

R. 61.156

T

1874

Métodos Numéricos de Solución de Modelos no  
Lineales bajo Expectativas Racionales.  
Aplicación al Estudio de la Interacción de Reglas  
Monetarias y Fiscales

**Tesis Doctoral**

Javier J. Pérez García

Director: Alfonso Novales Cinca

Departamento de Economía Cuantitativa  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
Universidad Complutense de Madrid

2000



*A mis padres, Víctor y Mari Carmen*  
*Por vivir la vida con espíritu investigador*



# Índice

Símbolos	xi
Agradecimientos	xiii
Presentación	xv

## I Evaluación y Análisis de Métodos de Solución de Modelos Dinámicos y Estocásticos no Lineales con Expectativas Racionales 1

<b>1 Evaluación y Comparación de Métodos de Solución de Modelos no Lineales con Expectativas Racionales</b>	<b>3</b>
1.1 Introducción . . . . .	3
1.2 Descripción de los modelos . . . . .	8
1.3 Métodos de Solución . . . . .	10
1.3.1 Métodos “casi” lineales . . . . .	11
Aproximación lineal cuadrática estándar . . . . .	11
Coeficientes Indeterminados . . . . .	13
Descomposición de autovalores y autovectores . . . . .	14
1.3.2 Parametrización de Expectativas . . . . .	16
1.4 Base para la evaluación y comparación . . . . .	17
1.4.1 Propiedades del error de predicción . . . . .	19
Correlación con el conjunto de información . . . . .	19
Propiedades de dependencia temporal . . . . .	20
1.4.2 Otras propiedades de las soluciones . . . . .	21
Reglas de decisión . . . . .	21
Funciones de respuesta a un impluso . . . . .	21
Correlaciones cruzadas, desviaciones típicas y medias . . . . .	21
1.5 Resultados . . . . .	22
1.5.1 Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico . . . . .	22
Propiedades del error de predicción . . . . .	23
Otras propiedades de las soluciones . . . . .	27
1.5.2 Modelo de Hansen (1985) . . . . .	33

	Propiedades del error de predicción . . . . .	33
	Otras propiedades de las soluciones . . . . .	36
1.5.3	Modelo de Cooley y Hansen (1989) . . . . .	42
	Propiedades del error de predicción . . . . .	42
	Otras propiedades de las soluciones . . . . .	45
1.6	Conclusiones . . . . .	54
1.7	Apéndice: reglas de decisión . . . . .	56
1.7.1	Modelo básico de crecimiento neoclásico . . . . .	56
1.7.2	Modelo de Hansen (1985) . . . . .	58
1.7.3	Modelo de Cooley y Hansen (1989) . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Elección de Condiciones Iniciales para el Método de Parame-</b>	
	<b>trización de Expectativas</b> . . . . .	<b>61</b>
2.1	Introducción . . . . .	61
2.2	Importancia de disponer de unas condiciones iniciales apropiadas . . . . .	62
2.3	Discusión del procedimiento de homotopía . . . . .	64
2.3.1	Una primera aplicación de las ideas de la homotopía . . . . .	66
2.3.2	Una segunda aplicación de las ideas de la homotopía . . . . .	67
2.4	Procedimiento basado en una aproximación lineal . . . . .	69
2.4.1	Condiciones iniciales identificadas mediante una aproxima-	
	ción lineal en logaritmos . . . . .	69
2.4.2	Condiciones iniciales estimadas mediante una aproxima-	
	ción lineal en logaritmos . . . . .	70
2.5	Resultados comparativos para el modelo de Cooley y Hansen . . . . .	72
2.6	Conclusiones . . . . .	74
2.7	Apéndice: Un ejercicio numérico en torno a la unicidad del punto	
	fijo . . . . .	76
2.7.1	Evidencia . . . . .	76
2.7.2	¿Es importante para las implicaciones económicas de las	
	soluciones obtenidas? . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Expectativas a Distintos Horizontes y Descomposición de Ex-</b>	
	<b>pectativas</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Introducción . . . . .	85
3.2	Identificación de medias móviles . . . . .	87
3.2.1	Un modelo con tecnología de <i>time-to-build</i> . . . . .	87
3.2.2	Solución usando la descomposición de autovalores y auto-	
	vectores . . . . .	89
	Análisis de estabilidad . . . . .	91
	Simulación usando directamente la aproximación lineal	
	en logaritmos . . . . .	93
	Simulación mezclando estructura de la aproximación li-	
	neal en logaritmos y del modelo no lineal original . . . . .	93
	Un ejemplo numérico . . . . .	94
3.2.3	Solución usando el método de coeficientes indeterminados . . . . .	96
3.2.4	Solución usando Parametrización de Expectativas . . . . .	96

	Parametrizando una expectativa . . . . .	96
	Parametrizando dos expectativas . . . . .	98
3.3	Descomposición de expectativas . . . . .	102
3.3.1	Solución usando la descomposición de autovalores y auto- vectores . . . . .	103
	Estado estacionario determinista . . . . .	104
	Sistema lineal en logaritmos . . . . .	105
	Descomposiciones QZ . . . . .	106
	Análisis de estabilidad . . . . .	107
	Simulación . . . . .	108
3.3.2	Solución usando Parametrización de Expectativas . . . . .	108
3.4	Conclusiones . . . . .	108

## II Aplicación al Estudio de la Interacción de Reglas Monetarias y Fiscales 111

4	<b>Análisis de la Interacción de Reglas Monetarias y Fiscales</b>	<b>119</b>
4.1	Introducción . . . . .	119
4.2	Un modelo muy neutral . . . . .	120
4.2.1	El modelo . . . . .	120
4.2.2	Equilibrio . . . . .	122
4.2.3	Entorno estocástico . . . . .	123
4.2.4	Regla fiscal . . . . .	123
4.2.5	Formas funcionales . . . . .	124
4.2.6	Estado estacionario determinista . . . . .	124
4.2.7	Análisis del modelo . . . . .	126
	Versión lineal en logaritmos . . . . .	127
	Estabilidad, existencia y unicidad del equilibrio . . . . .	128
4.3	Reglas de Política Monetaria . . . . .	129
4.3.1	Reglas de política que no reaccionan al estado de la eco- nomía y mantienen constante el instrumento . . . . .	129
	Crecimiento monetario constante . . . . .	130
	Tipo de interés nominal constante . . . . .	132
	Crecimiento monetario constante frente a tipo de in- terés nominal constante . . . . .	134
4.3.2	Reglas de política que reaccionan al estado de la economía y varían el instrumento . . . . .	135
	Objetivos de inflación y crecimiento monetario . . . . .	135
	Coordinación entre las políticas monetaria y fiscal . . . . .	137
	Análisis de estabilidad . . . . .	138
4.4	Conclusiones . . . . .	139

<b>III</b>	<b>Líneas de Investigación Futura</b>	<b>141</b>
<b>IV</b>	<b>Referencias</b>	<b>145</b>
<b>V</b>	<b>Apéndices</b>	<b>157</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice Técnico: Métodos de Solución</b>	<b>159</b>
A.1	Introducción . . . . .	159
A.2	Descripción de los métodos de solución . . . . .	159
A.2.1	Métodos "casi" lineales . . . . .	159
	Aproximación lineal cuadrática estándar . . . . .	159
	Coeficientes Indeterminados . . . . .	162
	Descomposición de autovalores y autovectores . . . . .	163
A.2.2	Parametrización de Expectativas . . . . .	165
	Algoritmo Gauss-Newton utilizado . . . . .	166
A.3	Descripción de los modelos y claves para su solución . . . . .	168
A.3.1	Modelo básico de crecimiento neoclásico . . . . .	168
	Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista . . . . .	168
	Solución analítica en un caso particular . . . . .	170
	Aproximación lineal cuadrática estándar . . . . .	173
	Coeficientes Indeterminados . . . . .	176
	Descomposición de autovalores y autovectores . . . . .	177
	Parametrización de expectativas . . . . .	180
A.3.2	Modelo de Hansen (1985) . . . . .	181
	Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista . . . . .	181
	Aproximación lineal cuadrática estándar . . . . .	183
	Coeficientes Indeterminados . . . . .	186
	Descomposición de autovalores y autovectores . . . . .	187
	Parametrización de expectativas . . . . .	191
A.3.3	Modelo de Cooley y Hansen (1989) . . . . .	192
	Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista . . . . .	192
	Aproximación lineal cuadrática estándar . . . . .	196
	Coeficientes indeterminados . . . . .	197
	Descomposición de autovalores y autovectores . . . . .	199
	Parametrización de expectativas . . . . .	203
<b>B</b>	<b>Programas en MATLAB utilizados</b>	<b>205</b>
B.1	Organización . . . . .	205
B.2	Capítulo 1 . . . . .	205
	B.2.1 Subdirectorío Basico . . . . .	206
	B.2.2 Subdirectorío Hansen85 . . . . .	207

B.2.3	Subdirectorío Cooley89 . . . . .	208
B.2.4	Subdirectory Progs . . . . .	210
B.3	Capítulo 2 . . . . .	210
B.4	Capítulo 3 . . . . .	211
B.5	Capítulo 4 . . . . .	213
B.6	Algunas Notas útiles sobre el uso de <b>MATLAB</b> y de <b>MAPLE</b> . . . . .	213
B.6.1	Matrices, autovalores y autovectores . . . . .	213
B.6.2	Definición, evaluación y diferenciación de funciones de manera analítica . . . . .	214



# Símbolos

$\vartheta_t$	variable en el periodo de tiempo $t$
$\log(\vartheta_t)$	logaritmo neperiano de $\vartheta_t$
$\vartheta_{ss}$	variable en estado estacionario
$\bar{\vartheta}_t$	$\log(\vartheta_t) - \log(\vartheta_{ss})$
$s_t$	vector de variables de estado endógenas
$v_t$	vector de variables endógenas no de estado
$z_t$	vector de variables de estado exógenas
$\varepsilon_t$	vector de innovaciones exógenas
$\eta_t$	vector de errores de previsión
$W_t$	vector de expectativas
$\psi_t$	polinomio de aproximación
$u_t$	subconjunto de $\{s_t, v_t, z_t, W_t\}$
$c_t$	consumo privado
$y_t$	producto
$k_t$	stock de capital
$N_t$	horas trabajadas
$x_t$	inversión
$R_t$	tipo de interés real
$M_t$	saldos nominales de dinero
$B_t$	bonos en términos nominales
$P_t$	nivel de precios
$m_t$	saldos reales de dinero
$b_t$	bonos en términos reales
$g_t$	tasa de crecimiento del dinero
$\tau_t$	impuestos
$G_t$	consumo público
$i_t$	tipo nominal de interés
$I_t$	$1 + i_t$
$\pi_t$	tasa de inflación
$\Pi_t$	$1 + \pi_t$

$z_t$	perturbación tecnológica
$\gamma_t$	perturbación de demanda de dinero
$G_t$	perturbación de gasto público
$\varpi_t$	perturbación de oferta de dinero
$\eta$	parámetro de aversión relativa al riesgo
$\beta$	factor de descuento subjetivo
$\delta$	tasa de depreciación
$\alpha$	participación del capital en la producción
$\rho, \rho_j$	parámetro de persistencia de la perturbación exógena $j$ , $j = z, \gamma, \dots$
$\sigma_j$	desviación típica de la perturbación exógena $j$ , $j = z, \gamma, \dots$
$\beta_j$	parámetro de política asociado al objetivo $j$
$q$	vector de coeficientes de $\psi_t$
$E_t[\bullet]$	operador esperanza condicional al conjunto de información en $t$
$^T$	transposición matricial
$P^s$	matriz de condiciones de estabilidad
$I_t$	vector de instrumentos para el contraste de den Haan-Marcet
LQA	método numérico lineal cuadrático estándar
SIM	descomposición de autovalores y autovectores en niveles
SIL	descomposición de autovalores y autovectores en logaritmos
UHL	coeficientes indeterminados
PEA	Parametrización de Expectativas

-----

# Agradecimientos

Un trabajo de las características y la magnitud de una Tesis Doctoral, es difícil que sea el resultado del concurso de una sola persona. Sin los comentarios, las críticas, el apoyo y el impulso de tantos, hubiera sido imposible realizar las páginas que siguen.

Debo agradecer en primer lugar a Alfonso Novales las horas dedicadas a este trabajo y su labor de dirección. Y sobre todo su manera de hacer investigación, y de entender la universidad y el mundo de la economía, que en estos años de estrecha relación han marcado y enriquecido mi forma de ver estas realidades.

En el entorno del profesor Novales querría agradecer la ayuda prestada por Emilio Domínguez, Esther Fernández y Jesús Ruiz, que abrieron camino delante de mí y me resolvieron numerosas cuestiones.

Desde los primeros pasos de la Tesis diversas conversaciones con Luis Puch, Harald Uhlig y Jesús Vázquez sirvieron para enriquecer el análisis realizado, centrar las cuestiones objeto de estudio y darles un mayor rigor.

También los participantes en distintos seminarios y workshops hicieron comentarios relevantes, que es necesario agradecer. En especial los de Víctor Ríos-Rull, Tim Kehoe y Frank Portier, entre otros.

El sentido práctico y el ánimo de Gustavo Marrero me ayudaron a concretar resultados y a aligerar el tamaño de la Tesis, a la vez que algunas de sus sugerencias sirvieron para mejorar aspectos conceptuales del trabajo.

A Paco André le agradezco el creerse todavía aquello de *de qué le vale al hombre ganar el mundo si pierde su vida*, y tenerlo colgado en la pared de nuestro despacho. A Sonia Benito, Borja García y Rafaela Pérez todos los buenos momentos que hemos compartido, y lo aprendido del trabajo en común. A Pablo García su inquietud incansable por la economía.

Asímismo querría agradecer el interés expresado, de una u otra manera, por muchos miembros del Departamento de Economía Cuantitativa de la Universidad Complutense de Madrid durante la elaboración de la Tesis, en especial a su director, Miguel Jerez, a Paco Álvarez, a Luis Nuño y a Carlos Sebastián.

Es obligado agradecer los medios materiales puestos a mi disposición por el Instituto Complutense de Análisis Económico, sin los cuales no habría sido posible elaborar esta memoria de Tesis. También la ayuda financiera de la Fundación Caja de Madrid fue importante.

Como el resultado del trabajo humano, una Tesis es algo más que el mero ejercicio de la inteligencia y las horas de computación. En este sentido, un

agradecimiento muy especial es para mis padres, en los que vi el espíritu investigador y buscador desde la más temprana edad, y me enseñaron a no dar respuestas fáciles a preguntas fáciles, ni respuestas difíciles a preguntas difíciles. Mis hermanos también me ayudaron, cada uno a su manera, durante el desenvolvimiento de la Tesis. Rafa, con su buen sentido y sus cautelas hacia los paradigmas dominantes en la ciencia, me obligó a plantearme en profundidad el sentido de mi investigación y a excluir barbarismos innecesarios. Muchos amigos me acompañaron durante estos años, y estoy seguro que algo hay en este trabajo que se debe a ellos.

A María Victoria me resulta difícil agradecerle algo cuando se lo tengo que agradecer casi todo, y su presencia y aliento han sido determinantes para la realización de lo que sigue. En realidad es difícil dedicar algo a alguien cuando ya es suyo.

*Javier J. Pérez*  
*Madrid, septiembre de 1999*

# Presentación

Como cualquier otra disciplina social, la economía se encuentra ante la tarea de estudiar el comportamiento humano en muchas de sus facetas que, a través de la interacción de lo individual y lo social, se reflejan en fenómenos tales como la inflación, el desempleo, el crecimiento económico o el desarrollo desigual. Reconocer la complejidad del objeto de estudio implica darse cuenta de la incertidumbre que circunda cualquier decisión, y de cómo cientos de factores se congregan ante cada elección individual, y se relacionan en el tiempo. A la vez las decisiones que se toman hoy inciden en las del futuro próximo, y éstas, o al menos lo que se espera que éstas sean, influyen en lo que hoy se llegue a hacer.

Si bien es obligado reconocer, a veces con cierto rubor, las limitaciones de lo que sabemos y lo que somos capaces de hacer, también es importante caer en la cuenta de los progresos que, paso a paso, se van realizando en el ámbito del saber económico y social. En este sentido, la teoría económica como un cuerpo integra de manera cada vez más habitual las dos características básicas que, a mi parecer, debe recoger cualquier investigación que se acerque al conocimiento de la actividad humana: la aleatoriedad y la interrelación. Esto es, la incertidumbre y la dinámica. Desde los años setenta, de mano de una generación de economistas que transformó profundamente la manera de hacer economía de su época, la construcción de pequeños laboratorios de estudio, artificiales, que recogieran estas dos características de la toma de decisiones de las familias, y estilizaran muchos otros, en el marco del análisis de equilibrio general, ha pasado a ser una corriente importante dentro de la disciplina. En un famoso trabajo de principios de la década de 1980 Lucas apuntaba, además, que el ritmo de avance de nuestra comprensión de fenómenos relevantes iría de la mano, en lo sucesivo, del avance de los instrumentos necesarios para estudiarlos, a saber, la matemática, la estadística y los ordenadores.

Cuando en septiembre de 1996, tras un verano en que estuve intentando encontrar un tema para mi entonces incipiente tesis doctoral, mediante la lectura de artículos de teoría monetaria, tuve la ocasión de asistir a la Escuela de Verano de la Asociación Europea de Economía en Florencia, caí en la cuenta de lo necesario que era para poder analizar cuestiones interesantes, el tener un bagaje importante de métodos computacionales para la solución de economías dinámicas y con incertidumbre. La intensidad del curso, unido a la calidad del profesorado y las externalidades del resto del alumnado, hicieron que me

interesara vivamente por el tema. Como resultado, en el transcurso de estos tres años he podido realizar una memoria de Tesis, que aquí se presenta, que es, en sus dos terceras partes, de carácter instrumental y metodológico. También pude participar, junto con mi director de Tesis y dos colegas más, en un Capítulo del libro *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies* que, editado por Ramón Marimón y Andrew Scott, recogía y extendía los contenidos del citado curso.

En el resto de la Tesis, usando una metodología acorde con los dos tercios primeros, se analizan distintos experimentos de política monetaria, que han sido, en el ámbito académico, la otra gran actividad a la que he dedicado mis esfuerzos en este tiempo. Dado el tamaño adquirido por la parte de métodos numéricos de solución, la cuestión monetaria ha sufrido un considerable recorte de espacio, y una gran parte del material disponible y estudiado queda para trabajos futuros y no se muestra en el presente volumen.

Las economías que se analizan se pueden describir mediante un conjunto de variables endógenas de estado,  $\{s_t\}$ , el resto de variables endógenas,  $\{v_t\}$ , y otro de variables exógenas  $\{z_t\}$ . En ellas, los agentes toman decisiones en función de sus objetivos (preferencias, beneficios...), teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias y de recursos a las que se enfrentan, y las reglas de política que el gobierno esté instrumentando, por ejemplo, sobre los tipos nominales de interés que definen la reacción de la autoridad monetaria, o las reglas sobre fijación de impuestos o determinación del consumo público. Estas decisiones los llevan a elegir una senda temporal para  $\{s_t, v_t\}$  que haga máximo o mínimo el valor presente de su función objetivo dado  $s_0$  y la senda temporal de  $\{z_t\}$ .

Una solución de equilibrio para la economía que se esté estudiando es un vector  $\{s_t, v_t, z_t\}$  que satisface el conjunto de condiciones de primer orden del problema de los agentes,

$$L^*(E_t[\phi(s_{t+1}, v_{t+1}, z_{t+1})], s_t, v_t, z_t, s_{t-1}, v_{t-1}) = 0$$

para todo  $t$ , dado el proceso exógeno  $\{z_t\}$  y  $s_0$ , y que verifica las condiciones de transversalidad del problema, que acotan la función objetivo limitando el espacio factible de la solución,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t h(s_t, v_t, z_t) < \infty$$

donde las funciones  $L^*$ ,  $\phi$  y  $h$  son conocidas una vez que se fijan los parámetros estructurales de la economía, y  $\beta$  es uno de esos parámetros, un factor de descuento subjetivo. La esperanza condicional  $E_t[\bullet]$  se toma sobre valores futuros de las variables, condicional al conjunto de información disponible en el periodo de tiempo  $t$ . Se considerará en lo que sigue que los agentes forman estas expectativas de manera *racional*, esto es, utilizan la información de la que disponen de la mejor manera posible. Esto es relevante en la medida en que garantiza la consistencia de las decisiones de los agentes con sus objetivos y restricciones. Se supondrá en todo momento información completa.

De manera alternativa, una solución se puede expresar como una regla de decisión  $L$  tal que el vector  $\{s_t, v_t\}$  generado por

$$\begin{bmatrix} s_t \\ v_t \end{bmatrix} = L(s_{t-1}, z_t)$$

satisface el sistema de condiciones anterior, supuesto que la información pasada relevante para predecir  $\phi(s_{t+1}, v_{t+1}, z_{t+1})$  se pueda resumir en una función suficiente de  $\{s_{t-1}, z_t\}$ , de dimensión finita.

En general, en una gran cantidad de problemas interesantes a analizar, no se conoce la forma exacta de  $L^*$  ni de  $L$ , con lo que se tiene que acudir a *aproximaciones numéricas*, que deberán ser, por tanto, lo más precisas posibles. Con distintas estrategias de solución alternativas trata la parte primera de la memoria de Tesis.

En el Capítulo 1 se evalúan la implementabilidad y la calidad de las aproximaciones con un conjunto de métodos “casi lineales”, que cubren un espectro amplio, desde alguno más habitual a propuestas muy recientes, y un método no lineal muy utilizado, en una clase amplia de modelos estándar de ciclo económico. Así, se analizan una aproximación lineal cuadrática estándar, la descomposición de autovalores y autovectores de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999), la propuesta de coeficientes indeterminados de Uhlig (1999) y el método de Parametrización de Expectativas de A. Marcet y distintos coautores.

Preferir un método a otro puede depender a veces de la cuestión que se pretenda analizar, como es el caso de la aparición de distintas expectativas en el sistema a estudiar, o de expectativas a distintos horizontes temporales, que se tratan en el Capítulo 3. Allí se muestra cómo métodos que individualizan el tratamiento de las esperanzas condicionales pueden extraer más información de la economía en estudio.

En el Capítulo 2, por otro lado, se aborda una cuestión técnica necesaria cuando se trabaja con el método de Parametrización de Expectativas, que es la obtención de condiciones iniciales adecuadas para el algoritmo. Se muestra un manera alternativa a las existentes en los trabajos relacionados, de inicializar el algoritmo, que permite garantizar estacionariedad y mejorar la velocidad de convergencia respecto a distintas alternativas estudiadas.

El Apéndice A analiza en detalle los pormenores que se dejan aparte en la implementación de las soluciones numéricas analizadas en los tres Capítulos de la parte primera de métodos de solución.

En la parte segunda de la Tesis se traslada el énfasis desde cuestiones metodológicas a cuestiones más conceptuales de teoría monetaria, aunque la necesidad de soluciones numéricas permite explotar la experiencia adquirida en los Capítulos previos. Así se analiza en el Capítulo 4 el comportamiento de distintas reglas monetarias alternativas compatibles con la solvencia del gobierno, que obliga a que las actuaciones de las autoridades monetaria y fiscal deban coordinarse. Esta parte de la Tesis ha quedado reducida a un Capítulo por consideraciones de espacio y necesidad de mantener la unidad temática del conjunto. No obstante, con poco esfuerzo, se podrían haber agregado dos Capítulos más, que quedan en la versión actual como investigación en curso.

Dado el gran énfasis puesto en esta Tesis en los métodos computacionales, en el Apéndice B se presenta una breve descripción de todos los programas necesarios para replicar todos los resultados, y un disco con el texto completo de todos los programas en MATLAB acompaña el conjunto.

Una buena parte del material disponible en esta tesis se ha presentado en distintos congresos y workshops. En lo concerniente al Capítulo 1, una versión anterior del mismo se presentó en el *XXIII Simposio de Análisis Económico*, Barcelona, diciembre de 1998, en la *IXth Summer School of the European Economic Association*, Paris, septiembre de 1998, y en las *II Jornadas de Macroeconomía Dinámica*, Madrid, marzo de 1998. El Capítulo monetario se presentó en el *III Workshop on Dynamic Macroeconomics*, Vigo, julio de 1998 y en el seminario de la Fundación de Estudios de Economía Aplicada (FEDEA), mayo de 1998. Una parte del material de los Capítulos 2 y 3, por otro lado, se ha presentado en el *Workshop* del Departamento de Economía Cuantitativa de la Universidad Complutense de Madrid.

## Parte I

# Evaluación y Análisis de Métodos de Solución de Modelos Dinámicos y Estocásticos no Lineales con Expectativas Racionales



# Capítulo 1

## Evaluación y Comparación de Métodos de Solución de Modelos no Lineales con Expectativas Racionales

### 1.1 Introducción

La importancia de los métodos computacionales en el análisis económico resulta evidente cuando uno consulta cualquier revista de investigación. Como señalan Judd (1997), Bona y Santos (1997) o Kydland y Prescott (1996) en diversos artículos metodológicos, la interacción entre la teoría económica y la investigación en métodos computacionales es, y será cada vez más, un denominador común en economía. Esta interacción es particularmente importante en la agenda de investigación perfilada en Lucas (1980). La construcción de *fully articulated artificial economies* ha llevado a la aplicación de modelos dinámicos y estocásticos con expectativas racionales en casi todos los campos de la economía [para revisiones generales véase, por ejemplo, Marcet (1993), Kydland y Prescott (1996) o Cooley y Prescott (1995)].

Este tipo de modelización implica generalmente la resolución de un conjunto de ecuaciones en diferencias estocásticas que contienen expectativas condicionales de funciones altamente no lineales (ecuaciones de Euler), o el uso de herramientas de la programación dinámica cuando los problemas a resolver se pueden escribir en forma recursiva. El objetivo es encontrar la solución de equilibrio para todas las variables que describen la economía, y las reglas de decisión que relacionan variables de estado y de decisión. No obstante, la estructura esencialmente estocástica y no lineal que impregna estos sistemas hace generalmente imposible la obtención de soluciones analíticas, y ha motivado un extenso desarrollo de métodos numéricos de solución. Aunque hay una gran variedad

de aproximaciones numéricas disponibles en el área<sup>1</sup>, no hay mucha evidencia que estudie las consecuencias de usar una u otra de ellas cuando se trata un problema económico concreto.

Si se centra la atención en estudios que toman como base el modelo neoclásico de crecimiento, la comparación de métodos numéricos más completa es la realizada por Taylor y Uhlig (1990), que comparan catorce métodos de solución diferentes. Su estudio es muy rico en lo concerniente al tipo de discusión de resultados y a las medidas de comparación que usan, y la conclusión general que obtienen es que las diferencias entre los distintos métodos pueden ser muy importantes para determinados aspectos del modelo. Sin embargo, su análisis presenta una importante falta de homogeneidad dada la manera en que tuvo que realizarse: para cada método disponían tan sólo de una simulación de cada variable de interés, además de las reglas de decisión. Lo que es más, la distribución de probabilidad de la perturbación tecnológica usada para resolver con cada método, la única fuente de dinámica exógena de la economía artificial, no había sido la misma.

Otro conjunto de artículos en el contexto del mismo modelo son Christiano (1990), que compara un método lineal cuadrático y otro lineal cuadrático en los logaritmos de las variables, con la solución generada por un procedimiento de iteración en la función valor y espacio de estados discretizado, y por tanto más cercano a la "verdadera" solución, y Christiano y Fisher (1999), que comparan un conjunto de métodos de residuos ponderados y elementos finitos, de nuevo con el mismo tipo de solución basada en la discretización del espacio de estados. İmrohoroğlu (1994) propone un método de solución *forward* y lo compara con *backsolving* y con una aproximación lineal cuadrática estándar en el contexto del mismo modelo de crecimiento, usando como patrón de comparación el contraste de den Haan y Marcet (1994). Estos últimos autores, para ilustrar la potencia del contraste, comparan el método de Parametrización de Expectativas con métodos lineal cuadráticos en el contexto del modelo básico de crecimiento y también en el modelo monetario con *efectivo por adelantado* de Cooley y Hansen (1989), en el que la solución descentralizada no es óptima en el sentido de Pareto. También en un contexto no Pareto-óptimo, Dotsey y Mao (1992) comparan diferentes aproximaciones lineales y lineales en logaritmos en una versión modificada del modelo neoclásico de crecimiento en la que la fuente de dinámica exógena es un proceso de Markov con cinco estados supuesto para los impuestos sobre la producción, y sin perturbación tecnológica, y donde usan como criterio de comparación una solución a las ecuaciones de Euler del modelo basada en la discretización del espacio de estados.

A pesar de ser relativamente extensa, la evidencia que se puede extraer de todos estos artículos es confusa y dispersa. Para ser breve: en relación

---

<sup>1</sup>No entra dentro de los objetivos de este Capítulo el describir el estado de la cuestión en este área. Para revisiones generales y exhaustivas de métodos numéricos de solución pueden consultarse, por ejemplo, el libro *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, editado por R. Marimon y A. Scott (1999), el número de invierno de 1990 del *Journal of Business y Economic Statistics*, Cooley y Prescott (1995), Marcet (1993), Danthine y Donaldson (1995) o Judd (1997).

al modelo básico de crecimiento neoclásico, los diversos métodos basados en aproximaciones lineal cuadráticas en niveles y en logaritmos se comportan de una manera muy similar y generan aproximaciones razonables, si se exceptúa su comportamiento en lo relativo al contraste de den Haan y Marcet. En contextos no óptimos estos resultados cambian. Por otra parte, todos los métodos de la clase residuos ponderados-elementos finitos se comportan de una manera muy similar, aunque el método de Parametrización de Expectativas tiende a ser el algoritmo más usado, y aparece como el más conveniente cuando hay un número elevado de variables de estado.

Hay varias cuestiones de interés que surgen de estos trabajos y no han sido objeto de un estudio detallado, o sólo se han apuntado vagamente, y que se pueden articular en las siguientes tres cuestiones:

1. La puesta en práctica de cualquier método de solución “casi” lineal implica algún tipo de aproximación numérica, pero es una elección del investigador cuánta estructura no lineal del problema original se desea mantener. La pregunta es: ¿cuánta de esta estructura resulta útil mantener como compromiso entre aproximación numérica y exactitud de la solución?
2. ¿Cómo cambia el comportamiento de los distintos métodos de solución cuando se analizan economías más complejas que el modelo básico de crecimiento neoclásico?
3. Al comparar el método de Parametrización de Expectativas y la linealización estándar que se usa en Cooley y Hansen (1989), den Haan y Marcet (1994), página 13, afirman: “*the different results in the accuracy tests suggest that there are differences between the series generated by both methods, even though these do not affect the statistics reported by Cooley and Hansen [...]*”. En este Capítulo se va a poner énfasis en caracterizar estas posibles diferencias, y también en si es posible encontrar métodos de aproximación basados en linealizaciones [en niveles y en logaritmos de las variables] que generen soluciones idénticas, de acuerdo con un conjunto amplio de medidas relevantes, a las obtenidas al parametrizar las expectativas.

Se tratará de responder a estas cuestiones en un marco unificado y exhaustivo. El estudio que se realiza no trata de hacer una ordenación de los distintos métodos para acabar diciendo que uno es mejor que los demás en algún sentido. Simplemente se trata de evaluar su comportamiento a la luz de las tres cuestiones planteadas más arriba y buscar sus posibles limitaciones. Esta es la principal novedad de este trabajo cuando se pone en relación con la investigación previa en el área.

Se pone especial énfasis en la racionalidad ya que el no mostrar desviaciones de la propiedad de racionalidad debería ser un primer requisito para la elección de cualquier método de solución. Como subproducto, se evalúan dos propuestas muy recientes en el área de solución de modelos no lineales de expectativas racionales, Uhlig (1999) y Sims (1999), y se proporciona una guía de usuario

que permite escoger entre un conjunto importante de los métodos descritos en Marimon y Scott (1999).

Para responder a la segunda pregunta, se comienza analizando el modelo básico estocástico de crecimiento neoclásico, sujeto a un shock tecnológico que determina la dinámica de la economía. Después se incrementa la complejidad del modelo incluyendo trabajo indivisible, como en el modelo de Hansen (1985). En un estadio final se añade dinero a través de un restricción de *efectivo por adelantado* sobre el bien de consumo, como en Cooley y Hansen (1989). Esto supone el estudio de un contexto no óptimo en el sentido de Pareto y además la inclusión de un proceso estocástico exógeno adicional, el crecimiento monetario. Con esta secuencia de modelos se trata de cubrir un amplio rango de aplicaciones económicas.

Para responder a la primera pregunta, se consideran distintos métodos basados en aproximaciones lineales y que difieren en su uso en el grado de no linealidad que preservan. Para esto se han utilizado: i. la aproximación lineal cuadrática estándar, como en Hansen (1985) o Díaz-Giménez (1999), y se ha simulado, como ellos hacen, tomando la estructura no lineal del problema más la/s regla/s de decisión lineales, ii. la solución de coeficientes indeterminados del modelo lineal en logaritmos aproximado como se propone en Uhlig (1999), y se ha simulado el modelo usando el sistema completo lineal en logaritmos en forma de espacio de estados, iii. una aproximación basada en Blanchard y Khan (1980)-Sims (1999) en niveles y en logaritmos de las variables, tal y como se describe en Novales *et al.* (1999), y se ha simulado haciendo uso de la estructura del problema original junto con la condición de estabilidad del sistema lineal aproximado, en niveles o en logaritmos. De esta manera, con estas aplicaciones se cubre exhaustivamente el uso habitual de métodos de solución "casi" lineales en la profesión.

Todos estos métodos son iguales en esencia. Todos buscan la variedad estable de una aproximación lineal al problema no lineal original, e imponen estabilidad al seleccionar la senda de equilibrio estable (generalmente de punto de silla). A lo largo de esta Tesis Doctoral se les llamará "casi" lineales [*"almost" linear*], en la terminología de Marimon y Scott (1999), porque generalmente mezclan, al simular, la condición que garantiza la estabilidad de la aproximación lineal, en niveles o en logaritmos, con diversas partes del problema no lineal original, como la restricción de recursos y las condiciones de equilibrio. Las diferencias entre estos métodos estriban principalmente en la manera en la que se usan en la práctica. En este sentido, un método de solución se puede *refinar* incrementando la cantidad de estructura no lineal del problema original que preserva: se puede trabajar directamente con un sistema completamente linealizado, o con un sistema en forma lineal en logaritmos, o con una mezcla del problema original y la condición de estabilidad/regla de decisión extraída de la versión lineal, en niveles o en logaritmos, del sistema original.

Por otra parte, también se resuelve usando un método de aproximación de elementos finitos, Parametrización de Expectativas. Los métodos de la clase residuos ponderados-elementos finitos aproximan la solución de una ecuación funcional (esperanzas condicionales, funciones de valor) usando combinaciones

flexibles de funciones conocidas. La ventaja de este tipo de métodos es que, supuestamente, se puede conseguir una aproximación a la verdadera solución tan exacta como se desee, manteniendo toda la estructura no lineal del problema original. En el método de Parametrización de Expectativas, las expectativas condicionales en el modelo se aproximan mediante funciones polinómicas. Un método de este tipo se puede *refinar* incrementando el número de elementos en la aproximación, por ejemplo, el orden del polinomio, hasta que la solución sea lo suficientemente buena, según algún criterio bien definido.

En relación a las tres preguntas, se mira en este Capítulo a un amplio conjunto de criterios, en el espíritu de Taylor y Uhlig (1990), y en un marco unificado y coherente. Por una parte se han llevado a cabo simulaciones de Monte Carlo de una batería de tests para contrastar las propiedades de racionalidad de los residuos de las ecuaciones de Euler estocásticas: contraste de den Haan-Marcet de correlación con las variables incluidas en el conjunto de información, posible estructura de autocorrelación o existencia de una media distinta de cero. Por otra parte, se han calculado un conjunto de estadísticos para las principales variables (media, desviación típica, correlación cruzada con el producto), así como funciones de respuesta a impulsos en las perturbaciones exógenas de cada modelo, y también se han analizado las reglas de decisión estimadas generadas con cada método de solución.

Deliberadamente no se ha querido utilizar como criterio de evaluación la cercanía de las aproximaciones realizadas a una solución arbitrariamente "exacta" a través de una discretización fina del espacio de los estados, tanto basada en la ecuaciones de Euler como en la programación dinámica, ya que no se ha querido restringir el análisis a cadenas de Markov para los procesos estocásticos exógenos con un reducido número de estados, como en Christiano (1990) o Dotsey y Mao (1992). En cambio, se ha preferido usar una función de distribución de probabilidad continua para la perturbación tecnológica en los dos primeros modelos, y para la perturbación en tecnología y en el crecimiento monetario en el tercero, y este punto parece ser de gran importancia cuando se comparan los resultados a los que se llegan en este Capítulo con los resultados de otros trabajos. Además, se puede verificar indirectamente la cercanía de nuestras aproximaciones a la solución exacta mediante la contrastación del cumplimiento de la hipótesis de expectativas racionales, a través de los residuos de las ecuaciones de Euler estocásticas, y también estudiando la cercanía de las soluciones "casi" lineales a la solución obtenida por Parametrización de Expectativas.

Los resultados obtenidos en este primer Capítulo de la Tesis Doctoral muestran que la estrategia de solución propuesta en Sims (1999)-Novales *et al.* (1999) y Uhlig (1999) aplicada a los modelos anteriores, cuando se realiza en logaritmos de las variables, es casi indistinguible de la obtenida con el método de Parametrización de Expectativas en todas las dimensiones del estudio y para todos los modelos considerados. También muestran como es conveniente *refinar* al máximo las aproximaciones lineales, especialmente cuando se resuelve en niveles de las variables.

El resto del Capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección 1.2 se presentan las distintas versiones del modelo neoclásico de crecimiento que se

consideran. En la sección 1.3 se describen brevemente los métodos de solución que se usan, mientras que la sección 1.4 establece las bases para la evaluación. En la sección 1.5 se muestran los resultados obtenidos y en la sección 1.6 se ofrecen las conclusiones. La sección 1.7 presenta las reglas de decisión obtenidas con todos los métodos, y una discusión resumida de cómo resolver los modelos. En el Apéndice A se puede encontrar una discusión muy detallada de los métodos de solución y de todos los aspectos relacionados con la puesta en práctica de cada uno de ellos para resolver cada uno de los modelos analizados.

## 1.2 Descripción de los modelos

Como ya se adelantaba en la Introducción, se centrará el análisis en diversas versiones estándar del modelo neoclásico, sin crecimiento, o con variables que crecen a una tasa exógena. La secuencia comienza con una versión del modelo básico de crecimiento estocástico de un sector. Se supone que los agentes privados eligen sendas de capital y consumo para maximizar

$$\max_{\{k_t, c_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \right] \quad (1.1)$$

sujetos a restricciones tecnológicas y de recursos,

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + x_t \\ y_t &= z_t k_{t-1}^{\alpha} \\ k_t &= (1 - \delta)k_{t-1} + x_t \\ \log(z_t) &= (1 - \rho) \log(z_{ss}) + \rho \log(z_{t-1}) + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim i.i.d. N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \\ k_t &\geq 0, c_t \geq 0 \end{aligned}$$

dados  $k_0$  y  $z_0$ , donde  $c_t$  denota el consumo en el instante  $t$ ,  $k_{t-1}$  el stock de capital disponible al comienzo del período  $t$ ,  $x_t$  la inversión,  $y_t$  el nivel de producto, y  $z_t$  una perturbación tecnológica que recibe la producción del único bien de la economía.  $0 < \beta < 1$  es el factor de descuento subjetivo,  $\eta > 0$  el coeficiente de aversión relativa al riesgo,  $0 < \alpha < 1$  la participación del capital en la producción,  $0 < \delta < 1$  la tasa de depreciación y  $0 < \rho < 1$  controla la persistencia del shock. A lo largo de toda la Tesis el subíndice *ss* afectando a una variable denotará su valor de estado estacionario determinista.

La condición de optimalidad de este problema es

$$c_t^{-\eta} = \beta E_t [c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}] \quad (1.2)$$

junto con las anteriores restricciones, donde  $R_{t+1} = \alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta$ . Para realizar contrastes de racionalidad se debe mirar a las propiedades del error de predicción. El error racional de expectativas un período hacia delante asociado

a la ecuación (1.2) es,

$$\xi_{t+1} = [c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}] - E_t [c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}] \quad (1.3)$$

con una estructura de ruido blanco:  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$  e incorrelación con cualquier variable incluida en el conjunto de información disponible en el instante del tiempo  $t$ . Estas propiedades son implicaciones directas del supuesto de racionalidad de expectativas, implícito en los supuestos del modelo, y por tanto siempre se debería considerar un asunto central el contrastar si se mantienen tras realizar algún tipo de aproximación numérica. Si se usan las series temporales para el consumo y el capital que se obtienen con cada método de solución, se pueden generar series para el error de predicción aproximado,  $\xi_t$ , como en (1.3), para contrastar si incumple racionalidad de expectativas.

El segundo modelo es el propuesto en Hansen (1985). Es ligeramente más no lineal que el anterior en la medida en que incluye una no convexidad, el trabajo indivisible. En este caso el agente representativo se enfrenta al problema de decisión,

$$\max_{\{k_t, c_t, N_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - A_N N_t \right] \quad (1.4)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + x_t \\ y_t &= z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\ k_t &= (1-\delta)k_{t-1} + x_t \\ \log(z_t) &= (1-\rho)\log(z_{ss}) + \rho\log(z_{t-1}) + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim i.i.d. N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \\ k_t &\geq 0, c_t \geq 0 \end{aligned}$$

dados  $k_0$  y  $z_0$ .  $N_t$  denota el número de horas trabajadas y  $A_N$  es un parámetro que mide el peso relativo del trabajo en la función de utilidad. Los parámetros restantes se definen como en el modelo previo. De nuevo (1.2) es la única ecuación que incluye un término con expectativas, y surge de las condiciones de primer orden para el capital y el consumo, donde ahora  $R_{t+1} = \alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta$ , y el error de expectativas racionales se define como en (1.3).

Además de (1.2) y las restricciones, hay ahora otra condición de optimalidad, la que surge de maximizar con respecto a las horas trabajadas que, usando la condición de optimalidad para el consumo, se puede escribir,

$$A_N = (1-\alpha)c_t^{-\eta} z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

La última economía considerada, Cooley y Hansen (1989), es una versión de la de Hansen (1985), con el dinero motivado a través de una restricción de *efectivo por adelantado* en el bien de consumo. El equilibrio competitivo no es óptimo en el sentido de Pareto y el segundo teorema del bienestar, por tanto,

no se verifica en este caso. La empresa representativa resuelve un problema de maximización de beneficios estándar, mientras que las familias buscan maximizar sus preferencias a lo largo del tiempo sujetas a sus tenencias de saldos reales en dinero y un conjunto de restricciones presupuestarias habituales. Hay dos fuentes de incertidumbre en esta economía: el shock autorregresivo a la tecnología,  $z_t$ , y la tasa de crecimiento del dinero que se supone que sigue el proceso,

$$\log(g_{t+1}) = (1 - \rho_g) \log(g_{ss}) + \rho_g \log(g_t) + \epsilon_{g_{t+1}}.$$

En equilibrio se tienen dos condiciones de primer orden que incluyen esperanzas condicionales,

$$\lambda_t = \beta E_t [\lambda_{t+1} R_{t+1}] \quad (1.5)$$

$$\lambda_t c_t = \beta E_t \frac{1}{g_{t+1}} \quad (1.6)$$

donde  $R_{t+1} = \alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta$  y  $\lambda_t$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria de las familias. La primera ecuación es la condición de óptimo del capital, con un error de expectativas dado por

$$\xi_{t+1} = [\lambda_{t+1} R_{t+1}] - E_t [\lambda_{t+1} R_{t+1}], \quad (1.7)$$

La segunda ecuación surge de las condiciones de primer orden para los saldos reales en dinero y el consumo, junto con la restricción presupuestaria. Suponiendo normalidad en la innovación  $\epsilon_{g_t}$ , esta esperanza condicional tiene una forma analítica conocida que es lineal en los logaritmos de las variables<sup>2</sup>.

### 1.3 Métodos de Solución

Para responder a la segunda pregunta expuesta en la Introducción, se ha decidido evaluar dos conjuntos de métodos. Por una parte, se utilizarán tres métodos

<sup>2</sup>Del proceso estocástico para  $g_{t+1}$  y si  $\epsilon_{g_{t+1}}$  *i.i.d.*  $\sim N(0, \sigma_{\epsilon_g}^2)$ , se puede escribir,

$$E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] = g_t^{-\rho_g} g_{ss}^{\rho_g-1} E_t \left[ e^{-\epsilon_{g_{t+1}}} \right] = g_t^{-\rho_g} g_{ss}^{\rho_g-1} e^{-\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2}},$$

de manera que el correspondiente error de predicción,  $\xi_{g_t}$ , tiene una expresión analítica conocida

$$\xi_{g_{t+1}} = \frac{1}{g_{t+1}} - E_t \left( \frac{1}{g_{t+1}} \right) = \frac{1}{g_{t+1}} - e^{-\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_t^{-\rho_g}.$$

No es difícil ver que la aproximación lineal cuadrática basada en una aproximación a la función de valor que utilizan Cooley y Hansen (1989) no garantiza que  $\xi_{g_t}$  sea un ruido blanco. Como señalan den Haan y Marcet (1994), el error de expectativas calculado casi nunca pasa el contraste de den Haan-Marcet, y muestra grandes desviaciones de la propiedad de racionalidad. Por supuesto, cualquier método de solución basado en una aproximación a las condiciones de Euler verifica por construcción que  $\{\xi_{g_t}\}_{t=1}^{\infty}$  es un ruido blanco. En la evaluación y comparación que sigue no se destacará este punto, ya analizado suficientemente en el artículo de den Haan y Marcet (1994).

“casi” lineales que preservan distintos grados de estructura no lineal del problema original, que son fáciles de usar y, en general, son bastante rápidos: i. la aproximación lineal más usual y estándar, en niveles de las variables (LQA a partir de ahora), ii. el método propuesto en Uhlig (1999) (UHL) y iii. el enfoque de Sims (1999)-Blanchard y Khan (1980) tal y como se describe en Novales *et al.* (1999), tanto en los niveles como en los logaritmos de las variables (SIM / SIL, respectivamente). El primero es un método basado en una aproximación a la función de valor mientras que los otros dos se basan en aproximaciones a las condiciones de Euler.

La discusión que sigue de los métodos se refiere a cómo se llevan a cabo en la práctica. Diversos detalles de su uso es lo que los hace realmente distintos ya que, fundamentalmente, todos buscan el mismo subespacio estable, y se pueden adaptar para que sean esencialmente indistinguibles unos de otros.

Por otra parte, también se usa un método de la clase residuos ponderados-elementos finitos, Parametrización de Expectativas (PEA), otro método basado en las condiciones de Euler. Se ha refinado la aproximación PEA hasta que el error de predicción correspondiente a la ecuación de Euler estocástica pasara el contraste de den Haan-Marcet (1994).

### 1.3.1 Métodos “casi” lineales

Para simular series temporales, LQA usa la estructura no lineal del modelo añadiéndole las reglas de decisión lineales para el consumo, la inversión o las horas trabajadas, según el modelo que se considere. SIM, también en niveles, conserva más estructura no lineal, ya que sólo añade una condición de estabilidad lineal, con el coste de tener que resolver un sistema de ecuaciones más complejo, por lo que se verá si vale la pena mantener más estructura no lineal. También se aplica el método SIM a una aproximación lineal en logaritmos de las variables alrededor del estado estacionario determinista, que se denotará por SIL. Esto nos proporciona una condición de estabilidad lineal en los logaritmos de las variables, en vez de en los niveles de las variables. Así, al comparar SIM con SIL se puede ver si llevar a cabo la aproximación en logaritmos tiene alguna ventaja. En un último paso, dado que UHL utiliza un sistema totalmente lineal en logaritmos y SIL usa una mezcla del problema original y una aproximación lineal en logaritmos, se puede de nuevo evaluar los beneficios de preservar más no linealidad. En este sentido, SIL es el más refinado de los métodos “casi” lineales, y LQA, tal y como se lleva a cabo en esta Tesis, el menos refinado.

### Aproximación lineal cuadrática estándar

La aproximación LQA consiste en aproximar un problema que no es lineal cuadrático mediante uno con estructura lineal cuadrática del que siempre se conoce la solución analítica. Para una descripción detallada pueden verse Kydland y Prescott (1982), Christiano (1990), Díaz-Giménez (1999) o Hansen y Prescott (1995). En todos estos artículos, resolver el problema del planificador

social implica resolver un problema de programación dinámica de la forma:

$$V^{n+1}(z_t, s_t) = \max_{d_t} \{r(z_t, s_t, d_t) + \beta E[V^n(z_{t+1}, s_{t+1}|z_t)]\}$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = A\varepsilon_{t+1} + B(z_t, s_t, d_t)$$

donde  $V^n(z_t, s_t)$  es la  $n$ -ésima iteración en la función valor óptima,  $\beta$  el factor de descuento,  $z_t$  un vector de variables de estado exógenas,  $s_t$  un vector de variables de estado endógenas,  $d_t$  un vector de variables de decisión,  $r(z_t, s_t, d_t)$  la función de retorno del problema,  $\varepsilon_t$  un vector de procesos estocásticos independientes e idénticamente distribuidos, y donde las restricciones describen la evolución de las variables de estado. Esta notación se mantendrá a lo largo de toda la Tesis Doctoral. Para una definición exacta de estos vectores en cada modelo, véase el apartado 1.7. Para resolver el problema anterior se puede operar directamente en la función valor. Lo que LQA hace es realizar una aproximación lineal a la economía original alrededor del estado estacionario determinista, y después buscar la solución de la economía aproximada, que es conocida. De manera resumida, los pasos son:

1. Calcular las condiciones de primer orden y el estado estacionario determinista.
2. Sustituir las restricciones no lineales en la función de retorno,  $r$ .
3. Realizar una aproximación de Taylor de segundo orden a la función de retorno resultante alrededor del estado estacionario determinista. Haciendo uso del principio del equivalente cierto, el problema aproximado queda,

$$V^{n+1}(z_t, s_t) = \max_{d_t} \{[1, z_t, s_t, d_t]Q[1, z_t, s_t, d_t]^T + \beta V^n(z_{t+1}, s_{t+1}|z_t)\}$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = B[z_t, s_t, d_t]$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica y  $T$  denota transposición matricial. Bajo condiciones apropiadas, la función valor óptima existe, resuelve esta ecuación funcional y es cuadrática. Como consecuencia, las reglas de decisión asociadas son lineales.

4. Suponer una conjetura cuadrática inicial para  $V^0$ ,

$$V^0(z_{t+1}, s_{t+1}) = [1, z_{t+1}, s_{t+1}]L_{LQA}^0[1, z_{t+1}, s_{t+1}]^T$$

donde  $L_{LQA}^0$  es una matriz simétrica y semidefinida negativa. Entonces, dadas las leyes de movimiento de los estados (un subconjunto de las restricciones del problema anterior), es posible obtener una expresión cuadrática en  $z_t$ ,  $s_t$  y  $d_t$  para  $V^1(z_t, s_t)$ .

5. Las condiciones de primer orden de este problema aproximado nos proporcionan las reglas de decisión o reglas de política,  $d_t$ , como función lineal de  $z_t$  y  $s_t$ . Entonces se sustituye la regla de decisión en el problema aproximado y se obtiene la función valor óptima para  $V^1(z_t, s_t)$ .
6. Repetir el proceso hasta que  $V^{n+1}$  sea muy similar (de acuerdo con algún criterio) a  $V^n$ .

La solución al problema lineal cuadrático produce una función lineal que permite calcular los valores de las variables de decisión a partir de los estados de la economía,  $d_t = H[1, z_t, s_t]^T$ , donde  $H$  es una matriz que tiene tantas filas como variables de decisión haya en  $d_t$ . Para generar series temporales artificiales se utiliza el problema no lineal original (función de producción, restricción de recursos, ley de movimiento del capital) más la/s regla/s de decisión lineales. Este es el proceso seguido para resolver el modelo básico de crecimiento neoclásico y el de Hansen (1985). En el primer modelo, el resultado del algoritmo es una regla de decisión lineal para la inversión como función de la tecnología y el capital retardado. Para el modelo de Hansen (1985) se obtienen dos reglas de decisión lineales, una para la inversión y otra para las horas trabajadas, como funciones de la tecnología y el capital retardado. Para el modelo monetario, se necesitan cambios muy importantes en el proceso descrito, debido a la distorsión que introduce la restricción de *efectivo por adelantado*. Además de realizar una aproximación cuadrática a la función de retorno, es necesario suponer que la ley de movimiento de la inversa de los saldos reales en dinero es lineal en las variables de estado. Estos cambios se describen en detalle en Kydland (1989) y Cooley y Hansen (1989). Para resolver usando este método simplemente se han tomado las reglas de decisión que presentan Cooley y Hansen (1989) y se restringen los casos paramétricos posibles a los considerados en su artículo, para hacer el trabajo comparable con el de den Haan y Marcet (1994), que cuando resuelven el modelo de Cooley y Hansen toman esos mismos valores paramétricos.

### Coefficientes Indeterminados

Este método consiste en linealizar logarítmicamente las ecuaciones que caracterizan el equilibrio, y resolver el sistema resultante usando el método de los coeficientes indeterminados para obtener la ley recursiva de equilibrio. Se usará la propuesta de Uhlig (1999). Contribuciones relacionadas son King, Plosser y Rebelo (1987), Campbell (1994), Binder y Pesaran (1998) y Christiano (1998). Para una descripción del método de los coeficientes indeterminados se puede ver, por ejemplo, McCallum (1983, 1998) o Chow (1997). Los pasos a seguir son:

1. Calcular las condiciones de primer orden y el estado estacionario determinista.
2. Linealizar las ecuaciones que caracterizan el equilibrio para hacer el sistema aproximadamente lineal en desviaciones logarítmicas respecto al estado estacionario determinista. Para esto en Uhlig (1999) se proponen

una serie de simplificaciones muy útiles,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &\equiv \log(X_t) - \log(X_{ss}) \iff X_t = X_{ss}e^{\tilde{x}_t}, \\ e^{\tilde{x}_t + a\tilde{y}_t} &\approx 1 + \tilde{x}_t + a\tilde{y}_t, \text{ donde } \tilde{x}_t\tilde{y}_t \approx 0, \end{aligned}$$

y

$$E_t [ae^{\tilde{x}_{t+1}}] \approx E_t [a\tilde{x}_{t+1}] \text{ más una constante.}$$

3. Como notación, se escribe el sistema en la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \Upsilon_1 s_t + \Upsilon_2 s_{t-1} + \Upsilon_3 v_t + \Upsilon_4 z_t \\ 0 &= E_t [\Upsilon_5 s_{t+1} + \Upsilon_6 s_t \\ &\quad + \Upsilon_7 s_{t-1} + \Upsilon_8 v_{t+1} + \Upsilon_9 v_t + \Upsilon_{10} z_{t+1} + \Upsilon_{11} z_t] \\ z_{t+1} &= \Upsilon_{12} z_t + \varepsilon_{t+1}, \quad E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde de nuevo  $s_t$  denota un vector con las variables de estado endógenas,  $z_t$  contiene los estados exógenos y  $v_t$  es un vector formado por el resto de variables endógenas del sistema. La matriz  $\Upsilon_{12}$  sólo tiene autovalores estables.

4. Se expresa la ley de movimiento de equilibrio supuesta del modelo como aquellas matrices  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$ ,  $\Xi_3$  y  $\Xi_4$  que hacen estable el sistema,

$$\begin{bmatrix} s_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_3 & \Xi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t-1} \\ z_t \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

5. Entonces el siguiente paso consiste en encontrar estimaciones para los elementos de las matrices  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$ ,  $\Xi_3$  y  $\Xi_4$  mediante la igualación de coeficientes entre el sistema (1.8) y el sistema (1.9), usando el conocido método de los coeficientes indeterminados, y se eligen los valores que hacen (1.9) estable. Para más detalles técnicos ver Uhlig (1999)<sup>3</sup>.

Una vez hecho todo esto, se pueden generar fácilmente series temporales de tamaño  $T$  para todos los elementos de  $s_t$  y  $v_t$  usando la representación en espacio de los estados (1.9) y dados  $s_0$  y  $z_0$ .

### Descomposición de autovalores y autovectores

La exposición en esta sección se basa en Blanchard y Khan (1980) y, especialmente en Sims (1999), y está explicada en detalle y aplicada a diferentes contextos en Novales *et al.* (1999). En Benhabib y Farmer (1997), Farmer (1993), Klein (1998) y Zdrozny (1998) se presentan estrategias de solución relacionadas. Su característica específica es que cada esperanza condicional se considera como

<sup>3</sup>En la página personal de Harald Uhlig en la red, <http://center.kub.nl/staff/uhlig>, se pueden encontrar los programas en MATLAB necesarios para la puesta en funcionamiento de este método.

una variable adicional para la que hay que resolver, y se define como el valor realizado de la función dentro de la expectativa más un error de predicción. Las condiciones de estabilidad asociadas a la aproximación lineal se añaden al problema no lineal original. En cada uno de los modelos que se considera, la condición de estabilidad toma la forma de una función altamente no lineal que relaciona la esperanza condicional en cada instante  $t$  con los estados exógenos contemporáneos y los estados endógenos retardados. Los pasos a seguir son:

1. Primero se obtienen las condiciones de primer orden del problema. Se define cada expectativa condicional como una nueva variables,  $W_t$ , que se añade al sistema de condiciones de primer orden y restricciones, y también se añade una ecuación definiendo el error de expectativas asociado a cada esperanza condicional<sup>4</sup>. A partir del sistema resultante se calcula el estado estacionario.
2. Linealizar (SIM) el sistema de ecuaciones resultante en torno al estado estacionario (o linealizar en logaritmos de las variables, en el caso del método que se está llamando SIL). Esto nos da,

$$\Gamma_0 u_{t+1} = \Gamma_1 u_t + \Psi \varepsilon_{t+1} + \Pi \eta_{t+1} \quad (1.10)$$

donde  $u_t$  es un subconjunto del vector  $\{s_t, v_t, z_t, W_t\}$ ,  $\varepsilon_t$  contiene las innovaciones en las leyes de movimiento de los estados exógenos, y  $\eta_t$  es un vector que contiene los errores de expectativas.

3. Analizar la estabilidad del sistema anterior. Se localizan las raíces inestables del par  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ . Sólo hay una raíz de esas características en cada uno de los modelos analizados. La matriz  $\Gamma_0^{-1} \Gamma_1$  tiene una descomposición de Jordan  $P \Lambda P^{-1}$ , donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal que contiene los autovalores de  $\Gamma_0^{-1} \Gamma_1$  y  $P^{-1}$  es una matriz que tiene como filas los autovectores por la izquierda asociados<sup>5</sup>.
4. Encontrar la condición de estabilidad. Una solución estacionaria del modelo requiere que las sendas temporales de las variables estén sobre la variedad estable del espacio de soluciones admisibles, lo que se puede obtener imponiendo que una combinación lineal de las variables sea cero en cada período. Si  $P^s$  es la fila de  $P^{-1}$  asociada con el autovalor inestable, entonces un equilibrio estacionario debe satisfacer que,

$$P^s u_t = 0, \quad \forall t$$

<sup>4</sup>Por ejemplo, al resolver el modelo básico de crecimiento, se define  $W_t = E_t[c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}]$ . Entonces se sustituye (1.2) por  $c_t^{-\eta} = \beta W_t$ , y se reescribe la ecuación (1.3) como  $\xi_t = [c_t^{-\eta} R_t] - W_{t-1}$ .

<sup>5</sup>En el caso en que no exista inversa de la matriz  $\Gamma_0$  o de la matriz  $P$ , habría que obtener los autovalores generalizados. En este método la extensión es inmediata a través de la realización de descomposiciones  $QZ$ , como se explica en el Capítulo 3 y se utiliza en los modelos monetarios de Parte II de esta Tesis Doctoral. Con el método UHL también se puede introducir esta cuestión, aunque no de forma tan inmediata [ver Uhlig (1999)].

Como se explica en Novales *et al.* (1999), esta condición se puede escribir de manera que se relacionen la expectativa condicional,  $W_t$ , con el resto de las variables en  $u_t$  de una manera lineal o exponencial, dependiendo de si se está usando la aproximación SIM o la SIL. De manera alternativa, la condición de estabilidad relaciona el vector de errores de expectativas racionales con el vector de innovaciones en los shocks exógenos.

Para simular la economía aproximada se toman las ecuaciones de la economía original (condiciones de Euler, función de producción, restricción de recursos, ley de movimiento del capital) y se resuelve la expectativa usando la condición de estabilidad. Mezclar la estructura original no lineal con la condición de estabilidad implica resolver en cada paso del proceso de simulación un sistema de ecuaciones no lineal, y por esto el método de solución tiende a ser mas intensivo en tiempo de computación que otros métodos basados en aproximaciones lineales.

### 1.3.2 Parametrización de Expectativas

Este método consiste en parametrizar las expectativas que aparecen en las ecuaciones de Euler estocásticas. Cada esperanza condicional se especifica como una función de los estados del sistema, y los parámetros de dicha función se estiman antes de resolver el modelo. Para una exposición detallada puede consultarse den Haan y Marcet (1990), Marcet (1993), Marcet y Marshall (1994) y Marcet y Lorenzoni (1999). Los pasos a seguir para resolver son:

1. Calcular las condiciones de primer orden del problema y el estado estacionario determinista.
2. Sustituir cada esperanza condicional,  $W_t$ , por una función polinomial parametrizada  $\psi_t(q; s_t, z_t)$ , donde  $q$  es un vector de parámetros. Sea el residuo  $\hat{W}_t - \psi_t$ , donde  $\hat{W}_t$  es el valor realizado de  $W_t$ . En términos generales  $\psi_t$  debería aproximar la expectativa arbitrariamente bien a medida que se incrementara el orden del polinomio.
3. Elegir un valor inicial para  $q$ . Por ahora no se tratará esta cuestión, de mucha importancia, aunque se analizará en detalle en el Capítulo 2.
4. Utilizar las condiciones de primer orden y las restricciones del problema [con la esperanza condicional sustituida por  $\psi_t(q; s_t(q), z_t)$ ] para generar series temporales de las variables de la economía:  $s_t(q)$ ,  $v_t(q)$ . El  $q$  inicial debe ser tal que esté garantizado que  $s_t(q)$  y  $v_t(q)$  sean estacionarias.
5. Se define ahora  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $m$  es la dimensión de  $q$ , y

$$S(q) = \operatorname{argmin}_q E_t \left[ \hat{W}_t(q) - \psi_t(q; s_t(q), z_t) \right]^2.$$

6. Iterar hasta que  $q = S(q)$ . Esto garantiza que si los agentes usan  $\psi_t$  como la función con la que realizan sus expectativas, entonces  $q$  es el mejor vector

de parámetros que podrían usar en el sentido de que minimiza el error cuadrático medio entre la aproximación y la verdadera expectativa. Para encontrar cada  $q^{i+1}$  a partir de un  $q^i$  previo, se toma la suma de cuadrados de los residuos de una regresión no lineal de  $\tilde{W}_t(q^i)$  sobre  $\psi_t(q^i; s_t(q^i), z_t)$  como una aproximación a  $S(q^i)$  [ver Apéndice A] y se actualiza  $q$  usando la regla

$$q^{i+1} = q^i + \lambda_q S(q^i),$$

donde  $\lambda_q$  controla el grado de actualización en cada iteración. En todas las aplicaciones se ha fijado  $\lambda_q = 1$  excepto cuando  $\eta = 0.5$  que se eligió  $\lambda_q = 0.5$ .

7. Generar un nuevo conjunto de series temporales con  $q^{i+1}$ . Repetir hasta que<sup>6</sup>,

$$\|q^{i+1} - q^i\| < 0.0001.$$

## 1.4 Base para la evaluación y comparación

En esta sección se describen los casos paramétricos considerados en cada uno de los tres modelos, así como las herramientas utilizadas en la evaluación comparativa de los diferentes métodos de solución.

En lo que respecta a los dos primeros modelos, se ha analizado la robustez de los resultados ante cambios en el parámetro de aversión relativa al riesgo y la varianza de la perturbación tecnológica, que se sugieren en algunos trabajos relacionados como los parámetros más influyentes. Un aumento en el grado de aversión al riesgo implica mayor concavidad de la función de utilidad, y por tanto un problema más no lineal. Por su parte, el shock tecnológico es la principal fuente de dinámica de la economía, por lo que un incremento en su varianza significa mayores desviaciones de las variables alrededor del estado estacionario, lo que debe deteriora el comportamiento de los métodos que basados en aproximaciones lineales alrededor del estado estacionario.

Para realizar un análisis de sensibilidad, se consideran tres valores de  $\sigma_\epsilon$ : 0.01, que está cercano al valor calibrado habitualmente en trabajos relacionados (0.00721), 0.02 y 0.06. En lo que respecta a la aversión al riesgo, se ha movido el

---

<sup>6</sup>En relación a este método vale la pena notar que su puesta en marcha es más compleja que la de los métodos basados en linealizaciones, debido a algunas dificultades prácticas que suelen surgir. La primera dificultad tiene que ver con la obtención de condiciones iniciales adecuadas para el vector  $q$ : muchas veces es un asunto complicado, y si se intenta buscar el punto fijo comenzando desde unas condiciones arbitrarias, el algoritmo nunca converge. En vez de usar las técnicas de homotopía para buscar el punto fijo tal y como se sugiere en den Haan y Marcet (1990) y en Marcet y Lorenzoni (1999), en todas las aplicaciones de esta Tesis se han estimado las condiciones iniciales a partir de la solución obtenida con un método lineal en logaritmos. Como se puede ver en el Capítulo 2, este método garantiza la estacionariedad de  $s_t(q)$  y  $v_t(q)$ , y además acelera la velocidad de convergencia. El segundo aspecto práctico importante es el hecho de que es muy importante para que la solución sea apropiada, el seleccionar un orden adecuado del polinomio de aproximación, lo cual requiere repetir el proceso delineado más arriba varias veces en conjunción con el contraste de den Haan y Marcet (1994) hasta que se obtiene una solución lo suficientemente exacta.

valor entre una cota inferior de 0.5 y un valor máximo de 3.0. Los valores para el resto de parámetros son estándar:  $\beta = 0.99$ ,  $\rho = 0.95$ ,  $\alpha = 0.36$ , y  $\delta = 0.025$ , y se han mantenido en todos los experimentos realizados. Para el modelo de Hansen  $A_N = 2.86$ . Por tanto, se consideran nueve casos paramétricos,

CASO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_\epsilon$	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.06	0.06	0.06
$\eta$	0.5	1.5	3.0	0.5	1.5	3.0	0.5	1.5	3.0

Para la economía de Cooley y Hansen se centrará la atención en la varianza de la perturbación tecnológica, variando en el mismo rango que en los dos modelos anteriores, y además en el valor de estado estacionario de la tasa de crecimiento monetario, para la que se han seleccionado los mismos valores analizados en Cooley y Hansen (1989). Los valores paramétricos son en esta ocasión:  $\beta = 0.99$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\delta = 0.025$  y  $A_N = 2.86$ . Para controlar la persistencia de las perturbaciones exógenas se han seleccionado como valores para los coeficientes de los procesos autorregresivos de primer orden para la tecnología y el crecimiento monetario:  $\rho_z = 0.95$  y  $\rho_g = 0.48$ , y como desviación típica de la innovación en el proceso de crecimiento del dinero:  $\sigma_{\epsilon_g} = 0.009$ . Así pues, se han variado la tasa de crecimiento del dinero y la varianza del shock tecnológico de tal manera que se tienen seis casos paramétricos,

CASO	1	2	3	4	5	6
$\sigma_{\epsilon_z}$	0.01	0.01	0.02	0.02	0.06	0.06
$g_{ss}$	1.015	1.15	1.015	1.15	1.015	1.15

Se ha resuelto cada modelo, para cada caso paramétrico, usando todos los métodos. Además, de nuevo para garantizar la robustez de los resultados, se han calculado 250 simulaciones de tamaño  $T = 150$  y otras 250 de tamaño  $T = 3000$ . El tamaño 150 es representativo del habitual en muestras con datos trimestrales, mientras que 3000 supone una longitud más fiable en términos estadísticos.

