

LAS NOCIONES DE ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS RECTILÍNEAS EN GEOMETRÍA EUCLIDIANA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

2022/2023



FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRADO EN MATEMÁTICAS Gonzalo Gil Martín

Tutor: José Fernando Ruiz Fernández

Madrid, 28 de junio de 2023

Autorización de difusión

Gonzalo Gil Martín

Junio 2023

El abajo firmante, matriculado en el Grado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Grado: *Las nociones de área y volumen de figuras rectilíneas en geometría euclidiana*, realizado durante el curso académico 2022-2023 bajo la dirección de José Fernando Ruiz Fernández en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional Docta Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

Resumen

En este trabajo se aborda la problemática de definir una teoría del área y del volumen de figuras rectilíneas en geometría euclidiana que no dependan de un axioma de continuidad como el de Dedekind (D).

En el caso del área de polígonos, se presentarán cuatro formas distintas de definir el concepto de área; a saber, las funciones de medida de área, la equidescomposición, la equicomplementariedad y la equivalencia por disección (siendo primera de ellas la única en la que se emplean «números»). Se demostrará su equivalencia en un plano euclidiano aunque, de hecho, se hará sin utilizar el axioma de Dedekind (D) ni otros axiomas de continuidad similares como el de intersección circunferencia-circunferencia (ICC).

En el caso del volumen de poliedros, se planteará el tercer problema de Hilbert y la solución dada por Dehn, constatando la imposibilidad de definir volumen sin usar el axioma de Dedekind (D).

Palabras clave

área, volumen, equidescomposición, equicomplementariedad, disección, tercer problema de Hilbert, invariante de Dehn

Abstract

This paper deals with the problem of defining a theory of area and volume for rectilinear figures in Euclidean geometry that do not depend on a continuity axiom such as Dedekind's (D).

In the case of the area of polygons, four different ways of defining the concept of area will be presented; namely, the area measurement functions, equidecomposition, equicomplementarity, and equivalence by dissection (being the first of these the only one in which "numbers" are used). Its equivalence in a Euclidean plane will be proved, although, in fact, it will be done without using Dedekind's axiom (D) or other similar continuity axioms such as the circumference-circumference intersection (ICC).

In the case of the volume of polyhedra, Hilbert's third problem and the solution given by Dehn will be considered, confirming the impossibility of defining volume without using Dedekind's axiom (D).

Keywords

area, volume, equidecomposition, equicomplementarity, dissection, Hilbert's third problem, Dehn's invariant

Índice general

Índice	I
Agradecimientos	III
Dedicatoria	V
1. Introducción	1
2. Generalidades sobre Polígonos	3
3. Funciones de medida de área	7
3.1. Existencia de funciones de medida de área	8
3.2. Formulación de algunas áreas de polígonos	12
4. Equidescomposición y equicomplementariedad	15
4.1. Equidescomposición	15
4.2. Equicomplementariedad	18
4.3. Relación con el área	23
5. Disección	25
5.1. Equivalencias por disección	27
5.2. Relación con el área	31
6. La teoría del volumen	33
6.1. El tercer problema de Hilbert	33
6.2. El invariante de Dehn	34
7. Conclusiones	39
Bibliografía	41
A. Los axiomas de la geometría plana de Hilbert	43

Agradecimientos

A Aura, que siempre me ha apoyado de manera no incondicional, animándome a seguir, empujándome y dándome los golpes de realidad que muchas veces necesito. Gracias por no perder la fe en mí, ni siquiera cuando yo mismo la he perdido.

A Rumbero, por dotar a mi vida de la fantasía y la ensoñación que tanto necesito, pero que por mi mismo sería incapaz de hacer hueco en mi vida.

A Jurjo.

A mis padres, Toñi y Carlos, por haberme educado en la curiosidad, la búsqueda de la verdad y el trabajo bien hecho.

A todos mis profesores, de los cuales he aprendido el conocimiento y las herramientas para comunicarlo. En particular a Paco, que desde niño me transmitió la pasión por las matemáticas y a los profesores de la facultad que he tenido el honor de disfrutar.

A Pepe Ruiz, que me descubrió la maravilla de los fundamentos de las matemáticas.

A Rugby Matemáticas y a la Asociación Proyecto Cometas Divulgativas, por darme tantos buenos momentos en la facultad y permitirme liderar dos proyectos cuyo trasfondo ha cambiado mi vida.

A Violeta, por ayudarme a entenderme y darme herramientas para afrontar los momentos difíciles.

Dedicatoria

A mis cuatro abuelos:

a mi abuelo Jaime,

a mi abuela Ceci,

a mi abuelo Luis,

y a mi abuela Piti.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo expondremos la problemática que se dio en el s.XX al intentar desarrollar una teoría del área y del volumen de figuras rectilíneas que dependiera exclusivamente de razonamientos puramente geométricos y que no dependieran de los axiomas de continuidad.

Así, veremos que en el caso del área de polígonos en el plano sí es posible hacer este desarrollo y contaremos con varias maneras diferentes de abordarlo. En toda esta parte consideraremos este estudio en el ámbito de un plano de Hilbert. Esto es, consideramos los axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6). Cuando hablemos en alguna ocasión de un plano euclidiano estaremos considerando además los axiomas ($P_{\leq 1}$), (ICC) y (A). Todos estos axiomas pueden encontrarse definidos en el apéndice A.

En el capítulo 2 haremos una breve introducción sobre las propiedades de los polígonos. Seguidamente, en los capítulos 3, 4, 5 hablaremos de las funciones de medida de área, la equidescomposición y la equicomplementariedad y los métodos de disección de polígonos. Además a lo largo de estos capítulos iremos demostrando las equivalencias entre estos conceptos e ilustraremos el hecho de que sean conceptualizaciones diferentes del área de un polígono demostrando con cada uno de ellos el Teorema de Pitágoras de diferente manera.

En cambio, en el capítulo 6 mostraremos la imposibilidad de producir resultados similares en el caso del volumen de poliedros en el espacio. Hablaremos del tercer problema de Hilbert y el contexto histórico en el que surgió tal planteamiento y de la solución propuesta por Max Dehn con la definición de un invariante entre poliedros.

Todas las ilustraciones que han sido utilizadas en este trabajo han sido producidas por el autor siguiendo la estética de la versión de los *Elementos* de Oliver Byrne en 1874.

En la realización de este trabajo se han consultado todas las fuentes que se recogen en la bibliografía, sin embargo han cobrado un mayor protagonismo los libros de R. Hartshorne [8], Euclides [6], D. Hilbert [10] y V. G. Boltianski [4] y los artículos de M. Aigner y G. M. Ziegler [1], E. N. Giovannini [7].

Capítulo 2

Generalidades sobre Polígonos

El principal objeto de nuestro estudio son los polígonos que, como tantos otros, dependiendo de qué autores se consulten, aparecen definidos de una u otra manera. Esto, a priori, podría ser un problema ya que algunas de estas definiciones no son equivalentes entre sí. En nuestro caso, definiremos polígono a partir de la única condición necesaria que vamos a utilizar en nuestro estudio.

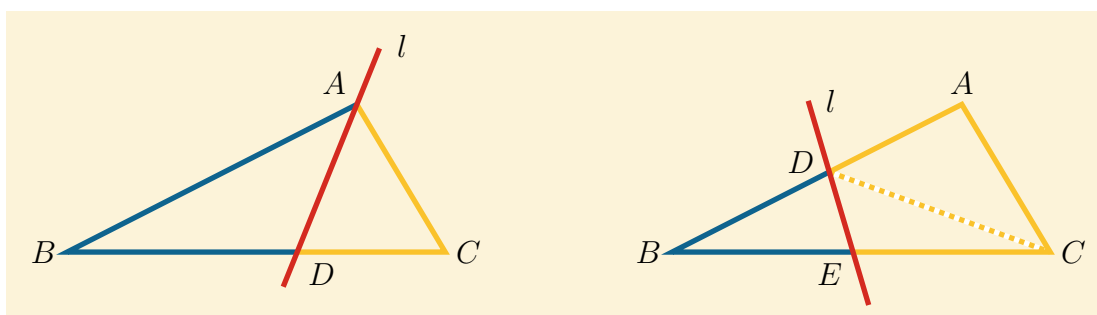
Definición 2.1. *Llamaremos polígono a toda figura rectilínea plana que pueda expresarse como la unión finita de triángulos que no se solapen entre sí.*

Un punto estará en el interior de un polígono si existe un triángulo contenido enteramente en él y tal que el punto está contenido en su interior.

Del mismo modo, los vértices y lados del polígono son aquellos vértices y lados de la unión finita de triángulos que no estén contenidos en el interior de la figura.

Cuando hablamos de unión no superpuesta (o sin solapamiento), nos referimos a que los elementos a unir no tienen puntos interiores en común. Es claro que por la definición que hemos dado, la unión no superpuesta de polígonos es otro polígono. Sin embargo que la unión (en general), la intersección y el complementario de polígonos resulte otro polígono no es un resultado tan directo.

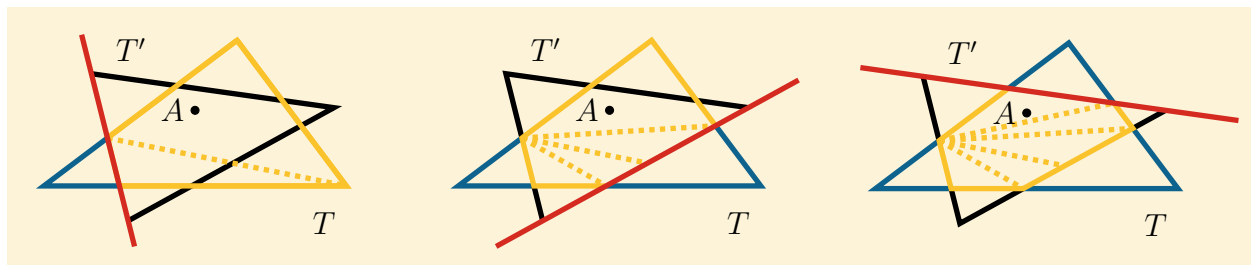
Lema 2.2. *Una línea recta que corta a un triángulo lo divide en dos polígonos.*



Demostración. Sea un triángulo $\triangle ABC$ y una línea recta l que corte al triángulo. Una posibilidad es que la recta l pase por uno de los vértices del triángulo. Podemos suponer que lo hace por A y que corta al lado opuesto BC en el punto D . En este caso, la recta l divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$.

La otra opción es que l no pase por ningún vértice del triángulo y que corte a dos de sus lados. Podemos suponer que corta al lado AB en el punto D y al lado BC en el punto E . En este caso a un lado de l queda el triángulo $\triangle BDE$ y al otro lado queda el cuadrilátero $ACDE$ que puede expresarse como la unión de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CDE$. \square

Lema 2.3. *La intersección de dos triángulos que comparten puntos interiores es un polígono.*



Demostración. Basta con aplicar el lema (2.2) repetidas veces. Sean dos triángulos T y T' con al menos un punto interior en A . Tomamos T y lo cortamos por la recta que define uno de los lados de T' . De los dos polígonos en los que queda dividido el primero, nos quedamos con aquel que contenga a A , que está conformado por la unión de uno o dos triángulos. Ahora repetimos el proceso con el segundo lado de T' , pero esta vez aplicando el lema sobre cada uno de esos triángulos y sobre ello, realizamos el proceso por tercera vez con el tercer lado de T' . \square

Proposición 2.4. *La intersección de dos polígonos cualesquiera es un polígono.*

Demostración. Sean dos polígonos P y Q . Ambos pueden expresarse como la unión de triángulos no superpuestos.

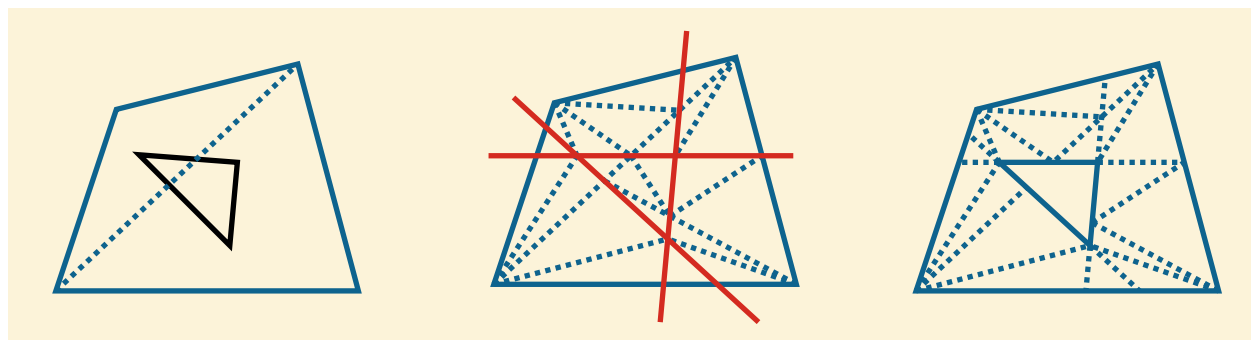
$$P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$$

$$Q = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$$

Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $j \in \{1, \dots, m\}$, si los triángulos T_i y S_j tienen un punto interior en común, aplicamos el lema (2.3). De esta manera, obtendremos una colección de triángulos no superpuestos entre sí cuya unión será $P \cap Q$. \square

Lema 2.5. *El complementario de un triángulo en un polígono cualquiera es un polígono.*

Demostración. Sea un polígono P y un triángulo T . Si P y T no comparten puntos interiores, claramente $P \setminus T = P$, que es un polígono. Ahora, en caso de compartirlo podemos aplicar recursivamente el lema (2.2) sobre cada triángulo que componga a P hasta obtener una nueva triangulación de P de tal manera que ninguno ellos se cortan con T , es decir, están o enteramente contenidos en T o están enteramente fuera de él. Así $P \setminus T$ es la unión de estos triángulos que no están contenidos en T , y por tanto es un polígono.



□

Proposición 2.6. *El complementario de un polígono sobre otro polígono es un polígono.*

Demostración. Sean dos polígonos P y Q . Si no tienen puntos interiores en común, se tiene que $P \setminus Q = P$, que es un polígono. En caso contrario, podemos aplicar el lema (2.5) con el polígono P y cada uno de los triángulos en los que se descompone $Q = T_1 \cup \dots \cup T_n$. Así, tenemos que $P \setminus Q = P \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n) = P \setminus T_1 \cap \dots \cap P \setminus T_n$ que la proposición (2.4), nos garantiza que es un polígono. □

Proposición 2.7. *La unión de dos polígonos cualesquiera es un polígono. En particular, cualquier unión finita de triángulos es un polígono.*

Demostración. Sean dos polígonos P y Q . Si no tienen puntos interiores en común, estamos hablando de una unión no superpuesta, que por la propia definición de polígono, es claro que $P \cup Q$ lo es.

