

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

Aplicaciones de la cohomología de Alexander-Spanier en dinámica discreta

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

David Jesús Nieves Rivera

DIRECTORES

Luis Hernández Corbato
Francisco Romero Ruiz del Portal
Jaime Jorge Sánchez Gabites

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

Aplicaciones de la cohomología de Alexander-Spanier en dinámica discreta

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

David Jesús Nieves Rivera

DIRECTORES

Luis Hernández Corbato
Francisco Romero Ruiz del Portal
Jaime Jorge Sánchez Gabites



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Programa de Doctorado en Investigación Matemática

TESIS DOCTORAL

**Aplicaciones de la cohomología de Alexander–Spanier en
dinámica discreta**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA
POR

David Jesús Nieves Rivera

DIRECTORES

**Luis Hernández Corbato
Francisco Romero Ruiz del Portal
Jaime Jorge Sánchez Gabites**

Dedicado a mi chamaquita Natalia

Agradecimientos

Agradezco mucho a mis directores por brindarme la oportunidad de realizar esta tesis con ellos. Me han apoyado mucho durante estos años, han resuelto todas las dudas que he tenido (y han repetido sus explicaciones todas las veces que ha hecho falta hasta que he logrado entenderlas), y han sido extremadamente pacientes conmigo. He aprendido mucho de ellos y de todas las reuniones que hemos tenido.

Estoy muy agradecido con el profesor Álvaro Sánchez González por permitirme colaborar docentemente con él en la asignatura de Álgebra Lineal, ha sido una experiencia increíble. Le agradezco mucho las tutorías y todo el tiempo que se ha tomado para explicarme lo que han hecho a lo largo de cada semana, esto me permitió llevar las clases con normalidad. He aprendido mucho de las clases y sobre todo de las alumnas y alumnos que he tenido a lo largo de estos años.

I am very grateful to my supervisor Jan Boronski during my stay in Krakow, Poland. The professor Jan and his group gave me a warm welcome and allowed me to participate in all their meetings (and meals). They also gave me the opportunity to explain my research, and I have learned a lot from them about 0 dimensional systems.

No tengo muchas palabras para mi familia y mis amigas y amigos, lo son todo para mí y los he extrañado mucho.

Por último, agradezco a la Universidad Complutense de Madrid por concederme un contrato predoctoral (en el turno de discapacidad) financiado por la propia universidad y el banco Santander. Este contrato me ha permitido vivir solo (con mi gata Sony) durante estos años que ha durado la tesis.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
1. (Co)homología de Čech	1
1.1. Homología de Čech	1
1.1.1. Homologías a escala \mathcal{X}	1
1.1.2. Todas las homologías a escala \mathcal{X} coinciden	4
1.1.3. Aplicación inducida en las homologías a escala \mathcal{X}	8
1.1.4. Homología de Čech y aplicación inducida	10
1.1.5. Homología de Čech con coeficientes	12
1.1.6. Descripción del 0-ésimo grupo de homología de Čech	13
1.1.7. Descripción del 1-ésimo grupo de homología de Čech	20
1.2. Cohomología de Čech	23
1.2.1. Cohomología de Alexander–Spanier	24
1.2.2. Cohomologías a escala \mathcal{X}	24
1.2.3. Todas las cohomologías a escala \mathcal{X} coinciden	25
1.2.4. Aplicación inducida en las cohomologías a escala \mathcal{X}	26
1.2.5. Cohomología de Čech y aplicación inducida	28
1.2.6. Descripción del 0-ésimo grupo de cohomología de Čech	31
1.2.7. Representante (localmente) finito de una clase de cohomología de Čech	34
2. Integral	37
2.1. Motivación	37
2.2. Definición de la integral	38
2.3. No degeneración de la integral	44
2.4. Propiedades de la integral	48
2.5. Algunos ejemplos	52
3. Aplicaciones a la dinámica discreta	55
3.1. Introducción	55
3.2. Series de clases de cohomología	56
3.3. Series de clases de homología	61
3.4. Series e integral	65
3.5. Configuraciones dinámicas	66

3.5.1.	Conjuntos invariantes aislados	66
3.5.2.	Subconjunto inestable compactificado	67
3.5.3.	Topología del conjunto inestable	68
3.5.4.	Consideraciones adicionales	69
3.5.5.	Hipótesis permanentes	71
3.5.6.	Resultados sobre las cuasi-componentes	71
3.6.	Dinámica de un par atractor-repulsor	72
3.6.1.	Homología de Čech de la región de atracción	73
3.6.2.	Elección de una familia adaptada de recubrimientos abiertos	75
3.6.3.	Una interpretación de la sucesión de Mayer-Vietoris	76
3.6.4.	Cota superior del número de cuasi-componentes esenciales	77
3.6.5.	Calculo del número de cuasi-componentes esenciales	78
4.	Dinámica y autovalores en dimensión cero	83
4.1.	Introducción	83
4.2.	Definiciones y resultados sobre particiones	86
4.3.	Demostración del Teorema para Cohomología	88
4.4.	Autovalores y ϵ -particiones. Demostración del Teorema para Homología	89
4.4.1.	Demostración de $(I) \implies (IV)$ para f sobreyectiva	90
4.4.2.	Demostración de $(I) \implies (IV)$ para un f arbitrario	95
4.4.3.	Demostración de $(IV) \implies (V) \implies (VI) \implies (III) \implies (II) \implies (I)$	96
4.5.	ϵ -particiones y dinámica. Demostración del Teorema 4.7	99
5.	Generalización del Teorema de Manning	105
5.1.	Introducción	105
5.2.	¿Por qué están los teoremas formulados en términos cohomológicos?	106
5.3.	Demostración de las generalizaciones I y II del Teorema de Manning	109
5.3.1.	Parte final de la demostración de la generalización I del Teorema de Manning	110
5.4.	Demostración de la generalización II del Teorema de Manning	110
5.4.1.	Observación sobre coeficientes. Selección de autovectores	111
5.4.2.	Un lema de la aproximación diofántica	113
5.4.3.	Demostración de la generalización II del Teorema de Manning	115
A.	Nociones básicas sobre los sistemas directos/inversos	117
A.1.	Sistemas directos e inversos	117
A.2.	Límites inversos	118
A.3.	Límites directos	119
A.4.	Algunos resultados algebraicos	121
Bibliografía		129

Resumen

En este trabajo, relacionamos los autovalores y autovectores de la aplicación inducida de $f : X \rightarrow X$ en homología o cohomología con propiedades dinámicas del sistema dinámico (X, f) . Las teorías que mejor se adaptan a este problema son las de Čech ya que son las más adecuadas para describir espacios con malas propiedades locales que son situaciones comunes en dinámica, por ejemplo, los atractores extraños.

Para abordar el problema anterior, utilizamos aproximaciones intrínsecas de la homología y cohomología de Čech (no pasamos por los complejos simpliciales para construir los complejos de cadenas o cocadenas) como las dadas en [Giraldo, Morón, Ruiz del Portal, y Sanjurjo(2001)] y [Spanier(1948)], respectivamente, que desarrollamos en el Capítulo 1. También describimos en detalle los 0 y 1-ésimos grupos de homología, y el 0-ésimo grupo de cohomología de Čech.

En el Capítulo 2 definimos una aplicación bilineal «integral» de las clases de cohomología sobre las clases de homología de Čech. En general, la cohomología de Čech no es el dual de la homología de Čech, por lo que no nos basta con evaluar las clases de cohomología sobre las clases de homología para definir dicha integral. Para definir la integral hacemos uso de las aproximaciones intrínsecas de la homología y cohomología de Čech dadas en el Capítulo 1. Primero definimos la integral a escala un recubrimiento abierto fijado de X , y luego en el límite. Vemos que la integral es una aplicación bilineal que es no degenerada en ambas de sus entradas, cumple el Teorema de Stokes y también conmuta con los homomorfismos conectantes de las sucesiones de Mayer–Vietoris en homología y cohomología de Čech. La integral fue introducida por nosotros en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)].

En el Capítulo 3 introducimos las series en homología en el mismo marco teórico que las series en cohomología dadas en [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)], las cuales también repasamos en este capítulo. Vemos que la integral es tal que conmuta con dichas series. También probamos la utilidad de la integral para abordar problemas de índice de Conley discreto para conjuntos invariantes aislados. Sabemos por [Robbin y Salamon(1988)] que el índice de Conley homológico o cohomológico de un conjunto invariante aislado K se puede calcular a partir de la compactificación W del conjunto inestable de K . Presentamos una demostración alternativa de un resultado probado en [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)]: el número de cuasi-componentes «esenciales» de $W \setminus K$ (aquellas que son adherentes al conjunto invariante aislado K y al infinito) está acotado superiormente por la dimensión del 1-ésimo grupo de homología de W . En [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2022)] dimos dicha demostración.

En el Capítulo 4 relacionamos los autovalores y autovectores de la aplicación inducida de $f :$

$X \rightarrow X$ en homología o cohomología de Čech en dimensión cero con propiedades dinámicas del sistema dinámico (X, f) . Para la cohomología obtenemos que los autovalores no nulos son raíces de la unidad mientras que para la homología existe una dicotomía: o bien existe una inmensa cantidad de autovalores o bien los autovalores no nulos son raíces de la unidad, y es en este último caso cuando obtenemos una descripción detallada del comportamiento dinámico de f . Hemos presentado este análisis en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2019)].

En el Capítulo 5 damos una generalización del Teorema de Manning [Manning(1975)] a espacios compactos arbitrarios, posiblemente con malas propiedades locales. La motivación para establecer dicho teorema es la siguiente.

La entropía topológica de un sistema dinámico es una medida de complejidad de dicho sistema. Que un sistema dinámico posea entropía topológica positiva implica la presencia de caos (en algunas de sus interpretaciones) en el sistema. Sin embargo, el cálculo de la entropía topológica no es una tarea sencilla, por lo que nos solemos conformar con encontrar una cota inferior que nos garantice que la entropía topológica es positiva. Siguiendo este principio, el Teorema de Manning establece que la entropía topológica de una aplicación continua $f : X \rightarrow X$ en una variedad compacta X está acotada inferiormente por el logaritmo del valor absoluto del radio espectral de la aplicación inducida de f en la homología singular en dimensión 1. La generalización del Teorema de Manning dada en el Capítulo 5 sirve para espacios compactos arbitrarios y está escrita en términos de la cohomología de Čech en dimensión 1 en lugar de la homología singular. Este marco fue sugerido por Manning al final de [Manning(1975)] y recupera la versión original del teorema cuando el espacio es una variedad compacta. Obsérvese que se emplea la cohomología en lugar de la homología de Čech porque con esta última el resultado no es cierto, como se puede comprobar construyendo un contraejemplo a partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 4. Hemos presentado estas generalizaciones en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)].

En el Apéndice A repasamos las nociones de sistemas inversos y directos así como sus límites. También presentamos algunos resultados algebraicos (consideramos sistemas inversos y directos de espacios vectoriales) que han sido de gran utilidad a lo largo de todo este trabajo.

Abstract

In this work, we relate the eigenvalues and the eigenvectors of the induced map by a continuous map $f : X \rightarrow X$ on homology or cohomology to dynamic properties of the dynamical system (X, f) . The theories that best fit to this problem are Čech's because they are the most suitable for describing spaces with bad local properties that are common situations in dynamic, for example, strange attractors. To address the previous problem, we use intrinsic approximations of Čech homology and cohomology (we do not go through the simplicial complex to build the chain or cochain complex) like those given in [Giraldo, Morón, Ruiz del Portal, y Sanjurjo(2001)] and [Spanier(1948)], respectively, that we develop in the Chapter 1. Also we describe in detail the 0th and the 1st Čech homology groups, and the 0th Čech cohomology group.

In the Chapter 2 we define a bilinear map “integral” of the classes of Čech cohomology over the classes of Čech homology. In general, the Čech cohomology is not the dual of the Čech homology, it is not enough to evaluate the classes of cohomology over the classes of homology to define such integral. To define the integral we use the intrinsic approximations of Čech homology and cohomology given in the Chapter 1. First we define the integral at scale a fixed open cover of X , and then in the limit. We see that the integral is a bilinear map that is nondegenerate at both of its inputs, satisfies the Stokes theorem and also commutes with the connecting homomorphisms of Mayer–Vietoris sequences in Čech homology and cohomology. The integral was introduced by us in [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)].

In the Chapter 3 we introduce the series in homology in the same theoretical framework that the series in cohomology given in [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)], which we also review in this chapter. We see that the integral is such that commutes with such series. We prove the utility of the integral to address problems of discrete Conley index for isolated invariant sets. We know by [Robbin y Salamon(1988)] that the homology or cohomology Conley index for an isolated invariant set K can be computed from the compactification W of the unstable set of K . And also, we give an alternative proof of a result which has been proved in [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)]: the number of “essential” quasi-components de $W \setminus K$ (those that are adherent to K and extend to infinity) is bounded from above by the dimension of the 1st homology group of W . We have given said proof in [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2022)].

In the Chapter 4 we relate the eigenvalues and the eigenvectors of the induced map by $f : X \rightarrow X$ on Čech homology or cohomology in dimension zero to dynamical properties of the dynamical system (X, f) . For the cohomology we obtain that the nonzero eigenvalues are roots of unity while for the homology there is a dichotomy: either there is an immense quantity of eigenvalues or the

nonzero eigenvalues are roots of unity, in the latter case, we obtain a detailed description of the dynamic behaviour of f . The analysis of the dynamic in dimension zero was realized by us in [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2019)].

In the Chapter 5 we present a generalization of the Manning's theorem [Manning(1975)] to arbitrary compact spaces, possibly with bad local properties. The motivation to establish such theorem is the following.

The topological entropy of a dynamical system is a measure of complexity of the system. Which a dynamical system has positive topological entropy implies the presence of chaos (in some of its interpretations) in the system. However, the computation of the topological entropy is not an easy task, so we settle for finding a lower bound which ensures that the topological entropy is positive. Following this principle, Manning's theorem states that the topological entropy of a continuous map $f : X \rightarrow X$ of a compact manifold X is bounded from below by the logarithm of the spectral radius of the induced map by f on singular homology in dimension 1. The generalization of Manning's theorem given in the Chapter 5 works for arbitrary compact spaces in terms of Čech cohomology in dimension 1 instead of singular homology. This framework was suggested by Manning at the end of [Manning(1975)] and retrieves the original version of the theorem when the space is a compact manifold. Note that it is used the cohomology instead of the Čech homology since with the latter the result is not true, as one can check by building a counterexample from the results obtained in the Chapter 4. We have presented these generalizations in [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)].

In the Appendix A we review the notions of direct and inverse systems as well as their limits. We also present some algebraic results (we regard inverse and direct systems of vector spaces) which have been very useful throughout this work.

Capítulo 1

(Co)homología de Čech

En sistemas dinámicos, las teorías de Čech son algunas veces más útiles que la homología y cohomología singular ya que son más adecuadas (debido a que cumplen el axioma de continuidad) para describir espacios topológicos con malas propiedades locales tales como atractores extraños. Una referencia estándar para estas teorías es [Eilenberg y Steenrod(1952)], y para una introducción histórica de dichas teorías, ver [Massey(1978)]. La homología (y la cohomología) de Čech coincide con la homología (y la cohomología) singular para espacios con buenas propiedades locales, tales como los espacios triangulables y las variedades topológicas.

1.1. Homología de Čech

La homología de Čech se suele definir de una manera no intrínseca, en términos del complejo de recubrimientos de Čech o de Vietoris, entornos de algún encaje del espacio en el cubo de Hilbert, etc. Presentaremos dichas descripciones de la homología de Čech, y además, también daremos un par de descripciones intrínsecas (no pasamos por el complejo simplicial para construir el complejo de cadenas). La obtención de una de estas descripciones intrínsecas está inspirada por [Giraldo, Morón, Ruiz del Portal, y Sanjurjo(2001)].

Sea X un espacio topológico. Consideramos un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X . Veremos en la siguiente subsección como definir homologías a escala \mathcal{X} , y veremos en la Subsección 1.1.2 que todas estas homologías coinciden bajo ciertas condiciones. En la Subsección 1.1.3 introduciremos las aplicaciones inducidas en dichas escalas y definiremos la homología de Čech en la Subsección 1.1.4 (con coeficientes en la Subsección 1.1.5). Estudiaremos el 0 y 1-ésimo grupo de homología de Čech en la Subsección 1.1.6 y 1.1.7, respectivamente.

1.1.1. Homologías a escala \mathcal{X}

Definición 1.1. *El complejo de Čech asociado a \mathcal{X} (también conocido como el nervio de \mathcal{X} , [Čech(1932)]) es el complejo simplicial $N(\mathcal{X})$ definido como sigue:*

a). *Sus vértices son los elementos de \mathcal{X} .*

b). Una colección finita de vértices $\{U_0, U_1, \dots, U_q\}$ genera un q -símplice de $N(\mathcal{X})$ si y solo si $\bigcap_{i=0}^q U_i \neq \emptyset$.

Vamos a considerar la homología simplicial $H_q(N(\mathcal{X}))$ del complejo simplicial $N(\mathcal{X})$. Recordemos que $H_q(N(\mathcal{X}))$ es un grupo abeliano. Una introducción a los complejos simpliciales y a la homología simplicial se puede encontrar en los Capítulos 3 y 4 de [Spanier(1966)].

Otro complejo simplicial, que será más útil para nosotros, es el complejo de Vietoris $V(\mathcal{X})$. Este complejo simplicial fue introducido en [Vietoris(1927)], y desarrollos posteriores y recientes (que han cambiado su denominación por el complejo de Vietoris–Rips) se han restringido a espacios métricos; sin embargo, presentaremos aquí una definición en términos de un recubrimiento abierto:

Definición 1.2. *El complejo de Vietoris asociado a \mathcal{X} es el complejo simplicial $V(\mathcal{X})$ definido como sigue:*

a). Sus vértices son los puntos de X .

b). Una colección finita de vértices $\{x_0, x_1, \dots, x_q\}$ definen un q -símplice de $V(\mathcal{X})$ si y solo si existe $U \in \mathcal{X}$ que lo contiene.

Vamos a considerar la homología simplicial $H_q(V(\mathcal{X}))$ del complejo simplicial $V(\mathcal{X})$. Como mencionamos anteriormente, nuestro objetivo en esta sección es obtener una descripción alternativa de la homología de Čech $\check{H}_q(X)$ que solo involucre objetos que son intrínsecos al espacio, es decir, símplices en X , cadenas construidas como combinaciones lineales de símplices, y homologías entre ellas. Al contrario que en la homología singular, sin embargo, necesitamos (y queremos) permitir que los símplices no sean continuos.

Por un q -símplice entendemos una aplicación $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ que no es necesariamente continua. Aquí Δ_q denota el q -símplice estandar en \mathbb{R}^{q+1} , que viene dado por

$$\Delta_q = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} : \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_j \geq 0 \ \forall j = 0, 1, \dots, q \right\};$$

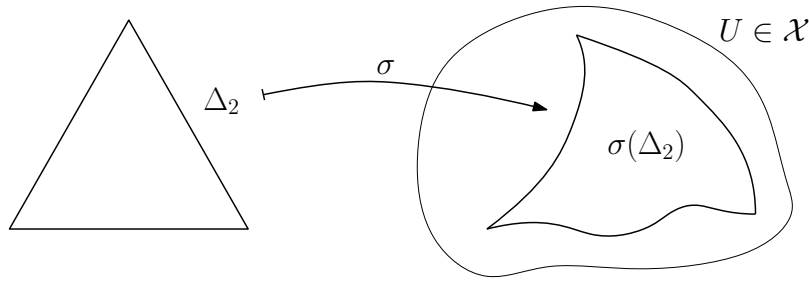
es decir, la envolvente convexa de sus vértices $v_0^q := (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $v_1^q := (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, \dots , $v_q^q := (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$. Sea $S_q(X)$ el grupo abeliano libre generado por los q -símplices de X . Sus elementos se llaman q -cadenas.

Para $i \in \{0, \dots, q\}$, consideramos Δ_{q-1}^i como la $(q-1)$ -cara de Δ_q opuesta al vértice v_i^q por medio del encaje estándar $e_i^q : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$ dado por

$$e_i^q(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}) := (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \dots, \lambda_{q-1}).$$

Definimos el operador borde $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ como $\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ e_i^q$, y extendemos dicha definición a cualquier q -cadena por linealidad.

Definición 1.3. *Decimos que un q -símplice es \mathcal{X} -pequeño si su imagen está contenida en algún elemento U de \mathcal{X} .*


 Figura 1.1: 2-símplice \mathcal{X} -pequeño

El grupo de q -cadenas \mathcal{X} -pequeñas, $S_q^{\mathcal{X}}(X)$, es el grupo abeliano libre generado por los q -símplices \mathcal{X} -pequeños. No es muy difícil comprobar que el operador coborde ∂_q lleva q -símplices \mathcal{X} -pequeños en $(q-1)$ -cadenas \mathcal{X} -pequeñas, y así, tenemos el siguiente complejo de cadenas

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+2}} S_{q+1}^{\mathcal{X}}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q^{\mathcal{X}}(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}^{\mathcal{X}}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$$

a cuya homología la denotamos por $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$. Una introducción al complejo de cadenas así como a su homología se puede encontrar en [Spanier(1966)].

Definición 1.4. Un q -símplice formal en X es una colección ordenada $\sigma = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ de $q+1$ puntos de X . Decimos que los x_i son los vértices de σ , y decimos σ es \mathcal{X} -pequeño si todos sus vértices están contenidos en algún elemento de \mathcal{X} .

Sea un subconjunto $A \subset X$. Decimos que un q -símplice formal σ **está contenido en** A si todos sus vértices están contenidos en A . Y decimos que una q -cadena formal $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ está contenida en A si σ_i está contenido en A para todo $i = 1, \dots, n$.

Antes de continuar, decimos que los puntos $x_0, x_1, \dots, x_q \in X$ son \mathcal{X} -cercaños si existe un elemento de \mathcal{X} que contiene a todos estos puntos; es decir, si $(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ define un q -símplice formal \mathcal{X} -pequeño.

Una q -cadena formal es una combinación lineal $c = \sum_{i=1}^m k_i \sigma_i$ de q -símplices formales σ_i con coeficientes $k_i \in \mathbb{Z}$. Decimos que c es \mathcal{X} -pequeña si todos los σ_i son \mathcal{X} -pequeños, y denotamos por $C_q^{\mathcal{X}}(X)$ al grupo abeliano formado por las q -cadenas formales \mathcal{X} -pequeñas. El borde de un q -símplice formal $\sigma = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ se define de la manera usual como la $(q-1)$ -cadena formal

$$\partial(\sigma) := \sum_{j=0}^q (-1)^j (x_0 \ \dots \ \widehat{x}_j \ \dots \ x_q),$$

donde $(x_0 \ \dots \ \widehat{x}_j \ \dots \ x_q)$ es el $(q-1)$ -símplice formal determinado por la colección ordenada x_0, x_1, \dots, x_q donde hemos omitido el vértice x_j . El borde de un símplice formal \mathcal{X} -pequeño es claramente también \mathcal{X} -pequeño, y así, tenemos el complejo de cadenas $\{C_q^{\mathcal{X}}(X), \partial\}$. Denotamos a su homología por $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ y nos referimos a ella como **la homología de X a escala (el recubrimiento abierto) \mathcal{X}** .

Si \mathcal{X} y \mathcal{X}' son recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' **refina a** \mathcal{X} (es decir, para cada $V \in \mathcal{X}'$, entonces existe $U \in \mathcal{X}$ tal que $V \subset U$), entonces existe un homomorfismo de $H_q^{\mathcal{X}'}(X)$ en $H_q^{\mathcal{X}}(X)$

puesto que cada q -símplice formal \mathcal{X}' -pequeño es claramente también \mathcal{X} -pequeño. También existe un homomorfismo de $H_q(V(\mathcal{X}'))$ en $H_q(V(\mathcal{X}))$, y de $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}'}(X)$ en $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$. Veremos en la Subsección 1.1.4 cómo construir un sistema inverso indexado por la familia de todos los recubrimientos abiertos de X .

Intuitivamente, $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ ignora toda la estructura de X a escala más pequeña que \mathcal{X} :

Proposición 1.5. *Sea $q \geq 1$. Sea c un q -ciclo formal. Si c está contenido en algún elemento $U \in \mathcal{X}$, entonces $[c] = 0$ en $H_q^{\mathcal{X}}(X)$.*

Demostración. Fijemos un punto arbitrario $a \in U$. Para cualquier q -símplice formal $\sigma = (x_0 x_1 \dots x_q)$ contenido en U , consideramos $C_a(\sigma) = (a x_0 x_1 \dots x_q)$; un cono formal de σ sobre a que sigue estando contenido en U . Para cualquier q -cadena formal $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ contenida en U , definimos $C_a(c) = \sum_{i=1}^n k_i C_a(\sigma_i)$.

Esta operación en símplices formales satisface que

$$\partial(C_a(\sigma)) + C_a(\partial(\sigma)) = \sigma$$

y dicha identidad se mantiene para cadenas. Si aplicamos la identidad a un ciclo c (cadena formal cuyo borde es nulo), obtenemos que $c = \partial(C_a(c))$ es un borde, y así, $[c] = 0$ en $H_q^{\mathcal{X}}(X)$. \square

1.1.2. Todas las homologías a escala \mathcal{X} coinciden

Primero veamos que $H_q(N(\mathcal{X}))$ y $H_q(V(\mathcal{X}))$ son isomorfos. Sabemos gracias a [Dowker(1952)] que dados A y B conjuntos y una relación \sim en $A \times B$, tenemos que los siguientes complejos simpliciales

$$\{\{a_0, a_1, \dots, a_q\} \subset A : \exists b \in B \text{ tal que } a_0 \sim b, a_1 \sim b, \dots, a_q \sim b\}$$

y

$$\{\{b_0, b_1, \dots, b_q\} \subset B : \exists a \in A \text{ tal que } a \sim b_0, a \sim b_1, \dots, a \sim b_q\}$$

son homotópicamente equivalentes.

Si consideramos la relación \sim en $X \times \mathcal{X}$ dada por $x \sim U$ si $x \in U$, tenemos que

$$N(\mathcal{X}) = \{\{U_0, U_1, \dots, U_q\} \subset \mathcal{X} : \exists x \in X \text{ tal que } x \sim U_0, x \sim U_1, \dots, x \sim U_q\}$$

y

$$V(\mathcal{X}) = \{\{x_0, x_1, \dots, x_q\} \subset X : \exists U \in \mathcal{X} \text{ tal que } x_0 \sim U, x_1 \sim U, \dots, x_q \sim U\},$$

y así, por el resultado de Dowker, $N(\mathcal{X})$ y $V(\mathcal{X})$ son homotópicamente equivalentes. Por tanto, tenemos la proposición siguiente:

Proposición 1.6. *$H_q(N(\mathcal{X}))$ y $H_q(V(\mathcal{X}))$ son isomorfos.*

Veamos ahora que $H_q(V(\mathcal{X}))$ y $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ son isomorfos. Nótese que si descartamos los símplices formales \mathcal{X} -pequeños que poseen vértices repetidos e ignoramos el orden de los vértices que los definen (en el sentido de que dos símplices formales con los mismos vértices definen el mismo elemento

si sus vértices tienen la misma ordenación), obtenemos los simplices geométricos del complejo de Vietoris $V(\mathcal{X})$. Salvo que se indique lo contrario, los simplices formales son solo simplices ordenados de los complejos de Vietoris $V(\mathcal{X})$. Por tanto existe una aplicación de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$ a las cadenas simpliciales de $V(\mathcal{X})$ que envía un simple formal \mathcal{X} -pequeño $(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ al mismo simple orientado de $V(\mathcal{X})$ si todos los vértices son distintos, y al cero en caso contrario. Dicha aplicación induce un isomorfismo en homología (ver por ejemplo el Teorema 13.6 de [Munkres(1984)]) y por tanto $H_q(V(\mathcal{X}))$ puede ser identificado con $H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Por lo anterior, tenemos la proposición siguiente:

Proposición 1.7. $H_q(V(\mathcal{X}))$ y $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ son isomorfos.

Por último, veamos que $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ y $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$ son isomorfos. Existe una aplicación obvia $\varphi : S_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow C_q^{\mathcal{X}}(X)$ definida como sigue. Dado un q -simple \mathcal{X} -pequeño $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ de $S_q^{\mathcal{X}}(X)$, existe $U \in \mathcal{X}$ tal que $\text{Im}(\sigma) \subset U$, por lo que las imágenes $x_i := \sigma(v_i^q)$ de los vértices de Δ_q también están contenidas en U . Y así, definimos $\varphi(\sigma)$ como el q -simple formal $(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. Esencialmente, φ ignora toda la información de σ excepto por sus vértices. Finalmente, extendemos φ linealmente a una aplicación de todo $S_q^{\mathcal{X}}(X)$ en $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. Es sencillo comprobar que φ conmuta con los operadores borde, y por consiguiente, induce una aplicación $\varphi_* : \mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X)$.

Veremos a continuación que φ_* es un isomorfismo, es decir:

Proposición 1.8. $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ y $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$ son isomorfos.

Antes de comenzar la demostración de la proposición anterior, veremos cómo «discretizar» cualquier simple de $S_q(X)$. Esto se hace esencialmente reteniendo solo los valores que dicho simple toma sobre los vértices de Δ_q . En lugar de trabajar directamente con los simplices de $S_q(X)$ mostraremos cómo discretizar el simple estándar Δ_q ; esto nos brinda un proceso para discretizar cualquier simple de $S_q(X)$.

Definimos una aplicación $D_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ como sigue. Dado un punto $p = (\lambda_0, \dots, \lambda_q)$ de Δ_q , encontraremos el más pequeño i tal que $\lambda_i > 0$ y definimos $D_q(p) := v_i^q$, ver la Figura 1.2. Es sencillo comprobar que $D_q \circ e_i^q = e_i^q \circ D_{q-1}$. Geométricamente, esto significa que la discretización de una $(q - 1)$ -cara de Δ_q heredará por la acción de D_q es exactamente igual a la discretización que D_{q-1} produce al actuar directamente sobre dicha $(q - 1)$ -cara.

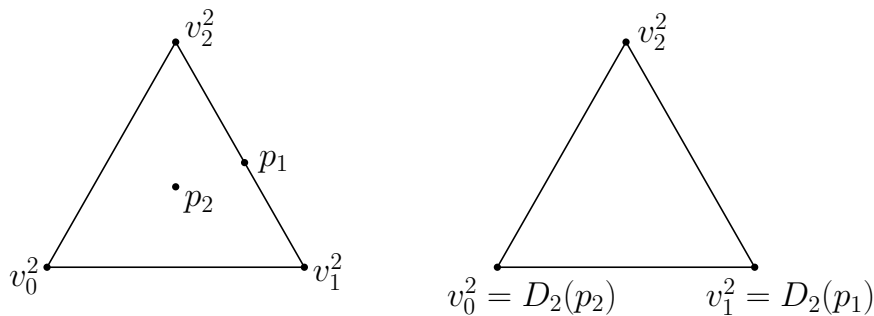


Figura 1.2: Discretización de Δ_2

Si $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ es un simple de X , discretizar dicho simple no es más que precomponerlo con D_q ; es decir, definimos la discretización de σ como $D_q^\#(\sigma) := \sigma \circ D_q$. Similarmente, si $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$

es una q -cadena de X , definimos la discretización de c como $D_q^\#(c) := \sum_{i=1}^n k_i D_q^\#(\sigma_i)$. Llamaremos a $D_q^\# : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ el **operador discretizador**. (Estamos usando un superíndice $\#$ debido a que, formalmente, este operador es contravariante). Se sigue de la relación $D_q \circ e_i^q = e_i^q \circ D_{q-1}$ mencionada en el párrafo anterior que $D_q^\#$ conmuta con el operador borde, es decir, $D_{q-1}^\# \circ \partial_q = \partial_q \circ D_q^\#$: para cualquier q -símplice σ , tenemos que

$$\begin{aligned} (D_{q-1}^\# \circ \partial_q)(\sigma) &= D_{q-1}^\#(\partial_q(\sigma)) = D_{q-1}^\# \left(\sum_{i=0}^q \sigma \circ e_i^q \right) = \sum_{i=0}^q \sigma \circ e_i^q \circ D_{q-1} \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ D_q \circ e_i^q = \sum_{i=0}^q (-1)^i D_q^\#(\sigma) \circ e_i^q \\ &= \partial_q(D_q^\#(\sigma)) = (\partial_q \circ D_q^\#)(\sigma), \end{aligned}$$

y se sigue que la igualdad anterior es válida para cualquier q -cadena por linealidad.

Lema 1.9. *El operador discretizador es equivalente por cadenas a la identidad.*

Demostración. Definimos una aplicación $F_q : \Delta_q \times [0, 1] \rightarrow \Delta_q$ por $F_q(p, 0) = p$ y $F(p, t) = D_q(p)$ para cualquier $0 < t \leq 1$ (esta es una «homotopía discontinua» entre la identidad y D_q). Dicha aplicación cumple que

$$e_j^q \circ F_{q-1} = F_q \circ (e_j^q \times \text{Id}_{[0,1]}). \quad (1.1)$$

Definimos una aplicación $E_i^q : \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q \times [0, 1]$ por

$$E_i^q(\lambda_0, \dots, \lambda_{q+1}) := ((\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{q+1}), \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{q+1}).$$

Esta última aplicación está bien definida: tenemos que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{q+1}) \in \Delta_q$ ya que cada una de sus coordenadas es no negativa y la suma de dichas coordenadas es igual a 1, mientras que $\lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{q+1} \in [0, 1]$. Y no es muy difícil comprobar que

$$(E_i^q \circ e_j^{q+1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) = \begin{cases} ((\lambda_0, \dots, \lambda_q), \lambda_i + \dots + \lambda_q) & \text{si } j = i \\ ((\lambda_0, \dots, \lambda_q), \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_q) & \text{si } j = i + 1 \\ ((e_j^q \times \text{Id}_{[0,1]}) \circ E_{i-1}^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) & \text{si } j < i \\ ((e_{j-1}^q \times \text{Id}_{[0,1]}) \circ E_i^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) & \text{si } i + 1 < j. \end{cases} \quad (1.2)$$

Finalmente, para cualquier q -símplice $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ definimos la aplicación $P_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$ por

$$P_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q \circ E_i^q,$$

y extendemos P_q linealmente a cualquier q -cadena de X .

Veamos que $\partial_{q+1} \circ P_q = D^\# - \text{Id} - P_{q-1} \circ \partial_q$. Para cualquier q -símplice $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ de X y cualquier punto $(\lambda_0, \dots, \lambda_q)$ de Δ_q , tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\partial_{q+1}(P_q(\sigma)))(\lambda_0, \dots, \lambda_q) &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q \circ E_i^q \right) \circ e_j^{q+1} \right) (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &= \sum_{j=i} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ E_i^q \circ e_j^{q+1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) + \sum_{j=i+1} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ E_i^q \circ e_j^{q+1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &+ \sum_{j<i} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ E_i^q \circ e_j^{q+1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) + \sum_{i+1<j} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ E_i^q \circ e_j^{q+1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &= \sum_{j=0}^q (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), \lambda_j + \dots + \lambda_q) - \sum_{j=1}^{q+1} (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), \lambda_j + \dots + \lambda_q) \\
 &+ \sum_{j<i} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ (e_j^q \times \text{Id}_{[0,1]})) \circ E_{i-1}^{q-1}(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &+ \sum_{i+1<j} (-1)^{j+i} (\sigma \circ F_q \circ (e_{j-1}^q \times \text{Id}_{[0,1]})) \circ E_i^{q-1}(\lambda_0, \dots, \lambda_q),
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (1.2), y aplicando la igualdad (1.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
 &= (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), \lambda_0 + \dots + \lambda_q) - (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), 0) \\
 &+ \sum_{j<i} (-1)^{j+i} (\sigma \circ e_j^q \circ F_{q-1} \circ E_{i-1}^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) + \sum_{i+1<j} (-1)^{j+i} (\sigma \circ e_{j-1}^q \circ F_{q-1} \circ E_i^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q)
 \end{aligned}$$

y con el cambio de variable $i = i + 1$ en el tercer sumatorio y $j = j + 1$ en el cuarto sumatorio, llegamos a que

$$\begin{aligned}
 &= (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), 1) - (\sigma \circ F_q)((\lambda_0, \dots, \lambda_q), 0) \\
 &+ \sum_{j \leq i} (-1)^{j+i+1} (\sigma \circ e_j^q \circ F_{q-1} \circ E_i^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) + \sum_{i < j} (-1)^{j+i+1} (\sigma \circ e_j^q \circ F_{q-1} \circ E_i^{q-1})(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &= (\sigma \circ D_q)(\lambda_0, \dots, \lambda_q) - \sigma(\lambda_0, \dots, \lambda_q) - \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \left(\left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ e_j^q \right) \circ F_{q-1} \circ E_i^{q-1} \right) (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \\
 &= (D_q^\#(\sigma))(\lambda_0, \dots, \lambda_q) - \sigma(\lambda_0, \dots, \lambda_q) - (P_{q-1}(\partial_q(\sigma)))(\lambda_0, \dots, \lambda_q).
 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que $\partial_{q+1} \circ P_q = D_q^\# - \text{Id} - P_{q-1} \circ \partial_q$, y así, P_q proporciona una equivalencia por cadenas del operador discretizador y la identidad. \square

Demostración de la Proposición 1.8. Definimos otra aplicación $\psi : C_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow S_q^{\mathcal{X}}(X)$ tal que ψ_* es una inversa para φ_* . Sea $\tau = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ un q -símplice formal de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. Vamos a definir un q -símplice $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ tal que $\sigma(v_i^q) = x_i$. Para ello, hacemos uso de una ligera variación en la construcción de la discretización considerada antes. Definimos $\psi(\tau) : \Delta_q \rightarrow X$ como sigue: dado un punto $p = (\lambda_0, \dots, \lambda_q)$ de Δ_q , encontramos el subíndice i más pequeño tal que $\lambda_i > 0$ y definimos

$(\psi(\tau))(p) := x_i$. Este q -símplice es, de hecho, \mathcal{X} -pequeño ya que su imagen es $\{x_0, \dots, x_q\}$ la cual es finita y está contenida en algún elemento $U \in \mathcal{X}$ debido a que los x_i forman un q -símplice formal \mathcal{X} -pequeño de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. Extendemos ψ linealmente a todo $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. No es muy difícil comprobar que ψ conmuta con los operadores borde, por lo que induce $\psi_* : H_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow \mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$.

Claramente $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{C_q^{\mathcal{X}}(X)}$, y así $\varphi_* \circ \psi_* = \text{Id}_{H_q^{\mathcal{X}}(X)}$. Todavía queda por comprobar que $\psi_* \circ \varphi_* = \text{Id}_{\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)}$. Se sigue directamente de las definiciones de φ y ψ que $\psi \circ \varphi = D_q^{\#}$, el operador discretizador discutido previamente. Debido a que la discretización de un q -símplice σ fue desarrollada primero en el q -símplice estándar Δ_q y llevada a X por medio de σ , está claro que si uno comienza con un q -símplice σ que es \mathcal{X} -pequeño entonces su contraparte discretizada también será \mathcal{X} -pequeña. Lo mismo ocurre con el operador prisma P_q considerado en la demostración del Lema 1.9. Por tanto el Lema 1.9 es también válido para q -cadenas \mathcal{X} -pequeñas, y por tanto $D_q^{\#}$ induce la aplicación identidad en homología. Esto concluye la demostración. \square

Observación 1.10. *En la demostración anterior no entra en juego si la imagen de cada q -símplice \mathcal{X} -pequeño es finita o no, así que podemos redefinir $S_q^{\mathcal{X}}(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los q -símplices \mathcal{X} -pequeños que tienen imágenes finitas.*

Para futuras referencias, dejaremos patente en esta subsección la siguiente observación:

Observación 1.11. *Si el recubrimiento abierto \mathcal{X} es finito, entonces $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ es finitamente generado.*

Demostración. Como \mathcal{X} es finito, el complejo de Čech $N(\mathcal{X})$ es un complejo simplicial finito, y así, $H_q(N(\mathcal{X}))$ es finitamente generado. Por tanto, como todos los grupos de homología a escala \mathcal{X} que hemos visto son isomorfos, tenemos que $H_q^{\mathcal{X}}(X)$, $H_q(V(\mathcal{X}))$ y $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$ son también finitamente generados pese a que estos últimos grupos de homología se definen en términos de objetos no finitos. \square

1.1.3. Aplicación inducida en las homologías a escala \mathcal{X}

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua) entre dos espacios topológicos. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} recubrimientos abiertos de X e Y , respectivamente.

¿Cuándo la aplicación inducida $f_{\#} : C_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow C_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ dada por

$$f_{\#}(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q) := (f(x_0) \ f(x_1) \ \dots \ f(x_q))$$

(y extendida a cualquier cadena de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$ por linealidad) está bien definida?

La respuesta es cuando f lleve puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{Y} -ceranos. Cuando lo anterior ocurre, las aplicaciones inducidas $f_{\#} : S_q(V(\mathcal{X})) \rightarrow S_q(V(\mathcal{Y}))$ y $f_{\#} : S_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow S_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ también están bien definidas.

Proposición 1.12. *Si f lleva puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{Y} -ceranos, entonces $f_{\#}(C_q^{\mathcal{X}}(X)) \subset C_q^{\mathcal{Y}}(Y)$.*

Resaltemos que si \mathcal{X} es tal que refina a $f^{-1}(\mathcal{Y})$ (aunque este último recubrimiento no sea necesariamente por abiertos), entonces f cumple la hipótesis de la proposición anterior.

Demostración. Sea $(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ un símlice de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$, por lo que los puntos x_0, x_1, \dots, x_q son \mathcal{X} -ceranos, y así, por hipótesis, tenemos que los puntos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_q)$ son \mathcal{Y} -ceranos, y en consecuencia,

$$(f(x_0) \ f(x_1) \ \dots \ f(x_q)) = f_{\#}(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$$

define un símlice de $C_q^{\mathcal{Y}}(Y)$. Podemos extender, por linealidad, el resultado anterior a cualquier cadena de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$. \square

Además, como $f_{\#}$ conmuta con el operador borde, también podemos definir $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ por $f_*([c]) = [f_{\#}(c)]$ para cualquier $[c] \in H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Y por supuesto, también podemos definir $f_* : H_q(V(\mathcal{X})) \rightarrow H_q(V(\mathcal{Y}))$ y $f_* : \mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow \mathcal{H}_q^{\mathcal{Y}}(Y)$.

Notación: Dados \mathcal{U} y \mathcal{V} recubrimientos abiertos de X . La colección de subconjuntos de X , $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$, es un recubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{U} y \mathcal{V} . Nos referimos a $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ como el refinamiento común de \mathcal{U} y \mathcal{V} .

Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación, y sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Como ya mencionamos, si \mathcal{X}' es un recubrimiento abierto de X tal que \mathcal{X}' refina a $f^{-1}(\mathcal{X})$, entonces es posible definir $f_* : H_q^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Análogamente, si $P(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots + a_d t^d \in \mathbb{Z}[t]$ es un polinomio de grado d con coeficientes en \mathbb{Z} , tenemos que el homomorfismo

$$P(f_*) = a_0 f_*^0 + a_1 f_*^1 + \dots + a_d f_*^d : H_q^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X)$$

está bien definido si x_0, x_1, \dots, x_q son puntos \mathcal{X}' -ceranos, entonces $f^i(x_0), f^i(x_1), \dots, f^i(x_q)$ son puntos \mathcal{X} -ceranos para todo $i = 0, \dots, d$ (por ejemplo, cuando \mathcal{X}' refina a $\mathcal{X} \vee f^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X})$).

Sean ahora $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones entre los espacios topológicos X e Y . Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} recubrimientos abiertos de X e Y , respectivamente. Dichos recubrimientos son tales que es posible definir $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ y $g_* : H_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$.

Proposición 1.13. *Tenemos que $f_* = g_*$ si se cumple que: si $x_0, \dots, x_q \in X$ son puntos \mathcal{X} -ceranos, entonces $f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_q) \in Y$ son puntos \mathcal{Y} -ceranos para cualquier $i = 0, \dots, q$.*

Demostración. Definimos la aplicación $D : C_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow C_{q+1}^{\mathcal{Y}}(Y)$ dada por

$$D(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (f(x_0) \ \dots \ f(x_i) \ g(x_i) \ \dots \ g(x_q)).$$

Por hipótesis, tenemos que $D(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ está bien definido puesto que cada uno de sus sumandos es un símlice de $C_{q+1}^{\mathcal{Y}}(Y)$. Extendemos su definición a cada cadena de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$ por linealidad.

Una demostración análoga a la dada en la página 112 de [Hatcher(2002)] demuestra que

$$\partial \circ D + D \circ \partial = g_{\#} - f_{\#}.$$

Por tanto, para cualquier ciclo c de $C_q^{\mathcal{X}}(X)$ (es decir, $\partial(c) = 0$), tenemos que

$$g_{\#}(c) - f_{\#}(c) = \partial(D(c)) + D(\partial(c)) = \partial(D(c)),$$

y así, $g_*([c]) - f_*([c]) = [g_{\#}(c)] - [f_{\#}(c)] = [g_{\#}(c) - f_{\#}(c)] = 0$. En definitiva, $f_* = g_*$. \square

1.1.4. Homología de Čech y aplicación inducida

La familia de recubrimientos abiertos de X (a la que denotaremos por $\text{Cov}(X)$) es un conjunto dirigido con una relación \succ dada por $\mathcal{X}' \succ \mathcal{X}$ si \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Esta relación es reflexiva y transitiva, y además, para cada par de elementos $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ de $\text{Cov}(X)$, tenemos que $\mathcal{X} \vee \mathcal{X}' \succ \mathcal{X}, \mathcal{X}'$ (puesto que cualquier elemento de $\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'$ es de la forma $U \cap V$ con $U \in \mathcal{X}$ y $V \in \mathcal{X}'$), concluyendo así que $\text{Cov}(X)$ con la relación \succ es un conjunto dirigido.

Consideremos la aplicación identidad $\text{Id} : X \rightarrow X$. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X . Si \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} (es decir, \mathcal{X}' refina a $\text{Id}^{-1}(\mathcal{X})$), podemos definir $p_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} := \text{Id}_* : H_q(V(\mathcal{X}')) \rightarrow H_q(V(\mathcal{X}))$. Y así, $\{H_q(V(\mathcal{X})); p_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}\}$ es un sistema inverso indexado por la colección de todos los recubrimientos abiertos de X . El límite inverso

$$\varprojlim \{H_q(V(\mathcal{X})); p_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}\}$$

de este sistema es $\check{H}_q(X)$, la homología de Čech de X . Esto puede ser tomado como una definición o bien, si el lector está familiarizado con la definición en términos de los nervios del recubrimiento, como una consecuencia de la Proposición 1.6.

Por otro lado, la aplicación identidad de X también induce la aplicación $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} := \text{Id}_* : H_q^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Y así, $\{H_q^{\mathcal{X}}(X); \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}\}$ es un sistema inverso indexado por $\text{Cov}(X)$. Por tanto, de la Proposición 1.7 se sigue que el límite inverso de $\{H_q^{\mathcal{X}}(X); \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}\}$ es isomorfo a $\check{H}_q(X)$.

También se pueden construir sistemas inversos a partir de las homología $\mathcal{H}_q^{\mathcal{X}}(X)$ y $H_q(N(\mathcal{X}))$. De nuevo, los límites inversos de estos sistemas inversos son isomorfos a $\check{H}_q(X)$.

Denotamos por $\pi_{\mathcal{X}}$ a la proyección de $\check{H}_q(X)$ en $H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Dichas proyecciones son tales que si \mathcal{X}' es un recubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{X} , entonces $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \circ \pi_{\mathcal{X}'} = \pi_{\mathcal{X}}$ por el Lema A.5 del Apéndice A.

En lo sucesivo, adoptaremos para $\check{H}_q(X)$ esta última descripción. Así, un elemento $\gamma \in \check{H}_q(X)$ consiste en una familia $\{\gamma_{\mathcal{X}}\}_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)}$ de clases de homología, donde cada $\gamma_{\mathcal{X}} \in H_q^{\mathcal{X}}(X)$, y si \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , entonces $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\gamma_{\mathcal{X}'}) = \gamma_{\mathcal{X}}$. A su vez, cada $\gamma_{\mathcal{X}}$ es representada por una (no única) q -cadena formal $c_{\mathcal{X}}$ que es \mathcal{X} -pequeña. Abusando de la notación, diremos que la q -cadena formal $c_{\mathcal{X}}$ es un **representante \mathcal{X} -pequeño** de γ .

Definición 1.14. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces $f_* : H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y})}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ está bien definida para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y . Y además, podemos definir

$$f_* : \check{H}_q(X) \rightarrow \check{H}_q(Y).$$

Sea $\gamma \in \check{H}_q(X)$. Definimos $f_*(\gamma) \in \check{H}_q(Y)$ de la siguiente manera: sea \mathcal{Y} un recubrimiento abierto de Y , entonces $\pi'_{\mathcal{Y}}(f_*(\gamma)) := f_*(\pi_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(\gamma))$, siendo $\pi'_{\mathcal{Y}}$ la proyección de $\check{H}_q(Y)$ en $H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ y siendo la f_* que aparece a la derecha, la aplicación inducida de f que va de $H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y})}(X)$ en $H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$.

Tenemos que $f_* : \check{H}_q(X) \rightarrow \check{H}_q(Y)$ está bien definida puesto que de la definición se sigue que cada $\gamma \in \check{H}_q(X)$ posee una única imagen, y que $f_*(\gamma) \in \check{H}_q(Y)$. Para comprobar esto último, sean \mathcal{Y} y \mathcal{Y}' recubrimientos abiertos de Y tales que \mathcal{Y}' refina a \mathcal{Y} , por lo que $f^{-1}(\mathcal{Y})$ y $f^{-1}(\mathcal{Y}')$ son recubrimientos abiertos de X tales que $f^{-1}(\mathcal{Y}')$ refina a $f^{-1}(\mathcal{Y})$. No es muy difícil comprobar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y})}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\mathcal{Y}}(Y) \\ \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y}), f^{-1}(\mathcal{Y}')} \uparrow & & \uparrow \pi'_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'} \\ H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y}')} (X) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\mathcal{Y}'}(Y) \end{array}$$

es conmutativo. Y así, para $\gamma \in \check{H}_q(X)$, tenemos que $\pi'_{\mathcal{Y}}(f_*(\gamma))$ y $\pi'_{\mathcal{Y}'}(f_*(\gamma))$ son tales que

$$\begin{aligned} \pi'_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(\pi'_{\mathcal{Y}'}(f_*(\gamma))) &= \pi'_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(f_*(\pi_{f^{-1}(\mathcal{Y}')}(\gamma))) = (\pi'_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'} \circ f_* \circ \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y}')})(\gamma) \\ &= (f_* \circ \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y}), f^{-1}(\mathcal{Y}')} \circ \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y})})(\gamma) = f_*(\pi_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(\gamma)) \\ &= \pi'_{\mathcal{Y}}(f_*(\gamma)), \end{aligned}$$

por lo que efectivamente $f_*(\gamma) \in \check{H}_q(Y)$.

Observación 1.15. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Por definición de la aplicación inducida $f_* : \check{H}_q(X) \rightarrow \check{H}_q(Y)$, tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \check{H}_q(Y) \\ \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y})} \downarrow & & \downarrow \pi'_{\mathcal{Y}} \\ H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y})}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\mathcal{Y}}(Y) \end{array}$$

es conmutativo para todo recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y . Además, por el Lema A.5 del Apéndice A se sigue que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \check{H}_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \check{H}_q(Y) \\ & & \downarrow \pi_{f^{-1}(\mathcal{Y})} & & \downarrow \pi'_{\mathcal{Y}} \\ & \swarrow \pi_{\mathcal{X}} & & & \\ H_q^{\mathcal{X}}(X) & \xrightarrow{\pi_{f^{-1}(\mathcal{Y}), \mathcal{X}}} & H_q^{f^{-1}(\mathcal{Y})}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\mathcal{Y}}(Y) \end{array}$$

es conmutativo para todo recubrimiento abierto \mathcal{X} de X que refine a $f^{-1}(\mathcal{Y})$.

En el Capítulo X de [Eilenberg y Steenrod(1952)] se prueba la **propiedad de continuidad** de la homología de Čech para espacios Hausdorff compactos: si $\{X_\alpha; \pi_{\alpha,\beta}\}$ es un sistema inverso de espacios Hausdorff compactos (y por tanto su límite inverso existe y es un espacio Hausdorff compacto, ver por ejemplo la página 55 de [Mardešić y Segal(1982)]), entonces

$$\check{H}_q(\varprojlim \{X_\alpha; \pi_{\alpha,\beta}\}) = \varprojlim \{\check{H}_q(X_\alpha; \pi_{\alpha,\beta_*}\}.$$

1.1.5. Homología de Čech con coeficientes

Sea G un grupo abeliano. Una q -cadena formal \mathcal{X} -pequeña con coeficientes en G es una combinación lineal con coeficientes en G de q -símplices formales \mathcal{X} -pequeños. Denotamos por $C_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ al conjunto formado por las q -cadenas formales \mathcal{X} -pequeñas con coeficientes en G . Claramente $C_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ es un grupo abeliano, y el operador borde ∂ lleva $C_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ en $C_{q-1}^{\mathcal{X}}(X; G)$, y así, tenemos el complejo de cadenas $\{C_q^{\mathcal{X}}(X; G), \partial\}$. Denotamos a su homología por $H_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ y nos referimos a ella como **la homología de X a escala \mathcal{X} con coeficientes en G** . Podemos desarrollar la homología de Čech con coeficientes de manera análoga a la homología de Čech en la Subsección 1.1.4. De esta manera, estas homologías forman un sistema inverso $\{H_q^{\mathcal{X}}(X; G), \pi_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$ de grupos abelianos indexado por $\text{Cov}(X)$, y denotamos a su límite inverso por $\check{H}_q(X; G)$. Decimos que $\check{H}_q(X; G)$ es **la homología de Čech de X con coeficiente en G** .

Observación 1.16. *Para R un anillo con 1, y \mathbb{K} un cuerpo, no es muy difícil comprobar que $\check{H}_q(X; R)$ (y $\check{H}_q(X; G_R)$ para G_R un R -módulo) es un R -módulo y que $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.*

Cuando un espacio topológico X es tal que su homología a cualquier escala \mathcal{X} (y en el límite) es finitamente generada, obtendremos una forma de construir elementos de su homología de Čech, como detallaremos después del lema siguiente:

Lema 1.17. *Sea \mathbb{K} un cuerpo y sea X un espacio métrico compacto tal que $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ tiene dimensión finita. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- Existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}_0 de X tal que la proyección $\pi_{\mathcal{X}}: \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ es inyectiva para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{X} que refine a \mathcal{X}_0 .*
- Para todo recubrimiento abierto \mathcal{X}_* de X , existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}_1 tal que si \mathcal{X} es otro recubrimiento abierto que refina a \mathcal{X}_1 , entonces la imagen de $\pi_{\mathcal{X},\mathcal{X}}: H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}_*}(X; \mathbb{K})$ es igual a la imagen de la proyección $\pi_{\mathcal{X}_*}: \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}_*}(X; \mathbb{K})$.*

Demostración. Como X es compacto, la familia de los recubrimientos finitos por abiertos de X es cofinal en la familia de todos los recubrimientos abiertos de X , y además, dentro de esta familia de recubrimientos finitos por abiertos es posible considerar una sucesión cofinal puesto que X es además métrico. En efecto, sea \mathcal{U}_0 un recubrimiento finito por abiertos de X , y sea \mathcal{U}_1 otro recubrimiento finito por abiertos tal que el diámetro de cada uno de sus elementos es menor que un número de Lebesgue de \mathcal{U}_0 (por ejemplo, la distancia más pequeña entre cada par de elementos distintos de \mathcal{U}_0), y así, \mathcal{U}_1 refina a \mathcal{U}_0 ; repitiendo este proceso, podemos construir una sucesión de

recubrimientos finitos por abiertos cuyo diámetro tienda a cero, siendo así cofinal en la familia de recubrimientos finitos por abiertos de X . Y además, como los recubrimientos de dicha sucesión son finitos, la Observación 1.11 nos garantiza que las homologías a escalas dichos recubrimientos son finitamente generadas.

En definitiva, la tesis de este lema se sigue de aplicar el Lema A.17 del Apéndice A. \square

Este resultado es especialmente útil para construir elementos de $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ partiendo de un elemento de $H_q^{\mathcal{X}_*}(X; \mathbb{K})$. Así, si uno tiene un q -ciclo formal \mathcal{X}_* -pequeño $c_{\mathcal{X}_*}$ y es capaz de demostrar que este puede ser «refinado» a un q -ciclo formal \mathcal{X}_1 -pequeño $c_{\mathcal{X}_1}$ en el sentido de que $c_{\mathcal{X}_1}$ y $c_{\mathcal{X}_*}$ son homólogos en $H_q^{\mathcal{X}_*}(X; \mathbb{K})$, entonces uno puede encontrar un elemento de $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ teniendo a $c_{\mathcal{X}_*}$ como un representante \mathcal{X}_* -pequeño.

1.1.6. Descripción del 0-ésimo grupo de homología de Čech

Sea $A \subset X$. Decimos que A es **clopen** si es abierto y cerrado a la vez.

