

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I



TESIS DOCTORAL

**Análisis de datos aeromagnéticos:
metodologías y aplicación al levantamiento
aeromagnético de España peninsular**

TESIS DOCTORAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Juan Alfonso Ardizone García

Directores:

Julio Mezcua Rodríguez
Miguel Herraiz Sarachaga

Madrid, 2002

ISBN: 978-84-669-0382-0



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



531427926X

JUAN ALFONSO ARDIZONE GARCIA

**ANALISIS DE DATOS AEROMAGNETICOS.
METODOLOGIAS Y APLICACION AL
LEVANTAMIENTO AEROMAGNETICO DE
ESPAÑA PENINSULAR**

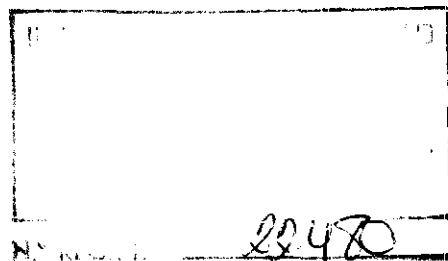


Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas.

**Directores: D. Julio Mezcua Rodríguez
D. Miguel Herraiz Sarachaga**

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I.
Facultad de Ciencias Físicas.
Universidad Complutense de Madrid.

Noviembre de 1996



Para Beatriz, Alfonso y Bea

AGRADECIMIENTOS

La tesis que a continuación se expone, ha sido realizada con la ayuda y colaboración de muchas personas. A todas ellas deseo expresar mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, a mis directores, a Julio Mezcuca, por su apoyo y sus interesantes sugerencias, y a Miguel Herraiz, por su permanente dedicación y seguimiento de esta Tesis, quiero expresar aquí mi gratitud.

A Agustín Udías, director del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I, por sus enseñanzas durante los años de mi licenciatura y doctorado y su inestimable ayuda en la realización de esta Tesis, así como en otros trabajos de investigación que precedieron a ésta, realizados bajo su tutoría.

A mi maestro José María Brun, que supo despertar en mí el interés por el Geomagnetismo durante los años de mi formación académica en la Facultad de Ciencias Físicas de esta Universidad.

A Pedro Cuesta, analista del Centro de Proceso de Datos de la Universidad Complutense de Madrid, por sus consejos y explicaciones del uso de las bibliotecas de programas BMDP e ISML. Su aportación ha sido importantísima en la realización de esta tesis y es mi deseo agradecer a través de estas líneas su contribución.

A Santiago Álvarez, del Area de Teledetección del I.G.N., por su enorme ayuda en la digitalización del mapa base y en la edición de los distintos mapas realizados, agradeciéndole sus numerosos esfuerzos, el tiempo libre empleado para ello y sus valiosísimos consejos para la configuración de los dispositivos gráficos utilizados.

A Victor Manuel Jiménez por su ayuda en el uso de los programas EXCEL y WORD y en la conversión de formatos de los ficheros de datos.

A Victor Marín y a Javier Merino, del Servicio de Geomagnetismo del Instituto Geográfico Nacional, por facilitarme los datos necesarios para la realización de este estudio.

A Miguel Torta, del Observatorio del Ebro, por su valiosísima ayuda al proporcionarme los datos necesarios para realizar comparaciones con modelos diferentes a los que en esta Tesis se presentan.

A Beatriz Galeano, a Adelaida Jiménez y a Beatriz Jiménez, por su paciencia y denodado esfuerzo en los trabajos de edición de la presente tesis, agradeciéndolas además sus valiosos consejos sobre la redacción de la misma.

Finalmente, deseo también agradecer a todas las personas que, aunque no hayan sido expresamente nombradas, han colaborado de una forma u otra a la realización de este trabajo, del cual quisiera que se sintieran partícipes.

INDICE

| | Página |
|---|--------|
| PROLOGO | I |
| CAPITULO I AEROMAGNETISMO: CONCEPTOS GENERALES, INSTRUMENTACION Y PROCESAMIENTO DE DATOS | 1 |
| I.1 Introducción | 1 |
| I.2 Historia del método aeromagnético | 1 |
| I.3 Aspectos generales del método aeromagnético | 3 |
| I.4 Instrumentación | 9 |
| I.4.1 El magnetómetro de núcleo saturado fluxgate..... | 9 |
| I.4.2 El magnetómetro de protones | 12 |
| I.4.3 El magnetómetro de bombeo óptico | 14 |
| I.4.4 El magnetómetro de doble resonancia nuclear..... | 19 |
| I.4.5 El sistema de navegación Doppler | 20 |
| I.4.6 Sistemas de radioposicionamiento | 24 |
| I.4.7 Sistema de posicionamiento global (GPS) | 26 |
| I.5 Características espaciales de un levantamiento aeromagnético | 26 |
| I.5.1 La dirección de las líneas de vuelo | 27 |
| I.5.2 Separación de las líneas de vuelo | 29 |
| I.5.3 Separación de las líneas de control | 32 |
| I.5.4 La altitud del vuelo | 33 |
| I.5.5 Efecto de la variación de los parámetro espaciales | 34 |
| I.6 El procesamiento de los datos | 35 |
| I.6.1 Compilación de datos, detección y corrección de errores | 38 |
| I.6.2 Efectos de la variación diurna y sustracción de la misma..... | 42 |
| I.6.2.1 Sustracción de las variaciones temporales usando estaciones en tierra..... | 43 |
| I.6.2.2 Métodos de nivelación | 44 |
| I.6.3 Reducción de los datos e interpolación de las curvas de nivel | 52 |

CAPITULO II ADQUISICION Y TRATAMIENTO DE DATOS

| | |
|--|-----|
| AEROMAGNETICOS | 54 |
| II.1 Introducción | 54 |
| II.2 Características generales de la adquisición de datos | 54 |
| II.3 La plataforma de transporte y el equipo de medidas | 56 |
| II.3.1 Equipos de medidas del avión | 57 |
| II.3.1.1 El magnetómetro del avión | 57 |
| II.3.1.2 El equipo de navegación y posicionamiento..... | 58 |
| II.3.1.3 El registro digital y analógico de los datos..... | 60 |
| II.3.2 Equipo de medida de las estaciones de tierra | 60 |
| II.4 Pruebas y calibración de los equipos | 61 |
| II.4.1 Test de navegación..... | 62 |
| II.4.2 Test de los altímetros | 62 |
| II.4.3 Test de retardo..... | 63 |
| II.4.4 Test de direccionalidad | 65 |
| II.4.5 Comparación de los magnetómetros | 70 |
| II.4.5.1 Comparación de los magnetómetros de las estaciones de tierra | 70 |
| II.4.5.2 Comparación del magnetómetro base con el magnetómetro del avión | 71 |
| II.4.5.3 Comparación del magnetómetro base con el magnetómetro del control G806 | 72 |
| II.4.5.4 Otras comparaciones | 74 |
| II.5 Hardware y software empleado en el procesamiento de los datos..... | 77 |
| II.6 Procesamiento de los datos | 78 |
| II.6.1 Carga y revisión de los datos | 80 |
| II.6.2 Tratamiento de datos | 80 |
| II.6.2.1 Corrección del retardo | 81 |
| II.6.2.2 Evaluación del efecto de direccionalidad | 81 |
| II.6.2.3 Reducción a una misma altitud | 82 |
| II.6.2.4 Filtrado de los datos | 82 |
| II.6.2.5 Sustracción de la variación diurna | 86 |
| II.6.2.6 Sustracción de la variación secular | 92 |
| II.6.2.7 Nivelación | 94 |
| II.6.2.8 Determinación del datum | 96 |
| II.6.2.9 Sustracción del IGRF..... | 99 |
| II.6.3 Dibujo de los mapas | 100 |

| | | |
|--|--|-----|
| CAPITULO III REPRESENTACION DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE: ANALISIS METODOLOGICO DEL MODELO DE SUPERFICIES POLINOMICAS | | 101 |
| III.1 | Introducción | 101 |
| III.2 | Modelos del campo magnético terrestre | 101 |
| III.3 | Análisis estadístico del modelo de superficies polinómicas | 107 |
| III.4 | Análisis estadístico | 109 |
| III.4.1 | Estimación del modelo | 109 |
| III.4.2 | Interpretación geométrica | 110 |
| III.4.3 | Propiedades de los estimadores \hat{b}_j | 112 |
| III.4.3.1 | Cálculo de las medias | 112 |
| III.4.3.2 | Cálculo de las varianzas | 113 |
| III.4.4 | Estimación de la varianza de las perturbaciones | 114 |
| III.4.5 | Intervalos de confianza de los coeficientes y contrastes individuales | 115 |
| III.4.5.1 | Intervalos de confianza | 116 |
| III.4.5.2 | Contrastes individuales | 116 |
| III.4.6 | Contrastes para grupos de coeficientes | 117 |
| III.4.7 | Interpretación de los contrastes | 119 |
| III.4.8 | Correlación en regresión multivariable | 120 |
| III.4.8.1 | El coeficiente de determinación corregido | 120 |
| III.4.9 | Diagnosis del modelo de regresión | 121 |
| III.4.9.1 | El análisis gráfico de los residuos | 121 |
| III.4.9.2 | Error de especificación (falta de linealidad) | 123 |
| III.4.9.3 | Hipótesis de normalidad | 124 |
| III.4.9.4 | Hipótesis de homocedasticidad | 128 |
| III.4.9.5 | Hipótesis de independencia | 130 |
| III.4.9.6 | Multicolinealidad | 135 |
| III.4.9.7 | Robustez del modelo | 138 |
| III.5 | Construcción de modelos de regresión | 139 |
| III.6 | Criterios de elección del modelo | 140 |

| | |
|---|---------|
| CAPITULO IV ANALISIS E INTERPRETACION DE MODELOS APLICADOS AL ESTUDIO DE LA VARIACION ESPACIAL DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE DE ESPAÑA PENINSULAR | 142 |
| IV.1 Introducción | 142 |
| IV.2 Descripción de los datos | 142 |
| IV.3 Programas empleados en el análisis de los datos | 146 |
| IV.4 Determinación del modelo | 148 |
| IV.5 Las condiciones de validez del modelo | 164 |
| IV.5.1 Estudio preliminar de condiciones de validez | 164 |
| IV.5.1.1 Homogeneidad | 164 |
| IV.5.1.2 Influencia de las observaciones | 167 |
| IV.5.1.3 Multicolinealidad | 168 |
| IV.5.1.4 Linealidad | 169 |
| IV.5.1.5 Normalidad | 173 |
| IV.5.1.6 Homocedasticidad | 176 |
| IV.5.1.7 Independencia..... | 176 |
| IV.5.2 Análisis de las condiciones de validez | 178 |
| IV.5.2.1 Linealidad | 178 |
| IV.5.2.2 Normalidad | 181 |
| IV.5.2.3 Homocedasticidad | 186 |
| IV.5.2.4 Independencia | 188 |
| IV.5.3 Búsqueda de una región de modificación de las hipótesis del modelo | 195 |
| IV.6 Diferencias de los modelos..... | 201 |
| IV.7 Selección del modelo | 202 |
| IV.8 Comparación con otros modelos | 204 |
| CAPITULO V CONCLUSIONES | 208 |
| V.1 Introducción | 208 |
| V.2 Conclusiones sobre el tratamiento de los datos | 208 |
| V.3 Conclusiones sobre el análisis de los datos | 210 |
| V.3.1 Análisis descriptivo | 211 |
| V.3.2 Análisis inferencial | 212 |
| V.3.3 Resumen de las conclusiones del análisis de los datos..... | 215 |
| V.4 Futuras líneas de investigación..... | 215 |
| BIBLIOGRAFIA | 217 |

PROLOGO

El estudio del campo magnético terrestre constituye una de las vías más interesantes para profundizar en el conocimiento del interior de la Tierra. Un método de investigación frecuente en Geomagnetismo consiste en sustraer de las medidas de la intensidad del campo magnético los valores obtenidos mediante un modelo matemático que represente de la forma más adecuada posible sus variaciones espaciales y, de esta manera, obtener mapas del campo anómalo. Estos mapas, debidamente interpretados, pueden contribuir poderosamente a mejorar el conocimiento de zonas del Planeta.

Existen varios modelos matemáticos para alcanzar este fin. Uno de ellos, posiblemente el más sencillo y empleado con más frecuencia cuando los datos han sido adquiridos en zonas restringidas de la Tierra a través de magnetómetros aerotransportados, recibe el nombre de "Superficies Polinómicas". El procedimiento no se basa en la teoría del potencial, sino que hace uso del método estadístico de "Mínimos Cuadrados" para ajustar un polinomio de dos variables al conjunto de los datos. Sin embargo, para que este modelo posea un valor inferencial y proporcione estimaciones precisas en puntos que siendo interiores a la región de estudio sean distintos a los de medida, es necesario que verifique ciertas condiciones que impone la Teoría de Regresión.

Por otra parte, al ser la intensidad del campo magnético terrestre una magnitud que varía con el espacio y el tiempo, es necesario aplicar a los datos un tratamiento inicial que permita sustraer de los mismos las variaciones temporales y obtener únicamente las espaciales.

Tanto para el primer propósito mencionado, como para el segundo, la Estadística Matemática ofrece medios para realizar un estudio riguroso de las metodologías que se aplican en ambos casos.

Así pues, la presente tesis está dedicada al tratamiento y análisis de datos aeromagnéticos requeridos para alcanzar el objetivo mencionado al principio de este prólogo. Para ello, el estudio se ha estructurado en cinco capítulos que abarcan los fundamentos y aplicaciones correspondientes.

En el primer capítulo se efectúa una exposición de los principios básicos del método aeromagnético, así como de la instrumentación y del procesamiento de los datos obtenidos mediante esta técnica. Este capítulo sirve como introducción al segundo, en el que se describe el proceso de adquisición de los datos concretos empleados en este trabajo y su transformación hasta alcanzar un estado que permita realizar con ellos los análisis propuestos.

En el tercer capítulo, además de presentarse los distintos modelos empleados para la representación matemática del campo magnético principal de la

Tierra, se exponen de forma exhaustiva los fundamentos teóricos para la realización del estudio estadístico del modelo de Superficies Polinómicas.

En el cuarto capítulo se aplican las técnicas expuestas en el capítulo precedente a la determinación de modelos polinómicos del campo magnético de la Tierra a tres mil metros de altitud sobre el territorio peninsular de España, comprobándose las condiciones de validez de los mismos. Así mismo, se realiza un estudio comparativo para seleccionar el modelo que mejor se ajusta a los datos, detallándose también las diferencias zonales existentes dentro del área de estudio. La respuesta de los modelos seleccionados se compara con las obtenidas para las mismas zonas por el Campo Geomagnético Internacional de Referencia y el modelo determinado mediante el Análisis Armónico en Casquetes Esféricos desarrollado por J. M. Torta para la Península Ibérica (Torta, 1992), después de trasladarse ambos al 1 de Enero de 1987.

En el quinto y último capítulo se presenta un resumen de los resultados más concluyentes del trabajo. Al estar éstos muy relacionados, se ha preferido realizar una exposición continua de las conclusiones, en lugar de la discreta que habitualmente se elige en estos casos.

CAPITULO I

AEROMAGNETISMO: CONCEPTOS GENERALES, INSTRUMENTACION Y PROCESAMIENTO DE DATOS

I.1. INTRODUCCION

Durante años, los investigadores en Ciencias de la Tierra han combinado las medidas del campo magnético terrestre con otras medidas geofísicas para investigar mejor el interior de la Tierra. Tradicionalmente estas medidas eran adquiridas en su superficie. Sin embargo, en la actualidad se realizan mediante magnetómetros transportados en avión. De esta forma es posible dibujar mapas del campo magnético de grandes extensiones de la superficie terrestre de forma más rápida, económica, y en algunas ocasiones de mayor precisión que los levantados desde la superficie.

En el presente capítulo se efectúa una breve exposición de los principios básicos del método aeromagnético, así como de la instrumentación y del procesamiento de los datos adquiridos mediante esta técnica. Todo ello sirve de introducción al segundo capítulo, donde de forma concreta se describe la adquisición y tratamiento de los datos empleados en esta tesis.

I.2. HISTORIA DEL METODO AEROMAGNETICO

Las primeras medidas del campo magnético realizadas desde una plataforma aérea, fueron realizadas por Edelman en 1910, quien diseñó una balanza vertical para ser usada en globo. Sin embargo, las medidas adquiridas de este modo no fueron aplicadas a la prospección geofísica hasta 1921, año en el que Lundberg midió el campo magnético sobre el yacimiento mineral de Kiruna (Suecia) desde un globo cautivo.

El uso del avión como plataforma de transporte para magnetómetros se debe a Lindbergh quien, en su histórico vuelo realizado en Mayo de 1927, transportó un inductor terrestre. Mas tarde, en 1936, Logachev efectuó algunas experiencias con este tipo de magnetómetro en vuelos de ensayo realizados sobre varios depósitos de minerales magnéticos en Kursk, (Rusia). La sensibilidad del instrumento de medida era de 1000 nanoteslas aproximadamente y, por lo tanto, adecuado únicamente para detectar grandes anomalías magnéticas.

Al ser el inductor terrestre, un instrumento poco sensible para este tipo de trabajos y por ser la balanza magnética inadecuada para su uso en vuelo, ya que requería una estabilidad gravitacional imposible de lograr en un avión, el interés se centró en la búsqueda de un magnetómetro que no presentara este tipo de inconvenientes. Finalmente fue Victor Vacquier quien, en 1940 y 1941, trabajando en la Gulf Research & Development Company, perfeccionó un sensor de saturación magnética capaz de medir intensidades del orden de 1 nT. A este dispositivo se le llamó "flux-gate" y constituyó el corazón del MAD (Magnetic Airborne Detector), que

fue desarrollado y utilizado con éxito como detector antisubmarino durante la segunda Guerra Mundial (Muffly, 1946). La labor fue llevada a cabo en el Laboratorio de Armas Navales, en los Laboratorios Bell Telephone y en el Laboratorio de Instrumentos Aéreos de los Estados Unidos.

En 1942, poco después de entrar en servicio el MAD en los aviones de las patrullas antisubmarinas, H.E. Hawkes, del United States Geological Survey, propuso que fuera adaptado para medir los efectos que las estructuras geológicas producían en el campo magnético terrestre y en 1944 el NOL (Naval Ordnance Laboratory) emprendió la tarea de reformar el instrumento para adecuarlo a dicha finalidad. El United States Geological Survey cooperó en esta tarea, especialmente en los ensayos realizados en Pensilvania y Michigan. La primera exploración fue efectuada en 1945 para la National Petroleum Reserve en Alaska.

Poco antes de la finalización de la guerra, se volvió a reanudar la mejora del magnetómetro para la prospección aeromagnética y en 1946 la Gulf Research and Development Co. consiguió obtener un magnetómetro apto para este tipo de tareas (Wyckoff, 1948).

En 1953 Packard y Varian observaron experimentalmente la precesión de los protones de un fluido en presencia del campo magnético terrestre (Packard y Varian, 1954). Este fenómeno es producido por la resonancia nuclear predicha por Bloch con anterioridad (Bloch, 1946) debido a las propiedades del momento magnético de spin de los núcleos atómicos.

Basándose en esta teoría, la compañía Varian Associates construyó en 1955 el primer magnetómetro de protones con el que se podía medir el módulo del vector intensidad del campo magnético, siendo la Hycon Aerial Surveys de Pasadena y la Anglo-American Corporation de Africa las primeras compañías en usarlo en tareas de exploración geofísica en 1956.

El magnetómetro de protones se aparta radicalmente de la línea seguida por los magnetómetros de núcleo saturado que utilizan sustancias ferromagnéticas y da paso a los magnetómetros atómicos, los cuales usan sustancias paramagnéticas y sistemas de detección y medida completamente distintas a las anteriores.

En 1950, A. Kastler y J. Brossel de la Escuela Normal Superior de París y F. Bitter del Instituto Tecnológico de Massachusetts describieron el fenómeno del bombeo óptico de electrones de un gas o vapor, dando origen su estudio a la construcción del magnetómetro de absorción óptica, al que también se llama "magnetómetro de bombeo óptico".

Tanto el magnetómetro de protones como el de bombeo óptico miden el módulo de la intensidad del campo magnético, por lo que en general su uso desde una plataforma móvil, en lo que respecta a la orientación estable del sensor, es mejor que en el caso de otros magnetómetros, tales como el fluxgate, en los que el sensor ha de mantenerse paralelo a la dirección del campo o de alguna de sus componentes. Esta importante cualidad, unida a los avances en el campo de la interpretación de datos magnéticos, ha hecho que las medidas realizadas mediante magnetómetros atómicos sean hoy día preferidas para el levantamiento de mapas aeromagnéticos de gran precisión sobre regiones extensas. Como ejemplos pueden

citarse el mapa de Francia y el del Mediterráneo Occidental (Le Borgne y Le Moüel, 1969), en cuyos levantamientos se empleó un magnetómetro de bombeo óptico de vapor de rubidio (Giret, 1965).