Ahora, si P y Q comparten algún punto interior, por (2.6) tenemos que $P \setminus Q$ es un polígono. Entonces, podemos expresar $P \cup Q$ como la unión no superpuesta de dos polígonos $(P \setminus Q) \cup Q$ y por lo tanto es un polígono. □

Capítulo 3

Funciones de medida de área

En este capítulo definiremos las funciones de medida de área en un plano de Hilbert, demostraremos sus propiedades más importantes y probaremos la existencia una función de medida de área α en un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$. Finalmente, desarrollaremos varias fórmulas que nos permitan calcular fácilmente áreas de polígonos respecto de α y demostraremos el teorema de Pitágoras haciendo uso de ellas.

La manera usual que los seres humanos tenemos de medir alguna magnitud es asociarle una cantidad. Esto nos permite comparar dos objetos según esa magnitud y establecer un orden entre los elementos de un conjunto.

En el caso del área de polígonos, cuando fuimos escolares nos aprendimos una serie de fórmulas que asignaban a cada polígono un número real, resultante de una serie de operaciones entre las longitudes de sus lados. Esta manera de medir, puede hacerse basada en argumentos puramente geométricos, como veremos a continuación.

Definición 3.1. *En un plano de Hilbert, dado el conjunto de todos los polígonos \mathcal{P} y dado un grupo abeliano ordenado G , llamamos medida de área a una función $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow G$ que cumpla que:*

- $\alpha(T) > 0$, para cada triángulo T . (Positividad)
- Si T y T' son dos triángulos congruentes, entonces $\alpha(T) = \alpha(T')$.
- Si dos polígonos P y Q no se superponen, entonces (Aditividad)

$$\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q).$$

A $\alpha(P)$ lo llamamos área del polígono P respecto a la función de medida de área α .

Algunos autores, como Boltianski [4] añaden como condición que el área del cuadrado unidad sea 1. En un principio, puede parecer un requerimiento algo fuerte, pero en realidad veremos que tendremos que imponer uno aún más fuerte para demostrar la existencia de una de estas funciones. Pero antes, probemos algunas propiedades generales.

Proposición 3.2. *Sea α una función de medida de área definida en un plano de Hilbert sobre un grupo abeliano ordenado G . Entonces*

- (a) *Si P es un polígono con al menos un punto interior, entonces $\alpha(P) > 0$.*

- (b) Si un polígono Q está contenido en otro polígono P y $P \setminus Q$ tiene interior no vacío, entonces

$$\alpha(Q) < \alpha(P)$$

Demostración.

- (a) Como P tiene al menos un punto interior, podemos expresarlo como la unión no superpuesta de ciertos triángulos $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$. De este modo

$$\alpha(P) = \alpha(T_1 \cup \dots \cup T_n) = \alpha(T_1) + \dots + \alpha(T_n) > 0$$

- (b) Podemos descomponer P como la unión no superpuesta $P = Q \cup (P \setminus Q)$. De este modo $\alpha(P) = \alpha(Q) + \alpha(P \setminus Q)$, y como $P \setminus Q$ tiene un punto interior, por (a), se tiene que $\alpha(P \setminus Q) > 0$. Y además, como $\alpha(Q)$ también es positivo, y G es un grupo ordenado, se tiene que $\alpha(Q) < \alpha(P)$.

□

Obviamente una medida de área define una relación de equivalencia sobre el conjunto de polígonos del plano. Y como G es un grupo ordenado, esto induce un orden sobre el conjunto cociente de esta relación. La cuestión ahora es probar la existencia de estas aplicaciones.

3.1. Existencia de funciones de medida de área

Vamos a demostrar la existencia de estas funciones definiendo rigurosamente la función de medida de área que se corresponde con la manera usual de medir área de polígonos que aprendimos en la escuela. Para ello, debemos demostrar unos resultados previos que nos garanticen que esa medida de área estará bien definida.

Lema 3.3. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, sea el triángulo $\triangle ABC$. Elijamos dos lados del triángulo como base, b y b' con sus correspondientes alturas h y h' . Entonces*

$$\frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} b' \cdot h'$$

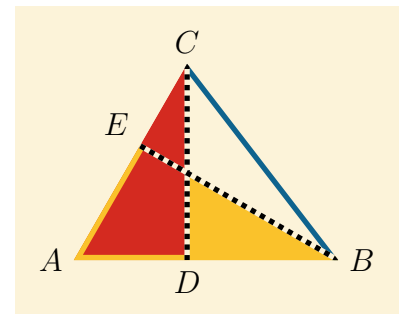
en el cuerpo de la aritmética de segmentos.

Demostración. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $b = AB$, $b' = AC$ y $h = CD$, $h' = BE$. Así, se tiene que los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle ABE$ comparten el ángulo en A y, por ser triángulos rectángulos, tienen los tres ángulos iguales. Por lo tanto, por (SAAA) se tratan de triángulos semejantes y tienen sus lados proporcionales. Así, en el cuerpo de la aritmética de segmentos se tiene que

$$\frac{b}{h'} = \frac{b'}{h}$$

Y multiplicando por $\frac{1}{2} h \cdot h'$ se tiene que $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{b' \cdot h'}{2}$.

□



Definición 3.4. Sea un plano de Hilbert con (P) , \mathbb{K} el cuerpo de la aritmética de segmentos asociado y sea \mathcal{T} el conjunto de todos los triángulos del plano. Entonces, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{a} : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ T &\longmapsto \mathbf{a}(T) := \frac{b \cdot h}{2} \end{aligned}$$

siendo b y h las longitudes de una base y altura del triángulo T . Diremos que $\mathbf{a}(T)$ es el área de T respecto de \mathbf{a} .

Por el lema (3.3), \mathbf{a} está bien definida puesto que no depende de la base y la altura correspondiente que escojamos. Nuestro objetivo será probar que la extensión de esta aplicación es una función de medida de área.

Lema 3.5. Sea la aplicación \mathbf{a} sobre un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$. Si un triángulo T se descompone en una cantidad finita de triángulos T_1, \dots, T_n , entonces

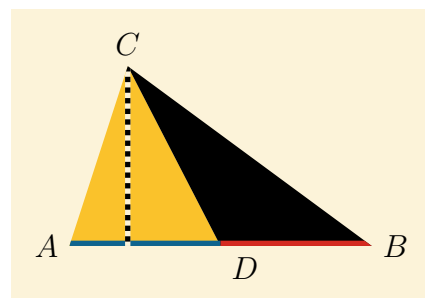
$$\mathbf{a}(T) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i)$$

.

Demostración. Lo haremos por pasos:

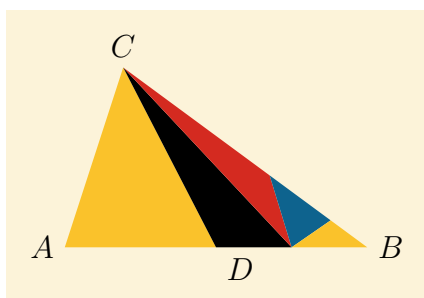
Paso 1. Supongamos que $T = \triangle ABC$ está dividido en dos por una transversal que, supongamos, va desde el vértice C hasta un punto D en el lado AB .

Entonces, si escogemos de base del triángulo grande el lado AB y de los dos pequeños AD y DB , se tiene que $AB = AD + DB$. Además los tres triángulos comparten la misma altura de C , por lo tanto, por la propiedad distributiva del cuerpo de la aritmética de los segmentos se tiene que $\mathbf{a}(\triangle ABC) = \mathbf{a}(\triangle ADC) + \mathbf{a}(\triangle DBC)$.



Paso 2. Supongamos ahora que el triángulo $T = \triangle ABC$ está descompuesto en una serie de triángulos T_1, \dots, T_n de tal forma que todos sus vértices están sobre dos de sus lados.

Vamos a probar el resultado por inducción sobre n :



- Si $n = 2$: Estamos en el caso del paso anterior, ya que la única posibilidad es que la recta que divide a $\triangle ABC$ sea una transversal.
- Suponiéndolo cierto para una descomposición de estas características de $n - 1$ triángulos, probémoslo para una de n triángulos.

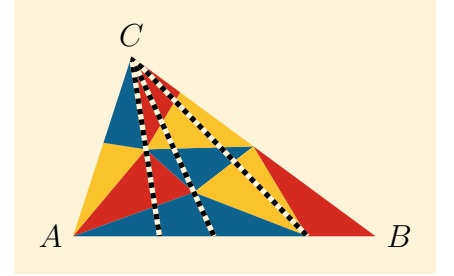
Supongamos que el lado libre de nuevos vértices es el lado AC , entonces. Deberá pertenecer a un triángulo que supongamos que es T_1 y que el tercer vértice de éste, llamémosle D , esté, supongamos, sobre el lado AB . Entonces, estamos en el escenario del paso anterior con la descomposición en $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ y tenemos que $\mathbf{a}(\triangle ABC) = \mathbf{a}(\triangle ACD) + \mathbf{a}(\triangle BCD)$.

Ahora, $\triangle BCD$ está descompuesto a su vez en $n - 1$ triángulos cuyos vértices están sobre los lados BC y BD . Por lo tanto, se cumple la hipótesis de inducción y se tiene que $\mathbf{a}(\triangle BCD) = \sum_{i=2}^n \mathbf{a}(T_i)$. Y finalmente, obtenemos que

$$\mathbf{a}(T) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i)$$

Paso 3. Supongamos ahora el caso general, es decir, $T = \triangle ABC$ está descompuesto en T_1, \dots, T_n triángulos sin condición alguna.

Tracemos ahora desde el vértice C una transversal por cada vértice de los triángulos T_i que se encuentre en el interior de $\triangle ABC$ o en el lado AB . Esto nos proporciona una nueva descomposición de T en S_1, \dots, S_m . Además esta descomposición cumple con las hipótesis del (Paso 2), por lo tanto se tiene que



$$\mathbf{a}(T) = \sum_{j=1}^m \mathbf{a}(S_j) \quad (3.1)$$

Ahora, afinaremos ambas descomposiciones. Los polígonos resultantes de intersectar $T_i \cap S_j$ pueden ser triángulos o cuadriláteros, en cuyo caso por definición de polígono puede expresarse como la unión de dos triángulos no superpuestos R_{ij1}, R_{ij2} . Así de manera general se tiene que $T = \bigcup_{i,j,k=1}^{n,m,l} R_{ijk}$

Además, para cada j se tiene que $S_j = \bigcup_{i,k=1}^{n,l} R_{ijk}$. Esta descomposición cumple las hipótesis del (Paso 2) ya que no contiene ningún vértice de los R_{ijk} , ya que se encuentran todos en lados del triángulo S_j y además el lado que se encuentra sobre el segmento AB , tampoco contiene ninguno. Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{a}(S_j) = \sum_{i,k=1}^{n,l} \mathbf{a}(R_{ijk})$. Por lo tanto, combinándolo con (3.1) podemos concluir que

$$\mathbf{a}(T) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} \mathbf{a}(R_{ijk}) \quad (3.2)$$

Restaría ver sólo que la descomposición para cada i de $T_i = \bigcup_{j,k=1}^{m,l} R_{ijk}$ permite la aditividad de la medida de área. Para ello determinemos que $T_i = \triangle DEF$. Ahora bien, pueden darse dos situaciones: que el triángulo T_i quede dividido en dos por una de las transversales que parten del vértice C o no.

En caso afirmativo, el triángulo T_i quedaría descompuesto en T_i^1 y T_i^2 y por el (Paso 1) se tiene que $\mathbf{a}(T_i) = \mathbf{a}(T_i^1) + \mathbf{a}(T_i^2)$. A su vez, estos dos triángulos, al intersectarse con cada S_j nos dan precisamente una descomposición suya en la triangulación de los R_{ijk} . Ambas

triangulaciones cumplen las hipótesis del (Paso 2) ya que no tienen vértices en los interiores de T_i^1 y T_i^2 y además el lado que ambos comparten también estaría libre de vértices de los R_{ijk} . Por lo tanto, se tendría que el área de cada T_i^1 y T_i^2 sería suma de áreas de sus respectivos R_{ijk} , lo que unido a lo anterior resulta en que

$$\mathbf{a}(T_i) = \sum_{j,k}^{m,l} \mathbf{a}(R_{ijk}) \quad (3.3)$$

En el caso de que el triángulo T_i no quede dividido por una transversal de C , esto es o bien porque uno de sus lados está sobre una de esas transversales o bien porque está en uno de los lados AC o BC . En cualquier caso, el razonamiento es similar, salvo por la descomposición en dos, donde ése lado será precisamente el libre de vértices de los R_{ijk} . Así se tiene que la identidad (3.3) se da para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces, unificando lo demostrado en (3.2) y (3.3) se tiene que

$$\mathbf{a}(T) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i)$$

□

Lema 3.6. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, dado un polígono, la suma de las áreas respecto de \mathbf{a} de los triángulos que lo componen es independiente de la triangulación empleada para definirlo.*

Demostración. Sea un polígono P descompuesto en dos triangulaciones

$$\begin{aligned} P &= T_1 \cup \dots \cup T_n \\ P &= S_1 \cup \dots \cup S_m \end{aligned}$$

Podemos definir una triangulación que refine las dos anteriores. Intersecando cada T_i con cada S_j obtenemos o bien triángulos o bien cuadriláteros en cuyo caso pueden dividirse a su vez en dos triángulos R_{ij1}, R_{ij2} y podemos definir la descomposición $P = \bigcup_{i,j,k=1}^{n,m,l} R_{ijk}$ que además cumple que

$$\begin{aligned} T_i &= \bigcup_{j,k=1}^{m,l} R_{ijk} && \text{para cada } i \in 1, \dots, n \\ S_j &= \bigcup_{i,k=1}^{n,l} R_{ijk} && \text{para cada } j \in 1, \dots, m \end{aligned}$$

Aplicando el lema (3.5) a cada T_i y cada T_j y sumando respectivamente respecto de i y j se concluye que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} R_{ijk} = \sum_{j=1}^m \mathbf{a}(S_j)$$

□

Definición 3.7. En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ sean \mathcal{P} el conjunto de todos los polígonos del plano y \mathbb{K} el cuerpo de la aritmética de segmentos asociado. Extenderemos la definición de la aplicación \mathbf{a} de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto \mathbf{a}(P) := \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i) \end{aligned}$$

siendo $P = \bigcup_{i=1}^n T_i$ una triangulación cualquiera de P .

De nuevo, por los lemas (3.5) y (3.6) garantizamos que la aplicación \mathbf{a} está bien definida. Veamos entonces que es una función de medida de área.