Definición 1.18. *Definimos la **cuasi-componente** de un punto $x \in X$ (y la denotamos por QC_x) como la intersección de todos los clopens de X que contienen a x . Claramente QC_x es cerrado por ser la intersección de cerrados.*

De la definición de cuasi-componente se sigue que: un punto x pertenece a un clopen A si y solo su cuasi-componente QC_x está contenida en A . Por lo que tenemos el siguiente lema:

Lema 1.19. *Sea QC una cuasi-componente de X . Entonces QC coincide con la intersección de todos los subconjuntos clopens de X que contienen a QC .*

Lema 1.20. *Si X es compacto, toda cuasi-componente QC posee una base de entornos clopens.*

Demostración. Sea A un entorno abierto de QC . Veamos que existe un entorno clopen de QC que está contenido en A . Tenemos que $X \setminus A$ es compacto puesto que $X \setminus A$ es cerrado y X es compacto. Para cada $x \in X \setminus A$, el lema anterior nos garantiza que existe un subconjunto clopen B_x de X tal que $QC \subset B_x$ y $x \in X \setminus B_x$. De esta manera, la colección $\{X \setminus B_x : x \in X \setminus A\}$ forma un recubrimiento abierto de $X \setminus A$, y como $X \setminus A$ es un compacto, el recubrimiento anterior posee un subrecubrimiento finito $\{X \setminus B_{x_1}, \dots, X \setminus B_{x_n}\}$. Por tanto,

$$X \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^n (X \setminus B_{x_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n B_{x_i},$$

y así, $\bigcap_{i=1}^n B_{x_i} \subset A$. Tenemos que $\bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$ es clopen por ser la intersección finita de clopens, y $QC \subset \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$ puesto que cada B_{x_i} contiene a QC . \square

Proposición 1.21. *Sea C_x la componente conexa que contiene al punto x . Podemos expresar la cuasi-componente que contiene al punto x como*

$$QC_x = \bigcap \{B \text{ clopen de } X : C_x \subset B\}.$$

Demostración. El contenido \subset se sigue de la definición de QC_x ya que la intersección de la derecha es sobre determinados clopens que contienen a x .

Para demostrar el otro contenido tenemos que comprobar que cada clopen que contiene a x también contiene a C_x . Sea B un clopen que contiene a x . Si C_x no estuviera contenido en B , entonces $B \cap C_x$ y $(X \setminus B) \cap C_x$ serían dos cerrados disjuntos no vacíos cuya unión es igual a C_x , llegando así a una contradicción con la conexión de C_x . \square

De la proposición anterior también deducimos que:

Corolario 1.22. *La componente conexa que contiene a un punto x está contenida en la cuasi-componente que contiene a x .*

Aunque el contenido es estricto en general, estas coinciden, por ejemplo, cuando una de ellas es abierta o cuando X es un espacio Hausdorff compacto (ver [Bredon(1993)]). También en esta otra situación:

Lema 1.23. *Si X tiene un número finito de cuasi-componentes, las componentes conexas y las cuasi-componentes coinciden.*

Demostración. Demostremos que cada cuasi-componente conexa QC_x es conexa. Sabemos que la cuasi-componente QC_x es cerrada, pero en este caso es también abierta puesto que su complementario es una unión finita de cerrados (las restantes cuasi-componentes). Sean A y B abiertos disjuntos de X tales que $QC_x \subset A \cup B$. Claramente $QC_x \cap A$ y $QC_x \cap B$ son abiertos que particionan QC_x , y además, son también cerrados puesto que sus complementarios son abiertos (el abierto $(QC_x \cap B) \cup (X \setminus QC_x)$ es el complementario de $QC_x \cap A$). Por lo que $x \in QC_x \cap A$ o bien $x \in QC_x \cap B$, y por definición de QC_x , esto implica que $QC_x \subset QC_x \cap A$ o bien $QC_x \subset QC_x \cap B$, es decir, $QC_x \subset A$ o bien $QC_x \subset B$. Concluyendo así que QC_x es conexo. \square

Algunas propiedades de las cuasi-componentes que serán usadas más adelante:

Lema 1.24. (I). *Si una cuasi-componente interseca a un subconjunto clopen O , entonces dicha cuasi-componente está contenida en O .*

(II). *Una familia finita de cuasi-componentes puede ser separada por subconjuntos clopens.*

(III). *Si X es compacto, y si $(p_n) \rightarrow p$ y $(q_n) \rightarrow q$ son dos sucesiones convergentes en X tales que $QC_{p_n} = QC_{q_n}$ para todo n , entonces $QC_p = QC_q$.*

Demostración. La afirmación (I) se sigue inmediatamente de la definición de cuasi-componente. Para (II), supongamos que QC y QC' son cuasi-componentes diferentes. Existe un entorno clopen V de QC que no contiene a QC' , por lo $QC' \cap V = \emptyset$ por la afirmación (I). De manera similar, obtenemos un clopen V' tal que $QC' \subset V' \subset X \setminus QC$. Entonces $V \cap (X \setminus V')$ y $V' \cap (X \setminus V)$ son clopens que separan QC y QC' . Este argumento puede ser generalizado a más de dos cuasi-componentes. Y en cuanto a (III), sea V un entorno clopen de QC_p . Como p_n está contenido en V para un n lo suficientemente grande, su cuasi-componente $QC_{p_n} = QC_{q_n}$ también debe de estar contenida en V gracias a la afirmación (I). En particular, $q_n \in V$ y concluimos que $q \in QC_p$ puesto que QC_p posee una base de entornos clopens (ver el Lema 1.20). \square

Sea X un espacio topológico y sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto suyo.

Definición 1.25. Decimos que $A \subset X$ es \mathcal{X} -**clopen** si es una unión maximal de los elementos de \mathcal{X} , en el sentido de que si un elemento de \mathcal{X} interseca a A , entonces dicho elemento está contenido en A . O dicho de otra manera, $A \subset X$ es \mathcal{X} -clopen si cada elemento $U \in \mathcal{X}$ es tal que $U \subset A$ o bien $U \subset A^c$, donde A^c denota el complementario de A en X .

Claramente \emptyset y X son \mathcal{X} -clopens, y si $A \subset X$ es \mathcal{X} -clopen, entonces A^c también lo es. Cada subconjunto \mathcal{X} -clopen es abierto por ser la unión de abiertos, y es también cerrado puesto que su complementario es abierto, por lo que todo subconjunto \mathcal{X} -clopen es clopen. La unión e intersección arbitraria de \mathcal{X} -clopens son \mathcal{X} -clopens. En efecto: sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de \mathcal{X} -clopens. Sea $U \in \mathcal{X}$, por lo que para cada $i \in I$, tenemos que $U \subset A_i$ o bien $U \subset A_i^c$. Si existe un $i \in I$ tal que $U \subset A_i$, entonces $U \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, y si $U \subset A_i^c$ para todo $i \in I$, entonces $U \subset \bigcap_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c$. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es \mathcal{X} -clopen. De manera análoga se prueba que $\bigcap_{i \in I} A_i$ es \mathcal{X} -clopen.

Evidentemente, un subconjunto clopen A es \mathcal{X} -clopen si \mathcal{X} refina al recubrimiento abierto $\{A, X \setminus A\}$. Podemos definir una relación de equivalencia en X dada por $y \sim z$ si todo \mathcal{X} -clopen A que contiene a y también contiene a z . Equivalentemente, si no existen A, B \mathcal{X} -clopens disjuntos tales que $y \in A$ y $z \in B$.

Definición 1.26. La clase de equivalencia de $x \in X$ es llamada la \mathcal{X} -**componente** de x y puede ser pensada como la (cuasi-)componente de x a escala \mathcal{X} . Dado $x \in X$, denotamos por $C_x^{\mathcal{X}}$ a la \mathcal{X} -componente que contiene al punto x . La \mathcal{X} -componente de x coincide con la intersección de todos los \mathcal{X} -clopens que contienen a x .

Como las clases de equivalencia particionan el espacio X , tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.27. La familia de las \mathcal{X} -componentes de X constituye una partición de X por clopens.

Proposición 1.28. Sea A un \mathcal{X} -clopen. Cualquier \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$ es tal que $C^{\mathcal{X}} \subset A$ o bien $C^{\mathcal{X}} \subset A^c$. En particular, cada \mathcal{X} -clopen se expresa como unión de \mathcal{X} -componentes.

Demostración. Esto se sigue de que A y A^c son \mathcal{X} -clopens que particionan el espacio X . \square

Por un **camino de puntos** en X entendemos una sucesión x_0, x_1, \dots, x_n de puntos de X ; decimos que el camino conecta x_0 y x_n . Y decimos que el camino de puntos x_0, x_1, \dots, x_n es \mathcal{X} -**pequeño** si cada par de puntos sucesivos x_i, x_{i+1} están contenidos en algún $U_i \in \mathcal{X}$ (es decir, son \mathcal{X} -cercanos). Definimos la relación $\sim_{\mathcal{X}}$ en X dada por $y \sim_{\mathcal{X}} z$ para $y, z \in X$ si existe un camino de puntos \mathcal{X} -pequeño que conecta y y z . Dicha relación es una relación de equivalencia, y además, no es muy difícil comprobar que la clase de equivalencia de un punto $x \in X$ coincide con la \mathcal{X} -componente que contiene a x .

Proposición 1.29. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X . Si \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , entonces la partición formada por las \mathcal{X}' -componentes refina a la partición formada por las \mathcal{X} -componentes. En particular, cada \mathcal{X} -componente se expresa como unión de \mathcal{X}' -componentes, y el número de \mathcal{X}' -componentes es mayor o igual que el número de \mathcal{X} -componentes.

Demostración. Sea $C^{\mathcal{X}'}$ una \mathcal{X}' -componente. Sean $y, z \in C^{\mathcal{X}'}$, por lo existe un camino de puntos x_0, \dots, x_n \mathcal{X}' -pequeño que une y y z , es decir, $x_0 = y$, $x_n = z$ y cada par de puntos sucesivos x_i, x_{i+1} están contenidos en algún $U'_i \in \mathcal{X}'$. Como \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , existe $V_i \in \mathcal{X}$ tal que $U'_i \subset V_i$ para todo $i = 0, \dots, n - 1$, por lo que el camino de puntos x_0, \dots, x_n es también \mathcal{X} -pequeño, y así, y y z están contenidos en la misma \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$. En definitiva, $C^{\mathcal{X}'} \subset C^{\mathcal{X}}$. \square

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior y del hecho de que cada subconjunto \mathcal{X} -clopen se expresa como unión de \mathcal{X} -componentes (ver la Proposición 1.28), tenemos el corolario siguiente:

Corolario 1.30. *Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Si A es \mathcal{X} -clopen, entonces A es \mathcal{X}' -clopen.*

Demostración. Esto también se sigue directamente de la definición de un subconjunto \mathcal{X} -clopen. Sea $V \in \mathcal{X}'$, por lo que existe $U \in \mathcal{X}$ tal que $V \subset U$. Como A es \mathcal{X} -clopen, tenemos que $U \subset A$ o bien $U \subset A^c$, y así, $V \subset U \subset A$ o bien $V \subset U \subset A^c$. Concluyendo de esta manera que A es \mathcal{X}' -clopen. \square

Observación 1.31. *Si X es compacto, entonces el número de \mathcal{X} -componentes es finito.*

Demostración. Como X es compacto y como las \mathcal{X} -componentes constituyen una partición de X por clopens, dicha partición posee un subrecubrimiento finito, por lo que la partición formada por las \mathcal{X} -componentes es finita.

Otra forma de demostrar esta observación es la siguiente. Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito \mathcal{X}' de \mathcal{X} . Como \mathcal{X}' es finito, existe solo un número finito de \mathcal{X}' -componentes, y como \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , tenemos que el número de \mathcal{X}' -componentes es mayor o igual que el número de \mathcal{X} -componentes, y así, el número de \mathcal{X} -componentes es finito. \square

Proposición 1.32. *Sea $x \in X$. Entonces,*

$$QC_x = \bigcap_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)} C_x^{\mathcal{X}}.$$

Demostración. Claramente QC_x está contenido en $\bigcap_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)} C_x^{\mathcal{X}}$ puesto que cada $C_x^{\mathcal{X}}$ es un clopen que contiene a x . Por otro lado, como cada clopen B que contiene a x es tal que $\mathcal{X} := \{B, X \setminus B\}$ es un recubrimiento abierto de X , tenemos que B es igual a la \mathcal{X} -componente que contiene a x , y así, $\bigcap_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)} C_x^{\mathcal{X}}$ está contenido en QC_x . \square

Como ejemplo en el cual tengamos que la componente conexa de un punto no coincida con su cuasi-componente, tenemos que el subconjunto del plano \mathbb{R}^2 formado por las bandas horizontales $[0, 1] \times \{\frac{1}{2^n}\}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ unión los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es tal que $C_{(0,0)} = \{(0, 0)\}$, y sin embargo, $QC_{(0,0)}$ contiene a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ puesto que para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{X} de X la \mathcal{X} -componente que contiene a $(0, 0)$ también contiene a $(1, 0)$, ver la Figura 1.3.

Definimos la relación \sim en X dada por $y \sim z$ para $y, z \in X$ si $y \sim_{\mathcal{X}} z$ para todo recubrimiento abierto \mathcal{X} de X . No es muy difícil comprobar que \sim es una relación de equivalencia, y además, la clase de equivalencia de un punto $x \in X$ coincide con $\bigcap_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)} C_x^{\mathcal{X}}$, y así, por la proposición anterior, dicha clase de equivalencia coincide con la cuasi-componente que contiene a x . Por tanto, la familia formada por las cuasi-componentes de X constituye una partición de X .

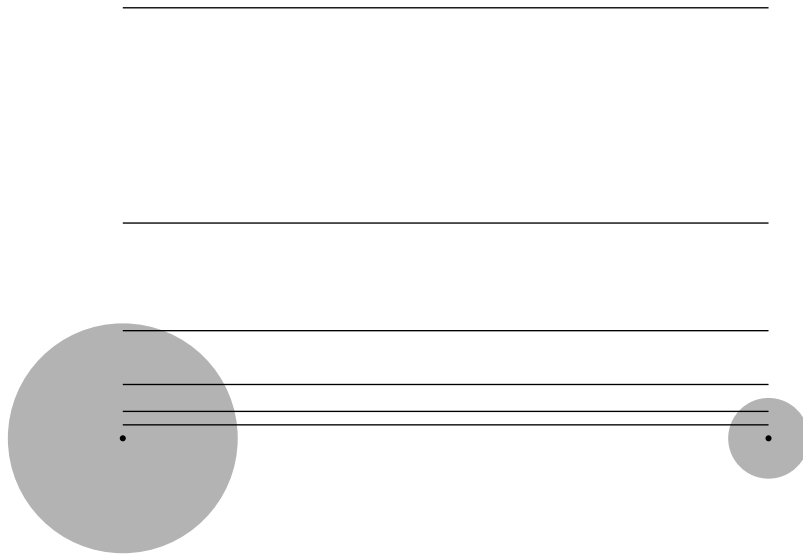


Figura 1.3: Componente conexa contenida estrictamente en la cuasi-componente

Proposición 1.33. *La familia de las cuasi-componentes de X constituye una partición de X por cerrados.*

Ahora sí, describamos los 0-ésimos grupos de homología. Como $C_{-1}^{\mathcal{X}}(X) = 0$, tenemos que

$$H_0^{\mathcal{X}}(X) = \text{Ker}(\partial : C_0^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow C_{-1}^{\mathcal{X}}(X)) / \text{Im}(\partial : C_1^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow C_0^{\mathcal{X}}(X))$$

es igual a $H_0^{\mathcal{X}}(X) = C_0^{\mathcal{X}}(X) / \text{Im}(\partial)$. Por otro lado, como $\partial(x_0 \ x_1) = x_1 - x_0$, vamos a tener que dos puntos x e y de X son tales que $[x] = [y]$ en $H_0^{\mathcal{X}}(X)$ si y solo si existe un camino de puntos x_0, x_1, \dots, x_n \mathcal{X} -pequeño que une x e y . Por tanto, $[x] = [y]$ si y solo si x e y pertenecen a la misma \mathcal{X} -componente. Además, visto $[x]$ como un subconjunto de X , tenemos que $[x]$ es igual a la \mathcal{X} -componente $C_x^{\mathcal{X}}$ que contiene a x (abuso de la notación que mantendremos de ahora en adelante). En definitiva, tenemos que:

Proposición 1.34. $H_0^{\mathcal{X}}(X)$ se puede identificar con el grupo abeliano libre generado por las \mathcal{X} -componentes de X .

Lema 1.35. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Sea $C^{\mathcal{X}}$ una \mathcal{X} -componente y sea $C^{\mathcal{X}'}$ una \mathcal{X}' -componente. Si $C^{\mathcal{X}'} \subset C^{\mathcal{X}}$, entonces $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(C^{\mathcal{X}'}) = C^{\mathcal{X}}$.

Demostración. Sea $x \in C^{\mathcal{X}'} \subset C^{\mathcal{X}}$, por lo que $[x] = C^{\mathcal{X}'}$ en $H_0^{\mathcal{X}'}(X)$, y $[x] = C^{\mathcal{X}}$ en $H_0^{\mathcal{X}}(X)$ puesto que $x \in C^{\mathcal{X}}$. Recordemos que $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} : H_0^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_0^{\mathcal{X}}(X)$ coincide con la aplicación inducida $\text{Id}_* : H_0^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_0^{\mathcal{X}}(X)$ de la aplicación identidad de X . Y por tanto,

$$\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(C^{\mathcal{X}'}) = \text{Id}_*([x]) = [\text{Id}_\#x] = [x] = C^{\mathcal{X}}.$$

□

Proposición 1.36. Las cuasi-componentes de X definen elementos de $\check{H}_0(X)$.

Demostración. Dado $x \in X$, la Proposición 1.32 nos dice que

$$CQ_x = \bigcap_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)} C_x^{\mathcal{X}}.$$

Veamos que $\{C_x^{\mathcal{X}}\}_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)}$ define un elemento de $\check{H}_0(X)$. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , por lo que la partición formada por las \mathcal{X}' -componentes refina a la partición formada por las \mathcal{X} -componentes, y así, $C_x^{\mathcal{X}'} \subset C_x^{\mathcal{X}}$. El lema anterior nos asegura que $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(C_x^{\mathcal{X}'}) = C_x^{\mathcal{X}}$. \square

Ahora presentaremos otros elementos de $\check{H}_0(X)$ distintos de las cuasi-componentes de X :

Proposición 1.37. *Sea X un espacio topológico compacto. Las medidas finitas sobre la σ -álgebra de Borel de X (es decir, la menor σ -álgebra que contiene a todos los abiertos de X) definen elementos de $\check{H}_0(X; \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea μ una medida finita sobre la σ -álgebra de Borel de X , por lo que los subconjuntos abiertos de X son medibles y tienen medidas finitas.

Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Definimos el siguiente elemento de $H_0^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$:

$$\gamma_{\mathcal{X}} := \sum_{C^{\mathcal{X}}\text{-componente}} \mu(C^{\mathcal{X}}) \cdot C^{\mathcal{X}}.$$

Veamos que $\gamma_{\mathcal{X}}$ está bien definido. Como X es compacto, la Observación 1.31 nos asegura que el número de \mathcal{X} -componentes es finito, por lo que el sumatorio anterior es finito. Por otro lado, como cada \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$ es un abierto (de hecho, un clopen), tenemos que $\mu(C^{\mathcal{X}})$ es finito, y así, $\gamma_{\mathcal{X}}$ está bien definido.

Por último, veamos que $\{\gamma_{\mathcal{X}}\}_{\mathcal{X} \in \text{Cov}(X)}$ define un elemento de $\check{H}_0(X; \mathbb{R})$. Para ello, dados \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , comprobemos que $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\gamma_{\mathcal{X}'}) = \gamma_{\mathcal{X}}$. Como X es compacto, la Proposición 1.29 y la Observación 1.31 nos garantizan que la partición finita formada por las \mathcal{X}' -componentes refina a la partición finita formada por las \mathcal{X} -componentes y que cada \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$ se expresa como una unión finita (y disjunta) de \mathcal{X}' -componentes; es decir, existen $C_1^{\mathcal{X}'}, \dots, C_n^{\mathcal{X}'}$ \mathcal{X}' -componentes (disjuntas dos a dos) tales que

$$C^{\mathcal{X}} = \bigcup_{i=1}^n C_i^{\mathcal{X}'},$$

y así, como μ es una σ -álgebra, tenemos que

$$\mu(C^{\mathcal{X}}) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i^{\mathcal{X}'}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \left(\sum_{i=1}^n \mu(C_i^{\mathcal{X}'}) \cdot C_i^{\mathcal{X}'} \right) &= \sum_{i=1}^n \mu(C_i^{\mathcal{X}'}) \cdot \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(C_i^{\mathcal{X}'}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(C_i^{\mathcal{X}'}) \cdot C^{\mathcal{X}} = C^{\mathcal{X}} \cdot \sum_{i=1}^n \mu(C_i^{\mathcal{X}'}) = C^{\mathcal{X}} \cdot \mu(C^{\mathcal{X}}), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del Lema 1.35 puesto que $C_i^{\mathcal{X}'}$ es una \mathcal{X}' -componente contenida en la \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$. Repitiendo esto para todos los sumandos de $\gamma_{\mathcal{X}}$, concluimos que $\pi_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(\gamma_{\mathcal{X}'}) = \gamma_{\mathcal{X}}$. \square

Lema 1.38. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces, para cada cuasi-componente de X , existe una cuasi-componente de Y que contiene a su imagen por f . Y además, si f es sobreyectiva, entonces el número de cuasi-componentes de X es mayor o igual que el número de cuasi-componentes de Y .*

El lema análogo para las componentes conexas también es cierto.

Demostración. Sea QC_x una cuasi-componente de X . Sean $a, b \in QC_x$. Como las cuasi-componentes de Y forman una partición de Y , existen cuasi-componentes $QC_y, QC_{y'}$ de Y tales que $f(a) \in QC_y$ y $f(b) \in QC_{y'}$. Supongamos que $QC_y \neq QC_{y'}$, por lo que existe un clopen A de Y tal que $f(a) \in A$ y $f(b) \in Y \setminus A$. Y así, como f es continua, a está contenido en el clopen $f^{-1}(A)$ y b está contenido en el clopen $f^{-1}(Y \setminus A)$, por lo que a y b no pueden pertenecer a la misma cuasi-componente de X .

Por otro lado, si f es sobreyectiva, por cada cuasi-componente QC_y de Y existe al menos una cuasi-componente QC_x de X tal que $f(QC_x) \subset QC_y$. \square

El lema siguiente se sigue directamente de la Proposición 1.34, aunque también presentaremos otra demostración alternativa.

Lema 1.39. *Sea $C^{\mathcal{X}}$ una \mathcal{X} -componente de X . Entonces la homología reducida $H_0^{\mathcal{X}|C^{\mathcal{X}}}(C^{\mathcal{X}})$ es trivial.*

Recordemos que la homología reducida de X a escala \mathcal{X} es la homología asociada del siguiente complejo de cadenas:

$$\dots \longrightarrow C_1^{\mathcal{X}}(X) \xrightarrow{\partial} C_0^{\mathcal{X}}(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z},$$

donde el homomorfismo aumentación ϵ viene dado por $\epsilon(\sum_{i=1}^n k_i \sigma_i) := \sum_{i=1}^n k_i$.

Corolario 1.40. *Para cualquier $U \in \mathcal{X}$, tenemos que su 0-ésimo grupo de homología reducida a escala \mathcal{X} es trivial. En particular, si $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ es un 0-ciclo formal \mathcal{X} -pequeño contenido en un elemento $U \in \mathcal{X}$, entonces la clase de homología $[c]$ es trivial en la homología reducida de X a escala \mathcal{X} .*

Este corolario complementa lo dicho en la Proposición 1.5.

Demostración de Lema 1.39. Para ello, demostraremos que la sucesión

$$C_1^{\mathcal{X}}(C^{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\partial} C_0^{\mathcal{X}}(C^{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

es exacta para cualquier \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$ ya que de esta manera, tendremos que $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\epsilon)$, y así, $\text{Ker}(\epsilon)/\text{Im}(\partial) = 0$. Aunque no lo reflejemos en la notación, los símlices y cadenas formales que estamos considerando son $\mathcal{X}|_{C^{\mathcal{X}}}$ -pequeñas.

Sabemos que dicha sucesión es parcialmente exacta (es decir, $\text{Im}(\partial) \subset \text{Ker}(\epsilon)$), por lo que solo nos queda comprobar que $\text{Ker}(\epsilon) \subset \text{Im}(\partial)$. Sea $c = \sum_{i=1}^n k_i \cdot (x_i) \in C_0^{\mathcal{X}}(C^{\mathcal{X}})$ tal que $\epsilon(c) = 0$, por lo que $\sum_{i=1}^n k_i = 0$. Como x_i y x_{i+1} están en la misma \mathcal{X} -componente, existe un camino de puntos p_1, \dots, p_m \mathcal{X} -pequeño que une x_i y x_{i+1} . Dicho camino define una 1-cadena formal \mathcal{X} -pequeña $\gamma_i := \sum_{j=1}^{m-1} (p_j p_{j+1})$ tal que $\partial(\gamma_i) = x_{i+1} - x_i$. No es muy difícil comprobar que

$$\gamma := (-k_1) \cdot \gamma_1 + (-k_2 - k_1) \cdot \gamma_2 + \dots + (-k_{n-1} - \dots - k_1) \cdot \gamma_{n-1}$$

es tal que su borde es igual a c . □

La aplicación aumentación $\epsilon : C_0^{\mathcal{X}}(C^{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathbb{Z}$ puede ser identificada con la extensión lineal de la función característica $\chi_{C^{\mathcal{X}}}$ de $C^{\mathcal{X}}$, que también denotamos por $\chi_{C^{\mathcal{X}}}$. Y con esta terminología, tenemos que:

Lema 1.41. *Sea $C^{\mathcal{X}}$ una \mathcal{X} -componente de X . Una 0-cadena formal \mathcal{X} -pequeña d en $C^{\mathcal{X}}$ es un ciclo que representa la clase trivial en la homología reducida $H_0^{\mathcal{X}}(C^{\mathcal{X}})$ si y solo si $\chi_{C^{\mathcal{X}}}(d) = 0$.*

Más generalmente, supongamos que A es un \mathcal{X} -clopen. Una 0-cadena formal \mathcal{X} -pequeña d en A es un ciclo que representa la clase trivial en la homología reducida $H_0^{\mathcal{X}}(A)$ si y solo si la evaluación de d en $\chi_{C^{\mathcal{X}}}$ se anula para cualquier \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$.

Demostración. El primer punto se sigue del párrafo anterior al enunciado de este lema, así que vayamos directamente al segundo punto. Descomponemos $d = \sum_{i=1}^m d_i$, donde d_i es una 0-cadena formal \mathcal{X} -pequeña en una \mathcal{X} -componente $C_i^{\mathcal{X}}$. Claramente, d es un ciclo formal \mathcal{X} -pequeño que representa la clase trivial si y solo si todos los d_i lo son. Por el primer punto, lo último es equivalente a que $\chi_{C_i^{\mathcal{X}}}(d_i) = 0$ y el resultado se sigue de que $\chi_{C^{\mathcal{X}}}(d) = \sum_{j=1}^m \chi_{C_i^{\mathcal{X}}}(d_j) = \chi_{C_i^{\mathcal{X}}}(d_i)$. □

Observación 1.42. *Sea A un \mathcal{X} -clopen. En el caso de que d sea un 0-ciclo en A (y así, $\chi_A(d) = 0$), entonces d representa la clase trivial en la homología reducida $H_q^{\mathcal{X}}(A)$ si $\chi_{C_i^{\mathcal{X}}}(d)$ se anula para todas las \mathcal{X} -componentes excepto para una.*

1.1.7. Descripción del 1-ésimo grupo de homología de Čech

Para simplificar la escritura, omitiremos el término formal de los símlices y cadenas formales que aparecen en esta subsección.

Primero demostraremos que $H_1^{\mathcal{X}}(X)$ está generado por ciclos especiales, que llamaremos **simples** y **elementales**, de la forma

$$(x_1 x_2) + (x_2 x_3) + \dots + (x_{n-1} x_n)$$

donde $x_n = x_1$ (**condición cíclica**), todos los x_1, \dots, x_{n-1} son diferentes puntos de X (**elemental**) y es posible elegir $U_i \in \mathcal{X}$ distintos dos a dos tal que cada símlice \mathcal{X} -pequeño $(x_i x_{i+1})$ está contenido en U_i (**simple**). Intuitivamente, un ciclo es simple si no tiene «auto-intersecciones» a escala \mathcal{X} . Una cadena elemental simple tiene una definición análoga omitiendo la condición de que $x_1 = x_n$ y requiriendo que todos los x_i sean diferentes. Nótese que una cadena elemental, no

necesariamente simple, se corresponde con un camino por aristas en $V(\mathcal{X})$ y si la cadena es cerrada (es decir, es un ciclo), entonces el camino por aristas es también cerrado. Si la cadena o el ciclo es también simple, entonces el camino por aristas puede ser proyectado a un camino equivalente por aristas en $N(\mathcal{X})$.

A continuación, veremos cómo manipular los ciclos \mathcal{X} -pequeños. El primer paso hacia la descripción deseada es el lema siguiente:

Lema 1.43. *Sea c un ciclo \mathcal{X} -pequeño. Entonces $[c] = [\sum_i k_i e_i]$ en $H_1^{\mathcal{X}}(X)$, donde todos los e_i son ciclos elementales \mathcal{X} -pequeños y $k_i \in \mathbb{Z}$. Además, todo símplex que aparece en algún e_i era ya parte de c .*

Existen varias maneras alternativas de probar esta afirmación. Sea $\{x_j\}$ la colección (finita) de vértices de todos los 1-símplices \mathcal{X} -pequeños que constituyen a c . Entonces, c puede ser vista como un ciclo (homológico) en el grafo completo K con vértices $\{x_j\}$. Como el primer grupo de homología de un grafo finito está generado por caminos cerrados, y los caminos cerrados en K se corresponden con ciclos elementales en $H_1^{\mathcal{X}}(X)$, el ciclo c es combinación lineal entera de ciclos elementales como deseábamos.

Solo queda escribir un ciclo elemental como una combinación de ciclos elementales simples. Con vistas a aplicaciones posteriores vamos a describir en detalle el proceso cuando consideramos una cadena elemental \mathcal{X} -pequeña $e = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i x_{i+1})$ arbitraria, no necesariamente un ciclo.

Lema 1.44. *Sea e una cadena elemental \mathcal{X} -pequeña. Entonces $[e] = [e_0 + s_1 + \dots + s_r]$ en $H_1^{\mathcal{X}}(X)$, donde e_0 es una cadena elemental simple y los s_i son ciclos elementales simples.*

Demostración. Tomamos $e = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i x_{i+1})$. Para cada i elegimos un $U_i \in \mathcal{X}$ arbitrario que contenga a $(x_i x_{i+1})$, y suponemos que $U_i = U_j$ para algún $j > i$ (si esto no ocurre, entonces e ya es simple). Fijamos cualquier i y elegimos el $j > i$ más pequeño con la propiedad $U_j = U_i$. Consideremos la porción (*) de la cadena entre los índices i y j :

$$e = \dots + (x_{i-1} x_i) + \underbrace{(x_i x_{i+1}) + \dots + (x_j x_{j+1})}_{(*)} + (x_{j+1} x_{j+2}) + \dots$$

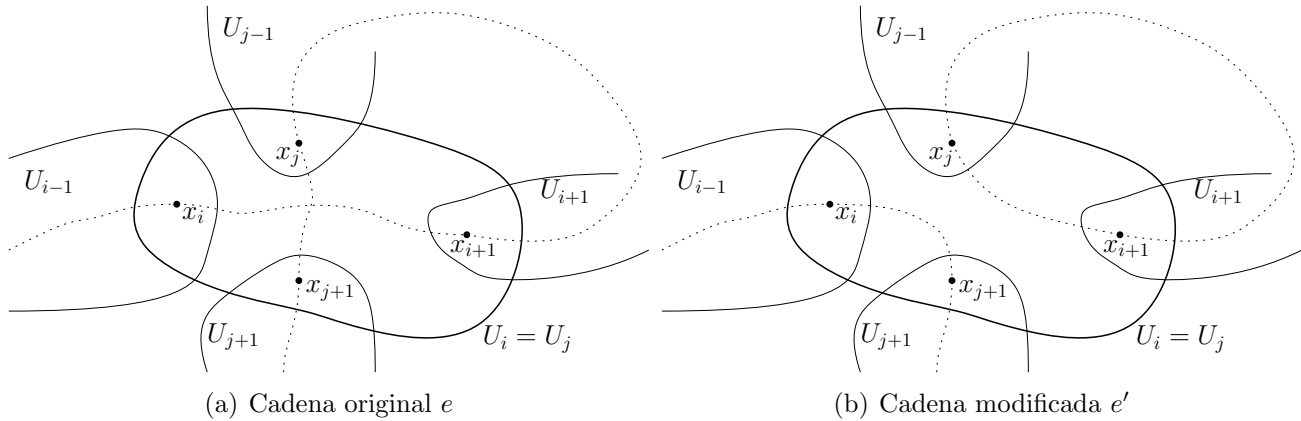
Quitamos los símplexes $(x_i x_{i+1})$ y $(x_j x_{j+1})$ de e y los reemplazamos con $(x_i x_{j+1}) + (x_j x_{i+1})$ para obtener una nueva cadena e' , que es todavía \mathcal{X} -pequeña. Además,

$$e - e' = (x_i x_{i+1}) + (x_j x_{j+1}) - (x_i x_{j+1}) - (x_j x_{i+1}) = (x_i x_{i+1}) - (x_j x_{i+1}) + (x_j x_{j+1}) - (x_i x_{j+1})$$

es un ciclo que está enteramente contenido en $U_i = U_j$, y así, de la Proposición 1.5 se sigue que su homología es nula. Por tanto, $[e] = [e']$. La Figura 1.4 proporciona un esquema de la situación. Los segmentos punteados conectando los vértices x_k son solo ayudas pictóricas para resaltar que los símplexes son cadenas, pero por supuesto no son subconjuntos de X .

Ahora reordenemos los símplexes en e' de la manera siguiente:

$$e' = ((x_1 x_2) + \dots + (x_{i-1} x_i) + (x_i x_{j+1}) + (x_{j+1} x_{j+2}) + \dots + (x_{n-1} x_n)) \\ + ((x_j x_{i+1}) + (x_{i+1} x_{i+2}) + \dots + (x_{j-1} x_j)).$$


 Figura 1.4: Modificación de la cadena e

El segundo sumando es evidentemente un ciclo elemental simple. Ahora repetimos este proceso en el primer sumando de e' , y seguimos así hasta alcanzar una expresión como la que establece este lema. \square

Nótese que si la cadena inicial e es un ciclo, entonces $0 = \partial(e) = \partial(e_0) + \sum_i \partial(s_i) = \partial(e_0)$, y así, el sumando e_0 es también un ciclo. Por tanto, los Lemas 1.43 y 1.44 producen la proposición siguiente:

Proposición 1.45. *Los ciclos elementales simples \mathcal{X} -pequeños generan a $H_1^{\mathcal{X}}(X)$.*

Ahora discutiremos la relación entre $H_1^{\mathcal{X}}(X)$ y $\check{H}_1(X)$ cuando X es localmente conexo. Ya hemos mencionado en la Proposición 1.5 (y en el Corolario 1.40 para el caso $q = 0$ y la homología reducida) que $H_q^{\mathcal{X}}(X)$ esencialmente ignora la estructura de X a escala inferior a \mathcal{X} . Supongamos que cada $U \in \mathcal{X}$ es conexo, por lo que a esta escala, X no tiene características 0-dimensionales relevantes (dichas características están relacionadas con la (cuasi)-conexidad). Es entonces natural esperar que $H_1^{\mathcal{X}}(X)$ sea «más pequeño» que $\check{H}_1(X)$. De hecho, probaremos que la proyección $\check{H}_1(X) \rightarrow H_1^{\mathcal{X}}(X)$ es sobreyectiva. En otras palabras, tan pronto como un 1-ciclo sea \mathcal{X} -pequeño, dicho ciclo puede ser refinado para ser \mathcal{X}' -pequeño con \mathcal{X}' un recubrimiento abierto arbitrario de manera de que defina un elemento de $\check{H}_1(X)$.

Consideremos una 1-cadena \mathcal{X} -pequeña $c = \sum_i k_i \sigma_i$. Cada $\sigma_i = (x_i y_i)$ está contenido en algún $U_i \in \mathcal{X}$. Dado algún recubrimiento abierto \mathcal{X}' de X , $\mathcal{X}'_{|U_i} = \{V \cap U_i : V \in \mathcal{X}'\}$ es un recubrimiento abierto de U_i y como U_i es conexo, podemos construir una cadena elemental \mathcal{X}' -pequeña e_i en U_i tal que $\partial(e_i) = y_i - x_i$. Consideremos ahora la cadena \mathcal{X}' -pequeña $c' := \sum_i k_i e_i$ obtenida de c al reemplazar cada 1-símplice σ_i con la cadena e_i que conecta x_i a y_i . Decimos que c' es un **refinamiento** de c . Observemos que $[c] = [c']$ en $H_1^{\mathcal{X}}(X)$. En efecto, como $\partial(e_i) = y_i - x_i = \partial(\sigma_i)$, tenemos que $e_i - \sigma_i$ es un ciclo contenido en U_i , por lo que la Proposición 1.5 nos asegura que $e_i - \sigma_i$ tiene homología nula, y así, $[e_i] = [\sigma_i]$. Por tanto,

$$[c] - [c'] = [c' - c] = \left[\sum_i k_i (e_i - \sigma_i) \right] = 0$$

en $H_1^{\mathcal{X}}(X)$.

Cuando X es localmente conexo, los recubrimientos abiertos cuyos elementos son también conexos constituyen una subfamilia cofinal de la familia de todos los recubrimientos abiertos de X . Esto junto con la construcción del párrafo anterior asegura lo siguiente:

Proposición 1.46. *Supongamos que X es localmente conexo y que existe una sucesión cofinal de recubrimientos abiertos (este es el caso si X es compacto y métrico, por ejemplo). Supongamos además que \mathcal{X} es un recubrimiento abierto de X por conjuntos conexos. Entonces cualquier elemento de $H_1^{\mathcal{X}}(X)$ proviene de algún elemento de $\check{H}_1(X)$ o, en otras palabras, la proyección $\check{H}_1(X) \rightarrow H_1^{\mathcal{X}}(X)$ es sobreyectiva.*

Supongamos para la definición y lema siguientes que los coeficientes de la homología están en $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. Al considerar estos coeficientes, tenemos que cualquier $[c] \in H_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ es tal que $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ con $k_i \in G$ y $\sigma_i \in C_q^{\mathcal{X}}(X)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Para más detalles de la homología con coeficientes, ver la Subsección 1.1.5.

La **norma** de un 1-ciclo \mathcal{X} -pequeño $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ es definida como $\|c\|_1 = \sum_{i=1}^n |k_i|$. Para propósitos posteriores mostraremos cómo modificar la construcción del refinamiento que acabamos de describir para controlar su norma:

Lema 1.47. *Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X formado por conjuntos conexos, y consideremos una 1-cadena \mathcal{X} -pequeña c . Entonces para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{X}' existe una 1-cadena \mathcal{X}' -pequeña c' tal que:*

$$(I). [c] = [c'] \text{ en } H_1^{\mathcal{X}}(X; G) \text{ y}$$

$$(II). \|c'\|_1 \leq \|c\|_1 \cdot |\mathcal{X}'|,$$

donde $|\mathcal{X}'|$ denota el cardinal de \mathcal{X}' .

Demostración. Comencemos por la construcción $c' = \sum_i k_i e_i$ de antes. Por el Lema 1.44 aplicado en U_i a escala \mathcal{X}' podemos escribir $[e_i] = [e_{i0} + s_{i1} + \dots + s_{ir}]$, donde cada e_{i0} es una cadena elemental simple y cada s_{ij} es un ciclo elemental simple, y todos ellos son \mathcal{X}' -pequeños y están contenidos en U_i . Por la Proposición 1.5 todos los s_{ij} son homólogos a cero en $H_1^{\mathcal{X}}(X; G)$, por lo que tenemos que $[e_i] = [e_{i0}]$ a escala \mathcal{X} para cada i . Además, $\|e_{i0}\|_1 \leq |\mathcal{X}'|$ debido a que e_{i0} es una cadena elemental simple. Por tanto, para $c' := \sum k_i e_{i0}$ tenemos que $[c] = [c']$ en $H_1^{\mathcal{X}}(X; G)$ y que $\|c'\|_1 \leq \sum |k_i| \|e_{i0}\|_1 \leq \sum |k_i| |\mathcal{X}'| = \|c\|_1 |\mathcal{X}'|$. \square

1.2. Cohomología de Čech

Comenzaremos presentando en la subsección siguiente una aproximación a la cohomología de Čech que es de naturaleza intrínseca. El resto de la sección se desarrollará de manera análoga a la sección anterior. Veremos en la Subsección 1.2.7 que cuando nuestro espacio es compacto, cada clase de cohomología de Čech presenta un representante de particular interés.

1.2.1. Cohomología de Alexander–Spanier

A continuación presentaremos la cohomología de Alexander–Spanier, la cual fue inicialmente introducida para espacios métricos compactos en [Alexander(1935)], y más tarde para espacios topológicos en [Spanier(1948)], basado en una sugerencia de Alexander Doniphon Wallace.

Sea G un grupo abeliano. Para cada $q = 0, 1, 2, \dots$, denotamos por $C^q(X; G)$ al conjunto de aplicaciones (no necesariamente continuas) $\xi : X^{q+1} \rightarrow G$. Remarcamos que estas son solo aplicaciones en el sentido de teoría de conjuntos. Claramente $C^q(X; G)$ es un grupo abeliano. El homomorfismo coborde $\delta : C^q(X; G) \rightarrow C^{q+1}(X; G)$ se define por la fórmula estándar

$$(\delta(\xi))(x_0, x_1, \dots, x_q, x_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \xi(x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{q+1}),$$

donde el sombrero sobre la entrada x_j significa que ha sido omitido de los argumentos en el cual ξ es evaluada. Como es usual, $\delta^2 = 0$.

Un elemento $\xi \in C^q(X; G)$ se dice que es **localmente cero** si existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que $\xi(x_0, x_1, \dots, x_q)$ se anula cuando todos los x_i pertenecen al mismo elemento de \mathcal{X} . Es sencillo ver que esta condición es equivalente a requerir que ξ se anule en un entorno abierto de la diagonal $\{(x, x, \dots, x) : x \in X\}$ de X^{q+1} . Cuando $q = 0$, la aplicación nula es la única aplicación localmente cero de $C^0(X; G)$. Y para $\xi, \xi' \in C^q(X; G)$, decimos que $\xi = \xi'$ **localmente** si $\xi - \xi'$ es localmente cero.

Denotamos por $\overline{C}^q(X; G)$ al cociente de $C^q(X; G)$ módulo las aplicaciones localmente cero, y en particular, $\overline{C}^0(X; G) = C^0(X; G)$. No es muy difícil ver que el coborde de una aplicación localmente cero es también localmente cero, y así, podemos considerar el homomorfismo $\overline{\delta} : \overline{C}^q(X; G) \rightarrow \overline{C}^{q+1}(X; G)$ entre cocientes. De esta manera, se obtiene un complejo de cocadenas $\{\overline{C}^q(X; G), \overline{\delta}\}$ cuya cohomología es, por definición, la cohomología de Alexander–Spanier de X con coeficientes en G , y la denotamos por $\widetilde{H}^q(X; G)$ (no debe confundirse con la cohomología reducida).

Un elemento $z \in \widetilde{H}^q(X; G)$ es, entonces, obtenido de una aplicación $\xi \in C^q(X; G)$ por medio de un doble cociente: primero se considera la clase $\overline{\xi}$ de ξ en el cociente $\overline{C}^q(X; G)$ y entonces la clase $[\overline{\xi}]$ de $\overline{\xi}$ después del cociente por $\text{Im}(\overline{\delta})$. Llamamos a ξ un representante de z . Nótese que, para definir una clase de cohomología, $\overline{\xi}$ debe ser un cociclo, es decir, $\overline{\delta}(\overline{\xi})$ debe ser cero en $\overline{C}^{q+1}(X; G)$. Esto requiere que $\delta(\xi)$ sea localmente cero como un elemento de $C^{q+1}(X; G)$. Recíprocamente, cualquier $\xi \in C^q(X; G)$ tal que $\delta(\xi)$ es localmente cero define una clase de cohomología $z = [\overline{\xi}] \in \widetilde{H}^q(X; G)$. Es sencillo comprobar que dos aplicaciones $\xi, \xi' \in C^q(X; G)$ cuyos cobordes son localmente cero definen la misma clase de cohomología en $\widetilde{H}^q(X; G)$ si y solo si existe $\varphi \in C^{q-1}(X; G)$ tal que $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es localmente cero.

1.2.2. Cohomologías a escala \mathcal{X}

De la subsección análoga para homología, deducimos que las cohomologías simpliciales producidas por el complejo simplicial de Čech $N(\mathcal{X})$ y el complejo de Vietoris $N(V)$ son isomorfas, y que las cohomologías asociadas a los complejos de cocadenas

$$\{\text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G); \partial^{\#}\} \text{ y } \{\text{Hom}(S_q^{\mathcal{X}}(X); G); \partial^{\#}\}$$

son también isomorfas a las cohomologías anteriores. Aquí $\partial^\#$ denota el dual del operador borde.

Presentaremos ahora una cohomología a escala \mathcal{X} que va a «aproximar» a la cohomología de Alexander–Spanier y, como veremos en la siguiente subsección, es también isomorfa a las otras cohomologías a escala \mathcal{X} .

Definición 1.48. Denotamos por $C_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ al subconjunto de $C^q(X; G)$ formado por las aplicaciones que se anulan en cada elemento U de \mathcal{X} . Es decir,

$$C_{\mathcal{X}}^q(X; G) = \{ \xi \in C^q(X; G) : \xi(x_0, \dots, x_q) = 0 \text{ si } x_0, \dots, x_q \in U \text{ para algún } U \in \mathcal{X} \}.$$

A menudo, diremos que una aplicación es \mathcal{X} -localmente cero si dicha aplicación pertenece a $C_{\mathcal{X}}^q(X; G)$. Cuando $q = 0$, la aplicación nula es la única aplicación \mathcal{X} -localmente cero de $C_{\mathcal{X}}^0(X; G)$.

Denotamos por $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ al cociente de $C^q(X; G)$ módulo las aplicaciones \mathcal{X} -localmente cero, y en particular, $\overline{C}_{\mathcal{X}}^0(X; G) = C^0(X; G)$. No es muy difícil ver que el coborde de una aplicación \mathcal{X} -localmente cero es también \mathcal{X} -localmente cero, y así, podemos considerar el homomorfismo $\overline{\delta} : \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow \overline{C}_{\mathcal{X}}^{q+1}(X; G)$ entre cocientes. De esta manera, se obtiene un complejo de cocadenas $\{ \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G), \overline{\delta} \}$ a cuya cohomología la denotaremos por $H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ y nos referimos a ella como **la cohomología de X a escala (el recubrimiento abierto) \mathcal{X}** .

Un elemento $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ es tal que $z = [\xi_{\mathcal{X}}]$, donde $\xi_{\mathcal{X}} \in C^q(X; G)$ es tal que $\delta(\xi_{\mathcal{X}})$ es \mathcal{X} -localmente cero. Recíprocamente, cualquier $\xi_{\mathcal{X}} \in C^q(X; G)$ tal que $\delta(\xi_{\mathcal{X}})$ es \mathcal{X} -localmente cero define una clase de cohomología $[\xi_{\mathcal{X}}] \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$. También, es sencillo comprobar que dos aplicaciones $\xi_{\mathcal{X}}, \xi'_{\mathcal{X}} \in C^q(X; G)$ cuyos cobordes son \mathcal{X} -localmente cero definen la misma clase de cohomología en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ si y solo si existe $\varphi \in C^{q-1}(X; G)$ tal que $\xi_{\mathcal{X}} - \xi'_{\mathcal{X}} - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X} -localmente cero.

1.2.3. Todas las cohomologías a escala \mathcal{X} coinciden

Veamos que la cohomología $H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ y la cohomología producida por el complejo de cocadenas $\{ \text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G); \partial^\# \}$ son isomorfas. Esto se sigue de la proposición siguiente:

Proposición 1.49. Existe un isomorfismo entre $\text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G)$ y $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G)$.

Demostración. Definimos la aplicación

$$f : \text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G) \longrightarrow \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G),$$

$$\varphi \longmapsto \overline{\xi}$$

con

$$\xi(x_0, x_1, \dots, x_q) := \begin{cases} \varphi(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q) & \text{si } x_0, \dots, x_q \in U \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

y la aplicación

$$g : \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G),$$

$$\overline{\xi} \longmapsto \varphi$$

con $\varphi(x_0 x_1 \dots x_q) := \xi(x_0, x_1, \dots, x_q)$ para cualquier q -símplice formal \mathcal{X} -pequeño $(x_0 x_1 \dots x_q)$.

Antes de continuar, veamos que g está bien definida. Sean ξ, ξ' tales que $\bar{\xi} = \bar{\xi}'$ en $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ (es decir, $\xi - \xi'$ es \mathcal{X} -localmente cero), y sean $\varphi, \varphi' \in \text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G)$ tales que $\varphi(x_0 x_1 \dots x_q) = \xi(x_0, x_1, \dots, x_q)$ y $\varphi'(x_0 x_1 \dots x_q) = \xi'(x_0, x_1, \dots, x_q)$ para cualquier q -símplice formal \mathcal{X} -pequeño $(x_0 x_1 \dots x_q)$. Comprobemos que $\varphi = \varphi'$:

$$\begin{aligned} (\varphi - \varphi')(x_0 x_1 \dots x_q) &= \varphi(x_0 x_1 \dots x_q) - \varphi'(x_0 x_1 \dots x_q) \\ &= \xi(x_0, x_1, \dots, x_q) - \xi'(x_0, x_1, \dots, x_q) \\ &= (\xi - \xi')(x_0, x_1, \dots, x_q) = 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $x_0, \dots, x_q \in U$ para algún $U \in \mathcal{X}$ y a que $\xi - \xi'$ es \mathcal{X} -localmente cero.

Claramente $g \circ f = \text{Id}_{\text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G)}$, y tenemos que $f \circ g(\bar{\xi}) = \bar{\xi}'$ con

$$\xi'(x_0, \dots, x_q) = \begin{cases} \xi(x_0, \dots, x_q) & \text{si } x_0, \dots, x_q \in U \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

sin embargo, $\xi - \xi'$ es \mathcal{X} -localmente cero, y así, $f \circ g = \text{Id}_{\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G)}$.

No es muy difícil comprobar que f y g son homomorfismos, y así, por lo anterior, concluimos que $\text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G)$ y $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ son isomorfos. \square

Se puede comprobar que el isomorfismo anterior conmuta con los operadores coborde, por lo que induce un isomorfismo entre $H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ y la cohomología producida por el complejo de cocadenas $\{\text{Hom}(C_q^{\mathcal{X}}(X); G); \partial^{\#}\}$.

1.2.4. Aplicación inducida en las cohomologías a escala \mathcal{X}

Esta subsección se desarrolla de manera análoga a la subsección correspondiente para homología. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua) entre dos espacios topológicos.

Definición 1.50. *Definimos la aplicación inducida $f^{\#} : C^q(Y; G) \rightarrow C^q(X; G)$ de f de la manera siguiente: dado $\xi \in C^q(Y; G)$, $f^{\#}(\xi)$ viene definido por*

$$(f^{\#}(\xi))(x_0, x_1, \dots, x_q) := \xi(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_q)).$$

Proposición 1.51. *Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} recubrimientos abiertos de X e Y , respectivamente. Si f lleva puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{Y} -ceranos, entonces $f^{\#}(C_{\mathcal{Y}}^q(Y; G)) \subset C_{\mathcal{X}}^q(X; G)$.*

Demostración. Sea $\xi : Y^{q+1} \rightarrow G$ una aplicación \mathcal{Y} -localmente cero, y sean x_0, \dots, x_q puntos \mathcal{X} -ceranos. Se tiene que

$$(f^{\#}(\xi))(x_0, \dots, x_q) = \xi(f(x_0), \dots, f(x_q)) = 0,$$

donde la última igualdad se debe a que $f(x_0), \dots, f(x_q)$ son puntos \mathcal{Y} -ceranos y que ξ es \mathcal{Y} -localmente cero. Y así, $f^{\#}(\xi)$ es \mathcal{X} -localmente cero. \square

La proposición anterior implica que es posible definir $f^\# : \overline{C}_Y^q(Y; G) \rightarrow \overline{C}_X^q(X; G)$ mediante la expresión $f^\#(\overline{\xi}) := \overline{f^\#(\xi)}$. Además, como $f^\#$ conmuta con el operador coborde, también podemos definir $f^* : H_Y^q(Y; G) \rightarrow H_X^q(X; G)$ por $f^*(\overline{[\xi]}) := \overline{[f^\#(\xi)]}$ para cualquier $\overline{\xi} \in \overline{C}_Y^q(Y; G)$.

Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación, y sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Como ya mencionamos, si \mathcal{X}' es un recubrimiento abierto de X tal que \mathcal{X}' refina a $f^{-1}(\mathcal{X})$, entonces es posible definir $f^* : H_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow H_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$. Análogamente, si $P(t) = a_0t^0 + a_1t^1 + \dots + a_d t^d \in \mathbb{Z}[t]$ es un polinomio de grado d con coeficientes en \mathbb{Z} , tenemos que el homomorfismo

$$P(f^*) = a_0(f^*)^0 + a_1(f^*)^1 + \dots + a_d(f^*)^d : H_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow H_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$$

está bien definido siempre y cuando \mathcal{X}' refine a $\mathcal{X} \vee f^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X})$.

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones (de nuevo, no necesariamente continuas) entre los espacios topológicos X e Y . Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} recubrimientos abiertos de X e Y , respectivamente. Supongamos que dichas aplicaciones son tales que es posible definir $f^* : H_Y^q(Y; G) \rightarrow H_X^q(X; G)$ y $g^* : H_Y^q(Y; G) \rightarrow H_X^q(X; G)$.

Proposición 1.52. *Tenemos que $f^* = g^*$ si se cumple que: si $x_0, \dots, x_q \in X$ son puntos \mathcal{X} -cercanos, entonces $f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_q) \in Y$ son puntos \mathcal{Y} -cercanos para cualquier $i = 0, \dots, q$.*

Demostración. Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} D : C^{q+1}(Y; G) &\longrightarrow C^q(X; G), \\ \xi &\mapsto D(\xi) \end{aligned}$$

con

$$(D(\xi))(x_0, \dots, x_q) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \xi(f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_q)).$$

Por hipótesis, tenemos que D lleva aplicaciones \mathcal{Y} -localmente cero de $C^{q+1}(Y; G)$ en aplicaciones \mathcal{X} -localmente cero de $C^q(X; G)$, es decir, $D(C_Y^{q+1}(Y; G)) \subset C_X^q(X; G)$. De este modo, si ξ representa a una clase de cohomología de $H_Y^q(Y; G)$ (es decir, $\delta(\xi)$ es \mathcal{Y} -localmente cero), tenemos que $D(\delta(\xi))$ es \mathcal{X} -localmente cero.

Una demostración análoga a la dada en la página 112 de [Hatcher(2002)] demuestra que

$$\delta \circ D + D \circ \delta = g^\# - f^\#.$$

Y por tanto,

$$g^\#(\xi) - f^\#(\xi) - \delta(D(\xi)) = D(\delta(\xi))$$

es \mathcal{X} -localmente cero. En definitiva, $f^* = g^*$. □

1.2.5. Cohomología de Čech y aplicación inducida

Consideremos la aplicación identidad $\text{Id} : X \rightarrow X$. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X . Si \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} (es decir, \mathcal{X}' refina a $\text{Id}^{-1}(\mathcal{X})$), podemos definir $t_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} := \text{Id}^* : H^q(V(\mathcal{X}); G) \rightarrow H^q(V(\mathcal{X}'); G)$. Y así, $\{H^q(V(\mathcal{X}); G); t_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$ es un sistema directo indexado por el conjunto de recubrimientos abiertos de X . El límite directo

$$\varinjlim \{H^q(V(\mathcal{X}); G); t_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$$

de este sistema directo es, por definición, la cohomología de Čech de X (con coeficientes en G), y la denotamos por $\check{H}^q(X; G)$.

Por otro lado, la aplicación identidad de X también induce la aplicación $\text{Id}^* =: \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} : H_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow H_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$. Y así, $\{H_{\mathcal{X}}^q(X; G); \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$ es un sistema directo indexado por $\text{Cov}(X)$.

Proposición 1.53. *El límite directo de $\{H_{\mathcal{X}}^q(X; G); \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$ es precisamente la cohomología de Alexander–Spanier de X .*

Demostración. Por definición de aplicación localmente cero y por el Lema A.9, podemos identificar el subconjunto de $C^q(X; G)$ formado por las aplicaciones localmente cero con el límite directo del sistema directo $\{C_{\mathcal{X}}^q(X; G); \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}\}$, siendo $\tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} : C_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow C_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$ la inclusión para $\mathcal{X}' \succ \mathcal{X}$. Por lo anterior, podemos identificar $\overline{C}^q(X; G)$ con el límite directo del sistema directo $\{\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G); \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} : \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G) \rightarrow \overline{C}_{\mathcal{X}'}^q(X; G)\}$. De hecho, el sistema directo formado por

$$\left\{ \left\{ \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G); \overline{\delta} \right\} ; \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} : \left\{ \overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G); \overline{\delta} \right\} \rightarrow \left\{ \overline{C}_{\mathcal{X}'}^q(X; G); \overline{\delta} \right\} \right\},$$

tiene al complejo de cocadenas $\{\overline{C}^q(X; G); \overline{\delta}\}$ como límite directo.