En relación al modelo básico de crecimiento, no se muestran los resultados para los casos 8 y 9 con  $T = 3000$  cuando se resuelve con SIM, debido a la aparición de valores negativos de  $k_t$  para realizaciones extremas de  $z_t$ . Para el modelo de Hansen, en los casos 7, 8 y 9 de varianza alta y  $T = 3000$ , no ha sido posible encontrar una solución con los métodos LQA y SIM, por la misma razón. En lo que respecta al modelo de Cooley y Hansen, el mismo problema se presenta con el método SIM en los casos de varianza alta 5 y 6 cuando  $T = 3000$ . Para  $T = 150$  este método genera valores negativos del stock de capital en un 30% de las realizaciones de los shocks en los casos paramétricos 5 y 6, por lo que se ha repetido el proceso de simulación hasta que se tuvieron 250 simulaciones. También se tuvo que repetir el mismo ejercicio al resolver por LQA el modelo de Cooley y Hansen en los casos 5 y 6, dado que este método generaba valores negativos del stock de capital en un 70% de las realizaciones de las perturbaciones cuando  $T = 3000$ . A diferencia de SIM, siempre ha sido factible encontrar una solución cuando se ha usado SIL.

En cada simulación se han calculado dos conjuntos de medidas, descritas en las siguientes subsecciones. El primer grupo está relacionado con la exactitud numérica de la solución, que se discute analizando si el residuo de la ecuación de Euler estocástica,  $\xi_t$  en (1.3) y (1.7), satisface las propiedades teóricas que impone la racionalidad de expectativas. El segundo conjunto de medidas se ocupa de los estadísticos que usualmente se miran en los estudios aplicados para evaluar las respuestas del modelo a preguntas económicas relevantes. Es crucial analizar si las respuestas a estas preguntas dependen del método de solución que se utilice.

### 1.4.1 Propiedades del error de predicción

#### Correlación con el conjunto de información

Una manera de contrastar la posible existencia de correlación entre  $\xi_{t+1}$  y la información de que disponen los agentes en el instante  $t$ , es usando el test propuesto por den Haan y Marcet (1994). La idea del contraste reside en verificar si existe alguna función de las variables en el conjunto de información hasta el instante  $t$  que pueda ayudar a predecir  $\xi_{t+1}$ . Encontrarla en una solución aproximada supondría una importante desviación de la propiedad de racionalidad de expectativas. Para llevar a cabo el contraste, los pasos a seguir son: i. obtener un gran número de observaciones mediante la simulación del modelo aproximado para una realización de gran tamaño de los procesos exógenos; ii. realizar una regresión de  $\xi_{t+1}$  sobre  $I_t$ , que es una lista de instrumentos seleccionados del conjunto de información disponible en  $t$ ; iii. definir  $\hat{a} = (\sum I_t^T I_t)^{-1} (\sum I_t^T \xi_{t+1})$  y formar el estadístico:

$$\hat{a}^T (\sum I_t^T I_t) (\sum I_t^T I_t \xi_{t+1}^2)^{-1} (\sum I_t^T I_t) \hat{a} \sim \chi_{m_1, m_2}^2,$$

donde  $m_2$  es el número de instrumentos escogidos y  $m_1$  es el número de errores de predicción, que es igual a uno en los tres modelos que se estudian en este Capítulo. El estadístico proporciona un contraste para la hipótesis de expectativas racionales:  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Vale la pena resaltar que la hipótesis alternativa es que el error de expectativas no es una martingala, y por tanto, si el valor del estadístico cae en la región crítica superior de la distribución de la  $\chi_{qm}^2$  hay evidencia en contra de la exactitud de la solución. En cambio, el hecho de que el valor del estadístico caiga en la parte inferior de la distribución (por ejemplo en la región crítica del 5% más cercana al cero) es evidencia a favor de la exactitud de la solución. Esta afirmación, como el lector puede apreciar, va contra el uso habitual de este contraste [ver den Haan y Marcet (1990, 1994) por ejemplo], pero se encuentra en línea con la teoría estadística habitual de contrastación de hipótesis.

El número de observaciones usado se puede interpretar como una medida de rigor del criterio: si una solución pasa el test incluso para un número muy grande de datos, entonces es bastante exacta.

Como conjunto de instrumentos se ha seleccionado:  $I_t = [1, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ , de manera que el estadístico de contraste tiene

una distribución  $\chi_7^2$ <sup>7</sup>. En la tabla 1.1 y las figuras 1.1 a 1.9 se muestran los porcentajes de valores del estadístico en la cola superior al 5% de la  $\chi_7^2$ .

### Propiedades de dependencia temporal

También se ha contrastado la posible existencia de autocorrelación en la media y en la varianza del error de expectativas,  $\xi_t$ . En primer lugar se ha ajustado un proceso AR(1) con constante al residuo generado con cada método,

$$\xi_t = \mu + \rho\xi_{t-1} + \epsilon_{\xi_t}, \quad (1.11)$$

y se han contrastado las hipótesis nulas  $H_0 : \mu = 0$  y  $H_0 : \rho = 0$  usando el test convencional de la t de Student. Bajo racionalidad, el error de expectativas no debería presentar ni una media significativamente distinta de cero ni autocorrelación significativa, ya que se ha generado a partir de una esperanza condicional un período hacia delante. La información que nos proporciona la contrastación de estas hipótesis es complementaria de la que obtenida con el test de den Haan y Marcet. Adicionalmente, el error de predicción no debe presentar estructura de heterocedasticidad condicional, y las aproximaciones utilizadas para obtener la solución numérica no deberían mostrar evidencia en este sentido, por lo que se contrasta la posible existencia de estructura ARCH en  $\xi_t$  para verificar posibles diferencias entre las diferentes estrategias de solución. Para ello se ha realizado un contraste de Multiplicadores de Lagrange para la detección de posible estructura ARCH en  $\xi_t$  [vease Engle (1982)],

$$\xi_t = \delta_0 + \sum_{t=1}^{\Delta_1} \delta_i \xi_{t-i} + \epsilon_{\xi_t} \quad (1.12)$$

$$\epsilon_{\xi_t}^2 = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{\Delta_2} \alpha_i \epsilon_{\xi_{t-i}}^2 + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2). \quad (1.13)$$

La hipótesis nula es  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$ , y el test toma la forma:  $TR^2 \sim \chi_{\Delta_2}^2$ , donde  $R^2$  es el coeficiente de determinación de la segunda regresión. Se han escogido los valores  $\Delta_1 = \Delta_2 = 4$ . Al aumentar el tamaño muestral, este estadístico aumenta la frecuencia de ocurrencias en la región crítica. Sin embargo, dado que el objetivo de este trabajo es detectar el posible comportamiento diferenciado de los distintos métodos de solución, el test sigue siendo útil.

---

<sup>7</sup> Este es el mismo conjunto de instrumentos aplicado por den Haan y Marcet (1994) a las soluciones que obtienen del modelo básico para un conjunto de parámetros que incluye valores de la varianza del shock tecnológico de 0.02 y 0.06. En cambio, estos autores apuntan que sólo pueden usar la constante como instrumento en el caso de varianza baja  $\sigma_\epsilon = 0.01$ . No obstante en este Capítulo de la Tesis se ha podido usar el conjunto completo de instrumentos en todos los casos paramétricos. Se ha usado además el mismo conjunto de instrumentos al contrastar la exactitud de las soluciones numéricas de los modelos de Hansen (1985) y Cooley y Hansen (1989).

## 1.4.2 Otras propiedades de las soluciones

### Reglas de decisión

Para cada método de solución y cada modelo se han tabulado los valores de las variables de decisión en puntos alternativos del espacio formado por las variables de estado. Se ha construido una malla de valores para las variables de estado para obtener los valores que las reglas de decisión implican para las variables de decisión. Las reglas de decisión LQA, como ya se ha apuntado, son las relaciones  $d_t = H[1, z_t, s_t]^T$ . Con UHL se obtienen de las relaciones lineales en logaritmos  $s_t = \Xi_1 s_{t-1} + \Xi_2 z_t$ , mientras que las correspondientes a SIM/SIL salen de las condiciones de estabilidad  $P^s u_t = 0$ . En lo relativo a PEA, se usa un sistema de ecuaciones del tipo  $F(d_t, \psi_t(q; s_t, z_t)) = 0$ . El lector puede consultar para cada modelo y método la definición exacta de los vectores  $d_t$ ,  $s_t$  y  $z_t$ , así como de  $H$ ,  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$ ,  $P^s$  y  $\psi_t(q; s_t, z_t)$  en el breve apéndice de consulta que acompaña este Capítulo [sección 1.7] o, de manera mucho más detallada, en el Apéndice A.

En relación a la variable stock de capital (el estado endógeno en los tres modelos), se han seleccionado 25 valores distribuidos en intervalos iguales alrededor de su valor de estado estacionario ( $\pm k_{ss}$ ). Y en referencia a los estados exógenos, para la perturbación tecnológica se han seleccionado también 25 valores separados por la misma distancia entre 0.4 y 1.6. Para el modelo de Hansen el rango de variación es más estrecho, entre 0.8 y 1.2, debido a problemas numéricos con las reglas de decisión de LQA y SIM. En relación al modelo de Cooley y Hansen, se realizan dos ejercicios similares: por una parte se fija el valor de  $z_t$  en su valor estado estacionario de 1.0, y se escogen 25 valores para  $g_t$  en un intervalo de tamaño un diez por ciento alrededor de  $g_{ss}$ . Por otra parte se fija  $g_t$  en su valor de estado estacionario, y se escogen 25 valores de  $z_t$  separados por la misma distancia entre  $z_{ss} - 0.2z_{ss}$  y  $z_{ss} + 0.2z_{ss}$ .

### Funciones de respuesta a un impulso

Las funciones de respuesta a un impulso se generan usando las condiciones de primer orden y las reglas de decisión. En los dos primeros modelos se ha usado un impulso de una desviación típica en el shock tecnológico:  $\epsilon_0 = \sigma_\epsilon$ ,  $\epsilon_t = 0$ ,  $\forall t > 0$  y se calculan las respuestas de los sistemas aproximados. Para el modelo de Cooley y Hansen hay dos fuentes de incertidumbre, y por tanto se han cuantificado respuestas similares ante impulsos en la tecnología y el crecimineto monetario por separado, y también conjuntamente.

### Correlaciones cruzadas, desviaciones típicas y medias

Se calculan las autocorrelaciones del producto,  $\rho(y_t, y_{t-j})$  en cada simulación. Dada una variables  $X_t$ , se calculan sus correlaciones cruzadas con el producto,  $\rho(y_t, X_{t+j})$ , su desviación típica,  $\sigma_X$ , y su media muestral,  $\bar{X}$ . Así, se generan muestras aleatorias simples de tamaño 250 para cada estadístico.

Dado que las medidas relevantes en la mayoría de los artículos de investigación se refieren a valores medios entre simulaciones de algunos de estos es-

tadísticos, se estudiará si difieren entre métodos de solución. El contraste es el que sigue. Sea  $\gamma_i^k$  un estadístico calculado con las series temporales simuladas con un método  $k$  en la simulación  $i \in N$ . Sea  $\mu_{\gamma^k}$  la media poblacional y  $a_{\gamma^k}$  la media muestral calculada con  $N$  simulaciones. Sea  $s_{\gamma^k}$  la desviación típica poblacional calculada con  $N$  simulaciones. Para cada par de métodos  $k_1, k_2$ , con  $\{\gamma_i^{k_1}\}_{i=1}^N$  y  $\{\gamma_i^{k_2}\}_{i=1}^N$  independientes, se desea contrastar  $H_0 : \mu_{\gamma^{k_1}} = \mu_{\gamma^{k_2}}$ . En grandes muestras es fácil probar que,

$$\left\| \frac{a_{\gamma^{k_1}} - a_{\gamma^{k_2}}}{\sqrt{\frac{s_{\gamma^{k_1}}^2 + s_{\gamma^{k_2}}^2}{N}}} \right\| \sim N(0, 1) \quad (1.14)$$

Incluso aunque se han realizado cálculos para un amplio conjunto de variables, tan sólo se mostrarán los resultados relativos a aquellas variables que se consideran más representativas en cada caso. Así al resolver el modelo básico de crecimiento sólo se mira al consumo,  $X_t = [c_t]$ . En lo relativo al modelo de Hansen se ha considerado la variable de horas trabajadas, dado el objetivo de su artículo,  $X_t = [N_t]$ . Finalmente, para el modelo de Cooley y Hansen, se presentan estadísticos para las horas trabajadas y la inflación,  $X_t = [N_t, \pi_t]$ <sup>8</sup>.

## 1.5 Resultados

Para calcular las distribuciones empíricas de cada estadístico se han repetido, para cada una de las simulaciones generadas con cada método, para cada uno de los modelos, con cada vector de parámetros y cada tamaño muestral, los siguientes pasos: i. generar una realización de las perturbaciones exógenas  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , ii. resolver con cada método (LQA, UHL, SIM, SIL, PEA) para generar series temporales para todas las variables de la economía, iii. calcular el conjunto de estadísticos.

En esta sección sólo se presentan un subconjunto de resultados, seleccionados de acuerdo con su relevancia para los objetivos del Capítulo.

### 1.5.1 Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico

Las tablas 1.1 a 1.4 y las figuras 1.1 a 1.4 resumen los principales resultados obtenidos de la resolución del modelo de crecimiento básico con las cinco es-

<sup>8</sup>También se han realizado contrastes no paramétricos de Kolmogoroff-Smirnov, para ver si la *distribución* empírica de un determinado estadístico difiere entre métodos de solución. Sea  $\gamma_i^k$  un estadístico generado con el método  $k$  en cada simulación  $i \in N$ . Sea  $F_k(X)$  la función de distribución de probabilidad de  $\{\gamma_i^k\}_{i=1}^N$ . Para cada par de métodos  $k_1, k_2$ , se quiere contrastar  $H_0 : F_{k_1} = F_{k_2}$ . El test de Kolmogorov-Smirnov se basa en el hecho de que el estadístico  $KS = \sup |F_{k_1} - F_{k_2}|$  tiene como distribución asintótica,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Prob \left( \sqrt{\frac{N}{2}} KS \leq \lambda_{KS} \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 \lambda_{KS}^2}, \lambda_{KS} > 0.$$

Los resultados obtenidos señalaban en la misma dirección que los que se presentan para el resto de medidas y no se muestran para ahorrar espacio.

trategias de solución.

### Propiedades del error de predicción

La tabla 1.1 contiene el porcentaje de veces que el contraste de den Haan-Marcet (1994) rechazó las soluciones generadas por PEA. El estadístico asociado al contraste de den Haan-Marcet fue precisamente el criterio usado para aceptar el conjunto particular de parámetros asociado a la aproximación polinómica en cada caso. Por tanto, no es sorprendente que las soluciones PEA pasen el test aproximadamente al nivel de significatividad del 5% escogido.

Los resultados en la figura 1.1 son más interesantes. Por un parte se muestran los resultados del contraste para los métodos de solución instrumentados en aproximaciones lineales en niveles de las variables: SIM y LQA. El funcionamiento de estas soluciones se deteriora para valores altos de la desviación típica de la perturbación tecnológica, tanto para el tamaño muestral grande como para el pequeño, rechazándose la hipótesis de falta de correlación entre el error de expectativa y las variables del conjunto de información mucho más a menudo que en el 5% esperado. Este resultado es intuitivo, ya que mayores desviaciones respecto al estado estacionario hacen que las aproximaciones locales en niveles en torno a ese mismo estado estacionario sean menos exactas. Cuando  $T = 150$ , SIM tiende a comportarse ligeramente mejor que LQA, aunque ambas soluciones son rechazadas por el contraste cuando  $T = 3000$ , en el sentido de que el porcentaje de rechazos de la hipótesis nula está muy por encima del 5% esperado. Como ya se ha mencionado, la solución SIM no se pudo obtener para  $T=3000$  y  $\sigma_\epsilon=0.06$ .

Por otra parte, las soluciones "casi" lineales SIL y UHL son bastante exactas para los nueve casos paramétricos analizados y los dos tamaños muestrales, pasando el contraste de den Haan-Marcet en torno al 95% de las realizaciones. Esta es la característica más destacable de la figura 1.1: cuando se trabaja con los logaritmos de las variables, como en el caso de los métodos SIL y UHL, un aumento de la varianza de la perturbación tecnológica no deteriora las propiedades estadísticas de la solución, posiblemente debido a la homocedasticidad inducida por la transformación logarítmica.

En lo referente al efecto del parámetro de aversión relativa al riesgo (todavía en la figura 1.1), las soluciones generadas con SIM y LQA en términos del contraste de den Haan-Marcet se deterioran para valores bajos de  $\eta$ , esto es, para valores altos de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, mientras que las soluciones SIL y UHL se ven, de nuevo, escasamente afectadas.

La tabla 1.2 muestra los resultados de significatividad individual de la media y el coeficiente de autocorrelación en un modelo AR(1) estimado para el residuo de la ecuación de Euler obtenido con cada aproximación. No existe evidencia de una media significativamente distinta de cero en ningún caso paramétrico o tamaño muestral, pero si que hay evidencia de un coeficiente autorregresivo significativo en algunos casos para las soluciones LQA y SIM. El rechazo de la hipótesis nula tiende a ser más frecuente que lo sugerido por el nivel de signifi-

Tabla 1.1: Todos los modelos. Parametrización de Expectativas. Contraste de den Haan y Marcet (1994). Porcentaje de realizaciones del estadístico en la región de rechazo al 5% de la hipótesis nula:  $H_0 : E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Instrumentos usados:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico									
	Casos								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T=150	4.4	5.6	5.6	4.8	6.4	7.6	4.8	7.0	6.8
T=3000	6.4	4.8	7.2	6.4	6.8	7.8	4.6	7.2	3.4

Modelo de Hansen (1985)									
	Casos								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T=150	6.4	4.8	7.6	7.2	7.6	3.2	5.6	4.1	5.3
T=3000	5.6	6.4	5.6	6.4	5.5	7.7	3.2	3.6	6.4

Modelo de Cooley y Hansen (1989)									
	Casos								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T=150	5.2	4.0	6.8	6.4	5.8	2.4	—	—	—
T=3000	5.6	7.2	6.4	4.8	7.6	7.5	—	—	—

Tabla 1.2: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico. Todos los métodos. Estimación de estructura AR(1) para el error de expectativas. Ecuación (1.11). Porcentaje de realizaciones del estadístico t en la región de rechazo al 5% de la hipótesis nula:  $H_0 : \mu = 0$  para la fila denotada por  $\mu$ , y  $H_0 : \rho = 0$  para la fila denotada por  $\rho$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
<b>Caso 1</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	8.8	5.2	3.2	3.2	3.2	9.6	16	3.6	3.6	3.2
<b>Caso 2</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	5.2	4.4	4.8	4.8	4.8	8.0	6.4	8.4	8.4	8.0
<b>Caso 3</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	4.8	4.0	4.4	4.4	4.4	6.0	5.6	5.6	5.6	5.6
<b>Caso 4</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	12.4	14.8	2.4	2.4	2.4	19.2	75.6	4.4	4.4	2.8
<b>Caso 5</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	5.6	4.8	4.8	4.8	4.4	13.6	14.8	9.2	9.2	6.4
<b>Caso 6</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	6.0	4.0	2.8	2.0	2.0	18.7	24.9	6.2	6.2	5.3
<b>Caso 7</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	10.0	53.6	4.4	5.2	4.8	45.6	100	4.2	4.6	4.6
<b>Caso 8</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.6	8.8	6.8	6.4	7.6	83.8	—	7.4	7.9	9.6
<b>Caso 9</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.4	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.2	3.2	4.4	5.2	4.8	76.9	—	15.0	13.1	14.3

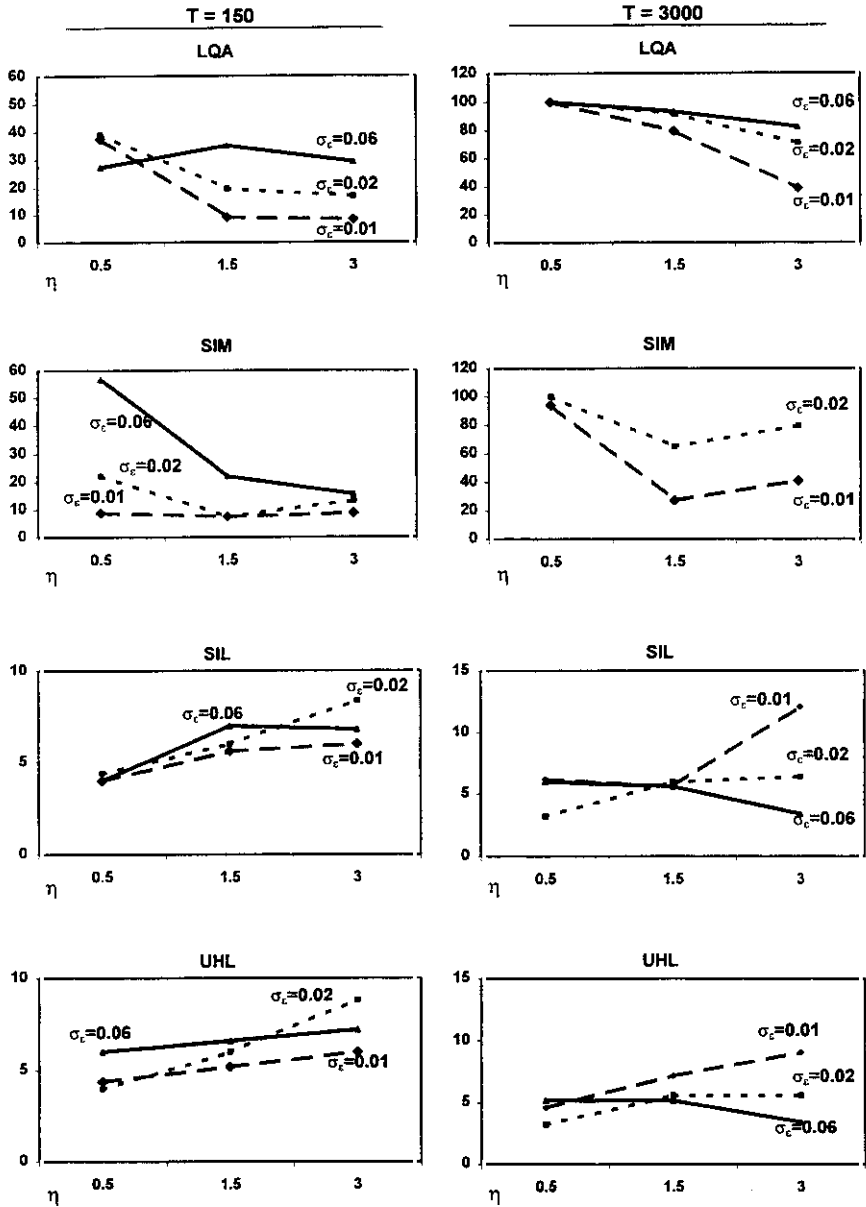


Figura 1.1: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico. Métodos "casi" lineales. Contraste de den Haan y Marcet (1994). Eje de ordenadas: porcentaje de realizaciones del estadístico en la región de rechazo al 5%, de la hipótesis nula:  $H_0 : E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Eje de abscisas: valores de  $\eta$ . Columna de la izquierda:  $T=150$ . Columna de la derecha:  $T=3000$ . Como se indica, en cada gráfico cada línea hace referencia a un valor distinto de  $\sigma_c$ . Instrumentos usados:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

Tabla 1.3: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico. Todos los métodos. Contraste de Multiplicadores de Lagrange de estructura ARCH en el error de expectativas. Ecuaciones (1.12) y (1.13). Porcentaje de realizaciones del estadístico ( $TR^2$ ) en la región de rechazo al 5% de la hipótesis nula:  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
Caso 1	48	18	18	17	17	100	20	22	22	25
Caso 2	20	18	19	19	18	46	18	19	19	24
Caso 3	19	20	20	20	20	24	18	37	36	74
Caso 4	58	20	21	21	21	100	28	21	20	21
Caso 5	28	21	21	22	20	99	19	44	44	36
Caso 6	26	18	23	22	28	79	26	98	97	100
Caso 7	70	21	22	20	23	100	97	46	48	66
Caso 8	47	18	28	26	26	100	—	100	100	100
Caso 9	36	21	48	48	51	97	—	100	100	100

cación del 5% para los casos con alta elasticidad de sustitución intertemporal del consumo y alto valor de la varianza de la perturbación. El rechazo es aún más frecuente cuando  $T=3000$ . La mayor frecuencia de evidencia de existencia de autocorrelación en  $\xi_t$  para valores de la elasticidad de sustitución altos puede explicar el mayor número de rechazos del contraste de den Haan-Marcet en esos casos. Cuando la elasticidad de sustitución es alta, el agente representativo quiere ajustar su consumo rápidamente ante fluctuaciones del producto, y parece que los métodos LQA y SIM no son capaces de capturar la volatilidad inducida de esta manera en el consumo. Estos métodos parecen imponer más inercia en el mecanismo de expectativas de la que hay en realidad y, como consecuencia, producen evidencia de autocorrelación espúria en el error de expectativas.

Un efecto muy similar aparece al incrementarse la volatilidad de la perturbación exógena. Esto genera de nuevo una variable de decisión más volátil, y los métodos que imponen más inercia en el mecanismo de formación de expectativas tenderán a mostrar desviaciones de la racionalidad. Por tanto, no es sorprendente constatar que el porcentaje de rechazos del contraste de den Haan-Marcet, así como la evidencia de autocorrelación, sean más importantes para los casos con alta elasticidad de sustitución intertemporal, así como para los casos con alta varianza del shock exógeno.

Respecto a las soluciones generadas por UHL, SIL y PEA, no hay evidencia significativa de autocorrelación en  $\xi_t$ .

La figura 1.1 y la tabla 1.2 se refieren, por tanto, a posibles desviaciones de racionalidad. Las soluciones LQA y SIM tienden a producir errores de expectativas que están correlacionados con variables del conjunto de información que había disponible cuando se formó la esperanza condicional, y muestran alguna evidencia de estructura autorregresiva. Aunque estas características no son independientes entre sí, ambas impiden interpretar las series temporales obtenidas por estos métodos de numéricos de solución como soluciones de expectativas racionales. Por otra parte, no hay evidencia de incumplimiento de racionalidad por parte de las soluciones SIL, UHL y PEA.

La tabla 1.3 muestra los resultados del contraste de estructura ARCH en

el error de previsión. Muestra que los diferentes métodos no son siempre capaces de capturar de manera completa la dependencia no lineal de la expectativa condicional y las variables en el conjunto de información. Cuando  $T = 150$ , esto ocurre en aproximadamente el 20% de las simulaciones con cada método de solución, con el porcentaje aumentando al aumentar la varianza de la perturbación. La solución LQA produce evidencia de estructura ARCH mucho más a menudo.

El porcentaje de rechazos es creciente con la varianza de la perturbación tecnológica y una baja elasticidad de sustitución intertemporal del consumo como era el caso cuando existía evidencia de autocorrelación. De nuevo, es una consecuencia de no capturar apropiadamente la estructura la estructura de la esperanza condicional en esos casos.

El mayor porcentaje de rechazos cuando  $T = 3000$  refleja el incremento en la potencia del contraste para la muestra más larga, que es especialmente evidente en los casos de alta varianza de la perturbación tecnológica.

### Otras propiedades de las soluciones

Para evaluar las reglas de decisión de acuerdo con si las variables de decisión son crecientes o decrecientes en las variables de estado, se presentan las figuras 1.2 para las soluciones LQA, SIM, SIL y UHL, y 1.3 para la solución PEA. En ellas, el stock de capital toma 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor del valor de estado estacionario determinista  $k_{ss}$ , mientras que  $z$  toma 25 valores alrededor de su valor de estado estacionario de 1.0, desde 0.4 a 1.6.

Las reglas de decisión para el consumo obtenidas con los métodos SIM, SIL, UHL y PEA presentan un comportamiento monótono creciente con los valores seleccionados para las variables de estado para todos los caso paramétricos. En cambio, la regla de decisión para el consumo correspondiente a LQA no es monótona en la tecnología, aunque siempre lo es de manera creciente con los valores del capital. Esta regla de decisión dice que para cada nivel de capital el consumo cae cuando el valor de la perturbación tecnológica se mueve de cero a 0.9, un diez por ciento por debajo de su valor de estado estacionario de 1.0, y crece cuando se encuentra por encima de este valor de 0.9. Esta falta de monotonía no es probable que refleje un comportamiento óptimo de la senda de consumo. Si lo hiciera, sería una característica no capturada por ningún otro método de solución, lo que parece poco probable.

Christiano (1990) resuelve el modelo básico de crecimiento con una depreciación del 100% y una cadena de Markov discreta con tres estados para la tecnología, y también detecta esta no monotonía en la regla de decisión LQA para el consumo, aunque tan sólo para los casos con alta desviación típica del shock,  $\sigma_\epsilon = 0.1$ , mientras que este resultado no aparece en su trabajo para el caso en que  $\sigma_\epsilon = 0.01$ . Parece obvio que resolver con una función de distribución de probabilidad continua para la tecnología resulta ser importante, ya que en la no monotonía en la relación consumo-shock aparece en los resultados de esta Tesis en todos los casos paramétricos considerados (tanto con varianza alta

CASOS 1, 4, 7

CASOS 2, 5, 8

CASOS 3, 6, 9

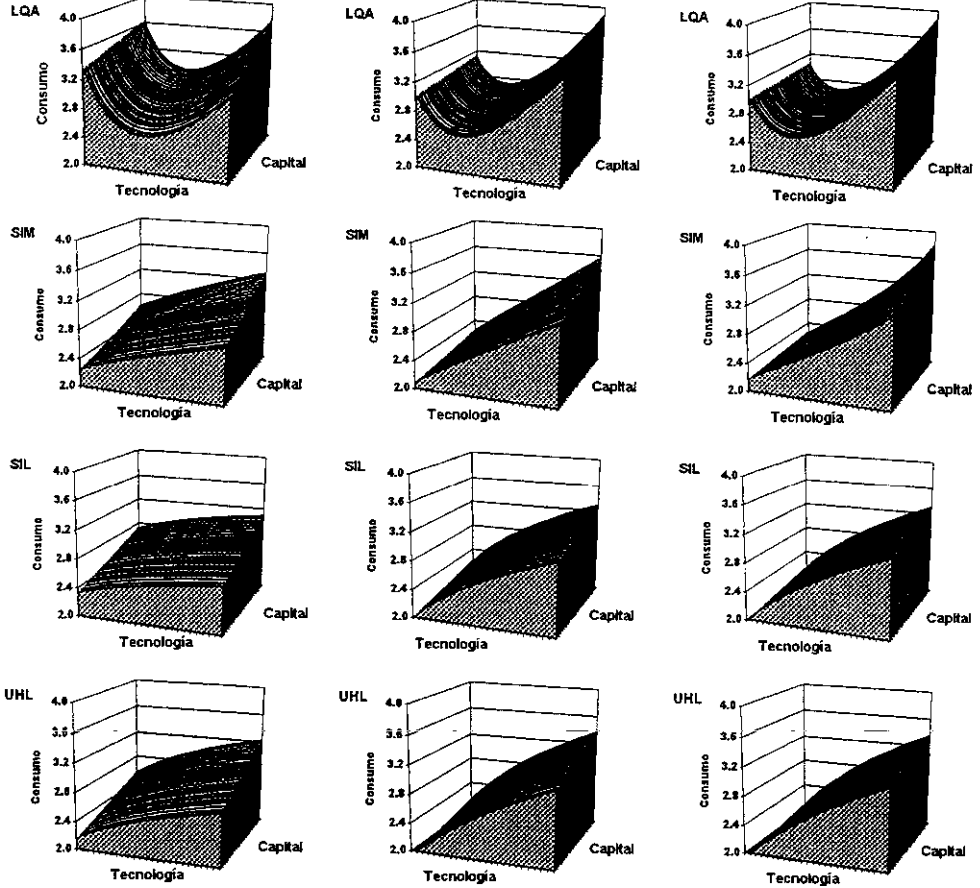


Figura 1.2: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico. Métodos “casi” lineales. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo [0.4, 1.6]. Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{ss}$ .

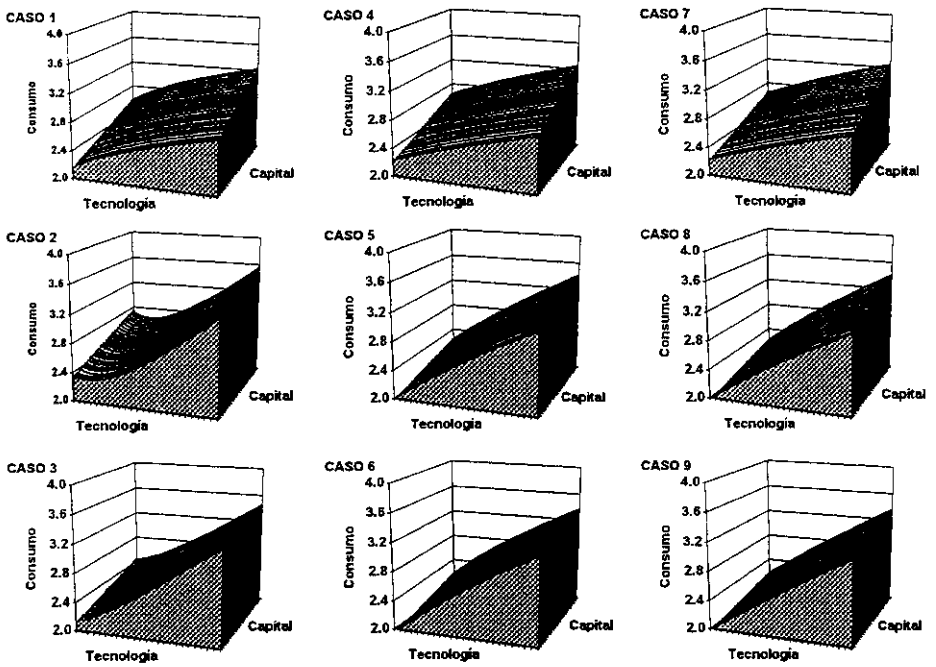


Figura 1.3: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico. Parametrización de Expectativas. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo  $[0.4, 1.6]$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{ss}$ .

Tabla 1.4: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico, caso 9. Todos los métodos. Valor del estadístico usado para contrastar diferencias en correlaciones cruzadas, medias y desviaciones típicas. Ecuación (1.14). En cada panel, los valores de la esquina superior corresponden a  $T=3000$ , y los de la esquina inferior a  $T=150$ . Para comparar, al nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.6449, y al 10%, 1.2816.

$\rho(y_t, y_{t-1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	0.1357	0.0376	0.2143
SIM	0.0971	—	—	—	—
SIL	0.0305	0.1272	—	0.0974	0.0794
UHL	0.0469	0.1437	0.0163	—	0.1759
PEA	0.0286	0.1251	0.0018	0.0181	—
$\rho(y_t, y_{t-2})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	0.1877	0.0466	0.2939
SIM	0.1329	—	—	—	—
SIL	0.0396	0.1721	—	0.1403	0.1072
UHL	0.0663	0.1990	0.0267	—	0.2463
PEA	0.0377	0.1702	0.0018	0.0284	—
media( $c_t$ )	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	1.4382	0.0108	2.1787
SIM	0.0772	—	—	—	—
SIL	0.1065	0.1837	—	1.4624	0.7434
UHL	0.5667	0.6409	0.4648	—	2.2100
PEA	0.1916	0.2688	0.0852	0.3829	—
$\sigma_{c_t}$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	2.3481	2.0376	2.9012
SIM	1.0565	—	—	—	—
SIL	0.9891	1.9992	—	0.2453	0.5521
UHL	0.9398	1.9478	0.0429	—	0.7808
PEA	1.0951	2.0984	0.1077	0.1498	—
$\rho(y_t, c_t)$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	0.3374	0.1749	0.9169
SIM	0.8374	—	—	—	—
SIL	0.3526	0.6739	—	0.1925	0.7164
UHL	0.3210	0.7206	0.0438	—	0.8910
PEA	0.1744	0.8778	0.2281	0.1864	—
$\rho(y_t, c_{t+1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	0.1705	0.0125	0.6916
SIM	0.5649	—	—	—	—
SIL	0.3835	0.2072	—	0.1962	0.5677
UHL	0.3752	0.2175	0.0100	—	0.7545
PEA	0.2491	0.3615	0.1535	0.1438	—

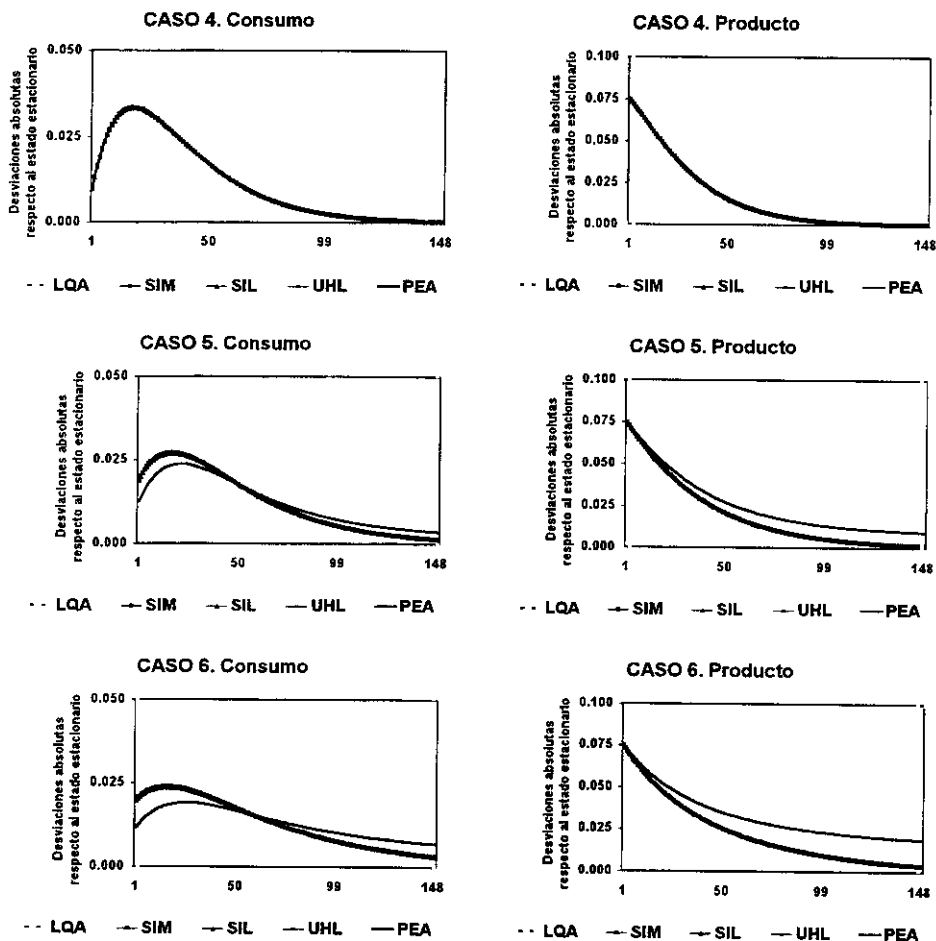


Figura 1.4: Modelo Básico de Crecimiento Neoclásico, casos 4 a 6. Todos los métodos. Funciones de respuesta a un impulso. Respuestas del consumo y el producto ante un impulso de una desviación típica en la perturbación tecnológica. Eje de ordenadas: desviaciones absolutas respecto al estado estacionario. Eje de abscisas: periodos hacia delante.

de  $\sigma_\epsilon$  como en los casos de varianza baja). Además, en este sentido, las linealizaciones en logaritmos UHL y SIL parecen funcionar mejor que la llevada a cabo en Christiano (1990), donde la regla de decisión log-lineal presentaba también la propiedad de no monotonicidad en el caso de varianza alta.

En relación a PEA, se puede observar una extraña no monotonicidad en el caso 2, incluso aunque el polinomio responsable de la regla de decisión pasa el contraste de den Haan-Marcet. En ese caso, cuando  $k$  toma su valor más bajo, el consumo se reduce cuando la tecnología aumenta de su valor más bajo hasta  $z = 0.55$ , creciendo para valores por encima de  $z = 0.55$ . Cuando  $k$  está por encima de su valor de estado estacionario determinista más de un 10%, el consumo decrece al moverse  $z$  desde 0.40 hasta 0.65, creciendo a partir de este nivel. Este resultado sugiere la conveniencia de usar algún criterio adicional al contraste de den Haan-Marcet para escoger el vector  $q$  adecuado para parametrizar el polinomio que se usa para aproximar la expectativa condicional.

La figura 1.4 muestra las respuestas del consumo y el producto ante un impulso de una desviación típica en el shock tecnológico para cada método de solución en los casos 4 al 6. Las aparentes diferencias mostradas por las respuestas del sistema PEA en relación a las otras soluciones son esencialmente nulas, ya que presentan una diferencia máxima del 0.36% del valor de estado estacionario del consumo, y una máxima diferencia del 0.27% en las respuestas del producto. En los casos 1 a 3 las respuestas son casi indistinguibles, mientras que en los casos 7 a 9 los resultados son muy similares a los de la figura 1.4.

No hay diferencias significativas entre las medias, las desviaciones típicas y las correlaciones cruzadas generadas con los diferentes métodos de solución en los casos 1 a 6. Sólo en los casos de alta varianza del shock,  $\sigma_\epsilon = 0.06$ , se puede apreciar algún deterioro en los métodos basados en aproximaciones lineales en niveles alrededor del estado estacionario, LQA y SIM, en el sentido de producir estadísticos que difieren de los calculados con otros métodos. A la luz de los resultados obtenidos con los contrastes realizados en la sección anterior, se puede decir que estas diferencias reflejan un peor comportamiento de estos dos métodos. La tabla 1.4 presenta los resultados para el caso 9: la correlación contemporánea y retardada del consumo con el producto, así como las dos primeras autocorrelaciones del producto no difieren estadísticamente entre métodos. Sin embargo, la media de las series de consumo generadas por las aproximaciones LQA y UHL son distintas de las generadas con los métodos SIL y PEA cuando  $T=3000$ . Cuando  $T=150$ , la desviación típica del consumo calculada de la solución SIM, es diferente de la obtenida de SIL, UHL y PEA. Cuando  $T=3000$  aparecen algunas diferencias adicionales: ahora, la desviación típica del consumo de la solución LQA es claramente diferente de la de los métodos UHL, SIL y PEA. Para este tamaño muestral, recuérdese, no se pudo calcular la solución SIM.

Resumiendo: el comportamiento de las soluciones UHL, SIL y PEA es prácticamente idéntico en todas las dimensiones analizadas. Las aproximaciones lineales en niveles (LQA, SIM) son menos precisas cuando se mira a las propiedades del error de predicción, y muestran desviaciones significativas respecto a la propiedad de racionalidad. También tienden a comportarse ligeramente peor

para valores de la varianza del shock tecnológica en términos de medias y varianzas de las variables de decisión, para las que ocasionalmente proporcionan valores significativamente diferentes en media respecto a los obtenidos con otros métodos de solución. También se observa un comportamiento no monótono en la regla de decisión LQA para el consumo, que no aparece cuando se considera cualquiera de los otros métodos de solución. Este procedimiento, además, produce más evidencia de heterocedasticidad condicional en el error de expectativas que cualquier otro método de solución.

### 1.5.2 Modelo de Hansen (1985)

#### Propiedades del error de predicción

Los resultados cualitativos que surgen de las tablas 1.1, 1.5 a 1.8 y las figuras 1.5 a 1.8 son similares a los obtenidos con el modelo de crecimiento básico.

La tabla 1.1 muestra que la solución PEA pasa el contraste de den Haan-Marcet para el 95% de las realizaciones del shock tecnológico, y en todos los casos considerados de valores paramétricos. La figura 1.5 resume los resultados del test para los métodos basados en aproximaciones lineales: el método SIM parece ahora ser más sensible que LQA ante un valor mayor del shock tecnológico, aunque ambas soluciones, y especialmente la primera, se deterioran en términos de este contraste para los dos tamaños muestrales cuando la varianza aumenta. Al igual que pasaba con el modelo anterior, las soluciones "casi" lineales SIL y UHL son bastante exactas para los nueve casos paramétricos analizados y para los dos tamaños muestrales, pasando el contraste para aproximadamente el 95% de las simulaciones, de nuevo posiblemente debido a haber realizado la aproximación en logaritmos. En lo que se refiere al parámetro de aversión relativa al riesgo, las soluciones SIM y LQA se vuelven a comportar peor para valores bajos de  $\eta$ , alcanzando un porcentaje muy elevado de rechazos de la hipótesis nula de falta de correlación entre el error de expectativas y las variables en el conjunto de información. El funcionamiento de SIL y UHL es acorde con las propiedades de racionalidad uniformemente para todos los valores de  $\eta$ .

La cifras de la tabla 1.5 muestran los resultados de los contrastes realizados respecto al modelo AR(1) ajustado a los errores de expectativas aproximados. Tal y como ocurría en el caso del modelo básico de crecimiento, no hay ninguna evidencia de una media significativamente distinta de cero en ningún error de expectativas aproximado. Los coeficientes autorregresivos significativos que surgen de las soluciones LQA y SIM tienden a estar asociados a altos valores de la elasticidad intertemporal de sustitución, y a valores altos de la varianza de la perturbación en tecnología. Junto con los rechazos del contraste de den Haan-Marcet, este resultado cuestiona de nuevo la interpretación de las series temporales obtenidas con estos métodos como la solución de expectativas racionales del modelo. En el caso del modelo básico se presenta una interpretación de este resultado.

La tabla 1.6 muestra de nuevo que la solución LQA presenta más problemas que el resto de las soluciones para capturar de modo adecuado la estructura

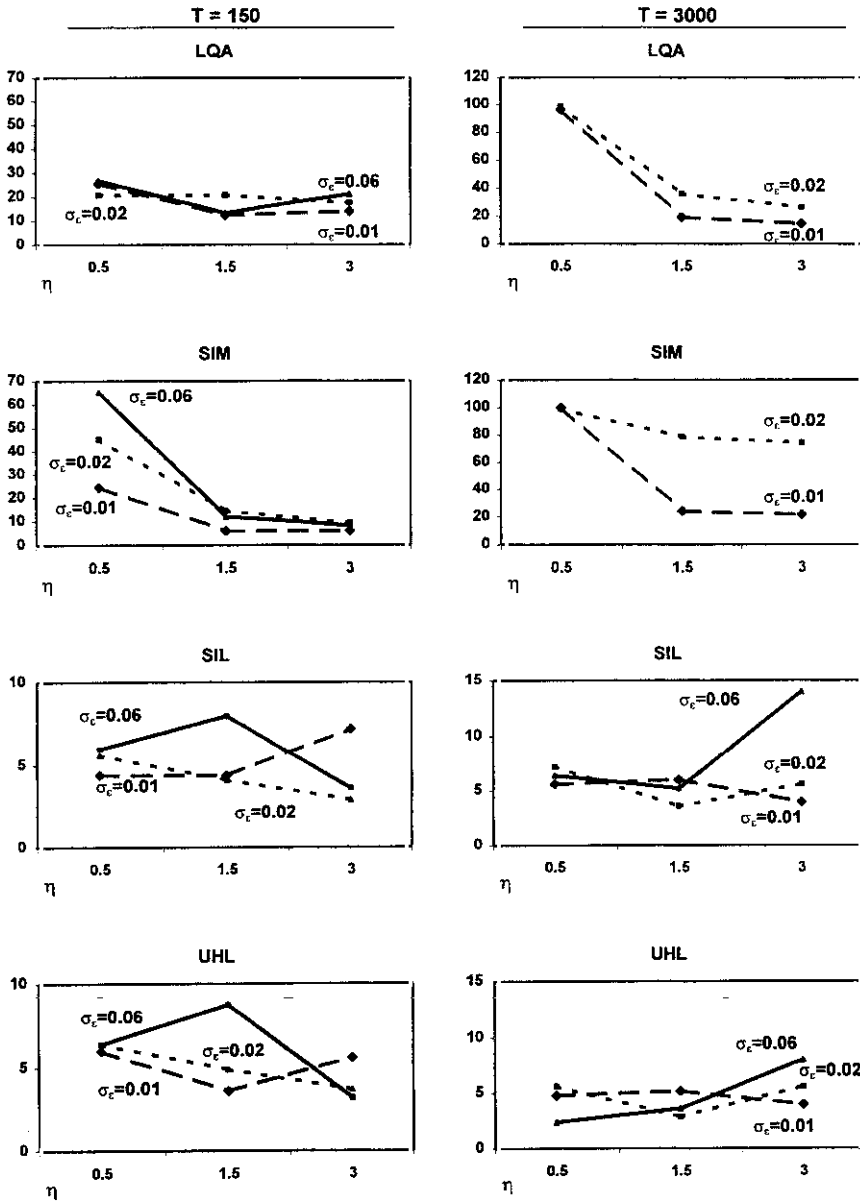


Figura 1.5: Modelo de Hansen (1985). Métodos "casi" lineales. Contraste de den Haan y Marcet (1994). Eje de ordenadas: porcentaje de realizaciones del estadístico en la región de rechazo al 5%, de la hipótesis nula:  $H_0 : E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Eje de abscisas: valores de  $\eta$ . Columna de la izquierda:  $T=150$ . Columna de la derecha:  $T=3000$ . Como se indica, en cada gráfico cada línea hace referencia a un valor distinto de  $\sigma_\epsilon$ . Instrumentos usados:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

Tabla 1.5: Modelo de Hansen (1985). Todos los métodos. Estimación de estructura AR(1) para el error de expectativas. Ecuación (1.11). Porcentaje de realizaciones del estadístico t en la región de rechazo al 5% para la hipótesis nula:  $H_0 : \mu = 0$  para la fila denotada por  $\mu$ , y  $H_0 : \rho = 0$  para la fila denotada por  $\rho$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
<b>Caso 1</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	10.8	13.6	3.2	3.6	3.6	25.6	90.8	4.4	4.4	4.8
<b>Caso 2</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	7.6	4.0	4.4	4.4	4.4	6.8	4.4	2.4	3.2	1.6
<b>Caso 3</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	7.6	4.4	5.6	5.2	4.8	8.0	6.0	6.0	5.6	5.6
<b>Caso 4</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.2	35.2	4.4	4.4	4.4	16.8	38.8	0.8	1.2	1.2
<b>Caso 5</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.2	6.0	4.0	3.6	4.4	11.2	24.8	4.0	4.0	6.4
<b>Caso 6</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	10.8	6.0	6.0	5.6	5.6	17.1	26.2	6.7	6.7	3.7
<b>Caso 7</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	7.6	47.6	1.0	1.6	1.0	—	—	4.4	5.2	6.4
<b>Caso 8</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.6	8.8	6.8	6.4	7.6	—	—	8.4	8.4	8.4
<b>Caso 9</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	11.2	3.2	4.4	5.2	4.8	—	—	14.4	8.8	5.6

Tabla 1.6: Modelo de Hansen (1985). Todos los métodos. Contraste de Multiplicadores de Lagrange para estructura ARCH en el error de expectativas. Ecuaciones (1.12) y (1.13). Porcentaje de realizaciones del estadístico ( $TR^2$ ) en la región de rechazo al 5% de la hipótesis nula:  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
<b>Caso 1</b>	57	17	14	14	15	100	47	25	25	26
<b>Caso 2</b>	26	16	15	15	16	100	14	14	14	14
<b>Caso 3</b>	32	19	19	18	19	100	19	20	20	21
<b>Caso 4</b>	66	22	20	20	21	100	90	30	32	32
<b>Caso 5</b>	42	18	19	20	19	100	19	35	39	55
<b>Caso 6</b>	46	20	23	23	23	100	23	42	42	49
<b>Caso 7</b>	52	32	30	29	30	—	—	100	100	100
<b>Caso 8</b>	40	18	28	28	30	—	—	100	100	100
<b>Caso 9</b>	45	14	29	29	32	—	—	100	100	100

no lineal implícita en la expectativa condicional. Otra vez, la evidencia en esta dirección parece ser más importante for los casos con mayor elasticidad de sustitución intertemporal y mayor varianza del shock exógeno. La potencia del contraste aumenta fuertemente en el caso de la muestra  $T=3000$ .

### Otras propiedades de las soluciones

Las reglas de decisión para el consumo derivadas con los métodos numéricos SIM, SIL, UHL y PEA muestran como el consumo es creciente con las variables de estado, capital y tecnología, y además los resultados cualitativos y cuantitativos son esencialmente idénticos. La figura 1.6 contiene los resultados para los métodos "casi" lineales, y la figura 1.7 los de PEA. En estas figuras el stock de capital toma 25 valores separados por la misma distancia en un intervalo del 5% alrededor de su valor de estado estacionario determinista  $k_{ss}$ , mientras que  $z$  toma también 25 valores en torno a su valor de estado estacionario, desde 0.8 a 1.2. En este caso se ha reducido el rango de variación de la variable de estado exógena respecto al que se tomó en el modelo básico debido a que para el rango más amplio se tenían valores inducidos para el consumo que no eran admisibles (valores negativos para el consumo), con las reglas LQA y SIM.

De nuevo, la regla de decisión LQA es no monótona en la tecnología, aunque es monótona creciente en el capital. El efecto de la no monotonicidad es menos importante que en el caso del modelo básico de crecimiento. Muestra que para cualquier nivel del stock de capital, el consumo cae cuando la tecnología se mueve de cero a 0.90, un diez por ciento por debajo de su valor de estado estacionario de 1.0, y se incrementa a partir de ese valor.

En la figura 1.8 se pueden observar las funciones de respuesta a un impulso de tamaño una desviación típica en el shock tecnológico para cada método de solución en los casos 4 a 6. No hay ni diferencias numéricas ni visuales en las respuestas de las horas trabajadas y el producto generadas por los distintos métodos. El mismo comentario vale para los casos 1, 2, 3, 7, 8 y 9. Un investigador que trabajase con los diferentes métodos obtendría las mismas implicaciones cualitativas y cuantitativas.

No se detectan tampoco diferencias significativas entre las medias, las desviaciones típicas y las correlaciones cruzadas obtenidas para las variables con los distintos métodos en los casos 1 a 5. En relación al caso 6, las correlaciones obtenidas con SIM de las horas trabajadas con el producto, tanto contemporáneas como retardadas, para el tamaño muestral  $T = 3000$ , son significativamente distintas de las obtenidas con PEA al nivel del 95%, y de las obtenidas con LQA, UHL y SIL al nivel del 90% [vease la tabla 1.7]. También se presenta la tabla 1.8 como ejemplo de lo que sucede en los casos de alta varianza del shock tecnológico: en este caso las correlaciones producidas por SIM entre el producto y las horas trabajadas son diferentes de las obtenidas al nivel del 95% cuando  $T = 150$  (recuérdese que con SIM para  $T = 3000$  no se pudo obtener solución). La media de la variable de horas trabajadas obtenida con UHL difiere de la calculada con SIL y PEA cuando  $T=3000$ .

Para resumir, el comportamiento de las soluciones UHL, SIL y PEA del

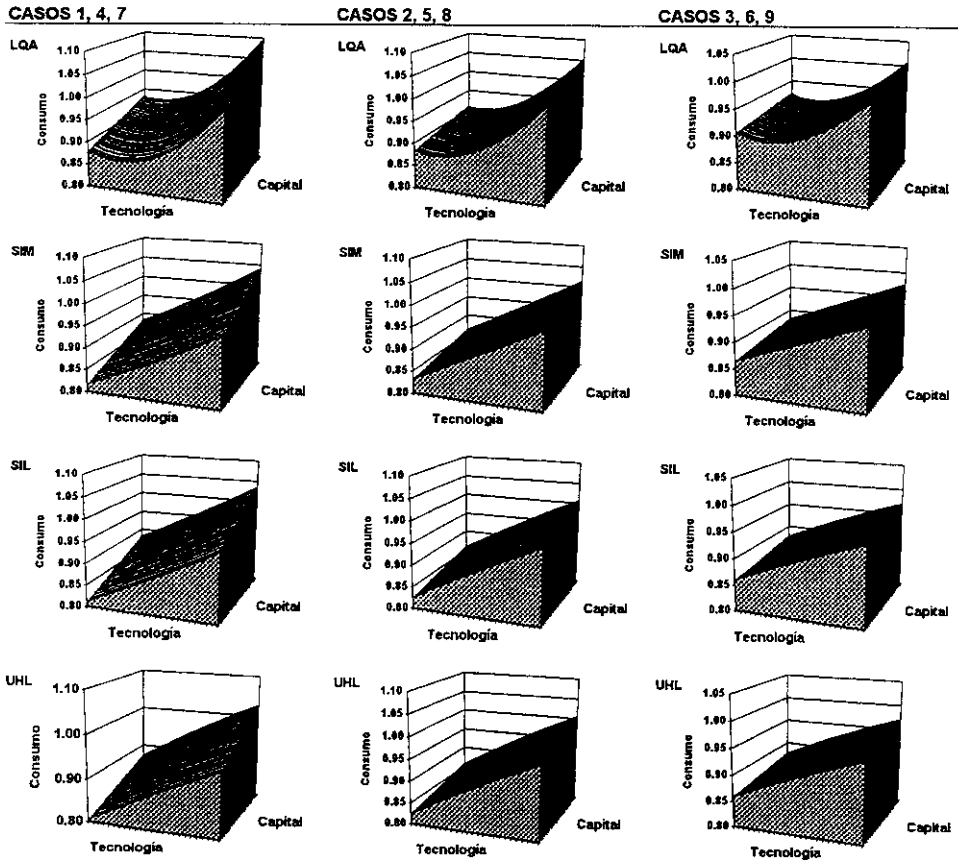


Figura 1.6: Modelo de Hansen (1985). Métodos “casi” lineales. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo [0.8, 1.2]. Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 5% alrededor de  $k_{ss}$ .

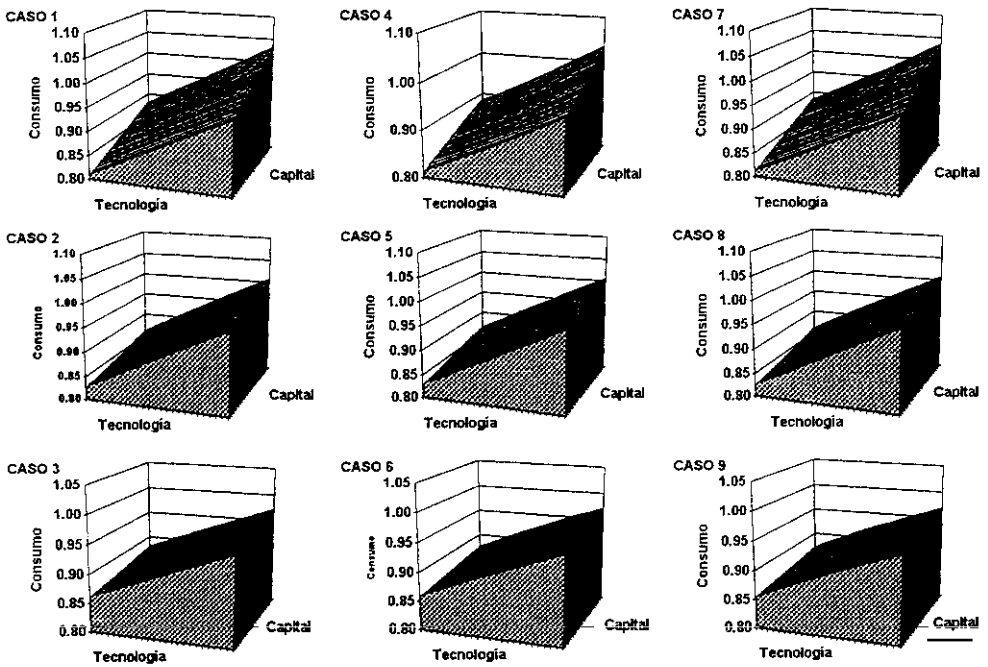


Figura 1.7: Modelo de Hansen (1985). Parametrización de Expectativas. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo  $[0.8, 1.2]$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 5% alrededor de  $k_{ss}$ .

Tabla 1.7: Modelo de Hansen (1985), caso 6. Todos los métodos. Valor del estadístico usado para contrastar diferencias en correlaciones cruzadas, medias y desviaciones típicas. Ecuación (1.14). En cada panel, los valores de la esquina superior corresponden a  $T=3000$ , y los de la esquina inferior a  $T=150$ . Para comparar, al nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.6449, y al 10%, 1.2816.

$\rho(y_t, y_{t-1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	0.9259	0.0610	0.0460	0.2419
SIM	0.1170	—	0.8633	0.8779	0.6965
SIL	0.0028	0.1144	—	0.0149	0.1795
UHL	0.0004	0.1175	0.0032	—	0.1946
PEA	0.0708	0.0473	0.0681	0.0713	—
$\rho(y_t, y_{t-2})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	1.2902	0.0874	0.0670	0.3335
SIM	0.1744	—	1.2005	1.2203	0.9741
SIL	0.0019	0.1726	—	0.0203	0.2441
UHL	0.0029	0.1774	0.0048	—	0.2646
PEA	0.0958	0.0800	0.0939	0.0988	—
media( $N_t$ )	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	0.0237	0.0364	0.1250	0.0446
SIM	0.1125	—	0.0599	0.1004	0.0681
SIL	0.0102	0.1023	—	0.1615	0.0082
UHL	0.0560	0.1689	0.0663	—	0.1698
PEA	0.0097	0.1226	0.0200	0.0464	—
$\sigma_{N_t}$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	0.1789	0.0152	0.0021	0.1217
SIM	0.0360	—	0.1946	0.1818	0.2977
SIL	0.0002	0.0356	—	0.0131	0.1072
UHL	0.0036	0.0323	0.0033	—	0.1202
PEA	0.0604	0.0948	0.0604	0.0638	—
$\rho(y_t, N_t)$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	1.2653	0.0897	0.1118	0.6331
SIM	0.5085	—	1.3504	1.3701	1.8822
SIL	0.0048	0.5126	—	0.0223	0.5422
UHL	0.0002	0.5086	0.0050	—	0.5190
PEA	0.2183	0.7214	0.2133	0.2186	—
$\rho(y_t, N_{t+1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	1.2092	0.0887	0.1098	0.5991
SIM	0.5064	—	1.2936	1.3124	1.7936
SIL	0.0044	0.5100	—	0.0212	0.5093
UHL	0.0005	0.5060	0.0049	—	0.4874
PEA	0.1934	0.6947	0.1888	0.1940	—

Tabla 1.8: Modelo de Hansen (1985), caso 8. Todos los métodos. Valor del estadístico usado para contrastar diferencias en correlaciones cruzadas, medias y desviaciones típicas. Ecuación (1.14). En cada panel, los valores de la esquina superior corresponden a  $T=3000$ , y los de la esquina inferior a  $T=150$ . Para comparar, al nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.6449, y al 10%, 1.2816.

$\rho(y_t, y_{t-1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	0.1331	—	—	—	—
SIL	0.0943	0.2253	—	0.0743	0.1434
UHL	0.0562	0.1878	0.0380	—	0.2176
PEA	0.1611	0.2910	0.0664	0.1044	—
$\rho(y_t, y_{t-2})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	0.1534	—	—	—	—
SIL	0.1438	0.2940	—	0.0936	0.1832
UHL	0.0970	0.2481	0.0467	—	0.2766
PEA	0.2274	0.3762	0.0833	0.1300	—
media( $N_t$ )	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	1.2136	—	—	—	—
SIL	0.3164	0.9159	—	1.6474	0.0786
UHL	0.4625	1.6724	0.7857	—	1.5759
PEA	0.2139	1.0172	0.1039	0.6831	—
$\sigma_{N_t}$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	0.5834	—	—	—	—
SIL	0.0978	0.4969	—	0.3882	0.1349
UHL	0.0388	0.5486	0.0589	—	0.2527
PEA	0.0484	0.6241	0.1457	0.0870	—
$\rho(y_t, \bar{N}_t)$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	3.2537	—	—	—	—
SIL	0.2161	3.0502	—	0.2296	0.7624
UHL	0.4761	2.8184	0.2586	—	0.9874
PEA	0.1757	3.3882	0.3885	0.6460	—
$\rho(y_t, N_{t+1})$	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
LQA	—	—	—	—	—
SIM	3.0337	—	—	—	—
SIL	0.1705	2.8699	—	0.2420	0.7494
UHL	0.4570	2.6265	0.2836	—	0.9867
PEA	0.2255	3.2013	0.3915	0.6747	—

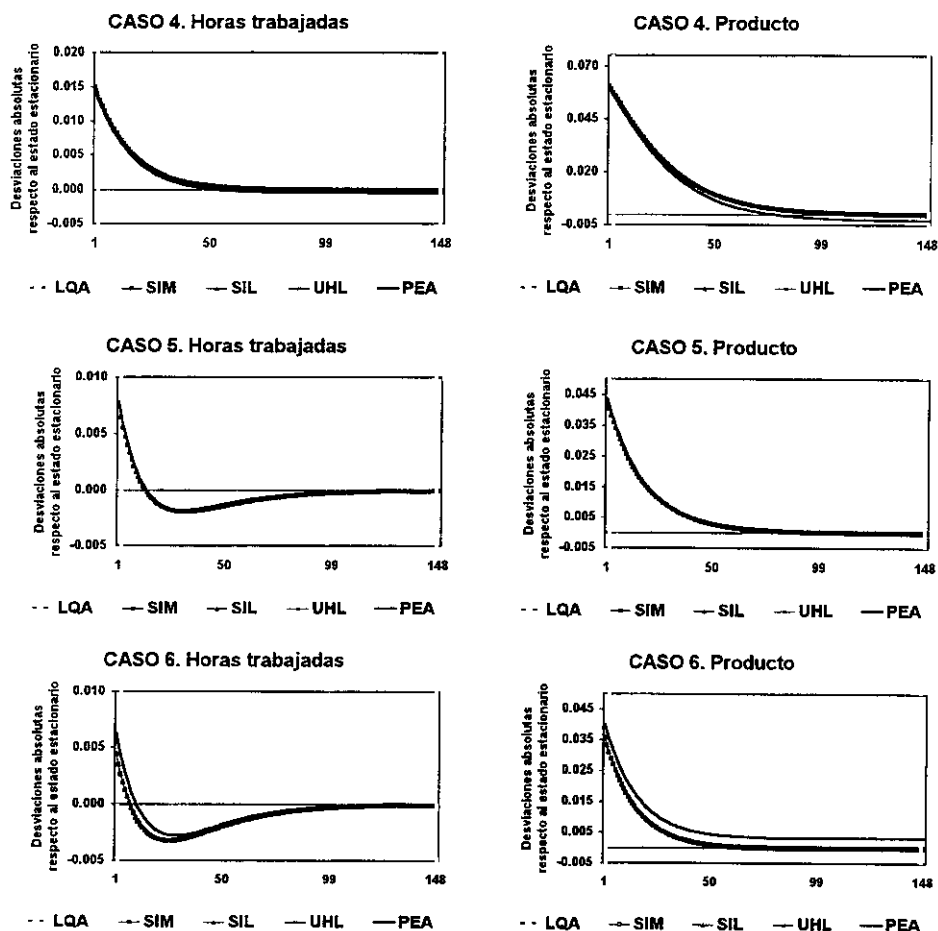


Figura 1.8: Modelo de Hansen (1985), casos 4 a 6. Todos los métodos. Funciones de respuesta a un impulso. Respuestas del consumo y el producto ante un impulso de una desviación típica en la perturbación tecnológica. Eje de ordenadas: desviaciones absolutas respecto al estado estacionario. Eje de abcisas: periodos hacia delante.

Tabla 1.9: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Todos los métodos. Estimación de estructura AR(1) para el error de expectativas. Ecuación (1.11). Porcentaje de realizaciones del estadístico  $t$  en la región de rechazo al 5% para la hipótesis nula:  $H_0 : \mu = 0$  para la fila denotada por  $\mu$ , y  $H_0 : \rho = 0$  para la fila denotada por  $\rho$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
<b>Caso 1</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	5.6	6.4	5.2	5.2	4.4	7.6	11.6	5.6	5.6	2.8
<b>Caso 2</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	6.0	4.0	3.6	3.6	3.6	9.2	10.8	4.0	3.6	3.6
<b>Caso 3</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	10.4	8.0	4.4	4.0	4.4	22.5	56.1	5.8	5.8	4.0
<b>Caso 4</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho$	7.2	7.6	2.0	2.0	2.0	21.2	54.5	3.6	3.6	4.2
<b>Caso 5</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	9.0	9.5	4.0	5.0	3.5	90.8	—	2.2	2.9	3.8
<b>Caso 6</b>										
$\mu$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1	—	0.0	0.0	0.0
$\rho$	10.5	11.0	6.8	6.8	7.2	93.5	—	3.8	3.8	5.7

modelo de trabajo indivisible es, de nuevo, casi indistinguible en todas las dimensiones analizadas, si se exceptúan ciertas discrepancias que aparecen en la media de las horas trabajadas para algunos casos paramétricos extremos entre UHL por un lado, y SIL y PEA por otro. En lo relativo al contraste de den Haan-Marcet, LQA y SIM se comportan mal, y muestran evidencia de correlación entre el error de expectativas y variables conocidas cuando la expectativa se hizo. También suelen presentar autocorrelación significativa en el error de expectativas para los casos con alta varianza de la perturbación y bajo valor de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Tal y como ocurría con el modelo básico de crecimiento, estos fallos están relacionados entre sí. De nuevo, una interpretación estricta de estas soluciones como soluciones de expectativas racionales es cuestionable. La solución LQA parece tener más problemas que el resto de métodos en aproximar la expectativa condicional, ya que el error muestra más evidencia de estructura ARCH. El comportamiento no monótono de la regla de decisión LQA para el consumo en relación a la perturbación tecnológica aparece de nuevo, aunque de manera más leve.