Teroema 3.8. En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, \mathbf{a} es la única función de medida de área con valores en el cuerpo aditivo de la aritmética de segmentos F que para cada triángulo T , y para cualquier lado que escojamos como base del triángulo con longitud $b \in F$ y siendo $h \in F$ la longitud de la altura perpendicular a dicha base

$$\mathbf{a}(T) = \frac{b \cdot h}{2}$$

Demostración. Veamos primero que \mathbf{a} es una función de medida de área:

- Positividad: Sea T un triángulo. Escogiendo un lado como base con longitud b y siendo h la longitud de su correspondiente altura, se tiene que $b, h > 0$ en F . Por lo tanto $\mathbf{a}(T) = \frac{b \cdot h}{2} > 0$.
- Si T y T' son triángulos congruentes, entonces $\mathbf{a}(T) = \mathbf{a}(T')$: Escogiendo como bases dos lados congruentes, sus longitudes serán las mismas en F , al igual que sus respectivas alturas. Por lo tanto, su área respecto de \mathbf{a} es la misma.
- Aditividad: Sean P y Q dos polígonos no superpuestos, entonces ambos pueden descomponerse en dos triangulaciones $P = \bigcup_{i=1}^n T_i$ y $Q = \bigcup_{j=1}^m S_j$ que tampoco se superponen entre sí y que juntas forman una triangulación de $P \cup Q$. Así, se tiene que $\mathbf{a}(P \cup Q) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(T_i) + \sum_{j=1}^m \mathbf{a}(S_j) = \mathbf{a}(P) + \mathbf{a}(Q)$

Por lo tanto, queda probado que \mathbf{a} se trata de una función de medida de área. Además, la unicidad es clara ya que en cada triángulo está unívocamente determinada y hemos probado que no depende de la triangulación que se escoja. \square

Por lo tanto, en un plano euclidiano existe una función de medida de área que es, de hecho, la usual. La novedad es que hemos probado que la definición de esta manera de medir áreas de polígonos sólo depende de argumentos geométricos y en ningún momento de axiomas de continuidad como el de Dedekind (D).

3.2. Formulación de algunas áreas de polígonos

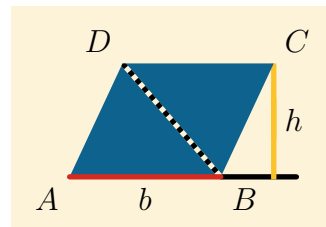
En esta sección demostramos las conocidas fórmulas para calcular las áreas de los paralelogramos y de los polígonos regulares, que facilitan el proceso de calcular áreas al no tener que dividir siempre los polígonos en triángulos.

Por último, para finalizar este capítulo, demostraremos el resultado probablemente más conocido relacionado con las áreas de polígonos: el Teorema de Pitágoras.

Proposición 3.9. *El área de un paralelogramo P de base b y altura h es*

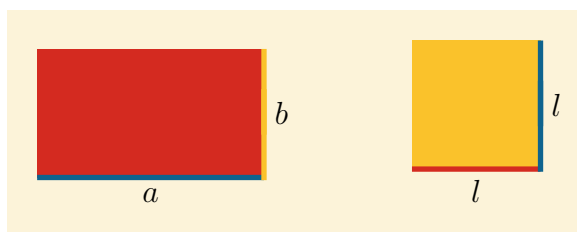
$$a(P) = b \cdot h$$

Demostración. Sea el paralelogramo $P = ABCD$. Entonces, por medio de la diagonal BD dividimos el paralelogramo P en los triángulos congruentes $\triangle ABD$ y $\triangle CDB$. Ambos triángulos tienen base b y la misma altura h , por lo que ambos tienen área $\frac{1}{2} b \cdot h$, y sumándolas obtenemos la del paralelogramo $a(P) = b \cdot h$. \square



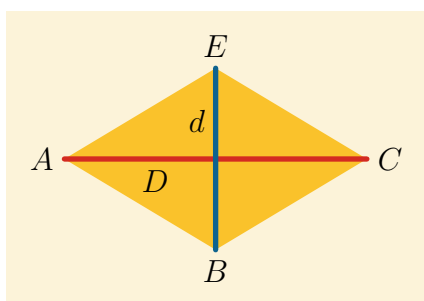
Corolario 3.10. *Las áreas de un rectángulo R de lados a y b y de un cuadrado C de lado l son*

$$a(R) = a \cdot b \quad \text{y} \quad a(C) = l^2$$



Proposición 3.11. *El área de un rombo R cuyas diagonales mayor y menor miden respectivamente D y d es*

$$a(R) = \frac{D \cdot d}{2}$$

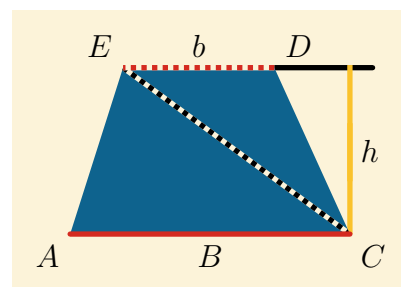


Demostración. Sea el rombo $R = ABCE$. Supongamos que su diagonal mayor es AC , que lo divide en los triángulos congruentes $\triangle ACB$ y $\triangle ACE$ cuyas base común mide D y sus alturas miden ambas $\frac{1}{2} d$. Por lo tanto sus respectivas áreas son $\frac{1}{4} D \cdot d$ y sumándolas obtenemos la del rombo $a(R) = \frac{1}{2} D \cdot d$. \square

Proposición 3.12. *El área de un trapecio T cuya altura mide h y sus bases mayor y menor miden respectivamente B y b es*

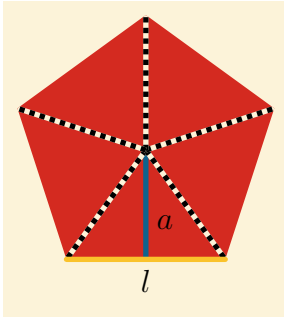
$$a(T) = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Demostración. Sea el trapecio $T = ABDE$ y supongamos que sus bases mayor y menor son respectivamente AC y DE . Trazando la diagonal EC , el trapecio queda dividido los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle CDE$ que comparten la misma altura h por estar entre las mismas paralelas. Así sus áreas son respectivamente $\frac{1}{2} B \cdot h$ y $\frac{1}{2} b \cdot h$ y sumándolas obtenemos la del trapecio $a(T) = \frac{1}{2} (B + b) \cdot h$. \square



Proposición 3.13. *El área de un polígono regular P cuyo perímetro mide p y su apotema a es*

$$\mathfrak{a}(P) = \frac{p \cdot a}{2}$$



Demostración. Sea P un polígono regular de n lados cuya longitud es l y sea O su centro. Podemos hacer una triangulación de P en n triángulos congruentes, uniendo O con cada uno de sus vértices. La base de cada uno de estos triángulos es el lado de P y su altura es la apotema, por lo que su área es $\frac{1}{2} l \cdot a$. Así la suma de todos ellos es $\frac{1}{2} n \cdot l \cdot a$, y como el perímetro es $p = n \cdot l$, el área del polígono resulta $\mathfrak{a}(P) = \frac{1}{2} p \cdot a$. \square

Teroema 3.14 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos.*

Demostración.(Garfield). Sea un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en $\angle BAC$ y sean a , b y c las longitudes de su hipotenusa y sus catetos. Es claro que el área de los cuadrados sobre estos lados son respectivamente a^2 , b^2 y c^2 . Veamos la relación que guardan entre ellos mediante una construcción auxiliar.

Sea $T = ACED$ el trapecio rectángulo con bases b y c y altura $c + b$. Por (3.12) sabemos que su área es

$$\mathfrak{a}(T) = \frac{(b + c) \cdot (b + c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$$

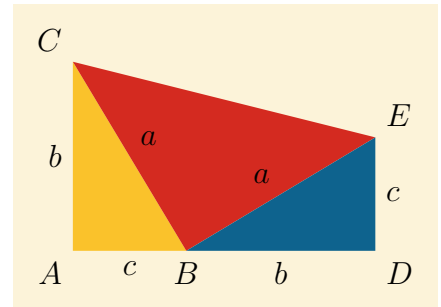
Por otro lado T puede descomponerse en los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle EDB$ y $\triangle CBE$. Los dos primeros son congruentes entre sí por (LAL) y sus áreas son $\frac{1}{2} b \cdot c$. $\triangle CBE$ es rectángulo ya que $\angle ABC$ y $\angle DBE$ son complementarios y sumados a $\angle CBE$ resultan un ángulo llano. Así, su área es $\frac{1}{2} a^2$. Por lo tanto el área del trapecio es la suma de las tres

$$\mathfrak{a}(T) = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 + 2bc}{2}$$

Ahora, igualando ambos resultados tenemos que

$$\frac{a^2 + 2bc}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \implies a^2 = b^2 + c^2$$

lo que demuestra la relación entre las áreas de los cuadrados sobre los lados del triángulo $\triangle ABC$ \square



Capítulo 4

Equidescomposición y equicomplementariedad

En este capítulo definiremos la equidescomposición y equicomplementariedad de polígonos. Demostraremos sus propiedades más importantes, la relación que existe entre ambas definiciones y demostraremos el teorema de Pitágoras utilizando ambos conceptos. Finalmente, veremos su relación con las funciones de medida de áreas.

Como bien explica Boltianski en [3], otra manera de medir el área un polígono es por comparación con otro. Así, dividiéndolos en partes iguales o añadiéndolos polígonos iguales hasta formar la misma figura, podemos determinar si dos polígonos tienen el mismo área¹. Estas son las ideas en las que se basan la equidescomposición y la equicomplementariedad.

4.1. Equidescomposición

Definición 4.1. *Dos polígonos P y P' se dicen equidescomponibles si pueden descomponerse cada uno de ellos en una unión finita de n triángulos no superpuestos entre sí*

$$P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$$
$$P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_n$$

de tal manera que, por parejas, los triángulos T_i y T'_i sean congruentes entre sí.

Cuando dicha descomposición se explícita diremos que P y P' están equidescompuestos.

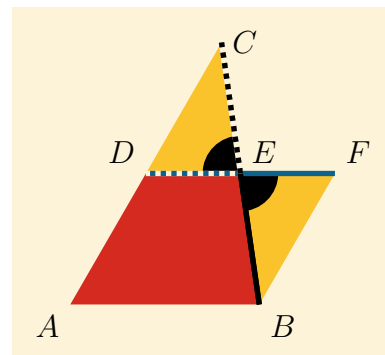
Ejemplo 4.2. *En un plano euclidiano, si consideramos P la unión de dos cuadrados congruentes entre sí y, P' un cuadrado cuyo lado es congruente con la diagonal de uno de los cuadrados de P , tenemos que P y P' son equidescomponibles.*



¹Boltianski en [3] denomina a estas dos formas de proceder «método de división» y «método de adición».

Ejemplo 4.3. En un plano euclidiano, un triángulo es equidescomponible a un paralelogramo de igual base y altura mitad.

Sea el triángulo $\triangle ABC$. Sean D y E el punto medio de los lados AC y BC , respectivamente. Prolonguemos el segmento DE una longitud igual a él mismo hasta el punto F . Entonces se tiene que $DE \cong FE$, $CE \cong BE$ y $\angle CED \cong \angle BFE$. Por lo tanto los triángulos $\triangle CDE$ y $\triangle BFE$ son congruentes y por lo tanto el triángulo $\triangle ABC$ y el paralelogramo $ABFD$ son equidescomponibles. \square



Veamos ahora las principales propiedades de la equidescomposición de polígonos.

Proposición 4.4 (Aditividad de la equidescomposición). Sean dos parejas de polígonos P, P' y Q, Q' equidescomponibles entre sí de tal manera que tanto P y Q como P' y Q' no se superpongan entre sí. Entonces, $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son equidescomponibles.

Demostración. Dado que las uniones son de polígonos no superpuestos, basta con definir la triangulación de cada unión como la unión de las triangulaciones de los polígonos que la forman. \square

Proposición 4.5. En un plano de Hilbert, la equidescomposición de polígonos es una relación de equivalencia.

Demostración. La equidescomposición cumple por definición la reflexividad y la simetría. Veamos que cumple la transitividad:

Supongamos que P y P' son dos polígonos equidescomponibles y que P' también es equidescomponible con P'' . Entonces, existen unas triangulaciones tales que

$$\begin{aligned} P &= T_1 \cup \dots \cup T_n \\ P' &= T'_1 \cup \dots \cup T'_n = S'_1 \cup \dots \cup S'_m \\ P'' &= S''_1 \cup \dots \cup S''_m \end{aligned}$$

con T_i y T'_i congruentes entre sí para cada i y cada S'_j congruente con S''_j para cada j .

Para ver que P es equidescomponible con P'' , vamos a refinar las descomposiciones que hemos realizado en P' . Así, para cada i, j consideramos las intersecciones de triángulos $T'_i \cap S'_j$, que sabemos que en caso de tener interior no vacío, por la proposición 2.4, se trata de un polígono y como tal podemos ponerlo como unión de triángulos no superpuestos:

$$T'_i \cap S'_j = \bigcup_{k=1}^p R'_{ijk} \quad \text{y} \quad P' = \bigcup_{ijk} R'_{ijk}$$

para aquellos i, j que hagan la intersección con interior no vacío. Ahora, para trasladar esta descomposición a los polígonos P y P'' utilizaremos los movimientos rígidos definidos entre triángulos congruentes $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$ y $\psi_j : S'_j \rightarrow S''_j$ definidos para cada i, j . Llamando $R_{ijk} = \varphi_i(R'_{ijk})$ y $R''_{ijk} = \psi_j(R'_{ijk})$ se tiene que

$$P = \bigcup_{ijk} R_{ijk} \quad \text{y que} \quad P'' = \bigcup_{ijk} R''_{ijk}$$

siendo por construcción R_{ijk}, R''_{ijk} triángulos congruentes entre sí (ya que ambos lo son a R'_{ijk}). Además ambos conjuntos son familias de triángulos no superpuestos entre sí, también por construcción, ya que los R'_{ijk} y los T_i y S_j por definición no lo eran.

Por lo tanto, se tiene que P y P'' son equidescomponibles. \square

Proposición 4.6. Sean P y P' dos polígonos equidescomponibles y supongamos que P puede expresarse como la unión de dos subpolígonos no superpuestos entre sí $P = P_1 \cup P_2$. Entonces, P' también puede expresarse como la unión no superpuesta de dos subpolígonos $P' = P'_1 \cup P'_2$ tales que cumplan que P_1 y P'_1 , y P_2 y P'_2 son equidescomponibles entre sí respectivamente.

Demostración. Como P y P' son equidescomponibles, se tiene que:

$$P = T_1 \cup \dots \cup T_n \quad \text{y} \quad P' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$$

con T_i congruente con T'_i para cada $i = 1, \dots, n$.

Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ las intersecciones $P_1 \cap T_i$ y $P_2 \cap T_i$ son polígonos, y como tal podemos expresarlos como la unión finita de triángulos no superpuestos:

$$P_1 \cap T_i = \bigcup_{j=1}^m S_{1ij} \quad P_2 \cap T_i = \bigcup_{j=1}^m S_{2ij}$$

Ahora, como T_i es congruente con T'_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que existe un movimiento rígido $\varphi_i : T_i \rightarrow T'_i$. Si para cada $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ y $k \in \{1, 2\}$ llamamos $S'_{kij} = \varphi_i(S_{kij})$, entonces

$$P'_1 = \bigcup_{i,j=1}^{n,m} S'_{1ij} \quad P'_2 = \bigcup_{i,j=1}^{n,m} S'_{2ij}$$

cumpliendo que $P' = P'_1 \cup P'_2$ y que P_1 con P'_1 , y P_2 con P'_2 son equidescomponibles. \square

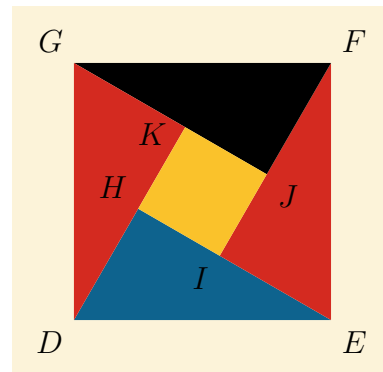
Para finalizar esta sección, demostremos el teorema de pitágoras haciendo uso de la equidescomposición de polígonos.