Entonces el resultado se sigue del hecho de que el functor homológico conmuta con los límites directos. La demostración de este hecho se puede encontrar en la página 162 de [Spanier(1966)]. \square

Hemos visto que todas las cohomologías a escala \mathcal{X} que habíamos definido son isomorfas, por lo que definen sistemas directos cuyos límites directos son isomorfos a la cohomología de Čech de X , y así, de la proposición anterior se sigue el siguiente teorema:

Teorema 1.54. *La cohomología de Alexander–Spanier y la de Čech son isomorfas.*

Por el teorema anterior, también usaremos $\check{H}^q(X; G)$ para denotar la cohomología de Alexander–Spanier de X .

Observación 1.55. *Sea $z \in \check{H}^q(X; G)$ y sea ξ un representante de z (es decir, $[\xi] = z$). Como $\delta(\xi)$ es localmente cero, existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que $\delta(\xi)$ es \mathcal{X} -localmente cero. Por lo que decimos que ξ es un **representante \mathcal{X} -pequeño** de z .*

Observación 1.56. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces $f^* : H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) \rightarrow H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G)$ está bien definida para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y .*

Sea $z \in \check{H}^q(Y; G)$. El Lema A.9 nos asegura que existe un recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y y existe $z_{\mathcal{Y}} \in H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G)$ tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{Y}} : H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) &\rightarrow \check{H}^q(Y; G) \\ z_{\mathcal{Y}} &\mapsto z. \end{aligned}$$

Definición 1.57. Definimos $f^* : \check{H}^q(Y; G) \rightarrow \check{H}^q(X; G)$ por $f^*(z) := \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(f^*(z_{\mathcal{Y}}))$, siendo $\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})}$ la proyección de $H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G)$ en $\check{H}^q(X; G)$ y siendo la f^* que aparece en la derecha, la aplicación inducida de f que lleva $H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G)$ en $H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G)$.

Veamos que $f^* : \check{H}^q(Y; G) \rightarrow \check{H}^q(X; G)$ está bien definida:

- Primero, comprobemos que no depende de la elección de $z_{\mathcal{Y}}$.

Sea $z'_{\mathcal{Y}} \in H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G)$ tal que $\tau_{\mathcal{Y}}(z'_{\mathcal{Y}}) = z$. Por definición de límite directo, existe un recubrimiento abierto \mathcal{Y}' de Y que refina a \mathcal{Y} (y así, $f^{-1}(\mathcal{Y})$ y $f^{-1}(\mathcal{Y}')$ son recubrimientos abiertos de X tales que $f^{-1}(\mathcal{Y}') \succ f^{-1}(\mathcal{Y})$) y es tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'} : H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) &\longrightarrow H_{\mathcal{Y}'}^q(Y; G) \\ z_{\mathcal{Y}}, z'_{\mathcal{Y}} &\longmapsto \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(z_{\mathcal{Y}}) = \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(z'_{\mathcal{Y}}) \end{aligned}$$

Pues bien, como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G) & & \\ \downarrow \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'} & & \downarrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}), f^{-1}(\mathcal{Y}')} & \searrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})} & \\ H_{\mathcal{Y}'}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y}')}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}')}} & \check{H}^q(X; G) \end{array}$$

es conmutativo (la conmutatividad del triángulo derecho se debe al Lema A.8) y como $\tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(z_{\mathcal{Y}}) = \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'}(z'_{\mathcal{Y}})$, concluimos que $\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(f^*(z_{\mathcal{Y}})) = \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(f^*(z'_{\mathcal{Y}}))$.

- Comprobemos ahora que no depende de la elección de \mathcal{Y} .

Sea \mathcal{Y}' otro recubrimiento abierto de Y para el que existe $z_{\mathcal{Y}'} \in H_{\mathcal{Y}'}^q(Y; G)$ tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{Y}'} : H_{\mathcal{Y}'}^q(Y; G) &\rightarrow \check{H}^q(Y; G) \\ z_{\mathcal{Y}'} &\mapsto z. \end{aligned}$$

Puesto que el conjunto de recubrimientos abiertos de Y es un conjunto dirigido, sabemos que existe un recubrimiento abierto \mathcal{Y}'' de Y que refina a \mathcal{Y} y a \mathcal{Y}' , y es tal que que cada uno de

los siguientes diagramas,

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G) & & \\
 \downarrow \tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}''} & & \downarrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}), f^{-1}(\mathcal{Y}'')} & \searrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})} & \\
 H_{\mathcal{Y}''}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y}'')}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}'')}} & \check{H}^q(X; G)
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\mathcal{Y}'}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y}')}^q(X; G) & & \\
 \downarrow \tau_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}''} & & \downarrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}'), f^{-1}(\mathcal{Y}'')} & \searrow \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}')} & \\
 H_{\mathcal{Y}''}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y}'')}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}'')}} & \check{H}^q(X; G),
 \end{array}$$

es conmutativo. Como la segunda fila es común en ambos diagramas y como $\tau_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}''}(z_{\mathcal{Y}}) = \tau_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}''}(z_{\mathcal{Y}'})$, concluimos que $\tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(f^*(z_{\mathcal{Y}})) = \tau'_{f^{-1}(\mathcal{Y}')} (f^*(z_{\mathcal{Y}'}))$.

Observación 1.58. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. De la definición de la aplicación inducida $f^* : \check{H}^q(Y; G) \rightarrow \check{H}^q(X; G)$ se sigue que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G) \\
 \downarrow \tau'_{\mathcal{Y}} & & \downarrow \tau_{f^{-1}(\mathcal{Y})} \\
 \check{H}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & \check{H}^q(X; G)
 \end{array}$$

para todo recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y . Además, por el Lema A.8 se sigue que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau_{f^{-1}(\mathcal{Y}), \mathcal{X}}} & H_{\mathcal{X}}^q(X; G) \\
 \downarrow \tau'_{\mathcal{Y}} & & \downarrow \tau_{f^{-1}(\mathcal{Y})} & \swarrow \tau_{\mathcal{X}} & \\
 \check{H}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & \check{H}^q(X; G) & &
 \end{array}$$

es conmutativo para todo recubrimiento abierto \mathcal{X} de X que refine a $f^{-1}(\mathcal{Y})$.

En el Capítulo X de [Eilenberg y Steenrod(1952)] se prueba la **propiedad de continuidad** de la cohomología de Čech para espacios Hausdorff compactos: si $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\beta}\}$ es un sistema inverso de espacios Hausdorff compactos, entonces

$$\check{H}^q(\varprojlim \{X_\alpha; \pi_{\alpha,\beta}\}; G) = \varinjlim \{\check{H}^q(X_\alpha; G); \pi_{\alpha,\beta}^*\}.$$

Observación 1.59. Para R un anillo con 1, y \mathbb{K} un cuerpo, no es muy difícil comprobar que $\check{H}^q(X; R)$ (y $\check{H}^q(X; G_R)$ para G_R un R -módulo) es un R -módulo y que $\check{H}^q(X; \mathbb{K})$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

1.2.6. Descripción del 0-ésimo grupo de cohomología de Čech

Veamos que $\check{H}^0(X; G)$ está formado por todas las aplicaciones que son localmente constantes. Decimos una aplicación $\varphi : X \rightarrow G$ es **localmente constante** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U_x de x tal que $\varphi|_{U_x}$ es constante.

Como $\overline{C}^{-1}(X; G) = 0$, tenemos que

$$\check{H}^0(X; G) = \text{Ker}(\overline{\delta} : \overline{C}^0(X; G) \rightarrow \overline{C}^1(X; G)) / \text{Im}(\overline{\delta} : \overline{C}^{-1}(X; G) \rightarrow \overline{C}^0(X; G))$$

es igual a $\check{H}^0(X; G) = \text{Ker}(\overline{\delta}) / \{0\} = \text{Ker}(\overline{\delta})$. Por tanto cada $\xi \in \check{H}^0(X; G)$ es tal que $\delta(\xi)$ es localmente cero. Que $\delta(\xi)$ sea localmente cero significa que existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que

$$0 = (\delta(\xi))(x_0, x_1) = \xi(x_1) - \xi(x_0)$$

para todo $x_0, x_1 \in U$ con $U \in \mathcal{X}$. Y por tanto, ξ es localmente constante (porque es constante sobre cada miembro de \mathcal{X}).

Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Como $\overline{C}_{\mathcal{X}}^{-1}(X; G) = 0$, tenemos que

$$H_{\mathcal{X}}^0(X; G) = \text{Ker}(\overline{\delta} : \overline{C}_{\mathcal{X}}^0(X; G) \rightarrow \overline{C}_{\mathcal{X}}^1(X; G)) / \text{Im}(\overline{\delta} : \overline{C}_{\mathcal{X}}^{-1}(X; G) \rightarrow \overline{C}_{\mathcal{X}}^0(X; G))$$

es igual a $H_{\mathcal{X}}^0(X; G) = \text{Ker}(\overline{\delta}) / \{0\} = \text{Ker}(\overline{\delta})$. Por tanto cada $\xi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ es tal que $\delta(\xi)$ es \mathcal{X} -localmente cero, es decir,

$$0 = (\delta(\xi))(x_0, x_1) = \xi(x_1) - \xi(x_0)$$

para todo $x_0, x_1 \in U$ con $U \in \mathcal{X}$. Así, si dos puntos x e y de X son tales que existe un camino de puntos x_0, x_1, \dots, x_n \mathcal{X} -pequeño que los une, entonces $\xi(x) = \xi(y)$. Por tanto, ξ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente de X , y así, $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ está formado por todas las aplicaciones que son constantes sobre cada \mathcal{X} -componente de X .

De la caracterización previa, es sencillo construir 0-cociclos \mathcal{X} -pequeños de X :

Ejemplo 1.60. Dado un subconjunto \mathcal{X} -clopen A de X , la Proposición 1.28 nos garantiza que la función característica χ_A de A es constante sobre cada \mathcal{X} -componente, y así, χ_A define un elemento de $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$.

Por otro lado, para cada $\varphi \in \check{H}^0(X; G)$, el Lema A.9 del Apéndice A nos asegura que existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que $\varphi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$, y por tanto, φ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente. Por tanto, si $\varphi : X \rightarrow G$ es una aplicación que es constante sobre cada \mathcal{X} -componente para algún recubrimiento abierto \mathcal{X} de X , entonces $\varphi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$. Es decir, $\check{H}^0(X; G) = \bigcup_{\mathcal{X} \in \text{COV}(X)} H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$. En particular, todo elemento de $\check{H}^0(X; G)$ es constante sobre cada cuasi-componente de X .

Seguindo el Ejemplo 1.60, no es cierto en general que la función característica χ_{QC} de una cuasi-componente QC de X represente un elemento de $\check{H}^0(X; G)$. De hecho, si QC no es abierto, entonces χ_{QC} no es localmente constante.

Proposición 1.61. *Si X es compacto (por lo que el número de \mathcal{X} -componentes es finito), entonces*

$$\{\chi_{C^{\mathcal{X}}} : C^{\mathcal{X}} \text{ } \mathcal{X}\text{-componente}\}$$

es una base de $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$. Y de hecho,

$$\{\chi_U : U \text{ clopen de } X\}$$

genera a $\check{H}^0(X; G)$.

Demostración. Sean $C_1^{\mathcal{X}}, \dots, C_n^{\mathcal{X}}$ las \mathcal{X} -componentes de X . Las aplicaciones $\chi_{C_1^{\mathcal{X}}}, \dots, \chi_{C_n^{\mathcal{X}}}$ definen elementos de $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ que son claramente linealmente independientes. Sea $\varphi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$. Como φ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente, tenemos que $\varphi(C_i^{\mathcal{X}}) = \{c_i\}$ para $i = 1, \dots, n$. Y así,

$$\varphi = c_1 \cdot \chi_{C_1^{\mathcal{X}}} + \dots + c_n \cdot \chi_{C_n^{\mathcal{X}}},$$

por lo que las aplicaciones $\chi_{C_1^{\mathcal{X}}}, \dots, \chi_{C_n^{\mathcal{X}}}$ generan a $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$.

Sea $\varphi \in \check{H}^0(X; G)$. Como φ es localmente constante, se sigue que para todo $c \in G$ la preimagen $\varphi^{-1}(c)$ es un subconjunto abierto (posiblemente vacío) de X y la colección $\{\varphi^{-1}(c) : c \in G\}$ es una partición abierta de X (de hecho, dicha partición es por clopens puesto que cada elemento también es cerrado ya que su complementario es abierto por ser la unión de abiertos). Además, como X es compacto, dicha partición posee un subrecubrimiento finito, por lo que la partición es finita, lo que implica que φ solo toma un número finito de valores c_1, \dots, c_m . Denotamos $U_j := \varphi^{-1}(c_j)$ para todo $j = 1, \dots, m$. Podemos escribir

$$\varphi = c_1 \cdot \chi_{U_1} + \dots + c_m \cdot \chi_{U_m},$$

y así, el conjunto

$$\{\chi_U : U \text{ clopen de } X\}$$

genera a $\check{H}^0(X; G)$. □

Por el Lema 1.24, una familia finita de cuasi-componentes CQ_i se puede separar por entornos clopens O_i disjuntos, y dichos entornos son \mathcal{X} -clopens para un recubrimiento abierto \mathcal{X} lo suficientemente fino. El conjunto $\{\chi_{O_i}\}$ es claramente linealmente independiente en $\check{H}^0(X; G)$.

Proposición 1.62. $\check{H}^0(X; G)$ tiene dimensión finita si y solo si X tiene un número finito de cuasi-componentes. De hecho, en estas condiciones, tenemos que la dimensión de $\check{H}^0(X; G)$ coincide con el número de cuasi-componentes de X .

Demostración. 1). Supongamos primero que solo hay un número finito de cuasi-componentes de X : QC_1, \dots, QC_n . Cada QC_i es cerrado, pero en este caso es también abierto puesto que su complementario es la unión finita de cerrados (recordemos que las cuasi-componentes particionan X , Proposición 1.33). Y así, las aplicaciones $\chi_{QC_1}, \dots, \chi_{QC_n}$ definen elementos de $\check{H}^0(X; G)$ que son linealmente independientes. Sea $\xi \in \check{H}^0(X; G)$, sabemos que existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que ξ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente. En particular, ξ es constante sobre cada \mathcal{X}' -componente para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{X}' que refine a \mathcal{X} puesto que cada \mathcal{X} -componente se expresa como unión de \mathcal{X}' -componentes (ver la Proposición 1.29). Considerando $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \vee \{QC_1, \dots, QC_n\}$, tenemos que QC_i es \mathcal{X}' -clopen puesto que \mathcal{X}' refina a $\{QC_i, X \setminus QC_i\}$, y así, QC_i es una \mathcal{X}' -componente puesto que la cuasi-componente QC_i está contenida en una única \mathcal{X}' -componente. Por lo tanto, las aplicaciones $\chi_{QC_1}, \dots, \chi_{QC_n}$ también generan a $\check{H}^0(X; G)$.

2). Si la dimensión de $\check{H}^0(X; G)$ es finita, tenemos que el número de cuasi-componentes de X es finito por lo comentado antes de esta proposición, y así, podemos aplicar 1). □

Decimos que la aplicación $\xi : X \rightarrow G$ es **localmente finita** si cada punto $x \in X$ posee un entorno abierto N_x tal que la imagen de $\xi|_{N_x}$ es finita. Decimos que un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X es **localmente finito** si cada punto $x \in X$ posee un entorno abierto N_x que interseca solo a un número finito de elementos de \mathcal{X} . Y decimos que un espacio topológico X es **paracompacto** si cada recubrimiento abierto \mathcal{X} de X posee un refinamiento \mathcal{X}' que es localmente finito.

Proposición 1.63. Si X es paracompacto, entonces todo elemento de $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ es localmente finito.

Demostración. Sabemos que la colección de \mathcal{X} -componentes, $\{C^{\mathcal{X}}\}$, forma una partición por clopens de X , y así, como X es paracompacto, existe un recubrimiento abierto $\{W_i\}_{i \in I}$ localmente finito que refina a $\{C^{\mathcal{X}}\}$. Por otro lado, como $\{C^{\mathcal{X}}\}$ es una partición y como $\{W_i\}_{i \in I}$ es un refinamiento suyo, cada W_i está contenido en un único $C_i^{\mathcal{X}}$, y además, si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, entonces $C_i^{\mathcal{X}} = C_j^{\mathcal{X}}$.

Sea $x \in X$. Como $\{W_i\}_{i \in I}$ es localmente finito, existe un entorno abierto N_x de x tal que el cardinal de $\{i \in I : N_x \cap W_i \neq \emptyset\}$ es finito, y por lo comentado al final de párrafo anterior, se sigue que N_x solo interseca a un número finito de elementos de $\{C^{\mathcal{X}}\}$.

En definitiva, como sabemos además que cualquier $\xi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente $C^{\mathcal{X}}$, concluimos que la imagen de $\xi|_{N_x}$ es finita. □

Proposición 1.64. Si X es compacto, entonces todo elemento de $H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$ tiene imagen finita.

Demostración. El número de \mathcal{X} -componentes es finito puesto que las \mathcal{X} -componentes forman una partición por clopens del espacio compacto X . Sea $\xi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$. Como ξ es constante sobre cada \mathcal{X} -componente, tenemos que el cardinal de $\text{Im}(\xi)$ es menor que el número de \mathcal{X} -componentes. □

Si consideramos la cohomología de Čech, las siguientes proposiciones son consecuencias de las dos proposiciones anteriores puesto que si $\xi \in \check{H}^0(X; G)$, el Lema A.9 del Apéndice A nos asegura que existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X tal que $\xi \in H_{\mathcal{X}}^0(X; G)$.

Proposición 1.65. *Si X es paracompacto, entonces todo elemento de $\check{H}^0(X; G)$ es localmente finito.*

Proposición 1.66. *Si X es compacto, entonces todo elemento de $\check{H}^0(X; G)$ posee imagen finita.*

En la subsección siguiente generalizaremos las dos proposiciones anteriores para $q > 0$.

1.2.7. Representante (localmente) finito de una clase de cohomología de Čech

Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X , y sea un subconjunto $A \subset X$. Definimos **la estrella de A con respecto de \mathcal{X}** (y la denotamos por $\text{st}(A, \mathcal{X})$) como la unión de todos los elementos de \mathcal{X} que intersecan a A .

Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X . Decimos que \mathcal{X} es un **refinamiento estrella** de \mathcal{X}' si $\{\text{st}(U, \mathcal{X}) : U \in \mathcal{X}\}$ es un refinamiento de \mathcal{X}' .

Teorema 1.67. *Sea X un espacio topológico paracompacto y Hausdorff. Y sea z una clase de cohomología de Čech de X . Entonces existe $\xi \in C^q(X; G)$ localmente finito tal que $z = [\xi]$.*

Este teorema ya ha sido demostrado en [Gordon(1955)]. También hemos visto al final de la Subsección 1.2.6 que este teorema (y el que enunciaremos a continuación) sigue siendo válido para $q = 0$ incluso si prescindimos de la condición Hausdorff.

Demostración. Como $z \in \check{H}^q(X; G)$, el Lema A.9 del Apéndice A nos asegura existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}' de X y existe un elemento $z_{\mathcal{X}'} \in H_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$ tal que

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{X}'}^q(X; G) &\xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}'}} \check{H}^q(X; G) \\ z_{\mathcal{X}'} &\longmapsto z \end{aligned}$$

Sea $\xi_{\mathcal{X}'}$ un representante de $z_{\mathcal{X}'}$ (es decir, $[\xi_{\mathcal{X}'}] = z_{\mathcal{X}'}$). Recordemos que a tal aplicación $\xi_{\mathcal{X}'}$ también la llamamos representante \mathcal{X}' -pequeño de z .

Como X es paracompacto y Hausdorff, sabemos gracias a [Stone(1948)] que existe un recubrimiento abierto localmente finito $\mathcal{X} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ que es un refinamiento estrella de \mathcal{X}' , y tomamos una buena ordenación sobre el conjunto de índices I . Fijamos $u_{\alpha} \in U_{\alpha}$ para todo $\alpha \in I$.

Como I es un conjunto bien ordenado, la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto u_{\alpha}, \text{ siendo } \alpha = \text{mín} \{ \alpha \in I : x \in U_{\alpha} \}, \end{aligned}$$

está bien definida.

La aplicación p lleva puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{X}' -ceranos (y así, podemos definir $p^* : H_{\mathcal{X}'}^q(X; G) \rightarrow H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$): si x_0, \dots, x_q son puntos \mathcal{X} -ceranos, entonces existe $U \in \mathcal{X}$ tal que $x_0, \dots, x_q \in U$, por lo que $x_0, \dots, x_q \in \text{st}(U, \mathcal{X})$, y como \mathcal{X} es un refinamiento estrella de \mathcal{X}' , existe $V \in \mathcal{X}'$ tal que $\text{st}(U, \mathcal{X}) \subset V$. Por otro lado, como $p(x_i) = u_{\alpha_i}$ con $x_i \in U_{\alpha_i}$ (siendo α_i el menor α tal que $x_i \in U_{\alpha}$), tenemos que $u_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \subset \text{st}(U, \mathcal{X})$, y así,

$$u_{\alpha_0}, \dots, u_{\alpha_q} \in \text{st}(U, \mathcal{X}) \subset V,$$

por lo que los puntos $u_{\alpha_0}, \dots, u_{\alpha_q}$ son \mathcal{X}' -ceranos.

Comprobemos que $\tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}} = p^*$. Como se cumple que si $x_0, \dots, x_q \in X$ son puntos \mathcal{X} -ceranos entonces $x_0, \dots, x_i, p(x_i), \dots, p(x_q)$ son puntos \mathcal{X}' -ceranos para cualquier $i = 0, \dots, q$, se sigue de la Proposición 1.52 que $\tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}} = p^*$.

Por el Lema A.8 del Apéndice A, tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{X}'}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}'}} & \check{H}^q(X; G) \\ \tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}} \downarrow & \nearrow \tau_{\mathcal{X}} & \\ H_{\mathcal{X}}^q(X; G) & & \end{array}$$

es conmutativo. De este modo, puesto que $\tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}} = p^*$, tenemos que $p^\#(\xi_{\mathcal{X}'})$ es un representante \mathcal{X} -pequeño de z , y que además, dicho representante es localmente finito. En efecto, sea $x \in X$. Como X es paracompacto, existe un entorno abierto W_x de x tal que $\{\alpha \in I : U_{\alpha} \cap W_x \neq \emptyset\}$ tiene cardinal finito, y así, $p(W_x)$ tiene cardinal finito. De este modo, para cualquier $(x_0, x_1, \dots, x_q) \in X^{q+1}$, el entorno abierto $W_{x_0} \times W_{x_1} \times \dots \times W_{x_q}$ de (x_0, x_1, \dots, x_q) es tal que

$$(p^\#(\xi_{\mathcal{X}'}))|_{W_{x_0} \times W_{x_1} \times \dots \times W_{x_q}} : W_{x_0} \times W_{x_1} \times \dots \times W_{x_q} \longrightarrow G$$

posee imagen finita. □

Teorema 1.68. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Y sea z una clase de cohomología de Čech de X . Entonces existe $\xi \in C^q(X; G)$ con imagen finita tal que $z = [\xi]$.*

Este teorema fue inicialmente demostrado en [Keese(1950)].

Demostración. Como todo espacio compacto es también paracompacto, podemos aplicar el teorema anterior, con la única diferencia de que podemos elegir \mathcal{X} finito y de este modo, $p^\#(\xi_{\mathcal{X}'})$ es un representante \mathcal{X} -pequeño de z con imagen finita. □

Capítulo 2

Integral

En la definición usual de la cohomología como la homología del dual de un complejo de cadenas, existe una manera obvia en la que la cohomología actúa en la homología: por la evaluación de las cocadenas sobre las cadenas. Las descripciones de la homología y cohomología de Čech consideradas en este trabajo no son trivialmente el dual el uno del otro (desarrollaremos esto en la Subsección 2.3, Teorema 2.14); sin embargo, es posible definir una aplicación bilineal entre las clases de cohomología y homología en términos de una integral que recuerda a la teoría de integración de De Rham. Primero veremos una motivación heurística de la integral.

2.1. Motivación

Consideremos un espacio topológico X . Adoptaremos el lenguaje de la geometría diferencial, podemos pensar en una q -cocadena ξ como una forma q -diferencial, y podemos pensar en un q -símplice formal $\sigma = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ como un punto base x_0 junto con q «vectores» $\overrightarrow{x_0 x_i}$ que son «aproximaciones a la tangente» de X en x_0 . Entonces, la evaluación $\xi(\sigma)$ se puede pensar como la evaluación de la forma ξ_{x_0} sobre la tupla de los q vectores tangentes $(\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_q})$. Esta analogía sugiere cómo definir la integral de una clase de cohomología $z \in \check{H}^q(X)$ sobre una clase de homología $\gamma \in \check{H}_q(X)$: tomamos un cociclo ξ que representa a z y una aproximación $c = \sum k_i \sigma_i$ de γ , calculamos la «suma de Riemann» $\sum k_i \xi(\sigma_i)$ y entonces hacemos que el tamaño de los simplices tiendan a cero. No existe **a priori** una razón por la que el límite debería existir; sin embargo, la condición de cociclo $\delta(\xi) = 0$ asegura que sí.

Para explicar esto en más detalle consideremos una situación particularmente simple. Supongamos que $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino continuo cerrado en X y que ξ es un 1-cociclo. Para integrar ξ sobre γ como sugeríamos anteriormente, consideremos una partición $\{t_i\}_{i=1}^n$ de $[0, 1]$ y entonces evaluamos ξ sobre «la aproximación a los vectores tangentes» $\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ para obtener la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} \xi(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$. Entonces tomaremos progresivamente particiones más finas $\{t_i\}_{i=0}^n$ de $[0, 1]$ cuyo diámetro tienda a cero. ¿Qué ocurre si refinamos una partición insertando $t_* \in (t_i, t_{i+1})$? La suma de Riemann es modificada por

$$\xi(\gamma(t_i), \gamma(t_*)) + \xi(\gamma(t_*), \gamma(t_{i+1})) - \xi(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = (\delta(\xi))(\gamma(t_i), \gamma(t_*), \gamma(t_{i+1})).$$

Por la condición de cociclo, esta expresión se anula cuando los puntos están lo suficientemente cerca. Así, cuando la partición es lo suficientemente fina, sus refinamientos no cambian el valor de la suma de Riemann y, en consecuencia, el límite de las sumas cuando el diámetro de las particiones tiende a cero existe.

Las mismas ideas son trasladadas directamente a una integración sobre clases de 1-homología de Čech γ : en tal caso el progresivo refinamiento de la partición $\{t_i\}_{i=0}^n$ es de hecho parte de la definición de γ , proporcionada por tomar representantes $\gamma_{\mathcal{X}}$ de γ que son \mathcal{X} -pequeños para recubrimientos progresivamente más finos \mathcal{X} .

En la sección siguiente definiremos la integral tanto a escala un recubrimiento abierto \mathcal{X} como en el límite. En la Sección 2.3 estudiaremos la no degeneración de cada una de las dos entradas de la integral, y veremos en la Sección 2.4 que la integral conmuta con los homomorfismo conectantes de las sucesiones de Mayer-Vietoris en cohomología y homología. Y por último, en la Sección 2.5 veremos algunos ejemplos del calculo de la integral.

2.2. Definición de la integral

Sea G un grupo abeliano. Sea $\xi : X^{q+1} \rightarrow G$ una q -cocadena y sea $\sigma = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$ un q -símplice formal. Definimos la evaluación de ξ sobre σ como

$$\xi(\sigma) := \xi(x_0, x_1, \dots, x_q),$$

Del mismo modo, si $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ es una q -cadena formal, definimos la evaluación de ξ sobre c extendiendo linealmente la definición anterior: $\xi(c) := \sum_{i=1}^n k_i \xi(\sigma_i)$.

Estamos denotando por $\xi(\cdot)$ a la evaluación estándar de ξ sobre una tupla de puntos y a la evaluación de ξ sobre un símplice o una cadena.

Lema 2.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua). Entonces*

$$\xi(f_{\#}(c)) = (f^{\#}(\xi))(c),$$

donde ξ es una q -cocadena de Y y c es una q -cadena formal de X .

Demostración. La q -cadena formal $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ es una combinación lineal de q -símplices formales $\sigma_i = (x_0^i \ x_1^i \ \dots \ x_q^i)$, y entonces,

$$\begin{aligned} (f^{\#}(\xi))(c) &= \sum_{i=1}^n k_i (f^{\#}(\xi))(\sigma_i) = \sum_{i=1}^n k_i (f^{\#}(\xi))(x_0^i, x_1^i, \dots, x_q^i) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \xi(f(x_0^i), f(x_1^i), \dots, f(x_q^i)) = \sum_{i=1}^n k_i \xi(f_{\#}(\sigma_i)) = \xi\left(\sum_{i=1}^n k_i f_{\#}(\sigma_i)\right) = \xi(f_{\#}(c)). \end{aligned}$$

□

Lema 2.2 (Lema de Stokes). *Sea ξ una $(q-1)$ -cocadena y sea $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ una q -cadena formal. Entonces $(\delta(\xi))(c) = \xi(\partial(c))$.*

Demostración. Veamos que la tesis es cierta para cualquier q -símplice formal $\sigma = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_q)$:

$$\begin{aligned} (\delta(\xi))(\sigma) &= (\delta(\xi))(x_0, x_1, \dots, x_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \xi(x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \xi(x_0 \ \dots \ \widehat{x}_j \ \dots \ x_q) \\ &= \xi \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j (x_0 \ \dots \ \widehat{x}_j \ \dots \ x_q) \right) = \xi(\partial(\sigma)). \end{aligned}$$

Y así, también es cierta para cualquier q -cadena formal $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$:

$$(\delta(\xi))(c) = \sum_{i=1}^n k_i (\delta(\xi))(\sigma_i) = \sum_{i=1}^n k_i \xi(\partial(\sigma_i)) = \xi \left(\sum_{i=1}^n k_i \partial(\sigma_i) \right) = \xi(\partial(c)).$$

□

Definición 2.3. Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Ahora sean $z \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ y $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X)$. Sea ξ un q -cociclo que representa a z y sea c una q -cadena formal \mathcal{X} -pequeña que representa a γ . Definimos la **integral a escala \mathcal{X} de z sobre γ** como

$$\int_{\gamma} z := \xi(c). \tag{2.1}$$

Existen varias elecciones en esta definición, y para justificar que la definición es correcta necesitamos probar lo siguiente:

Teorema 2.4. El lado derecho de (2.1) es independiente de las elecciones de c y ξ .

Demostración. Sean c y c' dos q -cadenas formales \mathcal{X} -pequeñas que representan a γ . Por lo que $c - c' = \partial(d)$ para alguna $(q + 1)$ -cadena formal \mathcal{X} -pequeña d . Entonces por la linealidad de la evaluación y el Lema de Stokes, tenemos que

$$\xi(c) - \xi(c') = \xi(c - c') = \xi(\partial(d)) = (\delta(\xi))(d)$$

y el último término se anula debido a que $\delta(\xi)$ es \mathcal{X} -localmente cero. Y así, el lado derecho de la ecuación (2.1) no depende de la q -cadena formal \mathcal{X} -pequeña c elegida para representar a γ .

Finalmente, comprobemos que el lado derecho de la ecuación (2.1) es independiente de ξ . Sea ξ' otro representante de z , por lo que existe un η en $C^{q-1}(X; G)$ tal que $\xi - \xi' - \delta(\eta)$ es \mathcal{X} -localmente cero. Entonces $(\xi - \xi' - \delta(\eta))(c) = 0$. Por lo que

$$\xi(c) - \xi'(c) = (\xi - \xi')(c) = (\delta(\eta))(c) = \eta(\partial(c)) = \eta(0) = 0,$$

donde la antepenúltima igualdad se sigue del Lema de Stokes y la penúltima igualdad se debe a que c es un q -ciclo. □

También podemos definir la integral a escala \mathcal{X} si consideramos las clases de homología y cohomología a escala \mathcal{X} con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} . En ese caso, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.5. *La integral a escala \mathcal{X} es una aplicación bilineal cuando los coeficientes son considerados en un cuerpo \mathbb{K} .*

Demostración. ■ Primero, veamos que $\int_{\gamma} (a \cdot z + b \cdot z') = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma} z'$ para cualquier $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$, $z, z' \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Sean ξ y ξ' q -cociclos que representan a z y z' respectivamente, y entonces, $a \cdot \xi + b \cdot \xi'$ es un q -cociclo que representa a $a \cdot z + b \cdot z'$, y sea c una q -cadena formal \mathcal{X} -pequeña que representa a γ . Por tanto, tenemos que

$$\int_{\gamma} (a \cdot z + b \cdot z') = (a \cdot \xi + b \cdot \xi')(c) = a \cdot \xi(c) + b \cdot \xi'(c) = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma} z'.$$

■ Finalmente, comprobemos que $\int_{a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'} z = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma'} z$ para cualquier $z \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$, $\gamma, \gamma' \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Sea ξ un q -cociclo que representa a z , y sean c y c' dos q -cadenas formales \mathcal{X} -pequeñas que representan a γ y γ' respectivamente, y así, $a \cdot c + b \cdot c'$ es una q -cadena formal \mathcal{X} -pequeña que representa a $a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'$. Y entonces,

$$\int_{a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'} z = \xi(a \cdot c + b \cdot c') = a \cdot \xi(c) + b \cdot \xi(c') = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma'} z.$$

□

Lema 2.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua). Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X y sea \mathcal{Y} un recubrimiento abierto de Y tales que es posible definir $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{Y}}(Y)$ y $f^* : H_q^{\mathcal{Y}}(Y; G) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; G)$ (es decir, f lleva puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{Y} -ceranos). Entonces,*

$$\int_{\gamma} f^*(z) = \int_{f_*(\gamma)} z,$$

donde $z \in H_q^{\mathcal{Y}}(Y; G)$ y $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X)$.

Demostración. Sea ξ un q -cociclo (es decir, $\delta(\xi)$ es \mathcal{Y} -localmente cero) tal que $[\xi] = z$, y por tanto, $f^{\#}(\xi)$ es un q -cociclo (es decir, $\delta(f^{\#}(\xi))$ es \mathcal{X} -localmente cero) tal que $[f^{\#}(\xi)] = f^*(z)$. Sea c un q -ciclo formal \mathcal{X} -pequeño tal $[c] = \gamma$, y por tanto, $f_{\#}(c)$ es un q -ciclo formal \mathcal{Y} -pequeño tal que $[f_{\#}(c)] = f_*(\gamma)$. En definitiva, tenemos que

$$\int_{\gamma} f^*(z) = (f^{\#}(\xi))(c) = \xi(f_{\#}(c)) = \int_{f_*(\gamma)} z,$$

donde la segunda igualdad se sigue del Lema 2.1. □

Observación 2.7. *Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Si consideramos las proyecciones $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} = Id_* : H_q^{\mathcal{X}'}(X) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X)$ y $\tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} = Id^* : H_q^{\mathcal{X}}(X; G) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}'}(X; G)$, el lema anterior nos asegura que*

$$\int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(z) = \int_{\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\gamma)} z.$$

Definición 2.8. Ahora sean $z \in \check{H}^q(X; G)$ y $\gamma \in \check{H}_q(X)$. Debido al Lema A.9 del Apéndice A, sabemos que existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X , y existe $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ tal que

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{X}}^q(X; G) &\xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} \check{H}^q(X; G) \\ z_{\mathcal{X}} &\mapsto z, \end{aligned}$$

y consideramos la imagen de γ a través de la proyección

$$\begin{aligned} \check{H}_q(X) &\xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}}} H_q^{\mathcal{X}}(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

Definimos la **integral de z sobre γ** como

$$\int_{\gamma} z := \int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z_{\mathcal{X}}. \quad (2.2)$$

Para que la definición anterior sea correcta necesitamos probar que:

Teorema 2.9. El lado derecho de (2.2) es independiente de la elección del recubrimiento abierto \mathcal{X} y de $z_{\mathcal{X}}$.

Demostración. Sean $z_{\mathcal{X}}, z'_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ tales que $z = \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \tau_{\mathcal{X}}(z'_{\mathcal{X}})$. Por la construcción del límite directo (ver la Sección A.3 del Apéndice A), existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}' de X tal que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} y que $\tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}}) = \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(z'_{\mathcal{X}})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z_{\mathcal{X}} - \int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z'_{\mathcal{X}} &= \int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z_{\mathcal{X}} - z'_{\mathcal{X}} = \int_{\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\pi_{\mathcal{X}'}(\gamma))} z_{\mathcal{X}} - z'_{\mathcal{X}} \\ &= \int_{\pi_{\mathcal{X}'}(\gamma)} \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}} - z'_{\mathcal{X}}) = \int_{\pi_{\mathcal{X}'}(\gamma)} 0 = 0, \end{aligned}$$

donde la antepenúltima igualdad se sigue de la Observación 2.7.

Sea \mathcal{X}' otro recubrimiento abierto de X para el cual existe $z_{\mathcal{X}'} \in H_{\mathcal{X}'}^q(X; G)$ tal que $\tau_{\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}'}) = z$, y supongamos además que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . El Lema A.8 nos asegura que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{X}}^q(X; G) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & \check{H}^q(X; G) \\ \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \downarrow & \nearrow \tau_{\mathcal{X}'} & \\ H_{\mathcal{X}'}^q(X; G) & & \end{array}$$

es conmutativo, y así, $\tau_{\mathcal{X}'}(\tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}})) = \tau_{\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}'})$. Por otro lado, el Lema A.5 nos asegura que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_q^{\mathcal{X}}(X) & \xleftarrow{\pi_{\mathcal{X}}} & \check{H}_q(X) \\ \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \uparrow & \nwarrow \pi_{\mathcal{X}'} & \\ H_q^{\mathcal{X}'}(X) & & \end{array}$$

es conmutativo, de lo que se sigue que $\gamma_{\mathcal{X}'} := \pi_{\mathcal{X}'}(\gamma)$ es tal que $\gamma_{\mathcal{X}} = \pi_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(\gamma_{\mathcal{X}'})$. En definitiva, tenemos que

$$\int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z_{\mathcal{X}} = \int_{\pi_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(\gamma_{\mathcal{X}'})} z_{\mathcal{X}} = \int_{\gamma_{\mathcal{X}'}} \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}}) = \int_{\gamma_{\mathcal{X}'}} z_{\mathcal{X}'},$$

donde la penúltima igualdad se sigue de la Observación 2.7, mientras que la última igualdad se sigue del párrafo anterior y de que $\tau_{\mathcal{X}'}(\tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}})) = \tau_{\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}'})$. En el caso general cuando \mathcal{X}' no refine a \mathcal{X} , consideraremos el refinamiento común $\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'$. Este refina a \mathcal{X} y \mathcal{X}' , y por el argumento anterior

$$\int_{\gamma_{\mathcal{X}}} z_{\mathcal{X}} = \int_{\gamma_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'}} z_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'} = \int_{\gamma_{\mathcal{X}'}} z_{\mathcal{X}'},$$

donde $z_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'} \in H_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'}^q(X; G)$ es tal que $\tau_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'}) = z$ y $\gamma_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'} = \pi_{\mathcal{X} \vee \mathcal{X}'}(\gamma)$. \square

Observación 2.10. *Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Para cualquier $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ y $\gamma \in \check{H}_q(X)$, tenemos que*

$$\int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \int_{\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)} z_{\mathcal{X}}.$$

También podemos definir la integral para clases de homología y cohomología de Čech con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} . En ese caso, se tiene el siguiente lema:

Lema 2.11. *La integral es una aplicación bilineal cuando los coeficientes son considerados en un cuerpo \mathbb{K} .*

Demostración. ■ Primero, veamos que $\int_{\gamma} (a \cdot z + b \cdot z') = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma} z'$ para cualquier $\gamma \in \check{H}_q(X; \mathbb{K})$, $z, z' \in \check{H}^q(X; \mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X y existe $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K})$ tal que $z = \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}})$, y existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}' de X y existe $z'_{\mathcal{X}'}$ tal que $z' = \tau_{\mathcal{X}'}(z'_{\mathcal{X}'})$. Definiendo $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X} \vee \mathcal{X}'$, tenemos que los dos diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & \check{H}^q(X; \mathbb{K}) \\ \tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}_0} \downarrow & \nearrow \tau_{\mathcal{X}_0} & \\ H_{\mathcal{X}_0}^q(X; \mathbb{K}) & & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} H_{\mathcal{X}'}^q(X; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}'}} & \check{H}^q(X; \mathbb{K}) \\ \tau_{\mathcal{X}',\mathcal{X}_0} \downarrow & \nearrow \tau_{\mathcal{X}_0} & \\ H_{\mathcal{X}_0}^q(X; \mathbb{K}) & & \end{array}$$

son conmutativos. Y por tanto, $z = \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \tau_{\mathcal{X}_0}(\tau_{\mathcal{X},\mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}}))$ y $z' = \tau_{\mathcal{X}'}(z'_{\mathcal{X}'}) = \tau_{\mathcal{X}_0}(\tau_{\mathcal{X}',\mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'}))$,

y a su vez $a \cdot z + b \cdot z' = \tau_{\mathcal{X}_0}(a \cdot \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}}) + b \cdot \tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'}))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (a \cdot z + b \cdot z') &= \int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}_0}(a \cdot \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}}) + b \cdot \tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'})) \\ &= \int_{\pi_{\mathcal{X}_0}(\gamma)} (a \cdot \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}}) + b \cdot \tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'})) \\ &= a \cdot \int_{\pi_{\mathcal{X}_0}(\gamma)} \tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}}) + b \cdot \int_{\pi_{\mathcal{X}_0}(\gamma)} \tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'}) \\ &= a \cdot \int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}_0}(\tau_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0}(z_{\mathcal{X}})) + b \cdot \int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}_0}(\tau_{\mathcal{X}', \mathcal{X}_0}(z'_{\mathcal{X}'})) \\ &= a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma} z', \end{aligned}$$

donde la primera y cuarta igualdad se siguen de la Observación 2.10, mientras que la tercera igualdad se sigue de la bilinealidad de la integral a escala \mathcal{X}_0 .

- Finalmente, comprobemos que $\int_{a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'} z = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma'} z$ para cualquier $z \in \check{H}^q(X; \mathbb{K})$, $\gamma, \gamma' \in \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Existe un recubrimiento abierto \mathcal{X} de X y existe $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G)$ tal que $z = \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}})$, y entonces

$$\begin{aligned} \int_{a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'} z &= \int_{a \cdot \gamma + b \cdot \gamma'} \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \int_{\pi_{\mathcal{X}}(a \cdot \gamma + b \cdot \gamma')} z_{\mathcal{X}} = \int_{a \cdot \pi_{\mathcal{X}}(\gamma) + b \cdot \pi_{\mathcal{X}}(\gamma')} z_{\mathcal{X}} \\ &= a \cdot \int_{\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)} z_{\mathcal{X}} + b \cdot \int_{\pi_{\mathcal{X}}(\gamma')} z_{\mathcal{X}} = a \cdot \int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) + b \cdot \int_{\gamma'} \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = a \cdot \int_{\gamma} z + b \cdot \int_{\gamma'} z, \end{aligned}$$

donde la segunda y quinta igualdad se siguen de la Observación 2.10, mientras que la cuarta igualdad se sigue de la bilinealidad de la integral a escala \mathcal{X} . □

Lema 2.12. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, entonces*

$$\int_{\gamma} f^*(z) = \int_{f_*(\gamma)} z,$$

donde $z \in \check{H}^q(Y; G)$ y $\gamma \in \check{H}_q(X)$.

Demostración. Existe un recubrimiento abierto \mathcal{Y} de Y y existe $z_{\mathcal{Y}} \in H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G)$ tal que $\tau_{\mathcal{Y}}(z_{\mathcal{Y}}) = z$. La Observación 1.58 nos asegura que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{Y}}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & H_{f^{-1}(\mathcal{Y})}^q(X; G) \\ \tau_{\mathcal{Y}} \downarrow & & \downarrow \tau_{f^{-1}(\mathcal{Y})} \\ \check{H}^q(Y; G) & \xrightarrow{f^*} & \check{H}^q(X; G) \end{array}$$

es conmutativo, por lo que

$$f^*(z) = f^*(\tau'_y(z_y)) = \tau_{f^{-1}(y)}(f^*(z_y)).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f^*(z) &= \int_{\gamma} \tau_{f^{-1}(y)} f^*(z_y) = \int_{\pi_{f^{-1}(y)}(\gamma)} f^*(z_y) \\ &= \int_{f^*(\pi_{f^{-1}(y)}(\gamma))} z_y = \int_{\pi'_y(f_*(\gamma))} z_y = \int_{f_*(\gamma)} \tau'_y(z_y) = \int_{f_*(\gamma)} z, \end{aligned}$$

donde la segunda y quinta igualdad se siguen de la Observación 2.10, la tercera igualdad se sigue del Lema 2.6, y la cuarta igualdad se debe a que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \check{H}_q(Y) \\ \pi_{f^{-1}(y)} \downarrow & & \downarrow \pi'_y \\ H_q^{f^{-1}(y)}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q^y(Y) \end{array}$$

es conmutativo (por la Observación 1.15). □

2.3. No degeneración de la integral

Consideremos la integral a escala \mathcal{X} como la aplicación bilinear:

$$\begin{aligned} \int : H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) \times H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (z, \gamma) &\longmapsto \int_{\gamma} z. \end{aligned}$$

Fijando un $z \in H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K})$, podemos construir una forma lineal $I(z, \cdot) : H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ definida como

$$I(z, \gamma) = \int_{\gamma} z.$$

Claramente la aplicación

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}(H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}); \mathbb{K}) \\ z &\longmapsto I(z, \cdot) \end{aligned}$$

es lineal. En este lenguaje, $I(z, \cdot) = 0$ implica que $z = 0$ cuando la aplicación anterior es inyectiva. De manera análoga, también podemos fijar $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ y construir la forma lineal $I(\cdot, \gamma) : z \mapsto \int_{\gamma} z$. Diremos que las aplicaciones lineales $z \mapsto I(z, \cdot)$ y $\gamma \mapsto I(\cdot, \gamma)$ son las aplicaciones canónicas asociadas a la aplicación bilinear \int .

Proposición 2.13. *Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Entonces:*

(1). *La aplicación canónica*

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}(H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}); \mathbb{K}) \\ z &\longmapsto I(z, \cdot) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

(2). *La aplicación canónica*

$$\begin{aligned} H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}(H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}); \mathbb{K}) \\ \gamma &\longmapsto I(\cdot, \gamma) \end{aligned}$$

es inyectiva. Si \mathcal{X} es finito, entonces la aplicación anterior es un isomorfismo.

Demostración. Recordemos las identificaciones $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) = H_q(V(\mathcal{X}); \mathbb{K})$ y $H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) = H^q(V(\mathcal{X}); \mathbb{K})$ introducidas en el Capítulo 1. Bajo estas identificaciones, la integral es reducida a la evaluación de un elemento de $H^q(V(\mathcal{X}); \mathbb{K})$ sobre un elemento de $H_q(V(\mathcal{X}); \mathbb{K})$. Es bien sabido (ver por ejemplo la página 195 de [Hatcher(2002)]) que cuando los coeficientes son tomados en un cuerpo, para cualquier complejo simplicial P existe una identificación canónica

$$H^q(P; \mathbb{K}) \cong \text{Hom}(H_q(P); \mathbb{K})$$

dada por esta evaluación. Aplicando esto a $P = V(\mathcal{X})$, se tiene inmediatamente (1).

Ahora, probemos la inyectividad de la aplicación canónica de (2). Esto se sigue de la sobreyectividad de la aplicación canónica de (1). Sea $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ no nula. Como los coeficientes son tomados en un cuerpo, existe un elemento f en $\text{Hom}(H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}), \mathbb{K})$ tal que $f(\gamma) \neq 0$. De esta manera, por (1) existe $z \in H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K})$ tal que $f = I(z, \cdot)$. En particular,

$$\int_{\gamma} z = I(z, \gamma) = f(\gamma) \neq 0,$$

y esto también implica que $I(z, \gamma) \neq 0$, y así, $I(\cdot, \gamma) \neq 0$. Por tanto, la aplicación canónica $\gamma \mapsto I(\cdot, \gamma)$ es inyectiva. Cuando \mathcal{X} es finito, debido a la Observación 1.11 tenemos que $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$ es un espacio vectorial de dimensión finita d . Se sigue de (1) que $H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K})$ también tiene dimensión igual a d , y así, la dimensión de $\text{Hom}(H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}), \mathbb{K})$ es de nuevo igual a d . Como ya probamos que la aplicación canónica $\gamma \mapsto I(\cdot, \gamma)$ es inyectiva, dicha aplicación deberá ser un isomorfismo por ser una aplicación lineal inyectiva entre dos espacios vectoriales de dimensiones iguales. \square

También es natural preguntarse si la proposición anterior sigue siendo verdad no solo en una escala específica \mathcal{X} , sino que también en el límite, homología y cohomología de Čech. Es decir, si ahora consideramos la integral como una forma bilineal $\int : \check{H}^q(X; \mathbb{K}) \times \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, las aplicaciones canónicas siguen teniendo las propiedades enumeradas en la proposición anterior? El teorema siguiente proporciona una respuesta para espacios compactos. Nótese que los roles de homología y cohomología están invertidos si los comparamos con los de la Proposición 2.13:

Teorema 2.14. *Sea X un espacio compacto. Entonces:*

(1). *La aplicación canónica*

$$\begin{aligned} \check{H}_q(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}(\check{H}^q(X; \mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ \gamma &\longmapsto I(\cdot, \gamma) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

(2). *La aplicación canónica*

$$\begin{aligned} \check{H}^q(X; \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}(\check{H}_q(X; \mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ z &\longmapsto I(z, \cdot) \end{aligned}$$

es inyectiva. Es un isomorfismo si o bien $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ tiene dimensión finita o bien $\check{H}^q(X; \mathbb{K})$ tiene dimensión finita (de cumplirse alguno de los casos, se tiene que ambos espacios vectoriales tienen dimensiones finitas).

Este teorema es una consecuencia algebraica de la Proposición 2.13, por lo que su demostración es quizás menos pesada si la formulamos en dichos términos algebraicos. La construcción de la integral, en lo abstracto, puede ser descrita como sigue. Tenemos un sistema directo de espacios vectoriales $\{V_i\}$ (los grupos de cohomología $H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K})$) y un sistema inverso de espacios vectoriales $\{W_i\}$ (los grupos de homología $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K})$) ambos indexados por el mismo conjunto dirigido F . Denotamos por $\alpha_{i,j} : V_j \rightarrow V_i$ y por $\beta_{i,j} : W_j \rightarrow W_i$ a las aplicaciones lineales de los sistemas, y escribimos $\alpha_j : V_j \rightarrow \varinjlim V_i$ y $\beta_j : \varprojlim W_i \rightarrow W_j$ para las aplicaciones proyecciones que relacionan cada término del sistema con el límite. Para cada índice i existe una forma bilineal $B_i : V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{K}$ que es compatible con las aplicaciones lineales $\alpha_{i,j}$ y $\beta_{i,j}$ en el sentido que cuando $j \geq i$ se tiene que:

$$B_j(\alpha_{i,j}(v_i), w_j) = B_i(v_i, \beta_{i,j}(w_j)) \quad \text{para cualquier } v_i \in V_i \text{ y } w_j \in W_j. \quad (2.3)$$

Esto es el análogo abstracto de la Observación 2.7. Finalmente, la integral es la forma bilineal $B : (\varinjlim V_i) \times (\varprojlim W_i) \rightarrow \mathbb{K}$ definida como sigue: para calcular $B(v, w)$ encontramos un índice i suficientemente grande tal que exista $v_i \in V_i$ tal que $\alpha_i(v_i) = v$ y entonces definimos

$$B(v, w) := B_i(v_i, \beta_i(w)) \quad (2.4)$$

o equivalentemente

$$B(\alpha_i(v_i), w) = B_i(v_i, \beta_i(w)). \quad (2.5)$$

En general, esto no produce una aplicación B bien definida debido a que el lado derecho depende del índice i , pero en el caso de la integral sí lo hace, como se demostró en el Teorema 2.4.

Proposición 2.15. *En las configuraciones ya descritas, asumimos que las aplicaciones canónicas asociadas a cada B_i son isomorfismos (y que la Ecuación (2.4) define correctamente a B). Entonces se cumple lo siguiente:*

(1). La aplicación canónica

$$\begin{aligned} \varprojlim W_i &\longrightarrow \text{Hom}(\varinjlim V_i, \mathbb{K}) \\ w &\longmapsto B(\cdot, w) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

(2). La aplicación canónica

$$\begin{aligned} \varinjlim V_i &\longrightarrow \text{Hom}(\varprojlim W_i, \mathbb{K}) \\ v &\longmapsto B(v, \cdot) \end{aligned}$$

es inyectiva. Dicha aplicación es un isomorfismo si o bien $\varinjlim V_i$ tiene dimensión finita o bien $\varprojlim W_i$ tiene dimensión finita (en cualquier caso, ambos tienen dimensiones finitas).

Demostración. Por motivos de brevedad, escribimos $V = \varinjlim V_i$ y $W = \varprojlim W_i$.

(1). Demostraremos primero que $w \mapsto B(\cdot, w)$ es inyectiva. Asumimos que $B(\cdot, w)$ es el homomorfismo cero, por lo que $B(v, w) = 0$ para cualquier $v \in V$. Por el Lema A.9 del Apéndice A, esto es equivalente a decir que $B(\alpha_i(v_i), w) = 0$ para cualquier $v_i \in V_i$ y cualquier i . Usando la Ecuación (2.5), tenemos que $0 = B(\alpha_i(v_i), w) = B_i(v_i, \beta_i(w))$ para cualquier $v_i \in V_i$ y para cualquier i . Por tanto, como la aplicación canónica $\beta_i(w) \mapsto B_i(\cdot, \beta_i(w))$ es inyectiva por hipótesis, tenemos que $\beta_i(w) = 0$, y como esto se mantiene para todo i , se sigue que $w = 0$.

Ahora probemos que $w \mapsto B(\cdot, w)$ es sobreyectiva. Sea $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ un homomorfismo. Para cada índice i definimos el homomorfismo $f_i := f \circ \alpha_i : V_i \rightarrow \mathbb{K}$. Como la aplicación canónica $w_i \mapsto B_i(\cdot, w_i)$ es un isomorfismo por hipótesis, existe un único $w_i \in W_i$ tal que $f_i(v_i) = B_i(v_i, w_i)$ para cada $v_i \in V_i$ (es decir, $f_i = B_i(\cdot, w_i)$). Para cualquier otro índice $j \geq i$, tenemos también un homomorfismo f_j y un elemento $w_j \in W_j$ construido exactamente de la misma manera y tal que $f_j(v_j) = B_j(v_j, w_j)$ para cualquier $v_j \in V_j$. Afirmamos que $\beta_{i,j}(w_j) = w_i$. De hecho, para cualquier $v_i \in V_i$, tenemos

$$B_i(v_i, \beta_{i,j}(w_j)) = B_j(\alpha_{i,j}(v_i), w_j) = f_j(\alpha_{i,j}(v_i)) = f_i(v_i),$$

donde la primera igualdad se sigue de la ecuación (2.3), la segunda igualdad se sigue de la definición de f_j , y la tercera igualdad se debe a que $f_i = f_j \circ \alpha_{i,j}$ ya que $\alpha_i = \alpha_j \circ \alpha_{i,j}$. Por tanto, como $B_i(v_i, w_i) = f_i(v_i)$, tenemos que

$$0 = f_i(v_i) - f_i(v_i) = B_i(v_i, w_i) - B_i(v_i, \beta_{i,j}(w_j)) = B_i(v_i, w_i - \beta_{i,j}(w_j))$$

para cualquier $v_i \in V_i$, y así, como las aplicaciones canónicas de B_i son inyectivas, tenemos que $w_i - \beta_{i,j}(w_j) = 0$, es decir, $w_i = \beta_{i,j}(w_j)$. Esto implica que $\{w_i\}_{i \in F}$ es un elemento del límite inverso $W = \varprojlim W_i$ o, en otras palabras, existe $w \in W$ tal que $\beta_i(w) = w_i$ para todo $i \in F$. Pero entonces para cualquier vector $v \in V$ podemos escoger un índice $i \in F$ y un elemento $v_i \in V_i$ tal que $\alpha_i(v_i) = v$, por lo que

$$f(v) = f_i(v_i) = B_i(v_i, w_i) = B_i(v_i, \beta_i(w)) = B(v, w),$$

donde la última igualdad se sigue de la Ecuación (2.4).