El descubrimiento del efecto Overhauser (Overhauser, 1953), que tiene lugar en los metales, y la ampliación del mismo a disoluciones de sales paramagnéticas, constituyendo el denominado efecto de "Polarización Dinámica" estudiado por Abragam (Abragam, 1955), impulsó la construcción de un nuevo magnetómetro atómico. Este equipo, denominado "magnetómetro de doble resonancia nuclear", fue desarrollado por la compañía Gram Service Ltd. de Grenoble (Francia), que es parte de la Comisión Francesa de Energía Atómica. La sensibilidad de dicho magnetómetro es de 0.01 nT cuando trabaja con un intervalo de muestreo de 1 segundo (Collin et al, 1973).

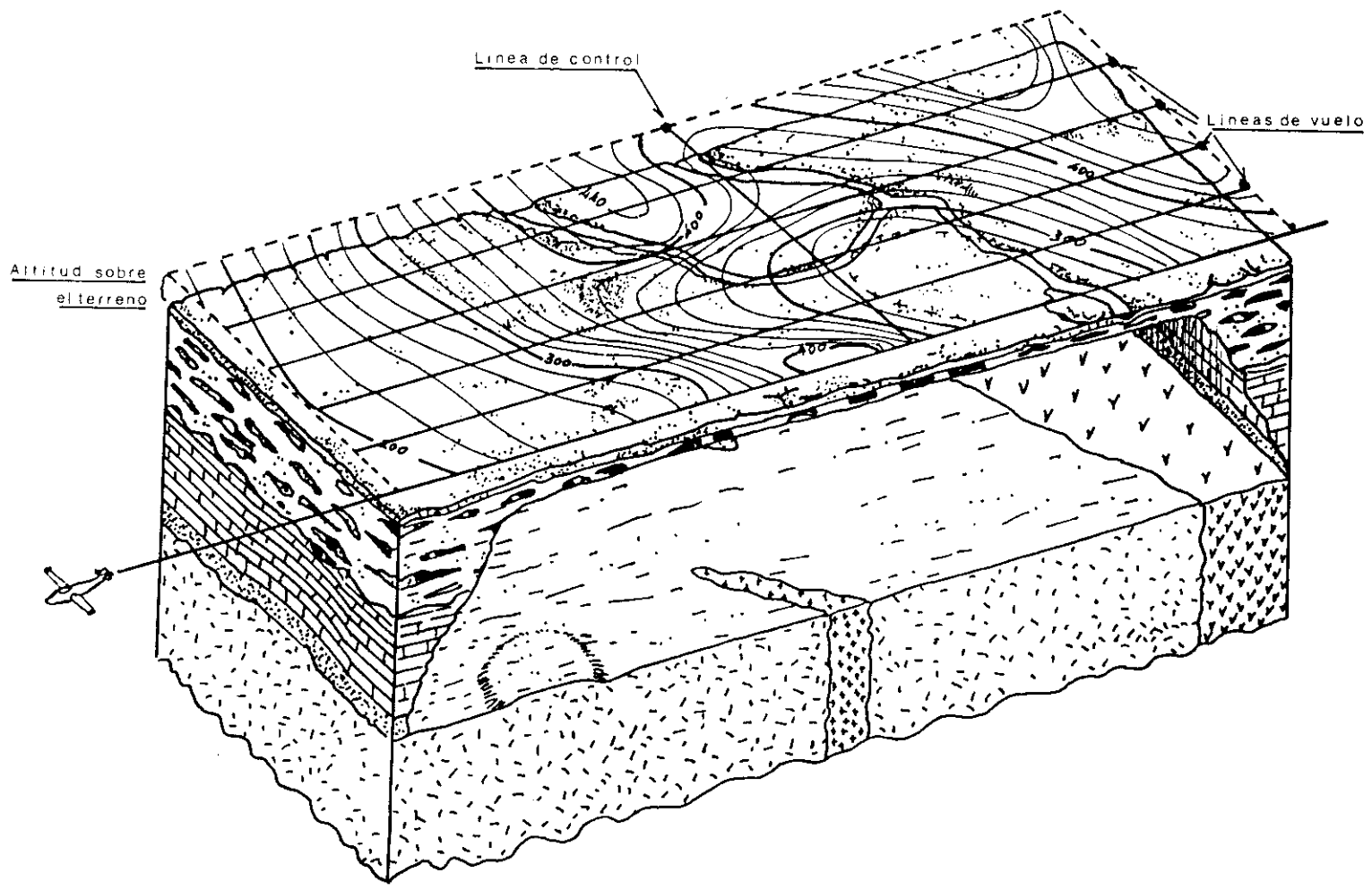
Este magnetómetro, que además de su alta sensibilidad posee las ventajas de los demás magnetómetros atómicos, ha sido utilizado en el levantamiento aeromagnético del territorio peninsular de España durante los años 1986 y 1987, cuyo funcionamiento se describe más adelante.

I.3. ASPECTOS GENERALES DEL METODO AEROMAGNETICO

Generalmente, en un levantamiento aeromagnético el avión vuela siguiendo líneas paralelas atravesadas por otras, que suelen llamarse líneas de control o también líneas base, cuyo espaciado es un determinado número de veces mayor que el de las líneas de vuelo principales (Fig.1,1). En muchas ocasiones, las líneas de control son perpendiculares a las líneas de vuelo (Fig.1,2) surgiendo en las intersecciones de ellas diferencias en las medidas del campo magnético que se utilizan para eliminar los efectos de las variaciones temporales y los de la deriva instrumental.

El espaciado óptimo de las líneas de vuelo depende del objetivo de la investigación, adoptándose una distancia superior a la mitad de profundidad a la que se encuentra la estructura geológica que se desea estudiar. Cuando los estudios se centran en el basamento, la profundidad sólo se conoce de forma muy somera o incluso es desconocida por ser ésta variable. En este caso, no es posible modificar el espaciado para ajustarse a una profundidad variable, por lo que éste se elige de forma empírica manteniéndose constante para todo el levantamiento o para una parte del mismo.

En exploración petrolífera los espaciados más frecuentes entre líneas de vuelo suelen ser de uno o dos kilómetros y el de las líneas de control aproximadamente seis veces el anterior.



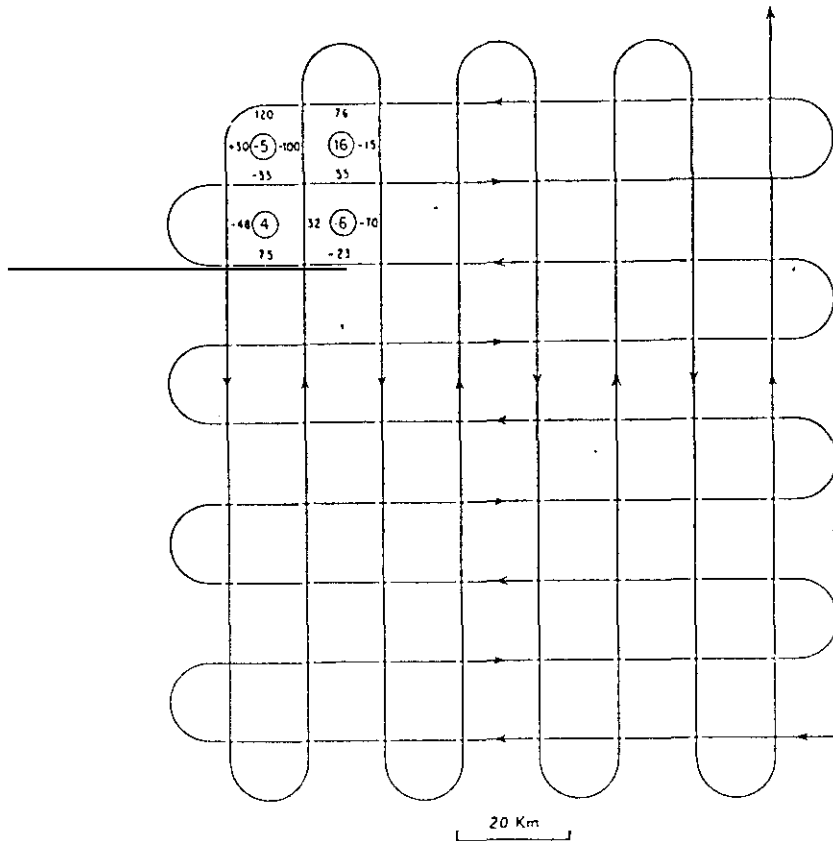


Fig. 1,2

La orientación de las líneas de vuelo puede ser importante. Si la tectónica de la zona es conocida o si se dispone de levantamientos anteriores menos detallados, las líneas de vuelo se orientan aproximadamente perpendiculares a la tendencia magnética. Desviaciones respecto de la óptima inferiores a 30° no suelen causar grandes problemas, sin embargo, cuando las líneas de vuelo forman menos de 45° con el "strike", tectónico, se necesitan grandes correcciones en los cálculos de la profundidad y la precisión se deteriora (Netleton, 1973).

En la exploración de áreas extensas, donde únicamente se desea un reconocimiento preliminar, se procede a volar en bandas de dos o tres líneas de vuelo, con el espaciado normal del levantamiento y con una separación entre dichas bandas comprendidas entre 40 y 80 Km. Esta solución da un resultado mejor que el que se obtendría distribuyendo de forma uniforme sobre el área de estudio el total del recorrido. Esto se debe a que los datos obtenidos dentro de cada una de tales bandas permiten definir de forma suficiente las líneas de nivel del campo magnético para estimar la dirección del strike y, como consecuencia de ello, conseguir que los cálculos de la profundidad sean de una precisión adecuada (Netleton, 1973).

Un segundo aspecto de interés en un levantamiento aeromagnético está relacionado con la altitud del vuelo. Cuando la finalidad del levantamiento es la determinación de la profundidad del basamento, el vuelo se realiza aproximadamente paralelo al nivel del mar, controlándose mediante la altitud barométrica.

Cuando el objetivo del levantamiento es la búsqueda de yacimientos minerales se vuela paralelamente a la superficie del terreno y en este caso, la altitud radiométrica será constante. Sin embargo, en este último caso es necesario tomar algunas precauciones, ya que cuando el relieve topográfico es accidentado, los movimientos bruscos del avión contribuyen al nivel general de ruido, debido a la variación de la orientación relativa entre el sensor y la superficie del terreno (Lynam, 1986).

El transporte del magnetómetro es también otro aspecto importante, especialmente en lo referente a la influencia de las partes metálicas del avión sobre el sensor y a la estabilidad que algunos de ellos requieren.

La influencia de los circuitos eléctricos del avión y de las partes metálicas del mismo sobre el sensor del magnetómetro se reduce mediante métodos electromagnéticos de compensación (Nakatsuka et al., 1976), experimentalmente (Serson et al., 1957) y separando en lo posible el sensor del resto del avión. En este último caso existen varias soluciones:

- a) Remolcar el sensor mediante un cable largo y colocándolo en el interior de un contenedor en forma de proyectil (bird), (Fig.1,3).
- b) Situar el sensor al final de una estructura en forma de mástil horizontal unido rígidamente a la cola del avión (stinger), (Fig.1,4a).
- c) Colocar el sensor en el extremo de un ala del avión.

En el primer caso la influencia del avión sobre el sensor queda muy atenuada por la longitud del cable de remolque (entre 30 y 150 metros), mientras que en los dos últimos casos la influencia se minimiza con la colocación de tiras protectoras de permaloy situadas alrededor de la casilla que contiene el sensor y mediante corrientes eléctricas que atraviesan bobinas compensadoras.

La estabilización es un problema que afecta fundamentalmente a los magnetómetros de núcleo saturado o fluxgate ya que su sensor debe mantenerse en la dirección del vector \mathbf{B} cuando se desea medir su módulo. Esto se logra mediante dos detectores fluxgate adicionales que se hallan orientados ortogonalmente con el primero, es decir, los tres elementos forman un triedro trirectangular. El conjunto completo se monta sobre una pequeña plataforma giroestabilizada que puede girar libremente en cualquier dirección (Fig.1,4b). Cuando el fluxgate de medida se mantiene paralelo al campo magnético la señal es nula en los otros dos. Cualquier desviación respecto de esta dirección produce una señal en uno o los dos elementos de control que una vez amplificada, es dirigida a un servomotor (uno para cada eje) que devuelven la orientación al sistema.

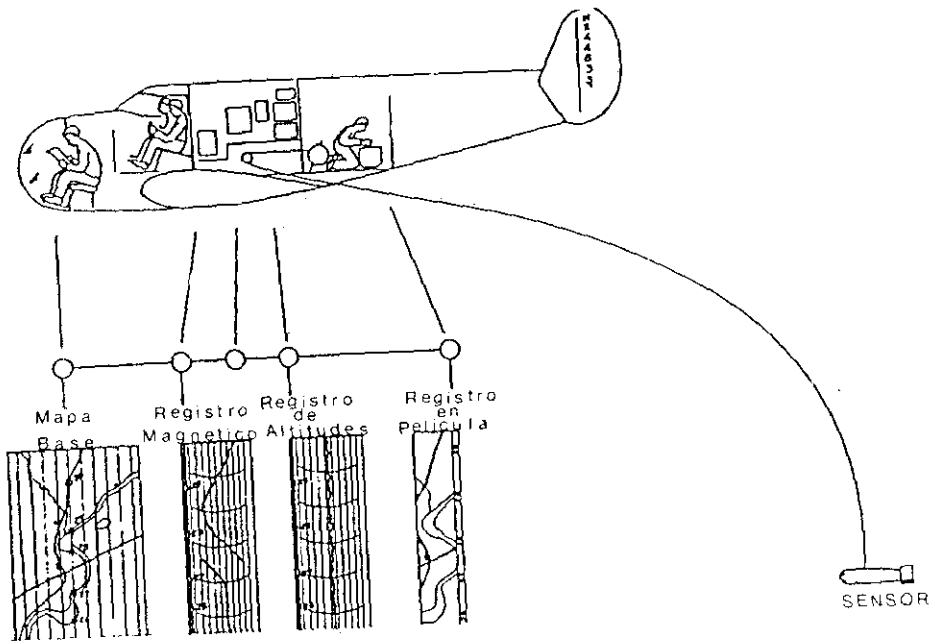


Fig. 1, 3

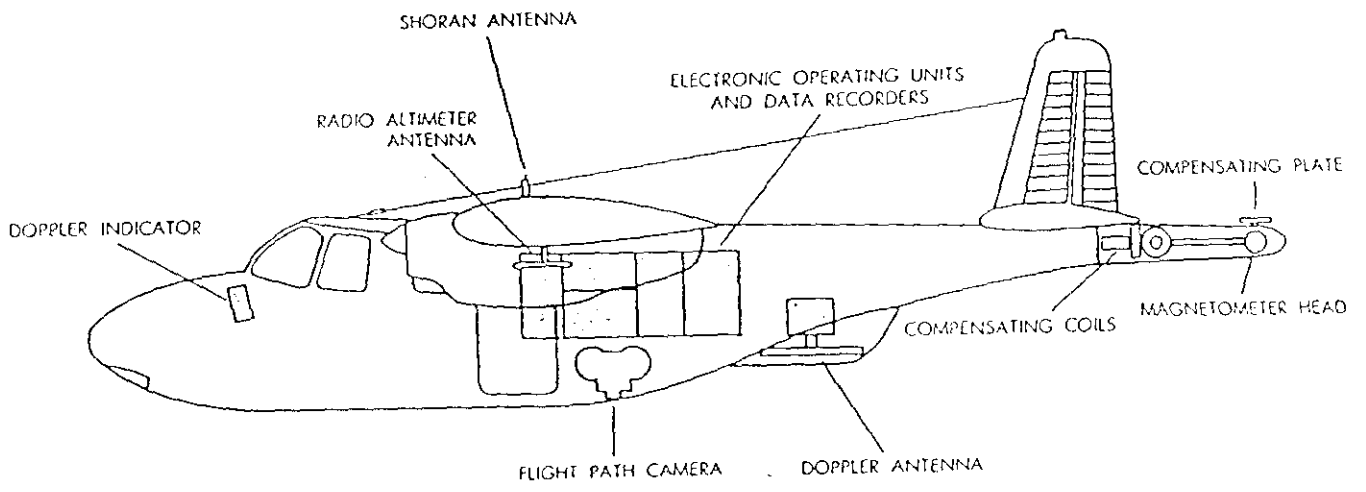


Fig. 1, 4 a

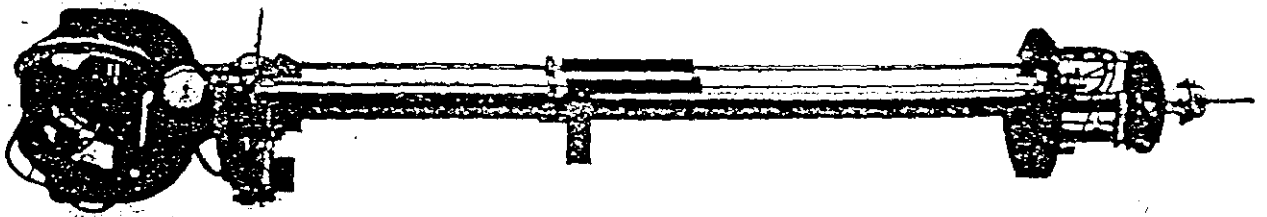


Fig. 1, 4 b

En lo que respecta a las aplicaciones principales del método aeromagnético, es necesario, llamar la atención en los siguientes aspectos:

- a) Permite localizar yacimientos de minerales magnéticos tales como la magnetita, etc.
- b) Permite realizar estudios preliminares en la búsqueda de posibles yacimientos petrolíferos, antes de la aplicación de procedimientos más caros. Esto es debido a que el método aeromagnético permite calcular la profundidad del basamento respecto a la altura de vuelo y por lo tanto determina la magnitud de los espesores sedimentarios que es un dato del mayor interés para las posibilidades petrolíferas de la zona.
- c) Es de utilidad para el levantamiento del mapa geológico de una región. Es posible realizar una interpretación geológica usando un buen mapa aeromagnético.

De igual modo que ocurre en el resto de los métodos de exploración geofísica, los levantamientos aeromagnéticos y los levantamientos terrestres poseen ventajas e inconvenientes y por lo tanto, el procedimiento más adecuado para una región o aplicación puede no serlo para otra. Balseley ha resumido las ventajas e inconvenientes de ambos métodos en los siguientes puntos (Balseley, 1952):

Ventajas:

- 1) La ventaja más evidente del método aeromagnético es la rapidez y la reducción de personal contratado.
- 2) Debido a la ventaja anterior, el coste es menor que el de un levantamiento terrestre equivalente, siempre que el área sea lo suficientemente extensa como para justificar los gastos.
- 3) Un levantamiento aeromagnético puede realizarse sobre agua o terrenos inaccesibles para las operaciones de tierra.
- 4) Los efectos de la deriva instrumental y de la variación diurna quedan, en general, reducidos al mínimo, debido a la velocidad con que se realiza el trabajo.
- 5) Debido a la altitud a la que vuela el avión, los campos magnéticos artificiales producidos afectan mínimamente a los registros, mientras que estas fuentes interfieren continuamente cuando los datos se toman en tierra.
- 6) Análogamente, los efectos producidos por fuentes geológicas que se hallan en la superficie o a poca profundidad, interfieren de forma mínima en el reconocimiento de las anomalías debidas a fuentes profundas, pudiéndose variar la altitud del vuelo para lograr una discriminación máxima.
- 7) La regularidad de los datos permite un mejor uso de los métodos analíticos de procesamiento e interpretación.

Inconvenientes:

- 1) La precisión del resultado del trabajo está siempre limitada por la exactitud del mapa al que se transcriben los datos magnéticos. La cartografía existente de algunas zonas puede, ser incompleta o demasiado inexacta para poder situar sobre ella los datos magnéticos. Sin embargo, cuando en estas zonas se llevan exploraciones terrestres, el levantamiento topográfico necesario puede realizarse al mismo tiempo que las medidas magnéticas.
- 2) El coste mínimo de un levantamiento aeromagnético es elevado debido a uso de aviones. Si la superficie a explorar es pequeña, el coste por kilómetro de este tipo de exploración puede hacerse prohibitivo.

I.4. INSTRUMENTACION

Para levantar un mapa aeromagnético, es necesario asignar a cada uno de los puntos de observación el valor de la magnitud magnética que se ha medido en él. Por ello, consideraremos la instrumentación aeromagnética dividida en dos grupos:

- Instrumentación para las medidas del campo magnético.
- Instrumentación para la determinación de la posición del punto de medida.