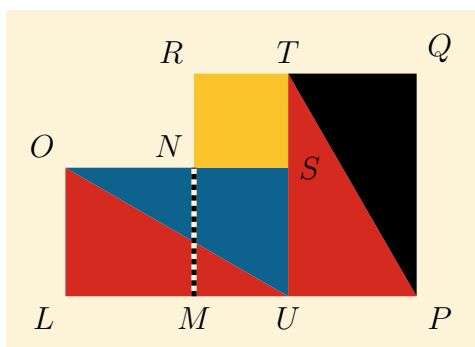
Teroema 4.7 (Pitágoras). En un triángulo rectángulo, el cuadrado sobre la hipotenusa es equidescomponible a la unión de los cuadrados sobre los catetos.

Demostración.(Bhaskara). Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en $\angle BAC$. Sean los cuadrados $DEFG$, $LMNO$ y $MPQR$ de tal modo que $DE \cong BC$, $LM \cong AB$, $MP \cong AC$ y $M * N * R$.

Ahora, en el cuadrado $DEFG$, podemos disponer los puntos H, I, J y K de tal forma que los triángulos $\triangle HDE$, $\triangle IEF$, $\triangle JFG$ y $\triangle KGD$ sean congruentes con $\triangle ABC$.

Por la complementariedad de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y la congruencia de segmentos, podemos garantizar que los triángulos apoyan sus catetos los unos en los otros y que forman el cuadrado $HIJK$. Esto da una descomposición del cuadrado $DEFG$ en cinco polígonos.





Por otro lado, en la unión de los cuadrados $LMNO \cup MPQR$ tomamos U de tal manera que el triángulo $\triangle LOU$ sea congruente con $\triangle ABC$.

De este modo, por la congruencia y suma de segmentos podemos garantizar que los triángulos $\triangle SUO$, $\triangle UPT$ y $\triangle QTP$ también son congruentes con $\triangle ABC$. Y además, esto mismo también evidencia que $\triangle NSTR$ es un cuadrado. Esto da una descomposición de $LMNO \cup MPQR$ en cinco polígonos.

Para probar la equidescomposición basta probar que los dos cuadrados $HIJK$ y $NSTR$ son equidescomponibles, ya que los otros cuatro triángulos en ambas descomposiciones son todos congruentes a $\triangle ABC$.

Por un lado tenemos que $HE \cong TU$ por ser ambos congruentes con el lado AC de $\triangle ABC$ y por otro $IE \cong US$ por ser ambos congruentes con el lado AB , luego por la resta de segmentos congruentes se tiene que $HI \cong RN$. Así, se tiene los dos cuadrados son congruentes y, por tanto, equidescomponibles.

Luego, por la aditividad de la equidescomposición (4.4), concluimos que el cuadrado $DEFG$ y la unión de los cuadrados $LMNO$ y $MPQR$ son equidescompuestos. \square

4.2. Equicomplementariedad

En los *Elementos* [6], Euclides hace referencia a una «igualdad» entre polígonos distinta a la congruencia, pero sin llegar a definirla. Hilbert mostró que esta igualdad puede definirse a partir de los axiomas. Hilbert llamó a esto «equicomplementariedad», aunque otros autores como Hartshorne [8] lo han denominado «igualdad de contenido», o incluso «equiadicionalidad» como hizo Boltianski [4].

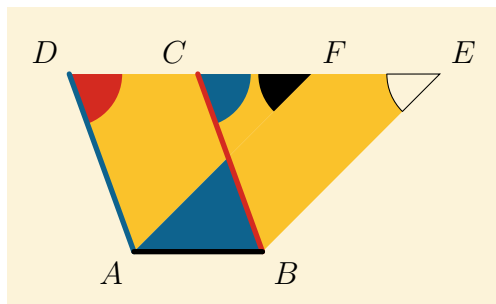
Definición 4.8. *Dos polígonos P y P' se dicen equicomplementables si existen otros dos polígonos Q y Q' de tal forma que:*

- P y Q no se superponen entre sí.
- P' y Q' no se superponen entre sí.
- Q y Q' son equidescomponibles.
- $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son equidescomponibles.

Cuando dicha composición sea explícita, diremos que P y P' son equicomplementarios.

Ejemplo 4.9 (Proposición I.35). *En un plano de Hilbert, dos paralelogramos de base común e igual altura son equicomplementarios.*²

Consideremos los paralelogramos $P = ABCD$ y $P' = ABEF$. Tomamos los triángulos $Q = \triangle CBF$ y $Q' = \triangle DAF$, que son congruentes y por lo tanto equidescomponibles.



Entonces, se tiene que $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son ambos el cuadrilátero $ABED$. Y así, obtenemos que los paralelogramos P y P' son equicomplementarios.

Este ejemplo es el que inspira en Euclides [6] la noción de «igualdad» entre polígonos.

Proposición 4.10. *La equidescomposición de polígonos implica la equicomplementariedad, es decir, si dos polígonos son equidescomponibles, entonces son equicomplementables.*

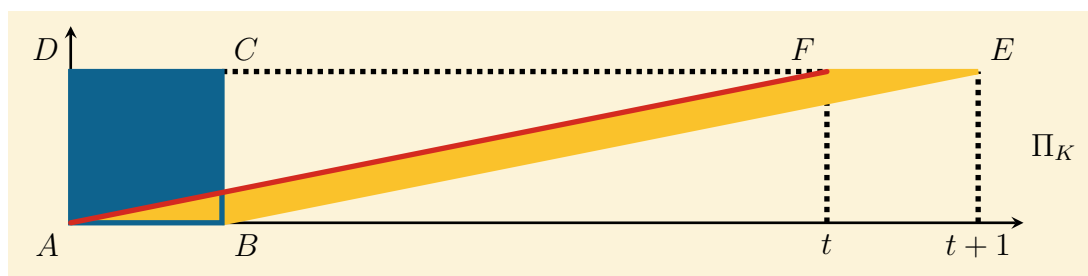
Demostración. Se debe a la propia definición de equicomplementariedad y a la aditividad de la equidescomposición:

Sean P y P' son equidescomponibles. Para cualquier pareja de polígonos equidescomponibles Q y Q' que cumplan que no se superponen respectivamente con P y P' , por la aditividad, se tiene que $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son equidescomponibles. Y por lo tanto P y P' son equicomplementarios. \square

Todos los polígonos equidescomponibles, por definición, son equicomplementarios, pero el recíproco no es cierto siempre en un plano de Hilbert.

Proposición 4.11. *La equicomplementariedad de polígonos no implica la equidescomposición, en el sentido de que dos polígonos equicomplementables no siempre son equidescomponibles.*

Contraejemplo. Sea Π_K el plano cartesiano sobre un cuerpo ordenado, Pitagórico y no Arquimediano K (y por tanto, un plano de Hilbert). Sean $ABCD$ el cuadrado unidad y $ABEF$ un paralelogramo donde $E = (t, 1)$ y $F = (t + 1, 1)$ siendo t un elemento infinito de K .



Entonces, los dos paralelogramos comparten la base AB y están entre las mismas paralelas ($y = 0$ e $y = 1$). Entonces, por el ejemplo 4.9 se tiene que $ABCD$ y $ABEF$ son equicomplementarios.

Pero, por otro lado, el lado AE del romboide $ABEF$ tiene una longitud de $\sqrt{t^2 + 1} > t$ que es infinita en el cuerpo K y, por el contrario, cualquier triángulo en que se descomponga

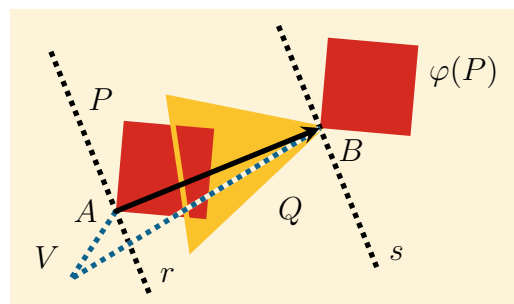
²Proposición I.35: «Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí».

el cuadrado $ABCD$ tiene todos sus lados con una longitud menor o igual que $\sqrt{2}$. Por lo tanto ninguna combinación finita de estos triángulos cubrirá enteramente el lado AE y por ende, el paralelogramo $ABEF$. Por este motivo, los polígonos $ABCD$ y $ABEF$ no son equidescomponibles. \square

Veamos ahora las principales propiedades de la equicomplementariedad de polígonos. Primero, tendremos que demostrar un lema técnico que usaremos recurrentemente.

Lema 4.12. *En un plano de Hilbert, sean dos polígonos P y Q . Entonces existe un movimiento rígido φ tal que $\varphi(P)$ y Q no se superponen entre sí.*

Demostración. Sean P y Q dos polígonos cualesquiera. Tomemos todos los segmentos que unen un vértice de P con otro de Q y escojamos aquel que su longitud sea la máxima de entre todos ellos. Supongamos que dicho segmento es AB , siendo A vértice de P y B de Q . Veamos que, si φ es la traslación del plano que lleva el punto A a B , $P' = \varphi(P)$ no se superpone con Q .



Sean r y s las rectas perpendiculares a AB por A y B respectivamente. Entonces P está contenido enteramente en el mismo lado de r que B ya que si no fuera así, existiría un punto V , vértice de P , a distinto lado de r que B . Pero entonces, el ángulo $\angle BAV$ sería obtuso, y por la proposición I.19 de los *Elementos* [6], se tendría que $VB > AB$ lo cual contradiría la propia elección de AB ³.

Luego P está enteramente contenido en el mismo lado de r que B , y por tanto, al aplicar la traslación φ , P' está enteramente contenido en el lado de s contrario a A . Además, por un argumento similar al anterior, podemos deducir que Q se encuentra al mismo lado de s que A . De este modo, concluimos que P' y Q no se superponen entre sí. \square

Proposición 4.13. *En un plano de Hilbert, la equicomplementariedad entre polígonos es una relación de equivalencia.*

Demostración. La equicomplementariedad cumple por definición la reflexividad y la simetría. Veamos que cumple también la transitividad:

Supongamos que P es complementable con P' y a su vez P' es complementable con P'' . Entonces se tiene que existen dos pares de polígonos equidescomponibles Q, Q' y R', R'' tales que:

$$\begin{aligned} P \cup Q \text{ y } P' \cup Q' &\text{ son equidescomponibles} \\ P' \cup R' \text{ y } P'' \cup R'' &\text{ son equidescomponibles} \end{aligned}$$

El principal problema que podemos encontrarnos es que Q' y R' se superpongan. Nuestra intención entonces es «mover» con un movimiento rígido R' para evitar esa superposición. Ahora bien, no podemos hacer esto sin asegurarnos de que no interfiere con la equidescomponibilidad de $P' \cup R'$ y $P'' \cup R''$: podría darse la situación en que la triangulación que

³Proposición I.19: *En todo triángulo, al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.*

define en $P' \cup R'$ dicha equidescomponibilidad cortara a R' y, al trasladarlo, estaríamos «rompiendo» esta triangulación y no podríamos concluir la equicomplementariedad.

Debemos entonces hacer más finas las triangulaciones que definen esta equidescomposición y usaremos para ello el lema previo:

Como los polígonos $P' \cup R'$ y $P'' \cup R''$ son equidescomponibles y P' y R' no se superponen entre sí, por el lema 4.6 podemos expresar $P'' \cup R''$ como la unión no superpuesta de dos subpolígonos equidescomponibles respectivamente a P' y R' . Uniendo entonces las triangulaciones que definen estas equidescomposiciones, obtenemos otras dos (una de $P' \cup R'$ y otra de $P'' \cup R''$) de tal manera que la triangulación resultante de $P' \cup R'$ no corta a R' .

En este momento ya estamos en disposición de poder mover R' de tal manera que se superponga con Q' . La existencia de un movimiento rígido φ del plano que nos permita hacer esto está garantizada por el lema (4.12). Si llamamos $\tilde{R} = \varphi(R')$, entonces seguimos teniendo que $P' \cup \tilde{R}$ es equidescomponible con $P'' \cup Q''$.

Ahora, sea R un polígono equidescomponible con \tilde{R} que no se superponga con P ni con Q y sea Q'' un polígono equidescomponible con Q que no se superponga tampoco ni con P'' ni con R'' . Si llamamos $S = Q \cup R$, $S' = Q' \cup \tilde{R}$ y $S'' = Q'' \cup R''$, por la aditividad y la transitividad de la equidescomposición, se tiene que S, S' y S'' son equidescomponibles entre sí. Y así, de nuevo por la aditividad y la transitividad, $P \cup S$ es equidescomponible con $P'' \cup S''$.

Por lo tanto, se tiene que P es equicomplementable con P'' , como se quería demostrar. \square

Proposición 4.14 (Aditividad de la equicomplementariedad). *En un plano de Hilbert, las uniones de polígonos no superpuestos equicomplementarios son equicomplementarios.*

Demostración. Sean las parejas de polígonos equicomplementarios P, P' y Q, Q' y supongamos que tanto P y Q como P' y Q' no se solapan entre sí. Entonces, existen dos parejas de polígonos equidescomponibles R, R' y S, S' de tal manera que las parejas $P \cup R, P' \cup R'$ y $Q \cup S, Q' \cup S'$ son equidescomponibles respectivamente.

De nuevo, nuestro problema es que nada nos garantiza que $P \cup R$ y S o $P' \cup R'$ y S' no se solapen entre sí. Para evitar esto, utilizaremos el lema previo para evitar los solapamientos.

Por el lema 4.12 existen dos movimientos rígidos φ, φ' que evitan estos solapamientos, de tal manera que $\tilde{S} = \varphi(S)$ y $\tilde{S}' = \varphi'(S')$ no se solapen respectivamente con $P \cup R$ y $P' \cup R'$.

De este modo, por la aditividad de la equidescomposición (4.4), $(P \cup Q) \cup (R \cup \tilde{S})$ y $(P' \cup Q') \cup (R' \cup \tilde{S}')$ son equidescomponibles y por lo tanto, $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son equicomplementarios. \square

Proposición 4.15 (Complementariedad de la equicomplementariedad). *En un plano de Hilbert, los complementarios de polígonos equicomplementarios en polígonos equicomplementarios, son también equicomplementarios. Es decir, si dos polígonos P y P' son equicomplementarios y $Q \subset P, Q' \subset P'$ son también equicomplementarios entre sí, entonces $P \setminus Q$ y $P' \setminus Q'$ son equicomplementarios.*

Demostración. Como P, P' y Q, Q' son parejas de polígonos equicomplementarios, existen entonces sendas parejas de polígonos equidescomponibles R, R' y S, S' de tal forma que $P \cup R, P' \cup R'$ y $Q \cup S, Q' \cup S'$ son equidescomponibles respectivamente.

