axioma MO₂ A cada magnitud m le corresponde un operador (hermítico) $\widetilde{M}$ función de los operadores canónicos (hermíticos) $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{P}$, correspondiendo éstos a *posición* y *momento*, y valiendo:

$$\widetilde{Q}(\psi(x)) = x\psi(x) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{P}(\psi(x)) = -i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.$$

En particular, a la magnitud *energía* le corresponde el operador hamiltoniano (hermítico) que viene dado por la *función hamiltoniana*, i. e. $\widetilde{H}(\psi(x)) = H(\widetilde{P},\widetilde{Q})(\psi(x))$, donde el espectro matemático $\sigma(\widetilde{H})$ representa los valores admisibles de energía. ■

Sirva como ilustración que, si en el caso clásico $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ (el potencial V y la masa m dependen de cada caso concreto), obtendríamos $\widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$.

3.1.3 *Relaciones: ecuación de ondas de Schrödinger*

La relación fundamental viene proporcionada por la *ecuación de ondas de Schrödinger* (por simplicidad, como inicialmente hizo Schrödinger[21], sólo hablamos de la versión *independiente del tiempo*, esto es, para nosotros, $\psi(x) \equiv \Psi(x,t)$):

Axioma MO_3 La ecuación fundamental mecánico-ondulatoria es la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\psi(x) = 0$$

o, equivalentemente, empleando el par de axiomas antedichos, la ecuación de autovalores del operador hamiltoniano:

$$\widetilde{H}\psi = E\psi$$

(donde $\hbar = h/2\pi$ y E es una constante de energía). ■

Por extraño que parezca, como reseña Bohm (1989, 79), «prácticamente toda la teoría cuántica está contenida en la ecuación de ondas, *una vez que sabemos cómo interpretar la función de ondas* ψ». La hazaña intelectual que plasmó Schródinger en el primero de sus cuatro memorables artículos acerca de MO consiste en que «las condiciones cuánticas son reemplazadas por un problema variacional» (Schrödinger: 1982, 2), cuya resolución acaba por darnos «una *ecuación de ondas* en un espacio de configuración que reemplaza las ecuaciones fundamentales de la mecánica» (Schrödinger: 1982, ix).

Estamos en condiciones de formular en qué consiste un *problema mecánico-ondulatorio*. Al resolver la ecuación diferencial de Schrödinger hallamos tanto los valores solución (es decir, $\sigma(\widetilde{H})=\{E_n\}$, que recopila los valores observables[22] de energía) como las funciones solución (es decir, $\{\varphi_n\}$, que son las autofunciones

[21] Nuestra ecuación de Schrödinger sólo referirá a los llamados estados estacionarios, es decir, con energía E bien definida, al ser independiente del tiempo; tras obtener ésta, Schrödinger llegó a otra dependiente del tiempo, más general, que sí describe todos los estados atómicos posibles sin necesidad de que sean estacionarios (véase *Apéndice*).

[22] Añadamos, de nuevo, que la omnipresente condición de hermiticidad garantiza que los valores espectrales sean números reales y que tenga sentido interpretarlos como valores observables físicamente.

asociadas a tales autovalores). Conocidos los datos $\widetilde{H}$ y E (que verifican los *axiomas* MO_2 y MO_3), se trata de resolver la ecuación de ondas y determinar una solución ψ al problema físico considerado (que verifique el *axioma* MO_1) de la forma:

$$\text{(I)} \qquad \psi = \sum_n c_n \varphi_n \ .$$

Desafortunadamente, diversas dificultades nos salen al paso. Primera: otra vez nos tropezamos con el *fenómeno del espectro continuo*, esto es, $\sigma(\widetilde{H})$ deja de ser un conjunto discreto (a lo sumo infinito numerable) para convertirse en un conjunto continuo, en cuyo caso:

$$\text{(II)} \qquad \psi = \int_n c(n)\varphi_n dn \ .$$

Y segunda: cabe la posibilidad de que las autofunciones $\{\varphi_n\}$ de $\widetilde{H}$ no constituyan un sistema ortogonal *completo* –por hermiticidad, la ortogonalidad siempre se da-. Con otras palabras, puede darse el caso de que nuestra función de onda solución no pueda expresarse como desarrollo (I) ni (II). Podría pensarse alocadamente que esta patología no precipita más que en una mera cuestión matemática, pero como nota Bohm (1989, 223): «si no fuera posible expandir una ψ arbitraria como una serie de φ_n, una parte integral de nuestro método de interpretación de la función de onda sería insostenible». De hecho, Schrödinger (1926) ya contempló esta deficiencia (Schrödinger: 1982, 7).

3.2 Análisis de los *componentes* del eje semántico mecánico-ondulatorio

3.2.1 *Referenciales: distribución electromagnética*

En aquel entonces, como ahora, gran parte del misterio de la teoría cuántica radicaba en la pregunta: ¿qué referencial asociar a la función de onda ψ? Según Schrödinger (1982, x), la MO de 1926 interpretaba ψ como cierta distribución de carga eléctrica o electromagnética difuminada por el espacio cotidiano, que podría conectarse con algún proceso *vibracional* en el interior del átomo (Schrödinger: 1982, 9). Esta interpretación de naturaleza ondulatoria fue apuntalada con la asunción, muy natural, de que las *autofunciones de onda* representaban los *estados atómicos estacionarios*.

3.2.2 *Fenómenos: espectros atómicos*

Al igual que en MM, los fenómenos que había de salvar MO eran las tablas de datos procedentes del estudio detallado de los espectros atómicos.

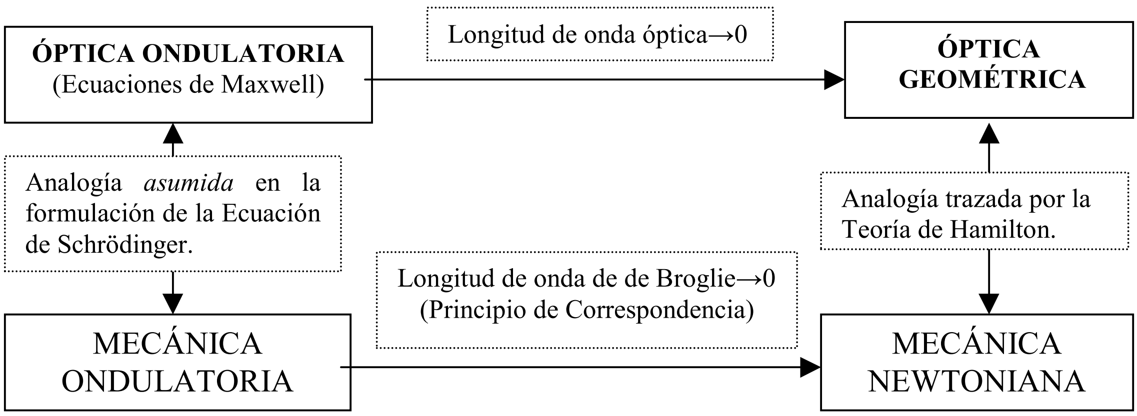
3.2.3 *Estructuras: explicación de la energía del átomo de hidrógeno*

Considerando el átomo como un sistema de vibraciones (Jammer: 1989, 261), Schrödinger demostró la Condición de Frecuencia de Bohr ($h\nu_{mn} = E_m - E_n$)[23] y, además, procedió a modelizar osciladores armónicos y no-armónicos. Sin olvidar que logró deducir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, pues «los autovalores $\{E_n\}$ son, de acuerdo con nuestra tesis, los niveles cuánticos de la energía» (Schrödinger: 1982, 12). Cuestión que a MM, encarnada en Pauli, costó. Al tiempo, MO se equipararía con MM al explicar también las intensidades espectrales (Schrödinger: 1982, 30).

3.3 Análisis de los *componentes* del eje pragmático mecánico-ondulatorio

3.3.1 *Normas: principios ondulatorios*

La búsqueda de unificación en el tratamiento de los fenómenos ópticos y mecánicos posee como fértiles precedentes a los *principios del mínimo* de Fermat y de Hamilton, que no son sino las dos caras de la misma moneda. De Broglie y Einstein dieron otra vuelta tuerca al concebir, respectivamente, que la materia (corpúsculos) y la radiación (ondas) presentaban aspectos duales. Todos estos trabajos pioneros influyeron notablemente en Schrödinger (1926), como el propio Schrödinger (1982, 9) reconoce sin ambages. De hecho, como señalan Powell & Crasemann (1961, 89), se guardan las siguientes analogías entre ópticas y mecánicas, incluyendo MO:



Es más, Schrödinger (1928) condensó estos «principios ondulatorios» que le guiaron en la exposición de MO en este diagrama de proporciones simbólicas:

«Mecánica Clásica : Mecánica Ondulatoria = Óptica Geométrica : Óptica Ondulatoria»
(Schrödinger: 1982, 162)

Desde el punto de vista del modelo teórico, las revolucionarias ideas de Schrödinger precipitaron en una exposición matemática de corte clásico. Arana (2002, 80) lo explica de modo muy gráfico:

> Con treinta y ocho años, no tenía mucho que ver con los imberbes que pululaban por Gotinga y Copenhague: sabía más física que ellos, pero se desenvolvía peor con los nuevos aparatos y las poco convencionales técnicas de cálculo que aquéllos manejaban –o inventaban- con tanta soltura. Como matemático era de lo más tradicional: dominaba las ecuaciones diferenciales –

[23] Muller (1997, 47) comete el error de mencionarla como postulado de MO, pero sería redundante.

instrumento favorito de la física de *siempre*-, mientras que flojeaba en álgebra y teoría de grupos, los nuevos arsenales lógicos de la física. En consecuencia, su presentación de la teoría no tenía nada que ver con el álgebra matricial que Heisenberg se había sacado de la manga, sino con el pulcro y sosegado lenguaje de las ecuaciones en derivadas parciales, en perfecta simbiosis con los procesos pulidos y continuos que tanto tranquilizaban a los prohombres de la vieja escuela.

3.3.2 *Autologismos: heurística de la intuitividad*

Frente a la «heurística de la observabilidad» de Heisenberg, la «heurística de la intuitividad» de Schrödinger. Mientras que MM aceptaba ineludiblemente la discontinuidad cuántica[24], MO pretendía soslayarla regresando a los transitados caminos de la física de la continuidad so pretexto o demanda de «Anschaulichkeit», que en la heurística de Schrödinger significaba comprensión «pictórica» o «visualizable», representable, pero jamás, como a partir 1927 con Heisenberg, contenido estrictamente «físico» o «experimental» (Rioja: 1995, 140 n. p. 47). Empleando palabras de este último:

> Schrödinger pensaba que con esta conversión de las partículas en ondas materiales podía eliminar las paradojas que habían dificultado tan desesperadamente y durante largo tiempo la comprensión de la teoría cuántica. Las ondas de materia debían ser, por tanto, procesos intuitivos en el espacio y el tiempo, en un sentido parecido al que solíamos emplear al hablar, por ejemplo, de las ondas electromagnéticas o las ondas del sonido. (Heisenberg: 1972, 91)

Por desgracia, como Bohr le hizo notar a Schrödinger, los electrones no parecían comportarse como paquetes de ondas; porque, como aduce Rioja (2002, 137), «toda partícula supone una concentración de carga eléctrica en una pequeña zona del espacio, mientras que los paquetes de onda se dispersan rápidamente, a lo largo de una amplia región, especialmente en procesos de colisión y de difracción».

Figura 3. Erwin Schrödinger

[24] Conviene no olvidar que Born & Jordan (1925) afirmaban: «la nueva mecánica se presenta a sí misma como una teoría esencialmente discontinua» (van der Waerden: 1968, 300).

3.3.3 *Dialogismos: labor investigadora de Schrödinger*

Hacia fines del año 25, los pilares de MM ya estaban puestos. En la Navidad del 25/26, mientras disfrutaba con su última amante en una cabaña en los Alpes de un «periodo tardío erótico» (sic Hermann Weyl, su colega en Zürich), Schrödinger alumbró su ecuación de ondas. Con los primeros meses de 1926, los cuatro[25] artículos que constituyen el núcleo de MO verían la luz y abrirían nuevas líneas de investigación: en primavera, Schrödinger atisba la equivalencia entre MO y MM; en verano, Born da el giro de timón en la interpretación de ψ; en otoño, Dirac plantea la Teoría de las Transformaciones... La labor investigadora de Schrödinger tuvo una acogida excepcional. Desde luego, resolver una ecuación diferencial (*problema de MO*), algo que los físicos habían realizado durante siglos, parecía a priori mucho más fácil que diagonalizar una matriz infinita (*problema de MM*). Sin duda, como escribe Beller (1983, 470), «es un mito histórico que la aceptación de su teoría se limitara al sector más conservador de la comunidad física». De hecho, Sommerfeld pasó, en menos de un mes, de sostener que el método de Schrödinger no tenía ningún sentido a mantener que había venido en socorro de los físicos (Mehra & Rechenberg: 1982, 278).

4. Las «pruebas» de equivalencia de 1926

El panorama que se les presentaba a los físicos cuánticos a comienzos de la primavera de 1926 difícilmente podía resultar más chocante: disponían de dos modelos matemáticos muy distintos que, curiosamente, realizaban idénticas predicciones físicas. (Esta perplejidad que debían sentir y que se prolongaría en el tiempo queda bien reflejada en la cita de Ehrenfest que encabeza este capítulo.) Mientras que la Mecánica Matricial de Heisenberg-Born-Jordan conllevaba un enfoque algebraico (porque se utilizaban matrices y el problema paradigmático consistía en diagonalizar una matriz), la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger presentaba un enfoque analítico (ya que se empleaban funciones de onda y el problema paradigmático residía en resolver una ecuación diferencial). Además, MM acentuaba el carácter discontinuo del mundo atómico, mientras que MO ponía énfasis en los aspectos continuos, apoyándose en una concepción ondulatoria del microcosmos. Si Schrödinger calificaba la Mecánica de Matrices de «contraintuitiva»[26], Heisenberg llegaba a escribir en carta a Pauli: «cuanto más pienso en los aspectos físicos de la teoría de Schrödinger, más repulsiva me parece [...] lo que Schrödinger dice de la visualización de su teoría "no es probablemente cierto del todo" [alusión a un comentario de Bohr]; en otras palabras: es una mierda [sic]» (Fernández-Rañada: 2004, 89-90). El cruce de improperios entre Heisenberg y Schrödinger fue, ciertamente, algo violento. En cambio, a medio camino, Max Born pensaba que MO expresaba más profundamente las leyes cuánticas que MM; y concordaba en esto con Eckart (1926, 726), para quien: «la Mecánica de Ondas es más fundamental que la Mecánica de Matrices y es más susceptible de una eventual interpretación física de los resultados obtenidos». Y, sin embargo, ambas mecánicas predecían y explicaban exactamente los mismos fenómenos empíricos…

[25] En el tercero de ellos, el nombre «Mecánica Ondulatoria» (*Wellenmechanik*) haría acto de presencia.

[26] Schrödinger (1982, 46 n. p. 1) dedicó este hiriente comentario a Heisenberg en su artículo sobre la equivalencia: «naturalmente conocía su teoría, pero estaba descorazonado, si no repelido, por lo que me parecían métodos muy difíciles de álgebra trascendental y por el deseo de intuitividad (*Anschaulichkeit*)».

Una vez hemos presentado MM y MO, estamos en disposición de analizar en qué consisten las pruebas que de su equivalencia matemática aportaron Schrödinger (1926b) y Eckart (1926). Estas «pruebas» son la respuesta a la pregunta: ¿por qué MM y MO son empíricamente equivalentes? Al respecto no está de más comenzar citando de nuevo a Schrödinger:

> Considerando las extraordinarias diferencias entre los puntos de partida y los conceptos de la Mecánica Cuántica de Heisenberg y la teoría que ha sido designada como Mecánica «Ondulatoria» o «Física», y ha sido descrita aquí, es muy extraño que estas dos teorías nuevas concuerden *cada una con la otra* con respecto a los hechos conocidos en que difieren de la teoría cuántica antigua. [...] En realidad, esto es muy remarcable, porque los puntos de partida, las presentaciones, los métodos y, de hecho, todo el aparato matemático parecen fundamentalmente diferentes. […] En lo que sigue, la íntima *conexión interna* entre la Mecánica Cuántica de Heisenberg y mi Mecánica Ondulatoria será desvelada. Desde la base formal matemática, uno bien podría hablar de la *identidad* de las dos teorías. (Schrödinger: 1982, 45-6)

Ahora se trata de «desvelar» la conexión realmente existente entre los ejes sintácticos de MM y MO, esto es, entre sus términos, operaciones y relaciones. Y esta conexión justificará la intrincación entre sus ejes semánticos, en especial, entre sus fenómenos y estructuras (recuérdese que, por ejemplo, tanto MM como MO dan cuenta del espectro del átomo de hidrógeno).

Antes de entrar en materia, hagamos inventario de los componentes sintácticos que descubrimos en MM y MO. En MM intervenían matrices por doquier (como términos y operaciones), y resolver un *problema mecánico-matricial* era resolver un *problema de diagonalización*:

> La teoría de Heisenberg conecta la solución de un problema en Mecánica Cuántica con la solución de un sistema de infinitas ecuaciones algebraicas, en que las incógnitas –matrices infinitas- están ligadas a las coordenadas clásicas de posición y momento del sistema mecánico y a funciones de estas últimas, y obedecen peculiares *reglas de cálculo*. (Schrödinger: 1982, 47)

En MO, por su parte, intervenían funciones de onda (como términos) y operadores (como operaciones), y resolver un *problema mecánico-ondulatorio* era resolver un *problema de valores propios*, es decir, hallar la solución de una ecuación diferencial. De hecho, como recoge Jammer (1989, 226 y 280 n. p. 37), fue mérito de Hilbert reconocer la profunda similitud entre ambos problemas. Bombal (1999, 125) da cabida al siguiente interesante testimonio de Edward Condon, que visitó Munich y Gotinga en 1926:

> Hilbert se rió mucho de Born y Heisenberg porque, cuando descubrieron la Mecánica de Matrices, se encontraron con el mismo tipo de dificultades que, por supuesto, todo el mundo encuentra al manipular y tratar de resolver problemas con matrices [infinitas]. Cuando fueron a pedir ayuda a Hilbert, éste les dijo que las únicas veces que había tenido que ver con matrices fue cuando éstas aparecían como subproducto del estudio de autovalores de una ecuación diferencial con condiciones de contorno. Les sugirió que si encontraban la ecuación diferencial que originaba esas matrices, probablemente obtendrían más información. Heisenberg y Born pensaron que era un comentario para salir del paso, y que Hilbert no sabía realmente de lo que estaba hablando. Así que más tarde Hilbert se divirtió mucho, indicándoles que podían haber descubierto la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger seis meses antes que éste, si le hubieran hecho caso.

Precisamente, las pruebas matemáticas de equivalencia de Schrödinger y Eckart iban a recorrer la senda que Hilbert les mostrara a Heisenberg y Born. Por simplicidad, nos restringiremos a un único grado de libertad en nuestra exposición.

4.1 La prueba de Schrödinger

A manera de preliminar, Schrödinger (1926b) introduce el uso de operadores en MO –como nosotros ya hicimos en el *axioma MO₂*-. Así, asocia los operadores $\widetilde{Q} = x$ y $\widetilde{P} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ a las variables clásicas *q* y *p*, motivado porque obedecen la relación de no conmutación $\widetilde{P}\widetilde{Q} - \widetilde{Q}\widetilde{P} = \dfrac{h}{2\pi i}\widetilde{1}$ (donde $\widetilde{1} = 1$), en efecto:

$$-i\hbar\left(\frac{\partial(x\psi)}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -i\hbar\psi = \frac{h}{2\pi i}\psi .$$

Del mismo modo, asocia el operador $\widetilde{F} = F(\widetilde{Q}, \widetilde{P})$ –que él denota literalmente por «[*F*,·]»- a la función clásica *F*(*q*,*p*), poniendo énfasis en que no se altere el orden en que aparecen sus factores *q´s* y *p´s* (pues éstos conmutan, mas sus operadores no). En especial, esta coordinación puede establecerse, como ya ejemplificamos, para la función hamiltoniana. La introducción de operadores en MM hacía tiempo que había sido materializada por Born y Wiener[27]; es más, estos últimos ya plantearon la definición del operador *momento* como derivada parcial respecto de la *posición*, y al respecto Born llegaría a exclamar pasado el tiempo: «nunca me perdonaré que pudimos haber deducido toda la Mecánica Ondulatoria desde la Mecánica Matricial unos pocos meses antes que Schrödinger» (Jammer: 1989, 231). Lo mismo le ocurrió a Lanczos (1926).

A continuación, empleando esto como paso intermedio, Schrödinger (1926b) procede a conectar las funciones *continuas* de MO con las matrices *discretas* de MM, en sus propias palabras:

> Primero mostraré cómo a cada función de las coordenadas de posición y momento puede asociársele una matriz, de manera que estas matrices satisfagan, *en todos los casos*, las reglas de cálculo de Born y Heisenberg (incluso la llamada «condición cuántica» o «regla de intercambio»). (Schrödinger: 1982, 46)

A cada función de MO, vía su operador (hermítico) $\widetilde{F} = F(\widetilde{Q}, \widetilde{P})$, se le asociará cierta matriz (hermítica) *F* = *F*(*Q*,*P*) de MM. Para ello, supuesto un sistema arbitrario ortogonal completo de funciones $\{\varphi_k\}$, el propio Schrödinger considera –expresándolo en matemática de hoy día- el siguiente morfismo (algebraico):

$$\Theta_{\{\varphi_k\}} : (\widetilde{Q}, \widetilde{P}) \to (Q, P) \subseteq Matrices_{MM}$$

$$\widetilde{F} \mapsto F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & \cdots \\ F_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & F_{nn} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = (F_{mn}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x)\widetilde{F}(\varphi_n)(x)dx\right)$$

[27] La introducción de operadores en MM data de finales de otoño del año 25, por tanto, de casi tres meses antes que la llevada a cabo por Schrödinger en MO. Según Jammer (1989, 229), Born guardaba dudas sobre las ideas matemáticas de Wiener, pero éstas se disiparon una vez que Hilbert dio el visto bueno.

(donde el dominio es el álgebra generada por los operadores de Schrödinger y donde el rango es el álgebra generada por las matrices de Heisenberg, contenida en el ambiente de todas las matrices de MM). Intuitivamente: dado un operador ondulatorio, «cada elemento de la matriz se calcula *multiplicando* la función del sistema ortogonal denotada por el índice de fila [...] por el resultado de aplicar nuestro operador a la función ortogonal denotada por el índice de columna, y después *integrando* sobre todo el dominio» (Schrödinger: 1982, 48-49). Este morfismo (algebraico)[28], que sería de gran ayuda a von Neumann para demostrar la isomorfía isométrica de la equivalencia matemática, respeta la suma y el producto, es decir:

$$\Theta_{\{\varphi_k\}}(\widetilde{F}+\widetilde{G}) = F+G$$
$$\Theta_{\{\varphi_k\}}(\widetilde{F}\cdot\widetilde{G}) = F\cdot G$$
$$\Theta_{\{\varphi_k\}}(\widetilde{1}) = I$$
$$\Theta_{\{\varphi_k\}}(\widetilde{0}) = O$$

(donde +/· de los primeros miembros han de leerse como +/· de operadores, donde +/· de los segundos miembros han de leerse como +/· de matrices y donde *O* representa la matriz de ceros). En particular, esto implica la conversión que ya anunciaba Schrödinger:

$$\Theta_{\{\varphi_k\}}\left(\widetilde{P}\widetilde{Q}-\widetilde{Q}\widetilde{P}=\frac{h}{2\pi i}\widetilde{1}\right) = \left(PQ-QP=\frac{h}{2\pi i}I\right)$$

e. d. la satisfacción de la relación cuántica de no conmutación.

Por el momento sabemos cómo construir matrices desde operadores, pero: ¿cómo construir operadores desde matrices?, es decir, ¿cómo recorrer el camino inverso? Matemáticamente, la cuestión es si nuestro morfismo algebraico es, en realidad, un *iso*morfismo algebraico.[29] Y Schrödinger nos ofrece la contestación a esta espinosa cuestión en una nota a pie de página (¡!). Atendiendo a la acción genérica sobre una función de onda:

$$\psi = \sum_n c_n\varphi_n$$

(¡admitamos esta expansión dado $\{\varphi_k\}$ ortogonal completo *y* discreto!) de un operador:

$$\widetilde{F}(\psi) = \widetilde{F}\Big(\sum_n c_n\varphi_n\Big) = \sum_n c_n\widetilde{F}(\varphi_n) = \sum_n c_n\sum_m F_{mn}\varphi_m \qquad (\dagger)$$

la fórmula (†) sugiere un posible camino de regreso desde la matriz hasta el operador, es decir, una posible vía de definición del morfismo inverso $(\Theta_{\{\varphi_k\}})^{-1}$, que nos capacitaría para, dada la matriz *F*, recuperar el operador $\widetilde{F}$ (donde nótese en el paso intermedio la

[28] Está bien definido porque cada integral es finita en módulo (¡estamos ante números complejos!), al no ser más que el producto interno o escalar de dos elementos del espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable (por no complicar, obviamos que el dominio de los operadores ondulatorios no suele ser todo este espacio sino sólo un subconjunto denso).

[29] No confundir con isomorfismo isométrico: noción de raigambre topológica y métrica, no algebraica.

admisión implícita de conmutatividad de $\widetilde{F}$ con Σ, i. e. de continuidad del operador respecto de la convergencia considerada, y donde nótese en el paso final la admisión de otra expansión o desarrollo en serie). En efecto, en (†) se suponen conocidos los elementos matriciales F_{mn} y, gracias a ellos –porque «F_{mn} es el *m*-ésimo "coeficiente del desarrollo" del operador aplicado a la función φ_n» (Schrödinger: 1982, 49 n. p. 1)-, «revolveríamos» –sic Schrödinger (1982, 52 n. p. 1)- recobrando cierto operador $\widetilde{F}$ definido en función de la matriz F tal y como se enuncia en (†).

Ahora bien, por definición de $\Theta_{\{\varphi_k\}}$, es claro que a cada operador le corresponde una y sólo una matriz; pero, inversamente, dada cualquier matriz F de MM:

1º) ¿Existe siempre un operador $\widetilde{F}$ correspondiente a F de acuerdo a la fórmula (†)?[30]

2º) ¿Existe, a lo sumo, sólo un operador correspondiendo a una misma matriz?[31]

Arrojemos luz sobre este par de peliagudas cuestiones –cuyas respuestas, caso de ser afirmativas, garantizarían que nuestro morfismo es, de facto, un isomorfismo algebraico y que, por ende, existe una correspondencia biunívoca entre operadores de MO y matrices de MM-. Comencemos dando contestación a la segunda pregunta, que es más fácil: como se percataron Hilbert y Courant, supuesto que exista el operador $\widetilde{F}$ correspondiente a la matriz F (esto es, supuesta afirmativa la contestación a la primera pregunta), los coeficientes F_{mn} del desarrollo (†) determinan únicamente su operador $\widetilde{F}$; en palabras de Schrödinger (1982, 52 n. p. 1): $\widetilde{F}$ «es fijado *de modo único* por la matriz F_{mn}».

Lamentablemente, la respuesta a la primera pregunta es, a diferencia de la de la segunda, negativa, lo que da al traste con nuestras expectativas de isomorfismo. Vayamos con calma. Sea $\widetilde{F}: L^2 \to L^2$, donde L^2 es –como vimos páginas atrás- el espacio substrato de MO, esto es, el espacio de las funciones de cuadrado integrable, un operador hermítico y $F = \Theta_{\{\varphi_k\}}(\widetilde{F})$ la matriz correspondiente en el morfismo. Para cada función φ_j del sistema $\{\varphi_k\}$ ortogonal completo en L^2 (por comodidad y sin pérdida de generalidad, lo tomamos como ortonormal), se da necesariamente $\widetilde{F}(\varphi_j) \in L^2$. En consecuencia, la columna *j*-ésima de la matriz F es de cuadrado sumable, en otras palabras, pertenece a ℓ^2, esto es, al espacio de los vectores de cuadrado sumable (que, como explicaremos más adelante de mano de von Neumann, es el verdadero espacio substrato de MM); en efecto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_{ij}^* F_{ij} = \sum_i \left|F_{ij}\right|^2 = \sum_i \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^*(x)\widetilde{F}(\varphi_j)(x)dx\right|^2 = \sum_i \left\langle \varphi_i, \widetilde{F}(\varphi_j)\right\rangle^2 =$$

$$= \sum_i \left\langle \widetilde{F}(\varphi_j), \varphi_i\right\rangle^2 = \left\|\widetilde{F}(\varphi_j)\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F}^*(\varphi_j)\widetilde{F}(\varphi_j)(x)dx < \infty .$$

[30] Esta pregunta por la existencia equivale a la pregunta por la sobreyectividad de $\Theta_{\{\varphi_k\}}$.

[31] Esta pregunta por la unicidad equivale a la pregunta por la inyectividad de $\Theta_{\{\varphi_k\}}$.

Además, como $\widetilde{F}$ es hermítico y $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ conserva la hermiticidad, F es hermítica, en cuyo caso, si las columnas son de cuadrado sumable, las filas también lo son. Por tanto, para cada operador $\widetilde{F}$, la matriz F es de Wintner (i. e. filas y columnas de F_{mn} pertenecen a ℓ^2). Y esto es la clave: como las matrices de MM no tienen por qué ser, *a fortiori*, matrices de Wintner –concordamos con Muller (1997, 53) en que «los postulados de MM no requieren que las matrices sean de Wintner o satisfagan cualquier otro criterio (más fuerte)»- resulta que, dada una matriz F de MM, solamente presentará operador $\widetilde{F}$ correspondiente si es de Wintner. Condición que legitima que la fórmula (†) lo defina correctamente, en otras palabras, que el operador presupuesto por (†) no mande ninguna función de onda fuera del espacio de configuración al actuar. Schrödinger (1982, 52 n. p. 1) ya se percató de ello: «debe notarse que la *desarrollabilidad* de las funciones que aparecen *no* está necesariamente postulada, no hemos probado que *siempre exista* un operador lineal correspondiendo a una matriz». Lo que sí es cierto es -¡menos mal!- que «ciertamente *no más de un* operador lineal puede corresponderle a una matriz dada» (Schrödinger: 1982, 52 n. p. 1). La importancia de este hecho matemático radica en que resulta concebible[32] una matriz hamiltoniana de MM que no presente operador hamiltoniano de MO correspondiente y que, por consiguiente, el problema físico adyacente sólo fuera resoluble en MM, lo que implicaría su superioridad frente a MO.

Tras haber probado que $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ es (casi) isomorfismo algebraico, Schrödinger pasa a explicarnos cómo convertir utilizándolo un problema de MO en un problema de MM:

> Después de que las matrices están construidas a partir de los operadores de este modo muy general, que satisface las reglas generales, voy a mostrar lo siguiente: [...] El sistema *especial* de ecuaciones algebraicas, que en un caso *especial* conecta las matrices de las coordenadas de la posición y el momento con la matriz de la función de Hamilton, y que Heisenberg, Born y Jordan llaman las «ecuaciones del movimiento», será resuelto por completo mediante la asignación de un rol auxiliar a un sistema ortogonal *definido*, al sistema de las autofunciones de la ecuación en derivadas parciales que forma la base de mi Mecánica Ondulatoria. La solución del problema natural de contorno es *completamente equivalente* a la solución del problema algebraico de Heisenberg. (Schrödinger: 1982, 46)

Hagamos inventario de lo que hemos obtenido hasta este instante. Primero, sabemos qué matrices de MM corresponden a los operadores *posición*, *momento* y *hamiltoniano* de MO:

$$\widetilde{Q} \overset{\Theta}{\mapsto} (Q_{mn}) = (\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x) x \varphi_n(x) dx);$$

$$\widetilde{P} \overset{\Theta}{\mapsto} (P_{mn}) = (-i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x) dx);$$

$$\widetilde{H} \overset{\Theta}{\mapsto} (H_{mn}) = (\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x)(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x))\varphi_n(x) dx);$$

[32] Decimos *concebible* porque el propio Wintner todavía comentaba en 1928 que «un tratamiento matemáticamente satisfactorio y completo de los matrices cuánticas continúa siendo un desideratum» (Jammer: 1989, 228).

y, segundo, sabemos que las dos primeras matrices verifican la relación de conmutación de MM.

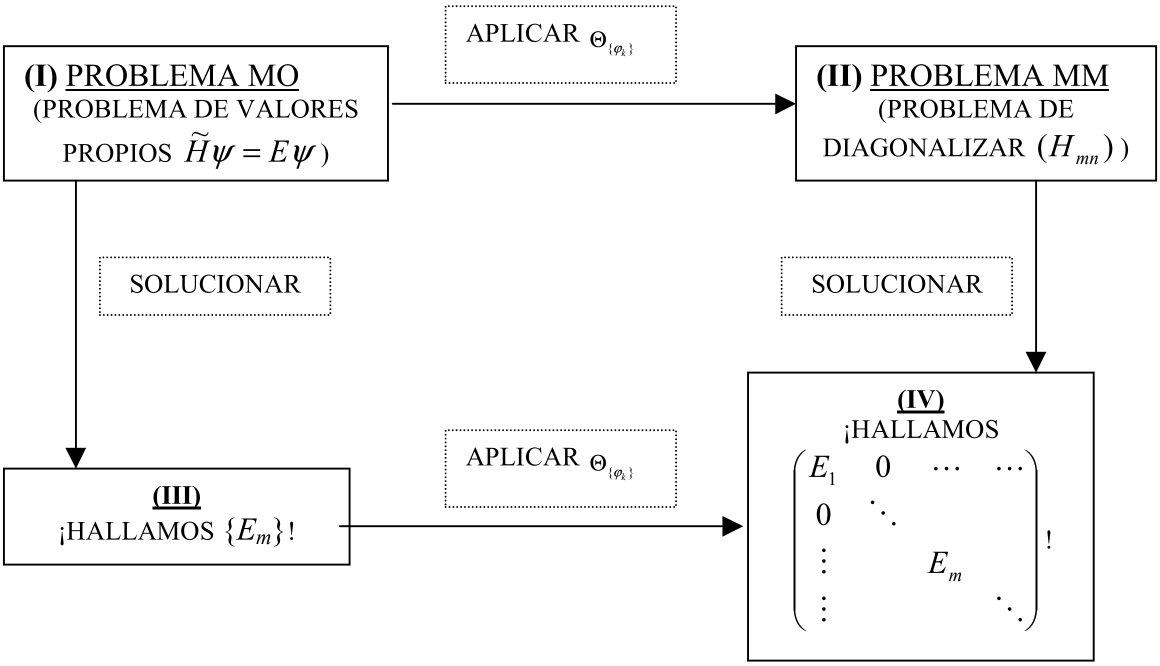
A partir de ahora, el sistema ortogonal completo $\{\varphi_k\}$ de $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ va a ser el que (admitimos) define el conjunto de autofunciones de la ecuación de ondas de Schrödinger $\widetilde{H}\psi = E\psi$ (i. e. si $\sigma(\widetilde{H}) = \{E_k\}$, entonces $\widetilde{H}\varphi_k = E_k\varphi_k$ para cada k). Pero, inmediatamente, detectamos dos déficits que ya apuntamos anteriormente: (i) este sistema no ha de ser necesariamente *completo*; y (ii) tampoco ha de ser necesariamente *discreto*. Como indica Schrödinger (1982, 57), (ii) no era preocupante, porque ya se sabía que tanto en el estudio del átomo de hidrógeno como en el de átomos más pesados aparecían espectros *continuos*, pero (i) sí lo era, ya que la convergencia de los desarrollos en serie que se iban postulando podría fallar, y con ello los cálculos.

Poniendo entre paréntesis estas dificultades, resulta:

(α) que $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ transforma $\widetilde{H}$ en una matriz diagonal $\begin{pmatrix} E_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & E_m & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$ debido a que $H_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x)\widetilde{H}\varphi_n(x)dx = E_m\delta_{mn}$ (=E_m si m=n y =0 en otro caso);

(β) y que las matrices correspondientes a $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{P}$ satisfacen las ecuaciones canónicas del movimiento de MM, como puede calcularse –Borowitz (1973, 294-295) ofrece una deducción sencilla-.

Bien mirado, podemos trazar el siguiente esquema:



En palabras, da lo mismo hacer (I)→(II)→(IV) –gracias a (β)- que hacer (I)→(III)→(IV) –gracias a (α)-, y así lo sintetiza Schrödinger (1982, 56): «si hemos resuelto el problema de contorno, entonces podemos calcular por diferenciaciones y cuadraturas cada elemento de la matriz en que estemos interesados».

Sin embargo, conviene no perder de vista que Schrödinger sólo ha probado que MO implica bastantes aspectos de MM, pues el camino de vuelta desde MM hasta MO era demasiado tortuoso: en realidad, no se pudo demostrar la existencia de $(\Theta_{\{\varphi_k\}})^{-1}$ (van der Waerden: 1997, 324). Sorprendentemente, hacia el fin de su artículo, Schrödinger (1982, 58) vuelve a la carga:

> La equivalencia existe *realmente* y también existe de modo *recíproco*. No sólo las matrices pueden ser construidas desde las autofunciones, como mostramos arriba, sino que también, recíprocamente, las funciones pueden ser construidas desde las matrices numéricas. Así que las funciones no forman, por así decir, una «piel» *arbitraria* y *especial* para vestir el esqueleto matricial, dada la necesidad de intuitividad. En realidad, esto establecería la superioridad de las matrices desde un punto de vista epistemológico.

Pero, atención, ahora no va a volver sobre $(\Theta_{\{\varphi_k\}})^{-1}$, sino que, suponiendo que existe (¡mas suponer que $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ es *iso*morfismo es mucho suponer!), hace hincapié en que al transitar este camino de regreso desde MM hasta MO siempre se presupone fijado $\{\varphi_k\}$, es decir, siempre se presupone conocida y fijada esta noción mecánico ondulatoria. Es necesario, pues, ensayar, además, un camino de vuelta o regreso desde MM tal que no dependa de ninguna noción de MO. Luego, suponiendo que para cada m y n:

$$Q_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x) x \varphi_n(x) dx,$$

como conocemos las entradas matriciales -¡el punto de partida es MM!-, se trata de determinar las funciones $\{\varphi_k\}$ -¡el punto de llegada es MO!-. (Es de señalar que tanto el propio Schrödinger (1982, 58) como Jammer (1989, 272) cometen, creemos, el error de omitir el factor x en dicha ecuación funcional.) A continuación, supuso Schrödinger, mediante multiplicación matricial, podemos conocer los valores de las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x) x^k \varphi_n(x) dx$, puesto que sería el elemento *(mn)* de la matriz $(Q_{mn})^k$. Se conocerían, pues, todos los «momentos» de la función $\varphi_m^* \varphi_n$ (fijados m y n), que, según Schrödinger, bajo condiciones muy generales, determinarían la función $\varphi_m^* \varphi_n$, en particular, φ_m^2 (tomando m=n), y, por tanto, φ_m.

Pregunta: *¿Por qué Schrödinger no logra probar la equivalencia matemática?* En esencia, por dos razones. Primera, porque lo que lleva a cabo ni siquiera funciona. Aparte de que no consigue probar que a cada matriz de MM le corresponde un operador de MO –vía $(\Theta_{\{\varphi_k\}})^{-1}$-, falla a la hora de recuperar las funciones $\{\varphi_k\}$ de MO desde MM. Con más precisión, no es cierto, en general, que podamos encontrar φ_k conocidos sus «momentos». De otro modo, su aseveración de que «es conocido que, bajo condiciones muy generales, una función queda determinada de modo único por la totalidad de sus momentos» no es del toda cierta, porque esas «condiciones muy generales» no se cumplen en el caso que nos ocupa (Schrödinger: 1982, 58).

El «problema de los momentos», expone Bombal (2000), es el problema matemático consistente en caracterizar cuándo existe una función f que cumple las condiciones

$$\int_a^b f(x)g_k(x)dx = c_k \qquad (k \quad = 1, 2, 3, ...)$$

siendo (g_k) una sucesión de funciones y (c_k) una sucesión de escalares dados de antemano. En nuestro caso,

$$f(x) = \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)$$
$$g_k(x) = x^k$$
$$c_k = Q_{mn}^k$$

pero nos topamos con la nada trivial modificación de $a = -\infty$ y $b = +\infty$. ¿Qué características o condiciones han de darse para recobrar f en este caso? Habida cuenta de que el «problema de los momentos de Hamburger» –que es una generalización o extensión del problema clásico, debido a Stieltjes a finales del siglo XIX- es para

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^k dx = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, ...)$$

deben, por consiguiente, satisfacerse las hipótesis del Teorema de Hamburger -¡probado sólo seis años antes (1920)!- (Akhiezer: 1965, v). Tristemente, no son el caso: principalmente, porque éste exige que f sea una función *real* y nuestras $\varphi_m^*\varphi_n$ pueden tomar valores *complejos* –de hecho, Muller (1997b, 233) especifica otras dificultades técnicas más complicadas que también cortan el paso-.[33]

Y segunda razón, Schrödinger no probó la *equivalencia matemática* –que, junto a la *equivalencia lógica*, conforma las modulaciones de la *equivalencia formal*- entre MO y MM porque era imposible probarla en 1926, al carecer MM de «espacio de estados». Con otras palabras, no era posible demostrar la isomorfía isométrica entre las estructuras matemáticas de MO y MM porque ésta última mecánica no presentaba ninguna bien diferenciada. Patología de la que se han percatado Beller (1983) o Muller (1997) y se percató el propio Bohr, quien escribía en carta a Kronig de 1926:

> Ahora, en la Mecánica Ondulatoria, poseemos el modo de representar un estado estacionario. De hecho, ésta es la razón de la ventaja que la Mecánica Ondulatoria exhibe cuando se compara con el método matricial.[34]

Entremos en detalles. Que la isomorfía (algebraica) entre operadores ondulatorios y matrices marche (casi) bien es buen augurio, puesto que es requisito para que las estructuras matemáticas subyacentes sean isomorfas (isométricamente) entre sí.

[33] Siguiendo a Shohat & Tamarkin (1943, 22), el «problema de los momentos de Schrödinger» estaría indeterminado (i. e. presentaría infinitas soluciones) hasta si tomamos una función sencilla $f(x) = e^{-\sqrt{|x|}}$.

[34] Cita en Muller (1997b, 226), quien a su vez la toma prestada de Mara Beller.

Pero, en MO, aparte de operadores, hay funciones, cuya estructura matemática subyacente es, como sabemos,

$$L^2(\mathbb{R}) = \{\, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\Big|\; \psi \text{ medible Lebesgue y } \|\psi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx)^{1/2} < \infty \,\},$$

donde cada función de onda ψ representa un posible estado del sistema cuántico considerado. En especial, si ψ es una autofunción del operador hamiltoniano, representa un posible estado estacionario del sistema.

Por contra, en MM, no se da esta distinción ondulatoria entre operadores y funciones de onda, entre operadores y estados. En MM sólo hay matrices. Y si las matrices ya están asociadas a los operadores, ¿qué queda para corresponder a las funciones de estado? Dentro de MM no salta a la vista ninguna estructura matemática que represente de modo natural los estados de cada sistema cuántico (Beller: 1983, 480). A diferencia de Schrödinger, Heisenberg prescindió de cualquier contrapartida teorético-matemática de los estados por su obsesión positivista:

> La ausencia de estados en la Mecánica Matricial no fue un olvido matemático de sus padres fundadores. Por el contrario, Heisenberg contó como una victoria personal la abolición de esas reliquias inobservables de la teoría cuántica antigua, en donde los estados (estacionarios) se identificaban con las órbitas electrónicas. (Muller: 1997b, 226)

En suma, Schrödinger (1926b) vislumbró cierta correspondencia entre los operadores de MO y las matrices de MM, entre *observables* diríamos hoy día empleando el vocabulario acuñado por Dirac; pero le faltó mostrar esa misma correspondencia entre las funciones de onda de MO y algunos otros términos de MM, que jugaran un papel análogo, entre *estados* diríamos con Dirac. Tiempo después, Dirac y, sobre todo, von Neumann habrían de lidiar con esta carencia de MM. Desde luego, como anota Jammer (1989, 273), «una clarificación completa de este tema sólo fue alcanzada por von Neumann, cuando mostró que, debido al famoso teorema de Fischer-Riesz del análisis funcional, los formalismos de Heisenberg y Schrödinger son cálculos de operadores sobre realizaciones isomórficas (isométricas) del mismo espacio de Hilbert y, por tanto, formulaciones equivalentes del mismo substrato conceptual».

4.2 La prueba de Eckart

A la luz de lo arriba escrito, puede sospecharse que la «prueba» de equivalencia de Carl Eckart tampoco va a marchar mucho mejor que la de Erwin Schrödinger. En efecto, así es. Antes de entrar en materia, unas gotas de historia. En el invierno de 1925, Max Born llegó a Pasadena llevando bajo el brazo los rudimentos de lo que luego sería la Mecánica Cuántica Matricial. Su conocimiento excitó la curiosidad de Eckart. Lo que acabaría precipitando en su artículo de «demostración» de la equivalencia matemática entre MM y MO: «la Mecánica de Ondas y la Mecánica de Matrices son idénticas matemáticamente» (Eckart: 1926, 726). Este artículo fue recibido el 7 de Junio de 1926 y fue publicado en Octubre en *Physical Review*; por tanto, varios meses después de que viese la luz la «prueba» de Schrödinger. Al respecto, Eckart (1926, 726) explicaba:

> En un artículo fechado el 18 de Marzo de 1926, pero que no llegó a este Instituto [Tecnológico de California] antes de que éste ya estuviera en curso de publicación, Schrödinger ha publicado todos los resultados esenciales contenidos en el presente artículo.

Sin embargo, merecen comentarse las diferencias entre ambos enfoques. La equivalencia a la Schrödinger (1926b) transcurría así: se tenían MM y MO, y se probaba su equivalencia, si se nos permite la expresión, «a las bravas» –en verdad, sólo se probaba que MO implica MM, porque el sentido recíproco no fue dilucidado correctamente-. Por el contrario, la equivalencia a la Eckart (1926) transcurre de un modo muy distinto. Supuestas MM y MO, Eckart construye un nuevo marco teórico que denomina «Cálculo de Operadores» (a partir de ahora, CP), y que contiene tanto a MM como a MO: «se desarrolla un cálculo formal que incluye la dinámica matricial de Born y Jordan, y también la remarcable condición cuántica de Schrödinger» (Eckart: 1926, 711). Contiene a la primera porque es muy similar a ella, puesto que CP se funda en la MM dotada de operadores que descubrieron Born y Wiener.[35] Y contiene a la segunda porque, de hecho, incorpora la ecuación de Schrödinger.[36] Como reconoce Eckart (1926, 726): «la presentación de la equivalencia de Schrödinger se basa en su Mecánica Ondulatoria, mientras que ésta se basa en la Mecánica Matricial». Por un lado, Eckart (1926, 724-726) demuestra que, dentro de CP, se puede pasar de MO a MM. En realidad, como Jammer (1989, 274) nota, «la aproximación de Eckart es básicamente un caso especial del método de Schrödinger, consistente en usar la autofunciones normalizadas del oscilador armónico lineal para construir las matrices»; en nuestros términos, Eckart está considerando una especialización de nuestro morfismo $\Theta_{\{\varphi_k\}}$ de MO a MM, cuando sus autofunciones corresponden al oscilador armónico simple. Por otro lado, para el reverso, para pasar de MM a MO, Eckart (1926, 720-723) sigue inconscientemente a Schrödinger, pues considera nuestro morfismo inverso $(\Theta_{\{\varphi_k\}})^{-1}$. Pero, a pesar de que porfíe afirmando que «el resultado de la acción de los operadores sobre una función arbitraria puede ser calculado conociendo las matrices» (Eckart: 1926, 721), su método padece idénticas deficiencias que las que asaltaban al de Schrödinger.

5. A un paso de la equivalencia: Dirac

Tras las «pruebas» –mejor, «pistas» o «indicios»- de equivalencia entre mecánicas cuánticas, sobrevino la imperiosa necesidad de unificar MM y MO. En el otoño de 1926, Dirac y Jordan sabían que ambas mecánicas eran –más o menos- equivalentes y elaboraron el modelo teórico conocido como Teoría de las Transformaciones para lograr la unificación de ambos formalismos. En esencia, la Teoría de las Transformaciones no es más que, empleando palabras de Cassidy (1997, 10), una amalgama de matemática matricial y ondulatoria. Pastiche que, como vamos a mostrar, vería entorpecido su desarrollo con dificultades relacionadas con el hecho de que ni Schrödinger ni Eckart atinaron a demostrar de un modo adecuado la equivalencia entre MM y MO; pero que, a cambio, descubriría la senda por la que luego transitaría von Neumann para, por así decir, atar los numerosos cabos sueltos.

Habitualmente, múltiples filósofos e historiadores de la física cuántica sólo mencionan a Paul Adrien Maurice Dirac en relación con la Teoría de las Transformaciones, pero P. A. M. Dirac no fue su único hacedor. Pascual Jordan –uno de los *Tres Hombres*- también colaboró en su creación. A juicio de Fernández-Rañada (2004, 112), el injusto olvido de su nombre se debe a que este judío de origen español,

[35] Cf. Eckart (1926, 717 y ss.).
[36] Cf. Eckart (1926, 720 y ss.).

oriundo de Alcoy, era un pro-conservador partidario de acuerdos con Hitler que, de hecho, acabó incorporándose a las filas del partido nazi. Pero Jordan no puede ser olvidado por cuanto realizó importantes aportaciones a los fundamentos matemáticos de la teoría cuántica.

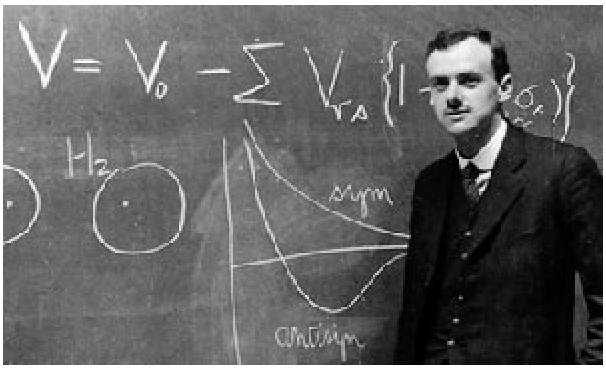


Figura 4. Paul Adrien Maurice Dirac

Entrando en materia con palabras de Heisenberg (1962, 199): «el análisis de la relación entre las dos teorías llevó a la llamada Teoría de las Transformaciones, desarrollada por Dirac y Jordan». Es más, retomando otra imagen de Jammer (1989, 309), la Teoría de las Transformaciones era a la Teoría Cuántica como la Mecánica Hamiltoniana era a la Mecánica Newtoniana, es decir, una profundización teóricamente progresiva. Desde luego, «fue Dirac quien primero comprendió la relación que hay entre un producto antisimétrico [no conmutativo], que usó Heisenberg en su primer trabajo, y la formulación hamiltoniana de la dinámica clásica» (Fernández-Rañada: 2004, 113).[37] Esta magnífica idea precipitaría en su archiconocido libro *The Principles of Quantum Mechanics*, publicado en Londres en 1930, que sería sucesivamente corregido y aumentado en las posteriores ediciones de 1934 y 1947 (por ejemplo, con la notación que los físicos denominan *bra*/*ket*). En él, Dirac recoge la Teoría de las Transformaciones vigente desde años atrás, sin olvidar otras novedosas aportaciones que vamos a explicar.

Dirac (1925, 1925b, 1926, 1927) entendió preclaramente que las cantidades teórico-cuánticas introducidas por Heisenberg (1925) definían un nuevo tipo de álgebra, para el que la multiplicación no era conmutativa –¡el orden de los factores *sí* alteraba el producto!-. En consecuencia, decidió llamar *q-numbers* a las cantidades que se comportaban así, para distinguirlas de los *c-numbers* o cantidades que se comportan como los números ordinarios de toda la vida.[38] Dirac introdujo, sin decirlo explícito, la noción de «representación» (o «imagen»), que es clave para entender la formulación de Heisenberg (MM) y la formulación de Schrödinger (MO) de la Mecánica Cuántica (MQ). A saber, hay un álgebra abstracta, generada por los *q-numbers* (esto es, por los operadores, respectivamente entendidos como las matrices posición y momento o como los operadores ondulatorios de posición y momento), que satisfacen la regla de no-conmutación de Born-Jordan. Así, en MM, se elige la «representación energía» del álgebra, en la que el operador hamiltoniano (entendido como matriz hamiltoniana) es diagonal y sus autovalores recogen el espectro energético. En cambio, en MO, se elige la «representación de coordenadas» del álgebra, en la que el operador posición actúa por

[37] Las *ecuaciones canónicas* de Born-Jordan resultan, para Dirac, de sustituir el *paréntesis de Poisson* de las ecuaciones clásicas por su análogo cuántico: el *conmutador* dividido por $i\hbar$ (Coutinho: 1997, 600).
[38] Los prefijos *q-* y *c-* provienen de las iniciales de *quantum* y *classical*.

multiplicación y el operador momento actúa por derivación parcial, con lo cual el hamiltoniano queda como un operador diferencial, y hallar su espectro se convierte en un problema de Sturm-Liouville. Hay otras representaciones alternativas (por ejemplo, la «representación de momentos», en que el operador momento opera por multiplicación y el operador posición lo hace por derivación parcial). Pero lo fundamental, según remarcó Dirac, es que MM y MO no son sino dos *representaciones* o *imágenes* del álgebra abstracta en que consiste MQ. En palabras de Fernández-Rañada (2004, 113):

> Lo importante de la teoría de Dirac y Jordan es que no sólo aclaraba la equivalencia entre formalismos de las mecánicas de matrices y ondulatoria, sino que planteaba el problema desde un punto de vista muy general, mostrando que esos dos puntos de vista son dos casos particulares, hoy conocidos como imágenes de Schrödinger y de Heisenberg, habiendo otras infinitas posibilidades. Esta situación es análoga a la de la dinámica clásica hamiltoniana, en la que podemos cambiar de coordenadas mediante una transformación canónica según lo conveniente para cada problema, con lo que existe una infinidad de sistemas de coordenadas elegibles. La formulación usual con las ecuaciones de Hamilton se corresponde formalmente con la imagen de Heisenberg; si mediante una transformación canónica pasamos a unas coordenadas en que la función hamiltoniana se anula, tenemos la de Schrödinger. Ello ofrece más alternativas para la resolución de los problemas pues hay otras imágenes. Una de ellas es intermedia entre las dos que ya se conocían y se llama, con justicia, de Dirac.

En la *imagen de Heisenberg* (MM) los operadores (las matrices) cambian con el tiempo, mientras que en la *imagen de Schrödinger* (MO) es la función de onda la que cambia con el paso del tiempo; pero el modo de cambiar resulta ser muy parecido y ésta fue la conexión[39] que Dirac descubrió (Dirac: 1947, 92-93 y 108-117).

El problema radica en que, a diferencia de von Neumann, Dirac no logró demostrar que la representación de Heisenberg y la representación de Schrödinger son *equivalentes*, aunque lo conjeturó (Dirac: 1930, §29). Dirac prueba que las mecánicas matricial y ondulatoria no son sino dos representaciones de la misma álgebra abstracta no-conmutativa (al principio llamada *álgebra cuántica* y, tras el famoso libro *La Teoría de Grupos y la Mecánica Cuántica* de Hermann Weyl de 1928, reeditado en 1931, rebautizada *álgebra de Weyl*). Pero Dirac no prueba que esos dos representaciones sean equivalentes.[40] El mérito de la equivalencia no resta con los trabajos de Schrödinger y Dirac, como a veces suele afirmarse a la ligera en la literatura, porque los flecos no son irrelevantes complicaciones matemáticas. Claro que ambos apuntaron a lo correcto (MM y MO no son sino dos *representaciones equivalentes* del álgebra generada por los operadores de posición y momento de MQ); pero, empleando la famosa distinción acuñada por Hans Reichenbach, el contexto de descubrimiento no puede confundirse con el contexto de justificación. Pregunta: ¿por qué sólo suele citarse la conjetura de Schrödinger-Dirac? Respuesta: Porque se sabe que la conjetura es cierta. Pero, atención, pregunto más: ¿por qué se sabe que la conjetura es cierta? ¡Porque von Neumann la

[39] Si escribimos la evolución temporal de la función de onda como $\Psi(x,t)=U(t)\psi(x)$, resulta que U responde a un operador «unitario» (para entendernos, una especie de rotación generalizada) y, entonces, podemos expresar la evolución de una matriz Q como $Q(t)=U(t)^{-1}QU(t)$.

[40] Weyl (1928) también lo conjeturaría, pero serían Stone (1930) y, con rigor, von Neumann (1931) quienes lo demostraran. El Teorema de Stone-von Neumann establece que la álgebra definida por las relaciones de conmutación no admite más que una única interpretación: si P y Q satisfacen los axiomas de la algebra de Dirac y forman un sistema irreducible, entonces P y Q son dos operadores lineales autoadjuntos no acotados del espacio de Hilbert de dimensión infinita unívocamente determinados (salvo rotación del espacio de Hilbert, esto es, salvo conjugación con una tranformación unitaria). Con otros términos: todas las posibles soluciones irreducibles de la ecuación de conmutación $PQ\text{-}QP = -ih/2\pi$ son, esencialmente, la misma; en otras palabras, todas son equivalentes entre sí (para el caso de una partícula). En particular, lo son las soluciones –representaciones, imágenes– de Heisenberg y Schrödinger.

demostró después! En ciencia, no basta con las intuiciones, aunque sean geniales (como la mayoría de las de Dirac), porque los descubrimientos científicos sólo adquieren esta carta de naturaleza cuando, posteriormente, logran ser justificados, demostrados.

En la época, en vista de la «pruebas» de Schrödinger y Eckart (la de Pauli es sólo una carta descubierta, muchos años después, por van der Waerden), podía pensarse perfectamente que el método matricial era capaz de abordar problemas para los que el método ondulatorio sería ineficaz (al no ser el morfismo de Schrödinger un isomorfismo, resultaba concebible una matriz hamiltoniana sin operador hamiltoniano correspondiente y, por tanto, un problema mecánico-cuántico sólo planteable y resoluble en la mecánica de matrices). Además, pese al gran avance parcial que supuso el empujón de Dirac, conviene reparar en la otra cara de su chispazo especulativo o heurístico: ¿con qué sentido se podía hablar de la equivalencia entre el álgebra de operadores matriciales de Heisenberg y el álgebra de operadores ondulatorios de Schrödinger cuando ni siquiera se sabía si sus dominios eran isomorfos? Por decirlo rápidamente: para poder establecer la igualdad, salvo isomorfismo, entre dos operadores, es necesario haber demostrado antes la igualdad, salvo isomorfismo, entre sus dominios (y esto es lo que hará von Neumann). La noción de operador presupone, lógicamente, la noción de dominio. Los *observables* (operadores) necesitan operar sobre espacios de *estados* (dominios). No puede privilegiarse la relación de equivalencia entre las álgebras de operadores, bien conjeturada por Schrödinger y Dirac, en perjuicio de la relación de equivalencia entre los dominios, demostrada por von Neumann. Tan importantes como los *observables* son los *estados*. En efecto, hablar de álgebras de operadores cuando ni siquiera se sabía con qué operaban esos operadores era, por decirlo así, una *flatus vocis*. Precisamente, hasta el morfismo de Schrödinger-Dirac entre el álgebra de operadores ondulatorios y el álgebra de matrices dependía, como estudiamos, de la elección de un sistema de autofunciones, esto es, de estados.

Desde luego, Dirac acertó al acuñar esta distinción entre *estados* y *observables* del sistema cuántico. La distinción aparecía bastante nítida en MO, pero brillaba por su ausencia en MM. Y, como advertimos, esto fue lo que produjo el fallo en las pruebas de equivalencia de Schrödinger y Eckart, porque ambos (casi) anudaron la equivalencia entre observables (operadores) pero les quedó probar lo mismo para estados; mas como Bohr se preguntó: ¿cuáles eran los candidatos a representar los estados del sistema en MM? Dirac dio con la clave y respondió al enigma: los autovectores jugaban el papel de los estados en MM, a la manera que las autofunciones lo hacían en MO. Pero, aunque ya dispuso de todas las piezas del rompecabezas, no atinó a hacerlas encajar, porque, como mostramos a continuación, las forzó demasiado en su intento de que MM y MO por fin casaran a la perfección. Sería John von Neumann quien resolvería el puzzle y determinaría cómo salvar la equivalencia entre MM y MO.

Recordemos que un *problema mecánico-matricial* consistía en un *problema de diagonalización*. Simbólicamente, como vimos, dada la matriz H de energía de nuestro sistema físico, se trata de determinar una *transformación (canónica)* S -¡por esto se habla de Teoría de las Transformaciones!- tal que la matriz $W = S^{-1}HS$ se convierta -¡se transforme!- en una matriz diagonal, puesto que así sus elementos diagonales nos facilitarán el conocimiento de los posibles valores energéticos del sistema, es decir, se tendrá:

$$W = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & E_n & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si despejamos *HS* en nuestra ecuación matricial $W = S^{-1}HS$, nos queda $HS = SW$. Y si, con algo de cuidado y empleando la regla de multiplicación de matrices, escribimos lo que significa esta última ecuación para los números de cada matriz, obtenemos que el elemento sito en fila *m* y columna *n* de la matriz *HS* ha de ser igual al elemento sito en la misma fila y en la misma columna de la matriz *SW*, es decir, formalmente:

$$\sum_k h_{mk} s_{kn} = E_n s_{mn} \text{ para cada } m \text{ y } n. \qquad \text{(A)}$$

Recordemos también que un *problema mecánico-ondulatorio* consistía en un *problema de autovalores*. Id est, como vimos, dado el operador $\widetilde{H}$ de energía de nuestro sistema físico, se trata de resolver la *ecuación diferencial de Schrödinger*:

$$\widetilde{H}\psi = E\psi$$

hallando los autovalores E_n solución, puesto que éstos nos permiten conocer los posibles valores energéticos del sistema. Si, por esta vez, usamos la notación ψ_n para la autofunción asociada al autovalor E_n, llegamos a:

$$\widetilde{H}\psi_n = E_n \psi_n \text{ para cada } n. \qquad \text{(B)}$$

Dirac, una vez que hubo reformulado los problemas arquetípicos de MM y de MO en los modos (A) y (B) respectivamente, procedió a compararlos y observó que la semejanza entre (A) y (B) es manifiesta: tanto (A) como (B) presentan la misma estructura...

$$\textit{Hamiltoniano} \times XYZ = \textit{Energía} \times XYZ$$

Donde XYZ es, en el caso matricial, la columna *n* de la matriz *S* (i. e. los números s_{kn} y s_{mn} cuando el índice de columna *n* permanece fijo), y, en el caso ondulatorio, la autofunción *n* de onda (i. e. ψ_n). Seguidamente, Dirac se planteó: ¿qué condiciones hay que asumir para poder igualar –y, por tanto, unificar- término a término la ecuación (A) de MM y la ecuación (B) de MO?