Dentro del primer grupo se describen los magnetómetros más utilizados en los últimos años para este tipo de levantamiento; como son:

- El magnetómetro de núcleo saturado.
- El magnetómetro de protones.
- El magnetómetro de bombeo óptico.
- El magnetómetro de doble resonancia nuclear.

En el segundo grupo se presenta algunos de los sistemas de navegación más empleados, como el Sistema Doppler.

I.4.1. El magnetómetro de núcleo saturado o fluxgate.

El magnetómetro de núcleo saturado permite medir la intensidad del campo magnético terrestre o la de alguna de sus componentes, aprovechando la propiedad de histéresis que presentan algunos materiales.

El magnetómetro se compone de dos núcleos cilíndricos paralelos de un material de alta permeabilidad magnética con arrollamientos en serie pero en sentido inverso, de tal manera que al pasar por ellas una corriente eléctrica, los campos producidos son iguales y de sentidos contrarios (Fig.1,5).

Si se aplica una corriente alterna sinusoidal de intensidad i a los arrollamientos de dichos núcleos, el campo magnético B en su interior seguirá un ciclo de histéresis producido por el campo inductor H (Fig.1,6a). Suponiendo una simetría perfecta del dispositivo, los campos producidos en ambos núcleos B_1 y B_2 son iguales y de signo contrario por lo que se anulan entre sí y, si se colocara una bobina envolviendo a ambos núcleos no se induciría en ella ninguna corriente. Sin embargo, si existiese un campo magnético externo H_0 , menor que H y paralelo a los ejes de los núcleos, tal que al superponerse al campo producido por la corriente i , el valor máximo del campo inductor cumpliera

$$H_0 + H_M > H_S, \quad (1,1)$$

donde H_S es el valor del campo inductor necesario para alcanzar la saturación y H_M el valor máximo del campo producido por la corriente i , el estado de saturación de los núcleos se alcanzará en un semiciclo pero no en el otro (Fig.1,6b).

Por lo tanto, al aproximarse al punto de saturación el flujo de B_1 , variará de forma más lenta que la senoidal.

Lo mismo ocurriría con el flujo de B_2 , pero existiendo un desfase en π respecto al primero, surgiendo como consecuencia de ello unos máximos con frecuencia doble de la del campo inductor. Se demuestra (De Miguel, 1980), que en ese caso la fuerza electromotriz inducida en la bobina exterior vale

$$E = -12a_3 H_0 H_M^2 \text{sen } 2\omega t \quad (1,2)$$

siendo la frecuencia de la corriente alterna aplicada i y a_3 el coeficiente de tercer grado del desarrollo en serie del campo inductor H en el ciclo de histéresis. Es decir, la fuerza electromotriz inducida es proporcional a la intensidad del campo magnético exterior, por lo que una vez orientado debidamente el sensor del instrumento, puede determinarse el valor de la componente magnética que se desee. La orientación del sensor se mantiene paralela al campo mediante la instalación del mismo sobre una plataforma giroestabilizada unida a un servomotor que rectifica las desviaciones respecto al campo magnético terrestre, tal como se ha explicado en 1.3.

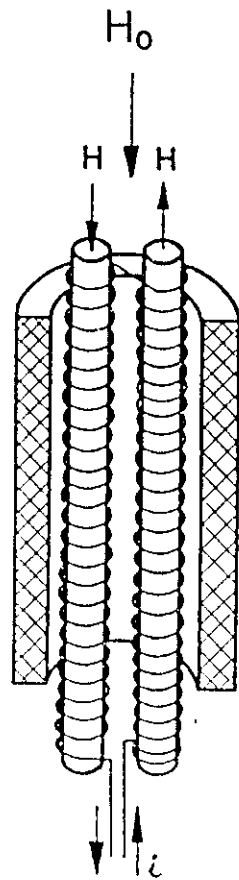


Fig. 1,5

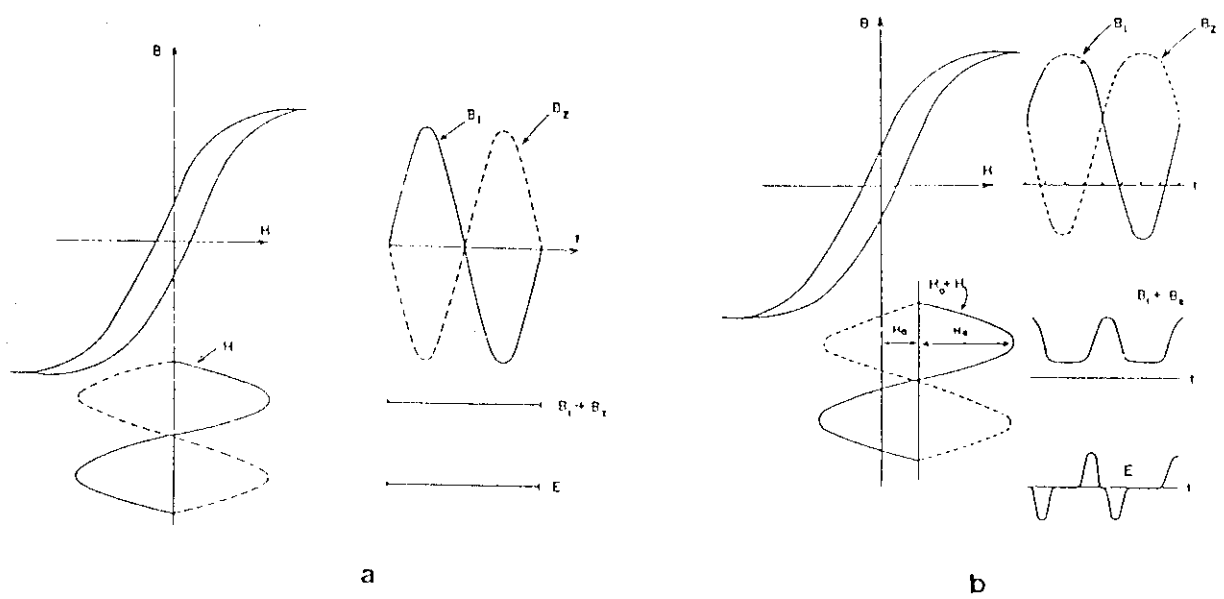


Fig. 1,6

1.4.2. El magnetómetro de protones

Como es sabido, los protones de los átomos están dotados de un movimiento de rotación alrededor de un eje, como consecuencia del cual poseen un momento magnético μ y un momento cinético a de la misma dirección. En un líquido cualquiera, en ausencia de campos magnéticos, las direcciones de los ejes de giro de los distintos protones serán diferentes. Sin embargo, si se aplica un campo magnético B , tenderán a orientarse en la dirección de las líneas de fuerza pero la propiedad giroscópica que les confiere su momento cinético se opone a ello temporalmente, originándose un movimiento de precesión alrededor de B (Fig.1,7) cuya frecuencia cumple la siguiente relación

$$f = \gamma \frac{B}{2\pi} \quad (1,3)$$

siendo γ la constante giromagnética, la cual vale

$$\gamma = \frac{\mu}{a} = 26751.3 \text{ U.C.G.S}$$

Por lo tanto, si B es el módulo del campo magnético terrestre, su medida se reducirá a la determinación de la frecuencia de precesión f . Este es el fundamento teórico del magnetómetro de protones.

El aparato consiste en una botella sensora que contiene un líquido rico en protones. Dicha botella esta rodeada por una bobina de hilo de cobre orientada en la dirección Este-Oeste, por la que al principio se hace pasar una corriente eléctrica durante unos instantes con objeto de orientar y poner en fase a todos los protones (Fig.1,8.1). Al cesar la corriente, sometidos los protones al campo magnético terrestre, se originará el movimiento de precesión antes citado, permaneciendo en fase todos ellos durante unos segundos (Figs.1,8.2 y 1,8.3), por lo que en la bobina se inducirá una corriente de frecuencia igual a la de precesión y por ello proporcional al campo que se desea medirse. La dificultad estriba en la medida de una señal amortiguada que normalmente tiene una duración inferior a los cinco segundos. No obstante, existen varios procedimientos para lograrlo, El más frecuente de ellos, consiste en medir el número de ciclos que tiene lugar durante el tiempo que emplea un protón en completar un número fijo de revoluciones alrededor de su eje. Para ello se utiliza un oscilador controlado por cristal de cuarzo.

Un segundo procedimiento, recurre a aplicar un campo magnético oscilante de la misma frecuencia que la de precesión y perpendicular a B . Al coincidir ambas frecuencias habra un aumento de energía consumida, que corresponde a la absorbida por los protones, pudiéndose determinar así la frecuencia deseada.

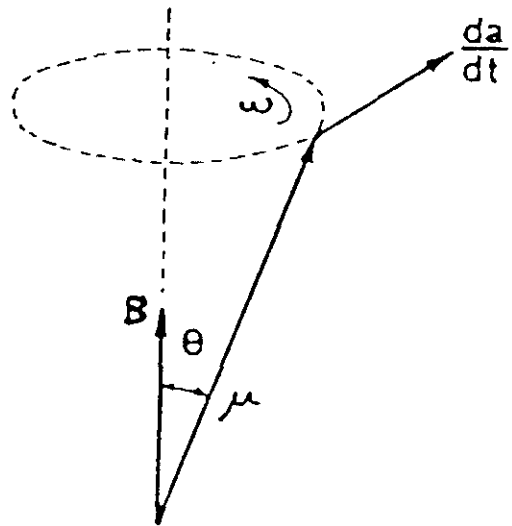


Fig. 1,7

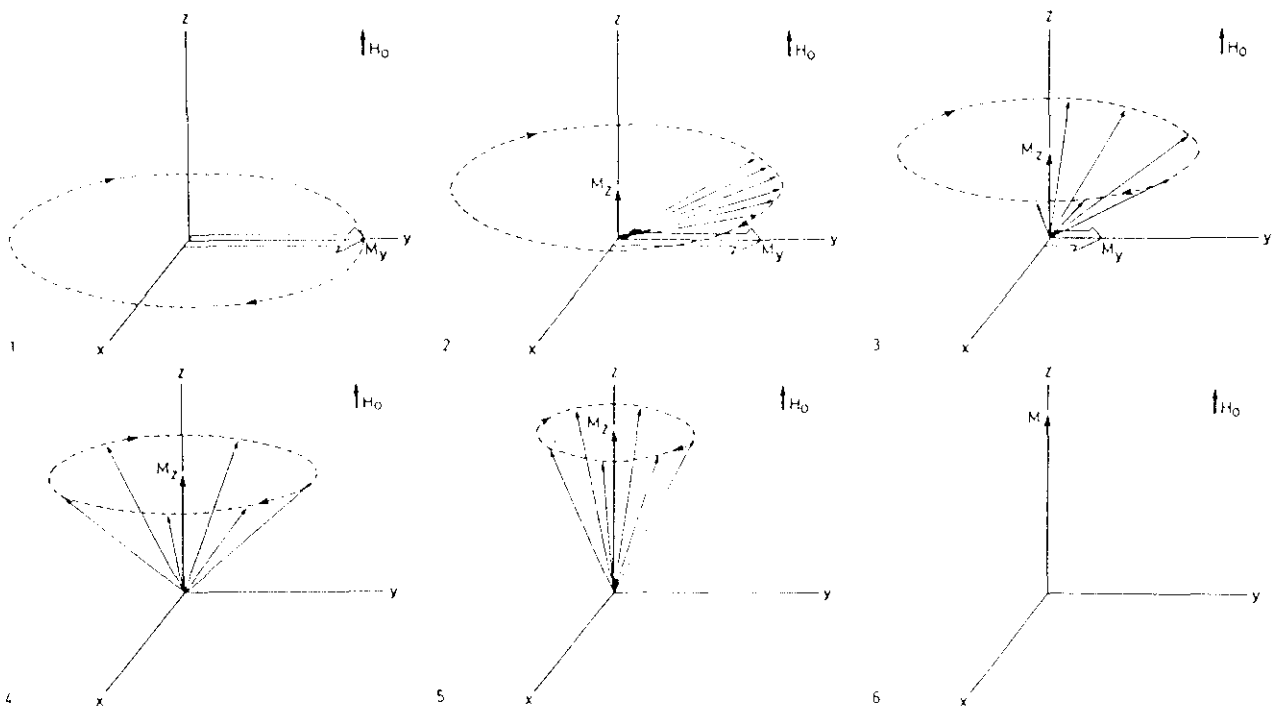


Fig. 1,8

1.4.3. El magnetómetro de bombeo óptico

El magnetómetro de bombeo óptico se basa en el fenómeno físico que posee el mismo nombre y que a continuación se describe.

Para comprender el fenómeno antes mencionado, consideremos un átomo con únicamente tres niveles de energía, a los cuales llamaremos *A*, *B* y *C* (Fig.1,9). Los niveles *A* y *B* se hallan muy próximas y el incremento de energía existente entre ambos corresponde a una línea del espectro de las radiofrecuencias.

Supongamos además, que inicialmente todos los átomos se hallan igualmente distribuidos entre sí. El nivel *C* es mucho mayor y las transformaciones *A-C* y *B-C* corresponden a líneas de la zona óptica del espectro electromagnético. Si una muestra de este tipo de átomos se ilumina con radiación en la que la frecuencia correspondiente a la línea *B-C* ha sido filtrada, los fotones de la radiación pueden excitar a los átomos que se encuentran en el nivel *A* pero no a los que están en el nivel *B* (Fig.1,9.1). Los átomos de *A* excitados absorben energía y ascienden al nivel *C* (Fig.1,9.2). Estos átomos permanecen allí poco tiempo (una diezmillonésima de segundo aproximadamente) y luego emiten energía, regresando nuevamente al estado *A* o al estado *B* (Fig.1,9.3).

La porción de átomos que cae en cada estado depende de la estructura de los mismos, pero lo más importante es que ocasionalmente caen átomos a *B*, los cuales no pueden ser nuevamente excitados por la radiación incidente.

Si un átomo regresa al nivel de energía *A*, la energía luminosa incidente lo elevará nuevamente al estado *C* (Fig.1,9.4) y, como consecuencia de ello, también tendrá cierta probabilidad de descender al estado *B* (Fig.1,9.5). De esta manera, en un intervalo de tiempo suficientemente alto, todos los átomos que se hallaban en el estado *A* de energía habrán sido "bombeados" al *B* (Fig.1,9.6).

Conforme los átomos van abandonando el estado *A* de energía, la muestra absorbe menos energía luminosa y el medio se hace cada vez más transparente a la misma, alcanzándose un máximo cuando el bombeo se completa (Fig.1,10b). Ahora bien, si algunos átomos descienden súbitamente al nivel *A* (Fig.1,8), la energía luminosa incidente será nuevamente absorbida y el brillo de la luz transmitida caerá insistentemente (Fig.1,10c). Esto puede conseguirse irradiando energía a los átomos con una frecuencia correspondiente a la energía de transición entre los niveles *A* y *B*.

Esta técnica es extraordinariamente sensible. Una muestra de vapor a presión de 10^{-7} milímetros de mercurio puede reducir la intensidad de la luz transmitida hasta un 20% cuando se aplica una radiofrecuencia adecuada.

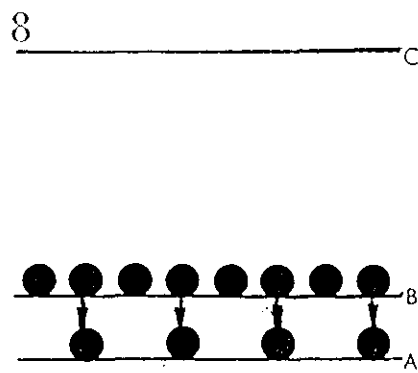
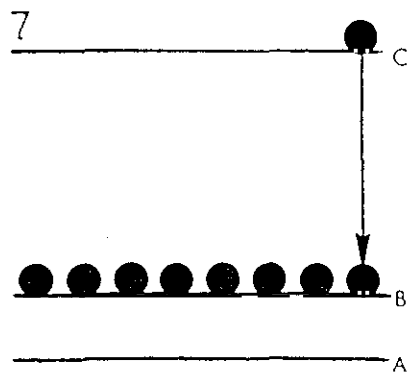
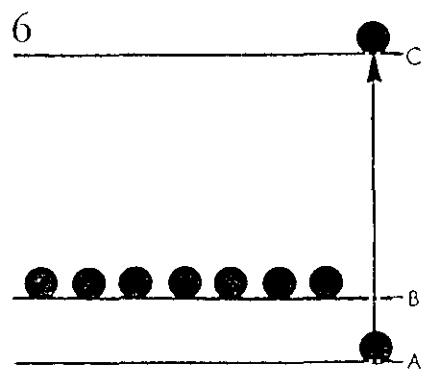
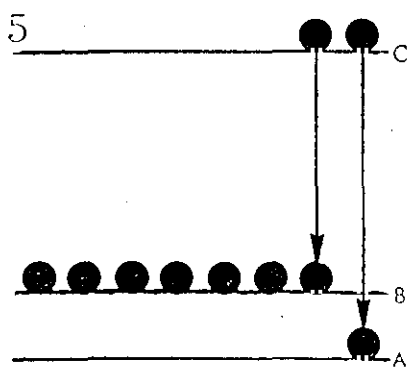
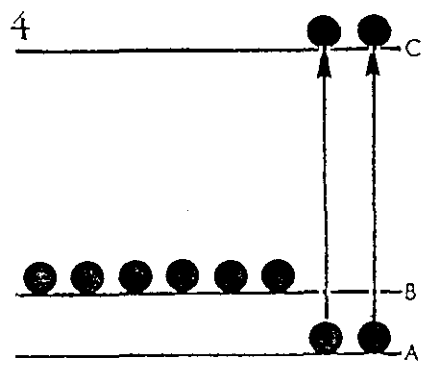
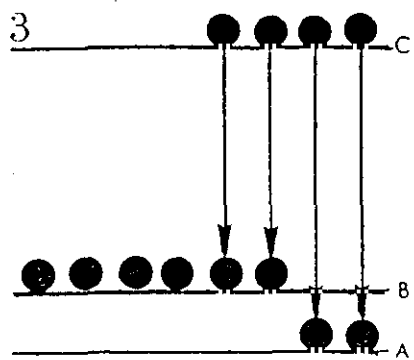
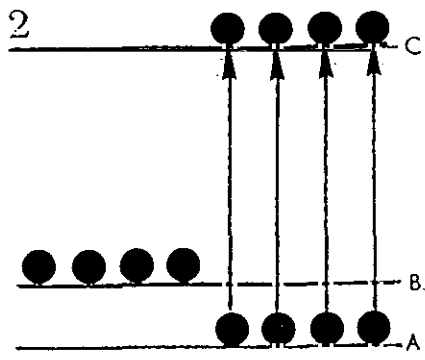
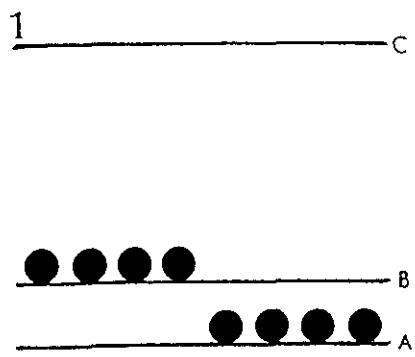


Fig. 1, 9

Por otra parte, al someter un átomo a la acción de un campo magnético B , cada uno de sus niveles se divide en varios subniveles (efecto Zeeman) de energías ligeramente diferentes muy próximas entre sí y simétricamente colocadas con respecto a la raya no descompuesta. Cuanto mayor es el valor de B , tanto mayor es la distancia entre dos subniveles, ya que la energía de los electrones del átomo en cada de ellos vale:

$$E_B = \mu_B m_l B \quad (1,9)$$

siendo

μ_B : $9.2732 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ (magnetón de Bohr).

m_l : el número cuántico del momento cinético en la dirección de B ($m_l=0, 1, 2, \dots, l$).

l : número cuántico del momento cinético.

(Alonso y Finn, 1971) y por ello, la diferencia de energía entre dos subniveles será proporcional al campo magnético B .

En el caso del magnetómetro de bombeo óptico se toma como niveles A y B (Fig.1,9) dos subniveles Zeeman muy próximos y como nivel C , un subnivel muy alejado de los dos anteriores. De esta manera, cuando los átomos saturan el nivel B se les aplica una radiación electromagnética del dominio de las radiofrecuencias para devolverlas al estado A , en la que llamando Δf a la frecuencia de la radiación necesaria para efectuar la transición

$$h\Delta f = \mu_B \Delta m_l B$$

y como las únicas posibles transiciones que cumplen

$$\Delta m_l = \begin{cases} 0 & \text{radiación planopolarizada} \\ +1 & \text{radiación circularmente polarizada a la derecha} \\ -1 & \text{radiación circularmente polarizada a la izquierda} \end{cases}$$

$$\Delta f = \pm \mu_B \frac{B}{h} \quad (1,5)$$

obteniéndose el valor de B a partir de (1,5).