El principal escollo resulta en la posibilidad de solapamiento de los polígonos S y S' con el resto. Por ello, utilizamos el lema (4.12) para, con un movimiento rígido del plano, ubicar estos polígonos de tal forma que no se solapen con $P \cup R$ y $P' \cup R'$ respectivamente. Si denotamos como \tilde{S} y \tilde{S}' a estos polígonos reubicados, que conservan su equidescomponibilidad,

se tiene que los únicos solapamientos que se dan en las dos familias de polígonos son el de Q con P y el de Q' con P' , siendo este total por tratarse de polígonos contenidos el uno en el otro.

Ahora bien, se tiene lo siguiente.

Por un lado, $R \cup (Q \cup \tilde{S}) = Q \cup R \cup \tilde{S}$ y $R' \cup (Q' \cup \tilde{S}') = Q' \cup R' \cup \tilde{S}'$ son polígonos equidescomponibles por la aditividad de la equidescomposición (4.4).

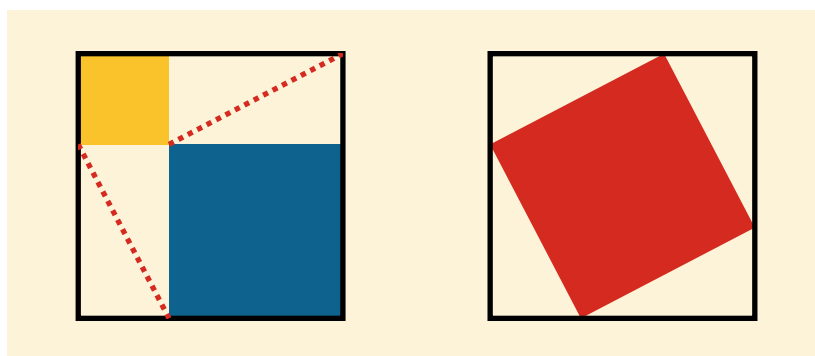
Por el otro, $P \cup R \cup \tilde{S}$ y $P' \cup R' \cup \tilde{S}'$ también son equidescomponibles por ser la unión no superpuesta de polígonos equidescomponibles (4.4). Y como

$$\begin{aligned}(P \setminus Q) \cup (Q \cup R \cup \tilde{S}) &= P \cup R \cup \tilde{S} \\ (P' \setminus Q') \cup (Q' \cup R' \cup \tilde{S}') &= P' \cup R' \cup \tilde{S}'\end{aligned}$$

concluimos que $P \setminus Q$ y $P' \setminus Q'$ son equicomplementarios. \square

Teroema 4.16 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, la unión de los cuadrados sobre los catetos y el cuadrado sobre la hipotenusa son equicomplementarios.*

Demostración. (atribuida a Pitágoras). Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en $\angle BAC$. Llamemos a sus lados a , b y c de la manera usual.



Dispongamos de los cuadrados sobre los catetos de tal forma que compartan un vértice y los lados que confluyen en él estén sobre las misma dos perpendiculares. Entonces, podemos complementar esta unión sobre el cuadrado que los inscribe, uniéndoles cuatro triángulos congruentes con $\triangle ABC$. Comprobamos fácilmente que el cuadrado complementado tiene lado $b + c$.

Por otro lado, también podemos complementar el cuadrado sobre la hipotenusa con otros cuatro triángulos congruentes con $\triangle ABC$ de tal manera que formen un cuadrado de lado $b + c$.

Como los dos cuadrados complementados tienen lado $b + c$, son congruentes y por tanto equidescomponibles. Y así, los dos cuadrados sobre los catetos son equicomplementables con el cuadrado sobre la hipotenusa. \square

Introduciremos ahora un axioma adicional que necesitamos para completar la teoría de la equicomplementariedad. Podemos entenderlo como la noción común 5 de los *Elementos* de Euclides [6] «el todo es mayor que la parte». Gracias a este axioma podremos ordenar los polígonos de un plano euclidiano según su equicomplementariedad. Además, en la siguiente

⁴En esta demostración se inspira el diseño del escudo del equipo de Rugby Matemáticas UCM.

sección demostraremos que este axioma se cumple cuando existe una función de medida de área, luego en particular, lo hace en un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$.

Z. (De Zolt) Si Q es un polígono contenido enteramente en otro polígono P , y $P \setminus Q$ tiene algún punto interior, entonces P y Q no son equicomplementarios.

Lema 4.17. *En un plano Euclidiano con (Z) , sean dos rectángulos R y R' de misma altura. Entonces, si R y R' son equicomplementarios, son congruentes entre sí.*

Demostración. Sean AB y CD las longitudes de las bases de R y R' . Demostremos el contrarrecíproco: supongamos que AB no es congruente con CD y sin pérdida de generalidad supongamos que $CD < AB$. Veamos que R y R' no son equicomplementarios.

Como $CD < AB$, existe un punto E tal que $A * E * B$ y $AE \cong CD$. Ahora, sea R'' el rectángulo sobre AE y la misma altura que R y R' . Se tiene que el rectángulo R'' está contenido enteramente en el rectángulo R .

Además, se tiene que $R \setminus R''$ tiene interior no vacío. Por lo tanto, por el axioma de De Zolt (Z) , R y R'' no son complementarios. Y como $R'' \cong R'$, se tiene que R y R' no son equicomplementarios. \square

Proposición 4.18. *En un plano Euclidiano con (Z) existe un orden total en el conjunto de clases de equivalencia de los polígonos complementarios con la propiedad de que si $P \leq Q$, entonces existe un polígono P' contenido en Q y tal que es equicomplementario con P .*

Demostración. En la proposición (I.44) de los *Elementos* [6], Euclides demuestra que todo triángulo es equicomplementario con un paralelogramo con un ángulo y uno de sus lados prefijados⁵. Esto implica que cualquier polígono es equicomplementario a un rectángulo con uno de sus lados prefijados, ya que podemos aplicar (I.44) reiteradamente a todos los triángulos que lo componen.

Por lo tanto, dados dos polígonos P y Q , podemos construir dos rectángulos equicomplementarios a ellos R y S de misma altura. Así, podemos comparar P y Q acorde con la longitud de las bases de R y S . Y además, como hemos visto en la demostración del lema (4.17), en caso de que $P < Q$, existe un rectángulo T equicomplementario con P tal que $T \subset Q$. \square

4.3. Relación con el área

Proposición 4.19. *En un plano de Hilbert con una función de medida de área α definida en él, la equidescomposición implica la igualdad de área respecto de α . Es decir:*

$$\text{Si } P \text{ y } P' \text{ son equidescomponibles, entonces } \alpha(P) = \alpha(P').$$

Demostración. Como P y P' son equidescomponibles, podemos descomponerlos en un número finito de triángulos que sean, por parejas, congruentes entre sí y por lo tanto tienen el mismo área con respecto a α . Y se como se tratan de uniones no superpuestas, se tiene que

$$\alpha(P) = \sum_{i=1}^n \alpha(T_i) = \sum_{i=1}^n \alpha(T'_i) = \alpha(P')$$

⁵Proposición I.44. *Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.*

□

Proposición 4.20. *En un plano de Hilbert con una función de medida de área α definida en él y sobre un grupo G , la equicomplementariedad implica la igualdad de área respecto de α . Es decir:*

$$\text{Si } P \text{ y } P' \text{ son equicomplementarios, entonces } \alpha(P) = \alpha(P').$$

Demostración. Como P y P' son equicomplementarios, entonces existen dos polígonos Q y Q' equidescomponibles entre sí y que no se superponen respectivamente con P y P' tales que $P \cup Q$ es equidescomponible con $P' \cup Q'$. Así, por (b), se tiene que tanto Q y Q' como $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ tienen el mismo área respecto de α . Además, por la aditividad de la medida de área, se tiene que

$$\alpha(P) + \alpha(Q) = \alpha(P \cup Q) = \alpha(P' \cup Q') = \alpha(P') + \alpha(Q')$$

Y restando $\alpha(Q)$ en el grupo G , concluimos que $\alpha(P) = \alpha(P')$. □

Corolario 4.21. *En un plano de Hilbert, la existencia de una función de medida de área garantiza el cumplimiento del axioma de De Zolt (Z).*

Demostración. Supongamos que en un plano de Hilbert existe una medida de área α . Sean entonces, dos polígonos P y Q de tal forma que Q está enteramente contenido en P y que $P \setminus Q$ tiene al menos un punto interior. Entonces, por la proposición (3.2) se tiene que $\alpha(Q) < \alpha(P)$ y por el contrarrecíproco de la proposición (4.20) se tiene que P y Q no pueden ser equicomplementarios. Por lo tanto, se sostiene el axioma de De Zolt (Z). □

Y al haber probado que en un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ existe la función de medida de área \mathfrak{a} , podemos concluir que:

Corolario 4.22. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ se cumple el axioma de De Zolt (Z).*

Teorema 4.23. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, la equicomplementariedad es equivalente a la igualdad de área respecto de la medida \mathfrak{a} . Es decir,*

$$P \text{ y } Q \text{ son dos polígonos equicomplementarios si y sólo si } \mathfrak{a}(P) = \mathfrak{a}(Q)$$

Demostración. Que la equicomplementariedad implica la igualdad de área lo hemos comprobado en (4.20). Para probar el recíproco nos apoyaremos en la proposición (I.44) de los *Elementos* de Euclides [6], que nos asegura que dados dos polígonos P y Q , podemos encontrar dos rectángulos P' y Q' equicomplementarios a ambos respectivamente y que, además, podemos suponer que uno de los dos lados de los rectángulos tiene longitud 1 en el cuerpo de la aritmética de segmentos.

Por lo tanto, si los otros dos lados de los rectángulos tienen longitudes a y b , tenemos que las áreas de los rectángulos son $\mathfrak{a}(P') = 1 \cdot a = a$ y $\mathfrak{a}(Q') = 1 \cdot b = b$. Entonces, como por hipótesis $\mathfrak{a}(P) = \mathfrak{a}(Q)$ y hemos visto que el área se conserva en figuras complementarias, obtenemos que tenemos que $a = \mathfrak{a}(P') = \mathfrak{a}(Q') = b$. Pero esto quiere decir que los rectángulos P' y Q' son congruentes y por tanto equicomplementarios. Y así, por la transitividad de la equicomplementariedad, concluimos que P y Q son equicomplementarios. □

Capítulo 5

Dissección

En este capítulo definiremos el método de diseción, por el cual se podrán obtener polígonos equivalentes. Demostraremos sus propiedades más importantes y demostraremos el teorema de Pitágoras. Construiremos distintas equivalencias por diseción entre polígonos en planos de Hilbert y euclidianos. Finalmente, demostraremos la equivalencia entre las cuatro maneras que hemos presentado de definir área en un plano euclidiano.

El método de diseción puede recordarnos a algún juego del ámbito de las matemáticas recreativas, como el *Tangram*, cuyo objetivo es construir con siete piezas poligonales siluetas de objetos de la vida cotidiana. En alguno de estos juegos, el punto de dificultad añadida es construir una figura a partir de las piezas que formaban otra, pero sin «voltear» dichas piezas. Esta es la idea detrás de la diseción, que algunos autores llaman «scissors congruence», por su similitud con los juegos infantiles de recortables.

Definición 5.1. *Se define como diseción al método por el cual, dados dos polígonos P y Q , el primero puede descomponerse en una unión finita de polígonos no superpuestos entre sí de tal manera que, tras ser desplazados por movimientos rígidos sin reflexiones (basados sólo en traslaciones y rotaciones), pueden unirse sin solapamientos para componer Q .*

Diremos entonces que P y Q son equivalentes por diseción o equicompuestos.

Ejemplo 5.2 (Puzzle de Haberdasher). *Dudeney propuso y resolvió el problema de dar una diseción entre un triángulo equilátero y un cuadrado con sólo tres cortes.*



Proposición 5.3. *Las uniones no superpuestas de polígonos equicompuestos son equicompuestas*

Demostración. Se desprende de la definición, tomando las uniones de los polígonos que los componen, ya que no hay solapamiento ni se realiza ninguna reflexión. \square

Proposición 5.4. *En un plano de Hilbert, la equicomposición de polígonos es una relación de equivalencia.*

Demostración. Por definición la equivalencia por diseción cumple la reflexividad y la simetría. Veamos que cumple la transitividad.

Sean P, P' y P'' tres polígonos de tal manera que existen una disección de P en P' y otra de P' en P'' . Es decir,

$$P = Q_1 \cup \dots \cup Q_n \quad \text{y} \quad P' = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_n$$

con $\varphi_i : Q_i \longrightarrow Q'_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y

$$P' = R'_1 \cup \dots \cup R'_m \quad \text{y} \quad P'' = R''_1 \cup \dots \cup R''_m$$

con $\psi_j : R'_j \longrightarrow R''_j$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ de tal manera que cada φ_i y ψ_j son movimientos rígidos sin reflexiones.

Entonces en P' tenemos dos descomposiciones, una por cada disección. Intersecando sus elementos entre sí tal que $S'_{ij} = Q'_i \cap R'_j$, obtenemos una descomposición más fina. Trasladamos estas descomposiciones a P y a P'' con los movimientos rígidos que las definen tal que

$$S_{ij} = \varphi_i^{-1}(S'_{ij}) \quad \text{y} \quad S''_{ij} = \psi_j(S'_{ij})$$

Esto nos da una disección entre P y P'' ya que $\psi_j \circ \varphi_i(S_{ij}) = S''_{ij}$ y $\psi_j \circ \varphi_i$ no contiene reflexiones para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. \square

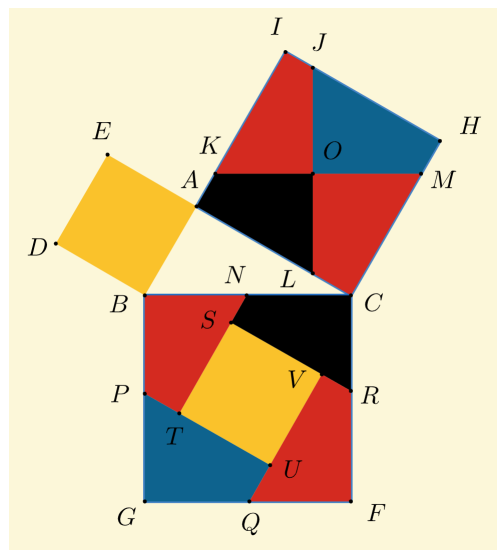
Para ejemplificar su relación con el concepto de área, probemos el teorema de Pitágoras mediante una disección.

Teroema 5.5 (Pitágoras). *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, dado un triángulo rectángulo, existe una disección de los cuadrados sobre los catetos en el cuadrado de la hipotenusa.*

Demostración. (Dudeney). Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, con ángulo recto en $\angle BAC$. Y sean $\square ABDE$, $\square BCFG$ y $\square ACHI$ los cuadrados sobre sus lados.