### 1.5.3 Modelo de Cooley y Hansen (1989)

#### Propiedades del error de predicción

Los resultados relativos al análisis del modelo de Cooley y Hansen se presentan en las tablas 1.1 y 1.9 a 1.11, y en las figuras 1.9 a 1.16.

Es importante señalar que la implementación del método LQA para resolver este modelo es diferente de la usada para las dos economías previas en las que

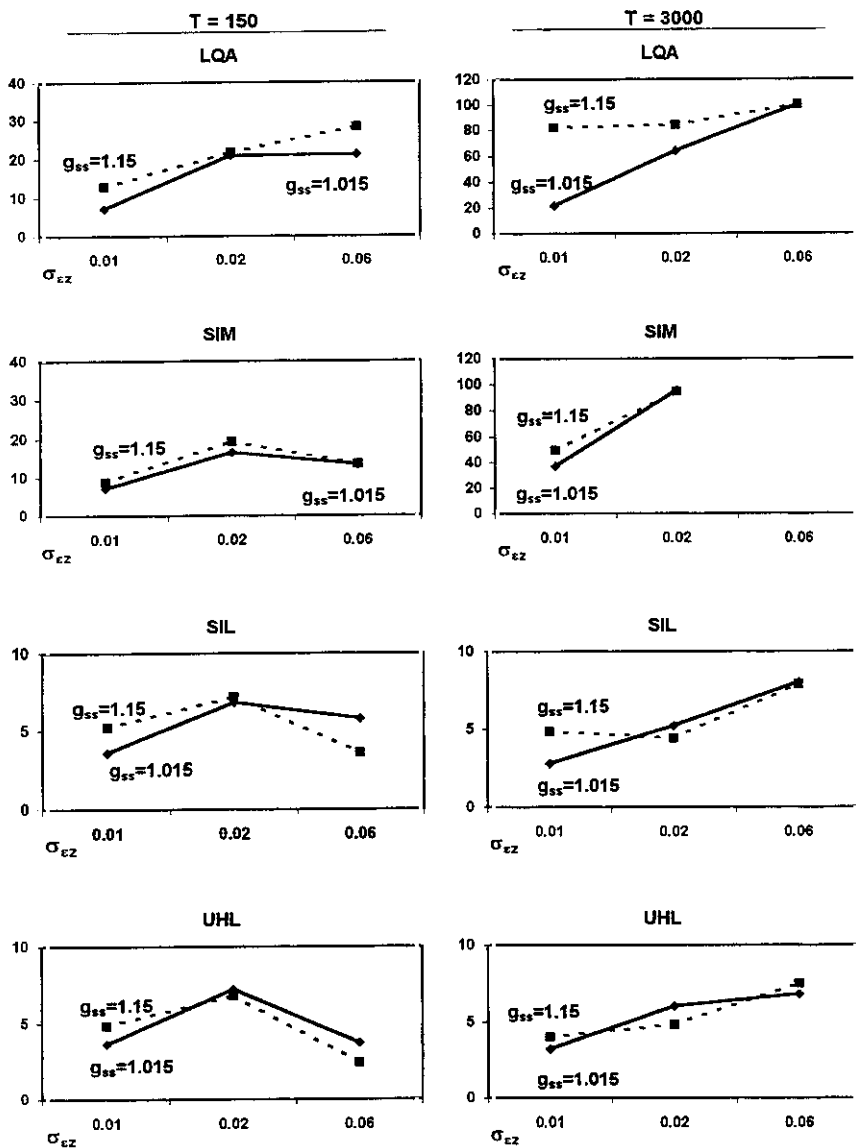


Figura 1.9: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Métodos "casi" lineales. Contraste de den Haan y Marcet (1994). Eje de ordenadas: porcentaje de realizaciones del estadístico en la región de rechazo al 5%, de la hipótesis nula:  $H_0 : E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Eje de abscisas: valores de  $\sigma_c$ . Columna de la izquierda:  $T=150$ . Columna de la derecha:  $T=3000$ . Como se indica, en cada gráfico cada línea hace referencia a un valor distinto de  $g_{ss}$ . Instrumentos usados:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

Tabla 1.10: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Todos los métodos. Contraste de Multiplicadores de Lagrange para estructura ARCH en el error de expectativas. Ecuaciones (1.12) y (1.13). Porcentaje de realizaciones del estadístico ( $TR^2$ ) en la región de rechazo al 5% de la hipótesis nula:  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

	T=150					T=3000				
	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA	LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
Caso 1	22	20	19	19	18	44	21	24	24	24
Caso 2	16	14	15	15	14	46	22	23	23	22
Caso 3	31	19	20	20	22	99	28	26	27	40
Caso 4	27	20	19	19	19	98	34	36	52	36
Caso 5	44	22	29	30	31	97	—	100	100	100
Caso 6	34	14	24	24	25	98	—	100	100	100

la solución competitiva era eficiente en el sentido de Pareto. Por tanto se debe tener en cuenta que los comentarios que se refieren a la solución LQA no se pueden leer como una continuación suave de los que se hicieron respecto a los modelos no monetarios.

En relación al contraste de den Haan-Marcet, los resultados al resolver los modelos previos se mantienen en la economía monetaria. La figura 1.9 muestra ahora el porcentaje de rechazos como función del valor de estado estacionario de la tasa de crecimiento monetario y la varianza del shock en tecnología. Las soluciones lineales en logaritmos pasan el contraste aproximadamente al nivel de significación del 5%, y no se deterioran al aumentar la varianza de la perturbación tecnológica. También es insignificante el efecto de incrementar la tasa de expansión monetaria de estado estacionario.

Por otra parte, cuando  $T = 3000$ , las soluciones LQA y SIM se deterioran al aumentar  $\sigma_{\epsilon_z}$ , como en los modelos previos. Cuando se pasa de  $\sigma_{\epsilon_z} = 0.01$  a  $\sigma_{\epsilon_z} = 0.02$ , el porcentaje de rechazos del contraste de den Haan-Marcet salta del 21% al 64% para la solución LQA, y del 37% al 96% para la solución SIM. Además, dado un valor de la varianza de la perturbación tecnológica, cuanto mayor es la tasa de crecimiento del dinero, peor es el comportamiento de las soluciones LQA y SIM. Intuitivamente esto se puede explicar teniendo en cuenta que  $g_t$  es log-normal, y entonces, al aumentar  $g_{ss}$  aumenta no sólo la media de  $g_t$ , sino también su varianza,  $\sigma_{g_t}$ . Cuando  $T = 150$ , las soluciones LQA y SIM no se rechazan tan a menudo como cuando  $T = 3000$ , debido a la falta de potencia del contraste para valores bajos de  $T$ .

Las cifras de la tabla 1.9 muestran de nuevo que no se detecta evidencia de una media significativamente distinta de cero en el error de expectativas, aunque hay alguna indicación de correlación serial, especialmente en los casos de varianza de  $\epsilon_z$  alta para las soluciones LQA y SIM. Para la solución LQA esta evidencia resulta muy clara cuando  $T=3000$ .

La tabla 1.10 muestra la habitual tendencia de la solución LQA a presentar heterocedasticidad condicional en el error de predicción, como una posible indicación de estructura no lineal de la expectativa condicional que no es capaz de capturar adecuadamente.

### Otras propiedades de las soluciones

En lo referente a las regla de decisión, la extensión del método LQA propuesto por Kydland (1989) y Cooley y Hansen (1989) para resolver en contextos no óptimos en el sentido de Pareto no presenta el problema de no monotonicidad que se viene señalando para problemas de planificador social estándar. El consumo aumenta tanto con los valores de la perturbación tecnológica como con los del stock de capital, y se reduce de forma monótona al aumentar la perturbación al crecimiento monetario. Las soluciones SIM, SIL, UHL y PEA también tienen estas propiedades. Lo que es más, las tramas que se pueden ver en las figuras 1.10 a 1.13 son muy similares entre las cinco estrategias de solución.

Las figuras 1.14, 1.15 y 1.16 muestran para los casos 4 a 6 las respuestas de las horas trabajadas, el producto y la inflación a un impulso del tamaño de una desviación típica en la perturbación tecnológica, la de crecimiento monetario y ambas a la vez, respectivamente. Como cabía esperar, el trabajo y el nivel de producto reaccionan positivamente a un impulso en  $z$  durante un cierto número de periodos. La inflación cae, y permanece por debajo de su nivel de estado estacionario durante varios periodos. Las respuestas de las horas trabajadas y el producto ante un shock en el crecimiento monetario son prácticamente inexistentes, mientras que la inflación salta en un principio, pero retorna rápidamente a su valor de estado estacionario. Cuando se examina el efecto conjunto de los dos shocks, la innovación en la tecnología domina al determinar la respuesta de la inflación en los casos de varianza alta, como era de esperar, mientras que el shock al crecimiento monetario domina cuando la varianza del shock tecnológico es baja.

Por inspección visual, las características que más resaltan son las distintas pautas que se obtienen para LQA en las tres figuras, y las respuestas de PEA ante un shock monetario. En relación a LQA, las diferencias aparecen porque los valores de estado estacionario de las horas trabajadas y el producto inducidas por las reglas lineales de Cooley y Hansen (1989) son ligeramente distintos de los que se derivan del sistema de condiciones de Euler y restricciones del modelo original. El estado estacionario de la inflación sólo depende de  $g_{ss}$  con lo que no se aprecian diferencias en las respuestas de la inflación obtenidas con los distintos métodos. Para los casos 4 a 6, se tiene que el nivel de estado estacionario para las horas trabajadas y el producto es de  $N_{ss} = 0.2591$  y  $y_{ss} = 0.9596$  respectivamente, mientras que los valores que implican las reglas lineales LQA son de 0.2554 y 0.9510. Al valor de la diferencia entre los dos estados estacionarios es a donde convergen las respuestas a impulso LQA en la figura 1.14. Sin embargo las diferencias son despreciables, ya que, para el caso 4 oscilan entre un 0.8% y un 1.5% del valor de estado estacionario de las horas, y en torno a un 1.1% del estado estacionario del producto. Para el caso 6, con los mayores valores de  $\sigma_{\epsilon_z}$  y  $g_{ss}$ , las diferencias son ligeramente mayores, pero no exceden un 1.5% de ninguno de los valores de estado estacionario. En el caso 5, las diferencias con respecto al estado estacionario son casi inexistentes, y las funciones de respuesta a un impulso son idénticas. El mismo comentario es aplicable a la solución LQA en las figuras 1.15 y 1.16, donde se presentan las respuestas de las variables a

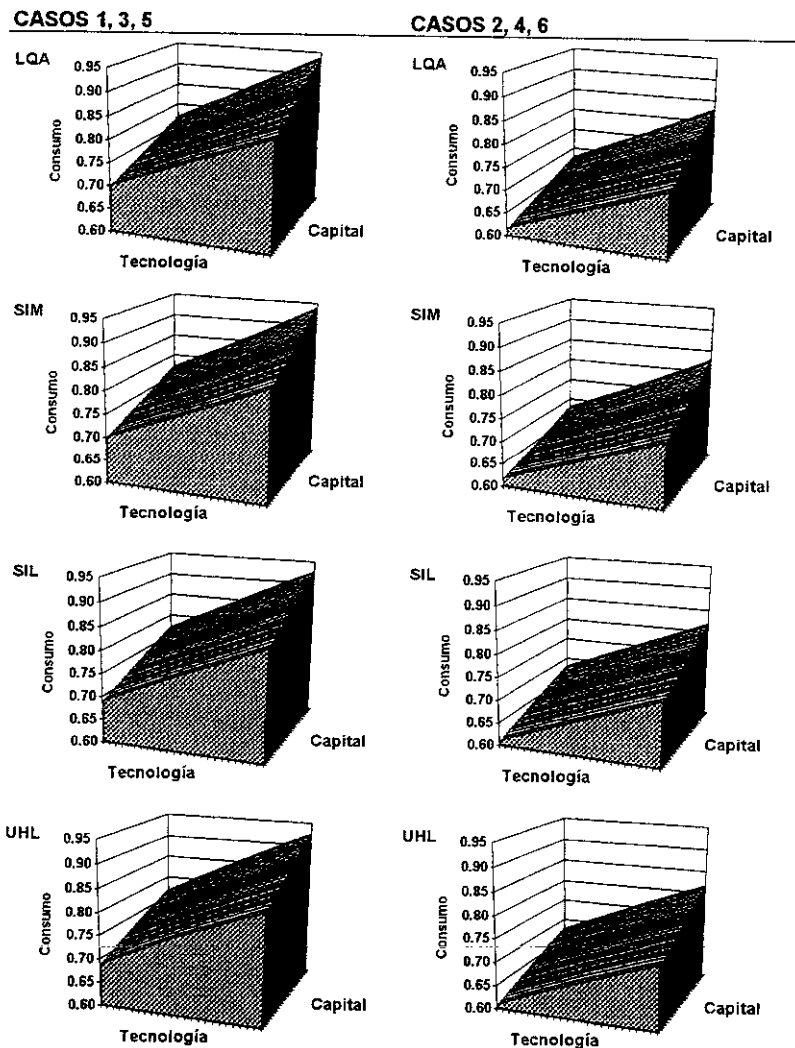


Figura 1.10: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Métodos “casi” lineales. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo  $[0.8, 1.2]$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{ss}$ . Crecimiento monetario: se mantiene constante en  $g_{ss}$ .

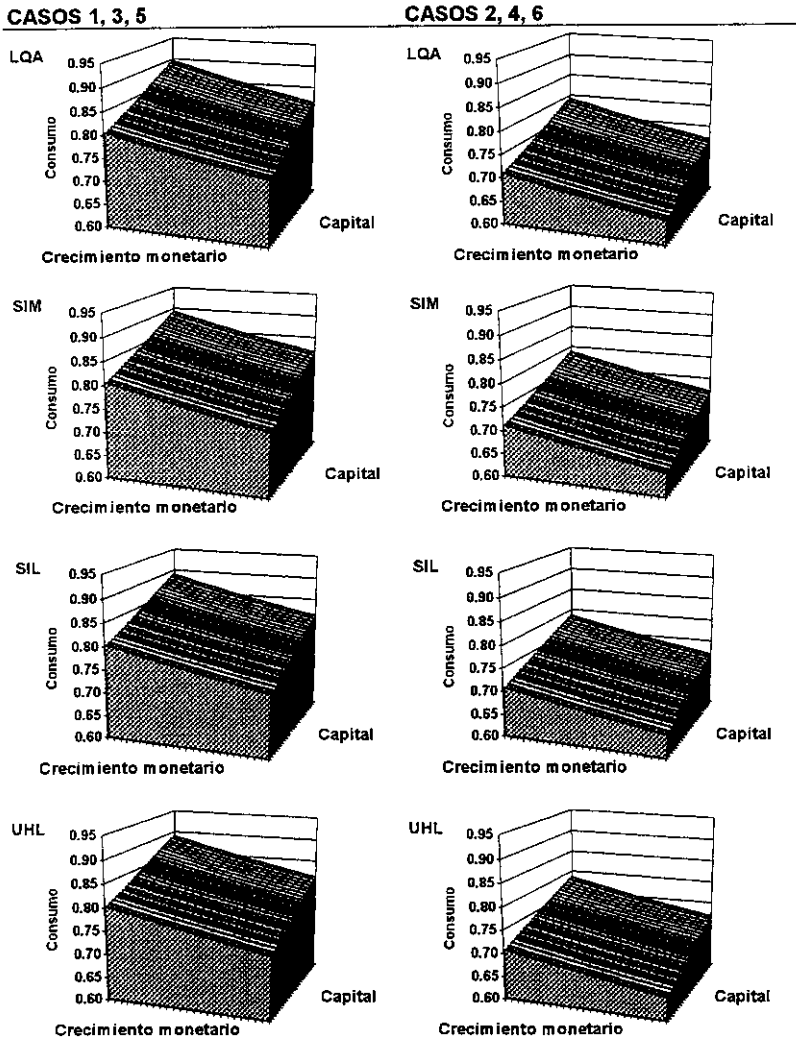


Figura 1.11: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Métodos “casi” lineales. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: se mantiene constante en  $z_{ss} = 1$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{ss}$ . Crecimiento monetario: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $g_{ss}$ .

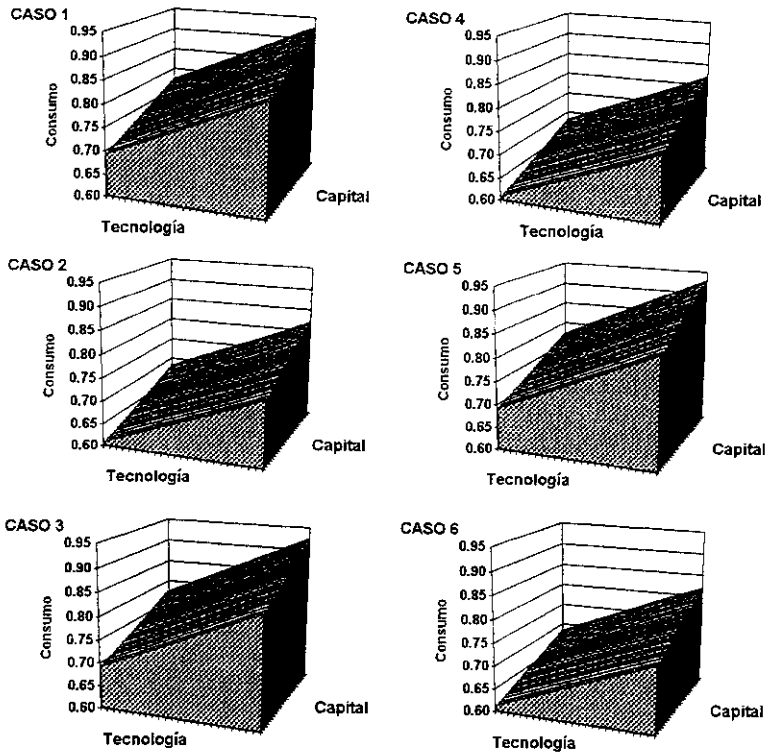


Figura 1.12: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Parametrización de Expectativas. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: 25 valores distribuidos de manera homogénea en el intervalo  $[0.8, 1.2]$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{ss}$ . Crecimiento monetario: se mantiene constante en  $g_{ss}$ .

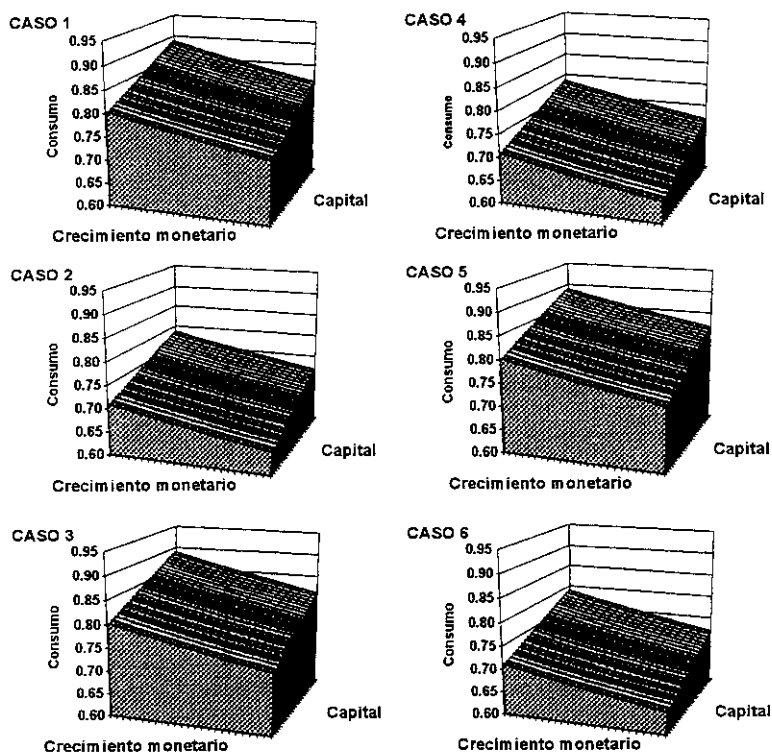


Figura 1.13: Modelo de Cooley y Hansen (1989). Parametrización de Expectativas. Regla de decisión para el consumo. Perturbación tecnológica: se mantiene constante en  $z_{s,t} = 1$ . Capital: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $k_{s,t}$ . Crecimiento monetario: 25 valores distribuidos de manera homogénea en un intervalo del 10% alrededor de  $g_{s,t}$ .

Tabla 1.11: Modelo de Cooley y Hansen (1989), caso 6. Todos los métodos. Valor del estadístico usado para contrastar diferencias en correlaciones cruzadas, medias y desviaciones típicas. Ecuación (1.14). En cada panel, los valores de la esquina superior corresponden a  $T=3000$ , y los de la esquina inferior a  $T=150$ . Para comparar, al nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.6449, y al 10%, 1.2816.

		LQA	SIM	SIL	UHL	PEA
$\rho(y_t, y_{t-1})$	LQA	—	—	0.3708	0.4047	0.4108
	SIM	1.2309	—	—	—	—
	SIL	0.8021	0.4411	—	0.0743	0.0877
	UHL	0.8446	0.3971	0.0439	—	0.0134
	PEA	0.8396	0.4027	0.0385	0.0054	—
$\rho(y_t, y_{t-2})$	LQA	—	—	0.7159	0.7629	0.7831
	SIM	1.5889	—	—	—	—
	SIL	1.0430	0.5613	—	0.0878	0.1254
	UHL	1.0924	0.5107	0.0507	—	0.0376
	PEA	1.0928	0.5109	0.0507	0.0000	—
media( $N_t$ )	LQA	—	—	1.0810	0.6934	1.1183
	SIM	1.5367	—	—	—	—
	SIL	0.7345	1.2395	—	2.1197	0.2086
	UHL	0.3216	1.8793	0.6334	—	2.3468
	PEA	0.8139	1.1240	0.1202	0.7564	—
$\sigma_{N_t}$	LQA	—	—	2.1126	2.0987	2.1147
	SIM	1.1693	—	—	—	—
	SIL	0.5762	0.9115	—	0.3825	0.0614
	UHL	0.5005	1.0072	0.1108	—	0.4417
	PEA	0.5704	0.9180	0.0083	0.1024	—
$\rho(y_t, N_t)$	LQA	—	—	2.3463	2.2124	2.2568
	SIM	4.3355	—	—	—	—
	SIL	2.0852	2.7667	—	0.2451	0.1773
	UHL	2.0817	2.7355	0.0181	—	0.0704
	PEA	2.1431	2.7288	0.0546	0.0359	—
$\rho(y_t, N_{t+1})$	LQA	—	—	2.4838	2.3217	2.3763
	SIM	4.2143	—	—	—	—
	SIL	2.0822	2.7167	—	0.2882	0.2149
	UHL	2.1199	2.6337	0.0743	—	0.0785
	PEA	2.1623	2.6615	0.0801	0.0042	—
media( $\pi_t$ )	LQA	—	—	0.1258	0.1201	0.1262
	SIM	0.1008	—	—	—	—
	SIL	0.0268	0.1343	—	0.0073	0.0005
	UHL	0.0205	0.0839	0.0496	—	0.0078
	PEA	0.0185	0.1255	0.0087	0.0409	—
$\sigma_{\pi_t}$	LQA	—	—	0.7278	0.7159	0.7340
	SIM	0.3894	—	—	—	—
	SIL	0.8684	0.5184	—	0.0793	0.0428
	UHL	0.8446	0.4924	0.0262	—	0.1214
	PEA	0.9050	0.5589	0.0420	0.0681	—
$\rho(y_t, \pi_t)$	LQA	—	—	2.9119	3.0739	3.1353
	SIM	0.5384	—	—	—	—
	SIL	1.2243	1.7588	—	0.3015	0.4137
	UHL	1.5472	2.0784	0.3286	—	0.1118
	PEA	1.7787	2.3061	0.5673	0.2396	—
$\rho(y_t, \pi_{t+1})$	LQA	—	—	3.6807	3.7865	3.8903
	SIM	1.1232	—	—	—	—
	SIL	1.8476	0.7659	—	0.1512	0.2989
	UHL	2.0158	0.9392	0.1694	—	0.1477
	PEA	2.2728	1.2274	0.4713	0.3066	—

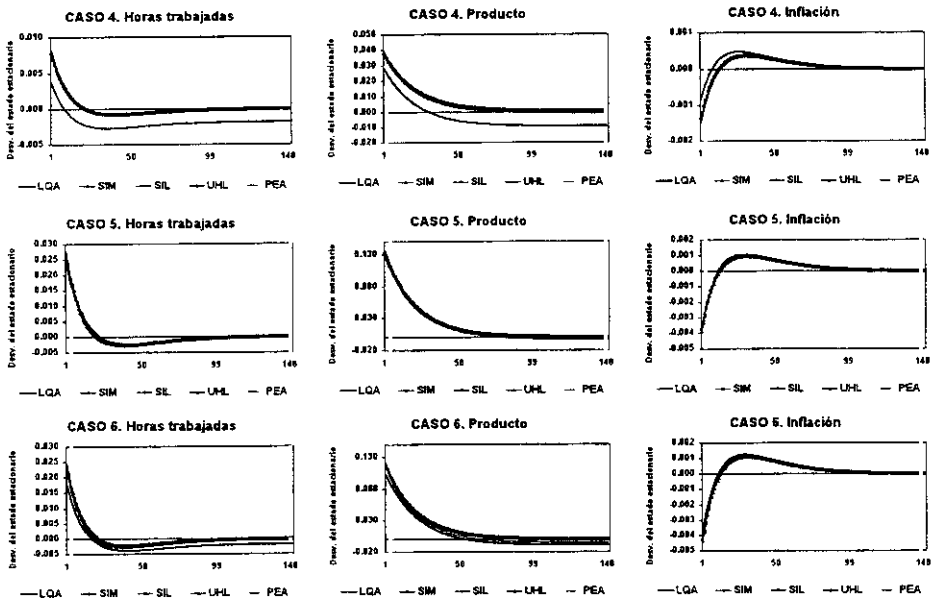


Figura 1.14: Modelo de Cooley y Hansen (1989), casos 4 a 6. Todos los métodos. Funciones de respuesta a un impulso. Respuestas de las horas trabajadas, el producto y la inflación ante un impulso de una desviación típica en la perturbación tecnológica. Eje de ordenadas: desviaciones absolutas respecto al estado estacionario. Eje de abcisas: periodos hacia delante.

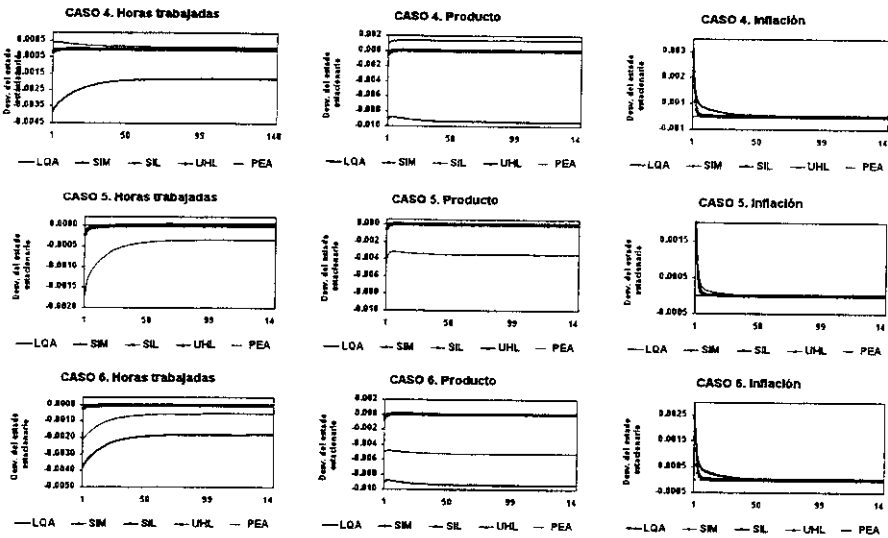


Figura 1.15: Modelo de Cooley y Hansen (1989), casos 4 a 6. Todos los métodos. Funciones de respuesta a un impulso. Respuestas de las horas trabajadas, el producto y la inflación ante un impulso de una desviación típica en la perturbación de crecimiento monetario. Eje de ordenadas: desviaciones absolutas respecto al estado estacionario. Eje de abcisas: periodos hacia delante.

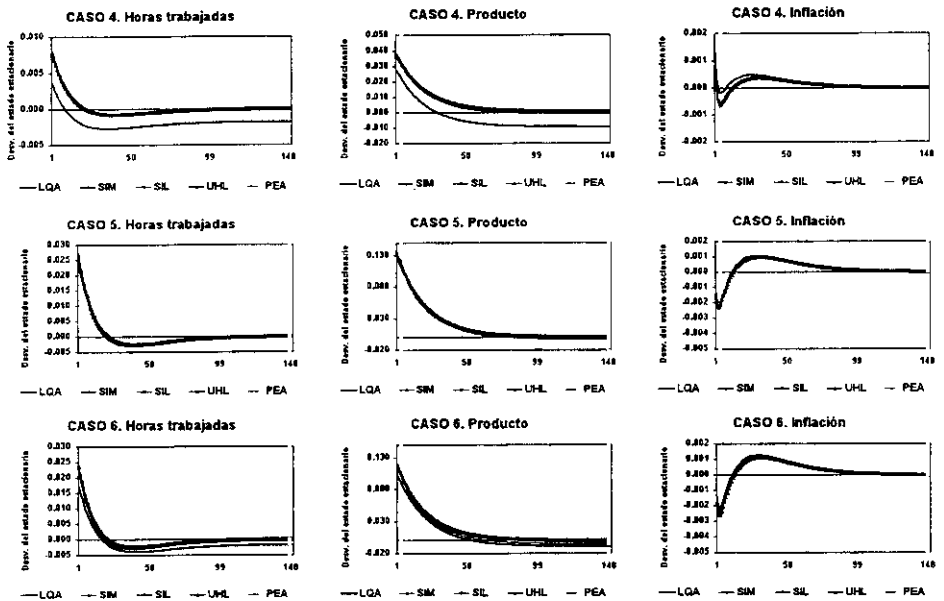


Figura 1.16: Modelo de Cooley y Hansen (1989), casos 4 a 6. Todos los métodos. Funciones de respuesta a un impulso. Respuestas de las horas trabajadas, el producto y la inflación ante un impulso de una desviación típica en las perturbaciones tecnológica y de crecimiento monetario. Eje de ordenadas: desviaciones absolutas respecto al estado estacionario. Eje de abscisas: periodos hacia delante.

un impulso de una desviación típica en el crecimiento monetario y a un impulso en los dos shocks a la vez. También son despreciables las diferencias entre la línea que corresponde a PEA en la figura 1.15 y las de los otros métodos.

Finalmente, la tabla 1.11 muestra los estadísticos que contrastan las diferencias en las medias, desviaciones típicas y correlaciones cruzadas generadas con los diferentes métodos de solución para el caso 6, que es el que tiene los valores paramétricos más extremos:  $\sigma_\epsilon = 0.06$  y  $g_{ss} = 1.15$ . No se aprecian diferencias significativas en los casos 1 al 4, mientras que las pautas para el caso 5 son muy similares a las del caso 6. Cuando  $T = 150$ , los estadísticos usados para comparar LQA con SIM, SIL, UHL y PEA exceden el nivel de significación al 5% o al 15% [con valor crítico 1.0364] cuando se examinan la segunda autocorrelación del producto así como las correlaciones retardadas del producto con el trabajo y la inflación. Para este tamaño muestral, y al nivel de significación del 5% o el 10%, la solución SIM también tiende a diferir de la generada por SIL, UHL y PEA en relación a la media de las horas trabajadas, la correlación contemporánea y retardada del trabajo con el producto, y la correlación contemporánea de la inflación y el producto. El mismo comentario es válido cuando  $T = 3000$ : la solución LQA parece ser significativamente distinta de las obtenidas con SIL, UHL y PEA [recuérdese que no se pudo resolver por SIM en este caso]. Un último comentario sobre la tabla 1.11 se refiere a la media del trabajo que surge de la solución UHL cuando  $T=3000$ : es diferente de la obtenida con SIL y PEA, un fenómeno similar al observado en el caso del modelo de Hansen cuando los valores paramétricos eran muy extremos.

Por tanto, el comportamiento de las soluciones UHL, SIL y PEA de la economía de *efectivo por adelantado* de Cooley y Hansen es idéntico, de nuevo, en todas las dimensiones analizadas, excepto para la media de las horas trabajadas obtenida mediante UHL en los casos de alta desviación típica del shock en tecnología. Como ocurría en los anteriores modelos no monetarios, las soluciones LQA y SIM incumplen la propiedad de racionalidad, ya que se comportan mal en términos del contraste de den Haan-Marcet, y suelen presentar coeficientes autorregresivos significativos en el error de expectativas aproximado. Además, las soluciones LQA presentan evidencia de heterocedasticidad condicional en el error de expectativas. La no monotonicidad de la regla de decisión del consumo que se detectó con los dos modelos anteriores desaparece cuando se usa la versión del método LQA diseñada para resolver problemas que no son óptimos en el sentido de Pareto como el aplicado al modelo monetario, aunque conduce a ciertas diferencias numéricas menores en las funciones de respuesta a un impulso.

## 1.6 Conclusiones

En este Capítulo se ha evaluado un conjunto de métodos "casi" lineales propuestos en el ámbito de los métodos de solución de modelos no lineales con expectativas racionales. Se ha descrito en detalle como se aplican habitualmente en la práctica para simular series temporales artificiales, dado que, en esencia, son iguales, en el sentido de que todos ponen el énfasis en buscar la

variedad estable del sistema linealizado, en niveles o en logaritmos de las variables. También se ha evaluado el método de Parametrización de Expectativas, como vía para comparar los métodos "casi" lineales con un método "no lineal". Una importante aportación de este Capítulo es que se presenta una discusión homogénea de las propiedades de los diferentes métodos de solución, usando la misma realización de las perturbaciones exógenas en cada simulación, y para cada método. Los resultados obtenidos son consistentes con la intuición en Taylor y Uhlig (1990) de que los métodos que satisfacen el contraste de exactitud de den Haan-Marcet presentan propiedades muy similares en el resto de las dimensiones que se analizan.

Al menos para las economías consideradas, el *refinar* una solución lineal mediante el uso combinado de estructura no lineal del problema original no lineal que se aproxima y del sistema aproximado en niveles de las variables alrededor del estado estacionario, como se describe en Novales *et al.* (1999), elimina ciertas extrañas no monotonicidades que suelen aparecer cuando se utiliza una aproximación lineal cuadrática estándar en niveles de las variables, incluso aunque las soluciones generadas por ambos métodos son prácticamente indistinguibles si se atiende a otras dimensiones. En relación a las soluciones lineales en logaritmos, la estrategia más *refinada* de Novales *et al.* (1999) parece más robusta ante parametrizaciones externas que la manera de resolver de Uhlig (1999).

El funcionamiento relativo de las soluciones numéricas no cambia cuando nos separamos del modelo básico de crecimiento neoclásico. Esto se puede deber al hecho de que las fuentes endógenas de dinámica son muy débiles en las economías de laboratorio que se analizan, y el perfil de las series temporales generadas con los distintos métodos hereda las pautas comunes de los shocks exógenos comunes. Así pues, un análisis comparativo similar al aquí realizado en el contexto de un modelo con una dinámica endógena más rica, aparece como una extensión interesante de este Capítulo.

Los experimentos que se han llevado a cabo sugieren que las soluciones de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999) y Uhlig (1999), en logaritmos de las variables, son tan exactas como las obtenidas con Parametrización de Expectativas en todas las dimensiones analizadas (propiedades de racionalidad del error de la ecuación de Euler estocástica, medias y desviaciones típicas de las variables de decisión, correlaciones cruzadas con el producto, funciones de respuesta a un impulso, reglas de decisión inducidas) y para todos los modelos considerados. En este sentido, y teniendo en consideración los resultados de den Haan y Marcet (1994), las linealizaciones logarítmicas presentadas en este Capítulo se comportan mejor que la que aparece en Christiano (1990).

Al trabajar en logaritmos, un aumento de la varianza de los shock/s exógenos no deteriora las propiedades de la solución, debido posiblemente a la homocedasticidad inducida por la transformación logarítmica. Por tanto, una conclusión clara del análisis realizado es que al resolver modelos no lineales con expectativas racionales se deben tomar logaritmos al aproximar. En realidad, el hecho de escribir el modelo en logaritmos de las variables parece ser más importante que preservar más estructura no lineal del problema original, aunque esto último puede llegar a ser más relevante cuando se analicen economías más complejas.

El imponer linealidad en las reglas de decisión, como se hace cuando se instrumenta la aproximación lineal cuadrática estándar o el método de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999) en niveles de las variables, aparece como la limitación más importante, y produce desviaciones de la propiedad de racionalidad de expectativas. Se ha detectado evidencia que sugiere que estas estrategias no capturan adecuadamente la dinámica implícita en las expectativas condicionales, en el sentido de que imponen más inercia en la expectativa condicional que la que hay realmente en el modelo. Esto hace que el error de expectativas recoja el error de aproximación y presente autocorrelación espúrea que le hace ser rechazado por los contrastes de racionalidad.

Los resultados que se presentan contrastan con los del trabajo de Dotsey y Mao (1992), en el que los métodos basados en aproximaciones lineales en logaritmos presentados no dominan a los lineales, y en el que los métodos lineales en niveles o en logaritmos *más refinados* no dominan a los *menos refinados*. Aunque el modelo que analizan estos autores es una versión muy diferente del modelo neoclásico de crecimiento que las consideradas en este capítulo, parece que la causa principal de las diferencias reside en la cadena de Markov de cinco estados que suponen para la única fuente de dinámica exógena, un proceso AR para los impuestos. El uso de una distribución de probabilidad continua para los shock que afectan a la economía aparece de nuevo como un asunto importante.

## 1.7 Apéndice: reglas de decisión

Este Apéndice se debe ver como un complemento al Capítulo 1, y permite su lectura sin tener que consultar el voluminoso Apéndice A. No obstante, se recomienda el análisis detallado de los contenidos disponibles en el citado Apéndice en caso de que se quieran replicar los resultados del Capítulo.

Nótese que en el caso de los métodos basados en aproximaciones lineal cuadráticas en torno al estado estacionario (LQA, UHL, SIM y SIL), los valores de los coeficientes de la/s regla/s de decisión/condición de estabilidad no cambian ante cambios en la varianza del vector de perturbaciones  $\{z_t\}$ , debido al uso del principio del equivalente cierto. Esto no ocurre cuando se usa PEA.

### 1.7.1 Modelo básico de crecimiento neoclásico

Para la solución LQA, se han escogido  $s_t = [k_{t-1}]$ ,  $z_t = [\log(z_t)]$  y  $d_t = [x_t]$ . Entonces, para todos los casos paramétricos considerados, los coeficientes de la regla de decisión son,

CASO	$H$
1,4,7	1.9190, 3.2243, -0.0255
2,5,8	1.0512, 2.7668, -0.0027
3,6,9	0.7015, 2.7244, 0.0065

que cambian al cambiar el grado de aversión al riesgo. Evidentemente, no cambian al cambiar la varianza de la perturbación tecnológica. Usando la restricción

de recursos y la función de producción, se puede escribir el consumo como función del stock de capital del período anterior y del valor contemporáneo de la perturbación tecnológica,  $c_t = z_t k_{t-1}^\alpha - H[1, \log(z_t), k_{t-1}]^T$ .

Para resolver con el método UHL, se han elegido:  $s_t = [\tilde{k}_t]$ ,  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{R}_t, \tilde{y}_t]^T$ ,  $z_t = [\tilde{z}_t]$ , donde  $\tilde{\cdot}$  denota desviaciones logarítmicas de la variable con respecto a su valor de estado estacionario. Para los casos analizados, se tiene que,

CASO	$\Xi_1$	$\Xi_2$	$\Xi_3^T$	$\Xi_4^T$
1,4,7	0.9495	0.0849	0.8361, 0.1742, -0.0222	0.0348, 0.3600, 1.000
2,5,8	0.9723	0.0728	0.5210, 0.3403, -0.0222	0.0348, 0.3600, 1.000
3,6,9	0.9815	0.0717	0.3940, 0.3557, -0.0222	0.0348, 0.3600, 1.000

En relación al método SIM, se tiene:  $u_t = [c_t - c_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t)]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\epsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Para cada caso, las estimaciones numéricas de la condición de estabilidad  $P^s$  son,

CASO	$P^s$
1,4,7	0.0000, 0.0071, 1.0000, 0.0303
2,5,8	0.0000, 0.0047, 1.0000, 0.0999
3,6,9	0.0000, 0.0015, 1.0000, 0.0474

Nótese que, dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , la condición de estabilidad se puede expresar también como una función no lineal implícita:  $\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t) = 0$ .

Con el método SIL el proceso es similar. Se elige:  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\epsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . La condición de estabilidad es,

CASO	$P^s$
1,4,7	0.0000, 0.4403, 1.0000, 0.0497
2,5,8	0.0000, 0.8037, 1.0000, 0.4519
3,6,9	0.0000, 1.2043, 1.0000, 0.9807

Finalmente, en lo relativo a la solución de este modelo usando PEA, para todos los casos paramétricos una aproximación polinómica de segundo orden a la expectativa condicional resultó suficiente:

$$\begin{aligned} \psi_t(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2) \\ &\times \exp(q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2). \end{aligned}$$

Entonces, de (1.2), si se sustituye  $\psi_t(q; k_{t-1}, z_t) = E_t[c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}]$ , se puede obtener la regla de decisión para el consumo en cada instante  $t$ . El punto fijo para el vector  $q$  se ha calculado en cada caso usando un tamaño muestral de 25000 observaciones, y un criterio de parada con cuatro dígitos de exactitud. Se ha fijado  $\lambda_q$  igual a uno, excepto en los casos en los que  $\eta = 0.5$ , que se fijó igual a 0.5. El polinomio se seleccionó en un proceso iterativo en el que se ha utilizado el contraste de den Haan y Marcet para elegir el orden adecuado del polinomio. Los valores estimados para cada caso paramétrico son,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1	2.3473	-0.3253	-0.2258	-0.0126	0.0382	-0.0055
2	1.6293	-0.3156	-2.2440	-0.0642	0.4766	-0.4221
3	0.1162	-0.7187	-4.8308	-0.2635	1.0314	-0.5244
4	2.7395	-0.4170	-0.1762	-0.0008	0.0245	-0.0214
5	0.7466	0.1009	-1.0839	-0.1195	0.1561	-0.0971
6	1.6741	-0.7658	-3.5681	-0.0567	0.6828	-0.1533
7	2.4171	-0.3407	-0.2021	-0.0106	0.0315	-0.0207
8	3.1017	-0.6436	-0.9073	-0.0220	0.1080	-0.0861
9	2.8286	-1.0233	-2.3828	-0.0218	0.3569	-0.2553

### 1.7.2 Modelo de Hansen (1985)

Para la solución LQA se tiene que  $s_t = [k_{t-1}]$ ,  $z_t = [\log(z_t)]$  y  $d_t = [x_t, N_t]^T$ . Para cada vector de parámetros diferente, las reglas de decisión son,

CASO	$H$		
1,4,7	0.7368	2.6129	-0.0332
	0.3801	0.7383	-0.0037
2,5,8	0.7368	1.7499	-0.0332
	0.5459	0.3718	-0.0168
3,6,9	0.7368	1.5342	-0.0332
	0.6127	0.2242	-0.0221

Respecto al método de UHL:  $s_t = [\tilde{k}_t]$ ,  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{N}_t, \tilde{R}_t, \tilde{x}_t]^T$ ,  $z_t = [\tilde{z}_t]$ . Entonces se tiene,

CASO	$\Xi_1$	$\Xi_2$	$\Xi_3$	$\Xi_4$
1,4,7	0.9418	0.2063	0.8210	0.4052
			0.2702	2.4176
			-0.1403	2.2150
			-0.0254	0.0840
			-1.3273	8.2537
2,5,8	0.9418	0.1382	0.3930	0.3989
			-0.0481	1.7139
			-0.6376	1.1155
			-0.0364	0.0596
			-1.3273	5.5276
3,6,9	0.9418	0.1212	0.2206	0.2526
			-0.1763	1.4304
			-0.8380	0.6725
			-0.0409	0.0497
			-1.3273	4.8461

Y para SIM, se tiene:  $u_t = [c_t - c_{ss}, N_t - N_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t)]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\epsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ , con lo que,

CASO	$P^s$				
1,4,7	0.0000	0.0000	0.0363	1.0000	0.1188
2,5,8	0.0000	0.0000	0.0568	1.0000	0.5878
3,6,9	0.0000	0.0000	0.0724	1.0000	0.8781

En relación al método SIL se han escogido:  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{N}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\epsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Por tanto,

CASO	$P^s$				
1,4,7	0.0000	0.0000	0.4359	1.0000	0.1127
2,5,8	0.0000	0.0000	0.6260	1.0000	0.5119
3,6,9	0.0000	0.0000	0.7026	1.0000	0.6728

Por último, para el método de solución PEA, de nuevo resulta ser suficiente una aproximación polinómica de segundo orden,

$$\psi_t(q; k_{t-1}, z_t) = q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2) \\ \times \exp(q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2).$$

de manera que se puede obtener en cada instante la regla de decisión para el consumo de (1.2) y  $\psi_t(q; k_{t-1}, z_t) = E_t[c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}]$ . El punto fijo de  $q$  se ha calculado en cada caso usando 25000 observaciones, un criterio de parada de cuatro dígitos y el test de den Haan y Marcet para seleccionar el orden adecuado del polinomio.  $\lambda_q$  se ha fijado igual a la unidad salvo en los casos con  $\eta = 0.5$  que se fijó igual a 0.5. Para los diferentes valores paramétricos, los coeficientes estimados para la expectativa parametrizada fueron,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1	2.9009	-0.3869	-0.3265	-0.0047	0.0490	-0.0611
2	2.1570	0.0846	-0.7523	-0.1310	0.0612	-0.1099
3	2.2404	0.2335	-1.7301	-0.1757	0.3847	-0.2542
4	2.8956	-0.3866	-0.3594	-0.0046	0.0620	-0.0978
5	3.9471	-0.3810	-1.1585	-0.0415	0.2274	-0.1638
6	3.9666	-0.2217	-1.1962	-0.0848	0.1683	-0.0769
7	2.8364	-0.3693	-0.3593	-0.0082	0.0614	-0.1045
8	3.8988	-0.3776	-1.0778	-0.0405	0.1882	-0.1368
9	3.5446	-0.1183	-1.2966	-0.1065	0.2031	-0.0884

### 1.7.3 Modelo de Cooley y Hansen (1989)

Las condiciones de equilibrio del problema de Cooley y Hansen son (1.5) y (1.6) junto con  $A_N = \lambda_t(1 - \alpha) \frac{w_t}{N_t}$ , la restricción de recursos y una última condición asociada a la restricción de efectivo por adelantado:  $\hat{p}_t = \frac{1}{c_t}$ , donde  $\hat{p}_t$  denota la inversa de los saldos reales en dinero.

Para obtener simulaciones de las variables de este modelo usando LQA simplemente se han tomado las reglas de decisión (matriz  $H$ ) que presentan Cooley y Hansen en su artículo. Ahora  $[\hat{p}_t, N_t]^T = H [1, \log(z_t), \log(g_t), k_{t-1}]^T$ , donde

CASO	H			
1,3,5	1.88633	-0.58175	0.55474	-0.05898
	0.64419	1.73073	0.30219	-0.03318
2,4,6	2.07319	-0.66585	0.63537	-0.07726
	0.52716	1.51216	0.26423	-0.03318

En relación al método de coeficientes indeterminados, UHL, se han elegido:  $s_t = [\tilde{k}_t]$ ,  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{N}_t, \tilde{x}_t, \tilde{p}_t, \tilde{\lambda}_t, \tilde{R}_t]^T$ ,  $z_t = [\tilde{z}_t, \tilde{g}_t]$ . Entonces, para todos los caso paramétricos se tiene que  $\Xi_1 = [0.9418]$ ,  $\Xi_2 = [0.1552, 0.0271]$  y

$$\Xi_3 = [0.5316, 0.0550, -0.4766, -1.3273, -0.5316, -0.5316, -0.0328]^T,$$

$$\Xi_4 = \begin{bmatrix} 0.4703 & 1.9417 & 1.4715 & 6.2091 & -0.4703 & -0.4703 & 0.0675 \\ -0.4488 & -0.5555 & -0.0867 & 1.0850 & 0.4488 & -0.0312 & -0.0019 \end{bmatrix}^T.$$

Para implementar el método SIM, se tiene:  $u_t = [c_t - c_{ss}, N_t - N_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t), \log(g_t) - \log(g_{ss})]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\varepsilon_{z_t}, \varepsilon_{g_t}]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Y la única condición de estabilidad resulta ser,

CASO	$P^s$					
1,3,5	0.0000	0.0000	0.0617	1.0000	0.4663	0.0194
2,4,6	0.0000	0.0000	0.0699	1.0000	0.4663	0.0194

En lo relacionado con SIL, se tiene:  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{N}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t, \tilde{g}_t]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\varepsilon_{z_t}, \varepsilon_{g_t}]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Y la condición de estabilidad,

CASO	$P^s$					
1,3,5	0.0000	0.0000	0.5644	1.0000	0.3827	0.0159
2,4,6	0.0000	0.0000	0.5644	1.0000	0.3827	0.0159

Finalmente, en lo concerniente a PEA, fue necesario usar un polinomio de tercer orden en todos los casos paramétricos,

$$\begin{aligned} \psi_t(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 \log(g_t) + q_5 (\log(k_{t-1}))^2) \\ &\times \exp(q_6 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_7 (\log(z_t))^2 + q_8 (\log(z_t))^3) \end{aligned}$$

De (1.5) se tiene  $\lambda_t = \beta \psi_t(q; k_{t-1}, z_t)$ , y la regla de decisión para el consumo se puede obtener de (1.6). El punto fijo para  $q$  se calculó en cada caso como en los modelos previos, al igual que la selección del orden del polinomio. Se ha fijado  $\lambda_q$  igual a uno en todos los casos. Los coeficientes estimados en cada caso son,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	$q_8$
1	3.0710	-0.2498	-0.8460	-0.0362	-0.0569	0.1543	-0.1351	0.2371
2	3.6111	-0.4189	-0.7175	-0.0288	-0.0257	0.1111	-0.3122	-0.9004
3	3.8793	-0.4407	-0.9017	-0.0297	-0.0179	0.1790	-0.1316	0.1953
4	3.0250	-0.2686	-0.8818	-0.0223	-0.0576	0.1831	-0.1849	-0.6025
5	3.9664	-0.4567	-0.7432	-0.0582	-0.0154	0.1125	-0.1128	-0.0125
6	3.5363	-0.4038	-0.7614	-0.0191	-0.0291	0.1286	-0.1064	-0.0294

## Capítulo 2

# Elección de Condiciones Iniciales para el Método de Parametrización de Expectativas

### 2.1 Introducción

Al resolver los tres modelos dinámicos y estocásticos con expectativas racionales del Capítulo 1 con el método de Parametrización de Expectativas (PEA), surgió siempre la necesidad de buscar condiciones iniciales adecuadas para la puesta en marcha del algoritmo, en la forma de valores iniciales para el vector de parámetros  $q$  del polinomio de aproximación,  $\psi_t(q; s_t, z_t)$ . En todo procedimiento numérico ésta suele ser una cuestión delicada, y es necesario utilizar cierta información proporcionada por el mismo sistema que se quiere aproximar para obtener una idea de cómo y dónde inicializar el algoritmo. En caso de usar condiciones iniciales no apropiadas, la convergencia del algoritmo puede no quedar garantizada, y en el caso de que convergiera, el tiempo de computación puede llegar a ser muy elevado.

Habitualmente, los usuarios de PEA, tanto si resuelven modelos simples como complejos, reconocen las dificultades que plantea este punto, y aunque no suele quedar reflejado en los artículos que se publican, los problemas derivados de la búsqueda de buenas condiciones iniciales tienden a ocupar una gran parte del tiempo dedicado a la elaboración del trabajo.

En den Haan y Marcet (1990), Marcet y Marshall (1994) y Marcet y Lorenzoni (1999) se propone una estrategia sistemática para la obtención de un punto de partida adecuado, basada en las ideas de la homotopía. Aunque tiene la ventaja de ser una manera disciplinada para la obtención de condiciones iniciales, muchas veces puede ser de difícil o tediosa aplicación. En este Capítulo

se propone una manera de mejorar la selección de condiciones iniciales para los parámetros del polinomio [o polinomios] en PEA. La propuesta se basa en una aproximación local en torno al estado estacionario determinista en la que se ha impuesto estacionariedad, y por tanto *garantiza* unas condiciones iniciales para el vector  $q$  que generan series temporales  $s_{t-1}(q)$  con una *distribución estacionaria*, a la vez que es de fácil aplicación y mejora la velocidad de convergencia respecto a distintas versiones del procedimiento de homotopía.

En la sección 2.2 se discute la importancia de disponer de unas condiciones iniciales apropiadas cuando se intenta resolver usando PEA. En la sección 2.3 se exponen dos estrategias de obtención de condiciones iniciales basadas en las ideas de la homotopía, mientras que en la sección 2.4 se presentan dos maneras de obtener condiciones iniciales basadas en aproximaciones lineales al modelo que se quiera resolver, que se han utilizado con éxito y buenos resultados en todas las soluciones PEA del Capítulo 1. La sección 2.5 presenta y evalúa los resultados obtenidos de la solución del modelo de Cooley y Hansen (1989) usando los procedimientos de obtención de condiciones iniciales descritos.

En el contexto de la discusión anterior, se dieron dos observaciones: i. *partiendo de la misma condición inicial para  $q$ , el valor numérico final de  $q$  que se obtiene tras converger, aún con un  $T$  suficientemente grande, depende de la realización de los procesos exógenos  $z_t$* , ii. *aunque se parta de distintas condiciones iniciales, siempre que sean adecuadas, para una misma realización de  $z_t$ , siempre se converge al mismo punto fijo*. Estas observaciones muestran cómo el valor del vector de coeficientes del polinomio de aproximación al que se converge depende de la realización de  $z_t$  que se tenga, al menos en muestras finitas. El punto i. puede suponer una limitación del procedimiento de PEA, y la pregunta que surge es si serán diferentes las propiedades de las soluciones numéricas que se obtengan tras converger con distintas realizaciones de  $z_t$ . En el Apéndice del Capítulo, sección 2.7, se da una primera aproximación basada en la evaluación numérica de distintas propiedades de las series temporales generadas con distintos valores del vector  $q$  a los que se converge, partiendo de las mismas condiciones iniciales, pero para diferentes realizaciones de los shocks.

## 2.2 Importancia de disponer de unas condiciones iniciales apropiadas

Como ha quedado patente a lo largo del Capítulo 1, las economías dinámicas y estocásticas que se vienen considerando se pueden escribir como un conjunto de variables endógenas,  $\{s_t, v_t\}$ , y otro de variables exógenas  $\{z_t\}$  relacionadas mediante funciones objetivo, y una serie de restricciones. Una solución de equilibrio para la economía es un vector  $\{s_t, v_t, z_t\}$  que satisface las condiciones de primer orden

$$L^*(E_t[\phi(s_{t+1}, v_{t+1})], s_t, v_t, z_t, s_{t-1}, v_{t-1}) = 0 \quad (2.1)$$

para todo  $t$ , dado el proceso exógeno  $\{z_t\}$ . Las funciones  $L^*$  y  $\phi$  son conocidas una vez que se fijan los parámetros estructurales de la economía. También se

puede expresar una solución como una ley de movimiento  $L$  tal que el vector  $\{s_t, v_t\}$  generado por

$$\begin{bmatrix} s_t \\ v_t \end{bmatrix} = L(s_{t-1}, z_t) \quad (2.2)$$

satisface (2.1) supuesto que la información pasada relevante para predecir  $\phi_t(s_{t+1}, v_{t+1}, z_{t+1})$  se pueda resumir en una función de  $\{s_{t-1}, z_t\}$ , de dimensión finita.

Tal y como se discutió en el Capítulo 1, obtener una solución al conjunto de ecuaciones (2.1) con el método de Parametrización de Expectativas consiste en encontrar una función  $\psi_t(q; s_{t-1}, z_t)$ , tal que para un  $\nu$  positivo entero,  $q \in D_\nu$ , donde

$$D_\nu \subset \{q \in R^\infty : i \text{ésimo elemento de } q \text{ es cero si } i > \nu\}$$

el proceso  $\{s_t(q), v_t(q), z_t\}$  satisface para todo  $t$  el conjunto de ecuaciones

$$L^*(\psi_t(q; s_{t-1}(q), z_t), s_t(q), v_t(q), z_t, s_{t-1}(q), v_{t-1}(q)) = 0 \quad (2.3)$$

y el orden  $\nu$  es tal que al resolver

$$S(q) = \operatorname{argmin}_q E_t [\phi_t(s_{t+1}(q), v_{t+1}(q), z_{t+1}) - \psi_t(q; s_{t-1}(q), z_t)]^2.$$

entonces  $q = S(q)$ . En estas condiciones, el proceso  $\{s_t(q), v_t(q)\}$  es la solución aproximada que nos daría el método de PEA.

Bajo determinadas condiciones de regularidad sobre las funciones que definen el equilibrio (2.1), la función  $L^*(\cdot)$  es invertible en su segundo argumento y se puede escribir (2.3) como [ver Marcet y Marshall (1994)]

$$\begin{bmatrix} s_t(q) \\ v_t(q) \end{bmatrix} = L_q(q; s_{t-1}(q), v_{t-1}(q), z_t) \quad (2.4)$$

Para procesos estacionarios y ergódicos se demuestra en Marcet y Marshall (1994) que, bajo ciertos supuestos que se verifican en los modelos habituales de ciclo económico, siempre es posible encontrar una aproximación  $L_q$  a la verdadera ley de movimiento del sistema,  $L$ , tan cercana como se precise. Como con cualquier otro método de solución aproximado, las series temporales  $\{s_t(q), v_t(q)\}_{t=1}^T$  generadas a partir de valores iniciales de las variables de estado,  $\{s_0, v_0\}$ , y para procesos exógenos dados, usando  $L_q$ , se usan para obtener inferencias sobre las propiedades estocásticas del verdadero proceso estacionario de equilibrio,  $\{s_t, v_t\}_{t=-\infty}^\infty$ . Para que este proceso resulte aceptable es necesario que,

- Si dado un  $\{s_0, v_0\}$  el proceso  $\{s_t, v_t\}_{t=-\infty}^\infty$  que verifica (2.1) es estacionario entonces, dada la condición inicial  $\{s_0, v_0\}$  y un  $q$  inicial, el proceso resultante  $\{s_t(q), v_t(q)\}_{t=-\infty}^\infty$  que verifica (2.3) debe ser estacionario.
- Cuanto más cercana sea  $L_q$  a  $L$ , más cercano debe estar  $\{s_t(q), v_t(q)\}_{t=-\infty}^\infty$  a  $\{s_t, v_t\}_{t=-\infty}^\infty$ .

Si se asegura el primer punto de los dos anteriores el segundo queda garantizado. En aplicaciones prácticas del método de Parametrización de Expectativas, una de las principales dificultades estriba en encontrar buenas condiciones iniciales para el vector  $q$ , que garanticen que  $\{s_t(q), v_t(q)\}_{t=1}^T$  sea estacionario y que permita, por tanto, la puesta en marcha del procedimiento de solución para obtener un punto fijo para  $q$ , y así la obtención de una ley de movimiento aproximada (parametrizada),  $L_q$ , tan cercana a la verdadera ley de movimiento  $L$  como se desee.

La aproximación que se propone en este Capítulo para obtener el vector  $q$  inicial:

1. garantiza localmente la estacionariedad de  $\{s_t(q), v_t(q)\}_{t=1}^T$  al obtener el  $q$  inicial a partir de la versión lineal cuadrática en logaritmos de las variables del sistema (2.1), y
2. mejora la velocidad de convergencia hacia el punto fijo respecto a varias maneras de implementar el método de homotopía propuestas en las referencias citadas más arriba.

## 2.3 Discusión del procedimiento de homotopía

La solución preferida por A. Marcet y coautores [ver den Haan y Marcet (1990), Marcet y Marshall (1994) o Marcet y Lorenzoni (1999)], para obtener condiciones iniciales es usar las ideas de la homotopía. Partiendo de una versión simple del modelo que se quiera resolver, se va modificando parte de la estructura del modelo, o el valor de algún parámetro, lentamente, hasta llegar a la versión deseada. Mientras que las soluciones sean continuas con respecto al parámetro/s que conducen al modelo desde la solución (más sencilla) conocida hasta la deseada, siempre se está resolviendo con buenas condiciones iniciales. Por ejemplo, en el caso de utilidad logarítmica y depreciación completa [ $\eta = 1$  y  $\delta = 1$  en la notación usada en el Capítulo 1] se conoce la solución analítica del modelo neoclásico básico de crecimiento [ver Apéndice A],

$$c_t^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha\beta} k_{t-1}^{-\alpha} z_t^{-1}$$

donde  $\beta$  es el factor subjetivo de descuento y  $\alpha$  mide la participación del capital en la producción. La condición de primer orden de este problema toma la forma,

$$\frac{1}{\beta} c_t^{-1} = E_t [c_{t+1}^{-1} \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1}]$$

[ver expresión (1.2), Capítulo 1], con lo que si se toma como aproximación a la esperanza condicional el polinomio

$$\psi_t = q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t))$$

se tiene que

$$\frac{1}{\beta} c_t^{-1} = \psi_t(q; k_{t-1}, z_t)$$

Igualando los coeficientes de la expresión de la solución analítica y el polinomio de expectativas, se tiene que,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\beta(1 - \alpha\beta)} \\ q_2 &= -\alpha \\ q_3 &= -1 \end{aligned}$$

En este caso, por supuesto, la aproximación polinómica es exacta. Partiendo de estos valores como condiciones iniciales, la convergencia es rápida para un caso con  $\delta$  cercano a cero. Una vez alcanzada la convergencia, se pueden usar los nuevos valores de los  $q$ 's como condiciones iniciales en un caso con un  $\delta$  mayor, y así sucesivamente. En den Haan y Marcet (1990) se utiliza esta versión del procedimiento de homotopía para resolver el modelo neoclásico básico. Mientras que el vector  $q$  del que se parta no esté muy lejos del punto fijo, todos los  $q$ 's que se consideran generan un  $\{s_t(q), v_t(q)\}$  con una distribución estacionaria. *Por tanto, en este caso, no hay necesidad de imponer estacionariedad explícitamente.* A lo largo de la senda de homotopía no es necesario exigir mucha precisión en el cálculo del punto fijo, dado que los modelos o configuraciones de parámetros intermedios son sólo accesorios.

Aunque supone una disciplina necesaria para obtener la convergencia al punto fijo, en algunos modelos esta gradación puede no ser sencilla o, al menos, tomar una buena cantidad de tiempo. A veces la solución en la que comenzar la homotopía no es tan clara como en el caso particular del modelo básico en el que se conoce la solución analítica.

A efectos de comparar con la propuesta alternativa que se hace en este Capítulo, se considerarán ahora dos posibles maneras de poner en práctica las ideas de la homotopía, tomando como base para evaluar su comportamiento el modelo de Cooley y Hansen (1989), analizado en den Haan y Marcet (1994). Se usará la especificación dada en dicho artículo para el polinomio de aproximación a la expectativa, que se presenta en el Capítulo 1 de esta Tesis [ver expresión (1.5)], y toma la forma,

$$\begin{aligned} \lambda_t &= q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 \log(g_t) + q_5 (\log(k_{t-1}))^2) \\ &\times \exp(q_6 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_7 (\log(z_t))^2 + q_8 (\log(z_t))^3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $\lambda_t$  representa el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria de las familias [ver Capítulo 1 y Apéndice A]. Como configu-

ración paramétrica base se usará,

$$\begin{aligned}
 \beta &= 0.99 \\
 \alpha &= 0.36 \\
 A_N &= 2.86 \\
 \rho_z &= 0.95 \\
 \rho_g &= 0.48 \\
 \sigma_{\epsilon_z} &= 0.00721 \\
 \sigma_{\epsilon_g} &= 0.009
 \end{aligned}$$

donde  $A_N$  mide la ponderación del ocio en la utilidad de la familia representativa,  $\rho_z$  y  $\rho_g$  miden la persistencia de las perturbaciones tecnológica,  $z_t$ , y de crecimiento monetario,  $g_t$ , respectivamente, y  $\sigma_{\epsilon_z}$  y  $\sigma_{\epsilon_g}$  las desviaciones típicas de las innovaciones asociadas.

Se han seleccionado dos maneras alternativas, de entre las muchas posibles, de guiar la homotopía. Por una parte se modifica el valor de la tasa de expansión monetaria en estado estacionario,  $g_{ss}$ , y por otra el de la tasa de depreciación,  $\delta$ , como se explica en las dos subsecciones que siguen.

### 2.3.1 Una primera aplicación de las ideas de la homotopía

Como ya se comentó en el Capítulo 1, den Haan y Marcet (1994) resuelven por el método de Parametrización de Expectativas el ya expuesto modelo de Cooley y Hansen para los valores de los parámetros estructurales  $[\beta, \alpha, \delta, A_N, \rho_z, \rho_g, \sigma_{\epsilon_g}, \sigma_{\epsilon_z}]$  presentados más arriba,  $\delta = 0.025$  y  $g_{ss} = 1.015$ . El valor del vector  $q$  que presentan estos autores como resultado del proceso de convergencia es el siguiente,

$$q^T = \begin{bmatrix} 3.0275 \\ -0.2293 \\ -1.3177 \\ -0.0324 \\ -0.0631 \\ 0.3553 \\ -0.1833 \\ -1.3690 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Como aplicación de las ideas de homotopía, se realizará ahora el siguiente ejercicio: usando como condición inicial el valor del punto fijo dado por (2.6) para el caso con los valores paramétricos expuestos arriba, se propone buscar el punto fijo para los mismos valores paramétricos, pero con  $g_{ss} = 1.15$ . Este ejercicio responde a las ideas que se acaban de exponer, ya que se parte del  $q$  obtenido con  $g_{ss} = 1.015$ , para tratar de obtener el correspondiente con un  $g_{ss}$  un 13% más elevado.