La figura 1,11 muestra un esquema del magnetómetro de bombeo óptico.

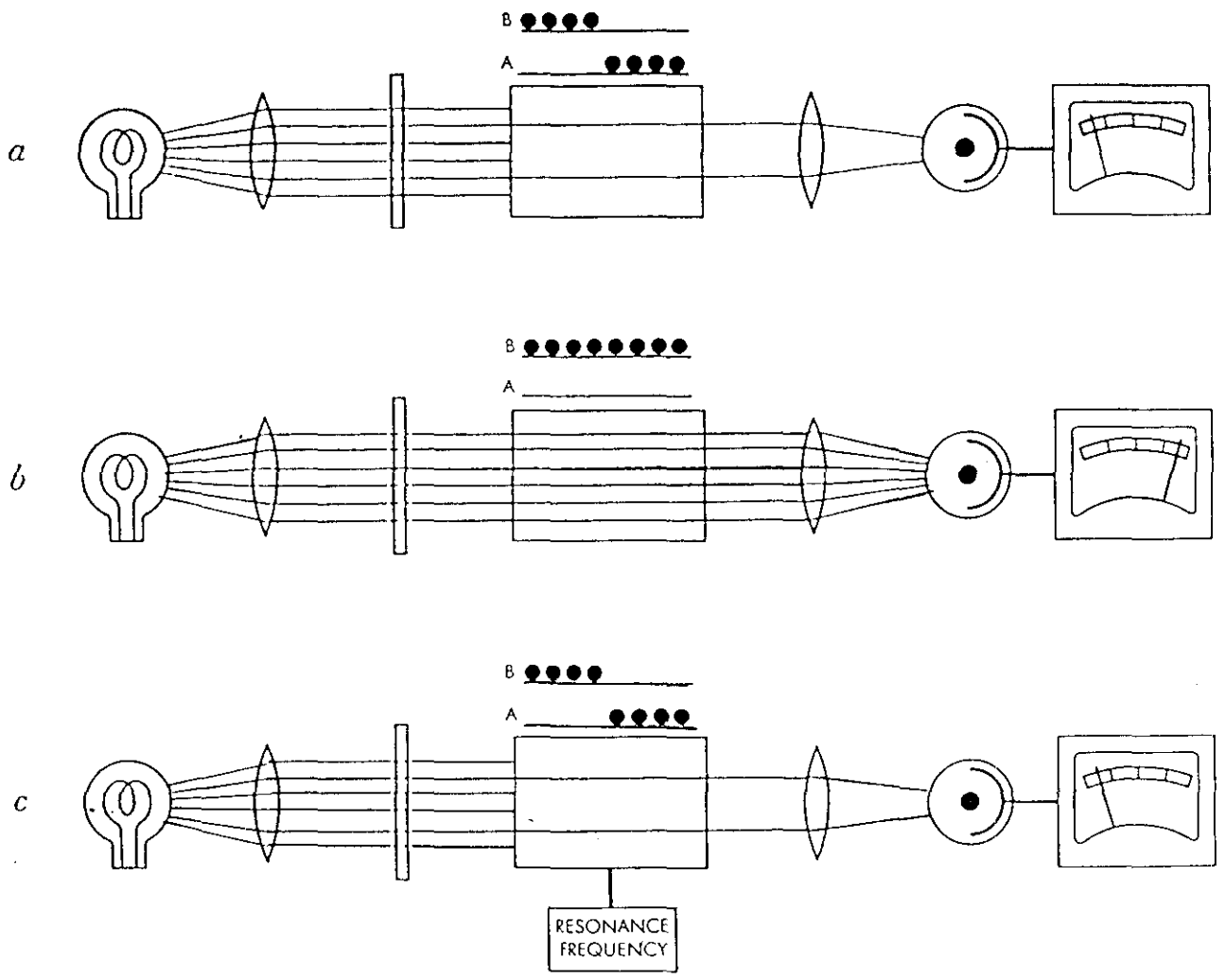


Fig. 1, 10

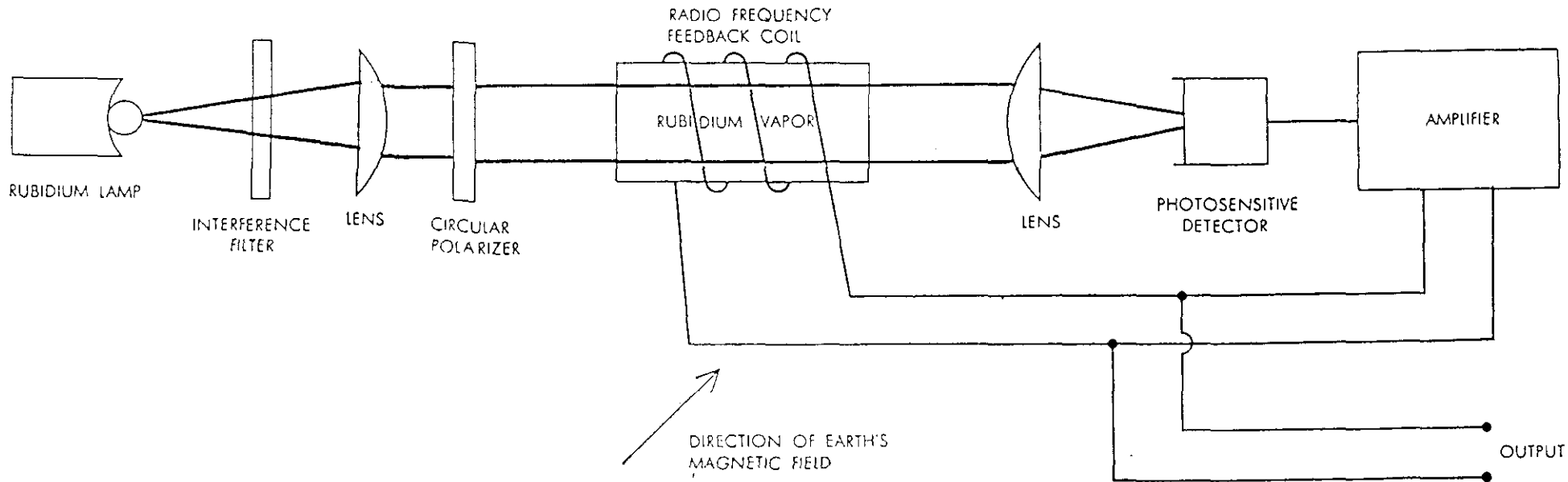


Fig. 1, 11

1.4.4. El magnetómetro de doble resonancia nuclear.

En el apartado 1.4.2. se explicó como los espines nucleares situados en un campo magnético realizan un movimiento de precesión cuya frecuencia es proporcional al módulo del campo que desea medirse.

La principal dificultad se debe a que el magnetismo de los protones es extremadamente débil y, en la práctica, es difícil de observar en el campo magnético terrestre. Para aumentar este magnetismo, se han investigado varios procedimientos. Uno de ellos, el de polarización dinámica, propuesto por Abragam permite aumentar considerablemente el magnetismo de los protones (Abragam, 1957). Este procedimiento es una extensión del efecto Overhauser, estudiado inicialmente en los metales (Overhauser, 1953), al caso de sustancias no metálicas tales como disoluciones paramagnéticas.

Utilizando esta idea, Salvi construyó un magnetómetro de gran sensibilidad (Salvi, 1970) cuyo fundamento se explica a continuación de forma muy sucinta.

Si se suministra energía electromagnética a los electrones de un líquido se produce una transferencia de energía entre los protones y los electrones del mismo. Esas transferencias se traducen en una modificación del magnetismo de los protones. El momento magnético queda entonces multiplicado por un coeficiente llamado factor de polarización. La energía se suministra a los electrones aplicándoles un campo magnético oscilante cuya frecuencia coincide con la de una de sus rayas de resonancia. Los factores de polarización obtenidos son, para ciertas sustancias líquidas, considerables (hasta 4000); estos factores pueden ser positivos o negativos.

Los líquidos se eligen de modo que una raya de polarización positiva del primero coincida con una raya de polarización negativa del segundo. En el caso del magnetómetro de Salvi las sustancias líquidas son dos disoluciones; la primera de ellas, esta compuesta por DME (dimetoxi-etano) y por TANO (triacetona-amina-nitroxida), mientras que la segunda disolución se compone de metanol y de tano. Cada una de ellas se halla contenida en un recipiente, separada de la otra por un tabique y rodeada por una bobina; el conjunto se sitúa en una cavidad coaxial VHF. Un generador de HF de algunos vatios se encuentra unido a la cavidad y sirve para excitar a los electrones de los dos líquidos (Fig.1,12a).

La excitación y detección de los protones es más compleja porque las dos bobinas sirven a la vez para ambas tareas. La figura 1,12b indica que la excitación se provoca por la corriente que atraviesa cada una de las bobinas. La tensión en los extremos de cada una de ellas procede de tres causas distintas:

- La tensión de excitación.
- La tensión parásita inducida por campos magnéticos no deseados (por ejemplo, por corrientes que circulan por las líneas de distribución de energía).
- La tensión útil inducida por los protones.

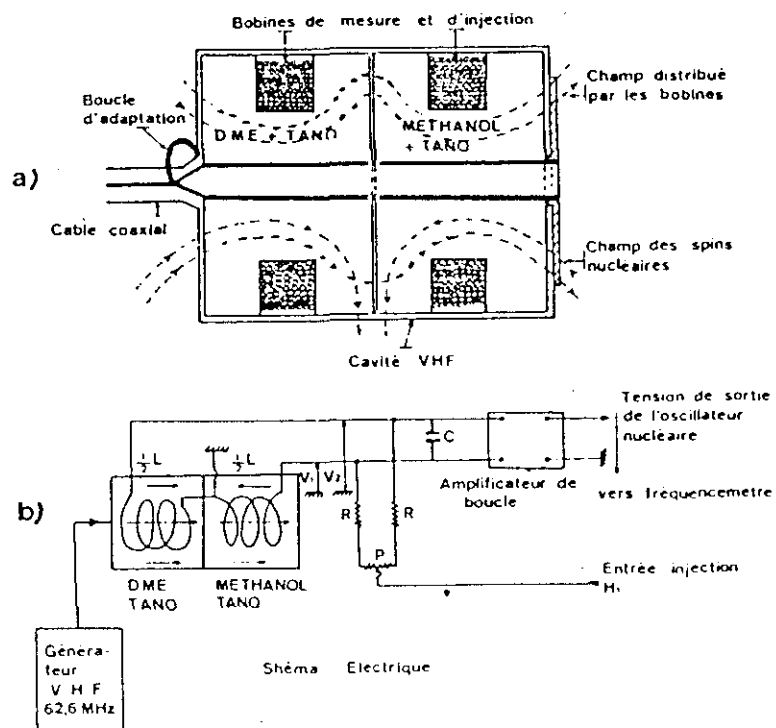


Fig. I,12

Si se conecta un amplificador diferencial entre las dos bobinas, la tensión de salida no es sensible a las dos primeras causas (al ser idénticas las dos bobinas, las tensiones son iguales y del mismo signo, por lo que su diferencia es nula). Por el contrario, las tensiones inducidas por los protones en cada bobina están en oposición de fase porque los momentos magnéticos de los protones de cada disolución son de signo opuesto y en el amplificador se suman.

Una vez amplificada la señal, se mide su frecuencia con un frecuencímetro conectado al amplificador.

1.4.5. El sistema de navegación Doppler

Es sistema de navegación Doppler transmite desde el avión tres haces de microondas dirigidos oblicuamente y hacia abajo (Fig.I,13). Una pequeña porción de energía de la señal dispersada por la superficie terrestre es recogida por el receptor del sistema Doppler y comparada su frecuencia con la del haz emitido determinándose un desplazamiento en frecuencias conocido con el nombre de desplazamiento Doppler. Realmente, existen dos desplazamientos, el primero de ellos es debido al movimiento del transmisor respecto a la superficie reflectante, y el segundo debido al movimiento del receptor respecto a esa superficie. La variación de frecuencias de cada uno de los haces es proporcional a la velocidad del avión en los tres ejes.

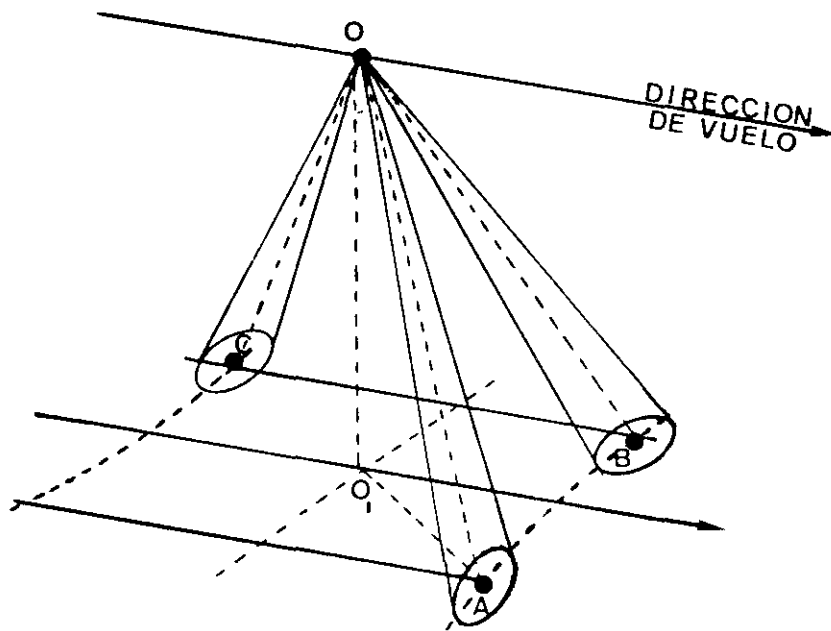


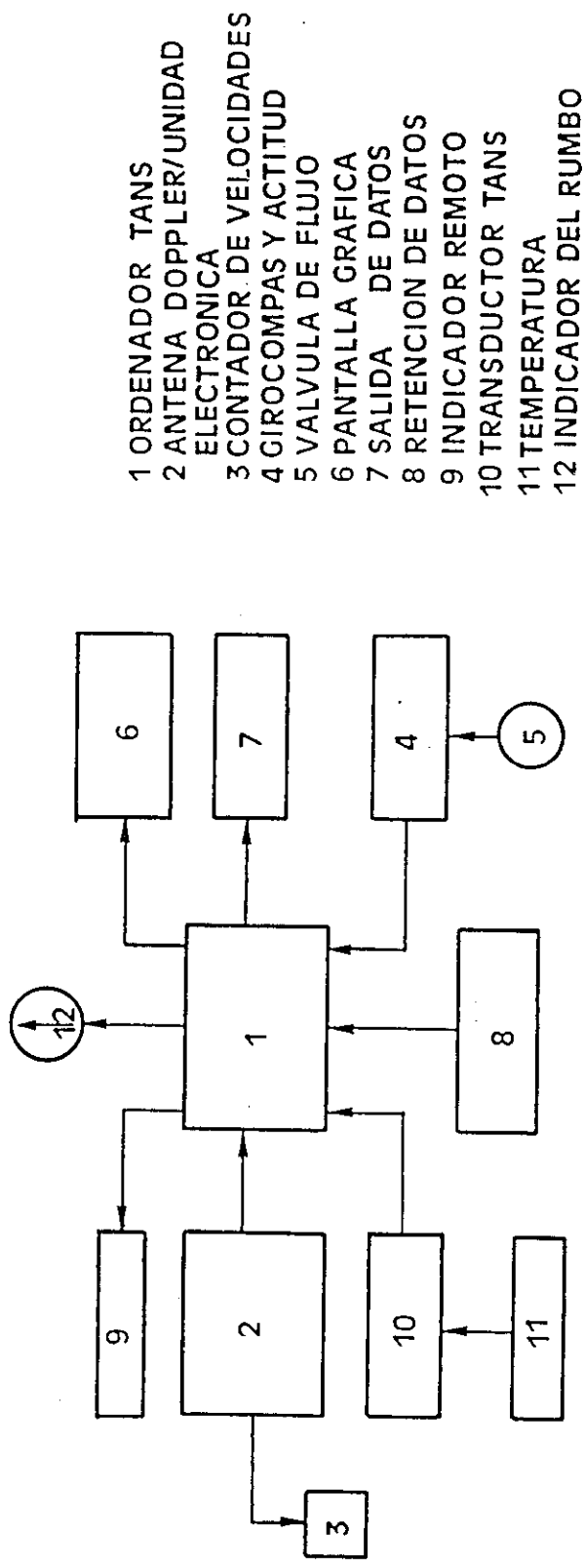
Fig. I,13

La figura I,14 muestra los elementos que componen un sistema de navegación Doppler.

La unidad de antena (2) se encuentra fija a la parte inferior del avión y se compone de las antenas de emisión y recepción junto con los montajes electrónicos del emisor, del receptor y del detector de frecuencias. La antena produce tres haces como los representados en la figura. Los tres espectros de frecuencia se combinan para obtener las componentes del vector velocidad en tres direcciones (Fig.I,15):

- Velocidad vertical(VZ)
- Velocidad longitudinal(VL)
- Velocidad transversal(VT)

y las salidas correspondientes son enviadas al ordenador (1) y al contador de velocidades (3).



- 1 ORDENADOR TANS
- 2 ANTENA DOPPLER/UNIDAD ELECTRONICA
- 3 CONTADOR DE VELOCIDADES
- 4 GIROCOMPAS Y ACTITUD
- 5 VALVULA DE FLUJO
- 6 PANTALLA GRAFICA
- 7 SALIDA DE DATOS
- 8 RETENCION DE DATOS
- 9 INDICADOR REMOTO
- 10 TRANSDUCTOR TANS
- 11 TEMPERATURA
- 12 INDICADOR DEL RUMBO

Fig. 1, 14

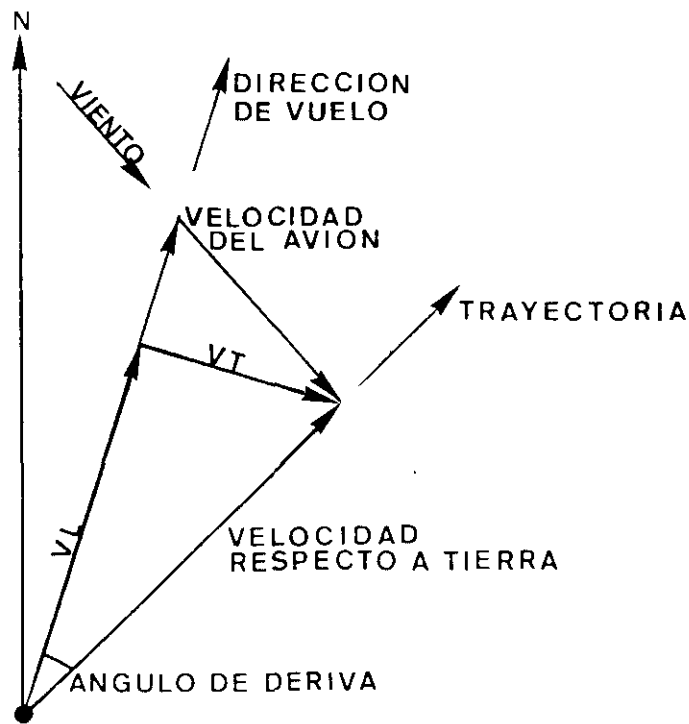


Fig. 1,15

La velocidad longitudinal se obtiene de los haces *B* y *C* (Fig.1,13), la velocidad transversal se obtiene a partir de los haces *A* y *B* y la vertical, mediante los haces *A* y *C*.

El ordenador (1) procesa los datos de velocidad procedentes de la unidad de antena (2) y los de dirección del vuelo procedentes del girocompás (4), para suministrar amplia información sobre la navegación. Al comenzar el vuelo, el piloto introduce en él las coordenadas de los puntos origen y destino. Durante el vuelo, el ordenador presenta en su pantalla, las coordenadas geográficas de la posición del avión, las coordenadas mapa correspondientes, el ángulo de desviación respecto de la dirección de vuelo y el tiempo de llegada al punto de destino.

El indicador remoto (9), proporciona al piloto la velocidad del viento y su dirección, la deriva y velocidad del avión respecto a tierra, el desplazamiento transversal y la distancia al punto de destino.

La pantalla gráfica (6) representa la posición del avión sobre un mapa aeronáutico estandar. La posición se indica por la intersección de dos hilos perpendiculares posicionados sobre el mapa. Dichos hilos se mueven lateralmente y de arriba abajo en el mapa de acuerdo con la posición calculada del avión.