Supongamos, sin perder generalidad, que el cateto mayor es AC . Sea O el centro del cuadrado $\square ACHI$ y tracemos dos paralelas a los lados del cuadrado sobre la hipotenusa de tal manera que corta a los lados de $\square ACHI$ en los puntos J, K, L y M .

Ahora sean N, P, Q, R los puntos medios de los lados del cuadrado sobre la hipotenusa. Tracemos desde N y Q dos rectas paralelas al cateto AB y desde P y R dos rectas paralelas al cateto AC y llamemos S, T, U y V a los puntos donde se intersecan.



Ahora, como O es el centro del cuadrado $\square ACHI$, se tiene que $JL \cong KM$ y O es su punto medio. Además, el cuadrilátero $BCMK$ es un paralelogramo, luego deducimos que los segmentos OJ, OK, OL y OM son congruentes con la mitad de la hipotenusa. Esto, sumado a que JL y KM son paralelos a los lados de $\square BCFG$ y que desde los puntos N, P, Q y R hemos trazado paralelas a los lados de $\square ACHI$, por la congruencia de ángulos con lados paralelos, obtenemos las congruencias de cuadriláteros $OJIK \cong FRVQ$, $OKAL \cong CNSR$ y $OLCM \cong OMHJ$. Además, por cómo hemos realizado la construcción, todos los cuadriláteros tienen la misma orientación.

Por último, el cuadrilátero $STUV$ se trata de un cuadrado ya que sus lados son paralelos a los del cuadrado $\square ACHI$. Además, $NT \cong MC$ y $NS \cong KA$, por la congruencia que acabamos de probar. Y de nuevo, por tratarse el cuadrilátero $BCM K$ de un paralelogramo, $CM \cong BK$. Por lo tanto, por la resta de segmentos congruentes se tiene que $ST \cong AB$, lo que demuestra que $\square ABDE \cong \square STUV$. \square

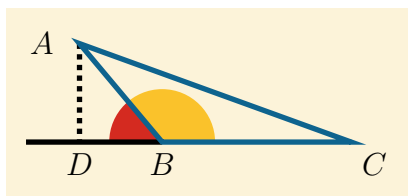
5.1. Equivalencias por disección

En esta sección vamos a demostrar distintas equivalencias por disección entre polígonos. En ocasiones tendremos que asumir distintos axiomas y probar algunos lemas técnicos para poder garantizar las construcciones.

Proposición 5.6. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, existe una disección de cualquier triángulo a un paralelogramo de misma base y altura mitad.*

Demostración. La construcción propuesta en el ejemplo (4.3) da lugar a una disección entre el triángulo $\triangle ABC$ y el paralelogramo $ABFD$, ya que los triángulos $\triangle DEC$ y $\triangle FEB$ no son imagen especular el uno del otro. De hecho, para mover el primero a la posición basta con aplicar una rotación sobre el punto E con un ángulo de dos rectos. \square

Lema 5.7. *Sea el triángulo $\triangle ABC$, y supongamos que el punto D , pie de la altura de A al lado BC , no está entre B y C . Entonces, o bien $\angle ABC$, o bien $\angle BCA$ es obtuso.*



Demostración Supongamos que $D * B * C$, entonces $\angle ABC$ es ángulo exterior del triángulo rectángulo $\triangle ADB$, y por (I.16), obtuso.

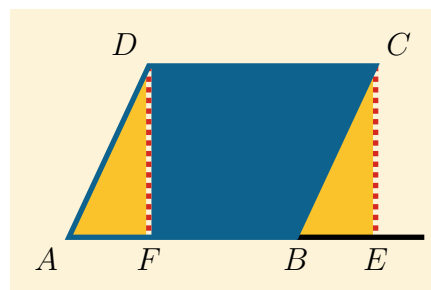
Respectivamente, en el caso de que $B * C * D$, $\angle BCA$ es obtuso. \square

Proposición 5.8. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$, existe una disección de un paralelogramo a un rectángulo de mismo lado.*

Demostración. Sea el paralelogramo $ABCD$. Trazando las alturas de los puntos C y D sobre el lado AB y llamemos E y F a sus respectivos pies. Entonces pueden darse dos casos:

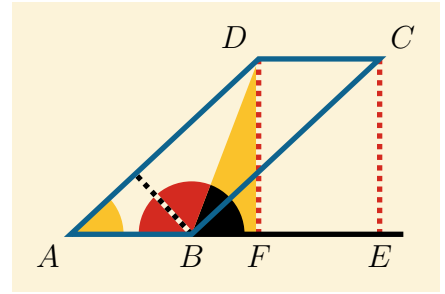
- *Caso 1:* Uno de los dos pies está en el segmento AB .

Supongamos que $A * F * B$. Entonces se tiene que $\triangle ADF \cong \triangle BCE$ por (LAL) y no son imagen especular el uno del otro. De este modo se tiene la disección del paralelogramo $ABCD$ en el rectángulo $FECD$.



- *Caso 2:* Ninguno de los pies está en el segmento AB .

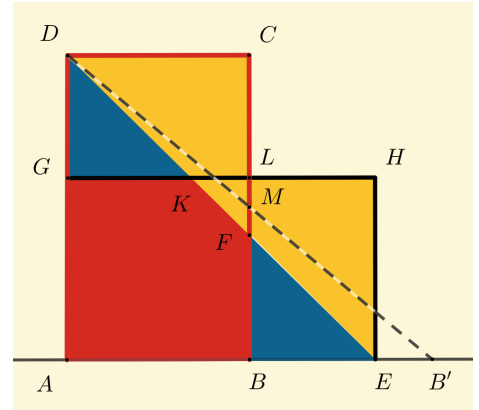
Supongamos que $A * B * F * E$. Entonces el ángulo $\angle DBF$ es agudo ya que $\triangle DBF$ es un triángulo rectángulo en F . Por lo tanto, su ángulo suplementario $\angle ABD$ es obtuso. Esto implica que los dos ángulos $\angle BAD$ y $\angle BDA$ son agudos y por tanto, por el contrarrecíproco del lema (5.7), el pie de la altura de B sobre AD está entre A y D .



Por lo tanto, en el Caso 2 si en vez de las alturas de C y D sobre AB , trazamos las de B y C sobre el lado AD , nos encontramos en el Caso 1 y por tanto existe tal disección en cualquiera de los casos. \square

Lema 5.9. *Sea un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$. Sea un rectángulo $ABCD$, y un punto E de tal manera que $A * B * E$ y que las longitudes de los segmentos AB y AE respectivamente a y b en el cuerpo de la aritmética de segmentos cumplan que $a < b < 2a$. Entonces, existe una disección del rectángulo $ABCD$ en otro con lado AE .*

Demostración. Sea B' en el rayo \overrightarrow{AE} tal que $AB \cong BB'$. Entonces el segmento DB' corta al lado BC en su punto medio M y como por hipótesis $B * E * B'$, el segmento DE lo corta en F de tal manera que $B * F * M$. Sea entonces G en AD de tal manera que $DG \cong EF$.



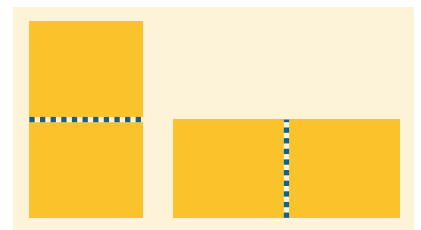
Sea entonces $AEHG$ el rectángulo de lados AE y AG . El lado GH se interseca con DF y BC en K y L respectivamente. Por paralelismo se tiene que $\angle GDK \cong \angle BFE$, lo que supone que $\triangle GDK \cong \triangle BEF$ por (ALA). Además como $AE \cong GH$ y $BE \cong GK$, por resta de segmentos, se tiene que $KH \cong AB \cong CD$. Y por un razonamiento similar como $BC \cong AD$ y $BF \cong DG$ se tiene que $CF \cong AG \cong EH$. Lo que supone que por (LAL) $\triangle CDF \cong \triangle HKE$, y por tanto da una disección entre el rectángulo $ABCD$ y el rectángulo $AEHG$.

Nótese que la hipótesis sobre los segmentos es necesaria ya que de otra manera, si $B * B' * E$, se tendría que $E * M * F$ y entonces el triángulo $\triangle BEF$ no estaría contenido en el rectángulo $AEHG$. \square

Lema 5.10. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A). Sea un segmento de longitud b . Entonces existe una disección de cualquier rectángulo en otro con lado a que cumpla que $a < b < 2a$.*

Demostración. Primero, describamos una disección que usaremos recurrentemente:

Sea un rectángulo $ABCD$ y sea E el punto medio de AB . Trazando una paralela a CD por E , queda el rectángulo dividido en dos partes iguales. Trasladando el rectángulo $EBCF$ de tal manera que EB quede sobre DF , obtenemos por disección el rectángulo $AECF$ cumpliendo que AE es la mitad de AB y AF el doble de AD .



Ahora, sea un rectángulo sobre un lado a . Supongamos que no se cumple que $a < b < 2a$. Entonces, puede haber dos casos:

- Si $a < 2a < b$: Por el axioma de Arquímedes (A) se tiene que existe un número natural n tal que $a < b < na$.
- Si $b < a < 2a$: Por el axioma de Arquímedes (A) se tiene que existe un número natural m tal que $a < mb$ y por lo tanto $\frac{1}{m}a < b < a$.

Esto nos garantiza que repitiendo un número finito de veces la disección anterior, podemos alcanzar la condición de que $a < b < 2a$. \square

Proposición 5.11. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A), dado un rectángulo $ABCD$ y un segmento EF cualquiera, existe una disección de $ABCD$ en otro rectángulo con lado EF .*

Demostración. Llamemos a y b a las longitudes de los segmentos AB y EF en el cuerpo de la aritmética de segmentos. Entonces, si no se satisface que $a < b < 2a$, podemos aplicar el lema (5.10) y una vez lo hayamos logrado, aplicar el lema (5.9). \square

Teroema 5.12. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A), dado un polígono P y un segmento AB cualquiera, existe una disección de P a un rectángulo de lado AB .*

Demostración. Sabemos que P puede descomponerse en una triangulación $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$. Ahora a cada T_i les aplicamos las proposiciones (5.6), (5.8) y (5.11) para obtener unos rectángulos R_1, \dots, R_n equivalentes por disección a los triángulos y con lado AB . Ahora, trasladando estos rectángulos, podemos apilarlos uno encima del otro y obtener un rectángulo R equivalente por disección a P . \square

Corolario 5.13. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A) existe un orden total sobre el conjunto de los polígonos.*

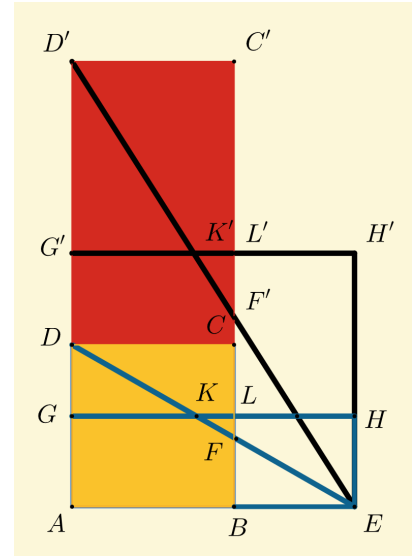
Demostración. Sean dos polígonos P y P' , veamos que podemos compararlos de alguna manera. Sea un segmento AB cualquiera. Por el teorema (5.12), P y P' pueden diseccionarse en dos rectángulos $ABCD$ y $ABC'D'$. Podemos entonces definir un orden de tal manera que $P < P'$ si $AD < AD'$, pero para ello faltaría comprobar que no depende del segmento AB .

Veamos entonces, que la relación de orden entre P y P' se mantiene si escogemos ahora el segmento $AE \neq AB$. Supongamos que $AB < AE < 2AB$, entonces estamos en las hipótesis del lema (5.9). Realicemos esta disección en los dos rectángulos simultáneamente. Por semejanza de los triángulos $\triangle EFF'$ y $\triangle EDD'$, tenemos que $FF' < DD'$. Entonces haciendo las siguientes operaciones con segmentos:

$$AG + GD + DD' = AG' + G'D$$

Como $GD \cong BF$ y $G'D' \cong BF'$, se tiene que

$$AG + BF + DD' = AG' + BF' = AG' + BF + FF' < AG' + BF + DD' \implies AG < AG'$$



en las hipótesis del lema (5.14). En caso de que $2a < 8a < \frac{1}{2}b$, debemos aplicar de nuevo el lema (5.10). El axioma de Arquímedes (A) nos garantiza que tras un número finito de veces, estaremos en las condiciones de aplicar el lema (5.14) y tras hacerlo, obtenemos el cuadrado. \square

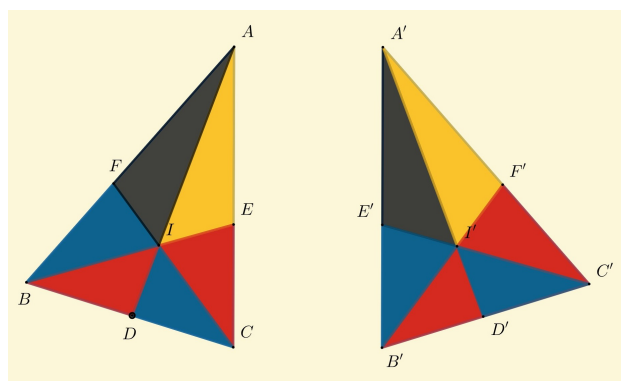
5.2. Relación con el área

En esta sección vamos a ver la relación de la equicomposición de polígonos con el resto de definiciones del área que hemos dado en este trabajo y concluiremos con el teorema de Bolyai-Gerwien, que prueba la equivalencia entre todas ellas.

Lema 5.16 (Gerling). *En un plano de Hilbert, dado cualquier triángulo existe una disección en su imagen especular.*

Demostración. Sea el triángulo $\triangle ABC$. Sea I su incentro y llamemos D , E y F a los pies de las perpendiculares a los lados desde I , que son los puntos de tangencia de la circunferencia circunscrita con los lados del triángulo.

Fijémonos en los triángulos $\triangle AIF$ y $\triangle AIE$. Dado que $\angle FAI \cong \angle EAI$, y ambos son triángulos rectángulos, se tiene que $\angle AIF \cong \angle AIE$. Además ambos triángulos comparten el lado AI y $IF \cong IE$ por ser inradios, luego por (LAL) son triángulos congruentes. De hecho, es más, son simétricos el uno del otro respecto del lado común AI .



Traslademos ahora esta construcción a la imagen especular de $\triangle ABC$, el triángulo $\triangle A'B'C'$. Se tiene entonces que $\triangle A'I'F'$ es imagen especular de $\triangle AIF$. Sin embargo, $\triangle A'I'E'$, también congruente con él, no lo es. Y lo mismo sucede con $\triangle AIE$ y $\triangle A'I'F'$, son congruentes pero no son simétricos el uno respecto del otro.