Primera condición, como explica Bombal (1999, 134), «la semejanza de los problemas (A) y (B) es evidente considerando s_{mn} como función de la "variable discreta" *m* [pues estamos en MM, reino de lo discreto] y ψ_n como función de la "variable continua" *x* [pues estamos en MO, reino de lo continuo, y ψ_n=$\psi_n(x)$]». Entonces, aceptándolo, ya sabemos qué hacer corresponder a los *estados* de MO en MM: efectivamente, a cada *autofunción* $\psi_n(x)$ de MO se le hará corresponder el *autovector* que viene dado por la columna *n* de la matriz *S*, esto es,

$$\begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{mn} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

De esta manera, de una vez por todas, Dirac descubrió cuáles eran los análogos matriciales de los estados atómicos estacionarios ondulatorios. En sus propias palabras: «las autofunciones de la ecuación de ondas de Schrödinger son, simplemente, las funciones de transformación (las columnas de la matriz de transformación previamente denotada por *S*)» (cita en Jammer: 1989, 319).

Y segunda condición, prosiguiendo con la analogía, deberíamos hacer corresponder la matriz hamiltoniana *H* (i. e. los números h_{mn}) de (A) con el operador hamiltoniano $\widetilde{H}$ de (B). Desgraciadamente, surge el impedimento de que también aparece un sumatorio $\sum$ en (A). Como «integrar» es en MO –reino de lo continuo- lo análogo a «sumar» en MM –reino de lo discreto- (de hecho, como es bien sabido, el símbolo $\int$ de integral deviene de una sucesiva «estilización» del símbolo $\sum$ de suma), Dirac pensó que lo que debería sustituir, en el paso de lo discreto a lo continuo, al primer miembro de la ecuación (A) habría de ser:

$$\int h(x,y)\psi(y)dy$$

(donde, como antes, las variables discretas *m* y *n* han sido cambiadas por las variables continuas *x* e *y* respectivamente). Por consiguiente, MM y MO podrían unificarse si esta última expresión coincide con el primer miembro de la ecuación (B), resultando:

$$\widetilde{H}\psi(x) = \int h(x,y)\psi(y)dy\,.$$

En suma, MM y MO podrían unificarse si todo operador hamiltoniano $\widetilde{H}$ de MO pudiera escribirse como un operador integral, es decir, como una integral del estilo de la expuesta. ¡Pero esto no es siquiera posible para un operador tan sencillo como la identidad! En efecto, tomando $\widetilde{H}\psi(x) = \psi(x)$ (operador identidad) resultaría que:

$$\psi(x) = \int h(x,y)\psi(y)dy \quad \text{para toda función de onda } \psi\,.$$

En particular, haciendo x=0 queda:

$$\psi(0) = \int h(0,y)\psi(y)dy \quad \text{para toda función de onda } \psi\,.$$

Y, como señala von Neumann (1949, 17), con elecciones adecuadas de ψ se obtienen las condiciones contradictorias $\int h(0,y) = 1$ y $\int h(0,y) = 0$.

Sin embargo, el físico británico Dirac no se amilanó ante estas dificultades y, para salvarlas, recurrió a la función que desde entonces se conoce como función δ delta de Dirac. Esta función singular está definida por $\delta(y) = 0$ para todo $y\neq 0$ y, paradójicamente, $\int \delta(y)dy = 1$. Suponiendo la existencia matemática de este ubicuo ente podemos soslayar el absurdo a que conducía la ecuación de arriba, en efecto, tomando $h(0,y) = \delta(y)$, llegamos aplicando su definición a:

$$\psi(0) = \int h(0,y)\psi(y)dy = \int \delta(y)\psi(y)dy = \psi(0)\int \delta(y)dy = \psi(0).$$

Y, mediante cálculos similares, puede demostrarse que todo operador puede representarse como operador integral, porque «una vez se ha aceptado esta ficción [¡la δ que finge Dirac!] es ya posible representar los más diversos operadores diferenciales como operadores integrales» (von Neumann: 1949, 18), y, por ende, MM y MO resultan forzadamente unificadas.

Realmente, Dirac era consciente de que su «función» no era propiamente una función (¿cómo imaginar una función que vale 0 en todos los puntos menos uno y, sorprendentemente, integra 1?), pero, como aduce Bombal (1999, 135), éste es el triste sino de la δ: «para los físicos se trata de una idealización y formalismo útil, que los matemáticos se encargarán de rigorizar; para los matemáticos, es una noción intuitiva, sin realidad matemática, cuyo uso se justifica por las aplicaciones físicas». De hecho, esta función δ ya había aparecido implícitamente maquillada en ciertos trabajos de Fourier, Kirchhoff e, incluso, del ingeniero eléctrico Heaviside. Pero hubo que esperar hasta 1950 -¡más de 20 años!- para que las ideas de Dirac fuesen fundamentadas matemáticamente. En 1950 Laurent Schwartz –creador de la Teoría de Distribuciones, teoría matemática que se encarga de estudiar estas funciones singulares o impropias- le abrió las puertas del paraíso del rigor a la función delta de Dirac. Escribe Schwartz: «fue en 1935 cuando oí hablar por primera vez de la función delta; era estudiante y un compañero mío que acababa de asistir a una conferencia de física teórica, me habló de ella en estos términos: "aquella gente introduce una llamada función delta, nula en todas partes menos en el origen, en donde vale infinito, y tal por fin que integra 1"; reflexionamos un poco los dos juntos, hasta que por fin lo dejamos correr... He vuelto a pensar en ello en 1945... En esta ocasión, ha sido por un motivo muy diferente que he definido las distribuciones: me sentía atormentado por las "soluciones generalizadas" de las ecuaciones en derivadas parciales» (Thom: 1985, 179). Schwartz descubrió el Teorema de los Núcleos[41] –que afirma, aproximadamente, que todo operador puede representarse como operador integral- durante lo que llamó *la plus belle nuit de ma vie* (Bombal: 2003, 192), y en 1968 publicó la monografía *Application of distributions to the theory of elementary particles in Quantum mechanics* en que, por fin, da soporte matemático a las ideas de Dirac. Sin embargo, es de rigor señalar que como Muller (1997b, 235) apunta:

> Las dificultades de formular una versión matemáticamente tratable de la Mecánica Cuántica de Dirac son bastante formidables; pese a la creencia popular, la introducción del concepto de distribución de Laurent Schwartz en 1949 para definir correctamente la impropia función δ de Dirac no resuelve todas las dificultades. [...] Una versión matemáticamente decente de la Mecánica Cuántica de Dirac es de lejos mucho más intrincada que el edificio de von Neumann, un hecho que la elegante notación de Dirac disimula.

En todo caso, lo que merece la pena volver a repetir es que Dirac, pese a apuntar maneras en 1930, no logró anudar de modo estable ni la equivalencia ni la unificación

[41] Se llama *núcleo* a la función *h(x,y)*.

de MM y MO. Habría que esperar dos años más para que von Neumann las estableciese firmemente, o sea, seis años después de Schrödinger y Eckart.

6. Von Neumann: equivalencia y unificación

Johann (John) von Neumann fue un niño prodigio nacido en el seno de una familia de banqueros húngaros. Su increíble talento cristalizó en una labor multifacética, que abarcó desde el campo de la matemática pura (teoría de conjuntos, análisis funcional...) hasta los campos de la matemática aplicada (investigación operativa, teoría de juegos...), de la física (física cuántica) y de la informática (inteligencia artificial). Sin dejarnos en el tintero su participación en el *Proyecto Manhattan*, que culminó con la fabricación de la bomba atómica. Partidario acérrimo del armamento nuclear y de la producción, a comienzos de los 50, de la Superbomba de Hidrógeno llegó a declarar: «si ustedes dicen que por qué no bombardear mañana, yo digo que por qué no hoy; si ustedes dicen que por qué no a las cinco, yo digo que por qué no a la una...» (Mosterín: 2000, cap. V).

Quizá, sus trabajos más impresionantes sean, como opinó Jean Dieudonné (Bourbaki), los dedicados a la Mecánica Cuántica. Nada más llegar a Gotinga a finales de 1926, von Neumann se convirtió en uno de los discípulos más prometedores de Hilbert. Junto a él, comenzó a explorar cómo axiomatizar la parcela de la física cuántica a fin de arrojar claridad sobre su estructura matemática. De hecho, Hilbert había incluido esta delicada tarea en su egregia lista de problemas físico-matemáticos abiertos a fecha de 1900 (Fernández-Rañada: 2003, 662). El tratamiento matemático de la Mecánica Cuántica iba retrasado porque Hilbert había sufrido una anemia perniciosa durante gran parte del año 26 (Mehra & Rechenberg: 1982, 251). No obstante, Hilbert, von Neumann y Nordheim (1927) dieron el primer paso en la buena dirección al comenzar a extender la teoría espectral de Hilbert de acuerdo a las necesidades cuánticas. Este artículo estimularía el posterior trabajo de von Neumann, que acabaría sedimentando en su magistral *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica*, publicado en Berlín en 1932.

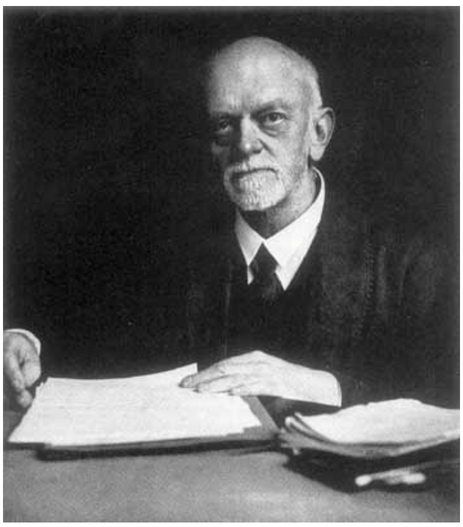


Figura 5. David Hilbert y John von Neumann en el *annus mirabilis* de 1932, cuando von Neumann culminó la resolución del VI Problema de Hilbert en lo concerniente a la Mecánica Cuántica

Von Neumann resolvió el puzzle de la equivalencia matemática entre Mecánicas Cuánticas al mostrar que la Mecánica de Heisenberg –centrada en matrices discretas y sumas- y la Mecánica de Schrödinger –centrada en funciones continuas e integrales- eran matemáticamente equivalentes al no ser más que cálculos de operadores (la estructura de los *observables*) algebraicamente isomorfos sobre espacios de Hilbert (la estructura de los *estados*) topológicamente isomorfos e isométricos. En referencia a este cabo suelto, von Neumann (1949, 322 n. p. 35) subrayó criticando a Schrödinger (1926b) y, por extensión, a Eckart (1926):

> En el curso de nuestras consideraciones acerca del espacio de Hilbert quedará demostrado este teorema. Es digno de mención que la mitad del mismo, suficiente para muchos fines y más fácil de demostrar, es la que afirma el isomorfismo entre la estructura matemática de la Mecánica Ondulatoria y una cierta parte de la estructura matemática de la Mecánica Matricial; se la encuentra por primera vez en Hilbert, 1906.[42] Así Schrödinger se apoyó sólo en ella para su primitiva demostración de la equivalencia.

(En total concordancia con lo que aquí venimos sosteniendo.) Y, con respecto a la unificación de MM y MO, von Neumann (1949, 2) pone de relieve reprochándoselo a Dirac:

> El método de Dirac, seguido hoy por su claridad y elegancia en gran parte de la literatura relativa a la Mecánica cuántica, no cumple en modo alguno con las exigencias del rigor matemático [...] Así, por ejemplo, mantiene constantemente la ficción de que todo operador autoadjunto puede reducirse a la forma diagonal [casi equivalentemente, en nuestros términos, la ficción de que todo operador hermítico puede representarse como operador integral], por donde aquellos operadores en los que de hecho ello no es posible hacen indispensables la introducción de funciones «impropias» [¡la δ de Dirac!] que muestran propiedades intrínsecamente contradictorias [...] Tocante a este punto hay que subrayar que la estructuración correcta no consiste, por ejemplo, en una mera puntualización y explicación matemáticas del método de Dirac, sino que se requiere desde un principio una manera de proceder diferente, a saber, el enlace con la teoría espectral de los operadores debida a Hilbert.

Y, en efecto, von Neumann va a aplicar la recién horneada teoría matemática del Análisis Funcional a la Mecánica Cuántica. El Análisis Funcional es la sección del Análisis Matemático (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, &c.) que se encarga de estudiar los espacios de funciones (¡espacios geométricos en que los puntos *son* funciones!) y que, por ejemplo, contiene a la mencionada teoría de operadores de Hilbert. El bautismo oficial del Análisis Funcional con tal nombre acaeció, según Bombal (1994, 56), con la publicación de *Leçons d´Analyse Fonctionnelle* de Levy en 1922. Y el padre fundador de esta disciplina fue, sin duda, el polaco Banach.

De cara a comprender el proceder de von Neumann, conviene que retengamos en la memoria las siguientes palabras de Banach acerca de la metodología imperante para el analista funcional, entresacadas de la introducción a su tesis doctoral:

> El objetivo de este trabajo es demostrar algunos teoremas que son ciertos para diferentes espacios funcionales. En lugar de probar los resultados para cada espacio funcional particular, he optado por un enfoque diferente: considero en general un conjunto de elementos abstractos, para los que postulo una serie de propiedades y demuestro los teoremas para esos conjuntos. Entonces pruebo que los distintos espacios funcionales particulares en los que estoy interesado, satisfacen los axiomas postulados.[43]

---

[42] «Grundzüge einer allgemeinen Theorien der linearen Integralgleichungen», *Göttingen Nachrichten*, 1906 (157-227).

[43] «Sur les Opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équatíons intégrales», *Fundamenta Mathematicae*, 1920 (133-181). Cita tomada de Bombal (2003b, 107).

Y es que la manera de trabajar de von Neumann para probar tanto la equivalencia como la unificación entre MM y MO toma carta de naturaleza con esta técnica, que no es sino la manera axiomática de trabajar que asociamos con Hilbert: von Neumann considera una MQ abstracta, para la que prueba ciertos teoremas, que garantizan que cualesquiera dos instancias de la misma –verbigracia: MM y MO- son *a fortiori* isomorfas e isométricas. La razón es que, como Powell & Crasemann (1961, 282) perciben, «la existencia de estas dos formulaciones aparentemente muy diferentes no es accidental y ambas son expresiones alternativas de la misma estructura matemática subyacente». Veamos cuál es.

El método de Dirac se reducía, en esencia, a la búsqueda de una analogía formal entre el espacio *discreto* de los valores de los índices de las matrices que aparecían en la ecuación (A) de MM y el espacio *continuo* de las variables de las funciones de onda que aparecían en la ecuación (B) de MO. Von Neumann los designa, respectivamente, por Z (=$\mathbb{N}$, es decir, los números naturales, sobre los que variaban m y n) y por Ω (=$\mathbb{R}$, es decir, los números reales, sobre los que variaban x e y). Pero, como aduce von Neumann (1949, 20), «no es maravilla que esto [¡la analogía unificadora perseguida por Dirac!] no se pueda lograr sin cierta violencia sobre el formalismo y la matemática: los espacios Z y Ω son verdaderamente muy distintos, y toda tentativa de ponerlos en relación debe chocar con grandes dificultades».

La innovadora idea feliz de von Neumann consistió en percatarse de que, si bien Z y Ω son muy diferentes, los espacios de funciones definidos sobre ellos son, esencialmente, el mismo. De otro modo: como lo que realmente resulta determinante en Mecánica Cuántica no es Z ó Ω, sino el espacio funcional (por otro nombre, espacio de configuración abstracto) definido sobre Z (para entendernos, las funciones definidas sobre Z son las matrices de MM) ó sobre Ω (para entendernos, las funciones definidas sobre Ω son las funciones de onda de MO), la analogía que debe establecerse sólo ha de versar sobre estos últimos. A continuación, von Neumann observa que a las funciones de MM, esto es, de acuerdo a Dirac, a los vectores-columna de las matrices, se les exige siempre que la suma de su cuadrado sea finita (para su posible normalización). En consecuencia, esto le sugiere restringirse al espacio de vectores o sucesiones de cuadrado sumable –que él denota por F_Z-:

$$F_Z = \ell^2 = \{ (z_n) : \left\| (z_n) \right\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} z_n^* z_n)^{1/2} < \infty \}.$$

(Espacio que, pese a lo que opine Muller (1997, 40 n. p. 7), apareció bastante antes de su exploración por Schmidt en 1928, porque ya estaba presente, como indican Dieudonné (1981, 111-7) y Bombal (2000), en los trabajos de Hilbert de principios de siglo XX: al estudiar ciertas ecuaciones integrales que acababan transformándose, mediante introducción de un sistema ortogonal completo de funciones, en sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, Hilbert notó que tanto los datos como las incógnitas eran sucesiones de números de cuadrado sumable.) Más aún, von Neumann observa que en el espacio de las funciones de MO –que él denota por F_Ω- se exige siempre que la integral de su cuadrado sea finita (por su interpretación como densidades de carga eléctrica y/o de probabilidad), y esto le sugiere restringirse al espacio de funciones de cuadrado integrable:

$$F_{\Omega} = L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible Lebesgue y } \|f\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx)^{1/2} < \infty\}.$$

(Espacio que, como indica Dieudonné (1981, 120), apareció de la mano de Riesz y Fischer en 1907.) Y ambos espacios funcionales son los espacios de los *estados* del sistema en MM y MO, respectivamente. Es de señalar que von Neumann conocía cómo representar los estados en MO, mediante funciones de onda, pero dudaba sobre cómo hacer lo mismo en MM:

> En la primitiva forma de la Mecánica Matricial no se daba este concepto general de estado, del que es un caso particular el de estado estacionario. (Von Neumann: 1949, 321 n. p. 18)

Demostrar la equivalencia matemática entre MM y MO es probar que F_Z y F_{Ω} –sus estructuras matemáticas subyacentes- son isométricamente isomorfos; utilizando palabras de von Neumann (1949, 21):

> Para F_Z y F_{Ω} vale el siguiente teorema: F_Z y F_{Ω} son isomorfos (Fischer y Riesz). Que sean isomorfos significa que es posible establecer entre F_Z y F_{Ω} una correspondencia biunívoca [...] de modo que la correspondencia así establecida sea lineal y conserve las longitudes [isometría].

A la hora de formalizar dicho teorema, von Neumann pone en práctica la metodología de Banach. Primero, caracteriza el *espacio de Hilbert*[44], llamado así en honor a su maestro, pues:

> Importa fijar en primer lugar las propiedades intrínsecas del espacio de Hilbert, las que no dependen de la especial vestidura F_Z o F_{Ω}. El dominio matemático definido por estas propiedades es el «espacio de Hilbert abstracto». Este espacio hay que equipararlo al F_Z o al F_{Ω} en los casos particulares concretos del cálculo, pero es de más cómodo manejo que ellos cuando se persiguen fines generales. (Von Neumann: 1949, 23)

Segundo, estudia la geometría del espacio de Hilbert, y concluye «que el espacio abstracto de Hilbert [...] está unívocamente caracterizado por las propiedades que se indican, es decir, que no admite interpretación alguna esencialmente distinta» (von Neumann: 1949, 23). Y, tercero, como F_Z es el llamado en general espacio de Hilbert y como F_{Ω} también satisface los axiomas del espacio de Hilbert, ambos son esencialmente lo mismo: «F_Z y F_{Ω} son isomorfos, o sea, idénticos en su estructura íntima (realizan en dominios matemáticos distintos las mismas propiedades abstractas), y pues ellos (¡y no Z y Ω!) son el auténtico substrato analítico de la teoría de las matrices y de la ondulatoria, respectivamente, esta isomorfía significa que ambas teorías deben dar los mismos resultados» (von Neumann: 1949, 22).

El núcleo matemático de esta última afirmación se sustenta en el llamado Teorema de Riesz-Fischer[45], que asevera que existe un isomorfismo isométrico Φ entre F_{Ω} y F_Z. Ernst Fischer y Friedrich Riesz, a la sazón profesor de Enseñanza Media en una pequeña ciudad húngara, descubrieron simultánea e independientemente este importante teorema en 1907: ¡más de veinte años antes de que von Neumann lo aplicase en la fundamentación matemática de la Mecánica Cuántica! (Jammer: 1989, 330). Y, tal

[44] En lenguaje matemático actual, espacio vectorial complejo (von Neumann lo llama espacio lineal) dotado de un producto escalar (von Neumann lo llama producto interior), que es separable y completo.

[45] Dado un sistema $\{\varphi_k\}$ ortonormal completo, $\Phi_{\{\varphi_k\}} : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2$, $\psi \mapsto (\langle \psi, \varphi_k \rangle)_{k=1}^{+\infty}$ es un isomorfismo isométrico –lineal, inyectivo, sobreyectivo, conserva normas- que a cada función de onda le asocia un vector (von Neumann: 1949, 41).

y como deduce Dieudonné (1981, 173), si los operadores ondulatorios $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ verifican sobre su dominio común en L^2 que $\widetilde{P}\widetilde{Q}-\widetilde{Q}\widetilde{P}=\frac{h}{2\pi i}\widetilde{1}$, igual relación verifican los operadores matriciales $\Phi(\widetilde{P})$ y $\Phi(\widetilde{Q})$ correspondientes por el isomorfismo de von Neumann en ℓ^2. De esta manera, en virtud del isomorfismo isométrico Φ, von Neumann logró salvar la equivalencia matemática entre MM y MO: la *isometría* entre los *espacios de estados* (vectores/funciones de onda) y la *isomorfía* entre los *espacios de observables* (matrices/operadores ondulatorios) construidos sobre aquéllos, y que ya intuyera Schrödinger con su monomorfismo algebraico Θ.

Por último, tras la equivalencia, von Neumann (1949, 23) también resuelve la cuestión de la unificación de MM y MO:

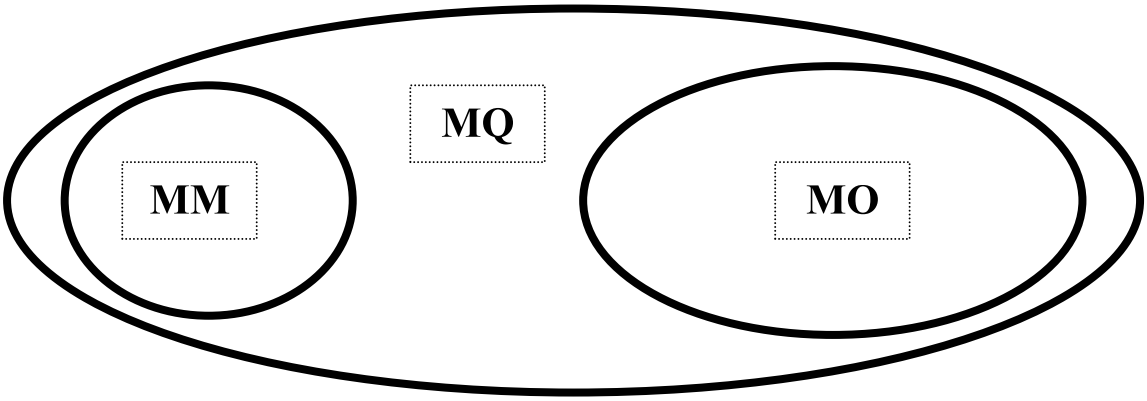
> Porque los sistemas F_Z y F_Ω son isomorfos, y matemáticamente equivalentes las teorías de la Mecánica cuántica edificadas sobre ellos, es de esperar que se logrará una estructura unitaria, independiente de lo accidental que resulta del marco formal en cada caso elegido, y que presente los rasgos positivamente esenciales de la Mecánica cuántica, cuando se busquen las propiedades intrínsecas, comunes a F_Z y F_Ω, de los conjuntos de funciones y se las elija, una vez halladas, como punto de partida.

Tras demostrar la isometría entre los espacios de estados (los espacios de Hilbert matricial y ondulatorio) y, por tanto, la isomorfía entre los espacios de observables (las álgebras de operadores matriciales y ondulatorios) que operan sobre esos espacios, von Neumann constata que los operadores cuánticos –en particular, el operador derivada o momento- no suelen estar definidos sobre todo el espacio de Hilbert, pero que a cambio su dominio es «denso» en él.[46] Esto le lleva a recuperar gran parte de los resultados cosechados en sus artículos escritos entre 1927 y 1929. En efecto, en su libro, lleva más lejos el estudio de los operadores lineales cuyo dominio no es todo el espacio de Hilbert sino sólo un subconjunto denso en él. Von Neumann construye una nueva teoría de operadores que reforma la teoría clásica de autovalores de cara a conjurar los espectros continuos. De hecho, viene a extender la teoría de Hilbert sobre «resoluciones de la identidad» (es decir, sobre familias de funciones, denominadas proyecciones, que reflejan las propiedades de los espectros discreto y continuo), de los operadores acotados (continuos) a los operadores no acotados (como ya es, sencillamente, la energía cinética, cuyo espectro es no acotado, pues la energía no está acotada por arriba). Von Neumann demostró, crucialmente, que todo operador hermítico (acotado o no) puede siempre extenderse a uno maximal que poseerá exactamente una o ninguna resolución de la identidad. Además, probó que los operadores cuánticos son hipermaximales (es decir, en lenguaje matemático actual, autoadjuntos, que están contenidos en los hermíticos, que son una clase más amplia); con otros términos, que ya son maximales y siempre poseen una resolución de la identidad, lo que garantiza la unicidad en el problema espectral (von Neumann: 1949, 175). Mientras que Dirac mantenía la ficción de que todo operador autoadjunto podía reducirse a la forma diagonal (como operador integral), soslayando así el problema del espectro continuo gracias a la función impropia delta, von Neumann lo demostró apodícticamente.

La gran meta del magisterio de von Neumann fue, precisamente, alcanzar esta unificación canónica largo tiempo buscada y no encontrada (Schrödinger, Eckart,

[46] A fuer de ser rigurosos, advirtamos que von Neumann descubre que la correspondencia de Schrödinger-Eckart entre operadores de MM y MO sí funciona si sólo se pide que sus dominios sean «densos» (Muller: 1997b, 237).

Jordan, Dirac...), que siguiendo una ocurrencia de Muller (1997b, 242) podemos ilustrar así...



7. Conclusión

Tras la unificación de MM y MO en la MQ abstracta concebida por von Neumann, las primitivas mecánicas pervivieron como reminiscencias en los tratados mecánico-cuánticos posteriores. Por ejemplo, en Davydov (1965) o en Bohm (1989), todavía se atisban como «imágenes» a la Dirac de la MQ de von Neumann. Sin embargo, con el paso del tiempo, se aprecia que los manuales suelen optar por un formalismo *á la* MO y, antagónicamente, una interpretación *á la* MM. Dicho en corto, se emplean más las funciones de onda de Schrödinger que las matrices de Heisenberg, pero, a cambio, aquéllas se interpretan en el sentido de éste. En efecto, el *principio de indeterminación* de Heisenberg, el *principio de complementariedad* de Bohr y la interpretación estadística de la función de onda de Born, junto al postulado de proyección de von Neumann, acabarían por sedimentar en la conocida Interpretación de Copenhague, que tanto molestara a Einstein y que aún permanece en pie tras los experimentos de Aspect.

Las páginas que anteceden han pretendido mostrar, desde la perspectiva de una filosofía «interna» de la ciencia, cómo este caso de estudio ofrece mayor riqueza en vértices y aristas de la que muchos científicos, filósofos e historiadores de la ciencia han creído percibir. Y será esta mayor fertilidad aquello que nos capacitará para destilar las relevantes consecuencias filosóficas que se derivan para el debate realismo-instrumentalismo centrado en el ámbito de la física.

Figura 6. Congreso Solvay de 1927: Olimpo de los físicos cuánticos. En primera fila (sentados), Planck y Einstein aparecen como segundo y quinto, respectivamente, contando por la izquierda. En segunda fila, Bohr y Born aparecen como primero y segundo contando por la derecha. Y, en tercera fila (en pie), Heisenberg y Schrödinger están en tercero y sexto lugar empezando a contar por la derecha

CAPÍTULO 4

CONTRA EL REALISMO CIENTÍFICO ESTRUCTURAL

La semejanza perfecta sugeriría un fenómeno
especular y, por tanto, especulativo.

Vladimir Nabokov, *Ada o el ardor*

Cuando la Concepción Sintáctica de la Ciencia (Sintactic View) cayó, la visión de las teorías científicas como cálculos de proposiciones dejó paso a su visión como conjuntos de modelos. Había nacido la Concepción Semántica (Semantic View). Esta nueva corriente en filosofía de la ciencia creció de manos de la metodología estructuralista, hija de la Teoría de Modelos y hermana de las Matemáticas de Bourbaki (quienes comprendían la Matemática como la ciencia de las estructuras). Mientras que en las Islas y en América el Estructuralismo (Structuralism) conllevó una exploración sistemática de la noción de modelo, en el Continente desembocó en la noción de red teórica de la Escuela Germana (Balzer, Moulines, Stegmüller: 1987). Patrick Suppes (1957, 294) fue uno de los primeros en concebir las teorías científicas como colecciones de modelos. En su axiomatización de la mecánica newtoniana de partículas el término *sistema* ya se emplea –como señala Thomson-Jones (2006, 530)- en un sentido por completo análogo al de *modelo*.

Si las teorías científicas son conjuntos de modelos $T = \{M_1, M_2, M_3, ...\}$, la relación que las teorías guardan con el mundo es de *representación*; puesto que los modelos buscan, supuestamente, representar los fenómenos. Desde la concepción de los modelos como estructuras semánticas, la representación científica es una *representación estructural*, es decir, los modelos representan los fenómenos cuando comparten –en cierto sentido que hay que precisar- la misma estructura (Elaine Landry en van Fraassen (2006, 536)). El Estructuralismo de la Concepción Semántica conduce, pues, a la visión de la ciencia como representación del mundo. Pero, como señala Van Fraassen (2006, 536 y ss.), la noción de representación constituye un serio problema para el Estructuralismo, tanto en su versión realista (Structural Realism) como en su versión antirrealista (Structural Empiricism): «¿cómo puede una entidad abstracta, como un espacio matemático, representar algo que no es abstracto, algo natural?» (van Fraassen: 2006, 537). A la hora de resolver este problema, la metodología estructuralista se bifurca en dos ramas: por un lado, una toma de postura empirista; y, por otro lado, una toma de postura realista (Brading & Landry: 2006, 577-578).

El *realista estructuralista* sostiene, según Van Fraassen (2006, 539), que los modelos matemáticos no hacen sino *pintar* o *copiar* las estructuras matemáticas que ya están en la Naturaleza. En palabras de French & Saatsi (2006, 556): «el realismo estructural es la idea de que nuestras mejores teorías *representan* el mundo de modo aproximadamente correcto» (cursivas mías). La formulación original del «realismo estructural» se debe a John Worrall (1989), a quien debemos la denominación (Psillos: 1999, cap. 7), aunque Allan Chalmers también la empleó para referirse a su cercano realismo científico en los noventa (Chalmers: 1998, 228). Worrall (1989) sostenía que las estructuras matemáticas de la ciencia *reflejan* fielmente cómo las entidades reales se relacionan entre sí, por cuanto las teorías nuevas retienen la estructura matemática de las teorías antiguas. Con sus propias palabras: «las ecuaciones expresan relaciones y si las ecuaciones siguen siendo verdaderas es porque las relaciones siguen siendo reales» (Worrall: 1989, 118). Chalmers remarcaba, por su parte, que «la ciencia es realista en el sentido de que intenta *representar* la estructura de la realidad» (Chalmers: 1998, 229; cursivas mías). Esta idea estaba, como recoge Votsis (2005, 1362), en germen en Bertrand Russell, para quien las relaciones entre percepciones reflejaban –en el sentido de guardar las mismas propiedades lógico-matemáticas– las relaciones entre cosas físicas, resultando isomorfas la estructura de nuestra percepción y la estructura del mundo físico. A menudo, como apunta Ladyman (2007), Poincaré e, incluso, Duhem son también citados como pioneros del realismo estructural. Sin embargo, tal y como indica Ladyman (1998), el realismo estructural de Worrall (1989) permanecía encerrado en un plano *epistémico*, mientras que el realismo estructural de nuestro tiempo –encabezado por Steven French y James Ladyman- rebasa ese plano y toma una genuina posición *ontológica* y *metafísica* (aparte de que, como constatan French & Ladyman (2003, 33), el primero transcurría por los cauces de la Concepción Heredada, mientras que el segundo asume la Concepción Semántica). Por decirlo con Psillos (2006, 561), el realista estructural de nuestros días abraza un «estructuralismo óntico», que consiste en afirmar con Da Costa & French (2003, 189) que «todo lo que *hay* es estructura» y que nuestras teorías científicas son capaces de capturar las estructuras *existentes* en el Universo. Resumiéndolo con Newman (2005, 1375): «el realismo estructural rechaza el instrumentalismo porque contempla la estructura matemática de nuestras teorías como una *representación* verdadera de las relaciones entre entidades inobservables, no meramente como un recurso de cálculo para generar predicciones» (cursivas mías). Ahora bien, el realista estructuralista tiene que explicar con precisión en qué consiste esta noción realista de representación que continuamente invoca; porque, de lo contrario, no habrá respondido a la pregunta de cómo puede una estructura matemática representar, de modo realista, con verosimilitud, una estructura física. Más abajo vamos a ver cómo, en los últimos años, se han venido proponiendo múltiples relaciones estructurales (isomorfismo, isomorfismo parcial, homomorfismo…) para dar cuenta de la relación entre los modelos M y los sistemas del mundo real S, y con ello responder la pregunta de arriba.

Por su parte, el *empirista estructural* –o *instrumentalista estructural*, como Thomas Ryckmann (2005) prefiere denominarlo- parte de que «la ciencia representa los fenómenos empíricos como incrustaciones en ciertas estructuras abstractas» (van Fraassen 2006, 536). A la hora de explicar en qué consiste esta representación o incrustación, el antirrealista estructural puede cometer exactamente el mismo error que el realista, es decir, imponer que la relación de representación atañe a los modelos M y a los sistemas reales S. El propio van Fraassen (2006, 539) reconoce que este fue su gran error en van Fraassen (1980): la adecuación empírica no consiste en que la estructura de los modelos sea isomórfica a la estructura de las apariencias, de los fenómenos observables. Esto último es ir demasiado lejos. Es recaer en la metafísica. No hay por qué exigir que la Naturaleza tenga estructura y que, además, la estructura del Universo se adecue a la que nosotros queremos. Al antirrealista le basta con pedir que la estructura de los modelos M_t de la teoría sea isomórfica a la estructura de los modelos M_d de los datos. Van Fraassen (2002, 252) sugiere que es suficiente con identificar los fenómenos con la modelización de los datos: «el modelo de los datos es como si fuese un fenómeno secundario creado en el laboratorio que se convierte en el fenómeno primario a ser salvado por la teoría». Con esto, según van Fraassen (2006, 543-544), la dificultad de contestar cómo un modelo abstracto puede representar algo que no es abstracto se evapora. Los científicos siempre están tratando con modelos abstractos, unas veces de las teorías y otras veces de los datos, pero nunca van más allá. La adecuación empírica no es, pues, la adecuación de los modelos teóricos M_t con el mundo observable, sino con los propios modelos M_d de los fenómenos. Ahora bien, el problema es que esta clase de réplica nos lleva de cabeza al idealismo filosófico, como apunta Hacking (1996, 303). Aparte de que la propia distinción entre modelos M_t de la teoría y modelos M_d de los datos resulta muy problemática; porque, como Portides (2005, 1296-1297) ha puesto de manifiesto en relación con la física nuclear, esta distinción puede oscurecer el análisis de muchos casos de estudio de la historia de la ciencia (en el fondo, la distinción de van Fraassen no hace sino resucitar aquella otra de los términos en teóricos y no-teóricos, en teóricos y observacionales). Van Fraassen (2006, 546) replica, desde una posición cercana al pragmatismo de William James, que situado «en un contexto en que un modelo dado es mi representación del fenómeno, no hay ninguna diferencia entre la cuestión de si la teoría se ajusta a esa representación y la cuestión de si se ajusta al fenómeno». Pero, como aducen Brading & Landry (2006, 575-576 y 578), no puede confundirse la relación que guarda el modelo teórico M_t con el modelo M_d de los datos, que se da en términos de *presentación* de la estructura compartida, con la relación que el modelo M_d de los datos –y, en su caso, también el modelo M_t de la teoría- guarda a su vez con los propios fenómenos, y que es del tipo *representación*. Tanto el estructuralista realista como el estructuralista empirista están obligados a contestar a la pregunta por la conexión de los modelos M con los sistemas del mundo S; con otras palabras, a elucidar qué quieren decir cuando hablan de *representación*. Brading & Landry (2006, 578):

> La versión empirista del estructuralismo científico evita la cuestión de por qué debería asumirse que el fenómeno es representado por los modelos de los datos, simplemente mediante el colapso de cualquier distinción entre ambos, y así no ofrece ninguna justificación de por qué tal identificación debiera ser presupuesta como posible. Creemos que es necesario, para cualquier intento de moverse más allá de una postura metodológica, dar una explicación de qué nos permite, en primer lugar, hacer una identificación entre los fenómenos y los modelos de los datos.

En resumidas cuentas, si se acepta que la ciencia es representación, necesariamente hay que explicar cómo los modelos representan (la estructura de) los fenómenos, tanto si se entiende el término *fenómeno* en un sentido realista (es decir, afectando a lo observable y lo inobservable) como si se hace en un sentido más próximo al antirrealismo (sin rebasar lo empírico).

Nuestro objetivo en este cuarto capítulo es, primero, esbozar una teoría de teorías de la representación científica –adentrándonos en la «teoría matemática de las representaciones, que constituye una base sólida para la concepción representacional de la ciencia» (Echeverría: 1999, 195)- y, segundo, formular, a partir de lo explicado en los capítulos 2 y 3 (en donde se trató detalladamente la equivalencia entre MM y MO), un argumento contra el realismo científico. Pero, atención, no contra toda variedad de realismo –lo que, haciendo uso del contenido del capítulo 1, sería caer en el mito del realismo científico-, sino contra el *realismo estructural*, que acabamos de presentar y que está muy en boga en el círculo de la filosofía internacional de la ciencia a tenor del número de publicaciones en los últimos años (Votsis (2008) constituye una bibliografía exhaustiva a propósito del realismo estructural).

1. Teorías matemáticas de la representación científica

Construir una teoría de teorías de la representación científica supone realizar una clasificación de las principales teorías de la representación científica que han sido propuestas en los últimos treinta años. Para el buen fin de esta tarea necesitamos recurrir a algún criterio (filosófico) que nos permita catalogarlas. A falta de otro mejor, recurriremos a ordenar la amplia colección de teorías de la representación científica de acuerdo a la clase de esquema lógico-matemático que presenten, porque como observa Echeverría (1999, 201): «la teoría matemática de la representación se ha convertido en una de las principales bases teóricas de la concepción representacional en filosofía de la ciencia». En efecto, dejando de lado los precedentes tradicionales que menciona Díez Calzada (1998), fue Mundy (1986) el que impulsó decisivamente la investigación filosófica de este nuevo campo:

> Mi creencia personal es que una teoría general de la representación, en último término, puede desempeñar una función en la epistemología y la filosofía de la ciencia comparable a la que ha desempeñado la teoría de modelos en la filosofía del lenguaje. (Mundy: 1986, 391-392)

El denominador común que muestran la mayoría de las teorías de la representación científica es la búsqueda de un esquema lógico-matemático, como instrumento capaz de recoger los aspectos más interesantes de la representación en ciencia, cada vez más universal, más general, en dos palabras, más abstracto. Por ejemplo, por este motivo, y sirviéndonos del cómodo convenio notacional propuesto por Suárez (2003b)[47], se pasa de [*iso*] a [*iso parcial*] y de [*iso parcial*] a [*homo*]. Antes de realizar una exposición pormenorizada de cada noción representacional concreta, queremos explicar cierto rasgo característico que, a nuestro juicio, arroja empeñarse en esta búsqueda. Resulta posible trazar la siguiente jerarquía con respecto a las relaciones –de mayor o menor universalidad: cuanto menor sea el número asignado, más general, más abstracta, más primitiva, será la noción representacional- que guardan entre sí las diversas concepciones representacionales:

<u>*perspectiva algebraica*</u>	<u>*lógico-conjuntista*</u>	<u>*geométrico-topológica*</u>
5. [*iso*]		
4. [*iso parcial*]		3'. [*homeo*]
3. [*homo*]		
	2. [*sim*]	
	1. [*funct*]	

En primer lugar, obsérvese que el orden resultante no es un orden *lineal* sino *parcial* (¡aparecen dos ramas!) y, en segundo lugar, que nada puede seducirnos para que dejemos de sospechar la posibilidad lógica de una noción hipotética 0.[*xyz*] que supere en abstracción a las mentadas y que, además, pueda seguir interpretándose como candidata a recoger los rasgos fundamentales de la representación científica. En resumen, si se nos consiente la comparación, el objetivo de la investigación en teoría matemática de la representación científica nos recuerda a la búsqueda física de los constituyentes últimos de la materia: de los *indivisibles* átomos pasamos a las partículas *elementales*, de las partículas *elementales* a los quarks, de los quarks a los *prequarks* y las cuerdas, o supercuerdas, o supersimetría... ¿por dónde andan los ladrillos básicos del Universo?

1.1 *Isomorfismo* [*iso*]

La concepción de la representación como isomorfismo fue propuesta por Max Black (1962) y puesta al día por Bastiaan van Fraassen en su obra titulada *The Scientific Image* de 1980 (van Fraassen: 1980, cap. 3; 1989, cap. 9). Desde entonces ha pasado a formar parte de la imaginería clásica de teorías de la representación científica. Para van Fraassen (1980, 64), «presentar una teoría es especificar una familia de estructuras, sus *modelos*; y en segundo lugar, especificar ciertas partes de esos modelos (las *subestructuras empíricas*) como candidatos para la representación directa de los fenómenos observables [...] la teoría es empíricamente adecuada si tiene un modelo tal que todas las apariencias son isomórficas a las subestructuras empíricas del modelo». Las subestructuras empíricas de los modelos aspiran a representar *isomórficamente* la estructura de las apariencias. Este par de ideas pueden extrapolarse formalmente tal y como consigna Suárez (2003b, 228): una estructura (conjuntista) S es una terna $<U, O, R>$ donde (i) $U \neq \varnothing$ es un conjunto cuyos elementos se denominan individuos del universo de la estructura, (ii) O es un conjunto (enumerable) de operaciones en U, y (iii) R es un conjunto (enumerable) de relaciones en U; por consiguiente, una estructura S representa a un sistema W si y sólo si la estructura S es isomórfica a la estructura $S_W = <U_W, O_W, R_W>$ que ejemplifica W, esto es, si existe un isomorfismo f: $U_W \rightarrow U$ (e. d. f es una aplicación biyectiva y preserva[48] tanto las operaciones como las relaciones, formalmente esto último podemos escribirlo como $(z_1, ..., z_n) \in r_W \in R_W \Leftrightarrow (f(z_1), ..., f(z_n)) \in f(r_W) \in R$). En este caso, llamamos modelo M del sistema W al par $<S, f> = <U, O, R; f>$, y llamamos teorías a los conjuntos de modelos (Prida: 2004, 137 y ss.).

1.2 *Similaridad* [*sim*]

Retomando ideas de Mary Hesse (1966), Ronald Giere abogó, en su obra *Explaining Science* de 1988, por abandonar [*iso*] por la concepción de la representación como semejanza, analogía o, en general, similaridad:

> Van Fraassen (1980) sugirió que la relación buscada es de isomorfismo. Ahora, seguramente no hay ninguna razón lógica por la que un sistema real no pueda ser de hecho isomórfico a algún

---

[47] Respectivamente, [*iso*], [*sim*], [*iso parcial*], [*homo*], [*homeo*] y [*funct*] denotarán las teorías de la representación científica que comprenden la relación que hay entre las representaciones y lo representado como isomorfismo, similaridad, isomorfismo parcial, homomorfismo, homeomorfismo y functorialidad.

[48] Como es habitual en Teoría de Conjuntos, empleamos *preservar* en sentido bicondicional (⇔).

> modelo. Pero, por ejemplo, para ninguno de los ejemplos citados en los textos estándar de mecánica hay una afirmación de isomorfismo. Además, habitualmente los manuales señalan explícitamente en qué aspectos el modelo deja de ser isomórfico al sistema real. En otras palabras, con frecuencia los manuales descartan explícitamente las afirmaciones de isomorfismo. Si queremos hacer justicia a las propias presentaciones de la teoría de los científicos, tenemos que encontrar una interpretación más débil de la relación entre el modelo y el sistema real. Sugiero que la relación apropiada es de similaridad. Las hipótesis, entonces, afirman una similaridad entre los modelos y los sistemas reales. (Giere: 1988, 80-81)

Se puede enunciar formalmente [*sim*] como sigue: un modelo *M* definido por una teoría *T* representa a un sistema *W* si y sólo si *M* es similar a *W*, id est, si existen propiedades $P_1, ..., P_n$ (con $n > 0$) tales que $P_1(M) \wedge ... \wedge P_n(M) \wedge P_1(W) \wedge ... \wedge P_n(W)$. En los últimos tiempos, Ronald Giere ha suavizado el naturalismo de [*sim*] suministrándole cierta dosis de pragmática. Así, en Giere (2002) y (2004), se ensalza el rol del sujeto como agente intencional que realiza la actividad en que consiste la representación. En franca contraposición con la 2-aria relación en que se hacía consistir [*sim*], Giere cifra ahora la siguiente 4-aria relación como aspirante a captar la esencia de [*sim*]: *R=(X, W, S, P) es una representación si y sólo si S usa X para representar W con propósitos P*; donde *X* es un modelo científico, *W* cierto aspecto del mundo real, *S* un científico o una comunidad científica, y *P* ciertas metas que éste o ésta se proponen (Giere: 2004, 747). Pero no hará falta llamar la atención sobre que el *representar* de la 4-relación sigue remitiendo a la clásica representación como similaridad antes mostrada. En efecto, según Giere (2004, 748), «es la existencia de similitudes específicas lo que hace posible el uso del modelo para representar el sistema real». Y es que, a nuestro entender, pese a que Teller (2001, 401) afirme que «la demanda de una definición general de similaridad no puede ser conocida ya que lo que va a contarse como una similaridad relevante depende de los detalles de cada caso concreto», creemos que en aras del rigor ha de poder ofrecerse una definición *común* de [*sim*] que sortee las trabas que su poca precisión saque a la luz.

1.3 *Isomorfismo parcial* [*iso parcial*]

El programa de estructuras parciales de Steven French, Newton da Costa, Otávio Bueno y James Ladyman (French 2000; Bueno, French & Ladyman: 2002; da Costa & French: 2003) supera, con su apelación al isomorfismo parcial, algunas de las dificultades que atenazaban a los partidarios del isomorfismo (total). En efecto, al ser la relación de isomorfismo estructural tan fuerte, la más mínima imprecisión representacional provocaba que la relación de isomorfismo entre el modelo y el mundo dejara de existir y, con ello, que el modelo fuera declarado falso. Pero, en múltiples ocasiones, los científicos construyen modelos útiles, pero que representan los sistemas reales con alguna imprecisión; es decir, modelos útiles pero falsos, que no guardan una relación completa de isomorfismo con el sistema modelizado. La existencia de idealizaciones supone un serio escollo para [*iso*]. Y es justo aquí en donde la flexibilidad de [*iso parcial*] permite superar esta dificultad: los modelos idealizados *representan*, porque guardan una relación de isomorfismo *parcial* con el sistema (da Costa & French: 2003, 102). En suma, en un intento de purgar [*iso*] de los males que la aquejaban y que [*sim*] había puesto al descubierto, Steven French optó por debilitar las condiciones de isomorfismo hasta llegar a lo que se conoce como [*iso parcial*]. Una estructura parcial (conjuntista) *S* es una terna $<U, O, R>$ donde (i) $U \neq \varnothing$ es un conjunto cuyos elementos se denominan individuos del universo de *S*, (ii) *O* es un conjunto (enumerable) de operaciones en U, y (iii) R es un conjunto (enumerable) de relaciones parciales en U ($r = <r_1, r_2, r_3>$ es una n-relación parcial en U sii r_1 contiene a las n-tuplas de U que caen bajo r, r_2 contiene a las n-tuplas de U que no caen bajo r y r_3 contiene a las n-tuplas de U que no se sabe si cumplen r) (Bueno, French & Ladyman: 2002, 498; da Costa & French: 2003, 19). Por consiguiente, una estructura parcial S representa a un sistema W si y sólo si es isomorfa parcialmente a la estructura parcial $S_W = <U_W, O_W, R_W>$ que ejemplifica W, esto es, si existe un isomorfismo parcial f: $U_W \rightarrow U$ (e. d. f es una aplicación biyectiva y preserva tanto las operaciones como las relaciones parciales, formalmente esto último puede escribirse como $\forall$ j $\in$ {1, 2, 3} $(z_1, ..., z_n) \in r_{Wj} \in r_W \Leftrightarrow (f(z_1), ..., f(z_n)) \in f(r_{Wj}) \in f(r_W)$) (Bueno, French & Ladyman: 2002, 499). Como antes, llamamos modelo M al par $<S, f>$ y llamamos teorías a los conjuntos de modelos $\{M_i : i \in I\}$. Y si, como señala French (2004), $\forall r$ ($r_{W3} = \varnothing$), recuperamos la noción estándar de estructura y de isomorfismo (total). Sin embargo, pese a que [*iso parcial*] posee una mayor versatilidad que [*iso*], Pincock (2005, 1255-1258) y Cartwright & Suárez (2008) muestran que aún existen muchos casos de modelos matemáticos idealizados cuya relación con los sistemas reales a duras penas puede ser explicada mediante la advocación a un hipotético isomorfismo parcial.

1.4 *Homomorfismo* [*homo*]

Brent Mundy (1986) desarrolló, como va dicho, esta orientación con el ambicioso propósito de dotar a la filosofía de la ciencia de una teoría matemática de la representación que fuese de tanta utilidad como a la filosofía del lenguaje es la teoría de modelos. Formalmente, una estructura S representa a un sistema W si y sólo si la estructura S es homomorfa a la estructura $S_W = <U_W, O_W, R_W>$ que ejemplifica W, e. d. si existe un homomorfismo h: $U_W \rightarrow U$ (esto es, h es una aplicación tal que $\forall o_W \in O_W$ $h(o_W(z_1, ..., z_n)) = h(o_W)(h(z_1), ..., h(z_n))$ y $\forall r_W \in R_W$ $(z_1, ..., z_n) \in r_W \Rightarrow (h(z_1), ..., h(z_n)) \in h(r_W) \in R$) (Mundy: 1986, 395; Bartels 2006, 10). Como h no ha de ser necesariamente una biyección ni preservar –en sentido bicondicional- todas las operaciones y todas las relaciones, resulta que la noción representacional de homomorfismo es más general que la de isomorfismo: todo isomorfismo es un homomorfismo, pero no todo homomorfismo es un isomorfismo. Recientemente incluso ha sido propuesta una noción de homomorfismo entre estructuras parciales: [*homo parcial*] (Bueno, French & Ladyman: 2002, 503). El problema estriba en determinar hasta qué punto una serie de nociones tan débiles como [*homo*] o [*homo parcial*] están en condiciones de capturar los rasgos esenciales de la representación científica (Psillos: 2001, 13-16).

1.5 *Homeomorfismo* [*homeo*]

Javier Echeverría (1998) afirma que, frente a las habituales aproximaciones de carácter algebraico a la cuestión representacional, resulta preferible una aproximación geométrica, topológica. Una topología $\wp$ en un conjunto X es una familia de subconjuntos –denominados *abiertos*- tales que: (i) X, $\varnothing \in \wp$; (ii) las intersecciones finitas de elementos de $\wp$ permanecen en $\wp$; y (iii) las uniones arbitrarias de elementos de $\wp$ permanecen en $\wp$. De este modo, diremos que un espacio topológico $(X, \wp)$ representa a un sistema W que ejemplifica la estructura topológica $(X_W, \wp_W)$ si y solamente si son homeomorfos, es decir, si existe un homeomorfismo h: $X_W \rightarrow X$, e. d., h es biyectiva, continua ($\forall O \in \wp \quad h^{-1}[O] \in \wp_W$) y abierta ($\forall O_W \in \wp_W \quad h[O_W] \in \wp$). Llamaremos modelo al par <(X, $\wp$); h>. En concreto, Echeverría (1998, 106) aplica estas conceptualizaciones al estudio de las imágenes visualizadas mediante ordenadores: «las unidades representacionales de la pantalla son los *pixels*: en el caso de imágenes monócromas, cada *pixel* incluye un *bit*, por lo que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio topológico digitalizado y los puntos del espacio topológico de la pantalla». Desde luego, [*homeo*] presenta una gran virtualidad, pero aún no se ha realizado un estudio sistemático de sus posibilidades reales.

1.6 *Homología o representación functorial* [*funct*]

Desde la Teoría de Categorías, como no reducible a Teoría de Conjuntos, Andoni Ibarra y Thomas Mormann (2000) plasman la noción de homología como pilar de la representación científica. $\mathfrak{I}$ es una categoría si: (i) existe una clase $Obj(\mathfrak{I})$, cuyos elementos se llaman objetos de la categoría y que, en general, no forman conjunto; (ii) para cada par de objetos (A,B) de $\mathfrak{I}$, existe un conjunto $Hom(A,B)$ de morfismos de A en B; y (iii) existe una ley de composición de morfismos tal que, para cada terna de objetos (A,B,C) de $\mathfrak{I}$, asocia a cada $f \in Hom(A,B)$ y a cada $g \in Hom(B,C)$ un morfismo denominado composición $g \circ f \in Hom(A,C)$, cumpliendo las condiciones de que a) $\forall A \in Obj(\mathfrak{I})$ existe un morfismo identidad $1_A \in Hom(A,A)$ tal que $\forall B \in Obj(\mathfrak{I})$ $\forall f \in Hom(A,B)$ $\forall g \in Hom(B,A)$ ($f \circ 1_A = f \ \wedge \ 1_A \circ g = g$) y de que b) $\forall f \in Hom(C,D)$ $\forall g \in Hom(B,C)$ $\forall h \in Hom(A,B)$ se da ($f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ –asociatividad-. $\mathfrak{R}$ es un functor entre dos categorías $\mathfrak{I}$ y $\aleph$ si transforma los objetos de $\mathfrak{I}$ en objetos de $\aleph$ y si $\forall A,B \in Obj(\mathfrak{I})$ y $\forall f \in Hom(A,B)$ $\mathfrak{R}f \in Hom(\mathfrak{R}A, \mathfrak{R}B)$, satisfaciendo, además, que $\mathfrak{R}1_A = 1_{\mathfrak{R}A}$ y que dados $f{:}A \rightarrow B$ y $g{:}B \rightarrow C$ se tiene que o bien $\mathfrak{R}(g \circ f) = \mathfrak{R}g \circ \mathfrak{R}f$ –functor covariante- o bien $\mathfrak{R}(g \circ f) = \mathfrak{R}f \circ \mathfrak{R}g$ –functor contravariante-.

Consideremos una categoría de objetos *empíricos* (digamos los E-objetos), una categoría de objetos *teóricos* (digamos los T-objetos), un morfismo e de E en E' (que simbolizará un proceso empírico), un morfismo t de T en T' (que simbolizará un proceso teórico), y una transformación $\mathfrak{R}$ de objetos y morfismos entre ambas categorías (que, como precisaremos, será el functor encargado de simbolizar la representación); entonces, podemos concebir el siguiente diagrama homológico:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathfrak{R}"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & T \arrow[d, "t"] \\ E' \arrow[r, "\mathfrak{R}"'] & T' \end{tikzcd}$$

...y exigir, como propiedades que ha de poseer, que: (1) $\mathfrak{R} \circ e = t \circ \mathfrak{R}$ (la conmutatividad pedida al diagrama homológico expresa el hecho de que $t \circ \mathfrak{R}$, las consecuencias *intelectualmente* necesarias, ha de coincidir con $\mathfrak{R} \circ e$, las consecuencias *naturalmente* necesarias)[49]; (2) $\Re(e' \circ e) = \Re e' \circ \Re e$ (es decir, la *combinación* de diagramas homológicos, de representaciones científicas, funciona como esperamos); (3) $\Re 1_E = 1_{\Re E}$ (es decir, no podemos inferir teóricamente nada que no tenga correspondencia óntica en el campo empírico). De este modo, por (2) y (3), $\Re$ es un functor covariante; y, por (1), adquiere características propias de la representación científica.

Según Suárez (2004): «las ventajas de la homología con respecto al isomorfismo son varias: el objeto y la fuente de la representación no tienen que ser el mismo tipo de entidad, y no necesitan ser estructuras; y la relación entre ambos no tiene que ser estructural». Sin embargo, ciertas sombras acechan a [*funct*], como consecuencia de obstinarse en *naturalizar* la representación científica encontrando una noción lógico-matemática que la respalde. Pese a que Ibarra & Mormann (2000), al igual que Suárez (2004), insistan una y otra vez en que la representación homológica sólo conserva cierta semejanza lógica (≠ semejanza estructural), sostenemos que ni mucho menos es así, ya que el functor $\Re$ –que simboliza la representación- *proyecta por homología* cierta estructura categórica a su imagen (por ejemplo: los objetos se transforman en objetos, los morfismos en morfismos...). Es más, sospechamos que el *ejemplo estrella* de representación homológica que los autores entresacan de la topología algebraica –la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer- debilita, más que refuerza, su posición, puesto que en la prueba *hay* homología –las técnicas empleadas al tratar los primeros grupos de homotopía de las variedades implicadas[50]- pero *no hay* representación –la inexistencia del retracto del disco en su frontera impide la construcción del diagrama homológico que sería, según su definición, señal inequívoca de representación[51]-; de otra forma, no alcanzamos a comprender cómo compaginar la formulación de [*funct*] con esta aplicación matemática.

En resumen, acabamos de repasar sucintamente las teorías sobre la representación científica que varios filósofos de la ciencia han venido desarrollando durante los últimos años, incluyendo las propuestas por Bas van Fraassen, Ron Giere, Paul Teller, Steven French, James Ladyman, Otávio Bueno, Newton da Costa, Brent Mundy, Javier Echeverría, Andoni Ibarra y Thomas Mormann; con más precisión: las concepciones estructuralistas de la representación científica como isomorfismo, similitud, isomorfismo parcial, homomorfismo, homeomorfismo y homología (functorialidad).

2. Un argumento contra el realismo estructural

La crítica al estructuralismo realista puede encauzarse a través de dos canales. Por un lado, por medio de argumentos lógicos. Por otro, por medio de argumentos filosóficos entresacados de la historia de la ciencia. Como ilustración de argumento del primer tipo reseñamos el que certeramente construye Suárez (2003b, 232-233): contra la visión de la representación científica como [*iso*], [*sim*], [*iso parcial*], [*homo*], [*homeo*] ó

[49] En rigor, debiera escribirse $\Re e(\Re K) = t(\Re K)$ para todo $K \in E$, aunque respetamos la notación de Ibarra & Mormann (2000).

[50] Ibarra & Mormann (2000, 32): «Esta prueba del teorema del punto fijo de Brouwer, que hace un *uso esencial* de la representación homóloga de las variedades por sus grupos fundamentales, es un sencillo ejemplo de aplicación de la representación homóloga» (cursivas nuestras).

[51] Ibarra & Mormann (2000, 32): «Es claro, sin embargo, que esto [se refieren a la construcción del diagrama homológico] *no* es posible» (cursivas nuestras).

[*funct*] puede esgrimirse que ésta atribuye gratuitamente a aquélla ciertas propiedades formales. En efecto, si la representación fuese isomorfismo, entonces habría de ser reflexiva, simétrica y transitiva. Y, sin embargo, la representación no parece ser ninguna de estas tres cosas. No es reflexiva porque, por ejemplo, el modelo geográfico de mapa terrestre no se representa a sí mismo, y no tanto por causas empíricas (alta dificultad de tal atlas) cuanto por razones lógicas: el mero intento de representar el mapa en el mapa conduce a un absurdo *regressus* infinito (precisamente al Mapa de Royce que asombraba a Jorge Luis Borges). No es simétrica porque, por ejemplo, el modelo de cráneo de Oken representa los cráneos de los 6.000 millones de vertebrados humanos que actualmente poblamos el planeta pero, por contra, no existen 6.000 millones de representaciones del modelo okeniano vagando a sus anchas por el mundo. Ni tampoco transitiva, porque la transformación del panadero representa, cuando trazamos la gráfica de sus ecuaciones, al gato de Arnold y éste representa, cuando miramos su dibujo, a nuestro gato Nabokov pero, como es natural, la transformación del panadero no representa a nuestra mascota –este *exemplo* nos fue sugerido por la lectura de Frigg (2002)-.

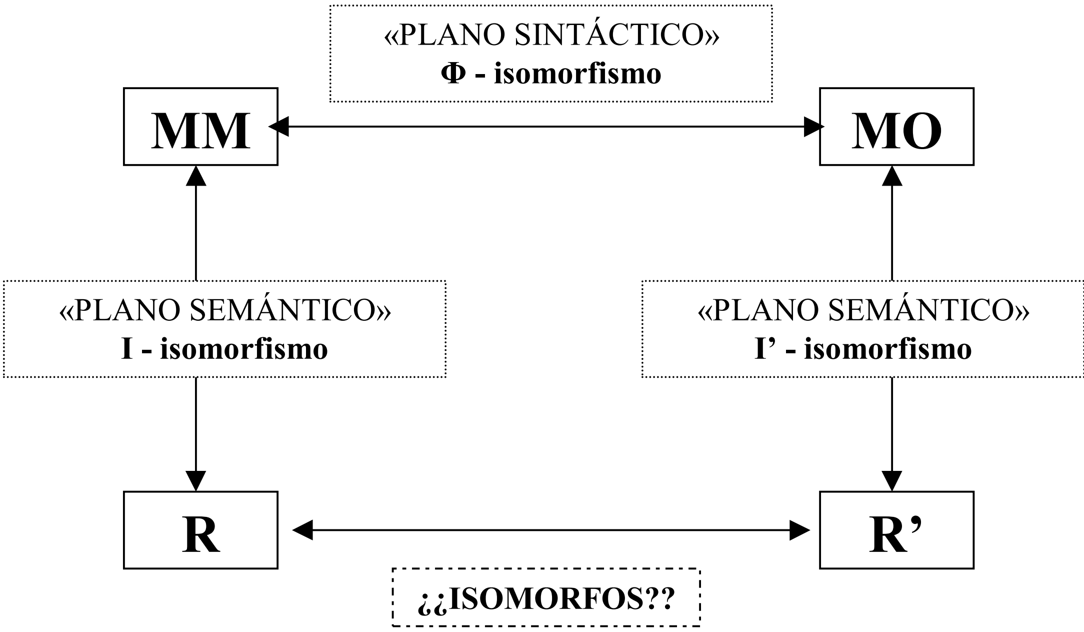
Sin embargo, nuestro prometido argumento contra el realismo científico estructuralista transitará por la otra vía. Será construido a partir de la consideración de los modelos matemáticos MM y MO de la Mecánica Cuántica, que estudiamos en el capítulo anterior; pues pensamos que esta clase de argumento presenta mayor beligerancia al atacar en su propio terreno al realismo estructural, ya que lo confronta con ejemplos entresacados de la historia reciente de la física.