I.4.6. Sistemas de radioposicionamiento

El funcionamiento del sistema Doppler posee algunos puntos débiles. En algunas ocasiones, no funcionan cuando la altitud del vuelo es muy baja (menos de 107 metros sobre el terreno). Sobre extensiones de agua, el movimiento debido a las corrientes y a las olas aumenta el error desde el 1% hasta el 3%.

Estos defectos, pueden superarse utilizando sistemas de navegación que emplean estaciones fijas en tierra, las cuales, cuando los levantamientos se realizan sobre el mar, se sitúan cerca de la línea de costa.

Los sistemas de radio posicionamiento se dividen en dos grupos:

- a) Sistemas que miden el tiempo requerido por un pulso de radio frecuencia para recorrer la distancia entre una estación fija y una móvil instalada en la plataforma de medida.
- b) Sistemas que miden la diferencia de tiempo de recorrido (o de fase) desde dos o más estaciones fijas.

Entre los primeros, se encuentran los siguientes sistemas:

- Radar.
- Shoran (short-range navigation).

y entre los segundos se encuentran los sistemas:

- Raydisit
- Lorac
- Decca
- Loran (long-range navigation)
- Omega

El radar y el Shoran poseen principios de funcionamiento similares, la distancia al objetivo es igual a la mitad del producto del tiempo de recorrido de ida y vuelta del pulso reflejado y la velocidad de propagación de las ondas de radio.

El Shoran difiere del radar en que la estación fija actúa como objetivo recibiendo el pulso y retransmitiéndolo nuevamente aumentado de potencia de manera que el pulso devuelto es de mayor potencia. La posición de la estación móvil se determina mediante intersección usando dos estaciones fijas.

El radar y el Shoran son sistemas de alta frecuencia pues el primero opera en el dominio de 3000 a 10000 MHz mientras que el segundo lo hace entre 225 y 400 MHz. Puesto que las ondas que poseen estas frecuencias son refractadas muy ligeramente por la atmósfera, los procedimientos anteriores obligan a que al menos dos estaciones de tierra sean visibles desde el avión en todo instante. Por ello, su

uso queda restringido a zonas en las que existe un terreno llano o en las que no se requiere un vuelo a baja altitud.

Si dos o más estaciones transmiten simultáneamente un pulso o una secuencia codificada de pulsos, una estación móvil puede medir la diferencia de tiempo de llegada y determinar la diferencia de distancias entre dos estaciones fijas. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos estaciones fijas (A y B en la figura 1,16) es constante, es una hipérbola cuyos focos son dichas estaciones; de esta forma puede determinarse la hipérbola PQ que pasa por el punto ocupado por la estación móvil R , con una sencilla medida.

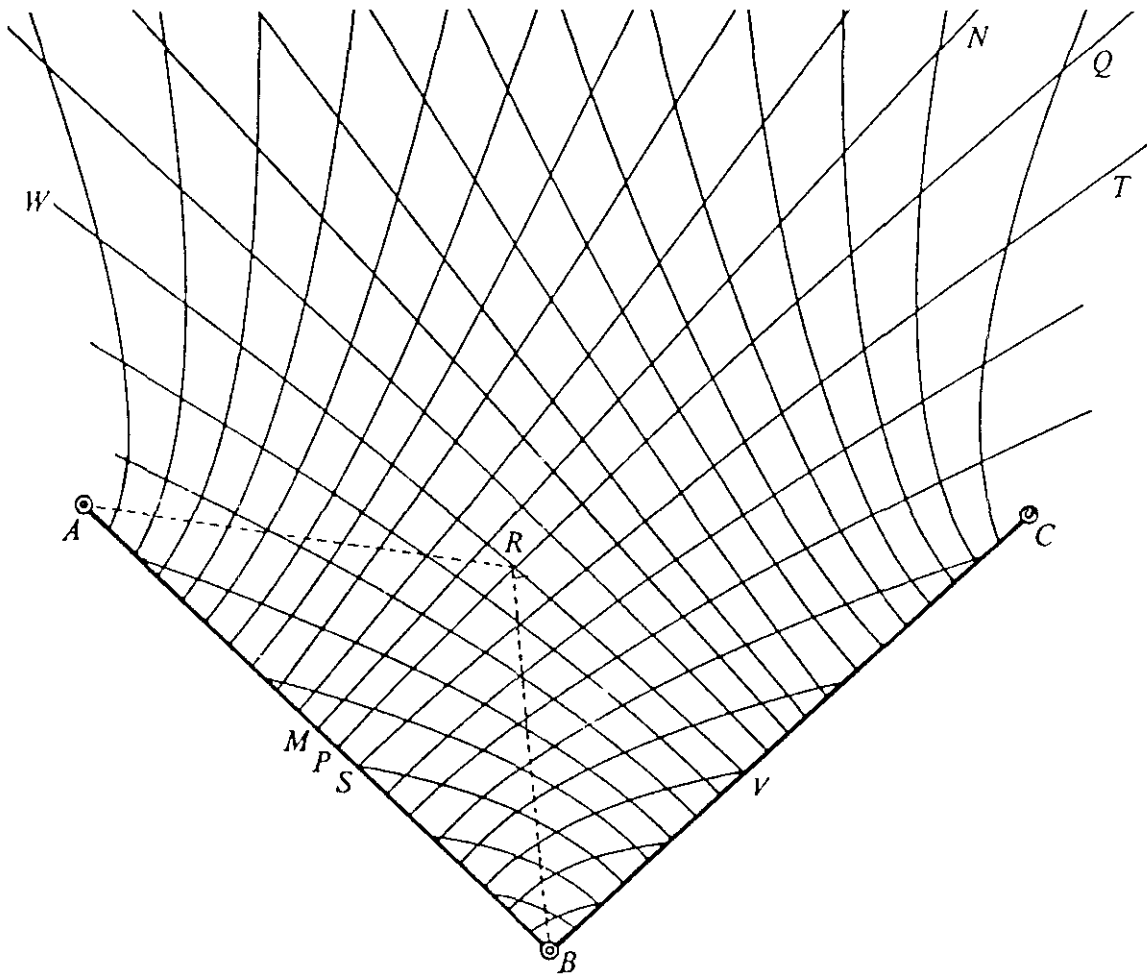


Fig. 1,16

Si se mide la diferencia de tiempos de llegada a una segunda pareja de estaciones (B y C), estación móvil queda localizada también sobre la hipérbola VN y por ello en la intersección de las dos hipérbolas. Este principio define la base de los sistemas Loran y Omega.

I.4.7. Sistema de posicionamiento global (GPS)

En muchas ocasiones se recurre a determinar la posición usando los datos de los llamados satélites de navegación, los cuales describen órbitas polares alrededor de la Tierra. Cada satélite tarda 100 minutos en dar una vuelta a la Tierra, estando a la vista de un mismo punto bajo su órbita durante 18 minutos. Cada uno de los satélites transmite trenes continuos de ondas de 150 y 400 MHz. Las frecuencias medidas por el receptor instalado en la plataforma sufren un desplazamiento Doppler debido al movimiento relativo del satélite respecto de la plataforma. Con estos desplazamientos se calcula la diferencia entre la latitud y longitud de la plataforma respecto a la latitud y longitud del satélite en el punto más próximo. El satélite transmite información que da la localización del mismo cada 2 minutos. Un ordenador a bordo, combina esta información con las medidas de desplazamiento Doppler y la velocidad de la plataforma para dar la posición de la misma. Cada satélite puede observarse en cuatro o más órbitas diarias, por lo que es posible realizar 20 o más determinaciones diarias de la posición. Sin embargo, los satélites no se hallan uniformemente espaciados y no poseen exactamente el mismo período orbital de modo que en algunas ocasiones son visibles más de un satélite mientras que en otras puede ocurrir que no sean visibles ninguno de ellos durante algún tiempo.

I.5. CARACTERÍSTICAS ESPACIALES DE UN LEVANTAMIENTO AEROMAGNETICO

En este apartado se estudian las características espaciales que definen un levantamiento aeromagnético, entendiendo como tales:

- La dirección de las líneas de vuelo.
- La separación entre las líneas de vuelo.
- La separación entre las líneas de control.
- La altitud del vuelo.

los valores de estos parámetros, se fijan durante la fase de planificación, en función del objetivo que se persigue.

La exposición que a continuación se realiza, presenta un conjunto de criterios que suelen seguirse habitualmente para fijar dichos parámetros.

1.5.1. La dirección de las líneas de vuelo

Por regla general, la dirección de vuelo se elige perpendicular a las líneas de nivel de las anomalías del campo magnético ya que la variación a lo largo de ella es máxima. No obstante, estas líneas de nivel se desconocen hasta una vez realizado el vuelo, por lo que se suele adoptar la dirección perpendicular al strike de algunas formaciones geológicas (Fig. 1,17) el cual, en muchas ocasiones, suele coincidir con la dirección de tendencia de las anomalías magnéticas, especialmente con la producidas por masas de rocas del basamento (Reford, 1964); sin embargo, esta dirección puede diferir bastante del strike de las formaciones sedimentarias. Si no existe ninguna información del basamento, es necesario inferirla de las características tectónicas mayores y de áreas más próximas a la superficie terrestre del mismo. En tal caso, se suele volar algunas líneas de prueba antes de elegir la dirección definitiva.

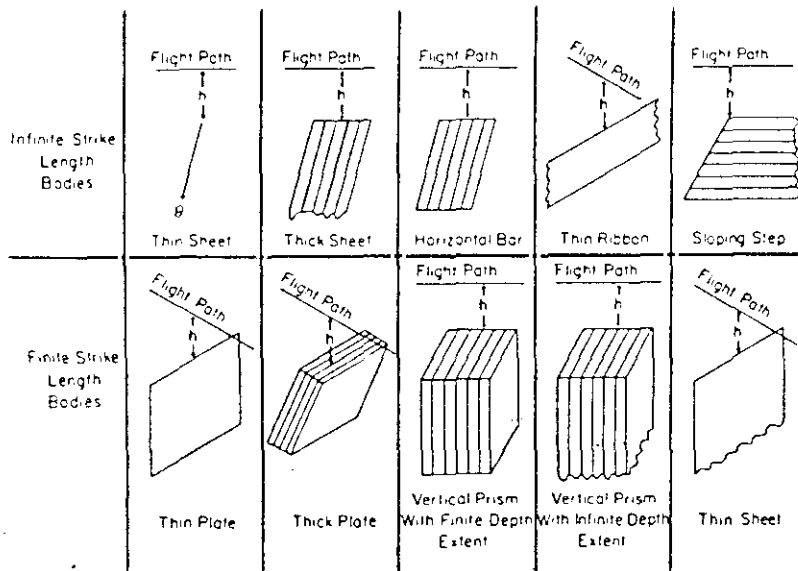


Fig. 1,17

En ocasiones, el levantamiento aeromagnético se dirige al estudio de estructuras geológicas con una dirección especial, posiblemente fallas que poseen una orientación preferente. En ese caso, las líneas deben volarse perpendicularmente a dicha dirección. Entonces, el área del levantamiento puede dividirse en zonas de menor extensión para efectuar el vuelo en distintas direcciones. Si se desea mantener bajo el coste, se elige una división del área de estudio en zonas extensas. En los lugares donde se desea mayor detalle, se eligen zonas más pequeñas.

En ocasiones es necesario añadir algunas líneas de vuelo para comprobar detalles particulares una vez que la parte principal del levantamiento e incluso de la compilación de datos ha sido realizada. En ese caso, los datos obtenidos sobre las líneas de control pueden ser de utilidad.

Es importante destacar que en las proximidades al ecuador las anomalías magnéticas casi nunca poseen una dirección de tendencia Norte-Sur, incluso aunque las rocas la sigan, por lo que deben evitarse en tales latitudes líneas con dirección Este-Oeste (Reford and Sumner, 1964).

Lilley (1968) ha realizado un estudio más profundo para elegir la dirección óptima de las líneas de vuelo cuando se desea dibujar mapas de anomalías magnéticas. Para ello, define dos parámetros:

- El nivel de discriminación.
- La anchura del objetivo.

Suponiendo que la detección de una anomalía depende únicamente de la magnitud de la variación del campo registrada por el instrumento de medida, Lilley define el nivel de discriminación de una anomalía como el valor que debe sobrepasarse para que ésta sea localizada. El nivel de discriminación puede ser fijado por el intérprete o por el límite de resolución del instrumento.

La anchura del objetivo para una dirección y nivel de discriminación fijos, se define como la proyección de la anomalía sobre la línea perpendicular a la dirección del vuelo. Por ejemplo, en la figura 1,18, las direcciones A_1 , A_2 y A_3 tienen anchuras de objetivo d_1 , d_2 y (d_3+d_4) para un nivel de discriminación de 0.4.

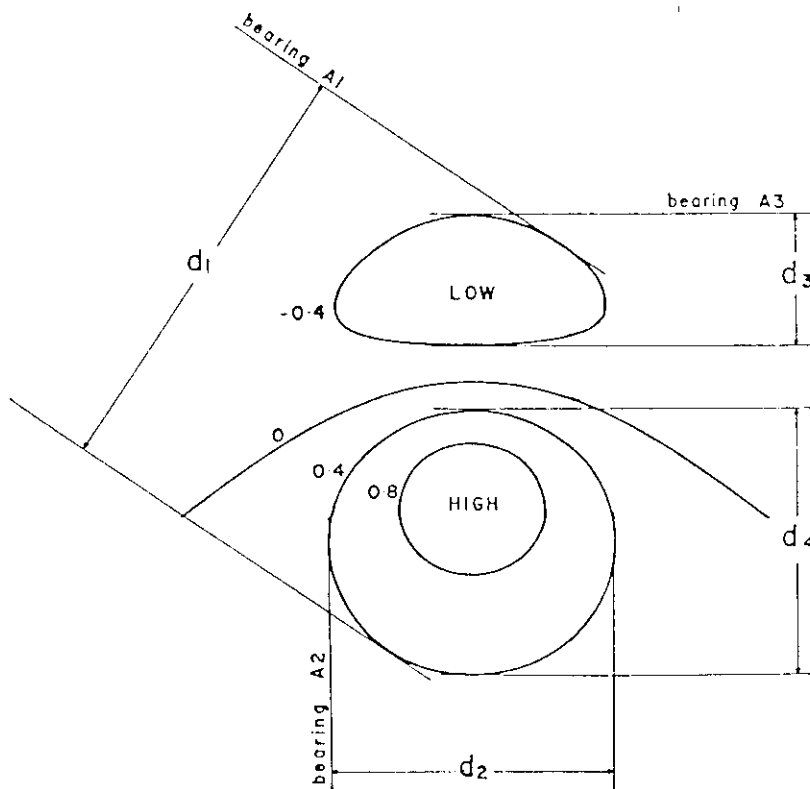


Fig. 1,18

El criterio de Lilley para elegir la mejor dirección de las líneas de vuelo, consiste en seleccionar la que ofrezca la máxima anchura del objetivo para un nivel de discriminación determinado.

De acuerdo con el criterio anterior, es posible asignar a cada dirección un número que cuantifique la probabilidad de encontrar la anomalía volando según la misma, para ello se define la razón de eficiencia en la dirección A como

$$E = \frac{W_A}{W_M} 100 \quad (1,6)$$

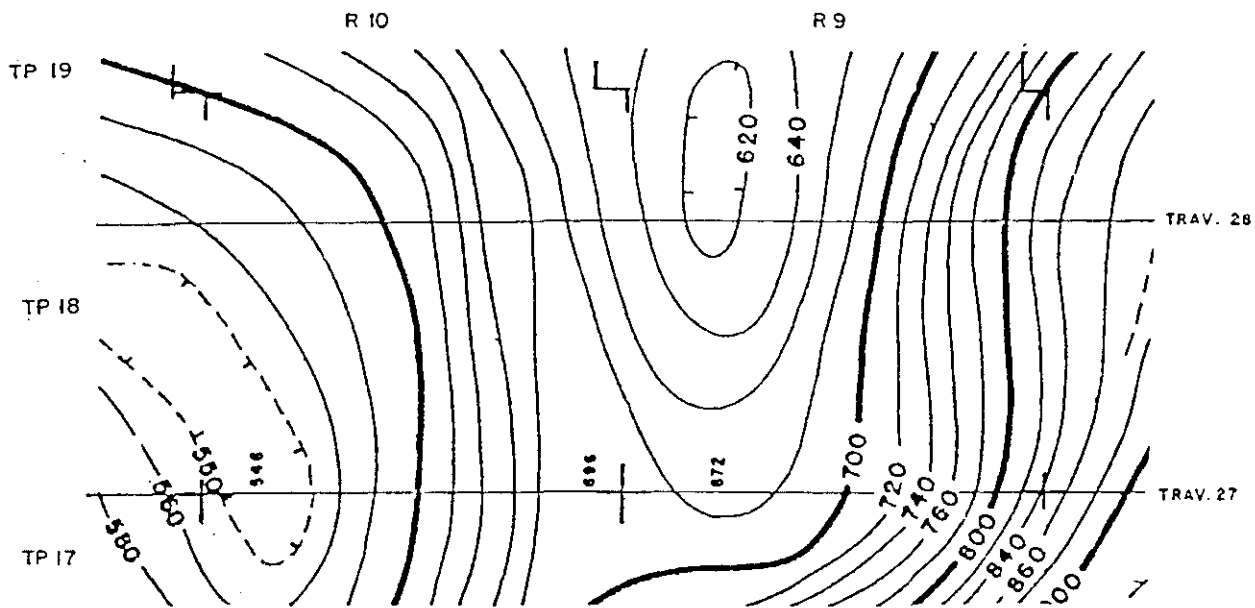
siendo W_M la anchura máxima del objetivo y W_A la anchura en la dirección A .

Lilley demostró que la eficiencia varía, además de con la dirección, con la inclinación magnética (y por lo tanto con la latitud). Dando valores fijos al azimut de las líneas de vuelo, comprobó que en el ecuador las líneas con dirección Sur-Norte son el doble de las dirigidas de oeste a este. Con el aumento de la inclinación magnética, la eficiencia de las líneas dirigibles hacia el Norte disminuye hasta alcanzar los 20° donde la eficiencia es muy baja. Entre los 20° y los 70° de inclinación magnética, son preferibles las líneas dirigibles hacia el Norte y por encima de los 70° de inclinación, los valores de la eficiencia son tan grandes para todas las direcciones, que no existe una preferente.

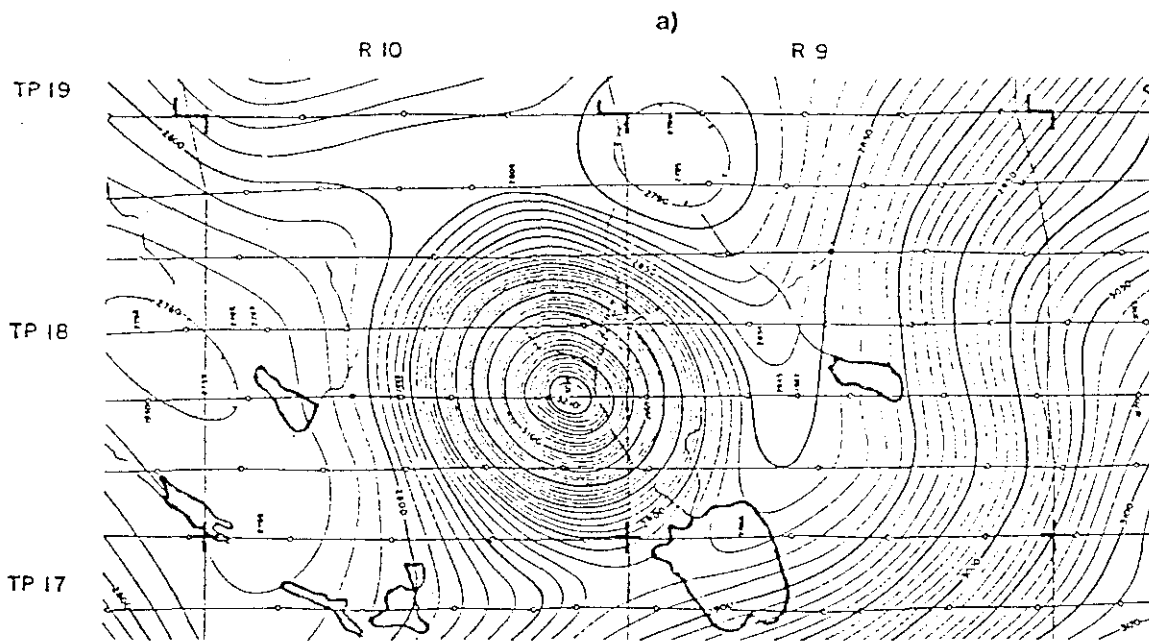
1.5.2. Separación de las líneas de vuelo

Es coste total de un levantamiento aeromagnético está relacionado con la distancia volada y por lo tanto con el espaciamiento entre las líneas de vuelo. Cuanto menor es ésta mayor es la resolución, pero también es mayor el coste del proyecto.