### 2.3.2 Una segunda aplicación de las ideas de la homotopía

Se basará ahora la aplicación del principio de homotopía en el estudio del estado estacionario del modelo, en el caso en que  $\delta = 0$ . A partir de las condiciones de optimalidad (A.46) y (A.47), y la expresión (A.51), en el Apéndice A, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_t &= \frac{1}{c_t} \beta E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] \\ \lambda_t &= \frac{A_N}{1-\alpha} z_t^{-1} k_{t-1}^{-\alpha} N_t^\alpha \\ E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] &= e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_t^{-\rho_g}\end{aligned}$$

de donde

$$\lambda_t = \frac{1}{c_t} \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_t^{-\rho_g} \quad (2.7)$$

$$N_t = \left[ \lambda_t \frac{1-\alpha}{A_N} z_t k_{t-1}^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.8)$$

además, de la restricción presupuestaria (A.48), despejando el consumo,

$$c_t = z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1} - k_t \quad (2.9)$$

De (2.8) y (2.9) en (2.7), se tiene,

$$\lambda_t = \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_t^{-\rho_g} \frac{1}{z_t k_{t-1}^\alpha \left[ \lambda_t \frac{1-\alpha}{A_N} z_t k_{t-1}^\alpha \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (1-\delta)k_{t-1} - k_t}$$

esto es,

$$\lambda_t^{\frac{1}{\alpha}} z_t^{\frac{1}{\alpha}} k_{t-1} \left[ \frac{1-\alpha}{A_N} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \lambda_t ((1-\delta)k_{t-1} - k_t) = \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_t^{-\rho_g}$$

que en estado estacionario supone,

$$\lambda_{ss}^{\frac{1}{\alpha}} z_{ss}^{\frac{1}{\alpha}} k_{ss} \left[ \frac{1-\alpha}{A_N} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \lambda_{ss} ((1-\delta)k_{ss} - k_{ss}) = \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g-1} g_{ss}^{-\rho_g}$$

lo que es igual a,

$$\lambda_{ss}^{\frac{1}{\alpha}} z_{ss}^{\frac{1}{\alpha}} \left[ \frac{1-\alpha}{A_N} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \lambda_{ss} \delta k_{ss} = \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{-1} \frac{1}{k_{ss}}$$

de donde, si se hace  $\delta = 0$ , se tiene finalmente,

$$\lambda_{ss} = \left[ \beta e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} \left[ \frac{A_N}{1-\alpha} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right]^\alpha k_{ss}^{-\alpha} z_{ss}^{-1} g_{ss}^{-\alpha} \quad (2.10)$$

Igualando coeficientes entre (2.10) y la expresión del polinomio (2.5), se llega a que

$$\begin{aligned} q_1 &= \left[ \beta e^{\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2}} \left[ \frac{A_N}{1-\alpha} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right]^\alpha \\ q_2 &= -\alpha \\ q_3 &= -1 \\ q_4 &= -\alpha \\ q_5 &= \dots = q_8 = 0 \end{aligned}$$

que numericamente resultan ser,

$$\begin{aligned} q_1 &= 2.5975 \\ q_2 &= -0.3600 \\ q_3 &= -1.0000 \\ q_4 &= -0.3600 \\ q_5 &= \dots = q_8 = 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones iniciales podrían ser una buena aproximación para el caso  $\delta = 0$ . Entonces se puede usar el valor de  $q$  al que el procedimiento PEA ha convergido en el caso  $\delta = 0$  [ y  $\beta = 0.99$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $A_N = 2.86$ ,  $\rho_x = 0.95$ ,  $\rho_g = 0.48$ ,  $\sigma_{\epsilon_x} = 0.00721$ ,  $\sigma_{\epsilon_g} = 0.009$  y  $g_{ss} = 1.15$  ], como condición inicial para el caso  $\delta = 0.025$  e igual valor del resto de parámetros, que es el que nos ocupa. Nótese que esto es una homotopía porque se pasa del caso  $\delta = 0$  al caso  $\delta = 0.025$ , manteniendo el resto de valores paramétricos.

Para apreciar la sensibilidad del procedimiento de solución a unas condiciones iniciales apropiadas, vale la pena resaltar que usando directamente las condiciones iniciales anteriores derivadas analíticamente para el caso  $\delta = 0$ , el algoritmo PEA programado nunca converge cuando se usan para inicializar el caso con  $\delta = 0.025$ .

A partir de las condiciones iniciales obtenidas del estado estacionario con  $\delta = 0$  se llegó, tras poner en marcha el algoritmo de PEA, al siguiente vector  $q$ , que será el que se use como condición inicial para el caso con  $\delta = 0.025$ ,

$$q^T = \begin{bmatrix} 4.0278 \\ -0.3790 \\ 0.2511 \\ -0.0145 \\ -0.0275 \\ -0.1332 \\ -0.0795 \\ -0.3216 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

## 2.4 Procedimiento basado en una aproximación lineal

Si se lleva a cabo una aproximación lineal en logaritmos al sistema de condiciones de primer orden y restricciones (2.1) alrededor del estado estacionario determinista, y se denota por,

$$\hat{L}^*(E_t[\phi(\hat{s}_{t+1}, \hat{v}_{t+1})], \hat{s}_t, \hat{v}_t, z_t, \hat{s}_{t-1}, \hat{v}_{t-1}) = 0 \quad (2.12)$$

se puede seleccionar la variedad estable del sistema de tal manera que se garantice la estacionariedad de (2.12) en torno al estado estacionario determinista. Con cualquier aproximación lineal (2.12), esta selección puede efectuarse si se considera el subespacio estable de dicho sistema, como se describió para las estrategias de Uhlig (1999) [ver sistema (1.9)] o Sims (1999)-Nóvoles *et al.* (1999) [ver sistema (1.10)]. Se proponen en las subsecciones que siguen dos maneras, similares, de obtener condiciones iniciales para  $q$  sobre la base de estos principios. Una primera manera proporciona unas condiciones que se pueden obtener analíticamente, mientras que la segunda permite generar una distribución de probabilidad sobre el vector de condiciones iniciales.

### 2.4.1 Condiciones iniciales identificadas mediante una aproximación lineal en logaritmos

Si se toma la aproximación de coeficientes indeterminados tal y como se desarrolla en Uhlig (1999), a partir de la formulación (1.9) concretada para la solución del modelo de Cooley y Hansen [ver Apéndice A], se tiene que

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{N}_t \\ \tilde{x}_t \\ \tilde{p}_t \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{R}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{kk} & \nu_{kz} & \nu_{kg} \\ \nu_{ck} & \nu_{cz} & \nu_{cg} \\ \nu_{yk} & \nu_{yz} & \nu_{yg} \\ \nu_{Nk} & \nu_{Nz} & \nu_{Ng} \\ \nu_{xk} & \nu_{xz} & \nu_{xg} \\ \nu_{pk} & \nu_{pz} & \nu_{pg} \\ \nu_{\lambda k} & \nu_{\lambda z} & \nu_{\lambda g} \\ \nu_{Rk} & \nu_{Rz} & \nu_{Rg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t-1} \\ \tilde{z}_t \\ \tilde{g}_t \end{bmatrix}$$

donde, de nuevo, el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  denota desviaciones logarítmicas respecto al estado estacionario, es fácil extraer la condición,

$$\lambda_t = \left[ \lambda_{ss} \left( \frac{1}{k_{ss}} \right)^{\nu_{\lambda k}} \left( \frac{1}{g_{ss}} \right)^{\nu_{\lambda g}} \right] k_{t-1}^{\nu_{\lambda k}} z_t^{\nu_{\lambda z}} g_t^{\nu_{\lambda g}}$$

Igualando coeficientes entre esta expresión y (2.5), se tienen unas condiciones iniciales obtenidas analíticamente que son,

$$\begin{aligned} q_1 &= \left[ \lambda_{ss} \left( \frac{1}{k_{ss}} \right)^{\nu_{\lambda k}} \left( \frac{1}{g_{ss}} \right)^{\nu_{\lambda g}} \right] \\ q_2 &= \nu_{\lambda k} \\ q_3 &= \nu_{\lambda z} \\ q_4 &= \nu_{\lambda g} \\ q_5 &= \dots = q_8 = 0 \end{aligned}$$

Para los valores de los parámetros estructurales que se están usando como base,  $\delta = 0.025$  y  $g_{ss} = 1.15$ , resulta que

$$q^T = \begin{bmatrix} 4.0861 \\ -0.5316 \\ -0.4703 \\ -0.0312 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

De entre los métodos "casi" lineales evaluados en el Capítulo 1 y descritos en el Apéndice A, el método de Uhlig (1999) es el que permite de manera más inmediata identificar las condiciones iniciales como se detalla en esta sección. Nótese que con el método desarrollado en Novales *et al.* (1999), tal y como se implementó en el Capítulo primero para la aproximación en logaritmos, se tendría, de (1.10), que la expectativa tomaría la forma

$$W_t = \mu_1 k_t^{\mu_2} z_t^{\mu_3} g_t^{\mu_4}$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$ , el proceso de identificación de condiciones iniciales no sería posible.

No obstante, debe tenerse en cuenta que la datación de las variables no es ninguna característica definitoria del método. Sería fácil también identificar condiciones iniciales similares a las anteriores obtenidas a partir de la formulación (1.10), en la que se escoge como elemento de  $u_t$  la variable  $k_{t-1}$  en lugar de  $k_t$ , con lo que se tendría,

$$W_t = \mu_1 k_{t-1}^{\mu_2} z_t^{\mu_3} g_t^{\mu_4}$$

con lo que, igualando coeficientes se tendría algo similar a lo realizado con la estrategia de Uhlig (1999), a costa de, en términos de la notación del Capítulo 1, tener una solución *menos refinada*.

## 2.4.2 Condiciones iniciales estimadas mediante una aproximación lineal en logaritmos

En muestras finitas, la realización concreta de las perturbaciones estructurales  $\{z_t\} = \{z_t, g_t\}$ , proporciona información que se puede aprovechar en orden a

Tabla 2.1: Obtención de Condiciones Iniciales para el Método de Parametrización de Expectativas. Estadísticos de la distribución empírica de los valores obtenidos como condición inicial con el método de estimación a partir de la aproximación lineal en logaritmos. Media y desviación típica de la media (entre paréntesis)

$\varrho_1$	$\varrho_2$	$\varrho_3$	$\varrho_4$
4.08610571451612 (0.00000003532142)	-0.53158780860215 (0.00000000405140)	-0.47027449908602 (0.00000000516988)	-0.03122343300000
$\varrho_5$	$\varrho_6$	$\varrho_7$	$\varrho_8$
-0.0000000004440 (0.00000000069382)	0.0000000010273 (0.00000000195405)	-0.0000000004220 (0.00000000133405)	0.00000000003839 (0.00000000038802)

obtener el  $q$  final. En este sentido, se propone obtener condiciones iniciales para los valores de  $q$  que dependan de dichas realizaciones de la siguiente manera:

- Generar  $\{z_t, g_t\}_{t=0}^T$ , con un  $T$  suficientemente grande.
- Resolver usando un método “casi” lineal, por ejemplo Uhlig (1999), obteniendo sendas temporales para todas las variables de la economía, tales como el stock de capital,  $\{\hat{k}_{t-1}\}_{t=1}^T$ , el consumo,  $\{\hat{c}_t\}_{t=1}^T$ , y el multiplicador,  $\{\hat{\lambda}_t\}_{t=1}^T$ .
- Generar un valor auxiliar para la expectativa a partir de la relación que se obtiene de aproximar la expectativa en (1.5) con un polinomio como el dado por (2.5),

$$\hat{\psi}_t = \hat{\lambda}_t, \quad \forall t$$

- Estimar por mínimos cuadrados la regresión

$$\begin{aligned} \log(\hat{\psi}_t) = & \varrho_1 + \varrho_2 \log(\hat{k}_{t-1}) + \varrho_3 \log(z_t) + \varrho_4 \log(g_t) \\ & + \varrho_5 (\log(\hat{k}_{t-1}))^2 + \varrho_6 (\log(\hat{k}_{t-1}) \log(z_t)) + \varrho_7 (\log(z_t))^2 \\ & + \varrho_8 (\log(z_t))^3 + \text{ruido.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde, a partir de la aproximación lineal en logaritmos se dispone de una serie temporal para la expectativa aproximada,  $\{\hat{\psi}_t\}_{t=1}^T$ , y de otra para el stock de capital,  $\{\hat{k}_{t-1}\}_{t=1}^T$ . Como se constatará al analizar los resultados, las estimaciones resultantes de los  $\varrho$ 's funcionan muy bien como condiciones iniciales para los  $q$ 's. Para cada realización de los procesos estocásticos exógenos se tendrá un valor distinto del vector  $\varrho$ . A modo de ejemplo, para un conjunto de 250 repeticiones se tienen los estadísticos media y desviación típica de la media que se presentan en la tabla 2.1.

Se puede apreciar que los valores estimados como condiciones iniciales para  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$ , en media, son iguales en los cuatro primeros decimales a los obtenidos por igualación de coeficientes a partir de la representación lineal en logaritmos. No obstante, en este caso se tiene una mayor precisión (más decimales) y una idea del signo de los coeficientes  $q_5$  a  $q_8$ , de los cuales no se tenía

ninguna indicación con el procedimiento anterior. También es importante apuntar que en el contexto de determinados modelos, como es el caso de aquellos que presentan varias expectativas, como se verá en el Capítulo 3, el método de identificación no es fácilmente aplicable, mientras que el de estimación *siempre se puede utilizar*.

## 2.5 Resultados comparativos para el modelo de Cooley y Hansen

En las tablas 2.2 y 2.3 se presentan los resultados de inicializar el algoritmo PEA usando las cuatro alternativas antes expuestas, dos basadas en los principios de la homotopía y dos basadas en una aproximación lineal en logaritmos, para resolver el modelo de Cooley y Hansen (1989).

El experimento que se ha realizado y repetido 250 veces, es el siguiente. En cada simulación,

- se genera una realización de tamaño  $T=40,000$  de los procesos exógenos  $z_t = \{z_t, g_t\}$ ,
- se toman las condiciones iniciales que se han apuntado en los apartados anteriores para cada estrategia de inicialización, dadas por (2.6) para la homotopía en  $g_{ss}$ , (2.11) para la homotopía en  $\delta$ , (2.13) para las identificadas a partir de la aproximación lineal en logaritmos, y estimada para cada realización para el método de estimación a partir de la aproximación lineal en logaritmos.
- se resuelve el modelo de Cooley y Hansen (1989) por PEA con cada una de ellas. Se anota el tiempo de convergencia y el número de iteraciones necesarias para converger a un  $q$  [el supuesto punto fijo], con un criterio de parada de cuatro decimales [tabla 2.2],
- a cada  $q$  obtenido con cada procedimiento de inicialización se le aplica el contraste de den Haan-Marcet 250 veces, en orden a obtener la distribución empírica del estadístico de contraste [tabla 2.3]

Los resultados se obtuvieron usando MATLAB para WINDOWS en un ordenador personal Pentium III a 350 mhz, con 128 mega bites de memoria RAM. Como el tiempo por iteración puede cambiar mucho dependiendo del lenguaje de programación utilizado y la máquina en que se lleve a cabo, los resultados que se presentan en la tabla 2.2 se ofrecen en términos relativos a la estrategia basada en condiciones iniciales estimadas a partir de una aproximación lineal en logaritmos al modelo. En media, este procedimiento fue el que menos tiempo empleó, y es similar al método de identificación a partir de la aproximación lineal. La homotopía usando el parámetro  $g_{ss}$  necesita, en media, 1.6 veces el tiempo empleado por los procedimientos anteriores, y la homotopía basada en  $\delta$  algo más de dos veces. Si se atiende a los tiempos máximo y mínimo, el

procedimiento de identificación a partir de la aproximación lineal se presenta como el más variable, siendo el que presenta el mayor tiempo y el menor, ambos del orden de cuatro veces el tiempo empleado por la estrategia de estimación. El número de iteraciones necesario, como es lógico, presenta el mismo tipo de información, necesitando en promedio las dos aproximaciones lineales unas 52 iteraciones, frente a 80 de la homotopía basada en  $g_{ss}$  y casi un centenar de la homotopía basada en  $\delta$ .

El  $q$  fijo de ejemplo que se muestra, para una de las 250 simulaciones, en la tabla 2.2 evidencia cómo, para una realización común de los procesos estocásticos exógenos, aún partiendo de condiciones iniciales distintas, se llega al mismo  $q$  final. Por otra parte, como se verá más claramente en el Apéndice en la sección 2.7, para distintas realizaciones se llega, partiendo de las mismas condiciones iniciales, a distintos vectores  $q$ . Esta dependencia del punto fijo, en muestras finitas, respecto de la realización concreta de  $\{z_t\}$ , permite explicar el hecho de que las condiciones iniciales *estimadas*, que aprovechan esta información, sean las que presentan los mejores tiempos de convergencia, aunque son prácticamente idénticos a los de las condiciones identificadas a partir de la aproximación lineal.

La tabla 2.3 confirma la similitud de los  $q$  a los que se llega, dada una realización de  $\{z_t\}$ , con las distintas condiciones iniciales. El comentario que sigue es común a los cuatro procedimientos. El contraste de den Haan-Marcet se encuentra detallado en el Capítulo 1. Un 83% de los  $q$  a los que se ha convergido presentan entre un 0 y un 8% de realizaciones en la cola superior del contraste de den Haan-Marcet al nivel de significación del 95%. Un 13% presentan porcentajes entre el 8 y el 10%, y serían de dudosa aceptación, mientras que un 4%, serían rechazados claramente por el test, al presentar valores superiores al 10%. Utilizando un tamaño muestral nada desdeñable de 40,000 observaciones, y un criterio de parada en el algoritmo para los elementos del vector  $q$  de cuatro decimales, usando las mismas condiciones iniciales, el test puede rechazar o aceptar como apropiado un vector  $q$  dependiendo de la realización de  $\{z_t\}$ . Esto aconseja, al menos, repetir el proceso de búsqueda del punto fijo para distintas realizaciones de los procesos estocásticos exógenos que presente un modelo concreto.

Resumiendo, los resultados obtenidos indican lo apropiado de obtener condiciones iniciales a partir de la versión lineal en logaritmos del modelo, no sólo en términos de velocidad de convergencia, que en algunos casos puede ser cuestión de unos pocos minutos, sino *sobre todo porque garantizan la estacionariedad de las series temporales iniciales*  $\{s_t(q)\}$  y  $\{v_t(q)\}$ .

Además, es importante notar que el requisito previo para usar las condiciones iniciales basadas en una aproximación lineal en logaritmos es, obviamente, obtener dicha aproximación analítica, si bien su coste es escaso y puede realizarse con cualquier programa informático de matemática simbólica estándar. La estrategia de estimación requiere, adicionalmente, que se estime una regresión lineal. En cambio, el requisito previo para implementar el procedimiento que se ha denotado como de homotopía basada en  $g_{ss}$  implica obtener unas condiciones iniciales para una versión previa del modelo o configuración paramétrica. Nótese

Tabla 2.2: Obtención de Condiciones Iniciales para el Método de Parametrización de Expectativas. Resultados comparativos para el Modelo de Cooley y Hansen (1989). 250 simulaciones.  $T=40,000$ . En cada simulación se genera un  $\{z_t\}$  y se parte en cada caso de las condiciones iniciales que se señalan en el texto. Se inicializa PEA y se calculan los tiempos de convergencia al punto fijo y el número de iteraciones necesarias para alcanzarlo en cada caso.

	Homotopía		Lineales	
	$g_{ss} : 1.015/1.15$	$\delta : 0.0/0.025$	Identificadas	Estimadas
Tiempo medio	1.6203	2.0166	1.0797	1.0000
Tiempo máximo	2.3537	3.0687	4.0250	1.0000
Tiempo mínimo	0.9867	1.1786	0.2510	1.0000
Num. medio de iteraciones	80.02	98.73	52.31	52.26
Ejemplo: una simulación	$g_{ss}$	$\delta$	Identificadas	Estimadas(*)
$q_1$	3.9803	3.9803	3.9809	3.9809
$q_2$	-0.5099	-0.5101	-0.5104	-0.5104
$q_3$	-0.9253	-0.9250	-0.9249	-0.9249
$q_4$	-0.0316	-0.0316	-0.0316	-0.0316
$q_5$	-0.0043	-0.0043	-0.0043	-0.0043
$q_6$	0.1999	0.1998	0.1998	0.1998
$q_7$	-0.0340	-0.0340	-0.0340	-0.0340
$q_8$	0.8809	0.8807	0.8807	0.8807
(*) $q$ inicial estimado: $q = [4.0861, -0.5316, -0.4703, -0.0312, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]$				

que en el caso analizado se han tomado, simplemente, de un artículo publicado, pero que en general no existe una guía clara de dónde comenzar el proceso. Respecto a la homotopía en  $\delta$ , al estar basada en el estado estacionario, ya se tiene la versión previa del modelo que se necesita. Basta, entonces, con resolver el estado estacionario e identificar coeficientes con un poco de habilidad. No obstante, para converger en el caso con  $\delta = 0.0$  se necesitaron 170 iteraciones, más las necesarias para converger desde este punto al punto fijo para el caso con  $\delta = 0.025$ . En total, en torno a unas 270 iteraciones, frente a las 52 necesarias con las aproximaciones lineales.

En general, en modelo más complejos, o con más expectativas, como es el caso del analizado en el Capítulo 3, la estrategia de estimación del vector  $q$  inicial a partir de la aproximación lineal aparece como la más apropiada. Sólo precisa de la aproximación lineal y la estimación de una regresión por mínimos cuadrados ordinarios para garantizar estacionariedad y buenas propiedades de convergencia, mientras que el resto de alternativas necesitan importantes modificaciones que pueden hacerlas inviables. En modelos más sencillos el método de identificación basado en una aproximación lineal en logaritmos aparece como el de más fácil implementación.

## 2.6 Conclusiones

En este Capítulo se han presentado dos procedimientos para inicializar el algoritmo de Parametrización de Expectativas, que garantizan que las series temporales iniciales son estacionarias. Además, en el contexto del modelo monetario de Cooley y Hansen (1989), se muestra cómo los procedimientos propuestos mejoran la velocidad de convergencia y son de más fácil implementación que

Tabla 2.3: Obtención de Condiciones Iniciales para el Método de Parametrización de Expectativas. Resultados comparativos para el Modelo de Cooley y Hansen (1989). 250 simulaciones.  $T=40,000$ . En cada simulación se genera un  $\{z_t\}$  y partiendo en cada caso de las condiciones iniciales que se señalan en el texto. Contraste de den Haan y Marcet: 250 simulaciones para cada  $q$ . Instrumentos:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

	% de realizaciones del estadístico de contraste $\leq 5\%$	
	cola inferior	cola superior
homotopía $g_{SS} : 1.015/1.15$	72	22
homotopía $\delta : 0.0/0.025$	72	22
lineales identificadas	72	22
lineales estimadas	72	22
	% de realizaciones del del estadístico de contraste entre un 5% y un 6%	
	cola inferior	cola superior
homotopía $g_{SS} : 1.015/1.15$	21	24
homotopía $\delta : 0.0/0.025$	21	25
lineales identificadas	20	25
lineales estimadas	20	25
	% de realizaciones del del estadístico de contraste entre un 6% y un 8%	
	cola inferior	cola superior
homotopía $g_{SS} : 1.015/1.15$	6	36
homotopía $\delta : 0.0/0.025$	6	35
lineales identificadas	7	35
lineales estimadas	7	35
	% de realizaciones del del estadístico de contraste entre un 8% y un 10%	
	cola inferior	cola superior
homotopía $g_{SS} : 1.015/1.15$	1	13
homotopía $\delta : 0.0/0.025$	1	13
lineales identificadas	1	13
lineales estimadas	1	13

dos versiones del procedimiento de homotopía, usual en otros trabajos en los que se utiliza el método de PEA.

Resulta importante aprovechar la información contenida en la realización concreta de los procesos exógenos,  $\{z_t\}$ , dado que, al ser finita, es útil para el cálculo del punto fijo. En un Apéndice al Capítulo se analiza cómo este hecho puede condicionar los resultados obtenidos.

## 2.7 Apéndice: Un ejercicio numérico en torno a la unicidad del punto fijo

### 2.7.1 Evidencia

Al relizar los experimentos de las secciones anteriores se produjeron las siguientes observaciones: i. *partiendo de la misma condición inicial para  $q$ , el valor numérico final de  $q$  que se obtiene tras converger, aún con un  $T$  suficientemente grande, depende de la realización de los procesos exógenos en  $\{z_t\}$* , ii. *aunque se parta de distintas condiciones iniciales, siempre que sean adecuadas, para una misma realización de  $\{z_t\}$ , siempre se converge al mismo punto fijo.*

El punto ii. queda patente observando el vector  $q$  que se ofrece como ejemplo en la tabla 2.2. El punto i. se puede constatar en la figura 2.1, donde se presentan los histogramas de frecuencias de los distintos valores que se obtienen para los componentes del  $q$  fijo,  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8]$ , en el caso de una aproximación PEA de tercer orden al modelo de Cooley y Hansen (1989), partiendo siempre de la misma condición inicial, para distintas realizaciones de las perturbaciones exógenas, cada una de tamaño 40,000. Los valores paramétricos considerados son

$$\begin{aligned}
 \beta &= 0.99, \\
 \alpha &= 0.36, \\
 \delta &= 0.025, \\
 A_N &= 2.86, \\
 \rho_z &= 0.95, \\
 \rho_g &= 0.48, \\
 \sigma_{\epsilon_g} &= 0.009, \\
 \sigma_{\epsilon_z} &= 0.00721 \\
 g_{ss} &= 1.15,
 \end{aligned}$$

y la condición inicial está tomada de den Haan y Marcet (1994) para el caso con  $g_{ss} = 1.015$ , que es la que se muestra en (2.6). Los histogramas de la figura están contruidos a partir de 1500 valores de  $q$ , obtenidos a partir de otras tantas realizaciones de  $\{z_t\}$ , y están agrupados en 100 clases.

Las diferencias entre los distintos valores de los elementos de  $q$  son apreciables a primera vista. Los rangos de variación para cada uno son  $q_1 = [1.3444, 8.7863]$ ,

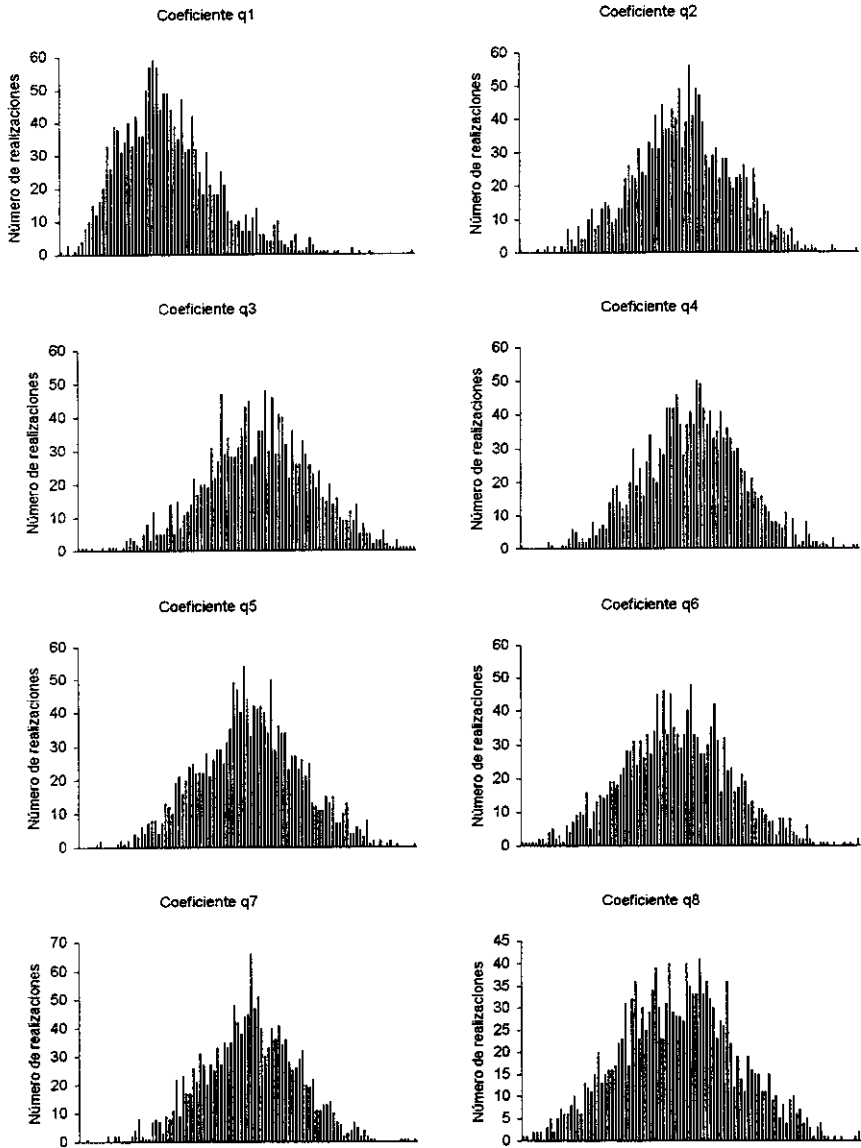


Figura 2.1: Unicidad de punto fijo. Histograma de frecuencias de los distintos valores tomados por los coeficientes del polinomio de aproximación de PEA para las distintas realizaciones de las perturbaciones exógenas. Modelo de Cooley y Hansen (1989), con valores paramétricos  $\beta = 0.99$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $A_N = 2.86$ ,  $\rho_z = 0.95$ ,  $\rho_g = 0.48$ ,  $\sigma_{\epsilon_g} = 0.009$ ,  $\sigma_{\epsilon_z} = 0.00721$  y  $g_{ss} = 1.15$ . Se han realizado 1500 simulaciones de tamaño 40,000, partiendo siempre de las mismas condiciones iniciales, tomadas de den Haan y Marcet (1994). Las 1500 realizaciones se encuentran agrupadas en 100 clases.

$q_2 = [-1.1965, 0.4392]$ ,  $q_3 = [-1.7590, 0.0530]$ ,  $q_4 = [-0.0394, -0.0235]$ ,  $q_5 = [-0.2119, 0.1444]$ ,  $q_6 = [-0.2283, 0.5613]$ ,  $q_7 = [-0.6319, 0.3751]$ ,  $q_8 = [-5.4305, 6.6651]$ .

No obstante, todos los vectores de ocho coeficientes implican, por construcción, el mismo valor de estado estacionario para el polinomio de aproximación a la expectativa.

En principio, este hecho, asociado a que necesariamente las realizaciones generadas de  $\{z_t\}$  son finitas, podría llevar a pensar que las diferencias entre los distintos valores de  $q$  pueden inducir diferencias entre las soluciones, generadas a partir de cada uno de ellos, con lo cual las conclusiones extraídas por distintos investigadores que usaran las mismas condiciones iniciales, respecto a las implicaciones del mismo modelo serían distintas. Para contrastar esta posibilidad se realiza el siguiente ejercicio, que trata de capturar posibles diferencias en las propiedades de las series simuladas a partir de cada  $q$ . Para ello se escogen cinco vectores  $q$  muy diferentes de entre los 1500 obtenidos:

$$\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \\ q^5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8.7863 & 6.6211 & 4.3381 & 2.3006 & 1.3444 \\ -1.1965 & -0.9531 & -0.5804 & -0.0360 & 0.4392 \\ -0.2710 & -0.0622 & -0.4040 & -0.8847 & -1.7311 \\ -0.0341 & -0.0310 & -0.0308 & -0.0251 & -0.0308 \\ 0.1444 & 0.0919 & 0.0099 & -0.1070 & -0.2119 \\ -0.0841 & -0.1776 & -0.0280 & 0.1767 & 0.5569 \\ -0.0393 & 0.0045 & -0.1521 & -0.0630 & -0.5944 \\ 1.3275 & 1.0337 & -0.4345 & 1.8784 & -2.1441 \end{bmatrix}$$

entonces,

- Se calculan las series temporales para el consumo, el stock de capital, las horas trabajadas y el producto, y las funciones de respuesta de estas mismas variables a un impulso en la tecnología, usando el sistema (A.54) en el Apéndice A, dados  $k_0$ ,  $\{z_t\}_{t=1}^T$  y  $\{g_t\}_{t=1}^T$ ,

$$\begin{aligned} \psi_t(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 \log(g_t)\} \\ &\quad \times \exp \{q_5 (\log(k_{t-1}))^2 + q_6 \log(k_{t-1}) \log(z_t)\} \\ &\quad \times \exp \{q_7 (\log(z_t))^2 + q_8 (\log(z_t))^3\}, \end{aligned}$$

$$c_t = \frac{1}{\psi_t} e^{\frac{\sigma_{\epsilon_y}^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g},$$

$$N_t = \frac{\left[ \frac{AN}{(1-\alpha)\psi_t z_t k_{t-1}^\alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}}{\left[ (1-\alpha)\psi_t z_t k_{t-1}^\alpha \right]},$$

$$k_t = -c_t + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1}.$$

Para generar las funciones de respuesta a un impulso de tamaño una desviación típica en la tecnología, las perturbaciones toman los valores  $\{\epsilon_{z_t}\}_{t=1}^T = [\sigma_{\epsilon_z}, 0, \dots, 0, 0]^T$  y  $\{\epsilon_{g_t}\}_{t=1}^T = [0, 0, \dots, 0, 0]^T$ .

- Se aplica el contraste de den Haan-Marcet a las series simuladas, usando cada uno de los cinco vectores  $q$ , generando 250 repeticiones de tamaño  $T=3000$  a partir de cada uno de ellos.

- Se computan las medias y las desviaciones típicas del producto, el consumo y las horas trabajadas, así como las correlaciones cruzadas contemporáneas y retardadas del producto con el consumo y las horas trabajadas.
- Se repite todo el proceso para cada una de las 250 realizaciones exógenas simuladas.

Los resultados para el contraste de den Haan-Marcet se presentan en la tabla 2.4. El resto de tablas que se muestran se refieren a contrastes de igualdad de medias, desviaciones típicas y correlaciones cruzadas entre producto, consumo y horas trabajadas. Dado que se tienen 250 realizaciones independientes e idénticamente distribuidas de cada estadístico, se realizará el contraste como sigue [tal y como se hizo en el Capítulo 1].

Sea  $\gamma_i^k$  un estadístico calculado con las series temporales simuladas con un método  $k$  en la simulación  $i \in N$ . Sea  $\mu_{\gamma^k}$  la media poblacional y  $a_{\gamma^k}$  la media muestral calculada con  $N$  simulaciones. Sea  $s_{\gamma^k}$  la desviación típica poblacional calculada con  $N$  simulaciones. Para cada par de métodos  $k_1, k_2$ , con  $\{\gamma_i^{k_1}\}_{i=1}^N$  y  $\{\gamma_i^{k_2}\}_{i=1}^N$  independientes, se desea contrastar  $H_0 : \mu_{\gamma^{k_1}} = \mu_{\gamma^{k_2}}$ . En grandes muestras es fácil probar que,

$$\left\| \frac{a_{\gamma^{k_1}} - a_{\gamma^{k_2}}}{\sqrt{\frac{s_{\gamma^{k_1}}^2 + s_{\gamma^{k_2}}^2}{N}}} \right\| \sim N(0, 1) \quad (2.15)$$

A un nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.6449. Así, un valor del estadístico de contraste mayor que este número indicaría un rechazo de la igualdad entre las series [del estadístico que sea, media, desviación típica o correlación cruzada] al nivel dado de significación.

### 2.7.2 ¿Es importante para las implicaciones económicas de las soluciones obtenidas?

La tabla 2.4 muestra el porcentaje de realizaciones del contraste de den Haan-Marcet en las colas inferior y superior del contraste. El test acepta claramente como apropiadas las soluciones generadas por  $q^1$ ,  $q^3$  y  $q^5$ . Más dudosas son la solución de  $q^4$ , que presenta un 8.4% de realizaciones en la cola superior, algo más del 5% teórico esperado, y la de  $q^5$ , con un 10% de las ocurrencias del contraste en la cola superior.

La tabla 2.5 muestra diferencias significativas entre las medias generadas con  $q^2$  para el producto, el consumo y las horas trabajadas, respecto a las generadas con  $q^1$ ,  $q^3$ ,  $q^4$  y  $q^5$ . Parece que esto es lo que puede generar un porcentaje de realizaciones del contraste de den Haan-Marcet mayor que el esperado, con lo que se rechazaría la solución calculada con  $q^2$ . Asimismo, se detectan diferencias entre la media de las horas trabajadas calculada con  $q^4$ , frente a las de  $q^3$  y  $q^5$ . De nuevo, esto puede explicar que  $q^4$  presente también un mal comportamiento en relación al test de den Haan-Marcet. Por tanto, los resultados de esta tabla son coherentes con los de la tabla 2.4.

Tabla 2.4: Unicidad del Punto Fijo. Contraste de den Haan-Marcet. Resultados para el Modelo de Cooley y Hansen (1989).  $T=3000$ . Porcentajes sobre 250 repeticiones del modelo aproximado usando cada  $q$ . Instrumentos:  $I_t = [\text{constante}, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ .

	% Cola Inferior	% Cola Superior
$q^1$	3.2	6.8
$q^2$	2.8	10.0
$q^3$	4.8	5.6
$q^4$	2.8	8.4
$q^5$	4.4	6.4

No obstante, las tablas 2.6 y 2.7 muestran unos resultados más difíciles de conciliar. Las desviaciones típicas del consumo obtenidas con los distintos vectores  $q$  no son estadísticamente diferentes, aunque las de las horas trabajadas son distintas entre todos los  $q$ 's. Respecto a las del producto, es  $q^5$  el que las genera distintas del resto. La información de la tabla 2.7, tiende a mostrar diferencias entre  $q^4$  y  $q^5$  por un lado, y  $q^1$ ,  $q^2$  y  $q^3$  por otro. Las soluciones de  $q^1$  y  $q^3$ , salvo por  $\sigma_N$  y  $\text{corr}(y_t, c_t)$ , son estadísticamente iguales.

La funciones de respuesta a un impulso de la figura 2.2, por otra parte, no muestran diferencias cualitativas.

A la vista de estos resultados no se puede dar una respuesta muy concluyente y, aunque parece que las soluciones generadas con distintos  $q$ 's pueden diferir en ciertos aspectos, tal vez se precise un mayor número de repeticiones y una longitud muestral mayor para asegurar la fiabilidad estadística de estos resultados. No obstante, los tamaños muestrales utilizados, de 40,000 observaciones, parecen suficientes y son, al menos, tan grandes como los encontrados en la literatura. No parece probable que con tamaños superiores los histogramas de la figura 2.1 colapsen a un punto, y este es el punto principal que este Apéndice pretende evidenciar.

Tabla 2.5: Unicidad del Punto Fijo. Contrastes de igualdad de las medias de las series temporales generadas usando polinomios parametrizados con distintos valores del vector  $q$  a los que se ha convergido con distintas realizaciones de los procesos exógenos. Valores del estadístico de contraste de la ecuación (2.15).  $T=40,000$ . Las condiciones iniciales para  $q$  son las mismas para cada  $\{z_t\}$  y están tomadas de den Haan y Marcet (1994).

media( $y_t$ )	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	2.3029	—	—	—	—
$q^3$	0.2151	2.0960	—	—	—
$q^4$	0.2199	2.5117	0.4347	—	—
$q^5$	0.2262	2.0605	0.0135	0.4436	—
media( $c_t$ )	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	1.5650	—	—	—	—
$q^3$	0.1449	1.4238	—	—	—
$q^4$	0.1426	1.7023	0.2890	—	—
$q^5$	0.1577	1.3996	0.0140	0.2991	—
media( $N_t$ )	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	9.0216	—	—	—	—
$q^3$	0.8106	8.3119	—	—	—
$q^4$	0.7516	9.5882	1.5532	—	—
$q^5$	0.9926	7.7577	0.2175	1.7031	—

Tabla 2.6: Unicidad del Punto Fijo. Contrastes de igualdad de las desviaciones típicas de las series temporales generadas usando polinomios parametrizados con distintos valores del vector  $q$  a los que se ha convergido con distintas realizaciones de los procesos exógenos. Valores del estadístico de contraste de la ecuación (2.15).  $T=40,000$ . Las condiciones iniciales para  $q$  son las mismas para cada  $\{z_t\}$  y están tomadas de den Haan y Marcet (1994).

$\sigma_y$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	0.5469	—	—	—	—
$q^3$	1.2908	0.7441	—	—	—
$q^4$	0.3186	0.2268	0.9687	—	—
$q^5$	1.3729	1.9310	2.6900	1.6941	—
$\sigma_c$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	0.1462	—	—	—	—
$q^3$	0.4502	0.3042	—	—	—
$q^4$	0.0381	0.1078	0.4109	—	—
$q^5$	0.6088	0.7561	1.0596	0.6464	—
$\sigma_N$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	—	—	—	—	—
$q^2$	2.1499	—	—	—	—
$q^3$	3.9933	1.8364	—	—	—
$q^4$	5.4715	3.3528	1.5548	—	—
$q^5$	2.0800	4.2566	6.1305	7.5886	—

Tabla 2.7: Unicidad del Punto Fijo. Contrastes de igualdad de las correlaciones cruzadas de las series temporales generadas usando polinomios parametrizados con distintos valores del vector  $q$  a los que se ha convergido con distintas realizaciones de los procesos exógenos. Valores del estadístico de contraste de la ecuación (2.15).  $T=40,000$ . Las condiciones iniciales para  $q$  son las mismas para cada  $\{z_t\}$  y están tomadas de den Haan y Marcet (1994).

$corr(y_t, c_t)$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	1.0000	—	—	—	—
$q^2$	1.6168	1.0000	—	—	—
$q^3$	1.8765	0.2597	1.0000	—	—
$q^4$	5.1534	3.5326	3.2722	1.0000	—
$q^5$	0.4440	1.1595	1.4170	4.6645	1.0000
$corr(y_t, N_t)$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	1.0000	—	—	—	—
$q^2$	0.2072	1.0000	—	—	—
$q^3$	0.6278	0.8329	1.0000	—	—
$q^4$	2.4091	2.1980	3.0314	1.0000	—
$q^5$	2.2770	2.0664	2.8956	0.1298	1.0000
$corr(y_t, c_{t+1})$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	1.0000	—	—	—	—
$q^2$	1.3836	1.0000	—	—	—
$q^3$	1.5461	0.1625	1.0000	—	—
$q^4$	4.2774	2.8905	2.7275	1.0000	—
$q^5$	0.4548	0.9187	1.0800	3.7895	1.0000
$corr(y_t, N_{t+1})$	$q^1$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$
$q^1$	1.0000	—	—	—	—
$q^2$	0.7420	1.0000	—	—	—
$q^3$	0.7431	1.4834	1.0000	—	—
$q^4$	5.2471	4.5061	5.9766	1.0000	—
$q^5$	4.2859	3.5439	5.0187	0.9671	1.0000

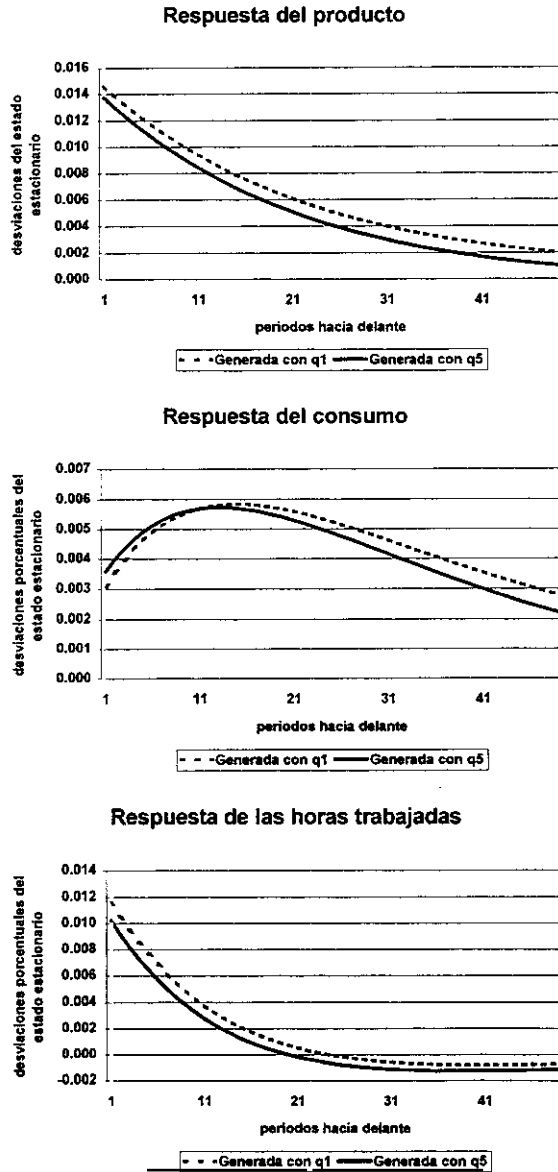


Figura 2.2: Funciones de respuesta a un impulso en la perturbación tecnológica. Modelo de Cooley y Hansen (1989), con valores paramétricos  $\beta = 0.99$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $A_N = 2.86$ ,  $\rho_z = 0.95$ ,  $\rho_g = 0.48$ ,  $\sigma_{\epsilon_g} = 0.009$ ,  $\sigma_{\epsilon_z} = 0.00721$  y  $g_{ss} = 1.15$ .  $\{z_t\}_{t=1}^T = [1, 0, \dots, 0, 0]^T$ ,  $\{g_t\}_{t=1}^T = [0, 0, \dots, 0, 0]^T$ . Eje de ordenadas: desviaciones porcentuales respecto del estado estacionario. Eje de abscisas: periodos hacia delante.



## Capítulo 3

# Expectativas a Distintos Horizontes y Descomposición de Expectativas

### 3.1 Introducción

En este Capítulo se abordan dos cuestiones relacionadas. Por una parte se estudian las propiedades de racionalidad asociadas a las expectativas realizadas por los agentes con un horizonte mayor que uno, y por otra se explotan las ventajas que puede presentar la descomposición de expectativas en distintos sumandos, cuando sea posible, para el análisis de cuestiones de identificación de la estructura dinámica y estocástica de modelos con expectativas racionales.

En determinadas aplicaciones económicas aparecen esperanzas condicionales de una misma función a distintos horizontes que, salvo en el caso de previsión perfecta, tendrán asociado un error de previsión realizado distinto de cero. La racionalidad de expectativas impone una rígida estructura entre los errores de predicción asociados a cada horizonte, que deben seguir una estructura de medias móviles con los errores de predicción a horizonte uno como innovaciones. En esta situación, algunos métodos de solución se presentan especialmente apropiados, y permiten considerar estas cuestiones de manera muy natural. En la primera parte de este Capítulo, usando el modelo neoclásico básico de crecimiento con una tecnología de producción del tipo *time-to-build*, se explica cómo los métodos basados en aproximaciones a las condiciones de Euler que se estudiaron en el Capítulo 1 afrontan esta situación. Para un tratamiento general de las estructuras de medias móviles en modelos *lineales* de expectativas racionales se puede consultar Sims (1999) y Zadrozny (1998), donde se usa un método de coeficientes indeterminados. En Ruiz (1997) se discute la cuestión usando un

método de solución a la Blanchard y Kahn (1980), en el contexto de un modelo de crecimiento endógeno. El análisis que se realizará en este Capítulo se basa en este último trabajo y en Novales *et al.* (1999b), donde se analizan distintas cuestiones de identificación en el marco del mismo modelo que se usará aquí, utilizando la descomposición de autovalores y autovectores que se ha aplicado en el Capítulo 1. La estrategia de solución de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999), al considerar cada expectativa como una variable [aleatoria] diferente, permite integrar la existencia de errores de expectativas a distintos horizontes de una manera muy ventajosa.

Transformando y redefiniendo variables es también fácil ver que la aproximación de Uhlig (1999) se puede escribir de manera que el problema lineal en logaritmos sea idéntico al derivado con el método anterior. La única diferencia entre aproximaciones radica en la forma de llevar a cabo el análisis de estabilidad de la solución. Usando Uhlig se utiliza el método de coeficientes indeterminados, y con Sims-Novales *et al.* se estudia un problema estándar de autovalores y autovectores. Las diferencias entre las soluciones generadas por ambas aproximaciones se reducen, por tanto, al mínimo. Por tanto, en lo que sigue, simplemente se darán algunas indicaciones acerca de cómo habría que resolver por Uhlig (1999), no siendo necesario entrar en la discusión de las propiedades de la solución.

Al resolver por Parametrización de Expectativas modelos con expectativas a horizonte mayor que uno, la presencia de la citada estructura media móvil en los errores de previsión a horizonte mayor que uno recomienda la parametrización de expectativas auxiliares para permitir al método de solución capturar más estructura estocástica del modelo original no lineal, de manera que la presencia de varias expectativas permite enriquecer el análisis. El reconocer la estructura media móvil en los errores a horizonte dos y superior permite imponer condiciones de compatibilidad entre los coeficientes de los distintos polinomios de aproximación. Este hecho no ha sido utilizado en trabajos previos.

Por otra parte, y muy en relación con el punto anterior, siguiendo la discusión en Ruiz (1997) y Novales *et al.* (1999c), se analiza también el problema de identificación que surge cuando se descompone una expectativa, presente en una ecuación, en diversos sumandos, mediante el uso del método que se presenta en Sims (1999)-Novales *et al.* (1999), y se muestra cómo con el estudio de la estabilidad del sistema se detectan autovalores de valor infinito cuyas condiciones de estabilidad asociadas permiten recuperar los errores de predicción asociados a cada sumando.

El Capítulo está organizado como sigue. En la sección 3.2.1 se presenta el modelo en el que se discutirán las cuestiones anteriores. En la sección 3.2.2 se analiza extensamente la identificación de estructuras de medias móviles usando el método de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999), mientras que en la sección 3.2.3 se dan algunas pautas de cómo afrontar esta cuestión con el método de Uhlig (1999). En la sección 3.2.4 se muestra cómo resolver con una y dos expectativas parametrizadas cuando se usa PEA, y se propone un algoritmo para hacerlo. Por su parte, en la sección 3.3, se estudian otras cuestiones que surgen cuando se descompone en distintos sumandos una expectativa presente en una

determinada ecuación.

## 3.2 Identificación de medias móviles

### 3.2.1 Un modelo con tecnología de *time-to-build*

Se considerará de nuevo el modelo neoclásico básico de un sector que se analizó en el Capítulo 1, pero en esta ocasión con una tecnología de acumulación de capital del tipo *time-to-build*, como la considerada en Kydland y Prescott (1982). Por simplicidad se supondrá que los proyectos de inversión tardan dos periodos en ser productivos. Una proporción  $\varphi_2$  del coste del proyecto se financia en el primer periodo, mientras que el resto  $\varphi_1 = 1 - \varphi_2$ , se paga durante el segundo periodo. La productividad se encuentra sujeta a una perturbación aleatoria  $z_t$  que sigue una estructura autorregresiva de primer orden en logaritmos. Con una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante para el agente representativo de esta economía, el problema del planificador es,

$$\max_{\{k_t, c_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \right] \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + x_t, \\ y_t &= z_t k_{t-2}^{\alpha}, \\ x_t &= \varphi_1 (k_{t-1} - (1-\delta)k_{t-2}) + \varphi_2 (k_t - (1-\delta)k_{t-1}) \\ \log(z_t) &= (1-\rho_z) \log(z_{ss}) + \rho_z \log(z_{t-1}) + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \end{aligned}$$

Cada instante de tiempo el agente tiene que pagar la primera parte de un proyecto de inversión que se va a poner en marcha (la proporción  $\varphi_2$ ) y la segunda parte del plan de inversión en curso (la proporción  $\varphi_1$ ). Los recursos disponibles en el instante  $t$  vienen dados por  $y_t$ , teniendo en cuenta que el capital que se puede usar en el proceso productivo en el momento  $t$  viene dado por  $k_{t-2}$ , dado que el capital se deprecia sólo por el uso.

En  $t = 1$  el agente elige  $c_1$  y  $k_1$ , dados  $k_0$ ,  $k_{-1}$  y  $z_1$ . La producción viene dada por  $y_1 = z_1 k_{-1}^{\alpha}$ . El agente dedica a inversión  $x_1 = \varphi_1 (k_0 - (1-\delta)k_{-1}) + \varphi_2 (k_1 - (1-\delta)k_0)$ , donde el primer término es el coste fijo inicial asociado a las dotaciones iniciales de capital, y el segundo representa el primer pago del primer proyecto de inversión destinado a llevar el stock de capital hasta  $k_1$ , que se pagará en los periodos  $t = 1$  y  $t = 2$  y será productivo en el instante  $t = 3$ .

Entonces, en  $t = 2$ , dados  $z_2$ ,  $k_0$  y  $k_1$  el agente elige  $c_2$  y  $k_2$ . La producción todavía se realiza usando las dotaciones iniciales,  $y_2 = z_2 k_0^{\alpha}$ . La inversión vuelve a estar compuesta de dos términos,  $x_2 = \varphi_1 (k_1 - (1-\delta)k_0) + \varphi_2 (k_2 - (1-\delta)k_1)$ , donde el primer término es el pago pendiente del primer proyecto de inversión y el segundo el primer pago del segundo proyecto. Es en el periodo  $t = 3$  cuando  $k_1$  se hace productivo,  $y_3 = z_3 k_1^{\alpha}$ .

Usando las expresiones para la inversión y el producto en la restricción de recursos, se tiene que

$$z_t k_{t-2}^\alpha - c_t = \varphi_1(k_{t-1} - (1 - \delta)k_{t-2}) + \varphi_2(k_t - (1 - \delta)k_{t-1}) \quad (3.2)$$

con lo que el problema que el planificador central tiene que resolver es maximizar (3.1) sujeto a (3.2). El Lagrangiano asociado es

$$L(c_t, k_t, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \times \left\{ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_t [z_t k_{t-2}^\alpha - c_t - \varphi_1(k_{t-1} - (1 - \delta)) - \varphi_2(k_t - (1 - \delta)k_{t-1})] \right\}$$

donde  $\lambda_t$  denota el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (3.2), y las condiciones de primer orden son,

$$\lambda_t + c_t^{-\eta} = 0$$

y además,

$$\lambda_t \varphi_2 + \beta E_t [\lambda_{t+1} (\varphi_1 - \varphi_2 (1 - \delta))] + \beta^2 E_t [-\alpha \lambda_{t+2} z_{t+2} k_t^{\alpha-1} - (1 - \delta) \varphi_1] = 0$$

más la condición para  $\lambda_t$  dada por la restricción de recursos (3.2) y las condiciones de transversalidad. A partir de las dos condiciones anteriores se obtiene que

$$c_t^{-\eta} \varphi_2 = -\beta E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\varphi_1 - \varphi_2 (1 - \delta)) - \beta c_{t+2}^{-\eta} (\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta) \varphi_1)] \quad (3.3)$$

que es una expectativa condicional en  $t$  sobre los valores de una función de las variables dos periodos hacia adelante. Si se define esta expectativa como una nueva variable,

$$W_t^2 = E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\varphi_1 - \varphi_2 (1 - \delta)) - \beta c_{t+2}^{-\eta} (\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta) \varphi_1)] \quad (3.4)$$

la ecuación de Euler (3.29) se puede escribir,

$$\varphi_2 c_t^{-\eta} + \beta W_t^2 = 0. \quad (3.5)$$

También será de utilidad definir una expectativa realizada sobre la misma función de las variables del modelo pero en este caso sobre información un periodo hacia adelante,

$$W_t^1 = E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\varphi_1 - \varphi_2 (1 - \delta)) - \beta c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1 - \delta) \varphi_1)] \quad (3.6)$$

Es importante darse cuenta de que  $W_t^1$  y  $W_t^2$  son expectativas formadas sobre la misma función, a *distinto* horizonte, usando el *mismo* conjunto de información.

### 3.2.2 Solución usando la descomposición de autovalores y autovectores

En el Capítulo 1 ya se describió esta estrategia de solución, que incorpora de manera natural cualquier cuestión relacionada con expectativas a distintos horizontes, que se considerarán como nuevas variables. Así, las variables  $W_t^1$  y  $W_t^2$  entrarán a formar parte directa del diseño de la solución. Asociados a las definiciones de estas variables en (3.4) y (3.6) se tienen dos errores de predicción un periodo hacia adelante. Por una parte, el error de predicción de la expectativa realizada en el instante  $t - 1$  sobre información en  $t$  es igual al valor realizado de la función sobre la que se hizo la expectativa en el momento  $t$  menos el valor que el agente esperaba en  $t - 1$  que tomara dicha función,

$$\xi_{t,1}^1 = \{c_{t-1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta c_t^{-\eta}(\alpha z_t k_{t-2}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)\} - W_{t-1}^1 \quad (3.7)$$

y, por otra parte, se puede definir un error de predicción auxiliar tal que

$$\begin{aligned} \xi_{t,2}^1 &= \{c_t^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)]\} - W_{t-1}^2 \\ &= W_t^1 - W_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

En el momento  $t$ , el valor del primer término en la expresión (3.8) [en corchetes] no es conocido, dado que incluye un valor esperado.  $\xi_{t,2}^1$  es un error de predicción a horizonte uno: lo que el agente espera en el instante  $t$  para el instante  $t + 1$  menos lo que el agente esperó en el instante  $t - 1$  para el momento  $t$ . Al incorporar la nueva información disponible en  $t$  el agente actualiza la expectativa hecha en  $t - 1$  para  $t + 1$ , y por tanto cambia su predicción para  $t + 1$ .

Nótese que  $E_t \xi_{t+s,1}^1 = 0$  y  $E_t \xi_{t+s,2}^1 = 0$  para todo  $s > 0$ . Nótese también que el error de predicción dos periodos hacia delante cometido en  $t + 1$  asociado a la predicción  $W_{t-1}^2$  viene dado por

$$\begin{aligned} \xi_{t+2,2}^2 &= [c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)] - W_t^2 \\ &= \xi_{t+2,1}^1 + W_{t+1}^1 - W_t^2 \\ &= \xi_{t+2,1}^1 + \xi_{t+1,2}^1 \\ &= (1 - \Phi^* B) \epsilon_{t+2}^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

por lo que el error de predicción dos periodos hacia adelante también tiene esperanza nula condicional al conjunto de información en  $t$ , que es el instante en que se realiza la predicción:  $E_t [\xi_{t+2,2}^2] = E_t [\xi_{t+2,1}^1] + E_t [\xi_{t+1,2}^1] = 0$ . El error de predicción a horizonte dos, al ser la suma de dos innovaciones ruido blanco desfasadas, sigue una estructura media móvil de orden uno, con parámetro  $\Phi^*$  desconocido, que habrá que estimar. Esto es una propiedad del modelo no lineal original, ya que hasta ahora no se ha realizado ningún tipo de aproximación.

El sistema completo a estudiar, por tanto, está formado por las siguientes ecuaciones: i. la ecuación de Euler (3.5), ii. la restricción global de recursos

(3.2), iii. la ley de movimiento de la perturbación exógena, iv. las definiciones de los dos errores de expectativas, (3.7) y (3.8), y v. una identidad que permite ampliar el vector de variables e introducir  $k_{t-1}$ .

Los valores de las variables de este sistema en estado estacionario vienen dados por,

$$\begin{aligned} k_{ss} &= \left[ \frac{1}{\beta\alpha} \left\{ \left( \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\beta} \right) (1 - \beta(1 - \delta)) \right\} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}, \\ c_{ss} &= k_{ss}^\alpha - \varphi_1 \delta k_{ss} - \varphi_2 \delta k_{ss}, \\ W_{ss}^1 &= \frac{-\varphi_2}{\beta} c_{ss}^{-\eta}, \\ W_{ss}^2 &= W_{ss}^1, \end{aligned}$$

donde es importante notar que en estado estacionario los valores de las dos esperanzas condicionales son iguales, ya que se realizan sobre la misma función, aunque a distintos horizontes temporales.

Usando la representación general del Capítulo 1, el sistema en forma lineal en logaritmos alrededor del estado estacionario determinista se puede escribir,

$$\Gamma_0 u_{t+1} = \Gamma_1 u_t + \Psi \varepsilon_{t+1} + \Pi \eta_{t+1} \tag{3.10}$$

donde

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= [\tilde{c}_{t+1}, \tilde{k}_{t+1}, \tilde{W}_{t+1}^1, \tilde{W}_{t+1}^2, \tilde{z}_{t+1}, \tilde{k}_t]^T, \\ \varepsilon_{t+1} &= [\varepsilon_{t+1}], \\ \eta_{t+1} &= [\xi_{t+1,1}^1, \xi_{t+1,2}^1]^T, \end{aligned}$$

y el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  denota desviaciones logarítmicas respecto del estado estacionario. Se tiene que

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_{ss} & -\varphi_2 k_{ss} & 0 & 0 & k_{ss}^\alpha & \Gamma_{2,6}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_{4,1}^0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{4,5}^0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,6}^0 &= -k_{ss} (\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)), \\ \Gamma_{4,1}^0 &= \beta\alpha\eta c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1} + \beta\eta(1 - \delta)\varphi_2 c_{ss}^{-\eta}, \\ \Gamma_{4,5}^0 &= -\beta\alpha c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

y además,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{2,6}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 \\ \Gamma_{4,1}^1 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 & \Gamma_{4,6}^1 \\ 0 & 0 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,6}^1 &= -\alpha k_{ss}^\alpha - \varphi_1(1-\delta)k_{ss}, \\ \Gamma_{4,1}^1 &= \eta c_{ss}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta)), \\ \Gamma_{4,6}^1 &= \beta\alpha(\alpha-1)c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha-1},\end{aligned}$$

y por último,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Análisis de estabilidad

Para estudiar la estabilidad de (3.10) hay que localizar las raíces del par  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ . En el caso que nos ocupa  $\Gamma_0$  es invertible y se pueden calcular los autovalores de  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$ , que tiene una descomposición de Jordan  $P\Lambda P^{-1}$ , donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal que contiene los autovalores y  $P^{-1}$  es la matriz de autovectores por la izquierda. Sea  $P^s$  un vector con las filas de  $P^{-1}$  asociadas a los autovalores inestables de este sistema, entonces para que exista un equilibrio estacionario único se debe verificar que [ver Apéndice A]

$$P^s u_t = 0, \quad \forall t \quad (3.11)$$

que es el conjunto de condiciones de estabilidad del sistema que garantiza que se verifican las condiciones de transversalidad. En los ejercicios realizados en este Capítulo,  $P^s$  resulta ser  $2 \times 6$  y se utilizará la siguiente notación,

$$P^s = \begin{bmatrix} \mu_c^1 & \mu_k^1 & \mu_{W^1}^1 & \mu_{W^2}^1 & \mu_\theta^1 & \mu_{k-1}^1 \\ \mu_c^2 & \mu_k^2 & \mu_{W^1}^2 & \mu_{W^2}^2 & \mu_\theta^2 & \mu_{k-1}^2 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que el uso de las condiciones de estabilidad permite escribir las expectativas como funciones exponenciales de  $c_t$ ,  $k_t$ ,  $z_t$  y  $k_{t-1}$ ,

$$W_t^1 = W_{ss} \left[ \frac{c_t}{c_{ss}} \right]^{-\frac{\tau_1}{\tau_3}} \left[ \frac{k_t}{k_{ss}} \right]^{-\frac{\tau_2}{\tau_3}} z_t^{-\frac{\tau_4}{\tau_3}} \left[ \frac{k_{t-1}}{k_{ss}} \right]^{-\frac{\tau_5}{\tau_3}} \quad (3.12)$$

$$W_t^2 = W_{ss} \left[ \frac{c_t}{c_{ss}} \right]^{-\tau_6} \left[ \frac{k_t}{k_{ss}} \right]^{-\tau_7} z_t^{-\tau_8} \left[ \frac{k_{t-1}}{k_{ss}} \right]^{-\tau_9} \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \mu_c^1 - \frac{\mu_{W2}^1}{\mu_{W2}^2} \mu_c^2, \\ \tau_2 &= \mu_k^1 - \frac{\mu_{W2}^1}{\mu_{W2}^2} \mu_k^2, \\ \tau_3 &= \mu_{W1}^1 - \frac{\mu_{W2}^1}{\mu_{W2}^2} \mu_{W1}^2, \\ \tau_4 &= \mu_z^1 - \frac{\mu_{W2}^1}{\mu_{W2}^2} \mu_z^2, \\ \tau_5 &= \mu_{k-1}^1 - \frac{\mu_{W2}^1}{\mu_{W2}^2} \mu_{k-1}^2, \\ \tau_6 &= \frac{\tau_3 \mu_c^2 - \tau_1 \mu_{W1}^2}{\tau_3 \mu_{W2}^2}, \\ \tau_7 &= \frac{\tau_3 \mu_k^2 - \tau_2 \mu_{W1}^2}{\tau_3 \mu_{W2}^2}, \\ \tau_8 &= \frac{\tau_3 \mu_z^2 - \tau_4 \mu_{W1}^2}{\tau_3 \mu_{W2}^2}, \\ \tau_9 &= \frac{\tau_3 \mu_{k-1}^2 - \tau_5 \mu_{W1}^2}{\tau_3 \mu_{W2}^2},\end{aligned}$$

Otra cuestión evidente a partir de (3.10) es que el sistema de condiciones de estabilidad (3.11) impone en cada periodo un conjunto de restricciones entre el vector de perturbaciones estructurales y el vector de errores de predicción,

$$P^s \Gamma_0^{-1} (\Psi \varepsilon_t + \Pi \eta_t) = 0, \quad (3.14)$$

que implican que los errores de expectativas deben fluctuar en función de los valores que tomen las innovaciones estructurales, de tal manera que eviten cualquier desviación de (3.10) respecto a su valor de estado estacionario de cero. A partir de la expresión (3.14), es fácil ver que los errores de predicción un periodo hacia adelante verifican el sistema de ecuaciones

$$[P^s \Gamma_0^{-1} \Psi] \varepsilon_t = - [P^s \Gamma_0^{-1} \Pi] \eta_t \quad (3.15)$$

y si  $[P^s \Gamma_0^{-1} \Pi]$  es invertible, se pueden escribir las relaciones,

$$\xi_{t,1}^1 = \Phi_\varepsilon^1 \varepsilon_t \quad (3.16)$$

$$\xi_{t,2}^1 = \Phi_\varepsilon^2 \varepsilon_t \quad (3.17)$$

donde  $\Phi_\varepsilon^1$  y  $\Phi_\varepsilon^2$  son los dos elementos de la matriz  $- [P^s \Gamma_0^{-1} \Pi]^{-1} [P^s \Gamma_0^{-1} \Psi]$ , que en este caso es un vector  $2 \times 1$ .

Las relaciones anteriores implican para el error de predicción dos periodos hacia adelante, por (3.9), que

$$\begin{aligned}\xi_{t+1,2}^2 &= \xi_{t+1,1}^1 + \xi_{t,2}^1 \\ &= \Phi_\epsilon^1 \epsilon_{t+1} + \Phi_\epsilon^2 \epsilon_t \\ &= \left(1 - \left(-\frac{\Phi_\epsilon^2}{\Phi_\epsilon^1}\right) B\right) \epsilon_{t+1} \Phi_\epsilon^1\end{aligned}\quad (3.18)$$

que no es más que una estructura de media móvil de orden 1 con parámetro  $-\frac{\Phi_\epsilon^2}{\Phi_\epsilon^1}$ , que debe presentar la solución. Las restricciones que impone (3.14) permiten estimar un valor aproximado del parámetro media móvil teórico,  $\Phi^*$  en la expresión (3.9).

Por tanto, a partir de la expresión (3.10), junto con las condiciones de estabilidad (3.11) se pueden obtener series temporales para todas las variables en  $u_t$ , los errores de predicción un periodo hacia adelante en  $\eta_t$ , y a partir de (3.18) se puede recuperar el error de predicción a horizonte dos periodos.

### Simulación usando directamente la aproximación lineal en logaritmos

Se puede simular no *refinando la solución*, y usando directamente (3.10) junto con las condiciones de estabilidad (3.11). Así, se puede escribir,

$$\begin{bmatrix} u_{t+1} \\ \eta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & -\Pi \\ P^s & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} \Gamma_0 & -\Pi \\ P^s & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \quad (3.19)$$

entonces, directamente, se obtienen series temporales para el consumo, el capital, las dos expectativas y los dos errores de expectativas. Nótese que esta manera de simular es similar a la representación de espacio de estados que presenta Uhlig (1999). El error de previsión a horizonte dos se obtiene de la perturbación estructural y el parámetro  $-\frac{\Phi_\epsilon^2}{\Phi_\epsilon^1}$  estimado a partir de la parte estocástica de la aproximación lineal en logaritmos. Dados los resultados obtenidos en el Capítulo 1, se pasará ahora a *refinar* la solución, y se mostrará el modo de implementar la aproximación que allí se denotó por SIL, y que aparecía como la más robusta de entre las "casi" lineales.

### Simulación mezclando estructura de la aproximación lineal en logaritmos y del modelo no lineal original

Para obtener series temporales de equilibrio de esta economía aproximada, se empieza a partir de una realización de la perturbación exógena  $z_t$  y unas condiciones iniciales  $z_0, k_{-1}$  y  $k_0$ . Se usan entonces las dos condiciones de estabilidad (3.12) y (3.13), la condición de Euler (3.5) y la restricción de recursos (3.2) para resolver para  $c_t, k_t, W_t^1$  y  $W_t^2$ .