De este modo, siguiendo el mismo razonamiento para las demás parejas de triángulos damos una disección del triángulo $\triangle ABC$ en su simétrico $\triangle A'B'C'$. \square

Proposición 5.17. *La equidescomposición de polígonos es equivalente a la equicomposición de polígonos. Es decir,*

P y Q son equidescomponibles si y sólo si P y Q son equivalentes por disección

Demostración. Ya vimos que la equicomposición implica la equidescomposición. Para probar el recíproco, notemos que en una equidescomposición de dos polígonos, realizamos en ambos dos triangulaciones cuyos triángulos son congruentes dos a dos. El principal escollo que nos encontramos es que dos triángulos congruentes pueden ser imagen especular el uno del otro, lo que, a priori, nos imposibilitaría mover el uno sobre el otro sin aplicar una reflexión. El lema (5.16) nos resuelve este problema, pues podemos afinar estas primeras triangulaciones a otras dos en las que las parejas de triángulos no sólo sean congruentes, sino que además no sean simétricos. Por lo tanto, esas triangulaciones no sólo definen la equidescomposición, sino también una disección entre ambos polígonos. \square

Teorema 5.18 (Bolyai, Gerwien). *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A) , sea la función de medida de área \mathbf{a} . Entonces, la equicomposición de polígonos es equivalente a la igualdad de área respecto de \mathbf{a} . Es decir,*

$$P \text{ y } Q \text{ son equivalentes por disección si y sólo si } \mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(Q)$$

Demostración.

\Rightarrow) Esto es claro por lo que ya hemos demostrado. En la proposición (5.17) hemos probado la equivalencia entre la equivalencia por disección y la equidescomposición, y a su vez en la proposición (4.19).

\Leftarrow) Para demostrar esta implicación, tomemos dos polígonos P y Q de misma área, es decir $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(Q)$. Por el teorema (5.12), ambos polígonos pueden diseccionarse a dos rectángulos que tengan un lado de longitud 1 y el otro con longitudes p y q . Por la implicación anterior, tenemos que ambos rectángulos tienen el mismo área respectivamente que P y Q y como por (3.10) el área de un rectángulo R de lados 1 y a es $\mathbf{a}(R) = a$, deducimos que $p = q$ y, en definitiva, que los dos rectángulos son congruentes. De este modo, por la transitividad de la equivalencia por disección (5.4), se tiene que existe una disección de P sobre Q .

□

Corolario 5.19. *En un plano de Hilbert con $(P_{\leq 1})$ y (A) , sea la función de medida de área \mathbf{a} . Entonces la equidescomposición, la equicomplementariedad, la equivalencia por disección son equivalentes entre sí y a su vez con la igualdad respecto de \mathbf{a} .*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema de Bolyai-Gerwin (5.18), el teorema (4.23) y la proposición (5.17). □

Capítulo 6

La teoría del volumen

En este capítulo veremos la imposibilidad de desarrollar una teoría del volumen de poliedros que no dependa de axiomas de continuidad como el de Dedekind (D). Explicaremos el contexto histórico en el que se formuló el conocido como «tercer problema de Hilbert» y probaremos la solución dada por Dehn con la construcción de un invariante.

6.1. El tercer problema de Hilbert

En el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 en París, David Hilbert formuló una lista de 23 problemas «para el siglo que comienza». En la tercera posición de esta lista se formulaba el siguiente problema:

Especificar dos tetraedros de bases y alturas iguales que no puedan ser divididos de ninguna manera en dos tetraedros congruentes, y que tampoco puedan ser combinados con tetraedros congruentes para formar dos poliedros que a su vez no puedan ser divididos en dos tetraedros congruentes.

La importancia de este problema, viene de mucho más atrás en la historia. En la proposición XII.5 de los Elementos de Euclides [6] se demuestra que dos pirámides con igual base e igual altura tienen el mismo volumen. El problema reside en que para hacerlo, se utiliza el llamado «método de exhaustión». En este caso, se construye una pirámide escalonada, la cual se van haciendo cada vez más pequeños sus escalones (llamada la «escalera del diablo» por algunos autores). Este método no es otra cosa que lo que hoy en día llamaríamos «paso al límite». En términos modernos, la formulación de la prueba de la proposición XII.5 en los *Elementos* depende del axioma de Dedekind (D), lo que no es puramente geométrico.

Esto tiene fuertes implicaciones, porque se utiliza en la demostración de la proposición XII.8, donde se demuestra que el volumen de un tetraedro es un tercio del prisma que determinan sus cuatro vértices. Es decir, que la teoría clásica del volumen parece depender del axioma de continuidad, al contrario del caso del área en el que puede desarrollarse, como hemos visto, toda una teoría basada en argumentos geométricos.

Sin embargo, de lo aprendido en el caso del área, surge una estrategia para poder desarrollar una teoría del volumen sin (D). Siguiendo el mismo esquema, podemos definir la equidescomposición, equicomplementariedad y equicomposición de poliedros, que no dependen de (D) y que tienen unas propiedades similares a las vistas para los polígonos. Si ahora

se consiguiera demostrar un resultado similar al teorema de Bolyai-Gerwien, se llegaría a la conclusión de que puede definirse el volumen de poliedros sin necesidad de asumir (D).

Ya desde los tiempos de Gauss, se intuía que la respuesta a si se podría abrir esta vía era negativa, como le advirtió a Gerling en la correspondencia que mantuvieron. El intento de demostración que dio Bricard en 1866, así como otros posteriores, resultaron erróneos. Pero Max Dehn, alumno del propio Hilbert, dio con una respuesta negativa correcta. Su idea se asemeja a lo que hoy desarrollan áreas como la homología o la homotopía: asignar a cada poliedro un valor que no varíe mediante los procesos de disección y demostrar que hay dos poliedros que tienen el distinto invariante. A continuación desarrollaremos un enfoque moderno de este planteamiento a partir de los productos tensoriales.

6.2. El invariante de Dehn

Definición 6.1. Para cada poliedro P en el espacio euclidiano, definimos el invariante de Dehn $\mathfrak{d}(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ como

$$\mathfrak{d}(P) = \sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i)$$

donde n es el número de lados de P , a_i es la longitud del lado y α_i la medida del ángulo diédrico formado por las dos caras que se encuentran en ese mismo lado para cada $i \in 1, \dots, n$.

Observación 6.2. $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ es el producto tensorial formado por elementos de la forma

$$\sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ y cumpliéndose que

$$\begin{aligned} (a, \alpha) + (a, \beta) &= (a, \alpha + \beta) \\ (a, \alpha) + (b, \alpha) &= (a + b, \alpha) \end{aligned}$$

Con esta operación, $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 6.3 (Invariante de Dehn de un cubo). Sea C un cubo de lado a . Todos sus ángulos diedricos son rectos, por lo tanto su invariante de Dehn es

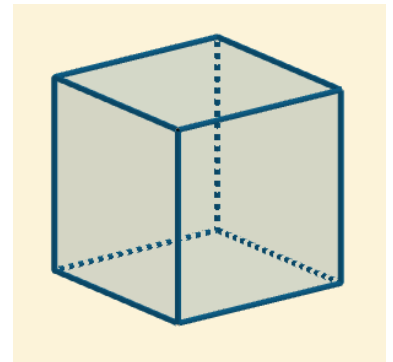
$$\mathfrak{d}(C) = \sum_{i=1}^{12} (a, \pi/2) = 12 \cdot (a, \pi/2)$$

Operando en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ obtenemos que

$$(a, \pi/2) = (a/2, \pi/2) + (a/2, \pi/2) = (a/2, \pi) = 0$$

Luego el invariante de Dehn de todo cubo es $\mathfrak{d}(C) = 0$.

Vista la definición de \mathfrak{d} , veamos que de hecho es invariante respecto de la equicomposición. Para ello, primero tenemos que probar su aditividad para uniones sin solapamientos.

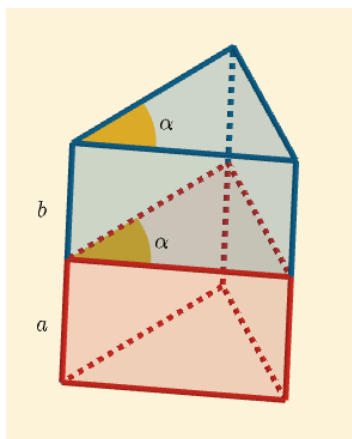
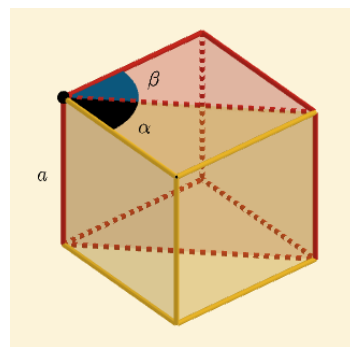


Proposición 6.4 (Aditividad del invariante de Dehn). Sean P_1 y P_2 dos poliedros que no se superponen entre sí. Entonces

$$\mathfrak{d}(P_1 \cup P_2) = \mathfrak{d}(P_1) + \mathfrak{d}(P_2)$$

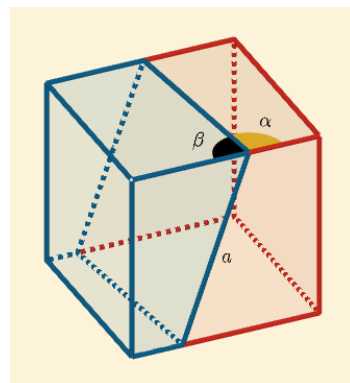
Demostración. La demostración se reduce a probar cómo son los lados y ángulos diédricos poliedro resultante de unir otros dos y ver como afecta esto al invariante de Dehn. Podemos considerar tres casos:

- Si un lado de longitud a en P_1 y otro de la misma longitud en P_2 forman un solo lado de $P_1 \cup P_2$ de longitud a al hacer la unión. En este caso, el ángulo diédral α sobre ese lado en $P_1 \cup P_2$ será la suma $\alpha_1 + \alpha_2$ de los ángulos en P_1 y P_2 .
Y como en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ $(a, \alpha_1 + \alpha_2) = (a, \alpha_1) + (a, \alpha_2)$, la contribución de esto a \mathfrak{d} son las mismas.



- Si dos lados de longitudes a en P_1 y b en P_2 , con el mismo ángulo diédral α forman un lado de longitud $a + b$ en $P_1 \cup P_2$. Como en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ $(a + b, \alpha) = (a, \alpha) + (b, \alpha)$, la contribución de esto a \mathfrak{d} son las mismas.

- Si dos lados de longitud a en P_1 y P_2 forman una sola cara al hacer la unión. En este caso, no forman ningún lado en $P_1 \cup P_2$, pero los ángulos diédricos de ambos lados α en P_1 y β en P_2 han de ser suplementarios para formar esa cara, por lo tanto $\alpha + \beta = \pi$. Y como en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ $(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \pi) = 0$, la contribución de esto a \mathfrak{d} son las mismas.



□

Corolario 6.5. Dos poliedros equicompuestos tienen el mismo invariante de Dehn.

Demostración. Sean dos poliedros equicompuestos P y P' . Entonces ambos pueden descomponerse en las uniones no superpuestas de

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_n \quad \text{y} \quad P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$$

con $P'_i = \varphi_i(P_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, siendo φ_i un movimiento rígido del espacio sin reflexiones.

Entonces se tiene que $\mathfrak{d}(P_i) = \mathfrak{d}(P'_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego por (6.4) se tiene que

$$\mathfrak{d}(P) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{d}(P_i) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{d}(P'_i) = \mathfrak{d}(P')$$

□

Lema 6.6. *Sea $(a, \alpha) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Entonces,*

$$(a, \alpha) = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o es múltiplo racional de } \pi$$

Demostración.

\Rightarrow) Sea $(a, \alpha) = 0$ y supongamos que $a \neq 0$. Ahora, entendamos \mathbb{R} como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . Dado que $a \neq 0$, $a\mathbb{Q}$ es un subespacio vectorial unidimensional suyo. Escogamos $W = (a\mathbb{Q})^\perp$. Entonces para cada $b \in \mathbb{R}$, podemos expresarlo de forma única como $b = q \cdot a + w$ con $q \in \mathbb{Q}$ y $w \in W$.

Entonces, definimos el homomorfismo de grupos

$$f : \quad \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$$

$$z = \sum_{i=1}^n (b_i, \beta_i) \quad \mapsto \quad f(z) := \sum_{i=1}^n q_i \cdot \beta_i$$

de tal manera que $a_i = q_i \cdot a + w_i$ para cada $i \in 1, \dots, n$.

Comprobemos que f está bien definida.

- Primero, como $\beta_i \in \pi\mathbb{Z}$, entonces $r_i \beta_i \in \pi\mathbb{Q}$ para cada $i \in 1, \dots, n$.
- Si $z = (b, \beta) = (b_1, \beta) + (b_2, \beta)$ con

$$b_1 = r_1 \cdot a + w_1$$

$$b_2 = r_2 \cdot a + w_2$$

Entonces, $b = (r_1 + r_2) \cdot a + (w_1 + w_2)$ y por lo tanto $f(z) = (r_1 + r_2) \cdot \beta$.

Por el otro lado, por ser f homomorfismo

$$f(z) = f((b_1, \beta)) + f((b_2, \beta)) = r_1 \cdot \beta + r_2 \cdot \beta = (r_1 + r_2) \cdot \beta$$

Luego f está bien definida. Ahora, $a = 1 \cdot a + 0$, por lo que $f((a, \alpha)) = \alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$. Entonces, si $(a, \alpha) = 0$ en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, por ser f homomorfismo de grupos, $f((a, \alpha)) = 0$ en $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$, luego $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, es decir, α es múltiplo racional de π .

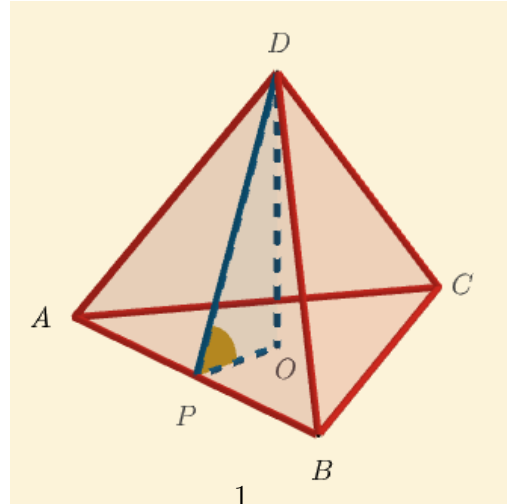
\Leftarrow) Si $a = 0$ el resultado es claro. Supongamos que α es un múltiplo racional de π , entonces $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ con $p, q \in \mathbb{Z}$. Entonces, operando en $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tenemos que

$$(a, \alpha) = q \cdot (a/q, \alpha) = (a/q, q\alpha) = (a/q, p\pi) = 0$$

□

Proposición 6.7. *El invariante de Dehn de un tetraedro regular es no nulo.*

Demostración. Sea el tetraedro regular $T = ABCD$ de lado a . Para calcular su invariante de Dehn, primero debemos conocer su ángulo diedral. Sea O el centro de la cara $\triangle ABC$. Y sea P el pie de la altura de D en la cara $\triangle ABD$. En el triángulo rectángulo $\triangle APD$ la hipotenusa $AD = a$ y el cateto $AP = a/2$ por lo que, aplicando el teorema de Pitágoras, deducimos que $PD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ahora, como el triángulo $\triangle APC \cong \triangle APD$, se tiene que $PC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y por ser O baricentro de $\triangle ABC$, se tiene que $OP = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Por lo tanto, del triángulo rectángulo $\triangle POD$ obtenemos que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ y en consecuencia $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Sea ahora el número complejo $w = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{1 + 2\sqrt{-2}}{3} \in \mathbb{C}$. w es raíz del polinomio $3z^2 + 2z + 3 \in \mathbb{Q}[z]$, por lo que $\mathbb{Q}(w) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ es una extensión de cuerpos de grado 2 sobre \mathbb{Q} .