La elección entre un vuelo de reconocimiento o un levantamiento de mayor detalle, viene impuesta en muchas ocasiones por factores económicos y por el objetivo que se persigue. En los primeros, el espaciamiento es tan grande que algunas de las anomalías del suprabasamento pueden perderse e incluso interpretarse de forma errónea las más grandes. Además, el cálculo de la profundidad puede ser engañoso. Para reforzar la interpretación de un vuelo de reconocimiento, en algunas de las zonas se vuelan parejas de líneas más juntas, con amplios espacios abiertos entre dichas parejas. Como ejemplo clásico de la debilidad de la interpretación efectuada con datos de un vuelo de reconocimiento, suele citarse el caso del levantamiento aeromagnético realizado al suroeste de Saskatchewan (Canadá), por el Departamento de Recursos Minerales de dicho estado. La figura 1,19a muestra el mapa resultante realizado con una distancia entre líneas de vuelo de 6.45 Km. La misma área fue volada posteriormente con un espaciamiento entre líneas de vuelo igual a 1.6 Km, mostrándose el resultado en la figura 1,19b. Como se aprecia, el resultado en el primer levantamiento es engañoso pues en él no aparece la anomalía circular que aparece en el segundo, posiblemente debida a un tapón de roca básica en el basamento, por estar dicha anomalía comprendida entre dos de las líneas de vuelo del primer levantamiento.



RECONNAISSANCE SURVEY — 4 MILE LINE SPACING



DETAILED SURVEY — 1 MILE LINE SPACING

0 1 2 3 4 Miles

b)

(Fuente: Reford, M. S. (1964))

Fig. I,19

Los levantamientos aeromagnéticos detallados, a diferencia de los vuelos de reconocimiento, permiten detectar y evaluar todas las anomalías del suprabasamento. Para ello, es necesario espaciar las líneas de vuelo de manera que puedan detectarse anomalías que aún siendo suficientemente pequeñas no se confundan con las originadas por fuentes no geológicas. Una forma de estimar el espaciamiento de las líneas de vuelo, consiste en considerar que la anomalía más difícil de detectar posee una forma circular y está originada por una pequeña esfera que puede asimilarse con un dipolo magnético y tiene una anchura a medio pico igual a la profundidad a la que se halla dicho cuerpo. La anchura a medio pico, es la anchura total del perfil de la anomalía medida a la mitad de su máximo (Reford and Sumner, 1964; Telford, 1985). Por lo tanto, si las líneas de vuelo se separan horizontalmente a intervalos iguales a la distancia vertical desde el magnetómetro hasta el dipolo, al menos una línea de vuelo cortará a la anomalía a la mitad de su máximo. La anomalía será detectada incluso aunque no existan suficientes datos para evaluarla debidamente. Sin embargo, muchas anomalías poseen una longitud mayor que su anchura a medio pico y se ponen de manifiesto en más de una línea. La relación de la profundidad en la anchura a medio pico proporciona la base de una regla de uso frecuente en exploración petrolífera, que consiste en espaciar las líneas de vuelo menos que la profundidad al basamento.

Agocs (Agocs, 1955) realizó un estudio más profundo sobre el espaciamiento óptimo entre líneas de vuelo para detectar anomalías magnéticas que poseen determinadas formas geométricas, basándose para ello en el concepto de probabilidad geométrica (ver Ríos, 1977). De esta manera, la probabilidad de que una línea de vuelo atraviese una anomalía circular de diámetro D menor que la separación S entre las líneas de vuelo (Fig. 1,20) será

$$P = \frac{D}{S} \tag{1,7}$$

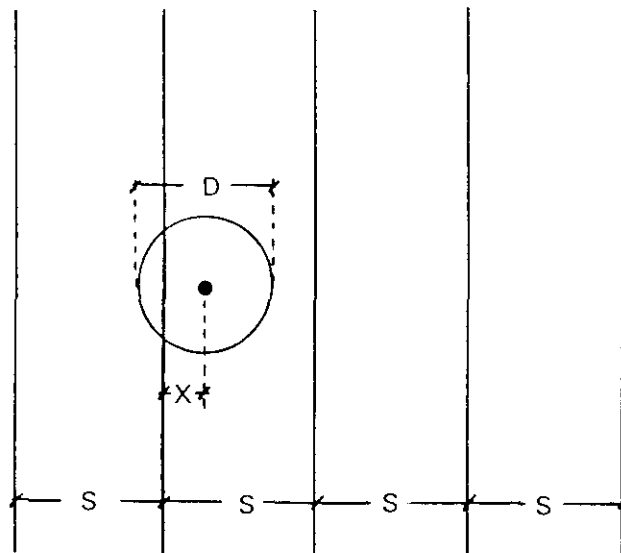


Fig. 1,20

En efecto, designemos por x la distancia entre el centro de la circunferencia y la línea de vuelo más próxima. Los valores posibles de x se hallan comprendidos en el intervalo $[0, S/2]$. Supondremos además que la distribución de probabilidad de la variable x es uniforme en dicho intervalo por tratarse de una probabilidad geométrica.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{S/2} & \text{si } 0 \leq x \leq S/2 \\ 0 & \text{si } x > S/2 \end{cases}$$

sí pues la probabilidad de que una línea de vuelo corte a la circunferencia será

$$P = \int_{x \leq D/2} f(x) dx = \int_0^{D/2} \frac{2}{S} dx = \frac{D}{S}$$

y por lo tanto, una vez fijada la probabilidad, puede determinarse el espaciamiento necesario para que la anomalía circular sea atravesada por una línea de vuelo con dicha probabilidad.

Agocs realizó estudios similares para anomalías con distintas formas geométricas. Una de ellas, la de forma rectangular, también ha sido estudiada por Boisard (Boisard, 1966).

El planteamiento probabilístico empleado por Agocs, ha sido utilizado también por Parasnis (Parasnis, 1966).

1.5.3. Separación de las líneas de control

En ausencia de errores de deriva y de posición, las diferencias de los valores observados en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control son un reflejo de la variación temporal del campo magnético que ha tenido lugar en cada punto durante el vuelo de cada una de las líneas. En la fase de procesamiento de los datos se procede a minimizar tales diferencias, obteniéndose como resultado un conjunto de perfiles de los que se ha sustraído la variación temporal.

Como es lógico pensar, cuanto más próximas esten las intersecciones de las líneas de control con cada línea de vuelo, más pequeños serán los períodos de las variaciones temporales que en ellas se recojan y posteriormente se eliminen. Sin embargo, esto encarecerá más el coste del levantamiento. Fijando el período mínimo que desea eliminarse de los datos, es posible obtener una estimación de la distancia entre las líneas de control. Admitiendo que las velocidad del avión se mantiene uniforme a lo largo de la línea (véase el apartado II.6.2.4).

$$\Delta d = \frac{T_m V}{4} \tag{1,8}$$

siendo

V : la velocidad del avión

T_m : el período más pequeño que puede eliminarse

Δd : la distancia entre dos líneas de control adyacentes

1.5.4. La altitud del vuelo

La altitud es un factor importante en un levantamiento aeromagnético ya que está relacionada con la resolución de las anomalías magnéticas que se desean estudiar. Conforme aumenta la altitud del vuelo, las anomalías debidas a fuentes subterráneas adyacentes se confunden y atenúan, resultando imposible distinguir unas de otras (Fig.1,21).

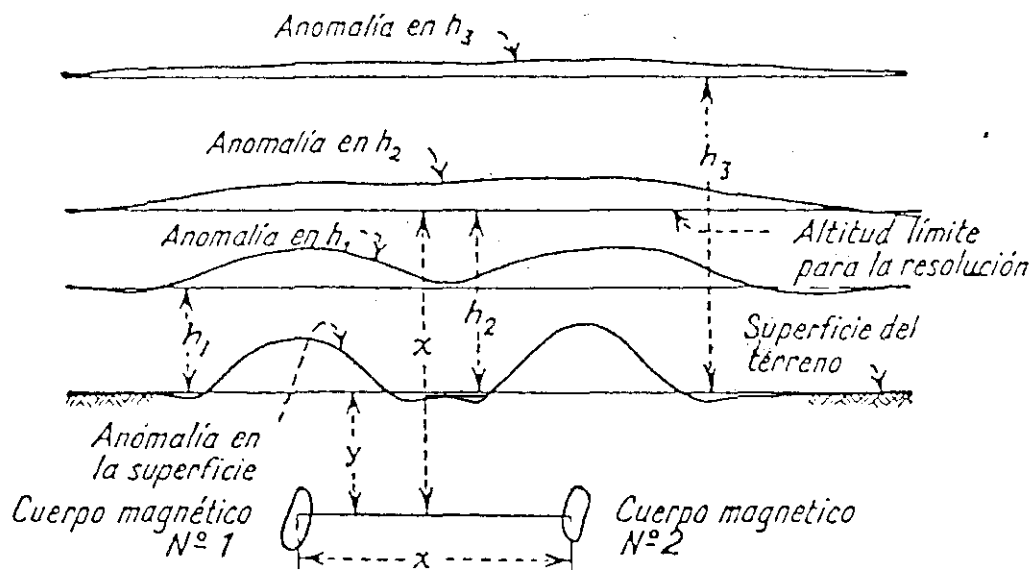


Fig. 1,21

La altitud depende, en general, de la finalidad del vuelo. Cuando ésta es la exploración minera el levantamiento se realiza a altitud constante sobre el terreno, lo que facilita la comparación de un perfil con el siguiente. Sin embargo, esta condición no puede lograrse en la práctica. Incluso en condiciones óptimas de vuelo sobre terrenos llanos, un piloto tiene dificultades para mantener esta condición volando a una altitud de 15 metros. Sobre valles y colinas, el comportamiento del

avión posee complicaciones adicionales. Por estos motivos, en la práctica se suele especificar una altitud media respecto al terreno.

La altitud del vuelo sobre el terreno se controla con el radioaltímetro, de esta forma es posible mantener la altitud constante en regiones con pendientes escarpadas siguiendo las líneas de nivel.

La elección de la altitud radiométrica media está relacionada con la separación entre las líneas de vuelo. Bajas altitudes proporcionan alta resolución, pero para interpretar las anomalías magnéticas éstas deben seguirse de un perfil al siguiente. De esta manera, un exceso de resolución puede ser un inconveniente.

Una combinación frecuente en exploración minera consiste en un espaciamiento de 152 metros entre líneas de vuelo y una separación de 402 metros entre las mismas (Reford and Sumner, 1964).

En exploración petrolífera el propósito es distinto ya que en muchos casos el objetivo consiste en cartografiar la profundidad del basamento para determinar el espesor de las capas de sedimentos. Por este motivo, el vuelo se realiza a altitud constante respecto al nivel del mar. Por otra parte, debido a las profundidades que posee el basamento, es preferible volar suficientemente alto para evitar la influencia de cuerpos magnéticos pequeños próximos a la superficie del terreno. Una altitud de 305 metros sobre el terreno suele considerarse aceptable para estos propósitos.

Con ayuda de mapas topográficos de la región del levantamiento, puede fijarse la altitud barométrica del vuelo de manera que se mantenga una separación aceptable respecto al terreno.

1.5.5. Efecto de la variación de los parámetros espaciales

Es innecesario señalar que ni la altitud del vuelo ni la separación entre las líneas de vuelo pueden mantenerse constantes durante todo el levantamiento. Estas irregularidades del vuelo pueden producir anomalías espúreas que, además de distorsionar las líneas de nivel del mapa final, también pueden introducir errores en su interpretación.

Para discutir los errores producidos por este tipo de variaciones, Bhattacharyya (Bhattacharyya, 1970) supuso un vuelo realizado en dirección Norte-Sur a 305 metros de altitud, dimensiones horizontales 305 y 610 metros en direcciones Norte-Sur y Este-Oeste respectivamente y susceptibilidad magnética 0.03. Calculando los valores del campo magnético sobre el perfil antes mencionado, obtuvo los siguientes resultados:

- 1^o) Cuando el perfil pasa a 152 metros hacia el oeste del centro del prisma, si la altitud del avión varía de forma senoidal desde 305 a 335 metros y regresa de nuevo a 305 metros a lo largo de una distancia horizontal de 305 metros, se produce un decrecimiento máximo del campo de 135 nT. Cuando la altitud se incrementa 91,5 metros a lo largo de 762 metros, el pico se reduce un 36%.

- 2º) Si durante el vuelo de la línea antes indicada, se produce una desviación horizontal senoidal respecto de la línea de vuelo con un desplazamiento máximo de 30,5 metros hacia el Este para una distancia de 305 metros, la máxima variación del campo magnético es de 68 nT. Si la desviación máxima es de 61 metros hacia el Este en una distancia de 610 metros, la variación máxima se reduce en un 8% del valor máximo del campo magnético.

Estos errores son particularmente significativos en el análisis de datos aeromagnéticos de alta sensibilidad.

I.6. EL PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

En un principio, los registros de datos magnéticos fueron realizados en forma analógica y, como consecuencia de ello, gran parte de las tareas de procesamiento de datos y representación de los resultados, se realizaba de forma manual. Con la llegada de los magnetómetros de alta sensibilidad, como por ejemplo los de bombeo óptico, se hicieron necesarios los registros en forma digital. Ello permitió el acceso de los datos aeromagnéticos al ordenador e influyó en la modificación del procesamiento de los datos ya que muchas operaciones, como las de nivelación o las de dibujo de mapas, que en principio eran realizadas manualmente fueron automatizadas mediante el uso de software especializado.

La figura I,22 resume las operaciones más importantes de un procesamiento de datos aeromagnéticos, tanto en forma manual como en forma automática. Como en ella puede verse, los datos proceden de dos fuentes:

- los registros del vuelo
- la reconstrucción de las trayectorias de las líneas de vuelo.

Ambos conjuntos de datos están conectados mediante el número fiducial, que es asignado por el sistema automático de adquisición de datos.

El primer paso, consiste en detectar y corregir datos erróneos de los dos conjuntos.

En ausencia de la variación diurna, de errores de posición y de errores instrumentales, las diferencias de los valores de la intensidad del campo magnético en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control, serían cero. El proceso de nivelación elimina las variaciones del datum de línea a línea motivadas por las anteriores causas.

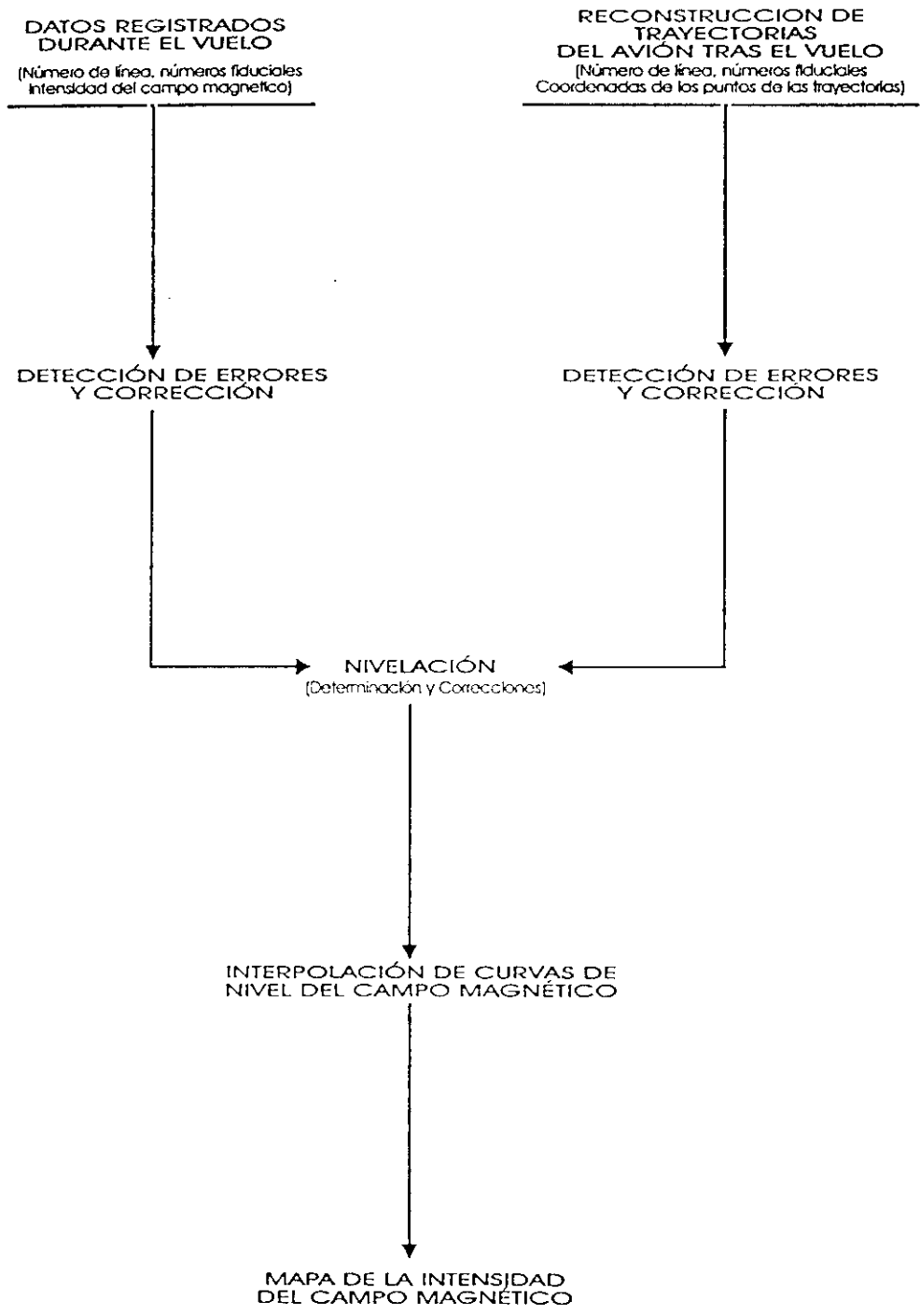


Fig. 1, 22

AEROMAGNETIC DIGITAL DATA COMPILATION PROCEDURES

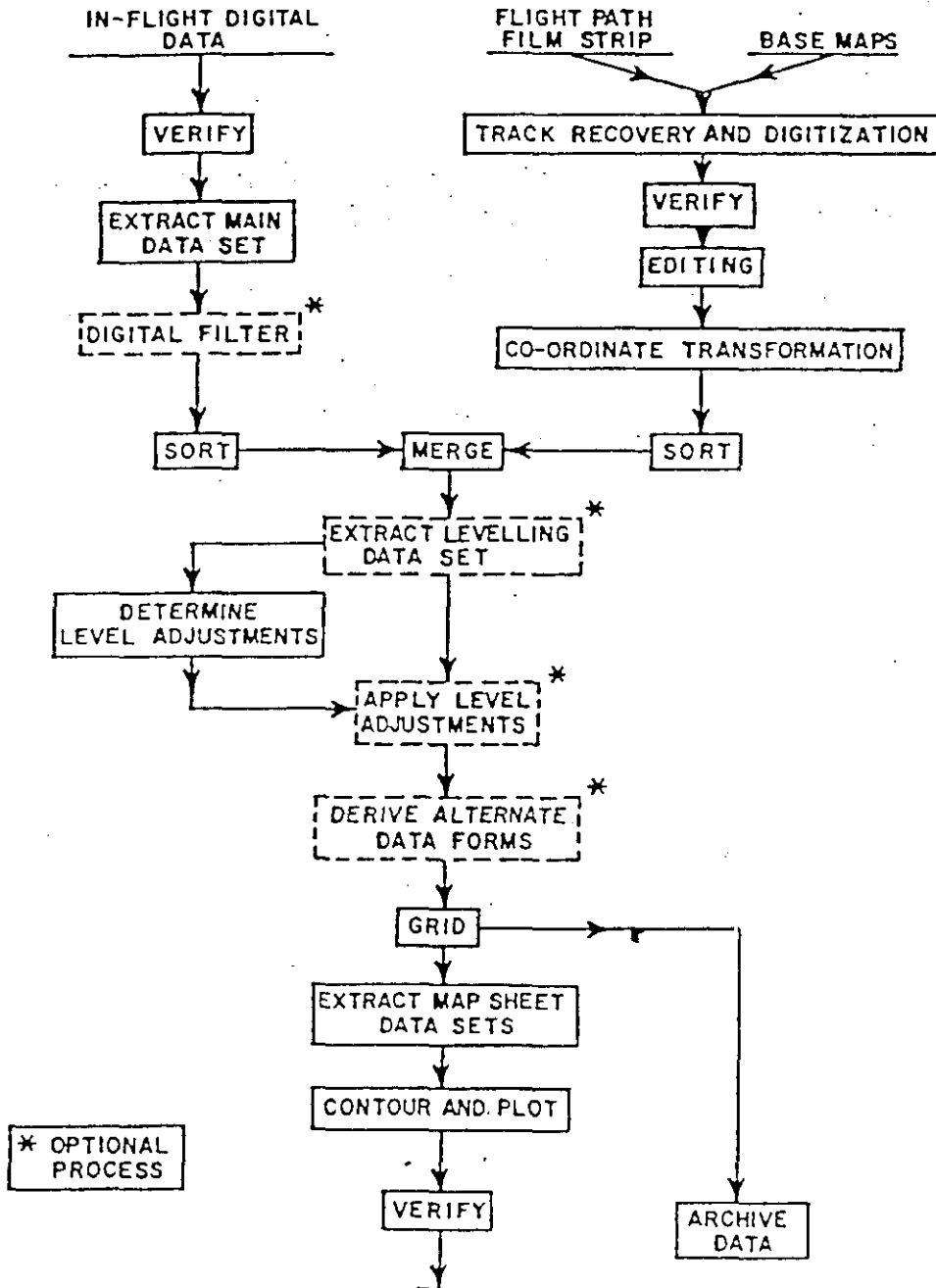


Fig. 1, 23

Por último, los valores corregidos a lo largo de cada uno de los perfiles son interpolados, para dibujar los mapas de líneas de nivel de la intensidad de campo magnético que posteriormente serán usados en la fase de interpretación y análisis.