- (2). Esto se sigue de la parte (1) por un argumento completamente análogo al usado en la Proposición 2.13. Si $v \in V$ es no nulo, existe una aplicación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(v) \neq 0$ y por (1) $f = B(\cdot, w)$ para algún $w \in W$. Y como $B(v, w) = f(v) \neq 0$, $B(v, \cdot)$ no es idénticamente cero. □

Demostración del Teorema 2.14. La hipótesis de que X es compacto implica que los recubrimientos abiertos finitos de X forman un subfamilia cofinal de la familia de todos los recubrimientos abiertos de X . Y así, podemos aplicar la proposición anterior, tomando como conjunto dirigido F , la colección de los recubrimientos abiertos finitos de X . En tal caso, la Proposición 2.13 asegura que las aplicaciones canónicas de $\int : H_{\mathcal{X}}^q(X; \mathbb{K}) \times H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ son isomorfismos. Por tanto, este teorema es una consecuencia directa de la Proposición 2.15. □

Proposición 2.16. *Sea X un espacio topológico compacto, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces:*

- I). *La aplicación lineal $f_* : \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es conjugada al dual de $f^* : \check{H}^q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}^q(X; \mathbb{K})$.*
- II). *λ es un autovalor de f_* si y solo si $f^* - \lambda \cdot \text{Id}$ es no sobreyectiva.*

Demostración. I). Esto se sigue del Teorema 2.14 (1) y del Lema 2.12 (este lema implica que $I(\cdot, f_*(\gamma)) = I(\cdot, \gamma) \circ f^*$ para cualquier $\gamma \in \check{H}_q(X; \mathbb{K})$).

- II). Sea λ un autovalor de f_* , por lo que existe $T \in \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ no nulo tal que $(f_* - \lambda \cdot \text{Id})(T) = 0$. Considerando $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ como el dual de $\check{H}^q(X; \mathbb{K})$ (gracias al Teorema 2.14), y pensando en T como un aplicación lineal de $\check{H}^q(X; \mathbb{K})$ en \mathbb{K} , $(f_* - \lambda \cdot \text{Id})(T) = 0$ es equivalente a $T \circ (f^* - \lambda \cdot \text{Id}) = 0$, es decir, $\text{Im}(f^* - \lambda \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}(T)$. Y así, λ es un autovalor de f_* si y solo si existe una aplicación lineal $T : \check{H}^q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ no nula que satisface $\text{Im}(f^* - \lambda \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}(T)$, y esto se da si y solo si $f^* - \lambda \cdot \text{Id}$ no es sobreyectiva. □

2.4. Propiedades de la integral

Para un par de subespacios $A, B \subset X$ tales que X es la unión del interior de A y de B , de este modo, aseguramos la existencia de recubrimientos abiertos de X que refinan a $\{\text{int}(A), \text{int}(B)\}$. Definiremos la sucesión de Mayer–Vietoris en la homología de Čech y en la cohomología de Alexander–Spanier.

La sucesión de Mayer–Vietoris en la homología de Čech del par A, B tiene la forma siguiente

$$\dots \longrightarrow \check{H}_{q+1}(A) \oplus \check{H}_{q+1}(B) \longrightarrow \check{H}_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta_*} \check{H}_q(A \cap B) \longrightarrow \check{H}_q(A) \oplus \check{H}_q(B) \longrightarrow \dots$$

Esta sucesión es obtenida como el límite inverso (en \mathcal{U}) de la sucesión de sucesiones exactas

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}^{\mathcal{U}|_A}(A) \oplus H_{q+1}^{\mathcal{U}|_B}(B) \longrightarrow H_{q+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\Delta_*} H_q^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}(A \cap B) \longrightarrow H_q^{\mathcal{U}|_A}(A) \oplus H_q^{\mathcal{U}|_B}(B) \longrightarrow \dots,$$

donde \mathcal{U} es un recubrimiento abierto de X que refina a $\{\text{int}(A), \text{int}(B)\}$. Y a la vez, esta última sucesión exacta es asociada (para más detalles de dicha construcción, ver la página 182 de [Spanier(1966)]) a la sucesión exacta corta de complejos de cadenas formada por la sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow C_q^{\mathcal{M}|_{A \cap B}}(A \cap B) \longrightarrow C_q^{\mathcal{M}|_A}(A) \oplus C_q^{\mathcal{M}|_B}(B) \longrightarrow C_q^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

$$u \longmapsto (i_{A \cap B, A\#}(u), i_{A \cap B, B\#}(u))$$

$$(v, w) \longmapsto i_{A, X\#}(v) - i_{B, X\#}(w)$$

donde $i_{C, D} : C \hookrightarrow D$ denota la aplicación inclusión de C en D . La exactitud de esta última sucesión se debe a que \mathcal{U} refina a $\{\text{int}(A), \text{int}(B)\}$. Por otro lado, como la sucesión de Mayer–Vietoris en la homología de Čech del par A, B es obtenida como el límite inverso de una sucesión de sucesiones exactas, no podemos garantizar que dicha sucesión sea exacta (ya que el funtor homológico falla a la hora de conmutar con los límites inversos, no conserva la sobreyectividad), tan solo podemos garantizar que es parcialmente exacta (de orden 2), ver la página 224 de [Eilenberg y Steenrod(1952)].

La sucesión de Mayer–Vietoris en la cohomología de Alexander–Spanier (con coeficientes en G , que omitiremos de la notación) tiene la forma siguiente

$$\dots \longleftarrow \check{H}^{q+1}(A) \oplus \check{H}^{q+1}(B) \longleftarrow \check{H}^{q+1}(X) \xleftarrow{\Delta^*} \check{H}^q(A \cap B) \longleftarrow \check{H}^q(A) \oplus \check{H}^q(B) \longleftarrow \dots$$

Esta sucesión exacta es la asociada a la sucesión exacta corta de complejos de cocadenas formados por las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \overline{C}^q(X) \xrightarrow{h} \overline{C}^q(A) \oplus \overline{C}^q(B) \xrightarrow{g} \overline{C}^q(A \cap B) \longrightarrow 0$$

$$\overline{\varphi} \longmapsto (\overline{i_{A, X}^\# \varphi}, \overline{i_{B, X}^\# \varphi})$$

$$(\overline{\phi}, \overline{\psi}) \longmapsto \overline{i_{A \cap B, A}^\# \phi} - \overline{i_{A \cap B, B}^\# \psi}$$

donde $(\overline{C}^q(X), \overline{\delta})$ es el complejo de cocadenas de la cohomología de Alexander–Spanier. Comprobemos que esta última sucesión es exacta.

- Primero veamos que h es inyectiva. Sea $\overline{\varphi} \in \overline{C}^q(X)$ tal que $h(\overline{\varphi}) = (0, 0)$, por lo que $\overline{i_{A, X}^\# \varphi} = 0$ y $\overline{i_{B, X}^\# \varphi} = 0$, es decir, $i_{A, X}^\#(\varphi)$ y $i_{B, X}^\#(\varphi)$ son localmente cero. Como $i_{A, X}^\#(\varphi)$ es localmente cero, existe un recubrimiento abierto \mathcal{U}_A de A tal que $i_{A, X}^\#(\varphi)$ es cero sobre cada elemento de \mathcal{U}_A , y como $i_{B, X}^\#(\varphi)$ es localmente cero, existe un recubrimiento abierto \mathcal{U}_B de B tal que

$i_{B,X}^\#(\varphi)$ es cero sobre cada elemento de \mathcal{U}_B . De este modo, si consideramos el recubrimiento abierto $\mathcal{U} := (\mathcal{U}_A|_{\text{Int}A}) \cup (\mathcal{U}_B|_{\text{Int}B})$ de X , tenemos que φ es cero sobre cada elemento de \mathcal{U} , y así, φ es localmente cero, es decir, $\overline{\varphi} = 0$.

- Veamos ahora que g es sobreyectiva. Sea $\overline{\varphi} \in \overline{C^q}(A \cap B)$ arbitrario. Definimos una aplicación $\phi \in C^q(A)$ por $\phi(x_0, \dots, x_q) = \varphi(x_0, \dots, x_q)$ si $\{x_0, \dots, x_q\} \subset A \cap B$ y por $\phi(x_0, \dots, x_q) = 0$ si $\{x_0, \dots, x_q\} \not\subset A \cap B$. De este modo, tenemos que $i_{A \cap B, A}^\#(\phi) = \varphi$, y así $g(\overline{\phi}, 0) = \overline{\varphi}$.
- Por último, veamos que $\text{Im}(h) = \text{Ker}(g)$. Tenemos que $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$ ya que $g \circ h = 0$,

$$\begin{aligned} (g \circ h)(\overline{\varphi}) &= g(h(\overline{\varphi})) = g(\overline{i_{A,X}^\#(\varphi)}, \overline{i_{B,X}^\#(\varphi)}) = \overline{i_{A \cap B, A}^\#(i_{A,X}^\#(\varphi))} - \overline{i_{A \cap B, B}^\#(i_{B,X}^\#(\varphi))} \\ &= \overline{i_{A \cap B, X}^\#(\varphi)} - \overline{i_{A \cap B, X}^\#(\varphi)} = 0 \end{aligned}$$

para cualquier $\overline{\varphi} \in \overline{C^q}(X)$.

Y también tenemos que $\text{Ker}(g) \subset \text{Im}(h)$. Sea $(\overline{\phi}, \overline{\psi}) \in \text{Ker}(g)$, por lo que $0 = g(\overline{\phi}, \overline{\psi}) = \overline{i_{A \cap B, A}^\#(\phi)} - \overline{i_{A \cap B, B}^\#(\psi)}$; es decir, $i_{A \cap B, A}^\#(\phi) = i_{A \cap B, B}^\#(\psi)$ localmente. De este modo, definiendo $\varphi \in C^q(X)$ por

$$\varphi(x_0, \dots, x_q) := \begin{cases} \phi(x_0, \dots, x_q) & \text{si } x_0, \dots, x_q \in A \\ \psi(x_0, \dots, x_q) & \text{si } x_0, \dots, x_q \in B \setminus A \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

tenemos que $i_{A,X}^\#(\varphi) = \phi$, y que $i_{B,X}^\#(\varphi) = \psi$ localmente, y así $h(\overline{\varphi}) = \overline{(i_{A,X}^\#(\varphi), i_{B,X}^\#(\varphi))} = (\overline{\phi}, \overline{\psi})$.

Lema 2.17. *Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subset X$ tales que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Entonces*

$$\int_{\Delta_*(\gamma)} z = \int_{\gamma} \Delta^*(z)$$

para todo $z \in \check{H}^q(A \cap B; G)$ y $\gamma \in \check{H}_{q+1}(X)$.

Demostración. ■ Sea $\xi \in C^q(A \cap B; G)$ un representante de z . Por definición, $\Delta^*(z) = [\eta] \in \check{H}^{q+1}(X; G)$, donde $\eta \in C^{q+1}(X; G)$ es tal que $\delta(\xi_A) = i_{A,X}^\#(\eta)$ y $\delta(\xi_B) = i_{B,X}^\#(\eta)$ localmente, donde además, $(\xi_A, \xi_B) \in C^q(A; G) \oplus C^q(B; G)$ es tal que $\xi = i_{A \cap B, A}^\#(\xi_A) - i_{A \cap B, B}^\#(\xi_B)$ localmente.

- Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X que refina a $\{\text{int}(A), \text{int}(B)\}$, y que además, es tal que $\delta(\eta)$ y $\delta(\xi)$ son \mathcal{U} -localmente cero.
- Sea $u^\mathcal{U} \in C_{q+1}^\mathcal{U}(X)$ un representante \mathcal{U} -pequeño de γ . Por definición, $w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}} \in C_q^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}(A \cap B)$ es un representante $\mathcal{U}|_{A \cap B}$ -pequeño de $\Delta_*(\gamma)$, donde $w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}$ es tal que $\partial(w^{\mathcal{U}|_A}) = i_{A \cap B, A\#}(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}})$ y $\partial(w^{\mathcal{U}|_B}) = i_{A \cap B, B\#}(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}})$, donde además, $(u^{\mathcal{U}|_A}, u^{\mathcal{U}|_B}) \in C_{q+1}^{\mathcal{U}|_A}(A) \oplus C_{q+1}^{\mathcal{U}|_B}(B)$ es tal que $u^\mathcal{U} = i_{A, X\#}(u^{\mathcal{U}|_A}) - i_{B, X\#}(u^{\mathcal{U}|_B})$.

De esta manera, $\int_{\Delta_*(\gamma)} z = \xi(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}})$ y $\int_{\gamma} \Delta^*(z) = \eta(u^{\mathcal{U}})$. Veamos ahora que $\int_{\Delta_*(\gamma)} z = \int_{\gamma} \Delta^*(z)$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \Delta^*(z) &= \eta(u^{\mathcal{U}}) = \eta(i_{A,X\#}(u^{\mathcal{U}|_A}) - i_{B,X\#}(u^{\mathcal{U}|_B})) = \eta(i_{A,X\#}(u^{\mathcal{U}|_A})) - \eta(i_{B,X\#}(u^{\mathcal{U}|_B})) \\ &= (i_{A,X\#}(\eta))(u^{\mathcal{U}|_A}) - (i_{B,X\#}(\eta))(u^{\mathcal{U}|_B}) = (\delta(\xi_A))(u^{\mathcal{U}|_A}) - (\delta(\xi_B))(u^{\mathcal{U}|_B}) \\ &= \xi_A(\partial(u^{\mathcal{U}|_A})) - \xi_B(\partial(u^{\mathcal{U}|_B})) = \xi_A(i_{A \cap B, A\#}(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}})) - \xi_B(i_{A \cap B, B\#}(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}})) \\ &= (i_{A \cap B, A}^{\#}(\xi_A))(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}) - (i_{A \cap B, B}^{\#}(\xi_B))(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}) \\ &= (i_{A \cap B, A}^{\#}(\xi_A) - i_{A \cap B, B}^{\#}(\xi_B))(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}) = \xi(w^{\mathcal{U}|_{A \cap B}}) = \int_{\Delta_*(\gamma)} z, \end{aligned}$$

donde cada una de las igualdades son seguidas por definición, o bien por Stokes, o bien por el Lema 2.1. \square

Sea X un espacio métrico compacto. Veamos ahora cómo definir la sucesión de Mayer–Vietoris para un par de subespacios cerrados $A, B \subset X$ tales que X es la unión de A y B . Para ello, sean $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bases de entornos encajados de A y B respectivamente, tenemos que $\{A_k, \varphi_{k',k}^A : A_k \rightarrow A_{k'}\}_{k' \leq k}$, $\{B_k, \varphi_{k',k}^B : B_k \rightarrow B_{k'}\}_{k' \leq k}$ y $\{A_k \cap B_k, \varphi_{k',k}^{A \cap B} : A_k \cap B_k \rightarrow A_{k'} \cap B_{k'}\}_{k' \leq k}$ definen sucesiones inversas, donde cada $\varphi_{k',k}$ denota la inclusión, y cuyos límites inversos son A , B y $A \cap B$, respectivamente. La existencia de dichas bases de entornos viene garantizada por el hecho de que A y B sean métricos compactos, ver la página 62 de [Mardešić y Segal(1982)]. Como $\text{Int}(A_k) \cup \text{Int}(B_k) \supset A \cup B = X$, tenemos que $X = \text{Int}(A_k) \cup \text{Int}(B_k)$, por lo que la sucesión de Mayer–Vietoris en homología del par A_k, B_k viene dada por

$$\dots \longrightarrow \check{H}_{q+1}(A_k) \oplus \check{H}_{q+1}(B_k) \longrightarrow \check{H}_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta_k^*} \check{H}_q(A_k \cap B_k) \longrightarrow \check{H}_q(A_k) \oplus \check{H}_q(B_k) \longrightarrow \dots,$$

y cuyo límite inverso (en k) de esta sucesión de sucesiones de Mayer–Vietoris es, debido a la propiedad de continuidad de la homología de Čech (ver la Subsección 1.1.4),

$$\dots \longrightarrow \check{H}_{q+1}(A) \oplus \check{H}_{q+1}(B) \longrightarrow \check{H}_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta_*^*} \check{H}_q(A \cap B) \longrightarrow \check{H}_q(A) \oplus \check{H}_q(B) \longrightarrow \dots$$

Por otro lado, la sucesión de Mayer–Vietoris en cohomología del par A_k, B_k viene dada por

$$\dots \longleftarrow \check{H}^{q+1}(A_k) \oplus \check{H}^{q+1}(B_k) \longleftarrow \check{H}^{q+1}(X) \xleftarrow{\Delta_k^*} \check{H}^q(A_k \cap B_k) \longleftarrow \check{H}^q(A_k) \oplus \check{H}^q(B_k) \longleftarrow \dots,$$

y cuyo límite directo (en k) de esta sucesión de sucesiones de Mayer–Vietoris es, debido a la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech (ver la Subsección 1.2.5),

$$\dots \longleftarrow \check{H}^{q+1}(A) \oplus \check{H}^{q+1}(B) \longleftarrow \check{H}^{q+1}(X) \xleftarrow{\Delta_*^*} \check{H}^q(A \cap B) \longleftarrow \check{H}^q(A) \oplus \check{H}^q(B) \longleftarrow \dots$$

A excepción de la sucesión de Mayer–Vietoris de la cohomología de Čech del par $A, B \subset X$, la sucesión de Mayer–Vietoris en homología de Čech es solo, en general, parcialmente exacta.

Lema 2.18. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $A, B \subset X$ subespacios cerrados tales que $X = A \cup B$. Entonces*

$$\int_{\Delta_*(\gamma)} z = \int_{\gamma} \Delta^*(z)$$

para todo $z \in \check{H}^q(A \cap B; G)$ y $\gamma \in \check{H}_{q+1}(X)$.

Demostración. Sean $\gamma \in \check{H}_{q+1}(X)$ y $z \in \check{H}^q(A \cap B; G) = \varinjlim \check{H}^q(A_k \cap B_k; G)$. Como existe un k y un $z_k \in \check{H}^q(A_k \cap B_k; G)$ tal que $(\varphi_k^{A \cap B})^*(z_k) = z$ (por el Lema A.9 del Apéndice A), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_*(\gamma)} z &= \int_{\Delta_*(\gamma)} (\varphi_k^{A \cap B})^*(z_k) = \int_{(\varphi_k^{A \cap B})^*(\Delta_*(\gamma))} z_k = \int_{\Delta_k^*(\gamma)} z_k \\ &= \int_{\gamma} \Delta_k^*(z_k) = \int_{\gamma} \Delta^*((\varphi_k^{A \cap B})^*(z_k)) = \int_{\gamma} \Delta^*(z), \end{aligned}$$

donde la segunda y cuarta igualdad se siguen del Lema 2.12 y 2.17 respectivamente, mientras que la tercera y quinta igualdad son seguidas por la construcción de límite inverso y directo, respectivamente, de las sucesiones de sucesiones de Mayer–Vietoris del par A_k, B_k . \square

2.5. Algunos ejemplos

Proporcionamos aquí algunos ejemplos del calculo explícito de la integral. En los ejemplos siguientes, usaremos la integral para describir las clases de cohomología.

Ejemplo 2.19. *Sea $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la circunferencia. Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X compuesto por los intervalos abiertos de diámetro 2ϵ para algún $0 < \epsilon \leq 1/8$, y $A = [-\epsilon, 1/2 + \epsilon]$ y $B = [1/2 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ son dos arcos que recubren a X (usamos la línea superior para denotar los puntos y conjuntos en el cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z}). Nótese que cualquier elemento de \mathcal{X} está contenido en A o en B .*

La función característica $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}$ de $\overline{[1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon]}$ es $\mathcal{X}_{A \cap B}$ -localmente constante en $A \cap B$ y define una clase del 0-ésimo grupo de cohomología de $A \cap B$ a escala $\mathcal{X}_{A \cap B}$ (ver la Subsección 1.2.6), y también en la cohomología de Čech.

Entonces, $\Delta^(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}) \in H_{\mathcal{X}}^1(X)$ cuenta (teniendo en cuenta la orientación) cuantas veces un camino rodea la circunferencia X . Comprobemos lo anterior con un ejemplo. Para un entero $k \geq 1$, sea x_0, x_1, \dots, x_n una sucesión estrictamente creciente de reales tal que $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$, $x_0 = 0$ y $x_n = k$. Por tanto, $c_k = \sum_{i=0}^{n-1} (\overline{x_i} \overline{x_{i+1}})$ es un 1-ciclo formal \mathcal{X} -pequeño de X que rodea k veces la circunferencia X .*

Entonces, $\int_{[c_k]} \Delta^(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}) = \int_{\Delta_*([c_k])} \chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}} = \chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}(\partial(c_k^A))$, donde c_k^A es la suma de los 1-símplices formales $(\overline{x_i} \overline{x_{i+1}})$ de c_k que están contenidos en A . La aportación a $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}(\partial(c_k^A))$ de cada símplex de c_k^A contenido en $\overline{[1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon]}$ (o en su complementario) es nula, sin embargo, existen k símplexes $(\overline{x_i} \overline{x_{i+1}})$ de c_k^A tales que $\overline{x_{i+1}}$ pertenece a $\overline{[1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon]}$ y que $\overline{x_i}$ pertenece al complementario de $\overline{[1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon]}$, y así, la aportación a $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}(\partial(c_k^A))$ de cada uno de estos símplexes es 1. Por tanto, el término $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}(\partial(c_k^A))$ cuenta exactamente cuantas veces la sucesión x_0, x_1, \dots, x_n atraviesa los intervalos $[1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon] + \mathbb{Z}$ y es igual a k .*

Ejemplo 2.20. Sea $Y = X \times X$ el toro. Sea $\mathcal{Y} = \{I \times X : I \in \mathcal{X}\}$ el recubrimiento abierto de Y formado por las bandas verticales de grosor menor que 2ϵ , y sean $A' = A \times X$ y $B' = B \times X$ dos bandas verticales que recubren a Y . Y al igual que en el ejemplo anterior, A' y B' son tales que cualquier elemento de \mathcal{Y} está contenido en A' o en B' .

La función característica $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X}$ de $\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X$ es $\mathcal{Y}_{|A' \cap B'}$ -localmente constante en $A' \cap B'$ y define una clase del 0-ésimo grupo de cohomología de $A' \cap B'$ a escala $\mathcal{Y}_{|A' \cap B'}$, y también en la cohomología de Čech. Y se prueba de manera análoga al ejemplo anterior que $\Delta^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X}) \in H_{\mathcal{Y}}^1(Y)$ cuenta (teniendo en cuenta la orientación) cuantas veces un camino rodea paralelamente el toro Y . Comprobemos esto último usando el homomorfismo conectante de la sucesión de Mayer-Vietoris de la cohomología.

Consideremos la proyección sobre la primera coordenada, $p : Y \rightarrow X$, dada por $p(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \overline{x_1}$. Claramente p lleva puntos \mathcal{Y} -cercanos en puntos \mathcal{X} -cercanos, por lo que podemos definir $p_* : H_{\mathcal{Y}}^q(Y) \rightarrow H_{\mathcal{X}}^q(X)$ y $p^* : H_{\mathcal{X}}^q(X) \rightarrow H_{\mathcal{Y}}^q(Y)$. Y además, $\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X} = p^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}})$.

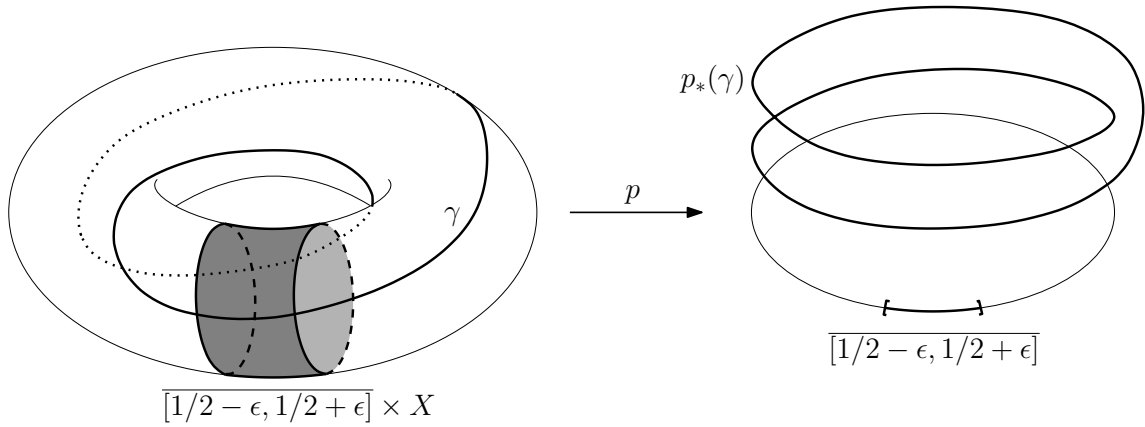


Figura 2.1: Acción de la proyección p

Sea $\gamma \in H_{\mathcal{Y}}^1(Y)$. Sea c un 1-ciclo formal \mathcal{Y} -pequeño de Y tal que $\gamma = [c]$, por lo que $p_{\#}(c)$ es un 1-ciclo formal \mathcal{X} -pequeño de X tal que $p_*(\gamma) = [p_{\#}(c)]$, y sea k el número de vueltas que da $p_{\#}(c)$ alrededor de la circunferencia X (dicho número también representa el número de vueltas que da c alrededor del toro Y en paralelo). Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \Delta^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X}) &= \int_{\gamma} \Delta^*(p^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}})) = \int_{\gamma} p^*(\Delta^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}})) \\ &= \int_{p_*(\gamma)} \Delta^*(\chi_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]}}) = k, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue del Lema 2.6, la última igualdad se sigue del ejemplo anterior,

mientras que la segunda igualdad se sigue de la conmutatividad del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_{\mathcal{X}|_{A \cap B}}^0 & (A \cap B) & \xrightarrow{\Delta^*} & H_{\mathcal{X}}^1(X) & \longrightarrow \dots \\
 & & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{\mathcal{Y}|_{A' \cap B'}}^0 & (A' \cap B') & \xrightarrow{\Delta^*} & H_{\mathcal{Y}}^1(Y) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Por tanto, $\Delta^*(\mathcal{X}_{\overline{[1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon]} \times X})$ cuenta el número de vueltas en paralelo que da el ciclo c alrededor del toro Y .

Capítulo 3

Aplicaciones a la dinámica discreta

3.1. Introducción

El índice de Conley es un invariante de un conjunto invariante aislado K [Franks y Richeson(2000), Mischaikow y Mrozek(2002), Mrozek(1990), Robbin y Salamon(1988)]. Dicho invariante captura información relevante de las dinámicas y es robusta bajo perturbaciones, de hecho permanece invariante bajo continuación. *Grosso modo*, el índice de Conley describe el conjunto inestable $W^u(K, f)$ de K y la dinámica inducida en él. Aunque para puntos fijos hiperbólicos el conjunto inestable es de hecho una variedad, en general el conjunto inestable podría exhibir una estructura topológica muy complicada. Sin embargo, si nos centramos en dimensión 0, la descripción del conjunto inestable y su dinámica se reduce al estudio de las componentes conexas y cómo estas son permutadas por la acción de f . Las componentes conexas de $W^u(K, f) \setminus K$ son llamadas **ramas** del conjunto inestable.

La familia de las ramas podría ser infinita o contener componentes conexas que no se acumulan en K o que son acumuladas por otras ramas. Nos centraremos en las componentes «esenciales»: aquellas que son adherentes a K y extendidas hasta el infinito (más precisamente, sus preimágenes no están contenidas en un entorno de K). El objetivo de este capítulo, Sección 3.5 y 3.6, es calcular el número de componentes esenciales en términos de invariantes relacionados con K y las dinámicas. Como las componentes conexas pueden ser difíciles de distinguir, trabajamos con las cuasi-componentes en su lugar. El teorema principal de este capítulo, que ya presentamos en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2022)], es calcular el número de cuasi-componentes esenciales de $W^u(K, f) \setminus K$ cuando K es un conjunto invariante aislado:

Teorema 3.1. *Supongamos que f es un homeomorfismo en una variedad, K es un conjunto invariante aislado para f con grupos de homología de Čech finitamente generados. Entonces, el número de cuasi-componentes esenciales de $W^u(K, f) \setminus K$ es igual a $\dim(\check{H}_1(W_\infty)) + 1$.*

En el teorema anterior, los coeficientes están tomados en un cuerpo. **El conjunto inestable compactificado** W_∞ es la compactificación de Alexandroff de $W^u(K, f)$. Advertimos que en el teorema previo, la topología del conjunto inestable, y también de la de W_∞ , no es la topología de subespacio que hereda del espacio de fase sino la topología intrínseca [Robbin y Salamon(1988)], que es más fina que la topología de subespacio. A grandes rasgos, la topología intrínseca coincide

con la topología de subespacio siempre y cuando el conjunto inestable (excluyendo una parte inicial) es no adherente a K , por lo que los resultados siguen siendo válidos en muchos casos al considerar la topología de subespacio. El teorema sigue siendo válido para espacios de fases más generales, tales como ANR métricos localmente compactos, y puede ser formulado para aplicaciones no invertibles, pero en el caso último solo obtendremos la cota superior del número cuasi-componentes esenciales.

La dimensión del grupo de homología de Čech (o cohomología de Čech, son isomorfos en nuestra configuración, Teorema 2.14) de W_∞ que aparece en el teorema pueden ser fácilmente calculados a partir de un solo par índice (N, L) de K (repasaremos la noción de par índice de un conjunto invariante aislado en la Sección 3.5). En particular, $\dim(\check{H}_1(W_\infty))$ está acotada superiormente por $\dim(\check{H}_1(N, L))$.

Como ejemplo para ilustrar el teorema, podemos pensar en un punto silla p en el plano. La variedad inestable $W^u(p)$ tiene dos ramas, por lo que hay dos cuasi-componentes esenciales (las cuasi-componentes coinciden con las componentes cuando solo existen un número finito de ellas, Lema 1.23). La compactificación de Alexandroff de $W^u(p)$ es una circunferencia y la igualdad se sigue. Análogamente, un k -punto de silla (la unión de k puntos de silla) presenta $k + 1$ ramas y la compactificación por un punto del conjunto inestable es la unión por un punto de k circunferencias.

En [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)] se prueba el Teorema 3.1 en términos cohomológicos, por lo que la versión que aparece en este capítulo se sigue inmediatamente por un argumento dual. Sin embargo, la discusión que presentamos en este capítulo proporciona una mejor comprensión de la cuestión, ya que para ello usamos una descripción adecuada de las clases de la homología y cohomología de Čech, y la aplicación bilineal «integral» entre las clases de cohomología y homología de Čech.

Una de las propiedades de la integral que será clave para demostrar el teorema anterior será la dada en el Lema 2.18 que nos dice que la integral conmuta con los homomorfismos conectantes de la sucesión de Mayer-Vietoris de la homología y cohomología de Čech. Dicha propiedad nos permitirá relacionar objetos 0-dimensionales (en el caso que nos incumbe, las cuasi-componentes esenciales) con $\check{H}_1(W_\infty)$.

Este capítulo está organizado de la manera siguiente. Las series de clases de cohomología serán repasadas en la Sección 3.2 e introduciremos las series de clases de homología en la Sección 3.3, y veremos en la Sección 3.4 que dichas clases conmutan con la integral. Un breve repaso del índice de Conley y las consideraciones dinámicas del conjunto inestable serán presentadas en la Sección 3.5. Y la demostración del teorema anterior será desarrollada en la Sección 3.6, reduciendo la dinámica de la compactificación de $W^u(K, f)$ a la dinámica de un par atractor-repulsor.

Terminología. Aunque no lo reflejemos en la notación, trabajaremos con la homología y cohomología reducida a escala \mathcal{X} (y en el límite) a lo largo de todo este capítulo.

3.2. Series de clases de cohomología

En [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)] se introdujo las series de clases de cohomología de Čech. En esta sección daremos un repaso de lo desarrollado en dicho artículo con especial hincapié en una escala específica \mathcal{X} .

Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación (de nuevo, no necesariamente continua) y sea \mathcal{X} un recubrimiento

abierto de X . Decimos que \mathcal{X} es **dinámico** si $\mathcal{X} \succ f^{-1}(\mathcal{X})$ (es decir, para cada $U \in \mathcal{X}$ existe $V \in \mathcal{X}$ tal que $f(U) \subset V$).

Sea R un anillo conmutativo con 1, y sea G_R un R -módulo. Si \mathcal{X} es dinámico, tenemos que f lleva puntos \mathcal{X} -cercanos en puntos \mathcal{X} -cercanos, y de esta manera, tiene sentido definir $f^\# : \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R) \rightarrow \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R)$ y $f^* : H_\mathcal{X}^q(X; G_R) \rightarrow H_\mathcal{X}^q(X; G_R)$.

Sea $P(t) = \sum_{i=0}^d k_i t^i \in R[t]$ un polinomio de grado d con coeficientes en R . Si \mathcal{X} es dinámico, podemos definir

$$P(f^\#) = k_0 \text{Id} + k_1 f^\# + k_2 f^{\#2} + \dots + k_d f^{\#d} : \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R) \rightarrow \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R)$$

puesto que \mathcal{X} refina a $\mathcal{X} \vee f^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X})$ (de hecho, no es muy difícil comprobar que $\mathcal{X} = \mathcal{X} \vee f^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X})$) tal y como discutimos en la Subsección 1.1.3, y además, como $(f^\#)^i$ y δ conmutan para cualquier i , también podemos definir

$$P(f^*) = k_0 \text{Id} + k_1 f^* + k_2 f^{*2} + \dots + k_d f^{*d} : H_\mathcal{X}^q(X; G_R) \rightarrow H_\mathcal{X}^q(X; G_R).$$

Sin embargo, sea $S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i t^i \in R[[t]]$ una serie de potencias con coeficientes en R , ¿cuándo tiene sentido definir $S(f^\#) : \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R) \rightarrow \overline{C}_\mathcal{X}^q(X; G_R)$?

La respuesta es la siguiente: cuando existe un punto a atractor global estable es posible definir $S(f^\#)$ sobre las aplicaciones $\xi \in C^q(X; G_R)$ que se anulan en un entorno abierto de a .

Decimos que $a \in X$ es un **atractor global estable** si:

1. (Atractor global) Para cualquier entorno abierto N_a de a , y para cualquier $x \in X$, existe un número natural n_x tal que $f^{n_x}(x) \in N_a$.
2. (Condición de estabilidad) El punto a tiene una base de entornos abiertos positivamente invariantes (es decir, para cualquier entorno abierto B de a existe otro entorno abierto A de a que es positivamente invariante y es tal que $A \subset B$).

De los dos puntos anteriores se sigue que:

Observación 3.2. Para cualquier entorno abierto B de a , y para cualquier punto $x \in X$, existe un natural n_x tal que $f^n(x) \in B$ para cualquier $n \geq n_x$.

Lo anterior se consigue tomando $N_a = A$ en el punto 2, y aplicando el punto 1. Y sigue siendo válido si en lugar de un punto $x \in X$, consideramos un subconjunto finito $S \subset X$. En particular, si tenemos una cadena formal c , existe un natural n tal que $(f^\#)^m(c)$ está contenido en B para cualquier $m \geq n$.

Hipótesis: A partir de ahora y hasta el final de esta sección, vamos a suponer que existe $a \in X$ atractor global estable.

Proposición 3.3. Si f es continua, entonces todo recubrimiento abierto de X puede ser refinado por un recubrimiento abierto dinámico.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{X}$ tal que $a \in B$. De la definición del atractor global estable a se sigue que existe un entorno abierto A de a que es positivamente invariante y es tal que $A \subset B$. Definimos $\mathcal{X}'_0 := \{A\}$ y $\mathcal{X}'_{n+1} := \{f^{-1}(U) \cap V : U \in \mathcal{X}'_n, V \in \mathcal{X}\}$. Y así, $\mathcal{X}' := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{X}'_i$ es un recubrimiento abierto dinámico de X . Es un recubrimiento (y claramente por abiertos) ya que para cualquier punto x de X existe un natural n_x tal que $f^{n_x}(x) \in A$, y así, existe un elemento de \mathcal{X}'_{n_x} que contiene a x . Y es claramente dinámico ya que la imagen de cada elemento de \mathcal{X}'_{n+1} está contenida en algún elemento de \mathcal{X}'_n , y la imagen de A está contenida en A . \square

De la proposición anterior se sigue la siguiente observación:

Observación 3.4. *Si $f : X \rightarrow X$ es continua, entonces la subfamilia de recubrimientos abiertos dinámicos de X es cofinal en la familia de recubrimientos abiertos de X .*

El requerimiento de que ξ se anule en un entorno abierto P de a garantiza que $S(f^\#) : C^q(X; G_R) \rightarrow C^q(X; G_R)$ está bien definida sobre tales aplicaciones. En efecto: dado un punto (x_0, \dots, x_q) de X^{q+1} , existe j_0 tal que $f^i(x_0), \dots, f^i(x_q) \in P$ para todo $i \geq j_0$ (esto se sigue de la Observación 3.2), y así, la serie infinita

$$(S(f^\#))(\xi)(x_0, \dots, x_q) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(f^{\#i}(\xi))(x_0, \dots, x_q) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \xi(f^i(x_0), \dots, f^i(x_q)),$$

tan solo consta de un número finito de sumandos, que van desde $i = 0$ hasta $i = j_0 - 1$. (Nótese, sin embargo, que j_0 depende de la tupla x_0, \dots, x_q que estamos considerando).

Recordemos que la cohomología reducida de X a escala \mathcal{X} es la cohomología asociada del siguiente complejo de cocadenas:

$$\dots \xleftarrow{\bar{\delta}} \bar{C}^1_{\mathcal{X}}(X; G_R) \xleftarrow{\bar{\delta}} \bar{C}^0_{\mathcal{X}}(X; G_R) \xleftarrow{\epsilon'} G_R,$$

donde el homomorfismo aumentación ϵ' viene dado por $\epsilon'(b) : X \rightarrow G_R$ la aplicación constante igual a $b \in G_R$.

Y ahora, vamos a definir $S(f^*) : H^q_{\mathcal{X}}(X; G_R) \rightarrow H^q_{\mathcal{X}}(X; G_R)$ (cuando \mathcal{X} es un recubrimiento abierto dinámico de X). Pero antes, enunciemos un par de lemas y proposiciones.

Lema 3.5. *Sea $q \geq 0$. Supongamos que $\xi \in C^q(X; G_R)$ satisface que $\delta(\xi) = 0$ en algún entorno P de a . Entonces existe $\alpha \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $\xi = \delta(\alpha)$ en P .*

Demostración. Cuando $q = 0$ el lema simplemente afirma que ξ es constante en P . Esto es muy sencillo de probar: para cualquier punto $p \in P$ la igualdad $\delta(\xi) = 0$ en P , evaluada en (a, p) , implica que $\xi(p) = \xi(a)$.

En el caso $q \geq 1$, definimos $\alpha(x_0, \dots, x_{q-1}) := \xi(a, x_0, \dots, x_{q-1})$. Es sencillo comprobar que $(\delta(\alpha))(x_0, \dots, x_q) = \xi(x_0, \dots, x_q) - (\delta(\xi))(a, x_0, \dots, x_q)$. Cuando x_0, \dots, x_q pertenecen a P , el segundo sumando en el lado derecho se anula debido a la hipótesis sobre $\delta(\xi)$. De este manera $\delta(\alpha) = \xi$ en P , como queríamos demostrar. \square

Lema 3.6. *Sea u un elemento de la cohomología reducida $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$. Entonces:*

- a). *Sea $U \in \mathcal{X}$ que contiene a $\{a\}$. Existe una aplicación $\xi \in C^q(X; G_R)$ que se anula en U y que representa a u ; es decir, $u = [\xi]$.*
- b). *Si $\xi' \in C^q(X; G_R)$ es otra aplicación cumpliendo el punto a), entonces existe $\varphi \in C^{q-1}(X)$ tal que también se anula en U y satisface que $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X} -localmente cero.*

Demostración. a). Sea $\xi_0 \in C^q(X; G_R)$ un cociclo en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$ tal que $[\xi_0] = u$. Como ξ_0 es un cociclo, $\delta(\xi_0)$ es \mathcal{X} -localmente cero, por lo que se anula en cualquier $U \in \mathcal{X}$ que contenga a a . Por el Lema 3.5 existe $\alpha \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $\xi_0 = \delta(\alpha)$ en U . Definimos $\xi := \xi_0 - \delta(\alpha)$. Por construcción, ξ se anula en U , y como ξ difiere de ξ_0 solo por un coborde, ξ es un cociclo cuya clase de cohomología en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$ sigue siendo u .

- b). Como ξ y ξ' representan la misma clase de cohomología, existe una aplicación $\varphi_0 \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $\xi - \xi' - \delta(\varphi_0)$ es \mathcal{X} -localmente cero, por lo que $\xi - \xi' - \delta(\varphi_0)$ también se anula en U , y así, $\delta(\varphi_0)$ se anula en U . De esta manera, por el Lema 3.5, existe $\alpha \in C^{q-2}(X; G_R)$ tal que $\varphi_0 = \delta(\alpha)$ en U . Definiendo $\varphi := \varphi_0 - \delta(\alpha)$, tenemos de nuevo que φ se anula en U . Además, $\xi - \xi' - \delta(\varphi) = \xi - \xi' - \delta(\varphi_0) + \delta(\delta(\alpha)) = \xi - \xi' - \delta(\varphi_0)$ ya que $\delta^2 = 0$, y así, $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X} -localmente cero ya que $\xi - \xi' - \delta(\varphi_0)$ es \mathcal{X} -localmente cero. □

Proposición 3.7. *Entonces $S(f^\#) : C^q(X; G_R) \rightarrow C^q(X; G_R)$ tiene las siguientes propiedades:*

- 1). *Si $\xi_1, \xi_2 \in C^q(X; G_R)$ se anulan en un entorno de a , también lo hace cualquier combinación lineal $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ (con $c_1, c_2 \in R$), y la relación $(S(f^\#))(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1(S(f^\#))(\xi_1) + c_2(S(f^\#))(\xi_2)$ se mantiene.*
- 2). *Si ξ se anula en un entorno de a , también lo hace $\delta(\xi)$, y la relación $(\delta(S(f^\#)))(\xi) = (S(f^\#))(\delta(\xi))$ se mantiene.*
- 3). *Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto dinámico de X . Si ξ es \mathcal{X} -localmente cero (por lo que también se anula en un entorno abierto de a), entonces $(S(f^\#))(\xi)$ es también \mathcal{X} -localmente cero.*

Demostración. Las demostraciones de 1) y 2) son sencillas y vamos a omitirlas. La demostración de 3) se sigue de que f^i lleva puntos \mathcal{X} -ceranos en puntos \mathcal{X} -ceranos (puesto que \mathcal{X} es dinámico). De esta manera, si $x_0, \dots, x_q \in X$ están contenidos en el mismo elemento U de \mathcal{X} , entonces $f^i(x_0), \dots, f^i(x_q)$ están contenidos en un elemento U_i de \mathcal{X} , y así,

$$((S(f^\#))(\xi))(x_0, \dots, x_q) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \xi(f^i(x_0), \dots, f^i(x_q)) = 0 + 0 + \dots$$

puesto que ξ es \mathcal{X} -localmente cero. □

Proposición 3.8. *Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto dinámico de X , y sea $U \in \mathcal{X}$ tal que $a \in U$. Sea u un elemento de la cohomología reducida $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$. Por el Lema 3.6, a) existe una aplicación $\xi \in C^q(X; G_R)$ tal que se anula en U y que $u = [\xi]$. Entonces:*

(a). $\overline{(S(f^\#))(\xi)}$ es un cociclo, por lo que determina una clase de cohomología $v = \left[\overline{(S(f^\#))(\xi)} \right] \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$;

(b). y además, v es independiente de la elección de ξ y de U .

Demostración. (a). Tenemos que $(\delta(S(f^\#)))(\xi) = (S(f^\#))(\delta(\xi))$ por la Proposición 3.7, 2). Como $\bar{\xi}$ representa a una clase de cohomología, ξ debe de ser un cociclo en $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$; es decir, $\delta(\xi)$ es \mathcal{X} -localmente cero. Por la Proposición 3.7, 3) esto implica que $(S(f^\#))(\delta(\xi))$ es también \mathcal{X} -localmente cero. Por tanto, $(\delta(S(f^\#)))(\xi)$ es también \mathcal{X} -localmente cero, y así, $\overline{(S(f^\#))(\xi)}$ es un cociclo en $\overline{C}_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$, y de esta manera, define una clase de cohomología $v := \left[\overline{(S(f^\#))(\xi)} \right]$ en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$.

(b). Supongamos que ξ' es otra aplicación en $C^q(X; G_R)$ que representa a u y se anula en un elemento $U' \in \mathcal{X}$ que contiene a a . Sea $v' := \left[\overline{(S(f^\#))(\xi')} \right]$. Necesitamos demostrar que $v = v'$, para ello, necesitamos probar que existe $\psi \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $(S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - \delta(\psi)$ es \mathcal{X} -localmente cero. Por el Lema 3.6, b) existe una aplicación $\varphi \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X} -localmente cero y que φ se anula en $U \cap U'$. La última condición implica que $(S(f^\#))(\varphi)$ está bien definida, y definimos $\psi := (S(f^\#))(\varphi)$. Usando la Proposición 3.7 apartados 1) y 2), y observando que ξ , ξ' y φ se anulan en $U \cap U'$, escribimos la diferencia $(S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - \delta(\psi)$ como

$$\begin{aligned} (S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - (\delta(S(f^\#)))(\varphi) &= (S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - (S(f^\#))(\delta(\varphi)) \\ &= (S(f^\#))(\xi - \xi' - \delta(\varphi)). \end{aligned}$$

Como $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X} -localmente cero, también lo es $(S(f^\#))(\xi - \xi' - \delta(\varphi))$ por la Proposición 3.7, 3). De esta manera, tenemos que $(S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - \delta(\psi)$ es \mathcal{X} -localmente cero, lo que queríamos probar. □

Esta proposición justifica la definición siguiente:

Definición 3.9. Sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto dinámico de X . Sea u un elemento de la cohomología reducida $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$. Elegimos una aplicación $\xi \in C^q(X; G_R)$ tal que se anule en un elemento U de \mathcal{X} que contiene a $\{a\}$ y que $u = [\xi]$. Entonces $(S(f^*))(u)$ viene definida por la clase de cohomología $\left[\overline{(S(f^\#))(\xi)} \right]$ en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$; es decir, $(S(f^\#))(\xi)$ es un representante de $(S(f^*))(u)$.

Por último, veamos si podemos dar una definición análoga en el límite:

Definición 3.10. Si f es continua, definimos $S(f^*) : \check{H}^q(X; G_R) \rightarrow \check{H}^q(X; G_R)$ de la manera siguiente: sea $z \in \check{H}^q(X; G_R)$. La Observación 3.4 y el Lema A.9 del Apéndice A nos aseguran que existe un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X y que existe un $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$ tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{X}} : H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R) &\longrightarrow \check{H}^q(X; G_R) \\ z_{\mathcal{X}} &\longmapsto z. \end{aligned}$$

Y entonces, $(S(f^*))(z)$ viene definida por $\tau_{\mathcal{X}}((S(f^\#))(z_{\mathcal{X}}))$.

Proposición 3.11. *La definición anterior es independiente de $z_{\mathcal{X}}$ y de \mathcal{X} .*

Demostración. Sea \mathcal{X}' un recubrimiento abierto dinámico de X y sea $z_{\mathcal{X}'} \in H_{\mathcal{X}'}^q(X; G_R)$ tal que $\tau_{\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}'}) = z$. Sea $\xi \in C^q(X; G_R)$ tal que sea anula un elemento $U \in \mathcal{X}$ que contiene a $\{a\}$ y que $[\xi] = z_{\mathcal{X}}$. Sea $\xi' \in C^q(X; G_R)$ tal que sea anula un elemento $U' \in \mathcal{X}'$ que contiene a $\{a\}$ y que $[\xi'] = z_{\mathcal{X}'}$. Como $\tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \tau_{\mathcal{X}'}(z_{\mathcal{X}'})$, tenemos que $[\xi] = [\xi']$ en $H_{\mathcal{X}''}^q(X; G_R)$ para $\mathcal{X}'' := \mathcal{X} \vee \mathcal{X}'$ (\mathcal{X}'' es dinámico puesto que \mathcal{X} y \mathcal{X}' lo son). Como ξ y ξ' se anulan en $U \cap U'$, el Lema 3.6 nos asegura que existe $\varphi \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que también se anula en $U \cap U'$ y que $\xi - \xi' - \delta(\varphi)$ es \mathcal{X}'' -localmente cero. Y razonando de forma análoga a la demostración de la Proposición 3.8, concluimos que existe $\psi \in C^{q-1}(X; G_R)$ tal que $(S(f^\#))(\xi) - (S(f^\#))(\xi') - \delta(\psi)$ es \mathcal{X}'' -localmente cero, demostrando así que $\tau_{\mathcal{X}}((S(f^*))(z_{\mathcal{X}})) = \tau_{\mathcal{X}'}((S(f^*))(z_{\mathcal{X}'}))$. \square

Y además, en [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)] también demuestran que:

Proposición 3.12. *Sean $S_1, S_2 \in R[[t]]$. Entonces*

$$(S_1 + S_2)(f^*) = S_1(f^*) + S_2(f^*) \quad \text{y} \quad (S_1 \cdot S_2)(f^*) = S_1(f^*) \circ S_2(f^*)$$

tanto en $H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$ para un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X , como en $\check{H}^q(X; G_R)$ cuando f es continua.

3.3. Series de clases de homología

Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación (no necesariamente continua) y sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto de X . Supongamos además que \mathcal{X} es dinámico, por lo que f lleva puntos \mathcal{X} -cercanos en puntos \mathcal{X} -cercanos, y de esta manera tiene sentido definir $f_{\#} : C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \rightarrow C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ y $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$.

Sea $P(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i \in R[t]$ un polinomio de grado d con coeficientes en R . Como \mathcal{X} es dinámico, podemos definir

$$P(f_{\#}) = a_0 \text{Id} + a_1 f_{\#} + a_2 f_{\#}^2 + \dots + a_d f_{\#}^d : C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \longrightarrow C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$$

puesto que \mathcal{X} refina a $\mathcal{X} \vee f^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X})$ tal y como discutimos en la Subsección 1.1.3, y además, como $f_{\#}^i$ y ∂ conmutan para cualquier i , también podemos definir

$$P(f_*) = a_0 \text{Id} + a_1 f_* + a_2 f_*^2 + \dots + a_d f_*^d : H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \longrightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R).$$

Sin embargo, para $S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[[t]]$ una serie de potencias con coeficientes en R , vamos a tener que $S(f_*) : H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ está bien definida cuando existe un punto $a \in X$ que es un atractor global estable.

Sea $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$, por lo que existe $c \in C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ tal que $z = [c]$. Nos gustaría que tuviese sentido la expresión siguiente:

$$[(S(f_{\#}))(c)] = [a_0 \text{Id}(c) + a_1 f_{\#}(c) + a_2 f_{\#}^2(c) + \dots].$$

Fijando un $U \in \mathcal{X}$ tal que $a \in U$. Existe un natural n tal que $(f_{\#})^m(c)$ está contenido en U para todo $m \geq n$, y así,

$$\begin{aligned} [(S(f_{\#}))](c) &= [a_0 \text{Id}(c) + a_1 f_{\#}(c) + a_2 f_{\#}^2(c) + \dots + a_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c)] \\ &\quad + [a_n f_{\#}^n(c) + a_{n+1} f_{\#}^{n+1}(c) + \dots], \end{aligned}$$

donde el último sumando es 0 gracias a la Proposición 1.5 para el caso $q \geq 1$ y gracias al Corolario 1.40 para el caso $q = 0$.

Si $c' \in C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ es otro ciclo tal que $z = [c] = [c']$, entonces $[(S(f_{\#}))](c) = [(S(f_{\#}))](c')$. En efecto, como $[c] = [c']$, existe $c'' \in C_{q+1}^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ tal que $c - c' = \partial(c'')$. Existe un natural n' tal que $f_{\#}^m(c)$ está contenido en U para todo $m \geq n'$, y sea $N = \max\{n, n'\}$, por lo que

$$[(S(f_{\#}))](c) = [a_0 \text{Id}(c) + a_1 f_{\#}(c) + a_2 f_{\#}^2(c) + \dots + a_{N-1} f_{\#}^{N-1}(c)]$$

y

$$[(S(f_{\#}))](c') = [a_0 \text{Id}(c') + a_1 f_{\#}(c') + a_2 f_{\#}^2(c') + \dots + a_{N-1} f_{\#}^{N-1}(c')].$$

Como $f_{\#}$ conmuta con el operador borde, tenemos que

$$\begin{aligned} (a_0 \text{Id}(c) + a_1 f_{\#}(c) + \dots + a_{N-1} f_{\#}^{N-1}(c)) - (a_0 \text{Id}(c') + a_1 f_{\#}(c') + \dots + a_{N-1} f_{\#}^{N-1}(c')) \\ = \partial(a_0 \text{Id}(c'') + a_1 f_{\#}(c'') + a_2 f_{\#}^2(c'') + \dots + a_{N-1} f_{\#}^{N-1}(c'')), \end{aligned}$$

y así, $[(S(f_{\#}))](c) = [(S(f_{\#}))](c')$.

Lo anterior justifica la siguiente definición:

Definición 3.13. Definimos $S(f_*) : H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ por $(S(f_*))([c]) := [(S(f_{\#}))](c)$ para cualquier ciclo $c \in C_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$.

De la Observación 3.4 de la sección anterior también se sigue la observación siguiente:

Observación 3.14. Si f es continua, entonces $\check{H}_q(X; G_R)$ es isomorfo al límite inverso del sistema inverso $\{H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R), \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}\}$ sobre el conjunto dirigido de todos los recubrimientos abiertos dinámicos de X .

Definición 3.15. Si f es continua, definimos $S(f_*) : \check{H}_q(X; G_R) \rightarrow \check{H}_q(X; G_R)$ de la siguiente manera: sea $\gamma \in \check{H}_q(X; G_R)$, entonces $(S(f_*))(\gamma)$ es tal que $\pi_{\mathcal{X}}((S(f_*))(\gamma)) := (S(f_*))(\pi_{\mathcal{X}}(\gamma))$ para cualquier recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X .

Que $S(f_*)$ esté bien definida se sigue de la proposición siguiente:

Proposición 3.16. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' recubrimientos abiertos dinámicos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_q^{\mathcal{X}'}(X; G_R) & \xrightarrow{S(f_*)} & H_q^{\mathcal{X}'}(X; G_R) \\ \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} \\ H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) & \xrightarrow{S(f_*)} & H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R) \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $\gamma_{\mathcal{X}'} \in H_q^{\mathcal{X}'}(X; G_R)$, por lo que existe una q -cadena formal \mathcal{X}' -pequeña c tal que $[c] = \gamma_{\mathcal{X}'}$. Sea $U' \in \mathcal{X}'$ tal que $a \in U'$, y como \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} existe $U \in \mathcal{X}$ tal que $U' \subset U$. Existe un natural n tal que $(f_{\#})^m(c)$ está contenido en $U' \subset U$ para todo $m \geq n$, y así, $(S(f_*))([c])$ es igual a

$$[k_0c + k_1f_{\#}(c) + \dots + k_{n-1}f_{\#}^{n-1}(c)]$$

en $H_q^{\mathcal{X}'}(X; G_R)$ (y en $H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ si vemos a $[c]$ como un elemento de $H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$), concluyendo así que el diagrama es conmutativo. \square

Y así, si \mathcal{X} y \mathcal{X}' son dos recubrimientos abiertos dinámicos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} , entonces

$$\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}((S(f_*))(\pi_{\mathcal{X}'}(\gamma))) = (S(f_*))(\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\pi_{\mathcal{X}'}(\gamma))) = (S(f_*))(\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)),$$

por lo que $(S(f_*))(\gamma) \in \check{H}_q(X; G_R)$. Por tanto, $S(f_*)$ está bien definida.

Proposición 3.17. *Sean $S_1(t), S_2(t) \in R[[t]]$. Entonces*

$$(S_1 + S_2)(f_*) = S_1(f_*) + S_2(f_*) \quad \text{y} \quad (S_1 \cdot S_2)(f_*) = S_2(f_*) \circ S_1(f_*)$$

tanto en $H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$ para un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X , como en $\check{H}_q(X; G_R)$ cuando f es continua.

Demostración. Nos centraremos solo en la segunda igualdad. Como $S_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ y $S_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$, no es muy difícil comprobar que

$$S_1(t) \cdot S_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}.$$

Sea $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; G_R)$. Sea c un q -ciclo formal \mathcal{X} -pequeño tal que $[c] = \gamma$. Para $U \in \mathcal{X}$ arbitrario tal que $a \in U$, existe un natural n tal que $(f_{\#})^m(c)$ está contenido en U para todo $m \geq n$. Por lo que

$$((S_1 \cdot S_2)(f_*))(\gamma) = [a_0 b_0 c + (a_0 b_1 + a_1 b_0) f_{\#}(c) + \dots + (a_0 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_0) f_{\#}^{n-1}(c)]$$

y

$$(S_2(f_*))(\gamma) = [b_0 c + b_1 f_{\#}(c) + \dots + b_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c)].$$

Claramente el q -ciclo formal \mathcal{X} -pequeño $b_0 c + b_1 f_{\#}(c) + \dots + b_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c) =: c'$ es tal que $(f_{\#})^m(c')$ está contenido en U para todo $m \geq n$, por lo que

$$\begin{aligned} (S_1(f_*))((S_2(f_*))(\gamma)) &= [a_0(b_0 c + b_1 f_{\#}(c) + \dots + b_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c)) \\ &\quad + a_1 f_{\#}(b_0 c + b_1 f_{\#}(c) + \dots + b_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c)) \\ &\quad + \dots + a_{n-1} f_{\#}^{n-1}(b_0 c + b_1 f_{\#}(c) + \dots + b_{n-1} f_{\#}^{n-1}(c))] \\ &= [a_0 b_0 c + (a_0 b_1 + a_1 b_0) f_{\#}(c) + \dots + (a_0 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_0) f_{\#}^{n-1}(c)] \\ &\quad + [(a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1) f_{\#}^n(c) + \dots], \end{aligned}$$

donde el último sumando es trivial gracias a la Proposición 1.5 para el caso $q \geq 1$ y gracias al Corolario 1.40 para el caso $q = 0$, concluyendo así que $((S_1 \cdot S_2)(f_*))(\gamma) = (S_1(f_*))((S_2(f_*))(\gamma))$. \square

Por último, describiremos los autovalores de la aplicación inducida de f en homología cuando los coeficientes están considerados en los reales.