2.1 Sketch del argumento (I)

Si dos modelos teóricos M y M' son isomorfos, entonces los sistemas reales R y R' que, supuestamente, representan también han de ser isomorfos (o, en su defecto, homeomorfos, homomorfos, homólogos o similares). A grandes rasgos, el núcleo del argumento consiste en preguntarse lo siguiente: si el par de modelos teóricos MM y MO son isomorfos, porque son *equivalentes matemáticamente*, entonces... ¿sus *elementos de realidad* son también isomorfos? ¿las imágenes ontológicas del mundo que ambos modelos prescriben son isomorfas?

Consideremos MM y MO, es decir, los dos principales modelos teóricos de la física cuántica. Sabemos que ambos son *formalmente equivalentes* o, con mayor precisión, *matemáticamente equivalentes*, y que entre sus estructuras matemáticas existe un isomorfismo. Isomorfismo que, como estudiamos, construyó von Neumann y denotamos por Φ. Supongamos, ahora, que el realismo estructural de Steven French, James Ladyman y otros es correcto y que, por tanto, la teoría de la representación científica como [*iso*] es cierta (más adelante veremos que el argumento también funciona para [*iso parcial*], [*homeo*], [*sim*], [*homo*] y [*funct*]). Por consiguiente, la relación que la estructura matemática del modelo MM (análogamente, MO) guarda con la estructura física del sistema real R (análogamente, R') que aspira a representar de modo realista es de isomorfismo (denotemos estos isomorfismos por I e I' respectivamente).

Gráficamente, condensamos estos datos como sigue:



Ahora bien, como es conocido, la composición de isomorfismos da isomorfismo. En consecuencia, la respuesta a la cuestión que plantea el diagrama es afirmativa. En efecto, R y R’ son isomorfos, porque la composición[52] $I' \circ \Phi \circ I$ es un isomorfismo entre R y R’ (en virtud de I pasamos de R a MM mediante isomorfismo, en virtud de Φ pasamos de MM a MO mediante isomorfismo y en virtud de I’ pasamos de MO a R’ también mediante isomorfismo). Podemos esquematizar el razonamiento de la siguiente manera:

«MM y MO son formalmente equivalentes»
«La relación entre modelo y realidad es de isomorfismo»

«R y R’ resultan ser isomorfos»

Pero, *realmente*, ¿son R y R’ isomorfos? Necesitamos contrastar lo que aquí hemos deducido con lo que arroja el estudio comparado de MM y MO.

2.2 MM *versus* MO

De raíz conviene tener claro que MM y MO son, como sintetiza Lahera (2004, 56), «dos métodos matemáticos distintos que convergen en sus resultados». De acuerdo a la cartografía que diseñamos cuando los estudiamos por separado, clasificamos las diferencias que exhiben bajo tres rúbricas: sintácticas, semánticas y pragmáticas.

2.2.1 Diferencias sintácticas entre MM y MO

MM y MO muestran *términos*, *operaciones* y *relaciones* sintácticas de naturaleza muy distinta, sin perjuicio de que ambas teorías sean matemáticamente

[52] Sin pérdida de generalidad suponemos que los isomorfismos están definidos en el sentido que precisamos.

equivalentes. Tanto Jammer (1989, 270) como Bombal (1999, 132) concuerdan en que MM presenta un enfoque *algebraico* (porque se utilizan matrices y el problema paradigmático consiste en diagonalizar una matriz), mientras que MO presenta un enfoque *analítico* (porque se emplean funciones de onda y el problema paradigmático reside en resolver una ecuación diferencial). Drago & Venezia (2002, 250) proponen distinguir ambos enfoques no sólo con respecto a sus resultados –perfil de la matemática plasmada- sino también con respecto a sus planteamientos: mientras que MM se articula en torno a una serie de problemas –en un tipo de organización que bautizan como «problemática»- y sólo emplea el infinito potencial, MM se organiza deductivamente –en un tipo de organización axiomática que denominan «aristotélica»- y emplea el infinito actual. Además, según de Blas López (2000), MM y MO constituyen dos teorías dimensionalmente diferentes, porque el término teórico representante del estado del sistema presenta distinta dimensión en cada una de ellas, a pesar de que ambas teorías sí son del mismo orden dimensional.[53]

2.2.2 Diferencias semánticas entre MM y MO

MM y MO se diferencian en sus *referenciales*, pero comparten idénticos *fenómenos* y *estructuras* en virtud de su equivalencia empírica. En esto suelen mantenerse posiciones cercanas a la de Fernández-Rañada (2004, 184): «mientras que la Mecánica de Matrices ponía el énfasis en los aspectos discretos, corpusculares y discontinuos del mundo atómico, la Mecánica de Schrödinger lo ponía en los aspectos continuos, apoyándose en las ondas de materia». Mientras que MM acentuaría el carácter *corpuscular* y *discontinuo* del microcosmos, MO pondría el énfasis en su carácter *ondular* y *continuo*. Sin embargo, albergamos dudas con respecto a este común enjuiciamiento y disentimos de una interpretación claramente *corpuscular* de MM: si Heisenberg (1925) prescinde de la toma en consideración de la posición o del periodo de revolución del electrón (en razón de su inobservabilidad), está prescindiendo de su carácter corpuscular (debido a que éste presupone ineludiblemente una localización espacio-temporal). De hecho, Muller (1997b, 228-229) apunta:

> El hecho de que las matrices P y Q fueran llamadas «los análogos cuánticos del momento y la posición» respectivamente y que la ecuación de Born-Jordan se llamara todavía «una ecuación del movimiento» fue, a lo sumo, un modo de rendir una última señal de respeto a la mellada nave de la física clásica –porque las matrices *discretas* son, en jerga del positivismo lógico, *términos teóricos*, que no se supone que correspondan a nada en la realidad atómica-.

Jammer (1989, 270) percibe este dilema, pero termina decantándose por la típica interpretación *corpuscular* de MM: «a pesar de su renuncia a la descripción clásica en el espacio y en el tiempo, la Mecánica Matricial fue una teoría cuya concepción básica fue el *corpúsculo*». Sin embargo, como expusimos, Heisenberg y Pauli tardaron en casarse con una *visión* corpuscular del mundo subatómico (de hecho, el espacio cotidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ de MO carece de contrapartida en MM), pero Born y Jordan sí lo hicieron desde muy pronto (posiblemente, movidos por el conocimiento de los experimentos de colisión de partículas de Franck). En resumen, a nuestro entender, el rasgo corpuscular de MM ha de ponerse entre comillas. Pero aceptamos sin reparos que MM y MO difieren notablemente en lo tocante a la *continuidad* en el mundo atómico, de facto, ya se dio cuenta de ello Schrödinger (1926b):

[53] Con más exactitud, ambas resultan ser de orden 5, pues su base B={E, h, L, q, S} posee cinco elementos.

> En el trabajo de Heisenberg las variables clásicas continuas son reemplazadas por conjuntos discretos de magnitudes numéricas (matrices), que dependen de un par de índices enteros y están definidos por ecuaciones *algebraicas*. Los propios autores describen la teoría como una «verdadera teoría de lo discontinuo». Por su parte, la Mecánica Ondulatoria muestra justamente la tendencia contraria; es un paso desde la mecánica clásica de partículas hacia una *teoría de lo continuo*. En lugar de un proceso descrito en términos de un número finito de variables dependientes de un cantidad finita de ecuaciones diferenciales, tenemos una suerte de *campo continuo* en un espacio de configuración gobernado por una única ecuación en derivadas parciales deducida de un principio de acción. (Schrödinger: 1982, 45-46)

En suma, mientras que MM es una teoría de lo *discontinuo*, MO es una teoría que nos dibuja un mundo *continuo* (Cropper: 1970, 90).

2.2.3 Diferencias pragmáticas entre MM y MO

En primer lugar, MM y MO se distinguen por sus *normas*. Las reglas y los principios de cálculo de MM están influidos por la dinámica newtoniana (Bombal: 1999, 132) y consisten en *técnicas algebraicas* (MM postula una operación no conmutativa). Por el contrario, las normas de cómputo de MO provienen de la mecánica de fluidos (Bombal: 1999, 132) y consisten en *técnicas analíticas* (MO postula una ecuación en derivadas parciales).[54] Además, a juicio de Drago & Venezia (2002, 251), esto se plasma en que, por decirlo con términos escolásticos, las lógicas *materiales* (≠*formales*) de MM y MO divergen: la lógica intrincada en MM sería *intuicionista* y, sin embargo, la de MO sería *clásica*. En segundo lugar, MM y MO también se distinguen por sus *autologismos*. Frente a la *heurística de la observabilidad* implementada en Heisenberg (1925), la *heurística de la intuitividad* de Schrödinger (1926). Y en tercer lugar, por extraño que parezca, MM y MO casi no se diferencian en sus *dialogismos*. Ambos bandos (defensores de MM y defensores de MO) reaccionaron con idéntico y visceral odio hacia el otro formalismo cuántico.

Por último, indiquemos con Fernández-Rañada (2004, 92-3) que:

> Desde el punto de vista científico y con la perspectiva de hoy, no hay razones que justifiquen el enfrentamiento. Los estudiantes aprenden ahora la teoría cuántica en una forma general, desarrollada independientemente por Jordan y Dirac y conocida como teoría de las transformaciones, que incluye a las dos teorías como casos particulares con el nombre de imágenes de Heisenberg o de Schrödinger, usándose las dos según conviene a cada caso. [...] Pero en 1926 sí había motivos para la polémica desde el punto de vista conceptual pues, aun siendo muy clara la equivalencia matemática, los dos bandos sostenían puntos de vista muy diferentes sobre los postulados físicos y las interpretaciones de los formalismos.

El cuadro que se ofrece a continuación sistematiza las diferencias buscadas y encontradas:

[54] A fin de cuentas, como comenta Michel Paty (2002, 97), MQ no es sino el «entraînement de la pensée physique par les formes mathématiques».

DIFERENCIAS	MM	MO
“SINTÁCTICAS”	Método Algebraico Cálculo Matricial Matrices Infinito Potencial	Método Analítico Cálculo Diferencial Funciones Infinito Actual
“SEMÁNTICAS”	Discontinuidad Corpúsculos	Continuidad Ondas
“PRAGMÁTICAS”	Observabilidad	Intuitividad

2.3 Sketch del argumento (II y final)

Tras el estudio comparado de MM y MO, retomamos el hilo de nuestro argumento. Concluyendo que, a la luz de sus diferencias, sobremanera semánticas (discontinuidad / continuidad, suspensión del juicio o corpúsculos / ondas, &c.), R y R’ no son ni pueden ser isomorfos. Si R y R’ fuesen isomorfos, sus estructuras deberían tener la misma cardinalidad, como es matemáticamente bien conocido. Pero esto no es así. La estructura de R es a lo sumo numerable, porque su dominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ al ser R discreto (conjunto de corpúsculos, como MM asevera), mientras que la estructura de R’ posee al menos la cardinalidad del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, porque R’ es continuo (ondas, como MO afirma). En símbolos,

$$|R| \leq \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0} \leq |R'| .$$

Así que resulta imposible que R y R’ sean isomorfos. A pesar de su equivalencia matemática, MM y MO prescriben estructuras e imágenes ónticas incompatibles. MM y MO no son *ontológicamente equivalentes*.

Aunque tanto Worrall (1989) como Ladyman (1998) sostienen que, de acuerdo con el realismo estructural, las teorías científicas capturan la estructura del mundo, pero que capturar la estructura del mundo es compatible con introducir ontologías radicalmente distintas, porque una misma estructura puede ser instanciada de diferentes maneras, defendemos que nuestra argumentación funciona tanto contra los realistas estructuralistas que aceptan los compromisos ontológicos (y, en este caso, han de reconocer que las ontologías de los sistemas R y R’ no casan: partículas *adversus* ondas) como contra aquellos que se resisten a aceptarlos (y, en este caso, basta con que reconozcan que las estructuras de R y R’ no son isomorfas, porque una es discreta y otra es continua). Sin embargo, mantenemos que no se puede ser realista con respecto a las estructuras y, al tiempo, antirrealista con respecto a los objetos que contienen. Por decirlo en términos clásicos: la forma es inseparable de la materia. Para Chakravartty (1998), este «semirrealismo» es altamente inestable, porque el realismo acerca de las estructuras (structural realism) implica el realismo acerca de las entidades (entity-realism).[55] En efecto, uno no puede creer que ciertas relaciones estructurales son reales a menos que también acepte que ciertas cosas están relacionadas: si una relación es cierta, los elementos de que se predica han de existir. No es posible que las estructuras se mantengan y, simultáneamente, las entidades vengan y vayan con total libertad. Según Chakravartty (1998), la distinción entre la verdad de las relaciones y la verdad acerca de los *relata* no marcha: «si dos teorías poseen la misma estructura, o la estructura de una teoría se preserva en una segunda, las entidades teóricas invocadas por la primera pueden ser transportadas en contrapartidas de la segunda» (Chakravartty: 1998, 401-402). La idea de Worrall de que lo que se conserva a través del cambio científico es la estructura matemática –las ecuaciones se preservan o sobreviven como casos límite- y no su contenido, siendo diferentes ontologías compatibles con una misma estructura, dista de ser cierta, ya que toda estructura matemática conlleva aparejada una carga ontológica. No es lo mismo que los elementos estructurales de MM o MO sean matrices discretas –que remiten a una ontología discontinua o corpuscular- que sean funciones continuas –que remiten a una ontología continua u ondulatoria-; o, dicho de otra manera, que el espacio substrato sea $\mathbb{N}$ o sea $\mathbb{R}$. De todos modos, empero que mi «argumento de la cardinalidad» funciona sin necesidad de comprometer ontológicamente al realismo estructural.

Esquematizamos el próximo paso de nuestro razonamiento así:

A ≡ «MM y MO son formalmente equivalentes»
B ≡ «La relación entre modelo y realidad es de isomorfismo»
C ≡ «R y R' son isomorfos»

1.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	(deducido antes)
2.	$\neg C$	(deducido ahora)
3.	$\neg A \vee \neg B$	(modus tollens)

Y, habida cuenta que A está atado y bien atado, como analizamos de la mano de von Neumann, solamente cabe inferir ¬ B, esto es, *la relación entre modelo y realidad no es de isomorfismo*, como pretende el realista estructural partidario de [*iso*].

Además, nuestro argumento también marcha contra una interpretación más débil de la relación entre modelos y sistemas. Si cambiamos [*iso*] por [*iso parcial*], [*homeo*], [*sim*] o [*funct*], las cosas no marchan mejor para el realista estructural, ya que el isomorfismo isométrico Φ de la equivalencia matemática demostrada por von Neumann implica, al ser tan *fuerte*, nociones más *débiles* como isomorfismo parcial, homeomorfismo, similaridad o, simplemente, homología. Luego R y R' seguirán guardando, en teoría, tal relación. Y, sin embargo, R y R' siguen sin ser, en la práctica, isomorfos parcialmente, homeomorfos, similares o, simplemente, homólogos.

En efecto: si abandonamos [*iso*] por [*iso parcial*], lo único que cambia es que estamos introduciendo estructuras parciales en lugar de estructuras (totales) a la hora de modelizar R y R'; pero si dos estructuras parciales R y R' son isomorfas parcialmente, tienen que tener el mismo cardinal, porque todo isomorfismo parcial es una biyección. Y, sin embargo, R y R' no tienen el mismo cardinal. El «argumento de la cardinalidad» vuelve a funcionar. De hecho, los propios Bueno, French & Ladyman (2002, 503) reconocen que «el uso de isomorfismos para caracterizar la noción de adecuación empírica es inapropiado, dado que de hecho ocurre que la cardinalidad de los dominios de las subestructuras empíricas y de los modelos de los fenómenos no es generalmente

[55] Equivalentemente, en términos de nuestro primer capítulo: el realismo de teorías implica el realismo de entidades, es decir, $\boldsymbol{R_t} \rightarrow \boldsymbol{R_e}$.

el mismo [...] llamamos a este argumento la objeción de la cardinalidad». Tras reconocer que cualquier intento de caracterizar la relación entre los modelos y los sistemas en términos de isomorfismos está abocado al fracaso, French, Ladyman y Bueno buscan distintas salidas «formales»: por un lado, Bueno opta por relajar la noción de adecuación empírica para salvar [*iso parcial*]; pero, por otro lado, French y Ladyman prefieren abandonar [*iso*] e [*iso parcial*] y buscar otra noción de representación que se ajuste mejor a la adecuación empírica. Retomando la propuesta de Mundy (1986), Bueno, French y Ladyman (2002, 503) recurren a [*homo*] y formulan la noción de homomorfismo parcial [*homo parcial*]. El problema es, como asegura Psillos (2001, S13-S16), que esta noción es demasiado débil para legitimar la inferencia realista. En efecto, mientras que un isomorfismo es bidireccional, un homomorfismo es unidireccional. Los homomorfismos proyectan las propiedades del dominio en el rango o recorrido; pero, a diferencia de los isomorfismos, no garantizan que las propiedades del rango o recorrido se conserven en el dominio. Si la relación entre la teoría (dominio) y el mundo (recorrido) se caracteriza empleando homomorfismos, se garantiza la deducción de arriba abajo (teoría→mundo) pero no de abajo arriba (mundo→teoría), con lo que la inferencia realista («la teoría *captura* la estructura del mundo») es ilegítima. El mundo podría tener mucha más estructura que la teoría. Sin una relación representacional fuerte (de isomorfismo), los realistas estructurales tienen muy difícil establecer cualquier clase de inferencia sobre la estructura del mundo a partir de la estructura de nuestras teorías sustentándose en que «la ciencia *refleja* la realidad casi a modo de espejo» (Brown: 1994).

En el caso de [*homeo*], el isomorfismo de von Neumann entre MM y MO es, de hecho, isométrico y, por tanto, homeomórfico. Si R es homeomorfo a MM, MM es homeomorfo a MO, y MO es homeomorfo a R', entonces R y R' han de ser necesariamente homeomorfos. En consecuencia, como todo homeomorfismo es una biyección, también han de tener idéntico cardinal. Pero ¿cómo van a ser R y R' homeomorfos si presentan distinta cardinalidad?

Centrándonos en [*sim*], es trivial que MM y MO son similares puesto que comparten la propiedad de ser isométricos e isomorfos, y estamos en condiciones de deducir otra contradicción. Si suponemos que R es similar a MM, MM es similar a MO y MO es similar a R', entonces R y R' deben de ser similares. Pero, ¿en qué aspectos concretos son similares? El hecho de que los modelos teóricos MM y MO concuerden en sus predicciones empíricas sobre consecuencias observables de R y R' (espectros cuánticos) no tiene nada que ver con sus consecuencias inobservables, tales como si los sistemas fenoménicos bajo investigación exhiben una continuidad o discontinuidad esenciales. Es decir, de facto, existe una disimilaridad insalvable entre R y R', que se sigue del hecho de que MM y MO están asociados con realidades profundamente distintas (partículas *vs.* ondas, discreto *vs.* continuo).

Por último, avanzamos que R y R' ni siquiera satisfacen la deflacionaria homología [*funct*], porque, como advertimos, los estados del sistema físico presentan distinta dimensión en MM y en MO, encontrándonos ante dos entidades homónimas no homólogas, matiz que bloquea la construcción del diagrama functorial al no coincidir las consecuencias intelectualmente necesarias con las consecuencias empíricamente necesarias –dicho en corto: no hay ni representación functorial porque el diagrama de arriba no puede cerrarse entre R y R'-. Otra clase de morfismo que falla a la hora de caracterizar la relación entre la teoría y el mundo.

Resumiendo: *MM y MO son equivalentes matemáticamente, pero tanto las estructuras como las ontologías que prescriben no son equivalentes, es más, son incompatibles*. De hecho, Otávio Bueno, uno de los principales colaboradores de los realistas estructurales Steven French y James Ladyman, ha valorado esta clase de cuestiones y ha sopesado la conveniencia de abandonar el realismo estructural por un estructuralismo de corte empirista. En lugar de MM y MO, Bueno (2001) compara la Mecánica Cuántica de John von Neumann (von Neumann: 1955), cuya estructura matemática es –como vimos- la teoría de espacios de Hilbert, con la Mecánica Cuántica de Hermann Weyl (Weyl: 1931), cuya estructura matemática es la teoría de grupos. Tras constatar su equivalencia, concluye desde la perspectiva del realista estructural:

> La opción final es ser realista *tanto* con respecto a los espacios de Hilbert *como* con respecto a las estructuras de grupo empleadas en Mecánica Cuántica. Pero este paso entraña numerosas dificultades. Primeramente, no hay un único *cuadro* o *representación* («picture») del mundo cuántico asociado con estos dos tipos de estructura. Necesitamos una *interpretación* de la Mecánica Cuántica que explore esta clase de cuestión. Pero el hecho de que hay una pluralidad de interpretaciones es suficiente indicador de que el formalismo mecánico-cuántico es incapaz de establecer la cuestión acerca de qué *cuadro* ofrece la teoría. En otras palabras, no basta con aferrarse al formalismo y afirmar que las estructuras que éste satisface son aquellas en que cree el realista estructural. *Sin una interpretación*, ningún cuadro nítido emerge del formalismo. [...] En segundo lugar, la Mecánica Cuántica está ciertamente más unificada con la introducción de la teoría de grupos, y algunas cuestiones ontológicas (por ejemplo, sobre las partículas cuánticas) pueden ser mejor abordadas desde la teoría de grupos. Sin embargo, los espacios de Hilbert también son necesarios (por ejemplo, para introducir la probabilidad en la teoría cuántica). Pero el estatus ontológico de estos espacios está lejos de ser claro. Tales espacios ofrecen ciertamente una importante forma de *representar* los estados de un sistema cuántico; pero ¿por qué debería ser esto un motivo para creer en la *existencia* de algo así como los espacios multidimensionales de Hilbert en la realidad? ¿Por qué la *utilidad* de una representación va a ser un argumento de su *verdad*? (Bueno: 2001, 7-8)

Análogamente, nosotros podemos concluir que, si se supone con el realista estructural que la ciencia representa la estructura *metafísica* del mundo, entonces la Naturaleza sería –como aduce Rivadulla (2004, 182)- «esquizofrénica»; puesto que los modelos teóricos MM y MO de nuestro caso de estudio son lógica y estructuralmente incompatibles, pese a ser empíricamente equivalentes y, para más INRI, matemáticamente equivalentes. La Ciencia como Representación, con mayúscula, tiene mucho de *rara avis*. No parece plausible seguir defendiendo que los modelos de la física teórica, dicho así, sin precaución alguna, *representan*, por el mero hecho de ser modelos. El propósito de estos modelos, como sostuvo Carnap (1966, 176), no es representar sino formalizar. Ya Moritz Schlick (2002, 17, 25 y 27) observó que el conocimiento del Universo, en cuanto alcanza niveles macro y microcósmicos, ha de renunciar a asentarse sobre la idea de representación. Evitar los callejones sin salida del realismo estructural no es difícil, basta seguir el consejo de Rorty:

> Deberíamos restringir el término *representación* a cosas como mapas y códigos –cosas para las que pueden explicitarse reglas de proyección que emparejan unos objetos con otros objetos y que expresan de ese modo criterios de representación adecuada-. Si extendemos la noción de representación más allá de tales cosas, nos consumiremos con un montón de preocupaciones filosóficas, que no tenemos por qué tener. Concretamente, si nos interesamos por las reglas de proyección que conectan oraciones como $F = m \cdot a$... con trozos de realidad, no vamos a ningún sitio.[56]

3. Conclusiones

[56] Cita en Ibarra & Mormann (1997, 285).

3.1 La carencia de una teoría de la representación como *quaestio facti*

Llegados a este punto, constatamos la *quaestio facti* de que ninguna teoría realista de la representación científica parece correcta. Cualquiera de las nociones representacionales invocadas por los realistas estructurales, desde [*iso*] hasta [*funct*], aparece lastrada por un ramillete de defectos lógicos y filosóficos, al no lograr dar cuenta del papel de los modelos teóricos en la historia de la física cuántica. ¿Qué hacer? Desde nuestro punto de vista, *dar un paso al frente*. Una de dos: o bien se reconoce que la Ciencia no es globalmente Representación pero puede serlo localmente, lo que abre la puerta a la exploración de algunos campos científicos mesocósmicos mediante diversas teorías de la representación científica; o bien se acepta, directamente, que la Ciencia no es Representación, no sólo como *quaestio facti* sino también como *quaestio iuris*.

3.2 La carencia de una teoría de la representación como *quaestio iuris*

El completo abandono del representacionismo del realismo estructural posibilita nuevos desarrollos para el debate realismo-antirrealismo en ciencia. Por ejemplo: Knuuttila (2005, 1262) indica que la mayoría de críticas a la noción de representación esgrimida por el realismo estructural (Frigg: 2002, 2006; Suárez: 2003b, 2004; van Fraassen: 2004, 2006) ponen el carro delante del caballo: estos estudios muestran las carencias de las diferentes especificaciones de la representación, pero se niegan a abandonar esta idea a la hora de analizar el papel de los modelos en ciencia. En cambio, Knuuttila (2005, 1266) prefiere considerarlos más bien como «artefactos», esto es, como «mediadores» entre la teoría y la realidad (Morgan & Morrison: 1999), que como «representaciones» de la realidad. Aceptar este rol de los modelos científicos no implica, necesariamente, deslizarse hacia una posición instrumentalista. La válvula de escape del realismo científico es postular un realismo *no* estructural, un realismo *sin* representación, como tendremos ocasión de estudiar en el capítulo 7, en donde volveremos la mirada a las teorías de la ciencia de Ian Hacking y de Gustavo Bueno.

Sea como fuere, algo es seguro... serán los ulteriores desarrollos de nuestras ciencias los que como siempre nos marquen el terreno fiable que ha de pisar la filosofía de la ciencia.

Caso II

La impredecibilidad en la Teoría del Caos

Aquello que puede ser controlado jamás es totalmente real,
lo que es real jamás puede ser controlado.

Vladimir Nabokov, *Ada o el ardor*.

CAPÍTULO 5

DEL BINOMIO DETERMINISMO / PREDECIBILIDAD

A veces aturde lo pasajeras que llegan a ser las ideas. A mediados de los años setenta, la gran mayoría de ecologistas hablaban de una inminente glaciación. Así, por ejemplo, Lowell Ponte en su elogiado libro *The Cooling*. De hecho, muchos investigadores afirmaban que la actividad humana, al aumentar el dióxido de carbono presente en la atmósfera, provocaría un acusado enfriamiento del clima: «Un aumento en solo un factor de cuatro en la concentración de fondo de los aerosoles puede bastar para reducir la temperatura de superficie en 3,5ºK... lo que se cree que basta para desencadenar una glaciación» (Rasool & Schneider: 1971, 138-141; en *Science*). A comienzos del siglo XXI, los ecologistas siguen hablando de cambio climático, pero el sentido de sus denuncias ha experimentado un giro de 180º. Supuestamente nos encontramos en medio de un imparable calentamiento global. Sin embargo, pese a lo extendida que está esta opinión, el calentamiento global no pasa de ser una hipótesis: la *hipótesis* de que el incremento de los niveles de dióxido de carbono está causando una subida de la temperatura media de la atmósfera a consecuencia del llamado *efecto invernadero*. Pero los datos son cualquier cosa menos concluyentes, y así sabemos hoy que la Antártida no sólo no está deshelándose sino que está enfriándose: «Desde 1986 hasta 2000 los valles centrales de la Antártida se enfriaron por década 0,7ºC... con un grave deterioro del ecosistema a causa del frío» (Doran & alea: 2002, 517-520; en *Nature*). Cabe pensar que la comprensión de la dinámica no lineal del clima, gracias a la Teoría del Caos, hará pararse en barras y ser más prudentes. Sobre todo cuando se repare en la impredecibilidad que subyace al caos determinista que domina los fenómenos climáticos: «En la investigación y la creación de modelos climáticos, debemos reconocer que nos enfrentamos con un sistema caótico no lineal, y por tanto las predicciones a largo plazo de los estados climáticos futuros no son posibles» (PICC: 2001, 774; *Panel Intergubernamental para el Cambio Climático de las Naciones Unidas*).

Ahora bien, para hablar con precisión en éste y en otros temas, ¿qué es exactamente el caos determinista?, ¿y la impredecibilidad asociada a él? A averiguar qué cabe entender por determinismo y qué por predecibilidad está dedicado el presente capítulo. Vamos a delimitar el alcance gnoseológico de esta pareja de conceptos tan presentes en la filosofía de la física separando los distintos planos filosóficos en que se mueven.

1. De los que confunden el determinismo con la predecibilidad

Hace ya casi dos siglos, Pierre-Simon de Laplace, el gran físico matemático que llegaría a Ministro del Interior de Napoleón, recogió el espíritu determinista que flotaba por encima de la Mecánica de Newton en un famoso pasaje que no está de más citar al completo:

> Debemos, pues, considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del siguiente. Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas de que se halla animada la Naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si, además, fuera lo suficientemente amplia como para someter estos datos a análisis, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más pequeño: nada le resultaría incierto y, tanto el futuro como el pasado, se hallarían presentes a sus ojos. La mente humana ofrece en la perfección que ha sabido dar a la Astronomía un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en Mecánica y en Geometría, junto al de la Gravitación Universal, han puesto a su alcance comprender en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo. (*Essai philosophique sur les probabilités*, París 1814, de las páginas del inicio.)

Laplace fue el primero en dar con la solución de las ecuaciones que explicaban todos los movimientos del Sistema Solar. Las anomalías orbitales de Saturno y Júpiter, que llevaron a Newton a pensar en la necesidad de que la Mano de Dios volviera a colocar cada planeta en su sitio tras desviarse, eran vistas por Laplace como perturbaciones que sólo dependían de la Ley de Gravitación. Así, al presentar su Mecánica Celeste al Sire, pudo colegir que Dios no era una hipótesis necesaria en su sistema del mundo, que acríticamente él creía plenamente predeterminado y estable.

En principio, en esta descripción del determinismo que Laplace dio inspirado por Newton, en que un demiurgo que conociera el estado actual del universo podría calcular su estado pasado o futuro con ayuda de las leyes de la mecánica, aparece reflejada una terna de sentidos de la idea de determinismo. Siguiendo más o menos a Kellert (1993, 50) y Lombardi (2002b, 9), cabe distinguir precisamente estos tres sentidos dentro del concepto laplaciano de determinismo:

- Un sentido matemático, muy presente en la Matemática del Caos, en el que determinismo equivale a *dinámica diferencial* y/o *evolución única*: el demiurgo laplaciano es capaz de conocer, mediante las leyes de la dinámica newtoniana, el único estado posible del universo en cualquier tiempo pasado o futuro.

- Un sentido físico, muy presente en la Física Cuántica, en el que determinismo equivale a *determinación de valores*: el demiurgo conoce al completo el estado del universo en este preciso instante.

- Y un sentido filosófico, presente en cuestiones éticas y morales, en el que el determinismo pasa por ser *ausencia de libre arbitrio*: para el demiurgo todo deviene prefijado de antemano, como en un mecanismo de juguete.

Dejando aparcado el tercer sentido, vamos a centrarnos en los dos iniciales. Nos detendremos especialmente en el análisis del primero, proponiendo un criterio que nos permitirá juzgar si un modelo físico-matemático es o no es determinista, y reservando la discusión del segundo para cuando abordemos el problema de la interpretación de la Mecánica Cuántica (esta reserva puede justificarse si aceptamos con Bishop (2002, 11) que este segundo sentido no es el corazón del determinismo por cuanto su eliminación no es siquiera garantía de indeterminismo). Sin embargo, este primer sentido de determinismo que tomamos por paradigmático dista años luz de ser un concepto claro y distinto, porque múltiples científicos y filósofos suelen confundirlo y oscurecerlo al no separarlo del concepto de predecibilidad.

Así es, y Rivadulla (2003, 251) da noticia de la tendencia generalizada a definir el determinismo por la predecibilidad cuando escribe:

> En términos generales el determinismo se entiende como la doctrina que afirma que todos los sucesos están gobernados por leyes causales, de forma que, conocidas sus condiciones iniciales, o su situación en un cierto momento, será posible *predecir* con exactitud su estado o posición en otro momento futuro, o incluso *retrodecir* su posición o estado en un momento pasado. Toda teoría, o incluso toda ciencia, capaz de producir *predicciones* de este tipo, se dice que es determinista [énfasis nuestro].

Entre los que confunden el determinismo con la predecibilidad ciframos a Popper, Prigogine y sus epígonos. Entre ellos, y entre nosotros, en España, Antonio Escohotado (2000, 12): «El determinismo dice que las mismas causas producen los mismos efectos, siguiendo todo sistema la pauta de sus condiciones iniciales, y siendo por ello calculable o adivinable [predecible]». La confusión llegó y ha llegado a tal extremo que Sir John Lighthill, inaugurando un congreso mundial de física aplicada, declaró: «Querríamos pedir excusas colectivas por haber engañado al público difundiendo ideas sobre el determinismo de los sistemas basados en las Leyes de Newton sobre el movimiento que desde 1960 se han revelado erróneas» (citado por Prigogine: 1999, 44).

En su intento por demostrar que la física clásica (incluyendo la teoría de la relatividad) deja lugar para el indeterminismo, autores como Popper o Prigogine u otros de filiación posmoderna[57] han confundido y confunden inapropiadamente el determinismo con la predecibilidad. En *The Open Universe*, Popper proclama que el determinismo laplaciano es insostenible por cuanto la composición de una obra artística como la *Sinfonía en Sol menor* de Mozart no es predecible. Popper (1982, 6) asegura que «la idea fundamental que subyace al determinismo científico es la de que la estructura del mundo es tal que todo evento futuro puede ser calculado racionalmente en principio por anticipado simplemente con que conozcamos las leyes de la naturaleza y el estado presente o pasado del mundo», y continúa puntualizando que como es un hecho inopinable que tanto la física clásica como la física cuántica se enfrentan a problemas cuyas soluciones son incapaces de predecir con exactitud matemática (por ejemplo, respectivamente, el problema de los tres cuerpos o el problema de los átomos multielectrónicos), cabe inferir que el determinismo no casa ni siquiera con la física clásica. Idéntica patología se manifiesta en Prigogine, que también desecha el determinismo por la impredecibilidad que subyace en grandes partes de la física y de la naturaleza. Abundando: según Primas (2002, 90), Max Born consideraba la Mecánica Clásica como no-determinista porque existen sistemas mecánicos no predecibles epistémicamente y Carnap, a su vez, igualaba causalidad y predecibilidad. Pero, ¿por qué equiparar gratuitamente el determinismo y la predecibilidad?

Frente a los que confunden sistemáticamente *determinismo* y *predecibilidad*, nosotros los distinguimos y nos alineamos, por esta causa, con René Thom (1990, 62-63), como más abajo vamos a ver, en su lucha con los «sectarios del caos» (Prigogine, Patrick Suppes...). *Determinismo* es un concepto *ontológico* que remite a la clase de legalidad que opera en el mundo prescrito por una cierta teoría física. *Predecibilidad* es un concepto *epistemológico* que remite a la capacidad humana –mediada por las

[57] Bricmont (1995) aporta nombres: Lyotard, Deleuze, Guattari, &c.

teorías[58]- de computabilidad. El determinismo refiere a lo que las cosas son en sí mismas, a la ontología, y la predecibilidad a lo que las cosas son para nosotros, a la epistemología. La ontología remite a la estructura y la evolución de un sistema real, mientras que la epistemología se refiere al conocimiento que de ambas poseemos los seres humanos. Determinismo y predecibilidad no quieren decir lo mismo.

Anticipando ideas que más adelante abordaremos: el determinismo se interesa por la existencia y unicidad de solución, esto es, por que el problema físico-matemático subyacente esté pre-*determinado*; y, por contra, la predecibilidad únicamente tiene que ver con la calculabilidad o computabilidad numéricas, con la obtención *explícita* de solución.

Por una vez, en lugar de argumentar *ad rem*, argumentemos *ad hominem* contra Popper, Prigogine y sus seguidores: si el determinismo quedara definido –como pretenden- por la predecibilidad, los denominados fenómenos de *caos determinista* serían en realidad *indeterministas* al ser *impredecibles*, pero el «caos determinista indeterminista» no es más que un «círculo cuadrado»: los sistemas caóticos son deterministas –sus ecuaciones garantizan la existencia y unicidad de solución- pero impredecibles –la inflación exponencial del error nos hace perder toda esperanza en nuestra capacidad de cálculo de la solución-. Es más, este mismo error también lo cometen muchos manuales de estadística y probabilidad al uso, por vía de ejemplo: Gamboa (2003, Tema 63) define como indeterministas aquellos fenómenos en que dos sistemas en condiciones iniciales próximas pueden evolucionar a estados finales muy distintos; pero, entonces, de nuevo resultaría que el caos determinista sería indeterminista, y aquí no hay medio ni efugio racional.

Dicho en corto, debemos cuidarnos de no confundir el determinismo con la predecibilidad y de no definir el primero haciendo mención al segundo. *Pace* Rivadulla (2003, 254) y Rañada (1998, 369), la fractura del determinismo sólo se ha producido en el frente cuántico[59], pues lo que han conculcado la Mecánica Estadística o la Teoría del Caos ha sido sencillamente la predecibilidad con un grado de precisión infinito, muchas veces identificada equívocamente con el determinismo debido al gran éxito de la Mecánica Clásica, capaz de permitirle a Gauss predecir la posición de Ceres con un error de sólo medio grado (Rañada: 1990, 547-8).

Esta grave invasión del terreno de la ontología por la epistemología que cometen Popper o Prigogine en sus obras de más calado filosófico, no cabe sino denunciarla como hiciera René Thom ante este último:

> *Thom*: Creo que debería usted distinguir muy cuidadosamente aquello que atañe a las matemáticas de aquello que atañe al mundo real. Las matemáticas no tienen nada que ver con el mundo real.
> *Prigogine*: Ése es su punto de vista, no el mío. (Wagensberg: 1985, 195)

Así, para Prigogine, el clásico lanzamiento de dados puede tomarse como ejemplo de proceso estocástico de naturaleza indeterminista. Pero basta pensar un poco detenidamente para percatarse de que, como apunta Thom (1986, 74), se trata en

---

[58] Las predicciones son deducciones de las teorías científicas *complementadas* con cálculos númericos extrateóricos; porque, por ejemplo, en múltiples ocasiones, las teorías físicas permiten *deducir* las ecuaciones que rigen un sistema pero no permiten *deducir* predicciones exactas, pues a lo mejor las ecuaciones no son resolubles y, entonces, las predicciones sólo llegan cuando se resuelven las ecuaciones de modo *aproximado*, mediante métodos de cómputo.

[59] Y aún aquí suponiendo que no nos acojamos a una interpretación determinista del formalismo cuántico como la de David Bohm. La refutación del determinismo se produce antes en tierras filosóficas que en terreno científico.

realidad de un proceso perfectamente determinista. El lanzamiento de un dado procede del mismo modo que el lanzamiento de una bola de cañón. Lo único que ocurre es que resulta difícil predecir o calcular cuál es la cara precisa del dado que vamos a observar. En algunos casos, la predicción o computación puede ser extremadamente costosa, pero esto no significa que el proceso no sea determinista. Hemos de distinguir la probable aleatoriedad de los productos (caras del dado) de la no-aleatoriedad del proceso (lanzamiento del dado). El determinismo es óntico pero la predecibilidad es epistémica, porque «una predicción incorrecta no refuta el determinismo, del mismo modo que una predicción correcta no lo verifica» (Atmanspacher: 2002, 66). Otro acierto de Thom y otro desacierto de Prigogine. ¡Qué manía con invadir el terreno de la ontología por la epistemología, cometiendo un error categorial (*categorical mistake*)! En palabras de Earman (1986, 7 y ss.) con las que concuerda Kellert (1993, 49):

> La historia de la filosofía esta llena de ejemplos en donde la ontología y la epistemología se han mezclado confusamente... La fabricación de un "sentido epistemológico" del determinismo es un abuso del lenguaje, dado que disponemos de un término perfectamente adecuado y más preciso (predicción), e invita potencialmente a una argumentación equivocada –por ejemplo, en cierto caso, la predicción no es posible y, por tanto, el determinismo falla-.

De hecho, esto último ocurre hasta en artículos muy recientes: «todo algoritmo llega un momento en que pierde su eficacia y se cae, en consecuencia, en el indeterminismo; y si los algoritmos se perfeccionan, entonces lo que estaba indeterminado llega a estar gradualmente determinado, hasta alcanzar un nuevo límite, y así sucesivamente» (Espinoza: 2007, 238). Alto ahí, un momento, ¿qué tiene que ver la capacidad predictiva del algoritmo con la propia determinación o indeterminación del sistema real? Absolutamente nada. La predecibilidad cae del lado de la *cosa-para-nosotros* (fenómeno), mientras que el determinismo lo hace del lado de la *cosa-en-sí* (noúmeno). No pueden solaparse los ámbitos epistemológico y ontológico.

Y por de pronto cabe citar a Baruch Espinosa (1632-1677) y a Luis de Molina (1535-1600) como pioneros, dentro de la tradición filosófica hispana, en distinguir determinismo y predecibilidad. En efecto. Es bien conocido que el materialismo de Espinosa diferencia el concepto ontológico de determinismo, propio del *Deus sive Natura*, del concepto epistemológico de predecibilidad que manejamos los hombres, y que sólo ha de ver con la limitada capacidad de anticipación que del movimiento de los cuerpos podemos hacernos (y de aquí la ilusión de la libertad, de los que sueñan con los ojos abiertos al creer que hablan o callan por su libre mandato). Por su parte, tampoco el pensamiento del insigne jesuita español es extraño a esta distinción. Dentro de la polémica del *auxilis* con los escolásticos salmantinos, Molina vendrá a decir que el indeterminismo es ontológico, ontoteológico, propio de Dios, propio del Ente por excelencia, por cuanto la omnipotencia divina queda recortada por la libertad humana. Y, sin embargo, esto no excluye la omnisciencia divina, que se manifiesta en que Dios conoce las decisiones humanas por medio de la ciencia media o ciencia de los futuribles, llamada así por cuanto se encontraría en un estado intermedio entre la ciencia de simple inteligencia y la ciencia de visión que distinguían los tomistas. Sus enemigos, los bañecianos –los discípulos seguidores del Padre Báñez-, al rechazar la ciencia media y mantener que Dios conoce con ciencia de visión cómo va a obrar el hombre –Dios sabe cómo va a obrar cada hombre porque previamente ha decidido a través de su decreto que obre de tal o cual modo–, se adhieren a la tesis del voluntarismo divino, consistente en equiparar determinismo y predecibilidad divinos.

Si Espinosa conjuga determinismo e impredecibilidad, Molina conjuga predecibilidad e indeterminismo, mostrando ambos cómo no puede hacerse esclavo el determinismo de la predecibilidad, ni viceversa. Es decir, para ambos, el determinismo no es lo mismo que la predecibilidad, como creen Popper o Prigogine, dos *bañecianos* en pleno siglo XX.

Con esto hemos querido mostrar cómo nuestra posición al respecto no es, ni mucho menos, algo radicalmente original en la historia de la filosofía. De hecho, la relevancia de los dos filósofos citados resulta realzada si tenemos en cuenta que se encuentran en el camino de la inversión teológica, que es el momento en el que los conceptos teológicos dejan de ser aquello por medio de lo cual se habla de Dios para convertirse en aquello por medio de lo cual hablamos del Mundo.[60]

Y, quizá, el motivo que ha llevado a tantos a identificar ingenuamente determinismo y predecibilidad sea el que apunta como objeto de investigación de Lorenzo (2000, 26):

> Habría que estudiar, por ejemplo, el papel que el empleo de las ecuaciones diferenciales y el concepto-núcleo de linealidad han podido tener para aceptar una causalidad donde el determinismo y la predicción se encuentran unidos y las repercusiones que estos elementos han tenido en el pensamiento en general.

Recogemos el guante.

2. Definiendo el determinismo y la predecibilidad

A continuación, teniendo muy presente que el plano ontológico y el plano epistemológico no son dos planos paralelos sino incidentes, vamos a perfilar nuestras ideas acerca del determinismo, la predecibilidad, la estabilidad, la reversibilidad...

2.1 Prolegómenos

Las teorías y los modelos teóricos de la física suelen construirse para estudiar los sistemas dinámicos que caen bajo su campo de investigación científica. Con la expresión *sistema dinámico* nos referimos a un sistema físico real que evoluciona con el tiempo, y no necesariamente a cualquier modelo matemático dado por un sistema de ecuaciones dinámicas. Privilegiamos, pues, la acepción física sobre la acepción matemática.

La evolución temporal de un sistema dinámico se formula, generalmente, en términos de ecuaciones dinámicas o de evolución, es decir, de ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo y que precisan de la especificación de unas condiciones iniciales y/o de contorno. Cuando se describe la evolución dinámica de un sistema con una ley diferencial, se puede decir que existe un espacio de fases que describe la totalidad de los estados posibles del sistema. En general basta con tomar este espacio, porque considerando la posición y el momento generalizados del sistema dinámico bajo estudio puede lograrse que cada punto de este espacio abstracto represente un posible estado del sistema. De todos modos, no conviene confundir el *espacio de fases* (q, p)

---

[60] No por casualidad, como recoge Guzmán (1998, 353), el gran matemático Felix Klein reconocía que las especulaciones de los escolásticos estimularon las investigaciones en múltiples campos del saber humano. Es más, Specker, uno de los autores del importante Teorema de Kochen-Specker-Bell en Mecánica Cuántica, relaciona su contenido con las preocupaciones escolásticas sobre los grados de conocimiento divino de la realidad: el Teorema KSB demuestra que no es posible la ciencia media de Molina; Dios no puede conocer los futuribles o futuros contingentes, por cuanto no estan determinados a escala cuántica.

con el *espacio de estados* (q, p, t) del sistema dinámico, que considera al tiempo como variable adicional. (Si abandonamos la Mecánica y nos sumergimos en la Termodinámica, el papel de q y p lo jugarán V, P y T (volumen, presión, temperatura) y, por tanto, el *espacio de fases* vendrá dado por (V, P, T) mientras que el *espacio de estados* por (V, P, T, t).) Cada posible evolución temporal de un sistema dinámico da lugar, entonces, a una trayectoria. La evolución temporal de un sistema dinámico se representa por una trayectoria en el espacio de fases desde su estado inicial (q_0, p_0) hasta su estado final (q_f, p_f). Además, si Ω es el espacio de fases del sistema dinámico, cada trayectoria determina una función $S:[t_0, t_f] \rightarrow \Omega$, $t \rightarrow S(t)$ que asocia tiempos con estados del sistema, con puntos de Ω. En resumidas cuentas, el estudio de un sistema dinámico consiste en presentar su evolución en el tiempo, la historia del sistema, que se corresponde con una trayectoria S(t) en el espacio de fases. Por ejemplo, para fijar ideas, si consideramos un péndulo sin fricción, es bien conocido que su trayectoria en el espacio de fases dibuja una elipse (en el espacio de estados, una espiral elíptica).

2.2 Determinismo

Determinismo es, como va dicho, un concepto *ontológico* que remite a la clase de legalidad que impera en los procesos del mundo prescrito por una cierta teoría o modelo de la física. Vamos a posponer la definición conjunta del determinismo hasta que estudiemos por separado sus dos subvariedades: el determinismo diferencial (dinámica diferencial), de herencia russelliana, y el determinismo único (evolución única), de herencia montagueana; estando ambos ya presentes en la definición laplaciana, como vimos.[61]

2.2.1 *Determinismo diferencial* (Russell, Thom)

En *On the notion of cause with applications to the free will problem*, 1953, Bertrand Russell subrayó que la idea básica en el determinismo era aquella de que «el pasado determina el futuro». Guiado por esta intuición, propuso que un sistema es determinista si su estado anterior determina su estado posterior, a la manera como el argumento de una función determina su valor. Es la condición de dependencia funcional. Formalmente, Guerrero Pino (2000, 204) sugiere que la propuesta russelliana quedaría así: un sistema es determinista si hay una función F tal que, para todo tiempo t y todo incremento positivo h, $S(t + h) = F(S(t), t, h)$, donde S(t) y S(t + h) representan, como más arriba, los estados del sistema dinámico en los tiempos t y t+h. El problema con esta definición es que, como pone de relieve Guerrero Pino (2000, 205) siguiendo a Bas van Fraassen, el tiempo aparece como variable independiente y, entonces, la definición la satisface trivialmente todo sistema, puesto que se ha partido de que S es ya una función y bastaría tomar $F(u,v,w) = S(v+w)$.

Nosotros vamos a abandonar la condición de dependencia *funcional* de Russell por la condición de dependencia *diferencial* de Thom. Porque, como pone de manifiesto la historia de la física matemática, los científicos habitualmente no manejan expresiones *explícitas* de los estados S del sistema dinámico (como Russell sugiere: S(t + h) =

[61] Lombardi (2002b, 9) denomina *determinismo semántico* a nuestro determinismo diferencial y *determinismo ontológico* a nuestro determinismo único; para, a continuación, acuñar el término *determinismo gnoseológico* para referirse a un *determinismo en sentido epistemológico* que no es sino... la predictibilidad (de nuevo, el determinismo y la predictibilidad se confunden irremediablemente).

$F(S(t), t, h)$) sino expresiones *implícitas* ($S(t)$ se halla, por ejemplo, tras resolver una ecuación diferencial: $dS(t)/dt = F(t, S(t))$ con $S(t_0) = (q_0, p_0)$).

En principio, siguiendo a René Thom (1985, 14-15), vamos a definir el determinismo como *determinismo diferencial*, con otras palabras, por la *dinámica diferencial* (DD), es decir, por la exclusiva utilización del cálculo diferencial para plantear un sistema de ecuaciones diferenciales cuya integración da la evolución temporal del sistema dinámico bajo estudio. «El carácter más o menos determinado de un proceso –defiende Thom (1977, 123)- se expresa esencialmente por la continuidad más o menos lisa (diferenciable) de la evolución de este proceso en función de las condiciones iniciales». La razón de tomar la dinámica diferencial como la expresión más genuina del determinismo radica en la propia historia de la ciencia: el cálculo diferencial fue, precisamente, creado para dar cuenta de la evolución de los estados de un sistema físico, en particular de la evolución del movimiento de un cuerpo. El determinismo diferencial, tomado como prototipo de determinismo, no sólo puede hacerse eco de la modelización mediante ecuaciones diferenciales, sino también por medio de ecuaciones en diferencias (si discretizamos la variable temporal continua) o, pongamos, ecuaciones integrales, que contengan al tiempo y no hagan referencia a la probabilidad.

La definición siguiente condensa esta intuición:

Definición *(Determinismo Diferencial)*
(DD) Una teoría científica es determinista si, y sólo si, recurre únicamente a la modelización mediante ecuaciones dinámicas (ecuaciones diferenciales) de la evolución de los sistemas dinámicos que se pretenden estudiar con dicha teoría. Recíprocamente, una teoría científica es indeterminista si no es determinista, esto es, si existen especificaciones complementarias (postulados) que restringen el dominio de validez de las ecuaciones dinámicas. Un sistema dinámico es determinista/indeterminista si es descrito correctamente por una teoría determinista/indeterminista.

Generalmente, el modelo matemático de un sistema dinámico vendrá dado por un sistema de ecuaciones dinámicas (diferenciales, en diferencias, integrales...) en conjunción con una serie de especificaciones complementarias (hipótesis, postulados... como el postulado de proyección de la función de onda). Si estas últimas no ponen restricción a la validez de la dinámica diferencial, estamos ante una situación genuinamente determinista. En caso contrario, nos encontramos ante una situación indeterminista.

Por ejemplo, a modo de ilustración, esta casuística ocurre precisamente en la teoría cuántica, en donde es bien conocido que el postulado de proyección declara inválida la ecuación de ondas justamente en el momento de la medida, cuando el indeterminismo cuántico aparece de súbito. Poincaré, que se había percatado de que el modo matemático de expresar el determinismo no es otro que recurriendo *exclusivamente* a la formulación de *ecuaciones diferenciales*, se mostró así de preocupado a su regreso del Congreso Solvay de 1911, tras conocer las sutiles y revolucionarias innovaciones cuánticas:

> Parece innecesario señalar cómo estas ideas difieren de las concepciones tradicionales; los fenómenos físicos dejarán de obedecer a leyes expresables por ecuaciones diferenciales y esto, indudablemente, será la mayor y más radical revolución en la filosofía natural desde los tiempos de Newton. (Bombal: 1999, 119)

Análogamente, en sus *Dernières Pensées*, Poincaré escribía perspicazmente seis meses antes de su muerte:

> Nos preguntamos ahora no sólo si las ecuaciones diferenciales de la dinámica deben modificarse, sino incluso si las leyes del movimiento pueden aún expresarse por medio de ecuaciones diferenciales... Se está cuestionando si no será necesario introducir discontinuidades en las leyes naturales, no sólo aparentes, sino esenciales. (Bombal: 1999, 119)

Al preguntarse si las ecuaciones diferenciales son o no son el instrumento adecuado para la formulación matemática de las leyes físicas, el genial Poincaré no estaba sino expresando, tal y como haría un matemático, sus dudas sobre la validez del determinismo (DD). Mismamente, el penetrante filósofo y sociólogo soviético de la ciencia Boris Hessen advertía que el sistema de Newton-Laplace era omnicomprensivo en el sentido de que se concebía la posibilidad de determinar a partir de un estado dado cualquier otro estado posterior del sistema en virtud del estilo mecanicista de sus leyes («en la mecánica newtoniana –dice Hessen- no hay lugar para probabilidades»), pero que con el paso al estudio del microespacio, de los procesos internos al átomo, la descripción determinista diferencial hacía aguas:

> Newton vistió la ley de la causalidad en una forma matemática... Las leyes de Newton están presentadas en forma de ecuaciones diferenciales, es decir, en forma de correlación entre los elementos de magnitudes infinitamente pequeños, que entran en las ecuaciones. Con esto mismo, la ley de la causalidad matemática continua recibe una formulación matemática, ya que, situando el estado del sistema en elemento temporal infinitamente pequeño, se determina su estado siguiente; además, el paso de un estado a otro se produce de un modo ininterrumpido. [...] Cuando la física penetra en las profundidades de los fenómenos del microcosmos, los métodos anteriores se hacen insuficientes. [...] En el mejor de los casos podemos observar el estado inicial y el estado final. Desconocemos qué ocurre en el espacio de tiempo que separa esos dos estados, cómo se comporta el electrón en ese tiempo. El estado inicial y el final no están relacionados mediante una cadena causal unívoca de estados, tal como ocurre en las leyes dinámicas de la física newtoniana clásica. Por eso el estado inicial no determina el estado final de un modo absoluto, sino sólo probable. [...] Además, algunos investigadores ponen en duda el determinismo todavía por otras razones: con el paso de la física clásica a la teoría cuántica, entramos en el campo de los procesos discontinuos. [...] Todo lo que queda del determinismo es sólo la estadística. Las leyes de la nueva mecánica son preferentemente leyes estadísticas. [...] Si las leyes dinámicas se consideran como la única expresión de la causalidad física, y si se contraponen a estas leyes las leyes estadísticas, que se basan sólo en el concepto de probabilidad, entonces es natural que tales leyes se consideren como antítesis de la causalidad al determinismo total. (Huerga Melcón: 1999, 498-500)

Esta línea de pensamiento ha sido seguida, como ya sabemos, por el también matemático, y también genial, a su modo y manera, René Thom: «el determinismo diferencial –dice Thom (1986, 68)- es la expresión de la legalidad científica»; y recientemente por Stephen Kellert (1993, 57-58):

> Un sistema dinámico tiene dos partes: una representación de todos los posibles estados del sistema y un conjunto de ecuaciones que describen cómo el estado del sistema cambia con el tiempo. Cuando ninguna de estas dos partes implica explícitamente al azar, tenemos los sistemas dinámicos deterministas. [...] En general, uno podría decir que el determinismo como dinámica diferencial no es más que la idea de que debemos buscar las razones de los hechos que ocurren en el pasado. La moraleja es: emplea expresiones matemáticas (ecuaciones diferenciales) para modelizar los cambios de los sistemas físicos; y busca entender o predecir el futuro relacionándolo con el pasado mediante reglas matemáticas. Quizá de estas reglas se deriven estrictamente implicaciones únicas, o quizá no, pero intenta explicar o predecir así.

2.2.2 *Determinismo único* (Montague, Earman)

Ahora bien, como se apunta en este último pasaje, el *determinismo* comprendido como *determinismo diferencial* (DD) puede ir o no seguido de *evolución única*, de *determinismo único* (DU). Precisamente, la mayoría de teóricos de la ciencia apuestan por entender el determinismo como determinismo único (DU) en vez de como determinismo diferencial (DD).

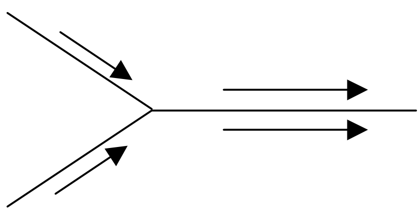
En *Deterministic Theories*, 1962, Richard Montague sugirió aprovechar la definición de Russell haciendo que el tiempo no sea variable independiente: un sistema es determinista si hay una función F tal que, para todo tiempo t y todo incremento positivo h, S(t + h) = F(S(t), h). Como los estados posteriores ya no dependen directamente del tiempo, se logra que F sea invariante respecto al tiempo. Y la definición previa puede transformarse es una mucho más expresiva, archiconocida: para todo tiempo t y t', si S(t) = S(t') entonces S(t + h) = S(t' + h) (h>0). Con otras palabras, si un sistema determinista toma en dos ocasiones el mismo estado, las evoluciones posteriores deben ser las mismas. En otro caso, el sistema es indeterminista, es decir, si el sistema puede detenerse en un mismo estado en dos ocasiones distintas y, sin embargo, evolucionar de dos modos diferentes en cada una de ellas. *Es la condición de evolución única que da lugar al determinismo único.*

La evolución única conforma el núcleo de la definición canónica de determinismo propuesta por Earman (1986, 13-14):

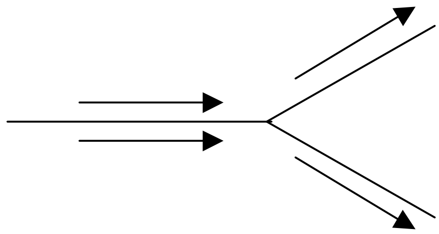
Definición *(Determinismo Único)*

(DU) Una teoría científica es determinista si, y sólo si, dos sistemas que estén de acuerdo en una ocasión han de estarlo en todo momento posterior; o equivalentemente, cualesquiera dos trayectorias del espacio de fases de un sistema dinámico que intersequen en un punto, intersecan en todos, es decir, resultan ser la misma, a partir del punto de intersección. Recíprocamente, una teoría científica es indeterminista si no es determinista, esto es, si dos sistemas dinámicos gobernados por dicha teoría pueden estar en el mismo estado y, sin embargo, evolucionar de modo distinto. Un sistema dinámico es determinista/indeterminista si es descrito correctamente por una teoría determinista/indeterminista.

Localmente, el determinismo diferencial *suele* coincidir con el determinismo único, con la *evolución única*, esto es, con la característica que, desde Laplace o Leibniz, ha sido el corazón del determinismo: un estado de un sistema determinista es siempre seguido por idénticos estados, en otras palabras, por la misma historia. Gráficamente, como se desprende de la definición ofrecida por Earman (1986), la *evolución única* se expresa como que las trayectorias en el espacio de fases, si se cortan, coinciden a partir del punto de corte. Dos trayectorias no pueden cruzarse sin quedar inseparablemente unidas a partir del punto de cruce (de hecho, ni siquiera una trayectoria puede cortarse a sí misma, salvo que sea periódica):



Y, recíprocamente, si un sistema físico atraviesa en dos instantes distintos un mismo estado para, a continuación, experimentar diferente evolución en cada caso, nos encontramos ante una situación típicamente indeterminista; porque, en dicho punto de intersección, habría más de una solución de las ecuaciones considerándolo como condición inicial, contradiciéndose así el determinismo único, la evolución única:



El determinismo único se constituye en rasgo esencial de los fenómenos físicos reproducibles que estudiaban la mecánica newtoniana y la mecánica laplaciana: el sistema solar, el lanzamiento de una bola de cañón, el funcionamiento de un reloj o el movimiento de un péndulo.

2.2.3 Interconexiones entre el *determinismo diferencial* y el *determinismo único*

Pero, ¿qué relaciones precisas existen entre el determinismo diferencial (DD) y el determinismo único (DU)?

En primer lugar, conviene observar que DD es una condición mucho más general que DU, como más abajo veremos al estudiar algunos de los sistemas de que se ocupa la Mecánica Clásica. Dicho rápidamente, la evolución única (DU) no es una condición redundante a la dinámica diferencial (DD), pues relajando las hipótesis de regularidad exigibles a una ecuación diferencial puede lograrse que tanto la existencia como la unicidad de soluciones se evaporen, se esfumen. Es así que, como estudiaremos, existen sistemas físico-clásicos que satisfacen DD –vienen dados por una ecuación diferencial- mas no DU –unas veces se pierde la unicidad, e. d. hay trayectorias solución que se cortan en el plano de fases sin ser la misma, y otras veces también se pierde la existencia, e. d. no hay trayectoria solución-.

¿Qué nos queda entonces? A nuestro entender, de acuerdo con Thom y en oposición a Earman, sigue guardándose cierto determinismo porque la ley diferencial sigue restringiendo trayectorias (lo que pasa es que ahora no restringe todas menos una). No todas son virtualmente posibles. En palabras del propio Thom (1985, 71-72):

> Puede haber determinismos parciales, en la medida en que se restringe el conjunto posible de evoluciones reales en el espacio funcional de los caminos de todas las evoluciones virtuales. [...] La cuestión se sigue planteando entre el espacio de las evoluciones virtuales y el espacio de las evoluciones realmente posibles. Usted sugiere que el determinismo se obtiene cuando estas últimas se reducen a una sola. No lo creo. Incluso el determinismo laplaciano se permite cierta indeterminación de las condiciones iniciales. [...] Llamo determinismo a cualquier tipo de ligaduras que operan sobre el conjunto de las evoluciones virtuales y no hay que confundir esta idea con alguna clase de unicidad de las soluciones. Todo lo que elimina algo de virtualidad es para mí una expresión del determinismo. Pero comprendo que quizá sea una idea demasiado fuerte para algunos.