El esquema anteriormente descrito puede complicarse más conforme aumenten las exigencias de precisión y análisis de los datos, pero en esencia puede considerarse el esqueleto de cualquier procesamiento de datos aeromagnéticos, tal como el que muestra la figura 1,23 que ha sido usado por el Geological Survey de Canadá (Hood et al., 1979).

1.6.1. Compilación de datos, detección y corrección de errores

Como antes se ha explicado, los datos proceden de dos fuentes, por lo que su compilación es distinta y los errores ha de considerarse también divididos en dos grupos:

- errores de la trayectoria
- errores de medida del campo magnético

Las trayectorias seguidas por el avión se reconstruyen sobre mapas a partir de los datos de posicionamiento proporcionados por el sistema de navegación, por fotografías aéreas o por ambos medios. Sobre el mapa, se sitúan puntos característicos de la trayectoria identificables tanto en las fotografías como en el registro del magnetómetro. A estos puntos se les llama marcas de correlación. Cuando los datos se registran en forma digital, se sitúan sobre la trayectoria algunos puntos de la misma junto con sus números fiduciales, especialmente en los tramos donde el avión varía su velocidad. De esta manera, puede establecerse una correlación entre su posición y la medida del campo magnético que les corresponde.

Los mapas de las trayectorias son digitalizados y sus registros se guardan en un archivo para su posterior unión con los datos del magnetómetro y del resto de los instrumentos de vuelo.

Los registros del magnetómetro y de los altímetros se representan sobre papel en forma de perfiles multicanal con una escala horizontal adecuada, teniendo presente que mientras el intervalo de muestreo de los datos se mantiene constante, no ocurre lo mismo con la velocidad del avión. Estos perfiles sirven de ayuda en la investigación de errores de los datos y, cuando el procesamiento no se realizaba de forma automática los valores del magnetómetro en los puntos de correlación, una vez reducidos a un datum fijo, eran transcritos al mapa base para servir de ayuda en el dibujo de las curvas de nivel.

Los errores de ambos tipos de datos se deben al ser humano y a la instrumentación que emplea, pudiendo ser de distinto tipo y gravedad. Si por ejemplo, bien el operador de los instrumentos de vuelo o el de digitalización equivocan un número de línea de vuelo, surgirá entonces una falta de correspondencia entre ambos tipos de datos que se pondrá de manifiesto en el paso de unión y ordenación de los mismos. Una situación aún peor, tiene lugar

cuando los número de línea se transponen de algún modo. A cada perfil del campo magnético le corresponderá una trayectoria y por lo tanto el error permanecerá escondido hasta el paso de nivelación o incluso hasta dibujo final de las líneas de nivel. Además de estos errores groseros de tipo lógico, pueden surgir muchos errores de tipo físico. Dentro de una línea de vuelo, un punto puede estar erróneamente situado en el mapa o su posición erróneamente digitalizada, e incluso puede estar bien posicionado pero mal etiquetado. En esas ocasiones, existen medios para detectar casos graves producidos por dichos errores.

El principal método de detección de errores se conoce con el nombre de "control de velocidad" y se describe a continuación: el instante en que el avión pasa por cada uno de los puntos de la trayectoria, es un dato conocido. A partir de esta información, el programa que realiza la comprobación calcula la velocidad aparente del avión entre cada par de puntos de la trayectoria. No obstante, la velocidad del avión entre dichos puntos puede variar, aunque ésta debería ser suave y no presentar cambios bruscos. Si un punto de la trayectoria se halla mal situado a lo largo de la dirección de vuelo, el segmento anterior a él se alargará y el posterior se acortará. Como el tiempo de paso sobre esos puntos no cambia, se producirá un incremento de la velocidad aparente antes del punto y un decremento después de él. Si el error de posición es significativo la variación aparente de velocidad en el punto mal situado es apreciable y el error queda detectado. Si no se efectuara una comprobación tal como ésta, las líneas de nivel se distorsionarían en los puntos mal posicionados.

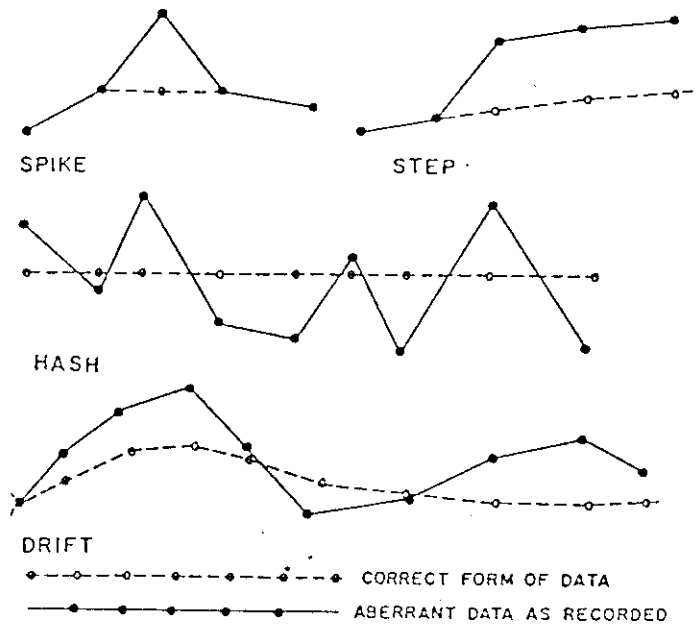
Los errores físicos que se producen en el conjunto de datos adquiridos en el vuelo, como por ejemplo en los del magnetómetro, proceden de dos fuentes principales:

- mal funcionamiento del sensor o del sistema de adquisición de datos.
- descompensación del magnetómetro por los movimientos del avión.

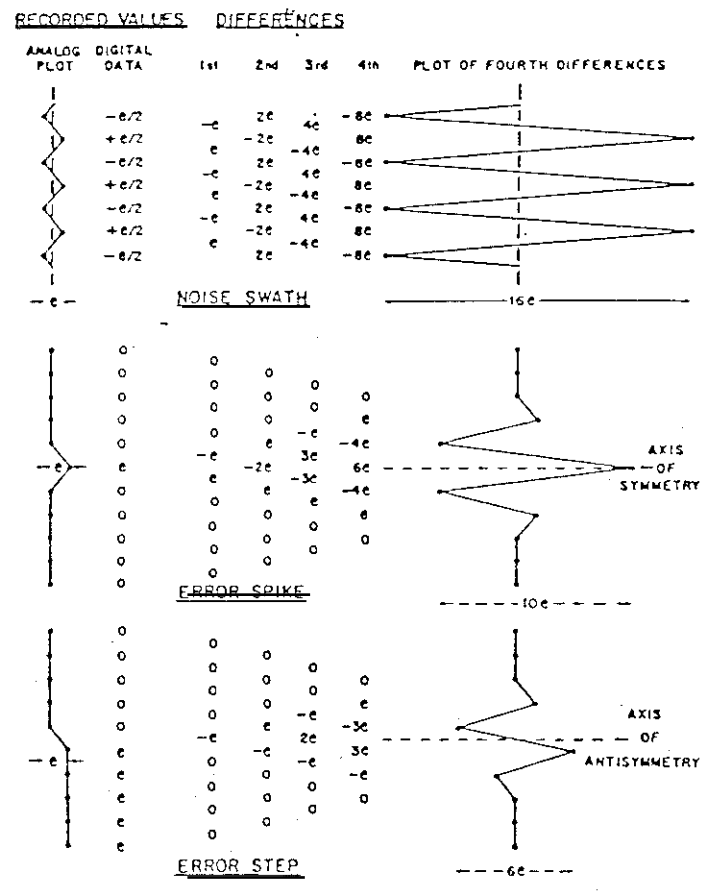
La figura 1,24a muestra las cuatro formas más típicas en las que se manifiestan dichos errores. Las tres primeras son características de las señales de alta frecuencia, presentándose en puntos aislados o en una secuencia de varios puntos en el registro del campo magnético. Estas zonas del registro son erróneas y pueden detectarse y corregirse en el primer paso de la compilación de datos.

El último tipo de error, la deriva, posee una frecuencia media o baja, similar a la de algunas anomalías magnéticas y en muchas ocasiones es difícil distinguirlo y separarlo de éstas últimas permaneciendo oculto hasta alcanzarse el paso de nivelación e incluso el de dibujo de las curvas de nivel del mapa. En estos casos, lo mejor que puede hacerse es eliminar la parte del registro que contiene este tipo de error.

Los errores de alta frecuencia pueden tratarse y corregirse de forma automática mediante el uso de programas con algoritmos de detección de ruido de alta frecuencia. El núcleo del proceso es una rutina que reconoce ciertos patrones de ruido mediante la cuarta diferencia de los datos (Fig.1,24b).



a)



b)

Fig. 1, 24

Al tomarse los datos con intervalos regulares, la cuarta diferencia en torno al dato d_i viene dada por la expresión

$$d_i - 4d_{i+1} + 6d_i - 4d_{i-1} + d_{i-2} \quad (1,9)$$

como puede verse, en esta expresión intervienen los cinco datos centrados alrededor del L -ésimo valor. En el caso la aparición de "puntas" (spikes) en los registros, el error de d_i se amplifica 6 veces con el mismo signo y en cuatro veces con signo opuesto con las cuartas diferencias adyacentes (Fig.1,24b). En los otros dos casos, el valor de d_i se amplifica con la cuarta diferencia 8 y 3 veces respectivamente (Fig.1,24b).

El patrón de error de alta frecuencia más corriente de entre los tres que se presentan en la figura 1,24 y más sencillo de corregir de forma automática, es la punta. Para conseguirlo, el programa busca no sólo los valores más altos de la cuarta diferencia, sino un patrón especial de variación de la misma que tipifica al modelo. En el caso de puntas, el patrón está definido por cinco cuartas diferencias consecutivas cuyos valores guardan las razones:

$$1:-4:6:-4:1$$

Asímismo la forma de onda es simétrica respecto al punto de error (Fig. 1,24b). Para eliminar la punta de los datos originales, se promedian la dos cuartas diferencias situadas a cada uno de los lados del pico central y al resultado se suma el valor máximo de la cuarta diferencia para obtener un valor que es 10 veces mayor que el error original.

El valor de los datos originales correspondiente al pico máximo de la cuarta diferencia se corrige entonces usando la décima parte del valor antes calculado.

En el caso de la aparición de una forma de salto brusco (step) los valores de la cuarta diferencia se encuentran según las razones (Fig.1,24b).

$$1:-3:3:1$$

así pues, la forma de onda resultante será antisimétrica alrededor del punto de error.

Este test es extremadamente sensible y su uso ha revelado en los datos puntas de una amplitud tan baja que su presencia era en un principio insospechable. En registros de alta sensibilidad se han podido detectar puntos de 0.1 nT en datos con gradientes muy altos y anomalías de alta frecuencia que sobrepasan 10000 nT de amplitud (Hood et al., 1979).

1.6.2. Efectos de la variación diurna y sustracción de la misma

El campo magnético terrestre es una función de la posición y del tiempo, por ello es imposible medir las variaciones del mismo al pasar de un punto a otro sin medir también la variación que ha tenido lugar durante el desplazamiento.

Los efectos producidos por la variación temporal y por la deriva instrumental han de eliminarse de los datos si se desea obtener una distribución exclusivamente espacial del campo magnético terrestre. Por otra parte, las variaciones temporales, tal como ocurre en altas latitudes, pueden alcanzar un valor de decenas de nanoteslas en pocos minutos (Whitham and Loomer, 1957), por lo que es necesario eliminarlas si se desea obtener medidas precisas.

Las variaciones diarias o sobre largos períodos, pueden tratarse adecuadamente repitiendo observaciones realizadas en un mismo lugar. Sin embargo, existen algunas variaciones temporales que tienen lugar en pocos segundos, minutos e incluso horas y no son fáciles de eliminar. Estas perturbaciones se hallan superpuestas a la variación diurna y están causadas por corrientes eléctricas variables que fluyen en la alta atmósfera o dentro de la propia Tierra. Cerca de las zonas aurales, el campo magnético terrestre sufre con frecuencia perturbaciones. La intensidad y frecuencia de tales perturbaciones generalmente decrece hacia el ecuador, aunque en Bolivia y Perú se han encontrado también fuertes variaciones, posiblemente relacionadas con el electrojet ecuatorial. En latitudes medias el campo es bastante estable y únicamente las tormentas magnéticas producen fuertes desviaciones del nivel de variación que, en ausencia de tales fenómenos, son generalmente lineales durante períodos de una hora aproximadamente.

Para realizar un levantamiento aeromagnético preciso de la forma más económica posible, es necesario enfrentarse con el problema de eliminación de las variaciones temporales. Para lograrlo, pueden emplearse dos procedimientos. El primero consiste en registrar las variaciones del campo magnético en una estación base situada en tierra y sustraerlas directamente de los registros del avión. El segundo, se basa en el uso de los desplazamientos de nivel registrados en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control para reducir todos los registros a un datum común. Este último procedimiento no es único, pues realmente existe una familia de ellos que se conoce con el nombre "técnicas de nivelación", algunos de los cuales se describirán más adelante.

En principio puede pensarse que el uso de la estación base ofrece un resultado mejor pues proporciona en cada instante una corrección a los registros realizados desde el avión, mientras las técnicas de nivelación sólo utilizan las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control. Sin embargo, el problema fundamental del uso del magnetómetro base consiste en demostrar que las variaciones registradas por este último son próximas a las registradas por el del avión, lo cual constituye la hipótesis de partida del método que ha sido discutida por algunos investigadores en repetidas ocasiones (Giret, 1965; Kellog, 1966; Giret, 1966).

Este problema ha sido estudiado también por Whitham y Niblett (Whitham and Niblett, 1961) analizando las observaciones en tres estaciones terrestres situadas en Alberta (Canadá).

Las técnicas de nivelación no necesitan los registros de la estación base, sin embargo, si las variaciones temporales poseen períodos pequeños, no quedarían reflejadas en las intersecciones y por ello no serían eliminadas de los datos. Este tipo de perturbaciones de corto período suelen presentarse durante los intervalos de gran actividad magnética, principalmente en latitudes altas. Whitham y Niblett, usando como indicador de la actividad magnética la raíz cuadrática media de la variación en un minuto, han demostrado que si ésta vale S nanoteslas, la raíz cuadrática media de los errores en las intersecciones, que define la precisión de la nivelación, vale:

$$\sigma = \frac{S\sqrt{n}}{6} \quad (I,10)$$

siendo n el tiempo en minutos que tarda el avión en recorrer la distancia entre dos intersecciones consecutivas (Whitham and Niblett, 1961).

1.6.2.1. Sustracción de las variaciones temporales usando estaciones en tierra

Para aplicar este procedimiento, se divide la superficie en bloques cuyas dimensiones se eligen de manera que la variación diurna dentro de cada uno de ellos sea aproximadamente uniforme. En el caso del levantamiento aeromagnético de Francia las dimensiones de dichos bloques era de 200 Km por 200 Km (Le Borgne et Le Moüel, 1969). En las proximidades del centro del bloque, se instala un magnetómetro de registro continuo. De acuerdo con la hipótesis de igualdad de variaciones diurnas, tendremos

$$B(P,t) - \bar{B}(P,t_0) = B(P_0,t) - \bar{B}(P_0,t_0) \quad (I,11)$$

siendo:

$B(P,t)$: el valor instantáneo del campo magnético medido con el magnetómetro del avión en el punto P .

$B(P_0,t)$: el valor instantáneo del campo magnético medido con el magnetómetro de tierra en la estación P_0 .

$\bar{B}(P,t_0)$: el valor medio del campo magnético en el punto P .

$\bar{B}(P_0,t_0)$: el valor medio del campo magnético en la estación P_0 durante el levantamiento del bloque.

t_0 : el tiempo de referencia del levantamiento del bloque.

t : el tiempo de medida.

La igualdad (I,11) se aplica a medidas obtenidas con los magnetómetros de tierra y del avión en el mismo instante t a tiempo local.

Despejando $B(P,t_0)$ en la igualdad (I,11) se obtiene el valor medio en cada punto del bloque referido al instante t_0 .

Cuando la región ha sido dividida en varios bloques se reducen los valores medios de cada bloque a un mismo punto C , el cual puede ser un observatorio o una estación maestra. Para ello, se aplica nuevamente la igualdad (I,11), pero en la siguiente forma

$$\bar{B}(P_0,t_0) - \bar{B}(P_0,t_m) = \bar{B}(C,t_0) - \bar{B}(C,t_m) \quad (I,12)$$

siendo:

$\bar{B}(C,t_m)$: el valor medio de campo medido estación principal durante el período de levantamiento del mapa.

t_m : el tiempo de referencia del mapa.

de la que se obtiene el valor $\bar{B}(P_0,t_0)$, que posteriormente se aplica a la ecuación (I,11).

El procedimiento, además de exigir el cumplimiento de la hipótesis de igualdad de variaciones temporales en dos puntos, presenta el inconveniente de ensamblaje de todos los bloques, operación en la que pueden discontinuidades entre los mismos que distorsionen las curvas de nivel del mapa.

1.6.2.2. Métodos de nivelación

Por métodos de nivelación, suele entenderse un conjunto de procedimientos cuyo objetivo consiste en repartir las diferencias del campo magnético que aparecen en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control, de manera que el error global en la red resultante se reduzca lo más posible.

El método más antiguo fue desarrollado alrededor de 1940 (Cowles, 1938; Gibson, 1941) y adaptado a la resolución gráfica por Smith (Smith, 1951). Este procedimiento usaba el método de mínimos cuadrados de forma similar a la empleada para la compensación de errores de medida en trabajos geodésicos.

Años más tarde, Zurflueh (Zurflueh, 1968) introdujo un nuevo método que empleaba la sustracción de polinomios ajustados a las diferencias en los nudos de la red del levantamiento y un desplazamiento posterior de dichos nudos para acomodar los errores remanentes. Sin embargo, fue Foster (Foster et al., 1970) quien formuló de forma rigurosa este procedimiento el cual es de alguna manera parecido al antiguo método de mínimos cuadrados. El método de Zurflueh fue modificado posteriormente por Yarger (Yarger et al., 1978) y por Green (Green, 1983) quien además realizó una comparación con el método clásico de mínimos cuadrados.

En este apartado, se realiza una descripción de los siguientes métodos:

- a) El método de mínimos cuadrados.
- b) El método de Foster.
- c) El método de Yarger.

a) El método de mínimo cuadrados

La red de líneas de vuelo y líneas de control de un levantamiento aeromagnético define un conjunto de intersecciones. Las diferencias del campo magnético que en ellas aparecen se suelen llamar errores de intersección. El problema de la estimación del campo magnético en cada intersección es el mismo que el del ajuste de un levantamiento geodésico. Para ello, existen dos procedimientos de solución. El primero de ellos se conoce con el nombre de "método de ecuaciones de condición" y es el procedimiento esbozado en los trabajos de Cowles y de Gibson. El segundo método se conoce con el nombre de "ecuaciones de observación". Este procedimiento da resultados equivalentes a los del primero, sin embargo es más fácil de adaptar a un ordenador que aquél y es el que a continuación se describe adaptado para el caso de datos aeromagnéticos.