Proposición 3.18. *La aplicación inducida $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$ no tiene autovalores no nulos.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ distinto de cero. Considerando el polinomio $P(t) := \lambda - t$, tenemos que la serie $S(t) := \frac{1}{\lambda} + \frac{t}{\lambda^2} + \frac{t^2}{\lambda^3} + \dots$ es tal que $S(t) \cdot P(t) = 1$, y evaluando en f_* , obtenemos que

$$S(f_*) \circ P(f_*) = \text{Id}_{H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})}.$$

Por tanto, si $\gamma \in \text{Ker}(\lambda \cdot \text{Id} - f_*)$, entonces

$$\gamma = \text{Id}_{H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})}(\gamma) = S(f_*)(P(f_*)(\gamma)) = S(f_*)(0) = 0,$$

por lo que λ no puede ser un autovalor de f_* . \square

Corolario 3.19. *Si f es continua, entonces la aplicación inducida $f_* : \check{H}_q(X; \mathbb{R}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{R})$ no tiene autovalores no nulos.*

Demostración. Supongamos que λ es un autovalor no nulo de f_* , por lo que existe $\gamma \in \check{H}_q(X; \mathbb{R})$ no nulo tal que $f_*(\gamma) = \lambda \cdot \gamma$. En particular, existe un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X tal que $\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)$ es no nulo y es tal que $f_*(\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)) = \lambda \cdot \pi_{\mathcal{X}}(\gamma)$, es decir, λ es un autovalor no nulo de $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$, llegando así a una contradicción con la Proposición 3.18. \square

Proposición 3.20. *No existe ningún subespacio positivamente invariante de $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$ con dimensión finita en el cual f_* sea inyectiva.*

Demostración. Sea B un subespacio positivamente invariante de $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$ que tiene dimensión finita, y denotamos por $P(t)$ al polinomio característico de $(f_*)|_B : B \rightarrow B$. Supongamos que $(f_*)|_B$ es inyectiva, entonces 0 no sería un autovalor de $(f_*)|_B$, y así, el término independiente de $P(t)$ sería no nulo, por lo que $P(t)$ tendría una inversa en $\mathbb{R}[[t]]$ (esto es, existe $S(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ tal que $P(t) \cdot S(t) = S(t) \cdot P(t) = 1$). Por lo tanto, la composición $S(f_*) \circ P(f_*)$ actuaría como la aplicación identidad en B , pero al mismo tiempo $P(f_*)|_B = 0$, llegando así a una contradicción. \square

Corolario 3.21. *Si f es continua, entonces no existe ningún subespacio positivamente invariante de $\check{H}_q(X; \mathbb{R})$ con dimensión finita en el cual f_* sea inyectiva.*

Demostración. Supongamos que existe un subespacio positivamente invariante B de $\check{H}_q(X; \mathbb{R})$ que tiene dimensión finita en el cual $(f_*)|_B$ es inyectiva. Existe un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X en el cual $\pi_{\mathcal{X}}(B)$ es un subespacio no trivial de $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$. Como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_q(X; \mathbb{R}) & \xrightarrow{f_*} & \check{H}_q(X; \mathbb{R}) \\ \pi_{\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{X}} \\ H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R}) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R}) \end{array}$$

es conmutativo (por la Observación 1.15), tenemos que $\pi_{\mathcal{X}}(B)$ es un subespacio positivamente invariante no trivial de $H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$ que tiene dimensión finita en el cual $f_* : H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}}(X; \mathbb{R})$ es inyectiva, llegando así a una contradicción con la proposición anterior. \square

3.4. Series e integral

Sea X un espacio topológico. Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación (de nuevo, no necesariamente continua) para la cual el punto $a \in X$ es un atractor global estable. Y sea \mathcal{X} un recubrimiento abierto dinámico de X .

Proposición 3.22. *Sea $S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[[t]]$ una serie de potencias con coeficientes en R . Sean $z \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$ y $\gamma \in H_q^{\mathcal{X}}(X; R)$. Entonces*

$$\int_{(S(f_*))(\gamma)} z = \int_{\gamma} (S(f^*))(z).$$

Demostración. Sea $\xi \in C^q(X; G_R)$ una q -aplicación que representa a z (es decir, $[\xi] = z$) y que se anula en un elemento $U \in \mathcal{X}$ que contiene a a . La existencia de dicho representante de z ha sido garantizada en la Sección 3.2, y además, también se ha visto en dicha sección que $(S(f^{\#}))(\xi) \in C^q(X; G_R)$ es un representante de $(S(f^*))(z) \in H_{\mathcal{X}}^q(X; G_R)$.

Sea $c = \sum_{i=1}^n k_i \sigma_i \in C_q^{\mathcal{X}}(X; R)$ un representante de γ . Como cada σ_i está formado por un número finito de vértices, existe un número natural $m_i + 1$ tal que $f^j(\sigma_i)$ están contenidos en U para cualquier $j \geq m_i + 1$. De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (S(f^*))(z) &= ((S(f^{\#}))(\xi))(c) = \sum_{i=1}^n k_i ((S(f^{\#}))(\xi))(\sigma_i) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j f^{\#j}(\xi) \right) (\sigma_i) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi(f_{\#}^j(\sigma_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{m_i} a_j \xi(f_{\#}^j(\sigma_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{m_i} a_j \xi(f_{\#}^j(\sigma_i)) \\ &= \xi \left(\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{m_i} a_j f_{\#}^j(\sigma_i) \right), \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se sigue de la definición de m_i y de que ξ se anula en U .

El natural $m := \max\{m_i : i = 1, \dots, N\}$ es tal que $f_{\#}^j(c)$ están contenidos en U para todo $j \geq m + 1$, y así,

$$(S(f_*))(\gamma) = [a_0 c + a_1 f_{\#}(c) + \dots + f_{\#}^m(c)].$$

Y además,

$$\begin{aligned} \int_{(S(f_*))(\gamma)} z &= \xi(a_0 c + a_1 f_{\#}(c) + \dots + f_{\#}^m(c)) \\ &= \xi\left(\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^m a_j f_{\#}^j(\sigma_i)\right) \\ &= \xi\left(\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{m_i} a_j f_{\#}^j(\sigma_i)\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la definición de m_i y de que ξ se anula en U . Concluyendo así que $\int_{\gamma}(S(f^*))(z) = \int_{(S(f_*))(\gamma)} z$. □

Proposición 3.23. *Si f es continua, entonces*

$$\int_{(S(f_*))(\gamma)} z = \int_{\gamma}(S(f^*))(z)$$

para cualquier $\gamma \in \check{H}_q(X; R)$, $z \in \check{H}^q(X; G_R)$ y $S(t) \in R[[t]]$.

Demostración. Sabemos por el Lema A.9 que existe un recubrimiento abierto dinámico \mathcal{X} de X y existe $z_{\mathcal{X}} \in H_{\mathcal{X}}^q(X)$ tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{X}} : H_{\mathcal{X}}^q(X) &\longrightarrow \check{H}^q(X) \\ z_{\mathcal{X}} &\longmapsto z, \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_{(S(f_*))(\gamma)} z = \int_{(S(f_*))(\gamma)} \tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}}) = \int_{\pi_{\mathcal{X}}(S(f_*))(\gamma)} z_{\mathcal{X}} = \int_{((S(f_*))(\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)))} z_{\mathcal{X}},$$

ya así, por la proposición anterior, la igualdad anterior coincide con

$$\int_{\pi_{\mathcal{X}}(\gamma)} (S(f^*))(z_{\mathcal{X}}) = \int_{\gamma} \tau_{\mathcal{X}}((S(f^*))(z_{\mathcal{X}})) = \int_{\gamma} (S(f^*))(\tau_{\mathcal{X}}(z_{\mathcal{X}})) = \int_{\gamma} (S(f^*))(z).$$

□

3.5. Configuraciones dinámicas

3.5.1. Conjuntos invariantes aislados

Vamos a dar un repaso breve de la teoría del índice de Conley para sistemas dinámicos discretos. Ver [Mischaikow y Mrozek(2002)] y las referencias encontradas allí. Una similar exposición puede ser encontrada en [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)].

Supongamos que $f : U \subset M \rightarrow M$ es una aplicación continua definida en un subconjunto abierto de un espacio métrico M que es además localmente compacto y ANR (por ejemplo, una variedad topológica o un espacio triangulable). Nótese que f no es necesariamente inyectiva. Una **órbita completa** de un punto $x \in M$ es una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_0 = x$ y $f(x_i) = x_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para un subconjunto $A \subset M$, definimos el **subconjunto invariante de A** (y lo denotamos por $\text{Inv}(A)$) como el subconjunto formado por los puntos que poseen una órbita completa contenida en A . Un subconjunto K es **invariante aislado** o **localmente maximal** para f si posee un entorno compacto P tal que $K = \text{Inv}(P)$. En este caso, decimos que P es un **entorno aislante de K** . El aislamiento es una condición frecuentemente satisfecha por subconjuntos invariantes, por ejemplo, es automática bajo ciertas formas de hiperbolicidad.

En su trabajo de subconjuntos invariantes aislados, Conley desarrollo invariantes que describen estos subconjuntos en términos de entornos dinámicamente significativos y la acción de la dinámica en ellos. Introducimos aquí el concepto de **par índice**. Un par compacto (N, L) es llamado un par índice de un subconjunto invariante aislado K si satisface las condiciones siguientes:

- $\overline{N \setminus L}$ es un entorno aislante de K .
- $f(N \setminus L) \subset N$, es decir, los puntos que abandonan N pertenecen a L .
- $f(L) \cap N \subset L$, en otras palabras, L es positivamente invariante en N .

Es siempre posible encontrar un par índice tal que N/L sea tal que sus grupos de homología de Čech tengan dimensiones finitas. Por tanto, asumimos esta propiedad extra en la definición de par índice. De hecho, si el espacio de fase es una variedad topológica, existe siempre un par índice (N, L) tal que N , L y $\overline{N \setminus L}$ son variedades con borde (ver la noción de **par de filtración** de [Franks y Richeson(2000)]).

Veamos brevemente qué es el índice de Conley en el caso discreto. Dado un par índice (N, L) , encapsulamos la dinámica en N/L por medio de una **aplicación índice** $f_{\#} : N/L \rightarrow N/L$ que envía x a $f(x)$ si $f(x) \in N \setminus L$ y a $[L]$ en caso contrario. Las aplicaciones índice que surgen de diferentes pares índices tienen propiedades en común, son **shift equivalent** en la terminología usada en [Franks y Richeson(2000)]. La anterior equivalencia es establecida más fácilmente en términos de la acción de la homología, esta dice que los endomorfismos $(f_{\#})_* : \check{H}_q(N, L) \rightarrow \check{H}_q(N, L)$ son todos conjugados cuando estos están restringidos a sus subespacios invariantes maximales (llamada **la reducción de Leray** de $(f_{\#})_*$, ver [Mrozek(1990)]). La clase de equivalencia de los endomorfismos definidos de esa manera es referida como el **índice de Conley homológico de K** . El índice de Conley cohomológico es definido de manera análoga.

3.5.2. Subconjunto inestable compactificado

Usando un par índice del subconjunto invariante aislado K , en [Robbin y Salamon(1988)] construyeron un objeto topológico que está íntimamente relacionado con el subconjunto inestable de K (ver también [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)]). Consideremos la sucesión inversa de espacios topológicos:

$$\dots \xrightarrow{f_{\#}} (N/L, [L]) \xrightarrow{f_{\#}} (N/L, [L]) \xrightarrow{f_{\#}} (N/L, [L])$$

Su límite inverso es denotado por (W_∞, ∞) , y nos referimos a W_∞ como el **conjunto inestable compactificado**, una terminología que será explicada más adelante. Recordemos que el límite inverso es el espacio de sucesiones (\dots, x_1, x_0) en N/L tal que $f_\#(x_{i+1}) = x_i$ para todo $i \geq 0$, es decir, el conjunto de las semi-órbitas negativas del sistema dinámico $f_\# : N/L \rightarrow N/L$. De hecho, ∞ es la sucesión constante igual a $[L]$, $(\dots, [L], [L])$. Nótese que no podemos hablar de **la** semi-órbita negativa de un punto x debido a que f podría no ser invertible, decimos en su lugar que (\dots, x_1, x_0) es **una** semi-órbita negativa de $x = x_0$. Además, W_∞ hereda la topología de subespacio de la topología producto de la sucesión de espacios. Y como N/L es compacto, el límite inverso W_∞ también lo es, ver página 58 de [Mardešić y Segal(1982)].

La aplicación f induce un homeomorfismo $f_\infty : W_\infty \rightarrow W_\infty$ dado por

$$f_\infty(\dots, x_1, x_0) := (\dots, x_1, x_0, f_\#(x_0)).$$

Equivalentemente, f_∞ aplica $f_\#$ a cada término de la sucesión (\dots, x_1, x_0) . Se sigue inmediatamente que f_∞ es continua. Su inversa es simplemente la aplicación desplazamiento $(\dots, x_2, x_1, x_0) \mapsto (\dots, x_2, x_1)$.

La descripción de la dinámica de $f_\infty : W_\infty \rightarrow W_\infty$ es bastante sencilla, esta tiene un descomposición atractor-repulsor dada por $\{\infty, \tilde{K}\}$, donde \tilde{K} es definido como el límite inverso de

$$\dots \xrightarrow{f} K \xrightarrow{f} K \xrightarrow{f} K$$

Sea $(\dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_1, x_0) \in W_\infty$ y supongamos que $y := x_k \neq [L]$. Claramente, y tiene una semi-órbita negativa en $N \setminus L$ dada por (\dots, x_{k+1}, x_k) . Y así, o bien la semi-órbita positiva de y por f está en $N \setminus L$ (y así, $y \in K$) o bien la semi-órbita positiva de y por f abandona $N \setminus L$. En términos de la dinámica en N/L , la segunda alternativa es equivalente a que $f_\#^n(y) = [L]$ para un natural n lo suficientemente grande. Aquí estamos usando que K es el subconjunto invariante maximal de $N \setminus L$. Por tanto, existe una dicotomía, o bien (\dots, x_1, x_0) pertenece a \tilde{K} y su semi-órbita positiva bajo la acción de f_∞ está contenida en \tilde{K} o bien la semi-órbita positiva de (\dots, x_1, x_0) bajo la acción de f_∞ converge a la sucesión constante $[L]$, es decir, el punto fijo ∞ . Concluimos que ∞ es un punto fijo atractor cuya región de atracción es $W_\infty \setminus \tilde{K}$ y que \tilde{K} es un repulsor cuya región de repulsión es $W_\infty \setminus \{\infty\}$.

A pesar de su definición, las propiedades dinámicas de los pares índices implican que W_∞ es un objeto canónico, no depende de la elección de (N, L) . Cualquier par índice de K puede ser utilizado para definir W_∞ .

3.5.3. Topología del conjunto inestable

La expresión «conjunto inestable compactificado» usado para referirnos a W_∞ merece alguna explicación. Los párrafos siguientes describen la relación entre W_∞ y la estándar noción del **conjunto inestable** $W^u(K, f)$ de K , que es el subconjunto de M compuesto por los puntos que tienen una semi-órbita negativa que converge a K . La aplicación f es de ahora en adelante omitida de la notación del conjunto inestable. Como no hemos hecho ninguna suposición sobre la diferenciabilidad en esta sección, el conjunto inestable no tiene por que ser una variedad en general.

Por razones técnicas, supongamos que el dominio de definición de f es todo el espacio M (con motivo de asegurar que el conjunto inestable no alcanza el borde del dominio de definición de f). Vamos a definir una aplicación entre $W_\infty \setminus \{\infty\}$ y el conjunto inestable $W^u(K)$. Nótese que $W^u(K)$ es invariante por f y hereda la topología de subespacio del espacio de fase M .

Para cualquier sucesión $(\dots, x_1, x_0) \in W_\infty \setminus \{\infty\}$ existe $k \geq 0$ tal que $x_k \neq [L]$. Definimos

$$h : W_\infty \setminus \{\infty\} \rightarrow W^u(K)$$

por $h(\dots, x_1, x_0) := f^k(x_k)$. Evidentemente, la definición no depende de la elección de k . La aplicación h es sobreyectiva: cualquier $x \in W^u(K)$ posee una semi-órbita negativa (\dots, x_1, x_0) que converge a K . Como $N \setminus L$ es un entorno de K , este contiene una cola de la sucesión, es decir, existe n_0 tal que la sucesión $(\dots, x_{n_0+1}, x_{n_0})$ está contenida en $N \setminus L$. Y entonces,

$$(\dots, x_{n_0+1}, x_{n_0}, f_{\#}(x_{n_0}), \dots, f_{\#}^{n_0}(x_{n_0})) \in W_\infty \setminus \{\infty\}$$

es una preimagen de x . La aplicación h es continua: un entorno de (\dots, x_1, x_0) en W_∞ contiene una sucesión (\dots, y_1, y_0) tal que y_k es cercano a x_k , por lo que, en particular, $y_k \neq [L]$. La continuidad de f^k implica la continuidad de h en el entorno de antes.

El subconjunto de W_∞ definido por la condición $x_0 \neq [L]$ es enviado por h al subconjunto de $W^u(K)$ compuesto por los puntos de $N \setminus L$ que tienen una semi-órbita negativa completamente contenida en $N \setminus L$. Por tanto, el subconjunto $\{(\dots, x_1, x_0) \in W_\infty : x_0 \neq [L]\} \subset W_\infty$ puede ser considerado como una parte inicial del conjunto inestable de K .

En el caso de que f sea un homeomorfismo, h es de hecho una biyección entre $W_\infty \setminus \{\infty\}$ y $W^u(K)$ pero no un homeomorfismo. La razón es que la topología final de h en $W^u(K)$ hace que dos puntos sean cercanos si sus semi-órbitas negativas son cercanas en cada paso, por lo que esta topología (llamada **topología intrínseca** por Robbin y Salomon) es más fina que la topología de subespacio en $W^u(K)$. Como se demuestra en la Proposición 7.5 de [Robbin y Salomon(1988)], la topología intrínseca y la de subespacio coinciden cuando podemos encontrar un par índice (N, L) , donde L es positivamente invariante. Ignoremos por el momento las diferencias entre las topologías en la parte inicial del conjunto inestable en un entorno V de K y tomemos (N, L) dentro de V . Supongamos que (\dots, p_1, p_0) es una sucesión en $W^u(K)$ que converge a $p \in W^u(K) \setminus V$ en la topología de subespacio pero no en la topología intrínseca. Supongamos además que $p_n = f^{k_n}(x_n)$ con k_n el mínimo entre los enteros no negativos tales que $x_n \in N \setminus L$ (la existencia de k_n y x_n viene garantizada del hecho de que h sea sobreyectiva) y $k_n \rightarrow +\infty$ (de lo contrario, para algún m , $(\dots, f^{-m}(p_1), f^{-m}(p_0))$ es una sucesión en la parte inicial en V que converge usualmente pero que diverge intrínsecamente). Entonces, condiciones similares se mantienen para $f^{-n}(p)$, $n \geq 0$, y también para cualquier punto límite de la semi-órbita negativa de p . Y así, concluimos que el conjunto inestable, excluyendo una parte inicial, se acumula en K para la topología de subespacio.

3.5.4. Consideraciones adicionales

La aplicación h puede ser usada para acotar la topología en $W^u(K)$ en términos de la topología de W_∞ . En general, h restringe a una aplicación sobreyectiva entre $W_\infty \setminus (\tilde{K} \cup \{\infty\})$ y $W^u(K) \setminus K$. Por el Lema 1.38, el número de componentes conexas de $W^u(K) \setminus K$, que son por definición las

ramas del conjunto inestable, está acotado superiormente por el número de componentes conexas de $W_\infty \setminus (\tilde{K} \cup \{\infty\})$. Lo mismo es cierto para las cuasi-componentes. Estamos interesados en las cuasi-componentes de $W^u(K) \setminus K$ que comienzan en (son adherentes a) K y se extienden hasta el infinito, en el sentido de que sus preimágenes sucesivas nunca están contenidas en un entorno de K . Nos referimos a dichas cuasi-componentes como **esenciales**. En términos de la topología del conjunto inestable compactificado, las cuasi-componentes esenciales son aquellas cuasi-componentes que son adherentes a \tilde{K} y a ∞ . El Teorema 3.1 acota superiormente el número de cuasi-componentes de $W^u(K) \setminus K$ por la dimensión de $\check{H}_1(W_\infty) + 1$. Recordemos la discusión previa:

Proposición 3.24. *El número de cuasi-componentes esenciales de $W^u(K) \setminus K$ (con la topología de subespacio) está acotada superiormente por el número de cuasi-componentes esenciales de $W_\infty \setminus (\tilde{K} \cup \{\infty\})$. Y se da la igualdad cuando f es un homeomorfismo y la topología intrínseca coincide con la topología de subespacio.*

La propiedad de continuidad de la homología de Čech nos proporciona una manera de estudiar la homología de W_∞ en términos de la homología del par índice (N, L) . Como la homología de Čech es continua con respecto a los espacios Hausdorff compactos (ver la Subsección 1.1.4), $\check{H}_q(W_\infty, \infty)$ es isomorfo al límite inverso de

$$\dots \xrightarrow{(f_\#)_*} \check{H}_q(N, L) \xrightarrow{(f_\#)_*} \check{H}_q(N, L) \xrightarrow{(f_\#)_*} \check{H}_q(N, L) \quad (3.1)$$

En particular, el espacio vectorial $\check{H}_q(W_\infty)$ (recordemos que estamos considerando los coeficientes en un cuerpo) tiene dimensión finita y

$$\dim(\check{H}_q(W_\infty)) \leq \dim(\check{H}_q(N, L)).$$

Nótese que el límite inverso de (3.1) es isomorfo al subespacio invariante maximal de $\check{H}_q(N, L)$, donde $(f_\#)_*$ actuó como un isomorfismo, por lo que $(f_\infty)_* : \check{H}_q(W_\infty, \infty) \rightarrow \check{H}_q(W_\infty, \infty)$ es un isomorfismo. Y así, esta última aplicación es un representante del índice homológico de Conley de K . Además, de manera análoga, si trabajamos con la cohomología, concluimos que la cohomología de Čech de (W_∞, ∞) es isomorfo al límite directo de la sucesión directa

$$\dots \xleftarrow{(f_\#)^*} \check{H}^q(N, L) \xleftarrow{(f_\#)^*} \check{H}^q(N, L) \xleftarrow{(f_\#)^*} \check{H}^q(N, L),$$

y en particular, tiene dimensión finita.

Supongamos que K tiene un número finito de componentes conexas (usando el Lema 1.38, no es muy difícil comprobar que \tilde{K} también tiene un número finito de componentes conexas), por lo que $\check{H}_0(\tilde{K})$ tiene dimensión finita. Y de la sucesión exacta larga de la homología de Čech relativa al par W_∞, \tilde{K} , concluimos que $\check{H}_1(W_\infty, \tilde{K})$ también tiene dimensión finita. Alcanzamos la misma conclusión para el 0-ésimo grupo de homología. Por la propiedad de la escisión fuerte de la homología de Čech (ver el Capítulo X de [Eilenberg y Steenrod(1952)]), $\check{H}_q(W_\infty, \tilde{K})$ es isomorfo a $\check{H}_q(W_\infty/\tilde{K})$. Por tanto, por los argumentos previos, los 0 y 1-ésimos grupos de homología de Čech de W_∞/\tilde{K} tienen dimensiones finitas.

El espacio W_∞/\tilde{K} es el resultado de colapsar el repulsor \tilde{K} a un punto. Trivialmente, f_∞ desciende a una aplicación $\overline{f_\infty} : W_\infty/\tilde{K} \rightarrow W_\infty/\tilde{K}$ cuya dinámica es extremadamente simple: tiene

un descomposición atractor–repulsor $\{\infty, [\tilde{K}]\}$. Sin embargo, el conjunto inestable permanece intacto, $W_\infty \setminus (\tilde{K} \cup \{\infty\})$ es homeomorfo a $(W_\infty/\tilde{K}) \setminus \{[\tilde{K}], \infty\}$ y las restricciones de f_∞ y $\overline{f_\infty}$ a dichos subespacios son trivialmente topológicamente conjugadas. Por tanto, podemos estudiar las cuasi–componentes esenciales del conjunto inestable examinando las cuasi–componentes esenciales del espacio cociente W_∞/\tilde{K} .

3.5.5. Hipótesis permanentes

En vista de las discusiones previas, formularemos un conjunto de hipótesis en las dinámicas que estamos estudiando aplicadas al conjunto inestable de los conjuntos invariantes aislados descritos hasta ahora. En nuestra nueva configuración, X será un espacio métrico compacto (que se corresponde a W_∞/\tilde{K}) y $f : X \rightarrow X$ será un homeomorfismo (enfatizamos que es diferente de la aplicación f de antes, de hecho, se corresponde con la aplicación $\overline{f_\infty}$) que tiene dos puntos fijos a y a^* y es tal que la dinámica tiene una descomposición atractor–repulsor $\{a, a^*\}$. La región de atracción de a , $X \setminus \{a^*\}$, será denotada por B , y la región de repulsión de a^* , $X \setminus \{a\}$, será denotada por B^* . Asumiremos además que los 0 y 1–ésimos grupos de homología de Čech de X tienen dimensiones finitas (y equivalentemente, los 0 y 1–ésimos grupos de cohomología de Čech de X también tienen dimensiones finitas, ver el Teorema 2.14). Por otro lado, como X es compacto, supondremos que todos los recubrimientos abiertos de X que consideremos son finitos.

3.5.6. Resultados sobre las cuasi–componentes

Como $\dim(\check{H}_0(X; \mathbb{K}))$ es finita, el Teorema 2.14 nos garantiza que $\dim(\check{H}^0(X; \mathbb{K}))$ es también finita, y así, la Proposición 1.62 nos asegura que el número de cuasi–componentes de X es finito y lo mismo ocurre para las componentes conexas por el Lema 1.23 (de hecho, para cualquier punto de X , su componente conexa y su cuasi–componente coinciden).

Lema 3.25. *Toda componente conexa de $X \setminus \{a, a^*\}$ es adherente a $\{a\}$ o $\{a^*\}$ en X . El resultado también es cierto para las cuasi–componentes debido a que son unión de componentes conexas.*

Demostración. Supongamos que C es una componente conexa de $X \setminus \{a, a^*\}$ que no es adherente a a ni a a^* . Además, C es también una componente conexa de X , ver la página 101 de [Wilder(1949)]. Las mismas características son compartidas por $f^n(C)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Como $f^n(C) \rightarrow a$ cuando n tiende a infinito, se sigue que todas las componentes conexas de antes son distintas, llegando así a una contradicción ya que solo tenemos un número finito de componentes conexas de X . \square

Estamos interesados en la estructura topológica de X y, en particular, en las cuasi–componentes de $X \setminus \{a, a^*\}$. Una cuasi–componente de $X \setminus \{a, a^*\}$ que es adherente a a y a^* (ambos a la vez) es llamada **esencial**. Supongamos en lo sucesivo que O_e es un entorno clopen (como un subconjunto de $X \setminus \{a, a^*\}$) de la familia de las cuasi–componentes esenciales.

Lema 3.26. *Existen entornos V y V^* de a y a^* en X tales que para cualquier cuasi–componente QC de $X \setminus \{a, a^*\}$ exactamente una de las condiciones siguientes se mantiene:*

- (1). $QC \subset O_e$.
- (2). $QC \cap V = \emptyset$.
- (3). $QC \cap V^* = \emptyset$.

Demostración. Sean $\{P_n\}_{n \geq 1}$ y $\{P_n^*\}_{n \geq 1}$ dos bases de entornos compactos de a y a^* , respectivamente. Imponemos que $P_i \cap P_j^* = \emptyset$ para todo i, j y que las bases son encajadas. Procedemos por contradicción. Supongamos que para cualquier n existe una cuasi-componente QC_n que es disjunto de O_e y que interseca a P_n y P_n^* . Como QC_n es no esencial, el Lema 3.25 nos asegura que o bien todas las componentes conexas de QC_n alcanzan a a (son adherentes a a en X) o bien todas ellas alcanzan a a^* (son adherentes a a^* en X). En consecuencia, existe una componente conexa de QC_n que interseca a ∂P_m y ∂P_m^* para cualquier $m \leq n$. Fijado $m \geq 1$ y tomando puntos $p_n^m \in QC_n \cap \partial P_m$, $q_n^m \in QC_n \cap \partial P_m^*$. Al pasar a una subsucesión, podemos asumir que $p_n^m \rightarrow p^m \in \partial P_m$ y $q_n^m \rightarrow q^m \in \partial P_m^*$. Por el Lema 1.24, p^m y q^m pertenecen a la misma cuasi-componente QC , por lo que QC interseca a P_m y P_m^* . Como m era arbitrario, deducimos que QC es esencial, por lo que $QC \subset O_e$. \square

El lema anterior sugiere una partición por clopens que va a ser bastante relevante para las demostraciones de la sección siguiente.

Corolario 3.27.

$$B \cap B^* = O_e \cup O_a \cup O_{a^*}$$

es una partición por clopens, donde O_a y O_{a^*} vienen dadas por la unión de todas las cuasi-componentes de $B \cap B^*$ que no están en O_e y que son adherentes a $\{a\}$ y $\{a^*\}$, respectivamente, y $O_a \cap V^* = \emptyset = O_{a^*} \cap V$ del Lema 3.26.

Demostración. Claramente es una partición disjunta, y como O_e es un clopen, es suficiente comprobar que O_a y O_{a^*} son cerrados. Demostremos que O_a es cerrado. Supongamos que (p_n) es un sucesión de puntos de O_a que converge a $p \in B \cap B^*$. Como QC_{p_n} es adherente a $\{a\}$ para cualquier n , los argumentos del Lema 3.26 nos aseguran que QC_p es adherente a $\{a\}$, y así, $p \in O_a$. \square

3.6. Dinámica de un par atractor–repulsor

Teorema 3.28. *El número de cuasi-componentes esenciales de $B \cap B^*$ es igual a $\dim(\check{H}_1(X; \mathbb{K})) + 1$.*

Como un corolario, cuando X es el conjunto inestable compactificado de un conjunto invariante aislado K obtenemos el Teorema 3.1. Recordemos que la Proposición 3.24 nos decía que si consideramos la topología de subespacio en lugar de la topología intrínseca en $W^u(K)$ o si la dinámica original no fuera invertible, solo obtenemos la cota superior de $\dim(\check{H}_1(X)) + 1$ para el número de cuasi-componentes esenciales de $X \setminus \{a, a^*\}$.

La demostración del Teorema 3.28 está organizada de la manera siguiente. Primero, introduciremos una familia adaptada de recubrimientos abiertos de $B \cap B^*$ y de X , y describiremos los

homomorfismos conectantes (entre las dimensiones 0 y 1) de la sucesión exacta de Mayer–Vietoris asociada al par B, B^* a escala dichos recubrimientos. Entonces, probaremos la cota superior para el número de cuasi–componentes esenciales en la Proposición 3.32, y finalizamos esta sección con la demostración de la Proposición 3.34.

3.6.1. Homología de Čech de la región de atracción

Si $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ tiene dimensión finita, el Lema 1.17 nos garantiza que las proyecciones $\pi_{\mathcal{U}} : \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{K})$ son inyectivas si el recubrimiento abierto \mathcal{U} es lo suficientemente fino, es decir,

(\star) $\text{Im}(\pi_{\mathcal{U}})$ es isomorfo a $\check{H}_q(X; \mathbb{K})$ si \mathcal{U} es más fino que un recubrimiento abierto fijado \mathcal{W} .

Si $\mathcal{V} \succ \mathcal{W}$ y $\mathcal{V}' \succ \mathcal{V} \vee f^{-1}(\mathcal{V})$, entonces $f_* : H_q^{\mathcal{V}'}(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{V}}(X; \mathbb{K})$ restringe a un isomorfismo entre $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}'})$ y $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$. Su inversa viene dada por la composición del isomorfismo $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}}) \rightarrow \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}''})$ con la restricción de $(f^{-1})_* : H_q^{\mathcal{V}''}(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{V}'}(X; \mathbb{K})$, para algún \mathcal{V}'' más fino que $f(\mathcal{V}')$ (recordemos que f es un homeomorfismo y, en particular, es abierto). Existe un isomorfismo entre $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$ y $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}''})$ puesto que si $\mathcal{V}' \succ f^{-1}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}'' \succ f(\mathcal{V}')$ y f es un homeomorfismo, entonces $\mathcal{V}'' \succ f(\mathcal{V}') \succ \mathcal{V} \succ \mathcal{W}$, y así, (\star) nos asegura que $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$ y $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}''})$ son isomorfos a $\check{H}_1(X; \mathbb{K})$. Concluimos que $f_* : \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es conjugada a $f_* : \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}'}) \rightarrow \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$. Y de manera análoga, podemos probar que:

Observación 3.29. Si $\mathcal{V} \succ \mathcal{W}$, entonces $f_*^m : \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es conjugada a $f_*^m : \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}'}) \rightarrow \text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$ para cualquier $\mathcal{V}' \succ \mathcal{V} \vee f^{-1}(\mathcal{V}) \vee \dots \vee f^{-m}(\mathcal{V})$.

El lema siguiente arroja algo de luz sobre la relación entre las topologías de B y de X . Resultados afines en términos cohomológicos fueron obtenidos en [Ruiz del Portal y Sánchez-Gabites(2014)] y [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)].

Lema 3.30. Supongamos que \mathcal{W} es un recubrimiento abierto de X definido por (\star). Sea \mathcal{B} un recubrimiento abierto dinámico de B que refina a $\mathcal{W}|_B = \{U \cap B : U \in \mathcal{W}\}$ y sea Z un entorno compacto de a en B . Entonces, la imagen de la aplicación inducida por la inclusión,

$$H_q^{\mathcal{B}|_Z}(Z; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{W}}(X; \mathbb{K}),$$

no contiene ningún elemento no trivial de $\text{Im}(\pi_{\mathcal{W}})$.

Demostración. Como la aplicación factoriza a través de $H_q^{\mathcal{B}|_{Z'}}(Z'; \mathbb{K})$ para cualquier $Z \subset Z' \subset B$, podemos suponer que Z es positivamente invariante de f . Entonces f induce una aplicación $f_* : H_q^{\mathcal{B}|_Z}(Z; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{B}|_Z}(Z; \mathbb{K})$ que envía $\gamma = [c]$ a $f_*(\gamma) = [f_{\#}(c)]$, donde $f_{\#}(c)$ es también un ciclo formal \mathcal{B} –pequeño contenido en Z debido a que \mathcal{B} es dinámico y $f(Z) \subset Z$. Como a es un atractor global en B y como Z es compacto, fijado un elemento $V_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in V_a$, existe m tal que $f^m(Z) \subset V_a$. Por tanto, $f_*^m(\gamma) = [f_{\#}^m(c)]$ representa la clase trivial por la Proposición 1.5 para el caso $q \geq 1$ y por el Corolario 1.40 para el caso $q = 0$.

Como \mathcal{B} es dinámico, \mathcal{B} también refina a la restricción a B de $\mathcal{W}_m = \mathcal{W} \vee f^{-1}(\mathcal{W}) \vee \dots \vee f^{-m}(\mathcal{W})$. Existe un diagrama conmutativo donde las flechas horizontales son inducidas por la inclusión:

$$\begin{array}{ccc} H_q^{\mathcal{B}|Z}(Z; \mathbb{K}) & \longrightarrow & H_q^{\mathcal{W}_m}(X; \mathbb{K}) \\ f_*^m \downarrow & & \downarrow f_*^m \\ H_q^{\mathcal{B}|Z}(Z; \mathbb{K}) & \longrightarrow & H_q^{\mathcal{W}}(X; \mathbb{K}) \end{array}$$

Ahora, como la flecha vertical izquierda es el morfismo cero y la flecha vertical derecha restringe a un isomorfismo entre $\text{Im}(\pi_{\mathcal{W}_m})$ y $\text{Im}(\pi_{\mathcal{W}})$ por la observación anterior, de todo esto se sigue la tesis de este lema. \square

Proposición 3.31. *Sea $i : B \hookrightarrow X$ la inclusión. Si $\dim(\check{H}_q(X; \mathbb{K}))$ es finita, entonces la aplicación inducida $i_* : \check{H}_q(B; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es cero.*

Demostración. Veamos que para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{X}_0 de X , existe un recubrimiento abierto \mathcal{B} de B tal que $\mathcal{B} \succ \mathcal{X}_{0|B} = i^{-1}(\mathcal{X}_0)$ y que $i_* : H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K})$ es cero. De esta manera, como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \check{H}_q(B; \mathbb{K}) & \xrightarrow{i_*} & \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \\ & \swarrow \pi'_{\mathcal{B}} & \downarrow \pi'_{i^{-1}(\mathcal{X}_0)} & & \downarrow \pi_{\mathcal{X}_0} \\ H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\pi'_{i^{-1}(\mathcal{X}_0), \mathcal{B}}} & H_q^{i^{-1}(\mathcal{X}_0)}(B; \mathbb{K}) & \xrightarrow{i_*} & H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K}) \end{array}$$

es conmutativo (por la Observación 1.15), tenemos que $\pi_{\mathcal{X}_0} \circ i_*$ es cero. Como el recubrimiento abierto \mathcal{X}_0 era arbitrario, concluimos que $i_* : \check{H}_q(B; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ es cero.

Sea $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ el polinomio característico de $f_* : \check{H}_q(X; \mathbb{K}) \rightarrow \check{H}_q(X; \mathbb{K})$, y sea d su grado. El teorema de Cayley–Hamilton nos garantiza que $P(f_*)$ es 0.

Consideremos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \check{H}_q(X; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}_1}} & H_q^{\mathcal{X}_1}(X; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}} & H_q^{\mathcal{X}_*}(X; \mathbb{K}) \\ P(f_*)=0 \downarrow & & & & \downarrow P(f_*) \\ \check{H}_q(X; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}_0}} & H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K}) & & \end{array}$$

donde la aplicación de la columna derecha está bien definida puesto que el recubrimiento abierto \mathcal{X}_* es elegido de tal manera que $\mathcal{X}_* \succ \mathcal{X}_0 \vee f^{-1}(\mathcal{X}_0) \vee \dots \vee f^{-d}(\mathcal{X}_0)$, y el recubrimiento abierto \mathcal{X}_1 de X es elegido como en la demostración del Lema 1.17, y así, $\text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}) = \text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*})$.

Sea $u' \in H_q^{\mathcal{X}_1}(X; \mathbb{K})$. Por lo que $\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}(u') \in \text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1})$, y así, como $\text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}) = \text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*})$, tenemos que $\pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}(u') \in \text{Im}(\pi_{\mathcal{X}_*})$, por lo que existe $u \in \check{H}_q(X; \mathbb{K})$ tal que $\pi_{\mathcal{X}_*}(u) = \pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1}(u')$.

Como $\pi_{\mathcal{X}_0}((P(f_*))(u)) = \pi_{\mathcal{X}_0}(0) = 0$, y como el diagrama anterior es conmutativo, tenemos que $((P(f_*)) \circ \pi_{\mathcal{X}_*, \mathcal{X}_1})(u') = 0$.

Acabamos de probar que dado un recubrimiento abierto \mathcal{X}_0 de X existe un recubrimiento abierto \mathcal{X}_1 de X tal que la aplicación $P(f_*) : H_q^{\mathcal{X}_1}(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K})$ está bien definida y es igual a 0. Sea \mathcal{B} un recubrimiento abierto dinámico de B que refina a $\mathcal{X}_{1|B} = i^{-1}(\mathcal{X}_1)$ (la existencia de dicho recubrimiento fue discutida en la Observación 3.4), por lo que tenemos que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) & \xrightarrow{i_*} & H_q^{\mathcal{X}_1}(X; \mathbb{K}) \\ P(f_*) \downarrow & & \downarrow P(f_*)=0 \\ H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) & \xrightarrow{i_*} & H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K}) \end{array}$$

es conmutativo. El término independiente de $P(t)$ es no nulo ya que f_* es inyectiva (recordemos que f_* es un isomorfismo), por lo que existe una serie $S(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ tal que $P(t) \cdot S(t) = S(t) \cdot P(t) = 1$. Y así, $P(f_*) \circ S(f_*) = \text{Id}_{H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K})}$ y $S(f_*) \circ P(f_*) = \text{Id}_{H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K})}$ (tenemos que $S(f_*) : H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K})$ está bien definida puesto que \mathcal{B} es un recubrimiento abierto dinámico de B y que a es un atractor global estable cuando la dinámica de f está restringida a B , ver la Sección 3.3), por lo que $P(f_*) : H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K})$ es un isomorfismo. De esto último y del hecho de que el diagrama anterior es conmutativo, se sigue que $i_* : H_q^{\mathcal{B}}(B; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{\mathcal{X}_0}(X; \mathbb{K})$ es cero. \square

3.6.2. Elección de una familia adaptada de recubrimientos abiertos

De ahora en adelante (hasta el final de este capítulo), usaremos las letras \mathcal{U} y \mathcal{V} para denotar recubrimientos abiertos de $B \cap B^*$ y los recubrimientos de X llevarán dos subíndices como explicaremos más adelante.

Definimos ahora una familia de recubrimientos abiertos \mathcal{U} de $B \cap B^*$. Sea \mathcal{V} un recubrimiento abierto de $B \cap B^*$ y sea O_e un entorno clopen (que es además \mathcal{V} -clopen) de las cuasi-componentes esenciales. Aplicamos el Lema 3.26 y el Corolario 3.27 para obtener entornos abiertos V_0 y V_0^* de a y a^* , respectivamente, tales que $\overline{V_0} \cap \overline{V_0^*} = \emptyset$, $V_0 \setminus O_e$ no interseca a ninguna cuasi-componente adherente a a^* y $V_0^* \setminus O_e$ no interseca a ninguna cuasi-componente adherente a a . Definimos un recubrimiento abierto \mathcal{U} de $B \cap B^*$ que refina a \mathcal{V} de la siguiente manera. La restricción de \mathcal{U} a O_e es la familia de conjuntos abiertos de la forma $V \cap (X \setminus \overline{V_0})$ o $V \cap (X \setminus \overline{V_0^*})$, donde $V \in \mathcal{V}$ y $V \subset O_e$, mientras que en $O_a \cup O_{a^*}$ la condición adicional para \mathcal{U} es que O_a y O_{a^*} sean \mathcal{U} -clopens. Nótese que ningún elemento de \mathcal{U} interseca $\overline{V_0}$ y $\overline{V_0^*}$ a la vez, un requerimiento para las sucesiones exactas de Mayer–Vietoris.

La familia de recubrimientos abiertos \mathcal{U} de $B \cap B^*$ obtenida de esta manera es denotada por $\text{Cov}(B \cap B^*)$ (no confundir con la misma notación usada en el Capítulo 1). Claramente, $\text{Cov}(B \cap B^*)$ es cofinal en la familia de los recubrimientos abiertos de $B \cap B^*$, en el sentido de que cualquier recubrimiento abierto de $B \cap B^*$ tiene un refinamiento en $\text{Cov}(B \cap B^*)$. Establecemos como una observación que si \mathcal{U} es además más fino que algún recubrimiento abierto dado de $B \cap B^*$, obtenemos una subfamilia de $\text{Cov}(B \cap B^*)$ que sigue siendo cofinal.

Dado $\mathcal{U} \in \text{Cov}(B \cap B^*)$. Sean $\{V_\lambda\}$ y $\{V_\mu^*\}$ bases de entornos abiertos de a y a^* que están contenidas en V_0 y V_0^* , respectivamente. Los índices son (parcialmente) ordenados como los elementos de las bases: $\lambda' \geq \lambda$ si y solo si $V_{\lambda'} \subset V_\lambda$, siendo 0 el mínimo elemento, y similarmente para μ . Definimos

$$\mathcal{U}_{\lambda,\mu} := \mathcal{U} \cup \{V_\lambda, V_\mu^*\}$$

y denotamos por $\text{Cov}(X)$ a la familia de recubrimientos abiertos de X obtenidos de esta manera. De nuevo, $\text{Cov}(X)$ es cofinal en la familia de recubrimientos abiertos de X y si además imponemos que \mathcal{U} sea más fino que un recubrimiento abierto dado, seguimos produciendo una subfamilia cofinal.

Enfatizamos que la forma de \mathcal{U} , y de la de $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$, depende de la elección del \mathcal{V} -clopen O_e . Esto no está reflejado en la notación, pero nótese que una elección diferente de O_e produce entornos V_0 y V_0^* diferentes. Existe una elección (de alguna manera) canónica de O_e , la unión de las \mathcal{V} -componentes que contienen a las cuasi-componentes esenciales. Sin embargo, en principio, hasta que no probemos la Proposición 3.32, podría existir un número infinito de cuasi-componentes esenciales por lo que O_e podría no ser clopen.

Del Lema 3.26 se sigue que para cualquier $\mathcal{U}_{\lambda,\mu} \in \text{Cov}(X)$,

$$B = (O_e \cup O_a \cup \{a\}) \cup O_{a^*}$$

es una separación de B en dos conjuntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -clopens y

$$B^* = (O_e \cup O_{a^*} \cup \{a^*\}) \cup O_a$$

es una separación de B^* en dos conjuntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -clopens. Para ser más precisos, restringiremos la primera partición a $K_0 = X \setminus V_0^* \subset B$. Como O_{a^*} es un \mathcal{U} -clopen y $O_{a^*} \cap V_\lambda = \emptyset$ para cualquier λ , deducimos que $O_{a^*} \cap K_0$ es un $\mathcal{U}_{\lambda,\mu|K_0}$ -clopen para cualquier λ y μ . Y así, tenemos la siguiente separación de K_0 en subconjuntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu|K_0}$ -clopens:

$$K_0 = ((O_e \cup O_a \cup V_\lambda) \cap K_0) \cup (O_{a^*} \cap K_0). \quad (3.2)$$

Análogamente, obtenemos una separación de $K_0^* = X \setminus V_0$ en subconjuntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu|K_0^*}$ -clopens:

$$K_0^* = ((O_e \cup O_{a^*} \cup V_\mu^*) \cap K_0^*) \cup (O_a \cap K_0^*). \quad (3.3)$$

3.6.3. Una interpretación de la sucesión de Mayer–Vietoris

Para cualquier $\mathcal{U}_{\lambda,\mu} \in \text{Cov}(X)$, denotamos $K_\lambda^* := X \setminus V_\lambda$ y $K_\mu := X \setminus V_\mu^*$. Consideremos los siguientes trozos de la sucesión de Mayer–Vietoris para homología

$$\dots \longrightarrow H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X) \xrightarrow{\Delta_*} H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^* \cap K_\mu) \longrightarrow H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^*) \oplus H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\mu) \longrightarrow \dots$$

y de la sucesión de Mayer–Vietoris para cohomología

$$\dots \longleftarrow H_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}^1(X) \xleftarrow{\Delta^*} H_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}^0(K_\lambda^* \cap K_\mu) \longleftarrow H_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}^0(K_\lambda^*) \oplus H_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}^0(K_\mu) \longleftarrow \dots$$

asociados al par K_λ^*, K_μ .

Veamos en un caso particular cómo Δ^* funciona. Sea $\mathcal{V} \in \text{Cov}(B \cap B^*)$ y sea A un subconjunto \mathcal{V} -clopen de $B \cap B^*$. La función característica χ_A de A es constante sobre cada elemento de \mathcal{V} por lo que define una clase $[\chi_A]$ en el 0-ésimo grupo de reducida cohomología de $K_\lambda^* \cap K_\mu$ a escala $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ para cualquier recubrimiento abierto \mathcal{U} que refine a \mathcal{V} (ver el Ejemplo 1.60). En vista de la sucesión de Mayer-Vietoris de antes, obtenemos las clases $\Delta^*([\chi_A])$ en $H_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}^1(X)$. En el siguiente párrafo demostraremos que todas estas clases son esencialmente las mismas, en el sentido de que todas ellas son representadas por el mismo 1-cociclo y, en consecuencia, definen la misma clase en $\check{H}^1(X; \mathbb{K})$.

Un 1-cociclo $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -pequeño que representa a $\Delta^*([\chi_A])$ puede ser obtenido de la siguiente manera. Tomemos un 0-cociclo en K_λ^* , la restricción de χ_A a K_λ^* , y un 0-cociclo en K_μ , la aplicación cero en K_μ , cuya diferencia es igual a la restricción de χ_A a $K_\lambda^* \cap K_\mu$. Definimos $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}} : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ como $\delta(\chi_A)$ en $K_\lambda^* \times K_\lambda^*$ y como $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}} = 0$ en otro caso. Entonces, $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}$ es un 1-cociclo $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -pequeño que representa a $\Delta^*([\chi_A])$.

Nótese que si x y x' son $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -ceranos, entonces $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}$ se anula en (x, x') a no ser que $x \in A$ y $x' \notin A$, o viceversa. Sin embargo, como A es \mathcal{V} -clopen y \mathcal{U} refina a \mathcal{V} , puntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -ceranos que son separados por A deben permanecer a V_λ o V_μ^* . Así, $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(x, x')$ es no trivial solo si $x, x' \in V_\mu^*$ y exactamente uno de ellos pertenece a A . Esta descripción sigue siendo válida si comenzamos con $\mathcal{U}' \succ \mathcal{U}$ siempre y cuando V_μ^* no cambie. Por tanto, $\xi^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}$ es la restricción a pares $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -ceranos del 1-cociclo ξ definido como sigue:

$$\xi(x, x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V_0 \setminus A, x' \in V_0 \cap A, \\ -1 & \text{si } x \in V_0 \cap A, x' \in V_0 \setminus A, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El 1-cociclo ξ es $\mathcal{V}_{0,0}$ -pequeño (puesto que $\delta(\xi)$ es $\mathcal{V}_{0,0}$ -localmente cero ya que ξ cumple que $\xi(x, x')$ es igual a $(\delta(\chi_A))(x, x')$ si $x, x' \in V_0$ e igual a 0 en caso contrario) y **podría ser usado para calcular la integral de $\Delta^*([\chi_A])$ a cualquier escala más fina que $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$.**

3.6.4. Cota superior del número de cuasi-componentes esenciales

Proposición 3.32. *El número de cuasi-componentes esenciales de $B \cap B^*$ no excede $\dim(\check{H}_1(X; \mathbb{K})) + 1$.*

Demostración. Para n cuasi-componentes esenciales QC_1, \dots, QC_n de $B \cap B^*$ construiremos $n - 1$ clases linealmente independientes en $\check{H}_1(X; \mathbb{K})$.

Consideremos O_j entornos clopens de QC_j que son disjuntos dos a dos (recordemos el Lema 1.24) y sea \mathcal{O} el recubrimiento abierto de $B \cap B^*$ compuesto por O_1, O_2, \dots, O_n y $(B \cap B^*) \setminus (\bigcup_{i=1}^n O_i)$. Tomemos un refinamiento \mathcal{V} de \mathcal{O} en $\text{Cov}(B \cap B^*)$.

Denotemos por χ_j a la función característica de O_j . Por los argumentos de la Subsección 3.6.3, $\Delta^*([\chi_j])$ es un elemento bien definido de $H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X; \mathbb{K})$ para cualquier $\mathcal{U} \succ \mathcal{V}$ y cualquier λ y μ , en particular para $\mathcal{V}_{0,0} = \mathcal{V} \cup \{V_0, V_0^*\}$.

Por el Lema 1.17, la imagen de $\pi_{\mathcal{V}_{0,0}} : \check{H}_1(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_1^{\mathcal{V}_{0,0}}(X; \mathbb{K})$ es igual a la imagen de $\pi_{\mathcal{V}_{0,0}, \mathcal{U}_{\lambda,\mu}} : H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X; \mathbb{K}) \rightarrow H_1^{\mathcal{V}_{0,0}}(X; \mathbb{K})$ para algún $\mathcal{U}_{\lambda,\mu} \in \text{Cov}(X)$ más fino que $\mathcal{V}_{0,0}$. Supongamos sin pérdida

de generalidad que \mathcal{U} refina a \mathcal{V} . Como O_i es adherente a a y a^* , y $O_i \cap K_\lambda^* \cap K_\mu$ es un \mathcal{U} -clopen ($\mathcal{U}|_{K_\lambda^* \cap K_\mu}$ -clopen, para ser precisos), podemos encontrar puntos $x_i \in O_i$ tales que existe un camino de puntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -pequeño de x_i a a^* dentro de K_λ^* y un camino de puntos $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -pequeño de x_i a a dentro de K_μ .

La existencia de los caminos de puntos previos nos garantiza la existencia de 0-ciclos $d_i = (x_i) - (x_n)$ en $K_\lambda^* \cap K_\mu$ que representan la clase de homología trivial a escala $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ como 0-ciclos en K_λ^* y como 0-ciclos en K_μ . En vista de la siguiente sucesión exacta de Mayer-Vietoris:

$$\dots \longrightarrow H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X) \xrightarrow{\Delta^*} H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^* \cap K_\mu) \longrightarrow H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^*) \oplus H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\mu) \longrightarrow \dots$$

deducimos que $[d_i] \in H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^* \cap K_\mu)$ pertenece a $\text{Im}(\Delta_*)$, por lo que existe un 1-ciclo $c_i \in C_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X)$ tal que $[d_i] = \Delta_*([c_i])$.

De la propiedad que define a $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$, obtenemos clases $\alpha_i \in \check{H}_1(X; \mathbb{K})$ que a escala $\mathcal{V}_{0,0}$ son iguales a $[c_i]$ (vistas como clases de homología $\mathcal{V}_{0,0}$ -pequeñas). Por el Lema 2.18, tenemos que

$$\int_{\alpha_i} \Delta^*([\chi_j]) = \int_{[c_i]} \Delta^*([\chi_j]) = \int_{\Delta_*([c_i])} [\chi_j] = \int_{[d_i]} [\chi_j] = \chi_j(x_i) - \chi_j(x_n) = \delta_{i,j},$$

donde la integral segunda y tercera son calculadas a escala $\mathcal{V}_{0,0}$. Como la integral define una forma bilineal, concluimos que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ es linealmente independiente en $\check{H}^1(X; \mathbb{K})$ y de aquí se sigue el resultado. \square

3.6.5. Cálculo del número de cuasi-componentes esenciales

En los argumentos de esta subsección, los recubrimientos solo se refinarán fuera de grandes subconjuntos compactos, y las familias de recubrimientos que consideraremos ($\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ con \mathcal{U} fijo) coinciden en el conjunto compacto $K_0 \cap K_0^*$.

Sea un subconjunto $A \subset X$. Dado el recubrimiento abierto \mathcal{X} de X , recordemos que la estrella de A con respecto de \mathcal{X} , $\text{st}(A, \mathcal{X})$, viene dada por la unión de todos los elementos de \mathcal{X} que intersecan a A . Y dado una cadena formal \mathcal{X} -pequeña c , si descartamos todos los símlices de c que no están contenidos en A , obtenemos una cadena en A a la que denotamos por $r_A(c)$.

Lema 3.33. *Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' dos recubrimientos abiertos de X tales que \mathcal{X}' refina a \mathcal{X} . Supongamos que A es un subconjunto de X tal que \mathcal{X} y \mathcal{X}' coinciden en $\text{st}(A, \mathcal{X})$ (es decir, el subconjunto de \mathcal{X} formado por todos los elementos de \mathcal{X} que están contenidos en $\text{st}(A, \mathcal{X})$ coincide con el subconjunto de \mathcal{X}' formado por los elementos de \mathcal{X}' que están contenidos en $\text{st}(A, \mathcal{X})$).*

Sea $\alpha \in H_q^{\mathcal{X}'}(X)$. Dado un representante \mathcal{X} -pequeño c de $\pi_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}(\alpha)$, existe un representante \mathcal{X}' -pequeño c' de α tal que $r_A(c) = r_A(c')$.

Demostración. Sea c_0 un representante \mathcal{X}' -pequeño de α , es decir, $[c_0] = \alpha$. Como c_0 y c son q -ciclos homólogos a escala \mathcal{X} , existe una $(q+1)$ -cadena formal \mathcal{X} -pequeña d tal que $c_0 - c = \partial(d)$. Descomponiendo d como $d_0 + d_1$, donde $d_0 = r_{\text{st}(A, \mathcal{X})}(d)$, y definimos $c' := c + \partial(d_1)$. Deducimos de la definición de d_0 que d_1 está contenido en $X \setminus A$ y que $r_A(c) = r_A(c')$. Finalmente, nótese que $c_0 - c' = \partial(d_0)$, por lo que $[c_0] = [c']$ en $H_q^{\mathcal{X}'}(X)$. \square

Una consecuencia inmediata de la Subsección 3.6.4 es que el número de cuasi-componentes esenciales es finito si el 1-ésimo grupo de homología de Čech de X tiene dimensión finita. Tomamos esto último como hipótesis y denotamos a las cuasi-componentes esenciales por QC_1, \dots, QC_n . Sean O_1, \dots, O_n entornos clopens disjuntos dos a dos de QC_1, \dots, QC_n en $B \cap B^*$, $\mathcal{F} \in \text{Cov}(B \cap B^*)$ y las funciones características χ_j como en la demostración de la Proposición 3.32. Demostraremos que los elementos de $\check{H}_1(X; \mathbb{K})$ son caracterizados por los valores de las integrales de las clases de cohomología $\Delta^*([\chi_j])$ sobre ellos.