Así, si se sustituyen (3.2) y (3.5) en (3.13) se obtiene una ecuación no lineal

cuya única incógnita es  $W_t^2$ ,

$$0 = -W_t^2 + W_{ss} c_{ss}^{\tau_6} \left[ -\frac{\beta W_t^2}{\varphi_2} \right]^{\frac{\tau_6}{\eta}} (k_{ss} \varphi_2)^{\tau_7} z_t^{-\tau_8} \left[ \frac{k_{t-1}}{k_{ss}} \right]^{-\tau_9} \times \left\{ z_t k_{t-2}^\alpha - (\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) k_{t-1} + \varphi_1(1 - \delta) k_{t-2} - \left( -\frac{\beta W_t^2}{\varphi_2} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right\}^{-\tau_7}$$

Una vez calculado el valor de  $W_t^2$  se pueden calcular los valores para el consumo y el stock de capital deshaciendo el anterior proceso de sustitución y después, usando la condición de estabilidad (3.12), calcular  $W_t^1$ . Entonces, a partir de (3.7) y (3.8) se obtienen las realizaciones de los dos errores de predicción un periodo hacia adelante,  $\xi_{t,1}^1$  y  $\xi_{t,2}^1$ . De la relación media móvil, se calcula el error  $\xi_{t,2}^2$ . La expectativa  $W_t^1$  únicamente juega el papel de identificar el error de predicción un periodo hacia adelante  $\xi_{t,1}^1$ .

### Un ejemplo numérico

Con los valores paramétricos:  $\eta = 1.5$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\varphi_1 = 0.5$ ,  $\varphi_2 = 0.5$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $\rho_z = 0.95$ , el estado estacionario resultante es:  $c_{ss} = 2.7513$ ,  $k_{ss} = 37.6914$ ,  $W_{ss}^1 = -0.1107$ ,  $W_{ss}^2 = -0.1107$ ,  $z_{ss} = 1$ , y las matrices del sistema (3.10) presentan los siguientes valores numéricos,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -2.7513 & -18.8457 & 0 & 0 & 3.6936 & -0.4711 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.1701 & 0 & 0 & 0 & -0.0077 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1107 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.7042 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9500 & 0 \\ 0.0041 & 0 & -0.1107 & 0 & 0 & -0.0049 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1107 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para los valores paramétricos seleccionados los autovalores son: 0, 0.95, -0.9621, 0.9728, 1.0384 y -1.0499, con lo que se tienen dos autovalores fuera del círculo unidad que habrá que resolver hacia adelante [ver Apéndice A]. Asociados a los autovalores inestables se obtienen, a partir de (3.11) los valores para las condiciones de estabilidad, que resultan ser,

$$P^s = \begin{bmatrix} 0.0227 & -0.4783 & -0.6103 & -0.5877 & -0.5367 & -0.5087 \\ -0.0152 & -0.6223 & 0.4087 & -0.3892 & 0.0438 & 0.6378 \end{bmatrix},$$

y para las relaciones lineales (3.16), (3.17) y (3.18) inducidas por (3.14),

$$\begin{aligned}\xi_{t,1}^1 &= \Phi_\epsilon^1 \epsilon_t = 0.0572 \epsilon_t, \\ \xi_{t,2}^1 &= \Phi_\epsilon^2 \epsilon_t = 0.0470 \epsilon_t, \\ \xi_{t,2}^2 &= (1 - (-0.8206)B)(0.0572\epsilon_t).\end{aligned}$$

De donde  $\tau_1 = 0.0456$ ,  $\tau_2 = 0.4612$ ,  $\tau_3 = -1.2273$ ,  $\tau_4 = -0.6029$ ,  $\tau_5 = -1.4716$ ,  $\tau_6 = 0$ ,  $\tau_7 = 1.2041$ ,  $\tau_8 = 0.4031$  y  $\tau_9 = -0.3796$ .

En el caso de la representación lineal en logaritmos el valor del parámetro media móvil se obtiene de manera exacta. En cambio, cuando se mezcla parte del modelo original con las condiciones de estabilidad de la aproximación lineal en logaritmos, hay que estimar el parámetro media móvil resultante. Mediante 250 repeticiones de tamaño  $T = 3000$  de  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , dadas  $k_1 = k_{ss}$  y  $k_2 = k_{ss}$ , el ajuste de un proceso media móvil de orden uno al error de previsión dos periodos hacia adelante generado por la solución SIL, por máxima verosimilitud exacta, produjo<sup>1</sup>,

$$\xi_{t,2}^2 = (1 - (-0.8117)B)\epsilon_t^*$$

donde el parámetro estimado que se muestra es el promedio de las 250 simulaciones, y la desviación típica de dicho promedio es 0.00044. Este valor estimado no difiere significativamente del calculado analíticamente a partir de la representación lineal en logaritmos.

El contraste de den Haan-Marcet para los errores de previsión permite analizar lo adecuado de la solución obtenida. Se utilizará como conjunto de instrumentos:  $I_t = [1, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ , de manera que el estadístico de contraste tiene una distribución  $\chi_7^2$ . Se usarán los mismos instrumentos al aplicar el contraste tanto a los errores a horizonte uno, como al error a horizonte dos, ya que el conjunto de información usado es el mismo. Para las correlaciones entre  $I_t$  y  $\xi_{t+1,1}^1$  se tiene un 5,6% de las realizaciones en la cola inferior a un nivel de significación del 5%, mientras que un 4.4% lo hicieron en la superior; respecto a  $\xi_{t+1,2}^1$ , un 5.2% lo hizo en la inferior y un 3.6% en la superior<sup>2</sup>. Estos resultados indican que los errores de previsión derivados de la aproximación lineal en logaritmos *refinada* se pueden considerar racionales en el sentido en que no están correlacionados con un subconjunto suficiente de variables del conjunto de información.

<sup>1</sup>Para la estimación se ha usado la "Toolbox" E4 de MATLAB, desarrollada en el Departamento de Economía Cuantitativa de la Universidad Complutense de Madrid.

<sup>2</sup>Respecto al error a horizonte dos, no es necesario pasarle el contraste si previamente los errores a horizonte uno se aceptaron como racionales, ya que, respecto a la correlación  $E_t [I_t, \xi_{t+2,2}^2]$ , como

$$E_t [I_t, \xi_{t+2,2}^2] = E_t [I_t, \xi_{t+2,1}^1] + E_t [I_t, \xi_{t+1,2}^1]$$

entonces, si cada una de las correlaciones de la derecha es cero, la de la izquierda debe serlo, al menos aproximadamente.

### 3.2.3 Solución usando el método de coeficientes indeterminados

Se explica ahora brevemente cómo se resolvería el modelo usando el método propuesto en Uhlig (1999). El sistema de ecuaciones a linealizar en logaritmos estaría compuesto por la restricción de recursos (3.2), la ecuación de Euler estocástica (3.29), y la ley de movimiento de la perturbación tecnológica,

$$\begin{aligned} z_t k_{t-2}^\alpha - c_t &= \varphi_2 k_t + k_{t-1}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \varphi_1(1 - \delta)k_{t-2} \\ c_t^{-\eta} \varphi_2 &= -E_t [\beta c_{t+1}^{-\eta} (\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta^2 c_{t+2}^{-\eta} (\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)] \\ z_t &= \rho_z z_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

En este caso se tienen que redefinir  $s_t$ ,  $v_t$  y  $z_t$  para incluir los términos en  $t+2$ , para lo que en Uhlig (1999) se recomienda introducir: i. variables ficticias como en los ejemplos,

$$\begin{aligned} x_t = E_t[y_{t+2}] &\rightarrow \begin{cases} x_t &= E_t[y_{t+1}^{(1)}] \\ y_t^{(1)} &= E_t[y_{t+1}] \end{cases} \\ y_t = x_{t-2} + z_t &\rightarrow \begin{cases} y_t &= x_{t-1}^{(1)} + z_t \\ x_t^{(1)} &= x_{t-1} \end{cases} \end{aligned}$$

y por otro lado, ii. incluir nuevas variables de estado como  $k_{t-2}$ .

Es importante notar que con una adecuada introducción de variables ficticias como la que se propone, el sistema resultante es idéntico al de la descomposición de autovalores y autovectores de la sección anterior, ya que se introducirían las expectativas como nuevas variables, aunque dicho método permite de una manera más inmediata recuperar los errores de predicción a distintos horizontes. En este sentido las expectativas a distintos horizontes entran de manera más natural en la estrategia de Sims-Navales *et al.* que en la de Uhlig, en la que se necesita hacer modificaciones *ad hoc*, definiendo como variables de estado variables de control retrasadas, a la vez que se rompe la convención notacional al introducir las citadas variables ficticias. Dada la similitud de las soluciones que se generan por ambos métodos, no se mostrarán resultados con este método de solución.

### 3.2.4 Solución usando Parametrización de Expectativas

#### Parametrizando una expectativa

Se puede aproximar directamente la expectativa en (3.29) buscando una función  $\psi_t$  tal que

$$c_t^{-\eta} \varphi_2 = \beta \psi_t(g; k_{t-1}, k_{t-2}, z_t) \quad (3.20)$$

donde  $\psi_t$  es una función polinomial de valores contemporáneos de los shocks y retardados del stock de capital. Nótese que, respecto al método anterior,  $\psi_t$  es

asimilable a  $-W_t^2$ ; se precede de un signo negativo para que el polinomio que aproxima tenga un valor de estado estacionario positivo. Junto a ésta, el resto de ecuaciones relevantes para resolver el modelo son la restricción de recursos (3.2), y la ley de movimiento de la perturbación tecnológica. El error inducido dos periodos hacia adelante se puede obtener a partir de

$$\xi_{t+2,2\omega}^2 = \{-c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) + \beta c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)\} - \psi_t \quad (3.21)$$

Para encontrar la expresión adecuada del polinomio, se ha usado una estrategia recursiva. En primer lugar se ha probado con un polinomio de primer orden,

$$\psi_t = q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(k_{t-2}) + q_4 \log(z_t)\} \quad (3.22)$$

y a partir de aquí se ha ido aumentando el orden del polinomio, elemento a elemento hasta llegar al polinomio de cuarto orden,

$$\begin{aligned} \psi_t = & q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(k_{t-2}) + q_4 \log(z_t)\} \times \\ & \exp \{q_5 (\log(k_{t-1}))^2 + q_6 (\log(k_{t-2}))^2 + q_7 (\log(z_t))^2\} \times \quad (3.23) \\ & \exp \{q_8 (\log(k_{t-1}))(\log(k_{t-2})) + q_9 (\log(k_{t-1}))(\log(z_t))\} \times \\ & \exp \{q_{10} (\log(k_{t-2}))(\log(z_t)) + q_{11} (\log(z_t))^3\} \\ & \exp \{q_{12} (\log(k_{t-1}))^2 (\log(z_t)) + q_{13} (\log(k_{t-2}))^2 (\log(z_t))\} \\ & \exp \{q_{14} (\log(z_t))^4 + q_{15} (\log(k_{t-1}))^2 (\log(z_t))^2\} \end{aligned}$$

Usando una muestra de 40,000 observaciones y un criterio de parada de 0.0001 para el vector de coeficientes del polinomio, se ha iterado en el sistema compuesto por (3.2), (3.20) y la ecuación correspondiente al polinomio elegido, tal como (3.22) o (3.23). Siguiendo la sugerencia del Capítulo 2, se han estimado condiciones iniciales para el vector  $q$  usando series temporales generadas con el método "casi" lineal utilizado en las secciones previas. Los valores de los coeficientes de los distintos polinomios de aproximación se presentan en la tabla 3.1, para cada conjunto de elementos en algunos polinomios seleccionados. El algoritmo aplicado está descrito en el Capítulo 1 y el Apéndice A.

Aunque fue posible introducir todos los términos de segundo orden, cruzados y al cuadrado, de los términos de tercer orden resultaron redundantes con la información contenida en otros regresores los correspondientes a:  $(\log(k_{t-1}))^3$ ,  $(\log(k_{t-2}))^3$ ,  $(\log(k_{t-1}))^2 \log(k_{t-2})$  y  $(\log(k_{t-2}))^2 \log(k_{t-1})$ . Respecto a los términos de cuarto orden, ocurrió lo mismo con:  $(\log(k_{t-1}))^4$ ,  $(\log(k_{t-2}))^4$ ,  $\log(k_{t-1}) \times (\log(z_t))^3$ ,  $\log(k_{t-2}) \times (\log(z_t))^3$ ,  $(\log(k_{t-1}))^3 \times \log(z_t)$ ,  $(\log(k_{t-1}))^3 \times \log(k_{t-2})$ ,  $(\log(k_{t-2}))^3 \times \log(k_{t-1})$ ,  $(\log(k_{t-1}))^2 \times (\log(k_{t-2}))^2$ , y con la variable  $(\log(k_{t-2}))^2 \times (\log(z_t))^2$  si el término  $(\log(k_{t-1}))^2 \times (\log(z_t))^2$  estaba ya incluido en el polinomio de aproximación.

Nótese que cada uno de los polinomios  $\psi_t$  presentados en la tabla 3.1 aproxima la función  $E_t [-c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) + \beta c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)]$  en

el sentido de minimizar el error cuadrático medio de la diferencia que las separa, con una precisión de cuatro decimales en el punto fijo. No obstante, esto no garantiza que la solución resultante para el consumo y el capital genere un equilibrio que verifique las restricciones que impone la racionalidad de expectativas, por lo que es necesario algún criterio que nos permita discriminar el orden adecuado de la aproximación que verifique esta propiedad.

Para *refinar* el polinomio de aproximación de la solución por Parametrización se puede utilizar directamente el contraste de den Haan-Marcet sobre el error a horizonte dos, midiendo el valor de la correlación entre  $I_t$  y  $\xi_{t+2,2\psi}^2$ , en (3.21), y además verificar si la estructura media móvil estimada usando series generadas con este método es cercana a la que se obtenía de manera analítica al operar con las condiciones de primer orden y una adecuada definición de los errores de previsión a horizonte uno.

Así, la estimación por máxima verosimilitud exacta del parámetro media móvil para cada polinomio se muestra también en la tabla 3.1, donde el parámetro presentado es el promedio de 250 simulaciones de tamaño  $T=3000$ . En cada simulación, para una realización común de la perturbación tecnológica, se estimó el parámetro usando cada polinomio. En la tabla también se ofrece la desviación típica de la media del coeficiente estimado en el caso de cada polinomio. Todas las soluciones detectan la estructura, y estiman un valor cercano para el parámetro media móvil, aunque son distintas desde el punto de vista estadístico. Este criterio no permite discriminar entre polinomios alternativos.

Si se atiende al contraste de den Haan-Marcet, y se aplica al error  $\xi_{t+2,2\psi}^2$ , el porcentaje de rechazos oscila entre el 20% y el 30% para los polinomios que se presentan en la tabla 3.1. Este resultado es llamativo, y posiblemente indica que no se ha aplicado bien el contraste en den Haan y Marcet (1994), y haría falta alguna modificación para acomodar el error de previsión a horizonte dos. Al faltar la guía del test para refinar la solución, es necesario obtener los distintos errores de previsión a horizonte uno asociados.

Al haber resuelto parametrizando directamente la expectativa en (3.20), no es posible recuperar los errores de predicción un periodo hacia adelante, dado que se necesitaría una expresión polinómica para la expectativa (3.6). Obviamente, nada impide resolver el modelo añadiendo una versión parametrizada de (3.6), con lo que el problema quedaría resuelto, aunque habría que parametrizar dos expectativas a la vez. Dado que permite analizar una mayor cantidad de información acerca de la estructura estocástica del modelo, se pasará a parametrizar dos expectativas en la siguiente sección.

### Parametrizando dos expectativas

Se puede añadir al sistema anterior, formado por la ecuación de Euler aproximada por  $\psi_t$ , la restricción de recursos, y la ley de movimiento de la tecnología, una nueva ecuación que permita recuperar los errores de predicción a horizonte uno. Si se parametriza además de la expectativa a horizonte dos, la expectativa a horizonte uno dada por (3.6), y se aproxima por un polinomio denotado por

Tabla 3.1: Identificación de expectativas. Coeficientes de distintos polinomios de aproximación con el método de Parametrización de Expectativas, partiendo de la misma realización del proceso estocástico exógeno  $z_t$ , de tamaño  $T=40,000$ , y con condiciones iniciales estimadas a partir de la aproximación lineal en logaritmos. El parámetro media móvil es la media de 250 simulaciones de tamaño  $T=3000$ , generadas con cada polinomio.

Polinomios de aproximación para la expectativa a horizonte dos							
constante	1.7261	24.9661	27.8405	0.7026	0.6784	0.7055	0.7011
$\log(k_{t-1})$	0.3650	-1.1084	-8.7915	1.4557	2.0423	2.1953	2.2466
$\log(k_{t-2})$	-1.1218	-1.1218	6.5008	-1.7183	-2.2857	-2.4586	-2.5064
$\log(z_t)$	-0.5806	-0.5803	-0.5817	-2.6158	-2.6684	26.2381	27.1651
$(\log(k_{t-1}))^2$	—	0.2031	1.2641	-5.4776	-7.1110	-7.5786	-7.8783
$(\log(k_{t-2}))^2$	—	—	-1.0526	-5.2458	-6.7203	-7.1455	-7.4315
$(\log(z_t))^2$	—	—	-0.1834	-0.3846	-0.4023	-0.4006	-0.2971
$(\log(k_{t-1}))(\log(k_{t-2}))$	—	—	—	10.6554	13.7607	14.6561	15.2412
$(\log(k_{t-1}))(\log(z_t))$	—	—	—	0.5609	—	55.9651	53.6265
$(\log(k_{t-2}))(\log(z_t))$	—	—	—	—	-0.3606	-71.3340	-69.5082
$(\log(z_t))^3$	—	—	—	—	—	0.5602	0.3088
$(\log(k_{t-1}))^2(\log(z_t))$	—	—	—	—	—	-7.5786	-7.2495
$(\log(k_{t-2}))^2(\log(z_t))$	—	—	—	—	—	9.7769	9.5188
$(\log(z_t))^4$	—	—	—	—	—	—	-32.3615
Parámetro media móvil de orden uno: $\theta$							
Media( $\theta$ )	0.8062	0.8054	0.8057	0.8052	0.8049	0.8050	0.8054
$\sigma_\theta/\sqrt{250}$	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003

$\psi_t^*$ , entonces,

$$\psi_t^* \approx -E_t [c_t^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)] \quad (3.24)$$

y se puede definir el error de previsión a horizonte uno asociado,

$$\xi_{t+1,1,\psi^*}^1 = \{-c_t^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) + \beta c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)\} - \psi_t^* \quad (3.25)$$

con lo que se puede *refinar* la solución obligando a que las sendas de consumo y capital resultantes sean tales que el ruido  $\xi_{t+1,1,\psi^*}^1$  sea blanco. Entonces, usando (3.24) y la aproximación en (3.20), se tiene una relación paralela a la descrita en (3.8), a saber,

$$\xi_{t,2,\psi^*}^1 = \psi_t^* - \psi_{t-1} \quad (3.26)$$

que proporciona el otro error a horizonte uno. Esta última condición garantiza la consistencia entre los dos polinomios usados, y proporciona una vía para determinar de manera única los coeficientes asociados a cada polinomio. Entonces, se puede usar el contraste de den Haan-Marcet para *refinar* ambos polinomios.

El proceso para parametrizar las dos expectativas a la vez es, como en todas las soluciones PEA de los Capítulos previos, un caso particular del algoritmo delineado en el Apéndice A. En Marcet y Lorenzoni (1999) también se resuelve un modelo con dos expectativas, con hábitos en el consumo. A continuación se detallará para el caso del modelo analizado en esta sección el procedimiento seguido:

1. Elegir un orden para cada uno de los polinomios. Se parte de dos polinomios de primer orden:

$$\psi_t = q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(k_{t-2}) + q_4 \log(z_t)\} \quad (3.27)$$

$$\psi_t^* = q_1^* \exp \{q_2^* \log(k_{t-1}) + q_3^* \log(k_{t-2}) + q_4^* \log(z_t)\} \quad (3.28)$$

con lo que  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*]$ .

2. Condiciones iniciales: se estiman a partir de la aproximación lineal en logaritmos. Para ello, a partir de la solución obtenida para la descomposición de autovalores y autovectores, tomando la serie temporal para el capital,  $\hat{k}_t$ , y las dos expectativas  $W_{1t}$  y  $W_{2t}$ ,

- se calculan  $\hat{\psi}_t = -W_{2t}$  y  $\hat{\psi}_t^* = -W_{1t}$ ,
- se estiman las regresiones,

$$\begin{aligned} \log(\hat{\psi}_t) &= \varrho_1 + \varrho_2 \log(\hat{k}_{t-1}) + \varrho_3 \log(\hat{k}_{t-2}) + \varrho_4 \log(z_t) + \text{ruido} \\ \log(\hat{\psi}_t^*) &= \varrho_1^* + \varrho_2^* \log(\hat{k}_{t-1}) + \varrho_3^* \log(\hat{k}_{t-2}) + \varrho_4^* \log(z_t) + \text{ruido} \end{aligned}$$

y se tiene el vector  $\varrho = [\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_1^*, \varrho_2^*, \varrho_3^*, \varrho_4^*]$  estimado como condición inicial para  $q$ .

3. Se calculan  $\psi_t(q_1, q_2, q_3, q_4; k_{t-1}(q), k_{t-2}(q), z_t)$ ,  $\psi_t^*(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*; k_{t-1}(q), k_{t-2}(q), z_t)$ ,  $c_t(q)$ ,  $k_t(q)$ ,  $\xi_{t,1\psi}^1$  y  $\xi_{t,2\psi,\psi^*}^1$ , iterando en el conjunto de ecuaciones formado por la ecuación de Euler aproximada, (3.20), la restricción de recursos, (3.2), las funciones polinómicas, (3.27) y (3.28), y las definiciones de los ruidos, (3.25) y (3.26). Esto es,

$$\begin{aligned} \psi_t &= q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(k_{t-2}) + q_4 \log(z_t)\} \\ \psi_t^* &= q_1^* \exp \{q_2^* \log(k_{t-1}) + q_3^* \log(k_{t-2}) + q_4^* \log(z_t)\} \\ c_t &= \left\{ \frac{\beta \psi_t}{\varphi_2} \right\}^{-\frac{1}{\eta}} \\ k_t &= \frac{1}{\varphi_2} [-c_t + z_t k_{t-2}^\alpha + \varphi_1(1-\delta)k_{t-2} - (\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta))k_{t-1}] \\ \xi_{t,2\psi,\psi^*}^1 &= \psi_t^* - \psi_{t-1} \\ \xi_{t,1\psi}^1 &= -c_{t-1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta)) + \beta c_t^{-\eta}(\alpha z_t k_{t-2}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1) - \psi_{t-1}^* \end{aligned}$$

4. Sean

$$\phi_t = -c_{t+1}^{-\eta}(q)(\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta)) + \beta c_{t+2}^{-\eta}(q) (\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1}(q) + (1-\delta)\varphi_1)$$

y

$$\phi_t^* = -c_t^{-\eta}(q)(\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta)) + \beta c_{t+1}^{-\eta}(q) (\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1}(q) + (1-\delta)\varphi_1)$$

las funciones cuyas esperanzas condicionales aproximan los polinomios  $\psi_t(q_1, q_2, q_3, q_4)$  y  $\psi_t^*(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$  respectivamente. Para minimizar el

error cuadrático medio de las distancias  $E_t[\phi_t - \psi_t]^2$  y  $E_t[\phi_t^* - \psi_t^*]^2$  se usa el algoritmo Gauss-Newton descrito en el Apéndice A, con la particularidad de que ahora se estiman dos regresiones no lineales,

$$\begin{aligned}\phi_t - \psi_t &= \varrho_\phi^T \frac{\partial \psi_t}{\partial \{q_1, q_2, q_3, q_4\}} + \text{ruido} \\ \phi_t^* - \psi_t^* &= \frac{\varrho_{\phi^*}^T \frac{\partial \psi_t^*}{\partial \{q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*\}}}{\partial \{q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*\}} + \text{ruido}^*\end{aligned}$$

y se actualizan los parámetros en la iteración  $i$ , según

$$\begin{aligned}[q_1, q_2, q_3, q_4]_i &= [q_1, q_2, q_3, q_4]_{i-1} + \lambda_q \varrho_\phi \\ [q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*]_i &= [q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*]_{i-1} + \lambda_q \varrho_{\phi^*}\end{aligned}$$

donde, en todos los casos,  $\lambda_q$  se tomó igual a la unidad. El nuevo vector

$$q_i = \{[q_1, q_2, q_3, q_4]_i, [q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*]_i\}$$

se utiliza para volver a iniciar todo el proceso, hasta que

$$\|q_i - q_{i-1}\| < 0.0001$$

Al final del proceso se aplica el contraste de den Haan-Marcet a las soluciones generadas con el  $q$  final y un número suficiente de realizaciones de  $z_t$ , y en caso de que no resulte adecuado el orden escogido para los polinomios, se procede a aumentarlos hasta que la solución sea apropiada.

En la tabla 3.2 se pueden ver los resultados del proceso descrito. Dos polinomios de primer orden son suficientes, a juzgar por los resultados para el contraste de den Haan-Marcet. Se intentó aumentar el orden del polinomio  $\psi_t$ , siguiendo las líneas de lo conseguido en la tabla 3.1, pero no fue posible. Introduciendo uno a uno los términos al cuadrado y cruzados, se producían redundancias, en forma de singularidades en las regresiones no lineales del procedimiento de Gauss-Newton, con lo que las variables correspondientes a términos de segundo orden no aportan nueva información, y por tanto se pueden evitar. En cambio sí fue posible introducir términos de segundo orden en el polinomio  $\psi_t^*$ , tal y como se puede ver en la tabla 3.2. Se pudieron introducir todos los términos que aparecen en la tabla, aunque no fue posible hacerlo con el término  $(\log(k_t - 2))^2$ . No obstante, el introducir nuevos términos no supone mejoras en el poder explicativo del polinomio: el polinomio  $\psi_t^*$  con siete términos no es distinguible en lo referente al contraste de den Haan-Marcet, e incluso el de ocho términos presenta un comportamiento algo peor.

Así pues, al parametrizar la expectativa a horizonte un periodo se ha podido usar el contraste de den Haan-Marcet como criterio para *refinar* la aproximación, y elegir el orden apropiado de los dos polinomios. Dado el coste en términos de tiempo que conlleva *refinar* los dos polinomios a la vez, como en 3.2, o incluso

Tabla 3.2: Identificación de expectativas. Dos expectativas parametrizadas. Coeficientes de los polinomios de aproximación [T=40,000, condiciones iniciales estimadas a partir de la aproximación lineal en logaritmos] y contrastes de racionalidad de la solución: test de den Haan-Marcet para los errores de predicción a horizonte uno, y estimación de la estructura media móvil en el error a horizonte mayor que uno [250 simulaciones, T=3000].

Polinomios de aproximación						
	$\psi_t$	$\psi_t^*$	$\psi_t$	$\psi_t^*$	$\psi_t$	$\psi_t^*$
constante	1.7994	2.2678	1.7461	1.8723	1.6955	2.3715
$\log(k_{t-1})$	0.3396	-1.1830	0.3657	0.2413	0.3682	-1.5328
$\log(k_{t-2})$	-1.1078	0.3511	-1.1258	-0.9759	-1.1203	0.6590
$\log(z_t)$	-0.5604	-0.4149	-0.5674	-0.4202	-0.5626	0.0156
$(\log(k_{t-1}))^2$	—	—	—	-0.3829	—	0.0878
$(\log(k_{t-1}))(\log(k_{t-2}))$	—	—	—	0.3706	—	-0.0797
$(\log(z_t))^2$	—	—	—	0.0335	—	0.0988
$(\log(k_{t-1}))(\log(z_t))$	—	—	—	—	—	-0.1188
Parámetro media móvil de orden uno: $\theta$						
Media( $\theta$ )	0.8130		0.8102		0.8086	
$\sigma_\theta/\sqrt{250}$	0.0003		0.0003		0.0003	
Contraste de den Haan-Marcet. $I_t = [1, k_t, k_{t-1}, k_{t-2}, \log(z_t), \log(z_{t-1}), \log(z_{t-2})]$ Cola inferior (Inf) y superior (Sup) al 5%						
	Inf	Sup	Inf	Sup	Inf	Sup
$\xi_{t,1,\psi^*}$	3.8	5.7	4.3	4.8	3.9	7.5
$\xi_{t,2,\psi,\psi^*}^1$	4.4	5.2	4.3	5.3	4.3	6.7

sólo el polinomio de la tabla 3.1, una manera alternativa de resolver habría sido conjugando los dos métodos de solución expuestos, la descomposición de autovalores y autovectores y PEA, de manera que se parametrizaría la expectativa a horizonte dos, y se añadiría una nueva variable al sistema que representase la expectativa a horizonte uno, y que facilita la recuperación de los errores de predicción a horizonte uno, que permiten decidir cuál sería el orden del polinomio de aproximación correcto. Así se evita el tener que iterar conjuntamente sobre los coeficientes de dos polinomios distintos. Se iteraría sólo sobre  $\psi_t$ , y se resolvería la expectativa a horizonte uno como una variable aleatoria más. Esta sería una manera de *refinar* el procedimiento de descomposición de autovalores y autovectores.

### 3.3 Descomposición de expectativas

En la sección anterior se ha discutido la identificación del error de previsión dos periodos hacia adelante a través de una restricción, en forma de una estructura media móvil de orden uno, sobre los errores de previsión un periodo hacia adelante. La identificación se hace posible porque la racionalidad de expectativas implica dicha estructura cuando los agentes realizan expectativas *de una misma función* a distintos horizontes.

Se ha visto cómo, tanto para el método basado en la descomposición de autovalores y autovectores, como para el método de Parametrización de Expectativas fue importante utilizar variables adicionales auxiliares, que representaban ex-

pectativas a horizonte un periodo, y que permitían explotar de una manera más completa la estructura estocástica del modelo y las propiedades que la racionalidad de expectativas implica.

Relacionada con esta discusión, surge de manera natural la siguiente cuestión: ¿se pueden identificar de manera separada errores de previsión asociados a expectativas *sobre distintas funciones* que aparezcan en una misma ecuación? Esto es, la expectativa a horizonte dos de la ecuación (3.29), se puede descomponer en la suma de dos esperanzas condicionales a distintos horizontes,

$$\begin{aligned} c_t^{-\eta} &= -\beta E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \beta c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)] \\ &= -\beta E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta))] + \beta^2 E_t [c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

El primer sumando es una expectativa realizada usando el conjunto de información disponible en  $t$  sobre una función de variables datadas en  $t + 1$ ,  $c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta))$ , mientras que el segundo sumando es una expectativa hecha con información hasta  $t$  y horizonte  $t + 2$ ,  $c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)$ . Cada expectativa tendrá asociado un error de previsión, uno con estructura teórica ruido blanco, y el otro con estructura media móvil de orden uno.

En este caso surge un problema de identificación, en torno a la cuestión de si es posible *recuperar los dos errores de manera independiente*, en orden a analizar la estructura estocástica del modelo de una manera más exhaustiva, y también en cómo descomponer el error de aproximación de la solución numérica que se implemente, para poder mejorar su exactitud.

### 3.3.1 Solución usando la descomposición de autovalores y autovectores

A partir de (3.29) si se define cada expectativa como una nueva variable más su error de predicción asociado, se tiene que

$$c_t^{-\eta} \varphi_2 = -\beta \omega_t^1 + \beta^2 W_t^2 \quad (3.30)$$

donde la expectativa  $\omega_t^1$  y el error de previsión un periodo hacia delante asociado se definen como,

$$\omega_t^1 = E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta))] \quad (3.31)$$

$$\xi_{\omega_t}^1 = c_t^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)) - \omega_{t-1}^1 \quad (3.32)$$

y la expectativa  $W_t^2$ , a horizonte dos, se denota por,

$$W_t^2 = E_t [c_{t+2}^{-\eta}(\alpha z_{t+2} k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)]$$

Si además se define una expectativa sobre la misma función de las variables de la economía, pero a horizonte uno, como

$$W_t^1 = E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1)]$$

entonces se pueden escribir los siguientes errores de previsión: por una parte el error de previsión intermedio un periodo hacia delante asociado a la expectativa a horizonte dos

$$\begin{aligned}\xi_{W_t,2}^1 &= E_t [c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1)] - W_{t-1}^2 \\ &= W_t^1 - W_{t-1}^2\end{aligned}\quad (3.33)$$

y por otra el error de previsión a horizonte uno asociado a la expectativa realizada a horizonte uno sobre la función  $c_t^{-\eta}(\alpha z_t k_{t-2}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1)$ ,

$$\xi_{W_t,1}^1 = c_t^{-\eta}(\alpha z_t k_{t-2}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1) - W_{t-1}^1 \quad (3.34)$$

y entonces, de manera similar a lo hecho con (3.9) se tiene que el error de predicción dos periodos hacia adelante asociado a  $W_t^2$  toma la forma,

$$\begin{aligned}\xi_{W_{t+1},2}^2 &= c_{t+1}^{-\eta}(\alpha z_{t+1} k_{t-1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1) - W_{t-1}^2 \\ &= \xi_{W_{t+1},1}^1 + W_t^1 - W_{t-1}^2 \\ &= \xi_{W_{t+1},1}^1 + \xi_{W_t,2}^1\end{aligned}\quad (3.35)$$

Nótese que la introducción de los distintos errores de previsión  $\xi_{W_t,1}^1$ ,  $\xi_{W_t,2}^1$  y  $\xi_{W_{t+1},2}^2$  es paralela a la que se hizo en la sección de identificación de estructuras de medias móviles, aunque las expresiones analíticas son ligeramente distintas, debido a la distinta forma de definir las expectativas. La cuestión que se quiere resaltar es que ahora se tiene el mismo número de variables y ecuaciones que antes [más la nueva expectativa y la ecuación correspondiente definiendo el error asociado], pero hay que identificar un nuevo error de previsión,  $\xi_{\omega_t}^1$ , para lo que hace falta una ecuación adicional.

El análisis de estabilidad de la versión lineal en logaritmos del modelo permitirá identificar todos los errores de expectativas.

### Estado estacionario determinista

Los valores de estado estacionario del capital y el consumo de la versión actual del modelo son los mismos que los presentados en la sección anterior. Respecto a las expectativas, se tiene ahora que,

$$\begin{aligned}W_{ss}^1 = W_{ss}^2 &= c_{ss}^{-\eta}(\alpha k_{ss}^{\alpha-1} + (1-\delta)\varphi_1) \\ \omega_{ss}^1 &= c_{ss}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1-\delta))\end{aligned}$$

Numéricamente, para los valores paramétricos seleccionados, que vuelven a ser  $\eta = 1.5$ ,  $\alpha = 0.36$ ,  $\varphi_1 = 0.5$ ,  $\varphi_2 = 0.5$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $\rho_z = 0.95$ , el estado estacionario resultante es:  $c_{ss} = 2.7513$ ,  $k_{ss} = 37.6914$ ,  $W_{ss}^1 = W_{ss}^2 = 0.1146$ ,  $\omega_{ss}^1 = 0.0027$ ,  $z_{ss} = 1$ .

### Sistema lineal en logaritmos

El sistema a linealizar en desviaciones logarítmicas respecto al estado estacionario, está compuesto por las ecuaciones: i. la ecuación de Euler (3.30), ii. la restricción global de recursos (3.2), iii. la ley de movimiento de la perturbación tecnológica, iv. las definiciones de los errores de expectativas (3.32), (3.33) y (3.34). El error (3.35), por su parte, se determina a partir de (3.34) y (3.33) usando el resultado de que sigue una estructura media móvil de orden uno.

A partir del sistema (3.10), se tiene ahora que

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= [\tilde{c}_{t+1}, \tilde{k}_{t+1}, \tilde{\omega}_{t+1}^1, \tilde{W}_{t+1}^1, \tilde{W}_{t+1}^2, \tilde{z}_{t+1}, \tilde{k}_t]^T, \\ \varepsilon_{t+1} &= [\tilde{\varepsilon}_{t+1}], \\ \eta_{t+1} &= [\xi_{\omega_{t+1}}^1, \xi_{W_{t+1,1}}^1, \xi_{W_{t+1,2}}^1]^T \end{aligned}$$

y el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  denota desviaciones logarítmicas respecto del estado estacionario. Entonces,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{1,1} & 0 & \beta\omega_{ss} & 0 & -\beta^2 W_{ss} & 0 & 0 \\ -c_{ss} & -\varphi_2 k_{ss} & 0 & 0 & 0 & k_{ss}^\alpha & \Gamma_0^{2,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_0^{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_0^{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_0^{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{1,1} &= -\eta c_{ss}^{-\eta} \varphi_2, \\ \Gamma_0^{2,7} &= -k_{ss}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)), \\ \Gamma_0^{4,1} &= -\eta c_{ss}^{-\eta}(\varphi_1 - \varphi_2(1 - \delta)), \\ \Gamma_0^{6,1} &= -\eta c_{ss}^{-\eta}(\alpha k_{ss}^{\alpha-1} + (1 - \delta)\varphi_1), \\ \Gamma_0^{6,6} &= \alpha c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

y además,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_1^{2,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{ss} & 0 & 0 & \Gamma_1^{6,7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,7}^1 &= -\alpha k_{ss}^\alpha - \varphi_1(1 - \delta)k_{ss}, \\ \Gamma_{6,7}^1 &= \alpha(1 - \alpha)c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

y,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Descomposiciones QZ

La presencia de dos errores de previsión distintos en una misma ecuación provoca que la matriz  $\Gamma_0$  no sea invertible, con lo que no se pueden obtener las condiciones de estabilidad de la manera que se ha descrito en el Capítulo 1. Las filas tercera, cuarta y sexta de la matriz  $\Gamma_0$ , que se corresponden con las ecuaciones que definen  $\xi_{\omega_t}^1$ ,  $\xi_{\omega_t,2}^1$  y  $z_t$ , no son linealmente independientes, con lo que el determinante de la matriz es nulo, lo que evidencia que hay un problema de identificación entre los dos errores de previsión a horizonte uno. Como se verá a continuación, el análisis de estabilidad del sistema completo permitirá identificar por separado todos los errores de previsión.

En primer lugar, para resolver el sistema autoregresivo de primer orden (3.10), es necesario llevar a cabo una descomposición QZ, que consiste en buscar aquellas matrices Q, Z,  $\Lambda$  y  $\Omega$  tales que

$$\Gamma_0 = Q' \Lambda Z', \quad \Gamma_1 = Q' \Omega Z', \quad Q' Q = Z' Z = I$$

A modo de notación se ordenan las matrices Q y Z de tal manera que todos los ceros de  $\Lambda$  se ubiquen en la esquina inferior derecha y tal que los restantes ratios de elementos de la diagonal de  $\frac{\omega_{ii}}{\lambda_{ii}}$  en  $\Omega$  y  $\Lambda$  sean no decrecientes en valor absoluto al moverse hacia abajo por la diagonal principal. Estos ratios son los *autovalores generalizados* del par  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ . Si se premultiplica el sistema (3.10) por Q y se define  $w_t = Z' u_t$ , se tiene que

$$\Lambda w_t = \Omega w_{t-1} + Q (\Psi z_t + \Pi \eta_t), \quad (3.36)$$

y si se particiona el conjunto de autovalores generalizados entre aquellos mayores y menores que uno, se llega a que

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,t-1} \\ w_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{1\bullet} \\ Q_{2\bullet} \end{pmatrix} (\Psi \varepsilon_t + \Pi \eta_t) \quad (3.37)$$

donde el segundo bloque de ecuaciones se corresponde con los autovalores *inestables*. Alguno de los elementos diagonales de  $\Lambda_{22}$ , pero no de  $\Lambda_{11}$ , pueden ser cero.

Dado que el bloque inferior de (3.37) se corresponde con los autovalores *inestables*, se debe resolver hacia el futuro, lo que hace que  $w_{2t}$  dependa de toda la senda futura de  $z_t$  y  $\eta_t$ . Por tanto,  $E_t(w_{2t+s}) = 0$  para todo  $s > 0$ , y las condiciones de estabilidad se convierten en

$$w_{2t} = Z'_{2\bullet} u_t = 0, \forall t \quad (3.38)$$

donde  $Z'_{2\bullet}$  denota la apropiada submatriz de  $Z$ . Este conjunto de condiciones, llevadas a (3.37), implican una relación entre los errores de predicción racionales y las innovaciones estructurales

$$Q_{2\bullet} (\Psi \varepsilon_t + \Pi \eta_t) = 0 \Rightarrow Q_{2\bullet} \Psi \varepsilon_t = -Q_{2\bullet} \Pi \eta_t \quad (3.39)$$

que es una expresión paralela a (3.14) para el caso en que existía la inversa de  $\Gamma_0$ .

### Análisis de estabilidad

Para la parametrización de la sección anterior, se tienen los autovalores [generalizados]: 0.0000, 0.9500, 0.9572, 0.9809, 1.0298, 1.0553, y un autovalor infinito, que numéricamente toma el valor  $2.1488 \times 10^{18}$ , con lo que se tienen tres autovalores fuera del círculo unidad, y por tanto, tres condiciones de estabilidad asociadas,

$$Z'_{2\bullet} = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.3816 & -0.2708 & -0.2819 & -0.5010 & -0.4860 & -0.4631 \\ 0.0000 & 0.6112 & -0.2219 & -0.1989 & 0.3918 & -0.0567 & -0.6172 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.7061 & 0.7061 & 0.0000 & -0.0453 & 0.0305 \end{bmatrix}$$

y además, de (3.39),

$$\begin{bmatrix} 0.0632 \\ 0.0074 \\ -0.0002 \end{bmatrix} \varepsilon_t = \begin{bmatrix} 0.0096 & 0.4040 & 0.8124 \\ 0.0145 & 0.6068 & -0.5653 \\ -0.9997 & 0.0239 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\omega_t}^1 \\ \xi_{W_{t,1}}^1 \\ \xi_{W_{t,2}}^1 \end{bmatrix}$$

que implica una relación entre cada error de predicción a horizonte y la innovación en la perturbación estructural. La tercera ecuación es la correspondiente al autovalor infinito, y es la que permite tener perfectamente identificado el sistema. Por el lado determinista, implica una relación que permite distinguir entre las dos expectativas a horizonte uno, del tipo

$$\tilde{\omega}_t^1 + \tilde{W}_t^1 = \phi_z \tilde{z}_t + \phi_k \tilde{k}_{t-1}$$

donde  $\phi_z$  y  $\phi_k$  son combinación de los coeficientes de la condición de estabilidad. Por último, de la conocida relación de media móvil se recupera el error de predicción a horizonte dos.

### Simulación

Para generar series temporales con este método se usan las ecuaciones (3.30), (3.2) y las tres condiciones de estabilidad, dada la senda para el shock tecnológico. Se tienen así cinco ecuaciones y por incógnitas las variables:  $c_t$ ,  $k_t$ ,  $\omega_t^1$ ,  $W_t^1$  y  $W_t^2$ . Después se recuperan fácilmente los errores de previsión a horizonte uno a partir de sus definiciones, (3.32), (3.33) y (3.34), y el error a horizonte dos a partir de su relación con los anteriores. Los resultados del contraste de den Haan-Marcet para los errores de previsión a horizonte uno fueron de un porcentaje de rechazos del 4.4% en la cola superior y de un 3.6% en la cola inferior para los tres errores, sobre 250 simulaciones de tamaño  $T=3000$ , y los instrumentos habituales. Además se podría recuperar la *aproximación lineal* a los errores a un periodo a partir de la relación (3.39).

También se puede simular usando directamente el sistema en forma lineal en logaritmos (3.19), ya que aunque  $\Gamma_0$  no sea invertible, la matriz

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0 & -\Pi \\ P^s & 0 \end{bmatrix}$$

sí lo es.

### 3.3.2 Solución usando Parametrización de Expectativas

En este caso, de nuevo, es necesario parametrizar dos polinomios para realizar la aproximación. El algoritmo de solución es totalmente paralelo al realizado en el apartado anterior. Ahora, de (3.29) se tendría que,

$$\frac{1}{\beta} c_t^{-\eta} = \psi_t(q; k_{t-1}, k_{t-2}, z_t) - \beta \psi_t^*(q^*; k_{t-1}, k_{t-2}, z_t)$$

y se operaría tal y como se describió en la sección 3.2.4 sobre el vector  $\{q, q^*\}$ . No obstante, si se desea recuperar los *tres errores de previsión a horizonte uno*, es necesario parametrizar una expectativa adicional, con lo que habría que garantizar la consistencia de los coeficientes de tres polinomios a la vez. En este caso se revela como especialmente apropiado, si no se desea usar el método de aproximación de descomposición de autovalores y autovectores tal y como se ha definido en la sección previa, *refinar* tal procedimiento mediante la parametrización con un polinomio de una expectativa, la de horizonte dos, mientras que se añaden al sistema las dos expectativas a horizonte uno como nuevas variables aleatorias.

## 3.4 Conclusiones

En este Capítulo se han abordado dos cuestiones relacionadas. Por una parte se ha estudiado cómo reconocer las estructuras de medias móviles que aparecen en los errores de previsión asociados a expectativas con horizonte mayor que uno, y cómo estimarlas con el método de descomposición de autovalores y autovectores.

Las citadas estructuras univariantes permiten resolver más fácilmente usando el método de Parametrización de Expectativas, y se propone un algoritmo para hacerlo.

Por otra parte, se analiza cómo identificar de manera separada errores de previsión asociados a expectativas sobre distintas funciones presentes en una misma ecuación. Se muestra cómo la aparición de autovalores de módulo infinito permite afrontar este problema, para el cual el método de descomposición de autovalores y autovectores aparece cómo especialmente adecuado.



## Parte II

# Aplicación al Estudio de la Interacción de Reglas Monetarias y Fiscales



# Reglas Monetarias: Presentación

## Reglas simples de reacción

La evidencia empírica disponible apunta al hecho de que la política monetaria puramente exógena, esto es, aquella puesta en marcha al margen de la situación económica, con el objetivo de incidir sobre ella, ha contribuido relativamente poco a la varianza total del producto y de los precios, como por ejemplo señalan Leeper *et al.* (1996) para los Estados Unidos. La mayor parte de los movimientos observados en los instrumentos de política monetaria serían respuestas al estado de la economía, no desviaciones aleatorias (sorpresas) de la autoridad monetaria respecto a sus pautas habituales de comportamiento. En este sentido parece que la evidencia empírica encuentra poco relevante el efecto de las sorpresas monetarias, al menos en lo que se refiere a las variables no financieras.

La evidencia en los datos apoya la actual tendencia en las autoridades monetarias de seguir, básicamente, *reglas sencillas de reacción*, como se apunta, por ejemplo, en el informe del Banco Central Alemán de enero de 1998, Issing (1997), King (1997), Mishkin y Possen (1997), Mishkin (1999) o Taylor (1996, 1999, 1999b).

Reglas complejas para reaccionar a la situación económica, el *mirar a todo keynesiano*, o la discrecionalidad confesada, son actuaciones que van perdiendo, cada vez más, popularidad. La discrecionalidad implica un cambio cada periodo en el modo de actuar de la autoridad, mientras que una regla lleva a implementar periodo a periodo una política anunciada sobre la que hay un compromiso por parte de los encargados de llevarla a cabo.

Una *regla simple* se puede ver como una descripción explícita de cómo la autoridad monetaria fija sus instrumentos y a la vez un compromiso de moverlos ante determinados sucesos en la economía. Existe un gran consenso en la actualidad en definir la estabilidad de precios como el objetivo principal de la política monetaria, y en utilizar algún tipo de interés de intervención a corto como el instrumento más directo para alcanzar dicho objetivo. Obviamente, existen otras propuestas de objetivos e instrumentos en la literatura como por ejemplo McCallum y Salmon (1996), entre otros muchos.

No obstante, existe menos consenso en el cómo y cuándo se debería reaccio-

nar para contrarrestar desviaciones respecto al objetivo, esto es, en relación a la forma de la *regla de reacción*. En la práctica se dispone de muchas experiencias distintas en cuanto al uso de distintas reglas. Por ejemplo, Alemania, Francia, Italia y Suiza mantuvieron en determinados momentos del tiempo objetivos intermedios respecto a algún agregado monetario, y actualmente lo hace el Banco Central Europeo, mientras que otros como Bélgica, prefirieron el tipo de cambio. Durante los 1990's un número creciente de países adoptando objetivos directos de inflación. El primer país que comenzó a usar directamente el dato publicado de inflación como única medida de reacción de la autoridad monetaria fue Nueva Zelanda en marzo de 1990, y desde entonces Canadá, el Reino Unido, Suecia, Finlandia, Israel y España han adoptado la misma estrategia. En los Estados Unidos, la Reserva Federal considera explícitamente no sólo la inflación, sino también el nivel de desempleo. Desde diversos ámbitos se han propuesto, además, otro tipo de reglas, como la *regla de Taylor* [Taylor (1993, 1999, 1999b)], que persigue el objetivo dual de inflación y producto potencial, o reglas que tiene por objetivo el PIB nominal [McCallum (1997), McCallum y Nelson (1999), Canzoneri y Dellas (1995), Mankiw (1994)].

Dado que diferentes reglas puestas en práctica pueden tener implicaciones radicalmente distintas para las propiedades cíclicas de las variables relevantes [ver Kim (1997b) y Gavin y Kydland (1995)], es importante especificar adecuadamente las reglas de reacción de la autoridad monetaria. Esto tiene dos vertientes: una primera que sería detectar cuál ha sido y es el comportamiento efectivo de los distintos bancos centrales y gobiernos, y otra, la realización de análisis contrafactuales y la hipotética valoración de las reglas observadas junto con la propuesta de nuevas reglas, que serían mejores [*óptimas*] en algún sentido.

Existe mucha literatura empírica que trata de estimar las reglas que *efectivamente* han estado usando distintos bancos emisores. En relación a los resultados alcanzados por las distintas experiencias reales, se señala lo apropiado de usar *reglas simples*. Por ejemplo Taylor (1999b, 1994, 1993) y Bryant *et al.* (1993) para los Estados Unidos, Stuart (1996) y Haldane *et al.* (1996) para el Reino Unido, Davies *et al.* (1996) para Japón y Alemania, y también Mishkin y Posen (1997) y el Informe de enero de 1998 del Bundesbank y Clarida *et al.* (1998) para un conjunto más amplio de países. En Khoury (1990) se revisan un total de 42 estudios para Estados Unidos. A pesar de estos estudios, a la luz de los datos, es difícil escoger una estrategia monetaria frente a otra o decir que, en general, un tipo de regla es mejor que otro. Incluso detectar cuál ha sido el perfil de la política monetaria en un cierto país, en un determinado momento del tiempo, dista de ser evidente.

En el ámbito de los estudios que tratan de racionalizar este tipo de reglas estimadas y/o de analizar reglas que *hubieran sido* mejores, el debate tradicional se ha centrado en los siguientes temas,

- Se debe fijar la cantidad de dinero y dejar fluctuar el tipo de interés. Una variante: una tasa constante de expansión monetaria ( $g$ ). Otra: una función de reacción en la que  $g$  se ajuste en función del estado de la economía, haciendo que el stock de dinero crezca más rápidamente en

recesión y menos en una fase expansiva.

- Usar las condiciones del mercado monetario, aumentando el tipo de interés en tiempos de auge y reduciéndolo en recesiones, y dejando que la oferta de dinero fluctue. O bien, mover los niveles de reservas de los bancos [coeficientes de caja]. En caso de que se selecciona una única variable, el tipo de interés de corto plazo aparece como el preferido.
- Algún tipo de relación entre los dos instrumentos anteriores.

Dado un indicador de política, o varios, tales como la inflación, o el nivel de desempleo, el problema de elección de instrumento por parte de la autoridad monetaria consiste en decidir cómo realiza sus operaciones de mercado abierto, esto es, qué variable fija directamente comprando y vendiendo bonos, utilizando por tanto el valor de la misma como guía principal para realizar esa función de compra y venta.

De los trabajos empíricos y teóricos citados se puede colegir que la pregunta que permanece en debate es: ¿cuál es el mejor indicador que debería usar la autoridad monetaria para fijar sus tipos de interés con objeto de evitar desviaciones de la inflación realizada respecto al objetivo perseguido? Y, asociado a esto último, ¿cuál debería ser la intensidad de la respuesta ante este indicador?, en otras palabras, ¿cómo debería ser la forma precisa de la *función de reacción* de la autoridad monetaria?, y, ¿cuál debería ser el tamaño de los coeficientes de la regla?

Una regla relaciona los instrumentos de política con los objetivos, de manera cuando los objetivos toman valores distintos de los deseados, la autoridad monetaria reacciona moviendo sus instrumentos. Si se considera como variable instrumental el tipo de interés nominal, esta idea se puede recoger con una expresión del tipo,

$$i_t = F_i(\pi_t, m_t, g_t, y_t, N_t; \varepsilon_t; \beta_i)$$

donde  $i_t$  denota el tipo de interés nominal elegido como variable de intervención. Como objetivos se puede tener  $\pi_t$ , la tasa de inflación,  $m_t$  los saldos monetarios reales,  $g_t$  el crecimiento monetario, y/o el nivel de producción y empleo,  $y_t$  y  $N_t$  respectivamente. La autoridad monetaria respondería ante desviaciones de las variables objetivo de sus valores deseados, causadas por distintos shocks afectando a la economía, recogidos en el vector  $\varepsilon_t$ , y con la intensidad de respuesta ante cada evento dada por el vector de parámetros  $\beta_i$ .

El objetivo del Capítulo 4 de la Tesis Doctoral es ayudar a responder de manera cuantitativa a las anteriores preguntas. Hay al menos tres maneras de motivar un papel explícito para reglas monetarias del tipo anterior en modelos estándar de ciclo económico. Una, como en Aiyagari y Braun (1997), es obtener reglas de comportamiento de la autoridad a partir de problemas de Ramsey del tipo,

$$\max_{\beta_i, \hat{c}_t, \hat{m}_t, \hat{N}_t} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(c_t, m_t, N_t)$$

donde  $U$  es una función que resume las preferencias de las familias que pueblan la economía, y  $c_t$  el consumo que efectúan, sujeto a las condiciones de optimalidad de los problemas de los agentes privados (familias y empresas). Si la autoridad escogiera los  $\beta_i$ , dada una cierta forma funcional para la relación entre instrumentos y objetivos, se obtendrían reglas del tipo,

$$\beta_i = F_\beta(\varepsilon_t, \dots),$$

mientras que si decidiera elegir las sendas temporales de los instrumentos,  $i_t$  y  $g_t$ , tendría las relaciones,

$$i_t = F_i(\beta_i, \dots)$$

$$g_t = F_g(\beta_i, \dots)$$

Aiyagari y Braun (1997) consideran reglas de la última clase.

Una segunda manera consiste en la elección de los pesos en la regla que surgen de un problema de optimización de un gobierno que minimiza una función de pérdida en desviaciones de los objetivos de inflación y de producto,

$$\max_{\{\zeta_\pi, \zeta_y\} \text{ ó } \beta_i} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} (\zeta_\pi (\pi_t - \pi^*)^2 + \zeta_y (y_t - y^*)^2)$$

sujeto a la regla de política y a la estructura de la economía. En Rotemberg y Woodford (1999) se demuestra cómo, bajo ciertos supuestos muy generales, los criterios de decisión dados por ambos problemas son similares.

Una tercera forma, más estándar en la literatura, es imponer reglas *ad hoc* con base en estudios empíricos y en la práctica revelada por los bancos centrales. Por ejemplo, versiones lineales de la regla monetaria genérica antes expuesta, como las usadas en Leeper (1991, 1994), Sims (1994), Taylor (1999) o Christiano (1999),

$$i_t = \beta_{i0} + \beta_{i\pi}\pi_t + \beta_{ig}g_t + \beta_{iy}y_t + \varepsilon_i$$

Este tipo de reglas se pueden racionalizar en base a objetivos como el problema de Ramsey o alguna función de pérdida, y por ser las más habituales en los artículos relacionados, serán las que se analicen en el capítulo que sigue.

Desde no hace mucho ha quedado claro en diversos trabajos en el área que la respuesta a estas cuestiones no se puede hacer desde un punto de vista exclusivamente monetario, dados los límites sobre los niveles de deuda y déficit fiscales existentes, por ejemplo, en el área de la Unión Económica y Monetaria. Por tanto, además de una regla monetaria, se especificarán una clase de reglas fiscales explícitas para considerar cuestiones de coordinación de políticas y recoger las restricciones fiscales operantes sobre las reglas monetarias. La relación entre ambas políticas surge del comportamiento del sector privado, dado que son las familias las que compran los bonos emitidos por el gobierno, y por tanto prestan dinero al Estado, sólo si se les asegura que la deuda se devolverá. Por tanto, ambas políticas se ven forzadas a cooperar para asegurar la solvencia del gobierno.

## Antecedentes

En el ámbito de la teoría económica, el estudio de reglas sencillas se remonta al menos al trabajo de Poole (1970), donde se dió origen a una extensa discusión que llega hasta nuestros días referida a la elección del instrumento monetario óptimo desde el punto de vista de la autoridad encargada de utilizarlo. El análisis de Poole se realizó en modelos del tipo IS/LM, y en esa clase de modelos, aumentados con la inclusión de Curvas de Phillips y enriquecidos con el uso de expectativas racionales, es donde se enmarca una muy buena parte de la discusión actual [pueden verse los resúmenes de Clarida *et al.* (1999) y McCallum (1997), por ejemplo]. En el ámbito de los estudios basados en modelos dinámicos y estocásticos de equilibrio general, el análisis anterior ha evolucionado hacia dos tipos de consideraciones en la actualidad.

La primera es una extensión directa del trabajo de Poole, incluyendo una discusión explícita de las reglas en modelos de optimización con desequilibrios, como Henderson y Kim (1997). Una segunda rama de investigación se centra en tener en cuenta el hecho de que la política monetaria está condicionada por la política fiscal en curso, como en Sargent y Wallace (1981), Leeper (1991, 1993), Novales (1992), Sims (1994), Kim (1997), Schmitt-Grohé y Uribe (1997) o Woodford (1995, 1996). En estos trabajos se estudia la financiación de los shocks al valor real de la deuda pública. Su análisis deja claro que el nivel medio de ingresos por señoreaje es irrelevante para la cuestión de si los shocks son monetizados o no: incluso cuando, en media, la deuda del gobierno se ve respaldada completamente por impuestos directos, las innovaciones a la deuda se deben monetizar sistemática y completamente: es necesario observar si los shocks a la deuda real del gobierno implican mayores superávits netos de intereses o creación de dinero. Por tanto es importante tener en consideración si es la política fiscal o la monetaria la encargada de financiar las desviaciones de la deuda en términos reales de su senda de largo plazo.

En el corto plazo sería posible escoger por separado las políticas, pero en el largo plazo la elección podría ser infactible dado que el valor real de la deuda emitida por el gobierno (de la que es propietario el sector privado, u otros agentes públicos) debe ser consistente con los ingresos fiscales y los gastos del gobierno a lo largo del tiempo, no sólo en el presente, sino también en el futuro. La relación entre deuda corriente e ingresos fiscales futuros debe verificar la *restricción presupuestaria intertemporal* del gobierno.

Cuando una política cambia y el cambio lleva a un incumplimiento de la restricción presupuestaria, la otra política debe variar para hacer que la identidad se mantenga. Cuando la política monetaria se centra en mantener constante, por ejemplo, el tipo de interés de corto plazo, entonces, la única manera de hacer frente a perturbaciones que aumenten el valor real de la deuda pública es a través de aumentos de los impuestos directos o mediante recortes de gastos. En palabras de Sargent y Wallace (1981, página 7): *which authority moves first, the monetary authority or the fiscal authority. In other words, who imposes discipline on whom?*

Un modelo de equilibrio general bajo expectativas racionales que recoja as-

pectos dinámicos y estocásticos permite integrar todas estas piezas en un marco coherente: genera predicciones sobre los efectos y los potenciales beneficios de una determinada política (reacción) sobre la dinámica de la economía, que se puede analizar usando como criterio el bienestar de la sociedad. Y lo que es más, los efectos de cambios en las políticas se pueden estudiar sin estar sujetos a la crítica de Lucas.

## Capítulo 4

# Análisis de la Interacción de Reglas Monetarias y Fiscales

### 4.1 Introducción

Se trabajará aquí en un contexto en que se ponen en relación, por un lado, el tipo de trabajos basados en reformulaciones del modelo IS/LM en contextos en que los agentes optimizan y se comparan políticas usando criterios de volatilidad de la inflación y el producto, como en Henderson y Kim (1997) [en un modelo parecido Rotemberg y Woodford (1999) demuestran cómo este tipo de criterios son similares a un objetivo de bienestar por parte de la autoridad monetaria] y, por otro lado, un conjunto de artículos que enfatiza el importante papel de la coordinación de políticas monetarias y fiscales, como en Leeper (1991), Sims (1994), Woodford (1996) o Kim (1997a).

En este marco, usando un modelo que extiende el de Kim (1997a) en diversos aspectos relevantes, se pone especial énfasis en la coordinación de políticas. Distintas reglas monetarias tienen distintas implicaciones para las relaciones entre las autoridades encargadas del cumplimiento de la restricción presupuestaria del gobierno. Así, se valoran varias reglas que se encuentran en la discusión actual referente al diseño de política, tanto en ámbitos académicos como de implementación práctica en los bancos centrales: objetivo directo de inflación frente a objetivo intermedio de crecimiento monetario, y tipo de interés constante frente a tasa de crecimiento monetario constante. Se analiza cómo la coordinación con la política fiscal restringe a la regla monetaria, y cómo esto impone restricciones sobre los valores preferidos de los coeficientes en la regla monetaria.

El resto del Capítulo está organizado como sigue. En la sección 4.2 se presenta el modelo en el marco del que se hará la discusión. La sección 4.3 discute

las implicaciones de distintas reglas de política monetaria para la existencia y la unicidad del equilibrio resultante y la coordinación de políticas monetarias y fiscales. En la sección 4.4 se apuntan las conclusiones más relevantes del Capítulo.

## 4.2 Un modelo muy neutral

### 4.2.1 El modelo

El modelo descrito en esta sección es una versión modificada del modelo de crecimiento de Sidrauski (1967), con producción, como en Novales (1992), diversas perturbaciones estocásticas, como en Kim (1997a), y determinadas reglas monetarias *ad hoc* para las autoridades monetaria y fiscal, como en Aiyagari y Gertler (1985), Leeper (1991, 1993), Sims (1994) o Christiano (1999).

La economía está compuesta por un continuo de familias idénticas con vida infinita, y las autoridades monetaria y fiscal. Las preferencias de la familia representativa sobre el único bien de consumo en la economía y las tenencias de saldos reales vienen dadas por,

$$E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} (U(c_t) + \gamma_t V(\frac{M_t}{P_t})) \quad (4.1)$$

donde  $\gamma_t$  es un shock en preferencias independiente e idénticamente distribuido que se traduce en un shock a la demanda de dinero,  $M_t$  denota el stock nominal de dinero en manos de la familia al comienzo del periodo  $t$ ,  $P_t$  el nivel de precios y  $c_t$  el consumo que realiza entre el periodo  $t$  y el  $t + 1$ . Se está suponiendo que las preferencias dependen del dinero sólo a través de los saldos reales,  $m_t \equiv \frac{M_t}{P_t}$ , y que son separables en el tiempo, así como separables entre el bien de consumo y los saldos reales de dinero<sup>1</sup>.

El agente representativo utiliza su stock acumulado de capital,  $k_{t-1}$ , para generar el producto mediante una tecnología de producción estocástica,  $y_t = f(z_t, k_{t-1})$ , donde  $z_t$  denota un factor aleatorio asociado a la tecnología.

Cada familia elige aquellas sendas de  $c_t$ ,  $k_t$ ,  $M_t$  y bonos,  $B_t$ , que dados  $P_t$ ,  $\gamma_t$  y el tipo nominal de interés,  $I_t \equiv 1 + i_t$ , maximizan (4.1) sujeta a su restricción

<sup>1</sup>Introducir el dinero en la función de utilidad, como otras formas de motivar el dinero en este tipo de economías trata de captar el hecho de que las tenencias del medio de cambio facilitan las transacciones de los agentes. En Feenstra (1986) se demuestra cómo, bajo un conjunto de supuestos muy general, esta forma de introducir el dinero es equivalente a introducirlo a través de una tecnología de *shopping time*. Si los agentes obtienen utilidad sólo de su consumo y su ocio, pero la adquisición de bienes de consumo requiere dedicar una parte del tiempo disponible a *shopping*, se reduce el tiempo que pueden dedicar a ocio o empleo. Sin embargo, en una economía monetaria, el tiempo dedicado a comprar está relacionado inversamente con las disponibilidades monetarias de los agentes, y si el *shopping time* está relacionado inversamente con el consumo y los saldos reales, se puede demostrar que la sustitución en la función de utilidad da lugar a una función de utilidad indirecta en la que aparecen los saldos reales en dinero.

presupuestaria,

$$c_t + k_t + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} = y_t + (1 - \delta)k_{t-1} + I_t \frac{B_{t-1}}{P_t} - \tau_t \quad (4.2)$$

El gobierno se comporta de tal manera que cumple su restricción presupuestaria periodo a periodo, emite deuda a un periodo,  $B_t$ , y dinero,  $M_t$ , y recauda impuestos de suma fija,  $\tau_t$ , para pagar una secuencia exógena de gasto público,  $G_t$ , y la carga de la deuda que vence en el periodo  $t$  y se emitió en  $t - 1$ :

$$\frac{B_t}{P_t} + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} + \tau_t = G_t + \frac{I_t B_{t-1}}{P_t} \quad (4.3)$$

donde  $I_t$  es el tipo de interés sobre esa deuda. Reordenando y denotando con minúsculas las variables en términos reales, se puede escribir,

$$b_t + m_t - m_{t-1} \frac{1}{\Pi_t} + \tau_t = G_t + I_t b_{t-1} \frac{1}{\Pi_t} \quad (4.4)$$

donde  $\Pi_t \equiv 1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . Siempre que  $G_t > \tau_t + M_t - M_{t-1}$ , el gobierno necesita emitir deuda para cubrir la diferencia. La restricción de recursos agregada para todos los agentes de la economía, de (4.2) y (4.4),

$$0 = c_t + G_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} - y_t \quad (4.5)$$

Para el propósito de este trabajo es importante especificar de manera completa las políticas monetaria y fiscal. Por una parte, dado que es el sector privado el que debe estar dispuesto a comprar los bonos que emite el gobierno, entonces la instrumentación de la política debe asegurar a los tenedores de deuda que el gobierno no va a dejar de cumplir sus obligaciones de pago. Este comportamiento de la autoridad fiscal debe ser compatible con el comportamiento de la autoridad monetaria. Dada una proyección de ingresos públicos, una realización de  $G_t$  alta requiere un mayor endeudamiento o creación de dinero en el mercado abierto, a través de bajadas del tipo de interés nominal.

Las reglas, fiscales y monetarias, que se presentarán son reglas sencillas, que tratan de captar características generales de reglas más complejas o elaboradas y se pueden justificar como la manera óptima de fijar instrumentos, tanto fiscales como monetarios, en modelos en los que la autoridad tiene objetivos tales como suavizar las sendas impositivas a lo largo del tiempo y estabilizar los precios. De la misma manera, un gobierno que se preocupara de la estabilidad de los precios llevaría a cabo políticas bien especificadas que permitieran determinar el nivel de precios.

Las *reglas simples y ad hoc* que se presentan a continuación, con base en las referencias citadas, aseguran que la deuda del gobierno tiene un papel, que las familias y empresas están dispuestas a comprarla y, por otra parte, que el nivel de precios queda determinado en cada periodo. En esta economía variar  $i_t$  no tiene efectos sobre las variables reales, si se exceptúan los saldos monetarios reales.

### 4.2.2 Equilibrio

La solución al problema del agente representativo produce el siguiente conjunto de condiciones de equilibrio,

$$\gamma_t \frac{V_{m,t}}{U_{c_t}} = \frac{1 - \beta E_t \left[ \frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}} \frac{1}{\Pi_{t+1}} \right]}{\quad} \quad (4.6)$$

$$U_{c_t} = \beta E_t [U_{c_{t+1}} (1 - \delta + f_{k_t}(k_t, z_{t+1}))] \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{I_t} = \beta E_t \left[ \frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}} \frac{1}{\Pi_{t+1}} \right] \quad (4.8)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales. La ecuación (4.6) es una demanda de dinero implícita, en la que la demanda de saldos reales de los agentes está negativamente correlacionada con el tipo de interés nominal y positivamente correlacionada con el nivel de consumo. Iguala la utilidad marginal derivada de consumir una unidad de bien hoy con la utilidad de ahorrar esa misma unidad en forma de dinero este periodo y gastarla en consumo en el siguiente periodo.

La condición de optimalidad (4.7), por otra parte, nos dice que la utilidad proporcionada por consumir una unidad del bien hoy debe ser igual a la proporcionada por utilizar esa unidad en un proyecto de inversión a un periodo, y consumir mañana esta unidad más la rentabilidad en términos de unidades de bien que produce el proyecto de inversión.