En efecto, como recoge Wagensberg (1986, 78), esta propuesta levantó polémica:

René Thom: A un enfoque determinista ¿hay que exigirle una *unicidad* de solución, aunque sea una unicidad eventual que satisfaga ciertas condiciones especiales (como continuidad con respecto a los datos iniciales)? Este es, en mi opinión, uno de los problemas fundamentales del determinismo en ciencia. ¿Consideraría el profesor Ludwig la bifurcación de una solución en dos soluciones como un escape del determinismo hacia el indeterminismo?
Günther Ludwig: Según mi modo de ver la cuestión, estaríamos ante una teoría indeterminista...
Peter Landsberg: Pero el sistema seguirá uno u otro camino y, en cualquier caso, *things happen!*

Para Thom (1990b, 58), «toda aserción científica tiene por objetivo reducir lo posible (o aumentar lo real) en la inclusión *real C posible* (omnis determinatio negatio est)». De modo completamente análogo, Boris Hessen creía en un determinismo, comprendido como legalidad, que eliminase la contraposición entre la ley dinámica y la ley estadística:

> La tarea de una ciencia concreta es [...] decidir qué ley es más aplicable para el estudio de un grupo concreto de fenómenos, si la ley estadística o la ley dinámica. Pero no se puede considerar estas dos leyes como leyes que se excluyen mutuamente. [...] Con ello no se altera en absoluto la concepción general del determinismo. Pero este determinismo ya no será el limitado determinismo mecánico. [...] Me doy perfecta cuenta [dice citando en su apoyo al físico polaco Smolujowskii] que esta concepción de la causalidad [del determinismo] contradice la definición corriente de causalidad. (Huerga Melcón 1999, 500-501)

Por nuestra parte, reconocemos que la proposición combinada de Thom-Hessen encierra su parte de verdad[62], aunque sospechamos que su posición es demasiado atrevida, al quedarse sólo con DD y renunciar por entero a DU. Nos guste o no, como declara Ford (1986, 7): «en esencia, el determinismo es un sinónimo de existencia-unicidad»; y la pérdida de DU implica, pese a DD, una descripción casi colindante con el indeterminismo, por cuanto, supuesto un estado inicial, las leyes pertinentes no determinan un único estado final. Es decir, como ocurre con el indeterminismo cuántico, dos sistemas preparados con idénticas condiciones iniciales pueden evolucionar a distintos estados finales, cuando dan resultados diferentes al ser sometidos a la misma medida.

2.2.4 Determinismo(s) *fuerte* y *débil*

En consecuencia, simpatizamos con Bishop (2002, 8), que mantiene que el determinismo puede precisar tanto de DD como de DU. Tanto DD como DU no serían sino dos perspectivas complementarias, una de raigambre más matemática (proveniente de Russell) y otra de raigambre más lógica (proveniente de Montague), desde las que abordar la cuestión del determinismo. Por consiguiente, nuestra propuesta al respecto consiste en conjugar ideas de ambos espectros:

[62] Espinoza (2007, 247) también lo reconoce: «El determinismo causal científico no es un asunto de todo o nada, de demostración concluyente o no: se avanza difícilmente, gradualmente, sobre todo ahora que se está más consciente que a comienzos del siglo XIX (la época de Laplace) de las complejidades del modelo diferencial tales como la ausencia de soluciones, o la existencia de soluciones (trayectorias) múltiples, la discontinuidad de la solución con respecto al dato inicial. [...] Y a estas complicaciones matemáticas que dificultan o imposibilitan la previsión mediante el cálculo habría que agregar la dificultad que hay para discernir las causas de un fenómeno. [...] Pequeñas causas, casi insignificantes en sí, pueden colaborar juntas para producir el efecto notable que se quiere explicar (piénsese en la sensibilidad a las condiciones iniciales)».

Definición (Determinismo y determinismos)
Un sistema dinámico es *fuertemente determinista* o *determinista* (a secas) si satisface tanto el *determinismo diferencial* (DD) como el *determinismo único* (DU).
Un sistema dinámico es *débilmente determinista* o *virtualmente determinista* si sólo satisface el *determinismo diferencial* (DD).
Un sistema dinámico es *indeterminista* (a secas) si no satisface DU ni DD.

Así, un sistema dinámico es fuertemente determinista o determinista (a secas) si y sólo si, conocido su estado inicial, existen ciertas leyes dinámicas que fijan su estado final de modo único. Un sistema es (fuertemente) determinista si los estados posteriores evolucionan unívocamente a partir de los estados anteriores de acuerdo a una ley dinámica fija, si su estructura matemática diferencial está especificada de modo único con una trayectoria única a través del espacio de fases.

Y un sistema dinámico es débilmente determinista si y sólo si, conocido su estado inicial, existen ciertas leyes dinámicas que determinan su estado final de modo no único dentro de un rango de estados posibles. Un sistema es virtualmente determinista si los estados posteriores simplemente evolucionan a partir de los estados anteriores de acuerdo a una ley diferencial (nótese que hemos retirado la condición de unicidad). Hasta donde alcanzamos, la evolución en un sistema dinámico débilmente o virtualmente determinista no es por completo indeterminista por cuanto, aunque la restricción de trayectorias de que habla Thom también puede darse en casos puramente indeterministas (por ejemplo en la teoría cuántica gracias a la interpretación estadística), la omnipotencia de la dinámica diferencial hasta sin evolución única conserva un aspecto interesante: una cierta variación continua (se pasa del estado *i* al estado *j* de modo continuo, sin discontinuidades de transición, sin saltos cuánticos, como sí ocurre en el ámbito del cuanto de acción).

Por último: un sistema es, pues, indeterminista si la progresión de los estados anteriores a los estados posteriores no está unívocamente determinada por una ley dinámica. Resumiendo, este gradualismo y minimalismo en nuestras definiciones permite reconsiderar al mundo como lo que es, mezcla de determinismo e indeterminismo: «cuando se vacía el problema del determinismo de su trasfondo filosófico, se reduce, en el plano de los fenómenos, a la afirmación siguiente, difícilmente discutible: hay fenómenos más o menos determinados» (Thom: 1977, 123).

2.2.5 Más interconexiones entre la *dinámica diferencial* y la *evolución única*

Pero, ¿qué pasa si sólo se satisface DU (combinación que no ha quedado reflejada en nuestra definición de más arriba)? Tras reflejar que DD no implica DU (porque existen ecuaciones dinámicas con soluciones no únicas), nos resta estudiar la implicación contraria: si DU implica DD. Suele admitirse implícitamente que la evolución única implica la dinámica diferencial, pero esto que, en general, es cierto no deja de exigir artillería matemática pesada. La cuestión de la relación entre DU y DD adquiere un aspecto matemático realmente interesante. DU sí va a implicar DD. Ahora bien, si nos atenemos exactamente a nuestra definición de DU (que admite que dos trayectorias pueden fusionarse siempre que luego no se separen), es falso que DU implique DD. Pero los sistemas dinámicos que verifican DU con fusión determinista de trayectorias solución –llamados, muchas veces, sistemas *semi*dinámicos- se pueden transformar en sistemas dinámicos equivalentes que verifiquen DU sin fusión de trayectorias, sin más que emplear el truco de añadir algún parámetro más que haga suficientemente fidedigna la representación del sistema en el espacio de fases o estados (si, por ejemplo, añadimos el tiempo y la variable posición, como dos sistemas distintos no pueden ocupar simultáneamente el mismo enclave espacial, las trayectorias que los representan ya no podrán cortarse ni fusionarse). Así, si disponemos de un manojo de trayectorias que no se cortan entre sí en el espacio de fases o estados (DU), ¿existe una ecuación diferencial subyacente que las describa (DD)? El problema en su variante matemática fue resuelto por Hassler Whitney (1932 & 1932b), que ofreció condiciones necesarias y suficientes muy generales para su resolución. En palabras de Whitney (1932, 275):

> Dada una familia de curvas, como las trayectorias de las partículas suspendidas en un fluido, es frecuentemente conveniente introducir una función continua x´=g(x,t), con la interpretación de que la partícula en el punto x se mueve al punto x´ después de un tiempo t. [...] Podemos, dada una familia de curvas satisfaciendo condiciones muy débiles, definir una función como arriba.

Pues bien, las débiles condiciones matemáticas de regularidad que debe cumplir la familia de trayectorias están comprendidas, en particular, en la condición de DU. Asumiéndolas, y en la práctica los físicos lo hacen, obtendríamos -vía Whitney- una función S(x,t) propia de la familia de trayectorias. Y añadiendo la condición de continuidad en los datos iniciales u otra más universal[63], podemos construir una ecuación diferencial que satisfaga la condición de DD. Nos basta definir para obtener tal ecuación diferencial:

$$X(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{S(x_0, t_0 + h) - S(x_0, t_0)}{h}$$

Nótese que esto último es ya una derivación, y que justamente es lo que llevan haciendo físicos y matemáticos durante siglos: conocer el campo, la ley, es lo mismo que conocer las curvas integrales que se nos dan en la empiria.

Concluimos con una anécdota para quitar hierro a toda esta complicada discusión acerca de las diferentes clases de determinismo: un buen día le preguntaron a J. L. Austin, «¿Cree usted que hay más de un tipo de determinismo, profesor Austin?», y éste contestó, «No, menos de uno».

2.3 Predecibilidad

La *predecibilidad*, repetimos, es un concepto *epistemológico* que remite a la capacidad de computabilidad de las teorías científicas en cuanto constructos humanos. Formalmente, hay predecibilidad si, conocida una ley o ecuación y ciertas condiciones iniciales $S(t_0)$, podemos conocer S(t) para todo $t > t_0$, esto es, tenemos la capacidad de computar numéricamente S(t) para todo $t > t_0$, garantizando la previsibilidad del futuro. En principio, diferenciamos dos tipos de predecibilidad: (i) la *predecibilidad clásica*, es decir, con certeza, con probabilidad 1 o tan cerca de 1 como se quiera; y (ii) la *predecibilidad estadística*, es decir, con probabilidad p ($0 < p < 1$). A su vez estos dos tipos muy generales de *predicción* (de anticipación del futuro) se desdoblan en idénticos dos tipos de *retrodicción* (es decir, de recuperación del pasado). Cuando estemos frente

[63] La condición de derivabilidad continua (que garantiza, como estudiaremos, la existencia y unicidad de solución) implica también la propiedad de continuidad en los datos iniciales, por lo que no estaría de más exigirla. De hecho, incluso se da en los sistemas caóticos.

a una ciencia que posibilite tanto la predicción como la retrodicción, hablaremos simplemente de *bipredecibilidad*. Formalmente, hay bipredecibilidad si, conocida una ley o ecuación y ciertas condiciones iniciales $S(t_0)$, podemos conocer S(t) para todo tiempo t, esto es, podemos garantizar tanto la previsibilidad del futuro como la certidumbre del pasado. En general, mientras no especifiquemos lo contrario, entenderemos por defecto la predecibilidad como predecibilidad clásica.

2.4 Estabilidad

La *estabilidad* es un concepto ontológico: un sistema se dice estable si no muestra dependencia sensible a las condiciones iniciales, es decir, si microcambios en las condiciones iniciales no pueden jamás ocasionar macrocambios en los estados finales. Recíprocamente, un sistema se dice inestable si es sensible a las condiciones iniciales. Es lo que se conoce como *efecto mariposa*: el suave aleteo de una mariposa sobre el Amazonas puede desencadenar un tornado sobre China.

Formalmente, dado un sistema dinámico, diremos que muestra dependencia *sensible* a sus condiciones iniciales (DSCI) si existe un punto x del espacio de fases y una distancia $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe un tiempo t y existe otro punto y del espacio de fases que verifique que está próximo al punto prefijado $|x - y| < \delta$ y que la trayectoria que pasa por él acaba alejándose sensiblemente de la trayectoria que pasa por x después de un tiempo t: $|x(t) - y(t)| > \varepsilon$; y diremos que muestra dependencia *exponencial* a sus condiciones iniciales (DECI) si las trayectorias vecinas se alejan a velocidad exponencial: existe $\lambda > 0$ con $|x(t) - y(t)| \approx |x - y|\, e^{\lambda t}$. (Obsérvese que tanto DSCI como DECI dependen del espacio substrato, por ejemplo: $y=x^2$ muestra DSCI en $[1,\infty]$ y, por el contrario, no en $[0,1)$.) Es fácil ver que DECI implica DSCI al ser la dependencia *exponencial* un caso particular de dependencia *sensible*, aunque no toda dependencia sensible tiene por qué ser exponencial, que es una clase de dependencia bastante fuerte. En los sistemas inestables, a causa de la DSCI, los errores de medida se pagan caros: dado un *input* aproximado, no obtenemos un *output* aproximado; y si además hay DECI, el coste de los errores de medida resulta casi infinito. Por su parte, tal y como los hemos definido, los sistemas estables –aquellos en que no hay ningún punto de inestabilidad- coinciden –casi- con los sistemas paralelizables, es decir, con aquellos sistemas dinámicos en que el flujo transcurre paralelo, sin sobresaltos.

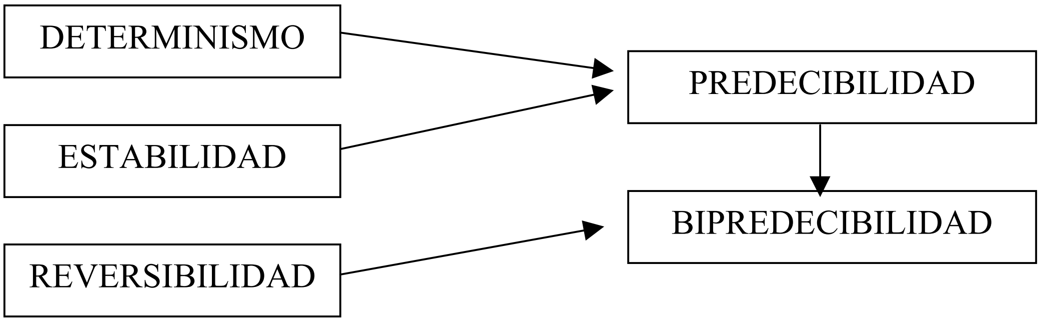
2.5 Reversibilidad

La *reversibilidad* es otro concepto *ontológico*, y refiere al comportamiento de un sistema dinámico con respecto a la inversión de tiempos. Un sistema dinámico es reversible cuando es invariante con respecto a la inversión de tiempos, esto es, cuando pasado y futuro resultan equivalentes. Formalmente, un sistema dinámico es reversible si las ecuaciones (diferenciales o en diferencias) que determinan su evolución permanecen invariantes al cambiar t por $-t$ en cada una de sus apariciones; dicho en román paladino, un sistema dinámico es reversible si y sólo si, conocida toda la información relativa a su estado en un tiempo t_2, podemos recuperar toda la información relativa a su estado en un tiempo t_1 anterior a t_2 haciendo uso de las leyes que determinan su evolución. Los sistemas con la propiedad de irreversibilidad tienen mala memoria, porque a medida que pasa el tiempo se pierden datos con respecto a la situación inicial del sistema.

3. Interconexiones entre el determinismo y la predecibilidad

El cuadro que a continuación se muestra pretende recoger las interrelaciones realmente existentes entre la cuaterna de conceptos utilizados:

ÁMBITO ONTOLÓGICO **VERSUS** ÁMBITO EPISTEMOLÓGICO



El determinismo (DD + DU) no implica, por sí solo, la predecibilidad, como se pone de manifiesto en los fenómenos con caos determinista, en los cuales estar determinado no implica conocer cuál es la determinación concreta (a causa de la inestabilidad de que hacen gala). Sin embargo, lo que sí es cierto es que el determinismo en conjunción con la estabilidad implican la predecibilidad (al menos en sentido estadístico). Los sistemas deterministas estables son sistemas *buenos*, porque, transcurrido un tiempo, la precisión con que podemos predecir los valores de ciertas magnitudes permanece dentro del nivel de precisión con que medimos los valores de las magnitudes iniciales. Por el contrario, los sistemas deterministas inestables son sistemas *malos*, porque los errores pueden propagarse de modo que, pasado cierto tiempo, la precisión con que medimos los valores iniciales no sea suficiente ni para pronunciarnos con un mínimo de fiabilidad sobre los valores finales. Además, apuntamos que si añadimos la condición de reversibilidad en:

Determinismo + Estabilidad → Predecibilidad

...aseguramos la bipredecibilidad:

Determinismo + Estabilidad + Reversibilidad →
Predecibilidad + Reversibilidad →
Bipredecibilidad

Y conviene hacer notar que la estabilidad y la reversibilidad no van necesariamente de la mano, porque, por ejemplo, «la dinámica que describe la transformación del panadero es invertible, *reversible* con respecto al tiempo, determinista, recurrente y caótica [*inestable*]» (Prigogine: 1997, 214).

En otro sentido, también resultaría trazable la siguiente flecha desde el ámbito epistemológico al ámbito ontológico: la predecibilidad clásica, con precisión infinita, implica obviamente el determinismo. En efecto, si conocemos $S(x_0,t_0)$ y $S(x_0,t_0+h)$ para todo $h>0$ con probabilidad 1 (predecibilidad clásica), podemos definir la siguiente ecuación determinista que captura la dinámica, pues para conocer la ley o el campo basta con conocer las curvas integrales empíricas:

$$X(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{S(x_0, t_0 + h) - S(x_0, t_0)}{h}.$$

Ahora bien, la predecibilidad estadística, con precisión limitada, no implica el determinismo, como se pone de manifiesto en los fenómenos cuánticos, en donde se da una espectacular predecibilidad estadística al tiempo que el determinismo salta por los aires, en su acepción DD. También es válido el siguiente contraejemplo construido *ad hoc*: supongamos que disponemos de un Demonio de Maxwell capaz de predecir el estado futuro de un sistema dentro de una franja de predicción que se corresponde con una probabilidad p mayor que 0 pero menor estrictamente que 1; pues bien, nada impide que dentro de ese margen de predicción existan trayectorias que se corten y que, por tanto, destruyan el determinismo, en su acepción DU.

4. Una clasificación de las ciencias físicas

Llegados a este punto, vamos a ilustrar nuestras tesis gnoseológicas hasta el momento recurriendo a múltiples ejemplos entresacados de la ciencia cotidiana. En primer lugar, cruzaremos *determinismo* y *predecibilidad* y, en segundo lugar, cruzaremos *determinismo* y *reversibilidad*.

EJEMPLOS	Predecibilidad clásica	Predecibilidad estadística	Impredecibilidad
Determinismo	Mecánica Clásica/Relativista	Mecánica Estadística	Teoría del Caos
Indeterminismo	∅	Mecánica Cuántica	¿Caos Cuántico?

-Cuadro 1-

Notas al Cuadro 1.- (i) Evidentemente, si *T* es una teoría física predictivamente clásica, describe un mundo *M* determinista y por eso la entrada complementaria del cuadro está *vacía*. (ii) Obviamente, nuestra catalogación de la Mecánica Cuántica ya presupone *cierta* toma de partido con respecto al problema de su interpretación.

4.1 Análisis de la Mecánica Clásica

La Mecánica Clásica pasa por ser el máximo exponente de una ciencia determinista y predecible, por cuanto las Leyes de Newton son ecuaciones diferenciales ordinarias (determinismo diferencial) para las que se han probado teoremas de existencia y unicidad de soluciones (determinismo único) y cuyas soluciones son calculables en múltiples situaciones (predecibilidad clásica).[64] Sin ser excesivamente puntillosos, todo sistema físico newtoniano puede estudiarse como si fuera un sistema

[64] Advertimos que, a pesar de que nuestra catalogación de la Mecánica Clásica puede sorprender (¿cómo va a ser predictivamente clásica si tiene que mediar con el problema de los *tres* cuerpos?), de igual modo que los sistemas muy pequeños o con altas velocidades ya no son de dominio clásico, los sistemas deterministas impredecibles –caóticos- pertenecen, ahora, antes a la Teoría del Caos que a la Mecánica Clásica.

cerrado de N puntos-masa en el espacio euclídeo tridimensional,[65] cuyas trayectorias vienen dadas por la resolución de un problema directo para un sistema de N partículas, es decir, por la resolución de la siguiente ecuación diferencial vectorial en 3N dimensiones (que no es sino la Ley de Newton *F=ma*):

$$\begin{cases} \vec{f}(t,\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t)) = M\ddot{\vec{r}}(t) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

O, equivalentemente, por la resolución de N ecuaciones diferenciales vectoriales en 3 dimensiones, o de las 3N ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden asociadas, y que a su vez son reducibles a un sistema de 6N ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Sin entrar en demasiadas explicaciones, dadas 6N condiciones iniciales (las posiciones y las velocidades de cada partícula en t_0), la existencia y la unicidad de solución de este problema paradigmático está garantizada (localmente) si *f* satisface ciertas condiciones de regularidad (Arnold: 1988). En general, *f* es al menos continua y derivable, es decir, al menos pertenece a C^1 (continua y con derivada continua). Dos son los resultados matemáticos a consignar. Primero, el Teorema de Cauchy-Peano (1823), que afirma que si *f* es continua, entonces, para todo r_0 y v_0, existe al menos una solución local, es decir, un intervalo temporal *I* que contiene a t_0 y en el que *r*(t) está definida satisfaciendo las condiciones iniciales. (Nótese que lo que no asegura el teorema es que esta solución local sea prolongable en una solución global, para todo tiempo, y por ello siempre hemos restringido nuestra discusión sobre el determinismo a términos locales, porque el determinismo único sobreañadido al diferencial puede ser efímero: como recoge Smith (2001, 14), $dx/dt = x^2$ con $x(0) = a > 0$ tiene por solución a $x(t) = a/(1-at)$ en un entorno de $t = 0$, pero explota cuando $t \to 1/a$.) Segundo, el Teorema de Picard (1930), que afirma que si además *f* es localmente lipschitziana, entonces la solución local es única. Lo que debemos retener es que, en nuestro caso, si la fuerza *f* pertenece a C^1, es localmente lipschitz de modo automático y, por tanto, existe una única solución al problema clásico. Además, dentro de la praxis física, siempre suelen considerarse *f* pertenecientes a C^1 definidas sobre compactos (por ejemplo, esferas) y, entonces, por compacidad, se da la hipótesis de acotación de derivadas que necesitamos para garantizar la existencia y unicidad globales de solución. Como vemos, el Teorema de Cauchy-Peano nos habla de la existencia de soluciones y, de modo complementario, el Teorema de Picard establece la unicidad de solución.

Ahora bien, como Hutchinson (1993, 320) nota, si permitimos que aparezcan divergencias –valores infinitos- en el módulo de la fuerza o en otras características de la fuerza, la evolución única puede desvanecerse. Fallará el determinismo único pero no el determinismo diferencial. Por ejemplo, veamos cómo, si la fuerza varía como la raíz cuadrada de la velocidad, la unicidad de solución se esfuma. Consideremos, como hace Smith (2001, 14), el siguiente problema newtoniano para una partícula, donde la fuerza varía con la raíz de la velocidad:

$$\begin{cases} \sqrt{y'(t)} = my''(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

[65] Penrose (2006, 257) señala que esto evita las insatisfactorias colisiones triples.

$$(y \geq 0) \quad (m = 1)$$

Pues bien, sucede que la partícula puede *cobrar vida* en cualquier tiempo $\tau \geq 0$, es decir, existen múltiples soluciones todas ellas válidas. En efecto, para cada $\tau \geq 0$, una solución factible es:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau \\ (t-\tau)^3/12 & \text{para } t \geq \tau \end{cases}$$

Pasamos de una situación fuertemente determinista a una situación débilmente determinista, mas no indeterminista, pues cierta restricción de trayectorias sigue funcionando y, en todo caso, se mantiene a salvo una importante propiedad de las ecuaciones diferenciales: sea cual sea la solución real, la variación entre estados se produce con continuidad, sin saltos. De todos modos, podemos contrarrestar este ejemplo *mental* si observamos que, en la práctica newtoniana, no suelen aparecer fuerzas con tasas de variación instantánea infinitas: en el ejemplo, como la fuerza varía como la raíz cuadrada de la velocidad y la partícula está inicialmente en reposo, en cuanto empezara a moverse, experimentaría una fuerza que crece con pendiente infinita, porque la función raíz cuadrada no es derivable en el origen. Pero estos cambios tan pronunciados no suelen ser el caso por cuanto, suponiendo que la fuerza entre partículas sea gravitatoria, dos partículas jamás ocupan la misma posición dando lugar a interacciones infinitas, no se observan objetos colapsados –al menos, en el dominio de la Mecánica Clásica (los *agujeros negros* son de dominio relativista)–.

Otro contraejemplo al determinismo en Mecánica Clásica lo aporta Earman (1986, 33-39 y 52) recurriendo a una partícula *space invader*. Para Earman, la Mecánica Clásica no es determinista porque no impone límites superiores a las velocidades, lo que permite la existencia de *invasores del espacio*, es decir, partículas que –asintóticamente a partir de un tiempo $t>t_0$- proceden del infinito a la manera como la curva 1/x se comporta para x>0. Como la Mecánica Clásica es reversible y resulta concebible una partícula que sea mandada al infinito tras una explosión, pues también resulta concebible –razona Earman- la situación *reversa*, esto es, una partícula que provenga del infinito. Ahora bien, esta partícula invasora puede perturbar valores de otras partículas de forma que su comportamiento ya no venga *predeterminado* por sus estados antes del tiempo t_0 (nada hacía sospechar que nos visitaría una partícula proveniente desde el infinito y más allá). La réplica, como señala agudamente Smith (2001, 148), consiste en insistir en que el determinismo se predica de teorías que se componen tanto de leyes como de ciertas condiciones límite y que, en el caso que nos preocupa, la Mecánica Clásica suele asumir unas condiciones límite nulas en el infinito, lo que prohíbe la venida de invasores del espacio. Así, cabe preguntarse hasta qué punto este ejemplo, como el anterior, no pasa de ser un experimento mental, sin correlato material más allá del papel en donde se echan cuentas matemáticas sin implicaciones físicas. Un proceso (como una explosión) que envía partículas al infinito dentro de un espacio newtoniano es posible[66], pero lo opuesto no lo es más allá del papel (al infinito se va

[66] Siguiendo a Lacomba (2005, 333), en el problema de los n cuerpos con n>4, pueden existir movimientos en que se dé el escape al infinito en tiempo finito.

pero no se vuelve), porque violaría la conservación de la energía y de la masa, y sería físicamente imposible establecer sus condiciones iniciales pese a la reversibilidad newtoniana; de hecho, Popper (2002, 219) empleaba esto mismo como argumento a favor de la irreversibilidad en un marco clásico. En resumen, la Mecánica Clásica y el determinismo resultan, pese a todo, bastante amigables.

4.2 Análisis de la Mecánica Relativista

La Mecánica Relativista Especial, en cuanto extensión de la Clásica, también se nos aparece como determinista y predecible, pues diversos teoremas de existencia y unicidad de solución han sido demostrados en varias situaciones. A diferencia, como subraya Penrose (2006, 320-3), la Relatividad General presenta algunas dificultades para su catalogación como determinista y predecible: si aceptamos la posibilidad de que existan *singularidades desnudas*, el determinismo se evaporaría al entrar en contacto con ellas, porque la solución –y no sólo su unicidad- literalmente desaparece (obsérvese que los *agujeros negros*, al estar envueltos por un horizonte de sucesos, no conculcan el determinismo, porque un observador externo percibiría que la nave espacial cae *asintóticamente* dentro del hoyo, sin desvanecerse en tiempo finito).

4.3 Análisis de la Teoría del Caos

La Teoría del Caos es una doctrina sobre ciertos modelos matemáticos y sus aplicaciones físicas. En líneas generales y por el momento, aceptaremos la definición que Kellert (1993, 2) sugiere: «la Teoría del Caos es el estudio cualitativo del comportamiento aperiódico e inestable en los sistemas dinámicos deterministas no lineales». En primera aproximación, hasta que lleguemos al próximo capítulo, diremos que la esencia del caos es la dependencia sensible a las condiciones iniciales, es decir, el *efecto mariposa*, por aquello de que el aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas, o como ironiza Antonio Tabucchi, el aleteo de una mariposa en Nueva York puede causar un tifón en Pekín. Sin embargo, de entrada, conviene ya advertir que esta metáfora, pese a haber hecho fortuna, proyecta más oscuridad que luz. En efecto, como pone de manifiesto el propio Lorenz (1995, 185-188), tan variación es en la condición inicial que se produzca dicho aleteo como que no se dé. Esto es, si un simple aleteo puede ocasionar un tornado, lo mismo puede evitarlo, amén de que también habría que tener en cuenta los aleteos de cualquier otro insecto imaginable...

Aunque los sistemas caóticos deterministas son sistemas clásicos, no los hemos clasificado dentro de la Mecánica Clásica sino dentro de la nueva Mecánica del Caos, sirviéndonos para ello de la existencia de inestabilidad (sensibilidad a condiciones iniciales) como criterio cribador, y gracias a esto nuestra catalogación de la Mecánica Clásica como predecible clásicamente sigue en pie. Los sistemas caóticos deterministas quedan descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales *autónomas* y *no lineales*. Como consecuencia de su autonomía, tales ecuaciones diferenciales cumplen las condiciones necesarias para asegurar la existencia y la unicidad de sus soluciones para cada conjunto de valores de las variables dependientes: para cada punto representativo del estado inicial, la trayectoria que en él se inicia existe y es única; además, dado que no hay restricciones para fijar el estado inicial del sistema, las trayectorias no pueden cortarse en ningún punto, es decir, no existe ningún estado a partir del cual el sistema evolucione temporalmente según dos o más trayectorias posibles. En otras palabras, las evoluciones de un sistema caótico son completamente *deterministas*. Por otra parte, como es bien sabido, a causa de su inestabilidad, resultan *impredecibles*.

Algunos de los autores que confunden el determinismo con la predecibilidad, encuentran en el hecho de que ciertos sistemas caóticos deterministas (sistemas clásicos disipativos, no conservativos) presentan bifurcaciones un argumento a favor del indeterminismo caótico. Así lo expresan Prigogine & Petrosky (1995, 210): «Tenemos una sucesión de bifurcaciones que nos conduce a una dimensión histórica: en las bifurcaciones existen generalmente muchas posibilidades abiertas al sistema, una de las cuales se realiza aleatoriamente; como resultado, el determinismo se quiebra a escala macroscópica». Ahora bien, una cosa es que pequeñas fluctuaciones de alguna variable física provoquen futuros comportamientos totalmente distintos (bifurcaciones) y otra cosa, muy distinta, que el sistema esté eligiendo entre dos caminos distintos (lo que apuntaría indeterminismo), como se quiere sugerir erróneamente al comparar por semejanza ciertos diagramas de bifurcación con los diagramas de trayectorias o de fases, que ni mucho menos significan lo mismo. En esencia, una bifurcación no es más que un cambio cualitativo –por ejemplo: de estacionario a periódico, de periódico a caótico- en el comportamiento de *una familia* (¡ojo!) de sistemas dinámicos como consecuencia de modificar casi imperceptiblemente una constante propia de la familia. Es decir, las bifurcaciones –pese al mal que hacen los divulgadores posmodernos- no se predican de sistemas dinámicos individuales –lo que daría pie a pensar en un indeterminismo inherente- sino de colectivos de sistemas dinámicos, muy semejantes en su definición a excepción de los valores que toma una determinada constante y que provoca bruscos cambios a largo plazo al comparar entre todos ellos.

4.4 Análisis de la Mecánica Estadística

La Mecánica Estadística *clásica*, *no cuántica*, es sólo Mecánica Clásica aplicada en condiciones de información poco menos que dudosas. Por tanto, es determinista con predecibilidad estadística, porque se sustituye la certidumbre clásica por la información estadística, introduciendo la probabilidad, que –empleando una expresión de Peter Landsberg- es el Mefistófeles de la Ciencia.

La base de la Mecánica Estadística es la distinción entre macroestados y microestados: todo sistema se describe en términos de variables macroscópicas (por ejemplo, la temperatura), que son expresables en función de los microestados como suma o integración de una función que depende de todas las posibles combinaciones de microestados ponderadas por la probabilidad de que sean el caso. El equilibrio se corresponde con el estado más probable del sistema. No entramos en tomar partido a propósito de la *paradoja de la recurrencia de Poincaré-Zermelo*, pero consideramos la Mecánica Estadística (clásica, no cuántica) como *intrínsecamente* determinista: a propósito de la irreconciliable descripción a escala macroscópica –donde los fenómenos se nos tornan irreversibles (flecha del tiempo)- con la descripción a escala microscópica –donde los fenómenos, como el movimiento browniano, son reversibles-, observamos que la tinta y el agua, una vez mezcladas, no se separan, hay un antes y un después perfectamente definidos, pero nada impide pensar que, desde un punto de vista mecanicista (como el de Boltzman) y esperando con paciencia suficiente tiempo (probablemente más que la edad del Universo), los átomos de tinta, en su continuo vaivén, podrían separarse de los de agua. Además, como bien sabía von Neumann, es posible una microteoría indeterminista –mecánica de los cuantos- pero una macroteoría

–mecánica estadística- determinista, como consecuencia de la acción de las leyes de los grandes números, aunque lo opuesto no. Es la contraposición entre lo local y lo global.

Mención especial merece la Teoría Ergódica, por los problemas que su diagnóstico como determinista con predecibilidad estadística plantea. Dentro de la Mecánica Estadística, la Mecánica Ergódica se ocupa de los sistemas ergódicos, es decir, de los sistemas dinámicos en que el tiempo que pasa una trayectoria en una región del espacio de fases es, en promedio, proporcional al volumen de la región. La ergodicidad resulta ser la forma más relajada de irregularidad dentro de una jerarquía en que, actualmente, se toman en cuenta otras propiedades de desorden menos débiles (*mixing*, Kolmogorov, Bernoulli...). Los sistemas ergódicos constituyen un compartimento dentro de los sistemas caóticos. La Teoría Ergódica brinda una macrodescripción mediante una partición de grano grueso (*coarse grain*) del espacio de estados o del espacio de fases: ambos se dividen en celdas de medida no nula que representan los posibles macroestados del sistema. La *macroevolución* queda, pues, definida como una sucesión de macroestados, cuyas transiciones vienen reguladas sólo estadísticamente; puesto que la macroevolución pasada no fija de modo unívoco la macroevolución futura. Pero, ¿cómo interpretar esta regularidad estadística? Olimpia Lombardi (2002, 76-77) indica que las opiniones comienzan a distanciarse cuando se trata de decidir acerca de su carácter objetivo o subjetivo con respecto a los sistemas altamente inestables (como los caóticos). Para algunos autores, la descripción objetiva de los sistemas ergódicos es la que brindan las ecuaciones diferenciales en el micronivel: puesto que el macronivel es *reducible* a una evolución determinista subyacente y, entonces, las propiedades estadísticas son subjetivas, meras apariencias o ilusiones debidas exclusivamente a nuestras limitadas capacidades. Es esta perspectiva la que adoptan, como apunta Lombardi (2002, 77), William Ditto y Louis Pecora al comentar sus investigaciones en la utilización práctica del caos: «si bien el caos es impredecible, es determinista... si dos sistemas caóticos prácticamente idénticos del tipo apropiado son impelidos o forzados por la misma señal, producirán la misma salida, aún cuando nadie pueda decir qué salida será» (Ditto y Pecora: 1993, 62). Sin embargo, para otros autores, las propiedades estadísticas del macronivel son objetivas y, entonces, los resultados de la Teoría Ergódica ponen de manifiesto el carácter indeterminista de los sistemas altamente inestables. Es así que Joseph Ford sostiene que, ante la presencia de caos, «el determinismo newtoniano sólo puede ser un inalcanzable sueño del teórico» (Ford: 1983, 43); o Prigogine, por su parte, llega a aseverar que «ciertos sistemas dinámicos inestables son aleatorios, como los juegos de azar tipo Bernoulli... el azar se ha convertido en un elemento fundamental de la dinámica» (Wagensberg: 1986, 192). En resumen, en el ámbito de los sistemas ergódicos, el problema del determinismo queda claramente formulado por las siguientes palabras de Lombardi (2002, 77): «¿el macroindeterminismo es subjetivo, puesto que es reducible a una dinámica determinista subyacente, o es objetivo, en la medida en que es generado por la propia microdinámica?».

Nosotros apostamos por el primer grupo de autores frente a los del segundo grupo. Tanto Prigogine como sus colaboradores del Grupo de Bruselas pretenden trabajar con las distribuciones del macrosistema como si se tratara de los estados del microsistema, tratando la irreversibilidad como esencial: «debe existir una diferencia fundamental entre la descripción en términos de trayectorias, por una parte, y la descripción en términos de conjunto, por otra» (Prigogine: 1997, 95). Pero, como López Corredoira (2001, 39) señala:

> Pongamos que *x* tiene una dinámica [clásica, no cuántica] extraña en la que bien puede seguir un camino u otro sin que se sepa por qué hace su elección... ¿es lícito entonces proclamar un

> indeterminismo en la conducta de *x* porque no podemos conocer las determinaciones subyacentes que le llevan a una u otra conducta entre las dos posibles? La respuesta es no. Sí puede haber una causa que empuje a una rama de la bifurcación... se trata de sistemas inestables vistos macroscópicamente que tanto pueden escoger un camino u otro por pequeñas variaciones, pero esas variaciones pueden seguir y de hecho siguen un determinismo [microscópico] estricto.

Pero, para Prigogine (1999, 63-64), se desprende que la descripción estadística o por macroestados de los sistemas caóticos es irreductible a la descripción por microestados, lo que –fundándose, de nuevo, en la confusión entre determinismo y predecibilidad- le lleva a apostar por una suerte de indeterminismo caótico, por cuanto no existirían *variables ocultas* en la dinámica no lineal; pero esto, como apunta Bricmont (1995, n.p. 21), poco ha de ver con la no existencia de variables ocultas en teoría cuántica, en donde ésta está apoyada por firmes argumentaciones teóricas y experimentales, en ningún caso ideológicas. A río revuelto, ganancia de pescadores.

Los fenómenos ergódicos caóticos juegan, por así decir, un papel intermedio entre los sistemas deterministas y los procesos aleatorios, gracias a que los pequeños cambios en las condiciones iniciales se amplifican exponencialmente complicando la relación entre causas y efectos de tal modo que aquellos parecen efectivamente azarosos. Pero este rasgo que parece una virtud, también tiene un lado oscuro. En efecto, dado un proceso que simula ser aleatorio, ¿cómo saber si esta aleatoriedad es la expresión manifiesta de un indeterminismo subyacente o, simplemente, de un determinismo caótico? Es realmente complicado decidir entre una modelización indeterminista, genuinamente estocástica, y una modelización mediante caos determinista. En palabras de Suppes (1993, 254): «hay procesos que pueden ser analizados igualmente bien como sistemas deterministas de la Mecánica Clásica que como procesos semi-Markov indeterministas, sin importar cuántas observaciones se hagan... los metafísicos deterministas pueden mantener confortablemente su concepción sabiendo que no pueden ser refutados empíricamente, pero lo mismo vale para los defensores del indeterminismo».

4.5 Análisis de la Mecánica Cuántica (I)

La clasificación realizada de la Mecánica Cuántica (indeterminista con predecibilidad estadística) presupone que ya hemos tomado partido por una interpretación concreta (si defendiéramos la Interpretación de Bohm habríamos de contemplarla como perfectamente determinista, ver más adelante). El indeterminismo cuántico no está en sus ecuaciones, que son deterministas («la física cuántica nos muestra –apunta Wagensberg (1986, 14)- una naturaleza con falta de realismo y determinismo, pero realistas y deterministas son sus ecuaciones»), sino en el proceso de medida, en el postulado de medida sobreañadido a las ecuaciones (véase *Apéndice* para apuntes técnicos). Dirac (1947) ya lo tuvo claro: «una de las características más satisfactorias de la teoría cuántica actual es que las ecuaciones diferenciales que expresan la causalidad de la mecánica clásica no se pierden, sino que se retienen en forma simbólica, y la indeterminación aparece sólo en la aplicación de estas ecuaciones a los resultados de observaciones» (Stewart: 2007, 454). Von Neumann (1955, 151-155, cursivas nuestras) formuló originariamente su postulado de proyección como sigue:

> Desde un punto de vista sistemático podemos decir que son concebibles tres grados de causalidad o no-causalidad. Primero: el valor de *'A'* pudiera ser del todo estadístico, es decir, sólo estadísticamente previsible el resultado de una medición; y cuando inmediatamente después de la primera medición se llevase a cabo una segunda, acaso ésta, independientemente del valor

hallado en aquélla, muestre de nuevo un carácter disperso; por ejemplo, podría eventualmente presentar una dispersión tan fuerte como la primera. Segundo: cabe concebir que el valor de *'A'* es ciertamente disperso en la primera medición, pero cualquiera otra que le siga inmediatamente, se ve constreñida a dar un resultado que coincida con el de la primera. Tercero: *'A'* podría estar causalmente determinada de antemano. El experimento de Compton y Simons muestra que en una teoría estadística sólo entra en consideración el segundo caso [una misma magnitud física era medida o bien capturando el fotón o bien capturando el electrón, tras su colisión, y los resultados coincidían]. *Por lo tanto, cuando el sistema se halla inicialmente en un estado en el cual no puede predecirse el valor de 'A', el efectuar una medición M de 'A' provoca el paso a otro estado, precisamente a uno en el que el valor de 'A' está fijado unívocamente.* [...] Cierto es que el «cómo» queda sin aclarar: ese tránsito discontinuo, a modo de salto desde ψ hasta uno de los estados $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ [...] con seguridad es de una muy otra índole que el descrito por la ecuación temporal de Schrödinger.

(De todos modos, no debe confundirse este indeterminismo diferencial y único –DD y DU– con el indeterminismo valorativo que queda expresado en las Relaciones de Indeterminación de Heisenberg y que más adelante discutiremos.)

4.6 Análisis del Caos Cuántico

Muchos autores conciben, como fue dicho, los sistemas caóticos como indeterministas pero, en verdad, sólo son impredecibles, ya que respetan tanto el determinismo diferencial (DD) como el determinismo único (DU). Ahora bien, ¿sería posible combinar la impredecibilidad caótica con el indetermismo cuántico? Muchos autores así lo creen, llegando a hablar de *caos cuántico* (indeterminista e impredecible). Así, Bishop (2002) o Kellert (1993, 69-75), sosteniendo este último que los sistemas caóticos pueden amplificar las fluctuaciones cuánticas debido a su extremada sensibilidad. Pero sus argumentos no pasan de ser meras especulaciones sin fundamento material, por el momento. Además, como claramente explica Rañada (1995, 135-140), la linealidad cuántica casa mal con la no-linealidad caótica. En efecto, la dinámica caótica pide ecuaciones no lineales, pero la dinámica cuántica se sustenta en la ecuación de ondas, que es lineal. En consecuencia, no puede haber efecto mariposa de la función de onda. A lo sumo, al pasar de un sistema clásico caótico al sistema cuántico asociado, aunque el caos desaparece, deja alguna traza, cuyo estudio ha sido bautizado como *caología cuántica* o *mecánica cuántica posmoderna*. En todo caso, concluye Rañada (1995, 137-139), «la mecánica cuántica nos ha salvado de la maldición del caos... aunque la mecánica clásica es determinista, también es caótica; en cambio, aunque la mecánica cuántica es probabilista, es regular».

A continuación, como anunciamos más arriba, cruzamos *determinismo* y *reversibilidad* (con esto pretendemos mostrar cómo de simplistas son las habituales asociaciones entre determinismo y reversibilidad, como por ejemplo da a entender equívocamente Hoefer (2004, 100), pues vamos a ver que la ecuación del calor es determinista pero irreversible, el pasado determina el futuro mas no al revés):

EJEMPLOS	Reversibilidad	Irreversibilidad
Determinismo	Mecánica de Ondas	Mecánica del Calor
Indeterminismo	∅	Mecánica Cuántica

-Cuadro 2-

Notas al Cuadro 2.- (i) Obviamente, la existencia de procesos indeterministas reversibles es lógicamente imposible (no es lo mismo ir en el tiempo hacia adelante que hacia atrás si existen bifurcaciones indeterministas). (ii) Nuestra clasificación de la Mecánica Cuántica ya presupone *cierta* toma de postura con respecto al *problema de la medida*.

4.7 Análisis de la Mecánica de Ondas

La Mecánica de Ondas, parcialmente debida a Maxwell, es ampliamente utilizada en Astrofísica y su núcleo es la conocida *ecuación de ondas* (ojo, no confundir con la ecuación de ondas de Schrödinger), formulada en derivadas parciales empleando el laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

Esta ecuación es reversible, porque es invariante al cambiar t por –t (al derivar dos veces los signos menos se cancelan). La ecuación no regulariza soluciones, con lo que sí se puede recuperar información del pasado (por esto es por lo que usamos señales lumínicas o sonoras para comunicarnos en vez de señales caloríficas) y, además, la información se transmite a velocidad c a través de conos geométricos (conos de luz o esferas de sonido), pero la cantidad de información transmitida depende de la dimensión del espacio ambiente (es conocido que, en nuestro mundo de tres dimensiones, la señal se transmite en esferas tales que el sonido llega, se escucha y pasa; por el contrario, en un mundo de dos dimensiones, la señal llegaría, se escucharía y se seguiría escuchando hasta tiempo infinito o hasta que se amortiguara por sí misma). Sin embargo, el determinismo en la naturaleza que proyecta la ecuación de ondas no es completo si las funciones que describen los valores iniciales no son infinitamente regulares, a causa de la propiedad de enfoque de ondas que saca a la luz singularidades ocultas: si llamamos $u_0 = u(x,0)$ y $u_1 = \partial u(x,0)/\partial t$ y definimos el operador de ondas como $S(u_0, u_1) = u(x,t)$, sucede a veces que $S(u_0, u_1) \neq S(u(x,\tau), \partial u(x,\tau)/\partial t)$ para algún tiempo $\tau > 0$, esto es, hay DD pero no DU.

4.8 Análisis de la Mecánica del Calor

La Mecánica del Calor, debida a Fourier y muy utilizada en Termodinámica, tiene por núcleo a la llamada *ecuación del calor*, formulada en derivadas parciales empleando el laplaciano:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u$$

Esta ecuación no es reversible, porque varia al cambiar t por –t, no obtenemos la misma ecuación (al derivar una vez el signo menos no se cancela). No en vano, como apunta Prigogine (1997, 24), «la Termodinámica es la ciencia de los procesos irreversibles, es decir orientados en el tiempo» (la flecha del tiempo). La irreversibilidad se manifiesta en que la ecuación regulariza soluciones, con lo que en general no puede recuperarse información del pasado (la solución correspondiente a un pico de calor termina por suavizarse de tal modo que, pasado el tiempo, resulta imposible saber dónde y cómo se produjo la explosión o el encendido, pues el calor se ha difundido por todo el espacio), además, la información se supone que se transmite a velocidad infinita, al instante, a todo el espacio físico, pero la cantidad de información transmitida no depende de la dimensión del espacio ambiente (como ocurre con la luz o el sonido). Y he aquí un contraejemplo a la común identificación entre determinismo y reversibilidad, que no necesariamente han de ir de la mano, pese a lo que consideren Hoefer (2004, 100) y muchos otros («en todos los ejemplos razonables de teorías deterministas de que disponemos, el determinismo es bidireccional: los estados futuros del mundo determinan los estados pasados completamente, y viceversa»), que dan a entender que el determinismo y la reversibilidad siempre van de la mano, pero en la difusión del calor queda claro que el pasado determina el futuro pero el futuro no determina el pasado. Probablemente, este extendido equívoco provenga de que el determinismo y la reversibilidad se dan conjuntamente en la Mecánica Clásica, dando origen a lo que Rañada (1990, 547) llama siguiendo a Arnold como «principio de determinismo de Newton».

4.9 Análisis de la Mecánica Cuántica (II)

La Mecánica Cuántica es la negación más acabada del determinismo, porque, junto a la ecuación de Schrödinger (determinista, estable y reversible), aparece el postulado de proyección o de reducción de la función de onda, poniendo cortapisas al campo de aplicación de aquella. Además, cualquier medición supone un proceso irreversible, puesto que aumenta la entropía al extraerse información del sistema cuántico bajo observación.

5. La cuestión cuántica

Al comienzo del capítulo, cuando estudiamos la concepción laplaciana del determinismo, anunciamos que, tras ocuparnos de su sentido más matemático (DD + DU), nos detendríamos en el análisis de su sentido más físico, en cuanto *determinación de valores* (de los valores de las variables físicas, se entiende). Es el *determinismo valorativo* (DV), que queda definido como sigue y cuya validez tantos enigmas plantea en Física Cuántica:

<u>*Definición*</u> *(Determinismo Valorativo)*
(DV) Una teoría científica es determinista si, y sólo si, para cualquier sistema y en cualquier tiempo, todos los observables físicos de la teoría están determinados, es decir, poseen valores. Recíprocamente, una teoría científica es indeterminista si no satisface la determinación de valores, es decir, si existe una propiedad de un sistema físico que, según la teoría, no presenta valor alguno bien definido en cierto tiempo. Un sistema dinámico es determinista/indeterminista si es descrito correctamente por una teoría determinista/indeterminista.

5.1 Formalismo *versus* Interpretación

Es lugar común de la mayoría de filósofos de la física aceptar que la Mecánica Cuántica (como la Mecánica Relativista o la Mecánica Clásica) se compone de dos partes bien diferenciadas: de un formalismo y de una interpretación. Simbólicamente,

Mecánica Cuántica = Formalismo + Interpretación

Sin duda, esta distinción es de raigambre realista y representacionista, puesto que se funda en hipostasiar la forma científica en el formalismo y la materia científica en la interpretación, pasando por concebir su interrelación como una especie de ajuste o acoplamiento que, en el peor de los casos, será tan débil que conducirá a teorías instrumentalistas de la ciencia.

Por el momento dejémosla estar y ciñéndonos a ella, indiquemos que: primero, revisaremos los formalismos; segundo, revisaremos las interpretaciones; y, tercero, con esto como fondo, estaremos en condiciones de abordar la cuestión del indeterminismo cuántico, en sus múltiples acepciones (DD, DU, DV).

5.2 Antología de *formalismos* cuánticos

La física clásica era adecuada dentro del dominio de la experiencia común, pero fallaba al enfrentarse con altas velocidades (Relatividad Especial), escalas cósmicas (Relatividad General) y escalas atómicas... Precisamente, el intento de entender la materia en escalas muy pequeñas conllevaría –como es bien sabido- el nacimiento y la exploración de la teoría cuántica. Hasta bien entrado el siglo XIX, la visión corpuscular de la materia (Newton) dominó sobre la visión ondulatoria (Huygens), pero no lograba explicar los fenómenos de interferencia estudiados por Young. Hacia 1900 existía una concepción híbrida de la materia: tanto los sólidos como los fluidos (líquidos y gases) eran vistos como compuestos de partículas, pero la investigación de la radiación (lumínica, calorífica, X, &c.) apuntaba a concebir la materia como ondas. Tras mil y un intentos fallidos de explicar la radiación del cuerpo negro (radiación calorífica dentro de una cavidad cerrada), Planck consiguió explicarla de manera matemáticamente exitosa al suponer que los átomos sólo toman valores energéticos en unidades discretas, no continuas. La discretización dictada por Plank fue un acto desesperado en toda regla. Entre 1900 y 1925 (prehistoria de la Mecánica Cuántica), los físicos *cuánticos* rechazarían la concepción clásica de la materia (onda *o* partícula) en pos de la nueva concepción cuántica (onda *y* partícula). Así, por ejemplo, Einstein, en 1905, aplicaría con éxito la hipótesis cuántica al estudio de la luz: las ondas lumínicas están compuestas de pequeñísimas partículas lumínicas (fotones), como quedaría testado en el *efecto fotoeléctrico* (Boya: 2003).

A partir de 1910, con estas premisas, los físicos comenzarían a interesarse por dar cuenta de los espectros atómicos desde un punto de vista cuántico. El modelo cuantizado de átomo de Bohr de 1913 vendría a sustituir al catastrófico modelo de Rutherford. Sin embargo, pese al éxito por más de una década del modelo de Bohr, los físicos precisaban de una nueva mecánica que condensara de un modo ordenado esta teoría cuántica antigua. Las Mecánicas Matricial y Ondulatoria fueron construidas, como sabemos de nuestro previo *Caso de Estudio*, alrededor de un mismo tiempo: entre 1925 y 1926 (historia de la Mecánica Cuántica). En 1926, Schrödinger fue el pionero en estudiar su relación mutua, pero su prueba de equivalencia matemática dejaba mucho que desear. Posteriormente, entre 1927 y 1930, en un par de artículos y un influyente libro, Dirac unificó ambos formalismos, pero para ello recurrió al uso y abuso de *funciones delta*, muy sospechosas desde un punto de vista matemático. Paralelamente, entre 1927 y 1932, von Neumann publicó una serie de tres artículos en *Göttinger Nachrichten* y un monumental tratado que procuraron dar un soporte matemático firme a la naciente Mecánica Cuántica, mediante el empleo axiomático de los *espacios de Hilbert* y el rechazo de las *funciones delta*. Sin embargo, la Mecánica Cuántica de von Neumann, impecable para los matemáticos, tropezó con el hecho de que los físicos preferían la Mecánica Cuántica de Dirac, por cuanto ésta resultaba más útil pese a su carencia de rigor. Con el paso del tiempo, gracias a los trabajos de Schwartz y Grothendieck en Análisis Funcional allá por los años 50 y 60, las *funciones delta* adquirieron carta de naturaleza matemática al ser formalizadas como *distribuciones*. Así, el formalismo de Dirac logró adquirir sólida fundamentación matemática, dentro de los *espacios «enjarciados» o «aparejados» de Hilbert* o *tripletes de Gelfand* (*rigged Hilbert spaces* / *Gelfand triplets*), que fueron aplicados a la práctica cuántica por Arno Bohm (1966), Roberts (1966) y Melsheimer (1972) entre otros. La idea es, *cum grano salis*, ligar lo mejor del formalismo de von Neumann (el riguroso *espacio de Hilbert*) y lo mejor del formalismo de Dirac (la útil *función delta*) dentro de una estructura matemática consistente. Con este fin, se procura ir más allá del *espacio de Hilbert* de cara a incorporar objetos tan singulares como la *función delta*, pero sin perder al mismo tiempo la buena geometría del *espacio de Hilbert*. La solución consiste en considerar una estructura *alrededor* del *espacio de Hilbert* siguiendo el espíritu de la teoría de distribuciones: se toma el usual espacio de Hilbert y se lo *equipa* con otros dos espacios, uno más pequeño y otro más grande, que contienen respectivamente a todas las funciones *buenas* (funciones *test*) y a todas las funciones *malas* (funciones *singulares*, como la distribución δ de Dirac). Al conjunto de estos tres espacios es a lo que se denomina *espacio «enjarciado» o «equipado» de Hilbert* o *triplete de Gelfand* (Kronz 1999 y 2004; Gadella & Gómez 2002).[67]

Inspirándonos más o menos en Styler & *alea* (2002) podemos sistematizar estas formulaciones de la Mecánica Cuántica dentro del siguiente cuadro:

FORMULACIÓN	**Fecha**	**Creador**	**Entidad Matemática**	**Herramienta Matemática**	**Rasgos Destacables**
MECÁNICA MATRICIAL	1925	Heisenberg	Matrices	Cálculo Matricial	Heurística de la observabilidad
MECÁNICA ONDULATORIA	1926	Schrödinger	Funciones	Cálculo Diferencial	Heurística de la intuitividad
MECÁNICA DE DIRAC	1927-1930	Dirac	Funciones Singulares	Análisis Matemático	Pragmatismo

[67] Simplificando, los espacios de funciones matemáticas se organizan en una pirámide cuya base son los *espacios de Fréchet* (espacios dotados de una métrica completa), que a su vez engloban a los *espacios de Banach* (cuando la métrica está inducida por una norma), que a su vez engloban a los *espacios de Hilbert* (cuando la norma está inducida por un producto escalar), y que vienen a ser –por así decir- la cúspide.

MECÁNICA DE VON NEUMANN	1927-1932	Von Neumann	Clases de Equivalencia de Funciones	Análisis Funcional en Espacios de Hilbert	Rigor
MECÁNICAS *Á LA* DIRAC, SCHWARTZ & GELFAND	1960-1970	Arno Bohm, Roberts, Melsheimer	Distribuciones	Análisis Funcional en Espacios *enjarciados* o *equipados* de Hilbert	Conjugan rigor y pragmatismo, pero hay múltiples versiones no del todo equivalentes

Además, también deberíamos reseñar que existen otras formulaciones de la Mecánica Cuántica (como la *sum-over-histories formulation* de Richard Feynman (1948) o la *pilot-wave formulation* de David Bohm (1952)), pero éstas están más ligadas a desarrollos motivados por distintas interpretaciones que a la extensión del propio formalismo cuántico, aunque bien es cierto que la historia de las interpretaciones siempre ha influido sobre la historia de los formalismos, así como recíprocamente, lo que ha dado origen a una rica y compleja dialéctica que estamos procurando resumir ordenadamente.

5.3 El cuanto de acción y el determinismo: *el problema de la medida*

En la Física Clásica, el estado de un sistema mecánico queda *determinado* por los valores de ciertas variables observables (por ejemplo, tratándose de una partícula con movimiento rectilíneo, la posición y la cantidad de movimiento). Además, la medida de estas variables observables es una operación física que, se supone, siempre proporciona una serie de valores bien definidos (DV). La dinámica del sistema está regida por las Leyes de Newton, que son función de los valores observados y que nos indican que la Mecánica Clásica es, como vimos, determinista (DD + DU), por cuanto el estado inicial del sistema evoluciona bajo la dinámica newtoniana a un único estado final. Conocida la posición inicial y el momento de una partícula en un instante de tiempo, las Ecuaciones de Newton fijan exactamente qué le ocurrirá a la partícula en cualquier instante de tiempo posterior. Fijado un pasado, queda premeditado exactamente un futuro.

La definición clásica del estado de un sistema mecánico presupone tácitamente, pues, que: (i) las variables observables poseen valores precisos, bien definidos en cada instante (DV); y (ii) al menos en principio resulta posible medir dichos valores sin perturbar de modo apreciable el sistema. Obviamente, las limitaciones de los instrumentos de medición y de los propios experimentadores implican que (i) no se cumpla en la práctica, pero se admite que los valores de las variables observables pueden conocerse con tanta precisión como se desee. En cuanto a (ii), la física clásica admite que la interacción entre el sistema observado y el aparato de medida puede delimitarse claramente mediante un análisis conceptual adecuado, deduciéndose la perturbación realizada al observar y medir. Todo esto proporciona, en teoría, una descripción completa del fenómeno bajo estudio. Así, el determinismo clásico queda formulado en el sentido de que el estado inicial del sistema mecánico está bien definido (DV) y fija exactamente su estado futuro (DD + DU).

En su formulación e interpretación más ampliamente aceptadas, la Mecánica Cuántica niega la validez general de (i) y (ii) y, por consiguiente, rechaza el determinismo tanto en sentido físico (DV) como en sentido matemático (DD + DU) –más arriba ya hemos expuesto como reniega de este último a causa del indeterminismo instantáneo que hace acto de presencia en los procesos de medida-. En el Congreso Internacional de Física celebrado en 1927 en Como (Italia), Bohr dictó una conferencia titulada «El Postulado Cuántico y el desarrollo reciente de la Teoría Atómica», cuyo punto central fue mostrar cómo la esencia de la física cuántica reside en el postulado cuántico que introdujera Planck y que atribuye a cualquier proceso atómico una discontinuidad esencial por cuanto los intercambios de energía sólo toman lugar en unidades discretas de tamaño finito. Consecuentemente, la indivisibilidad del cuanto de acción causa una interacción incontrolable entre el sistema observado y el aparato de medida que obliga a abandonar la descripción determinista clásica (DV + DD + DU): si eliminamos toda perturbación externa del sistema físico, ninguna observación resulta posible; pero, si para hacer posibles las observaciones permitimos ciertas interacciones con los instrumentos de medida, no será ya posible deducir el estado del sistema sin ambigüedad. En efecto, como apunta Rioja (1992, 259), si la perturbación generada por la observación se midiera en magnitudes continuas a la manera de la física clásica, podría al menos ser arbitrariamente reducida tanto como se quisiera y, por tanto, hacerse despreciable; pero, dentro del campo en que rige el cuanto de acción, se mide en magnitudes discretas y, en consecuencia, no puede reducirse por debajo de cierto umbral, porque de hacerlo así no habría ni interacción con el mecanismo de observación. (Es análogo a lo que sucede en matemáticas con respecto a las propiedades topológicas de densidad y continuidad: existen números reales distintos de 0 tan próximos a 0 como queramos, pero no existe ningún número natural distinto de 0 que diste de 0 menos *estrictamente* de la unidad; nótese que el número más cercano a 0 es 1 pero que éste ya dista una unidad de aquél.)

Pero aún hay más, en la formulación e interpretación estándar, las *relaciones de indeterminación* de Heisenberg (1927) capturan esta indeterminación inherente a las propiedades cuánticas:

$$(\Delta p)(\Delta x) \geq h/2\pi$$

Atendamos a estas palabras del propio Heisenberg: «lo que está equivocado en la formulación habitual de la ley de causalidad –*cuando conocemos el presente con precisión, podemos predecir el futuro*- no es la conclusión sino la premisa» (Wheeler & Zurek: 1953, 83). No es sólo que la Mecánica Cuántica parezca rechazar DD & DU, sino que incluso rechaza DV, esto es, la afirmación consistente en aseverar que todas las propiedades cuánticas –como la posición o el momento de un electrón- están determinadas –poseen valores bien definidos- en cualquier tiempo, aunque el sistema se encuentre en superposición.

5.4 Antología de *interpretaciones* cuánticas

El Postulado Cuántico de Planck supuso, al considerar que los sistemas físicos cambian de estados de modo discontinuo, una ruptura con la continuidad y el determinismo de la física anterior a 1900. Muy pronto, con el establecimiento del formalismo cuántico en 1925 y 1926, se plantearon al respecto las tres opciones interpretativas que mayor atención han captado. Este trío de interpretaciones clásicas lo forman: la interpretación estadística de la probabilidad cuántica de Einstein (ψ describe el comportamiento de una *colectividad* de sistemas similares a nuestro sistema *S*, en cuyo caso, no describe de modo *completo* a *S*), que tiene que lidiar con el hecho de que declara incompleta a la teoría cuántica; la interpretación individual de Bohr (ψ describe por *completo* el comportamiento de un sistema *individual* como *S*), que deja sin aclarar cómo asociar probabilidades a sistemas individuales en vez de a colectivos de sistemas; y la interpretación *mixta* de Heisenberg, que terminaría por concebir la probabilidad cuántica como potencia, recayendo en la metafísica (Ferrero: 1982). En efecto, como contó el propio Heisenberg en su conferencia *El desarrollo de la Mecánica Cuántica* al recibir el Premio Nobel en 1933 y más tarde amplió en Heisenberg (1972), este trío de alternativas centraron todas las discusiones a partir de 1926, tanto entre Heisenberg y Einstein (primavera de 1926) como entre Bohr y Schrödinger (otoño de 1926) o Bohr y Einstein (en los sucesivos Congresos Solvay), sin olvidar el debate suscitado por el experimento mental EPR (Einstein, Podolsky & Rosen: 1935; Bohr: 1935).