Proposición 3.34. *Para cualquier $\alpha \in \check{H}_1(X; \mathbb{K})$,*

$$\int_{\alpha} \Delta^*([\chi_j]) = 0 \text{ para cualquier } 1 \leq j \leq n-1 \text{ si y solo si } \alpha = 0.$$

Como consecuencia, la aplicación lineal $g : \check{H}_1(X; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$ dado por

$$g(\alpha) := \left(\int_{\alpha} \Delta^*([\chi_1]), \dots, \int_{\alpha} \Delta^*([\chi_{n-1}]) \right)$$

es inyectiva, y así, no existen más de $n-1$ clases del 1-ésimo grupo de homología de Čech de X que sean linealmente independientes, por lo que $\dim(\check{H}_1(X)) \leq n-1$.

El resto de la subsección está dedicado a la demostración de la Proposición 3.34, que a su vez termina la demostración del Teorema 3.28. Los argumentos siguientes requieren hipótesis adicionales en los recubrimientos abiertos considerados. Recordemos los recubrimientos abiertos considerados en la Subsección 3.6.1:

- \mathcal{W} es un recubrimiento abierto de X tal que $\text{Im}(\pi_{\mathcal{V}})$ es isomorfo a $\check{H}_1(X)$ para cualquier $\mathcal{V} \succ \mathcal{W}$.
- \mathcal{B} es un recubrimiento abierto dinámico de B que refina a $\mathcal{W}|_B$.
- Además, sea \mathcal{B}^* un recubrimiento abierto de B^* que refina a $\mathcal{W}|_{B^*}$ y que es dinámico para f^{-1} .

Denotamos por $\text{Cov}^*(B \cap B^*)$ a la subfamilia de los recubrimientos abiertos de $B \cap B^*$ que refinan a la restricción de \mathcal{B} , \mathcal{B}^* , y automáticamente también de \mathcal{W} , a $B \cap B^*$ y denotamos por $\text{Cov}^*(X)$ a la subfamilia asociada de recubrimientos abiertos de X , es decir, sus elementos son de la forma

$$\mathcal{U}_{\lambda, \mu} = \mathcal{U} \cup \{V_{\lambda}, V_{\mu}^*\}$$

con $\mathcal{U} \in \text{Cov}^*(B \cap B^*)$. Supongamos además que los entornos V_0 y V_0^* son tan pequeños que cualquier elemento de $\text{Cov}^*(X)$ refina a \mathcal{W} . Claramente, $\text{Cov}^*(B \cap B^*)$ es cofinal en la familia de todos los recubrimientos abiertos de $B \cap B^*$.

Por tanto, fijado un recubrimiento abierto $\mathcal{U} \in \text{Cov}^*(B \cap B^*)$ más fino que \mathcal{F} . Suponemos sin pérdida de generalidad (en vista de que el número de cuasi-componentes esenciales es finito y de

los comentarios de la Subsección 3.6.2) que en la partición de $B \cap B^*$ (dada en el Corolario 3.27) en subconjuntos \mathcal{U} -clopens

$$B \cap B^* = O_e \cup O_a \cup O_{a^*} \quad (3.4)$$

asociada de la definición de \mathcal{U} , el conjunto O_e es igual a la unión de las \mathcal{U} -componentes $C_j^{\mathcal{U}}$ que contienen a QC_j . Sea $\alpha \in \check{H}_1(X; \mathbb{K})$. Sean V_0 y V_0^* entornos de a y a^* definidos a partir de \mathcal{U} y O_e , y establecemos $K_0 = X \setminus V_0^*$ y $K_0^* = X \setminus V_0$ como de costumbre. Por el Lema 3.33, α tiene representantes $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeños $c_{\lambda, \mu}$ para cualquier λ y μ que coinciden cuando son restringidos a $K_0^* \cap K_0$. Más formalmente, existen 1-ciclos formales $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeños $c_{\lambda, \mu}$ tales que $[c_{\lambda, \mu}] = \pi_{\mathcal{U}_{\lambda, \mu}}(\alpha)$ y $r_{K_0^* \cap K_0}(c_{\lambda, \mu})$ es independiente de λ y μ (recordemos que $r_{K_0 \cap K_0^*}$ descarta los simplices que no están completamente contenidos en $K_0 \cap K_0^*$). Los ciclos $c_{\lambda, \mu}$ pueden ser descompuestos como $c_{\lambda, \mu} = c_{\lambda, \mu}^{K_0} + c_{\lambda, \mu}^{K_0^*}$, donde los ciclos son soportados en K_0 y K_0^* , respectivamente, de manera que $\partial(c_{\lambda, \mu}^{K_0})$ es independiente de λ y μ . Denotamos $d := \partial(c_{\lambda, \mu}^{K_0}) = -\partial(c_{\lambda, \mu}^{K_0^*})$. Se sigue que d es un representante $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeño de $\Delta_*([c_{\lambda, \mu}]) \in H_0^{\mathcal{U}_{\lambda, \mu}}(K_0 \cap K_0^*)$ para cualquier λ y μ .

Usando (3.4) para descomponer d como $d_e + d_a + d_{a^*}$. El siguiente paso es demostrar que d_a y d_{a^*} son bordes de 1-cadenas formales $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeñas para cualquier λ y μ .

Denotamos $c_{0,0}^{K_0}$ simplemente por c^K . Siguiendo la separación (3.2) de K_0 , la cadena c^K se divide como $c_a^K + c_{a^*}^K$. Tomar bordes preserva la descomposición, por lo que $d_e + d_a = \partial(c_a^K)$ y $d_{a^*} = \partial(c_{a^*}^K)$. Como $c_{a^*}^K$ es una cadena soportada en O_{a^*} y $O_{a^*} \cap V_0 = \emptyset$, concluimos que d_{a^*} es el borde de una cadena $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeña en $K_0 \cap K_0^*$. Usando un argumento similar para $c_{0,0}^{K_0^*}$ y (3.3), llegamos a la misma conclusión para d_a .

Procedemos a estudiar d_e . Se puede descomponer como $\sum_{j=1}^n d_j$, donde cada d_j está contenido en $C_j^{\mathcal{U}}$. Recordemos de la Subsección 3.6.3 que $\Delta^*([\chi_j])$ puede ser interpretado como una clase en $H_{\mathcal{U}_{\lambda, \mu}}^1(X; \mathbb{K})$ para cualquier λ y μ . Podemos calcular la integral de $\Delta^*([\chi_j])$ sobre α a escala $\mathcal{U}_{0,0}$:

$$\int_{\alpha} \Delta^*([\chi_j]) = \int_{[c_{0,0}]} \Delta^*([\chi_j]) = \int_{\Delta_*([c_{0,0}])} [\chi_j] = \int_{[d]} [\chi_j] = \chi_j(d_e) = \chi_{C_j^{\mathcal{U}}}(d_j) \quad (3.5)$$

Por el Lema 1.41, $\chi_{C_j^{\mathcal{U}}}(d_j) = 0$ si y solo si d_j es el borde de una 1-cadena formal \mathcal{U} -pequeña en $C_j^{\mathcal{U}} \subset B \cap B'$ o, equivalentemente, d_j es el borde de una 1-cadena formal \mathcal{U} -pequeña en $K_{\lambda_j}^* \cap K_{\mu_j}$ para λ_j y μ_j suficientemente grandes. Así, las integrales en (3.5) se anulan para todo $j = 1, \dots, n$ si y solo si existen λ y μ tales que d_e es el borde de una 1-cadena formal $\mathcal{U}_{\lambda, \mu}$ -pequeña en $K_{\lambda}^* \cap K_{\mu}$. La última condición puede ser expresada como que $[d_e]$ sea el elemento trivial de $H_0^{\mathcal{U}_{\lambda, \mu}}(K_{\lambda}^* \cap K_{\mu})$. Nótese que

$$\sum_{j=1}^n \chi_{O_j^{\mathcal{U}}}(d_j) = \left(\sum_{j=1}^n \chi_j \right) (d_e) = \int_{[d_e]} \sum_{j=1}^n [\chi_j] = \int_{[d_e]} [\chi_X] = 0$$

debido a que χ_X , la función característica de X , coincide con $\sum_{j=1}^n \chi_j$ en O_e y es la aplicación constante de valor 1 en X , por lo que define la clase trivial de la cohomología reducida $\check{H}^0(X; \mathbb{K})$ de Čech de X . Concluimos por la Observación 1.42 que si las integrales en (3.5) se anulan para $n-1$ valores de j , entonces se anulan para el restante j .

Como d_a y d_{a^*} son bordes, tenemos que d_e es un representante $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ -pequeño de $\Delta_*([c_{\lambda,\mu}])$ y concluimos que los siguientes argumentos son equivalentes:

- (1). La integral de $\Delta^*([\chi_j])$ sobre α se anula para $j = 1, \dots, n - 1$.
- (2). $[c_{\lambda,\mu}]$ pertenece al núcleo del homomorfismo conectante $\Delta_* : H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X) \rightarrow H_0^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_\lambda^* \cap K_\mu^*)$ para algún λ y μ .

Elaboremos un poco más la segunda condición equivalente, que tomaremos como hipótesis. Supongamos que λ y μ están fijados como los del argumento de (2). Por la construcción de $\text{Cov}^*(X)$, $\mathcal{U}_{\lambda,\mu}$ refina al recubrimiento \mathcal{W} dado en (\star) (ver la Subsección 3.6.1) y por el Lema 3.30, $H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_0) \oplus H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_0^*) \rightarrow H_1^{\mathcal{W}}(X)$ es el morfismo trivial. Sin embargo, esta última aplicación es igual a la composición de $i_* : H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_0) \oplus H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(K_0^*) \rightarrow H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X)$ con $\pi_{\mathcal{W},\mathcal{U}_{\lambda,\mu}} : H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X) \rightarrow H_1^{\mathcal{W}}(X)$. Como $\pi_{\mathcal{W},\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}$ restringe a un isomorfismo de $\text{Im}(\pi_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}})$ en $\text{Im}(\pi_{\mathcal{W}})$, concluimos que $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(\Delta_*)$ tiene intersección trivial con $\text{Im}(\pi_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}})$. Pero $[c_{\lambda,\mu}] \in \text{Ker}(\Delta_*) = \text{Im}(i_*)$ y $[c_{\lambda,\mu}] = \pi_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(\alpha)$ por lo que deducimos que $[c_{\lambda,\mu}] = 0$ en $H_1^{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(X)$.

En resumen, la condición (1) es equivalente a que $\pi_{\mathcal{U}_{\lambda,\mu}}(\alpha) = 0$. Esto se mantiene para cualquier $\mathcal{U}_{\lambda,\mu} \in \text{Cov}^*(X)$ tal que \mathcal{U} refina a \mathcal{F} . Por tanto, $\alpha = 0 \in \check{H}^1(X; \mathbb{K})$, y así, concluimos la demostración de la Proposición 3.34.

Capítulo 4

Dinámica y autovalores en dimensión cero

4.1. Introducción

En este capítulo obtendremos resultados que relacionan los autovalores y autovectores de la aplicación inducida de f tanto en homología como en cohomología de Čech en dimensión cero con ciertas propiedades dinámicas del sistema dinámico (X, f) , siendo todos estos resultados ya desarrollados en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2019)].

Nos centraremos en X espacio métrico compacto y totalmente desconexo. La razón es la siguiente: como los invariantes homológicos 0-dimensionales miden solo las propiedades de conexión, es de esperar que los resultados que obtengamos no involucren el comportamiento dinámico «en» las componentes conexas de nuestro espacio de fase, sino más bien «entre» estas. Y así, podemos colapsar cada componente conexa a un punto, obteniendo un espacio compacto totalmente desconexo, y consideramos la aplicación inducida en este espacio cociente. O bien, como estamos considerando X totalmente desconexo, tan solo nos interesa los invariantes homológicos de dimensión cero puesto que los de dimensiones mayores son triviales.

El caso de interés surge cuando X es infinito y tiene una estructura topológica muy complicada, lo cual es una situación común tanto en sistemas dinámicos discretos como continuos. La teoría de homología o cohomología que mejor se adapta al estudio de estos espacios no es la homología singular, sino más bien la homología de Čech o incluso la cohomología de Čech. En dimensión cero, estas tienen una descripción relativamente simple. Para cualquier espacio compacto X , su grupo de cohomología de Čech $\check{H}^0(X; \mathbb{C})$ puede ser identificado con el conjunto de aplicaciones localmente constantes $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$, y como los coeficientes son tomados en \mathbb{C} , $\check{H}^0(X; \mathbb{C})$ es de hecho un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , tal y como se vio en la Subsección 1.2.6 del Capítulo 1. Por otro lado, la homología de Čech es el espacio vectorial dual de la cohomología de Čech, es decir, $\check{H}_0(X; \mathbb{C}) = \text{Hom}(\check{H}^0(X; \mathbb{C}); \mathbb{C})$. Esto último es consecuencia del Teorema 2.14.

El resultado para la cohomología de Čech es muy sencillo de establecer.

Teorema 4.1 (Teorema para Cohomología). *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Y sea $f^* : \check{H}^0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathbb{C})$ la*

aplicación inducida de f . Entonces todo autovalor no nulo de f^* es una raíz de la unidad.

El escenario cambia radicalmente, sin embargo, cuando se considera la homología de Čech:

Teorema 4.2 (Teorema para Homología). *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Y sea $f_* : \check{H}_0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(X; \mathbb{C})$ la aplicación inducida de f . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I). *Existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ que no es un autovalor de f_* .*
- (II). *Ningún $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ es un autovalor de f_* .*
- (III). *Todo autovalor no nulo de f_* es una raíz de la unidad.*
- (IV). *(X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$.*

Una ϵ -**partición dinámica** \mathcal{U} es una partición finita de X en subconjuntos clopens de diámetro menor que ϵ tal que la imagen de cada elemento de \mathcal{U} está enteramente contenida en otro (no necesariamente distinto) elemento de \mathcal{U} .

Que un sistema dinámico admita particiones dinámicas de cualquier tamaño implica que su entropía topológica es nula. La primera noción de entropía topológica de un sistema dinámico fue dada en [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)] en función de los recubrimientos abiertos del espacio de fase: sea X un espacio compacto y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Para \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X , denotamos por $s(\mathcal{U})$ al mínimo número de elementos de \mathcal{U} que recubren a X , es decir, el cardinal del subrecubrimiento más pequeño de \mathcal{U} (el cual es finito por la compacidad de X). El siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})))}{n},$$

existe y es denotado por $h(f, \mathcal{U})$. Y además, satisface la siguiente relación: si \mathcal{V} refina a \mathcal{U} , entonces $h(f, \mathcal{V}) \geq h(f, \mathcal{U})$.

Definición 4.3. *La entropía topológica de f es $h(f) = \sup h(f, \mathcal{U})$, donde el supremo es considerado sobre todos los recubrimientos abiertos \mathcal{U} de X .*

Proposición 4.4. *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados y positivamente invariantes de f tal que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, entonces*

$$h(f) = \sup_{i \in I} h(f|_{X_i}).$$

Y además, se prueba en la Sección 3 de [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)] que cuando nuestro espacio compacto X es también métrico, se tiene que:

Proposición 4.5. *Para cualquier sucesión de recubrimientos abiertos finitos $\{\mathcal{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que \mathcal{U}_{m+1} refina a \mathcal{U}_m y que $\text{diam}(\mathcal{U}_m) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene que*

$$h(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} h(f, \mathcal{U}_m).$$

La existencia de una ϵ -partición dinámica \mathcal{U} implica que si x e y pertenecen al mismo elemento de \mathcal{U} , entonces sus sucesivas imágenes nunca se separan a una distancia mayor que ϵ . Así, si δ es un número de Lebesgue de \mathcal{U} (por ejemplo, si δ es menor que la distancia más pequeña entre cada par de elementos distintos de \mathcal{U}), se sigue que para todo par de puntos tales que $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ para todo $n \geq 1$. Es decir, f no es positivamente expansiva a no ser que X sea finito. Por otro lado, la existencia de ϵ -particiones dinámicas para cualquier $\epsilon > 0$ nos permite construir una sucesión de particiones dinámicas finitas $\{\mathcal{U}_m\}$ como la de la Proposición 4.5 (para \mathcal{U}_m una ϵ -partición dinámica, consideramos una ϵ' -partición dinámica \mathcal{U}_{m+1} con ϵ' menor que un número de Lebesgue de \mathcal{U}_{m+1}). Como \mathcal{U}_m es una partición dinámica finita, no es muy difícil comprobar que $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_m \vee f^{-1}(\mathcal{U}_m) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}_m)$ para cualquier n , por lo que

$$h(f, \mathcal{U}_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(\mathcal{U}_m \vee f^{-1}(\mathcal{U}_m) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}_m)))}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(\mathcal{U}_m))}{n} = 0,$$

y así, $h(f) = 0$. De todo lo anterior, tenemos además el siguiente corolario del Teorema 4.2:

Corolario 4.6. *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Si la entropía de f es no nula o f es positivamente expansiva y X es finito, entonces todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ es un autovalor de $f_* : \check{H}_0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(X; \mathbb{C})$.*

De hecho, la existencia de ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$ es una condición muy fuerte; tanto así que permite una descripción bastante detallada de la dinámica de (X, f) :

Teorema 4.7. *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I). (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas finitas por clopens para todo $\epsilon > 0$.
- (II). El ω -límite de todo punto de X es o bien una órbita periódica o bien un adding machine; además, estos son estables con respecto a los conjuntos clopens.

Recordemos que un conjunto invariante cerrado $Y \subset X$ es llamado **estable en el sentido de Lyapunov** si tiene una base de entornos positivamente invariantes. Introducimos la **estabilidad con respecto a los conjuntos clopens** como una condición incluso más fuerte: significa que Y tiene una base de entornos clopens positivamente invariantes. Esta condición surgirá naturalmente cuando probemos el Teorema para Homología.

La caracterización del Teorema 4.7 está estrechamente relacionada con el trabajo de Buescu, Kulczycki y Stewart [Buescu y Stewart(1995), Buescu, Kulczycki, y Stewart(2006)] como detallaremos en la Sección 4.5, Teorema 4.22.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 4.2 se presentan definiciones elementales y resultados sobre particiones. La Sección 4.3 contiene la demostración del Teorema para Cohomología, mientras que el Teorema para Homología será probado en la Sección 4.4, y el Teorema 4.7 será probado en la Sección 4.5.

4.2. Definiciones y resultados sobre particiones

Resumiremos aquí algunas definiciones y resultados simples sobre particiones que usaremos frecuentemente a lo largo de todo este capítulo. Como siempre, X denota un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Recordemos que tal espacio X tiene una base topológica de subconjuntos clopens.

Una partición de X es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos de X cuya unión es igual a X . Aunque nunca estableceremos esto explícitamente, *todas las particiones de este capítulo serán finitas y consistirán de conjuntos clopens*. Recordemos que una partición \mathcal{U} es llamada **dinámica** si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $U' \in \mathcal{U}$ tal que $f(U) \subset U'$ (es decir, \mathcal{U} refina a $f^{-1}(\mathcal{U})$). También, diremos que \mathcal{U} es una ϵ -**partición** si todos sus elementos tienen diámetro menor que ϵ .

Dadas dos particiones por clopens, \mathcal{U} y \mathcal{U}' , su refinamiento común $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ es también una partición por clopens. Las siguientes afirmaciones son sencillas de probar:

- Si \mathcal{U} y \mathcal{U}' son particiones dinámicas, entonces $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ también lo es.
- Si \mathcal{U} o bien \mathcal{U}' es una ϵ -partición, entonces $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ también lo es.
- Más generalmente, suponemos que \mathcal{U} y \mathcal{U}' son tales que para cualquier $p \in X$ el elemento en \mathcal{U} o bien \mathcal{U}' que contiene a p tiene diámetro menor que ϵ . Entonces $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ es una ϵ -partición.

Sea $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$ una partición de X . El **itinerario I de un punto $p \in X$ con respecto a \mathcal{U}** es la sucesión $I = a_0 a_1 \dots$ donde cada a_k es el subíndice i del conjunto U_i al que pertenece $f^k(p)$, es decir, si $f^k(p) \in U_i$ definimos $a_k := i$. Nótese que el itinerario de $f(p)$ es entonces $a_1 a_2 \dots$, el resultado de eliminar el primer símbolo de I y desplazar todo una posición a la izquierda, por tanto a_1 ahora ocupa la posición 0-ésima y así sucesivamente. Denotaremos a esta aplicación por σ .

Escribiremos frecuentemente «existe un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{U} » para decir que el conjunto \mathcal{I} de itinerarios con respecto a \mathcal{U} que son realizados por los puntos de X es finito. Si p realiza un itinerario I , entonces $f(p)$ realiza el itinerario $\sigma(I)$, y así, σ lleva \mathcal{I} en \mathcal{I} . Y las dos afirmaciones siguientes no son muy difíciles de probar:

- Si \mathcal{U} y \mathcal{U}' son dos particiones tales que existe solo un número finito de itinerarios con respecto a cada una de ellas, esto también ocurre para $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$.
- Si \mathcal{U} es una partición dinámica, entonces existe solo un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{U} (recordemos que todas las particiones que estamos considerando son finitas).

Suponemos que existe solo un número finito de itinerarios con respecto a una partición \mathcal{U} y sea \mathcal{I} el conjunto de aquellos itinerarios. Consideremos la aplicación desplazamiento $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ y la sucesión encajada de imágenes $\mathcal{I} \supset \sigma(\mathcal{I}) \supset \sigma^2(\mathcal{I}) \supset \dots$. Como \mathcal{I} es finito por suposición, existe k tal que $\sigma^k(\mathcal{I}) = \sigma^{k+1}(\mathcal{I}) = \dots$. Denotemos por \mathcal{I}_0 a este conjunto donde las imágenes de σ se estabilizan. Entonces la restricción $\sigma|_{\mathcal{I}_0} : \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{I}_0$ es sobreyectiva y, como \mathcal{I}_0 es finito, es una biyección. En particular, existe s tal que $(\sigma|_{\mathcal{I}_0})^s = \text{Id}$. Es decir, todo itinerario de \mathcal{I}_0 es periódico de (no necesariamente minimal) periodo s . Así, hemos probado lo siguiente:

- Si existe solo un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{U} , existen k y s tales que para cualquier $p \in X$ el itinerario de $f^k(p)$ es periódico de periodo s .

Nótese que el conjunto de itinerarios de puntos de $f(X)$ es precisamente $\sigma(\mathcal{I})$. Si f es sobreyectiva, entonces $f(X) = X$ y así $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. En ese caso, podemos tomar $k = 0$ en los argumentos anteriores y concluir que todo itinerario es periódico de periodo s . En particular, $f^s(U) \subset U$ para cualquier $U \in \mathcal{U}$ y, debido a que los U particionan X y f es sobreyectiva, tenemos que $f^s(U) = U$.

Esta condición de finitud juega un importante rol en la construcción de particiones dinámicas, como damos fe en el siguiente lema:

Lema 4.8. *Sea $\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_n\}$ una partición por clopens de X y suponemos que existe un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{V} . Sea \mathcal{I} el conjunto de aquellos itinerarios. Consideremos la colección $\mathcal{V}' = \{V(I) : I \in \mathcal{I}\}$, donde $V(I)$ contiene todos los puntos de X que siguen el itinerario I . Entonces \mathcal{V}' es una partición dinámica de X que refina a \mathcal{V} .*

Recíprocamente, si \mathcal{V} tiene un refinamiento \mathcal{U} que es una partición dinámica, entonces el conjunto de itinerarios con respecto a \mathcal{V} es finito.

Demostración. Claramente \mathcal{V}' es una partición de X por definición. Por hipótesis el conjunto \mathcal{I} es finito, y por tanto, \mathcal{V}' también lo es. Si el itinerario I viene dado por $a_0 a_1 \dots$, entonces $V(I)$ admite la descripción $V(I) = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(V_{a_k})$, el cual es cerrado ya que viene dado por la intersección de subconjuntos cerrados. Como \mathcal{V}' es una partición finita por cerrados, tenemos que todos sus elementos son también abiertos puesto que el complementario de cada uno de ellos es un cerrado por ser la unión finita de cerrados, y así, \mathcal{V}' es una partición de X por subconjuntos clopens. Notemos que $p \in V_i$ si y solo si su itinerario con respecto a \mathcal{V} comienza con un i , por lo que \mathcal{V}' refina a \mathcal{V} . Por otro lado, V_i es la unión de los $V(I)$ donde I abarca todos los itinerarios de \mathcal{I} que comienzan con el símbolo i . Finalmente, observemos que si p sigue un itinerario I , entonces $f(p)$ sigue el itinerario $\sigma(I)$. Y así, $f(V(I)) \subset V(\sigma(I))$, y por tanto, \mathcal{V}' es una partición dinámica.

La demostración del recíproco es similar. Como la partición \mathcal{U} es dinámica, tenemos que el número de itinerarios con respecto a \mathcal{U} es finito, por lo que el cardinal de \mathcal{U}' es finito, y así, como \mathcal{U}' es un refinamiento de \mathcal{V}' (esto último no es muy difícil de comprobar), tenemos que $|\mathcal{U}'| \geq |\mathcal{V}'|$, concluyendo así que el cardinal de \mathcal{V}' es finito. \square

A veces consideraremos particiones de la forma $\mathcal{U} = \{X \setminus U, U\}$, donde U es un subconjunto clopen de X , y hablaremos del **itinerario con respecto a U** en lugar de \mathcal{U} . Denotamos los elementos de \mathcal{U} como $U_0 := X \setminus U$ y $U_1 := U$, el itinerario de un punto $p \in X$ con respecto a U es solo una sucesión de ceros y unos tal que su k -ésima posición es un 1 si $f^k(p) \in U$ o bien un 0 si $f^k(p) \in X \setminus U$.

Concluimos esta sección con lemas de extensión de recubrimientos dinámicos cuyo interés quedará claro más adelante. Recordemos de la Sección 4.1 que un conjunto cerrado $Y \subset X$ se dice que es estable con respecto a los conjuntos clopens si posee una base entornos clopens positivamente invariantes.

Lema 4.9 (Extendiendo una ϵ -partición dinámica I). *Sea $Z \subset X$ estable con respecto a los conjuntos clopens y suponemos que $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in \Lambda}$ es una ϵ -partición dinámica de Z (con la topología inducida). Entonces, existe una ϵ -partición dinámica $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \Lambda}$ de un entorno clopen positivamente invariante de Z en X tal que $V_i \cap Z = W_i$.*

Demostración. Denotamos por r a la aplicación de Λ que satisface $f(W_i) \subset W_{r(i)}$. Como X es totalmente desconexo, para cada $i \in \Lambda$ podemos elegir un entorno clopen de W_i en X , digamos W'_i , de diámetro menor que ϵ y tal que $f(W'_i) \cap W'_j \neq \emptyset$ solo para $j = r(i)$.

Como $\bigcup_{i \in \Lambda} W'_i$ es un entorno de Z en X y Z es estable con respecto a los conjuntos clopens, existe un entorno clopen positivamente invariante P de Z contenido en $\bigcup_{i \in \Lambda} W'_i$. Definimos $V_i := W'_i \cap P$, dicho conjunto es clopen en X ya que W'_i y P lo son. Tenemos que $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ constituye una partición de P . Nótese también que la elección de W'_i garantiza que $\text{diam}(V_i) < \epsilon$. Solo queda comprobar que $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ es una partición dinámica. Consideremos cualquier $i \in \Lambda$. Por un lado, $V_i \subset P$ y por tanto $f(V_i) \subset f(P) \subset P = \bigcup_{j \in \Lambda} V_j$ ya que P es positivamente invariante. Y por otro lado, $V_i \subset W'_i$ y por tanto $f(V_i) \subset f(W'_i)$, por lo que $f(V_i) \cap V_j \subset f(W'_i) \cap W'_j$, el cual es vacío a no ser que $j = r(i)$. Como ya hemos visto que $f(V_i)$ está contenido en la unión de todos los V_j , se sigue que $f(V_i) \subset V_{r(i)}$. \square

Lema 4.10 (Extendiendo una ϵ -partición dinámica II). *Asumiendo que P es un subconjunto clopen positivamente invariante de X y $\mathcal{V} = \{V_i\}$ es una ϵ -partición dinámica de P . Entonces, podemos agregar subconjuntos clopens de X a \mathcal{V} para obtener una ϵ -partición dinámica de $f^{-1}(P)$.*

Demostración. Nótese que $f^{-1}(P) \setminus P$ es clopen en X y es naturalmente particionado por los subconjuntos $\{f^{-1}(V_i) \setminus P\}$, los cuales son también clopens en X . Como X es totalmente desconexo, cada uno de estos clopens pueden ser particionados en subconjuntos de diámetro menor que ϵ . Y agregándolos a \mathcal{V} , obtenemos una ϵ -partición dinámica de $f^{-1}(P)$. \square

4.3. Demostración del Teorema para Cohomología

En esta breve sección probaremos el Teorema para Cohomología, el cual establece que los autovalores no nulos de $f^* : \check{H}^0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathbb{C})$ son todos raíces de la unidad.

Recordemos que $\check{H}^0(X; \mathbb{C})$ puede ser identificado como el \mathbb{C} -espacio vectorial de todas las aplicaciones localmente constantes en X . Bajo esta identificación, la acción del homomorfismo inducido $f^* : \check{H}^0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathbb{C})$ es simplemente $\varphi \mapsto \varphi \circ f$.

Suponemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor no nulo de $f^* : \check{H}^0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathbb{C})$. Entonces existe una aplicación localmente constante $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ no nula tal que $f^*(\varphi) = \lambda \cdot \varphi$, es decir, $\varphi \circ f = \lambda \cdot \varphi$. Usando el hecho de que φ es localmente constante y que X es compacto, es sencillo ver que φ toma solo un número finito de valores c_0, c_1, \dots, c_n , donde al menos uno de ellos es distinto de cero ya que φ es no nulo, y la colección $\mathcal{U} := \{U_i := \varphi^{-1}(c_i)\}$ constituye una partición de X en subconjuntos clopens. Como $\varphi \circ f = \lambda \cdot \varphi$, para cualquier i tenemos que $\varphi(f(U_i)) = \lambda \cdot \varphi(U_i) = \lambda \cdot c_i$, por tanto φ es constante sobre $f(U_i)$ y, en consecuencia, existe j tal que $c_j = \lambda \cdot c_i$ y $f(U_i) \subset U_j$. En la terminología introducida anteriormente, \mathcal{U} es una partición dinámica de X . Recordemos de la Sección 4.2 que esto garantiza automáticamente que solo existen un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{U} , y en particular, existen k y s tales que el itinerario de $f^k(p)$ es periódico de periodo s para cualquier $p \in X$. Tomemos p tal que $\varphi(p) \neq 0$. Debido a lo anterior y a la definición de \mathcal{U} , tenemos que $\varphi(f^{k+s}(p)) = \varphi(f^k(p))$, por lo que $\lambda^{k+s} \cdot \varphi(p) = \lambda^k \cdot \varphi(p)$, y así, $\lambda^s = 1$.

4.4. Autovalores y ϵ -particiones. Demostración del Teorema para Homología

En esta sección probaremos el Teorema para Homología. Será conveniente probar este teorema en esta forma ligeramente diferente:

Teorema 4.11. *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Y sea $f_* : \check{H}_0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(X; \mathbb{C})$ la aplicación inducida de f . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I). *Existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ que no es un autovalor de f_* .*
- (II). *Ningún $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ es un autovalor de f_* .*
- (III). *Todo autovalor no nulo de f_* es una raíz de la unidad.*
- (IV). *(X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$.*
- (V). *El número de itinerarios diferentes con respecto a cualquier partición de X es finito.*
- (VI). *El número de itinerarios diferentes con respecto a cualquier clopen de X es finito.*

La parte del Teorema 4.11 que requiere la mayor parte del trabajo es la demostración $(I) \implies (IV)$. Así que nos centraremos en ella primero. Como el argumento es ligeramente intrincado, daremos un primer esbozo aquí. La principal dificultad técnica radica en el subconjunto $\text{Per}_r(f)$, el cual es definido como el subconjunto formado por los puntos que son periódicos por f de periodo a lo sumo r . Será sencillo producir la partición deseada «fuera» de este subconjunto y también «dentro» de este subconjunto, pero pegarlas requerida de algo de trabajo. Primero consideremos el caso en el cual f es sobreyectiva. Un argumento aritmético producirá un número natural $r(\lambda)$ que solo depende de λ y, para cualquier $r \geq r(\lambda)$, demostraremos que:

- (1). Restringiendo nuestra atención al sistema dinámico $(\text{Per}_r(f), f|_{\text{Per}_r(f)})$, dicho sistema posee una ϵ -partición dinámica;
- (2). esta puede ser extendida a una ϵ -partición dinámica de un entorno clopen positivamente invariante P de $\text{Per}_r(f)$;
- (3). siendo A el subconjunto de puntos de X cuya semi-órbita positiva eventualmente entra en P (y permanece allí ya que P es positivamente invariante), la partición en (2) puede ser extendida a una ϵ -partición dinámica de A ;
- (4). existe una partición dinámica de $X \setminus P$ que es una « ϵ -partición módulo P »: todo elemento de la partición tiene diámetro menor que ϵ o, si no, está contenido en P ;
- (5). tomando el refinamiento común de las particiones de (3) y (4) obtenemos una ϵ -partición dinámica de todo el conjunto X .

La demostración cuando f es no sobreyectiva será construida a partir del caso sobreyectivo. Consideraremos el subconjunto invariante más pequeño en el cual f es sobreyectiva, que es $Y = \bigcap_{n \geq 0} f^n(X)$, y probaremos que:

- (6). La hipótesis del teorema se mantiene para la restricción $f|_Y : Y \rightarrow Y$, y por tanto, existe una ϵ -partición dinámica de Y ya que $f|_Y$ es sobreyectiva;
- (7). la partición de (6) puede ser extendida a un entorno clopen positivamente invariante de Y en X ;
- (8). la partición de (7) puede ser extendida a una ϵ -partición dinámica de todo X .

Como el lector puede ver, extender particiones dinámicas es un paso clave en las demostraciones. Aquí es donde el Lema 4.9 y 4.10 serán útiles. El primer lema extiende ϵ -particiones dinámicas de un subconjunto cerrado (el cual necesita satisfacer algunas hipótesis adicionales) a un entorno clopen positivamente invariante; esto es usado en el paso de (1) a (2) y en el paso de (6) a (7). El segundo lema extiende ϵ -particiones dinámicas de subconjunto clopen positivamente invariante a su preimagen por f ; usamos esto en el paso de (2) a (3) y en el paso de (7) a (8).

4.4.1. Demostración de $(I) \implies (IV)$ para f sobreyectiva

Primero, necesitamos un lema técnico. Dicho lema no involucra dinámica o topología. Para cualquier $r = 0, 1, 2, \dots$ denotamos por S_r al conjunto de las sucesiones (a_k) de ceros y unos tal que cuando un término de la sucesión es uno, los siguientes r términos (al menos) son ceros. Es decir, si $a_k = 1$, entonces $a_{k+1} = \dots = a_{k+r} = 0$.

Lema 4.12. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con módulo $|\lambda| > 1$. Para r suficientemente grande, si dos sucesiones (a_k) y (b_k) de S_r satisfacen que*

$$\sum_{k \geq 0} a_k \lambda^{-k} = \sum_{k \geq 0} b_k \lambda^{-k},$$

entonces dichas sucesiones deben de ser iguales.

Demostración. Supongamos que las sucesiones (a_k) y (b_k) difieren. Cancelando el bloque inicial (potencialmente vacío) de términos donde ambas sucesiones coinciden, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a_0 \neq b_0$, y así, se tiene la diferencia $a_0 - b_0 = \pm 1$. Tomando módulos y reordenando términos, tenemos que

$$1 \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|a_k - b_k|}{|\lambda|^k} = \sum_{k \geq 1} \frac{c_k}{|\lambda|^k}, \quad (4.1)$$

donde hemos definido $c_k := |a_k - b_k|$. Nótese que (c_k) es una sucesión de ceros y unos con $c_0 = 1$. La condición de que (a_k) y (b_k) pertenezcan a S_r implica que la siguiente propiedad se cumple: cualquier bloque B de r términos sucesivos de (c_k) contiene, a lo sumo, dos entradas distintas de cero (las cuales son, por tanto, unos).

Ahora pensemos en la sucesión (c_k) agrupada en bloques de r términos tal que así:

$$c_0 c_1 \dots c_{r-1}, c_r c_{r+1} \dots c_{2r-1}, c_{2r} c_{2r+1} \dots c_{3r-1}, \dots$$

Como acabamos de mencionar, cada uno de estos bloques contiene a lo sumo dos unos, siendo los términos restantes ceros. Además, el primer bloque comienza con $c_0 = 1$ por lo que entre $c_1 \dots c_{r-1}$ existe a lo sumo un término igual a 1. La contribución de $c_1 \dots c_{r-1}$ a la serie de la ecuación (4.1) está por tanto acotada superiormente por $1/|\lambda|$. La contribución de los bloques restantes, cada uno de los cuales contiene a lo sumo dos unos, alcanza su máximo valor cuando los dos unos aparecen en las primeras dos posiciones del bloque, y así, sus contribuciones están acotadas superiormente por $1/|\lambda|^r + 1/|\lambda|^{r+1}$, por $1/|\lambda|^{2r} + 1/|\lambda|^{2r+1}$, y así sucesivamente. Poniendo todo esto junto, la serie de la ecuación (4.1) puede ser acotada superiormente por

$$\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) + \left(\frac{1}{|\lambda|^r} + \frac{1}{|\lambda|^{r+1}}\right) + \left(\frac{1}{|\lambda|^{2r}} + \frac{1}{|\lambda|^{2r+1}}\right) + \dots = \left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^r}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|^r}}.$$

Para llegar a una contradicción, necesitamos elegir r de tal manera que lo que está al lado derecho de la anterior igualdad sea menor que 1, debido a que entonces la ecuación (4.1) carece de sentido. Imponiendo esta condición y reordenando los términos, r debe ser elegido de modo que satisfaga

$$\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^r} + \frac{1}{|\lambda|^r} < 1,$$

lo cual se satisface para un r suficientemente grande ya que $|\lambda| > 1$. □

Notación: de ahora en adelante escribiremos $r(\lambda)$ para denotar cualquier número suficientemente grande tal que el Lema 4.12 sea satisfecho.

Para simplificar la escritura, para los resultados de esta subsección, la notación y las asunciones son como en el Teorema 4.11 junto con la hipótesis de que f es sobreyectiva.

Proposición 4.13. *Sea $r \geq r(\lambda)$, y sea V un subconjunto clopen disjunto de $f(V), f^2(V), \dots, f^r(V)$. Entonces solo hay un número finito de itinerarios con respecto a V .*

Demostración. Como λ es un autovalor de f_* , la Proposición 2.16 nos garantiza que $f^* - \lambda \cdot \text{Id}$ es sobreyectiva, donde f^* es el homomorfismo inducido por f en $\check{H}^0(X)$. En particular, existe una aplicación localmente constante $\psi \in \check{H}^0(X)$ tal que $(f^* - \lambda \cdot \text{Id})(\psi) = \chi_V$, donde χ_V es la función característica de V . Desmenuzando la notación, esto significa que $\psi \circ f - \lambda \cdot \psi = \chi_V$.

Por la sobreyectividad de f , para cualquier punto $p \in X$ existe una órbita completa $\{p_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ atravesando p (esto significa que $p_0 = p$ y $f(p_n) = p_{n+1}$ para todo n). La ecuación anterior produce dos posibles expansiones para $\psi(p)$: una en términos de la semi-órbita negativa (primera ecuación) y otra en términos de la semi-órbita positiva (segunda ecuación):

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \chi_V(p_{-1}) + \lambda \cdot \psi(p_{-1}) = \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \cdot \chi_V(p_{-(k+1)}) + \lambda^n \cdot \psi(p_{-n}), \\ \psi(p) &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \chi_V(p_0) + \frac{1}{\lambda} \cdot \psi(p_1) = \dots = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot \chi_V(p_k) + \frac{1}{\lambda^n} \cdot \psi(p_n). \end{aligned}$$

Ahora, debido a que ψ es localmente constante y que X es compacto, ψ toma solo un número finito de valores, y en particular, están acotados. Así, podemos tomar $n \rightarrow +\infty$ en las ecuaciones anteriores y concluir que $\psi(p)$ puede ser expresado como

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \cdot \chi_V(p_{-k}) \quad \text{o bien} \quad - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k} \cdot \chi_V(p_k) \quad (4.2)$$

dependiendo de si $|\lambda| < 1$ o bien $|\lambda| > 1$, respectivamente. Se sigue que la suma de potencias (de hecho, solo uno de estos sumatorios está bien definido dependiendo de λ) solo toma un número finito de valores a medida que evaluamos todas las posibles semi-órbitas de f .

La condición de V en el enunciado asegura que la sucesión de coeficientes de ambas series consideradas en (4.2) pertenecen a S_r . Así, el Lema 4.12 puede ser aplicado para concluir que:

(a) Si $|\lambda| > 1$, entonces existe solo un número finito de sucesiones diferentes de la forma

$$(\chi_V(p_0), \chi_V(p_1), \dots)$$

cuando $\{p_n\}_{n \geq 0}$ recorre todas las semi-órbitas positivas en X .

(b) Si $|\lambda| < 1$, entonces existe solo un número finito de sucesiones diferentes de la forma

$$(\chi_V(p_{-1}), \chi_V(p_{-2}), \dots)$$

cuando $\{p_n\}_{n \leq -1}$ recorre todas las semi-órbitas negativas en X .

En el primer caso $|\lambda| > 1$, directamente obtenemos la existencia de un número finito de diferentes itinerarios con respecto a V . Mientras que en el segundo caso $|\lambda| < 1$, notemos que para una semi-órbita negativa $\{p_n\}_{n \leq -1}$ dada, la sucesión $\{p_n\}_{n \leq -k}$ es también una semi-órbita negativa (para el punto p_{-k+1}) para cualquier $k \geq 1$. Por (b), existen dos de estas semi-órbitas negativas para las cuales las sucesiones $(\chi_V(p_n))$ coinciden. De este modo, si denotamos por q al número (finito) de valores obtenidos por ψ , existen enteros positivos $1 \leq s < s' \leq q + 1$ tales que

$$(\chi_V(p_{-s}), \chi_V(p_{-(s+1)}), \dots) = (\chi_V(p_{-s'}), \chi_V(p_{-(s'+1)}), \dots).$$

En consecuencia, ambas sucesiones y también $(\chi_V(p_{-1}), \chi_V(p_{-2}), \dots)$ son periódicas de periodo $s' - s$ y, en particular, periódicas de periodo a lo sumo q . El mismo argumento también es válido para las semi-órbitas positivas. Y entonces, todos los itinerarios de puntos p con respecto a V son periódicos de periodo a lo sumo q , y por tanto, solo existe un número finito de ellos. \square

En vista del lema anterior, el conjunto $\text{Per}_r(f)$ que consiste de todos los puntos periódicos de X cuyo periodo es a lo sumo r juega un importante rol: cualquier $p \notin \text{Per}_r(f)$ tiene un entorno en el cual podemos aplicar la Proposición 4.13.

Proposición 4.14. *Sea $r \geq r(\lambda)$ y sea O un entorno clopen de $\text{Per}_r(f)$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición dinámica \mathcal{U} de X cuyos elementos de diámetro mayor que ϵ están contenidos en O . Además:*

- 1). O es una unión de elementos de \mathcal{U} ;
- 2). existe un elemento U_* de \mathcal{U} que es positivamente invariante y satisface que $\text{Per}_r(f) \subset U_* \subset O$.

Así, aunque \mathcal{U} no sea una ϵ -partición dinámica ya que podría tener elementos de diámetro mayor que ϵ , dichos elementos están controlados en el sentido de que están contenidos en O .

Demostración. Como $X \setminus O$ es disjunto de $\text{Per}_r(f)$, cada punto $p \notin O$ satisface la condición de que p es disjunto de $f(p), \dots, f^r(p)$ (nótese sin embargo que, si f es no inyectiva, estos últimos términos no son necesariamente todos diferentes). En particular, p tiene un entorno V_p tal que V_p es disjunto de $f(V_p), \dots, f^r(V_p)$. Podemos también asumir que V_p es disjunto de O (ya que O es cerrado), teniendo diámetro más pequeño que ϵ y siendo también un subconjunto clopen, ya que X es totalmente desconexo. Haciendo esto para todo $p \notin O$, producimos un recubrimiento de $X \setminus O$, del cual podemos extraer un subrecubrimiento finito (ya que X es compacto) que denotaremos por V_1, \dots, V_m . Consideramos, para cada uno de ellos, la partición por clopens $\mathcal{V}_i := \{X \setminus V_i, V_i\}$ de X . Por la Proposición 4.13, el conjunto de itinerarios con respecto de cada \mathcal{V}_i es finito. Sea $\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 \vee \dots \vee \mathcal{V}_m$. Esta es una partición por clopens de X , y existe solo un número finito de itinerarios con respecto a ella debido a las observaciones que dimos antes del Lema 4.8. Nótese que O pertenece a \mathcal{V} ya que es la intersección $(X \setminus V_1) \cap \dots \cap (X \setminus V_m) = X \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_m)$. Cualquier otro elemento V de \mathcal{V} es una intersección de elementos de los distintos \mathcal{V}_i , donde al menos uno de estos elementos es V_i (en lugar de $X \setminus V_i$), lo que implica que $V \subset V_i$, y por tanto, V tiene diámetro menor que ϵ .

Finalmente, sea \mathcal{V}' una partición construida a partir de \mathcal{V} como en el Lema 4.8, denotando por $V(I)$ al conjunto de puntos que siguen el itinerario I con respecto a \mathcal{V} . Esta es una partición dinámica por clopens que refina a \mathcal{V} . En particular, si $V' \in \mathcal{V}'$ tiene diámetro mayor que ϵ , entonces el elemento $V \in \mathcal{V}$ que contiene a V' también tiene diámetro mayor que ϵ , y así, $V = O$.

Comprobemos que 1) y 2) se cumplen. El hecho de que O sea una unión de elementos de \mathcal{V}' es una consecuencia directa del recíproco del Lema 4.8. Por otro lado, observemos lo siguiente. Por suposición $\text{Per}_r(f) \subset O$ y, como $\text{Per}_r(f)$ es positivamente invariante por f , la semi-órbita positiva de cada punto de $\text{Per}_r(f)$ permanece en O . Así, el itinerario de todos los puntos de $\text{Per}_r(f)$ con respecto a \mathcal{V} es el mismo, es decir, la sucesión constante $I_0 := ** \dots$ donde $*$ es la etiqueta de O en la partición \mathcal{V} . En consecuencia, $\text{Per}_r(f)$ está contenido en el elemento $V(I_0)$ de \mathcal{V}' , el cual está a su vez contenido en O . Además, $f(V(I_0)) \subset V(\sigma(I_0)) = V(I_0)$, y por tanto, $V(I_0)$ es positivamente invariante. Renombrando $U_* := V(I_0)$ y $\mathcal{U} := \mathcal{V}'$ completamos la demostración. \square

Como O era arbitrario en la proposición anterior, y U_* es un entorno clopen de $\text{Per}_r(f)$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.15. *$\text{Per}_r(f)$ es estable con respecto a los subconjuntos clopens.*

(Recordemos que esta terminología fue introducida justo antes del Lema 4.9 y significa que $\text{Per}_r(f)$ tiene una base de entornos clopens positivamente invariantes).

Proposición 4.16. *Sea P un entorno clopen positivamente invariante de $\text{Per}_r(f)$. Sea A el conjunto de puntos $p \in X$ cuya semi-órbita positiva eventualmente entra en P (y permanece allí ya que P es positivamente invariante). Entonces existe n_0 tal que $f^n(p) \in P$ para todo $n \geq n_0$ y todo $p \in A$.*

En pocas palabras: todos los puntos de X que eventualmente entran en P lo hacen en un número finito de iteradas que es independiente de cada punto.

Demostración. Aplicando la Proposición 4.14 a $O := P$ para obtener la correspondiente partición dinámica \mathcal{U} . Entonces P es unión de elementos de \mathcal{U} , y podemos asumir sin pérdida de generalidad que estos corresponden a las etiquetas $0, 1, \dots, s$. Así, los puntos de A son caracterizados como aquellos cuyo itinerario con respecto a \mathcal{U} contiene al menos una aparición de los símbolos $0, 1, \dots, s$. Para cada $p \in A$, sea $k(p)$ la primera posición en su itinerario donde un símbolo entre $0, 1, \dots, s$ aparece o, equivalentemente, sea $k(p)$ la primera iterada de p tal que $f^{k(p)}(p) \in P$. Como solo existe un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{U} ya que \mathcal{U} es una partición dinámica finita, el conjunto de todos los $k(p)$, con p recorriendo todo A , es finito, y denotamos por n_0 al máximo de ellos. Entonces $f^n(p) \in P$ si $n \geq n_0$ para todo $p \in A$. \square

Proposición 4.17. *Para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entorno clopen positivamente invariante P de $\text{Per}_r(f)$ que tiene una ϵ -partición dinámica.*

Demostración. El conjunto $\text{Per}_r(f)$ es invariante, por lo que podemos considerar la restricción $(\text{Per}_r(f), f|_{\text{Per}_r(f)})$. Sea \mathcal{W}_0 una partición arbitraria de $\text{Per}_r(f)$ por subconjuntos clopens (con la topología inducida) de diámetro menor que ϵ . Dicha partición existe debido a que $\text{Per}_r(f)$ es cerrado en X y por tanto compacto y totalmente desconexo. Como el periodo de cualquier punto de $\text{Per}_r(f)$ está acotado por r , los itinerarios de puntos con respecto a \mathcal{W}_0 son periódicos de periodo a lo sumo r . Esto realmente implica que existe solo un número finito de itinerarios con respecto a \mathcal{W}_0 y por el Lema 4.8 (aplicado a la restricción $(\text{Per}_r(f), f|_{\text{Per}_r(f)})$) existe una partición dinámica \mathcal{W} de $\text{Per}_r(f)$ que refina a \mathcal{W}_0 . En particular, esta es una ϵ -partición. El Corolario 4.15 nos permite aplicar el Lema 4.9 a $\text{Per}_r(f)$ y \mathcal{W} para obtener una ϵ -partición dinámica de un entorno clopen positivamente invariante P de $\text{Per}_r(f)$. \square

Ahora estamos listos para probar el Teorema 4.11 en el caso sobreyectivo. Elegimos cualquier $r \geq r(\lambda)$. Por la Proposición 4.17, el conjunto $\text{Per}_r(f)$ tiene un entorno clopen positivamente invariante P que tiene una ϵ -partición dinámica \mathcal{V} . Consideremos el conjunto A de puntos cuya semi-órbita positiva eventualmente entra en P . De acuerdo con la Proposición 4.16 existe n_0 tal que $A = f^{-n_0}(P)$. Aplicando el Lema 4.10 consecutivamente a P , entonces a $f^{-1}(P)$ y así hasta a $f^{-n_0+1}(P)$, producimos una ϵ -partición dinámica de A . Nótese que $X \setminus A$ es subconjunto clopen positivamente invariante, de modo que si le añadimos a la partición ya obtenida de A obtenemos una partición dinámica \mathcal{U} de todo X tal que cualquier elemento de \mathcal{U} distinto de $X \setminus A$ tiene diámetro menor que ϵ .

Ya casi hemos terminado. Por la Proposición 4.14 existe una partición dinámica \mathcal{U}' de X tal que todo elemento de \mathcal{U}' teniendo diámetro mayor que ϵ está contenido en P . Entonces el refinamiento común $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ es una partición dinámica de X , y es de hecho una ϵ -partición. La razón es que para cualquier $p \in X$, el elemento de \mathcal{U} o bien el elemento de \mathcal{U}' que lo contiene tiene diámetro menor que ϵ por construcción.

4.4.2. Demostración de (I) \implies (IV) para un f arbitrario

Abordemos el caso general. Como f no es sobreyectiva, no podemos aplicar la Proposición 4.13 y los siguientes resultados directamente a f . La idea es restringir nuestras consideraciones al subconjunto invariante más grande en el cual f es sobreyectiva, $Y := \bigcap_{n \geq 0} f^n(X)$. Basándonos en el caso anterior, seremos capaces de construir ϵ -particiones dinámicas de Y las cuales extenderemos a ϵ -particiones dinámicas de todo el espacio X .

En concreto, probaremos los siguientes dos lemas:

Lema 4.18. *Denotemos por $f|_Y : Y \rightarrow Y$ a la aplicación f con dominio e imagen restringidas a Y . Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de $(f|_Y)_* : \check{H}_0(Y; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(Y; \mathbb{C})$, entonces λ también es un autovalor de $f_* : \check{H}_0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(X; \mathbb{C})$.*

Lema 4.19. *Sea X un espacio compacto totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces Y es estable con respecto de los subconjuntos clopens.*

Veremos como el caso general del Teorema 4.11 se sigue de estos lemas. Como una consecuencia del Lema 4.18, la hipótesis del Teorema 4.11 implica que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ que no es un autovalor de $(f|_Y)_* : \check{H}_0(Y) \rightarrow \check{H}_0(Y)$. Como Y es compacto y totalmente desconexo y $f|_Y : Y \rightarrow Y$ es sobreyectiva, podemos aplicar los resultados de la subsección anterior para concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -partición dinámica \mathcal{W} de Y . Como Y es estable con respecto a los subconjuntos clopens debido al Lema 4.19, podemos aplicar el Lema 4.9 a \mathcal{W} y obtener un ϵ -partición dinámica de un entorno clopen P de Y en X . La compacidad de X asegura que P contiene a $f^m(X)$ para algún entero m , y por tanto, $f^{-m}(P) = X$. De este modo, si aplicamos m veces el Lema 4.10 consecutivamente a $P, f^{-1}(P), \dots, f^{-m+1}(P)$, obtenemos una ϵ -partición de todo X , finalizando así la demostración del Teorema 4.11.

Por último, demostremos los dos lemas auxiliares:

Demostración del Lema 4.18. Sea $i : Y \hookrightarrow X$ la aplicación inclusión. Consideremos un autovector $u \in \check{H}_0(Y; \mathbb{C})$ asociado a λ , y denotemos $v := i_*(u) \in \check{H}_0(X; \mathbb{C})$. Como $i \circ f|_Y = f \circ i$, es sencillo comprobar que v satisface la condición $f_*(v) = \lambda \cdot v$, por lo que para probar el lema solo nos queda ver que v es no nulo.

Las inclusiones $X \supset f(X) \supset f^2(X) \supset \dots$ inducen una sucesión directa

$$\check{H}^0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(f(X); \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(f^2(X); \mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

de espacios vectoriales. Como los elementos de \check{H}^0 son aplicaciones localmente constantes, estas aplicaciones inducidas por las inclusiones vienen dadas por las restricciones:

$$\varphi \mapsto \varphi|_{f(X)} \mapsto \varphi|_{f^2(X)} \mapsto \dots$$

Por otro lado, la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech (ver la Subsección 1.1.4) nos dice que $\check{H}^0(Y) = \varprojlim \check{H}^0(f^n(X))$. Entonces, observemos que

$$\begin{aligned} \check{H}_0(Y) &= \text{Hom}(\check{H}^0(Y); \mathbb{C}) = \text{Hom}(\varprojlim \check{H}^0(f^n(X)); \mathbb{C}) \\ &= \varprojlim \text{Hom}(\check{H}^0(f^n(X)); \mathbb{C}) = \varprojlim \check{H}_0(f^n(X)), \end{aligned}$$

donde la primera y cuarta igualdad se siguen del Teorema 2.14 (1), mientras que la tercera igualdad se sigue de la Proposición A.11 del Apéndice A. Como $u \neq 0$ y $\check{H}_0(Y) = \varprojlim \check{H}_0(f^n(X))$, debe existir algún n tal que la aplicación inducida en homología de Čech de la inclusión $j : Y \hookrightarrow f^n(X)$ lleve u a un vector no nulo.