Por último, la ecuación (4.8) es la habitual relación de Fisher entre el tipo de interés nominal y la inflación: el valor real de un incremento en la utilidad proporcionada por un aumento en el consumo hoy debe ser igual al valor real descontado del incremento de utilidad proporcionado por el consumo mañana de esa unidad, más la rentabilidad de la inversión de la unidad en bonos. Esta ecuación predice una correlación positiva entre la inflación esperada y el tipo de interés nominal. Así, usando (4.6) y (4.8), el modelo predice una correlación negativa entre inflación y saldos reales en dinero, y entre el tipo de interés nominal y el consumo. La demanda de dinero y el precio del mercado de dinero, el tipo nominal, se ajustan de tal manera que el mercado de dinero se mantiene en equilibrio: por tanto, el dinero se crea endógenamente en este modelo.

Es necesario, además, añadir condiciones finales en la forma de condiciones de transversalidad,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t [\beta^{t+j} U_{c_{t+j}} k_{t+j}] = 0 \quad (4.9)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t \left[ \beta^{t+j} \frac{B_{t+j}}{P_{t+j}} U_{c_{t+j}} \right] = 0 \quad (4.10)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t \left[ \beta^{t+j} \frac{M_{t+j}}{P_{t+j}} U_{c_{t+j}} \right] = 0 \quad (4.11)$$

que implican que no hay valoración de los tres activos disponibles en esta economía en el horizonte de vida de la familia representativa.

### 4.2.3 Entorno estocástico

La economía se encuentra sujeta a perturbaciones exógenas que afectan aleatoriamente a la productividad de la economía, las preferencias de los agentes entre consumo y tenencias de saldos reales, y las variables de política. Los agentes perciben el gasto público,  $G_t$ , como un proceso estocástico no controlado. Se considerarán  $z_t$ ,  $\gamma_t$  y  $G_t$  como procesos estocásticos exógenos y persistentes, con las siguientes leyes de movimiento,

$$\log(z_t) = (1 - \rho_z) \log(z_{ss}) + \rho_z \log(z_{t-1}) + \epsilon_{z_t} \quad (4.12)$$

$$\log(G_t) = (1 - \rho_G) \log(G_{ss}) + \rho_G \log(G_{t-1}) + \epsilon_{G_t} \quad (4.13)$$

$$\log(\gamma_t) = (1 - \rho_\gamma) \log(\gamma_{ss}) + \rho_\gamma \log(\gamma_{t-1}) + \epsilon_{\gamma_t} \quad (4.14)$$

todos ellos desviándose aleatoriamente de una media, dada respectivamente por  $\gamma_{ss}$ ,  $G_{ss}$  y  $z_{ss}$ . Los parámetros  $\rho_\gamma$ ,  $\rho_G$  y  $\rho_z$  dan la persistencia de cada proceso autorregresivo.

### 4.2.4 Regla fiscal

Se considerará la siguiente regla fiscal,

$$\tau_t = \tau_0 + \tau_1 \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (4.15)$$

Cuando  $\tau_1 \neq 0$ , la regla representa un compromiso del gobierno de aumentar los impuestos en función de la deuda pasada. Niveles altos de deuda implican niveles impositivos más altos. Reglas de este tipo son comunes en la literatura, como en Aiyagari y Gertler (1985), Sims (1994) o Leeper (1993). Como  $B_t$  y  $\tau_t$  sólo aparecen en la restricción presupuestaria del gobierno, si el subsistema sin restricción presupuestaria del gobierno tiene un equilibrio único, entonces el modelo presenta equivalencia Ricardiana. Sin embargo, incluso en el caso de que se verifique la restricción presupuestaria, la política fiscal debe satisfacer ciertas restricciones para que el equilibrio exista y sea único, como se verá.

El objetivo de incluir la regla (4.15), como es fácil de intuir, es acotar el crecimiento de la deuda real. Un criterio tipo Maastricht de mantener  $b_t$  bajo una cierta cota,  $\bar{B}$ , en la forma de una restricción del tipo  $b_t \leq \bar{B}$  nos permitiría conseguir el mismo objetivo. También se lograría con reglas de gasto en las que es el gasto el que depende negativamente de los bonos,

$$G_t = G_0 - G_1 \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} + \epsilon_{G_t}$$

y los impuestos se determinan de manera exógena, bien siendo de suma fija o bien siguiendo una ley autoregresiva, como es habitual en muchos trabajos. Se conseguiría el mismo papel de acotar la deuda, aunque ahora la interpretación de los resultados sería por el lado del gasto público y no de los ingresos, que tal vez es más intuitiva desde el punto de vista de la operativa habitual de los encargados de la política fiscal.

### 4.2.5 Formas funcionales

Como especificación particular se supondrá en todo el capítulo que las funciones  $U$  y  $V$  presentan aversión absoluta al riesgo decreciente, con coeficiente de aversión absoluta igual a la unidad. Esto es,

$$U(c_t) = \log(c_t) \quad (4.16)$$

$$V(m_t) = \log(m_t) \quad (4.17)$$

Respecto a la tecnología, se supondrá una función de producción Cobb-Douglas,

$$y_t = f(z_t, k_{t-1}) = z_t k_{t-1}^\alpha, \quad (4.18)$$

donde  $\alpha$  mide la participación del capital per cápita en la producción. Entonces, la productividad marginal del capital queda,

$$f_{k_t} = \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1}$$

### 4.2.6 Estado estacionario determinista

Si se particularizan las condiciones de equilibrio (4.6), (4.7), (4.8), usando las formas funcionales escogidas, junto con las restricciones del gobierno (4.4) y de recursos agregada, (4.5), la regla fiscal, (4.15), y la función de producción, se puede calcular la solución de estado estacionario a partir de

$$\begin{aligned} \gamma_{ss} \frac{c_{ss}}{m_{ss}} &= 1 - \beta \frac{1}{\Pi_{ss}} \\ \frac{1}{c_{ss}} &= \beta \left[ \frac{1}{c_{ss}} (1 - \delta + z_{ss} \alpha k_{ss}^{\alpha-1}) \right] \\ \frac{1}{I_{ss}} &= \beta \frac{1}{\Pi_{ss}} \\ b_{ss} + m_{ss} - \frac{m_{ss}}{\Pi_{ss}} + \tau_{ss} &= G_{ss} + I_{ss} b_{ss} \frac{1}{\Pi_{ss}} \\ y_{ss} &= c_{ss} + \delta k_{ss} + G_{ss} \\ \tau_{ss} &= \tau_0 + \tau_1 b_{t-1} \\ y_{ss} &= z_{ss} k_{ss}^\alpha \end{aligned}$$

y se hace  $z_{ss} = 1$ . Se tiene, entonces, un sistema con 7 ecuaciones y 10 incógnitas:  $c_{ss}$ ,  $m_{ss}$ ,  $\gamma_{ss}$ ,  $\pi_{ss}$ ,  $k_{ss}$ ,  $i_{ss}$ ,  $b_{ss}$ ,  $G_{ss}$ ,  $\tau_{ss}$  y  $y_{ss}$ . Por tanto, para poder obtener una solución única al sistema anterior se calibran directamente usando datos reales de la Unión Europea en la década de los 1990, los ratios  $\left(\frac{G}{y}\right)_{ss}$ ,  $\left(\frac{\tau}{G}\right)_{ss}$ ,  $\left(\frac{m}{c}\right)_{ss}$ , y se toma como dado el valor del tipo nominal de interés,  $I_{ss}$ , o de manera similar el valor de la tasa de inflación de estado estacionario, ya que en el sistema anterior, por la ecuación de Fisher, sus valores están ligados,

$$\Pi_{ss} = \beta I_{ss}$$

y, por otra parte, de la definición de tasa de crecimiento monetario,

$$g_{ss} = \Pi_{ss}.$$

Así pues, se tiene que el stock de capital viene dado por

$$k_{ss} = \left[ \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y entonces, de la función de producción,  $y_{ss} = k_{ss}^\alpha$ , se obtiene,

$$\begin{aligned} G_{ss} &= \left( \frac{G}{y} \right)_{ss} y_{ss} \\ \tau_{ss} &= \left( \frac{\tau}{G} \right)_{ss} G_{ss} \end{aligned}$$

con lo que los valores de estado estacionario del consumo y los saldos reales en dinero quedan,

$$\begin{aligned} c_{ss} &= y_{ss} - G_{ss} - \delta k_{ss} \\ m_{ss} &= \left( \frac{m}{c} \right)_{ss} c_{ss} \end{aligned}$$

Como se ha fijado el ratio de saldos reales sobre consumo, se tiene que el valor de la perturbación de demanda de dinero consistente con estos valores queda determinado por

$$\gamma_{ss} = \frac{g_{ss} - \beta \frac{m_{ss}}{c_{ss}}}{g_{ss}}.$$

Por otro lado, de la restricción presupuestaria del gobierno se obtiene la cantidad de bonos de estado estacionario,

$$b_{ss} = \frac{\beta}{\beta - 1} \left( (G_{ss} - \tau_{ss}) - m_{ss} \left( 1 - \frac{1}{\Pi_{ss}} \right) \right)$$

y entonces,

$$\tau_0 = \tau_{ss} - \tau_1 b_{ss}$$

Observando las ecuaciones en estado estacionario determinista, se pueden adelantar algunas intuiciones del funcionamiento del modelo. Por ejemplo, los saldos reales caen y las tenencias de bonos reales suben cuando un incremento de la inflación aumenta el coste de oportunidad de mantener saldos reales en dinero, y los consumidores sustituyen dinero con bonos:  $\uparrow \pi_{ss}$  implica  $\downarrow m_{ss}$  y  $\uparrow b_{ss}$ ; los agentes se protegen de la inflación.

Un valor de  $I_{ss} = 1.00992026$  y  $\beta = 0.995$ , por  $I_{ss} = (1 + R_{ss})\Pi_{ss}$ , implican un tipo de interés real anual en la solución de estado estacionario determinista

del 2%, con lo que  $\Pi_{ss} = 1.0049589$  o, lo que es lo mismo, una tasa de inflación anual del 2%<sup>2</sup>.

Para poder obtener una solución para todas las variables en estado estacionario se ha tenido que fijar  $I_{ss}$  de manera externa al modelo. Para evitar esto se definirán más adelante reglas de política que nos permitan obtener valores de  $I_{ss}$  de manera endógena dentro del modelo.

Nótese que el modelo de este capítulo presenta superneutralidad del dinero: los valores de estado estacionario de las variables reales son independientes de  $g_{ss}$  y por tanto de  $\Pi_{ss}$ . También presenta neutralidad del dinero: el dinero entra en la función de utilidad sólo como saldos reales.

#### 4.2.7 Análisis del modelo

El modelo que se está estudiando presenta dos esperanzas condicionales a horizonte uno, sobre funciones distintas de las variables. Para realizar una aproximación lineal en logaritmos alrededor del estado estacionario y usar la estrategia de solución de Sims (1999)-Novales *et al.* (1999), se definen dos variables adicionales,  $W_{1t}$  y  $W_{2t}$ , como

$$W_{1t} = E_t \left[ \frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}} \frac{1}{\Pi_{t+1}} \right] \quad (4.19)$$

$$W_{2t} = E_t [U_{c_{t+1}} (1 - \delta + f_{k_t}(k_t, z_{t+1}))] \quad (4.20)$$

y los errores racionales de previsión asociados a horizonte un periodo se pueden escribir como,

$$\xi_{1t} = \frac{U_{c_t}}{U_{c_{t-1}}} \frac{1}{\Pi_t} - W_{1,t-1} \quad (4.21)$$

$$\xi_{2t} = U_{c_t} (1 - \delta + f_{k_{t-1}}(k_{t-1}, z_t)) - W_{2,t-1} \quad (4.22)$$

De (4.19) y (4.20), los valor de estado estacionario determinista de las dos expectativas son,

$$W_{1,ss} = \frac{1}{\Pi_{ss}}$$

$$W_{2,ss} = \frac{1}{c_{ss}} (1 - \delta + \alpha z_{ss} k_{ss}^{\alpha-1}).$$

Tras sustituir (4.19) y (4.20) en (4.6) a (4.8) se pueden reescribir las condiciones de primer orden como

$$\gamma_t \frac{V_{m_t}}{U_{c_t}} = 1 - \beta W_{1t} \quad (4.23)$$

$$U_{c_t} = \beta W_{2t} \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{I_t} = \beta W_{1t} \quad (4.25)$$

---

<sup>2</sup> $\Pi_t = \left( \frac{\Pi_t^{\text{annual}}}{100} + 1 \right)^{1/4}$ .

junto con (4.21) y (4.22). Las ecuaciones del modelo a analizar son, pues: las condiciones de primer orden (4.23), (4.24), (4.25), los errores de expectativas (4.21) y (4.22), las restricciones presupuestarias de recursos de la economía y del gobierno, (4.4) y (4.5), la regla fiscal, (4.15), los procesos autorregresivos de los shocks exógenos, (4.14), (4.13), (4.12). Si se elimina la variable correspondiente al nivel de impuestos usando la regla fiscal, el recuento de ecuaciones que se acaba de hacer implica un conjunto de 10 ecuaciones, con 11 incógnitas,  $c_t$ ,  $m_t$ ,  $b_t$ ,  $\Pi_t$ ,  $I_t$ ,  $k_t$ ,  $W_{1t}$ ,  $W_{2t}$ ,  $z_t$ ,  $G_t$  y  $\gamma_t$ .

Las dos variables correspondientes a los errores de expectativas,  $\xi_{1t}$  y  $\xi_{2t}$ , que se han introducido, se pueden recuperar haciendo un uso apropiado de las condiciones de transversalidad (4.9) y (4.11). La condición de transversalidad para los bonos se verificará dependiendo de los valores que tome  $\tau_1$  en la regla fiscal, (4.15), como quedará muy claro conforme se avance en el Capítulo.

Para determinar perfectamente el sistema se debe añadir una condición adicional. Dado el objetivo de este trabajo, se añadirá una condición relativa a la determinación del tipo nominal de interés o la tasa de expansión monetaria, la *regla monetaria*<sup>3</sup>.

### Versión lineal en logaritmos

En casi todo lo que sigue se trabajará con la versión lineal en logaritmos alrededor del estado estacionario determinista del sistema anterior, porque facilita el tratamiento analítico de las ecuaciones del modelo. Además, cuando se resuelve, no se puede obtener una solución cerrada del problema no lineal original, con lo que hay que usar alguna aproximación. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el Capítulo 1, queda patente que la aproximación lineal logarítmica conserva las principales propiedades de la solución del modelo original. El sistema incompleto (pues tiene más variables que ecuaciones) anterior, queda,

---

<sup>3</sup>Otra manera de cerrar el sistema, por ejemplo, sería la propuesta en Hoogenveen y Sterken (1999) donde, usando un modelo similar al aquí analizado, se supone que la tasa de inflación se determina de manera *exógena*, y sigue una ley autorregresiva estacionaria. Como justificación, se supone que el gobierno controla las oscilaciones de la inflación en torno al objetivo deseado.

usando la simplificación propuesta en Uhlig (1999) para log-linealizar ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_t - \tilde{m}_t + \tilde{W}_{1t} + \tilde{\gamma}_t &= 0 \\
 \tilde{c}_t + \tilde{W}_{2t} &= 0 \\
 \tilde{I}_t + \tilde{W}_{1t} &= 0 \\
 W_{1,ss} \tilde{c}_t + W_{1,ss} \tilde{\Pi}_t &= W_{1,ss} \tilde{c}_{t-1} - \\
 &\quad W_{1,ss} \tilde{W}_{1,t-1} - \xi_{1t} \\
 W_{2,ss} \tilde{c}_t - \frac{\alpha k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} \tilde{z}_t &= \frac{\alpha(\alpha-1)k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} \tilde{k}_{t-1} \\
 &\quad - W_{2,ss} \tilde{W}_{2,t-1} - \xi_{2t} \\
 m_{ss} \tilde{m}_t + b_{ss} \tilde{b}_t + \left( \frac{b_{ss}}{\beta} + \frac{m_{ss}}{\Pi_{ss}} \right) \tilde{\Pi}_t - G_{ss} \tilde{G}_t &= \frac{m_{ss}}{\Pi_{ss}} \tilde{m}_{t-1} + \frac{b_{ss}}{\beta} \tilde{I}_{t-1} \\
 &\quad + \left( \frac{1}{\beta} - \tau_1 \right) b_{ss} \tilde{b}_{t-1} \\
 c_{ss} \tilde{c}_t + k_{ss} \tilde{k}_t - k_{ss}^\alpha \tilde{z}_t + G_{ss} \tilde{G}_t &= \tilde{k}_{t-1} (\alpha k_{ss}^\alpha + (1-\delta)k_{ss}) \\
 \tilde{\gamma}_t &= \rho_\gamma \tilde{\gamma}_{t-1} + \epsilon_{\gamma t} \\
 \tilde{G}_t &= \rho_G \tilde{G}_{t-1} + \epsilon_{Gt} \\
 \tilde{z}_t &= \rho_z \tilde{z}_{t-1} + \epsilon_{zt}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

### Estabilidad, existencia y unicidad del equilibrio

Para analizar distintas cuestiones de estabilidad, existencia y unicidad de la solución de equilibrio del sistema (4.26) junto con la *regla de política monetaria* que permite completarlo, se usará en cada caso la estrategia de solución que se viene llamando de descomposición de autovalores y autovectores, propuesta por Sims (1999), y desarrollada en Novales *et al.* (1999). En esta Tesis Doctoral, recuérdese, se ha evaluado su funcionamiento en el Capítulo 1 y se da una descripción detallada en el Apéndice A. El sistema (4.26) junto con la condición adicional necesaria, se puede representar como,

$$\Gamma_0 u_t = \Gamma_1 u_{t-1} + \Psi \epsilon_t + \Pi \eta_t \tag{4.27}$$

Partir de una condición inicial arbitraria  $u_0$  y usar (4.27) para generar series temporales para las variables en  $u_t$ , condicionales a las realizaciones muestrales de  $\epsilon_t$  conduce, en general, a sendas inestables para las variables relevantes, que violarán las condiciones de transversalidad a menos que se añadan al sistema las condiciones de estabilidad. Estas condiciones se definen como los autovectores asociados a los autovalores generalizados inestables del par  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ .

El vector  $u_t$  incluye las variables del modelo con subíndices más avanzados, así como las esperanzas condicionales del modelo, que se han redefinido como nuevas variables. Todas estas variables se determinan dentro del sistema. El vector  $\epsilon_t$  contiene las variables que se determinan fuera del sistema, las innovaciones en los procesos estocásticos exógenos de los shocks. El vector  $\eta_t$  contiene

los errores de expectativas racionales, que también se pueden resolver de manera endógena en el sistema anterior, ampliado con las condiciones de transversalidad del modelo, conjuntamente con las variables de decisión y control del modelo.

A lo largo de este Capítulo se supondrá que el lector está familiarizado con las cuestiones de métodos numéricos de solución tratadas en los Capítulos 1 a 3 y el Apéndice A, en general, y con el método que se viene llamando de descomposición de autovalores y autovectores en particular.

## 4.3 Reglas de Política Monetaria

Se supondrá que los agentes privados conocen las reglas de política, esto es, el componente anticipado que las autoridades monetaria y fiscal usan para implementar su actuación, aunque no conocen el componente no anticipado de la política que, por definición, es impredecible.

### 4.3.1 Reglas de política que no reaccionan al estado de la economía y mantienen constante el instrumento

La discusión tradicional en torno a la fijación del tipo de interés nominal constante o la tasa de expansión monetaria, como en Novales (1992), Carlstrom y Fuerst (1995), Canzoneri y Dellas (1995) o Kim (1997a), implica cerrar el sistema (4.26) con una regla del tipo

$$I_t = I_{ss}, \forall t$$

o, alternativamente,

$$g_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} = g_{ss}, \forall t$$

que se pueden escribir de forma compacta y general de la siguiente manera

$$\alpha_g \frac{m_t}{m_{t-1}} \Pi_t + \alpha_i I_t = \delta_0 + \varpi_t \quad (4.28)$$

donde  $\varpi_t$  representa un error de control de la política monetaria, con media cero y tal que,

$$\log(\varpi_t) = (1 - \rho_\varpi) \log(\varpi_{ss}) + \rho_\varpi \log(\varpi_t) + \epsilon_{\varpi_t} \quad (4.29)$$

Si  $\varpi_t = 0 \forall t$ , entonces, si  $\alpha_g = 0$ , la regla consiste en mantener  $I_t$  constante, y si en cambio es  $\alpha_i = 0$ , entonces la regla fija un objetivo de crecimiento monetario constante. La versión lineal en logaritmos de (4.28) es,

$$\alpha_g \left( \tilde{m}_t - \tilde{m}_{t-1} + \tilde{\Pi}_t \right) + \alpha_i I_{ss} \tilde{I}_t = \varpi_{ss} \tilde{\varpi}_t \quad (4.30)$$

## Crecimiento monetario constante

Si se considera el caso en que  $\alpha_i = 0$  en la regla (4.28), entonces  $g_t = \frac{\delta_0}{\alpha_0} = g_{ss}$  constante  $\forall t$ . Si además  $\gamma_t = \gamma_{ss}$  constante  $\forall t$ , y  $\varpi_t = 0$  en cada instante de tiempo, el modelo anterior colapsa al analizado por Novales (1992). Utilizando  $g_t = g_{ss}$  en (4.6) se puede demostrar que<sup>4</sup>,

$$m_t = \frac{g_{ss}\gamma_{ss}}{g_{ss} - \beta} c_t \quad (4.31)$$

de manera que la demanda de dinero en términos reales en equilibrio, es una proporción fija del consumo. Como  $g_{ss} = \Pi_{ss}$  y  $\Pi_{ss} = \beta I_{ss}$  entonces, siempre que se tengan tipos de interés nominales positivos se verifica que  $g_{ss} > \beta$ . En efecto, sustituyendo (4.31) en (4.8) el tipo de interés nominal queda,

$$\frac{1}{I_t} = \beta E_t \left[ \frac{U_{c_{t+1}} \frac{g_{ss} - \beta}{\gamma_{ss}\beta} M_t U_{c_t}}{U_{c_t} \frac{g_{ss} - \beta}{\gamma_{ss}\beta} M_{t+1} U_{c_{t+1}}} \right] = \beta E_t \left[ \frac{M_t}{M_{t+1}} \right] = \frac{\beta}{g_{ss}} \quad (4.32)$$

con lo que en esta versión de la economía que se está considerando, al fijar la tasa de crecimiento del dinero la autoridad monetaria mantiene constante el tipo nominal de interés al que hace sus operaciones de mercado abierto, y la expectativa  $W_{1t}$  se mantiene constante en su valor de estado estacionario para todo  $t$ . Usando las versiones lineales en logaritmos de (4.31) y (4.32),  $\tilde{c}_t = \tilde{m}_t$  y  $\tilde{I}_t = 0$  respectivamente, se pueden eliminar  $\tilde{c}_t$  y  $\tilde{I}_t$  del sistema (4.26). Además, por (4.24) se tiene que  $\tilde{m}_t = -\tilde{W}_{2t}$ , y por (4.30) resulta  $\tilde{\Pi}_t = \tilde{m}_{t-1} - \tilde{m}_t$ . Las variables  $\tilde{G}_t$  y  $\tilde{z}_t$  vienen dadas por sus respectivas ecuaciones autorregresivas, y son exógenas al sistema. En términos de la notación dada por la expresión (4.27), el vector  $u_t$  estaría formado por las variables endógenas  $\tilde{m}_t$ ,  $\tilde{k}_t$  y  $\tilde{b}_t$ , y las variables exógenas  $\tilde{G}_t$  y  $\tilde{z}_t$ , y las matrices de la aproximación lineal en logaritmos son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} W_{2ss} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} \\ m_{ss} \left(1 - \frac{1}{\Pi_{ss}}\right) - \frac{b_{ss}}{\beta} & 0 & b_{ss} & -G_{ss} & 0 \\ c_{ss} & k_{ss} & 0 & G_{ss} & -k_{ss}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

<sup>4</sup>La demostración es fácil de obtener, ver Novales (1992). El autor utiliza este modelo para hacer una discusión del problema de indeterminación de precios. En este Capítulo, en cambio, se solucionan los posibles problemas de indeterminación del nivel de precios fijando condiciones iniciales para el stock nominal de dinero como en McCallum (1983) o Sims (1994), y se usará el modelo para introducir la discusión en torno a la capacidad que las distintas políticas tienen para determinar soluciones estables a esta economía y determinar un equilibrio único para la tasa de inflación, que en los siguientes apartados se complementará con la introducción de reglas de reacción de la autoridad monetaria que responden al entorno económico.

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} W_{2,ss} & \frac{\alpha(\alpha-1)k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_{ss}}{\beta} & 0 & b_{ss} \left( \frac{1}{\beta} - \tau_1 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha k_{ss}^\alpha + (1-\delta)k_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema así formado tiene como posibles autovalores inestables en la parte determinista, uno asociado a la regla fiscal, y dado por la diferencia  $\frac{1}{\beta} - \tau_1$ , y otro asociado a la parte real de la economía, con una expresión analítica complicada que no se muestra. Numéricamente, si se considera el conjunto de parámetros  $[\beta, \alpha, \delta, \rho_G, \rho_z, \left(\frac{G}{y}\right)_{ss}, \left(\frac{\tau}{G}\right)_{ss}, \left(\frac{m}{c}\right)_{ss}, \tau_1] = [0.985, 0.36, 0.025, 0.96, 0.95, 0.20, 1.009, 2.5, 0.8]$ , y  $I_{ss} = 1.0099$ , se tiene tan sólo un autovalor inestable, con valor 1.0497, ya que, para estos valores de los parámetros  $\|\frac{1}{\beta} - \tau_1\| < 1$ . La condición de estabilidad resulta ser,

$$\tilde{m}_t - 0.7629\tilde{k}_t + 0.1776\tilde{G}_t - 0.4016\tilde{z}_t = 0$$

que implica que el error de predicción que queda en el sistema es función de las perturbaciones fundamentales que afectan a la economía a través de la relación,

$$\xi_{2t} = 0.0928\epsilon_{G_t} - 0.2121\epsilon_{z_t}$$

Así pues, se tiene un equilibrio único en la versión determinista y en la versión estocástica del modelo, y se verifican las condiciones de transversalidad. En cambio, si se toma como valor para el coeficiente en la regla fiscal  $\tau_1 = 0.0$ , entonces el nivel de impuestos se fija en un nivel constante en cada periodo del tiempo, y el sistema tiene dos raíces inestables y, por tanto, dos condiciones de estabilidad, una idéntica a la anterior y otra asociada al nuevo autovalor inestable, que es,

$$\tilde{b}_t - \tilde{m}_t + 0.2204\tilde{k}_t + 24.7830\tilde{G}_t + 0.3396\tilde{z}_t = 0$$

Esta condición hace que los bonos en términos reales sean función del estado de la economía, y garantiza que se mantengan estables en torno al estado estacionario. En caso contrario, se viola la condición de transversalidad y los bonos desaparecen de la economía porque los agentes no estarían dispuestos a comprar un activo que no les va a ser devuelto. No obstante, los valores de equilibrio del consumo, el capital y los saldos reales son los mismos que en el caso anterior,

en el que la deuda en términos reales presentaba un comportamiento explosivo. Esto es un ejemplo claro del principio de equivalencia ricardiana.

Además de poder recuperar el error de expectativas  $\xi_{2t}$  de manera idéntica al caso anterior, se tiene la relación

$$\epsilon_{G_t} = -0.0133\epsilon_{z_t}$$

que indica que el sistema está sobredeterminado, ya que las variables que relaciona son innovaciones exógenas, y no tiene sentido económico que  $\epsilon_{G_t}$  se determine de manera endógena en el sistema. La sobredeterminación queda clara al contar variables y ecuaciones: respecto al caso en que se tenía  $\tau_1 = 0.8$ , se tiene el mismo número de variables pero una ecuación más.

Por tanto, bajo una política de crecimiento monetario constante, la única manera de garantizar un equilibrio único en el que se valore la deuda, es que el gobierno utilice la regla fiscal con  $\tau_1$  mayor que  $\frac{1}{\beta} - 1$  y menor que  $\frac{1}{\beta} + 1$ .

#### Tipo de interés nominal constante

Si se hace que  $\alpha_g = 0$  en la regla (4.28), entonces  $I_t = \frac{\delta_0}{\alpha_i} = I_{ss}$  constante  $\forall t$ . Además se supondrá  $\gamma_t = \gamma_{ss}$  constante  $\forall t$ , y  $\varpi_t = 0$  en cada instante de tiempo, para facilitar la discusión. Utilizando  $I_t = I_{ss}$  en (4.6) se puede demostrar, al igual que en el caso con crecimiento monetario constante, la proporcionalidad entre las tenencias de saldos reales y el nivel de consumo (4.31).

De (4.28) en (4.8) la expectativa  $W_{1t}$  se escribe como,

$$\beta W_{1t} = \beta E_t \left[ \frac{c_t}{c_{t+1}} \frac{1}{\Pi_{t+1}} \right] = \frac{1}{I_{ss}} \quad (4.33)$$

entonces, usando (4.31) en (4.33) y también la definición de tasa de crecimiento monetario, y reconociendo que  $\beta I_{ss} = g_{ss}$ , se tiene que

$$E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] = \frac{1}{g_{ss}}$$

y el error de previsión asociado, (4.21), queda, en este caso,

$$\xi_{1t} = \frac{1}{g_t} - \frac{1}{g_{ss}} \quad (4.34)$$

Nótese que ahora el error de previsión  $\xi_{1t}$  se puede interpretar como un error de control monetario. En el caso anterior en el que la autoridad monetaria fijaba la tasa de crecimiento monetario, el error en (4.34) era exactamente igual a cero en cada periodo del tiempo  $t$ . Ahora, al controlar el precio en el mercado de dinero, la cantidad se fija con un cierto error, que es ruido blanco.

Por otra parte, podemos eliminar la inflación del sistema usando la definición de la tasa de crecimiento monetario. Ahora el sistema a analizar queda reducido, tras estas sustituciones a un conjunto de seis ecuaciones, (4.4), (4.5), (4.12), (4.13), (4.22) y (4.34), para las mismas tres variables endógenas que en

el apartado anterior,  $m_t$ ,  $k_t$  y  $b_t$ , a las que se suma ahora  $g_t$ , y las mismas dos variables exógenas,  $G_t$  y  $z_t$ . El sistema reducido a analizar, está formado por las matrices,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} W_{2ss} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} \\ m_{ss} \left(1 - \frac{1}{\Pi_{ss}}\right) - \frac{b_{ss}}{\beta} & 0 & b_{ss} & \left(\frac{m_{ss}}{g_{ss}} + \frac{b_{ss}}{\beta}\right) & -G_{ss} & 0 \\ c_{ss} & k_{ss} & 0 & 0 & G_{ss} & -k_{ss}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_{ss}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} W_{2ss} & \frac{\alpha(\alpha-1)k_{ss}^{\alpha-1}}{c_{ss}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_{ss}}{\beta} & 0 & b_{ss} \left(\frac{1}{\beta} - \tau_1\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha k_{ss}^{\alpha} + (1-\delta)k_{ss} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso de expansión monetaria constante, para parametrizaciones razonables aparecen dos posibles autovalores inestables, y son los mismos que en dicho caso: uno asociado a la parte real de la economía, que no se ofrece porque tiene una expresión analítica muy compleja y otro, asociado a la regla fiscal. Nótese que ahora hay que identificar dos errores de previsión, para lo cual se necesitan dos condiciones de estabilidad [ver Sims (1999)]. En el caso en que  $\tau_1 = 0.0$  se tienen asimismo dos condiciones de estabilidad: una que relaciona  $\tilde{m}_t$  con  $\tilde{k}_t$ ,  $\tilde{G}_t$  y  $\tilde{z}_t$ , y otra que relaciona las desviaciones de los bonos en términos reales con el resto de estados, exógenos y endógenos, de la economía. Esta segunda condición garantiza que los bonos en términos reales verifican la condición de transversalidad correspondiente. Los bonos se resuelven conjuntamente con el resto de variables del modelo, y no se verifica el principio de equivalencia ricardiana: el subsistema sin la restricción presupuestaria del gobierno y sin la condición de transversalidad de los bonos no se puede resolver de manera residual.

Dado que la política fiscal no reacciona ante innovaciones en el nivel de deuda, y la autoridad monetaria quiere mantener el nivel de tipos nominales constante en  $I_{ss}$ , ofrece la cantidad necesaria de dinero a través de sus operaciones de mercado abierto, con lo que se monetiza el déficit. En este caso,

aumentos de deuda no conllevan mayores niveles impositivos presentes y/o futuros, sino mayor cantidad de dinero.

Numéricamente las dos condiciones de estabilidad son idénticas a las del caso de sobredeterminación con crecimiento monetario. Así, para la misma configuración paramétrica considerada antes, se tiene que,

$$\begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5714 & 0.0232 \\ -0.0872 & 0.1941 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{G_t} \\ \epsilon_{z_t} \end{bmatrix}$$

por lo que el sistema está exactamente identificado, y se pueden obtener los dos errores de previsión a partir de las perturbaciones estructurales de la economía. En cambio, cuando  $\tau_1 = 0.8$ , la estabilidad de los bonos en términos reales está garantizada, y por tanto sólo hay que resolver hacia delante el autovalor inestable asociado a la parte real de la economía, con lo que se tiene tan sólo una condición sobre las variables,

$$\begin{bmatrix} 0.0000 & -1.8034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1673 & -0.3824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{G_t} \\ \epsilon_{z_t} \end{bmatrix}$$

con lo que el sistema está subidentificado ya que no podemos recuperar el error de control monetario  $\xi_{1t}$  de manera única. Una posible solución sería considerar el papel de las creencias en forma de un proceso exógeno para el error no identificado, en las líneas de Farmer (1993) y Benhabib y Farmer (1997), pero es algo que escapa de los objetivos de este trabajo.

Por tanto, al contrario de lo que ocurría cuando la autoridad monetaria controlaba la tasa de expansión monetaria, *sólo hay un equilibrio único en el caso de control del tipo de interés nominal si la autoridad fiscal no reacciona ante el nivel de bonos en términos reales, y fija  $\tau_1 = 0.0$ . En tal caso, se garantiza el cumplimiento de la condición de transversalidad de los bonos y se monetiza el déficit.*

### **Crecimiento monetario constante frente a tipo de interés nominal constante**

Los resultados de las dos subsecciones anteriores apuntan ya una cuestión de coordinación de políticas monetaria y fiscal. En el caso de que la autoridad monetaria se fije como objetivo mantener constante la tasa de crecimiento monetario, al conseguir controlar la demanda de dinero, fija el tipo de interés nominal, y por tanto, debe ser la autoridad fiscal la que se encargue de que se cumpla la restricción presupuestaria agregada del gobierno. De esta manera, es necesario que se implemente una regla fiscal activa, con un parámetro  $\tau_1$  no nulo, que permita garantizar la devolución de la deuda que compra el sector privado.

En cambio, cuando la autoridad monetaria controla el tipo nominal de interés, a pesar de que de nuevo, en el contexto del modelo simplificado que se ha usado en la discusión anterior, la demanda de dinero implica una relación de proporcionalidad entre saldos reales en dinero y nivel de consumo de la familia representativa, el control perfecto de la oferta de dinero desaparece. Al

mantenerse el tipo nominal constante, el crecimiento de la carga de la deuda está controlado en lo que atañe a la autoridad monetaria. En el caso de que la autoridad fiscal reaccione ante el nivel de deuda fijando un  $\tau_1$  suficientemente grande, ninguna de las autoridades fija el nivel corriente de la oferta de dinero, con lo que la oferta de dinero queda indeterminada, y se tiene el resultado tradicional de indeterminación de precios bajo un régimen de tipos de interés constantes. Por otro lado, si se hace  $\tau_1 = 0.0$  y, por tanto, la política fiscal se hace insensible a los desarrollos de la deuda real, la autoridad monetaria se encarga de equilibrar el presupuesto y el déficit se monetiza. Esto implica una relación entre la deuda real y el estado de la economía, representada por una condición de estabilidad que involucra los bonos, los saldos monetarios reales [que, recuérdese, son proporcionales al nivel de consumo] y los shocks exógenos que afectan a la economía. Si se considera un contexto en el que el recurso de la autoridad fiscal a la autoridad monetaria en lo referente a la financiación del déficit, como es el caso de la Unión Monetaria, el equilibrio con tipo de interés nominal fijo quedaría indeterminado.

### 4.3.2 Reglas de política que reaccionan al estado de la economía y varían el instrumento

La discusión tradicional de fijación de un instrumento constante ha permitido centrar las cuestiones más relevantes del análisis que se realizará a continuación. En lo que sigue se consideran reglas que reaccionan al estado de la economía, y que permiten adaptar el valor del instrumento monetario, que se supondrá que es el tipo de interés nominal, atendiendo a la actuación real de los bancos emisores y a la evidencia empírica disponible, como función del entorno económico. La regla de reacción permite un mayor margen de actuación a la autoridad monetaria, y las cuestiones de indeterminación antes discutidas toman un carácter ligeramente distinto.

#### Objetivos de inflación y crecimiento monetario

Como caso particular de la regla genérica mostrada en la presentación del Capítulo, se tiene<sup>5</sup>,

$$I_t = \left( \frac{\Pi_t}{\Pi_{ss}} \right)^{\beta_{i\pi}} \left( \frac{g_t}{g_{ss}} \right)^{\beta_{ig}} \varpi_t \quad (4.35)$$

donde  $\varpi_t$  representa movimientos puramente exógenos en los tipos nominales de interés y se supone que sigue la ley de movimiento

$$\log(\varpi_t) = (1 - \rho_\varpi) \log(\varpi_{ss}) + \rho_\varpi \log(\varpi_{t-1}) + \epsilon_{\varpi_t} \quad (4.36)$$

<sup>5</sup>Introducir un término de reacción a desviaciones del output respecto a su nivel potencial no alteraría en nada la discusión del Capítulo dada la fuerte neutralidad existente en este modelo. Por tanto se prescindirá de términos de ese tipo en la discusión que sigue.

Esto es, la autoridad monetaria variará el tipo nominal de interés cuando la inflación se desvíe de su valor objetivo y/o se exceda el objetivo de tasa de expansión del dinero. También contempla la regla una medida de movimientos puramente exógeno en el tipo nominal, no debidos a la situación de la economía (endógenos). En la regla se tienen dos *anclas nominales*: la tasa de inflación y la tasa de crecimiento monetario.

Respecto al análisis del estado estacionario determinista del modelo, lo único que se añade ahora es que el valor del tipo nominal de interés en estado estacionario se fija en la regla, aunque, de nuevo, *de manera exógena*. Esto se debe a que esta regla de política, se especifica en desviaciones de las variables respecto a sus valores de estado estacionario. Una regla en niveles de las variables, supondría que el valor de estado estacionario del tipo nominal sería función del valor de estado estacionario de los coeficientes de la regla, lo que permitiría comparar los valores preferidos de los coeficientes usando como medida el bienestar de los agentes. Dada la fuerte neutralidad implícita en el modelo, motivada por la función de utilidad separable que se está usando, este modelo no es un laboratorio apropiado para hacer este tipo de consideraciones. En cambio, sí lo es para el análisis de coordinación de políticas fiscal y monetaria, y selección de valores de los coeficientes usando un criterio de volatilidad de la inflación inducida, dado que todas las reglas implican los mismos valores de estado estacionario.

Si se añaden al sistema (4.26) las versiones lineales en logaritmos de las ecuaciones que definen la regla y el shock correspondiente, (4.35) y (4.36), que son,

$$\beta_{ig}\tilde{m}_t + (\beta_{i\pi} + \beta_{ig})\tilde{\Pi}_t - \tilde{I}_t + \tilde{\omega}_t = \beta_{ig}\tilde{m}_{t-1}$$

y

$$\tilde{\omega}_t = \tilde{\omega}_{t-1} + \epsilon_{\omega t}$$

se tiene que para parametrizaciones razonables, hay tres autovalores generalizados en (4.27) con posible valor absoluto mayor que la unidad [calculados analíticamente con MAPLE]. Dos están relacionados con parámetros de política,

$$\lambda_{\pi g} = \frac{\beta_{i\pi} + 2\beta_{ig}}{1 + \beta_{ig}} \quad (4.37)$$

$$\lambda_{\tau_1} = \frac{1}{\beta} - \tau_1 \quad (4.38)$$

y el otro, doble, con el lado real de la economía. Debido a este autovalor de la parte real fue necesario implementar una descomposición QZ. El autovalor (4.38) es el correspondiente a la regla fiscal, que ya ha aparecido en la discusión de las políticas de instrumento fijo. Ahora se tiene además un autovalor asociado a la actuación de la autoridad monetaria, el dado por (4.37).

### Coordinación entre las políticas monetaria y fiscal

Dado que en el sistema objeto de estudio hay dos términos de expectativas, de acuerdo con Sims (1999), para que el sistema tenga un equilibrio y sea único,

dos autovalores generalizados deben estar en el círculo unidad y el otro fuera: la elección de  $\tau_1$ ,  $\beta_{i\pi}$  y  $\beta_{ig}$  es crucial para determinar de manera completa la dinámica del equilibrio.

Si las autoridades fiscal y monetaria no cooperan, se pueden tener situaciones de indeterminación de equilibrio o de inexistencia de equilibrio. Lo que es más, la autoridad monetaria no puede reaccionar simultánea y tenazmente ante desviaciones del crecimiento monetario y la inflación respecto de sus objetivos, independientemente de la política fiscal que haya en curso. Con el nivel de gasto público determinado exógenamente, si los impuestos directos o los ingresos por emisión de dinero están en relación con el nivel de la deuda en términos reales, o el servicio de la deuda, cualquier ajuste en estas fuentes de ingresos pueden compensar el crecimiento del pago por intereses de la deuda que podrían hacer que la deuda creciera muy rápido. Cuando cualquiera de las dos autoridades ajusta sus instrumentos de manera que cada incremento en la deuda en términos reales coincida con un incremento en los ingresos actuales o futuros del sector público, se garantiza su solvencia y la deuda no crece demasiado. Aunque la actuación de las autoridades monetaria y fiscal tenga distintos efectos sobre variables como la inflación, por ejemplo, desde el punto de vista del cumplimiento de la restricción presupuestaria es simétrica.

Para que  $\lambda_{\pi g}$  se sitúe dentro el círculo unidad, la suma de los dos parámetros de política monetaria,  $\beta_{i\pi} + \beta_{ig}$ , debe ser menor que uno. Entonces, por un lado, si la autoridad fiscal se ocupa de que se verifique la restricción presupuestaria intertemporal consolidada, y fija  $\tau_1$  de tal manera que  $|\frac{1}{\beta} - \tau_1| < 1$ , entonces  $\beta_{i\pi}, \beta_{ig}$  o la suma de ambos debe estar en el círculo unidad para que haya un equilibrio único. Por otra parte, si  $\tau_1$  toma valores tales que

$$|\frac{1}{\beta} - \tau_1| > 1,$$

entonces los parámetros de política monetaria deben tomar valores que estén acotados entre cero y uno, para que la autoridad monetaria se encargue de satisfacer la restricción presupuestaria del sector público variando el tipo de interés de manera que la deuda siga teniendo valor. Cuando  $|\frac{1}{\beta} - \tau_1| < 1$ , la autoridad fiscal ajusta el nivel neto de impuestos lo suficiente para satisfacer la restricción presupuestaria del gobierno en respuesta a los shocks que afectan a la economía. En este caso, la restricción intertemporal del sector público y la regla de política monetaria determinan completamente el nivel de las variables fiscales<sup>6</sup>, y la equivalencia ricardiana se verifica.

Si se extrapola la división en regiones paramétricas de Leeper (1991, 1993) y Woodford (1995, 1996), al caso del modelo aquí analizado se tendría una primera región en la que los parámetros de la regla monetaria [ $\beta_{i\pi}, \beta_{ig}$  o su suma] son grandes y positivos, con lo que la autoridad monetaria contrae la oferta monetaria para hacer aumentar fuertemente el tipo nominal de interés en respuesta a presiones inflacionistas. Esta fuerte repuesta implica que la política

<sup>6</sup>No obstante, se puede tener en este caso un equilibrio en el que la deuda real explote pero no se viole la condición de transversalidad correspondiente a los bonos en términos reales.

monetaria ignora el estado de la deuda del gobierno, por lo que la política fiscal debe asegurar que la deuda en términos reales no crezca demasiado deprisa mediante la elección de un valor de  $\tau_1$  suficientemente grande y positivo [por ejemplo,  $\tau_1=0.8$ ].

En una segunda región en la que el tipo nominal respondiera debilmente a sus objetivos [directo de inflación, con  $\beta_{i\pi}$ , o indirecto de crecimiento monetario,  $\beta_{ig}$ ] fijando  $\beta_{i\pi}$  y  $\beta_{ig}$  iguales a cero, o en valores muy pequeños, es la autoridad monetaria la que equilibra el presupuesto si los impuestos directos responden debilmente a la deuda real [ con  $\tau_1=0.01$ , por ejemplo]. Entonces la deuda en términos reales no crece muy deprisa y el nivel de precios está unicamente determinado. En este caso se monetiza el déficit.

Habría dos regiones más en las que se da multiplicidad o inexistencia de equilibrios. Si las dos autoridades se preocupan de equilibrar el presupuesto, con lo que la monetaria hace el tipo nominal insensible a la inflación, mientras que la autoridad fiscal reacciona vigorosamente a la deuda, ninguna de las autoridades fija el nivel corriente de la oferta de dinero, con lo que ésta queda indeterminada y, por tanto, el nivel de precios también resulta indeterminado. Por otra parte, si ninguna autoridad evita que la deuda crezca demasiado deprisa, entonces la deuda real explota y no hay ningún equilibrio en el que la deuda tenga valor. Si se atiende a estas regiones paramétricas, sería necesario generar una discusión relativa a equilibrios del tipo *sunspot*. Esto queda lejos del objetivo de este Capítulo, aunque no es difícil de realizar en las líneas de lo expuesto en Sims (1999), Novales *et al.* (1999) o Benhabib y Farmer (1997).

### Análisis de estabilidad

Si la autoridad fiscal hace que  $|\frac{1}{\beta} - \tau_1| < 1$ , y la monetaria tiene un objetivo monetario intermedio puro [ $\beta_{i\pi} = 0, \beta_{ig} > 1$ ], entonces imponer estabilidad implica una reacción para estabilizar la demanda de dinero del tipo

$$\tilde{c}_t - \tilde{m}_t - \tilde{I}_t + \mu_\gamma \tilde{\gamma}_t = 0, \quad (4.39)$$

con  $0 < \mu_\gamma < 1$  y menor cuanto menor sea  $\rho_\gamma$ . Como la ecuación de demanda de dinero linealizada es

$$\tilde{m}_t = \tilde{c}_t + \tilde{\gamma}_t - \tilde{I}_t$$

entonces sumando las dos expresiones se tiene que

$$\tilde{m}_t = \tilde{c}_t + \tilde{I}_t + \frac{1 + \mu_\gamma}{2} \tilde{\gamma}_t$$

con lo que la actuación de la autoridad monetaria hace que los agentes reaccionen menos ante variaciones en la perturbación de demanda de dinero. Para garantizar estabilidad y existencia de solución, la autoridad monetaria tiene que asumir un compromiso de estabilizar la demanda de dinero. Es importante notar que cuando la política monetaria se instrumenta a través del objetivo intermedio de crecimiento monetario, sólo es necesario que la autoridad monetaria se fije

en el shock de demanda de dinero, sin preocuparse de las perturbaciones fiscal y tecnológica.

En cambio, si contemplamos el caso de un objetivo directo de inflación,  $\beta_{i\pi} > 1$  y  $\beta_{ig} = 0$ , la estabilidad implica una combinación lineal de  $c_t$ ,  $k_t$ ,  $W_{1t}$ ,  $W_{2t}$ ,  $z_t$  y  $G_t$ , y la posible inestabilidad de la demanda de dinero no influye en la estabilidad del equilibrio resultante.

Por otra parte, cuando  $|\frac{1}{\beta} - \tau_1| > 1$ , la política fiscal no se ajusta lo suficiente, y es la autoridad monetaria la que tiene que recaudar el señoriage suficiente para que se satisfaga la restricción consolidada de las administraciones públicas. La política monetaria reacciona de tal manera que liga el nivel de deuda pública al estado de la economía en cada periodo,

$$\tilde{b}_t = f(\tilde{c}_t, \tilde{I}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_{2t}, \tilde{g}_t, \tilde{z}_t, \tilde{\gamma}_t)$$

En el caso en que es objetivo intermedio de  $g_t$ , se tiene las mismas dos condiciones de estabilidad más la nueva de estabilidad de los bonos.

En todos los casos, imponer estabilidad en el lado real de la economía implica, independientemente de la política monetaria y fiscal en curso, parametrizar la expectativa del "lado real" de manera que

$$W_{2t} = a_0 k_t^{a_1} z_t^{a_2} G_t^{a_3} \quad (4.40)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, a_3$  son funciones del estado estacionario determinista de las variables.

## 4.4 Conclusiones

En este Capítulo, a modo de aplicación de algunas de las herramientas presentadas en los Capítulos previos, se han estudiado cuestiones de coordinación de políticas monetarias y fiscales. Se ha usado un modelo muy neutral en el que las actuaciones de las distintas autoridades están ligadas a través de la restricción presupuestaria intertemporal consolidada del gobierno.

Bajo una política de crecimiento monetario constante, la única manera de garantizar un equilibrio único en el que se valore la deuda es que el gobierno utilice una regla fiscal que reaccione al volumen de deuda. Lo contrario ocurre si la autoridad monetaria decide implementar una política de tipo nominal de interés constante. Cuando se considera una regla que relaciona el valor del tipo nominal de interés con la tasa de inflación y la tasa de expansión monetaria, la compatibilidad de políticas impone importantes restricciones sobre el modo en que la autoridad monetaria puede reaccionar a cada variable objetivo.



## Parte III

# Líneas de Investigación Futura



Dada la gran variedad de temas considerados a lo largo de la memoria de Tesis, el número de cuestiones interesantes susceptibles de ser objeto de estudios posteriores, o que ya están siendo consideradas en distintos trabajos en curso, es enorme. Apuntaré tan sólo las que juzgo más inmediatas.

Respecto al Capítulo 1, una extensión natural de la evaluación y comparación de métodos es su implementación en el contexto de modelos con una dinámica más interesante, como los de crecimiento endógeno [en este sentido se puede consultar el trabajo de Barañano, Iza y Vázquez (1999)], o modelos con más fuentes de perturbación exógena. Un tipo de economías difíciles de resolver y cuyo análisis genera actualmente un gran interés, son aquellas que tienen agentes heterogéneos, y sería interesante evaluar las distintas estrategias de solución que se están implementando en la actualidad.

El análisis realizado en el Capítulo 2 permite preguntarse, en el contexto del método de Parametrización de Expectativas, cómo seleccionar el valor del parámetro de ajuste en la convergencia,  $\lambda_q$ , de manera óptima y que se adecúe al problema y al momento del tiempo en que se está estimando. También sería interesante estudiar la sensibilidad del procedimiento al valor de la desviación típica de la perturbación tecnológica, que en la experiencia adquirida con el método de solución aparecía como especialmente relevante. Por último, una pregunta que ha quedado abierta en el Capítulo es la dependencia del valor *del punto fijo* obtenido, en muestras finitas, respecto de la realización concreta de las perturbaciones exógenas. Sería interesante investigar si en grandes muestras la distribución marginal obtenida de manera empírica para los coeficientes del polinomio de aproximación colapsa a una distribución degenerada en un punto.

Dadas las ventajas que presenta el método de descomposición de autovalores y autovectores para estudiar el tipo de cuestiones analizadas en el Capítulo 3, creo que es de interés profundizar en un método que permita *refinarlo* con la inclusión de algunas expectativas parametrizadas mediante funciones polinómicas, sobre todo en modelos con mucha dimensión. Por otro lado, también valdría la pena considerar cómo estimar el valor teórico de los parámetros de medias móviles, sin necesidad de tener que acudir a una solución aproximada o a una estimación numérica.

La parte monetaria, como se ha comentado en la presentación de la Tesis, deja numerosas cuestiones abiertas para las que ya dispongo de algún trabajo en curso. Una primera extensión engarza directamente con la evaluación tradicional de reglas monetarias. Así, con base en criterios de volatilidad de la inflación, se pueden considerar rangos de valores numéricos para los coeficientes de las reglas, en el contexto del modelo del Capítulo 4, y además realizar ejercicios de calibración para determinar en economías concretas el valor de dichos coeficientes, y determinar si cumplen o no criterios de optimalidad. Estos mismos ejercicios se pueden realizar con modelos más interesantes, en los que la no neutralidad permita considerar efectos de las reglas monetarias y fiscales sobre las variables reales de la economía. Otro punto de creciente interés en la literatura es la consideración de fronteras óptimas entre la varianza de la inflación y la varianza del producto. Usando un modelo no neutral en el que se considere explícitamente la interrelación de las políticas, este asunto es fácil de abordar.



**Parte IV**

**Referencias**



## Métodos de Solución

- Benhabib, J. y R. E. A. Farmer (1997), "Indeterminacy and Sunspots in Macroeconomics". Mimeo.
- Binder, M. y H. M. Pesaran (1998), "Multivariate Rational Expectations Models and Macroeconomic Modeling: A Review and Some New Results", en *Handbook of Applied Econometrics*, vol. 1, H.M. Pesaran y M. R. Wickens (eds.), Oxford: Blackwell.
- Björck, L. (1990), "Least Squares Methods", en el Capítulo *Solutions of Equations in  $R^n$  (Part 1)*, en *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet y J.L. Lions (eds.), North-Holland.
- Blanchard, O. y C. M. Kahn (1980), "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations", *Econometrica* 48, 1305–1313.
- Bona, J. L. y M. S. Santos (1997), "On the Role of Computation in Economic Theory", *Journal of Economic Theory* 72, 241–281.
- Campbell, J. (1994), "Inspecting the Mechanism: an Analytical Approach to the Stochastic Growth Model", *Journal of Monetary Economics* 33, 463–506.
- Chow, G. C. (1997), *Dynamic Economics*, Oxford University Press.
- Christiano, L. (1990), "Linear-Quadratic Approximation and Value-Function Iteration: A Comparison", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 99–113.
- Christiano, L. y J. Fisher (1999), "Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Forthcoming.
- Christiano, L. (1998), "Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients", *Documento de Trabajo T0225*, National Bureau of Economic Research.
- Cooley, T. F. y G. Hansen (1989), "The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model", *American Economic Review* 79, 733–748.
- Cooley, T. F. y E. C. Prescott (1995), "Economic Growth and Business Cycles", Chapter 1 en T. F. Cooley (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton.
- Danthine J. P. y J. Donaldson (1995), "Computing Equilibria of Nonoptimal Economies", Chapter 3 en T. F. Cooley (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton.

- den Haan, W. y A. Marcet (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Parameterized Expectations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 31-34.
- den Haan, W. y A. Marcet (1994), "Accuracy in Simulations", *Review of Economic Studies*, 61, 3-17.
- Díaz-Giménez, J. (1999), "Linear Quadratic Approximations", Capítulo 1 en *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, R. Marimón y A. Scott (eds.), Oxford University Press.
- Domínguez, E. (1995), "Características de la Estructura Intertemporal de Rentabilidades en un Modelo de Equilibrio General Estocástico", Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense de Madrid.
- Dotsey, M. y C. S. Mao (1992), "How Well Do Linear Approximation Methods Work?", *Journal of Monetary Economics* 29, 25-58.
- Engle, R. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica* 50, 987-1007.
- Farmer, R. E. A. (1993), *The Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*, MIT Press.
- Hansen, G. (1985), "Indivisible Labor and the Business Cycle", *Journal of Monetary Economics* 16, 309-327.
- Hansen, G. y E. C. Prescott (1995), "Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models", Capítulo 2 en T. F. Cooley (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton.
- İmrohoroğlu, S. (1994), "A Recursive Forward Simulation Method for Solving Rational Expectations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, 1051-1068.
- Judd, K. L. (1997), "Computational Economics and Economic Theory: Substitutes or Complements?", *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, 907-942.
- King, R., J. Plosser y S. Rebelo (1987), "Production, Growth and Business Cycles: Technical Appendix", *Documento de Trabajo*, Universidad de Rochester.
- Klein, P. (1998), "Using the Generalized Schur Form to Solve a System of Linear Expectational Difference Equations", *Documento de Trabajo*, Universidad de Estocolmo (IIES).
- Kydland, F.E. (1989), "The Role of Money in a Competitive Model of Business Fluctuations", Carneige-Mellon University.

- Kydland, F.E. y E.C. Prescott (1982), "Time to build and aggregate fluctuations", *Econometrica* 50, 1345–1370.
- Kydland, F.E. y E.C. Prescott (1996), "The Computational Experiment: An Econometric Tool", *Journal of Economic Perspectives* 10, 69–85.
- Lucas, R. (1980), "Methods and Problems in Business Cycle Theory", *Journal of Money Credit and Banking* 12, 696–715.
- Long, J. B. Jr. y C. I. Plosser (1983), "Real Business Cycles", *Journal of Political Economy* 91, 39–69.
- Marcet, A. (1993), "Simulation Analysis of Dynamic Stochastic Models", Capítulo 3 en C. A. Sims (ed.) *Advances in Econometrics*, Cambridge University Press.
- Marcet, A. y D. A. Marshall (1994), "Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Parameterized Expectations: Convergence to Stationary Solutions", *Institute for Empirical Macroeconomics*, Discussion Paper 91, Mayo.
- Marcet, A. y G. Lorenzoni (1999), "The Parameterized Expectations Approach: Some Practical Issues", Capítulo 7 en R. Marimón y A. Scott (eds.) *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press.
- Marimón R. y A. Scott (eds.) (1999), *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press.
- McCallum, B. (1998), "Solutions to Linear Rational Expectations Models: A Compact Exposition", *Documento de Trabajo T0232*, National Bureau of Economic Research.
- McCallum, B. (1983), "On Non-Uniqueness in Rational Expectations Models: An Attempt at Perspective", *Journal of Monetary Economics* 11, 139–168.
- Novales, A., E. Domínguez, J. J. Pérez y J. Ruiz (1999), "Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Eigenvalue/Eigenvector Decompositions", Capítulo 3 en *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, R. Marimón y A. Scott (eds.), Oxford University Press.
- Novales, A., E. Domínguez, J. J. Pérez y J. Ruiz (1999b), "Identifying the Moving Average Structure of Rational Expectations Errors: the Time-to-Build Technology". En preparación.
- Novales, A., E. Domínguez, J. J. Pérez y J. Ruiz (1999c), "An Identification Issue: Splitting Expectations in a Model with a Time-to-Build Technology". En preparación.

- Novales, A. y J. J. Pérez (1999), "An Evaluation of Some Solution Methods for Non-Linear Rational Expectations Models", Documento de Trabajo 9809, Instituto Complutense de Análisis Económico. En evaluación.
- Novales, A. (1993), "Econometría", Mc Graw-Hill.
- Ruiz, J. (1997), "Efectos de Políticas Fiscales en un Contexto de Crecimiento Endógeno con Acumulación de Capital Humano", Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense de Madrid.
- Sims, C. A. (1999), "Solving Linear Rational Expectations Models", *Computational Economics*. Forthcoming.
- Taylor, J. B. y H. Uhlig (1990), "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 1-17.
- Uhlig, H. (1999), "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily", Capítulo 2 en *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, R. Marimón y A. Scott (eds.), Oxford University Press.
- Zadrozny, P. A. (1998), "An Eigenvalue Method of Undetermined Coefficients for Solving Linear Rational Expectations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 1353-1373.

## Temas Monetarios

- Aiyagari, S. R. y R. A. Braun (1996), "Some Explorations into Optimal Cyclical Monetary Policy", *Documento de Trabajo* 565, Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Aiyagari, S. R. y M. Gertler (1985), "The Baking of Government Debt and Monetarism", *Journal of Monetary Economics* 16, 19-44.
- Ball, M. (1997), "Efficient Rules for Monetary Policy", *Documento de Trabajo* 5952, National Bureau of Economic Research.
- Benhabib, J., S. Schmitt-Grohé y M. Uribe (1998), "Monetary Policy and Multiple Equilibria", *FEDS Discussion Paper* 1998-29.
- Bernanke, B. y F. S. Mishkin (1997), "Inflation Targeting: a New Framework for Monetary Policy", *Journal of Economic Perspectives* 11, 97-116.
- Bundesbank (1998), "January 1998 Report", *Deutsche Bundesbank*.
- Bryant, R., P. Hooper y C. Mann (1993), *Evaluating Policy Regimes: New Empirical Research in Empirical Macroeconomics*, Brookings Institution, Washington D.C.

- Canzoneri, M. B. y B. Diva (1997), "Restricciones Fiscales a la Independencia de los Bancos Centrales y a la Estabilidad de Precios", Capítulo 6 en *La Política Monetaria y la Inflación en España*, Alianza Editorial / Banco de España.
- Canzoneri, M. B. y H. Dellas (1995), "Real Interest Rates and the Central Bank Operating Procedures", *Journal of Monetary Economics* 42, 471-494.
- Carlstrom, C. T. y T. S. Fuerst (1995), "Interest Rate Rules vs. Money Growth Rules. A Welfare Comparison in a Cash-in-Advance Economy", *Journal of Monetary Economics* 36, 247-267.
- Christiano, L. y C. J. Gust (1999), "Taylor Rules in a Limited Participation Model", *Documento de Trabajo* 7017, National Bureau of Economic Research.
- Christiano, L. y M. Eichenbaum (1992), "Current Real Business Cycle Theory and Aggregate Labor Market Fluctuations", *American Economic Review* 82, 430-450.
- Clarida, R., J. Gali y M. Gertler (1999), "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective", *Journal of Economic Perspectives*, próximo a aparecer.
- Clarida, R., J. Gali y M. Gertler (1998), "Monetary Policy Rules in Practice: Some International Evidence", *European Economic Review* 42, 1033-1068.
- Defina, R. H., T. C. Stark y H. E. Taylor (1996), "The Long-Run Variance of Output and Inflation under Alternative Monetary Policy Rules", *Journal of Macroeconomics* 18, 235-251.
- Feenstra, R. C. (1986), "Functional Equivalence between the Liquidity Costs and the Utility of Money", *Journal of Monetary Economics* 17, 271-291.
- Fernández, E. (1999), "Restricciones de Liquidez, Financiación Pública y Elección Óptima de Instrumentos Monetarios", Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense de Madrid.
- Fischer, S. (1986), *Indexing, Inflation and Economic Policy*, MIT Press.
- Fuhrer, J. (1997), "Inflation/Output Variance Trade-Offs and Optimal Monetary Policy", *Journal of Money, Credit and Banking* 29, 214-234.
- Gavin, W. T. y F. E. Kydland (1995), "Endogenous Money Supply and the Business Cycle", Research Division, *Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper* 95-010B,
- Henderson, D. y J. Kim (1997), "The Choice of a Monetary Policy Reaction Function in a Simple Optimizing Model", *Board of Governors of the Federal Reserve System*, mimeo.

- Hoogenveen, V. y E. Sterken (1999), "Parameterization of Model-Consistent Expectations in Monetary Policy Models", *Applied Financial Economics* 9, 193-200.
- Ireland, P. (1997), "A Small, Structural, Quarterly Model for Monetary Policy Evaluation", *Carneige-Rochester Conference Series on Public Policy* 47, 83-108.
- Journal of Monetary Economics* (1999), "Special Issue: Monetary Policy Rules" 43, 521-704.
- Journal of Monetary Economics* (1997), "Rules and Discretion in Monetary Policy" 39, 1-141.
- Kim, J. (1997), "Monetary Policy in a Stochastic Equilibrium Model with Real and Nominal Rigidities", Board of Governors of the Federal Reserve System. Mimeo.
- Kim, S. (1997a), "Monetary Instrument Problem Revisited by Specifying Appropriate Fiscal Policy", Banco de España. Mimeo.
- Kim, S. (1997b), "Monetary Policy Rules and Business Cycles", Banco de España. Mimeo.
- Khoury, S. S. (1990), "The Federal Reserve Reaction Function: A Specification Search", en T. Mayer (ed.) *The Political Economy of American Monetary Policy*, Cambridge University Press, 27-41.
- Lee, J. (1999), "The Inflation and Output Variability Tradeoff: Evidence from a Garch Model", *Economics Letters* 62, 63-67.
- Leeper, E. (1997), "A Small, Structural, Quarterly Model for Monetary Policy Evaluation: A Comment", *Carneige-Rochester Conference Series on Public Policy* 47, 109-120.
- Leeper, E., C.A. Sims y T. Zha (1996), "What Does Monetary Policy Do?", *Brooking Papers on Economic Activity* 2, 1-78.
- Leeper, E. y C. A. Sims (1994), "Toward a Modern Macroeconomic Model Usable for Policy Analysis", *NBER Macroeconomics Annual*, 81-118.
- Leeper, E. (1993), "The Policy Tango: Toward a Holistic View of Monetary and Fiscal Effects", *Economic Review* 78, 1-27, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Leeper, E. (1991), "Equilibria under 'Active' and 'Passive' Monetary and Fiscal Policies", *Journal of Monetary Economics* 27, 129-147.
- Lucas, R. E. (1976), "Economic Policy Evaluation: A Critique", *Carneige-Rochester Conference Series on Public Policy* 1, 19-46.

- Lucas, R. E. (1973), "Some International Evidence on Output-Inflation Trade-offs", *American Economic Review* 63, 326-334.
- Mankiw, G. (1994), *Monetary Policy*, University of Chicago Press.
- Mc Callum, B. (1997), "Issues in the Design of Monetary Policy Rules", *Documento de Trabajo* 6016, National Bureau of Economic Research.
- Mc Callum, B. (1986), "Some Issues Concerning Interest Rate Pegging, Price Level Determinacy and the Real Bills Doctrine", *Journal of Monetary Economics* 17, 135-150.
- Mc Callum, B. (1981), "Price Level Determinacy with an Interest Rate Policy Rule and Rational Expectations", *Journal of Monetary Economics* 8, 319-329.
- Mc Callum, B. y E. Nelson (1999), "Nominal Income Targetting in an Open Economy Optimizing Model", *Journal of Monetary Economics* 43, 553-578.
- Mishkin, F. S. (1999), "International Experiences with Different Monetary Policy Regimes", *Journal of Monetary Economics* 43, 579-605.
- Mishkin, F. S. y A. S. Posen (1997), "Inflation Targeting: Lessons from Four Countries", *Documento de Trabajo* 6126, National Bureau of Economic Research.
- Novalés, A. (1992), "Price Volatility Under Alternative Monetary Instruments", *Documento de Trabajo* 9306, Instituto Complutense de Análisis Económico.
- Pérez, J. J. (1999), "Monetary Policy Rules and Inflation Volatility under Fiscal Constraints", *Documento de Trabajo* 12, Instituto de Estudios Económicos de Galicia.
- Poole, W. (1970) "Optimal Choice of Monetary Policy Instruments in a Simple Stochastic Macro Model", *Quarterly Journal of Economics* 84, 197-216.
- Rotemberg, J. y M. Woodford (1998), "Interest-Rate Rules in an Estimated Sticky Price Model" *Documento de Trabajo* 6618, National Bureau of Economic Research.
- Sargent, T. J. (1979), *Macroeconomic Theory*, New York: Academic Press.
- Sargent, T. J. y N. Wallace (1982), "The Real-Bills Doctrine versus the Quantity Theory: A Reconsideration", *Journal of Political Economy* 90, 1212-1236.
- Sargent, T. J. y N. Wallace (1981), "Some Unpleasant Monetarist Arithmetic", *Quarterly Review* 5, 1-17, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

- Sargent, T. J. y N. Wallace (1975), "Rational' Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule", *Journal of Political Economy* 83, 241-254.
- Schmitt-Grohé, S. y M. Uribe (1997), "Price Level Determinacy and Monetary Policy under a Balanced-Budget Requirement", *FEDS Discussion Paper* 97-17.
- Sidrauski, M. (1967), "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy", *AER Papers and Proceedings* 57, 534-544.
- Sims, C. A. (1997), "Fiscal Foundations of Price Stability in Open Economies", mimeo, Yale University.
- Sims, C. A. (1995), "Econometric Implications of the Government Budget Constraint", mimeo, Yale University.
- Sims, C. A. (1994), "A Simple Model for Study of the Determination of the Price Level and the Interaction of Monetary and Fiscal Policy", *Economic Theory* 4, 381-399.
- Sims, C. A. (1989), "Models and Their Uses", *American Journal of Agricultural Economics* 2, 489-494.
- Stuart, A. (1996), "Simple Monetary Policy Rules", *Quarterly Bulletin* 36, 281-287, Bank of England.
- Svensson, L. (1999), "Price Stability as a Target for Monetary Policy: Defining and Maintaining Price Stability", Conferencia *The Monetary Transmission Process: Recent Developments and Lessons for Europe*, Deutsche Bundesbank.
- Taylor, J. B. (1999), "The Robustness and Efficiency of Monetary Policy Rules as Guidelines for Interest Rate Setting by the European Central Bank", *Journal of Monetary Economics* 43, 655-679.
- Taylor, J. B. (ed.) (1999b), *Monetary Policy Rules*, Chicago University Press. Próximo a aparecer.
- Taylor, J. B. (1996), "Policy Rules as a Means to a More Effective Monetary Policy", *Bank of Japan Monetary and Economic Studies* 14, 28-39.
- Taylor, J. B. (1994), "The Inflation/Output Variability Trade-Off Revisited", en J. C. Fhurer (ed.) *Goals, Guidelines and Constraints Facing Monetary Policymakers*, Federal Reserve Bank of Boston.
- Taylor, J. B. (1993), *Macroeconomic Policy in the World Economy: From Econometric Design to Practical Operation*, New York, W.W. Norton.