En resumidas cuentas, Bohr –que interpretaba las probabilidades cuánticas de un modo objetivo- mantenía que las propiedades de un sistema cuántico en un estado superpuesto están indeterminadas (no–DV), mientras que Einstein –que interpretaba las probabilidades cuánticas de un modo subjetivo- defendía que las propiedades cuánticas siempre están determinadas, esto es, siempre tienen valores, por lo que la Mecánica Cuántica es incompleta y debe de existir otra teoría cuántica que sí respete la completa determinación de valores (sí-DV). EPR apuntaba, precisamente, más hacia esta segunda opción que hacia la primera; en efecto: o bien se admitía que la Mecánica Cuántica no es local (algo que a Einstein le parecía absurdo), o bien se admitía que no es completa (así, Einstein y cía.).[68]

Pese al continuo desprecio que Einstein mostró por las teorías de variables ocultas, John Bell dio a la luz en 1965 una desigualdad matemática que permitiría discriminar *positivamente* quién llevaba la razón, si Bohr –la Mecánica Cuántica es completa- o Einstein –la Mecánica Cuántica *no* es completa y *puede* completarse con variables ocultas que respeten la Premisa de Localidad (obviamente, eran *ciertas* variables ocultas distintas a las consideradas por von Neumann, porque su prueba de inconsistencia con parámetros ocultos sólo vale para variables ocultas no contextuales, escapando las contextuales a su prohibición)-. Como dedujo Bell, si completamos la Mecánica Cuántica con variables ocultas locales, existirán ciertas discrepancias experimentales con respecto a la Mecánica Cuántica de Copenhague-Gotinga. Los experimentos de Alain Aspect de 1982 de emisión de fotones de cascadas atómicas han dado la razón a la versión ortodoxa de la Mecánica Cuántica: la Mecánica Cuántica de

[68] De todos modos, como García Alcaine & Álvarez Galindo (2005) se han encargado de subrayar, la no-localidad de la Mecánica Cuántica canónica no es tan extraña como a Einstein le parecía. Las correlaciones cuánticas no locales no violan la causalidad einsteiniana (la prohibición de *spooky actions at a distance*), porque debe distinguirse la correlación de la causación. Así lo ilustran Alcaine y Galindo: si preparamos dos sobres idénticos conteniendo cada uno la mitad de un billete y los enviamos a dos observadores arbitrariamente lejanos, cuando uno de ellos abra su sobre y vea qué mitad del billete contiene, sabrá con certeza qué obtendrá o habrá obtenido el otro observador; y a nadie se le ocurre decir que el resultado de abrir el segundo sobre es causado por la observación del primero, simplemente sucede que la correlación es fruto de la común preparación de los sobres (aunque lo raro de la física cuántica es que no puede decirse que durante el viaje la mitad de billete esté determinada). Causación y correlación no quieren decir lo mismo.

siempre es predictivamente más exitosa que la completada con variables ocultas *locales*.[69]

Como las *Desigualdades de Bell* han imposibilitado una teoría con variables ocultas *locales*, la única válvula de escape del *determinismo a la Einstein* es postular variables ocultas *no locales*. ¿Y qué decir de la posibilidad de unas variables ocultas no locales que asuman que todas las propiedades de un sistema cuántico están determinadas –esto es, poseen valores- en todo tiempo, hasta cuando el sistema está en un estado de superposición (DV)? Sencillamente que el *Teorema de Kochen-Specker* las echa por tierra. Este resultado matemático acerca de la geometría de los espacios de Hilbert afirma categóricamente que, si los estados cuánticos se representan por vectores normalizados y las propiedades se representan unívocamente por operadores, pese a la inclusión de variables ocultas no locales, no todas las propiedades cuánticas pueden tener simultáneamente valores (no–DV).

Visto que no parece fácil completar la descripción de estados y propiedades de la Mecánica Cuántica, se ha pensado que mejor sería completar su dinámica para intentar solucionar, de paso, el *problema de la medida*. Dos propuestas que sostienen que la Mecánica Cuántica es incompleta (no en la descripción de estados y propiedades sino en la descripción de la dinámica) y que vienen suscitando gran atención son las Interpretaciones de David Bohm (1952) y de Giancarlo Ghirardi, Alberto Rimini y Tullio Weber (1986).

La Interpretación de Copenhague presenta el problema de que no especifica qué es exactamente una medida, en otras palabras, cuándo hay que aplicar el Postulado de Proyección sobre la Ecuación de Schrödinger y cómo se produce el colapso de la función de onda. En concreto, Bohr apostaba por definir la medición como la interacción entre un sistema microscópico y otro macroscópico, pero esto conlleva una cierta ambigüedad: como no se dispone de una noción bien definida de medida, cualquier sistema microscópico que interactúe con un sistema macroscópico está, de hecho, desencadenando una medida. Para salvar este escollo, Ghirardi, Rimini y Weber (GRW) plantearon la *teoría de la reducción dinámica*, basada en una corrección no-lineal de la Ecuación de Schrödinger. Al precio de la no-linealidad, puede prescindirse del Postulado de Proyección, que ponía coto a la validez de la Ecuación de Schrödinger (colapso de la función de onda), y funcionar únicamente con una sola ecuación que regula estocásticamente todos los procesos. Sin embargo, GRW no está libre de problemas. En especial, al sostener que continuamente se dan colapsos espontáneos en la posición de los sistemas cuánticos, ¿cómo determinar la probabilidad por tiempo y por partícula del colapso de la posición?, ¿y por qué privilegiar el observable de posición frente a todos los demás observables?

En otro punto, nos encontramos con la Interpretación de Bohm. En la Mecánica Bohmiana el estado de un sistema cuántico no viene sólo dado por la función de onda sino también por las posiciones de las partículas de que se compone. Siguiendo la idea de la *doble solución* de De Broglie, Bohm concibe que la función de onda sirve de guía –por esto la denomina *onda piloto*- del movimiento de las partículas de que consta el sistema cuántico, que precisa del estudio de *ambos* tipos de entidades. La teoría de la doble solución de De Broglie-Bohm no mantiene la disyuntiva conceptual onda-partícula y permite contemplar un sistema mecánico-cuántico como una suerte de síntesis entre una partícula definida con precisión y un campo que ejerce una fuerza sobre esa partícula. Como las ecuaciones mecánico-cuánticas admiten dos tipos de

[69] Algunos físicos, como Ferrero y Santos (1995b), apuntan que de modo *estricto* no se han violado las Desigualdades de Bell, debido a *escapes* tales como la baja eficiencia de los detectores de fotones o la situación estática de los dispositivos experimentales, es decir, debido a *lagunas* experimentales.

solución, ha de asumirse tanto una solución no singular, ondulatoria (con una significación estadística madura), como una solución singular, interpretada como la partícula bajo estudio. Los corpúsculos discretos son singularidades dentro de las ondas continuas que los guían en su movimiento. Las funciones de onda evolucionan según la Ecuación de Schrödinger, pero la dinámica de partículas viene dada por una nueva ecuación: la Ecuación de Bohm. Así, las partículas siempre poseen una posición bien definida, y evolucionan de modo fuertemente determinista. Al modificar la dinámica de esta manera, Bohm salva la premisa determinista al precio de abandonar la cómoda premisa de localidad. Su teoría es correcta, pues reproduce todos y cada uno de los resultados de la Mecánica Cuántica Ortodoxa, pero postula una complicada y extraña *onda piloto* que abarca todo el espacio-tiempo y que transmite instantáneamente señales a distancia, a velocidad superior a la de la luz. Lo que hace la Mecánica Bohmiana incompatible con la Mecánica Relativista Especial, *largo me lo fiáis*...

Por último, brevemente, vamos a hacernos eco de algunas otras interpretaciones bastante en boga. En primer lugar, la Interpretación Modal. En la Interpretación Modal de la Mecánica Cuántica se prescinde tanto del Postulado de Proyección como de la Regla de Born o Regla E/E (*Eigenstates*/*Eigenvalues*, véase Apéndice) y se afirma que algunas propiedades cuánticas siempre poseen valores mientras que otras no. Pero los partidarios de esta interpretación (Healey, Diecks, van Fraassen...) no se ponen de acuerdo a la hora de decidir cuáles entran dentro de cada clase.

Y, en segundo lugar, las Interpretaciones de Muchos Mundos y de Muchas Mentes, que creen en la completitud de la Mecánica Cuántica pero pretenden interpretar las superposiciones de un modo literal mas no estándar. La Interpretación de Muchos Mundos de Everett y De Witt preserva la dinámica de Schrödinger pero prescinde del Postulado de Proyección, sugiriendo que cada término de una superposición de estados cuánticos representa un estado en un mundo físico distinto (único modo de salvar el hecho de que los experimentos aportan resultados únicos, los de nuestro mundo). Ahora bien, esta interpretación resulta sumamente metafísica por varios motivos: primero, nos obliga a creer que cada vez que se produce una medición nuestro mundo se escinde en una infinidad de mundos de los cuales sólo uno corresponde al que habitamos; y, segundo, si suponemos que no existe comunicación entre mundos, cómo interpretar las probabilidades cuánticas. Por su parte, la Interpretación de Muchas Mentes de Albert y Loewer distingue entre estados físicos y estados mentales, aseverando que estos últimos nunca están en superposición. Se acepta la dinámica de Schrödinger pero se rechaza el Postulado de Proyección, y para explicar la unicidad experimental se llega a reclamar que los estados mentales evolucionan sin superposiciones pero de modo indeterminista, mientras que los estados físicos se rigen de modo por completo determinista. Pero, con esto, de nuevo recaemos en la metafísica, ya que desconocemos cómo interpretar las probabilidades cuánticas y qué es una mente.

El cuadro que ofrecemos a continuación pretende sistematizar esta discusión siguiendo lejanamente a Albert (1992) y Dickson (1998):

INTERPRETACIÓN	**Dinámica**	**E/E**	**¿QM incompleta?**	**DD+DU**	**DV**	**Problemas**
COPENHAGUE	Ec.Schrödinger + Postulado de Proyección	SI	NO	NO	NO	Medida, EPR
VARIABLES OCULTAS LOCALES	Ec.Schrödinger (sin postulado de proyección)	NO	SI (completar la descripción de estados y propiedades)	SI	SI	BELL
VARIABLES OCULTAS NO LOCALES	Ec.Schrödinger (sin postulado de proyección)	NO	SI (completar la descripción de estados y propiedades)	SI	SI	KOCHEN SPECKER
BOHM	Ec.Schrödinger + Ec.Bohm	NO	SI (completar la dinámica)	SI	SI	Relatividad Especial
GRW	Ec.GRW	SI	SI (completar la dinámica)	NO	NO	Medida, Probabilidad
MUCHOS MUNDOS	Ec.Schrödinger (sin postulado de proyección)	SI	NO	SI	SI	Metafísica, Probabilidad
MUCHAS MENTES	Ec.Schrödinger (sin postulado de proyección)	SI	NO	¿SI?	¿SI?	Metafísica, Probabilidad
MODAL	Ec.Schrödinger (sin postulado de proyección)	NO	SI (completar la descripción de estados y propiedades)	NO	NO	Distinción propiedades ónticas / epistémicas

Y bien, ¿qué conclusiones causales y casuales cabe concluir de todo esto? Fundamentalmente, tres. En primer lugar, la negación del determinismo –tanto en sentido matemático (DD + DU) como en sentido físico (DV)- en el ámbito cuántico depende de la interpretación del formalismo mecánico-cuántico a la que nos acojamos (como muestra la tabla). Pero, en segundo lugar, también es cierto que la interpretación ortodoxa o estándar de la Mecánica Cuántica conculca directamente ambas clases de determinismo, y está bien respaldada por los resultados que arrojan los experimentos. Y, en tercer y último lugar, el problema del determinismo o del indeterminismo en las ciencias físicas es, simultáneamente, un problema científico *y* filosófico, por cuanto atañe tanto al formalismo como a la interpretación. Tal vez Dios no juegue a los dados, como clamaba Einstein; pero, como contestaba Bohr, no podemos decirle a Dios lo que tiene que hacer.

6. La aleatoriedad, entre el indeterminismo y la impredecibilidad

¿Cómo entender la aleatoriedad después de todo lo expuesto? Simplemente como impredecibilidad o, mejor, como máxima impredecibilidad, como sostiene Eagle (2005), y que tanto puede darse en sistemas genuinamente indeterministas (ruido aleatorio) como en sistemas con caos determinista[70], pues como sentenció Patrick Suppes: «los fenómenos que no pueden predecirse deben ser juzgados como aleatorios» (citado por Eagle). Luego tanto existe un Azar ontológico, con mayúscula, como un azar epistemológico, con minúscula. A ello nos inclinamos.[71]

Por último... ¿qué concluir? ¿Es el mundo en que vivimos determinista o indeterminista? ¿Predecible o impredecible? ¿Reversible o irreversible? ¿Estable o inestable? Acaso los científicos más optimistas, que creen en la posibilidad de una Teoría del Todo, digan que debemos esperar a la formulación de ésta para poder responder a estas preguntas con exactitud. Según como sea esta Teoría Final, será el mundo. Pero basta constatar que no existe una sola ciencia, sino múltiples ciencias, y que en cada una de ellas subyace una ontología distinta, para rechazar esta mitología: en el siglo XIX, los científicos creían estar cerca de una Teoría Última fundada en la Física Clásica, de raigambre determinista; y, por el contrario, cómo han cambiado las cosas, en el siglo XXI, Hawking y otros barajan una Teoría Última basada en el indeterminismo cuántico. Dejando atrás estos *wishful thinkings*, sea como fuere, cada ciencia estudia un dominio de realidad y la necesidad de una ontología distinta para cada uno de ellos no es una necesidad infantil del espíritu humano sino una decidida apuesta por la inteligibilidad, porque el universo, no lo olvidemos, se presenta ante nuestros ojos y ante nuestras manos como mezcla de determinismo e indeterminismo.

---

[70] Muchas veces, como analiza Barnsley (1993, 154), la dinámica aleatoria no es sino la proyección de una dinámica determinista actuando en espacios de mayor dimensión.

[71] A la aleatoriedad propia del caos determinista hay quien la denomina como pseudo-aleatoriedad (Batanero & Romero: 1996, 23).

CAPÍTULO 6

LA IMPREDECIBILIDAD DE LOS SISTEMAS CAÓTICOS Y LA DISPUTA REALISMO-INSTRUMENTALISMO

Yahvé.- ¿Quién podrá contar el polvo de Jacob?
¿Quién podrá enumerar la Nube de Israel?

Números XIII 10

Mefistófeles.- ¿Quién sabe cómo caerán a partir de ahora los dados?

Goethe, *Fausto*

Dios y el Diablo, por una vez y sin que sirva de precedente, están de acuerdo en que la capacidad humana de predicción presenta límites insalvables. Tampoco puede soslayarse lo que Inmanuel Kant escribió en su *Crítica del Juicio* acerca de los mecanismos imperantes en la naturaleza: «Se puede con audacia decir que es absurdo para los hombres tan sólo el concebir o esperar el caso de que pueda levantarse una vez algún otro Newton que haga concebible aun sólo la producción de una brizna de hierba según leyes de la naturaleza no ordenadas por una intención; hay que negar absolutamente ese punto de vista a los hombres».

Y, sin embargo, esta ambiciosa afirmación se torna hoy día obsoleta, pues, si se nos consiente la hipérbole, ya ha llegado el tiempo de ese segundo Newton de las hojas de hierba. ¿Su nombre? Michael Barnsley. Y es que, por expresarlo en términos kuhnianos, al *paradigma newtoniano* –el único accesible, junto al *euclídeo*, en época de Kant- le han surgido serios competidores: entre ellos, el *paradigma* de las *teorías del caos*. Como descubrió Barnsley, con una simple ley y la ayuda de un ordenador somos capaces de lograr que *brote* tal configuración vegetal. Basta realizar lo siguiente: simularemos el lanzamiento de una moneda legal, tal que, fijado un punto como origen (valga cualquiera distinto de los puntos que yacen en la recta diagonal sudeste-noroeste que pasa por el centro de la pantalla), si sale "cara", pintaremos un nuevo punto en la pantalla exactamente a 6 unidades de distancia noroeste del punto anterior, y, si sale "cruz", lo pintaremos movido un 25% hacia el punto central respecto del punto previo. Obviamente, este procedimiento puede iterarse cuantas veces se desee. Pues bien, al comienzo, la distribución de los puntos dibujados resulta aparentemente aleatoria, azarosa. Enigmáticamente, tras unas cien iteraciones, una determinada forma comienza a *emerger*: una diáfana hoja de helecho poco a poco va apareciéndose. Es *como si* del *caos* surgiese *orden* en la *forma* de un *conjunto fractal*: es el *helecho de Barnsley*.[72] Otro monstruo topológico no conjurable, *si Kant levantara la cabeza*... Resulta imposible saber qué diría el filósofo de Königsberg si alcanzara a ver la sorprendente cantidad de sistemas cuya dinámica es caótica o afín a la de uno caótico, con todo lo que ello conlleva, esto es, un comportamiento estocástico –y *stochastikos* significa *con buena puntería*- dentro de un sistema determinista. Caos y fractales, como solía señalar Miguel de Guzmán, constituyen una nueva manera de explorar el Universo.

Figura 1. Helecho de Barnsley simulado digitalmente con MATLAB

En este capítulo, tras haber formulado en el anterior un sistema de coordenadas para encuadrar filosóficamente las nociones de determinismo y de predecibilidad, estamos en condiciones de acercarnos a la Teoría del Caos con el fin de estudiar qué conclusiones se siguen de la impredecibilidad de los sistemas caóticos para el debate entre el realismo y el instrumentalismo científicos; por cuanto –concordamos con Gleick (1988, 14)– la Teoría de la Relatividad eliminó la ilusión del espacio y el tiempo absolutos de la Física Clásica, la Teoría Cuántica ha arruinado el sueño de los procesos de medición controlables, y la Teoría del Caos barre la fantasía de la predecibilidad. Primeramente, reconstruimos el nacimiento y la explosión de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos. Segundo, analizamos el problema de la predicción en los sistemas dinámicos caóticos. En tercer lugar, ilustramos nuestra tesis filosófica principal con el ejemplo científico actual que supone la cuestión de la predicción del tiempo meteorológico y del cambio climático. Y, en cuarto orden, nos preguntamos qué corriente dentro de la teoría de la ciencia del siglo XXI, la realista o la instrumentalista, está mejor equipada para describir y explicar el quehacer científico que queda plasmado en la Ciencia del Caos.

1. Configuración de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos

El caos está en boca de todos. En el cine, en películas como *Chaos*, *Efecto Mariposa* o *Parque Jurásico*. En la literatura, en relatos clásicos tales como *A Sound of Thunder* de Ray Bradbury, en donde la muerte de una mariposa prehistórica cambia el

[72] En Barnsley (1985) y (1993, 84-91) pueden encontrarse los rudimentos matemáticos de este *juego de caos*: Barnsley considera un IFS (sistema de función iterada) y un algoritmo aleatorio, no determinista (no computa directamente las sucesivas imágenes de un conjunto por una función, que dependen de ciertas probabilidades); y su conjunción produce como salida una secuencia de puntos que dibujan el atractor del IFS al que convergen, en este caso, un helecho vegetal (los fundamentos de este proceso están, como apunta Barnsley (1993, 84), en la teoría ergódica).

resultado de una elección presidencial en EE.UU., o como *El hundimiento de la Baliverna* de Dino Buzzati, en donde una escalada sin importancia por un destartalado muro del edificio Baliverna provoca un inesperado desenlace:

> Una vez bien aferrada la punta de una lanza, quise izarme a pulso, pero ésta cedió, rompiéndose en pedazos. Perdido el equilibrio, salté hacia atrás y caí de pie sin ninguna otra consecuencia que un fuerte golpe. El barrote de hierro, desmenuzado, me siguió. Prácticamente al mismo tiempo, detrás del barrote de hierro se desprendió otro, más largo. Debía de tratarse de una especie de puntal colocado allí con fines de refuerzo. Privada así de su sostén, también la ménsula –imaginad una lámina de piedra larga como tres ladrillos- cedió. No terminó aquí, no obstante, el estropicio que provoqué de forma involuntaria. Al principio de todo hubo un leve temblor que serpenteó por la pared; luego apareció una gibosidad larga y sutil; luego los ladrillos se separaron, abriendo sus estropeadas dentaduras; y, entre regueros de polvorosos desprendimientos, se abrió una grieta tenebrosa. Entonces, detrás de los jirones de la cumbre, también la entera masa que se hallaba detrás, se movió lentamente, arrastrada por la fuerza irresistible de la ruina. ¿Había provocado yo la hecatombe? ¿Acaso la rotura del barrote de hierro había propagado, por una monstruosa progresión de causas a efectos, la ruina a toda la mastodóntica edificación? ¿quizá sus primeros constructores habían dispuesto con diabólica maldad un secreto juego de masas en equilibrio por el cual bastaba mover aquel insignificante barrote para que todo se viniera abajo?

Pero también en novelas de actualidad, como *El pintor de batallas* de Arturo Pérez-Reverte, en que una fotografía de un guerrillero croata tomada fortuitamente cambia por completo la vida del miliciano al precipitar el asesinato de su familia a manos serbias:

> Efecto Mariposa, ha dicho. Qué ironía. Un nombre tan delicado. En aquellos sistemas confortables con los que la ciencia nos tranquilizó durante siglos, los cambios minúsculos en las condiciones iniciales no alteraban la solución; pero en los sistemas caóticos, cuando varían un poco las condiciones de partida, el objeto sigue un camino distinto. Eso sería aplicable a tus guerras, claro. El horror siempre al acecho, exigiendo diezmos y primicias, listo para degollar a Euclides con la guadaña del caos. Mariposas aleteantes por todas las guerras y todas las paces.

La llamada *ciencia del caos* nace de la mano de matemáticos interesados en la vinculación entre sistemas dinámicos y topología, como Stephen Smale, René Thom o Benoit Mandelbrot; de físicos de campos tan dispares como la meteorología o la óptica, como Edward Lorenz o Hermann Haken; de químicos como Ilya Prigogine; de biólogos estudiosos del crecimiento de poblaciones, como Robert May... E, incluso, a esta larga lista debieran sumarse por méritos propios: Mitchell Feigenbaum, James Yorke, David Ruelle, Michael Barnsley y tantos otros. Pero, ¿cómo empezó todo? ¿Cuál es la historia del caos?

Comencemos nuestro recorrido retrocediendo en el tiempo: tres han sido los caminos seguidos en el estudio de la dinámica: primero, el de la Mecánica Racional, basada en las Ecuaciones de Newton; segundo, el de la Mecánica Analítica, basada en las ecuaciones variacionales de Lagrange y Hamilton; y, tercero y último, el de la Teoría General de los Sistemas Dinámicos, basada en las investigaciones de Poincaré, Liapunov y Birkhoff (Sanjuán & Casado Vázquez: 2005).

El intento por comprender las trayectorias planetarias observadas por Kepler condujo a Newton a modelarlas matemáticamente, siguiendo la estela de Galileo. Newton formuló sus leyes de una forma matemática que relacionaba entre sí las magnitudes físicas y sus velocidades de cambio. Las leyes físicas que describían los sistemas dinámicos quedaron expresadas como ecuaciones diferenciales, siendo los diferenciales medidas de los ritmos de cambio. Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales, como la de ecuaciones algebraicas, no siempre es fácil. Es más, casi nunca lo es. En esto, la Mecánica Analítica supuso un avance con respecto a la

Mecánica Racional. Al aproximarse Mecánica y Análisis, el estudiar un fenómeno físico y el hallar las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan se hicieron sinónimos. Así, tras el hallazgo newtoniano de las ecuaciones que rigen el movimiento de los sistemas de puntos-masa y de los sólidos rígidos, Euler formuló un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describía el movimiento de medios continuos como el agua o el aire u otros fluidos sin viscosidad. Después, Lagrange enfocó su atención en las ondas del sonido, en las ecuaciones de la acústica. Más tarde, Fourier se centró en el flujo de calor, proponiendo una ecuación en derivadas parciales que lo describía. Durante los siglos XVIII y XIX, los físicos matemáticos fueron extendiendo su dominio matemático sobre la naturaleza al ir proponiendo nuevas ecuaciones diferenciales –por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos viscosos o las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo– para estudiar fenómenos provenientes de varios campos. Toda la naturaleza –sólidos, fluidos, sonido, calor, luz, electricidad– quedó modelada mediante ecuaciones diferenciales. Ahora bien, una cosa era dar con las ecuaciones del fenómeno en cuestión y otra, bien distinta, resolverlas.

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales fue desarrollada por completo en poco tiempo. No así la teoría gemela, la teoría de las ecuaciones diferenciales *no* lineales. Los problemas no lineales se resolvían linealizándolos. Con otras palabras, dada una ecuación diferencial no lineal, se resolvía una ecuación diferencial lineal próxima y las soluciones de aquélla se obtenían perturbando las soluciones de ésta. Sin embargo, esta técnica pronto se mostró insuficiente, puesto que no funcionaba en múltiples casos. Habría que esperar a Poincaré para que las ecuaciones no lineales recibieran una atención pareja a la que tuvieron las ecuaciones lineales. A la vista de que la perturbación de la solución del problema lineal subyacente al problema no lineal de partida no siempre era exitosa, Poincaré fundó la Teoría General de los Sistemas Dinámicos, que se ocupaba de los sistemas lineales y no lineales desde una perspectiva menos cuantitativa (búsqueda de soluciones explícitas) que cualitativa (estudio de la dinámica en el espacio de fases y de su estabilidad), recurriendo para ello a la naciente Topología. No en vano, como tendremos ocasión de ver, numerosos autores consideran a Poincaré como el pionero descubridor del *caos*. De entonces a acá, los trabajos de Liapunov, Birkhoff y otros han contribuido a la consolidación de este tercer camino de la dinámica.

Uno de los problemas no lineales que trajo de cabeza a los físicos y matemáticos desde el siglo XVII fue, dentro del campo de la Mecánica Celeste, de la modelización del Sistema Solar, el problema de los n cuerpos, que puede enunciarse de manera muy sencilla: dados n cuerpos de distintas masas bajo atracción gravitacional mutua, se trata de determinar el movimiento de cada uno de ellos en el espacio. Aunque el problema tiene un enunciado aparentemente de gran simplicidad, su solución no es en absoluto fácil. Newton resolvió geométricamente el problema de los *dos* cuerpos para dos esferas moviéndose bajo atracción gravitacional mutua en los *Principia*. En 1734 Daniel Bernoulli lo resolvió analíticamente en una memoria premiada por la Academia Francesa. Y, finalmente, Euler lo resolvió con todo detalle en su tratado *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum* de 1744. Tras ser resuelto el problema de los n cuerpos para $n = 2$, los físicos y matemáticos del XVIII y del XIX se encararon con este mismo problema para $n = 3$, puesto que el conocimiento de los movimientos del sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna lo precisaba. Entonces, se iniciaron dos programas de investigación paralelos. Por un lado, se buscaron soluciones particulares exactas. Así, Lagrange resolvió el problema de los *tres* cuerpos restringido al sistema formado por el Sol, Júpiter y el asteroide Aquiles. Por otro lado, se buscaron soluciones generales aproximadas. Así, Laplace (Kline: 1992, 653 y ss.).

Simultáneamente, apareció una cuestión muy relacionada con la del problema de los *n* cuerpos: la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar (o, más en general, de un sistema formado por *n* astros), y cuya solución depende directamente de la solución que se dé a aquél. Newton sabía que el problema de los dos cuerpos era resoluble con exactitud para todo tiempo, pero que no ocurría así cuando un tercer cuerpo entraba en interacción. Aunque débiles en comparación con la fuerza de atracción del Sol, las fuerzas entre los planetas no eran ni mucho menos despreciables, por cuanto a la larga podían desviar algún planeta de su órbita e incluso, en el límite, expulsarlo fuera del Sistema Solar. Las fuerzas interplanetarias podían estropear las bellas elipses keplerianas, sin que fuera posible predecir el comportamiento del Sistema Solar en un futuro lejano. De hecho, en su trabajo *De motu corporum in gyrum* de 1684, Newton afirmaba que los planetas no se mueven exactamente en elipses ni recorren dos veces la misma órbita. Además, reconocía que definir estos movimientos para todo futuro excedía con mucho la fuerza entera del intelecto humano (Petersen: 1995). Por tanto, si el Sistema Solar se iba desajustando, era necesaria una solución drástica: la Mano de Dios tenía que reconducir cada planeta a su elipse, reestableciendo la armonía.

Por consiguiente, cabía hacerse esta acuciante pregunta: ¿es el Sistema Solar estable o inestable? ¿Permanecerá cada planeta dentro de su órbita o, en el futuro, se desviará y será preciso que el Dedo de Dios lo empuje a su elipse kepleriana? Frente a Newton y Clarke, que invocaban la necesidad de que Dios restableciera la armonía planetaria cada cierto tiempo, Leibniz sostenía que el Creador no podía ser un relojero tan torpe. El *Deus ex machina* newtoniano provocaba la ira del espantado Leibniz. Décadas después, Laplace creyó explicar las anomalías orbitales de Saturno y Júpiter, que tanto preocuparon a Newton, como meras perturbaciones que sólo dependían de la Ley de Gravitación y tendían a compensarse en el transcurso del tiempo. Así, al presentar su Mecánica Celeste a Napoleón, pudo colegir que Dios no era una hipótesis necesaria en su sistema del mundo. Sin embargo, la respuesta de Laplace distaba años luz de ser exacta. En sus ecuaciones del sistema Sol-Júpiter-Saturno (problema de los *tres* cuerpos), Laplace despreció un término matemático que creía muy pequeño pero que, en contra de lo por él supuesto, podía crecer rápidamente y sin límite, hasta desestabilizar el Sistema Solar. Múltiples físicos y matemáticos decimonónicos dedicaron sus esfuerzos a dar una respuesta completa al problema de los *tres* cuerpos y a la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar. Entre ellos, uno de los personajes clave en la configuración de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos, el matemático Henri Poincaré.

La egregia memoria de Poincaré sobre el problema de los *tres* cuerpos fue publicada en 1890, cuando contaba con sólo 36 años, pero la historia de su publicación comenzó tiempo atrás. Varios años antes, en 1885, los matemáticos europeos tuvieron noticia de que un importante concurso internacional de matemáticas iba a ser convocado bajo el auspicio de Oscar II, rey de Suecia y Noruega, para celebrar su sesenta aniversario en el trono. Dentro de una competencia internacional, se ofreció un premio al matemático por fin capaz de resolver el problema de los *tres* cuerpos y, de este modo, capaz de abrir el camino al estudio de la estabilidad del Sistema Solar. Los principales organizadores y jueces de la competición fueron los matemáticos Mittag-Leffler, Weierstrass, Hermite y Kronecker, que formularon cuatro preguntas, requiriendo una de ellas la solución al problema de los *n* cuerpos (a la manera que se había resuelto el de *dos*).

Figura 2. Jules Henri Poincaré

Alentado por la competencia, Poincaré procedió a sintetizar muchas de las ideas acerca del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales que él había desarrollado entre 1881 y 1886, y que sedimentaron en una colección de cuatro memorias, siendo la principal la *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, en donde discutió por primera vez la idea de estabilidad. Pertrechado con esta pila de nuevas herramientas y técnicas matemáticas, abordó como aplicaciones los problemas consabidos. Antes de atacar el problema de los *n* cuerpos, Poincaré se centró en el problema *restringido* de los *tres* cuerpos.

El jurado declaró ganador a Poincaré por una compleja resolución del problema restringido de los 3-cuerpos, del problema de Hill-Sitnikov, en que un planeta ligero se mueve bajo la atracción gravitatoria de dos estrellas iguales que giran una alrededor de la otra describiendo dos elipses confinadas en un mismo plano. Pero alguien descubrió que la memoria de Poincaré, de más de 200 páginas, contenía un error. Una tirada completa de la prestigiosa revista *Acta Mathematica*, que publicaba el resultado de Poincaré, hubo de ser destruida (Rañada: 1998, 375).[73] A toda prisa, Poincaré revisó su trabajo y descubrió que, en verdad, no podía resolverse ni probarse la estabilidad del sistema de Hill-Sitnikov tal y como él había creído hacerlo, porque la dinámica de este problema era caótica y los periodos del planeta no seguían pauta regular alguna.

A pesar de no solucionarlo, su revisión del problema restringido fue unánimemente reconocida como excelente y prestigiosamente publicada con el título *Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique*, 1890. Posteriormente, entre 1892 y 1899, éstas y otras ideas precipitarían en su monumental trabajo en tres volúmenes sobre los problemas dinámicos de la Mecánica Celeste: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Este hito en el estudio y desarrollo de la Dinámica contiene una de las primeras descripciones matemáticas del comportamiento caótico en un sistema dinámico, que recoge de su anterior ensayo. En efecto, en su estudio del problema restringido de los *tres* cuerpos, en que una de las masas es relativamente pequeña en comparación con las otras dos, Poincaré detectó lo que llamó *órbitas homoclínicas*, que dejan entrever que el problema bajo investigación presenta una dinámica realmente compleja y que es, esencialmente, la que conocemos con la denominación actual de *caótica*. Aubin & Dahan Dalmedico (2002, 294) se hacen eco de las palabras del preclaro matemático francés:

> Cuando uno intenta describir la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones... estas intersecciones forman una especie de red o malla infinitamente intrincada... Uno siente vértigo por la complejidad de esta figura que yo ni siquiera voy a intentar

[73] Sólo se conserva un ejemplar de la revista, celosamente guardado en una caja fuerte del Instituto Mittag-Leffler.

> pintar. Nada puede dar una idea mejor de la complejidad del problema de los tres cuerpos y de todos los problemas de la dinámica en general.

En suma, en su magistral obra sobre mecánica celeste, en donde se planteó tanto el problema de los *tres* cuerpos como el problema de la estabilidad del Sistema Solar, Poincaré alumbró el estudio *cualitativo*, no meramente *cuantitativo*, de las ecuaciones diferenciales. Además, como comprobaremos, Poincaré contribuyó, como pocos, a popularizar la idea de que existen sistemas dinámicos perfectamente determinados cuya predicción resulta imposible para el investigador, si la acumulación de pequeños errores puede propagarse provocando otros enormes. Por todo ello, muchas veces se le considera a Poincaré el *abuelo* de la dinámica no-lineal y caótica. Si Poincaré colocó los cimientos de la Teoría de Sistemas Dinámicos, Birkhoff y, más tarde, Smale terminaron de construirla; y este utensilio matemático se ha convertido, con el paso del tiempo, en pieza clave de la Teoría del Caos.

Pero no adelantemos acontecimientos. Hubo, además, muchos matemáticos que por aquel entonces estudiaron los trabajos de Poincaré sobre el problema de los *tres* cuerpos, dando lugar a nuevos descubrimientos en otros campos afines. Así, por ejemplo, Jacques Hadamard o Ivor Bendixson, interesados en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Pero, a pesar del éxito de Poincaré, durante los primeros años del siglo XX, no hubo intentos serios de investigar a fondo el comportamiento de las *órbitas homoclínicas* de Poincaré (sólo con el advenimiento de los modernos ordenadores ha sido posible realizar los laboriosos cálculos y análisis que los resultados de Poincaré demandaban).

Sin embargo, la influencia de Poincaré no desapareció del todo y se deja notar en los estudios de George David Birkhoff a propósito de las características cualitativas de las ecuaciones diferenciales. Birkhoff perfeccionó las técnicas topológicas de estudio de sistemas dinámicos introducidas por Poincaré. De hecho, en su famoso libro *Dynamical Systems*, 1927, este matemático afincado en los EE.UU. desarrolló una teoría general yendo más allá del matemático francés en el análisis topológico de las curvas definidas por ecuaciones diferenciales, así como de su estabilidad.

También en esta línea de pensamiento y en el contexto norteamericano, no puede olvidarse la figura de Stephen Smale, que ganaría la Medalla Fields –el Premio Nobel de los matemáticos- en 1966 por su gran contribución a la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Smale se encuentra justo en la confluencia de las tres tradiciones más pertinentes en el estudio de los sistemas dinámicos, a saber: la olvidada tradición que venía desde Poincaré pasando por Birkhoff, la Escuela Rusa (volcada al inglés por Lefschetz) y el estudio analítico-topológico de las ecuaciones diferenciales llevado a cabo por Mary Cartwright y John Littlewood en Inglaterra. En los 50 y 60, este famoso topólogo se ocupó del estudio del comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos. Al principio, pensó que casi todos, por no decir todos, presentaban un comportamiento no muy extraño; pero, cuál no sería su sorpresa, cuando recibió por carta un contraejemplo a su conjetura. Un colega matemático le hizo ver que un sistema dinámico sencillo pero no lineal como el que daba origen al oscilador de Van der Pol era altamente inestable (Gleick: 1988, 52-59). Esto serviría de punto de partida para el estudio matemático que Smale y su Grupo de Berkeley en California harían de los sistemas dinámicos. A él se debe precisamente el concepto de *herradura de Smale*, que fue un paso importante en la comprensión de la relación entre la existencia de una *órbita homoclínica* y la presencia de *caos determinista*, y que pasa por ser el paradigma de los mecanismos topológicos que dan lugar al caos. Muchos de los abstractos trabajos de Smale y su grupo de investigación conocerían aplicación práctica de manos del

Grupo de René Thom, quien se embarcó en un programa de investigación en topología diferencial cuyo parecido con el de Smale era notorio.

Al mismo tiempo, cruzando el *telón de acero*, existía otra fértil tradición: la Escuela Rusa. En la U.R.S.S. múltiples físicos y matemáticos habían heredado de Alexander Liapunov sus influyentes nociones acerca de la estabilidad del movimiento de los sistemas dinámicos. Trabajando más o menos en la misma época, Poincaré se había ocupado de la teoría de la estabilidad desde una perspectiva cualitativa, mientras que Liapunov lo hizo enfatizando su carácter cuantitativo. Ya en los 30 y 40, Alexander Andronov y Lev Pontryagin se ocuparon del inestable oscilador de Van der Pol. Y en los 50, Andrei Kolmogorov y su discípulo Vladimir Ilich Arnold se concentraron en el estudio teórico de la estabilidad de los sistemas dinámicos de la mecánica celeste, recogiendo el testigo de los trabajos de Poincaré y presentando en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam en 1954 el famoso teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Como va dicho, durante la *guerra fría*, los principales resultados de los matemáticos soviéticos fueron traducidos al inglés y dados a conocer al resto de matemáticos, europeos y norteamericanos, gracias al providencial trabajo de Solomon Lefschetz (Aubin & Dahan Dalmedico: 2002, 291-292).

De vuelta a EE.UU., en la década de los sesenta, exactamente en 1963, un meteorólogo del MIT antiguo alumno de Birkhoff en Harvard, Edward Lorenz, planteó un modelo formado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico y, mientras buscaba soluciones numéricas con ayuda de una computadora, se encontró con que se manifestaba un dramático comportamiento caótico. Lorenz se había topado de frente con el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales, que hacía de su sistema algo en la práctica impredecible. Lorenz publicó su hallazgo en una revista de meteorología, en un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow* que pasó prácticamente desapercibido. Sólo Smale y el profesor James Yorke de la Universidad de Maryland reconocieron las repercusiones filosóficas de la investigación de Lorenz y la dieron a conocer. Según Balibrea Gallego (1999, 109), fue el matemático norteamericano Guckenheimer el que, allá por los años 70, acuñó la expresión *dependencia sensible a las condiciones iniciales*, mientras que fue Lorenz el que introdujo la popular metáfora del *efecto mariposa*.

El Profesor Yorke encontró el mecanismo matemático universal que subyace en múltiples sistemas con dinámica no lineal, como son el movimiento de los planetas, la turbulencia en el agua o el aire y la variación de las poblaciones de especies. Como reseña Sanjuán (2003, 85), Yorke es muy conocido por haber introducido el término *caos* en la moderna literatura científica, en un famoso artículo publicado con Tien Yien Li en 1975 y titulado *Period Three Implies Chaos*, aunque el fenómeno que estudió en dicho artículo no coincide plenamente con el que posteriormente se identificó como caos determinista. Además, recientemente, ha dado otro espaldarazo a la Teoría del Caos al ofrecer las ideas seminales sobre el *control del caos*.

Inmediatamente, múltiples modelos de sistemas caóticos surgieron. Si Lorenz ofreció a la comunidad científica el paradigma de sistema dinámico continuo caótico, el zoólogo Robert May dio a conocer en su artículo *Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics* publicado en *Nature* en 1976 el paradigma de sistema dinámico discreto caótico: la aplicación logística. Un par de años después, el físico Mitchell Feigenbaum (1978 & 1979) descubrió heurísticamente ciertas constantes universales que caracterizan la transición del movimiento periódico al movimiento caótico mediante duplicación del periodo, dando inicio a una de las ramas más prometedoras de la Teoría del Caos: la Teoría de la Bifurcación.

A finales de los 70 y principios de los 80, la exploración de aplicaciones de la Teoría del Caos comenzó a dar sus frutos más allá de las simulaciones en las pantallas de computadores. Entre los fenómenos físicos estudiados cabe destacar los siguientes: la transición a la turbulencia en los fluidos (cuyo estudio contaba con el precedente que suponía el artículo *On the nature of turbulence* de 1971 de David Ruelle y Floris Takens, quienes introdujeron la noción de *atractor extraño*, en conexión con la noción de *fractal*, clarificada por Benoit Mandelbrot, quien a su vez descubrió que la autosemejanza es una propiedad esencial a gran número de sistemas complejos), la convección de Rayleigh-Bénard y el goteo de un grifo (modelizado por Robert Shaw). Por último, otros trabajos relacionados, muy presentes en la década de los 90, son los de la Escuela de Haken, encargada de estudiar el comportamiento caótico de los láseres, o los del Grupo de Bruselas de Prigogine, preocupado por la Termodinámica del No Equilibrio, que enlaza –vía la Teoría Ergódica- con la Teoría del Caos.

En suma, a comienzos del siglo XXI, suele definirse la joven Ciencia del Caos como la Ciencia No-Lineal, pero –como Stanislaw Ulam ironizaba- esto es tanto como definir la Zoología como la Ciencia de los Animales No Elefantes.[74]

2. La predicción imposible

En el capítulo previo, clasificamos la Teoría del Caos como una ciencia determinista e impredecible, apoyándonos en el rasgo de inestabilidad de que hacen gala los sistemas con caos determinista. Hasta el momento, tras examinar la historia de la Teoría del Caos, hemos dado por buena la definición del *caos* por la *dependencia sensible a las condiciones iniciales* (DSCI) o, mejor, por la *dependencia exponencial a las condiciones iniciales* (DECI); pero ambas no dejan de ser, en un análisis detallado, condiciones necesarias mas no suficientes, para que nos encontremos ante verdaderos fenómenos caóticos. Pese al parecer de muchos, como Lorenz (1995, 6 y 212), otros, como Barnsley (1993, 167), coinciden con nosotros: en la definición de caos no basta la dependencia sensible, hace falta el *confinamiento*.

Concordamos, pues, con Smith (2001, 20-24) y Werndl (2008), en que, pese a lo que mantenga gran parte de la literatura (por ejemplo: Hoefer (2005)), la DSCI o la DECI no son condiciones suficientes para el caos, pues éstas también se dan en sistemas extremadamente simples (por ejemplo, la ecuación $dx/dt=x$ tiene por soluciones a $x(t)=x(0)e^t$ y, como se trata de funciones exponenciales, las trayectorias divergen exponencialmente, pero sin que haya ningún misterio detrás), sino sólo condiciones necesarias, pues han de ir acompañadas del confinamiento que induce la presencia de un atractor, como patentiza el modelo paradigmático y pionero de Lorenz, en que se combinan orden a gran escala y desorden a pequeña escala. No basta con que las trayectorias próximas se separen rápidamente con el tiempo, porque también hace falta que éstas se estiren y plieguen entremezclándose unas con otras (*stretching & folding*), dando lugar a verdaderas configuraciones caóticas. Como escribe Rañada (1990, 586), el caos es la conjunción de dos clases de efectos: por un lado, el *efecto mariposa*; por otro, el *efecto baraja*. Ambos efectos son señales del caos. Por consiguiente, un sistema dinámico (discreto) se dice caótico, siguiendo a Devaney (1989, 50), si muestra: (i) DSCI, (ii) «propiedad de mezcla o transitividad topológica»[75] y (iii) el conjunto de puntos periódicos es denso en X. La definición de caos para sistemas dinámicos

[74] Cvitanovic (1986) constituye un compendio de los artículos clásicos del caos.

[75] E. d. si para cada par de conjuntos I y J, disjuntos y de medida positiva, existen puntos de I cuya órbita interseca a J (se dice que todo se mezcla porque I acaba «mordiendo» a J).

continuos es análoga, e incide en que ha de aparecer un atractor, esto es, intuitivamente, un conjunto tal que la órbita de todo punto dentro de su cuenca de atracción acaba distando cero de él en el límite (obviamente, los puntos fijos y periódicos pertenecen al atractor), y como los sistemas dinámicos caóticos muestran un desorden ordenado los atractores que presentan suelen ser extraños, fractales.[76]

Otra visión más cuantitativa y menos cualitativa del caos se puede obtener definiéndolo mediante los exponentes de Liapunov –que enfatizan la naturaleza dinámica del sistema al indicarnos en qué medida divergen las trayectorias- o mediante la entropía topológica –que subraya la naturaleza geométrica del sistema al ser un descriptor de la geometría de las trayectorias-. Los sistemas caóticos tienen entropía topológica positiva y al menos un exponente de Liapunov mayor que cero.

Los paradigmas caóticos discretos/continuos son, principalmente, la aplicación logística, el *shift* de Bernoulli (irreversible e inestable), la *transformación* del panadero (reversible e inestable) y el sistema de Lorenz. (Para Prigogine y sus epígonos los fenómenos de caos determinista, la inestabilidad caótica, van ligados a la irreversibilidad, como muestra la aplicación de Bernoulli, porque el corrimiento de símbolos hace perder información; pero esto no es así en general, por cuanto la transformación del panadero prueba, al ser reversible, que *irreversibilidad e inestabilidad caótica no van de la mano*.)

Tras estas precisiones conceptuales, podemos plantearnos la siguiente cuestión: ¿qué clase de sistemas son los impredecibles sistemas caóticos? Para catalogarlos con precisión vamos a cruzar dos distinciones:

(1) En primer lugar, la distinción entre sistemas lineales / no lineales. Los sistemas lineales son aquellos que vienen formulados por ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, o integrales, o en diferencias, siempre lineales. En consecuencia, el efecto de una suma de causas es la suma de los efectos de cada una de las causas por separado. Por el contrario, en los sistemas no lineales, no se da esta suerte de proporcionalidad física entre causas y efectos.

(2) En segundo lugar, la distinción entre sistemas integrables / no integrables. Un sistema integrable es aquel cuyas soluciones pueden expresarse mediante integrales de funciones conocidas, es decir, es reducible a cuadraturas. Con otras palabras, por integrable se entiende la posibilidad de dar una expresión explícita de solución. Por el contrario, en los sistemas no integrables, la solución no puede obtenerse para todo tiempo por medio de un algoritmo finito; a lo mejor, en el mejor de los casos, puede producirse la solución hasta un cierto tiempo dentro de cierto orden de aproximación, pero como el coste algorítmico crece exponencialmente, no será posible extender la predicción de solución en el tiempo hasta el infinito.

Si cruzamos estas dos categorías, obtenemos ya una primera característica: los sistemas integrables (lineales y no lineales) son predecibles, porque el caos (efecto mariposa + efecto baraja) se da sólo en sistemas no lineales no integrables. En efecto, así es. En todo sistema lineal (integrable o no) hay una desigualdad que, para dos datos

[76] Curiosamente, pese a que se ha dado por supuesto, el carácter *extraño* del *atractor de Lorenz* (es decir, de conjunto atractor de un sistema caótico, con probable geometría fractal) todavía no estaba demostrado matemáticamente en 2000. De hecho, Steve Smale (1998) propuso la demostración como un problema abierto para el siglo XXI. Hace poco, Warwick Tucker (2002) ha logrado probarlo con rigor. Igual ha ocurrido con la existencia del *atractor extraño de Henon*. Por su parte, Otto Rössler ha propuesto unas ecuaciones que modelizan el comportamiento de la reacción química de Belousov-Zhabotinsky, que es la oxidación de malonato mediante bromato en presencia de iones metálicos. La simulación computacional de las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales ha mostrado un comportamiento caótico similar al que estudiara Lorenz en su sistema y, más aún, ha sugerido heurísticamente –como le ocurrió a Lorenz- la presencia de un atractor extraño, el *atractor de Rössler*, que aún no ha sido demostrada...

iniciales x(0) e y(0) acota la distancia entre x(t) e y(t), y que es algo así como $|x(t) - y(t)| < C\,|x(0) - y(0)|\,e^{t}$, y esto previene efectos mariposa o de mezcla topológica. Además, la integrabilidad garantiza, por definición, la predecibilidad (Gutzwiller 1990).

En consecuencia, son los sistemas no lineales y no integrables (nótese que no hay sistemas lineales no integrables[77]) los que pueden ya exhibir un comportamiento irregular, imprevisible, que sea indicio de la presencia de caos. Pero, como muy bien observa Lorenz (1995, 167), aun cuando el caos exige la no-linealidad (para que pequeños cambios puedan producir grandes cambios y no sólo pequeños, como en la linealidad), una dinámica no-lineal no tiene por qué ser necesariamente caótica.

La tabla que ofrecemos a continuación resume lo explicado:

SISTEMAS DINÁMICOS	**INTEGRABLES**	**NO INTEGRABLES**
LINEALES	PREDECIBLES	Ø
NO LINEALES	PREDECIBLES	IMPREDECIBLES

Además, dentro de los sistemas no lineales no integrables, que son –repitámoslo- los únicos candidatos a sistemas caóticos, hay que distinguir dos subtipos: en una clase, los hamiltonianos o conservativos; en otra clase, los no hamiltonianos o disipativos.[78] Así lo recoge el siguiente cuadro:

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO-LINEALES NO-INTEGRABLES	
HAMILTONIANOS (conservativos)	NO HAMILTONIANOS (disipativos)
A veces comportamiento nada regular: sistema de los tres cuerpos (caos en sentido impropio).	*A veces comportamiento muy irregular: sistema de Lorenz (caos en sentido propio o genuino).*

Expliquemos la información que contiene el cuadro con algo de detalle: múltiples sistemas que suelen ser catalogados como caóticos por la literatura popular (por

[77] Aclaramos que todo sistema lineal es integrable, si los coeficientes son constantes (si los coeficientes no son constantes, sólo puede garantizarse que existe solución, única y definida en todo tiempo en que estén definidos los coeficientes de la ecuación, mas no explícitamente). Salvo que se indique expresamente lo contrario, entenderemos por defecto que tomamos los coeficientes constantes.

[78] Observamos que esta subdistinción también puede hacerse extensiva a los sistemas integrables, que los hay hamiltonianos –por ejemplo, un muelle sin rozamiento, que es integrable por ser lineal- y no hamiltonianos –por ejemplo, un muelle introduciendo un término de fricción sencillo-.

ejemplo, como hace Hoefer (2005), el sistema de los tres cuerpos de la mecánica celeste o el sistema de la bola del billar de Sinai) no lo son *genuinamente*, porque se trata de sistemas hamiltonianos –conservan la energía total– que, aunque presentan DSCI y por tanto dinámicas complejas, carecen del menor rastro de la presencia de atractores (Teorema de Liouville: la conservación de la energía impide la aparición de atractores, pues estos constituyen estructuras disipativas ya que la energía del sistema se disipa de modo continuo según va siendo atraído hacia el atractor). Así pues, digámoslo de nuevo, pese a la opinión popular que junta todo en un mismo saco, restringimos –como Smith (2001, 23-24)– el adjetivo caótico para aquellos sistemas disipativos, no hamiltonianos, que presentan simultáneamente DSCI y atractor/es (sistemas caóticos *en sentido propio*), par de rasgos que determinan su peculiar complejidad, y sin perjuicio de que existan sistemas hamiltonianos con dinámicas realmente complejas (sistemas caóticos *en sentido impropio*).

Con todo esto en mente, vamos a centrarnos en cómo se fue encajando históricamente la drástica y dramática, por preocupante, macroimpredecibilidad de los sistemas caóticos, tanto desde una perspectiva científica como filosófica.

El primer hito es, de nuevo, Laplace. El demiurgo laplaciano sabía que eran tres los obstáculos a su capacidad de predicción. El primer obstáculo era determinar las leyes que gobiernan la evolución de los sistemas dinámicos implicados en los fenómenos estudiados. El segundo obstáculo era conocer las condiciones iniciales al completo. Y el tercer obstáculo era analizar tales leyes y datos para calcular la solución de manera exacta o aproximada. Ahora bien, al científico no siempre le resulta posible sortear estos tres obstáculos, y con respecto a los sistemas complejos el propio Laplace escribía en 1776:

> La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias, permite al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del Azar y la Probabilidad.

Anticipando ideas, Laplace se sitúa en los albores de la Teoría del Caos, cuya *prehistoria* pertenece al siglo XIX –cuando la característica esencial del movimiento caótico (la DSCI o la DECI) fue observada por ingenieros franceses como Barré de Saint-Venant y Joseph Boussinesq al estudiar el comportamiento de fluidos en regiones críticas-, mientras que su *historia* es parte del XX y del XXI (Sanjuán & Casado Vázquez: 2005).

El segundo hito es James Clerk Maxwell. Influenciado por las observaciones de los ingenieros franceses Saint-Venant y Boussinesq, Maxwell ordenó sus ideas acerca de la posibilidad de predicción, la estabilidad y la dependencia sensible a las condiciones iniciales:

> Cuando el estado de las cosas es tal que una variación infinitamente pequeña del estado presente altera tan sólo en una cantidad infinitamente pequeña el estado en un momento futuro, se dice que la condición del sistema, en reposo o en movimiento, es estable; pero cuando una variación infinitamente pequeña del estado presente puede causar una diferencia finita en un tiempo finito,

> se dice que la condición del sistema es inestable. Es evidente que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de acontecimientos futuros, si nuestro conocimiento del estado presente es sólo aproximado y no preciso. (Thom: 1985, 12-13)

Aunque diversos ejemplos de sistemas caóticos venían rodando desde antaño (por ejemplo, Poincaré estaba ocupándose extensamente del problema de los tres cuerpos durante las dos últimas décadas del siglo XIX), fue el matemático Jacques Hadamard quien ofreció la demostración matemática de que, para ciertos sistemas dinámicos, un pequeño cambio en la condición inicial provoca un gran cambio en la posterior evolución del sistema, con lo que las predicciones a largo plazo resultan completamente gratuitas. Hadamard (1898) estudió una especie de billar alabeado en que las trayectorias de los bolas sometidas al mismo son altamente inestables, en el sentido de que dos trayectorias con condiciones iniciales próximas tienden a separarse exponencialmente con el tiempo. Hadamard probó, para este sistema y otros análogos, un teorema de sensibilidad a las condiciones iniciales. Bastante tiempo después, en los años setenta, el matemático soviético Jakob Sinai demostró que un billar plano con obstáculos convexos, el *billar de Sinai*, poseía la misma propiedad que el *billar de Hadamard*, porque los obstáculos ocasionan una dispersión caótica en las bolas (Balibrea Gallego: 1999, 105).

En la misma época, el físico y filósofo francés Pierre Duhem atendió a las importantes repercusiones gnoseológicas que se derivaban de los resultados probados por su antiguo compañero de estudios Jacques Hadamard. En el apartado *Ejemplo de deducción matemática que no se puede utilizar nunca* de su obra *La teoría física*, publicada en 1906, Duhem apunta que el cálculo de trayectorias sobre ciertos sistemas como el billar de Hadamard nunca ha de utilizarse, por cuanto cualquier pequeña incertidumbre en la medición de la posición y velocidad iniciales de la bola dará lugar a una predicción espuria, sin valor. La trayectoria predicha nada tendrá que ver con la trayectoria real. Leemos en Duhem:

> Las investigaciones de J. Hadamard nos proporcionan un ejemplo muy representativo de este tipo de deducción que siempre es inútil. El ejemplo procede de uno de los problemas más simples que estudia la menos compleja de las teorías físicas, la mecánica. Una masa material se desliza sobre una superficie, sin que incida en ella ninguna gravedad ni ninguna fuerza, y sin que ningún rozamiento obstaculice su movimiento. [...] Si nuestro punto material se mueve sobre una superficie cualquiera, describe una línea que los geómetras denominan *línea geodésica* de la superficie considerada. [...] Las investigaciones de Hadamard trataban concretamente de las geodésicas de las superficies de curvaturas opuestas [negativas]. [...] Si se conoce con total exactitud la posición inicial de un punto material y la dirección de la velocidad inicial, la línea geodésica que seguirá ese punto en su movimiento estará determinada sin ninguna ambigüedad. [...] Otra cosa sería si las condiciones iniciales no se dieran matemáticamente sino prácticamente. La posición inicial de nuestro punto matemático ya no será un punto determinado sobre una superficie, sino un punto cualquiera tomado en el interior de una pequeña mancha; la dirección de la velocidad inicial ya no será una recta definida sin ambigüedad, sino una cualquiera de las rectas que comprende un estrecho haz cuyo ligadura es el contorno de la pequeña mancha. [...] A pesar de los estrechos límites que restringen los datos geométricos capaces de representar nuestros datos prácticos, siempre se pueden tomar estos datos prácticos de tal manera que, entre las infinitas capas, la geodésica se aleje sobre aquella que hemos elegido de antemano. Por mucho que se aumente la precisión con la que se determinan los datos prácticos, que se haga más pequeña la zona donde se encuentra la posición inicial del punto material, que se estreche el haz que comprende la dirección inicial de la velocidad, la geodésica que se mantiene a distancia finita [...] jamás podrá ser liberada de esas compañeras infieles que [...] se separan indefinidamente. [...] En efecto, si los datos no se conocen por procedimientos geométricos, sino que vienen determinados por procedimientos físicos, por muy precisos que se suponga que son, la pregunta planteada sigue y seguirá siempre sin respuesta. (Duhem: 2003, 183-6)

Inmediatamente después de este pasaje, en el apartado *Las matemáticas del «más o menos»*, Duhem pasa a discutir un problema físico cuya semejanza con el de Hadamard es evidente: el problema de los *n* cuerpos, en donde se hace eco de los trabajos al respecto de Poincaré. Escribe Duhem:

> El *problema de los tres cuerpos* se convierte para los geómetras en un terrible enigma. Sin embargo, si se conoce en un momento dado y con una precisión matemática la posición y la velocidad de cada uno de los astros que componen el sistema, se puede afirmar que cada astro sigue, a partir de este instante, una trayectoria perfectamente definida. [...] El geómetra puede plantearse entonces la siguiente pregunta: si las posiciones y las velocidades de los astros que componen el sistema solar se mantienen en su estado actual, ¿seguirán estos astros girando indefinidamente alrededor del Sol? O, por el contrario, ¿llegará el día en que uno de estos astros acabe apartándose del grupo de sus compañeros para ir a perderse en la inmensidad? Esta cuestión constituye el problema de la *estabilidad del sistema solar*, que Laplace había creído resolver, y cuya extraordinaria dificultad han puesto de relieve los geómetras modernos, y especialmente Poincaré. [...] Podría ocurrir entonces que el problema de la estabilidad del sistema solar fuese para el astrónomo una cuestión carente de sentido; los datos prácticos que proporciona al geómetra equivalen, para éste, a una infinidad de datos teóricos muy próximos unos a otros, pero sin embargo distintos. Puede ser que, entre esos datos, haya algunos que mantengan eternamente a todos los astros a una distancia finita, mientras que otros lanzarían hacia la inmensidad a alguno de esos cuerpos celestes. Si se presentara aquí alguna circunstancia análoga a la que se presenta en el problema estudiado por Hadamard, cualquier deducción matemática referente a la estabilidad del sistema solar sería para el físico una predicción inutilizable. (Duhem: 2003, 187-188)

Como resume Prigogine (1997, 103), ya decía Duhem en toda *La teoría física* que «la noción de trayectoria es una modalidad de representación adecuada sólo cuando la trayectoria permanece más o menos invariable, incluso si modificamos ligeramente las condiciones iniciales».

Por su parte, en 1908, en *Ciencia y método*, el matemático y filósofo francés Henri Poincaré profundizó en la investigación de las raíces de esta clase de fenómenos tan inestables, en que resulta imposible predecir a largo plazo el movimiento de ciertos sistemas mecánicos. Las observaciones de Poincaré tomaron como base su investigación del problema de los tres cuerpos, así como el estudio de la impredecibilidad del movimiento de las moléculas de un gas –que mucho se parece al de la bola del billar de Hadamard- y del tiempo meteorológico. Y concluye:

> Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el instante inicial, podríamos predecir con exactitud la situación del Universo en un instante ulterior. Pero aun cuando las leyes naturales no guardaran más secretos para nosotros, no podemos conocer la situación inicial más que *aproximadamente*. Si esto nos permite predecir la situación ulterior *con la misma aproximación*, que es todo lo que necesitamos, decimos que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero no acaece siempre así: puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan algunas muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error al inicio engendrará un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible. (Poincaré: 1963, 55-66)

Es decir, los ejemplos de sensibilidad a las condiciones iniciales que discutía Poincaré ponían de manifiesto que no podemos prever con fiabilidad cuándo van a acaecer tales sucesos por cuanto nuestro conocimiento de las condiciones iniciales es siempre algo impreciso.

Cuarenta y siete años después, en 1955, Max Born volvió a subrayar la importancia gnoseológica que se desprende de la condición de dependencia sensible a las condiciones iniciales en un artículo llamado «Ist die klassische Mechanik tatsächlich deterministisch?». Born (1955) se preguntaba –confundiendo, como avanzamos en el anterior capítulo, el determinismo con la predecibilidad- si la Mecánica Clásica era, de hecho, determinista; y sostuvo que el efecto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales era una suerte de indeterminismo clásico. A propósito, discutía el modelo altamente inestable de gas bidimensional propuesto por H. A. Lorentz en 1905 para explicar la conductividad de los metales. En esencia, cada partícula del *gas de Lorentz* se comporta como una bola del billar de Hadamard-Sinai, puesto que esa partícula (pongamos por caso un electrón) al moverse y chocar con un conjunto de obstáculos (digamos los átomos del cuerpo metálico) experimenta desviaciones de modo que la más mínima diferencia en las condiciones iniciales termina por producir dos estados ulteriores por completo diferentes. Al parecer, con respecto a la naturaleza de estos fenómenos caóticos, tanto Heisenberg como Lamb dejaron escrito que, cuando murieran y se encontraran con Dios, le rogarían por favor que se los aclarase, en particular el movimiento turbulento de los fluidos.