Consideremos un punto $p \in Y$. Evaluamos f^n en dicho punto, y vemos el punto resultante como un elemento de $f^n(X)$. Esto se puede escribir como la composición de dos aplicaciones en dos maneras diferentes:

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f^n} f^n(X)$$

y

$$Y \xrightarrow{(f|_Y)^n} Y \xrightarrow{j} f^n(X)$$

(se debe prestar atención a los espacios de salida y de llegada de cada aplicación). En particular, $(f^n)_* \circ i_* = j_* \circ (f|_Y)_*^n$, y evaluando en u , tenemos que

$$(f^n)_*(i_*(u)) = j_*((f|_Y)_*^n(u)) = j_*(\lambda^n \cdot u) = \lambda^n \cdot j_*(u).$$

El lado derecho de esta expresión es nulo ya que $j_*(u) \neq 0$ (como argumentamos al final del párrafo anterior) y $\lambda \neq 0$ por hipótesis, y así, $i_*(u) = v$ es también no nulo. \square

Demostración del Lema 4.19. Sea O un entorno clopen de Y y tomemos n_0 suficientemente grande tal que $f^{n_0}(X) \subset O$ (dicho n_0 existe gracias a la compacidad de X). Ahora consideremos el conjunto O' de puntos cuyas primeras n_0 iteradas (incluyendo la 0-ésima) pertenecen a O , es decir,

$$O' := O \cap f^{-1}(O) \cap \dots \cap f^{-(n_0-1)}(O).$$

Este es un subconjunto clopen ya que es la intersección finita de subconjuntos clopens. Claramente $Y \subset O' \subset O$, por lo que solo necesitamos comprobar que O' es positivamente invariante. Tomemos $p \in O'$. Como sus primeras n_0 iteradas pertenecen a O , las primeras $n_0 - 1$ iteradas de $f(p)$ también pertenecen a O . La n_0 -ésima iterada de $f(p)$ satisface que $f^{n_0-1}(f(p)) = f^{n_0}(p) \in f^{n_0}(X) \subset O$ por la elección de n_0 , y entonces también pertenece a O , y así, $f(p)$ pertenece a O' . \square

4.4.3. Demostración de $(IV) \implies (V) \implies (VI) \implies (III) \implies (II) \implies (I)$

Primero demostraremos que $(IV) \implies (V)$. Tomemos una partición finita \mathcal{U} por clopens de X , y sea δ un número de Lebesgue de \mathcal{U} . Por hipótesis, existe una δ' -partición dinámica \mathcal{V} de X para algún $\delta' < \delta$ y esto implica, en particular, que \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} . Por el recíproco del Lema 4.8, el conjunto de itinerarios con respecto a \mathcal{U} es finito, y así obtenemos (V). La implicación $(V) \implies (VI)$ es trivial.

Probemos ahora que $(VI) \implies (III)$. Supongamos que λ es un autovalor de f_* y sea $0 \neq T \in \check{H}_0(X)$ un autovector de λ , por lo que $f_*(T) = \lambda \cdot T$. Como $\check{H}_0(X)$ es el dual de $\check{H}^0(X)$ (esto último es consecuencia del Teorema 2.14, (1)), podemos ver a T como una forma lineal $T : \check{H}^0(X) \rightarrow \mathbb{C}$. Recordemos que $\{\chi_U : U \text{ clopen de } X\}$ es un sistema generador de $\check{H}^0(X)$ (por la Proposición 1.61), y como $T \neq 0$, existe un clopen U tal que $T(\chi_U) \neq 0$. Como por hipótesis existe un número finito de itinerarios con respecto a U , de los resultados de la Sección 4.2 sabemos que existen enteros positivos

k y s tales que para todo $p \in X$ el itinerario de $f^k(p)$ es periódico de periodo s . Consideremos los conjuntos $f^{-k}(U)$ y $f^{-(k+s)}(U)$. El primero puede ser alternativamente descrito como el conjunto de puntos $p \in X$ tal que el itinerario de $f^k(p)$ con respecto a U comienza con un uno; mientras que el segundo puede ser visto como el conjunto de puntos tales que el itinerario de $f^{k+s}(p)$ comienza con un uno. Pero, debido a la periodicidad de periodo s del itinerario de $f^k(p)$, ambas condiciones son equivalentes, y así, $f^{-k}(U) = f^{-(k+s)}(U)$. Entonces

$$\begin{aligned}\lambda^k \cdot T(\chi_U) &= (f_*)^k(T(\chi_U)) = T((f^*)^k(\chi_U)) = T(\chi_{f^{-k}(U)}), \\ \lambda^{k+s} \cdot T(\chi_U) &= (f_*)^{k+s}(T(\chi_U)) = T((f^*)^{k+s}(\chi_U)) = T(\chi_{f^{-(k+s)}(U)}),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad de cada ecuación se sigue de la Proposición 2.16 (que nos dice que f_* es el dual de f^*). De lo anterior se sigue que $\lambda^k = \lambda^{k+s}$, por lo que o bien $\lambda = 0$ o bien $\lambda^s = 1$. Las implicaciones (III) \implies (II) y (II) \implies (I) son triviales.

Hasta aquí hemos probado que todas las afirmaciones son equivalentes. Veremos a continuación otra manera alternativa de probar (IV) \implies (III). Por hipótesis (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$, por lo que es posible construir una sucesión de particiones dinámicas de X cuyo diámetro tiende a 0 tal que cada partición refina a la anterior:

$$\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{U}_1 \prec \mathcal{U}_2 \prec \dots$$

simplemente exigiendo que el diámetro de cada partición dinámica sea menor que el número de Lebesgue de la partición anterior. La subfamilia $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots\}$ es cofinal en la familia de todos los recubrimientos abiertos de X , $\text{Cov}(X)$.

Como cada partición \mathcal{U}_{n+1} refina a la anterior \mathcal{U}_n , consideremos las aplicaciones $j_n : \mathcal{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{U}_n$ definidas por $j_n(U) = U'$ si $U \subset U'$ (dicha aplicación está bien definida ya que cada clopen de \mathcal{U}_{n+1} está contenido en un único clopen de la partición \mathcal{U}_n).

Definimos la homología de Čech de X a través de los complejos de Čech asociado a los recubrimientos abiertos de X . Recordemos que para $\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)$, los vértices del complejo $N(\mathcal{U})$ son los elementos de \mathcal{U} y una colección finita de vértices genera un símplex si la correspondiente colección de miembros de \mathcal{U} tienen intersección no vacía. Tenemos que

$$\check{H}_q(X; \mathbb{C}) = \varprojlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)} \{H_q(N(\mathcal{U}); \mathbb{C})\},$$

pero como $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots\}$ es cofinal en $\text{Cov}(X)$, $\check{H}_q(X; \mathbb{C})$ es isomorfo a

$$\varprojlim \left\{ H_q(N(\mathcal{U}_0); \mathbb{C}) \xleftarrow{j_0^*} H_q(N(\mathcal{U}_1); \mathbb{C}) \xleftarrow{j_1^*} H_q(N(\mathcal{U}_2); \mathbb{C}) \xleftarrow{j_2^*} \dots \right\}.$$

Puesto que la intersección de todo par de elementos de \mathcal{U}_n es vacía, tenemos que $N(\mathcal{U}_n)$ solo está formado por vértices, y por tanto, $H_0(N(\mathcal{U}_n); \mathbb{C})$ viene dado por el \mathbb{C} -espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales de los vértices de $N(\mathcal{U}_n)$. Por otra parte, definimos la aplicación lineal $f_{*n} : H_0(N(\mathcal{U}_n); \mathbb{C}) \rightarrow H_0(N(\mathcal{U}_n); \mathbb{C})$ como $f_{*n}(U) = U'$ si $f(U) \subset U'$ (dicha aplicación está bien definida ya que \mathcal{U}_n es una partición dinámica). De este modo, cada cuadrado del siguiente

diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_0(N(\mathcal{U}_0); \mathbb{C}) & \xleftarrow{j_{0*}} & H_0(N(\mathcal{U}_1); \mathbb{C}) & \xleftarrow{j_{1*}} & H_0(N(\mathcal{U}_2); \mathbb{C}) & \xleftarrow{\quad} & \dots \\
 \downarrow f_{*0} & & \downarrow f_{*1} & & \downarrow f_{*2} & & \\
 H_0(N(\mathcal{U}_0); \mathbb{C}) & \xleftarrow{j_{0*}} & H_0(N(\mathcal{U}_1); \mathbb{C}) & \xleftarrow{j_{1*}} & H_0(N(\mathcal{U}_2); \mathbb{C}) & \xleftarrow{\quad} & \dots
 \end{array}$$

es conmutativo. Para ello, comprobemos que $(f_{*n} \circ j_{n*})(U_{n+1}) = (j_{n*} \circ f_{*(n+1)})(U_{n+1})$ para todo $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$. Sean $U_n := j_{n*}(U_{n+1})$ y $U'_n := f_{*n}(U_n)$, y sean $U'_{n+1} := f_{*(n+1)}(U_{n+1})$ y $U''_n := j_{n*}(U'_{n+1})$, veamos que $U'_n = U''_n$. Por definición, tenemos que $U_{n+1} \subset U_n$, $f(U_n) \subset U'_n$ y $f(U_{n+1}) \subset U'_{n+1} \subset U''_n$, de lo que se sigue que $f(U_{n+1}) \subset f(U_n) \subset U'_n$, y puesto que $f(U_{n+1})$ solo puede estar contenido en un único elemento de la partición \mathcal{U}_n , tenemos que $U'_n = U''_n$.

Por tanto, el límite inverso de la sucesión de aplicaciones lineales f_{*n} , es precisamente el homomorfismo inducido por f , $f_* : \check{H}_0(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(X; \mathbb{C})$.

De este modo, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor no nulo de f_* , entonces existe un autovector $u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \check{H}_0(X; \mathbb{C})$ no nulo tal que $f_*(u) = \lambda \cdot u$, es decir, $f_*(u_0, u_1, u_2, \dots) = \lambda(u_0, u_1, u_2, \dots) = (\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2, \dots)$. Y esto se traduce, por la definición de f_* , en que $f_{*n}(u_n) = \lambda \cdot u_n$ para todo $n \geq 0$. Sin embargo, puesto que u es no nulo, existe un t tal que u_n es no nulo para todo $n \geq t$, y por tanto, λ es un autovalor de f_{*n} para todo $n \geq t$.

Para $n \geq t$, tenemos que $u_n \in H_0(N(\mathcal{U}_n); \mathbb{C})$ viene dado por una combinación lineal de vértices de $N(\mathcal{U}_n)$, es decir,

$$u_n = \sum_{U \text{ vértice de } N(\mathcal{U}_n)} a_U \cdot U,$$

donde $a_U \in \mathbb{C}$ denota la aportación del vértice U .

Por otra parte, recordemos que existen k y s tales que $f^{k+s}(U) \subset f^k(U)$ (visto a U como vértice de $N(\mathcal{U}_n)$, $f_{*n}^{k+s}(U) = f_{*n}^k(U)$) para todo $U \in \mathcal{U}_n$. De lo que se deduce que $f_{*n}^k(u_n)$ es combinación lineal de vértices periódicos, y como $0 = \lambda^k \cdot u_n - f_{*n}^k(u_n)$, tenemos que la aportación a_U del vértice U en u_n es igual a 0 si U no es periódico. Por lo tanto, podemos reescribir u_n como sigue

$$u_n = \sum_{U \text{ vértice periódico de } N(\mathcal{U}_n)} a_U \cdot U.$$

Como u_n es no nulo, existe un vértice periódico U de periodo s cuya aportación a_U en u_n es no nula. Y de este modo, la aportación de $f_*(U)$ en $f_{*n}(u_n) - \lambda \cdot u_n = 0$ es $a_U - \lambda \cdot a_{f_{*n}(U)}$, de lo que se sigue que $a_U = \lambda \cdot a_{f_{*n}(U)}$. Reiterando, tenemos que

$$a_U = \lambda \cdot a_{f_{*n}(U)} = \lambda \cdot \lambda \cdot a_{f_{*n}f_{*n}(U)} = \dots = \lambda^s \cdot a_{f_{*n}^s(U)} = \lambda^s \cdot a_U,$$

y como a_U es no nulo, tenemos que $\lambda^s = 1$. Es decir, el autovalor λ es una raíz de la unidad.

4.5. ϵ -particiones y dinámica. Demostración del Teorema 4.7

La conclusión del Teorema 4.11 nos deja la siguiente cuestión: ¿cómo son los sistemas dinámicos (X, f) donde X es compacto y totalmente desconexo y $f : X \rightarrow X$ es continua, que admiten ϵ -particiones dinámicas para cualquier $\epsilon > 0$? Como primer paso para dar una respuesta a esta cuestión, probaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.20. *Sea X un espacio métrico compacto totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$ si y solo si (X, f) es topológicamente conjugada al límite inverso de una sucesión inversa de sistemas dinámicos discretos (F_n, τ_n) donde cada F_n es un espacio finito dotado con la topología discreta.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos primero que (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$. Entonces, al igual que hicimos en la sección anterior, podemos construir inductivamente una sucesión de particiones dinámicas de X por subconjuntos clopens cuyo diámetro tiende a 0 y tal que cada partición refina a la anterior:

$$\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{U}_1 \prec \mathcal{U}_2 \prec \dots,$$

donde las proyecciones $j_n : \mathcal{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{U}_n$ dadas por $j_n(U) = U'$ si $U \subset U'$ están bien definidas. Como \mathcal{U}_n es partición dinámica para cualquier n , existe un aplicación $i_n : X \rightarrow \mathcal{U}_n$ tal que $i_n(x) = U$ si $x \in U$, y además, claramente estas aplicaciones conmutan con j_n , es decir, $j_n \circ i_{n+1} = i_n$. De este modo, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{U}_0 & \xleftarrow{j_0} & \mathcal{U}_1 & \xleftarrow{j_1} & \mathcal{U}_2 & \xleftarrow{j_3} & \dots \\ \uparrow i_0 & & \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & \\ X & \longleftarrow & X & \longleftarrow & X & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

donde las flechas de la fila inferior denotan la identidad. Tomando los límites inversos de la fila superior e inferior, e identificando el último con X , vemos que los i_n inducen una aplicación continua $i : X \rightarrow \varprojlim \mathcal{U}_n$. Los elementos de $\varprojlim \mathcal{U}_n$ son sucesiones encajadas $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ donde cada U_n es un elemento de \mathcal{U}_n . La aplicación i envía $p \in X$ a una sucesión encajada de $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $p \in U_n$ para todo n . Recíprocamente, cada sucesión $(U_n) \in \varprojlim \mathcal{U}_n$ determina un único punto $p \in \bigcap_{n \geq 0} U_n$, produciendo una aplicación continua $\varprojlim \mathcal{U}_n \rightarrow X$ la cual es claramente la inversa de i . Por tanto, i es un homeomorfismo entre X y $\varprojlim \mathcal{U}_n$.

Recordemos que cada \mathcal{U}_n produce una aplicación $\tau_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ dada por la dinámica de la partición, de modo que $f(U_n) \subset \tau_n(U_n)$ para cualquier $U_n \in \mathcal{U}_n$. Como las proyecciones entre los \mathcal{U}_n conmutan con los τ_n , estos últimos inducen una aplicación continua $\tau : \varprojlim \mathcal{U}_n \rightarrow \varprojlim \mathcal{U}_n$. Además, los i_n semiconjugan f y τ_n (es decir, i_n es sobreyectiva y es tal que $i_n \circ f = \tau_n \circ i_n$), por lo que su límite inverso i semiconjuga f y τ . Y como ya demostramos que i es un homeomorfismo, concluimos que es, de hecho, una conjugación topológica entre f y τ . Esto prueba (\Rightarrow) , donde los conjuntos finitos F_n son las particiones \mathcal{U}_n .

(\Leftarrow) Como la propiedad de tener ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$ es independiente de la elección de la métrica y preservada por la conjugación topológica, será suficiente demostrar que los límites inversos de sistemas dinámicos finitos tienen esta propiedad. Así, supongamos que tenemos una sucesión inversa de espacios finitos

$$F_0 \xleftarrow{j_0} F_1 \xleftarrow{j_1} F_2 \xleftarrow{j_2} \dots,$$

donde cada F_n es dotado con una aplicación $\tau_n : F_n \rightarrow F_n$ que conmuta con las aplicaciones j_n . Sea $\tau : \varprojlim F_n \rightarrow \varprojlim F_n$ el límite inverso de las aplicaciones τ_n . Afirmamos que $(\varprojlim F_n, \tau)$ tiene ϵ -particiones dinámicas para cualquier $\epsilon > 0$. Denotemos por $\pi_n : \varprojlim F_n \rightarrow F_n$ a las proyecciones. Consideremos, para todo n , la familia $\mathcal{U}_n := \{\pi_n^{-1}(e) : e \in F_n\}$. Claramente cada \mathcal{U}_n es una partición finita de $\varprojlim F_n$ por subconjuntos clopens (recordemos que los π_n son aplicaciones continuas sobreyectivas, y que los F_n están dotados con la topología discreta). Además, cada \mathcal{U}_n es una partición dinámica debido a que el comportamiento de τ sobre los elementos de \mathcal{U}_n es semiconjugada (vía la proyección π_n) a τ_n en F_n . El resultado se sigue del hecho de que la familia $\{\mathcal{U}_n : n \geq 0\}$ es cofinal entre todos los recubrimientos por clopens de X debido a que la topología en $\varprojlim F_n$ es la topología inicial con respecto a las proyecciones π_n . \square

Para los párrafos restantes supondremos que (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para cualquier $\epsilon > 0$, por lo que podemos identificar $X = \varprojlim F_n$ y $f = \tau$ en la notación de la proposición anterior. Esto permite dar una descripción completa de los subconjuntos invariantes cerrados de (X, f) como sigue. Si L es un subconjunto cerrado invariante por $\tau : \varprojlim F_n \rightarrow \varprojlim F_n$ (es decir, $\tau(L) = L$), se tiene que su proyección $L_n := \pi_n(L)$ es invariante por $\tau_n : F_n \rightarrow F_n$. Así, L_n es una unión finita de órbitas periódicas, y L es el límite inverso de la sucesión inversa determinada por los subconjuntos L_n . Además, también obtenemos que L es estable con respecto a los subconjuntos clopens debido a que la sucesión $\{\pi_n^{-1}(L_n) : n \geq 1\}$ es una base de entornos clopens positivamente invariantes de L .

Recordemos que si f es **sobreyectiva**, entonces cada τ_n es sobreyectiva, y por tanto, también es una biyección de F_n . Así, cada F_n consiste de una unión disjunta de órbitas periódicas de τ_n . Dado un punto $p \in \varprojlim F_n$, para cada n podemos considerar la órbita periódica $P_n \subset F_n$ que contiene al elemento $\pi_n(p)$ en F_n . Al restringir las aplicaciones j_n a los P_n , obtendremos una sucesión inversa

$$P_1 \xleftarrow{j_1} P_2 \xleftarrow{j_2} P_3 \xleftarrow{j_3} \dots$$

cuyo límite inverso es el subconjunto clopen invariante más pequeño que contiene a p , es decir, la clausura de la órbita de p . Y además el periodo m_n de P_n divide al periodo m_{n+1} de P_{n+1} para todo n . Tal límite inverso es conocido como un adding machine (si los periodos de los P_n van hasta infinito) o una órbita periódica (si los periodos se estabilizan), ver el Teorema 2.3 de [Block y Keesling(2004)]. De hecho, una órbita periódica es un caso particular de un adding machine, y el límite inverso de antes es el adding machine asociado a la sucesión de enteros positivos (s_0, s_1, s_2, \dots) con $s_0 = m_0$ y $s_{i+1} = m_{i+1}/m_i$ para todo $i \geq 0$ (veremos qué significa esto un poco más adelante).

Recordemos que los addings machines son **minimales**, es decir, toda órbita (completa) es densa en ellos (para un repaso de las propiedades de los sistemas minimales, ver [Kolyada y Snoha(2009)]).

De hecho, algo incluso más fuerte se cumple: la semi-órbita positiva de cualquier punto es densa en un adding machine, lo mismo ocurre para cualquier semi-órbita negativa de cualquier punto.

Cuando f **no es sobreyectiva**, ocurre una situación similar ya que toda órbita de una aplicación definida en un conjunto finito es eventualmente periódica. Así, la proyección en F_n de la semi-órbita positiva de $p \in \varprojlim F_n$ es una órbita que es eventualmente igual a la órbita periódica P_n . El ω -límite de p en $\varprojlim F_n$ es igual al límite inverso de estos P_n al igual que antes. Por lo que hemos demostrado lo siguiente:

Observación 4.21. *El ω -límite de todo $p \in X$ es o bien una órbita periódica o bien un adding machine, y es estable con respecto de los subconjuntos clopens. Y en el caso particular de que f sea sobreyectiva, tenemos que la dinámica de f restringida a la clausura de cualquier semi-órbita positiva es conjugada a un adding machine, y además, la clausura de cada semi-órbita positiva es estable con los respecto de los subconjuntos clopens.*

Anteriormente hemos usado la definición de un adding machine (también conocido como odómetro) como un límite inverso de órbitas periódicas finitas, podría ser conveniente recordar una descripción alternativa que es algo más ilustrativa.

Consideremos una sucesión $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ de enteros positivos arbitrarios que uno podría pensar como bases (en el sentido de la aritmética elemental). Denotamos por \mathbb{Z}_{s_i} a la familia formada por las clases de equivalencia de los números enteros módulo s_i , y consideramos la aplicación $T_{s_i} : \mathbb{Z}_{s_i} \rightarrow \mathbb{Z}_{s_i}$ dada por $T_{s_i}([n]_{s_i}) = [n + 1]_{s_i}$, y así, el sistema dinámico $(\mathbb{Z}_{s_i}, T_{s_i})$ es el ciclo de s_i elementos. Pues bien, considerando $Z_s := \mathbb{Z}_{s_0} \times \mathbb{Z}_{s_1} \times \dots$ y la aplicación $T_s : Z_s \rightarrow Z_s$ dada por: sea $c = ([n_0]_{s_0}, [n_1]_{s_1}, \dots) \in Z_s$, entonces $T_s(c) = ([m_0]_{s_0}, [m_1]_{s_1}, \dots)$ es tal que $[m_0]_{s_0} = T_{s_0}([n_0]_{s_0})$, y si $[m_0]_{s_0} \neq [0]_{s_0}$, entonces $[m_1]_{s_1} = [n_1]_{s_1}$, $[m_2]_{s_2} = [n_2]_{s_2}, \dots$, y si $[m_0]_{s_0} = [0]_{s_0}$, entonces $[m_1]_{s_1} = T_{s_1}([n_1]_{s_1})$, y así sucesivamente (el siguiente paso sería distinguir si $[m_1]_{s_1}$ es igual a $[0]_{s_1}$ o no). El sistema dinámico (Z_s, T_s) es un adding machine (también conocido como odómetro). Cuando existe un n tal que $s_m = 1$ para todo $m \geq n$, entonces (Z_s, T_s) es conjugado a un ciclo de periodo $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$.

La Observación 4.21 coincide y parcialmente reproduce los resultados de Buescu, Kulczycki y Stewart en [Buescu, Kulczycki, y Stewart(2006)]. Adaptando sus resultados a nuestra configuración, tenemos que:

Teorema 4.22. *Sea X un espacio métrico compacto totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Si (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$, entonces la dinámica de f restringida a cualquier subconjunto cerrado transitivo es topológicamente conjugada a un adding machine.*

Demostración. Se sigue fácilmente de nuestros argumentos anteriores debido a que un conjunto invariante compacto y transitivo en $\varprojlim F_n$ es el límite inverso de una sucesión inversa que en todo nivel F_n es un conjunto transitivo (y por tanto, una órbita periódica en F_n). \square

Estamos ahora listos para probar la caracterización de los sistemas dinámicos que admiten ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$ establecida en el Teorema 4.7.

Teorema 4.23. *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a). (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$.
- (b). El ω -límite de todo punto de X es o bien una órbita periódica o bien un adding machine; además, estos son estables con respecto a los subconjuntos clopens.

Demostración. Los argumentos anteriores prueban $(a) \implies (b)$. Para el recíproco, fijemos $\epsilon > 0$. Afirmamos que para todo $p \in X$, su ω -límite, $\omega(p)$, admite una ϵ -partición dinámica. Esto está claro si $\omega(p)$ es una órbita periódica. Si es un adding machine, podemos identificar $(\omega(p), f|_{\omega(p)})$ con un límite inverso $\varprojlim P_n$ donde los P_n son conjuntos finitos con dinámicas periódicas. Denotando por π_n a la proyección de $\omega(p)$ en P_n , la deseada ϵ -partición dinámica de $\omega(p)$ es dada por $\{\pi_n^{-1}(P) : P \in P_n\}$ para un n suficientemente grande.

Como el $\omega(p)$ es estable con respecto de los subconjuntos clopens, podemos usar el Lema 4.9 para extender la partición del párrafo anterior a una ϵ -partición dinámica de un entorno de $\omega(p)$. La condición de estabilidad fuerza a que la unión de $\omega(p)$ sobre todos los $p \in X$ sea igual a $Y = \bigcap_{n \geq 0} f^n(X)$ por lo que, en particular, Y es cerrado. Entonces por la compacidad podemos encontrar una ϵ -partición dinámica de un entorno de Y y el Lema 4.10 finalmente produce una ϵ -partición dinámica de todo X . \square

Decimos que un punto $x \in X$ es **positivamente recurrente** si $x \in \omega(x)$, y denotamos por $R^+(f)$ a la clausura del conjunto formado por los puntos positivamente recurrentes. Decimos que un punto $x \in X$ es **no-errante** si para cualquier entorno abierto U de x existe un entero $n > 0$ tal que $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$, y denotamos por $NW(f)$ al conjunto de todos los puntos no-errantes de f .

Y además, sabemos que (ver por ejemplo [Katok y Hasselblatt(1995)]):

- $NW(f)$ es cerrado e invariante por f ,
- $\omega(x) \subset NW(f)$ para cualquier $x \in X$ y
- $R^+(f) \subset NW(f)$.

También podemos encontrar en [Katok y Hasselblatt(1995)] una demostración de la proposición siguiente:

Proposición 4.24. *Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua en un espacio compacto X . Entonces,*

$$h(f) = h(f|_{NW(f)}).$$

Proposición 4.25. *Sea X un espacio métrico compacto y totalmente desconexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Si (X, f) admite ϵ -particiones dinámicas para todo $\epsilon > 0$, entonces $NW(f) = R^+(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(x)$.*

Demostración. Como sabemos que $NW(f) \supset R^+(f)$, comprobemos además que $NW(f) \subset R^+(f)$. Sea $x \in NW(f)$ y sea V un entorno abierto arbitrario de x . De la hipótesis de esta proposición se sigue que existe una partición dinámica \mathcal{U} de X tal que $x \in U \subset V$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Como $x \in NW(f)$ y U es un entorno abierto de x , existe un entero $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, y así, $f^n(U) \subset U$ ya que \mathcal{U} es una partición dinámica de X . De lo anterior se sigue que $U \supset f^n(U) \supset f^{2n}(U) \supset \dots$,

y en consecuencia, $f^n(x), f^{2n}(x), \dots \in U \subset V$. En definitiva, $x \in \overline{\{f^m(x), f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), \dots\}}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, y así, $x \in \omega(x)$, por lo que $x \in R^+(f)$.

Del párrafo anterior también deducimos que $NW(f) \subset \bigcup_{x \in X} \omega(x)$, y como $\omega(x) \subset NW(f)$ para cualquier $x \in X$, concluimos que $NW(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(x)$. \square

Corolario 4.26. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior también concluimos que $h(f) = 0$.*

Demostración. Tenemos que

$$h(f) = h(f|_{NW(f)}) = \sup_{x \in X} h(f|_{\omega(x)}),$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 4.24 y la segunda igualdad se sigue de la Proposición 4.4. Como $h(f|_{\omega(x)}) = 0$ puesto que $(\omega(x), f|_{\omega(x)})$ es topológicamente conjugada a un odometer y los odómetros son equicontinuos (las aplicaciones equicontinuas sobre compactos tienen entropía nula tal y como se demuestra en la Sección 3 de [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)]), concluimos que $h(f) = 0$. \square

La tesis del corolario anterior también se sigue directamente del hecho de que existan particiones dinámicas de cualquier tamaño tal y como hemos razonado justo antes del Corolario 4.6.

Capítulo 5

Generalización del Teorema de Manning

5.1. Introducción

Que un sistema posea entropía topológica positiva implica la existencia de una dinámica caótica en el sentido de Li–Yorke, ver [Li y Yorke(1975)] y [Blanchard, Glasner, Kolyada, y Maass(2002)]. También implica el caos en algunas otras de sus interpretaciones, para una discusión de esto ver [Schweizer y Smítal(1994)] y [Downarowicz(2013)]. Sin embargo, el caos en el sentido de Li–Yorke no necesariamente implica una entropía topológica positiva, [Smítal(1986)]. Para un repaso de la teoría del caos para sistemas dinámicos, ver [Kolyada(2004)].

El calculo de la entropía topológica no es una tarea sencilla (excepto para algunos ejemplos específicos), con lo que nos solemos conformar con encontrar una cota inferior que nos garantice que la entropía topológica es positiva. Siguiendo este principio, el Teorema de Manning (dado en [Manning(1975)]) nos permite saber cuándo un sistema dinámico tiene entropía topológica positiva.

Teorema 5.1 (Teorema de Manning). *Si X es una variedad compacta y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua, entonces*

$$h(f) \geq \log(|\lambda|)$$

para cualquier autovalor λ no nulo de $f_* : H_1(X; \mathbb{C}) \rightarrow H_1(X; \mathbb{C})$.

Aquí H denota la homología singular con coeficientes en \mathbb{C} . Motivado por este resultado, Shub estableció la conjetura de entropía, [Shub(1974)], que pregunta si el teorema de Manning es valido en todas las dimensiones. En este capítulo generalizaremos el Teorema de Manning a espacios más amplios como los espacios compactos, y además, analizaremos el problema en dimensión cero usando lo desarrollado en el Capítulo 4.

Manning remarco al final de [Manning(1975)] que: «Although Čech cohomology theory would seem most appropriate for relating cohomology eigenvalues to topological entropy as defined in [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)] by refinements of open covers we have been unable to exploit this approach». Motivado por esto, abordaremos el Teorema de Manning pero considerando la aplicación inducida en cohomología (o en homología) de Čech.

Primero abordemos el problema en dimensión cero. Si consideramos la aplicación inducida en cohomología de Čech (ver el Teorema para Cohomología del Capítulo 4), entonces la desigualdad

del Teorema de Manning se cumple trivialmente ya que solo nos dice que $h(f) \geq 0$. El escenario cambia radicalmente, sin embargo, cuando se considera la homología de Čech (ver el Teorema para Homología del Capítulo 4). Del Corolario 4.6 se deduce que la desigualdad del Teorema de Manning ciertamente no se cumple en general: para cualquier sistema dinámico con entropía topológica positiva pero finita, tenemos que $\sup(\log(|\lambda|)) = +\infty$ ya que cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \neq 0, 1$ es un autovalor de f_* . Este es el caso del sistema dinámico siguiente:

Ejemplo 5.2. *La Herradura de Smale con su dinámica usual tiene entropía topológica $\log 2$, tal y como se demuestra en el Ejemplo 3 de [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)].*

En dimensión 1, los Teoremas 5.3 y 5.4 generalizan la desigualdad del Teorema de Manning para espacios compactos en términos de la cohomología de Čech, siendo estos teoremas ya vistos en [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)].

Teorema 5.3 (Generalización I del Teorema de Manning). *Sea X un espacio Hausdorff compacto y localmente conexo, y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Si $f^* : \check{H}^1(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^1(X; \mathbb{C})$ tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ con módulo $|\lambda| > 1$, entonces la entropía topológica de f satisface que $h(f) \geq \log |\lambda|$.*

El teorema anterior generaliza la clásica desigualdad de Manning, ya que para una variedad X tenemos que $\check{H}^1(X; \mathbb{C}) = H^1(X; \mathbb{C})$ y que para una variedad compacta tenemos además que $H^1(X; \mathbb{C})$ tiene dimensión finita, y así, $H_1(X; \mathbb{C})$ es isomorfo al dual de $H^1(X; \mathbb{C})$, y $H^1(X; \mathbb{C})$ es isomorfo al dual de $H_1(X; \mathbb{C})$ por el Teorema 2.14, por lo que f_* y f^* comparten autovalores.

Cuando X no es localmente conexa, la cota inferior que obtenemos es más pequeña que $\log |\lambda|$ pero sigue siendo positiva, por lo que nos asegura que $h(f) > 0$. Pero antes de introducir el siguiente teorema, recordemos que un número complejo λ es un **número algebraico** si es raíz de un polinomio con coeficientes en los enteros, y decimos que su grado es d si λ es una raíz de un polinomio de grado d con coeficientes en los enteros pero no es raíz de cualquier polinomio de grado menor que d con coeficientes en los enteros.

Teorema 5.4 (Generalización II del Teorema de Manning). *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Asumiendo que un número algebraico $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$ es un autovalor de $f^* : \check{H}^1(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^1(X; \mathbb{C})$. Entonces $h(f) \geq (\log |\lambda|)/d$, donde $d \in \mathbb{Z}^+$ es el grado de λ . En particular, $h(f) > 0$.*

Como el grado de cualquier número racional es igual a 1, el teorema anterior produce la cota estándar $\log |\lambda|$ para autovalores en \mathbb{Q} .

5.2. ¿Por qué están los teoremas formulados en términos cohomológicos?

Otro aspecto en el que los Teoremas 5.3 y 5.4 difieren del resultado original de Manning es que estamos asumiendo que λ es un autovalor en cohomología (de Čech) en lugar de homología. Cuando $\check{H}^1(X; \mathbb{C})$ o $\check{H}_1(X; \mathbb{C})$ tienen dimensiones finitas, estos dos espacios vectoriales son duales el uno al

otro (ver el Teorema 2.14), y por tanto, podemos equivalentemente asumir que λ es un autovalor en homología. Sin embargo, como hemos probado, en general la homología de Čech es isomorfa al espacio dual de la cohomología de Čech, por lo que podrían existir autovalores en homología que no están presentes en cohomología (incumpliendo así la desigualdad de Manning). Describimos ahora un ejemplo de un espacio X métrico compacto y localmente conexo donde este fenómeno ocurre.

El espacio X mostrado en la Figura 5.1 consiste de una sucesión bi-infinita de circunferencias $\{C_i\}$ etiquetadas de izquierda a derecha (siendo C_0 la circunferencia más grande del centro) y dos puntos límites L y R en los extremos de la sucesión.

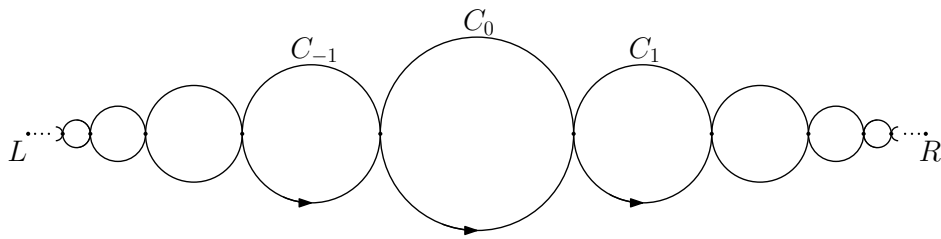


Figura 5.1:

La aplicación $f : X \rightarrow X$ es definida como sigue:

- (I). Dicha aplicación fija los puntos L y R , y envía cada punto $C_i \cap C_{i+1}$ a $C_{i-1} \cap C_i$,
- (II). y además, f envía cada C_i orientado (como en la Figura 5.1) en la curva que recorre dos veces C_{i-1} .

Nótese que las condiciones (I) y (II) son compatibles pero obligan a f a actuar de manera distinta en los arcos superiores e inferiores (el arco superior de C_i es enviado al arco superior de C_{i-1} , y la imagen del arco inferior de C_i recorre el arco inferior, luego el superior y luego el inferior de C_{i-1}). Ahora si $\gamma \in \check{H}_1(X; \mathbb{C})$ es la suma $\sum_i C_i$ (si bien esta suma es infinita, a escala cualquier recubrimiento abierto \mathcal{U} , la Proposición 1.5 nos asegura que la suma es finita), vemos que $f_*(\gamma) = 2\gamma$, por lo que $\lambda = 2$ es un autovalor de f_* .

De la Proposición 4.24, se sigue que el calculo de la entropía topológica de (X, f) es sencillo ya que puede obtenerse al restringirnos al conjunto no-errante por f , en este caso, dicho conjunto es $\{L, R\}$, una descomposición atractor-repulsor de X . Esto implica que $h(f) = h(f|_{\{L, R\}}) = 0$, por lo que la desigualdad de Manning no se cumple. En cohomología uno puede fácilmente comprobar que f^* no tiene autovalores (como veremos en el siguiente párrafo), y así, el Teorema 5.3 no nos dice nada.

Sea $\phi_i \in \check{H}^1(X; \mathbb{C})$ tal que $\int_{[C_j]} \phi_i$ es igual a 1 si $i = j$ y es igual a 0 si $i \neq j$. No es muy difícil comprobar a partir del Teorema 2.14, (1) que $\{\phi_i : i \in \mathbb{Z}\}$ es una base de $\check{H}^1(X; \mathbb{C})$. Además, $f^*(\phi_i)$ es tal que:

$$\int_{[C_j]} f^*(\phi_i) = \int_{f_*([C_j])} \phi_i = \int_{2[C_{j-1}]} \phi_i = 2 \int_{[C_{j-1}]} \phi_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo que $f^*(\phi_i) = 2\phi_{i+1}$. Supongamos que existe un autovector no nulo $v = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \cdot \phi_i$ de f^* asociado a un escalar λ , por lo que $f^*(v) = \lambda \cdot v$. Sea k el mayor entero positivo tal que $a_k \neq 0$, y así, $v = \sum_{i \leq k} a_i \cdot \phi_i$. Sin embargo, como

$$f^*(v) = \sum_{i \leq k} a_i \cdot f^*(\phi_i) = \sum_{i \leq k} a_i \cdot 2\phi_{i+1} = \left(\sum_{i \leq k-1} a_i \cdot 2\phi_{i+1} \right) + a_k \cdot 2\phi_{k+1},$$

tenemos que $\lambda \cdot v$ no puede ser igual a $f^*(v)$.

Otro forma de construir un contraejemplo para la versión homológica del teorema, aunque no localmente conexo, es explotar el hecho de que la desigualdad de Manning no se cumple en dimensión cero. Como ilustramos en el Ejemplo 5.2, el sistema dinámico (Z, g) dado por el invariante de la Herradura de Smale con su dinámica usual tiene entropía topológica $h(g) = \log 2$, y es tal que no cumple la desigualdad de Manning en dimensión cero.

Sea SZ la suspensión de Z . De que la sucesión de Mayer–Vietoris para la homología de Čech (reducida) con coeficientes en un cuerpo sea exacta (ver la página 248 de [Eilenberg y Steenrod(1952)]), puede deducirse que $\check{H}_1(SZ; \mathbb{C})$ es isomorfo a $\check{H}_0(Z; \mathbb{C})$ (aquí estamos considerando la homología reducida).

Tenemos que SZ viene dado por $Z \times [-1, 1]$ al colapsar $Z \times \{-1\}$ a un punto (al que denotamos por S) y al colapsar $Z \times \{1\}$ a un punto (al que denotamos por N). Si consideramos la sucesión de Mayer–Vietoris para la homología reducida de Čech (aunque que sea reducida no será reflejado en la notación) para el par $SZ \setminus \{S\}$ y $SZ \setminus \{N\}$, tenemos que la siguiente sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \check{H}_0(SZ \setminus \{N\}) \oplus \check{H}_0(SZ \setminus \{S\}) & \longleftarrow & \check{H}_0(SZ \setminus \{N, S\}) & & \\ & & & & \uparrow \Delta_* & & \\ \dots & \longrightarrow & \check{H}_1(SZ \setminus \{N\}) \oplus \check{H}_1(SZ \setminus \{S\}) & \longrightarrow & \check{H}_1(SZ) & & \end{array}$$

es exacta. Como $SZ \setminus \{N\}$ posee una única componente conexa por caminos (y así, una única cuasi-componente) y como no posee 1-ciclos no contractibles a un punto, tenemos que $\check{H}_0(SZ \setminus \{N\}) = 0$ y $\check{H}_1(SZ \setminus \{N\}) = 0$, y razonando de manera análoga, tenemos que $\check{H}_0(SZ \setminus \{S\}) = 0$ y $\check{H}_1(SZ \setminus \{S\}) = 0$. Por tanto, la exactitud de la sucesión anterior nos asegura que $\check{H}_1(SZ; \mathbb{C})$ y $\check{H}_0(SZ \setminus \{N, S\}; \mathbb{C})$ son isomorfos, y como $\check{H}_0(SZ \setminus \{N, S\}; \mathbb{C})$ y $\check{H}_0(Z; \mathbb{C})$ son también isomorfos puesto que Z es un retracto de deformación de $SZ \setminus \{N, S\}$ (ver la página 30 de [Eilenberg y Steenrod(1952)]), concluimos que $\check{H}_1(SZ; \mathbb{C})$ y $\check{H}_0(Z; \mathbb{C})$ son isomorfos.

Entonces, podemos establecer la dinámica de g en el nivel base $Z \times \{0\}$ de SZ y extender a una dinámica $f : SZ \rightarrow SZ$ que fijas los polos N, S , y que hace que $(Z \times \{0\}, \{N, S\})$ sea una descomposición atractor–repulsor. Y además, la entropía de f es menor o igual a la de g ya que

$$h(f) = h(f|_{NW(f)}) \leq h(f|_{(Z \times \{0\}) \cup \{N, S\}}) = \max \left\{ h(f|_{Z \times \{0\}}), \underbrace{h(f|_{\{N, S\}})}_0 \right\} = h(f|_{Z \times \{0\}}) = h(g),$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 4.24, la desigualdad se sigue de que $NW(f)$ esté contenido en $(Z \times \{0\}) \cup \{N, S\}$, mientras que la segunda igualdad se sigue de la Proposición

4.4 ya que $Z \times \{0\}$ y $\{N, S\}$ son positivamente invariantes por f . Sin embargo, las aplicaciones $f_* : \check{H}_1(SZ; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_1(SZ; \mathbb{C})$ y $g_* : \check{H}_0(Z; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}_0(Z; \mathbb{C})$ son conjugados por Δ_* , el homomorfismo conectante de la sucesión de Mayer–Vietoris. En particular, ambas aplicaciones tienen los mismos autovalores, y así, la desigualdad de Manning falla para f ya que falla para g (por suposición) en dimensión cero.

5.3. Demostración de las generalizaciones I y II del Teorema de Manning

Los primeros pasos son comunes y sirven como un esbozo de ambas demostraciones. El argumento comienza con un autovector no nulo z en $\check{H}^1(X; \mathbb{C})$ asociado al autovalor λ el cual es arbitrario en la demostración del Teorema 5.3 pero necesita ser cuidadosamente elegido (de una manera que se describirá en la próxima sección) para la demostración del Teorema 5.4.

Paso 1. Sea $z \in \check{H}^1(X; \mathbb{C})$ un autovector asociado al autovalor λ , es decir, una solución de

$$(*) \quad f^*(z) = \lambda z,$$

y sea \mathcal{V} un recubrimiento abierto de X tal que $z = \tau_{\mathcal{V}}(z_{\mathcal{V}})$ para algún $z_{\mathcal{V}} \in H_{\mathcal{V}}^1(X; \mathbb{C})$ (por el Lema A.9). Como las clases de cohomología $\lambda z_{\mathcal{V}} \in H_{\mathcal{V}}^1(X; \mathbb{C})$ y $f^*(z_{\mathcal{V}}) \in H_{f^{-1}(\mathcal{V})}^1(X; \mathbb{C})$ definen el mismo elemento en el límite directo $\check{H}^1(X; \mathbb{C})$, existe un recubrimiento abierto \mathcal{U} de X , más fino que $\mathcal{V} \vee f^{-1}(\mathcal{V})$, para el que las proyecciones de $\lambda z_{\mathcal{V}}$ y $f^*(z_{\mathcal{V}})$ en $H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C})$ son iguales. En otras palabras, $z_{\mathcal{V}}$ (o, formalmente, $\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}(z_{\mathcal{V}})$) es una solución de $(*)$ a escala \mathcal{U} . Nótese que \mathcal{U} puede ser elegido arbitrariamente fino, y por tanto, será fijado.

Paso 2. Fijamos un número natural n y denotamos por \mathcal{V}_n a un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n}(\mathcal{U})$. Para cualquier 1-ciclo formal \mathcal{V}_n -pequeño s_n , los ciclos $s_n, f_{\#}(s_n), \dots, f_{\#}^n(s_n)$ son \mathcal{U} -pequeños y representan las clases de homología $\gamma_n, f_*(\gamma_n), \dots, f_*^n(\gamma_n) \in H_1^{\mathcal{U}}(X)$, respectivamente. Para cualquier $0 \leq j < n$, tenemos que

$$\int_{f_*^{j+1}(\gamma_n)} z = \int_{f_*^j(\gamma_n)} f^*(z) = \lambda \int_{f^j(\gamma_n)} z,$$

donde el término del medio debe ser interpretado como un integral a escala $f^{-1}(\mathcal{U})$, mientras que el primer término y el tercer término están a escala \mathcal{U} , estamos haciendo uso las propiedades de la integral formuladas en el Lema 2.6. Por inducción,

$$\int_{f_*^n(\gamma_n)} z = \lambda^n \int_{\gamma_n} z. \tag{5.1}$$

Paso 3. Por el Teorema 1.68, existe un representante η de z cuya imagen es finita. Entonces,

$$\left| \int_{f_*^n(\gamma_n)} z \right| = \left| \int_{[f_{\#}^n(s_n)]} [\eta] \right| \leq \|f_{\#}^n(s_n)\|_1 \|\eta\|_{\infty} \leq \|s_n\|_1 \|\eta\|_{\infty}, \tag{5.2}$$

donde la primera desigualdad es una consecuencia de la definición de la integral como una suma de evaluaciones sobre símlices y la segunda desigualdad representa la posible alteración de la norma de cadenas debido a la cancelación de símlices después de aplicar $f_{\#}^n$ a la cadena s_n .

En este punto del argumento las demostraciones de los Teoremas 5.3 y 5.4 divergen. La idea es acotar $\|s_n\|_1$ inferiormente en términos de $|\mathcal{V}_n|$ en (5.2) y controlar la integral de z sobre γ_n en (5.1) al mismo tiempo. Esto es sencillo en el caso de que nuestro espacio sea localmente conexo usando los refinamientos construidos en la Subsección 1.1.7, Proposición 1.46, debido a que los valores de la integral no dependen de n . Sin embargo, en el caso general, no existe una elección coherente y sencilla de γ_n y de s_n y el argumento es más delicado. La idea es usar algunas propiedades aritméticas de z para deducir una cota inferior para el valor absoluto de la integral en términos de $|\mathcal{V}_n|$.

5.3.1. Parte final de la demostración de la generalización I del Teorema de Manning

Usando la conexión local de X , después de pasar por un refinamiento podemos asumir que el recubrimiento abierto \mathcal{U} de X está formado por conjuntos conexos. Entonces, podemos usar los argumentos de la Subsección 1.1.7 del Capítulo 1 para elegir sabiamente los ciclos s_n . Tomando un 1-ciclo formal \mathcal{U} -pequeño s_0 que define a una clase $\gamma = [s_0] \in H_1^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $\int_{\gamma} z \neq 0$. Dicha clase de homología existe debido a la Proposición 2.13. Para cualquier n , sea s_n el refinamiento \mathcal{V}_n -pequeño de s_0 producido por el Lema 1.47, que satisface $\|s_n\|_1 \leq \|s_0\|_1 |\mathcal{V}_n|$, y denotamos por $\gamma_n := [s_n] \in H_1^{\mathcal{V}_n}(X)$. Como s_n y s_0 son homólogos como ciclos formales \mathcal{U} -pequeños, tenemos que

$$\int_{\gamma_n} z = \int_{\gamma} z,$$

y entonces la Ecuación (5.2) produce

$$|\mathcal{V}_n| \geq C |\lambda|^n, \text{ donde } C = \frac{1}{\|\eta\|_{\infty} \|s_0\|_1} \left| \int_{\gamma} z \right|.$$

Queda entonces claro que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} |\mathcal{V}_n| \geq \log |\lambda|$ y, como \mathcal{V}_n era un subrecubrimiento de $\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n}(\mathcal{U})$, se sigue que $h(f, \mathcal{U}) \geq \log |\lambda|$. Por tanto, concluimos que $h(f) \geq \log |\lambda|$.

5.4. Demostración de la generalización II del Teorema de Manning

El caso en el que X no sea localmente conexo es más difícil ya que no está claro si existe una elección de los ciclos s_n que permitan controlar el lado derecho de la igualdad (5.1) y la norma de s_n al mismo tiempo. El argumento proporcionado está basado en una cuidadosamente inspección de z y s_n . Aunque el autovector z es una clase de cohomología en $H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C})$, probaremos que podemos asumir que z es una combinación lineal de clases de cohomología racionales con coeficientes algebraicos. Entonces, nos beneficiaremos de las buenas propiedades aritméticas de los

números algebraicos para obtener un lema diofántico que nos permita acotar inferiormente el valor absoluto de la integral de z sobre $\gamma_n = [s_n]$ (siempre y cuando el valor de dicha integral sea no nulo) en términos de la norma de s_n . Finalmente, tenemos que elegir s_n de manera que su norma sea controlada por el cardinal de \mathcal{V}_n y que garantice que el valor de la integral de z no se anule.

El trabajo preliminar para la elección de s_n ha sido realizado en la Subsección 1.1.7 del Capítulo 1, es suficiente elegir un adecuado ciclo elemental simple. Sin embargo, todavía tenemos que atravesar por algunos lemas técnicos para justificar las propiedades aritméticas de z .

5.4.1. Observación sobre coeficientes. Selección de autovectores

De ahora en adelante haremos un uso simultaneo de coeficientes en \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{C} , por lo que esto estará siempre reflejado en la notación. Observamos primero que una clase de homología γ con coeficientes en G puede ser también considerada como una clase con coeficientes en cualquier grupo más grande G' (lo mismo ocurre para una clase de cohomología), por ejemplo el caso de \mathbb{Z} (o \mathbb{Q}) y \mathbb{C} . En vista de la definición de la integral esta sutileza no afecta al calculo ya que un representante c de γ con coeficientes en G es también un representante para las clases de homología con coeficientes en G' .

También necesitamos un breve discusión de la relación entre $H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{Q})$ y $H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C})$. Por el Teorema de Coeficientes Universales [Spanier(1966)] (y usando que \mathcal{U} es finito y por tanto todos los módulos son de tipo finito), $H_{\mathcal{U}}^q(X; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H_{\mathcal{U}}^q(X; \mathbb{C})$ como \mathbb{Q} -espacios vectoriales (y como \mathbb{C} -espacios vectoriales), donde el isomorfismo está dado en los generadores del producto tensorial: $[\xi] \otimes \lambda \mapsto \lambda [\xi]$. Para un introducción a los productos tensoriales, ver [Atiyah y MacDonald(1969)].

Supongamos que $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua. Denotamos por $f_{\mathbb{Q}}^*$ y $f_{\mathbb{C}}^*$ a los endomorfismos inducidos por f en $\tilde{H}^1(X; \mathbb{Q})$ y $\tilde{H}^1(X; \mathbb{C})$, respectivamente, y denotamos por $P_{\lambda}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ al polinomio mínimo de λ sobre \mathbb{Q} . El **polinomio mínimo de λ sobre \mathbb{Q}** viene dado por el polinomio mónico $P_{\lambda}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ de menor grado tal que $P_{\lambda}(\lambda) = 0$.

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea f un endomorfismo de V . El **polinomio mínimo de $v \in V$ para f** es el polinomio mónico $P_v(t) \in \mathbb{K}[t]$ de menor grado tal que $(P_v(f))(v) = 0$. Sea $P_f(t)$ el polinomio mínimo de f . Entonces, $P_v(t)$ divide a $P_f(t)$ para cualquier $v \in V$, y de hecho, $P_f(t) = \text{mcm} \{P_{v_1}(t), P_{v_2}(t), \dots, P_{v_n}(t)\}$ para cualquier $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V .

Lema 5.5. *Si $f_{\mathbb{C}}^*$ tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existe un vector no nulo $w \in \tilde{H}^1(X; \mathbb{Q})$ cuyo polinomio mínimo para $f_{\mathbb{Q}}^*$ está bien definido y es igual al polinomio mínimo P_{λ} de λ sobre \mathbb{Q} .*

Demostración. Como el lema es puramente algebraico, la demostración que daremos está escrita en una configuración más general. Sea E un \mathbb{Q} -espacio vectorial y sea $g : E \rightarrow E$ un endomorfismo de E . El \mathbb{C} -espacio vectorial $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ está generado por los elementos de la forma $u \otimes_{\mathbb{Q}} 1$ con $u \in E$ y la aplicación g induce un endomorfismo $\hat{g} : E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ que actúa sobre los generadores como $\hat{g}(u \otimes_{\mathbb{Q}} 1) = g(u) \otimes_{\mathbb{Q}} 1$. Vemos a $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ como un \mathbb{C} -espacio vectorial con la multiplicación compleja absorbida por el segundo factor: $c' \cdot (u \otimes_{\mathbb{Q}} c) = u \otimes_{\mathbb{Q}} c'c$. En nuestra configuración g corresponde a $f_{\mathbb{Q}}^*$ y \hat{g} corresponde a la conjugación de $f_{\mathbb{C}}^*$ por el isomorfismo del teorema de los coeficientes universales.

Cualquier subespacio $F \subset E$ generado por una colección finita $\{u_j\}_{j=1}^N$ de vectores \mathbb{Q} -linealmente independientes tiene asociado un subespacio \hat{F} (\mathbb{C} -lineal) de $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ generado por $\{u_j \otimes_{\mathbb{Q}} 1\}_{j=1}^N$.

La colección $\{u_j \otimes_{\mathbb{Q}} 1\}_{j=1}^N$ es \mathbb{C} -linealmente independiente (esto también se sigue directamente del Ejercicio 13 de la página 32 de [Atiyah y MacDonald(1969)]): sean $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{C}$ tales que

$$0 = k_1(u_1 \otimes_{\mathbb{Q}} 1) + \dots + k_N(u_N \otimes_{\mathbb{Q}} 1) = k_1 u_1 \otimes_{\mathbb{Q}} 1 + \dots + k_N u_N \otimes_{\mathbb{Q}} 1 = (k_1 u_1 + \dots + k_N u_N) \otimes_{\mathbb{Q}} 1,$$

por lo que $k_1 u_1 + \dots + k_N u_N = 0$, y así, $k_1 = \dots = k_N = 0$. Y además, se puede comprobar que:

$$\widehat{F_1 \cap F_2} = \widehat{F_1} \cap \widehat{F_2} \quad \text{y} \quad \widehat{g(F)} = \widehat{g(\widehat{F})}.$$

Asumiendo que \widehat{g} tiene un autovector no nulo $v \in E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ asociado al autovalor λ . Tomando $\{u_j\}$ una base de E , tenemos que $\{u_j \otimes_{\mathbb{Q}} 1\}$ constituye una base de $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, y así, v es una combinación lineal de un número finito de ellos. Por tanto, existe un $F \subset E$ generado por un número finito de los u_j tal que $v \in \widehat{F}$. Entre todos estos \mathbb{Q} -subespacios vectoriales F de E de dimensiones finitas, escogemos uno que tenga la dimensión más pequeña. Entonces tenemos que $g(F) = F$ como, de lo contrario, podemos reemplazar F con $F \cap g(F)$ debido a que $v \in \widehat{F} \cap \widehat{g(\widehat{F})} = \widehat{F \cap g(F)}$.

El polinomio mínimo de $\widehat{g|_{\widehat{F}}} : \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ y de $g|_F : F \rightarrow F$ coinciden. Denotamos al último polinomio por P_F . Entonces, $P_F(\lambda) = 0$, y así, $P_F = Q \cdot P_\lambda$ para algún $Q(t) \in \mathbb{Q}[t]$. La conclusión se sigue del hecho de que cualquier vector no nulo de $\text{Im}(Q(g|_F))$ ($\text{Im}(Q(g|_F)) \neq \{0\}$) ya de lo contrario $P_F = Q$, y así, $P_\lambda = 0$) tiene polinomio mínimo para g (o $g|_F$) igual a P_λ .

Sea $w \in \text{Im}(Q(g|_F))$ con $w \neq 0$, por lo que existe $u \in F$ tal que $w = (Q(g))(u)$. Y así, tenemos que

$$(P_\lambda(g))(w) = (P_\lambda(g))((Q(g))(u)) = (P_\lambda(g) \circ Q(g))(u) = (Q(g) \circ P_\lambda(g))(u) = (P_F(g))(u) = 0.$$

Supongamos ahora que existe un polinomio $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\text{grado}(P) < \text{grado}(P_\lambda)$ y que $(P(g))(w') = 0$ para todo $w' \in \text{Im}(Q(g|_F))$, siendo esto último equivalente a que $(P(g) \cdot Q(g))(u') = 0$ para todo $u' \in F$, llegando así a una contradicción con que P_F sea el polinomio mínimo de $g|_F : F \rightarrow F$ puesto que $\text{grado}(P(t) \cdot Q(t)) < \text{grado}(P_\lambda(t) \cdot Q(t)) = \text{grado}(P_F)$. En definitiva, $P_w(t) = P_\lambda(t)$. □

Observación 5.6. De ahora en adelante no haremos distinción entre $f_{\mathbb{Q}}^*$ y $f_{\mathbb{C}}^*$, y d denotará el grado de λ sobre \mathbb{Q} , $d = \text{grado}(\lambda) = \text{grado}(P_\lambda)$.

Lema 5.7. Si f^* tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existe un autovector no nulo $z \in \check{H}^1(X; \mathbb{C})$ asociado a λ de la forma $z = \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j w_j$ donde $\mu_j \in \mathbb{C}$ son números algebraicos y $w_j \in \check{H}^1(X; \mathbb{Q})$.

Demostración. Por el Lema 5.5, existe un vector no nulo $w \in \check{H}^1(X; \mathbb{Q})$ cuyo polinomio mínimo para $f_{\mathbb{Q}}^*$ es igual a $P_\lambda(t)$. Sean $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ sus raíces complejas. Y entonces, $P_\lambda(t) = (t - \lambda) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_d)$.