Ahora, si α fuera un múltiplo racional de π , es decir, si

$$\alpha = \frac{p}{q} 2\pi \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } (p, q) \sim 1$$

y entonces z sería una q -ésima raíz primitiva de la unidad y su polinomio mínimo sería el polinomio ciclotómico $\Phi_{\mathbb{Q}}^q(z)$, que tiene grado $\phi(q)$, siendo ϕ la función de Euler que se define como

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n p_i^{l_i-1} (p_i - 1) \quad \text{para } m = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n} \quad \text{para cada } m \in \mathbb{Z}$$

Los únicos valores que hacen $\phi(p) = 2$ son $q = 3, 4, 6$ cuyas correspondientes extensiones de cuerpos son respectivamente $(\sqrt{-3})$ Y $\mathbb{Q}(i)$, ambas distintas a $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, lo que es contradictorio.

En consecuencia, concluimos que α no es un múltiplo racional de π y, por el lema (6.6), que el invariante de Dehn del tetraedro $\mathfrak{d}(T) \neq 0$. \square

Teroema 6.8 (Tercer problema de Hilbert). *En el espacio euclidiano, la igualdad de volumen no implica la equicomposición.*

Demostración. Es consecuencia directa de lo que hemos probado anteriormente. Hemos visto que dos polígonos equicompuestos tienen el mismo invariante de Dehn y que el de un cubo y un tetraedro nunca van a tener el mismo valor, ya que uno será nulo y el otro no.

Sin embargo, sí existen tetraedros y cubos con el mismo volumen. Un cubo de lado l tiene un volumen de l^3 , al igual que un tetraedro de lado l lo tiene de $\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$. Por lo tanto,

un cubo de lado 1 y un tetraedro de lado $\sqrt[3]{6\sqrt{2}}$ tienen ambos volumen 1, pero no son equicompuestos. \square

Teroema 6.9 (Dehn-Sydler). *Dos poliedros son equicompuestos si y sólo si tienen el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn.*

Observación 6.10. *La demostración de la condición necesaria fue gracias a Sydler en 1965, pero todavía permanece abierto el problema para la geometrías esféricas e hiperbólicas. Por otro lado, tras resolver el tercer problema de Hilbert, se demostró que se satisfacía una modificación de la condición de Bricard. En el 2007, Benko demostró la condición de Bricard modificada a partir del lema de las perlas y no como consecuencia del tercer problema de Hilbert.*

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos realizado un recorrido por las distintas maneras que los seres humanos hemos desarrollado para comparar el tamaño de los polígonos. Hemos intentado plasmar las ideas puramente geométricas de una manera clara y sencilla (lo cual a veces es más complicado de lo que parece) y haciendo especial hincapié en la estética, siguiendo el camino que dejó marcado Oliver Byrne en 1874 en su versión de los Elementos de Euclides.

Además, hemos podido constatar dos grandes verdades que se dan en el ámbito de la geometría. La primera es que, las implicaciones entre los diversos conceptos que dependen de una serie de axiomas que en ocasiones se asumen y en otras se intentan demostrar, se pueden volver muy tediosas y complicadas. Quizás aún más cuando se generalizan estos conceptos en busca de encontrar más dependencias entre ellos. Un ejemplo claro es el de asociar a la equidescomposición un grupo de isometrías del plano con el que poder mover los triángulo que forman los polígonos, como hace Boltianski en [4]. Otro podría ser el trabajo de Benko, demostrando que la condición de Bricard puede implicar el Teorema de Dehn en con la ayuda de su *lema de las perlas* [2]. Sin duda alguna, estos y otros muchos ejemplos más darían para mucho que analizar, pero lamentablemente sobrepasan los objetivos de este trabajo.

La segunda verdad que hemos verificado es el gran avance que supuso a principios del s.XX el desarrollo de las llamadas «matemáticas modernas», donde los sistemas axiomáticos asentaron unas bases firmes para el desarrollo de las teorías, y la formalización hizo que el avance en geometría se facilitara. Aquí juega un papel fundamental el álgebra moderna, como hemos visto en esta última sección, o como puede constatarse en materias como la teoría de números, que nos ayuda a resolver problemas como estos o como el de la constructibilidad.

Gracias a este trabajo, personalmente, he podido poner en práctica una manera de pensar que se ha ido formando en estos años de estudio y que gracias a asignaturas como *Matemática elemental*, *Teoría de Conjuntos*, *Ecuaciones Algebraicas* o la ya citada *Teoría de Números* me ha llevado a entender la problemática, los razonamientos y las conclusiones de grandes figuras de las matemáticas en nuestra historia reciente.

Bibliografía

- [1] Martin Aigner y Günter M. Ziegler. «Hilbert's third problem: Decomposing polyhedra». En: *Proofs from THE BOOK* (2018), págs. 67-75. DOI: [10.1007/978-3-662-57265-8_10](https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8_10).
- [2] David Benko. «A New Approach to Hilbert's Third Problem». En: *The American Mathematical Monthly* 114.8 (2007), págs. 665-676. DOI: [10.1080/00029890.2007.11920458](https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920458).
- [3] Vladimir G. Boltianski. *Figuras equivalentes y equicompuetas*. Trad. por Stanislav N. Beloúsov. Lecciones populares de matemáticas. MIR, 1981.
- [4] Vladimir G. Boltianski. *Hilbert's third problem*. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, 1978. ISBN: 0-470-26289-3.
- [5] Danuta Ciesielska y Krzysztof Ciesielski. «Equidecomposability of Polyhedra: A Solution of Hilbert's Third Problem in Kraków before ICM 1900». En: *The Mathematical Intelligencer* 40.2 (2018), págs. 55-63. DOI: [10.1007/s00283-017-9748-4](https://doi.org/10.1007/s00283-017-9748-4).
- [6] Euclides. *Elementos*. Trad. por María Luisa Puertas. Biblioteca Gredos. RBA Coleccionables, 2007. ISBN: 978-84-473-5307-1.
- [7] Eduardo N. Giovannini. «David Hilbert and the foundations of the theory of plane area». En: *Archive for History of Exact Sciences* 75.6 (2021), págs. 649-698. DOI: [10.1007/s00407-021-00278-z](https://doi.org/10.1007/s00407-021-00278-z).
- [8] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond*. Undergraduate Text in Mathematics. Springer, 2000. Cap. 5. ISBN: 978-0387-98650-0.
- [9] Angela Head. *Pythagorean Theorem*. Último acceso en junio de 2023. URL: <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMT668.Student.Folders/HeadAngela/essay1/Pythagorean.html>.
- [10] David Hilbert. *Fundamentos de la geometría*. Trad. por Francisco Cebrián. Textos Universitarios. Consejo superior de investigaciones científicas, 1991. ISBN: 84-00-07114-X.
- [11] Lydia A. Krasilnikova. «Hilbert's third problem (A Story of Threes)». Tesis de maestría. Massachusetts Institute of Technology, 2015.
- [12] Edwin E. Moise. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Addison-Wesley, 1996.
- [13] Nicholas Rougeux. *Euclides de Byrne*. Último acceso en junio de 2023. URL: <https://www.c82.net/euclid/es/>.
- [14] Richard Evan Schwartz. «The Dehn-Sydler Theorem Explained». En: Brown University, 2010.

Apéndice A

Los axiomas de la geometría plana de Hilbert

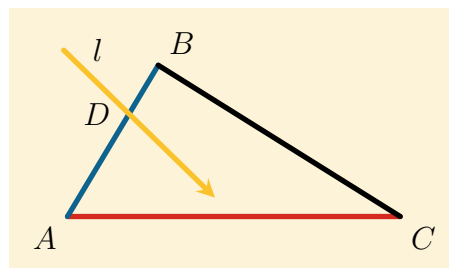
AXIOMAS DE INCIDENCIA:

- I1. Para dos puntos distintos A, B , existe una única recta l que contiene A y B .
- I2. Toda recta contiene al menos dos puntos.
- I3. Existen tres puntos no alineados (no todos contenidos en una misma recta).

AXIOMAS DE ORDENACIÓN:

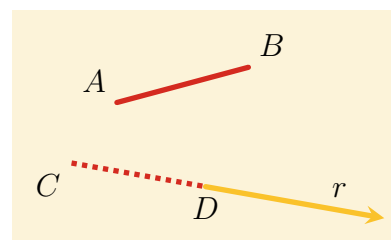
- B1. Si B está entre A y C , (escrito como $A * B * C$), entonces A, B, C son tres puntos distintos que pertenecen a la misma recta, y también $C * B * A$.
- B2. Para cualquiera dos puntos distintos A, B , existe un punto C tal que $A * B * C$.
- B3. Dados A, B, C , tres puntos distintos en una recta, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos. Es decir: $A * B * C$, o bien $A * C * B$, o bien $B * A * C$.

B4. (Pasch). Dados A, B, C tres puntos no alineados, y una recta l que no contiene a ninguno de ellos. Si l contiene a un punto D tal que $A * D * B$, entonces debe contener también un punto entre A y C , o bien, un punto entre B y C , pero no ambos.

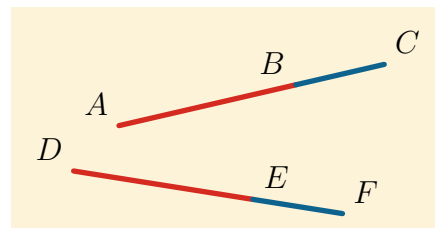


AXIOMAS DE CONGRUENCIA DE SEGMENTOS:

- C1. Dado un segmento AB y un rayo r con origen un punto C , existe un único punto D en el rayo r tal que $AB \cong CD$.
- C2. Si $AB \cong CD$ y $AB \cong EF$, entonces $CD \cong EF$. Todo segmento es congruente consigo mismo.

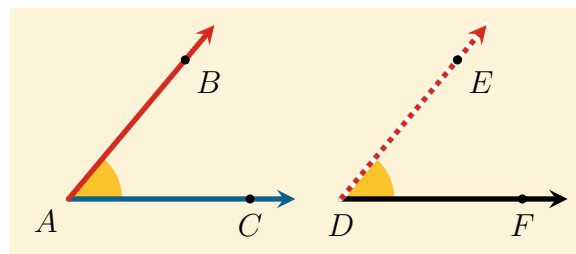


C3. (Suma) Dados tres puntos A, B, C en una recta cumpliendo $A * B * C$, y tres puntos más D, E, F en una recta cumpliendo que $D * E * F$, si $AB \cong DE$ y $BC \cong EF$, entonces $AC \cong DF$.



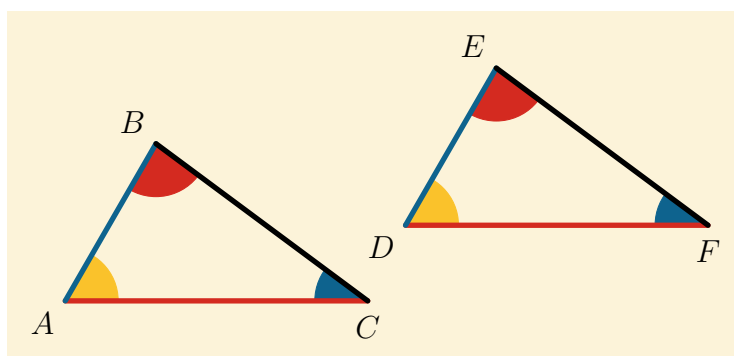
AXIOMAS DE CONGRUENCIA DE ÁNGULOS:

C4. Dado un ángulo $\angle BAC$ y dado un rayo \vec{DF} , existe un único rayo \vec{DE} , en un lado dado de la recta DF , tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.



C5. Para cualquiera tres ángulos α, β, γ , si $\alpha \cong \beta$ y $\alpha \cong \gamma$, entonces $\beta \cong \gamma$. Todo ángulo es congruente consigo mismo.

C6. (LAL) Dados dos triángulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ cumpliendo que $AB \cong DE$ y $AC \cong DF$, y que $\angle BAC \cong \angle EDF$, entonces los dos triángulos son congruentes. Es decir, $BC \cong EF, \angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle ACB \cong \angle DFE$.

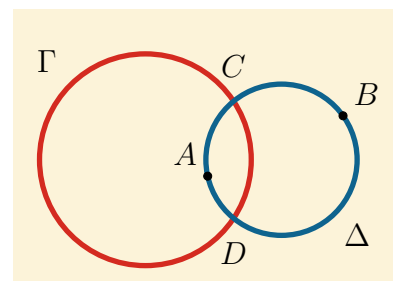


AXIOMAS DE PARALELISMO:

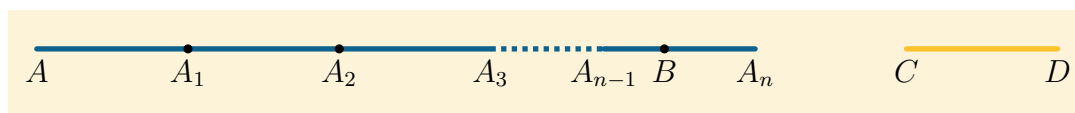
P_{<1}. (Playfair) Para cada punto A y cada recta l , hay a lo sumo una recta que pasa por A y es paralela a l .

AXIOMAS DE CONTINUIDAD:

ICC. Dadas dos circunferencias Γ, Δ , si Δ contiene al menos un punto A en el interior de Γ y otro punto B en el exterior de Γ , entonces Δ y Γ intersecan en exactamente dos puntos C, D .



A. (Arquímedes) Dados dos segmentos AB y CD , existen un número de puntos A_1, A_2, \dots, A_n tales que $A * A_1 * A_2 * \dots * A_n$ con los segmentos $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots \cong A_{n-1}A_n \cong CD$, de tal modo que $A * B * A_n$.



D. (Dedekind) Dada una recta r que está dividida en dos subconjuntos S y T de tal manera que ningún punto de S está entre dos puntos de T y ningún punto de T está entre dos de S , existe un único punto P que separa S y T . Es decir: si $A \in S$ y $B \in T$, o bien $P = B$, o bien $A * P * B$.