Con relación a todos estos filosofemas emparentados con la cuestión del caos y la predicción que hemos ido desgranando, el matemático belga David Ruelle, precursor del estudio de la turbulencia desde la Teoría del Caos, ha apuntado en *Azar y Caos*:

> Lo que es muy sorprendente, es el largo intervalo que ha transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio por parte de los físicos del fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El estudio reciente de lo que ahora llamamos caos no se ha beneficiado de los estudios de Hadamard, Duhem y Poincaré. [...] Yo veo dos razones para el sorprendente intervalo que separa a Poincaré de los estudios modernos sobre el Caos. La primera es el descubrimiento de la Mecánica Cuántica, que conmocionó el mundo de la Física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos. La Mecánica Cuántica hace intervenir al azar de una forma nueva e intrínseca. Entonces, ¿por qué pretender ahora introducir el azar mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales en Mecánica Clásica? Veo otra razón para el olvido de las ideas de Hadamard, Duhem y Poincaré: estas ideas llegaron demasiado pronto, cuando no existían medios para explotarlas. Poincaré no tenía a su disposición esas útiles herramientas matemáticas que son la teoría de la medida o el teorema ergódico, y por lo tanto no podía expresar sus brillantes intuiciones en un lenguaje preciso. Hay que señalar también que cuando no alcanzamos a tratar un problema matemático, siempre podemos estudiarlo numéricamente con la computadora. Pero evidentemente este método, que ha jugado un papel tan esencial en el estudio del Caos, no existía a comienzos del siglo XX. (Ruelle: 1995, 54)

En resumidas cuentas, todos estos matemáticos, físicos y filósofos de la ciencia percibieron preclaramente que en la predicción de la conducta de los sistemas *inestables* surgen ciertas dificultades. Los sistemas dinámicos *caóticos* están descritos determinísticamente por ecuaciones diferenciales cuya resolución a tiempos alejados de las condiciones iniciales puede ser inabordable con nuestras herramientas matemáticas, porque, si la solución no puede obtenerse explícitamente por métodos analíticos exactos, habrá de obtenerse por métodos numéricos aproximados. Y, suponiendo que siempre existe un error de medida en los datos iniciales, como lo hay en los cálculos numéricos, éste se propagará sensible o exponencialmente (DSCI ó DECI), provocando un error final nada despreciable, que hará que la trayectoria solución que nos otorgue el método numérico sea espuria para la predicción. Si cometemos un pequeño error al medir el estado inicial de nuestro sistema real –y éste siempre se da, por cuanto las magnitudes son números reales y nosotros siempre funcionamos con redondeos o truncamientos-, las ecuaciones dinámicas generarán una predicción que habrá propagado dicho error inicial hasta ofrecernos una predicción muy probablemente errónea del estado final. La validez de la predicción queda, sobre todo a largo plazo, severamente limitada. El obstáculo a la predicción procede así de la conjunción entre una realidad práctica (la precisión finita de toda medida) y la estructura matemática caótica de la ecuación de evolución. Ciertamente, resulta plausible que todo error en la medida de las condiciones iniciales de un sistema desembocará –a la larga- en un error de predicción, pero el caos, con su inflación sensible o exponencial del error, constituye un ejemplo espectacular.

Así pues, para predecir la evolución futura de un sistema dinámico no basta con conocer sus ecuaciones. Conocer las leyes que lo rigen es una condición necesaria mas no suficiente. Tenemos, además, que determinar con toda precisión sus condiciones iniciales, como bien sabía Laplace. Pero lo real no suele coincidir con lo ideal y, en la práctica, sólo determinamos las condiciones iniciales de modo aproximado, porque al medir siempre cometemos errores. Estas condiciones iniciales *medidas* diferirán inevitablemente de las condiciones iniciales *reales* y, entonces, ¿podemos predecir la trayectoria que seguirá el sistema dinámico? Una de dos. Si el sistema es estable, condiciones iniciales *próximas* producen estados finales *próximos*, con lo que puede predecirse con un pequeño error cómo evoluciona el sistema: la trayectoria predicha se parece mucho a la trayectoria real. Pero, si el sistema es inestable, como lo son todos los sistemas caóticos, condiciones iniciales *próximas* no tienen por qué producir estados finales *próximos*, es decir, la trayectoria real puede alejarse marcadamente de la trayectoria predicha, con un notable error. Y, como hemos venido constatando, este último comportamiento es la norma en múltiples sistemas físicos, en que la predicción a medio y largo plazo resulta por completo inútil, por cuanto estos sistemas son especialmente sensibles a los errores de medición. Dentro de la clase de los sistemas inestables, los sistemas caóticos *en sentido propio* constituyen una ilustración espectacular, porque las operaciones de estirado y plegado en la cuenca de atracción del atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial de que disponíamos a fin de elaborar la predicción. El estiramiento de las trayectorias disminuye nuestra cantidad de información sobre el sistema al agrandar los errores de medida y el plegado acerca trayectorias que estaban muy separadas, ampliando la incertidumbre. Los atractores caóticos, al conjugar el *efecto mariposa* con el *efecto baraja*, multiplican los errores a pequeña escala hasta convertirlos en errores a gran escala, perdiéndose toda capacidad predictiva.

Por ejemplo, si consideramos la aplicación logística de May $f(x)=kx(1-x)$ y variamos sucesivamente los valores de la constante k desde 2 hasta 4, observaremos cómo el sistema va adentrándose poco a poco en la senda del caos, dejando de ser estable para convertirse en inestable...

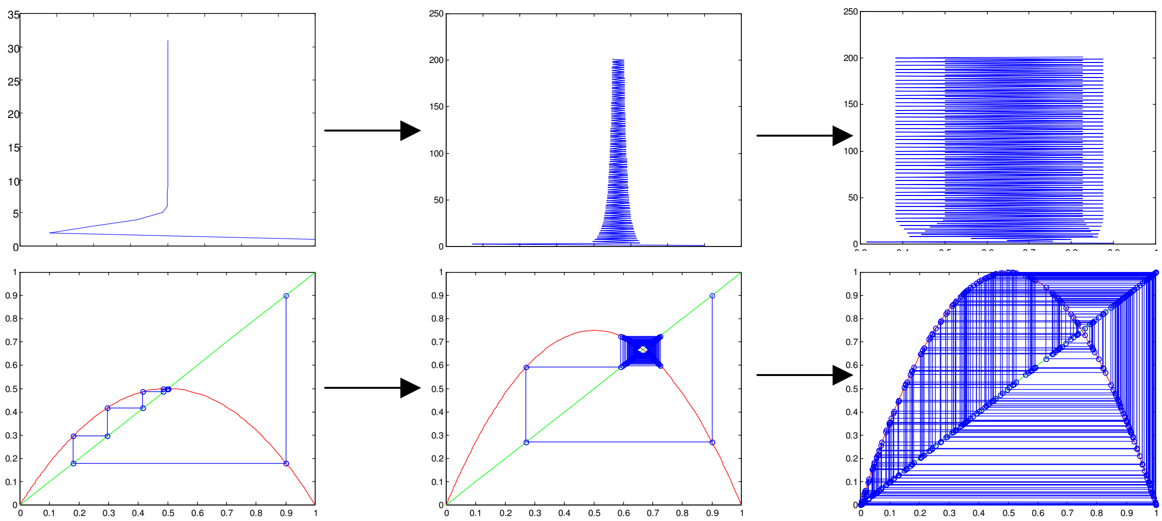


Figura 3. Órbitas y telarañas de un mismo punto para k = 2, 3, 4 respectivamente (MATLAB)

Así, trabajando con este sistema dinámico a tiempo discreto con $k=4$, si estamos interesados en su evolución para el dato inicial *real* $a = 0.900$ y consideramos el dato inicial *medido* $b = 0.901$ (es decir, al medir hemos cometido un error del orden de una milésima), observaremos cómo las órbitas de a y de b terminan por alejarse sensiblemente más pronto que tarde pese a estar inicialmente próximas. En efecto, obtenemos por recurrencia que la órbita de a es {0.900; 0.360; 0.9216; 0.2890; 0.8219; 0.5854; 0.9708...} y la órbita de b es {0.901; 0.3568; 0.9180; 0.3012; 0.8419; 0.5324; 0.9958...}. Es decir, comprobamos cómo la diferencia inicial en una milésima llega a ampliarse considerablemente hasta el orden de las centésimas tras unas pocas iteraciones; de hecho, se multiplica por 20 en tan solo 7 iteraciones. Esto es lo que provoca que, tras cierto tiempo, la trayectoria *real* y la trayectoria *predicha* poco o nada tengan ya en común (Rivadulla: 2003, Epílogo).

En suma, con relación a la predicción, cabe esbozar el siguiente catálogo de posibles sistemas: Los sistemas constantes, periódicos o cuasiperiódicos son predecibles, pero los sistemas caóticos y aleatorios son generalmente impredecibles ya que no muestran patrones discernibles a causa del estiramiento/plegado de trayectorias o del ruido.

3. Un ejemplo de predicción imposible: el cambio climático

A partir de los datos del clima pasado y presente de la Tierra, ¿podemos predecir el futuro clima terrestre? ¿Permiten los actuales modelos físico-matemáticos predecir, por ejemplo, la temperatura que tendremos dentro de 100 años? Según Gavin Schmidt (2007), de acuerdo con Edward Lorenz (1995, capítulos III-IV), los esfuerzos por modelar matemáticamente el tiempo meteorológico y el clima terrestre comenzaron en los felices años 20. En aquel tiempo, los *meteorólogos sinópticos* (aquellos que se apoyan más en observaciones que en ecuaciones) se percataron de que precisaban indispensablemente de la ayuda de los *meteorólogos dinamicistas* (aquellos que emplean con más asiduidad la física y la matemática) si querían ampliar el rango de sus predicciones del tiempo o, en general, del clima. Pronto se concibió que la atmósfera, como el océano, era un sistema dinámico muy complejo, y que la idea pionera propuesta por el meteorólogo noruego Vilhelm Bjerknes de resolver el problema de la predicción mediante la resolución de las ecuaciones que lo describieran no iba a ser tarea fácil. El sistema global del tiempo meteorológico y del clima tenía que representarse con un sistema de ecuaciones con más de 5.000.000 de variables mezclando tres clases de ingredientes: primero, los principios físicos fundamentales (conservación de la energía, de la masa, &c.); segundo, ciertas ecuaciones matemáticas pertinentes (como las intratables ecuaciones de Navier-Stokes acerca del movimiento de fluidos); y, tercero, ciertas fórmulas inducidas empíricamente (como la fórmula de evaporación del agua en función de la humedad y de la velocidad del viento). Sin embargo, la carencia de herramientas de cómputo eficaces retrasó su desarrollo hasta la puesta en marcha de las computadoras, hacia mediados de siglo. Precisamente, John von Neumann se fijaría la meta de predecir el tiempo y el clima sirviéndose de ordenadores.[79] Entre los miembros del grupo que formó en Princeton se contaba Jules Charney, meteorólogo y climatólogo

[79] No en vano, como recoge Díaz (2001), von Neumann escribía en 1955: «Probablemente, la intervención en cuestiones atmosféricas y climáticas vendrá en unas pocas décadas, y lo hará en una escala de dificultad difícil de imaginar en el presente».

muy influyente, que acabaría liderando gran parte de la investigación puntera (Dahan Dalmedico: 2001 & 2008).

El estudio de un sistema tan complejo fue posible gracias a la metodología que Díaz (2002, 35) denomina *trilogía universal*: la *modelización matemática*, el *análisis* y la *simulación* mediante superordenadores que posibilitan acciones correctivas encaminadas a mejorar la situación, es decir, el *control*. La distinción entre Meteorología y Climatología se sustenta en la distinta escala temporal a que cada una de ellas hace referencia. La predicción meteorológica es de un par de días, a lo sumo de una o dos semanas, mientras que la predicción climática se establece dentro de un horizonte que puede rondar hasta varios siglos. Además, mientras que la primera ciencia persigue una gran exactitud en sus predicciones, la segunda es más cualitativa que cuantitativa, porque sólo busca conocer el clima, es decir, por definición, el estado promediado de la atmósfera que ha sido observado como tiempo meteorológico a lo largo de años (Díaz: 2001, 67-69). En los estudios meteorológicos, la incógnita es la temperatura puntual e instantánea $T(x,t)$; pero, en los estudios climáticos, la incógnita es un promedio espacial y temporal que *teóricamente* se calcula como $u(x,t)=(1/k)\iint T(x,t)dxdt$ –otro tema es *prácticamente*[80]–. Las herramientas que tenemos para estudiar estas funciones son los modelos basados en las ecuaciones físicas del movimiento de un fluido compresible y estratificado –la atmósfera- sobre una esfera rugosa en rotación –la Tierra-. El modelo depende, claro, de las condiciones iniciales y de las condiciones de contorno. Las condiciones iniciales –por ejemplo, las temperaturas a día de hoy- son de más trascendencia en la predicción meteorológica, mientras que las condiciones de contorno –por ejemplo, los distintos comportamientos del aire según esté en contacto con el océano o con la tierra- lo son más en la predicción climática. Una clase de modelos climáticos con gran valor de diagnóstico son la clase de *modelos climáticos de balance de radiación de energía*, cuyo abuelo fue S. Arrhenius a finales del siglo XIX y cuyos padres son M. I. Budyko y W. D. Sellers, ya en 1969. La base elemental del modelo es la ecuación diferencial:

$$\partial u/\partial t = A - E + D$$

Esta ecuación iguala la tasa de variación de la temperatura promediada con el resultado de restar, a la radiación solar absorbida A, la radiación emitida por la Tierra en calidad de cuerpo caliente E, y luego sumar la redistribución espacial D del calor. Según como expresemos A, E y D en función de u, el modelo de balance de energías quedará cerrado de una u otra manera. De hecho, como expone Díaz (1996), este tipo de modelos pueden complicarse llegando a alcanzar el grado de sofisticación que caracteriza a los actuales *modelos de circulación global* (MCG). Estos modelos cubren toda la superficie terestre; pero, como es lógico, dada su extrema complejidad, no tienen solución analítica conocida, y sólo pueden abordarse numéricamente. Naturalmente, esta resolución numérica tampoco es fácil, porque precisa de una increíble labor de cálculo. Además, tiene el inconveniente de que la necesidad de unos tiempos de cómputo razonables exige la consideración de una malla espacial no excesivamente fina (España, por ejemplo, queda cubierta por poco más de una docena de puntos), con la inconfortable artificialidad que esto conlleva. A día de hoy, en la comunidad científica internacional existen múltiples grupos que han desarrollado MCG para sus investigaciones climáticas. Cada uno de ellos perfecciona los métodos de modelado de los procesos físicos y las

[80] Generalmente, ni siquiera se conoce $T(x,t)$ más que en una cantidad discreta de puntos y tiempos (estaciones meteorológicas), a partir de los cuales se interpola y se calcula $u(x,t)$; pero la interpolación y el promedio no tienen por qué ser unívocos.

técnicas de resolución numérica de las ecuaciones, conforme avanzan el conocimiento observacional y la capacidad simuladora de los ordenadores. Los resultados de los diferentes modelos no son idénticos y la disparidad refleja el grado de incertidumbre en nuestro conocimiento del clima terrestre.

Figura 4. Edward Norton Lorenz: clima y tiempo son sistemas caóticos impredecibles

Y fue en 1963, en EE.UU., cuando un colega de Jules Charney, Edward Lorenz, joven meteorólogo del MIT, planteó un *curioso* modelo formado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico. Este problema es una simplificación del problema de estudiar la convección en la atmósfera, esto es, cómo se comportan el flujo de aire caliente y frío cuando lo sometemos a una diferencia térmica más o menos notable. Mientras buscaba soluciones numéricas con ayuda de una computadora, se encontró –al volver de tomar una taza de café- con que se producía un dramático comportamiento inestable, caótico. Lorenz se había topado por casualidad con el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales, que hacía de su sistema algo en la práctica impredecible. En efecto, tras establecer las propiedades básicas de su flujo determinista no periódico, Lorenz había reparado en que era altamente inestable con respecto a la más ínfima modificación. Una pequeña variación en las condiciones iniciales ocasionaba estados finales completamente diferentes. Dos estados iniciales muy similares pueden evolucionar de modos radicalmente distintos. En sus propias palabras:

> Dos estados que difieran imperceptiblemente pueden evolucionar en dos estados considerablemente distintos. Si hay cualquier error en la observación del estado presente –y en un sistema real parece inevitable-, una predicción aceptable del estado en el futuro lejano bien puede ser imposible. (Lorenz: 1963, 133)

Lorenz había descubierto, tomando prestada la imagen que luego forjaría, el *efecto mariposa*: el aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas. Supongamos que una pequeña mariposa está posada en un árbol en una remota región del Amazonas. Mientras permanece posada, abre y cierra ocasionalmente sus alas por dos ocasiones. Podría haberlo hecho sólo una vez, pero en este caso ha batido sus alas exactamente dos veces. Como el sistema climático es un sistema caótico, que exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales, la diminuta variación en los remolinos de aire contiguos a la mariposa puede acabar influyendo en que haya o no haya un huracán sobre Texas varios meses después. Y a continuación añadía, en sintonía con nuestras tesis:

> Cuando mis resultados concernientes a la inestabilidad de un flujo no periódico se aplican a la atmósfera, que es ostensiblemente no periódica, indican que la predicción de un futuro suficientemente distante es imposible por cualquier método, a menos que las condiciones iniciales se conozcan exactamente. En vista de la inevitable imprecisión e incompletitud de las observaciones meteorológicas, la predicción a largo plazo parece ser imposible. (Lorenz: 1963, 141)

Lorenz publicó su hallazgo en una revista de meteorología, en un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow* que pasó prácticamente desapercibido. Sólo el profesor James Yorke de la Universidad de Maryland reconoció las repercusiones filosóficas de la investigación de Lorenz. Había nacido la Teoría del Caos.

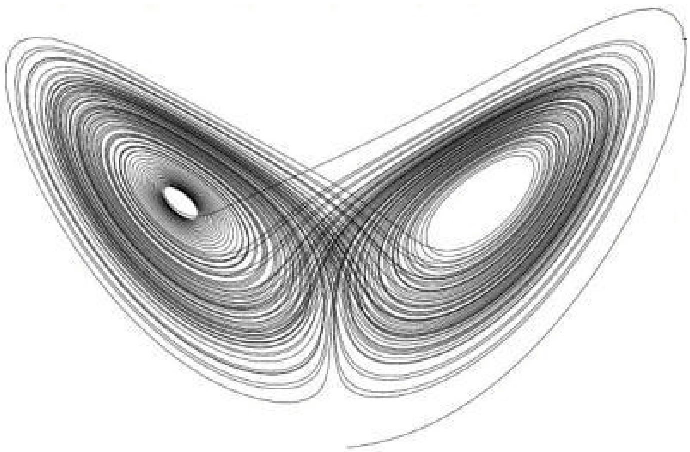


Figura 5. Atractor *extraño* del sistema *caótico* de Lorenz

Como ya explicamos, fue Yorke quien introdujo el término *caos* en la literatura científica, y el matemático norteamericano Guckenheimer el que –allá por los años 70- acuñó la expresión *dependencia sensible a las condiciones iniciales*; pero fue Lorenz el que introdujo la popular e indeleble metáfora del *efecto mariposa*. Si Edward Lorenz ofreció a la comunidad científica el paradigma de sistema dinámico caótico continuo, el zoólogo Robert May dio a conocer en su artículo *Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics* publicado en *Nature* en 1976 el paradigma de sistema dinámico caótico discreto. Entre los fenómenos caóticos que muy pronto centraron la atención, nos interesa destacar, por su conexión con la dinámica climática y su proximidad con las investigaciones meteorológicas de Lorenz, la transición a la turbulencia en los fluidos, cuyo estudio contaba con el fértil precedente que supuso el artículo *On the nature of turbulence* de David Ruelle y Floris Takens, en que proponían los atractores extraños como explicación matemática de la turbulencia, mezcla de caos espacial y temporal que ya preocupó a Lucrecio hace más de dos mil años. Otro sistema caótico impredecible.

Retrocediendo en el tiempo, ya en 1908, en *Ciencia y Método*, el matemático y filósofo francés Henri Poincaré había profundizado, como vimos, en la investigación de las raíces de esta clase de fenómenos tan inestables, en que resulta imposible predecir a largo plazo la dinámica del sistema. Las observaciones de Poincaré tomaron como base su investigación del problema de los tres cuerpos, así como el estudio de la impredecibilidad del movimiento de las moléculas de un gas y, atención, del tiempo meteorológico. De este último, Poincaré afirmaba que era inestable, que los meteorólogos lo sabían y que, a causa de ello, no podían decir dónde ni cuándo va a haber un ciclón. Y concluía:

> *La prédiction devient impossible...* (Poincaré: 1963, 56.)

Y como apunta el también matemático David Ruelle en su libro *Azar y Caos*:

> Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente. (Ruelle: 1995, 54)

Así, en su precursor artículo, Lorenz se hacía eco de los trabajos sobre sistemas dinámicos de Poincaré (también, como es lógico, al haber sido alumno, de los de Birkhoff), pero desconocía sus ideas sobre caos, tiempo y clima.

Es mérito de Lorenz haber probado el comportamiento caótico, inestable e impredecible, del tiempo meteorológico y, por extensión, del clima. «Dado que incluso el modelo muy sencillo de Lorenz es caótico, y lo que es más, –arguye Smith (2001, 74)- dado que descubrimos que los regímenes caóticos están bastante extendidos en los sistemas no lineales, es razonable conjeturar que *todo* modelo preciso del comportamiento a gran escala de la atmósfera exhibirá también algún tipo de sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales, capaz de hacer que perturbaciones del tamaño de las producidas por las alas de una mariposa determinen el desarrollo de tornados». Leemos en Lorenz (1995, 104):

> Casi todos los modelos globales se han utilizado para experimentos de predecibilidad, en los que dos o más soluciones originadas a partir de estados iniciales ligeramente diferentes se examinan para detectar la presencia de dependencia sensible... Casi sin excepción, los modelos han indicado que las pequeñas diferencias iniciales terminarán por ampliarse hasta dejar de ser pequeñas.

Y añade, más adelante, rememorando su propio modelo:

> Dicho con terminología de hoy: se trataba del caos. Pronto caí en la cuenta de que si la atmósfera se comportaba como ese sencillo modelo, la predicción a largo plazo sería imposible. (Lorenz: 1995, 139)

Los microerrores al fijar las condiciones iniciales del sistema climático se inflarán, pues, hasta convertirse en macroerrores de nuestras predicciones. No conocemos, en principio, qué aspectos del clima son predecibles, porque perturbaciones inobservables pueden conducir a futuros dramáticamente diferentes. Sin embargo, como recogen Aubin & Dahan Dalmedico (2002, 301-302), costó mucho que estas ideas de Lorenz sobre la inherente impredecibilidad del tiempo y del clima calasen, incluso entre su colega y jefe Jules Gregory Charney:

> Mucha gente esperaba que, añadiendo un gran número de grados de libertad, se estabilizaría el sistema y, por tanto, se lograría una predecibilidad a largo plazo. En 1970, Charney todavía era optimista: "no hay razón por la cual los métodos numéricos no podrán ser capaces de predecir el ciclo de vida de un sistema concreto", declaraba; sólo los modelos actuales tenían "defectos fatales". [...] A nivel meteorológico (dado que el modelo de Lorenz tiene que ver con la atmósfera), la esperanza de una predicción a largo plazo está hoy arrasada.

Es fundamental para poder comprender las afirmaciones que, un día sí y otro también, se hacen acerca del cambio climático, darse cuenta que ni el tiempo ni el clima pueden ser modelados de modo que permitan predecir con exactitud los que habrá, no ya dentro de 100 años, sino mismamente la semana que viene. Los resultados que producen los modelos computarizados son, básicamente, escenarios o simulaciones con un importante componente profético. De hecho, el Panel Intergubernamental para el Cambio Climático de las Naciones Unidas prefiere emplear el término *proyección* al de *predicción* para referirse a los resultados de los escenarios (PICC: 2001). Es así que en el encuentro sobre *Chaos and Forecasting* organizado por la Royal Society de Gran Bretaña en 1994, múltiples científicos se dieron cita para discutir el problema de la predicción en los sistemas caóticos que aparecen en la física, la biología, la economía y la climatología. A. S. Weigend (1995, 145-146 y 157) tituló su ponencia *Paradigm Change in Prediction*, y habló de que, aun cuando las técnicas de predicción a corto plazo de series temporales estaban mejorando, había que abandonar radicalmente la idea de que podamos descubrir un algoritmo que nos capacite para predecir a largo plazo, universalmente. Por su parte, centrándose en la física atmosférica y la predicción del tiempo y del clima, T. N. Palmer *et alea* (1995, 264 y 266) sostuvieron que, por ejemplo, los errores en la medición de la temperatura de superficie en el Pacífico tropical tienen un significativo impacto en la precisión de la predicción a seis meses del fenómeno de El Niño y que, por tanto, aun cuando deban tomarse en serio, los modelos sobre cambio climático no están libres de error.

Es cierto que Tim Palmer (1996) tiene motivos para el optimismo en su presentación de *Predictability of Weather and Climate* como editor, ya que a los avances teóricos (nuevos conocimientos cualitativos) se están uniendo avances prácticos (mejores superordenadores), capaces de minimizar la gran complejidad y caoticidad del tiempo y del clima. Pero Matthew Collins (2002) pone los puntos sobre las íes, porque ha estudiado la predecibilidad del clima como problema de valores iniciales y, tomando en cuenta tres clases de errores (a saber: el error debido a las imperfecciones del modelo; el error por mala medición de las datos iniciales; y el error por caos, en el sentido de que los errores infinitesimales de cómputo y medición pueden amplificarse hasta saturar el margen de predecibilidad), ha llegado a la conclusión de que puede estimarse la siguiente cota como límite superior de la predecibilidad del clima: en promedio, las anomalías de la temperatura del aire en superficie son potencialmente predecibles en escalas de tiempo de décadas sobre el Océano Atlántico Norte; pero, por contra, sobre tierra, las trayectorias del modelo divergen caóticamente y las anomalías de temperatura no son potencialmente predecibles en escalas de tiempo más alla, atención, de una estación. Sin embargo, como reflejan Ian Stewart (2007, 187-188), Gavin Schmidt (2007) o Tim Palmer (2005), en su artículo «Global warming in a nonlinear climate - Can we be sure?», para algunos científicos el caos no se daría en la predicción climática sino sólo en la predicción meteorológica, puesto que –siguiendo una distinción de Lorenz (1975), que sigue manteniendo que la predecibilidad del clima sólo está parcialmente resuelta- ésta sería parte de un *problema de valor inicial* (*prediciones de primer tipo*, en que influye el efecto mariposa al manejarse trayectorias) mientras que aquélla lo sería, a diferencia, de un *problema de contorno* (*predicciones de segundo tipo*, en que ya no influye el efecto mariposa al no manejarse trayectorias sino fronteras). Si se estudia el clima como problema de contorno en vez de como problema de valor inicial, identificando el clima no con una trayectoria sino con el atractor (Palmer: 2005, 43), la *mariposa* quedará aplastada pero, atención, como el sistema climático es no-lineal y de presumible régimen caótico, el atractor será *extraño*, poseyendo probablemente una cuenca de atracción de altísima complejidad de detalles de grano fino y grueso, con lo que no avanzamos demasiado en el dominio de la inestabilidad (por ejemplo, si el clima fuese identificable al atractor del sistema de Lorenz, significando el giro con respecto al ala derecha que llueve y el giro con respecto al ala izquierda que no llueve, sabríamos la pauta general del clima, unos días llueve y otros no, pero poco más, ya que las trayectorias meteorológicas dan vueltas a cada ala del atractor de modo aleatorio, *impredecible*). En suma, cuando el caos entra por la puerta, la predecibilidad a largo plazo salta por la ventana.

Cabe pensar que la comprensión de la dinámica no lineal del clima, gracias a la Teoría del Caos, hará pararse en barras y ser más prudentes. Sobre todo cuando se repare en la impredecibilidad que subyace al caos determinista que domina los fenómenos climáticos y que hasta llega a reconocer el propio PICC:

> En la investigación y la creación de modelos climáticos, debemos reconocer que nos enfrentamos con un sistema caótico no lineal, y por tanto las predicciones a largo plazo de los estados climáticos futuros no son posibles. (PICC: 2001, 774)

Incluso, el informe del PICC 2007 afirma: «Es *verosímil* que haya habido un calentamiento antropogénico significativo durante los últimos 50 años sobre cada continente, a excepción de la Antártida»; y aclara que emplea el término *verosímil* en el sentido de un 66% de probabilidad, es decir, que la afirmación en que se incluye tiene un 34% de posibilidades de ser falsa, un margen de error poco o nada despreciable. De hecho, recientemente, Sergey R. Kotov (2001 y 2003) ha considerado los datos de los núcleos de hielo de Groenlandia en términos de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos, en vez de en términos estadísticos, y ha hecho una predicción no lineal a corto plazo que *sugiere* que el actual periodo de calentamiento aún proseguirá, pero será seguido por un periodo de enfriamiento global. De hecho, Freeman Dyson (1999, 12), uno de los grandes físicos del siglo XX, asevera: «Los modelos climáticos son, esencialmente, herramientas para comprender el clima, que todavía no son adecuadas para predecirlo [...] no hay que creerse los números sólo porque salen de una supercomputadora». La sombra de la impredecibilidad de nuestro caótico clima aconseja prudencia.

4. Problemas filosóficos de la predicción

Frecuentemente, se asocia a posiciones pragmatistas e instrumentalistas la idea de que la ciencia no es representación ni descripción del mundo, sino, a lo sumo, predicción. La predicción parece, desde el enfoque instrumentalista de la ciencia, una *condición necesaria* de las disciplinas científicas. Las teorías científicas han de demostrar un mínimo de valía como instrumentos predictivos para manejarnos con el mundo. Esto no quiere decir, ni mucho menos, que todas las filosofías instrumentalistas de la ciencia afirmen que la predicción también es una *condición suficiente* de las disciplinas científicas. Hacerlo así equivaldría a identificar la ciencia con el *control predictivo*, con el *poder predictivo*. Sólo algunas filosofías instrumentalistas de la ciencia –que podrían denominarse «instrumentalismos predictivistas»- sostienen que la predecibilidad es una condición necesaria *y* suficiente para que las teorías científicas sean herramientas con éxito en nuestro trato con la naturaleza. La predicción no sólo sería un componente muy importante de la ciencia, sino también parte de su esencia o definición. Ahora bien, el carácter científico de la Teoría del Caos es innegable (al menos desde una perspectiva sociológica) y, sin embargo, la predecibilidad de los sistemas caóticos parece brillar por su ausencia. Por tanto, desde esta filosofía instrumentalista de las teorías, hay que sortear la supuesta inutilidad predictiva de los modelos caóticos. ¿Cómo pueden los modelos matemáticos con caos determinista ser instrumentos científicos útiles si falla la predecibilidad? ¿Se puede subsanar esta incompatibilidad entre la Teoría del Caos y el instrumentalismo? ¿O acaso está mejor preparado el realismo científico para solventar los enigmas que el nuevo paradigma de las ciencias del caos plantea? ¿Pero no afecta también la carencia de predecibilidad a la filosofía realista de la ciencia? Este problema afecta al intrumentalismo de un modo *inmediato*, pero también al realismo (aunque a éste de modo *mediato*).

Vamos a proceder en tres etapas. Primero, nos ocupamos de estudiar, por así decir, las soluciones de la ecuación cientificidad = predecibilidad. Segundo, volvemos de nuevo a mirar el problema de la predicción en Teoría del Caos. Y tercero y último, abordamos las consecuencias que se derivan de los problemas filosóficos de la predicción para el debate entre el realismo y el instrumentalismo en teoría de la ciencia.

4.1 Instrumentalismo y predicción

Rivadulla (2004b, 146 y ss.) traza las líneas históricas generales por las que se ha desembocado en esta concepción tan pragmática de la ciencia que tanto ensalza el valor de la predicción. A nosotros nos llevaría muy lejos recorrerlas en toda su amplitud, pero nos bastará con este esbozo:

Hace ya más de dos milenios que los primeros astrónomos observaron los movimientos de los cuerpos celestes y comenzaron a recoger datos. Datos que los geómetras de la época fueron capaces de acomodar mediante diversos modelos mecánicos ajustados a sus construcciones geométricas. Siglo a siglo, y sin descartar vueltas del revés, generaciones de filósofos naturales, más tarde llamados científicos, fueron escrutando y penetrando el funcionamiento de los cielos, pero también de las cosas terrestres. Describiendo y, especialmente, prediciendo el comportamiento de un Universo que era concebido como un engranaje gigantesco sometido a un mecanismo de extraordinaria precisión. De este modo, más pronto que tarde, caló honda la idea de que el mundo era una máquina del todo predecible, gracias al progreso de la ciencia. Para cuando la visión del mundo-máquina se derrumbó, prosperó la concepción de la ciencia como instrumento principalmente encaminado a la predicción.

Este lugar común está recogido en múltiples obras, tanto filosóficas como científicas. Filosóficamente, destacan Poincaré o Duhem, para quien una teoría física no era más que un sistema ordenado de ecuaciones matemáticas con probada capacidad predictiva (dicho esto pese a que fue el primero en atisbar –como vamos a ver– el riesgo que para el instrumentalismo supone el caos). Con estos precedentes, «para el Círculo de Viena, y posteriormente para otros muchos filósofos de la ciencia, lo esencial del saber científico es su capacidad de predecir exactamente fenómenos físico-naturales» (Echeverría: 1999, 28). De hecho, para Popper, continúa Echeverría (1999, 28), «la posibilidad de mostrar la falsedad de una teoría científica mediante la experiencia, por ejemplo, a través de las prediciones que deductivamente se derivan de ella, es el signo distintivo del saber científico frente a otro tipo de saberes». Más tarde, para Lakatos, sólo será científico aquello que *predice* hechos nuevos. Para Kuhn, como apunta Diéguez (2005, 142), lo que diferencia a disciplinas como la astrología de la ciencia no es que no hagan predicciones observables, que las hacen, sino que están plagadas de predicciones fallidas. Ninguna teoría científica con tantos fracasos predictivos se mantendría todavía a flote. De nuevo, la capacidad predictiva aparece como condición para cualificar como más o menos científica a una teoría. Y a día de hoy, como indica Echeverría (1999, 174), Bas van Fraassen, sin ser en absoluto popperiano, sigue insistiendo en el valor de la predicción, aunque no resucita los debates sobre la verificación o la falsación como criterios demarcativos de la actividad científica. Van

Fraassen es el heredero de los antiguos positivistas que sostenían que «el rasgo definitorio de la ciencia es que en ella podemos hacer predicciones observables» (Diéguez: 2005, 119). Pero podemos decir sin temor a equivocarnos que Rorty constituye el máximo exponente actual del *ultrapredictivismo*. En efecto, para Rorty, como para otros muchos, la capacidad predictiva alcanza un papel casi demarcativo de la *cientificidad*: «la predicción es una condición necesaria para ser colocada en la caja llamada *ciencia* [...] parece bastante simple definir el progreso científico como una capacidad creciente de hacer predicciones» (Rorty: 1998, 5).

Científicamente, algunas contribuciones de von Neumann también pueden tomarse como ejemplo de este ultrapredictivismo. En «Métodos en las ciencias físicas», von Neumann dejó sentado que el único objeto de la ciencia es construir modelos cuya legitimidad se desprenda de la eficacia: «Las ciencias no tratan de explicar y casi no tratan de interpretar: se consagran sobre todo a hacer modelos. Por modelo se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas aclaraciones verbales, predice los fenómenos observados. La justificación de esa construcción es única y precisamente que sea eficaz» (citado por Gleick: 1988, 273). De hecho, bastantes manuales se hacen eco de esta concepción de la ciencia, por ejemplo: «Un teórico actual sólo pide que sus teorías hagan predicciones razonablemente buenas sobre experimentos» (Slater: 1955, 4). Por nuestra parte, no se trata de devaluar el carácter predictivo y los aspectos cuantitativos de la ciencia, sino de ensalzarlos en su justa medida.

4.2 La cuádruple raíz del problema de la predicción

Es fácil enunciar con brevedad el problema de la predicción después de lo explicado en las últimas páginas: en general, la inexactitud predictiva tiene hasta cuatro orígenes o causas...

(1) La excesiva simplicidad en las ecuaciones de modelado.

(2) La imperfección en la determinación de las constantes del modelo.

(3) Los errores en la toma de datos iniciales.

(4) La imprecisión en los métodos de cálculo.

Pues bien, como ya sabemos, el caos sólo tiene que ver con (3) y (4). En muchos sistemas dinámicos, los errores de medida (3) y los errores de cómputo (4) crecen sólo linealmente con el tiempo y, entonces, aunque se guarda una cierta DSCI, ésta puede despreciarse. Sin embargo, en todos los sistemas caóticos, la DSCI no es despreciable (sobre todo si es DECI, que crece exponencialmente), y dará lugar a comportamientos irregulares, a una violenta separación de las trayectorias *reales* y *predichas* causada por la inevitable amplificación de los errores, produciéndose una turbulencia caótica en el espacio de fases del modelo. Como sólo podemos conocer las condiciones iniciales del sistema caótico dentro de un margen de error, se está introduciendo un pequeño error al representar su estado inicial que se inflará espectacularmente con el paso del tiempo, con lo que las ecuaciones generarán una predicción completamente errónea acerca de su estado final. De hecho, los exponentes de Liapunov (que son una medida del caos) determinan, a su vez, los tiempos de Liapunov (que son una medida de la impredecibilidad). Cada sistema caótico posee un tiempo de Liapunov propio, que nos dice el tiempo que ha de pasar para que los errores se dupliquen en promedio. Así, al cabo de dos tiempos de Liapunov, la imprecisión se multiplicará por cuatro; al cabo de tres, por ocho; al cabo de cuatro, por dieciséis; etc. Como puede verse, los errores no crecen de acuerdo a una progresión aritmética sino geométrica. En consecuencia, hay un tiempo de predicción fiable, más allá del cual toda predicción fiable deviene sencillamente imposible.

4.3 Instrumentalismo y caos

A partir de esta patología científica podemos remontarnos al meollo filosófico de la cuestión, que Smith (2001, 58) plantea con brillantez:

> El caos implica una dependencia sensible a las condiciones iniciales, lo que supone que los inevitables errores al fijar las condiciones iniciales se inflan exponencialmente, lo que a su vez significa (al parecer) que las predicciones prácticas de un modelo caótico han de ser *ostentosamente* erróneas. Así, parece plantearse la cuestión de qué clase de "modelado" puede darse si ha de existir un error predictivo espectacular y generalizado. ¿Cómo puede un modelo ser a la vez caótico y útil?

Es más, Duhem, en su *Théorie physique*, dijo con claridad que una teoría física ha de constar de un dominio experimental, de un modelo matemático, de una interpretación convencional y, atención, del requisito de estabilidad (que, aunque suele olvidarse al citar la descripción duhemiana, es lo que garantiza la posibilidad de elaborar predicciones de calidad, y que éste añadió al conocer el sorprendente sistema mecánico caótico debido a Hadamard del que ya hablamos). Duhem (2003, 188) nos lo cuenta:

> Para ser útil al físico [una deducción matemática] le hace falta probar además que la segunda proposición [la predicción] se mantiene *más o menos* exacta cuando la primera [la condición inicial] es solamente *más o menos* verdadera. Y ni siquiera esto es suficiente: necesita delimitar la amplitud de esos dos "más o menos", necesita fijar los límites del error que puede cometerse en el resultado, cuando se conoce el grado de precisión de los métodos que se han utilizado para medir los datos; necesita definir el grado de incertidumbre que se podrá conceder a los datos cuando se quiera conocer el resultado con una aproximación determinada.

Entonces, ¿cómo construir una teoría física sobre una morfología inestable? ¿Acaso no suponen los sistemas físicos inestables, caóticos, una amenaza para la concepción clásica de las teorías y de la ciencia? Esta cuestión debe tomarse filosóficamente en serio, porque no se trata de un mero defecto epistemológico de nuestros modelos sino de una característica ontológica esencial de los sistemas reales que nos rodean. Es cierto que todos los modelos teóricos representan *falsamente* el mundo, por cuanto se trata de idealizaciones, pero si estas abstracciones simplificadoras ya presentan caos, ¿qué no presentarán los propios sistemas reales de por sí?

De todas maneras, el reconocimiento ha tardado en llegar, porque hasta no hace mucho se pensaba, *deus ex machina*, que sería posible controlar y dominar el caos. Es oportuno en este punto repetir una cita que ya utilizamos en la anterior sección al ilustrar nuestras tesis filosóficas con el ejemplo científico que suponía la investigación sobre el cambio climático y meteorológico:

> Mucha gente esperaba que, añadiendo un gran número de grados de libertad, se estabilizaría el sistema y, por tanto, se lograría una predicibilidad a largo plazo. En 1970, Charney todavía era

> optimista: “no hay razón por la cual los métodos numéricos no podrán ser capaces de predecir el ciclo vital de un sistema concreto”, declaraba; sólo los modelos actuales tenían “defectos fatales”. (Aubin & Dahan Dalmedico: 2002, 301)

Sin embargo, estas esperanzas pronto se difuminarían, y por decirlo con Rañada (1990, 579-580):

> La ruptura más notable con el pensamiento tradicional es el entendimiento de que no es posible, como cuestión de principio, predecir el comportamiento a tiempos grandes de muchos sistemas, por la extrema inestabilidad de las soluciones de sus ecuaciones de movimiento. Pues se trata de un comportamiento muy complejo que no es debido ni a ruidos externos, ni a tener muchos grados de libertad, ni a efectos cuánticos. [...] A ello se llama caos determinista, ya que las ecuaciones de movimiento son deterministas pero tienen soluciones con propiedades estocásticas.

4.4 La cuestión de la predicción al descubierto

La ubicuidad del caos se manifiesta en que éste tanto se da en el movimiento de los cuerpos celestes como en el comportamiento de un péndulo forzado o de fluidos (flujo de Rayleigh-Bénard), láseres de gas, aceleradores de partículas, reacciones químicas (reacción de Belousov-Zhabotinskii), poblaciones biológicas... Por ejemplo, dentro del Sistema Solar, siguiendo a Lacomba (2005, 334), un movimiento caótico digno de indicarse lo constituye el movimiento tambaleante de Hiperión, una de las lunas de Saturno, cuya forma de patata provoca un deambular aparentemente fortuito. Este satélite presenta un movimiento caótico *rápido* que se manifiesta como una imprecisión en la orientación del satélite como cuerpo rígido en un intervalo de 6 horas. Literalmente, Hiperión va dando tumbos en su movimiento de rotación.[81] En otro punto, un caos *lento* aparece como imprecisión en la posición de Júpiter en un lapso de tiempo de 200 millones de años o en la posición de la Tierra en un lapso de 40 millones de años. En general, con más precisión, hay acuerdo en que el tiempo de Liapunov del Sistema Solar está entre tres y cinco millones años, con lo que, en particular, una imprecisión en la posición de nuestro planeta hoy de 100 metros se reflejará en un completo desconocimiento de la misma dentro de 100 años (Rañada: 1998, 375).

Aunque el caos *genuino*, en sentido propio, se da en sistemas disipativos (o que no conservan la energía al existir algún tipo de rozamiento), Aguirre & Lacomba (2006) han descubierto que en ciertos sistemas hamiltonianos (conservativos) puede darse una incertidumbre casi similar, lo que tiene dramáticas consecuencias para nuestra capacidad de predicción, muchas más de lo esperado. Aguirre y Lacomba estudian la dispersión caótica, es decir, la interacción de una partícula con un sistema que la dispersa de modo que sus estados dependen sensiblemente de sus condiciones iniciales. Como ilustración de dispersión caótica podemos tomar el dispositivo conocido como *gas de Lorenz* antes descrito (una partícula se mueve a través de un conjunto de obstáculos que la ocasionan desviaciones de modo que la más mínima diferencia en las condiciones iniciales termina por producir dos estados ulteriores por completo diferentes), o la dinámica de iones atrapados en trampas electromagnéticas, o la interacción entre el viento solar y la cola magnética de la Tierra. Pues bien, Aguirre y Lacomba señalan que la consecuencia de disminuir indefinidamente el tamaño de las posibles salidas o escapes de la partícula inmersa en el sistema de obstáculos es una

---

[81] Además, según Sussman & Wisdom (1988), hay evidencia numérica de que el movimiento de Plutón es también caótico.

fractalización tan extrema que lo que en esencia era un sistema determinista predecible se convierte en la práctica en un sistema determinista impredecible, en un proceso altamente inestable; porque por debajo de cierto umbral de medida resulta imposible predecir si las trayectorias que atraviesan una región pertenecen a esta o a aquella cuenca de escape, al estar todas las trayectorias entremezcladas a causa de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Esta patología supone, sin duda, una limitación a nuestra capacidad de predicción muy superior a la que hasta la fecha se asociaba a los sistemas caóticos conservativos.

Y, sin embargo, nuestra respuesta al problema coincide parcialmente con la de Smith (2001, 58): «Los sistemas caóticos pueden ser enormemente predictivos de una serie de modos, aunque su dependencia sensible plantee severos límites a la disponibilidad de *un* tipo de predicción». Además, si aceptamos que explicación y deducción-predicción van de la mano, tampoco podrá decirse que las teorías caóticas están incapacitadas para explicar el comportamiento de los sistemas dinámicos que estudian, después de lo que vamos a indicar.

Bien, lo primero de todo que hay que aclarar, frente a la creencia general, es que las predicciones caóticas pueden ser exitosas a corto plazo. Por precisa que sea nuestra medida de las condiciones iniciales, como siempre se comete algún error que terminará inflándose notablemente, la evolución dinámica en detalle del sistema caótico no tardará en volverse impredecible. Pero, atención, esa impredecibilidad no tiene por qué ser inmediata. De hecho, mientras sobreviene, puede predecirse la trayectoria del sistema caótico, a corto plazo (otro tema es a medio o largo plazo). Resumiendo, se puede esperar predecir el recorrido de la trayectoria durante un breve intervalo de tiempo, si bien con una precisión que rápidamente disminuye conforme los errores van propagándose.

Es curioso comprobar cómo bastantes autores, llevados por la fama del caos, soslayan este aspecto técnico y dan a entender que las predicciones caóticas fallan instantáneamente. Sirva como ejemplo de esto que decimos lo que escribía Hunt (1987, 130-131):

> Se ha descubierto una clase de sistemas cuyo comportamiento [...] incumple radicalmente la condición de continuidad. Se trata de los sistemas caóticos. No importa lo cerca que estén inicialmente dos sistemas, sus recorridos en el espacio de fases pueden diverger, alejándose hasta distancias arbitrarias.

Inconscientemente, Hunt viene a sugerir que las predicciones *no* pueden volverse arbitrariamente precisas ni siquiera haciendo que la determinación de las condiciones iniciales sea arbitrariamente precisa (esto es, que el sistema ideal y el sistema real estén infinitamente próximos). Hasta Prigogine (1999, 84) afirma exactamente lo mismo: «Incluso si conocemos el estado inicial del sistema, los procesos que lo han constituido y las condiciones límites, no podemos prever cuál de los regímenes de actividad elegirá el sistema». Pero como hemos señalado, y también indica Smith (2001, 63), esto no es cierto: cualquier sistema dinámico caótico sería predecible si conociéramos sus condiciones iniciales con un grado de precisión infinito, con infinitas cifras decimales, y además fuéramos capaces de realizar con total exactitud cálculos que entrañen manejar una cantidad infinita de información (es decir, si pudiésemos soslayar (3) y (4), ver arriba). En todo caso, si la medición de las condiciones iniciales se vuelve exacta, la predicción también gana en exactitud.

En suma, siendo concisos, estamos en condiciones de argumentar que, al menos, los modelos teóricos de sistemas dinámicos caóticos pueden arrojar un balance predictivo exitoso a corto plazo. Ahora bien, ciertamente, si la Teoría del Caos sólo sirviera para esto, al filósofo de la ciencia (instrumentalista) se le haría difícil, pese a todo, defender y aconsejar su estudio y utilización, visto el poco fruto que obtendríamos. ¿Puede extraerse de los modelos caóticos más información? ¿Permitirán los modelos caóticos otro tipo de predicción?

4.5 Predicciones cuantitativas y cualitativas

Si no hay predecibilidad, ¿queda inane la ciencia? No, pues restan los aspectos cualitativos, no cuantitativos. Poincaré (1963, 31-33) nos lo cuenta:

> Nos encontramos al físico o al ingeniero que nos dicen: "¿Podría usted integrarme esta ecuación diferencial? La necesitaré dentro de ocho días para tal construcción que debe ser terminada para tal fecha." "Esta ecuación, responderemos, no entra en uno de los tipos integrables, y usted bien sabe que no hay más." "Sí, lo sé, ¿pero entonces para qué sirve usted?" [...] Antes no se consideraba resuelta una ecuación sino cuando se había expresado la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto apenas si es posible más que en el uno por ciento. Lo que siempre podemos hacer es resolver el problema *cualitativamente*, es decir, tratar de conocer la forma general de la curva, que representa la función desconocida.

Los modelos caóticos no pueden predecir la evolución de las variables físicas más que a tiempos suficientemente cortos, pero a cambio pueden ofrecer otro nutrido tipo de predicciones. Pero estas predicciones ya no serán cuantitativas sino cualitativas. Así, Kellert (1993, 101) pone de relieve:

> ...la distinción entre las predicciones *cuantitativas* específicas, que en su forma habitual son imposibles en los sistemas caóticos, y las predicciones *cualitativas*, que constituyen el núcleo de la teoría de los sistemas dinámicos. El conocimiento cualitativo predice propiedades de un sistema que seguirán siendo válidas durante periodos muy largos. Suministra "informaciones generales y grandes clasificaciones", abordando cuestiones como la periodicidad y estabilidad de las órbitas, las simetrías y las propiedades asintóticas del comportamiento y la "estructura del conjunto de soluciones".

Sin embargo, otros filósofos de la ciencia, como Smith (2001, 120-121), abominan de esta distinción y apuntan que la diferenciación entre predicciones cuantitativas y cualitativas es oscura y confusa dentro de la Teoría del Caos. A nuestro entender, esta distinción puede hacerse clara y distinta si comprendemos las predicciones cualitativas en el preciso sentido matemático de *predicciones topológicas*, puesto que un buen número de las propiedades dinámicas más interesantes son propiedades topológicas (como la distinción entre movimientos periódicos y aperiódicos).[82]

La popular *impredecibilidad* de los sistemas caóticos, pese a ser grave, no es tan alarmante ni letal como ciertos divulgadores del *caos posmoderno* nos han hecho creer: a veces es posible el *éxito predictivo*. Lo que sucede es que la predicción resultante no es, en general, *cuantitativa* (como la de la mecánica celeste laplaciana) sino *cualitativa*, y esto nos conduce a perfilar la noción, de nuevo cuño, de *predicción topológica*.

[82] Smith (2001, 120-121) también se revuelve contra la clase de propuesta que defendemos y subraya que, por ejemplo, los propios exponentes de Liapunov son númericos y no son invariantes topológicos; pero cabe observar que la propia presencia de caos, que viene indicada por el hecho de que los exponentes de Liapunov sean positivos, sí que constituye una propiedad topológica (las aplicaciones topológicas no tienen por qué conservar los valores de los exponentes de Liapunov pero sí que respetan su signo).

4.6 La predicción topológica

Primeramente, hay que mencionar las predicciones topológicas *exactas*, es decir, aquellas que son *deducibles matemáticamente*, empleando métodos topológicos. La Topología (el *Análisis Situs* de Poincaré) tiene por objeto el estudio de las relaciones de posición de los diversos elementos de una figura, abstrayendo sus tamaños, y constituye una utilísima geometría cualitativa (Poincaré: 1963, 36). En este apartado, por su resonancia en la investigación matemática puntera hoy día, merece la pena reseñar el cálculo de *invariantes topológicos* que la *Shape Theory* de Borsuk proporciona.

Y en segundo lugar, tenemos que mencionar las predicciones topológicas *inexactas*, o que son *inferidas heurísticamente*, principalmente usando ordenadores. Con palabras de Aubin & Dahan Dalmedico (2002, 301-302) que vuelven a tocar nuestra ilustración sobre el caos y la predicción del tiempo meteorológico:

> Charney escribió que, encarados con problemas no lineales, los científicos tienen que "elegir, o bien un modelo preciso para predecir, o bien una extrema simplificación para comprender". […] Estos modelos [meteorológicos] no necesitan ser representaciones precisas encaminadas a *predecir* el tiempo, sino más bien modelos drásticamente simplificados diseñados para *comprender* ciertos comportamientos. El ordenador no es una mera calculadora gigante; su papel se vuelve experimental y heurístico. Desde luego, el uso que del ordenador hizo Lorenz fue crucial en dos niveles: (1) la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales –más tarde conocida como "efecto mariposa"- se reveló por inestabilidades numéricas; y (2) la sorprendente imagen del atractor de Lorenz aparecida en la pantalla tiene mucho más valor sugestivo que las descripciones puramente verbales –y algo confusas- de Poincaré.

Con respecto a las predicciones topológicas que pueden extraerse heurísticamente mediante la simulación con ordenadores (piénsese en el episodio del descubrimiento del caos por Lorenz), cabe preguntarse si son fiables o si hay que tomarlas con cautela, ya que la computación nunca es perfecta. ¿Qué justifica las inferencias que a menudo se hacen sobre el comportamiento general de las trayectorias caóticas empleando ordenadores? Existen unos teoremas matemáticos, denominados *teoremas de seguimiento* (*shadowing theorems*), que garantizan que la trayectoria computada *sigue como una sombra* -se aproxima- a *otra* trayectoria, que no tiene por qué ser la trayectoria real, pero que seguro que se iniciaba en un entorno de esta última. Es decir, nuestra trayectoria computada probablemente no avanzará cercana a la trayectoria real, pero seguro que sí que permanece cerca de otra que coincidía al inicio con aquélla. Por resumir lo dicho hasta ahora: la trayectoria que se nos aparece en la pantalla del ordenador nos ofrece información sobre la dinámica de una trayectoria del sistema caótico (sólo que no tiene que ser necesariamente la que más nos interesaba).

4.7 Un argumento contra el instrumentalismo «predictivista»

Según estudiamos en el Capítulo 1 y repasamos al inicio de esta sección, las múltiples variedades de instrumentalismo en filosofía de la ciencia vienen a sostener que la ciencia sólo proporciona herramientas –instrumentos– que resultan útiles para la predicción de fenómenos. No en vano, la gran mayoría de instrumentalismos científicos hacen suya la tesis del *antirrealismo de teorías* (que, contrapuesta al *realismo de teorías*, consiste en negar que las teorías científicas nos expliquen aproximadamente cómo es el mundo real, y en afirmar que sólo son instrumentos de predicción de fenómenos observables), así como la tesis del *antirrealismo pragmatista* (que, contrapuesta al *realismo adecuacionista*, consiste en rechazar que las teorías científicas sean verdaderas o falsas, y en aseverar que a lo sumo son exitosas o no exitosas).

En líneas generales, los filósofos instrumentalistas de la ciencia ponen mucho énfasis en el aspecto predictivo de la ciencia, llegando a caracterizar la ciencia como una actividad encaminada a la búsqueda de conocimientos experimentales del mundo que puedan ser sometidos a control predictivo. Esto es, los enunciados científicos, si quieren ser aceptables, tienen que poderse utilizar para obtener predicciones acerca de los fenómenos naturales. En todos los aspectos, el poder predictivo se constituye, desde la visión instrumentalista de la ciencia, en la pieza clave para la consolidación de las teorías científicas. Ahora bien, de ser esto así, la Teoría del Caos tendría pocos visos de cientificidad, dado que, pese a que sí que proporciona predicciones (como avanzamos: frente a la creencia común, cuantitativas a corto plazo y, sobre todo, cualitativas o topológicas), no lo hace –ni puede hacerlo- de modo suficientemente rico.

Apoyándonos en esto, podemos construir un argumento filosófico contra la clase de filosofía intrumentalista de las ciencias y de las teorías que podemos convenir en denominar «instrumentalismo predictivista» (de hecho, el propio término *predictivism* ha sido acuñado por los filósofos bayesianos de la ciencia). Instrumentalismo predictivista sería toda aquella versión de instrumentalismo que, haciendo hincapié en el *antirrealismo de teorías* y *de entidades* (las teorías y las entidades teóricas no son más que recursos o herramientas encaminadas a la predicción), abraza un *ultrapredictivismo* en el que la predecibilidad se convierte en una condición *esencial* o *nuclear* de la definición de ciencia. Ejemplos de *instrumentalismos predictivistas* serían, por así decir, las propuestas de Bas van Fraassen o Richard Rorty (recuérdese que, cuando estudiamos sus doctrinas en el Capítulo 1, los clasificamos como (0, 0, 0; *p*) y (0, 0, 0; *r*) respectivamente); por cuanto ponen demasiado énfasis en la predicción y *relativizan* la ontología científica hasta el punto de negar que ésta llegue siquiera a *rozar* lo real.[83]

4.7.1 La Teoría del Caos y los enfoques instrumentalista y realista de la ciencia

El instrumentalista sabe que la ciencia es una actividad con mucho éxito. Este histórico éxito tiene dos caras: una es la gran capacidad predictiva, sobre todo para predecir nuevos fenómenos; y la otra es la gran capacidad para transformar el mundo. Pero esta segunda capacidad suele ser consecuencia de la primera. En otras palabras, el éxito predictivo es uno de los rasgos fundamentales de la ciencia. Quitad el éxito predictivo a las teorías científicas y la ciencia se convertirá en un gigante con pies de barro, podría decir el filósofo intrumentalista de la ciencia. Ahora bien, ¿qué hacer con la «revolucionaria» Teoría del Caos, cuyo éxito predictivo no puede competir con el de la Teoría de la Relatividad o con el de la Teoría Cuántica?

Precisamente, a propósito de este choque entre la Teoría del Caos y el pragmatismo en ciencia que tanto valor concede a la predicción, Rivadulla (2006, 95) constata: «Los modelos matemáticos no lineales de la Naturaleza no satisfacen la meta predictiva de la ciencia». No en vano, Stephen Kellert (1992, 33) se refiere a la Teoría del Caos como a una ciencia inmadura y se pregunta: «¿Es realmente la Teoría del Caos una teoría? ¿Es realmente una *ciencia*?».

---

[83] Obsérvese que, supuesto esto, los instrumentalismos de Nancy Cartwright o Andrés Rivadulla no serían calificados de *predictivistas*, porque, aunque subrayan demasiado la importancia de la predecibilidad, *no* relativizan –en aras del *ultrapredictivismo*- la ontología científica hasta no ser realistas acerca de la mayoría de las entidades teóricas –como, por ejemplo, el electrón-; de hecho, en el Capítulo 1, los clasificamos como (1, 0, 0; *p*).

Desde luego, estas preguntas también pueden hacérsele al filósofo realista de la ciencia. Sin embargo, el realista científico tiene más fácil contestarlas que el instrumentalista. Una teoría científica, dirá, puede no gozar de éxito predictivo y no por ello tener que ser abandonada, ya que puede ser verosímil (es decir, según Niiniluoto (1999), aproximadamente verdadera y con un alto contenido informativo). La verosimilitud no implica necesariamente el éxito, como reconoce –siguiendo a Laudan (1981)– Diéguez (2006, 396): «el realista debe admitir –y ésta es mi primera tesis- que la verosimilitud no es una condición suficiente para el éxito predictivo e instrumental». La verosimilitud sólo es una condición necesaria del éxito predictivo, pues éste precisa de múltiples hipótesis y datos auxiliares. La predicción puede fallar y todavía quedar la verdad, porque para el realista –como dice Feyerabend– «la ciencia no sólo produce predicciones, versa también sobre la naturaleza de las cosas; es metafísica y teoría de ingeniería en una sóla» (citado por Diéguez: 1998, 74). Por decirlo rápidamente: para el filósofo realista de la ciencia, el éxito implica la verdad («inferencia de la mejor explicación»), pero la verdad no tiene por qué implicar el éxito. En consecuencia, el realista científico puede defender perfectamente la idoneidad de la Teoría del Caos. El realista está en condiciones de argumentar que los modelos caóticos pueden no tener éxito predictivo y, en cambio, ser verosímiles. Pero, replicará el instrumentalista, ¿cuál es el indicador de esa verosimilitud, dado que no hay gran éxito predictivo? Y el realista puede, efectivamente, referirse al hecho de que la Teoría del Caos es explicativa *a posteriori*, *ex post facto*.

Obviamente, el filósofo instrumentalista de la ciencia no puede hacer suyas estas respuestas, por cuanto rechaza que las teorías científicas puedan ser verdaderas o aproximadamente verdaderas, sólo son instrumentos más o menos útiles. Diéguez (1998, 103) afirma que «para los instrumentalistas el éxito es el objetivo mismo de la elaboración de las teorías, el rasgo definitorio del conocimiento auténtico, pero también un dato último». En consecuencia, le es mucho más difícil defender la racionalidad instrumental de las teorías sin éxito. ¿Por qué no cambiar una teoría científica sin éxito predictivo? ¿Acaso no sería lo mejor desecharla, ya que –siguiendo la regla de raigambre popperiana- o bien es infalsable, porque no hace predicciones, o bien es falsable y queda refutada, porque falla en sus predicciones?

No tratamos de reavivar la cuestión, acuciante hace tan sólo setenta años, de la demarcación entre la ciencia y la pseudociencia tomando el éxito predictivo como criterio. Tratamos de señalar que la capacidad predictiva sigue constituyendo un criterio más o menos rígido para distinguir la buena ciencia de la ciencia mediocre y que, por su énfasis en el valor de la predicción, el instrumentalismo (predictivista) atraviesa problemas para argumentar que la Teoría del Caos es una «buena» teoría. Si no puede predecir los resultados de los experimentos (a medio o largo plazo), no es un buen instrumento. Para el instrumentalista, dice Chalmers (2005, 218), «parece plausible evaluar las teorías únicamente en términos de su capacidad de ordenar y predecir fenómenos observables». Efectivamente, Laudan (1984, 89) toma el control predictivo como primer criterio para medir el éxito de una teoría a la hora de elegirla entre varias.