Veremos a continuación que el conjunto $\{w, f^*(w), \dots, (f^*)^{d-1}(w)\}$ es linealmente independiente en $\check{H}^1(X; \mathbb{Q})$ y por tanto también en $\check{H}^1(X; \mathbb{C})$. Sean $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{Q}$ tales que $a_0 w + a_1 f^*(w) + \dots + a_{d-1} (f^*)^{d-1}(w) = 0$, es decir, el polinomio $P(t) := a_0 t^0 + a_1 t + \dots + a_{d-1} t^{d-1} \in \mathbb{Q}[t]$ es tal que $(P(f^*))(w) = 0$, pero como $\text{grado}(P) < \text{grado}(P_w)$, concluimos que $P(t) = 0$, es decir, $a_0 = a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$.

Definimos un vector $z \in \check{H}^1(X; \mathbb{C})$ como

$$z := (f^* - \lambda_2) \dots (f^* - \lambda_d)(w),$$

y si $\text{grado}(P_\lambda) = 1$, entonces $z := w$. Evidentemente $(f^* - \lambda)(z) = (P_\lambda(f^*))(w) = 0$, y así, $f^*(z) = \lambda z$. Además, z es no nulo. Para comprobar esto expandimos su definición

$$\begin{aligned} z &= (f^*)^{d-1}(w) - (\lambda_2 + \dots + \lambda_d)(f^*)^{d-2}(w) + \dots + (-1)^{d-1} \lambda_2 \dots \lambda_d w \\ &= \mu_0 (f^*)^{d-1}(w) + \mu_1 (f^*)^{d-2}(w) + \dots + \mu_{d-1} w \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de $w, f^*(w), \dots, (f^*)^{d-1}(w)$ con coeficientes complejos μ_j donde al menos uno de ellos es no nulo ($\mu_0 = 1$). En particular, $z \neq 0$ (ya que $\{w, f^*(w), \dots, (f^*)^{d-1}(w)\}$ es linealmente independiente) y z es un autovector asociado al autovalor λ .

Finalmente, observemos que los μ_j son números algebraicos. En efecto, todos los μ_j (que son suma y productos de los λ_j) son números algebraicos puesto que el conjunto de números algebraicos constituye un cuerpo (ver por ejemplo el Corolario 2.6 de la página 232 de [Lang(2002)]).

□

Observación 5.8. De manera similar al Paso 1 de la Sección 5.3, podemos asumir que la descripción de z en el lema es válida a escala \mathcal{U} . De hecho, podemos encontrar un recubrimiento abierto \mathcal{V} de X y clases $z' \in H_{\mathcal{V}}^1(X; \mathbb{C})$, $w'_j \in H_{\mathcal{V}}^1(X; \mathbb{Q})$ tales que $\tau_{\mathcal{V}}(z') = z$, $\tau_{\mathcal{V}}(w'_j) = w_j$. Entonces, para algún \mathcal{U} más fino que \mathcal{V} , $\tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}(\sum \mu_j w'_j) = \tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}(z')$. Por tanto, con un abuso de la notación

$$z = \sum \mu_j w_j \text{ en } H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C}),$$

donde $w_j \in H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{Q})$. Y al igual que en el Paso 1, refinando \mathcal{U} podemos garantizar que la ecuación de autovector $f^*(z) = \lambda z$ se mantiene en $H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C})$.

5.4.2. Un lema de la aproximación diofántica

Comencemos con un teorema debido a Schmidt que generaliza varios resultados clásicos y que a grandes rasgos nos dice que los números algebraicos son mal aproximados por los números irracionales. El resultado preciso es el Teorema 2 de [Schmidt(1970)]:

Teorema 5.9. Sean ν_1, \dots, ν_m números algebraicos reales tales que $1, \nu_1, \dots, \nu_m$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Para cualquier $\epsilon > 0$ existe solo un número finito de m -tuplas de enteros no nulos a_1, \dots, a_m con

$$\text{dist}(\nu_1 a_1 + \dots + \nu_m a_m, \mathbb{Z}) < \frac{1}{|a_1 \dots a_m|^{1+\epsilon}}.$$

Y denotamos por F al subconjunto finito de \mathbb{Z}^m cuyos puntos cumplen la desigualdad anterior.

La desigualdad anterior implica que

$$|a_0 + \nu_1 a_1 + \dots + \nu_m a_m| \geq A \cdot (\max |a_i|)^{-(m+\epsilon)} \tag{5.3}$$

para toda $(m + 1)$ -tuplas de enteros a_j , con $a_j \neq 0$ si $j > 0$, y la constante A que solo depende de ϵ :

$$A := \min \left\{ \text{dist}(\nu_1 a_1 + \dots + \nu_m a_m, \mathbb{Z}) \cdot |a_1 \dots a_m|^{1+\frac{\epsilon}{m}} : (a_1, \dots, a_m) \in F \right\}.$$

Ahora, si asumimos que el lado izquierdo de la desigualdad (5.3) no es cero, a expensas de reemplazar A por una constante más grande, podemos suponer que (a_0, a_1, \dots, a_m) abarca sobre todo \mathbb{Z}^{m+1} y los números $1, \nu_1, \dots, \nu_m$ no son necesariamente racionalmente independientes (usamos las relaciones lineales para simplificar en (5.3) hasta que solo dependa de un subconjunto máximo de ν_j que son linealmente independientes, los factores son absorbidos por A). Entonces, está claro que la desigualdad también se aplica a los complejos ν_j (nótese que la independencia lineal racional de los números complejos es más débil que la independencia de sus partes reales o imaginarias).

Establecemos $\mu_0 = 1, \mu_1, \dots, \mu_{d-1}$ del Lema 5.7 en (5.3) para deducir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una constante $A > 0$ tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j C_j \right| \geq \frac{A}{(\max |C_j|)^{d-1+\epsilon}} \tag{5.4}$$

para cualquier $(C_0, C_1, \dots, C_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ a no ser que la suma de la izquierda se anule.

En vista de la descomposición de z probada en el Lema 5.7, los posibles valores no nulos que puede tomar la integral de z sobre una clase de homología arbitraria γ pueden ser acotadas inferiormente en términos del número de símlices que componen un representante \mathcal{U} -pequeño de γ .

Lema 5.10. *Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto finito de X . Supongamos que $z \in H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{C})$ tiene la forma*

$$z = \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j w_j,$$

donde cada μ_j es un número complejo algebraico y todos los $w_j \in H_{\mathcal{U}}^1(X; \mathbb{Q})$. Y supongamos además que cada w_j es representado por algún cociclo ξ_j (con valores en \mathbb{Q}) cuyo borde se anula a escala \mathcal{U} y que $\text{Im}(\xi_j)$ es finita. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una constante $B > 0$ tal que, para cualquier ciclo \mathcal{U} -pequeño $[c] \in H_1^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{Z})$, la integral $\int_{[c]} z$ es cero o bien su valor absoluto está acotado inferiormente:

$$\left| \int_{[c]} z \right| \geq \frac{B}{\|c\|_1^{d-1+\epsilon}}.$$

Demostración. Como la imagen de cada ξ_j es finita con valores en \mathbb{Q} , existe un entero $D > 0$ tal que la imagen de cada $D\xi_j$ está formada por números enteros.

Escribimos $c = \sum_i k_i \sigma_i$ con $k_i \in \mathbb{Z}$. Por definición, la integral $\int_{[c]} z = \sum_j \mu_j \int_{[c]} w_j$ es solo la suma

$$S := \sum_j \mu_j \sum_i k_i \xi_j(\sigma_i),$$

por lo que

$$DS = \sum \mu_j C_j,$$

donde definimos $C_j := D \sum_i k_i \xi_j(\sigma_i) \in \mathbb{Z}$.

Podemos estimar C_j por $|C_j| \leq D \|\xi_j\|_\infty \sum_i |k_i| = D \|\xi_j\|_\infty \|c\|_1$, por lo que en particular

$$\text{máx } |C_j| \leq D \|c\|_1 M,$$

donde $M := \text{máx } \|\xi_j\|_\infty$.

La desigualdad (5.4) muestra que si S es no nulo, entonces su valor absoluto se puede acotar por:

$$|S| \geq \frac{1}{|D|} \frac{A}{(\text{máx } |C_j|)^{d-1+\epsilon}} \geq \frac{A}{D^{d+\epsilon} M^{d-1+\epsilon} \|c\|_1^{d-1+\epsilon}}.$$

Para terminar, solo queda reagrupar todo salvo $\|c\|_1^{d-1+\epsilon}$ en una constante B . Esta constante depende de D, M (que son fijados una vez que la elección de las cocadenas ξ_j está hecha), y de la constante A que está determinada por los μ_j y por ϵ . \square

5.4.3. Demostración de la generalización II del Teorema de Manning

Consideremos el autovector z asociado al autovalor λ del Lema 5.7 y el recubrimiento abierto \mathcal{U} como el encontrado en la Observación 5.8 pero que además garantiza que cada w_j posee un representante \mathcal{U} -pequeño ξ_j cuya imagen es finita con valores en \mathbb{Q} (ver la Observación 1.55 y el Teorema 1.68). Recordemos que de los Pasos 1-3 de la Sección 5.3, tenemos que

$$|\lambda^n| \left| \int_{[s_n]} z \right| \leq \|s_n\|_1 \|\eta\|_\infty. \tag{5.5}$$

Como z puede ser pensado como una clase de cohomología a escala \mathcal{U} y $z \neq 0 \in \check{H}^1(X; \mathbb{C})$, tenemos que z define un vector no trivial de $H_{\mathcal{V}_n}^1(X; \mathbb{C})$ que por la no degeneración de la integral en una escala específica (ver la Proposición 2.13) tiene una integral no cero sobre algún vector de $H_1^{\mathcal{V}_n}(X; \mathbb{C})$. Por la Proposición 1.45, los ciclos elementales simples generan a $H_1^{\mathcal{V}_n}(X; \mathbb{Z})$ y por tanto también a $H_1^{\mathcal{V}_n}(X; \mathbb{C})$, y de hecho, existe un ciclo elemental simple \mathcal{V}_n -pequeño s_n tal que $\int_{[s_n]} z \neq 0$.

Para el resto de la demostración consideremos $\epsilon > 0$ fijo. Ahora, por el Lema 5.10 aplicado a $z = \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j w_j$ existe una constante $B > 0$ tal que

$$\left| \int_{[s_n]} z \right| \geq \frac{B}{\|s_n\|_1^{d-1+\epsilon}}.$$

Combinando esta ecuación con (5.5) y recordando que, por definición, un ciclo simple \mathcal{V}_n -pequeño satisface que $\|s_n\|_1 \leq |\mathcal{V}_n|$. Deducimos que

$$B |\lambda|^n \leq \|\eta\|_\infty |\mathcal{V}_n|^{d+\epsilon}.$$

Nótese que en esta desigualdad $\|\eta\|_\infty, d, \epsilon$ no dependen de n . Y un sencillo calculo demuestra que

$$\frac{\log |\lambda|}{d + \epsilon} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{V}_n|,$$

y como \mathcal{V}_n era un subrecubrimiento finito arbitrario de $\mathcal{U} \vee \dots \vee f^{-n}(\mathcal{U})$ para todo n (y $\epsilon > 0$ es arbitrario), el lado izquierdo de la desigualdad acota inferiormente a $h(f, \mathcal{U})$. Se sigue por tanto que $h(f) \geq (\log |\lambda|)/d > 0$. Esto finaliza la demostración del Teorema 5.4.

Apéndice A

Nociones básicas sobre los sistemas directos/inversos

A.1. Sistemas directos e inversos

Definición A.1. Un **conjunto dirigido** es un conjunto no vacío M con una relación \succ reflexiva y transitiva tal que para cada par $\alpha, \alpha' \in M$ existe $\beta \in M$ tal que $\beta \succ \alpha, \alpha'$. Y decimos que un subconjunto $N \subset M$ es **cofinal** en M si para cada $\alpha \in M$ existe $\beta \in N$ tal que $\beta \succ \alpha$. No es muy difícil comprobar que un subconjunto $N \subset M$ cofinal en M es un conjunto dirigido.

Definición A.2. Un **sistema directo** $\{X, \tau\}$ de conjuntos sobre un conjunto dirigido M es una aplicación que asigna a cada $\alpha \in M$ un conjunto X^α , y a cada par α, β tales que $\alpha \prec \beta$ en M , una aplicación

$$\tau_{\alpha, \beta} : X^\alpha \rightarrow X^\beta$$

tal que

$$\tau_{\alpha, \alpha} = Id$$

para cada $\alpha \in M$, y

$$\tau_{\beta, \gamma} \circ \tau_{\alpha, \beta} = \tau_{\alpha, \gamma}$$

para $\alpha \prec \beta \prec \gamma$ en M .

Un **sistema inverso** $\{X, \pi\}$ de conjuntos sobre un conjunto dirigido M es una aplicación que asigna a cada $\alpha \in M$ un conjunto X_α , y a cada par α, β tal que $\alpha \prec \beta$ en M una aplicación

$$\pi_{\alpha, \beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$$

tal que

$$\pi_{\alpha, \alpha} = Id$$

para cada $\alpha \in M$, y

$$\pi_{\alpha, \beta} \circ \pi_{\beta, \gamma} = \pi_{\alpha, \gamma}$$

para $\alpha \prec \beta \prec \gamma$ en M .

Si cada X^α (X_α) es un conjunto, o un espacio topológico, o un grupo abeliano, o un R -módulo, o bien un espacio vectorial, y cada $\tau_{\alpha,\beta}$ ($\pi_{\alpha,\beta}$) es, respectivamente, una aplicación, o una aplicación continua, o un homomorfismo, o un R -homomorfismo, o una aplicación lineal, entonces $\{X, \tau\}$ ($\{X, \pi\}$) es llamado un sistema directo (inverso) de, respectivamente, conjuntos, espacios topológicos, grupos abelianos, R -módulos, o espacios vectoriales.

Por otro lado, cuando el conjunto dirigido sobre el que se considera el sistema directo (inverso) es \mathbb{N} , diremos que dicho sistema es una sucesión directa (inversa).

A.2. Límites inversos

Definición A.3. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in M}$ una colección de conjuntos indexados por el conjunto M . Denotamos por $\prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ al producto cartesiano de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in M}$. Para cada $\beta \in M$, definimos la proyección

$$p_\beta : \prod_{\alpha \in M} X_\alpha \rightarrow X_\beta$$

dada por $p_\beta(\{x_\alpha\}_{\alpha \in M}) := x_\beta$ para cualquier $\{x_\alpha\}_{\alpha \in M} \in \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$.

Definición A.4. Sea $\{X, \pi\}$ un sistema inverso de conjuntos sobre el conjunto dirigido M . El **límite inverso** $\varprojlim \{X, \pi\}$ (también lo denotaremos por $\varprojlim X_\alpha$) de $\{X, \pi\}$ es el subconjunto de $\prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ formado por las familias $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in M}$ tal que

$$\pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha$$

para cada $\alpha \prec \beta$ en M .

Definimos la proyección

$$\pi_\beta : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\beta$$

por $\pi_\beta(x) = x_\beta$ para cualquier $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in M} \in \varprojlim X_\alpha$, es decir, π_β no es más que p_β restringida al subconjunto $\varprojlim X_\alpha$ de $\prod_{\alpha \in M} X_\alpha$.

Lema A.5. Si $\alpha \prec \beta$, entonces $\pi_\alpha = \pi_{\alpha,\beta} \circ \pi_\beta$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \{X, \pi\} & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \\ \pi_\beta \downarrow & \nearrow \pi_{\alpha,\beta} & \\ & & X_\beta \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Por definición, tenemos que $\pi_\beta(x) = x_\beta$ y $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$, y como $\pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha$, concluimos que $\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x)$. \square

Sea \mathbb{X} un sistema inverso indexado por un conjunto dirigido M , y sea un subconjunto $N \subset M$ cofinal en M . Denotamos por $\mathbb{X}|_N$ al subsistema inverso de \mathbb{X} indexado por N .

Es bien sabido que el límite inverso de un sistema inverso de conjuntos, o espacios topológicos, o grupos abelianos, o R -módulos, o bien espacios vectoriales existe y es un conjunto, un espacio topológico, un grupo abeliano, un R -módulo, o un espacio vectorial respectivamente. El siguiente lema está formulado para sistemas inversos de conjuntos aunque es también válido para cualquiera de las categorías que acabamos de mencionar.

Lema A.6. *Sea \mathbb{X} un sistema inverso de conjuntos indexado por un conjunto dirigido M . Si N es cofinal en M , entonces $\varprojlim \mathbb{X}$ y $\varprojlim \mathbb{X}_{|N}$ son biyectivos.*

Demostración. Definimos una aplicación $f : \varprojlim \mathbb{X} \rightarrow \varprojlim \mathbb{X}_{|N}$ dada por $f(\{x_\alpha\}_{\alpha \in M}) := \{x_\alpha\}_{\alpha \in N}$ para cualquier $\{x_\alpha\}_{\alpha \in M} \in \varprojlim \mathbb{X}$. Claramente f está bien definida.

También definimos una aplicación $g : \varprojlim \mathbb{X}_{|N} \rightarrow \varprojlim \mathbb{X}$ de la siguiente manera: sea $\{y_\beta\}_{\beta \in N} \in \varprojlim \mathbb{X}_{|N}$. Como N es cofinal en M , para cada $\alpha \in M$ existe $\beta \in N$ tal que $\beta \succ \alpha$. Definimos $x_\alpha := \pi_{\alpha,\beta}(y_\beta)$, y $g(\{y_\beta\}_{\beta \in N}) := \{x_\alpha\}_{\alpha \in M}$.

Primero veamos que x_α está bien definido. Sean $\beta, \beta' \in N$ tales que $\beta, \beta' \succ \alpha$. Comprobemos que $\pi_{\alpha,\beta}(y_\beta) = \pi_{\alpha,\beta'}(y_{\beta'})$. Como N es un conjunto dirigido, existe $\gamma \in N$ tal que $\gamma \succ \beta, \beta'$, y como $\{y_\beta\}_{\beta \in N} \in \varprojlim \mathbb{X}_{|N}$, tenemos que $y_\beta = \pi_{\beta,\gamma}(y_\gamma)$ y $y_{\beta'} = \pi_{\beta',\gamma}(y_\gamma)$, y así,

$$\pi_{\alpha,\beta}(y_\beta) = \pi_{\alpha,\beta}(\pi_{\beta,\gamma}(y_\gamma)) = \pi_{\alpha,\gamma}(y_\gamma) = \pi_{\alpha,\beta'}(\pi_{\beta',\gamma}(y_\gamma)) = \pi_{\alpha,\beta'}(y_{\beta'}),$$

donde la segunda y tercera igualdad se siguen de la construcción del sistema directo \mathbb{X} .

Veamos ahora que g está bien definida. Para ello, comprobemos que si $\alpha' \succ \alpha$ en M , implica que $\pi_{\alpha,\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_\alpha$. Sean $\beta, \beta' \in N$ tales que $\beta \succ \alpha$ y $\beta' \succ \alpha'$, por lo que $x_\alpha = \pi_{\alpha,\beta}(y_\beta)$ y $x_{\alpha'} = \pi_{\alpha',\beta'}(y_{\beta'})$. Como N es un conjunto dirigido, existe $\gamma \in N$ tal que $\gamma \succ \beta, \beta'$, y como $\{y_\beta\}_{\beta \in N} \in \varprojlim \mathbb{X}_{|N}$, tenemos que $y_\beta = \pi_{\beta,\gamma}(y_\gamma)$ y $y_{\beta'} = \pi_{\beta',\gamma}(y_\gamma)$, y así,

$$x_\alpha = \pi_{\alpha,\beta}(y_\beta) = \pi_{\alpha,\beta}(\pi_{\beta,\gamma}(y_\gamma)) = \pi_{\alpha,\gamma}(y_\gamma)$$

y

$$\pi_{\alpha,\alpha'}(x_{\alpha'}) = \pi_{\alpha,\alpha'}(\pi_{\alpha',\beta'}(y_{\beta'})) = \pi_{\alpha,\alpha'}(\pi_{\alpha',\beta'}(\pi_{\beta',\gamma}(y_\gamma))) = \pi_{\alpha,\gamma}(y_\gamma).$$

Claramente $f \circ g = \text{Id}_{\varprojlim \mathbb{X}_{|N}}$ y $g \circ f = \text{Id}_{\varprojlim \mathbb{X}}$. Por lo que $\varprojlim \mathbb{X}$ y $\varprojlim \mathbb{X}_{|N}$ son biyectivos. \square

A.3. Límites directos

Sea $\{X, \tau\}$ un sistema directo de grupos abelianos sobre un conjunto dirigido M . La suma directa

$$\bigoplus_{\alpha \in M} X^\alpha$$

de la colección $\{X^\alpha\}_{\alpha \in M}$ es el subconjunto (en este caso, también un grupo abeliano) del producto $\prod_{\alpha \in M} X^\alpha$ consistente de las familias $\{x_\alpha\}_{\alpha \in M}$ tales que $x_\alpha = 0$ salvo para un número finito de índices de M .

Definición A.7. Definimos en $\bigoplus_{\alpha \in M} X^\alpha$ la siguiente relación de equivalencia \sim : para $\{x^\alpha\}_{\alpha \in M}$ y $\{y^\alpha\}_{\alpha \in M}$ en $\bigoplus_{\alpha \in M} X^\alpha$, decimos que $\{x^\alpha\}_{\alpha \in M} \sim \{y^\alpha\}_{\alpha \in M}$ si para cada par $\alpha, \alpha' \in M$ existe $\beta \in M$ tal que $\beta \succ \alpha, \alpha'$ y que $\tau_{\alpha, \beta}(x^\alpha) = \tau_{\alpha', \beta}(y^{\alpha'})$. El **límite directo** de $\{X, \tau\}$ se define como el cociente

$$\varinjlim X^\alpha = \left(\bigoplus_{\alpha \in M} X^\alpha \right) / \sim.$$

La aplicación natural $\bigoplus_{\alpha \in M} X^\alpha \rightarrow \varinjlim X^\alpha$ define homomorfismos $\tau_\beta : X^\beta \rightarrow \varinjlim X^\alpha$ llamados proyecciones. Dado $x \in X^\beta$, $\tau_\beta(x) := [\{x_\alpha\}_{\alpha \in M}]$ con x_α igual a x si $\alpha = \beta$ e igual a 0 en caso contrario.

Lema A.8. Si $\alpha \prec \beta$, entonces $\tau_\beta \circ \tau_{\alpha, \beta} = \tau_\alpha$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{\tau_\alpha} & \varinjlim X^\alpha \\ \tau_{\alpha, \beta} \downarrow & \nearrow \tau_\beta & \\ X^\beta & & \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Esto se sigue de que $[\tau_{\alpha, \beta}(x^\alpha)] = [x^\alpha]$ para cualquier $x^\alpha \in X^\alpha$ puesto que $\tau_{\alpha, \beta}(x^\alpha) \sim x^\alpha$. \square

Lema A.9. Sea $[\{x^\alpha\}_{\alpha \in M}] \in \varinjlim X^\alpha$. Existe $\beta \in M$ y existe $y^\beta \in X^\beta$ tal que $\tau_\beta(y^\beta) = [\{x^\alpha\}_{\alpha \in M}]$.

Demostración. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los elementos de M para los que $x^{\alpha_i} \neq 0$. Puesto que M es un conjunto dirigido, para cada par $\alpha_i, \alpha_j \in M$ existe $\beta_{i,j} \in M$ tal que $\beta_{i,j} \succ \alpha_i, \alpha_j$ y que $\tau_{\alpha_i, \beta_{i,j}}(x^{\alpha_i}) = \tau_{\alpha_j, \beta_{i,j}}(x^{\alpha_j})$. De este modo, para cualquier $\beta \in M$ tal que $\beta \succ \beta_{i,j}$ para todo i y j , tenemos que $\tau_{\alpha_i, \beta}(x^{\alpha_i}) = \tau_{\alpha_j, \beta}(x^{\alpha_j})$. Por tanto, el elemento

$$y^\beta := \tau_{\alpha_1, \beta}(x^{\alpha_1}) + \dots + \tau_{\alpha_n, \beta}(x^{\alpha_n})$$

de X^β es tal que $\tau_\beta(y^\beta) = [\{x^\alpha\}_{\alpha \in M}]$ puesto que $\tau_{\alpha_i, \beta}(x^{\alpha_i}) \sim x^{\alpha_i}$ para todo i y j . \square

Sea \mathbb{X} un sistema directo indexado por un conjunto dirigido M , y sea un subconjunto $N \subset M$ cofinal en M . Denotamos por $\mathbb{X}_{|N}$ al subsistema directo de \mathbb{X} indexado por N .

El límite directo de un sistema directo de grupos abelianos, o R -módulos, o bien espacios vectoriales existe y es un grupo abeliano, un R -módulo, o un espacio vectorial respectivamente. El siguiente lema está formulado para sistemas inversos de grupos abelianos aunque también es válido para cualquiera de las categorías que acabamos de mencionar.

Lema A.10. Si N es cofinal en M , entonces $\varinjlim \mathbb{X}$ y $\varinjlim \mathbb{X}_{|N}$ son isomorfos.

Demostración. Denotamos por $\tau'_\beta : X^\beta \rightarrow \varinjlim \mathbb{X}_{|N}$ a la proyección de X^β en $\varinjlim \mathbb{X}_{|N}$.

Definimos una aplicación $f : \varinjlim \mathbb{X} \rightarrow \varinjlim \mathbb{X}_{|N}$ de la siguiente manera: sea $z \in \varinjlim \mathbb{X}$, por lo que el Lema A.9 nos asegura que existe $\alpha \in M$ y existe $z_\alpha \in X^\alpha$ tal que $z = \tau_\alpha(z_\alpha)$. Como N es cofinal en M , existe $\beta \in N$ tal que $\beta \succ \alpha$, y así, definimos $f(z)$ como $\tau'_\beta(\tau_{\alpha, \beta}(z_\alpha))$.

Veamos que f está bien definida:

- Sea $\alpha \in M$ y sea $z_\alpha \in X^\alpha$ tal que $z = \tau_\alpha(z_\alpha)$. Sean $\beta, \beta' \in N$ tales que $\beta, \beta' \succ \alpha$. Comprobemos que $\tau'_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau'_{\beta'}(\tau_{\alpha,\beta'}(z_\alpha))$. Como N es cofinal en M , existe $\gamma \succ \beta, \beta'$, y de esta manera, como

$$\tau_{\beta,\gamma}(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau_{\alpha,\gamma}(z_\alpha) = \tau_{\beta',\gamma}(\tau_{\alpha,\beta'}(z_\alpha)),$$

tenemos que $\tau'_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau'_{\beta'}(\tau_{\alpha,\beta'}(z_\alpha))$.

- Sean $\alpha, \alpha' \in M$, y sean $z_\alpha \in X^\alpha$ y $z_{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ tales que $z = \tau_\alpha(z_\alpha) = \tau_{\alpha'}(z_{\alpha'})$. Sean $\beta, \beta' \in N$ tales que $\beta \succ \alpha$ y $\beta' \succ \alpha'$. Comprobemos que $\tau'_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau'_{\beta'}(\tau_{\alpha',\beta'}(z_{\alpha'}))$. Como $\tau_\alpha(z_\alpha) = \tau_{\alpha'}(z_{\alpha'})$, existe $\gamma \in M$ tal que $\gamma \succ \beta, \beta'$ tal que $\tau_{\beta,\gamma}(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau_{\beta',\gamma}(\tau_{\alpha',\beta'}(z_{\alpha'}))$, y como N es cofinal en M , existe $\gamma' \in N$ tal que $\gamma' \succ \gamma$, tenemos que

$$\tau_{\beta,\gamma'}(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau_{\gamma,\gamma'}(\tau_{\beta,\gamma}(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha))) = \tau_{\gamma,\gamma'}(\tau_{\beta',\gamma}(\tau_{\alpha',\beta'}(z_{\alpha'}))) = \tau_{\beta',\gamma'}(\tau_{\alpha',\beta'}(z_{\alpha'})),$$

y así, $\tau'_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau'_{\beta'}(\tau_{\alpha',\beta'}(z_{\alpha'}))$.

También definimos una aplicación $g : \varinjlim \mathbb{X}_{|N} \rightarrow \varinjlim \mathbb{X}$ de la siguiente manera: $z \in \varinjlim \mathbb{X}_{|N}$, por lo que el Lema A.9 nos asegura que existe $\beta \in N$ y existe $z_\beta \in X^\beta$ tal que $z = \tau'_\beta(z_\beta)$. Definimos $g(z)$ como $\tau_\beta(z_\beta)$.

Veamos que g está bien definida. Para ello, sea $\beta' \in N$ y sea $z_{\beta'} \in X^{\beta'}$ tal que $z = \tau'_{\beta'}(z_{\beta'})$, y comprobemos que $\tau_\beta(z_\beta) = \tau_{\beta'}(z_{\beta'})$. Como $\tau'_\beta(z_\beta) = \tau'_{\beta'}(z_{\beta'})$, existe $\gamma \in N$ tal que $\tau_{\beta,\gamma}(z_\beta) = \tau_{\beta',\gamma}(z_{\beta'})$, y así, $\tau_\beta(z_\beta) = \tau_{\beta'}(z_{\beta'})$.

Por último, veamos que $g \circ f = \text{Id}_{\varinjlim \mathbb{X}}$. Gracias al Lema A.9, esto se reduce a probar que $(g \circ f)(\tau_\alpha(z_\alpha)) = \tau_\alpha(z_\alpha)$ para todo $\alpha \in M$ y $z_\alpha \in X^\alpha$. Como N es cofinal en M , existe $\beta \in N$ tal que $\beta \succ \alpha$, y así,

$$g(f(\tau_\alpha(z_\alpha))) = g(\tau'_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha))) = \tau_\beta(\tau_{\alpha,\beta}(z_\alpha)) = \tau_\alpha(z_\alpha),$$

donde la última igualdad se sigue del Lema A.8.

Se prueba de manera análoga que $f \circ g = \text{Id}_{\varinjlim \mathbb{X}_{|N}}$, y no es muy difícil demostrar que f y g son homomorfismos. Por tanto, $\varinjlim \mathbb{X}$ y $\varinjlim \mathbb{X}_{|N}$ son isomorfos. □

A.4. Algunos resultados algebraicos

Sea $\{V, \tau\}$ una sucesión directa de espacios vectoriales. No es muy difícil comprobar que $\{V^*, \tau^*\}$ (donde a cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna el espacio vectorial dual V_n^* de V_n , y a cada par $n \leq m$ se le asigna la aplicación lineal dual $\tau_{n,m}^*$ de $\tau_{n,m}$) es un sistema inverso de espacios vectoriales. Lo anterior se tiene ya que

$$\tau_{n,n}^* = (\text{Id}_{V_n})^* = \text{Id}_{V_n^*}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y

$$\tau_{n_1,n_2}^* \circ \tau_{n_2,n_3}^* = (\tau_{n_2,n_3} \circ \tau_{n_1,n_2})^* = \tau_{n_1,n_3}^*$$

para $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ en \mathbb{N} .

Proposición A.11. Sea $\{V, \tau\}$ una sucesión directa de espacios vectoriales. Entonces

$$\text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K}) = \varprojlim V_n^*,$$

donde \mathbb{K} es el cuerpo sobre el que están definidos los espacios vectoriales V_n .

Demostración. Definimos la aplicación

$$\psi : \text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K}) \longrightarrow \varprojlim V_n^*$$

dada por $\psi(\bar{g}) = (\bar{g} \circ \tau_0, \bar{g} \circ \tau_1, \dots)$ para cualquier $\bar{g} \in \text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K})$. Dicha aplicación está bien definida puesto que $(\bar{g} \circ \tau_0, \bar{g} \circ \tau_1, \bar{g} \circ \tau_2, \dots) \in \varprojlim V_n^*$: para $n \leq m$, tenemos que

$$\tau_{n,m}^*(\bar{g} \circ \tau_m) = \bar{g} \circ \tau_m \circ \tau_{n,m} = \bar{g} \circ \tau_n,$$

donde la última igualdad se sigue del Lema A.8. Además, no es muy difícil comprobar que la aplicación ψ es lineal.

Por otro lado, definimos la aplicación

$$\phi : \varprojlim V_n^* \rightarrow \text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K})$$

de la siguiente manera: sea $g \in \varprojlim V_n^*$ y sea $v \in \varinjlim V_n$, y entonces, el Lema A.9 nos asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $v_n \in V_n$ tal que $\tau_n(v_n) = v$, y así, definimos $(\phi(g))(v) = g_n(v_n)$. Veamos que ϕ está bien definida: sea $v \in \varinjlim V_n$, y sean $v_n \in V_n$ y $v_m \in V_m$ tales que $\tau_n(v_n) = \tau_m(v_m) = v$. Como v_n y v_m representan a la misma clase v , existe un $m' \geq n, m$ y que $\tau_{n,m'}(v_n) = \tau_{m,m'}(v_m)$. Por otro lado, como $g = (g_0, g_1, \dots) \in \varprojlim V_n^*$, se tiene que $g_n = \tau_{n,m'}^*(g_{m'})$ y $g_m = \tau_{m,m'}^*(g_{m'})$. En consecuencia, tenemos que

$$g_n(v_n) = (\tau_{n,m'}^*(g_{m'}))(v_n) = g_{m'}(\tau_{n,m'}(v_n))$$

coincide con

$$g_m(v_m) = (\tau_{m,m'}^*(g_{m'}))(v_m) = g_{m'}(\tau_{m,m'}(v_m)).$$

Por último, veamos que:

- $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K})}$

Sea $\bar{g} \in \text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K})$. Sea $v \in \varinjlim V_n$, por lo que el Lema A.9 nos asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $v_n \in V_n$ tal que $\tau_n(v_n) = v$, y así,

$$((\phi \circ \psi)(\bar{g}))(v) = (\phi(\bar{g} \circ \tau_0, \bar{g} \circ \tau_1, \dots))(v) = (\bar{g} \circ \tau_n)(v_n) = \bar{g}(\tau_n(v_n)) = \bar{g}(v).$$

- $\psi \circ \phi = \text{Id}_{\varprojlim V_n^*}$

Sea $g \in \varprojlim V_n^*$, y entonces $(\psi \circ \phi)(g) = \psi(\phi(g)) = (\phi(g) \circ \tau_0, \phi(g) \circ \tau_1, \dots)$. Fijando $m \in \mathbb{N}$. Sea $v_m \in V_m$. Como $v_m \in V_m$ es un representante de $\tau_m(v_m) \in \varinjlim V_n$, tenemos que $(\phi(g))(\tau_m(v_m)) = g_m(v_m)$, probando así que $\phi(g) \circ \tau_m = g_m$. En definitiva, $(\psi \circ \phi)(g) = g$.

No es muy difícil comprobar que ϕ y ψ son aplicaciones lineales, y así, por lo anterior, concluimos que $\text{Hom}(\varinjlim V_n, \mathbb{K})$ y $\varprojlim V_n^*$ son isomorfos. □

Sea ahora $V_0 \leftarrow V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow \dots$ una sucesión inversa de espacios vectoriales. La pregunta que abordamos ahora es la siguiente: dado un elemento v_n de V_n , ¿bajo qué condiciones es posible construir un elemento del límite inverso de la sucesión que tenga a v_n como su n -ésima entrada? Está claro cómo definir las entradas por debajo de la entrada n -ésima, simplemente iterando v_n hacia adelante a lo largo de la sucesión inversa. Está claro también que para construir v_{n+1}, v_{n+2}, \dots uno necesita ser capaz de iterar v_n hacia atrás a lo largo de la sucesión inversa, y así v_n deberá pertenecer a las imágenes de V_{n+1}, V_{n+2}, \dots en V_n . Es sencillo ver que, en general, ni siquiera esta condición es suficiente para responder nuestra cuestión de manera afirmativa. Sin embargo, cuando los espacios vectoriales involucrados en la sucesión son de dimensiones finitas, podremos responder la pregunta anterior, ver la Observación A.16.

Sea $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ una sucesión inversa de espacios vectoriales. Decimos que la sucesión inversa \mathbb{V} es **Mittag–Leffler** si todo $n \in \mathbb{N}$ admite un $m_n \geq n$ (un índice de Mittag-Leffler para n) tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_{n,m_n})$ para todo $m \geq m_n$. Y decimos que la sucesión inversa \mathbb{V} es **uniformemente movable** si cualquier $n \in \mathbb{N}$ admite un $m_n \geq n$ (un índice de movilidad uniforme para n) tal que existe una aplicación lineal $r : V_{m_n} \rightarrow \varprojlim \mathbb{V}$ satisfaciendo que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{m_n} & \xrightarrow{\pi_{n,m_n}} & V_n \\ r \downarrow & \nearrow \pi_n & \\ \varprojlim \mathbb{V} & & \end{array}$$

es conmutativo.

Lema A.12. *Sea \mathbb{V} una sucesión inversa de espacios vectoriales. Sea M un subconjunto cofinal en \mathbb{N} . Entonces,*

- a). \mathbb{V} es Mittag–Leffler si y solo si $\mathbb{V}|_M$ es Mittag–Leffler,
- b). \mathbb{V} es uniformemente movable si y solo si $\mathbb{V}|_M$ es uniformemente movable.

Demostración. a). \Rightarrow . Sea $n \in M$. Como \mathbb{V} es Mittag–Leffler, existe $m_n \in \mathbb{N}$ con $m_n \geq n$ tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_{n,m_n})$ para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq m_n$. Como M es cofinal en \mathbb{N} , existe $m'_n \in M$ con $m'_n \geq m_n$, y por lo anterior, $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_{n,m'_n})$ para todo $m \in M$ con $m \geq m'_n$, y así, $\mathbb{V}|_M$ es Mittag–Leffler.

\Leftarrow . Sea $n \in \mathbb{N}$. Como M es cofinal en \mathbb{N} , existe $n' \in M$ con $n' \geq n$, y como $\mathbb{V}|_M$ es Mittag–Leffler, existe $m_{n'} \in M$ tal que $\text{Im}(\pi_{n',m}) = \text{Im}(\pi_{n',m_{n'}})$ para todo $m \in M$ con $m \geq m_{n'}$. Sea $m' \in \mathbb{N}$ con $m' \geq m_{n'}$, y como M es cofinal en \mathbb{N} , existe $m \in M$ con $m \geq m'$. Como el siguiente

es conmutativo (la conmutatividad del triángulo derecho se sigue del Lema A.5) y como $\pi_{n,m_{n'}} = \pi_{n,n'} \circ \pi_{n',m_{n'}}$ (por construcción del sistema inverso \mathbb{V}), tenemos que $\pi_{n,m_{n'}} = \pi_n \circ r$. \square

Lema A.13. *Si una sucesión inversa $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ de espacios vectoriales es Mittag-Leffler, entonces también es uniformemente movable.*

Demostración. Sea $N := \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ una subsucesión de \mathbb{N} tal que n_{k+1} es un índice de Mittag-Leffler para n_k . Sea $\mathbb{V}|_N$ la subsucesión inversa de \mathbb{V} indexada por N . Como N es cofinal en \mathbb{N} , el Lema A.12 nos asegura que $\mathbb{V}|_N$ es Mittag-Leffler si y solo si \mathbb{V} es Mittag-Leffler. Y así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión inversa \mathbb{V} es tal que $n+1$ es un índice de Mittag-Leffler para n .

Sea $v'_{n+1} \in V_{n+1}$. Definimos $v_n := \pi_{n,n+1}(v'_{n+1}) \in V_n$, por lo que $v_n \in \text{Im}(\pi_{n,n+1})$, y como $n+1$ es un índice de Mittag-Leffler para n , tenemos que $\text{Im}(\pi_{n,n+1}) = \text{Im}(\pi_{n,n+2})$, y por tanto, $v_n \in \text{Im}(\pi_{n,n+2})$. Así que existe un $w_{n+2} \in V_{n+2}$ tal que $\pi_{n,n+2}(w_{n+2}) = v_n$, y definimos $v_{n+1} := \pi_{n+1,n+2}(w_{n+2})$. Análogamente, como $v_{n+1} \in \text{Im}(\pi_{n+1,n+2})$ y como $n+2$ es un índice de Mittag-Leffler para $n+1$, tenemos que $v_{n+1} \in \text{Im}(\pi_{n+1,n+3})$, por lo que existe $w_{n+3} \in V_{n+3}$ tal que $\pi_{n+1,n+3}(w_{n+3}) = v_{n+1}$, y definimos $v_{n+2} := \pi_{n+2,n+3}(w_{n+3})$. Definimos de esta manera los v_m para todo $m \geq n$, y tenemos que la aplicación $r : V_{n+1} \rightarrow \varprojlim V_n$ definida por $r(v'_{n+1}) := (\pi_{0,n}(v_n), \pi_{1,n}(v_n), \dots, \pi_{n-1,n}(v_n), v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots)$, es tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{n+1} & \xrightarrow{\pi_{n,n+1}} & V_n \\ r \downarrow & \nearrow \pi_n & \\ \varprojlim V_n & & \end{array}$$

es conmutativo. La conmutatividad del anterior diagrama se sigue inmediatamente de la definición de r , mientras que el hecho de que r esté bien definida (es decir, que $r(v'_{n+1}) \in \varprojlim V_n$) se sigue de que $v_{m+1} = \pi_{m+1,m+2}(w_{m+2})$ y $v_m = \pi_{m,m+2}(w_{m+2}) = \pi_{m,m+1}(\pi_{m+1,m+2}(w_{m+2})) = \pi_{m,m+1}(v_{m+1})$ para todo $m \geq n$. \square

Lema A.14. *Si una sucesión inversa $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ de espacios vectoriales es uniformemente movable, entonces para cualquier n , existe un $m_n \geq n$ tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_n)$ para todo $m \geq m_n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{V} es uniformemente movable, existe $m_n \geq n$ y existe una aplicación lineal $r : V_{m_n} \rightarrow \varprojlim \mathbb{V}$ tal que $\pi_n \circ r = \pi_{n,m_n}$. Comprobemos que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_n)$ para cualquier $m \geq m_n$:

- \subset . Sea $v \in \text{Im}(\pi_{n,m})$, por lo que existe $w \in V_m$ tal que $\pi_{n,m}(w) = v$, y por construcción de la sucesión inversa \mathbb{V} , tenemos que $\pi_{n,m_n}(\pi_{m_n,m}(w)) = v$. Por hipótesis,

$$(\pi_n \circ r)(\pi_{m_n,m}(w)) = \pi_{m_n,m}(\pi_{n,m_n}(w)) = v.$$

Y así, $v \in \text{Im}(\pi_n)$.

- \supset . Sea $v \in \text{Im}(\pi_n)$, por lo que existe $w \in \varprojlim \mathbb{V}$ tal que $v = \pi_n(w)$. Por el Lema A.5, tenemos que $\pi_{n,m} \circ \pi_m = \pi_n$, y así, $v = \pi_n(w) = \pi_{n,m}(\pi_m(w))$, por lo que $v \in \text{Im}(\pi_{n,m})$.

□

Lema A.15. Si una sucesión inversa $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ de espacios vectoriales es tal que para cada n , existe un $m_n \geq n$ tal que la dimensión de $\text{Im}(\pi_{n,m_n})$ es finita, entonces \mathbb{V} es Mittag-Leffler.

Demostración del Lema A.15. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{n''} & \xrightarrow{\pi_{n,n''}} & V_n \\ & \searrow \pi_{n',n''} & \nearrow \pi_{n,n'} \\ & & V_{n'} \end{array}$$

es conmutativo para $n \leq n' \leq n''$ (por construcción de la sucesión inversa \mathbb{V}), tenemos la siguiente sucesión $V_n \supset \text{Im}(\pi_{n,n+1}) \supset \text{Im}(\pi_{n,n+2}) \supset \dots$ de espacios vectoriales, y así, $\dim(V_n) \geq \dim(\text{Im}(\pi_{n,n+1})) \geq \dim(\text{Im}(\pi_{n,n+2})) \geq \dots$. Como $\text{Im}(\pi_{n,m_n})$ tiene dimensión finita y la sucesión de dimensiones anterior está acotada inferiormente por el 0, existe un $m \geq m_n$ tal que $\dim(\text{Im}(\pi_{n,m})) = \dim(\text{Im}(\pi_{n,m'}))$ para todo $m' \geq m$, es decir, la dimensión se estabiliza después de cierto nivel. Como $\text{Im}(\pi_{n,m}) \supset \text{Im}(\pi_{n,m'})$ para todo $m' \geq m$, tenemos que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_{n,m'})$ para todo $m' \geq m$. Hasta aquí, hemos probado que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un $m \geq n$ tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_{n,m'})$ para todo $m' \geq m$, es decir, \mathbb{V} es Mittag-Leffler. □

Por lo anterior, y gracias a los Lemas A.13 y A.14, tenemos la siguiente observación:

Observación A.16. Si $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ es una sucesión inversa de espacios vectoriales con dimensiones finitas, entonces para cualquier n , existe un $m_n \geq n$ tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_n)$ para todo $m \geq m_n$. De esta manera, si uno tiene un $v_n \in V_n$ para el que existe un $v_{m_n} \in V_{m_n}$ tal que $\pi_{n,m_n}(v_{m_n}) = v_n$, entonces existe $v \in \varprojlim \mathbb{V}$ que tiene a v_n como su n -ésima entrada (es decir, $\pi_n(v) = v_n$).

Lema A.17. Sea $\mathbb{V} = \{V, \pi\}$ un sistema inverso de espacios vectoriales indexados por el conjunto dirigido I que posee una sucesión cofinal N . Supongamos que todos los V_i tienen dimensiones finitas. Y supongamos además que $\varprojlim \mathbb{V}$ tiene dimensión finita. Tenemos que las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (I) Existe $i_0 \in I$ tal que la proyección $\pi_j : \varprojlim \mathbb{V} \rightarrow V_j$ es inyectiva para cualquier $j \succ i_0$.
- (II) Para cualquier $i \in I$, existe $j_i \in I$ con $j_i \succ i$ tal que $\text{Im}(\pi_i) = \text{Im}(\pi_{i,j_i})$ para todo $j \succ j_i$.

Demostración. (I) Como $\varprojlim \mathbb{V}$ tiene dimensión finita, los núcleos de las proyecciones $\pi_i : \varprojlim \mathbb{V} \rightarrow V_i$ tienen dimensiones finitas y satisfacen que $\text{Ker}(\pi_j) \subset \text{Ker}(\pi_i)$ para $j \succ i$ puesto que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \mathbb{V} & & \\ \pi_j \downarrow & \searrow \pi_i & \\ V_j & \xrightarrow{\pi_{i,j}} & V_i \end{array}$$

es conmutativo (debido al Lema A.5). Y además, $\bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i) = \{0\}$. Por tanto, $\text{Ker}(\pi_{i_0}) = \{0\}$ para algún $i_0 \in I$, y de aquí se sigue el resultado.

(II) Sea $i \in I$. Como N es cofinal en I , existe $n \in N$ tal que $n \succ i$. La sucesión inversa $\mathbb{V}|_N$ cumple las hipótesis de la Observación A.16, por lo que existe $m_n \in N$ con $m_n \succ n$ tal que $\text{Im}(\pi_{n,m}) = \text{Im}(\pi_n)$ para todo $m \in N$ con $m \succ m_n$. Sea $j \in I$ con $j \succ m_n$. Como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varprojlim \mathbb{V} & & \\
 & \swarrow \pi_j & \downarrow \pi_{m_n} & \searrow \pi_n & \\
 V_j & \xrightarrow{\pi_{m_n,j}} & V_{m_n} & \xrightarrow{\pi_{n,m_n}} & V_n
 \end{array}$$

es conmutativo (por construcción del sistema inverso \mathbb{V} y por el Lema A.5), tenemos que

$$\text{Im}(\pi_n) \leq \text{Im}(\pi_{n,j}) \leq \text{Im}(\pi_{n,m_n}) \leq V_n,$$

y como $\text{Im}(\pi_n) = \text{Im}(\pi_{n,m_n})$, tenemos que $\text{Im}(\pi_n) = \text{Im}(\pi_{n,j})$. Por último, como $\pi_i = \pi_{i,n} \circ \pi_n$ y $\pi_{i,j} = \pi_{i,n} \circ \pi_{n,j}$, tenemos que $\text{Im}(\pi_i) = \text{Im}(\pi_{i,j})$.

□

Bibliografía

- [Adler, Konheim, y McAndrew(1965)] Adler, R. L., A. G. Konheim, y M. H. McAndrew (1965): Topological Entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 144 (2): 309-319, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-1965-0175106-9>.
- [Alexander(1935)] Alexander, James Waddell (1935): On the Chains of a Complex and Their Duals, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 21 (8): 509–511, URL <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.21.8.509>.
- [Atiyah y MacDonald(1969)] Atiyah, Michael Francis e Ian Grant MacDonald (1969): *Introduction To Commutative Algebra*, CRC Press: , URL <http://dx.doi.org/10.1201/9780429493638>.
- [Blanchard, Glasner, Kolyada, y Maass(2002)] Blanchard, François, Eli Glasner, Sergii Kolyada, y Alejandro Maass (2002): On Li-Yorke pairs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2002 (547): 51-68, URL <http://dx.doi.org/10.1515/crll.2002.053>.
- [Block y Keesling(2004)] Block, Louis y James Keesling (2004): A characterization of adding machine maps, *Topology and its Applications*, 140 (2-3): 151–161, URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2003.07.006>.
- [Bredon(1993)] Bredon, Glen E. (1993): *Topology and Geometry*, Springer New York: , URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-6848-0>.
- [Buescu, Kulczycki, y Stewart(2006)] Buescu, Jorge, Marcin Kulczycki, e Ian Stewart (2006): Liapunov stability and adding machines revisited, *Dynamical Systems*, 21: 379–384, URL <http://dx.doi.org/10.1080/14689360600649815>.
- [Buescu y Stewart(1995)] Buescu, Jorge e Ian Stewart (1995): Liapunov stability and adding machines, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15 (2): 271–290, URL <http://dx.doi.org/10.1017/s0143385700008373>.
- [Dowker(1952)] Dowker, Clifford Hugh (1952): Homology Groups of Relations, *Annals of Mathematics*, 56 (1): 84-95, URL <http://dx.doi.org/10.2307/1969768>.
- [Downarowicz(2013)] Downarowicz, T. (2013): Positive topological entropy implies chaos DC2, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142 (1): 137–149, URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11717-X>.

- [Eilenberg y Steenrod(1952)] Eilenberg, Samuel y Norman Steenrod (1952): *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press: Princenton, New Jersey, URL <http://dx.doi.org/10.1515/9781400877492>.
- [Franks y Richeson(2000)] Franks, John y David Richeson (2000): Shift equivalence and the Conley index, *Transactions of the American Mathematical Society*, 352 (7): 3305–3322, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-00-02488-0>.
- [Giraldo, Morón, Ruiz del Portal, y Sanjurjo(2001)] Giraldo, Antonio, Manuel Alonso Morón, Francisco Romero Ruiz del Portal, y José Manuel Rodríguez Sanjurjo (2001): Finite approximations to Čech homology, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 163 (1): 81–92, URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0022-4049\(00\)00158-4](http://dx.doi.org/10.1016/s0022-4049(00)00158-4).
- [Gordon(1955)] Gordon, William L. (1955): Locally-finitely-valued cohomology groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6 (4): 656–662, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1955-0071772-6>.
- [Hatcher(2002)] Hatcher, A. (2002): *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge: , URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0013091503214620>.
- [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2019)] Hernandez-Corbato, Luis, David Jesús Nieves-Rivera, Francisco Romero Ruiz del Portal, y Jaime Jorge Sánchez-Gabites (2019): Dynamics and eigenvalues in dimension zero, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 40 (9): 2434-2452, URL <http://dx.doi.org/10.1017/etds.2018.139>.
- [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2021)] Hernandez-Corbato, Luis, David Jesús Nieves-Rivera, Francisco Romero Ruiz del Portal, y Jaime Jorge Sánchez-Gabites (2021): Integration in Čech theories and a bound on entropy, URL <http://dx.doi.org/10.48550/ARXIV.2112.14181>.
- [Hernandez-Corbato, Nieves-Rivera, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2022)] Hernandez-Corbato, Luis, David Jesús Nieves-Rivera, Francisco Romero Ruiz del Portal, y Jaime Jorge Sánchez-Gabites (2022): On the components of the unstable set of isolated invariant sets, *aceptado para su publicación en Topology and Its Applications*.
- [Hernández-Corbato, Ruiz del Portal, y Sánchez-Gabites(2020)] Hernández-Corbato, Luis, Francisco Romero Ruiz del Portal, y Jaime Jorge Sánchez-Gabites (2020): Infinite series in cohomology: attractors and Conley index, *Mathematische Zeitschrift*, 294 (3-4): 1127–1180, URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00209-019-02318-5>.
- [Katok y Hasselblatt(1995)] Katok, Anatole y Boris Hasselblatt (1995): *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press: , URL <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511809187>.
- [Keesee(1950)] Keesee, John W. (1950): Finitely-valued cohomology groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1 (4): 418–422, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1950-0036993-2>.

- [Kolyada(2004)] Kolyada, Sergiy (2004): Li-Yorke sensitivity and other concepts of chaos, *Ukrainian Mathematical Journal*, 56 (8): 1242–1257, URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11253-005-0055-4>.
- [Kolyada y Snoha(2009)] Kolyada, Sergiy y L'ubomír Snoha (2009): Minimal dynamical systems, *Scholarpedia*, 4 (11): 5803, URL <http://dx.doi.org/10.4249/scholarpedia.5803>.
- [Lang(2002)] Lang, Serge (2002): *Algebra*, Springer New York, NY: , URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0>.
- [Li y Yorke(1975)] Li, Tien-Yien y James A. Yorke (1975): Period Three Implies Chaos, *The American Mathematical Monthly*, 82 (10): 985, URL <http://dx.doi.org/10.2307/2318254>.
- [Manning(1975)] Manning, Anthony (1975): Topological Entropy and the First Homology Group, in: *Dynamical systems—Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974)*, vol. 468, Springer Berlin Heidelberg: , 185–190, URL <http://dx.doi.org/10.1007/bfb0121394>.
- [Mardešić y Segal(1982)] Mardešić, Sibe y Jack Segal (1982): *Shape theory. The inverse system approach*, North-Holland Mathematical Library, 26, North-Holland Publishing Co.: .
- [Massey(1978)] Massey, William Schumacher (1978): How to give an Exposition of the Čech-Alexander-Spanier type Homology Theory, *The American Mathematical Monthly*, 85 (2): 75, URL <http://dx.doi.org/10.2307/2321782>.
- [Mischaikow y Mrozek(2002)] Mischaikow, Konstantin y Marian Mrozek (2002): Conley Index, in: *Handbook of Dynamical Systems*, North-Holland, Amsterdam: , 393–460, URL [http://dx.doi.org/10.1016/s1874-575x\(02\)80030-3](http://dx.doi.org/10.1016/s1874-575x(02)80030-3).
- [Mrozek(1990)] Mrozek, Marian (1990): Leray functor and cohomological conley index for discrete dynamical systems, *Transactions of the American Mathematical Society*, 318 (1): 149–178, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-1990-0968888-1>.
- [Munkres(1984)] Munkres, James R. (1984): *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.: , URL <http://dx.doi.org/10.1201/9780429493911>.
- [Robbin y Salamon(1988)] Robbin, Joel W. y Dietmar Salamon (1988): Dynamical systems, shape theory and the Conley index, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8 (8): 375–393, URL <http://dx.doi.org/10.1017/s0143385700009494>.
- [Ruiz del Portal y Sánchez-Gabites(2014)] Ruiz del Portal, Francisco Romero y Jaime Jorge Sánchez-Gabites (2014): Čech cohomology of attractors of discrete dynamical systems, *Journal of Differential Equations*, 257 (8): 2826–2845, URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.055>.
- [Schmidt(1970)] Schmidt, Wolfgang M. (1970): Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Mathematica*, 125: 189–201, URL <http://dx.doi.org/10.1007/bf02392334>.

- [Schweizer y Smítal(1994)] Schweizer, B. y J. Smítal (1994): Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval, *Transactions of the American Mathematical Society*, 344 (2): 737–754, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-1994-1227094-x>.
- [Shub(1974)] Shub, Michael (1974): Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80: 27-41, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9904-1974-13344-6>.
- [Smítal(1986)] Smítal, Jaroslav (1986): Chaotic Functions with Zero Topological Entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 297 (1): 269, URL <http://dx.doi.org/10.2307/2000468>.
- [Spanier(1948)] Spanier, Edwin H. (1948): Cohomology Theory for General Spaces, *Annals of Mathematics*, 49 (2): 407–427, URL <http://dx.doi.org/10.2307/1969289>.
- [Spanier(1966)] Spanier, Edwin H. (1966): *Algebraic Topology*, McGraw–Hill Book Co.: , URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9322-1>.
- [Stone(1948)] Stone, Arthur Harold (1948): Paracompactness and product spaces, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54 (10): 977–982, URL <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9904-1948-09118-2>.
- [Čech(1932)] Čech, Eduard (1932): Théorie générale de l’homologie dans un espace quelconque, *Fundamenta Mathematicae*, 19 (1): 149-183, URL <http://dx.doi.org/10.4064/fm-19-1-149-183>.
- [Vietoris(1927)] Vietoris, Leopold (1927): Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Mathematische Annalen*, 97 (1): 454–472, URL <http://dx.doi.org/10.1007/bf01447877>.
- [Wilder(1949)] Wilder, Raymond Louis (1949): *Topology of Manifolds*, vol. 32, American Mathematical Society: , URL <http://dx.doi.org/10.1090/coll/032>.