Woodford, M. (1996), "Control of the Public Debt: a Requirement for Price Stability?", *Documento de Trabajo* 5952, National Bureau of Economic Research.

Woodford, M. (1995), "Price Level Determinacy without the Control of a Monetary Aggregate", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 42, 1-46.



Parte V

Apéndices



# Apéndice A

## Apéndice Técnico: Métodos de Solución

### A.1 Introducción

En este Apéndice se tratan dos cuestiones:

- Se realiza una descripción detallada y exhaustiva de los métodos numéricos de solución utilizados a lo largo de la Tesis y de manera especial en la Parte I.
- Se proporciona una descripción detallada de cómo resolver cada uno de los modelos presentados en el Capítulo 1 [modelo de crecimiento neoclásico básico, modelo de Hansen (1985) y modelo de Cooley y Hansen (1989)] con cada uno de los métodos usados: una aproximación lineal cuadrática estándar usando la ecuación de Bellman (LQA), un método de coeficientes indeterminados que resuelve la versión lineal en logaritmos del modelo original (UHL), un método que explota exhaustivamente la descomposición de autovalores y autovectores del sistema lineal (SIM, SIL), y una estrategia no lineal (Parametrización de Expectativas, PEA).

### A.2 Descripción de los métodos de solución

#### A.2.1 Métodos “casi” lineales

##### Aproximación lineal cuadrática estándar

La estrategia LQA consiste en aproximar un problema que no es lineal cuadrático mediante uno con estructura lineal cuadrática del que siempre se conoce la solución. Diversos trabajos en los que se aplica el método que se va a describir a continuación son, entre muchos otros, Kydland y Prescott (1982), Christiano (1990), Díaz-Giménez (1999) o Hansen y Prescott (1995). En todos estos

artículos, resolver el problema del planificador social implica resolver un problema de programación dinámica de la forma:

$$V^{n+1}(z_t, s_t) = \max_{d_t} \{r(z_t, s_t, d_t) + \beta E[V^n(z_{t+1}, s_{t+1}|z_t)]\} \quad (\text{A.1})$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = A\varepsilon_{t+1} + B(z_t, s_t, d_t) \quad (\text{A.2})$$

donde  $V^n(z_t, s_t)$  es la  $n$ -ésima iteración en la función valor óptima,  $\beta$  el factor de descuento,  $z_t$  un vector de variables de estado exógenas,  $s_t$  un vector de variables de estado endógenas,  $d_t$  un vector de variables de decisión,  $r(z_t, s_t, d_t)$  la función de retorno del problema,  $\varepsilon_t$  un vector de procesos estocásticos independientes e idénticamente distribuidos, y donde las restricciones describen la evolución de las variables de estado. Para resolver este problema se puede operar directamente con la función valor. Lo que LQA hace es realizar una aproximación lineal a la economía original descrita por (A.1) y (A.2) alrededor del estado estacionario determinista, y después buscar la solución a la economía aproximada, que es conocida. Los pasos son:

1. Calcular las condiciones de primer orden y el estado estacionario determinista.
2. Sustituir las restricciones no lineales de entre el conjunto de restricciones (A.2), en la función de retorno,  $r$ .
3. Realizar una aproximación de Taylor de segundo orden de la función de retorno resultante alrededor del estado estacionario determinista. Haciendo uso del principio del equivalente cierto, el problema (A.1)-(A.2) aproximado queda,

$$V^{n+1}(z_t, s_t) = \max_{d_t} \{[1, z_t, s_t, d_t]Q[1, z_t, s_t, d_t]^T + \beta V^n(z_{t+1}, s_{t+1}|z_t)\} \quad (\text{A.3})$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = B[z_t, s_t, d_t] \quad (\text{A.4})$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica y  $^T$  denota transposición matricial. Bajo condiciones apropiadas, la función valor óptima existe, resuelve esta ecuación funcional y es cuadrática. Como consecuencia, las reglas de decisión asociadas son lineales.

4. Suponer una conjetura cuadrática inicial para  $V^0$ ,

$$V^0(z_{t+1}, s_{t+1}) = [1, z_{t+1}, s_{t+1}]L_{LQA}^0[1, z_{t+1}, s_{t+1}]^T$$

donde  $L_{LQA}^0$  es una matriz simétrica y semidefinida negativa. Entonces, usando las leyes de movimiento de los estados, (A.4), se puede calcular  $V^0(z_{t+1}, s_{t+1})$  y así obtener una expresión cuadrática en  $z_t$ ,  $s_t$  y  $d_t$  para  $V^1(z_t, s_t)$ , agrupando los coeficientes que afectan sólo a variables de estado, sólo a variables de decisión y los términos cruzados en los que aparecen los dos tipos de variables. Por tanto, es posible escribir,

$$V^1(z_{t+1}, s_{t+1}) = \max_{d_t} [1, z_t, s_t] M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ z_t \\ s_t \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ z_t \\ s_t \end{bmatrix} M_2 d_t + d_t M_3 d_t^T$$

donde  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son matrices de coeficientes adecuadamente reordenados.

5. Las condiciones de primer orden de este problema aproximado nos proporcionan las reglas de decisión o reglas de política,  $d_t$ , como función lineal de  $z_t$  y  $s_t$ ,

$$d_t = -M_3^{-1} M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ z_t \\ s_t \end{bmatrix}$$

en cada iteración. Entonces se sustituye la regla de decisión en el problema aproximado y se obtiene la función valor óptima para  $V^1(z_t, s_t)$ .

6. Repetir el proceso hasta que  $V^{n+1}$  sea muy similar (de acuerdo con algún criterio) a  $V^n$ .

La solución al problema lineal cuadrático produce una función lineal que nos da las decisiones a partir de los estados de la economía,  $d_t = H[1, z_t, s_t]^T$ , donde  $H$  es una matriz que tiene tantas filas como variables de decisión haya en  $d_t$ . Para generar series temporales artificiales se utiliza el problema no lineal original (función de producción, restricción de recursos, ley de movimiento del capital) más la/s regla/s de decisión lineales. Este es el proceso seguido para resolver el modelo básico de crecimiento neoclásico y el de Hansen (1985). En el primer modelo, el resultado del algoritmo es una regla de decisión lineal para la inversión como función de la tecnología y el capital retardado. Para el modelo de Hansen (1985) se obtienen dos reglas de decisión lineales, una para la inversión y otra para las horas trabajadas, como funciones de la tecnología y el capital retardado. Para el modelo monetario se necesitan cambios muy importantes en el proceso descrito, debido a la distorsión que introduce la restricción de *efectivo por adelantado*. Además de realizar una aproximación cuadrática a la función de retorno, es necesario suponer que la ley de movimiento de la inversa de los saldos reales en dinero es lineal en las variables de estado. Estos cambios se describen en detalle en Kydland (1989) y Cooley y Hansen (1989), y como no es un método que se haya implementado en ningún Capítulo de esta Tesis Doctoral, no se entrará en su análisis.

### Coefficientes Indeterminados

Este método consiste en linealizar las ecuaciones que caracterizan el equilibrio y resolver el sistema resultante usando el método de los coeficientes indeterminados para obtener la ley recursiva de equilibrio. Se usará la propuesta de Uhlig (1999). Contribuciones muy relacionadas son King, Plosser y Rebelo (1987), Campbell (1994), Binder y Pesaran (1998) y Christiano (1998). Para una descripción del método de coeficientes indeterminados se puede ver, por ejemplo, McCallum (1983, 1998) o Chow (1997). Los pasos a seguir son:

1. Calcular las condiciones de primer orden y el estado estacionario determinista.
2. Linealizar, en logaritmos de las variables, las ecuaciones que caracterizan el equilibrio para hacer el sistema aproximadamente lineal en desviaciones logarítmicas respecto al estado estacionario determinista. Para esto en Uhlig (1999) se proponen una serie de simplificaciones muy útiles,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &\equiv \log(X_t) - \log(X_{ss}) \iff X_t = X_{ss} e^{\tilde{x}_t}, \\ e^{\tilde{x}_t + a\tilde{y}_t} &\approx 1 + \tilde{x}_t + a\tilde{y}_t, \text{ donde } \tilde{x}_t \tilde{y}_t \approx 0, \end{aligned}$$

y

$$E_t [ae^{\tilde{x}_{t+1}}] \approx E_t [a\tilde{x}_{t+1}] \text{ más una constante.}$$

donde el subíndice *ss* denota valor de estado estacionario.

3. Escribir el sistema en la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \Upsilon_1 s_t + \Upsilon_2 s_{t-1} + \Upsilon_3 v_t + \Upsilon_4 z_t \\ 0 &= E_t [\Upsilon_5 s_{t+1} + \Upsilon_6 s_t \\ &\quad + \Upsilon_7 s_{t-1} + \Upsilon_8 v_{t+1} + \Upsilon_9 v_t + \Upsilon_{10} z_{t+1} + \Upsilon_{11} z_t] \\ z_{t+1} &= \Upsilon_{12} z_t + \varepsilon_{t+1}, \quad E_t [\varepsilon_{t+1}] = 0, \end{aligned} \tag{A.5}$$

donde  $s_t$  denota un vector  $m \times 1$  con las variables de estado endógenas,  $z_t$   $m \times 1$  contiene los estados exógenos y  $v_t$  es un vector formado por el resto de variables endógenas del sistema, de tamaño  $n \times 1$ . La matriz  $\Upsilon_3$  tiene una dimensión  $l \times n$ ,  $l \geq n$  con rango  $n$ ,  $\Upsilon_5$  es de tamaño  $(m+n-l) \times n$ , y la matriz  $\Upsilon_{12}$  sólo tiene autovalores estables.

4. Si se denota a la ley de movimiento de equilibrio del sistema por aquellas matrices  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$ ,  $\Xi_3$  y  $\Xi_4$  que hacen estable el sistema,

$$\begin{bmatrix} s_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_3 & \Xi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t-1} \\ z_t \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

5. Entonces el siguiente paso consiste en encontrar estimaciones para los elementos de las matrices  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$ ,  $\Xi_3$  y  $\Xi_4$  mediante la igualación de coeficientes entre el sistema (A.5) y el sistema (A.6) usando el conocido método

de los coeficientes indeterminados, y elegir los valores que hacen (A.6) estable. Para ello se debe resolver una ecuación matricial cuadrática en un cierto punto del proceso y seleccionar sus raíces estables. Este asunto hace que la implementación del método UHL sea más compleja que la de la descomposición de autovalores y autovectores de las estrategias SIM-SIL. No obstante, al disponer de los programas de Harald Uhlig en MATLAB en la red que realizan todos los cálculos difíciles, resulta un método de fácil aplicación en el caso de los modelos que se han analizado en el Capítulo 1.

Una vez hecho todo esto, se pueden generar fácilmente series temporales de tamaño  $T$  para todos los elementos de  $s_t$  y  $v_t$  usando la representación en espacio de los estados (A.6) y dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ .

Como en este Apéndice lo que se hace es resolver los modelos del Capítulo 1, se usaran las rutinas programadas por H. Uhlig, con lo que sólo se darán para cada modelo las expresiones de las matrices  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3, \Upsilon_4, \Upsilon_5, \Upsilon_6, \Upsilon_7, \Upsilon_8, \Upsilon_9, \Upsilon_{10}, \Upsilon_{11}, \Upsilon_{12}$  y  $\Sigma$  que actúan como inputs en las rutinas disponibles por Internet. También se mostrarán las estimaciones de  $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$  y  $\Xi_4$  que devuelve el paquete. Los programas están disponibles en el disco que acompaña esta Tesis Doctoral.

### Descomposición de autovalores y autovectores

El método analizado en esta sección descansa de manera muy importante en Blanchard y Kahn (1980) y, especialmente en Sims (1999), y está explicado en detalle y aplicado a diferentes contextos en Novales *et al.* (1999). Su característica específica es que cada esperanza condicional se considera como una variable adicional para la que hay que resolver, y se define como el valor realizado de la función dentro de la expectativa más un error de predicción. Las condiciones de estabilidad asociadas a la aproximación lineal se añaden al problema no lineal original. En cada uno de los modelos que se consideran, la condición de estabilidad toma la forma de una función altamente no lineal que relaciona la esperanza condicional en cada instante  $t$  con los estados exógenos contemporáneos y los estados endógenos retardados. Los pasos a seguir son:

1. Obtener las condiciones de primer orden del problema. Se define cada expectativa condicional como una nueva variable,  $W_t$ , que se añade al sistema de condiciones de primer orden y restricciones, y también se añade una ecuación definiendo el error de expectativas asociado a cada esperanza condicional. A partir del sistema resultante se calcula el estado estacionario.
2. Linealizar en niveles de las variables (SIM) el sistema de ecuaciones resultante en torno al estado estacionario (o en logaritmos en el caso del método que se está llamando SIL). Esto nos da,

$$\Gamma_0 u_{t+1} = \Gamma_1 u_t + \Psi \varepsilon_{t+1} + \Pi \eta_{t+1} \quad (\text{A.7})$$

donde  $u_t$  es un subconjunto del vector  $\{s_t, v_t, z_t, W_t\}$ ,  $\varepsilon_t$  contiene las innovaciones en las leyes de movimiento de los estados exógenos, y  $\eta_t$  es un vector que contiene los errores de expectativas.

3. Realizar el análisis de estabilidad del sistema anterior. Se localizan las raíces inestables del par  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ . Sólo hay una raíz de esas características en cada uno de los modelos analizados. La matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$  tiene una descomposición de Jordan  $P\Lambda P^{-1}$ , donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal que contiene los autovalores de  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$  y  $P^{-1}$  es una matriz que tiene como filas los autovectores por la izquierda asociados.
4. Encontrar la condición de estabilidad. Una solución estacionaria del modelo requiere que las sendas temporales de las variables estén sobre la variedad estable del espacio de soluciones admisibles, lo que se puede obtener imponiendo que una combinación lineal de las variables sea cero en cada periodo. Sean  $w_{t-1} = P^{-1}u_{t-1}$  y  $\xi_t = P^{-1}\Gamma_0^{-1}(\Psi\varepsilon_t + \Pi\eta_t)$ . Sean  $w_{s,t-1}$  y  $\xi_{s,t}$  aquellas posiciones asociadas con los autovalores inestables. Entonces se puede escribir el sistema (A.7) como

$$w_{s,t} = \Lambda_2 w_{s,t-1} + \xi_{s,t}.$$

donde se ha ordenado el sistema de manera que los autovalores inestables estén en  $\Lambda_2$ . Así, resolviendo hacia delante este conjunto de ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} w_{s,t-1} &= \Lambda_2^{-1} w_{s,t} + \Lambda_2^{-1} \xi_{s,t} \\ &= (\Lambda_2^{-1})^j E_{t-1} w_{s,t+j-1} + E_{t-1} \sum_{i=0}^j (\Lambda_2^{-1})^i \xi_{s,t+i} \\ &= E_{t-1} \sum_{i=0}^{\infty} (\Lambda_2^{-1})^i \xi_{s,t+i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

si y sólo si se verifican las condiciones de transversalidad del problema. Entonces, si  $P^s$  contiene las filas de  $P^{-1}$  asociadas con los autovalores inestables, un equilibrio estacionario debe satisfacer que,

$$P^s u_t = 0, \quad \forall t \tag{A.8}$$

Como se explica en Novales *et al.* (1999), esta condición se puede escribir de manera que se relacionen la expectativa condicional,  $W_t$ , con el resto de las variables en  $u_t$  de una manera lineal o exponencial, dependiendo de si se está usando la aproximación SIM o la SIL. Asimismo, relaciona el vector de errores de expectativas racionales con el vector de innovaciones en los shocks exógenos, de manera que de la condición (A.8) en (A.7) se puede escribir,

$$P^s \Gamma_0^{-1} (\Psi \varepsilon_t + \Pi \eta_t) = 0$$

con lo que los errores racionales de expectativas son función sólo de las innovaciones en los shocks que afectan a la economía (tecnología, preferencias...). Esto es, si hay un equilibrio de expectativas racionales único, las expectativas deben ser función única de los *fundamentos* de la economía. Con este tipo de representaciones resulta inmediato acomodar situaciones en las que el equilibrio no queda suficientemente determinado y se tiene inexistencia de equilibrio, o cuestiones en las que hay una multiplicidad de equilibrios, y se puede explotar, por tanto, el papel de las *creencias* y los *sunspot equilibria*, como se hace, por ejemplo, en Farmer (1993) y Benhabib y Farmer (1997).

Para simular la economía aproximada se toman las ecuaciones de la economía original (condiciones de Euler, función de producción, restricción de recursos, ley de movimiento del capital) y se resuelve la expectativa usando la condición de estabilidad. Mezclar la estructura original no lineal con la condición de estabilidad implica resolver en cada paso del proceso de simulación un sistema de ecuaciones no lineal, y por esto el método de solución tiende a ser más intensivo en tiempo de computación que otros métodos basados en aproximaciones lineales.

### A.2.2 Parametrización de Expectativas

Este método consiste en parametrizar las expectativas que aparecen en las ecuaciones de Euler estocásticas. Cada esperanza condicional se especifica como una función de los estados del sistema, y los parámetros de dicha función se estiman antes de resolver el modelo. Para una exposición detallada puede consultarse den Haan y Marcet (1990), Marcet (1993), Marcet y Marshall (1994) y Marcet y Lorenzoni (1999). Los pasos a seguir para resolver son:

1. Calcular las condiciones de primer orden del problema y el estado estacionario determinista.
2. Sustituir cada esperanza condicional,  $W_t$ , por una función polinomial parametrizada  $\psi_t(q; s_t, z_t)$ , donde  $q$  es un vector de parámetros. Sea  $\hat{W}_t$  el valor realizado de  $W_t$ . En términos generales  $\psi_t$  debería aproximar la expectativa arbitrariamente bien al incrementar el orden del polinomio.
3. Elegir un valor inicial para  $q$  [ver Capítulo 2].
4. Utilizar las condiciones de primer orden y las restricciones del problema (con la esperanza condicional sustituida por  $\psi_t(q; s_t(q), z_t)$ ) para generar series temporales de las variables de la economía:  $s_t(q)$ ,  $v_t(q)$ . El  $q$  inicial debe ser tal que esté garantizado que  $s_t(q)$  y  $v_t(q)$  sean estacionarias.
5. Sea  $S : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ , donde  $m$  es la dimensión de  $q$ , y

$$S(q) = \operatorname{argmin}_q E_t \left[ \hat{W}_t(q) - \psi_t(q; s_t(q), z_t) \right]^2.$$

6. Iterar hasta que  $q = S(q)$ . Esto garantiza que si los agentes usan  $\psi_t$  como la función con la que realizan sus expectativas, entonces  $q$  es el mejor vector de parámetros que podrían usar en el sentido de que minimiza el error cuadrático medio entre la aproximación y la verdadera expectativa. Para encontrar cada  $q^{i+1}$  a partir de un  $q^i$  previo, se toma la suma de cuadrados de residuos de una regresión no lineal de  $\hat{W}_t(q^i)$  sobre  $\psi_t(q^i; s_t(q^i), z_t)$  como una aproximación a  $S(q^i)$ . El procedimiento seguido ha sido un algoritmo del tipo *Gauss-Newton*, que se describe más abajo. Se actualiza  $q$  usando la regla

$$q^{i+1} = q^i + \lambda_q S(q^i)$$

donde  $\lambda_q$  controla el grado de actualización en cada iteración. En todas las aplicaciones se ha fijado  $\lambda_q = 1$  excepto cuando  $\eta = 0.5$ , que se eligió  $\lambda_q = 0.5$ .

7. Generar un nuevo conjunto de series temporales con  $q^{i+1}$ . Repetir hasta que

$$\|q^{i+1} - q^i\| < 0.0001.$$

### Algoritmo Gauss-Newton utilizado

La discusión en este apartado se basa en Björck (1990) y Novales (1993). Las condiciones de primer orden que se aproximan al parametrizar la expectativa con el procedimiento PEA implican, como se ha descrito más arriba, minimizar una suma de residuos al cuadrado. Esto es, se quiere elegir el vector de parámetros  $q$  tal que la diferencia absoluta entre  $\hat{W}_t(q)$  y  $\psi_t(q; s_t(q), z_t)$  sea mínima. Se denotará por  $\hat{U}_t$  a la diferencia

$$\hat{U}_t = \hat{W}_t - \psi_t(q; s_t(q), z_t), \quad (\text{A.9})$$

en cada instante del tiempo  $t$ . Y la suma residual será entonces,

$$SR(q) \equiv \sum_{t=1}^T \hat{U}_t^2 = \sum_{t=1}^T \left( \hat{W}_t - \psi_t(q; s_t(q), z_t) \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

Derivando con respecto a cada uno de los componentes del vector  $q$ , se tiene que

$$\frac{\partial SR(q)}{\partial q} = \left[ \frac{\partial \psi(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right]^T \hat{U} = 0 \quad (\text{A.11})$$

donde la misma letra sin subíndice temporal denota un vector con el valor de la variable en todos los instantes del tiempo. El vector  $q$  que resuelve el sistema anterior es el estimador de mínimos cuadrados no lineales.

Si se supone que se tiene una estimación  $\hat{q}$  del mínimo  $q$  de  $SR(q)$  (una buena condición inicial, en términos de la discusión del Capítulo 2), en un entorno pequeño del punto  $\hat{q}$ , el valor numérico de  $SR$  en un punto de este

entorno puede aproximarse mediante un desarrollo de Taylor de segundo orden,  $SR(q) \approx SR_a(q)$ ,

$$SR_a(q) = SR(\hat{q}) + \left[ \frac{\partial SR(\hat{q})}{\partial q} \right]^T (q - \hat{q}) + \frac{1}{2} (q - \hat{q})^T \left[ \frac{\partial^2 SR(\hat{q})}{\partial q \partial q^T} \right] (q - \hat{q}) \quad (\text{A.12})$$

Se puede mejorar la estimación disponible de  $\hat{q}$  reemplazándola por el vector que minimice la expresión cuadrática anterior, lo que ocurre en el punto  $q^*$  en el que

$$\frac{\partial SR_a(q^*)}{\partial q} = \frac{\partial SR(\hat{q})}{\partial q} + \left[ \frac{\partial^2 SR(\hat{q})}{\partial q \partial q^T} \right] (q^* - \hat{q}) = 0$$

esto es,

$$q^* = \hat{q} - \left[ \frac{\partial^2 SR(\hat{q})}{\partial q \partial q^T} \right]^{-1} \frac{\partial SR(\hat{q})}{\partial q} \quad (\text{A.13})$$

De manera que, partiendo de un punto lo suficientemente cercano al óptimo, se puede iterar en la expresión (A.13) para acercarse lo más posible al mínimo de la suma residual. El punto  $q^*$  minimiza realmente el valor de la función (A.12) en un entorno de  $\hat{q}$  si la matriz hessiana  $\partial^2 SR(\hat{q})/\partial q \partial q^T$  es definida positiva, lo que está garantizado si  $SR$  es convexa en el punto  $\hat{q}$ , es decir, si  $\hat{q}$  estaba ya próximo a un mínimo local de la función  $SR$ .

Para la utilización de este algoritmo (conocido como algoritmo de *Newton-Raphson*) es preciso que existan las derivadas que forman el gradiente de la suma residual y que la matriz hessiana sea invertible. Cuando esta matriz es singular, significa que la superficie que se pretende optimizar es plana en algunas direcciones, con lo que algunos de los parámetros que se está tratando de estimar no están identificados. Este es el caso cuando se introducen términos redundantes en el polinomio de aproximación de Parametrización de Expectativas.

Es fácil ver, respecto al problema de escoger el valor de  $q$  que minimice (A.10), que el gradiente es

$$\frac{\partial SR(q)}{\partial q} = -2 \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} U_t$$

y la matrix hessiana,

$$\frac{\partial^2 SR(q)}{\partial q \partial q^T} = 2 \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right] \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right]^T - 2 \left[ \frac{\partial^2 \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q \partial q^T} \right] U_t$$

con lo que (A.13) queda

$$q^* = \hat{q} - \left\{ \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right] \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right]^T - \left[ \frac{\partial^2 \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q \partial q^T} \right] \right\}^{-1} \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} U_t \quad (\text{A.14})$$

y se puede demostrar que

$$\hat{q} \sim N \left( q, \sigma_U^2 \left[ \frac{\partial^2 SR(\hat{q})}{\partial q \partial q^T} \right]^{-1} \right)$$

donde  $\sigma_U^2$  es la expresión de la varianza residual. Como caso particular del algoritmo anterior, el algoritmo que se conoce como de *Gauss-Newton* consiste en ignorar el término dentro del hessiano que contiene la derivada segunda de  $\psi_t$ . Si  $\psi_t(q; s_t(q), z_t)$  es aproximadamente cuadrática en  $q$ , entonces el término que contiene la segunda derivada es aproximadamente proporcional a la suma de los residuos, por lo que su contribución al hessiano es muy pequeña. De esta manera se tiene que (A.14) queda,

$$q^* = \hat{q} - \left\{ \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right] \times \left[ \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} \right]^T \right\}^{-1} \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} U_t \quad (\text{A.15})$$

A simple vista se constata que el término de actualización en la expresión anterior se puede obtener de estimar la regresión auxiliar,

$$\hat{U}_t = \rho \frac{\partial \psi_t(q; s_t(q), z_t)}{\partial q} + U_{aux} \quad (\text{A.16})$$

por mínimos cuadrados ordinarios.

El algoritmo de *Gauss-Newton* solamente utiliza derivadas de primer orden, y la matriz que se usa en sustitución del hessiano es siempre definida positiva, por construcción. Este es el algoritmo utilizado en esta Tesis y, por tanto, en el apartado correspondiente a la solución PEA de cada modelo, se dará la expresión analítica del gradiente de la función polinómica usada para aproximar la esperanza condicional.

## A.3 Descripción de los modelos y claves para su solución

### A.3.1 Modelo básico de crecimiento neoclásico

**Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista**

El primer modelo considerado es el modelo neoclásico básico estocástico con un sector. Se supone que cada agente elige sendas de capital y consumo de tal manera que maximiza

$$\max_{\{k_t, c_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \right]$$

sujeto a sus restricciones tecnológicas y de recursos,

$$y_t = c_t + x_t \quad (\text{A.17})$$

$$y_t = z_t k_{t-1}^\alpha \quad (\text{A.18})$$

$$k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + x_t \quad (\text{A.19})$$

$$k_t \geq 0, c_t \geq 0$$

dados  $k_0, z_0$ . Donde  $c_t$  denota el consumo realizado en el instante  $t$ ,  $k_{t-1}$  el stock de capital al principio del periodo  $t$ ,  $x_t$  la inversión,  $y_t$  el producto, y  $z_t$  una perturbación que afecta a la tecnología.  $0 < \beta < 1$  es el factor de descuento subjetivo,  $\eta > 0$  es el coeficiente de aversión relativa al riesgo,  $\alpha$  la participación del capital en la producción,  $0 < \delta < 1$  la tasa de depreciación y  $0 < \rho < 1$  controla la persistencia del shock.

Si se sustituye (A.17) y (A.18) en (A.19), el Lagrangiano de este problema se puede escribir,

$$L(k_t, c_t, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_t (c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha - (1-\delta)k_{t-1}) \right]$$

donde  $\lambda_t$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción que resulta de agrupar (A.17), (A.18) y (A.19). Entonces, las condiciones de optimalidad resultan ser,

$$\lambda_t: 0 = c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha - (1-\delta)k_{t-1}$$

$$c_t: 0 = c_t^{-\eta} - \lambda_t$$

$$k_t: 0 = -\lambda_t + \beta E_t [\lambda_{t+1} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)]$$

y si se elimina  $\lambda_t$ , se puede obtener,

$$0 = c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha - (1-\delta)k_{t-1} \quad (\text{A.20})$$

$$c_t^{-\eta} = \beta E_t [c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}] \quad (\text{A.21})$$

donde  $R_t$  es el tipo de interés real y la perturbación tecnológica se supone que sigue un proceso autorregresivo de orden 1, de tal manera que,

$$R_t = \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta \quad (\text{A.22})$$

$$\log(z_t) = (1 - \rho) \log(z_{ss}) + \rho \log(z_{t-1}) + \epsilon_t \quad (\text{A.23})$$

$$\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

El error de predicción usado para realizar contrastes de racionalidad de los agentes se puede obtener de la condición de primer orden para el capital, de manera que

$$\xi_{t+1} = [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)] - E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)]$$

Este error tiene una estructura de ruido blanco por construcción:  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$ , y no presenta correlación con ninguna variable contenida en el conjunto de información disponible en el momento  $t$ . Haciendo uso de las series aproximadas para el capital y el consumo que se obtienen con cada método de solución, se puede obtener una serie temporal aproximada de  $\xi_t$  generada con cada método, y verificar si estas aproximaciones preservan las propiedades teóricas de racionalidad de expectativas.

De (A.18), (A.20), (A.21), (A.22) y (A.23) es fácil obtener el estado estacionario determinista simplemente eliminando los subíndices. Para el tipo de interés real  $R_{ss} = \frac{1}{\beta}$ , para la tecnología, la producción y el consumo:  $z_{ss} = 1$ ,  $y_{ss} = z_{ss}k_{ss}^\alpha$  y  $c_{ss} = y_{ss} - \delta k_{ss}$ , donde

$$k_{ss} = \left( \frac{\alpha z_{ss}}{R_{ss} - 1 + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

### Solución analítica en un caso particular

El modelo básico de crecimiento neoclásico con un sector tiene solución analítica en el caso en que  $\eta = 1$  [y por tanto la utilidad es logarítmica] y  $\delta = 0$  [depreciación completa del capital]. En este Apéndice se va a mostrar esta solución, que se puede encontrar, por ejemplo, en Chow (1997), o Long y Plosser (1983).

El objetivo de mostrar explícitamente esta solución es doble. Por una parte, la solución analítica se puede usar como criterio de comparación para comprobar cómo se comportan distintas formas numéricas de aproximar el modelo neoclásico básico en este caso paramétrico particular. El ejercicio presentado en el Capítulo 1 de evaluación de métodos no pretendía medir distancias a la solución exacta de esta manera, pero tal vez el lector desee hacerlo en este caso sencillo, y por eso se le facilita la solución. En segundo lugar, la expresión analítica se usa para ilustrar un ejemplo en el Capítulo 2.

Se presenta además el único caso de solución analítica de un caso particular de los modelos analizados del método LQA por una parte, y de los métodos basados en las ecuaciones de Euler por otra. Se observa, por último, cómo la solución derivada de la solución del problema por programación dinámica (ecuación de Bellman) y por el método de Lagrange (cálculo directo de las condiciones de Euler) es la misma. Este resultado es estándar, y es válido para todo modelo en forma lineal cuadrática en el que la solución centralizada sea eficiente en el sentido de Pareto.

**Programación dinámica** La función de valor en este caso tiene la expresión,

$$V(\log(z_t), \log(k_{t-1})) = \max_{c_t} \{ \log(c_t) + \beta E_t [V(\log(z_{t+1}), \log(k_t))] \}$$

donde  $c_t$  es la variable de decisión y  $k_{t-1}$  y  $z_t$  son los estados. Si se conjetura como solución para la función de valor una forma lineal en logaritmos,

$$V(\log(z_t), \log(k_{t-1})) = [H_0, H_z, H_k] \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ \log(k_{t-1}) \end{bmatrix}$$

Usando la restricción presupuestaria (A.20),  $k_t = z_t k_{t-1}^\alpha - c_t$ , se puede escribir,

$$E_t [V(\log(z_{t+1}), \log(k_t))] = [H_0, H_z, H_k] E_t \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_{t+1}) \\ \log(z_t k_{t-1}^\alpha - c_t) \end{bmatrix}.$$

Como  $E_t[\log(z_{t+1})] = 0$ , entonces la función de valor queda,

$$V(\log(z_t), \log(k_{t-1})) = \max_{c_t} \{ \log(c_t) + \beta [H_0 + H_k \log(z_t k_{t-1}^\alpha - c_t)] \}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial V(\log(z_t), \log(k_{t-1}))}{\partial c_t} = 0$$

que implica

$$c_t = \frac{1}{1 + \beta H_k} z_t k_{t-1}^\alpha$$

que es la regla de decisión óptima. Sustituyendo esta expresión en la anterior ecuación de Bellman, se tiene que

$$\begin{aligned} V(\log(z_t), \log(k_{t-1})) &= \log(z_t k_{t-1}^\alpha) - \log(1 + \beta H_k) + \beta H_0 + \\ &\quad \beta H_k \log \left( z_t k_{t-1}^\alpha \left( 1 - \frac{1}{1 + \beta H_k} \right) \right) \\ &= \beta H_0 - \log(1 + \beta H_k) + \beta H_k \log \left( \frac{\beta H_k}{1 + \beta H_k} \right) + \\ &\quad (1 + \beta H_k) \log(z_t) + (1 + \beta H_k) \alpha \log(k_{t-1}) \end{aligned}$$

e igualando coeficientes entre la expresión anterior y la conjetura,

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta H_0 - \log(1 + \beta H_k) + \beta H_k \log \left( \frac{\beta H_k}{1 + \beta H_k} \right) \\ H_z &= (1 + \beta H_k) \\ H_k &= (1 + \beta H_k) \alpha \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{1 - \beta} \left[ \log(1 - \alpha\beta) + \frac{\beta\alpha}{1 - \alpha\beta} \log(\alpha\beta) \right] \\ H_z &= \frac{1}{1 - \alpha\beta} \\ H_k &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \end{aligned}$$

y la regla de decisión óptima es lineal en logaritmos,

$$\log(c_t) = (1 - \alpha\beta) + \log(z_t) + \alpha \log(k_{t-1}).$$

**Multiplicadores de Lagrange** Las condiciones de optimalidad del problema son, para  $\eta = 1$  y  $\delta = 0.0$ ,

$$\begin{aligned}\lambda_t : 0 &= c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha - k_{t-1} \\ c_t : 0 &= \frac{1}{c_t} - \lambda_t \\ k_t : 0 &= -\lambda_t + \beta E_t [\lambda_{t+1} \alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1}]\end{aligned}$$

Como conjetura inicial se propone, dado que el consumo en cada periodo  $t$  va a ser un porcentaje del producto,

$$c_t = \varsigma z_t k_{t-1}^\alpha.$$

Si se introduce en la condición de optimalidad de  $c_t$ , se tiene,

$$0 = \frac{1}{\varsigma z_t k_{t-1}^\alpha} - \lambda_t$$

que en la condición de optimalidad de  $k_t$ ,

$$\lambda_t = \beta E_t \left[ \frac{\alpha}{\varsigma} \frac{1}{k_t} \right].$$

Si se sustituye  $k_t$  en la expresión anterior por su valor dado por la restricción presupuestaria, y también se sustituye  $\lambda_t$  por su valor en la condición de optimalidad del consumo, nos queda,

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta \alpha}{\varsigma} \frac{1}{z_t k_{t-1}^\alpha - c_t}$$

se tiene que,

$$\varsigma z_t k_{t-1}^\alpha - c_t \varsigma = \beta \alpha c_t$$

o lo que es lo mismo,

$$c_t = \left[ \frac{\varsigma}{\varsigma + \alpha \beta} \right] z_t k_{t-1}^\alpha.$$

Si se igualan coeficientes entre la expresión anterior para  $c_t$  y la conjetura inicial se llega a que

$$\frac{\varsigma}{\varsigma + \alpha \beta} = \varsigma \iff \varsigma = 1 - \alpha \beta$$

y por tanto, la regla de decisión queda,

$$c_t = (1 - \alpha \beta) z_t k_{t-1}^\alpha$$

que es idéntica a la obtenida al operar directamente con la función de valor.

**Aproximación lineal cuadrática estándar**

Este método está basado en una aproximación a la función de valor, y por tanto sólo hace uso de las condiciones de Euler para el cálculo del estado estacionario. Se seguirán a continuación los pasos apuntados en la descripción del método.

Para este modelo se tiene una variable endógena de estado  $s_t = [k_{t-1}]$ , una de estado exógena  $z_t = [\log(z_t)]$  y como variable de decisión se ha seleccionado la inversión porque simplifica la aproximación respecto al caso en que se hubiera seleccionado, por ejemplo,  $k_t$ . Así pues,  $d_t = [x_t]$ .

Si se sustituyen las restricciones no lineales (A.17) y (A.18) en la función de utilidad se obtiene la función de retorno,

$$r(x_t, k_{t-1}, \log(z_t)) = U(x_t, k_{t-1}, \log(z_t)) = \begin{cases} \log(z_t k_{t-1}^\alpha - x_t) & \text{if } \eta = 1 \\ \frac{(z_t k_{t-1}^\alpha - x_t)^{1-\eta} - 1}{1-\eta} & \text{if } \eta \neq 1 \end{cases}$$

de manera que para aproximar la anterior función no lineal, se lleva a cabo una aproximación de Taylor de segundo orden en torno al estado estacionario determinista en el punto  $(\log(z_{ss}), k_{ss}, x_{ss})$ , y se obtiene

$$\begin{aligned} U(\log(z_t), k_{t-1}, x_t) &\approx Q_{11} + 2Q_{12} \begin{bmatrix} \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix} \\ &\quad + [\log(z_t), k_{t-1}, x_t] Q_{22} \begin{bmatrix} \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix} \\ &= [1, \log(z_t), k_{t-1}, x_t] Q \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= U_{ss} - DU_{ss} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \end{bmatrix}^T D^2 U_{ss} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \end{bmatrix} \\ 2Q_{12} &= DU_{ss} - \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \end{bmatrix} D^2 U_{ss} \\ Q_{22} &= \frac{1}{2} D^2 U_{ss} \\ Q &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix} \\ DU_{ss} &= [c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^\alpha, c_{ss}^{-\eta} \alpha k_{ss}^{\alpha-1}, -c_{ss}^{-\eta}] \\ D^2 U_{ss} &= \begin{bmatrix} D^2 U_{ss}^{1,1} & & & \\ D^2 U_{ss}^{2,1} & D^2 U_{ss}^{2,2} & & \\ \eta c_{ss}^{-\eta-1} y_{ss} & \eta c_{ss}^{-\eta-1} \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & -\eta c_{ss}^{-\eta-1} & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siendo,

$$\begin{aligned} D^2U_{ss}^{1,1} &= -\eta c_{ss}^{-\eta-1} y_{ss}^2 + c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^\alpha \\ D^2U_{ss}^{2,1} &= -\eta c_{ss}^{-\eta-1} \alpha \frac{y_{ss}^2}{k_{ss}} + c_{ss}^{-\eta} \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} \\ D^2U_{ss}^{2,2} &= -\eta \alpha^2 c_{ss}^{-\eta-1} \frac{y_{ss}^2}{k_{ss}^2} + c_{ss}^{-\eta} \alpha (\alpha - 1) \frac{y_{ss}}{k_{ss}^2} \end{aligned}$$

Con lo que el sistema aproximado [(A.3)] que se tiene que resolver resulta ser

$$\begin{aligned} V^{n+1}(\log(z_t), k_{t-1}) = \max_{x_t} \{ & [1, \log(z_t), k_{t-1}, x_t] Q [1, \log(z_t), k_{t-1}, x_t] \\ & + \beta V^n(\log(z_{t+1}), k_t | \log(z_t)) \} \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} \log(z_{t+1}) \\ k_t \end{bmatrix} = B [\log(z_t), k_{t-1}, x_t]$$

donde,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta & 1 \end{bmatrix}.$$

Como conjetura inicial para la función de valor se ha usado la forma cuadrática,

$$V^0(\log(z_{t+1}), k_t) = [1, \log(z_{t+1}), k_t] L_{LQA}^0 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_{t+1}) \\ k_t \end{bmatrix}$$

y se ha escogido una matriz semidefinida negativa arbitraria

$$L_{LQA}^0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Si se sustituyen la conjetura y las leyes de movimiento de capital y tecnología en la expresión de la función de valor, se puede reescribir el problema de tal manera que,

$$\begin{aligned} V^1(\log(z_t), k_{t-1}, x_t) = \max_{x_t} [ & 1, \log(z_t), k_{t-1}] M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix} M_2 x_t + x_t^2 M_3 \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

siendo  $M_1, M_2$  y  $M_3$  matrices formadas a partir de los correspondientes elementos de  $Q$ ,  $B$  y  $L_{LQA}^0$ . La condición de primer orden de este problema es,

$$x_t = -M_3^{-1}M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix}$$

Si ahora se sustituye este  $x_t$  en la función valor aproximada (A.25), se puede escribir,

$$V^1(\log(z_t), k_{t-1}, x_t) = [1, \log(z_t), k_{t-1}]L_{LQA}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix}$$

donde  $L_{LQA}^1 = M_1 - M_2M_3^{-1}M_2^T$ . Repitiendo el mismo proceso descrito se sustituiría ahora  $V^1(\log(z_t), k_{t-1}, x_t)$  en (A.24) junto con las leyes de movimiento de las variables de estado, para obtener una expresión para  $V^2(\log(z_t), k_{t-1}, x_t)$  idéntica a (A.25) pero con distintas  $M_1, M_2$  y  $M_3$ , se calcularía la condición de primer orden y así sucesivamente. En las soluciones implementadas en el Capítulo 1 se repitió el proceso hasta que  $\|L_{LQA}^{n+1} - L_{LQA}^n\| < 0.00001$ .

La solución del algoritmo descrito, la regla de política, es el vector  $H = [H_{x0}, H_{xz}, H_{xk}]$  tal que  $x_t = H_{x0} + H_{xz} \log(z_t) + H_{xk}k_{t-1}$ . En la siguiente tabla se presentan estimaciones numéricas para los coeficientes de la regla en los nueve casos paramétricos considerados. Nótese que en los casos en los que todos los valores paramétricos excepto la desviación típica de la perturbación tecnológica son iguales, los coeficientes de la regla de política muestran, obviamente, los mismos valores.

CASO	$H_{x0}$	$H_{xz}$	$H_{xk}$
1,4,7	1.9190	3.2243	-0.0255
2,5,8	1.0512	2.7668	-0.0027
3,6,9	0.7015	2.7244	0.0065

Para generar series temporales de todas las variables, se parte de  $k_0 = k_{ss}$  y, dada la senda  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se resuelve recursivamente para cada instante  $t$  el sistema

$$\begin{aligned} k_t &= H_{x0} + H_{xz} \log(z_t) + (H_{xk} + 1 - \delta)k_{t-1}, \\ c_t &= z_t k_{t-1}^\alpha - k_t + (1 - \delta)k_{t-1}, \\ R_t &= \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta, \\ y_t &= z_t k_{t-1}^\alpha, \end{aligned}$$

donde se obtiene el capital de la regla de política y su ley de movimiento (A.19), el consumo de la restricción presupuestaria, (A.19) junto con (A.18) en (A.17), el producto a partir de la función de producción, (A.18), y el tipo de interés real de su definición, (A.22).

**Coefficientes Indeterminados**

El sistema a linealizar en logaritmos de las variables está formado por las condiciones de primer orden, (A.21) y (A.22), la restricción de recursos, (A.20), la función de producción, (A.18) y el proceso para la tecnología, (A.23). Como habitualmente,  $\tilde{\cdot}$  denota desviaciones logarítmicas de una variable respecto al estado estacionario. Para este modelo, en términos de la notación general usada en la Tesis, se tiene como variable de estado endógena  $s_t = [\tilde{k}_t]$ , siendo el resto de variables endógenas  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{R}_t, \tilde{y}_t]^T$ , y como estado exógeno  $z_t = [\tilde{z}_t]$ . Una vez linealizado, se representa el sistema en la forma dada por (A.5), donde las matrices son:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -k_{ss}/c_{ss} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} -(1-\beta(1-\delta))(1-\alpha) \\ k_{ss}/(\beta c_{ss}) \\ \alpha \end{bmatrix} \\ \Upsilon_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_4 = \begin{bmatrix} 1-\beta(1-\delta) \\ y_{ss}/c_{ss} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Upsilon_5 &= [0], \quad \Upsilon_6 = [0], \quad \Upsilon_7 = [0], \\ \Upsilon_8 &= [-\eta, 1, 0], \quad \Upsilon_9 = [\eta, 0, 0], \quad \Upsilon_{10} = [0], \\ \Upsilon_{11} &= [0], \quad \Upsilon_{12} = [\rho], \quad \Sigma = [\sigma_\epsilon^2] \end{aligned}$$

Y las matrices en el sistema propuesto (A.6) tienen por componentes,  $\Xi_1 = [\nu_{kk}]$ ,  $\Xi_2 = [\nu_{kz}]$ , y

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \nu_{ck} \\ \nu_{Rk} \\ \nu_{yk} \end{bmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{bmatrix} \nu_{cz} \\ \nu_{Rz} \\ \nu_{yz} \end{bmatrix}$$

Igualando coeficientes entre ambos sistemas usando los programas de Harald Uhlig se llega a que los valores de las matrices que hacen estable el sistema (A.6) son,

CASO	$\nu_{kk}$	$\nu_{kz}$	$\nu_{ck}$	$\nu_{cz}$	$\nu_{Rk}$	$\nu_{Rz}$	$\nu_{yk}$	$\nu_{yz}$
1,4,7	0.9495	0.0849	0.8361	0.1742	-0.0222	0.0348	0.3600	1.000
2,5,8	0.9723	0.0728	0.5210	0.3403	-0.0222	0.0348	0.3600	1.000
3,6,9	0.9815	0.0717	0.3940	0.3557	-0.0222	0.0348	0.3600	1.000

Para generar series temporales de las variables relevantes se usa la representación (A.6), usando los coeficientes estimados que se presentan en la tabla y que garantizan que las series temporales resultantes son estacionarias,

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{R}_t \\ \tilde{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{kk} & \nu_{kz} \\ \nu_{ck} & \nu_{cz} \\ \nu_{Rk} & \nu_{Rz} \\ \nu_{yk} & \nu_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t-1} \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}$$

dados  $k_0 = k_{ss}$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ .

### Descomposición de autovalores y autovectores

**En niveles de las variables** Si se define la expectativa condicional en (A.21) como una nueva variable,  $W_t$ ,

$$W_t = E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)]$$

entonces se puede escribir la condición de optimalidad (A.21) como

$$c_t^{-\eta} = \beta W_t \quad (\text{A.26})$$

Además, el valor realizado en  $t$  de la función sobre la que se toma la expectativa diferirá del valor que se esperaba en  $t-1$  que pudiera tomar, con lo que se puede definir el error racional de predicción a horizonte uno como,

$$\xi_t = c_t^{-\eta} (\alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) - W_{t-1} \quad (\text{A.27})$$

y la racionalidad implica que  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . El sistema a linealizar resultante que interesa, estaría formado por la restricción de recursos, (A.20), la definición de la expectativa junto con la correspondiente ecuación de Euler, (A.26), la definición del error de predicción, (A.27), y el proceso estocástico exógeno para la perturbación en tecnología, (A.23).

En términos de la notación empleada en (A.7):  $u_t = [c_t - c_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t)]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\epsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Donde el vector  $u_t$  contiene tanto variables de decisión como de estado. Las matrices de la aproximación lineal en (A.7) son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -k_{ss}^{\alpha} \\ -\eta c_{ss}^{-\eta-1} & 0 & -\beta & 0 \\ \eta c_{ss}^{-\eta-1} R_{ss} & 0 & 0 & -\alpha c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & R_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-1)c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector por la izquierda asociado al único autovalor inestable del sistema (A.7), esto es, de la matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$ , es la condición de estabilidad del sistema lineal (A.8). Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c$ , el asociado al consumo,  $\mu_k$ , el asociado al capital,

$\mu_W$ , el asociado a la esperanza condicional, y  $\mu_z$  a la perturbación tecnológica, entonces  $P^s = [\mu_c, \mu_k, \mu_W, \mu_z]$ , y es fácil ver que

$$W_t = \kappa + \frac{-\mu_c}{\mu_W} c_t + \frac{-\mu_k}{\mu_W} k_t + \frac{-\mu_z}{\mu_W} \log(z_t)$$

donde

$$\kappa = W_{ss} + \frac{\mu_c}{\mu_W} c_{ss} + \frac{\mu_k}{\mu_W} k_{ss}$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , vía restricción de recursos, y que  $c_t$  es función de  $W_t$  por la condición de optimalidad (A.26) se puede escribir como una relación no lineal implícita del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t) = 0,$$

que se podría denotar por una expectativa parametrizada, en el sentido que se viene usando en relación al método PEA. Para los nueve casos paramétricos se tiene que

CASO	$\mu_c$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$
1,4,7	0.0000	0.0071	1.0000	0.0303
2,5,8	0.0000	0.0047	1.0000	0.0999
3,6,9	0.0000	0.0015	1.0000	0.0474

Para generar series temporales, dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se resuelve para  $c_t, k_t$  y  $W_t$  cada instante de tiempo simultáneamente el sistema no lineal de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_c(c_t - c_{ss}) + \mu_k(k_t - k_{ss}) + \mu_W(W_t - W_{ss}) + \mu_z \log(z_t) \\ 0 &= -c_t^{-\eta} + \beta W_t \\ 0 &= -c_t + z_t k_{t-1}^\alpha - k_t + (1 - \delta)k_{t-1}. \end{aligned}$$

Y una vez que se tiene  $\{c_t\}_{t=1}^T, \{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$  es fácil generar el producto y el tipo de interés real a partir de sus definiciones.

**En logaritmos de las variables** De la definición de la expectativa y el error de predicción del método en niveles, el sistema a linealizar en logaritmos de las variables estaría formado por la restricción de recursos, (A.20), la definición de la expectativa junto con la correspondiente ecuación de Euler, (A.26), la definición del error de predicción, (A.27), y el proceso estocástico exógeno para la perturbación en tecnología, (A.23). Se linealiza usando las simplificaciones de H. Uhlig.

En términos de la notación empleada en (A.7):  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\varepsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ , donde el vector  $u_t$  contiene variables de decisión y de estado. Las matrices de la aproximación lineal en logaritmos en (A.7) son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} c_{ss} & k_{ss} & 0 & -k_{ss}^\alpha \\ \eta c_{ss}^{-\eta} & 0 & \beta W_{ss} & 0 \\ \eta c_{ss}^{-\eta} R_{ss} & 0 & 0 & -\alpha c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & (1 - \delta)k_{ss} + \alpha k_{ss}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha - 1)c_{ss}^{-\eta} k_{ss}^{\alpha-1} & -W_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector por la izquierda asociado al único autovalor inestable del sistema (A.7) es la condición de estabilidad del sistema lineal (A.8). Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c, \mu_k, \mu_W$  y  $\mu_z$ , donde los subíndices denotan la variable a la que se refieren. Entonces,  $P^s = [\mu_c, \mu_k, \mu_W, \mu_z]$  y es fácil ver que,

$$W_t = \kappa c_t^{\frac{-\mu_c}{\mu_W}} k_t^{\frac{-\mu_k}{\mu_W}} z_t^{\frac{-\mu_z}{\mu_W}}$$

donde

$$\kappa = e^{\log(W_{ss}) + \frac{\mu_c}{\mu_W} \log(c_{ss}) + \frac{\mu_k}{\mu_W} \log(k_{ss})}$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , vía restricción de recursos, y que  $c_t$  es función de  $W_t$  por la condición de optimalidad (A.26) se puede escribir como una relación no lineal implícita del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t) = 0,$$

que se podría denotar por una expectativa parametrizada. Para los nueve casos paramétricos se tiene que

CASO	$\mu_c$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$
1,4,7	0.0000	0.4403	1.0000	0.0497
2,5,8	0.0000	0.8037	1.0000	0.4519
3,6,9	0.0000	1.2043	1.0000	0.9807

Para generar series temporales, se sustituye la expresión para el capital de (A.20) y la expectativa de (A.26) en la condición de estabilidad. Entonces, usando la ecuación resultante y dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se pueden obtener  $\{c_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$  de la solución recursiva ecuación por ecuación del sistema,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu_c - \eta\mu_W) \log(c_t) + \mu_k \log(z_t k_{t-1}^\alpha - c_t + (1 - \delta)k_{t-1}) - \\ &\quad [\mu_c \log(c_{ss}) + \mu_k \log(k_{ss}) + \mu_W \log(W_{ss}) - \mu_z \log(z_t) + \mu_W \log(\beta)], \\ W_t &= \frac{1}{\beta} c_t^{-\eta} \\ k_t &= z_t k_{t-1}^\alpha - c_t + (1 - \delta)k_{t-1} \end{aligned}$$

Nótese que la primera ecuación es no lineal en la incógnita, que es el consumo. Después se pueden obtener series temporales para el nivel de producto,  $\{y_t\}_{t=1}^T$ , y el tipo de interés real,  $\{R_t\}_{t=1}^T$ , a partir de sus definiciones.

### Parametrización de expectativas

Para este modelo y todos los casos paramétricos considerados, un polinomio de segundo orden resultó ser suficiente como aproximación, en el sentido de que pasaba el contraste de den Haan y Marcet (1994),

$$\begin{aligned}\psi(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2) \\ &\quad \times \exp(q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2)\end{aligned}$$

El gradiente de  $\psi_t$  es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_t}{\partial q_1} &= \psi_t \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_2} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_3} &= \psi_t \log(z_t) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_4} &= \psi_t [\log(k_{t-1})]^2 \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_5} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \log(z_t) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_6} &= \psi_t [\log(z_t)]^2\end{aligned}$$

El punto fijo para  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$  en cada caso se calculó usando un tamaño muestral de 25000 observaciones, y un criterio de parada sobre cada parámetro de cuatro dígitos de exactitud. El orden del polinomio se fue incrementando a partir de uno de primer orden usando el contraste de den Haan y Marcet como criterio. Los valores para cada caso paramétrico obtenidos para el punto fijo de  $q$  son,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1	2.3473	-0.3253	-0.2258	-0.0126	0.0382	-0.0055
2	1.6293	-0.3156	-2.2440	-0.0642	0.4766	-0.4221
3	0.1162	-0.7187	-4.8308	-0.2635	1.0314	-0.5244
4	2.7395	-0.4170	-0.1762	-0.0008	0.0245	-0.0214
5	0.7466	0.1009	-1.0839	-0.1195	0.1561	-0.0971
6	1.6741	-0.7658	-3.5681	-0.0567	0.6828	-0.1533
7	2.4171	-0.3407	-0.2021	-0.0106	0.0315	-0.0207
8	3.1017	-0.6436	-0.9073	-0.0220	0.1080	-0.0861
9	2.8286	-1.0233	-2.3828	-0.0218	0.3569	-0.2553

Para generar series temporales, se sustituye primero la expectativa en (A.21) por la función parametrizada,  $\psi_t$ . Después, usando la ecuación resultante y dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se obtienen  $\{c_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{\psi_t\}_{t=1}^T$  de la solución recursiva del sistema

$$\begin{aligned} \psi(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2\} \\ &\quad \times \exp \{q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2\}, \\ c_t &= \{\beta \psi(q; k_{t-1}, z_t)\}^{-\frac{1}{\eta}}, \\ k_t &= z_t k_{t-1}^\alpha - c_t + (1 - \delta)k_{t-1} \end{aligned}$$

Una vez realizado este proceso se pueden obtener series temporales para el nivel de producto,  $\{y_t\}_{t=1}^T$ , y el tipo de interés real,  $\{R_t\}_{t=1}^T$ , a partir de sus definiciones.

### A.3.2 Modelo de Hansen (1985)

#### Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista

El segundo modelo es el propuesto en Hansen (1985). Es ligeramente más no lineal en el sentido en que incluye una no convexidad en la función de utilidad, el trabajo indivisible. En este caso la familia representativa se enfrenta al problema,

$$\max_{\{k_t, c_t, N_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - A_N N_t \right]$$

sujeta a

$$y_t = c_t + x_t \tag{A.28}$$

$$y_t = z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} \tag{A.29}$$

$$k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + x_t \tag{A.30}$$

$$k_t \geq 0, c_t \geq 0$$

dados  $k_0$  y  $z_0$ . Donde  $N_t$  representa las horas trabajadas y  $A_N$  es un parámetro que mide la ponderación de las horas trabajadas en la función de utilidad en relación al consumo.

Si se sustituye (A.28) y (A.29) en (A.31), el Lagrangiano del problema resulta ser,

$$\begin{aligned} L(k_t, c_t, N_t, \lambda_t) &= \\ E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t &\left[ \frac{c_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - A_N N_t - \lambda_t (c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - (1 - \delta)k_{t-1}) \right] \end{aligned}$$

De donde las condiciones de optimalidad,

$$\begin{aligned}\lambda_t : 0 &= c_t + k_t - z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - (1-\delta)k_{t-1} \\ c_t : 0 &= c_t^{-\eta} - \lambda_t \\ k_t : 0 &= -\lambda_t + \beta E_t [\lambda_{t+1} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] \\ N_t : 0 &= -A_N + \lambda_t z_t k_{t-1}^\alpha (1-\alpha) N_t^{-\alpha}\end{aligned}$$

y si se elimina  $\lambda_t$ , se tiene que,

$$c_t = z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - k_t + (1-\delta)k_{t-1} \quad (\text{A.31})$$

$$c_t^{-\eta} = \beta E_t [c_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}] \quad (\text{A.32})$$

$$A_N = c_t^{-\eta} z_t k_{t-1}^\alpha (1-\alpha) N_t^{-\alpha} \quad (\text{A.33})$$

donde  $R_t$  denota el tipo de interés real y la perturbación tecnológica,  $\log(z_t)$ , se supone que sigue un proceso AR(1),

$$R_t = \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta \quad (\text{A.34})$$

$$\log(z_t) = (1-\rho) \log(z_{ss}) + \rho \log(z_{t-1}) + \epsilon_t \quad (\text{A.35})$$

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

En este caso el error de predicción toma la forma,

$$\begin{aligned}\xi_{t+1} &= [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] \\ &\quad - E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)]\end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

De (A.28), (A.29), (A.31), (A.32), (A.33), (A.34) y (A.35) se puede obtener el estado estacionario determinista de este modelo. De (A.34),  $R_{ss} = \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} + 1 - \delta$ , y de (A.32),  $R_{ss} = \frac{1}{\beta}$ , por lo que el cociente del producto y el stock de capital en estado estacionario queda,

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right)$$

En lo que respecta al empleo, el valor de estado estacionario se fija en  $\frac{1}{3}$ . Entonces, de la función de producción,  $y_{ss} = k_{ss}^\alpha N_{ss}^{1-\alpha} \iff \frac{y_{ss}}{k_{ss}} = k_{ss}^{\alpha-1} N_{ss}^{1-\alpha}$ , por lo que se tiene para el capital, dado que  $z_{ss} = 1$ ,

$$k_{ss} = \left( \frac{y_{ss}}{k_{ss}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} N_{ss}$$

De la ley de movimiento del capital,  $x_{ss} = \delta k_{ss}$ , y de la restricción de recursos,  $c_{ss} = y_{ss} - \delta k_{ss}$ . Finalmente, de (A.33),  $A_N = c_{ss}^{-\eta} (1-\alpha) \frac{y_{ss}}{N_{ss}}$

### Aproximación lineal cuadrática estándar

Para el modelo de Hansen se tiene que  $s_t = [k_{t-1}]$ ,  $z_t = [\log(z_t)]$ , y que  $d_t = [x_t, N_t]$ .

Si se sustituyen las restricciones no lineales (A.28) y (A.29) en la función de utilidad se tiene como función de retorno,

$$U(x_t, N_t, k_{t-1}, \log(z_t)) = \begin{cases} \log(z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - x_t) - A_N N_t & \text{if } \eta = 1 \\ \frac{(z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - x_t)^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - A_N N_t & \text{if } \eta \neq 1 \end{cases}$$

Para aproximar la función anterior se lleva a cabo una aproximación de Taylor de segundo orden en torno al estado estacionario determinista, en el punto  $(\log(z_{ss}), k_{ss}, x_{ss}, N_{ss})$ ,

$$\begin{aligned} U(\log(z_t), k_{t-1}, x_t, N_t) &\approx Q_{11} + 2Q_{12} \begin{bmatrix} \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \\ N_t \end{bmatrix} \\ &+ [\log(z_t), k_{t-1}, x_t, N_t] Q_{22} \begin{bmatrix} \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \\ N_t \end{bmatrix} \\ &= [1, \log(z_t), k_{t-1}, x_t, N_t] Q \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \\ x_t \\ N_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= U_{ss} - DU_{ss} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \\ N_{ss} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \\ N_{ss} \end{bmatrix}^T D^2 U_{ss} \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \\ N_{ss} \end{bmatrix} \\ 2Q_{12} &= DU_{ss} - \begin{bmatrix} \log(z_{ss}) \\ k_{ss} \\ x_{ss} \\ N_{ss} \end{bmatrix} D^2 U_{ss} \end{aligned}$$



y se ha escogido una matriz semidefinida negativa arbitraria,

$$L_{LQA}^0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Si se sustituye la conjetura y las leyes de movimiento del capital y la tecnología en la expresión de la función de valor (A.37), se puede reescribir el problema de tal manera que,

$$V^1(\log(z_t), k_{t-1}, x_t, N_t) = \max_{x_t, N_t} [1, \log(z_t), k_{t-1}] M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix} \\ + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} x_t \\ N_t \end{bmatrix} + [x_t, N_t] M_3 \begin{bmatrix} x_t \\ N_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

siendo  $M_1, M_2$  y  $M_3$  matrices formadas a partir de los correspondientes elementos de  $Q, B$  y  $L_{LQA}^0$ . La condición de primer orden de este problema es,

$$\begin{bmatrix} x_t \\ N_t \end{bmatrix} = -M_3^{-1} M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix}$$

Si ahora se sustituye este  $[x_t, N_t]$  en la función valor aproximada (A.38), se puede escribir,

$$V^1 = [1, \log(z_t), k_{t-1}] L_{LQA}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix}$$

donde  $L_{LQA}^1 = M_1 - M_2 M_3^{-1} M_2^T$ . Repitiendo el mismo proceso descrito se sustituiría ahora  $V^1(\log(z_t), k_{t-1}, x_t)$  en (A.37) junto con las leyes de movimiento de las variables de estado, para obtener una expresión para  $V^2(\log(z_t), k_{t-1}, x_t)$  idéntica a (A.38) pero con distintas  $M_1, M_2$  y  $M_3$ , se calcularía la condición de primer orden y así sucesivamente. En las soluciones puestas en práctica en el Capítulo 1 se repitió el proceso hasta que  $\|L_{LQA}^{n+1} - L_{LQA}^n\| < 0.00001$ .

Del proceso anterior se obtiene la matriz que describe la regla de decisión

$$H = \begin{bmatrix} H_{x0} & H_{xz} & H_{xk} \\ H_{N0} & H_{Nz} & H_{Nk} \end{bmatrix}$$

de tal manera que

$$\begin{bmatrix} x_t \\ N_t \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ \log(z_t) \\ k_{t-1} \end{bmatrix}$$

En la siguiente tabla se presentan estimaciones de los elementos de la matriz  $H$  para los nueve casos paramétricos considerados,

CASO	$H_{x0}$	$H_{xz}$	$H_{xk}$	$H_{N0}$	$H_{Nz}$	$H_{Nk}$
1,4,7	0.7368	2.6129	-0.0332	0.3801	0.7383	-0.0037
2,5,8	0.7368	1.7499	-0.0332	0.5459	0.3718	-0.0168
3,6,9	0.7368	1.5342	-0.0332	0.6127	0.2242	-0.0221

Para generar series temporales de las variables de la economía, partiendo de  $k_0 = k_{ss}$  y dada la senda para  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se resuelve recursivamente en cada instante de tiempo  $t$  el sistema,

$$\begin{aligned}
 k_t &= H_{x0} + H_{xz} \log(z_t) + (H_{xk} + 1 - \delta)k_{t-1}, \\
 N_t &= H_{N0} + H_{Nz} \log(z_t) + H_{Nk}k_{t-1}, \\
 y_t &= z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha}, \\
 c_t &= y_t - k_t + (1 - \delta)k_{t-1}, \\
 R_t &= \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}} + 1 - \delta,
 \end{aligned}$$

donde el capital se obtiene de la regla de política y su ley de movimiento, el consumo de la restricción de recursos, el producto de la tecnología disponible y el tipo de interés real de su definición, (A.34).

### Coefficientes Indeterminados

El sistema que se linealiza en logaritmos en torno al estado estacionario está formado por la restricción de recursos (A.31), las condiciones de primer orden (A.32), (A.33) y (A.34), la función de producción (A.29) y el proceso para la tecnología (A.35). En este caso se tiene que  $s_t = [\tilde{k}_t]$ ,  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{N}_t, \tilde{R}_t, \tilde{x}_t]^T$ , y  $z_t = [\tilde{z}_t]$ .

Una vez linealizado se representa el sistema en la forma dada por (A.5), donde las matrices son:

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_{ss} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - \delta)k_{ss} \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_3 = \begin{bmatrix} -c_{ss} & y_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - \alpha & 0 \\ -\eta & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 & -R_{ss} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_5 &= [0], & \Upsilon_6 &= [0], & \Upsilon_7 &= [0], & \Upsilon_8 &= [-\eta, 0, 0, 1], \\
 \Upsilon_9 &= [\eta, 0, 0, 0], & \Upsilon_{10} &= [0], & \Upsilon_{11} &= [0], & \Upsilon_{12} &= [\rho] \\
 \Sigma &= [\sigma_\epsilon^2]
 \end{aligned}$$

Y las matrices en el sistema propuesto (A.6) tienen por componentes,  $\Xi_1 = [\nu_{kk}]$ ,  $\Xi_2 = [\nu_{kz}]$ , y

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \nu_{ck} \\ \nu_{yk} \\ \nu_{Nk} \\ \nu_{Rk} \\ \nu_{xk} \end{bmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{bmatrix} \nu_{cz} \\ \nu_{yz} \\ \nu_{Nz} \\ \nu_{Rz} \\ \nu_{xz} \end{bmatrix}$$

Igualando coeficientes entre ambos sistemas usando los programas de Harald Uhlig se llega a que los valores de las matrices que hacen estable el sistema (A.6),

CASO	1,4,7	2,5,8	3,6,9
$\nu_{kk}$	0.9418	0.9418	0.9418
$\nu_{kz}$	0.2063	0.1382	0.1212
$\nu_{ck}$	0.8210	0.3930	0.2206
$\nu_{cz}$	0.4052	0.3989	0.2526
$\nu_{yk}$	0.2702	-0.0481	-0.1763
$\nu_{yz}$	2.4176	1.7139	1.4304
$\nu_{Nk}$	-0.1403	-0.6376	-0.8380
$\nu_{Nz}$	2.2150	1.1155	0.6725
$\nu_{Rk}$	-0.0254	-0.0364	-0.0409
$\nu_{Rz}$	0.0840	0.0596	0.0497
$\nu_{xk}$	-1.3273	-1.3273	-1.3273
$\nu_{xz}$	8.2537	5.5276	4.8461

La generación de series temporales para las variables relevantes es muy sencilla a partir de la representación en espacio de estados, (A.6),

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{N}_t \\ \tilde{R}_t \\ \tilde{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{kk} & \nu_{kz} \\ \nu_{ck} & \nu_{cz} \\ \nu_{Nk} & \nu_{Nz} \\ \nu_{Rk} & \nu_{Rz} \\ \nu_{yk} & \nu_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t-1} \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}$$

dados  $k_0 = k_{ss}$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ .

### Descomposición de autovalores y autovectores

**En niveles de las variables** Si se define la expectativa condicional en (A.32) como una nueva variable,  $W_t$ ,

$$W_t = E_t [c_{t+1}^{-\eta} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)]$$

entonces se puede escribir la condición de optimalidad (A.32) como,

$$c_t^{-\eta} = \beta W_t \tag{A.39}$$

Además, el valor realizado en  $t$  de la función sobre la que se toma la expectativa diferirá del valor que se esperaba en  $t-1$  que pudiera tomar, con lo que se puede definir el error racional de predicción a horizonte uno como,

$$\xi_t = c_t^{-\eta} (\alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) - W_{t-1}, \quad (\text{A.40})$$

con  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Por tanto, el sistema a linealizar resultante que interesa, estaría formado por la restricción de recursos (A.31), la definición de la expectativa junto con la correspondiente ecuación de Euler, (A.39), la condición de optimalidad (A.33), la definición del error de expectativas, (A.40), y el proceso seguido por el shock exógeno (A.35).

En términos de notación empleada se tiene que:  $u_t = [c_t - c_{ss}, N_t - N_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t)]^T$ ,  $\varepsilon_t = [\varepsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Nótese que el vector  $u_t$  contiene tanto a las variables de estado como de decisión.

Las matrices en la representación (A.7) quedan entonces,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & (\alpha - 1)k_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{-\alpha} & 1 & 0 & -k_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{1-\alpha} \\ \Gamma_0^{2,1} & \Gamma_0^{2,2} & 0 & 0 & \Gamma_0^{2,5} \\ -\eta c_{ss}^{-\eta-1} & 0 & 0 & -\beta & 0 \\ \eta c_{ss}^{-\eta-1}R_{ss} & \Gamma_0^{4,2} & 0 & 0 & \Gamma_0^{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{2,1} &= \eta(1-\alpha)c_{ss}^{-\eta-1}k_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{-\alpha} \\ \Gamma_0^{2,2} &= \alpha(1-\alpha)k_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{-\alpha-1}c_{ss}^{-\eta} \\ \Gamma_0^{2,5} &= (\alpha-1)c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{-\alpha} \\ \Gamma_0^{4,2} &= \alpha(\alpha-1)c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha-1}N_{ss}^{-\alpha} \\ \Gamma_0^{4,5} &= -\alpha c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha-1}N_{ss}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

y además,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1-\alpha)c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha-1}N_{ss}^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-1)c_{ss}^{-\eta}k_{ss}^{\alpha-2}N_{ss}^{1-\alpha} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

y

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La condición de estabilidad del sistema lineal (A.8) viene recogida por el autovector por la izquierda asociado al único autovalor inestable de sistema (A.7),

esto es, de la matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$ . Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W$  y  $\mu_z$ , donde el subíndice denota la variable a la que afecta el coeficiente, entonces  $P^s = [\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W, \mu_z]$  y se puede escribir como

$$W_t = \kappa + \frac{-\mu_c}{\mu_W} c_t + \frac{-\mu_N}{\mu_W} N_t + \frac{-\mu_k}{\mu_W} k_t + \frac{-\mu_z}{\mu_W} \log(z_t)$$

donde

$$\kappa = W_{ss} + \frac{\mu_c}{\mu_W} c_{ss} + \frac{\mu_N}{\mu_W} N_{ss} + \frac{\mu_k}{\mu_W} k_{ss}$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , vía restricción de recursos, y que  $c_t$  es función de  $W_t$  por la condición de optimalidad (A.39), se puede escribir una relación no lineal implícita del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t) = 0,$$

que se podría considerar como una expectativa parametrizada, en el sentido que se viene usando en relación al método PEA. Para los nueve casos paramétricos se tiene que

CASO	$\mu_c = \mu_N$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$
<b>1,4,7</b>	0.0000	0.0363	1.0000	0.1188
<b>2,5,8</b>	0.0000	0.0568	1.0000	0.5878
<b>3,6,9</b>	0.0000	0.0724	1.0000	0.8781

Para generar series temporales, dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se resuelve para  $N_t, k_t$  y  $W_t$  cada instante de tiempo de manera conjunta el sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_c(c_t - c_{ss}) + \mu_k(k_t - k_{ss}) + \mu_W(W_t - W_{ss}) + \mu_z \log(z_t), \\ 0 &= -(\beta W_t)^{\frac{-1}{\eta}} + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - k_t + (1 - \delta)k_{t-1}, \\ 0 &= -A_N + \beta W_t z_t k_{t-1}^\alpha (1 - \alpha) N_t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Una vez que se tienen  $\{N_t\}_{t=1}^T, \{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$  es fácil generar, o una parte el consumo de (A.39), y por otra el producto y el tipo de interés real de sus definiciones.

**En logaritmos de las variables** De la definición de la expectativa y el error de predicción del método en niveles, el sistema a linealizar en logaritmos de las variables estaría formado por la restricción de recursos (A.31), las condiciones de optimalidad (A.33) y (A.39), la definición del error de predicción, (A.40), y el proceso estocástico exógeno para la perturbación en tecnología, (A.35).

En términos de la notación empleada en (A.7), los vectores de variables están compuestos por:  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{N}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t]^T, \varepsilon_t = [\varepsilon_t]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Donde

el vector  $u_t$  contiene tanto variables de decisión como de estado. Las matrices de la aproximación lineal en (A.7) son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} c_{ss} & (\alpha - 1)y_{ss} & k_{ss} & 0 & -y_{ss} \\ \eta & \alpha & 0 & 0 & -1 \\ \eta c_{ss}^{-\eta} & 0 & 0 & \beta W_{ss} & 0 \\ \eta c_{ss}^{-\eta} R_{ss} & \alpha(\alpha - 1)c_{ss}^{-\eta} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 & 0 & -\alpha c_{ss}^{-\eta} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha y_{ss} + (1 - \delta)k_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha - 1)c_{ss}^{-\eta} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & -W_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector por la izquierda asociado al único autovalor inestable del sistema (A.7), esto es, de la matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$  es la condición de estabilidad del sistema lineal (A.8). Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c$ ,  $\mu_N$ ,  $\mu_k$ ,  $\mu_W$  y  $\mu_z$ , con el subíndice se refiere a la variable correspondiente, entonces  $P^s = [\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W, \mu_z]$  y

$$W_t = \kappa c_t^{\frac{-\mu_c}{\mu_W}} N_t^{\frac{-\mu_N}{\mu_W}} k_t^{\frac{-\mu_k}{\mu_W}} z_t^{\frac{-\mu_z}{\mu_W}}$$

donde

$$\kappa = e^{\log(W_{ss}) + \frac{\mu_c}{\mu_W} \log(c_{ss}) + \frac{\mu_N}{\mu_W} \log(N_{ss}) + \frac{\mu_k}{\mu_W} \log(k_{ss})}$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , vía restricción de recursos, y que  $c_t$  es función de  $W_t$  por la condición de optimalidad (A.39) se puede escribir como una relación no lineal implícita del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t) = 0,$$

que se puede considerar una expectativa parametrizada, en el sentido que se viene usando en relación al método PEA. Para los nueve casos paramétricos se tiene que

CASO	$\mu_c = \mu_N$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$
1,4,7	0.0000	0.4359	1.0000	0.1127
2,5,8	0.0000	0.6260	1.0000	0.5119
3,6,9	0.0000	0.7026	1.0000	0.6728

Para generar series temporales, primero se sustituye el consumo de (A.33), la expectativa de (A.39) y el capital de (A.31) en la condición de estabilidad. Luego, usando la ecuación resultante y dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se obtiene  $\{N_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{c_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$  como la solución recursiva en cada  $t$  del sistema

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_k \left[ \log \left( z_t N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1} - \left( \frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{\frac{1}{\eta}} z_t^{\frac{1}{\eta}} k_{t-1}^{\frac{\alpha}{\eta}} \right) - \log(k_{ss}) \right] \\
 &+ \mu_W \left[ \log \left( \frac{A_N}{\beta(1-\alpha)z_t k_{t-1}^\alpha N_t^\alpha} \right) - \log(W_{ss}) \right] + \mu_z \log(z_t), \\
 c_t &= \left( \frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{\frac{1}{\eta}} z_t^{\frac{1}{\eta}} k_{t-1}^{\frac{\alpha}{\eta}} N_t^{-\frac{\alpha}{\eta}}, \\
 W_t &= \frac{1}{\beta} c_t^{-\eta}, \\
 k_t &= z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - c_t + (1-\delta)k_{t-1},
 \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que en los casos paramétricos considerados en el Capítulo 1 se cumple que  $\mu_c = \mu_N = 0$ . Nótese que la primera ecuación tiene como única incógnita  $N_t$ . Una vez hecho esto, se genera el producto,  $\{y_t\}_{t=1}^T$ , a partir de la tecnología disponible y el tipo de interés real,  $\{R_t\}_{t=1}^T$ , de su definición.

### Parametrización de expectativas

Para este modelo y todos los casos paramétricos considerados, un polinomio de segundo orden resultó ser suficiente como aproximación, en el sentido de que pasaba el contraste de den Haan y Marcet (1994),

$$\begin{aligned}
 \psi(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp(q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2) \\
 &\times \exp(q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2)
 \end{aligned}$$

El gradiente de  $\psi_t$  es,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_1} &= \frac{\psi_t}{q_1} \\
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_2} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \\
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_3} &= \psi_t \log(z_t) \\
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_4} &= \psi_t [\log(k_{t-1})]^2 \\
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_5} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \log(z_t) \\
 \frac{\partial \psi_t}{\partial q_6} &= \psi_t [\log(z_t)]^2
 \end{aligned}$$

El punto fijo para  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$  en cada caso se calculó usando un tamaño muestral de 25000 observaciones, y un criterio de parada sobre cada parámetro de cuatro dígitos de exactitud. El orden del polinomio se fue incrementando a partir de uno de primer orden usando el contraste de den Haan y Marcet como criterio. Los valores para cada caso paramétrico obtenidos para el punto fijo de  $q$  son,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1	2.9009	-0.3869	-0.3265	-0.0047	0.0490	-0.0611
2	2.1570	0.0846	-0.7523	-0.1310	0.0612	-0.1099
3	2.2404	0.2335	-1.7301	-0.1757	0.3847	-0.2542
4	2.8956	-0.3866	-0.3594	-0.0046	0.0620	-0.0978
5	3.9471	-0.3810	-1.1585	-0.0415	0.2274	-0.1638
6	3.9666	-0.2217	-1.1962	-0.0848	0.1683	-0.0769
7	2.8364	-0.3693	-0.3593	-0.0082	0.0614	-0.1045
8	3.8988	-0.3776	-1.0778	-0.0405	0.1882	-0.1368
9	3.5446	-0.1183	-1.2966	-0.1065	0.2031	-0.0884

Para generar series temporales, se sustituye primero la expectativa en (A.32) por la función parametrizada,  $\psi_t$ . Después, usando la ecuación resultante y dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ , se obtienen  $\{c_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{N_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{\psi_t\}_{t=1}^T$  de la solución recursiva del sistema

$$\begin{aligned} \psi(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 (\log(k_{t-1}))^2\} \\ &\quad \times \exp \{q_5 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_6 (\log(z_t))^2\}, \\ c_t &= (\beta \psi_t)^{\frac{-1}{\eta}} \\ N_t &= \left[ \frac{1}{A_N} c_t^{-\eta} z_t k_{t-1}^{\alpha(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ k_t &= (1 - \delta) k_{t-1} + z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - c_t \end{aligned}$$

Una vez realizado este proceso se pueden obtener series temporales para el nivel de producto,  $\{y_t\}_{t=1}^T$ , y el tipo de interés real,  $\{R_t\}_{t=1}^T$ , a partir de sus definiciones.

### A.3.3 Modelo de Cooley y Hansen (1989)

**Descripción del modelo, condiciones de primer orden y estado estacionario determinista**

La economía de este apartado es una versión del modelo de trabajo indivisible de Hansen (1985) en la que se motiva la introducción de dinero mediante el uso de una restricción de *efectivo por adelantado* en el bien de consumo. Se impone la restricción de que el consumo es un bien que sólo se puede comprar con efectivo (un *cash good*), mientras que el ocio y el bien de inversión se pueden comprar con recurso al crédito (esto es, son *credit goods*). Las letras

mayúsculas denotarán en este apartado variables en términos per cápita que cada familia competitiva toma como dados; las letras minúsculas se refieren a variables específicas escogidas por cada familia. En equilibrio deben ser iguales.

La solución del planificador no coincide en este caso con la versión descentralizada del problema, debido a la ineficiencia que introduce la restricción de *efectivo por adelantado*. Esta restricción introduce ineficiencia porque obliga a mantener un activo (el dinero) para poder consumir (en el siguiente periodo) que tiene rentabilidad negativa ( $-\pi$ ) o cero (en el caso en que  $1 + \pi = \beta$ ), frente a los activos reales que dan rentabilidad  $1/\beta$ . Si  $1 + \pi = \beta$  entonces  $1 + R = (1 + \pi)(1 + i) = \frac{1}{\beta}\beta$  con lo que  $R = 0$  y entonces serían activos sustitutos; por eso se necesita que  $E_t(1/g_{t+1}) < 1/\beta$ , para que la restricción no se sature y haya ineficiencia. Cash-in-advance obliga a dar un rodeo para consumir, y lo que hay que mantener en saldos reales no se puede tener en capital que da más rentabilidad (en este sentido los saldos reales son un activo dominado).

La familia representativa maximiza sus preferencias sujeta a sus tenencias de saldos nominales de dinero y a sus restricciones. Esto es, resuelve,

$$\max_{\{h_t, c_t, k_t, m_t\}_{t=1}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} [\log(c_t) - A_N n_t] \quad (\text{A.41})$$

sujeta a

$$\begin{aligned} M_t &= g_t M_{t-1}, \\ \log(g_{t+1}) &= (1 - \rho_g) \log(g_{ss}) + \rho_g \log(g_t) + \epsilon_{g_{t+1}}, \\ \epsilon_{g_{t+1}} &\sim N(0, \sigma_{\epsilon_g}^2), \\ P_t c_t &= m_{t-1} + (g_t - 1) M_{t-1}, \quad g_t / E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] < \frac{1}{\beta} \\ c_t &= -x_t - \frac{m_t}{p_t} + w_t n_t + r_t k_{t-1} + \frac{m_{t-1} + (g_t - 1) M_{t-1}}{P_t} \\ k_t &= (1 - \delta) k_{t-1} + x_t \end{aligned}$$

tomando como dados  $k_0$  y  $\{z_t\}_{t=1}^T$ . Donde  $c_t$  es el consumo en el instante  $t$ ,  $k_{t-1}$  el stock de capital al comienzo del periodo  $t$ ,  $x_t$  el nivel de inversión,  $n_t$  las horas trabajadas,  $M_t$  denota los saldos en dinero per cápita al principio del periodo, mientras que  $m_t$  se refiere a las tenencias de dinero de la familia representativa al principio del periodo, y  $g_t$  es la tasa bruta de crecimiento del dinero, conocida por todos los agentes al principio del periodo  $t$ , y que tiene por media incondicional  $g_{ss}$ . Además,  $P_t$  es el nivel de precios,  $w_t$  el salario y  $r_t$  la tasa de rendimiento del capital.

En relación a los parámetros,  $0 < \beta < 1$  es el factor de descuento subjetivo,  $0 < \delta < 1$  la tasa de depreciación y  $0 < \rho_g < 1$  controla la persistencia en la ley de movimiento de la tasa de crecimiento monetario.  $A_N$  da la ponderación de las horas trabajadas en la función de utilidad. No es el objetivo de este Apéndice, como no lo fue del Capítulo 1, dar una descripción detallada del modelo y de sus implicaciones económicas; el lector interesado puede consultar directamente Cooley y Hansen (1989).

El Lagrangiano de este problema es,

$$L(n_t, c_t, m_t, k_t) = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \left[ \log(c_t) - A_N n_t - \lambda_t \left\{ c_t + k_t + \frac{m_t}{P_t} - w_t n_t - r_t k_{t-1} - \frac{m_{t-1} + (g_t - 1)M_{t-1}}{P_t} - (1 - \delta)k_{t-1} \right\} - \zeta_t \left\{ c_t + \frac{m_{t-1} + (g_t - 1)M_{t-1}}{P_t} \right\} \right]$$

y las condiciones de primer orden asociadas,

$$\begin{aligned} \zeta_t : 0 &= P_t c_t - m_t \\ \lambda_t : 0 &= c_t + x_t + \frac{m_t}{p_t} - w_t n_t - R_t k_{t-1} - \frac{m_{t-1} + (g_t - 1)M_{t-1}}{P_t} \\ c_t : 0 &= \frac{1}{c_t} - \lambda_t - \eta_t \\ n_t : 0 &= -A_N + \lambda_t w_t \\ k_t : 0 &= -\lambda_t + \beta E_t [\lambda_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta)] \\ m_t : 0 &= -\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \left[ \frac{\lambda_{t+1} + \eta_{t+1}}{P_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

En lo concerniente a la empresa representativa, el problema al que se enfrenta es el de maximizar los beneficios,

$$\max_{\{N_t, K_{t-1}\}} \Pi_t = Y_t - w_t N_t - r_t K_{t-1} \quad (\text{A.42})$$

sujeta a la tecnología disponible,

$$\begin{aligned} Y_t &= z_t K_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha}, \\ \log(z_{t+1}) &= \log(z_{ss})(1 - \rho_z) + \rho_z \log(z_t) + \epsilon_{z_{t+1}} \\ \epsilon_{z_{t+1}} &\sim N(0, \sigma_{\epsilon_z}^2) \end{aligned}$$

El correspondiente Lagrangiano,

$$L(N_t, K_{t-1}) = z_t K_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - w_t N_t - r_t K_{t-1}$$

y las condiciones de primer orden,

$$\begin{aligned} N_t : w(z_t, K_{t-1}, N_t) &= (1 - \alpha) z_t K_{t-1}^\alpha N_t^{-\alpha} \\ K_{t-1} : r(z_t, K_{t-1}, N_t) &= \alpha z_t K_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Si se imponen las condiciones de equilibrio entre las condiciones de equilibrio de la familia representativa y las de la empresa representativa, el sistema

completo de condiciones de primer orden y restricciones resulta ser,

$$\log(z_t) = \log(z_{ss})(1 - \rho_z) + \rho_z \log(z_{t-1}) + \epsilon_{z_t} \quad (\text{A.43})$$

$$\log(g_t) = \log(g_{ss})(1 - \rho_g) + \rho_g \log(g_{t-1}) + \epsilon_{g_t} \quad (\text{A.44})$$

$$\lambda_t = \beta E_t [\lambda_{t+1} (\alpha z_{t+1} k_t^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] \quad (\text{A.45})$$

$$\lambda_t c_t = \beta E_t \frac{1}{g_{t+1}} \quad (\text{A.46})$$

$$A_N = \lambda_t (1 - \alpha) \frac{y_t}{N_t} \quad (\text{A.47})$$

$$c_t + k_t = z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta) k_{t-1} \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{p}_t = \frac{1}{c_t} \quad (\text{A.49})$$

$$M_t = g_t M_{t-1} \quad (\text{A.50})$$

que es un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas:  $\lambda_{t+1}$ ,  $k_t$ ,  $N_{t+1}$ ,  $c_{t+1}$ ,  $P_{t+1}$ ,  $M_{t+1}$ ,  $z_{t+1}$  y  $g_{t+1}$ , con  $M_0$ ,  $k_0$ ,  $z_0$  y  $g_0$  dados, y donde  $\hat{p}_t = \frac{P_t}{M_t}$ .

De la ecuación (A.46), se puede obtener una expresión explícita para la expectativa  $E_t [1/g_{t+1}]$ . De la ley de movimiento de la tasa de crecimiento monetario (A.44),

$$\frac{1}{g_{t+1}} = g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g} e^{-\epsilon_{g_{t+1}}}$$

entonces

$$E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] = g_t^{-\rho_g} g_{ss}^{\rho_g - 1} E_t [e^{-\epsilon_{g_{t+1}}}] = g_t^{-\rho_g} g_{ss}^{\rho_g - 1} E \left[ \underbrace{e^{-\epsilon_{g_{t+1}}}}_{\Omega} \right]$$

dado que  $\log(\Omega) = -\epsilon_{g_{t+1}} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_g}^2)$ , y entonces  $\Omega$  es log-normal, con  $E(\Omega) = e^{\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2}}$ . Por tanto, se tiene,

$$E_t \left[ \frac{1}{g_{t+1}} \right] = e^{\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2} - (1 - \rho_g) \log(g_{ss})} g_t^{-\rho_g} = e^{\frac{\sigma_{\epsilon_g}^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g} \quad (\text{A.51})$$

Respecto al estado estacionario determinista, del proceso supuesto para la tecnología se tiene que  $z_{ss} = 1$ . Por otra parte,  $g_{ss}$  es un parámetro del modelo. De (A.45) se puede obtener el cociente

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right]$$

De (A.48),

$$\frac{c_{ss}}{k_{ss}} = \frac{y_{ss}}{k_{ss}} - \delta$$

y de (A.46) y (A.47),

$$N_{ss} = \frac{\beta(1 - \alpha) y_{ss} / k_{ss}}{A_N g_{ss} c_{ss} / k_{ss}}$$

Ahora, usando la función de producción,

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = k_{ss}^{\alpha-1} N_{ss}^{1-\alpha} = \left(\frac{k_{ss}}{N_{ss}}\right)^{\alpha-1} \Rightarrow \frac{k_{ss}}{N_{ss}} = \left(\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Y además  $k_{ss} = \frac{k_{ss}}{N_{ss}} N_{ss}$ ,  $x_{ss} = \delta k_{ss}$ ,  $y_{ss} = \frac{y_{ss}}{k_{ss}} k_{ss}$ ,  $c_{ss} = y_{ss} - x_{ss}$ ,  $\hat{p}_{ss} = \frac{1}{c_{ss}}$  y  $\lambda_{ss} = \frac{\beta}{c_{ss} y_{ss}}$ .

Por último, cabe hacer el siguiente comentario: al simular se verifica con cada método y en cada instante del tiempo, que la restricción de *efectivo por adelantado* no se satura.

### Aproximación lineal cuadrática estándar

Como se ha comentado más arriba, no se puede calcular el equilibrio de este modelo indirectamente resolviendo el problema del planificador, mediante la aplicación del segundo teorema del bienestar. La solución LQA para este modelo, al estar basada en una aproximación a la función valor y no poder hacer uso del segundo teorema del bienestar, tiene que introducir algunas modificaciones *ad hoc* al procedimiento descrito para resolver los dos modelos anteriores. En este caso se tiene que considerar el nivel de precios como un proceso exógeno al agente representativo. La manera de hacer ésto es suponiendo una ley de movimiento lineal para el nivel de precios, y entonces iterando en esta ley de movimiento hasta que sea consistente con las asignaciones de consumo. Esta modificación del método se explica con todo detalle en Cooley y Hansen (1989) y en Hansen y Prescott (1995), basándose en Kydland (1989). Para los ejercicios que se realizan en esta Tesis no hizo falta implementar el nuevo método, y simplemente se tomaron las reglas de decisión lineales que proporcionan Cooley y Hansen en su artículo,

$$\begin{aligned} \hat{p}_t &= H_{\hat{p}0} + H_{\hat{p}z} \log(z_t) + H_{\hat{p}g} \log(g_t) + H_{\hat{p}k} k_{t-1}, \\ x_t &= H_{x0} + H_{xz} \log(z_t) + H_{xg} \log(g_t) + H_{xk} k_{t-1}. \end{aligned}$$

de manera que esta vez,

$$H = \begin{bmatrix} H_{\hat{p}0} & H_{\hat{p}z} & H_{\hat{p}g} & H_{\hat{p}k} \\ H_{x0} & H_{xz} & H_{xg} & H_{xk} \end{bmatrix}$$

y los valores numéricos que presentan Cooley y Hansen (1989) son,

CASO	$H_{\hat{p}0}$	$H_{\hat{p}z}$	$H_{\hat{p}g}$	$H_{\hat{p}k}$
1,3,5	1.88633	-0.58175	0.55474	-0.05898
2,4,6	2.07319	-0.66585	0.63537	-0.07726
CASO	$H_{x0}$	$H_{xz}$	$H_{xg}$	$H_{xk}$
1,3,5	0.64419	1.73073	0.30219	-0.03318
2,4,6	0.52716	1.51216	0.26423	-0.03318

A partir de las dos reglas de decisión lineales se resuelve para el consumo y el capital. Entonces, usando la restricción de recursos se puede obtener el nivel de producto, de la función de producción se obtiene el trabajo, y el tipo de interés real se consigue de su definición. El nivel de precios que se recupera usando el stock nominal de dinero y el nivel de consumo permite calcular la inflación. Esto es, se obtienen  $\{c_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{k_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{y_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{N_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{R_t\}_{t=1}^T$ ,  $\{p_t\}_{t=1}^T$  y  $\{\pi_t\}_{t=1}^T$  de la solución recursiva al sistema,

$$\begin{aligned} c_t &= (\delta_{\hat{p}0} + \delta_{\hat{p}z} \log(z_t) + \delta_{\hat{p}g} \log(g_t) + \delta_{\hat{p}k} k_{t-1})^{-1}, \\ k_t &= \delta_{x0} + \delta_{xz} \log(z_t) + \delta_{xg} \log(g_t) + (\delta_{xk} + 1 - \delta)k_{t-1}, \\ y_t &= c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1}, \\ N_t &= \left[ \frac{y_t}{z_t k_{t-1}^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ R_t &= 1 - \delta + \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}}, \\ M_t &= g_t M_{t-1}, \\ P_t &= \frac{M_t}{c_t}, \\ \pi_t &= \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}, \end{aligned}$$

dados  $k_0$ ,  $M_0$ ,  $\{z_t\}_{t=1}^T$  y  $\{g_t\}_{t=1}^T$ .

### Coefficientes indeterminados

El sistema que se linealiza en logaritmos de las variables en torno al estado estacionario está (A.43) a (A.47), (A.49), la ley de movimiento del capital, la restricción de recursos en la forma  $y_t = c_t + x_t$ , la función de producción, y la expresión para el tipo de interés real. En este caso se tiene que  $s_t = [k_t]$ ,  $v_t = [\tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{N}_t, \tilde{x}_t, \tilde{p}_t, \tilde{\lambda}_t, \tilde{R}_t]^T$ ,  $z_t = [\tilde{z}_t, \tilde{g}_t]^T$ .

Una vez linealizado se representa el sistema en la forma dada por (A.5), donde las matrices son:

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_{ss} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - \delta)k_{ss} \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_3 = \begin{bmatrix} -c_{ss} & y_{ss} & 0 & -x_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{ss} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \rho_g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_5 &= [0], & \Upsilon_6 &= [0], & \Upsilon_7 &= [0], \\ \Upsilon_8 &= [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1], \\ \Upsilon_9 &= [0, 0, 0, 0, 0, -1, 0], & \Upsilon_{10} &= [0, 0], & \Upsilon_{11} &= [0, 0], \\ \Upsilon_{12} &= \begin{bmatrix} \rho_z & 0 \\ 0 & \rho_g \end{bmatrix}, & \Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & \sigma_g^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y las matrices en el sistema propuesto (A.6) tienen por componentes,  $\Xi_1 = [\nu_{kk}]$ ,  $\Xi_2 = [\nu_{kz}, \nu_{kg}]$  y

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \nu_{ck} \\ \nu_{yk} \\ \nu_{Nk} \\ \nu_{xk} \\ \nu_{pk} \\ \nu_{\lambda k} \\ \nu_{Rk} \end{bmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{bmatrix} \nu_{cz} & \nu_{cg} \\ \nu_{yz} & \nu_{yg} \\ \nu_{Nz} & \nu_{Ng} \\ \nu_{xz} & \nu_{xg} \\ \nu_{pz} & \nu_{pg} \\ \nu_{\lambda z} & \nu_{\lambda g} \\ \nu_{Rz} & \nu_{Rg} \end{bmatrix}$$

Se generan muy fácilmente series temporales para las variables de la economía usando la representación en forma de espacio de estados,

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{N}_t \\ \tilde{x}_t \\ \tilde{p}_t \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{R}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{kk} & \nu_{kz} & \nu_{kg} \\ \nu_{ck} & \nu_{cz} & \nu_{cg} \\ \nu_{yk} & \nu_{yz} & \nu_{yg} \\ \nu_{Nk} & \nu_{Nz} & \nu_{Ng} \\ \nu_{xk} & \nu_{xz} & \nu_{xg} \\ \nu_{pk} & \nu_{pz} & \nu_{pg} \\ \nu_{\lambda k} & \nu_{\lambda z} & \nu_{\lambda g} \\ \nu_{Rk} & \nu_{Rz} & \nu_{Rg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t-1} \\ \tilde{z}_t \\ \tilde{g}_t \end{bmatrix}$$

donde todas las variables están en desviaciones logarítmicas respecto al estado estacionario. Se puede entonces recuperar los niveles de las variables deshaciendo la transformación logarítmica, con lo que las reglas de decisión resultantes para los niveles de las variables son no lineales.

Los valores numéricos de los coeficientes de la representación anterior son iguales para todos los casos paramétricos considerados, dado que ninguna matriz  $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \dots$  depende de  $g_{ss}$  o  $\sigma_{\epsilon_z}^2$ , que son los parámetros que se varían. Igualando coeficientes entre ambos sistemas usando los programas de Harald Uhlig, se llega a que los valores de las matrices que hacen estable el sistema (A.6) son,

CASO	Todos	CASO	Todos
$\nu_{kk}$	0.9418	$\nu_{zk}$	-1.3273
$\nu_{kz}$	0.1552	$\nu_{zz}$	6.2091
$\nu_{kg}$	0.0271	$\nu_{zg}$	1.0850
$\nu_{ck}$	0.5316	$\nu_{\hat{p}k}$	-0.5316
$\nu_{cz}$	0.4703	$\nu_{\hat{p}z}$	-0.4703
$\nu_{cg}$	-0.4488	$\nu_{\hat{p}g}$	0.4488
$\nu_{yk}$	0.0550	$\nu_{\lambda k}$	-0.5316
$\nu_{yz}$	1.9417	$\nu_{\lambda z}$	-0.4703
$\nu_{yg}$	-0.0555	$\nu_{\lambda g}$	-0.0312
$\nu_{Nk}$	-0.4766	$\nu_{Rk}$	-0.0328
$\nu_{Nz}$	1.4715	$\nu_{Rz}$	0.0675
$\nu_{Ng}$	-0.0867	$\nu_{Rg}$	-0.0019

**Descomposición de autovalores y autovectores**

**En niveles de las variables** Si se define la expectativa condicional en (A.45), como una nueva variable,  $W_t$ ,

$$W_t = E_t [\lambda_t (\alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta)]$$

y entonces se puede escribir la condición de optimalidad (A.45) como

$$\lambda_t = \beta W_t$$

Además, el valor realizado en  $t$  de la función sobre la que se toma la expectativa diferirá del valor que se esperaba en  $t-1$  que pudiera tomar, con lo que se puede definir el error racional de predicción a horizonte uno como,

$$\xi_t = \lambda_t (\alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) - W_{t-1}, \tag{A.52}$$

con  $E_t(\xi_{t+1}) = 0$ . Si se elimina  $\lambda_t$  del sistema formado por (A.43), (A.44), (A.46) con (A.51), (A.47), (A.48), (A.3.3) y (A.52), se puede llegar a que

$$\begin{aligned}
 0 &= -A_N + \beta W_t (1 - \alpha) z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{-\alpha} \\
 0 &= -W_t c_t + e^{\frac{\sigma_c^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g} \\
 0 &= -c_t - k_t + (1 - \delta) k_{t-1} + z_t k_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\
 0 &= -W_{t-1} + \beta W_t (\alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)) - \xi_t \\
 0 &= -\log(z_t) + \rho_z \log(z_{t-1}) + \epsilon_{z_t} \\
 0 &= -\log(g_t) + (1 - \rho_g) \log(g_{ss}) + \rho_g \log(g_{t-1}) + \epsilon_{g_t}
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

que es el sistema que se quiere linealizar para obtener una solución aproximada usando SIM.

Se tiene que  $u_t = [c_t - c_{ss}, N_t - N_{ss}, k_t - k_{ss}, W_t - W_{ss}, \log(z_t), \log(g_t) - \log(g_{ss})]^T$ ,  $\epsilon_t = [\epsilon_{z_t}, \epsilon_{g_t}]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Las matrices de la aproximación lineal en

(A.7) son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_0^{1,2} & 0 & \beta(\alpha-1)W_{ss} \frac{y_{ss}}{N_{ss}} & \beta(\alpha-1)W_{ss} \frac{y_{ss}}{N_{ss}} & 0 \\ W_{ss} & 0 & 0 & c_{ss} & 0 & \rho_g \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{g_{ss}} \\ 1 & (\alpha-1) \frac{y_{ss}}{N_{ss}} & 1 & 0 & -y_{ss} & 0 \\ 0 & \Gamma_0^{4,2} & 0 & -1 & -\beta\alpha W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{1,2} &= \beta\alpha(1-\alpha)W_{ss} \frac{y_{ss}}{N_{ss}^2} \\ \Gamma_0^{4,2} &= \beta\alpha(\alpha-1)W_{ss} k_{ss}^{\alpha-1} N_{ss}^{-\alpha} \end{aligned}$$

y además,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta\alpha(1-\alpha)W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}N_{ss}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\alpha(\alpha-1)W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}^2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_g \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El autovector por la izquierda asociado al único autovalor inestable de la matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$  es la condición de estabilidad del sistema lineal (A.8). Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W, \mu_z$  y  $\mu_g$ . Entonces  $P^s = [\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W, \mu_z, \mu_g]$ , de donde

$$W_t = \kappa + \frac{-\mu_c}{\mu_W} c_t + \frac{-\mu_N}{\mu_W} N_t + \frac{-\mu_k}{\mu_W} k_t + \frac{-\mu_z}{\mu_W} \log(z_t) + \frac{-\mu_g}{\mu_W} \log(g_t)$$

donde

$$\kappa = W_{ss} + \frac{\mu_c}{\mu_W} c_{ss} + \frac{\mu_N}{\mu_W} N_{ss} + \frac{\mu_k}{\mu_W} k_{ss} + \frac{\mu_g}{\mu_W} \log(g_{ss}).$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , y que  $c_t$  y  $N_t$  son función de  $W_t, k_{t-1}, g_t$  y  $z_t$ , la condición de estabilidad se puede escribir como una relación altamente no lineal del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t, g_t) = 0,$$

que se podría denotar por una expectativa parametrizada, en el sentido que se viene usando en relación al método PEA. Para los seis casos paramétricos considerados,

CASO	$\mu_c = \mu_N$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$	$\mu_g$
1,3,5	0.0000	0.0617	1.0000	0.4663	0.0194
2,4,6	0.0000	0.0699	1.0000	0.4663	0.0194

Y para generar series temporales, dados  $k_0, \{z_t\}_{t=1}^T$  y  $\{g_t\}_{t=1}^T$ , se resuelve para  $N_t, k_t$  y  $W_t$  cada instante de tiempo de manera simultánea el sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_c(c_t - c_{ss}) + \mu_k(k_t - k_{ss}) + \mu_W(W_t - W_{ss}) + \mu_z \log(z_t), \\ 0 &= -(\beta W_t)^{\frac{1}{\eta}} + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} - k_t + (1 - \delta)k_{t-1}, \\ 0 &= -A_N + \beta W_t z_t k_{t-1}^\alpha (1 - \alpha) N_t^{-\alpha}, \end{aligned}$$

que se obtiene del sistema (A.53) una vez que se ha eliminado el consumo. Con las series temporales de  $\{N_t\}_{t=1}^T, \{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$  es fácil calcular, por una lado el consumo usando (A.46) y (A.47), y por el otro el producto y el tipo de interés real de sus definiciones.

**En logaritmos de las variables** El sistema a linealizar en logaritmos de las variables [usando las simplificaciones de H. Uhlig] es (A.53), obtenido tal y como se describió en la puesta en práctica del método en niveles. Se tiene que:  $u_t = [\tilde{c}_t, \tilde{N}_t, \tilde{k}_t, \tilde{W}_t, \tilde{z}_t, \tilde{g}_t]^T, \epsilon_t = [\epsilon_{z_t}, \epsilon_{g_t}]$  y  $\eta_t = [\xi_t]$ . Las matrices de la aproximación lineal en (A.7) son,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & -1 & -1 & 0 \\ W_{ss}c_{ss} & 0 & 0 & W_{ss}c_{ss} & 0 & \rho_g \frac{e^{-\frac{\sigma_{c,g}^2}{2}}}{g_{ss}} \\ c_{ss} & (\alpha - 1)y_{ss} & k_{ss} & 0 & -y_{ss} & 0 \\ 0 & \beta\alpha(\alpha - 1)W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 & -W_{ss} & -\beta\alpha W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \delta)k_{ss} + \alpha y_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\alpha(\alpha - 1)W_{ss} \frac{y_{ss}}{k_{ss}} & -W_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_g \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El único autovalor inestable del sistema (A.7), esto es, de la matriz  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$  tiene asociado un autovector por la izquierda que representa la condición de estabilidad del sistema lineal (A.8). Esta condición toma la forma de una combinación lineal entre los elementos del vector  $u_t$  en cada instante  $t$ . Sean los coeficientes de dicha combinación lineal  $\mu_c$ ,  $\mu_N$ ,  $\mu_k$ ,  $\mu_W$ ,  $\mu_z$  and  $\mu_g$ , donde el subíndice se refiere a la variable a la que afecta el coeficiente. Entonces  $P^s = [\mu_c, \mu_N, \mu_k, \mu_W, \mu_z, \mu_g]$ , y se puede escribir el producto  $P^s u_t = 0$  como,

$$W_t = \kappa c_t^{\frac{-\mu_c}{\mu_W}} N_t^{\frac{-\mu_N}{\mu_W}} k_t^{\frac{-\mu_k}{\mu_W}} z_t^{\frac{-\mu_z}{\mu_W}} g_t^{\frac{-\mu_g}{\mu_W}}.$$

donde

$$\kappa = \exp \left( \log(W_{ss}) + \frac{\mu_c}{\mu_W} \log(c_{ss}) + \frac{\mu_N}{\mu_W} \log(N_{ss}) + \frac{\mu_k}{\mu_W} \log(k_{ss}) + \frac{\mu_g}{\mu_W} \log(g_{ss}) \right)$$

Dado que  $k_t$  es una función no lineal de  $k_{t-1}$  y  $z_t$ , y que  $c_t$  y  $N_t$  son función de  $W_t, k_{t-1}, g_t$  y  $z_t$ , la condición de estabilidad se puede escribir como una relación altamente no lineal del tipo,

$$\varphi(W_t, k_{t-1}, z_t, g_t) = 0,$$

que se podría denotar por una expectativa parametrizada, en el sentido que se viene usando en relación al método PEA. Para los seis casos paramétricos considerados,

CASO	$\mu_c = \mu_N$	$\mu_k$	$\mu_W$	$\mu_z$	$\mu_g$
1,3,5	0.0000	0.5644	1.0000	0.3827	0.0159
2,4,6	0.0000	0.5644	1.0000	0.3827	0.0159

Para generar series temporales se explota el hecho de que  $\mu_c = \mu_N$ , y se hacen sustituciones repetidas de las distintas ecuaciones en la condición de estabilidad hasta que queda  $N_t$  como única incógnita. Entonces, usando la ecuación resultante y dados  $k_0, \{z_t\}_{t=1}^T$  y  $\{g_t\}_{t=1}^T$ , se obtiene  $\{N_t\}_{t=1}^T$ , y deshaciendo las sustituciones,  $\{c_t\}_{t=1}^T, \{k_t\}_{t=1}^T$  y  $\{W_t\}_{t=1}^T$ . Esto es, se resuelve recursivamente el sistema,

$$\begin{aligned} \mu_k \left[ \log \left( \frac{\beta(\alpha - 1)}{A_N g_{ss}^{1-\rho_g}} z_t k_{t-1}^\alpha g_t^{-\rho_g} N_t^{-\alpha} + (1 - \delta) k_{t-1} + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} \right) - \log(k_{ss}) \right] \\ + \mu_W \left[ \log \left( \frac{A_N N_t^\alpha}{\beta(1 - \alpha) z_t k_{t-1}^\alpha} \right) - \log(W_{ss}) \right] \\ + \mu_z \log(z_t) + \mu_g [\log(g_t) - \log(g_{ss})] = 0 \end{aligned}$$

$$W_t = \frac{A_N N_t^\alpha}{\beta(1 - \alpha) z_t k_{t-1}^\alpha},$$

$$c_t = \frac{1}{W_t} e^{\frac{\sigma_c^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g},$$

$$k_t = -c_t + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta) k_{t-1}$$

Después se calculan series temporales para,  $\{y_t\}_{t=1}^T$  y  $\{R_t\}_{t=1}^T$  a partir de sus definiciones.

**Parametrización de expectativas**

Para este modelo y todos los casos paramétricos considerados, un polinomio de tercer orden resultó ser suficiente como aproximación, en el sentido de que pasaba el contraste de den Haan y Marcet (1994),

$$\psi_t(q; k_{t-1}, z_t) = q_1 \exp \{ q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 \log(g_t) + q_5 (\log(k_{t-1}))^2 \} \\ \times \exp \{ q_6 \log(k_{t-1}) \log(z_t) + q_7 (\log(z_t))^2 + q_8 (\log(z_t))^3 \}$$

El gradiente de  $\psi_t$  es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_t}{\partial q_1} &= \frac{\psi_t}{q_1} \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_2} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_3} &= \psi_t \log(z_t) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_4} &= \psi_t \log(g_t) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_5} &= \psi_t [\log(k_{t-1})]^2 \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_6} &= \psi_t \log(k_{t-1}) \log(z_t) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_7} &= \psi_t [\log(z_t)]^2 \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial q_8} &= \psi_t [\log(z_t)]^3 \end{aligned}$$

El punto fijo para  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8]$  en cada caso se calculó usando un tamaño muestral de 25000 observaciones, y un criterio de parada sobre cada parámetro de cuatro dígitos de exactitud. El orden del polinomio se fue incrementando a partir de uno de primer orden usando el contraste de den Haan y Marcet como criterio. Los valores para cada caso paramétrico obtenidos para el punto fijo de  $q$  son,

CASO	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	$q_8$
1	3.0710	-0.2498	-0.8460	-0.0362	-0.0569	0.1543	-0.1351	0.2371
2	3.6111	-0.4189	-0.7175	-0.0288	-0.0257	0.1111	-0.3122	-0.9004
3	3.8793	-0.4407	-0.9017	-0.0297	-0.0179	0.1790	-0.1316	0.1953
4	3.0250	-0.2686	-0.8818	-0.0223	-0.0576	0.1831	-0.1849	-0.6025
5	3.9664	-0.4567	-0.7432	-0.0582	-0.0154	0.1125	-0.1128	-0.0125
6	3.5363	-0.4038	-0.7614	-0.0191	-0.0291	0.1286	-0.1064	-0.0294

Para generar series temporales, primero se puede sustituir la expectativa en (A.45) por la función parametrizada,  $\psi_t$ . Entonces, usando la ecuación resultante y dados  $k_0, \{z_t\}_{t=1}^T$  y  $\{g_t\}_{t=1}^T$ , se obtiene  $\{c_t\}_{t=1}^T, \{k_t\}_{t=1}^T, \{N_t\}_{t=1}^T$  y

$\{\psi_t\}_{t=1}^T$  como la solución recursiva en cada instante  $t$  del sistema

$$\begin{aligned} \psi_t(q; k_{t-1}, z_t) &= q_1 \exp \{q_2 \log(k_{t-1}) + q_3 \log(z_t) + q_4 \log(g_t)\} \\ &\quad \times \exp \{q_5 (\log(k_{t-1}))^2 + q_6 \log(k_{t-1}) \log(z_t)\} \\ &\quad \times \exp \{q_7 (\log(z_t))^2 + q_8 (\log(z_t))^3\}, \\ c_t &= \frac{1}{\psi_t} e^{\frac{\sigma_g^2}{2}} g_{ss}^{\rho_g - 1} g_t^{-\rho_g}, \\ N_t &= \left[ \frac{AN}{(1-\alpha)\psi_t z_t k_{t-1}^\alpha} \right]^{\frac{-1}{\alpha}}, \\ k_t &= -c_t + z_t k_{t-1}^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1}. \end{aligned} \tag{A.54}$$

Por último se calculan las series temporales para  $\{y_t\}_{t=1}^T$  y  $\{R_t\}_{t=1}^T$  a partir de sus definiciones.

# Apéndice B

## Programas en MATLAB utilizados

### B.1 Organización

Todos los programas descritos en este Apéndice están disponibles en el disco que acompaña a la Tesis Doctoral. Los programas correspondientes a cada Capítulo se encuentran en el subdirectorio “\CapitulX”, donde X denota el número.

Hay programas que se utilizan en varios Capítulos, tales como el correspondiente al contraste de den Haan y Marcet o el que resuelve ceros de ecuaciones. En vez de tener un directorio común, se ha optado por incluir en el directorio correspondiente a cada Capítulo los programas necesarios, con lo cual se encontrarán programas repetidos, pero idénticos.

En los siguientes apartados se exponen la estructura y los contenidos de los subdirectorios correspondientes a cada Capítulo. Para más información sobre cada programa, se puede teclear `help programa` en el prompt de MATLAB.

### B.2 Capítulo 1

Los programas están organizados en cuatro subdirectorios:

**Basico** todos los programas diseñados para resolver específicamente el modelo Neoclásico Básico.

**Hansen85** todos los programas diseñados para resolver específicamente el modelo de Hansen (1985).

**Cooley89** todos los programas diseñados para resolver específicamente el modelo de Cooley y Hansen (1989).

**Programs** programas comunes para la solución de los tres modelos.

Para los modelos, una serie de programas llamado `MODEL*.M`, con  $*$ =1,2,3, [1: Básico, 2: Hansen (1985), 3: Cooley y Hansen (1989)] fijan los valores paramétricos, calculan el estado estacionario, y llaman a los programas correspondientes a cada método de solución, que se llaman `MOD*???.M`, donde  $*$ =1,2,3 se refiere al modelo, y  $???$ =lqa, sim, sil, uhl, pea se refiere al método de solución.

## B.2.1 Subdirectorío Básico

`MODEL1.M` con este programa se fijan los valores paramétricos, las opciones por defecto de los algoritmos y se calcula el estado estacionario determinista. Después el programa llama a los `MOD1???.M`'s.

`MOD1LQA.M` implementa la aproximación lineal cuadrática estándar al modelo Neoclásico Básico. Primero realiza la aproximación cuadrática a la función de retorno y pone las restricciones del problema en la forma adecuada. Después llama a `do_LQA.M` para calcular la regla de decisión. Y, por último, genera series temporales para todas las variables y el error de expectativas, usando la regla de decisión y las condiciones de primer orden y las restricciones del problema original.

`MOD1SIM.M` y `MOD1SIL.M` estos programas realizan la descomposición de autovalores y autovectores del modelo Básico. Primero implementan la aproximación lineal, en niveles o en logaritmos, del sistema de condiciones de primer orden y restricciones del problema original. Después llaman a `do_SIM.M` para calcular la condición de estabilidad. Y, por último, generan series temporales para todas las variables del sistema y el error de predicción, usando la condición de estabilidad, las condiciones de primer orden y las restricciones del problema original.

`SIS1SIM.M` función auxiliar llamada por `MOD1SIM.M` para resolver el sistema de condiciones de primer orden, restricciones y condición de estabilidad.

`FUN1SIM.M` función auxiliar llamada por `MOD1SIM.M` para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.

`FUN1SIL.M` función auxiliar llamada por `MOD1SIL.M` para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.

`MOD1UHL.M` implementa el método de coeficientes indeterminados propuesto por Uhlig, para el modelo Neoclásico Básico. Primero escribe la aproximación lineal en logaritmos. Después llama a `do_UHL.M` para calcular las reglas de decisión. En un último paso, genera series temporales de todas las variables usando la forma de espacio de estados del sistema. Como un subproducto calcula la serie temporal correspondiente al error de predicción.

MOD1PEA.M programa usado para la simulación de series temporales del modelo Básico con PEA. Dados los valores de los coeficientes del polinomio de aproximación, simplemente genera series temporales de todas las variables de la economía y del error de predicción.

MOD1PE6.M busca el punto fijo de un polinomio de segundo orden con seis parámetros, para resolver el modelo Básico con el método PEA. Dada una condición inicial [solicitada por MODEL1.M si se decide introducirla a mano, o estimada llamando a PE\_M1\_6] itera hasta que se consigue la convergencia al punto fijo. Genera también el error de expectativas correspondiente.

PE\_M1\_6.M estima condiciones iniciales apropiadas para un polinomio de aproximación de segundo orden [seis parámetros] al modelo neoclásico básico, usando las series temporales generadas con otro método [en los programas está seleccionado el método UHL]. Estas series temporales deben estar en memoria cuando se corra el programa.

ESTIM\_M1.M implementa el procedimiento de estimación del punto fijo de los coeficientes del polinomio PEA para resolver el modelo Básico. Primero llama a MOD1UHL.M [u otro método rápido], después usa las series temporales generadas con este método para estimar vía PE\_M1\_6.M condiciones iniciales apropiadas para MOD1PE6.M. En un último paso, itera en MOD1PE6.M hasta que se consigue la convergencia al punto fijo.

## B.2.2 Subdirectorío Hansen85

MODEL2.M con este programa se fijan los valores paramétricos, las opciones por defecto de los algoritmos y se calcula el estado estacionario determinista. Después el programa llama a los MOD2???.M's.

MOD2LQA.M implementa la aproximación lineal cuadrática estándar al modelo de Hansen. Primero realiza la aproximación cuadrática a la función de retorno y pone las restricciones del problema en la forma adecuada. Después llama a do\_LQA.M para calcular la regla de decisión. Y, por último, genera series temporales para todas las variables y el error de expectativas, usando la regla de decisión y las condiciones de primer orden y las restricciones del problema original.

MOD2SIM.M y MOD2SIL.M estos programas realizan la descomposición de autovalores y autovectores del modelo de Hansen (1985). Primero implementan la aproximación lineal, en niveles o en logaritmos, del sistema de condiciones de primer orden y restricciones del problema original. Después llaman a do\_SIM.M para calcular la condición de estabilidad. Y, por último, generan series temporales para todas las variables del sistema y el error de predicción, usando la condición de estabilidad, las condiciones de primer orden y las restricciones del problema original.

- SIS2SIM.M función auxiliar llamada por MOD2SIM.M para resolver el sistema de condiciones de primer orden, restricciones y condición de estabilidad.
- FUN2SIM.M función auxiliar llamada por MOD2SIM.M para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.
- FUN2SIL.M función auxiliar llamada por MOD2SIL.M para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.
- MOD2UHL.M implementa el método de coeficientes indeterminados propuesto por Uhlig, para el modelo de Hansen. Primero escribe la aproximación lineal en logaritmos. Después llama a do\_UHL.M para calcular las reglas de decisión. En un último paso, genera series temporales de todas las variables usando la forma de espacio de estados del sistema. Como un subproducto calcula la serie temporal correspondiente al error de predicción.
- MOD2PEA.M programa usado para la simulación de series temporales del modelo de Hansen con PEA. Dados los valores de los coeficientes del polinomio de aproximación, simplemente genera series temporales de todas las variables de la economía y del error de predicción.
- MOD2PE6.M busca el punto fijo de un polinomio de segundo orden con seis parámetros, para resolver el modelo de Hansen con el método PEA. Dada una condición inicial [solicitada por MODEL2.M si se decide introducirla a mano, o estimada llamando a PE\_M2\_6] itera hasta que se consigue la convergencia al punto fijo. Genera también el error de expectativas correspondiente.
- PE\_M2\_6.M estima condiciones iniciales apropiadas para un polinomio de aproximación de segundo orden [seis parámetros] al modelo de Hansen (1985), usando las series temporales generadas con otro método [en los programas está seleccionado el método UHL]. Estas series temporales deben estar en memoria cuando se corra el programa.
- ESTIM\_M2.M implementa el procedimiento de estimación del punto fijo de los coeficientes del polinomio PEA para resolver el modelo de Hansen. Primero llama a MOD2UHL.M [u otro método rápido], después usa las series temporales generadas con este método para estimar vía PE\_M2\_6.M condiciones iniciales apropiadas para MOD2PE6.M. En un último paso, itera en MOD2PE6.M hasta que se consigue la convergencia al punto fijo.

### B.2.3 Subdirectorio Cooley89

- MODEL3.M con este programa se fijan los valores paramétricos, las opciones por defecto de los algoritmos y se calcula el estado estacionario determinista. Después el programa llama a los MOD3???.M's.

MOD3LQA.M genera series temporales con el método LQA, usando las reglas de decisión que presentan Cooley y Hansen en su artículo.

MOD3SIM.M y MOD3SIL.M estos programas realizan la descomposición de autovalores y autovectores del modelo de Cooley y Hansen (1989). Primero implementan la aproximación lineal, en niveles o en logaritmos, del sistema de condiciones de primer orden y restricciones del problema original. Después llaman a do.SIM.M para calcular la condición de estabilidad. Y, por último, generan series temporales para todas las variables del sistema y el error de predicción, usando la condición de estabilidad, las condiciones de primer orden y las restricciones del problema original.

SIS3SIM.M función auxiliar llamada por MOD3SIM.M para resolver el sistema de condiciones de primer orden, restricciones y condición de estabilidad.

FUN3SIM.M función auxiliar llamada por MOD3SIM.M para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.

FUN3SIL.M función auxiliar llamada por MOD3SIL.M para resolver una ecuación no lineal que aparece en el proceso de resolver el sistema formado por las condiciones de primer orden, las restricciones y la condición de estabilidad.

MOD3UHL.M implementa el método de coeficientes indeterminados propuesto por Uhlig, para el modelo de Cooley y Hansen. Primero escribe la aproximación lineal en logaritmos. Después llama a do.UHL.M para calcular las reglas de decisión. En un último paso, genera series temporales de todas las variables usando la forma de espacio de estados del sistema. Como un subproducto calcula la serie temporal correspondiente al error de predicción.

MOD3PEA.M programa usado para la simulación de series temporales del modelo de Cooley y Hansen con PEA. Dados los valores de los coeficientes del polinomio de aproximación, simplemente genera series temporales de todas las variables de la economía y del error de predicción.

MOD3PE8.M busca el punto fijo de un polinomio de tercer orden con ocho parámetros, para resolver el modelo de Cooley y Hansen con el método PEA. Dada una condición inicial [solicitada por MODEL3.M si se decide introducirla a mano, o estimada llamando a PE\_M2\_8] itera hasta que se consigue la convergencia al punto fijo. Genera también el error de expectativas correspondiente.

PE\_M3\_8.M estima condiciones iniciales apropiadas para un polinomio de aproximación de tercer orden [ocho parámetros] al modelo de Cooley y Hansen, usando las series temporales generadas con otro método [en los programas está seleccionado el método UHL]. Estas series temporales deben estar en memoria cuando se corra el programa.

ESTIM\_M3.M implementa el procedimiento de estimación del punto fijo de los coeficientes del polinomio PEA para resolver el modelo de Cooley y Hansen. Primero llama a MOD3UHL.M [u otro método rápido], después usa las series temporales generadas con este método para estimar vía PE\_M3\_8.M condiciones iniciales apropiadas para MOD3PE8.M. En un último paso, itera en MOD3PE8.M hasta que se consigue la convergencia al punto fijo.

## B.2.4 Subdirectory Progs

- CSOLVE.M programa para resolver ecuaciones no lineales. Escrito por C. A. Sims.
- DENHAAN.M implementa el contraste de den Haan y Marcet (1994), dado un conjunto de errores de previsión y un conjunto de instrumentos.
- DO\_LQA.M soluciona problemas en forma lineal cuadrática. Se usa para los modelos Básico y de Hansen (1985) models. Devuelve la regla/s de decisión como salida/s. Las entradas al programa son las matrices de la aproximación cuadrática a la función de retorno:  $U_{ss}$ ,  $DU_{ss}$ ,  $D2U_{ss}$ .
- DO\_SIM.M programa utilizado para obtener la condición de estabilidad con el método de descomposición de autovalores y autovectores. Lo usan los tres modelos. Se debe consultar el programa STAB\_SIM.M, que es una manera más general de calcular las condiciones de estabilidad e implementa también descomposiciones QZ cuando es necesario.
- DO\_UHL.M programa usado para obtener los coeficientes de las reglas de decisión con el método de coeficientes indeterminados. Se usa para resolver los tres modelos que se consideran. Salvo ligeras modificaciones, es el software de Harald Uhlig.
- LAG.M función que calcula los retrasos que se especifiquen de una serie temporal.
- ARR.M función que estima una estructura autorregresiva del orden que se especifique para una serie temporal dada.
- ARCH.M función que estima estructura autorregresiva de heterocedasticidad condicional del orden que se especifique para una serie temporal dada.

## B.3 Capítulo 2

- COND\_INI.M programa que realiza los cálculos de las tablas 2.2 y 2.3. Necesita los programas MOD3PE8.M, ESTIM\_M3.M y DENHAAN.M.
- HISTOGRA.M realiza los cálculos que tienen como resultado la figura 2.1. Necesita el programa DENHAAN.M.
- UNICIDAD.M realiza los cálculos que tienen como resultado las tablas 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7, y la figura 2.2. Necesita el programa DENHAAN.M.

**MOD3PEA.M** programa usado para la simulación de series temporales del modelo de Cooley y Hansen con PEA. Dados los valores de los coeficientes del polinomio de aproximación, simplemente genera series temporales de todas las variables de la economía y del error de predicción.

**MOD3PE8.M** busca el punto fijo de un polinomio de tercer orden con ocho parámetros, para resolver el modelo de Cooley y Hansen con el método PEA. Dada una condición inicial [solicitada por **MODEL3.M** si se decide introducirla a mano, o estimada llamando a **PE\_M2\_8**] itera hasta que se consigue la convergencia al punto fijo. Genera también el error de expectativas correspondiente.

**PE\_M3\_8.M** estima condiciones iniciales apropiadas para un polinomio de aproximación de tercer orden [ocho parámetros] al modelo de Cooley y Hansen, usando las series temporales generadas con otro método [en los programas está seleccionado el método UHL]. Estas series temporales deben estar en memoria cuando se corra el programa.

**ESTIM.M3.M** implementa el procedimiento de estimación del punto fijo de los coeficientes del polinomio PEA para resolver el modelo de Cooley y Hansen. Primero llama a **MOD3UHL.M** [u otro método rápido], después usa las series temporales generadas con este método para estimar vía **PE\_M3\_8.M** condiciones iniciales apropiadas para **MOD3PE8.M**. En un último paso, itera en **MOD3PE8.M** hasta que se consigue la convergencia al punto fijo.

**MOD3UHL.M** implementa el método de coeficientes indeterminados propuesto por Uhlig, para el modelo de Cooley y Hansen. Primero escribe la aproximación lineal en logaritmos. Después llama a **do\_UHL.M** para calcular las reglas de decisión. En un último paso, genera series temporales de todas las variables usando la forma de espacio de estados del sistema. Como un subproducto calcula la serie temporal correspondiente al error de predicción. En este Capítulo se usa para obtener condiciones iniciales estimadas.

**DO\_UHL.M** programa usado para obtener los coeficientes de las reglas de decisión con el método de coeficientes indeterminados. Se usa para el modelo de Cooley y Hansen. Salvo ligeras modificaciones, es el software de Harald Uhlig.

**DENHAAN.M** implementa el contraste de den Haan y Marcet (1994), dado un conjunto de errores de previsión y un conjunto de instrumentos.

**LAG.M** función que calcula los retrasos que se especifiquen de una serie temporal.

## B.4 Capítulo 3

**IDE\_SIMN.M** solución usando el método de descomposición de autovalores y autovectores del modelo con *time-to-build* que se analiza en el Capítulo.

Implementa la solución lineal en logaritmos refinada. Llama a `FUN_SIMN.M`, `STAB_SIM.M` y `DENHAAN.M`.

`FUN_SIMN.M` función para resolver una ecuación no lineal que aparece en el programa `IDE_SIMN.M`.

`IDE_SIML.M` solución usando el método de descomposición de autovalores y autovectores del modelo con *time-to-build* que se analiza en el Capítulo. Implementa la solución lineal en logaritmos directamente. Llama a los programas `STAB_SIM.M` y `DENHAAN.M`.

`PEA_T3-1.M` solución por Parametrización de Expectativas del modelo con *time-to-build* que se analiza en el Capítulo, parametrizando una expectativa. Genera los resultados que se muestran en la tabla 3.1.

`PEA_2EXP.M` solución por Parametrización de Expectativas del modelo con *time-to-build* que se analiza en el Capítulo, parametrizando dos expectativas. Genera los resultados que se muestran en la tabla 3.2.

`EXP_SIML.M` solución usando el método de descomposición de autovalores y autovectores del modelo con *time-to-build* que se analiza en el Capítulo, cuando se descompone la expectativa en la sección 3.3. Implementa la solución lineal en logaritmos sin refinar. Llama a `STAB_SIM.M`, para calcular las condiciones de estabilidad, y a `DENHAAN.M`.

`STAB_SIM.M` función que calcula las condiciones de estabilidad dadas las matrices  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Psi$  y  $\Pi$ . Realiza descomposiciones QZ cuando es necesario. Esta función es mucho más general que el programa `DO_SIM.M`.

`QZ.M` función que realiza una descomposición QZ. Viene con MATLAB.

`QZDIV.M` función que ordena la salida de `QZ.M` de manera que los autovalores generalizados quedan crecientes a lo largo de la diagonal. Necesita la función `QZSWITCH.M`.

`QZSWITCH.M` función que llama `QZDIV.M`.

`MA1_EST.M` función que estima una estructura media móvil de orden uno para una serie dada. Necesita el *toolbox* de MATLAB "E4".

`CSOLVE.M` programa para resolver ecuaciones no lineales. Escrito por C. A. Sims.

`DENHAAN.M` implementa el contraste de den Haan y Marcet (1994), dado un conjunto de errores de previsión y un conjunto de instrumentos.

`LAG.M` función que calcula los retrasos que se especifiquen de una serie temporal.

## B.5 Capítulo 4

G\_CTE.M programa que resuelve el caso de tasa de crecimiento monetario constante.

I\_CTE.M programa que resuelve el caso de tipo nominal de interés constante.

REGLAS.M programa que resuelve el caso con regla monetaria. Se pueden cambiar los valores de  $\beta_{i\pi}$ ,  $\beta_{ig}$  y  $\tau_1$  para simular las distintas combinaciones y calcular los estadísticos de volatilidad en cada caso.

STAB\_SIM.M función que calcula las condiciones de estabilidad dadas las matrices  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Psi$  y  $\Pi$ . Realiza descomposiciones QZ cuando es necesario. Esta función es mucho más general que el programa DO\_SIM.M.

QZ.M función que realiza una descomposición QZ. Viene con MATLAB.

QZDIV.M función que ordena la salida de QZ.M de manera que los autovalores generalizados quedan crecientes a lo largo de la diagonal. Necesita la función QZSWITCH.M.

QZSWITCH.M función que llama QZDIV.M.

CSOLVE.M programa para resolver ecuaciones no lineales. Escrito por C. A. Sims.

DENHAAN.M implementa el contraste de den Haan y Marcet (1994), dado un conjunto de errores de previsión y un conjunto de instrumentos.

LAG.M función que calcula los retrasos que se especifiquen de una serie temporal.

## B.6 Algunas Notas útiles sobre el uso de MATLAB y de MAPLE

Se presentan ahora los comandos MATLAB y de MAPLE más usados en relación al cálculo matricial y operativa simbólica. Para ejecutar estos comandos es necesario disponer de la TOOLBOX simbólica *symbolic* de MATLAB. Las funciones que se ejecutan usando el entorno MAPLE son la que empiezan por "maple".

### B.6.1 Matrices, autovalores y autovectores

- Comandos Numéricos: autovalores generalizados

$[\Lambda, \Omega, Q, Z, V] = \text{qz}(\Gamma_0, \Gamma_1)$   $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  matrices cuadradas. Produce las matrices triangulares superiores  $\Lambda$  y  $\Omega$ , las matrices  $Q$  y  $Z$  (que contienen los productos de las transformaciones por la izquierda) tales que

$$Q\Gamma_0Z = \Lambda, \quad Q\Gamma_1Z = \Omega$$

y la matriz de autovalores generalizados  $V$ . Los autovalores generalizados se calculan entonces,

$$\lambda_i = \frac{\text{diag}(\Omega_{ii})}{\text{diag}(\Lambda_{ii})}.$$

$[V, D] = \text{eig}(\Gamma_0^{-1}, \Gamma_1)$  cuando  $\Gamma_0^{-1}$  existe, calcular los autovalores generalizados es calcular los autovalores de  $\Gamma_0^{-1}\Gamma_1$ .

$[V, D] = \text{eig}(\Gamma_0, \Gamma_1)$  otra forma de calcular los autovalores generalizados. Produce una matriz diagonal  $D$  de autovalores generalizados y una matriz llena  $V$  cuyas columnas son los correspondientes autovectores, de tal manera que,

$$\Gamma_0 V = \Gamma_1 V D$$

$[\Lambda, \Omega, Q, Z] = \text{qzdiv}(\text{stake}, \Lambda, \Omega, Q, Z)$  toma las matrices  $\Lambda$  y  $\Omega$  y las matrices ortonormales  $Q$  y  $Z$  y las ordena de tal manera que todos los casos con

$$\text{abs}\left(\frac{\Omega_{ii}}{\Lambda_{ii}}\right) > \text{stake}$$

los coloca en la *esquina inferior derecha*, a la vez que preserva las propiedades de ortonormalidad y  $Q^T \Lambda Z^T$  y  $Q^T \Omega Z^T$ .

- Comandos Analíticos de MATLAB:

$[\text{Eve}, \text{EVa}] = \text{eigensys}(A)$  autovalores (matriz  $\text{EVa}$ ) y autovectores (matriz  $\text{EVe}$ ) simbólicos de la matriz simbólica  $A$ .

$[\text{IN}] = \text{inverse}(A)$  matriz inversa (matriz  $\text{IN}$ ) de la matriz simbólica  $A$ .

$[\text{A}] = \text{sym}('[\text{a}, \text{b}, \dots; \text{c}, \text{d}, \dots; \dots]')$  define la matriz simbólica  $A$ .

$[\text{T}] = \text{transpose}(A)$  matriz traspuesta ( $T$ ) de la matriz simbólica  $A$ .

y de MAPLE:

- with(linalg);
- A:=array([ [x,y,...],..., [a,b,...] ]);
- B:=array([ [x,y,...],..., [a,b,...] ]);
- C:=multiply(inverse(A),B);
- eigenvals(A,vecs);

## B.6.2 Definición, evaluación y diferenciación de funciones de manera analítica

$\text{maple}('f:=(x,y,z,\dots) \rightarrow (f_1(x,y,\dots), \dots, f_k(x,y,\dots))')$  define la función vectorial de variable vectorial,  $f$ , formada por las funciones escalares de variable vectorial  $f_1, \dots, f_k$ .

`maple('f(a,b,c,...)')` evalúa la función  $f(x,y,z,\dots)$  en el punto  $(a,b,c,\dots)$ .

`diff(f(x,y,z...),'x')` define la derivada parcial de la función  $f$  respecto a la variable  $x$ .

`diff(f(x,y,z...),'x',n)` define la derivada parcial  $n$ -ésima de la función  $f$  respecto a la variable  $x$ .

`maple('diff(f(x,y,z...),x,y,z...')` define la derivada parcial de la función  $f$  respecto a las variables  $x,y,z,\dots$ .

`maple('D(f(x1,...,xn))')` calcula la diferencial total de  $f$ .

Es importante ser *fino* con las cuestiones numéricas:

- Calcular las matrices analíticamente no es tan difícil y ahorra muchos problemas numéricos en el cálculo de los autovalores.
- También con el uso de `qz` sólo cuando sea necesario. Por ejemplo, si se calculan los autovalores, en un ejemplo, usando `eig(inv(A) B)` el resultado es  $[0, 0, 0.2101, 0.9914, 1.0188, 1.2870, 0.95, 0.5, 0.5]$ . En cambio, con `qz(A,B)` los autovalores resultan ser  $[0, 0 - 10^{-15}i, 0.2101 + 10^{-15}i, 0.9914 + 10^{-15}i, 1.0188 + 10^{-15}i, 1.2870 + 10^{-15}i, 0.95, 0.5, 0.5]$ . La norma de la parte imaginaria es cero, pero hay un error numérico que vicia luego los autovectores.