Por ejemplo, desde la filosofía de la física de Bas van Fraassen, resulta extremadamente complicado defender la aceptabilidad de la Teoría del Caos, dado que el propósito de la ciencia es –según el- ofrecernos teorías empíricamente adecuadas y su aceptación sólo implica la creencia de que lo son (van Fraassen: 1996, 28). Desde su concepción semántica de las teorías científicas, una teoría no es más que una familia de modelos cuyas subestructuras empíricas salvan los fenómenos observados. Inspirándose –como apunta Guerrero Pino (2000, 198)- en los trabajos de los matemáticos Hermann Weyl y John von Neumann, y del lógico holandés Evert Beth, van Fraassen define los modelos a través del espacio matemático de estados o de fases (van Fraassen: 1970 & 1972), porque «los modelos son estructuras matemáticas, llamadas modelos de una cierta teoría sólo en virtud de su pertenencia a la clase definida por todos los modelos de la teoría» (van Fraassen: 1989, 366). Los sistemas físicos evolucionan temporalmente atravesando ciertos estados, que quedan caracterizados por los valores que toman ciertos observables físicos. Por tanto, la evolución del sistema en el tiempo corresponde a una trayectoria $s(t)$ en su espacio de estados posibles S (*state-space*), que vendrá determinada por las leyes de la teoría (van Fraassen: 1991, 27). En suma, la idea clave es –como dice Guerrero Pino (2000, 202)- que «una teoría se asume básicamente como un conjunto de modelos y dicho conjunto equivale (de acuerdo con van Fraassen) a las trayectorias posibles de un sistema físico en el espacio-de-estados». La relación que tienen que guardar los modelos con los sistemas reales es, para van Fraassen (1980, 64), de adecuación empírica e isomorfismo:

> Presentar una teoría es especificar una familia de estructuras, sus modelos; y en segundo lugar, especificar ciertas partes de esos modelos (las subestructuras empíricas) como candidatos para la representación directa de los fenómenos observables. Podemos llamar apariencias a las estructuras que pueden ser descritas en los experimentos y medidas; la teoría es *empíricamente adecuada* si tiene un modelo tal que todas las apariencias son *isomorfas* a las subestructuras empíricas del modelo.

La trayectoria del sistema en el espacio de estados –en el modelo- ha de ser, pues, isomorfa a la trayectoria real. Ambas deben ser –como indica Guerrero Pino (2000, 205)- idénticas, para que la teoría que comprende al modelo sea adecuada empíricamente, puesto que –empleando palabras de Suárez (2005, 40-41)- «la existencia de un isomorfismo entre dos estructuras es, por así decir, una afirmación de que las estructuras tienen idénticas propiedades: isomorfismo es identidad estructural». La adecuación empírica, y no la verdad o la verosimilitud, es el objetivo de la ciencia, según van Fraassen.

Ahora bien, según esto, ¿pueden las teorías del caos ser adecuadas empíricamente y, por tanto, óptimas epistémicamente? Consideremos, por ejemplo, un sistema físico cualquiera con caos determinista. A partir de la medición de cierta condición inicial $s(t_0)$ que transportamos al modelo matemático, predecimos –resolviendo numéricamente las ecuaciones diferenciales no lineales de las leyes de la teoría- la evolución del sistema, es decir, la trayectoria $s(t)$ y, en particular, predecimos, para un tiempo t_1, un futuro estado $s(t_1)$. Decididos a comprobar la adecuación empírica del modelo, observamos la evolución real $s'(t)$ del sistema y constatamos que, a causa del inevitable error en la medida de la condición inicial ($s(t_0)$ es aproximadamente pero no igual que la condición inicial real $s'(t_0)$ del sistema) y de la sensibilidad a los datos iniciales, $s(t_1)$ no coincide con $s'(t_1)$ y, lo que es mucho peor, $s(t)$ no es isomorfa a $s'(t)$ (en el mejor de los casos, $s(t)$ y $s'(t)$ son homeoformas, pero no isomorfas al no conservarse las propiedades métricas). De hecho, fijado cualquier margen de error ε<<, ¡resulta posible encontrar trayectorias del modelo que salen de un ε-entorno de $s'(t_0)$ y acaban distando de la trayectoria real más de ε! Las trayectorias predichas y las trayectorias reales jamás serán idénticas y, por consiguiente, desde el «instrumentalismo predictivista» de van Fraassen, es casi imposible considerar la Teoría del Caos como capaz de ser adecuada empíricamente. Parafraseando la metodología de van Fraassen (1980, 238) podemos decir que la Teoría del Caos no es empíricamente adecuada porque la diferencia entre la trayectoria predicha por el modelo y la trayectoria efectiva es estadísticamente significativa.

La adecuación empírica que van Fraassen exige a las teorías científicas es una característica que sólo es predicable de aquellas teorías que son, por decirlo con René Thom (1980, 12), *estructuralmente estables*: «un proceso (P) es estructuralmente estable si una leve variación de las condiciones iniciales conduce a un proceso (P') isomorfo a (P) en el sentido en que una pequeña perturbación sobre el espaciotiempo –un ε-homeomorfismo, en geometría- transforma de nuevo el proceso (P') en (P)». En efecto, únicamente las teorías científicas insensibles ante las pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales están en condiciones de ser adecuadas empíricamente, es decir, de que la trayectoria predicha y la trayectoria real sean isomorfas (dentro de un margen de error *ε*). En todo proceso natural aparece una especie de escala natural más allá de la cual la estabilidad estructural y la posibilidad de predecir llegan a ser incompatibles (Thom: 1977, 31-32). En Mecánica Celeste, esta escala tiene una duración tal que la incompatibilidad no es sensible; pero, en cambio, en Teoría del Caos, esta escala puede ser de una pequeñez tal que la incompatibilidad sea inmediatamente sensible. Obviamente, la Teoría del Caos no cumple en general el requisito de estabilidad estructural, con lo que van Fraassen debería concluir que no es una *buena* teoría... y, sin embargo, lo es, porque es la *mejor* posible.

Curiosamente, Elliott Sober comparte esta dificultad con Bas van Fraassen. Si van Fraassen defiende un *empirismo constructivo*, Sober propone un *empirismo contrastivo*, pero el resultado es el mismo: por su énfasis en la modelización cuantitativa (en la predicción), ambos son incapaces de dar cuenta de la modelización cualitativa que anida en el campo de la Teoría del Caos y de la Teoría de los Sistemas Complejos. Orzack y Sober (1993) mantienen que los modelos cualitativos son problemáticos conceptual y metodológicamente, a causa de sus excesivas limitaciones cuantitativas y predictivas. Orzack y Sober (1993, 542) argumentan que estos modelos dejan sin responder la pregunta «¿cómo de bien explica el modelo los datos?»: «Los test cualitativos pueden mostrar que algunos modelos son incompatibles con los datos, pero sólo los test cuantitativos de los modelos cuantitativos pueden determinar cuál explica suficientemente los datos». Sin embargo, como apunta Justus (2005, 1283), esto infravalora el papel que los modelos no-predictivos desempeñan en la investigación científica, sobre todo de los sistemas complejos.

A nuestro entender, el enfoque *predictivista* de Rorty arrastra también demasiadas dificultades para analizar la Teoría del Caos, ya que –como dice Rivadulla (2004b, 143)- «la capacidad *predictiva* empieza a alcanzar en Rorty el papel demarcativo de *cientificidad* que tiene en física». Rorty (1998, 5) afirma que «la predicción es una condición necesaria para ser colocada en la caja llamada *ciencia* [...] parece bastante simple definir el progreso científico como una capacidad creciente de hacer predicciones». Desde la óptica rortiana, la física no es más que un modo de habérnoslas *predictivamente* con el mundo. Pero ¿qué hacer con la Teoría del Caos, que invierte las tornas?

La comprensión de la Teoría del Caos supone una traba al instrumentalismo a la manera como lo es la de la Astronomía para el realismo. En efecto, Dudley Shapere (1993, 135) lo señalaba a propósito del realismo científico abanderado por Ian Hacking:

> Hacking nos ofrece una elección. O bien la Astronomía es una ciencia, y "el método científico no puede ser el método experimental" (Hacking: 1989, 559); o bien "el método científico es el método experimental" (ibid.) y la Astronomía no es una ciencia. Hacking abraza esta concepción. La Astronomía no puede interferir con sus objetos, luego "la Astronomía no es, para nada, una ciencia natural" (ibid., 577).

Y nosotros podríamos decir:

> El instrumentalismo plantea un dilema de muy difícil solución. O bien la Teoría del Caos es una ciencia, y el método científico no es el método hipotético-deductivo-predictivo; o bien el método científico es el método predictivo y la Teoría del Caos no es una ciencia (física), sino acaso una teoría matemática con alguna que otra aplicación.

Obviamente, este último dilema sólo resulta de comprometer al instrumentalismo con la toma de postura con respecto a las controversias tradicionales de la ciencia. Ahora bien, si el filósofo instrumentalista se inhibe de pronunciarse, al menos habrá de reconocer que el éxito predictivo o la adecuación empírica que tanto ensalza no es, ni mucho menos, un criterio tan firme a la hora de evaluar las teorías científicas, y tendrá que dar alguna razón que justifique la aceptabilidad de la Teoría del Caos desde su óptica instrumental. Quizá el filósofo instrumentalista conteste afirmando que la Teoría del Caos no es más que una herramienta para «manejarnos» con los fenómenos con caos determinista. Ahora bien, ¿qué se quiere decir con esto? ¿Acaso «manejarnos predictivamente»? Pues no es el caso. ¿Acaso «manejarnos explicativamente»? Tampoco, porque, desde la posición instrumentalista, la noción de explicación resulta sospechosa de realismo. (De hecho, siguiendo la estela de Duhem, el propio van Fraassen (1996, 238) señala que la explicación no es un objetivo de la ciencia, sino una mera aplicación suya.) En suma, si las teorías se conciben *únicamente* como instrumentos de predicción, la Teoría del Caos nos conduce a un callejón sin salida.

4.7.2 Conclusión

Descartes, escribe René Thom (1985, 16-17), con sus vórtices y sus átomos enlazados, lo explicaba todo y no predecía nada. Newton, por el contrario, con la ley de gravitación, lo calculaba todo y no explicaba nada. La historia le ha dado la razón a Newton, ha relegado las construcciones cartesianas al nivel de fantasías gratuitas y recuerdos de museo, y ha puesto en primer plano los aspectos predictivos que tanto gustan a los filósofos instrumentalistas. La teoría newtoniana de la gravedad –con un alto balance predictivo a su favor- le ganó la partida a la teoría cartesiana de los vórtices, condenándola al desván de las teorías metafísicas, no científicas. La predicción no ha sido, ciertamente, un criterio demarcativo en física, pero poco ha faltado. La predicción es una condición necesaria y *casi* suficiente. Un ejemplo más actual de esto que decimos lo constituyen las teorías de cuerdas, que según Penrose (2006, 237) no son más que «tentativas», ya que –pese a explicar multitud de fenómenos- apenas predicen nada, y carecen de soporte experimental. Como recoge Diéguez (2005, 152), desde años, algunos físicos vienen criticando la abundancia de hipótesis incontrastables en el campo de la física de partículas elementales (afirmaciones sobre el número de dimensiones del universo, sobre los primeros segundos tras el *big-bang*, sobre los *quarks*...).

Y hete aquí que, de facto, a los modelos caóticos –de la Teoría del Caos-, como a los modelos catastróficos –nos referimos a las modelizaciones matemáticas proporcionadas por la Teoría de Catástrofes creada por Thom-, les ocurre lo mismo (con matices) que a los modelos cartesianos: «Los modelos construidos con la ayuda de este enfoque topológico son inherentemente cualitativos, no están preparados para la acción o la predicción, sino más bien para describir y comprender inteligiblemente los fenómenos mundanos» (Aubin & Dahan Dalmedico: 2002, 303). A entender de Thom, la victoria newtoniana está plenamente justificada desde el punto de vista de la eficacia, del alto potencial predictivo; pero, continúa el ganador en 1958 de la Medalla Fields (el

Premio Nobel de los matemáticos), no podemos contentarnos con un esquema matemático controlado empíricamente que, al mismo tiempo, esté desprovisto de contenido intuitivo: la acción a distancia tenía –y aún tiene- cierto tufillo de magia. «Los espíritus preocupados por la comprensión –remarca Thom (1977, 5-6)- nunca tendrán, con respecto a las teorías cualitativas y descriptivas, desde los presocráticos hasta Descartes, la actitud despreciativa del cientificismo cuantitativo».[84] En sus propias palabras:

> A alguien podría sorprenderle que el potencial predictivo de las teorías científicas deba subrayarse mucho menos de lo que la inmensa mayoría de los investigadores y epistemólogos suelen hacerlo, hasta el punto de convertir ese potencial en la característica distintiva de la tarea científica... a mi entender, deberíamos abandonar la idea de la ciencia como un conjunto de recetas eficaces. (Thom: 1985, 17)

Aún más, Thom (1985, 38) exclama: «¡Explicación y predicción son objetivos bastante contrapuestos en la empresa científica!». Sin llegar a esta tajante separación, que termina por desvirtuar ambas, reduciendo una a mero control numérico sin pies ni cabeza y otra a mera especulación metafísica, puede ensayarse la solución de compromiso, muy adecuada para concebir la Teoría del Caos, que hemos denominado *predicción topológica*, y que intenta reunir al tiempo las intuiciones cualitativas de la explicación con los rasgos cuantitativos de la predicción, que evitan que nos extraviemos en devaneos metafísicos. No por causalidad, como constata Smith (2001, 20), en el caos se da una extraña combinación entre orden a gran escala y desorden a pequeña escala, entre macropredecibilidad y microimpredecibilidad, entre una gran impredecibilidad cuantitativa y una nueva predecibilidad cualitativa.

La *predicción topológica* enlaza con la *pattern-prediction*, concepto que fue muy empleado en sus polémicas económicas por F. A. Hayek, Premio Nobel de Economía en 1974. Hayek (1964, 333-334) nos decía en un artículo titulado *The Theory of Complex Phenomena*:

> La gran fuerza de las matemáticas es que nos capacita para describir modelos abstractos que no podemos percibir por nuestros propios sentidos, y para establecer las propiedades comunes a las jerarquías de clases de modelos. Cada ecuación o cada conjunto de ecuaciones define una clase de modelos […] Es habitual mantener que la descripción del modelo que la teoría ofrece es meramente una herramienta que nos permitirá predecir las manifestaciones particulares que aparecerán en circunstancias concretas. Pero la predicción de que, en ciertas condiciones generales, un modelo de cierta clase aparecerá también es una predicción significativa (y falsable). […] La distinción entre la predicción de la aparición de cierta clase de modelo y la predicción de la aparición de un modelo concreto de esta clase también es importante en las ciencias físicas. […] Pero, en general, las ciencias físicas tienden a asumir que siempre será posible especificar sus predicciones con cualquier grado de precisión deseado.

Es decir, se trataría de aunar los dos tipos de ciencia que constata Thom (1985, 99):

> En un amplio sentido, habrá siempre *dos tipos de ciencia*: unas ciencias que permiten efectuar predicciones eficaces –es decir, predicciones cuantitativas eficaces- y que por ahora se limitan, creo, a la mecánica y la física; y otras ciencias en las que no se puede predecir en forma cuantitativa, pero en las que se podrá proceder mediante clasificaciones de carácter cualitativo y

[84] Está claro que, aparte de la aplicación general de esta observación sobre las teorías cualitativas, como la Teoría del Caos, Thom tiene en mente el destino de su propia Teoría de Catástrofes. Según reseña Espinoza (2007, 241): «por su sustancial componente topológico se la clasifica como una teoría cualitativa de la analogía natural, y porque además, salvo excepción, no proporciona una previsión cuantitativa, algunos epistemólogos la han considerado no-científica».

topológico. Obviamente, estas clasificaciones podrán utilizar también algoritmos matemáticos y no sólo taxonomías de carácter conceptual.

La Ciencia del Caos precisa de eso que Feigenbaum llamó *crear intuición* (Gleick: 1988, 182). Ya lo había dicho Hermann Weyl: «Los científicos nos equivocaríamos suponiendo que modelizar es la única aproximación, cuando permanece abierto el camino de comprender desde dentro (interpretar)» (Escohotado: 2000, 115). Y esto es lo que, precisamente, manifiesta la Teoría del Caos, constituyendo un espléndido contraejemplo a las visiones de la ciencia *ultrapredictivistas*, como son algunas concepciones instrumentalistas. Por algo, Dahan Dalmedico (2008), tras estudiar el diseño de modelos caóticos en meteorología y climatología, deja constancia de que las nuevas prácticas modelizadoras sacrifican la predicción en aras de la comprensión, dado que los modelos resultantes son bastas simplificaciones de fenómenos muy complejos, que no sirven para predecir sino sólo para hacerse ideas. La tensión entre ambos polos de la empresa científica –predecir/explicar– es innegable.

En este sentido, merece la pena reseñar el diálogo entre el físico Antonio Fernández-Rañada y el filósofo Gustavo Bueno a propósito de las consecuencias filosóficas que se derivan de tomarse en serio la Teoría del Caos, por cuanto coinciden en parte con nuestros análisis:

> *Gustavo Bueno*: El punto que quiero subrayar es lo que la exposición de Rañada puede tener de corroboración para una teoría de la ciencia que no hace descansar su esencia en la predictividad. Me parece que no se puede considerar como criterio de la ciencia su capacidad predictiva, puesto que –como muy bien ha expuesto el profesor Rañada- hay multitud de situaciones en donde la ciencia no puede predecir, sin que ello quiera decir que no haya normas, ni leyes, etc.; se trata de la impredictividad objetiva; en todo caso, no hay una ecuación entre determinismo y predictividad.
> *Antonio F. Rañada*: Sobre que la ciencia no es predictividad, yo no me atrevería a estar totalmente de acuerdo con el profesor Bueno; de hecho, creo que para la ciencia es importante la predictividad. Lo que pasa es que la predictividad puede ser de naturaleza varia, de muchos tipos...
> *Gustavo Bueno*: Perdón, yo no he dicho que no sea importante, digo que no es la definición.
> *Antonio F. Rañada*: De acuerdo. Pero hay que tener en cuenta que el tipo de predictividad que en numerosos casos habrá que abandonar es el de la astronomía; con todo, hay otras predictividades que deben seguir manteniéndose, en particular las predictividades cualitativas. Hoy día se habla mucho de física o mecánica cualitativa. A veces resulta más importante determinar el sentido en que evolucionará un sistema (si estará creciendo, si habrá llegado a un máximo, etc.) que precisar con toda exactitud la posición de tales cuerpos en un determinado momento. Hasta hace treinta o cuarenta años estaba arraigada la idea de que lo cualitativo era cuantitativo en pobre, es decir, que se usaba cuando no se era capaz de predecir algo con toda exactitud... Retomando el hilo, se había llegado a una situación en que los físicos, tal vez emborrachados por el éxito de sus capacidades de predicción, pensaban que lo cualitativo era cuantitativo en pobre. O sea, si no somos capaces de decir exactamente cómo va a estar todo, detalle por detalle, podemos contentarnos con dar unas propiedades generales de los sistemas. Actualmente no se piensa así. Se piensa que lo cualitativo es muy importante porque, entre otras cosas, es lo que va abriendo paso a lo cuantitativo; y, además, porque otras veces lo cuantitativo no interesa. (Rañada: 1982, 602-604)

El objetivo último de la ciencia no es sólo predecir, sino también comprender, es decir, escudriñar los mecanismos de la naturaleza. Por esto, todo instrumentalismo que considera la predecibilidad como una condición necesaria y *casi* suficiente de las teorías científicas se está echando arena en los ojos. Abogamos, pues, por un instrumentalismo *no* ultrapredictivista, que juega a dos barajas, que saca según convenga la carta de la predicción (cuantitativa) o la carta de la comprensión o explicación (cualitativa o topológica). Y como colofón a este caso de estudio hay que añadir telegráficamente que cualquier filosofía realista o instrumentalista de la ciencia y, en especial, de la física, ha de corregir, si quiere seguir manteniendo la ecuación positivista cientificidad = predecibilidad, la noción de predicción que maneja, ampliándola para recoger los aspectos cualitativos (topológicos) que ponen en juego las ciencias del caos. Nuestra argumentación, de ser cierta, obliga a modificar la concepción clásica de la predicción, más cuantitativa que cualitativa, para dejar sitio a la Teoría del Caos dentro del Olimpo de las teorías *científicas*.

Tomando prestada una hermosa imagen de Popper: la física de ayer se ocupaba de relojes, la física de hoy se interesa por nubes... y la filosofía de la ciencia tiene que estar atenta a salvar –hoy como ayer– su conexión con las ciencias reales.

CAPÍTULO 7

REALISMO SIN METAFÍSICA,

INSTRUMENTALISMO SIN RELATIVISMO

El movimiento se demuestra andando.

Refrán español

The proof of the pudding is in the eating.

Proverbio inglés

Im Anfang war die Tat.

Goethe, *Fausto*

A lo largo de estas páginas hemos venido analizando dos casos de estudio, relacionados con el papel que los modelos teóricos juegan en física, de especial relevancia para el debate actual en filosofía de la ciencia. Ahora, comparamos las conclusiones que hemos obtenido en ambos casos de estudio e intentamos destilar una valoración final que encuadramos en el marco de las corrientes actuales dentro de la disputa realismo-instrumentalismo.

1. Más allá de la representación y la predicción: la experimentación

Volvamos la mirada hacia el camino recorrido. En el primer caso de estudio, nos acercamos a la Teoría Cuántica y entresacamos de su historia un argumento contra el realismo científico. Observamos cómo la física cuántica pone de manifiesto que *la ciencia no es representación del mundo*. Y esta conclusión reducía al absurdo la visión de la ciencia propia del *realismo estructural*. Con más precisión, la equivalencia entre mecánicas cuánticas suponía un contraejemplo a toda una serie de *estructuralismos realistas*.

En el segundo caso de estudio, nos acercamos a la Teoría del Caos y, de igual modo, extractamos un argumento filosófico, pero esta vez contra el instrumentalismo científico. Estudiamos cómo la física del caos apoya que *la ciencia no es únicamente predicción*. Y esta deducción ponía en aprietos la concepción de la ciencia propia del *instrumentalismo predictivista*. Por ser precisos, el problema de la predicción en las dinámicas caóticas planteaba un escollo insalvable a toda una gama de *teorías instrumentalistas de la ciencia*.

Ahora bien, ¿qué fruto positivo podemos obtener de este par de argumentos o razonamientos negativos? Este capítulo está dedicado a elaborar una crítica constructiva. Vamos a proponer, como alternativa gnoseológica que está a salvo de nuestros dos argumentos, una corriente muy activa dentro del marco de la filosofía de la ciencia internacional de comienzos del siglo XXI, y que está en conexión con cierta tradición filosófica hispana.

El tiempo en que el oficio de científico era comparado al de *pescador* parece que ya ha pasado. Según esta comparación, el científico arrojaba sus redes teóricas al mar de los fenómenos en la esperanza de atrapar dentro de sus mallas algún preciado o novedoso hecho. Esta metáfora de raigambre popperiana hizo fortuna mediado el siglo pasado, cuando vino a sustituir a aquella otra positivista, todavía más simple, del científico como mero *recolector* de hechos que, a lo sumo, tras registrarlos, procedía a clasificarlos y archivarlos. Imagen, a su vez, tomada de una época ingenua y genial en que no escasearon los científicos geniales e ingenuos. (La metáfora del *pescador* se encuentra por vez primera en Popper (1962, 57), en *La lógica de la investigación científica*, quien se inspira en Novalis; y, por su parte, la pista del *recolector* puede rastrearse en múltiples obras de Comte o Magendie, maestro de Claude Bernard.)

En los últimos años, dos fecundas metáforas han ocupado su puesto. Las últimas noticias que nos llegan de la filosofía de la ciencia nos hablan de que los teóricos de la ciencia se preguntan, a propósito de los científicos: ¿pintores o músicos?

Por un lado, la antigua alegoría del científico como *pintor*, que se revela tras la visión de la ciencia como representación del mundo que sostienen numerosos filósofos ligados a la concepción semántica y estructural de las teorías científicas que ya estudiamos (Brent Mundy, Ronald Giere, Steven French, James Ladyman...). Esta imagen pervive desde los tiempos de Galileo o Sydenham: si para Galileo el científico natural había de *representar* los triángulos o círculos inscritos en el Libro de la Naturaleza, para Sydenham el médico debía –a la manera que el botánico pintaba las especies vegetales– *pintar* las «especies morbosas» mediante la observación clínica.

Y, por otro lado, la alegoría del científico como *músico* o, mejor, *arquitecto*, cuya meta es componer o construir el mundo antes que representarlo. Este enfoque de la ciencia como reforma de la naturaleza acorta la distancia entre ciencia y técnica. Curiosamente, en su *Meditación de la técnica*, Ortega y Gasset, muy influido por el convencionalismo que nace con Poincaré y Duhem, y llega hasta Nancy Cartwright en nuestros días, ya intuyó que la ciencia nacía de la técnica, porque el científico permanece siempre cerca de las cosas, para poder manejarlas: «Galileo joven no está en la Universidad, sino en los arsenales de Venecia, entre grúas y cabrestantes» (1982, 92). Pero, últimamente, la teoría experimentalista de la ciencia de Ian Hacking, que proclama un retorno a Francis Bacon, y está emparentada –como vamos a comprobar- con la idea materialista de ciencia de Gustavo Bueno, ha sido la que más ha hecho suyo este emblema del científico como músico o arquitecto. Precisamente, la corriente experimentalista, que pasa por Hacking y ha suscitado esta evocadora imagen del científico y su praxis o quehacer, es la que reclama la atención de las líneas que siguen. «El enfoque de Hacking –asevera Leplin (1984, 5)- difiere significativamente de otros enfoques familiares, al subrayar la naturaleza de la experimentación en la ciencia, comparativamente con las teorías y sus posibles éxitos». Hacking y los suyos se colocan más allá de la representación del realismo estructural y de la predicción del instrumentalismo, centrándose en la experimentación. Además, dejando a un lado la metafísica estructuralista y al otro el relativismo predictivista, no descartan defender el realismo científico. Pero, atención, ¿es posible un realismo que no ceda el protagonismo a la representación o a la predicción? Sí, el de este *nuevo experimentalismo*.

Nuestro par de casos de estudio nos han abocado a reconocer, *a fortiori*, el siguiente dilema: o bien consolidamos un realismo de corte *construccionista* o *intervencionista* (como el de Ian Hacking o Gustavo Bueno), o bien aceptamos un instrumentalismo *razonable*; puesto que las alternativas representacionista y predictivista del cuadrilema originario han quedado refutadas. Entre la falsa representación y la mera predicción, la visión de la ciencia de signo experimentalista va a constituir un acabado ejemplo de realismo sin metafísica. Justo lo que buscábamos.

2. El Nuevo Experimentalismo

El *nuevo experimentalismo* es una concepción de la ciencia de nuevo cuño y gran difusión dentro del ámbito de la filosofía anglosajona de la ciencia. Fue Robert Ackermann (1989) quien bautizó a esta nueva tendencia con el nombre de *new experimentalism*. Salvo contadas incursiones (a las que nos referiremos), aún cuenta con poca presencia en el mundo filosófico hispano. Probablemente, entre nosotros, sea el filósofo canadiense Ian Hacking el *nuevo experimentalista* de mayor influencia. No en vano, buen número de sus obras han sido traducidas, entre ellas, *Representing and Intervening*. Pues bien, como intentaremos mostrar, el filósofo español Gustavo Bueno –creador del sistema conocido como *materialismo filosófico*– anticipa y mantiene numerosas ideas comunes a Hacking y, por extensión, al *nuevo experimentalismo*. Antes de entrar en materia, advirtamos que la convergencia entre Hacking y Bueno resulta tanto más sorprendente si atendemos al hecho de que provienen de escuelas filosóficas muy diferentes –aquél del pragmatismo y la filosofía analítica y éste del marxismo y la filosofía escolástica[85]– y de que mutuamente no se conocen: con respecto al primero, aunque parte de su producción ha sido divulgada en nuestro país, Bueno sólo lo cita en uno de sus último libros, *El mito de la felicidad*, y sólo haciéndose eco de *La domesticación del azar*; con respecto al segundo, pese a que su sistema ha sido bastante difundido por Alemania (*Der Mythos der Kultur*), apenas ha traspasado las fronteras de Inglaterra o EE.UU., a excepción del artículo «Spain's top philosopher» de Huw Richards, aparecido el 13 de Noviembre de 1998 en *The Times*.

La teoría de la ciencia de Gustavo Bueno se conoce como *teoría del cierre categorial* y, esencialmente, consiste en un *constructivismo materialista*. La teoría del cierre categorial surge a mediados de los años 70 y, desde aquel entonces, ha venido siendo aplicada a las ciencias lógico-matemáticas, físico-químicas, biológicas y humanas. Nuestro objetivo no es otro que re-presentar (*volver a presentar*) esta filosofía de la ciencia desde una perspectiva *exotérica*, con otras palabras, desde una perspectiva no *esotérica*, empleando la terminología de la filosofía actual de la ciencia en vez de la del materialismo filosófico; en especial, como va dicho, atenderemos a mostrar los numerosos puntos de contacto que se dibujan entre las ideas de Bueno y las ideas de Hacking, ya que –a nuestro entender– su teoría de la ciencia se anticipa a la corriente actual del nuevo experimentalismo. Es posible que en algunos momentos simplifiquemos en exceso un pensamiento que se nos muestra rico y complejo, pero no resulta fácil reexponer concisamente una doctrina que, por usar la distinción escolástica, ocupa *representada* cerca de cinco mil páginas y *ejercitada* otros varios miles. Ante

[85] Cuya sutilidad y calidad, que en vano se pretenderá enmascarar, rescata Bueno para forjar su entramado entre forma (hipótesis, leyes, teorías...) y materia (observaciones, experimentos, efectos...) en ciencia, y sirve de motor a su pensamiento por cuanto –como apunta Friedman (1991, 26)– «la tarea de la filosofía del siglo XX es desarrollar una versión de la distinción entre forma y contenido, que sea adecuadamente sensible a los desarrollos de la física y las matemáticas modernas».

todo, intentaremos que este parágrafo de filosofía comparada no se torne un Roland Garros filosófico, por cuanto pasa de Hacking a Bueno, para volver de nuevo a Hacking.

2.1 Construir e intervenir *versus* representar y predecir

Dedicamos esta sección a exponer y explicar los presupuestos filosóficos que unen a Gustavo Bueno e Ian Hacking en materia de teoría de la ciencia. El hilo del que vamos a tirar es la serie de respuestas que dan a las siguientes cuestiones: i) ¿Qué es la ciencia? ii) ¿Qué implicaciones se derivan para la disputa acerca del realismo científico? iii) ¿Cuáles son las claves de la actividad científica? iv) ¿Desempeña la verdad algún papel protagonista en el cambio científico? v) ¿Y la idea de progreso? Comencemos, pues, por la primera pregunta: ¿qué es la ciencia?

La ciencia es, según Bueno, construcción. Ahora bien, construcción... ¿de qué, con qué y por quién o quiénes? La respuesta de la teoría del cierre categorial es que las ciencias son construcciones de realidades, con las cosas mismas, y materializadas mediante las operaciones de los científicos empleando múltiples aparatos e instrumentos, que buscan manipular o intervenir esas realidades antes que interpretarlas o representarlas. Este construccionismo es de signo materialista, porque no se limita al terreno de las construcciones conceptuales y reclama que las operaciones científicas son quirúrgicas (manuales) antes que meramente mentales. Esto permite explicar por qué las ciencias precisan de referenciales, de entidades reales, a saber: «las ciencias –arguye Bueno (1995, 50)– son construcciones operatorias y las operaciones sólo son posibles con objetos corpóreos». Pero la teoría del cierre categorial afirma mucho más: son esos propios objetos materiales aquellos que constituyen el cuerpo de la ciencia: «son los electrones, los protones y los neutrones (y no sus símbolos, o sus funciones de onda) –en tanto, es cierto, están controlados por los físicos en aparatos diversos (tubos de vacío, ciclotrones, etc.)– los que forman parte de la física nuclear» (1995, 42). En consecuencia, por ejemplo, la Ley de Acción de Fuerzas de la física clásica no será vista como una Ley de la Naturaleza sino como el modo físico-clásico de manejarse (p. ej. predictivamente) con ciertos objetos (planos inclinados, péndulos, resortes...) cuando les imponemos funcionar bajo ciertas construcciones controladas (p. ej. manualmente) por nosotros (dejamos deslizarse una bola de plomo por el plano inclinado, soltamos el péndulo desde diferentes posiciones iniciales, variamos la pesa que mueve el resorte...). Y es que, para Bueno (1982, 169), «la realidad que se nos da a través de las leyes físicas es una realidad que está desde luego a escala de las manipulaciones de los físicos», porque las llamadas *Leyes de la Física* no son leyes que la Naturaleza *guarda ocultas* y que se *revelan* a la mente del físico, sino relaciones *entre cosas* –relaciones *objetivas*– que los físicos construyen manejando diversos artefactos (Bueno: 1992, 548 y ss.).

El punto de arranque del realismo experimental de Hacking coincide con el del realismo materialista de Bueno. Ambos hacen hincapié en la práctica frente a la teoría, en la intervención o construcción frente a la representación. En efecto, Hacking (1996, 249) asevera: «sostengo que comúnmente los científicos *crean* los fenómenos que posteriormente se convierten en las piezas centrales de la teoría». Hacking cuenta que se convirtió al realismo científico cuando un físico de la Universidad de Stanford le describió cierto experimento encaminado a detectar la existencia de cargas eléctricas de valor igual a una fracción de la carga del electrón (quarks): se tomaron dos bolas diminutas de niobio cargadas eléctricamente y se trataba de observar cómo variaba la carga de esas bolas cuando interaccionaban levemente entre sí (si se medía algún transvase de carga entre ambas con valor fraccionario, el experimento resultaría satisfactorio). Entonces, Hacking preguntó cómo se las habían arreglado en el laboratorio para hacer que las bolitas de niobio tuviesen cargas distintas a fin de que interactuasen y el físico contestó que las rociaban con positrones para aumentar la carga o con electrones para disminuirla. Y esta respuesta fue toda una revelación para Hacking (1996, 41): «Hasta donde a mí concierne, si se puede rociar algo con ellos, entonces son reales». Hacking también concibe la física como edificada sobre la manipulación de positrones, electrones... Toda la obra de Hacking realza este valor intrínseco de la práctica experimental, independiente de la especulación teórica. El lema por excelencia de su nuevo experimentalismo no es otro que «los experimentos tienen vida propia», es decir, éstos no suelen ser programados para verificar o falsar teorías sino para adquirir auténtico conocimiento fenoménico de la realidad. De hecho, recientemente, Peter Galison (1987) y Allan Franklin (2002 & 2003) han llegado a adoptar esta máxima aún más sugerente: «los instrumentos tienen vida propia». Como escribió Gaston Bachelard en *Les intuitions atomistiques*, para estos filósofos e historiadores de la ciencia: «un instrumento en la ciencia moderna es realmente un teorema».

Este audaz paso adelante que ambos filósofos dan, poniendo de relieve la experimentación, se funda, en el caso de Bueno (1995, 42), en que sólo así la filosofía de la ciencia «podrá liberarse de la concepción de la ciencia como re-presentación especulativa de la realidad y de la concepción de la verdad, en el mejor caso, como adecuación, isomórfica o no isomórfica, de la ciencia a la realidad». A entender de Bueno (1992, 1293), resulta imprescindible dar otra vuelta de tuerca al debate realismo-antirrealismo: «Para retirar la idea adecuacionista de la ciencia manteniendo una visión realista (pero materialista) de la misma, es preciso algo más que una crítica localizada (a la ciencia astronómica, a la física cuántica...); es preciso regresar más atrás de la idea misma de conocimiento y alcanzar una visión no representacionista (adecuacionista) del conocimiento científico». Por su parte, de modo análogo, Hacking (1996, 50) sostiene que la disputa entre realistas e instrumentalistas queda inconclusa al nivel de la representación: «Cuando pasamos de la representación a la intervención, a rociar bolas de niobio con positrones, el antirrealismo tiene menos fuerza». «La física experimental –apunta Hacking (1983b, 71)- ofrece la evidencia más fuerte para el realismo científico». Y es que, para Hacking (1996, 49), gran parte del debate contemporáneo acerca del realismo científico está infectado de una metafísica intratable, a causa del uso indiscriminado de términos tales como *teoría* o *representación*. Según Hacking (1996, 303), si sólo contemplamos la ciencia como representación del mundo, jamás escaparemos de las representaciones: «Cada prueba de una representación no es más que otra representación». Y lo que es más grave: nunca lograremos conectarnos con el mundo; pues, después de todo, la realidad tiene que ver con nuestras habilidades para modificarla, para intervenir en ella: «La prueba *directa* de los electrones y similares es nuestra habilidad para manipularlos utilizando propiedades causales» (1996, 303).

Aunque el modo de describir los mecanismos de funcionamiento de la ciencia resulta por completo diferente, tanto el materialismo de Bueno como el experimentalismo de Hacking coinciden en subrayar la intrincación dialéctica entre teoría y práctica que se da dentro de la actividad científica. Bueno describe cómo transcurre la elaboración de cada teorema científico mediante el proceso que denomina *cierre categorial*. *Cierre categorial* designa al conjunto de operaciones con objetos *y* proposiciones que conducen a la construcción de una verdad científica, y que vienen –por así decir– a *cerrar* las acciones realizadas por los propios científicos dentro de la *categoría* de estudio. Desde la óptica de Hacking, el hacer científico se canaliza a través de la tríada especulación-cálculo-experimentación y posee dos funciones: la representación y la intervención. De la primera, se ocupa la teoría. De la segunda, el experimento. Pero ambas también aparecen imbricadas dialécticamente: «Representamos para intervenir, e intervenimos a la luz de representaciones» (1996, 49). Y Hacking (1992, 56) añade: «La ciencia de laboratorio estable surge cuando las teorías y el equipo de laboratorio evolucionan de tal modo que se acoplan unas con otros y resultan mutuamente autojustificativos». Resumiendo, Bueno y Hacking buscan volver a poner la ciencia sobre sus pies experimentales, evitando a un mismo tiempo las concepciones de la ciencia extremadamente teoréticas.

En lo tocante al problema de la verdad en ciencia, Bueno (1982, 125) sostiene que «las verdades científicas son los eslabones o nudos que atan a los hilos en su tejido: sin las verdades, la trama de la ciencia se aflojaría hasta terminar por deshacerse». Su teoría materialista de la verdad está pensada contra la metafísica teoría de la verdad como adecuación (correspondencia, isomorfismo, similitud, analogía...). Al igual que Putnam, Bueno (1995, 33) denuncia el misterioso modo en que se adecúan teorías y hechos: «el adecuacionismo sólo tiene sentido en el supuesto de que la materia tenga una estructura previa isomórfica, pero ¿cómo podríamos conocer científicamente tal estructura de la materia al margen de las propias formas científicas?». Al igual que Quine, Bueno adopta una posición radical ante el dogma empirista de la distinción analítico/sintético: todo juicio es sintético y los juicios analíticos sólo existen intencionalmente como límite de una sucesión de juicios sintéticos. Si Lenin escribió que la praxis demuestra la verdad de la física, Bueno va a radicalizar este aserto y sostener –en un sentido casi colindante con la teoría de la verdad del pragmatismo[86]– que la praxis *es* la verdad de la física: *verum est factum*. Si la ciencia es construcción con determinados materiales, la verdad científica –razona Bueno– ha de consistir –por contraste a la verdad como adecuación– en una determinación *inmanente* a esa construcción, pero no en cuanto esa construcción es teórica sino práctica, *material*: «a la manera –aduce Bueno (1992, 146)– como la *verdad* de una máquina –podríamos decir: la característica de una *máquina verdadera*, frente a una máquina fingida, pintada o de ficción–, consiste en que ella *funcione*». Sirva como ilustración que la verdad de la ecuación de Einstein $E=mc^2$ descansaría, por decirlo radicalmente, en las explosiones atómicas llevadas a cabo por físicos en atolones del Pacífico. Las verdades que construyen las ciencias nos enseñan qué es tener control de regiones de la realidad y qué es no tenerlo (por ejemplo, en el momento de explotar una bomba atómica, dirigir una astronave a Marte o curarnos de una enfermedad): «La ciencia moderna –comenta Bueno (1992, 39)– nos enseña qué significa poseer la verdad de la conexión entre cosas (*verum est factum*) y qué significa no poseerla, andar a ciegas o por tanteo». Las ciencias no nos desvelan cómo es el Mundo, sino que lo *hacen*, pues las ciencias no son despliegues de proposiciones sino de objetos, y las verdades científicas no son sino el resultado final de esa serie de actividades constructivas. Bueno (1972, 429) lo expresaba con una dosis mayor de claridad: «La Verdad queda así desplazada a relaciones entre objetos, a través de signos sin duda, pero no a relaciones entre signos, o a relaciones de signos con objetos o recíprocamente».

[86] No se olvide que el término *pragmatismo* deriva de la palabra griega *pragma*, que quiere decir *acción*, y que tanto Peirce como James acentuaron la conexión entre práctica y verdad, concibiendo ésta como un proceso, como el proceso de su veri-*ficación* o valid-*ación*. Las Leyes de Newton, según la concepción de la verdad del pragmatismo, no eran verdad antes de que fuesen formuladas, como tampoco eran falsas, sino que su verdad aconteció cuando fueron corroboradas. Bueno comparte con los pragmatistas este énfasis en la verdad a escala del hombre, pero se diferencia de ellos en que evita ciertos derroteros subjetivos: la verdad pragmatista se predica de ideas y creencias, pero –desde la perspectiva materialista– la verdad queda encarnada como relación entre cosas.

Aunque Hacking diga desentenderse del problema de la verdad en ciencia, también aparece latente en su obra este sentido de la verdad de signo casi pragmatista[87]: «El árbitro final en filosofía no es lo que pensamos, sino lo que hacemos» (1996, 50). En efecto, su llamada de atención sobre el decisivo *realismo de entidades* frente al *realismo de teorías* tiene mucho que ver con la reformulación materialista de la verdad. No en vano, para Hacking (1996, 173), «la realidad tiene que ver con la causalidad, y nuestras nociones de la realidad se forman a través de nuestras habilidades para cambiar el mundo». Un buen número de pasajes de la obra de Hacking refleja esta concepción pragmatista o materialista de la verdad científica; en cierto modo, podría decirse que, para Hacking, la *verdad* del electrón reside en su exitoso manejo: «Cuando se logra usar el electrón para manipular otras partes de la naturaleza de una manera sistemática, el electrón ha dejado de ser un ente hipotético o inferido. Ha dejado de ser teórico y se torna experimental» (1996, 291). Es decir, mediante el trabajo experimental, el electrón deja de ser hipótesis para transformarse en una herramienta manipulable a fin de producir nuevos fenómenos, esto es, se convierte en un instrumento para hacer y no para pensar, por tanto, en un instrumento real, *verdadero*. Hacking rebate la idea de que el mundo conocido sólo sea una construcción proyectada al imponer nuestras teorías científicas. La práctica experimental nunca es redundante, porque es real. Por ejemplo, observa Hacking (1984, 118-119), desde el descubrimiento del efecto fotoeléctrico se han sucedido múltiples –y, a menudo, contradictorias- explicaciones, como la einsteiniana del fotón, pero, pase lo que pase con esta última, que es la que hoy aceptamos, «las puertas de los supermercados (que dependen del efecto fotoeléctrico para su funcionamiento) continuarán funcionando».

En suma, como amplía Mauricio Suárez (2003, 282) –que, junto a José Ferreirós y Javier Ordóñez (2002), es uno de los introductores del nuevo experimentalismo entre nosotros–, esta concepción del hacer científico posibilita defender una alternativa *materialista* (sic) consistente en que se puede ser antirrealista con respecto a las teorías y, por contra, realista con respecto a la práctica, sobre las entidades manipuladas experimentalmente por los científicos, de modo que «la ontología científica del mundo cambia entonces sólo si cambian tales manipulaciones». Sin embargo, los *materialismos* de Hacking y Bueno no pueden solaparse completamente. Si Bueno acepta aquellas entidades teóricas que sirven para construir, Hacking –como Nancy Cartwright (1983, 6 y 91)– sólo acepta aquéllas que sirven para causar manipulando: «los razonamientos causales ofrecen buenas bases para nuestras creencias en las entidades teóricas [...] la explicación de un efecto mediante una causa tiene un componente existencial que no es un ingrediente extra opcional». Es lo que Niiniluoto (1999, 40) denomina *Argument from Successful Action*. De otra manera, las propuestas de Bueno recubren las de Hacking sin agotarse en ellas, por cuanto la *causación* o *manipulación* de éste aparece propiamente contenida bajo la *construcción* de aquél. Además, empleando una aguda distinción de Suárez (2006), Gustavo Bueno se mueve en un *realismo experimental ontológico* («*x es real si x puede ser manipulado*»), mientras que Ian Hacking parece moverse más en un *realismo experimental epistémico* («*nuestra creencia en que x existe adquiere legitimidad causal si y sólo si creemos que manipulamos x*»). De hecho, Iranzo (2000) introdujo una distinción similar según se empleara el argumento de la manipulabilidad para apoyar un *realismo óntico* (o no comprometido necesariamente con la verdad de las teorías, cuyo principal valedor sería Hacking) o un *realismo alético*

[87] No se pierda de vista lo que Hacking (1996, 83) reconoce: «Mi propia opinión, a saber, que el realismo es un asunto de intervenir en el mundo, más que de representarlo en palabras y pensamiento, ciertamente le debe mucho a Dewey».

(comprometido con la verdad científica, uno de cuyos valedores sería Rom Harré (1996), con su autodenominado realismo «profundo», en donde entraría Bueno).

Por último y por extraño que parezca, comentemos que Bueno formula contra Kuhn[88] idéntica crítica a la que le realiza el nuevo experimentalismo. Desde la perspectiva experimentalista, como sintetiza Suárez (2003, 274), «el conocimiento científico tiene una estructura de tres niveles, con la teoría y los datos observacionales en los extremos y una larga y compleja serie de modelos de los fenómenos actuando como *mediadores* entre teorías y datos». Y este modelo de tres niveles posibilita ser *realista progresivo* con respecto a la práctica (con el paso del tiempo se acumulan hechos científicos) simultáneamente que *antirrealista progresivo* con respecto a la teoría (con el paso del tiempo no necesariamente se da un crecimiento teorético). En efecto, ésta es la posición clásica de Hacking, pero también la de Bueno, para quien la expresión *progreso científico global* carece de sentido (al postular un punto de llegada definitivo), manteniendo en cambio la existencia de un *progreso científico relativo*, en cuanto mejora del dominio de una cierta zona de realidad o del rendimiento de los aparatos científicos (Bueno: 1982, 170). Utilizando una feliz expresión de Suárez (2003, 281-282), cierto *optimismo* queda garantizado, porque «el conocimiento fenomenológico y práctico se puede continuar acumulando, e históricamente así ha sido a menudo, incluso cuando se dan revoluciones radicales en la esfera teórica». Aceptando la conjugación mutua de teoría y práctica, Bueno plantea su modelo análogo al de los tres niveles: si consideramos la ciencia como un cuerpo en sentido anatómico, podemos distinguir dos clases de tejidos. A un lado, los pertenecientes a la *capa básica*, que contiene «los fenómenos ya estructurados o entretejidos operatoriamente» (1992, 894). A otro lado, los pertenecientes a la *capa metodológica*, entendida como «capa conjuntiva intercalar del cuerpo científico destinada a englobar o componer los tejidos básicos heterogéneos, evitando sus disrupciones [...] tratada a veces como una ontología –o una metafísica– previa a los fenómenos en vez de ser tratada como una metodología» (1992, 897). (Desde las coordenadas de Ferreirós y Ordóñez (2002), esta metáfora se corresponde punto por punto con la suya de la ciencia como segmento entre dos extremos, esto es, de la ciencia como híbrido de filosofía –teorización– y técnica –experimentación–.) Pues bien, según Bueno (1992, 675), «los procesos que Kuhn formula como *revoluciones científicas* quedarían localizados en la capa metodológica, antes que en la capa básica, de las ciencias»; y sostiene con Halton Arp (1992, cap. X) que las revoluciones científicas son más ideológicas, filosóficas, que propiamente científicas, pues lo que suelen plantear son reconstrucciones, reutilizaciones de materiales ya dados. En resumen, Bueno defiende el optimismo progresivo del nuevo experimentalismo, porque asume que, por ejemplo, aunque la física surge con «puntos de cristalización» diversos (el orden axiomático no es siempre el mismo que el orden histórico), no puede decirse que el cuerpo de la física del siglo XX (la física relativista, la física cuántica...) se haya desprendido de los tejidos básicos de la física del XIX, de las construcciones mecánicas y electromagnéticas decimonónicas (1992, 224 y 895). Y es que, para Bueno (1992, 182-183), «el lugar de la verdad científica es la armadura o contexto determinante [para entendernos: la versión *materialista* del paradigma kuhniano] en que se constituye»; por ejemplo: el oxígeno debe ser reconocido como una verdad desde la perspectiva de la *campana de Lavoisier*, que –junto al aire que contenía, al óxido rojo de mercurio y a las operaciones tecnológicas de los científicos que pusieron a punto el dispositivo– constituyó la armadura del experimento de 1776 y que, a día de hoy, sigue siendo válido aunque pueda ser sofisticado de cara a mejorar su

[88] Para Ferreirós y Ordóñez (2002) exponente de «la miseria del teoreticismo», aunque Suárez (2003) encuentra evidencia textual de cara a su reinterpretación como experimentalista.

eficiencia. Por decirlo rápidamente: la ventaja de los instrumentos y aparatos científicos es que no pueden cambiar de teorías. Ciertamente, incorporan teorías (de otro modo no tendríamos ni idea del significado de su acción), pero crean una relación invariante entre sus operaciones y el mundo. Si un instrumento da una lectura de X cuando se compone con un fenómeno, continuará mostrando la misma lectura tras un cambio de teoría, aún cuando pueda ser que se considere que ahora dice algo distinto (Franklin: 2002).

En resumidas cuentas, Ian Hacking y Gustavo Bueno vuelven a coincidir a la hora de poner de relieve la relevancia del conocimiento fenoménico y práxico en relación con el progreso científico, restableciéndolo como acumulación de conocimientos experimentales.

2.2 De la Academia al Laboratorio, pasando por el Taller

Tras arrojar luz sobre las semejanzas filosóficas entre Bueno y Hacking, a continuación estudiamos si éstas permanecen cuando regresan desde la filosofía *general* de la ciencia a las ciencias *particulares*. Gustavo Bueno e Ian Hacking, por su énfasis en la manipulación, se muestran muy críticos con la *cientificidad* que cabe atribuir a la Astrofísica y la Cosmología. Desde la perspectiva de Bueno, cuando miramos a la realidad bajo el farol de la ciencia, más que penetrar en el fondo de la realidad (como si estuviera escrita en caracteres matemáticos), estamos aprehendiendo el funcionamiento real de las cosas bajo nuestras construcciones. En consecuencia, como a día de hoy no manejamos construcciones que nos permitan manipular singularidades cósmicas, Bueno (1992, 1195) mantiene que «la teoría del *big-bang*, o la de los *agujeros negros*, no tiene referenciales materiales, ni aun puede tenerlos, a la manera que los tiene la astronomía clásica». Desde la perspectiva de Hacking (1989, 578), la ciencia manipula e interfiere con el mundo a fin de comprenderlo, de este modo, «creemos en la realidad de muchas entidades postuladas por la teoría porque podemos construir dispositivos que las usan para interferir en otros aspectos de la naturaleza e investigar la constitución interna de la materia [...] pero no podemos hacer esto con los objetos de la Astrofísica». Aunque no sostiene que la realidad se reduzca a la capacidad humana de manipulación, Hacking (1996, 304) concluye que «las entidades teóricas que no terminan siendo manipuladas terminan, por lo general, siendo tremendos errores»; y añade: «debo confesar cierto escepticismo acerca de los *agujeros negros*». Otro punto de contacto. (Dentro de este contexto, la penetrante crítica de Dudley Shapere (1993, 147) –reiterada por Iranzo (2000)- a Hacking, acerca de que la noción de manipulación es tremendamente ambigua con respecto a los objetos a que se aplica, resulta extensible a Bueno y, es más, Bueno (1982, 167-170) ya la tuvo en cuenta.)

También une a Bueno y Hacking la lucha contra la tiranía del método hipotético-deductivo-predictivo en física, en especial, en Cosmología, en donde su absolutismo suele anular cualquier libertad que se tome la experimentación. En efecto, basta constatar cómo Hacking (1996, 187-189) y Bueno (1992, 249-251) realizan idéntica crítica a propósito del episodio de la radiación de fondo. Ambos filósofos indican que, cuando los radioastrónomos Penzias y Wilson estudiaron con su radiotelescopio el *zumbido* proveniente del centro de la Vía Láctea, se decidieron a interpretar la radiación de fondo –los 3ºK de temperatura uniforme– como la energía residual de la explosión primigenia porque, precisamente por esa fecha, un grupo de teóricos de Princeton había hecho circular un manuscrito que sugería que el Universo se había originado en una gran explosión (*big-bang*). En palabras de Bueno (1992, 250): «No puede decirse, por ejemplo, que la teoría haya predicho la *radiación de fondo* y que Penzias y Wilson hubieran *verificado* en 1964 tal predicción [...] Penzias y Wilson observaron una radiación uniforme que fue interpretada en el contexto de la teoría del big-bang, cuando ésta estaba, a la sazón, en ascenso; pero que podía haber sido interpretada también en el contexto de otras teorías». A su vez, Hacking (1996, 188), tras mostrar con ejemplos entresacados de libros de texto de física, cómo se distorsiona el episodio de la radiación de fondo, apunta: «No quiero implicar que un historiador competente de la ciencia pueda llegar a deformar a tal grado la historia, sino más bien hacer ver el empuje constante de la historia popular y el folklore». Ciertamente, esta imagen que Hacking y Bueno ofrecen de la enaltecida Cosmología puede chirriar a oídos de educación positivista: desde su punto de vista, la Cosmología se torna como un cuerpo afectado de cáncer y, frente a los que optan por no ver la enfermedad (p. ej. filósofos de inspiración popperiana) o por aplicar radicales medidas eutanásicas (p. ej. filósofos anticientíficos), propondrían la cuidadosa extirpación de los tejidos cancerosos, que más que pertenecer a su capa básica –donde yace la Teoría de la Relatividad- pertenecen a su hipostasiada capa metodológica (muchas especulaciones cosmológicas, sobre el origen del *big bang* o el interior de los agujeros negros, no son más que metafísica disfrazada de matemática, refluencias que podrían parangonarse a las discusiones sobre si el espacio newtoniano era el sensorio divino).

En otro punto, resulta curioso constatar cómo nuestros dos autores sí se distancian cuando analizan si *realmente* vemos a través del habitual, en los laboratorios de física, microscopio túnel, herramienta que permite al físico obtener (supuestamente) imágenes de una superficie a escala nanométrica y manipular átomos de uno en uno. Bueno (1980, 62) avanzó y anticipó una intuición semejante a la archiconocida de Bas van Fraassen (1980, 32) sobre lo observable y lo inobservable (un electrón es inobservable porque no podemos verlo a simple vista, pero un satélite de Júpiter es observable porque podemos viajar hasta él y mirarlo), ya que para Bueno tampoco vemos a través de un microscopio al faltarnos la propiedad de *enfrentabilidad*. Mientras que la estatua de César es imagen de César porque podría confrontarse con el propio César, a la manera que pueden ponerse dos cuerpos uno frente a otro, «una microfotografía (óptica o electrónica) no es una *imagen*, pese a la afinidad que ella tiene técnicamente con una fotografía ordinaria, porque mientras la fotografía I puede enfrentarse isomórficamente con el objeto O, que coexiste con ella segregadamente (puede percibirse independientemente) ante los sujetos que establecen el morfismo, la microfotografía I' no puede enfrentarse con el objeto O' puesto que éste, por hipótesis, no puede ser percibido segregadamente de I'» (1980, 62). Desde su óptica materialista, un microscopio es un operador objetivo que transforma configuraciones microcósmicas en mesocósmicas, antes que una prolongación auxiliar del ojo humano, como lo interpreta Hacking (1996, 210): «Una manera de extender los sentidos es con el uso de telescopios y microscopios cada vez más imaginativos». Curiosamente, la concepción de Bueno acerca del microscopio mereció el calificativo de positivista por parte de Mario Bunge (Bueno & alea: 1982). No obstante, a diferencia de van Fraassen, Bueno es materialista y no clausura la ontología científica en aquello que podemos ver y tocar, como Santo Tomás ante el Resucitado.

2.3 Nuevo rumbo en filosofía de la ciencia

Una de las grandes ventajas del acercamiento experimentalista a la ciencia reside en que aporta nuevas armas al realismo científico. Resulta interesante comprobar cómo Hacking y Bueno comparan su crítica al antirrealismo científico con la crítica socialista.

En efecto, Hacking se compara con Marx. Y Bueno, a su vez, con Engels. Así se expresa Hacking (1996, 303): «mi ataque contra el antirrealismo científico es análogo al ataque de Marx contra el idealismo de su tiempo»; y deja flotando la referencia a la Tesis Dos de Marx sobre Feuerbach: «El problema de si al pensamiento humano se le puede atribuir una verdad objetiva, no es un problema teórico, sino un problema *práctico*. Es en la práctica donde el hombre tiene que demostrar la verdad, es decir, la realidad y la fuerza, la terrenalidad de su pensamiento». Y Bueno (1995, 37) hace referencia a un parágrafo de Engels en *Del socialismo utópico al socialismo científico*: «Desde el momento en que conocemos todas las propiedades de una cosa, conocemos también la cosa misma; sólo queda en pie el hecho de que esta cosa existe fuera de nosotros, y en cuanto nuestros sentidos nos suministraron este hecho, hemos aprehendido hasta el último residuo de la cosa en sí, la famosa e incognoscible *Ding an sich* de Kant... Desde el momento en que podemos *producir* una cosa, no hay razón ninguna para considerarla incognoscible. Para la química de la primera mitad de nuestro siglo, las sustancias orgánicas eran cosas misteriosas. Hoy, aprendemos ya a fabricarlas una tras otra, a base de los elementos químicos y sin ayuda de procesos orgánicos». Tanto Hacking y Bueno, como Marx y Engels, afirman que lo importante no es entender el mundo, sino cambiarlo: la refutación más concluyente del antirrealismo es –como de toda extravagancia filosófica– la práctica, o sea, el experimento y la industria (Diéguez (1998, 95) también capta la conexión y, de hecho, cita el fragmento del panfleto *Ludwig Feuerbach y el fin de la filosofía clásica alemana* de Engels que acabamos de parafrasear). A resultas de esto, la posición de Bueno y Hacking puede condensarse en el siguiente eslogan de resonancia marxista: «los filósofos de la ciencia se han limitado a pensar la ciencia como *representación*, de lo que se trata es de pensarla como *transformación*».

Además, Gustavo Bueno (1992, 406-408) e Ian Hacking (1996, 276 y 289) vuelven a coincidir a la hora de indicar que la mejor alegoría del científico es la baconiana que lo identifica con la abeja, que guarda el punto medio entre el racionalismo de la araña y el empirismo de la hormiga, por aquello de que extrae la materia prima de las flores en los jardines y luego la transforma y digiere con sus propios medios. La imagen por excelencia del *científico interventor* es la abeja, puesto que manipula, construye y compone realidades, a la manera del arquitecto o del músico. Y la física es, *cum grano salis*, como la música. La música, para ser música, ha de sonar y los que la reducen a partituras o imaginaciones intracraneales confunden la parte con el todo. *Mutatis mutandis*, la física, para ser física, ha de asumir activamente la manipulación de cosas.

Sólo nos resta hacer inventario de lo que hemos alcanzado a lo largo de estas líneas. De modo sumario, podemos reseñar los siguientes puntos de contacto entre Hacking y Bueno: 1) Ambos ponen de relieve la contrucción y la intervención frente a la representación y la predición. 2) Subrayan que la teoría no tiene por qué dominar la práctica en ciencia. 3) Priman un realismo experimentalista o materialista frente a un realismo representacionista o el instrumentalismo. 4) Aunque Hacking se desentienda del problema de la verdad en ciencia, se hallan evidentes indicios de una concepción materialista –o, al menos, pragmatista– de la verdad en su obra, como cuando analiza la manipulación de electrones. 5) Defienden cierto materialismo, aunque uno de corte ontológico y otro de corte epistémico. 6) Realizan contra el relativismo kuhniano una crítica semejante (dicho en corto: las revoluciones científicas afectan a la esfera teorética antes que a la experimental). 7) Se muestran muy críticos con la Astrofísica y la Cosmología, haciendo igual lectura acerca de cómo se falsea el episodio de la radiación de fondo (a pesar de que discrepan en el análisis epistemológico de los microscopios). 8) Por último, comparando su crítica al antirrealismo con la marxista al idealismo, ambos cifran la imagen del científico en la abeja baconiana, por aquello de que compone y construye realidades.

Concluimos señalando que las tesis de su común *realismo instrumental* facilitan realizar una relectura de algunas de las tesis mantenidas por sociólogos de la ciencia (por ejemplo: la tesis del predominio del idioma performativo en ciencia de Andrew Pickering (1995), de la ciencia como cultura material de Norton Wise (2006) o de la *metáfora de la fábrica*) e, incluso, de las que mantienen propios científicos cuando filosofan espontáneamente sobre su oficio, verbigracia las sostenidas por los físicos Miguel Ferrero y Emilio Santos (1995, 17): «Puesto que de *hecho* hay ciencias que organizan campos materiales según procedimientos constructivos que sería muy largo exponer ahora aquí, existen los objetos con los que se hacen las pertinentes operaciones de construcción. Nótese que el postulado realista así entendido no es un postulado arbitrario. Su justificación está en la existencia de las ciencias, es decir, en el conocimiento que hemos adquirido de las leyes de la naturaleza. Son, pues, las relaciones activas entre el sujeto (trascendental) y el mundo en el que opera las que prueban a *posteriori* la existencia de una realidad objetiva. Y es su actividad, al transformarla, la que constituye una nueva objetividad». Palabras que, perfectamente, suscribirían Bueno o Hacking. De hecho, Ferrero, Salgado y Sánchez-Gómez (2007) van aún más allá y aseveran, con acentuado materialismo, que la racionalidad científica no reside en el cerebro de los científicos ni en su conducta, sino en la propia ciencia en cuanto institución encarnada en la realidad material. La transformación de la realidad que producen las ciencias constituye el máximo exponente de su veracidad y objetividad. Idea que hasta no hace mucho tiempo se tornaba quijotesca veleidad entre los teóricos de la ciencia, quizá porque –como apunta Sánchez Meca (2005)– «la mayoría de las discusiones postkuhnianas adoptan una visión de la ciencia casi exclusivamente logoteórica, que ignora en gran medida este carácter técnico-operativo». Por suerte, el realismo experimental de Ian Hacking y el realismo materialista de Gustavo Bueno proyectan sendas imágenes de la ciencia en que el experimento ya no está cautivo de la teoría y en que –invirtiéndose las tornas– *la teoría es la que ahora aparece cargada, cargada experimentalmente*.

3. Conclusiones

A manera como, según dicen, el matemático es *platónico* mientras trabaja, pero se vuelve *hilbertiano* cuando le preguntan por la naturaleza de su quehacer, pensamos que el físico es *realista* los días de diario, mientras faena en su laboratorio, pero se vuelve *instrumentalista* los fines de semana, cuando es interrogado por el filósofo de la ciencia. En general, reservamos nuestras simpatías para esta actitud siempre que ese realismo y ese intrumentalismo transcurran dentro de los cauces críticos que les hemos marcado a lo largo de estas páginas. El abecé de nuestro punto de vista es, como enseña el realista científico de signo experimentalista, reconocer la realidad de las construcciones científicas y apreciar la significación de la práctica en ciencia; pero sabiendo, al mismo tiempo, como corrige el filósofo instrumentalista, que el *ordo idearum* no siempre coincide con el *ordo rerum*.

A MODO DE CIERRE

No puede haber nada más contrario a lo que es «conocer la Realidad» que «hacer la Realidad».

José Ortega y Gasset, *La idea de principio en Leibniz*

Cerca de doscientas páginas atrás, dábamos carta de naturaleza al par de metas que se marcaba la presente tesis doctoral. Una de ellas era estudiar, desde la filosofía *especial* de la física cuántica, los procesos de modelización y matematización envueltos en la(s) prueba(s) de equivalencia entre las Mecánicas Cuánticas Matricial y Ondulatoria, para a continuación destilar, desde la filosofía *general* de la física, las perniciosas consecuencias de este caso de estudio para el realismo científico de corte estructural, así como para la frecuente concepción de la ciencia como representación del mundo. En especial, recapitulando, dilucidamos la noción de *equivalencia formal*, pilar fundamental de toda nuestra investigación, y que nunca ha recibido tanta atención como la de *equivalencia empírica*, desde la óptica de la Teoría de la Ciencia.

Y la otra meta era investigar hasta qué punto el reciente desarrollo de la Teoría del Caos, cuyos sistemas aparecen dominados por dinámicas intrínsecamente impredecibles, constituye un serio escollo para el enfoque instrumentalista en filosofía de la ciencia, que tanto realza y subraya el papel predictivo que deben desempeñar los modelos científicos. En concreto, realizamos un análisis a fondo de las nociones conjugadas de *determinismo* y *predecibilidad*, que en más de una ocasión aparecen peligrosamente confundidas en la literatura científica y filosófica.

Por último, a partir de ambos casos de estudio, sostuvimos la posibilidad de un enfoque alternativo que, sin caer en el relativismo o recaer en la metafísica, conciba la ciencia como *construcción* o *intervención*, en lugar de *representación* o *predicción*; una posición más acorde con los aires que, pienso, soplan en la Ciencia.

Collado Villalba, Madrid

APÉNDICE

Ofrecemos una concisa introducción a la notación y al bagaje científicos empleados a lo largo de las páginas de este trabajo de investigación...

Lista de Símbolos

MQ	Mecánica Cuántica
MM	Mecánica Matricial
MO	Mecánica Ondulatoria
$\neg$	no
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\rightarrow$	implicación
$\leftrightarrow$	equivalencia
$\Rightarrow$	condición suficiente
$\Leftrightarrow$	condición necesaria y suficiente
$\equiv$	definición
$\in$	pertenencia
$\subset$	contenido
$\times$	producto cartesiano
$^{-1}$	inversa
$\dot{x}$	derivada de x con respecto al tiempo
$\frac{\partial x}{\partial y}$	derivada parcial de x con respecto a y
$\int_z xdy$	integral en z de x con respecto a y
$\langle x, y \rangle$	producto interno de x e y

Elementos de Mecánica Cuántica

Esta exposición elemental del formalismo cuántico persigue introducir el aparato matemático mínimo con vista a facilitar la discusión. Nos proponemos dar una introducción «autocontenida» al formalismo de la MQ contemporánea[89], de nuestro tiempo, por cuanto esto puede servir como plataforma de lanzamiento para acercarse a

[89] Mejor dicho: Mecánica Cuántica *no relativista*. Por cierto, si escribimos MQ por MC, no es por moda anglicista, sino porque MC sugiere «Mecánica Clásica».

MM y MO de un modo «serio», e. d. sin caer en la pedantería científica ni en la estafa divulgativa. De hecho, si aceptamos la costumbre de pensar que:

$$Teoría = Formalismo + Interpretación$$

entonces:

$$Teoría\ MQ\ =\ Formalismo\ MO\ +\ Interpretación\ MM$$

porque, a día de hoy, a grandes rasgos, el formalismo utilizado es el de MO y, paradójicamente, la interpretación que ganó la partida fue la de MM (Copenhague – Gotinga). El tiempo, del que decía Ortega que era un *galant'uomo*, pone a cada cosa en su sitio. Y esta extraña conjunción refuerza nuestro consejo de que el previo conocimiento de MQ puede mejorar las posibilidades de éxito del acercamiento a las históricas MM y MO.

1. Noción de *función de onda*

En MQ a cada *sistema cuántico S* (pongamos por caso, un electrón) se le asocia un *espacio de Hilbert* H_S cuyos elementos ψ reciben el nombre de *funciones de estado* o *de onda* y son las encargadas de describir el *estado* del sistema *S*. La función de onda ψ juega en MQ un papel análogo al que jugaban posición y momento (q y p) en Mecánica Clásica, aunque técnicamente es mucho más sofisticada que ellos dos –entre otras razones porque toma valores en el cuerpo de los números complejos (aparece el número imaginario i)-. Si el estado de *S* viene caracterizado por ψ, decimos que *S* se encuentra en un ψ-*estado*.

2. Noción de *operador observable*

A cada *observable 'A'* (por ejemplo, la posición de un electrón en el interior de una caja unidimensional) se le asocia un *operador A* (p. ej., en el caso mentado, multiplicar por la variable de posición, i. e., $A\psi\ =\ x\psi$).

Se dice que ψ es una *autofunción* de *autovalor a* para *A* si y sólo si $A\psi\ =\ a\psi$ donde a es un número real. Al conjunto de autovalores de *A* se lo denota[90] como $\sigma(A) = \{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$ y, a veces, se lo llama también *espectro* de *A*. Al conjunto de autofunciones correspondientes a esos autovalores de *A* se le puede denotar como $eigf(A) = \{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$ (nótese que *eigf* viene de *eigenfunktion*, autofunción en alemán).

Los autovalores de *A* son los *valores concretos* que constataremos al *medir* el observable *'A'* de *S*. Dicha operación de medida, *cum grano salis*, queda recogida simbólicamente en el formalismo mediante la aplicación del operador *A* a la función de onda ψ del sistema *S*.

Así, si *S* se encuentra en un f_n-estado (esto es, $\psi = f_n$), pues, entonces, sabemos que al medir *'A'* se obtendrá con certeza (i. e. con probabilidad igual a 1) el valor v_n ya que $A\psi = Af_n = v_n f_n$. En este caso, suele decirse que la magnitud física *'A'* presenta un

[90] Supongamos por comodidad que *A* no posee *espectro continuo* sino *discreto*, es decir, es una magnitud *cuantizada* al estilo de la *teoría cuántica antigua*.

valor *bien definido* en S. Por contra, si S se encuentra en un ψ-estado con $\psi = f_1 + f_2$, pues, entonces, sólo sabemos que al medir *'A'* se obtendrá, o bien v_1 con probabilidad igual a ½, o bien v_2 con probabilidad también igual a ½, ya que, en este caso, $A\psi = A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2 = v_1 f_1 + v_2 f_2$ que es $\neq v_1 f_1$ y también es $\neq v_2 f_2$. En este caso, suele decirse que la magnitud física *'A'* no está *bien definida* sobre S, está *borrosa*.

3. *Colapso* de la función de onda

Supongamos diseñado el siguiente experimento: en $t = 0$ disponemos de S (digamos, un protón) tal que conocemos su ψ-estado (por comodidad lo denotamos $\psi(0)$); entre $0 < t < 1$ no intervenimos en S; exactamente en $t = 1$ practicamos la medición del observable *'A'* de S; y, luego, para todo tiempo $t > 1$ volvemos a no intervenir en S.

Pues bien, conviene delimitar los tres siguientes periodos:

(I) Entre $0 \leq t < 1$ se dice que *S evoluciona libremente*, esto es, se pasa de $\psi(0)$ a $\psi(1)$ según rige la ecuación de Schrödinger $H\psi=E\psi$ (proceso *determinista* y *reversible*, entropía=constante).

(II) A priori del acto de medición de *'A'* en $t = 1$ sólo podemos decir cuál es el valor que esperamos medir, esto es, sólo podemos decir cuál es el valor más probable a medir, de acuerdo a la *regla de Born* éste es el valor del *sandwich* de $\psi(1)$ por A ($<\psi(1)|A|\psi(1)>$)[91]. A posteriori, imaginemos que observamos v_n («el valor de *'A'* es v_n») pues, entonces, según el *postulado de proyección de von Neumann*, la función de onda $\psi(1)$ se *colapsa* instantáneamente a la autofunción f_n correspondiente al autovalor v_n que hemos medido ($\psi(1)=f_n$ a partir de ya!!!!), también suele decirse que el paquete de ondas se ha *reducido* (proceso *indeterminista* e *irreversible*, entropía≠constante al extraerse información de S). Lo importante es reparar en que la observación/medición de *'A'*, más que proporcionarnos información de cómo estaba el sistema S, *prepara* al sistema obligándole a tomar un valor definido en $\sigma(A)$. Sin entrar en polémicas, sencillamente indicar que las interpretaciones de la *regla de Born* y del *postulado de proyección de von Neumann* (sic Margenau) están muy lejos de ser meridianamente nítidas. Por un lado, ¿de qué habla la regla de Born? ¿Del «objeto», como querían Einstein y Schrödinger? ¿O del «objeto ⊕ aparato de medida», como deseaban Bohr y Heisenberg? Por otro lado, ¿es adecuado aceptar el postulado de proyección? ¿Es tan plausible como afirmaba von Neumann? ¿No es inútil en los cálculos empíricos, como denunciaba Margenau? ¿Acaso debemos aceptarlo para ciertos aspectos cuánticos (*value states*) y rechazarlo de plano para otros (*dynamical states*), como sugiere van Fraassen (1991) desde su peculiar interpretación modal de MQ? ¿Y, ante todo, cómo desmontar las paradojas del *gato de Schrödinger*, del *amigo de Wigner*...?

(III) Finalmente, para $t > 1$, S vuelve a evolucionar libremente cumpliendo la ecuación de Schrödinger, esto es, de f_n a $\psi(t)$ tal y como gobierne $H\psi=E\psi$.

---

[91] Ejemplo de aplicación de la regla de Born a A y a $\psi = sf_1 + tf_2$ (s y t son dos números complejos tales $|s|^2 + |t|^2 = 1$) del sistema S: la probabilidad de observar (medir) v_1 es $|s|^2$ y la probabilidad de observar (medir) v_2 es $|t|^2$, por tanto, el valor esperado (*sandwich*), de acuerdo a la definición de *esperanza matemática*, es $v_1|s|^2 + v_2|t|^2$.

4. Relaciones de *imprecisión* de Heisenberg

Por último, recordar que si los operadores, *A* y *B*, asociados a dos observables, *'A'* y *'B'*, no conmutan, $AB \neq BA$, entonces, el conocimiento *preciso* del valor de uno de ellos *excluye* todo *posible* conocimiento del valor del otro. Toda doble medición está sometida a las relaciones de imprecisión de Heisenberg, y como apostilla von Neumann (1949, 169): «es un poco fuerte el tener que reconocer, sin más, la imposibilidad de medir simultáneamente y con cuanta exactitud queramos la posición y la velocidad (esto es, las coordenadas y el impulso) de un cuerpo material, incluso si se poseen instrumentos de medida suficientemente delicados [$PQ-QP=(h/2\pi i)I \rightarrow \Delta P \Delta Q \geq h/4\pi$]». Verbigracia, si localizamos un electrón, que posee un tamaño del orden de 10^{-15} m, en una caja unidimensional (intervalo) de $5 \cdot 10^{-12}$ m, entonces la indeterminación que afecta a la velocidad de tal electrón es del orden de 10^{+7} m/s, espeluznante si comparamos con que la velocidad de la luz en el vacío es de $3 \cdot 10^8$ m/s (Rivadulla: 2003, 190).

Si las Relaciones de Heisenberg se interpretan epistemológicamente (como que la medida del momento destruye el conocimiento de la posición del sistema), suele hablarse de Principio de Incertidumbre. En cambio, si se interpretan ontológicamente (como que la medida de la posición crea la posición del sistema y hace que no sea posible atribuírsele semánticamente un momento preciso), suele hablarse mejor de Principio de Indeterminación.

Elementos de Teoría del Caos

A diferencia de lo que ocurre con la Mecánica Cuántica, para seguir los razonamientos a propósito de la Teoría del Caos no es necesario ningún conocimiento matemático especial, sino que basta con estar familiarizado con el cálculo ordinario y con la idea de lo que es una ecuación diferencial. Precisamente, quizás sea esta sencillez de abstracción la causa que esté detrás de la amplia difusión y popularidad de que gozan la física y la matemática del caos. En cualquier caso, remitimos a Devaney (1989) como manual de cabecera, aunque Barnsley (1993, 130 y ss.) y Lacomba (2005) suponen una breve pero completa introducción a los sistemas dinámicos. A continuación, nos limitamos a repasar las definiciones fundamentales.

Sea X un espacio métrico. Un sistema dinámico (continuo) es una aplicación $S:[0,\infty)\times X \rightarrow X$, $(t,u) \rightarrow S(t,u)$ tal que: (i) S continua; (ii) $S(0,\cdot):X \rightarrow X$ es la identidad; y (iii) $S(t+s,u) = S(t,S(s,u))$ (propiedad de semigrupo). Si discretizamos el tiempo, obtenemos la definición de los sistemas dinámicos discretos: Un sistema dinámico discreto es una aplicación $S:N\times X \rightarrow X$, $(t,u) \rightarrow S(t,u)$ tal que: (i) $S(n,\cdot)$ continua para cada n fijado; (ii) $S(0,\cdot):X \rightarrow X$ es la identidad; y (iii) $S(t+s,u) = S(t,S(s,u))$ (propiedad de semigrupo). Los sistemas dinámicos discretos son aquellos que varían en pasos discretos y las herramientas matemáticas que se ocupan de ellos son las ecuaciones en diferencias, que son fórmulas que expresan los valores de las variables en el paso siguiente en función de sus valores en el paso presente. Por su parte, los sistemas dinámicos continuos son aquellos que varían continuadamente y las herramientas matemáticas que se centran en ellos son las ecuaciones diferenciales, que son fórmulas que expresan las tasas de cambio de las variables representativas en función de los valores actuales de esas variables del sistema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKERMANN, Robert J. (1989): «The New Experimentalism», *British Journal for the Philosophy of Science*, 40, pp.185-190.

AGUIRRE, Jacobo & LACOMBA, Ernesto (2006): «Fractalidad extrema e indeterminación clásica en sistemas dinámicos», *Gaceta de la Real sociedad Matemática Española*, 9/1, pp.43-57.

AKHIEZER, N. I. (1965): *The classical moment problem*, Oliver & Boyd, Edimburgo y Londres.

ALBERT, David Z. (1992): *Quantum Mechanics and Experience*, Harvard University Press, Cambridge.

ALVARADO MARAMBIO, José Tomás (2002): *Hilary Putnam: el argumento de teoría de modelos contra el realismo*, EUNSA, Navarra.

ARANA, Juan (2002): «Causalidad y objetividad. Schrödinger y el trasfondo filosófico de la física cuántica», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.73-96.

ARNOLD, Vladimir Ilich (1988): *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Nueva York.

ARP, Halton (1992): *Controversias sobre las distancias cósmicas y los cuasares*, Tusquets, Barcelona.

ATMANSPACHER, Harald (2002): «Determinism is Ontic, Determinability is Epistemic», en Bishop & Atmanspacher (2002, 49-74).

AUBIN, David & DAHAN DALMEDICO, Amy (2002): «Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures», *Historia Mathematica*, 29, pp.273-339.

BACON, Francis (1984): *Novum Organum*, Sharpe, Madrid.

BALIBREA GALLEGO, Francisco (1999): «Caos y atractores extraños. Dos problemas no lineales en matemáticas», *Gaceta de la Real sociedad Matemática Española*, 2/1, pp.99-116.

BALZER, W. & MOULINES, C. U. & SNEED, J. (1987): *An architectonic for science*, Reidel, Dordrecht.

BARNSLEY, Michael (1985): «Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals», *Proceedings of the Royal Society of London*, A399, pp.243-275.

---- (1993): *Fractals everywhere*, Academic Press Professional, Cambridge.

BARNSLEY, Michael & DENKO, Stephen (ed.) (1986): *Chaotic Dynamics and Fractals*, Academic Press, Nueva York.

BARTELS, Andreas (2006): «Defending the Structural Concept of Representation», *Theoria*, 2ª Época, Vol. XXI, Núm. 55, pp.7-19.

BATANERO BERNABEU, Carmen & SERRANO ROMERO, Luis (1996): «La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas», *UNO*, 5, pp.15-28.

BELLER, Mara (1983): «Matrix Theory before Schrödinger», *Isis*, Vol. 74, Núm. 4, pp.469-491.

BIRKHOFF, George David (1927): *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence.
BISHOP, Robert C. (2002): «Deterministic and Indeterministic Descriptions», en Bishop & Atmanspacher (2002, 5-31).
BISHOP, Robert C. & ATMANSPACHER, Harald (ed.) (2002): *Between Chance and Choice: Interdisciplinary Perspectives on Determinism*, Imprint Academic, Thorverton.
BLACK, Max (1962): *Models and Metaphors*, Cornell University Press, Nueva York.
BOHM, Arno (1966): «Rigged Hilbert Space and Mathematical Description of Physical Systems», *Lectures in Theoretical Physics*, 94, NY.
BOHM, David (1952): «A suggested interpretation of the quantum theory in terms of *hidden* variables (I & II)», *Phys. Rev.*, 35, pp.166-179 & pp.180-193.
---- (1989): *Quantum Theory*, Dover, Nueva York.
BOHR, Niels (1918): «On the quantum theory of line-spectra», *Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. nat. math. Afd.*, 8, IV, I, fasc.1-3, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 95-137).
---- (1935): «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?», *Physical Review*, 48, pp.696-702.
---- (1964): *Física Atómica y Conocimiento Humano*, Editorial Aguilar, Madrid.
---- (1988): *La teoría atómica y la descripción de la naturaleza*, Alianza, Madrid.
BOHR, Niels & KRAMERS, H. C. & SLATER, J. C. (1924): «The quantum theory of radiation», *Phil. Mag.*, 47, pp.785-802, reimpreso en var der Waerden (ed.) (1968, 159-176).
BOMBAL, Fernando (1994): «Los orígenes del Análisis Funcional», en *Historia de la Matemática en el siglo XIX*, Real Academia de Ciencias de Madrid, Madrid, pp.35-56.
---- (1999): «Los modelos matemáticos de la Mecánica Cuántica», en *La Ciencia en el siglo XX. Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia*, Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, Islas Canarias, pp.115-146.
---- (2000): «Los espacios abstractos y el Análisis Funcional», en Antonio Martinón (ed.), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, Editorial Nivola, Islas Canarias, entrada nº41.
---- (2003): «Laurent Schwartz, el matemático que quería cambiar el mundo», *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6.1, pp.177-201.
---- (2003b): «Análisis Funcional: Una perspectiva histórica», *Proceedings of the Seminar of Mathematical Análisis 2002-2003*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, pp.81-117.
BORN, Max (1924): «Über Quantenmechanik», *Z. Physik*, 26, pp.379-395, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 181-198).
---- (1955): «Ist die klassische Mechanik tatsächlich deterministisch?», *Physicalische Blätter*, 11, pp.49-55.
BORN, Max & JORDAN, Pascual (1925): «Zur Quantenmechanik», *Z. Physik*, 34, pp.858-888, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 277-306).
BORN, Max & HEISENBERG, Werner & JORDAN, Pascual (1926): «Zur Quantenmechanik II», *Z. Physik*, 35, pp.557-615, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 321-386).
BOROWITZ, Sidney (1973): *Fundamentos de Mecánica Cuántica*, Editorial Reverté, Barcelona.
BOYA, Luis Joaquín (2003): «Rejection of the Light Quantum: The Dark Side of Niels Bohr», *International Journal of Theoretical Physics*, 42/10, pp.2563-2575.

BRADING, Katherine & LANDRY, Elaine (2006): «Scientific Structuralism: Presentation and Representation», *Philosophy of Science*, 73, pp.571-581.
BRICMONT, Jean (1995): «Science of Chaos or Chaos in Science?», *Physicalia Magazine*, 17/3-4, pp.159-208.
BROWN, James Robert (1994): *Smoke and Mirrors. How science reflects reality*, Routledge, Londres.
BUENO, Gustavo (1972): *Ensayos materialistas*, Taurus, Madrid.
---- (1980): «Imagen, símbolo, realidad», *El Basilisco*, 9, pp.57-74.
---- (1982): «El cierre categorial aplicado a las ciencias físico-químicas», en *Actas del I Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, Pentalfa Ediciones, Oviedo, pp.101-164.
---- (1992): *Teoría del cierre categorial*, 5 tomos, Pentalfa Ediciones, Oviedo.
---- (1995): *¿Qué es la ciencia?*, Pentalfa Ediciones, Oviedo.
---- (2002): *Der Mythos der Kultur*, Peter Lang, Berna.
BUENO, Gustavo & alea (1982): «El significado de la física cuántica», en *Actas del Primer Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, Pentalfa Ediciones, Oviedo, pp.349-380.
BUENO, Otávio (2001): «Weyl and von Neumann: Symmetry, Group Theory, and Quantum Mechanics», *draft paper* presentado en *Symmetries in Physics. New Reflections*, Oxford Workshop, Enero de 2001.
BUENO, Otávio & FRENCH, Steven & LADYMAN, James (2002): «On representing the relationship between the mathematical and the empirical», *Philosophy of Science*, 69, pp.497-518.
BUNGE, Mario (1967): *Foundations of Physics*, Springer-Verlag, Nueva York.
---- (1978): *Filosofía de la física*, Ariel, Barcelona.
CADENAS GÓMEZ, Yolanda (2002): «El origen de *h* y su significado físico y epistemológico en las primeras leyes cuánticas», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.171-194.
CARNAP, Rudolf (1966): *Philosophical Foundations of Physics*, Basic Books, Nueva York.
CARTWRIGHT, Nancy (1983): *How the Laws of the Physics lie*, Clarendon Press, Oxford.
---- (2002): «Against the Completability of Science», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.57-72.
CARTWRIGHT, Nancy & SUÁREZ, Mauricio (2008): «Theories: Tools versus Models», *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 39/1, pp.62-81.
CASSIDY, David C. (1997): «Heisenberg, imprecisión y revolución cuántica», *Investigación y ciencia*, Temas 10, pp.6-13.
CHAKRAVARTTY, A. (1998): «Semirealism», *Studies in History and Philosophy of Science*, 29/3, pp.391-408.
CHALMERS, Alan F. (1998): *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?*, Siglo XXI, Madrid.
COLLINS, Matthew (2002): «Climate Predictability on Interannual to Decadal Time Scales: The Initial Value Problem», *Climate Dynamics*, 19, pp.671-692.
COUTINHO, S. C. (1997): «The Many Avatars of a Simple Algebra», *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, Núm. 7, pp.593-604.
CROPPER, William H. (1970): *The Quantum Physicists*, Oxford University Press, Nueva York.
CVITANOVIC, Pedrag (ed.) (1986): *Universality in chaos*, Adam Hilger, Bristol.

DA COSTA, Newton & FRENCH, Steven (2003): *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, Nueva York.

DAHAN DALMEDICO, Amy (2001): «History and epistemology of models: Meteorology as a case-study (1946-63)», *Archive for History of Exact Sciences*, 55, pp.395-422.

---- (2008): «Models and simulations in climate change. Historical, epistemological, anthropological and political aspects», en Creager A., Lunbeck E., & Wise N. (eds.), *Science without Laws: Model Systems, Cases, and Exemplary Narratives*, Duke University Press.

DAVYDOV, A. S. (1965): *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.

DE BLAS LÓPEZ, Óscar (2000): *Teoría dimensional cuántica no relativista*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, ETS Arquitectura.

DE LORENZO, Javier (2000): *Filosofías de la Matemática: fin de siglo XX*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

DEVANEY, Robert (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood City.

DEVITT, Michael (1984): *Realism and Truth*, Blackwell, Oxford.

DÍAZ, Jesús Ildefonso (1996): «On the Mathematical treatment of Energy Balance Climate Models», en *The Mathematics of Models in Climatology and Environment*, ASI NATO Global Change Series, Springer-Verlag, Heidelberg, pp.14-78.

---- (2001): «Modelos matemáticos en Climatología: la conjetura de von Neumann», en *Les Matematiques y les seus aplicacions*, Editorial de la UPV, Valencia, pp.67-98.

---- (2002): «Modelización, análisis y control de sistemas climáticos», en *Models matemàtics en la ciència i la societat*, Fundación Caixa de Sabadell, Sabadell, pp.35-62.

DICKSON, Michael (1998): *Quantum Chance and Non-Locality: Probability and Non-Locality in the Interpretations of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

DIÉGUEZ, Antonio (1994): «La disputa sobre el realismo en la historia de la astronomía», *Philosophica Malacitana*, VII, pp.33-49.

---- (1998): *Realismo científico. Una introducción al debate actual en la filosofía de la ciencia*, Universidad de Málaga, Málaga.

---- (2001): «Las explicaciones del éxito de la ciencia. Un análisis comparativo», *Thémata*, Núm. 27, pp.15-29.

---- (2005): *Filosofía de la ciencia*, Biblioteca Nueva, Madrid.

---- (2006): «Why Does Laudan's Confutation of Convergent Realism Fail?», *Journal for General Philosophy of Science*, 37, pp.393-403.

DIEUDONNÉ, Jean (1981): *History of Functional Análisis*, North-Holland, Amsterdam.

DÍEZ CALZADA, José Antonio (1998): «Hacia una teoría general de la representación científica», *Theoria*, 2ª Época, Vol. XIII, Núm. 31, pp.113-139.

DÍEZ, José Antonio & MOULINES, Ulises (1997): *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*, Ariel, Barcelona.

DIRAC, Paul Adrien Maurice (1925): «The Fundamental Equations of Quantum Mechanics», *Proc. Roy. Soc.*, 109, pp.642-653, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 307-320).

---- (1925b): «Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom», *Proc. Roy. Soc.*, 110, pp.570-579, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 417-427).

---- (1926): «On the Theory of Quantum Mechanics», *Proc. R. Soc. London*, A112, pp.661-677.

---- (1927): «The physical interpretation of the quantum dynamics», *Proc. R. Soc. London*, A113, pp.621-641.

---- (1930): *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford.

---- (1947): *The Principles of Quantum Mechanics*, 3ª edición, Clarendon Press, Oxford.

DITTO, William & PECORA, Louis (1993): «Mastering Chaos», *Scientific American*, 269, pp.62-68.

DONCEL, Manuel G. (2002): «La revolución cuántica: nueva visión en física y en filosofía», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.17-42.

DORAN, P. T. & alea (2002): «Antartic Climate Cooling and Terrestrial Ecosystem Response», *Nature*, 415, pp.517-520.

DRAGO, Antonio & VENEZIA, Antonio (2002): «A proposal for a new approach to Quantum Logic», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.249-266.

DUHEM, Pierre (1906): *La théorie physique*, Marcel Rivière, París.

---- (2003): *La teoría física. Su objeto y estructura*, Herder, Barcelona.

EAGLE, Anthony (2005): «Ramdomness is Unpredictibility», *British Journal for the Philosophy of Science*, 56, pp.749-790.

EARMAN, John (1986): *A Primer on Determinism*, Reidel Publishing, Dordrecht.

ECKART, Carl (1926): «Operator Calculus and the Solution of the Equation of Quantum Dynamics», *Physical Review*, 28, pp.711-726.

ECHEVERRÍA, Javier (1998): «Similaridades, isomorfismos y homeomorfismos entre representaciones científicas», *Theoria*, 2ª Época, Vol. XIII, Núm. 31, pp.89-112.

---- (1999): *Introducción a la metodología de la ciencia. La filosofía de la ciencia en el siglo XX*, Cátedra, Madrid.

EINSTEIN, Albert (1917): «Zur Quantentheorie der Strahlung», *Physik. Z.*, 18, pp.121-128, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 63-77).

---- (1981): *Mis Ideas y Opiniones*, A. Boch, Barcelona.

EINSTEIN, Albert & BORN, Max (1973): *Correspondencia 1916-1955*, Editorial Siglo XXI, México.

EINSTEIN, Albert & PODOLSKY, Boris & ROSEN, Nathan (1935): «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?», *Physical Review*, 47, pp.777-780.

ESCOHOTADO, Antonio (2000): *Caos y Orden*, Espasa Calpe, Madrid.

ESPINOZA, Miguel (2007): «La reducción de lo posible. René Thom y el determinismo causal», *Theoria*, 2ª Época, Vol. 22, Núm. 59, pp.233-251.

ESTANY, Anna (1993): *Introducción a la filosofía de la ciencia*, Crítica, Barcelona.

FAYE, Jan (2002): «Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2002/entries/qm-copenhagen/>.

FEIGENBAUM, Mitchell (1978): «Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations», *Journal of Statatistical Physics*, 19, pp.25-52.

---- (1979): «The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations», *Journal of StatatisticalPhysics*, 21, pp.669-706.

FERNÁNDEZ-RAÑADA, Antonio (2004): *Ciencia, incertidumbre y conciencia. Heisenberg*, Editorial Nivola, Madrid.

FERNÁNDEZ-RAÑADA, Manuel (2003): «David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis», *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6, Núm. 3, pp.641-664.

FERREIRÓS, José & ORDÓÑEZ, Javier (2002): «Hacia una filosofía de la experimentación», *Crítica*, 102, pp.47-86.

FERRERO, Miguel (1982): «El problema de la realidad en la Mecánica Cuántica», en *Actas del Primer Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, Pentalfa, Oviedo, pp.237-252.

FERRERO, Miguel & SANTOS, Emilio (1996): «Realismo local y mecánica cuántica», en *Fundamentos de Física Cuántica*, Editorial Complutense, Madrid, pp.9-42.

---- (1996b): «Contraste de las desigualdades de Bell con fotones de cascadas atómicas», en *Fundamentos de Física Cuántica*, Editorial Complutense, Madrid, pp.43-61.

FERRERO, Miguel & SALGADO, David & SÁNCHEZ-GÓMEZ, José L. (2007): «Física cuántica y orden racional», *Revista Iberoamericana de Física*, 3/1, pp.11-16.

FEYNMAN, Richard (1948): «Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics», *Rev. Mod. Phys.*, 20, pp.367-387.

FIELD, Hartry (1973): «Theory Change and The Indeterminacy of Reference», *The Journal of Philosophy*, 70, pp.462-481.

---- (1982): «Realism and Relativism», *The Journal of Philosophy*, 79, pp.553-567.

FINE, Arthur (1996): *The Shaky Game. Einstein Realism and the Quantum Theory*, Chicago University Press, Chicago.

FORD, Joseph (1983): «How Random is a Coin Toss?», *Physics Today*, 36, pp.40-47.

---- (1986): «Solving the unsolvable, predicting the unpredictable!», en Barnsley & Denko (1986, 1-52).

FRANKLIN, Allan (2002): «Física y experimentación», *Theoría*, 2ª Época, Vol. XVII, Núm. 44, pp.221-242.

---- (2003): «Experiment in Physics», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/physics-experiment/>.

FREEMAN DYSON (1999): «The Science and Politics of Climate», *APS News*, 8/15, p.12.

FRENCH, Steven (2000): «The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics», *Synthese*, 125, pp.103-20.

---- (2004): «A Model-Theoretic Account of Representation (Or, I Don't Know Much about Art… But I Know It Involves Isomorphism)», *Philosophy of Science*, 70, pp.1472-1483.

FRENCH, Steven & LADYMAN, James (2003): «Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure», *Synthese*, 136, pp.31-56.

FRENCH, Steven & SAATSI, Juha (2006): «Realism about Structure: The Semantic View and Nonlinguistic Representations», *Philosophy of Science*, 73, pp.548-559.

FRIEDMAN, Michael (1991): *Fundamentos de las teorías del espacio-tiempo*, Alianza, Madrid.

FRIGG, Roman (2002): «Models and Representation: Why Structures are not Enough», *CPNSS Discussion paper series DP MEAS 25/02*.

---- (2006): «Scientific Representation and the Semantic View of Theories», *Theoria*, 2ª Época, Vol. XXI, Núm. 55, pp.49-65.

GADELLA, M. & GÓMEZ, F. (2002): «A Unified Mathematical Formalism for the Dirac Formulation of Quantum Mechanics», *Foundations of Physics*, 32/6, pp.815-845.
GALISON, Peter (1987): *How the experiments end*, Chicago University Press, Chicago.
GAMBOA, José Manuel (2003): *Desarrollo del temario de las Oposiciones de Matemáticas*, Sanz y Torres, Madrid.
GARZÓN, León (1982): «Evolución histórica de la metodología en la física nuclear», en *Actas del Primer Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, Pentalfa, Oviedo, pp.177-204.
GHIRARDI, Giancarlo & RIMINI, Alberto & WEBER, Tullio (1986): «Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems», *Phys. Rev.*, 34, pp.470-486.
GIERE, Ronald (1988): *Explaining Science. A cognitive Approach*, University of Chicago Press, Chicago.
---- (2002): «How Models are Used to Represent Reality», *Philosophy of Science Assoc. 18th Biennial Mtg. – PSA 2002 Symposia*.
---- (2004): «How Models are Used to Represent Reality», *Philosophy of Science*, 71, pp.742-752.
GLEICK, James (1988): *Caos. La creación de una ciencia*, Seix Barral, Barcelona.
GUERRERO PINO, Germán (2000): «Determinismo, modelos y modalidades», *Revista de Filosofía*, Vol. XIII, Núm. 24, pp.191-216.
GUTZWILLER, Martin (1990): *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, Nueva York.
GUZMÁN, Miguel de (1998): «Matemáticas y estructura de la naturaleza», en *Ciencia y Sociedad. Desafíos del Conocimiento ante el Tercer Milenio*, Editorial Nobel, Oviedo, pp.329-357.
HABALA, Petr & HÁJEK, Petr & ZIZLER, Václav (1996): *Introduction to Banach Spaces*, Matfizpress, Praga.
HACKING, Ian (1983): *Representing and Intervening*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (1983b): «Experimentation and Scientific Realism», *Philosophical Topics*, 13/1, pp.71-87.
---- (1984): «Five Parables», en *Philosophy in History*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.117-126.
---- (1989): «Extragalactic Reality: The Case of Gravitational Lensing», *Philosophy of Science*, 56, pp.555-581.
---- (1991): *La domesticación del azar*, Gedisa, Barcelona.
---- (1992): «The Self-Vindication of the Laboratory Sciences», en A. Pickering (ed.), *Science as Practice and Culture*, University of Chicago Press, Chicago, pp.29-64.
---- (1996): *Representar e Intervenir*, Paidós, Barcelona.
HADAMARD, Jacques (1898): «Les Surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques», *J. Math. Pures et Appliquées*, 4, pp.27-73.
---- (1912): «Henri Poincaré et le problème des trois corps», *Revue de mois*, 16, pp.385-418.
HARO CASES, Jaume (1996): *El límite clásico de la mecánica cuántica*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Facultad de Ciencias.
HARRÉ, Rom (1986): *Varieties of Realism*, Blackwell, Oxford.
---- (1996): «From Observability to Manipulatibility: Extending the Inductive Arguments for Scientific Realism», *Synthese*, 108, pp.137-155.

HAYEK, Friedrich A. (1964): «The Theory of Complex Phenomena», en *The Critical Approach to Science and Philosophy*, The Free Press of Glencoe, Nueva York, pp.330-340.

HEISENBERG, Werner (1925): «Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen», *Z. Physik*, 33, pp.879-893, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 261-276).

---- (1927): «Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematic und Mechanik», *Z. Phys.*, 43, pp.172-198 (reimpreso en inglés en Wheeler & Zurek 1983, pp.62-84).

---- (1962): *Los nuevos fundamentos de la Ciencia*, Editorial Norte y Sur, Madrid.

---- (1972): *Diálogos sobre Física Atómica*, B.A.C., Madrid.

---- (1977): «Remarks on the Origin of the Relations of Uncertainty», en W. C. Price & S. S. Chissiek (ed.), *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, Londres, pp.3-6.

HELLMAN, Geoffrey (1983): «Realist Principles», *Philosophy of Science*, 50, pp.227-249.

HESSE, Mary (1966): *Models and Analogies in Science*, University of Notre Dame Press, Notre Dame.

HILBERT, David (1926/27): *Notas del curso «Mathematische Grundlagen der Quantentheorie»*, Vorlesung WS 1926/27, ausgearbeitet von Lothar Nordheim und Gustav Heckmenn (Mathematisches Institut Göttingen; AHQP Mf. 17 Sec. 2).

HILBERT, David & NORDHEIM, Lothar & VON NEUMANN, John (1927): «Über die Grundlagen der Quantenmechanik», *Mathematische Annalen*, Núm. 98, pp.1-30.

HOEFER, Carl (2004): «Causality and Determinism: Tension, or Outright Conflict?», *Revista de Filosofía*, Vol. 29, Núm. 2, pp.99-115.

---- (2005): «Causal Determinism», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2005/entries/determinism-causal/>.

HOWARD, D. (1985): «Einstein on Locality and Separability», *Studies on History and Philosophy of Sciences*, 16, pp.171-201.

HÜBNER, Kurt (1973): «The Philosophical Background of Hidden Variables in Quantum Mechanics», *Man and World*, 6/4, pp.421-440.

---- (1981): *Crítica de la razón científica*, Editorial Alfa, Barcelona.

HUERGA MELCÓN, Pablo (1999): *La ciencia en la encrucijada*, Biblioteca Filosofía en Español, Oviedo.

HUNT, G. (1987): «Determinism, predictability and chaos», *Analysis*, 47, pp.129-133.

HUTCHINSON, Keith (1993): «Is Classical Mechanics Really Time-Reversible and Deterministic?», *British Journal for the Philosophy of Science*, 44, pp.307-323.

IBARRA, Andoni & MORMANN, Thomas (1997): *Representaciones en la ciencia*, Ediciones del Bronce, Barcelona.

---- (2000): «Una teoría combinatoria de las representaciones científicas», *Crítica*, Vol. XXXII, Núm. 95, pp.3-44.

---- (2000b): *Variedades de la Representación en la Ciencia y en la Filosofía*, Ariel, Barcelona.

IRANZO, Valeriano (2000): «Manipulabilidad y entidades inobservables», *Theoría*, 2ª Época, Vol. 15, Núm. 30, pp.131-153.

JAMMER, Max (1974): *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Nueva York.

---- (1989): *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, Tomash Publishers, American Institute of Physics.

JUSTUS, James (2005): «Qualitative Scientific Modeling and Loop Analysis», *Philosophy of Science*, 72, pp.1272-1286.
KELLERT, Stephen (1992): «A Philosophical Evaluation of the Chaos Theory "Revolution"», *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Volumen II, pp.33-49.
---- (1993): *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*, University of Chicago Press, Chicago.
KLINE, Morris (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 3 volúmenes, Alianza, Madrid.
KNUUTTILA, Tarja (2005): «Models, Representation, and Mediation», *Philosophy of Science*, 72, pp.1260-1271.
KOTOV, Sergey R. (2001): «Near-term climate prediction using ice-core data from Greenland», *Geological Perspectives of Global Climate Change*, 47, pp.305-315.
---- (2003): «Dynamics of Global Climatic Changes and Possibility of Their Prediction Using Chemical Data from Greenland Ice», *Mathematical Geology*, 35/4, pp.477-491.
KRONZ, Frederick M. (1999): «Bohm's ontological interpretation and its relations to three formulations of Quantum Mechanics», *Synthese*, 117, pp.31-52.
---- (2004): «Quantum Theory: von Neumann vs. Dirac», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2004/entries/qt-nvd/>.
KUHN, Thomas S. (1971): *La estructura de las revoluciones científicas*, FCE, México.
LACOMBA, Ernesto A. (2005): «Mecánica Celeste y Sistemas Dinámicos», *Gaceta de la Real sociedad Matemática Española*, 8/2, pp.323-334.
LADYMAN, James (1998): «What Is Structural Realism?», *Studies in the History and Philosophy of Science*, 13, pp.99-117.
---- (2007): «Structural Realism», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/structural_realism/>.
LAHERA, Jesús (2004): *De la teoría atómica a la física cuántica. Bohr*, Editorial Nivola, Madrid.
LANCZOS, Cornelius (1926): «On a field theoretical representation of the new quantum mechanics», *Z. Physik*, 35, pp.812-822.
LAPLACE, Pierre Simon (1998): *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, Alianza, Madrid.
LAUDAN, Larry (1981): «A Confutation of Convergent Realism», *Philosophy of Science*, 48, pp.19-48.
---- (1984): «Explaining the Sucess of Science: Beyond Epistemic Realism and Relativism», en Cushing, Delaney & Gutting (eds.), *Science and Reality*, University of Notre Dame Press, Indiana.
---- (1993): *La ciencia y el relativismo*, Alianza, Madrid.
LEPLIN, Jarrett (ed.) (1984): *Scientific Realism*, University of California, Berkeley.
LI, Tien Yien & YORKE, James (1975): «Period Three Implies Chaos», *American Mathematical Monthly*, 82, pp.985-992.
LOMBARDI, Olimpia (2002): «Determinism, Internalism and Objectivity», en Bishop & Atmanspacher (2002, 75-88).
---- (2002b): «¿Es la Mecánica Clásica una teoría determinista?», *Theoria*, 2ª Época, Vol. 17, Núm. 43, pp.5-34.
LÓPEZ CORREDOIRA, Martín (2001): «Determinismo en la física clásica: Laplace vs. Popper o Prigogine», *El Basilisco*, Núm. 29, pp.29-42.
LORENZ, Edward (1963): «Deterministic Nonperiodic Flow», *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp.130-141.

---- (1975): *Climate predictability. The physical basis of climate modelling*, WMO - GARP Publication.
---- (1995): *La Esencia del Caos*, Debate, Madrid.
LUDWIG, Günther (1986): «Microsystems, Macrosystems and Determinism», en Wagensberg (1986, 40-60).
MADRID CASADO, Carlos Miguel (2004): «A vueltas con Kant y las Matemáticas», *El Basilisco*, 34, pp.73-80.
---- (2004): «Kant y el helecho de Barnsley», en *Actas del IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, SLMFCE, Valladolid, pp.350-352.
---- (2004): «El análisis husserliano de la matematización de la naturaleza a comienzos del siglo XXI», *Nexo. Revista de Filosofía de la Universidad Complutense*, 2, pp.79-101.
---- (2004): «Reseña a *Revoluciones en Física* de Andrés Rivadulla», *LLULL*, Vol. 27, Núm. 58, 2004, pp.237-239.
---- (2004): «Reseña a *Éxito, razón y cambio en física* de Andrés Rivadulla», *LLULL*, Vol. 27, Núm. 59, pp.513-516.
---- (2005): «A vueltas con Ortega, la Física y Einstein», *Revista de Occidente*, 294, pp.5-20.
---- (2006): «Teoría del cierre categorial aplicado a la Mecánica Cuántica», *El Catoblepas*, 48, p.17.
---- (2006): «El Nuevo Experimentalismo en España: entre Gustavo Bueno e Ian Hacking», *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, Volumen XI, pp.153-169.
---- (2006): «Ochenta años de la equivalencia entre Mecánicas Cuánticas», *Revista Española de Física*, Vol. 20, Núm. 3, p.57.
---- (2006): «La ciencia como representación y la equivalencia entre mecánicas cuánticas», en *Actas del V Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, SLMFCE, Granada, pp.373-376.
---- (2007): «De la equivalencia matemática entre la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria», *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 10, Núm. 1, pp.103-128.
---- (2007): «Las Matemáticas del Cambio Climático», *Encuentros Multidisciplinares. Revista de Investigación y Divulgación de la Universidad Autónoma*, Vol. IX, Núm. 26, pp.2-14.
---- (2008): «A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics», *Latin American Journal of Physics Education*, 2/2, pp.104-108.
---- (2008): «Edward Lorenz (1917-2008): ¿Padre de la Teoría del Caos?», *Revista Española de Física*, Vol. 22, Núm. 3, pp.38-40.
---- (2009): «Do mathematical models represent the World? The case of quantum mathematical models», en José L. González Recio (ed.), *Nature & Life. Philosophical Essays on Physics and Biology*, Georg Olms Verlag, en prensa.
MACKEY, George W. (1963): *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, Nueva York.
MANDELBROT, Benoit (1997): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.
MAY, Robert (1976): «Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics», *Nature*, 261, pp.459-467.
MEHRA, Jagdish & RECHENBERG, Helmut (1982): *The Historical Development of Quantum Theory*, Volumen *Dirac*, Springer Verlag, Nueva York.

MELSHEIMER, O. (1972): «Rigged Hilbert Space Formalism as an Extended Mathematical Formalism for Quantum Systems», *Journal of Mathematical Physics*, 15, pp.902-926.
MOREL, Pierre (1974): *Física cuántica y térmica*, Editorial Omega, Madrid.
MORGAN, Mary & MORRISON, Margaret (1999): «Models as Mediating Instruments», en *Models as mediators: Perspectives on the natural and social sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.10-37.
MOSTERÍN, Jesús (2000): *Los lógicos*, Espasa-Calpe, Madrid.
MOULINES, Ulises (1992): *Pluralidad y recursión*, Alianza, Madrid.
MULLER, F. A. (1997): «The Equivalence Myth of Quantum Mechanics – Part I», *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, Vol. 28, Núm. 1, pp.35-61.
---- (1997b): «The Equivalence Myth of Quantum Mechanics – Part II», *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, Vol. 28, Núm. 2, pp.219-247.
MUNDY, Brent (1986): «On the General Theory of Meaningful Representation», *Synthese*, 67, pp.391-437.
NAGEL, Ernst (1961): *The Structure of Science*, Harcourt, Nueva York.
NEWMAN, Mark (2005): «Ramsey Sentence Realism as an Answer to the Pessimistic Meta-Induction», *Philosophy of Science*, 72, pp.1373-1384.
NIINILUOTO, Ilkka (1987): *Truthlikeness*, Reidel, Dordrecht.
---- (1999): *Critical Scientific Realism*, Oxford University Press, Oxford.
ORTEGA Y GASSET, José (1979): *La idea de principio en Leibniz y la evolución de la teoría deductiva*, Revista de Occidente en Alianza Editorial, Madrid.
---- (1982): *Meditación de la técnica y otros ensayos sobre ciencia y filosofía*, Revista de Occidente en Alianza Editorial, Madrid.
ORZACK, Steven & SOBER, Elliot (1993): «A Critical Assessment of Levin's *The Strategy of Model Building in Population Biology* (1966)», *Quarterly Review of Biology*, 68, pp.533-546.
PALMER, T. N. (ed.) (1996): *Predictability of Weather and Climate*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (2005): «Global warming in a nonlinear climate - Can we be sure?», *Europhysics News*, Marzo-Abril 2005, pp.42-46.
PALMER, T. N. & alea (1995): «Singular Vectors and the Predictability of Weather and Climate», en Tong (1995, 249-268).
PATY, Michel (2002): «La physique quantique ou l'entreînament de la pensée physique par les formes mathématiques», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.97-134.
PAULI, Wolfrang (1926): «Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik», *Z. Physik*, 36, pp.336-363, reimpreso en van der Waerden (ed.) (1968, 387-415).
PEARCE WILLIAMS, L. (ed.) (1977): *La teoría de la relatividad*, Alianza Editorial, Madrid.
PENROSE, Roger (2006): *La nueva mente del Emperador*, DeBols!llo, Barcelona.
PETERSEN, Ivars (1995): *El reloj de Newton. Caos en el sistema solar*, Alianza, Madrid.
PICC (2001): *Climate Change 2001: The Scientific Basis*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (2007): *Climate change 2007: Summary for Policymakers* (www.ipcc.ch/SPM2feb07.pdf).

PICKERING, Andrew (1995): *The mangle of practice: Time, agency and science*, University of Chicago Press, Chicago.
PINCOCK, Christopher (2005): «Overextending Partial Structures: Idealization and Abstraction», *Philosophy of Science*, 72, pp.1248-1259.
POINCARÉ, Henri (1881): «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle», *J. de Math.*, 7, pp.375-442.
---- (1890): «Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique», *Acta Mathematica*, 13, pp.1-270.
---- (1892-99): *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 volúmenes, Gauthier-Villars, París.
---- (1908): *Science et Méthode*, Flammarion, París.
---- (1963): *Ciencia y Método*, Austral, Madrid.
---- (2002): *Ciencia e Hipótesis*, Espasa-Calpe, Madrid.
PONTE, Lowell (1972): *The Cooling*, Prentice-Hall, Nueva Jersey.
POPPER, Karl R. (1962): *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid.
---- (1982): *The Open Universe. An Argument for Indeterminism*, Hutchinson, Londres.
---- (1983): *Conjeturas y Refutaciones*, Paidós, Barcelona.
---- (2002): *Búsqueda sin término. Una autobiografía intelectual*, Alianza, Madrid.
PORTIDES, Demetris P. (2005): «Scientific Models and the Semantic View of Scientific Theories», *Philosophy of Science*, 72, pp.1287-1298.
POWELL, John L. & CRASEMANN, Bernd (1961): *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Massachusetts.
PRIDA, José F. (2004): *Teorías inseparables*, Editorial Trotta, Madrid.
PRIGOGINE, Ilya (1991): *El nacimiento del tiempo*, Tusquets, Barcelona.
---- (1997): *El fin de las certidumbres*, Taurus, Madrid.
---- (1999): *Las leyes del caos*, Crítica, Barcelona.
PRIGOGINE, I. & PETROSKY, T. (1995): «Chaos, Time-symmetry Breaking and the Extension of Classical and Quantum Mechanics», en *Fundamentos de Física Cuántica*, Editorial Complutense, Madrid, pp.207-240.
PRIMAS, Hans (2002): «Hidden Determinism, Probability and Time´s Arrow», en Bishop & Atmanspacher (2002, 89-102).
PSILLOS, Stathis (1999): *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, Routledge, London.
---- (2000): «The present state of the scientific realism debate», *British Journal for the Philosophy of Science*, 51, pp.705-728.
---- (2001): «Is Structural Realism Possible?», *Philosophy of Science*, 68, pp.S13-S24.
---- (2006): «*The* Structure, the *Whole* Structure, and Nothing *but* the Structure», *Philosophy of Science*, 73, pp.560-570.
PUTNAM, Hilary (1979): *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (1981): *Reason, Truth and History*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (1982): «Three kinds of scientific realism», *The Philosophical Quarterly*, Vol. 32, Núm. 128, pp.195-200.
---- (1987): *The Many Faces of Realism*, Open Court, La Salle.
---- (1992): *Renewing Philosophy*, Harvard University Press, Cambridge.
QUINE, Willard Van Orman (1975): «Empirically equivalent systems of the world», *Erkenntnis*, 9, pp.313-328.
RAÑADA, Antonio F. (1982): «Determinismo y caos en las leyes físicas», en *Actas del Primer Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, Pentalfa, Oviedo, pp.587-614.

---- (1990): *Dinámica clásica*, Alianza Editorial, Madrid.
---- (1995): «Comportamiento cuántico de sistemas no integrables», en *Fundamentos de Física Cuántica*, Editorial Complutense, Madrid, pp.135-158.
---- (1998): «La Ciencia del Caos», en *Ciencia y Sociedad. Desafíos del Conocimiento ante el Tercer Milenio*, Editorial Nobel, Oviedo, pp.361-381.
RASOOL, S. I. & SCHNEIDER, S. H. (1971): «Atmospheric Carbon Dioxide and Aerosols: Effects of Large Increases on Global Climate», *Science* (11 de julio de 1971), pp.138-141.
RICHARDS, Huw (1998): «Spain's top philosopher», *The Times*, Londres 13 de Noviembre de 1998.
RYCKMAN, Thomas (2005): *The Reign of Relativity: Philosophy in Physics 1915–1925*, Oxford University Press, Oxford.
RIOJA, Ana (1989): «Einstein: el ideal de una ciencia sin sujeto», *Revista de Filosofía*, 3ª época, vol. II, pp.87-108.
---- (1992): «La filosofía de la complementariedad y la descripción objetiva de la naturaleza», *Revista de Filosofía*, 3ª época, vol.V, pp.257-282.
---- (1995): «Los Orígenes del Principio de Indeterminación», *Theoria*, 2ª Época, Vol. X, Núm. 22, pp.117-143.
---- (2002): «Sobre ondas y corpúsculos: Un punto de vista lingüístico», en Carmen Mataix & Andrés Rivadulla (ed.), *Física Cuántica y Realidad. Quantum Physics and Reality*, Universidad Complutense, Madrid, pp.135-153.
---- (2004): «Filosofía y universo cuántico», en Juan M. Navarro Cordón (coord.), *Perspectivas del pensamiento contemporáneo*, Volumen II, Síntesis, Madrid, pp.245-299.
RIVADULLA, Andrés (1986): *Filosofía actual de la ciencia*, Tecnos, Madrid.
---- (2003): *Revoluciones en Física*, Editorial Trotta, Madrid.
---- (2004): *Éxito, razón y cambio en física. Un enfoque instrumental en teoría de la ciencia*, Editorial Trotta, Madrid.
---- (2004b): «La filosofía de la ciencia hoy. Problemas y posiciones», en Juan M. Navarro Cordón (coord.), *Perspectivas del pensamiento contemporáneo*, Volumen II, Síntesis, Madrid, pp.109-163.
---- (2004c): «The Newtonian Limit of Relativity Theory and the Rationality of Theory of Change», *Synthese*, 141, pp.417-429.
---- (2006): «Theoretical Models and Theories in Physics: A Rejoinder to Karl Popper's Picture of Science», en Jarvie, Milford & Miller (eds.), *Karl Popper: A Centenary Assessment*, Volumen III, Aldershot, Ashgate, pp.85-96.
ROBERTS, J. (1966): «Rigged Hilbert Space in Quantum Mechanics», *Communications in Mathematical Physics*, 3, pp.98-119.
RORTY, Richard (1991): *Objectivity, Relativism, and Truth. Philosophical Papers I*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (1998): *Truth and Progress. Philosophical Papers III*, Cambridge University Press, Cambridge.
RUELLE, David (1995): *Azar y Caos*, Alianza, Madrid.
RUELLE, David & TAKENS, Floris (1971): «On the Nature of Turbulence», *Commun. Math. Phys.*, 20, pp.167-192.
SÁNCHEZ MECA, Diego (2005): «Nuevos rumbos en teoría de la ciencia», *ABC. Blanco y Negro Cultural / 19-3-2005*, p.18.
SÁNCHEZ RON, José Manuel (2001): *Historia de la física cuántica I. El periodo fundacional (1860-1926)*, Crítica, Barcelona.
---- (2007): *El poder de la ciencia*, Crítica, Barcelona.

SANJUÁN, Miguel A. F. (2003): «Caos y Fractales: Conceptos Universales de la Ciencia de la Complejidad. Japan Prize 2003», *Gaceta de la Real sociedad Matemática Española*, 6/1, pp.81-87.

SANJUÁN, Miguel A. F. & CASADO VÁZQUEZ, José Manuel (2005): «Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro», *RUISF*, Enero 2005, pp.23-31.

SCHLICK, Moritz (2002): *Filosofía de la Naturaleza*, Ediciones Encuentro, Madrid.

SCHMIDT, Gavin (2007): «The Physics of Climate Modeling», *Physics Today* (Enero 2007), p.72.

SCHRÖDINGER, Erwin (1926): «Quantisierung als Eigenwertproblem», *Annalen der Physik*, 79, pp.361-376, reimpreso en Schrödinger (1982, 1-12).

---- (1926b): «Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen», *Annalen der Physik*, 79, pp.734-756, reimpreso en Schrödinger (1982, 45-61).

---- (1928): «First Lecture on Wave Mechanics. Delivered at the Royal Institution, London, on 5th March 1928», recogida en Schrödinger (1982, 155-167).

---- (1982): *Collected Papers on Wave Mechanics*, Chelsea Publishing Company, Nueva York.

SELLERI, Franco (1986): *El debate de la teoría cuántica*, Alianza, Madrid.

SHAPERE, Dudley (1993): «Astronomy and Antirealism», *Philosophy of Science*, 60, pp.134-150.

SHOHAT, J. A. & TAMARKIN, J. D. (1943): *The problem of moments*, American Mathematical Society, Nueva York.

SLATER, J. C. (1955): *Modern Physics*, McGraw-Hill, Nueva York.

SMALE, Stephen (1967): «Differentiable dynamical systems», *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, pp.747-817.

---- (1998): «Mathematical problems for the next century», *Math. Intelligencer*, 20/2, pp.7-15.

SMITH, Peter (2001): *El Caos. Una explicación a la teoría*, Cambridge University Press, Madrid.

SOBER, Elliot (1990): «Contrastive empirism», en C. Wade Savage (ed.), *Scientific theories*, Minnesota Studies in Philosophy of sciences, Minnesota, pp.392-410.

---- (1993): «Mathematics and indispensability», *Philosophical Review*, Vol. 102, Núm. 1, pp.35-57.

STEWART, Ian (2007): *¿Juega Dios a los dados?*, Crítica Drakontos, Barcelona.

STONE, Marshall H. (1930): «Linear transformations in Hilbert space. Operational methods and group theory», *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 16, pp.172-175.

STYLER, Daniel F. & *alea* (2002): «Nine formulations of quantum mechanics», *American Journal of Physics*, 70/3, pp.288-297.

SUÁREZ, Mauricio (2003): «Hacking Kuhn», *Revista de Filosofía*, Vol. 28, Núm. 2, pp.261-284.

---- (2003b): «Scientific Representation: Against Similarity and Isomorphism», *International Studies in the Philosophy of Science*, 17, 3, pp.225-244.

---- (2004): «An Inferential Conception of Scientific Representation», *Philosophy of Science*, 71, pp.767-779.

---- (2005): «The semantic view, empirical adequacy, and application», *Crítica*, 37/109, pp.29-63.

---- (2006): «Experimental Realism Defended: How Inference to the Most Probable Cause Might Be Sound», en L. Bovers y S. Hartmann (eds.), *Nancy Cartwright's Philosophy of Science*, Routledge, Londres.

SUPPES, Patrick (1957): *Introduction to Logic*, Van Nostrand, Princeton.

---- (1993): «The Transcendental Character of Determinism», *Midwest Studies in Philosophy*, 18, pp.242-257.
SUSSMAN, G. J. & WISDOM, J. (1988): «Numerical Evidence that the Motion of Pluto is Chaotic», *Science*, 241, p.433-437.
TELLER, Paul (2001): «Twilight of the Perfect Model Model», *Erkenntnis*, 55, pp.393-415.
THOM, René (1977): *Stabilité structurelle et morphogenèse*, Inter-Editions, París.
---- (1980): *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Christian Bourgois, París.
---- (1985): *Parábolas y Catástrofes*, Tusquets, Barcelona.
---- (1986): «Déterminisme et innovation», en Wagensberg (1986, 63-78).
---- (1990): «Halte au hasard, silence au bruit», en *La Querelle du déterminisme*, Gallimard, París.
---- (1990b): *Apologie du logos*, Hachette, París.
---- (1991): *Prédire n'est pas expliquer*, Eshel, París.
THOMSON-JONES, Martin (2006): «Models and the Semantic View», *Philosophy of Science*, 73, pp.524-535.
TONG, Howell (ed.) (1995): *Chaos and Forecasting*, World Scientific, Londres.
TOULMIN, Stephen (1964): *La filosofía de la ciencia*, Mirasol, Buenos Aires.
TUCKER, Warwick (2002): «A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem», *Found. Comput. Math.*, 2/1, pp.53-117.
VAN DER WAERDEN, B. L. (ed.) (1968): *Sources of Quantum Mechanics*, Dover, Nueva York.
---- (1997): «From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics», *Notices of the AMS*, 44, pp.323-328.
VAN FRAASSEN, Bas C. (1970): «On the extension of Beth's semantics of physical theories», *Philosophy of Science*, 1970, pp.325-339.
---- (1972): «A Formal Approach to the Philosophy of Science», en R. Colodny (ed.), *Paradigms and Paradoxes: the philosophical challenge of the quantum domain*, University of Pittsburg Press, Pittsburgh, pp.303-366.
---- (1980): *The Scientific Image*, Clarendon Press, Oxford.
---- (1989): *Laws and Symmetry*, Oxford University Press, New York.
---- (1991): *Quantum Mechanics. An Empiricist View*, Clarendon Press, Oxford.
---- (1996): *La imagen científica*, Paidós, Barcelona.
---- (2002): *The Empirical Stance*, Yale University Press, New Haven.
---- (2004): «Science as Representation: Flouting the Criteria», *Philosophy of Science Assoc. 18th Biennial Mtg. – PSA 2002 Symposia*.
---- (2006): «Representation: The Problem for Structuralism», *Philosophy of Science*, 73, pp.536-547.
VON NEUMANN, John (1927): «Mathematische Begründung der Quantenmechanik», *Nachrichten Göttingen*, pp.l-57.
---- (1927b): «Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik», *Nachrichten Göttingen*, pp.245-272.
---- (1929): «Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren», *Mathematische Annalen*, 102, pp.49-131.
---- (1931): «Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren», *Mathematische Annalen*, 104, pp.570-578.
---- (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlín.
---- (1949): *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid.

---- (1955): *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.
---- (1961): *Collected Works*, 2 volúmenes, Pergamon Press, Oxford.
VOTSIS, Ioannis (2005): «The Upward Path to Structural Realism», *Philosophy of Science*, 72, pp.1361-1372.
---- (2008): «Bibliography for Structural Realim», URL = <http://www.votsis.org/structural_realism.htm>.
WAGENSBERG, Jorge (ed.) (1986): *Proceso al Azar*, Tusquets, Barcelona.
WEIGEND, A. S. (1995): «Paradigm Change in Prediction», en Tong (1995, 145-160).
WERNDL, Charlotte (2008): «What Are the New Implications of Chaos for Unpredictability?», *British Journal of Philosophy of Science*, en prensa.
WEYL, Hermann (1928): *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig.
---- (1931): *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, Nueva York.
WHEELER, T. A. & ZUREK, M. Z. (eds.) (1983): *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, Princeton.
WHITNEY, Hassler (1932): «Regular families of curves I», *Proc. N. A. S.*, 18, pp.275-278.
---- (1932b): «Regular families of curves II», *Proc. N. A. S.*, 18, pp.340-342.
WORRALL, John (1989): «Structural Realism: The Best of Both Worlds?», *Dialectica*, 43, pp.99-124.
WIGNER, Eugene (1960): «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, Núm. 1, pp.1-10.
WISE, Norton (2006): «Making Visible», *Isis*, 97, pp.75-82.