Consideremos una red de líneas de vuelo y líneas de control con N intersecciones y M segmentos de línea que las conectan. Sea $\hat{B}_i (i=1,2,\dots,N)$ el valor estimado de la intensidad del campo magnético en cada intersección.

Para cada segmento de línea $k (k=1,2, \dots M)$ que une la intersección l con la m tiene lugar la siguiente ecuación

$$(\hat{B}_k - \hat{B}_m) - S_k = \varepsilon_k \quad (1,13)$$

donde ε_k es la diferencia entre la estimación de la variación del campo a lo largo del segmento k y la variación medida durante el levantamiento S_k . El criterio de mínimos cuadrados consiste en elegir \hat{B}_i de modo que

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k^2 \quad (1,14)$$

sea mínima.

La ecuación (1,13) puede escribirse también como

$$\sum_{i=1}^N \delta_{ik} \hat{B}_i - S_k = \varepsilon_k$$

siendo

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = m \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

Entonces

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ik} \hat{B}_i - S_k \right)^2$$

Derivando respecto a $\hat{B}_j (j=1,2, \dots, N)$ e igualando a cero el resultado se obtiene un conjunto de N ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{B}_j} = \sum_{i=1}^N \hat{B}_i \left(\sum_{k=1}^M \delta_{ij} \delta_{jk} \right) - \sum_{k=1}^M \delta_{jk} S_k = 0 \quad (1,15)$$

Definiendo

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^M \delta_{ij} \delta_{jk}$$

tendremos

$$a_{ij} = \begin{cases} n_j & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ unidas por un segmento línea} \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

donde n_j es el número de segmentos de línea que conectan con la intersección j . Se define también

$$b_i = \sum_{k=1}^M \delta_{jk} S_k$$

por lo tanto existen N ecuaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} \hat{B}_i - b_j = 0 \quad (1,16)$$

La matriz A , cuyos elementos son los coeficientes a_{ij} , es simétrica y de rango $N-1$, por lo que para resolver el sistema de ecuaciones (1,16) se requiere fijar el campo en una de las intersecciones de la red. Los valores de las estimaciones \hat{B}_i se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones (1,16), lo cual puede hacerse mediante las técnicas convencionales de inversión de matrices o mediante procedimiento iterativos.

b) El método Foster

Como en ocasiones anteriores se ha indicado, las diferencias del campo magnético en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control están causadas por la variación diurna, los errores de posicionamiento (incluidas las desviaciones de la altitud del vuelo) la deriva instrumental y el ruido aleatorio. Foster (Foster et al., 1970) considera que algunas de esas fuentes ocasionan en los datos errores sistemáticos. El objetivo principal del método de Foster es estimar y corregir estos errores repartiendo convenientemente las diferencias que surgen en las intersecciones, tal como se describe en los párrafos siguientes.

Supongamos una red rectangular compuesta por líneas de vuelo divididas en dos grupos, que por conveniencia llamaremos grupo norte-sur o grupo *S* y grupo este-oeste o grupo *E*. Supondremos además que las líneas de cada grupo no se cortan entre sí pero que todas las líneas de un grupo cortan a las del otro. Las líneas del grupo *S* se numeran del 1 a *n* y las líneas del grupo *E* de 1 a *m*.

Sea X_{ik} el valor del campo medido sobre la línea *i* del grupo *E* en la intersección con la línea *k* del grupo *S* y sea Y_{ik} el valor del campo medido sobre la línea *k* del grupo *S* en la intersección con la línea *i* del grupo *E*. Si Z_{ik} es el verdadero valor del campo en el punto de intersección de ambas líneas, tendremos

$$\begin{aligned} X_{ik} &= Z_{ik} + A_{ik} + \varepsilon_{ik} \\ Y_{ik} &= Z_{ik} + B_{ik} + \gamma_{ik} \end{aligned} \quad (1,17)$$

siendo A_{ik} y B_{ik} las estimaciones de los errores sistemáticos y ε_{ik} y γ_{ik} los errores aleatorios.

Los valores de los errores sistemáticos se estiman minimizando la siguiente suma de cuadrados

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [(X_{ik} - Z_{ik} - A_{ik})^2 + (Y_{ik} - Z_{ik} - B_{ik})^2] \quad (1,18)$$

en la que supondremos que dichos errores varían lentamente a lo largo de la línea de vuelo. Para imponer esta restricción, introducimos un conjunto de polinomios ortonormales en *i* ($i=1,2,3, \dots, m$)

$$\{U_i^{(0)}, U_i^{(1)}, \dots, U_i^{(p)}\}$$

en el que $U_i^{(0)}$ es una función constante, $U_i^{(1)}$ un polinomio de primer grado, $U_i^{(2)}$ un polinomio de segundo grado y así sucesivamente. Al ser ortonormales estos polinomios cumplen la siguiente condición

$$\sum_{i=1}^m U_i^{(t)} U_i^{(t')} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t' \\ 0 & \text{si } t \neq t' \end{cases}$$

Similarmente, se introduce un conjunto de polinomios ortonormales función de k ($K=1,2,3, \dots n$)

$$\{V_i^{(0)}, V_i^{(1)}, \dots, V_i^{(q)}\}$$

los cuales han de cumplir la siguiente condición

$$\sum_{k=1}^n V_k^{(s)} V_k^{(s')} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s' \\ 0 & \text{si } s \neq s' \end{cases}$$

De esta manera, las condiciones impuestas a los errores sistemáticos pueden expresarse así

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \sum_{s=0}^q a_{is} V_k^{(s)} \\ B_{ik} &= \sum_{t=0}^p b_{kt} U_i^{(t)} \end{aligned} \quad (I,19)$$

Así pues, el problema consiste en determinar los coeficientes a_{is} y b_{kt} de (I,19) y los valores Z_{ik} de modo que la expresión (I,18) sea mínima.

Foster demostró que la condición necesaria y suficiente para que la suma de cuadrados de (I,18) fuera mínima sujeta a las condiciones (I,19) es que

$$Z_{ik} = \frac{1}{2} [(X_{ik} - A_{ik}) + (Y_{ik} - B_{ik})]$$

donde los coeficientes a_{is} y b_{kt} que definen las igualdades (I,19) son

$$\begin{aligned} a_{is} &= \sum_{k=1}^n (X_{ik} - Y_{ik}) V_k^{(s)} + \sum_{t=0}^p C_{ts} U_i^{(t)} \\ b_{kt} &= -\sum_{i=1}^m (X_{ik} - Y_{ik}) V_i^{(t)} + \sum_{s=0}^q \sum_{i=1}^m a_{is} V_k^{(s)} U_i^{(t)} \end{aligned} \quad (I,20)$$

siendo los coeficientes C_{ts} completamente arbitrarios.

A las diferencias $(X_{ik} - A_{ik})$ y $(Y_{ik} - B_{ik})$ se las llama datos ajustados y a los errores A_{ik} y B_{ik} se les llama ajustes. De esta manera, podemos decir que los ajustes determinados haciendo mínima la expresión (I,18) no son únicos. Por lo tanto será necesario aplicar un nuevo criterio para poder definir los coeficientes de (I,19). Foster, adoptó como medida del ajuste total la magnitud

$$\Psi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ik}^2 + B_{ik}^2) \quad (I,21)$$

y haciendo mínima esta expresión demostró que las igualdades (1,20) se convierten en:

$$\begin{aligned} a_{is} &= a_{is}^0 + \sum_{i=0}^p C_{is} U_i^{(i)} \\ b_{kt} &= b_{kt}^0 + \sum_{s=0}^q C_{ts} V_k^{(s)} \end{aligned} \quad (1,22)$$

donde

$$C_{ts} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m a_{is}^0 U_i^{(i)} + \sum_{k=1}^n b_{kt}^0 V_k^{(s)} \right]$$

siendo además a_{is}^0 y b_{kt}^0 los coeficientes determinados con las igualdades (1,20) igualando a cero en ellas los coeficientes C_{ts} .

A los ajustes determinados de esta forma, Foster los llamó **ajustes óptimos**.

b) El método de Yarger

Yarger supone que el valor de la intensidad del campo magnético terrestre, medida en cada punto (x,y,h) (Y sobre las líneas de vuelo y X sobre las líneas de control) se compone de:

- El campo magnético normal, con origen en el núcleo terrestre (R).
- El campo producido por fuentes situadas en la corteza terrestre (G).
- El campo debido a la variación diurna y los errores de medida (D sobre las líneas de vuelo, C sobre las líneas de control).

Así pues puede escribirse:

$$X(x, y, s, S, h) = R(x, y, S, h) + G(x, y, h) + C(s) \quad (1,23)$$

$$Y(x, y, s, T, h) = R(x, y, T, h) + G(x, y, h) + D(t) \quad (1,24)$$

siendo:

- h : altitud del vuelo respecto al nivel del mar,
- s : tiempo transcurrido a lo largo de las líneas de control,
- t : tiempo transcurrido a lo largo de las líneas de vuelo,
- S : tiempo cronológico de medición sobre las líneas de control,
- T : tiempo cronológico de medición sobre las líneas de vuelo.

El objetivo principal de un levantamiento aeromagnético es cartografiar el campo G debido a rocas de la corteza imanadas de forma permanente o bien de forma inducida.

R es el campo magnético debido a fuentes localizadas en el núcleo. Este campo varía lentamente con el tiempo (variación secular). En sentido estricto, G también es función de S ó T ya que el magnetismo inducido en las rocas de la corteza es proporcional a R . Sin embargo, esta variación es despreciable a no ser que el levantamiento durara muchos años. R se evalúa en cada punto (x,y,h) empleando los modelos del campo geomagnético internacional de referencia.

El término C (ó D) representa la diferencia entre el campo medido sobre las líneas de vuelo X (ó Y) y el campo $R+G$. En ausencia de errores de medida sería el campo debido a la variación diurna. Esta variación decrece durante las horas de la mañana y aumenta después del mediodía.

Yarger supone que al restar el campo normal R de las igualdades (1,23) y (1,24), las diferencias X' e Y' son independientes de los tiempos cronológicos S y T .

Por lo tanto

$$X'(x, y, s) = X(x, y, s, S, h) - R(x, y, S, h) \quad (1,25)$$

$$Y'(x, y, t) = Y(x, y, t, T, h) - R(x, y, T, h) \quad (1,26)$$

Si la altitud del vuelo respecto al nivel del mar se mantiene constante, las ecuaciones (1,25) y (1,26) en cada intersección (i,j) tienen la siguiente forma:

$$X'_{ij} = G_{ij} + C(s_{ij}) \quad (1,27)$$

$$Y'_{ij} = G_{ij} + D(t_{ij}) \quad (1,28)$$

Yarger supone además que los términos C y D varían en forma polinómica con el tiempo

$$C(s_{ij}) = \sum_k c_{ik} s_{ij}^k \quad (1,29)$$

$$D(t_{ij}) = \sum_k d_{jk} t_{ij}^k \quad (1,30)$$

Generalmente, existen más líneas de vuelo que líneas de control y por consiguiente, existen más intersecciones por unidad de longitud sobre las líneas de control que sobre las líneas de vuelo. Por lo tanto es aconsejable comenzar por determinar $C(s_{ij})$ o lo que es lo mismo, los coeficientes c_{ik} de (1,29) para cada línea de control i . Estos coeficientes se calculan ajustando a lo largo de la línea de control i la función $C(s_{ij})-D(t_{ij})$ a las diferencias $(X'_{ij}-Y'_{ij})$ aplicando el método de mínimos

cuadrados. Para conseguirlo, se hace $D(t_{ij})=0$ en todas las líneas de vuelo. Las condiciones necesarias de mínimo son por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial c_{ik}} \left[\sum_j \left(X'_{ij} - Y'_{ij} - \sum_k c_{ik} s_{ij}^k \right)^2 \right] = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1,31)$$

donde la suma en j se extiende a las intersecciones de la línea de control i con todas las líneas de vuelo y n es el grado máximo del polinomio (1,29).

De (1,31) se obtiene

$$\sum_k \left(\sum_j s_{ij}^{k+1} \right) c_{ik} = \sum_j (X'_{ij} - Y'_{ij}) s_{ij}^k; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales cuya solución nos da los coeficientes c_{ik} . Así pues, para cada línea de control i se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$MC=R \quad (1,32)$$

cuya solución es

$$C=M^{-1}R \quad (1,33)$$

donde

$$M_{ik} = \sum_j s_{ij}^{k+1}$$

$$C_k = c_{ik}$$

$$R_l = \sum_j (X'_{ij} - Y'_{ij}) s_{ij}^l$$

y

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Para determinar los coeficientes d_{jk} de (1,30), en cada línea de vuelo j , se ajustan las diferencias $C(s_{ij})-D(t_{ij})$ a los valores medidos $(Y'_{ij}-X'_{ij})$ en las intersecciones de dicha línea con las líneas de control, aplicando el método de mínimos cuadrados. En este caso, las condiciones de mínimo son:

$$\frac{\partial}{\partial d_{jk}} \left[\sum_i \left(Y'_{ij} - X'_{ij} - \sum_k d_{jk} t_{ij}^k + \sum_k c_{ik} s_{ij}^k \right)^2 \right] = 0$$

o bien, según (1,27)

$$\frac{\partial}{\partial d_{jt}} \left[\sum_i \left(Y'_{ij} - G_{ij} - \sum_k d_{jk} t_{ik}^k \right)^2 \right] = 0 \quad (1,34)$$

y la suma sobre donde se extiende a todas las intersecciones de la línea de vuelo j con todas las líneas de control. De igual forma que antes, para cada línea de vuelo se obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuya solución en forma matricial es

$$D = M^{-1}R \quad (1,35)$$

siendo

$$M_{jk} = \sum_j t_{ij}^{k+1}$$

$$D_k = d_{jk}$$

$$R_i = \sum_j (Y'_{ij} - G'_{ij}) t_{ij}^i$$

Así pues, con los sistemas de ecuaciones (1,33) y (1,35) quedan determinados los coeficientes de $C(s_{ij})$ y de $D(t_{ij})$ para cada línea de control y cada línea de vuelo. Consecuentemente, en cada punto podremos calcular

$$G(x, y) = X'(x, y) - C(s)$$

sobre las líneas de control y

$$G(x, y) = Y'(x, y) - D(t)$$

sobre las líneas de vuelo.

1.6.3. Reducción de los datos e interpolación de curvas de nivel

Como resultado de la corrección de errores y de la sustracción de las variaciones temporales, se obtiene un conjunto de valores del campo magnético referidos a un datum común.

Si la sustracción de las variaciones temporales se ha efectuado mediante alguno de los métodos de nivelación, los datos reducidos a un datum común son los que corresponden a las intersecciones. Los valores correspondientes a los puntos intermedios también han de referirse al mismo nivel. Para ello, los valores determinados en cada pareja de intersecciones se unen definiendo una línea base o nivel de referencia para los valores de los puntos comprendidos entre ellas.

El conjunto final de datos no se halla regularmente equiespaciado. Para obtener un mapa de curvas de nivel con una equidistancia determinada, es necesario calcular los valores de la intensidad del campo magnético en los vértices de una red rectangular regular, partiendo de los datos distribuidos irregularmente.

Para ello, se aplica el procedimiento de interpolación bicúbica por splines, el cual ha sido descrito por Bhattacharyya (Bhattacharyya, 1969).

Partiendo del conjunto de datos interpolados regularmente, los mapas de curvas de nivel del campo magnético se dibujan con ayuda de programas de cartografía automática, fijando la equidistancia de las curvas en función de la escala del dibujo del mapa, y del objetivo final del proyecto. Uno de tales programas ha sido desarrollado por Holroyd y Bhattacharyya (Holroyd and Bhattacharyya, 1970) para cartografiar datos geofísicos.

CAPITULO II

ADQUISICION Y TRATAMIENTO DE DATOS AEROMAGNETICOS

II.1. INTRODUCCIÓN

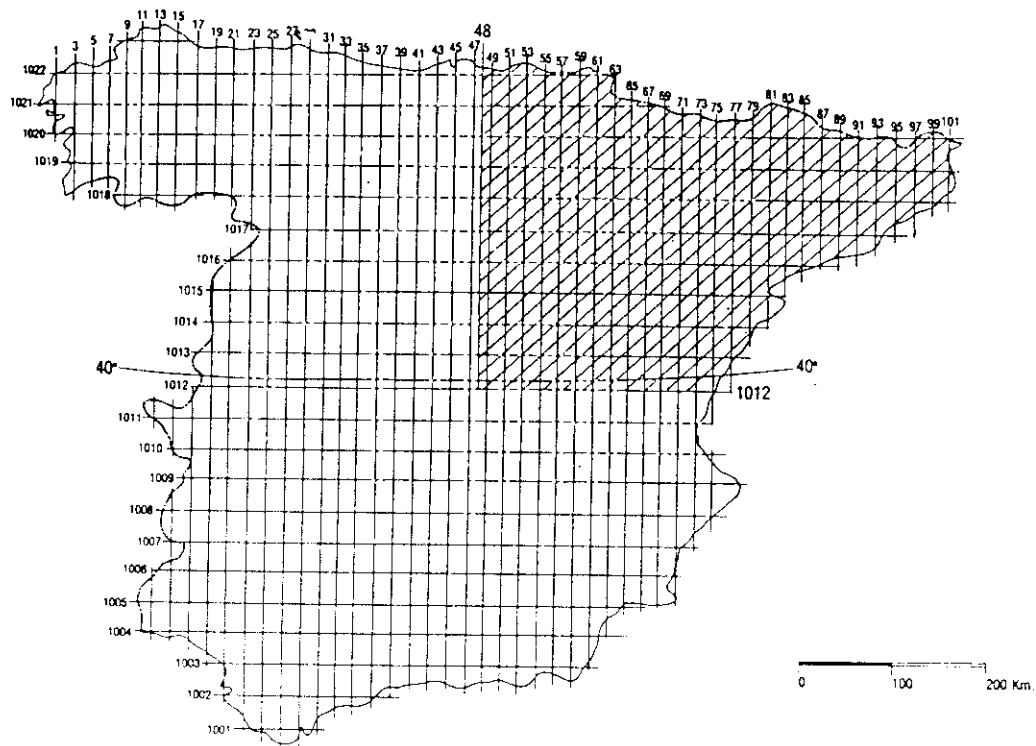
Cuando en un trabajo de investigación se efectúa un análisis de datos, tal como aquí ocurre, es importante conocer con detalle la fase de adquisición de los mismos, así como las transformaciones que éstos pudieran haber sufrido como consecuencia de cualquier tratamiento previo a dicho análisis. Como es lógico, la precisión del resultado final irá unida a la de las medidas y a la de su tratamiento numérico. Por este motivo, en el presente capítulo se realiza una descripción de aspectos tales como, la instrumentación y su calibración, el procesamiento de los datos, la corrección de errores, etc. Todo ello completa el estudio que se efectúa en el Capítulo IV.

II.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA ADQUISICIÓN DE DATOS

Los datos empleados en esta tesis constituyen una muestra extraída del conjunto de datos obtenido en el levantamiento aeromagnético del área peninsular del Territorio Nacional, realizado por el Instituto Geográfico Nacional. Algunos aspectos del mismo han sido descritos con anterioridad (Ardizzone et al,1989; Socias,1994) aunque no con el detenimiento que presente trabajo requiere. Por ello, parece conveniente hacer aquí una exposición mas detallada por las razones expuestas en el apartado anterior.

La fase de adquisición de datos se realizó desde el 13 de septiembre de 1986 al 14 de junio de 1987, con un período de interrupción que duró desde el 1 de diciembre hasta el 20 de abril debido a las condiciones meteorológicas, durante el cual continuó funcionando de forma continua el magnetómetro base instalado en el Observatorio Nacional de San Pablo de los Montes (Toledo). En la primera etapa se realizaron las tres cuartas partes del levantamiento, mientras que la cuarta parte restante lo fue en la segunda etapa (Fig.II,1).

Las medidas se obtuvieron a una altitud barométrica de 3.000 metros salvo áreas de montaña con mayor cota, en las cuales la altitud se incrementó hasta 500 metros sobre la cumbre. La distribución horizontal de los puntos de medida se extiende sobre una red compuesta por 104 líneas de vuelo en dirección Norte-Sur con espaciado de 10 Km, 22 líneas de control con dirección Este-Oeste con espaciado de 40 Km y 40 líneas perimetrales que cierran gran parte de la red. Tanto las líneas de vuelo como las de control penetran en el mar hasta alcanzar una distancia de 4 Km desde la costa. Además, el 20 de abril de 1987 se voló diez veces un segmento de 50 Km de dirección Este-Oeste (cinco veces en cada sentido) sobre el Observatorio de San Pablo de los Montes para obtener el datum.



Red de levantamiento. (El área rayada fue volada en 1987.)

Fig. II,1

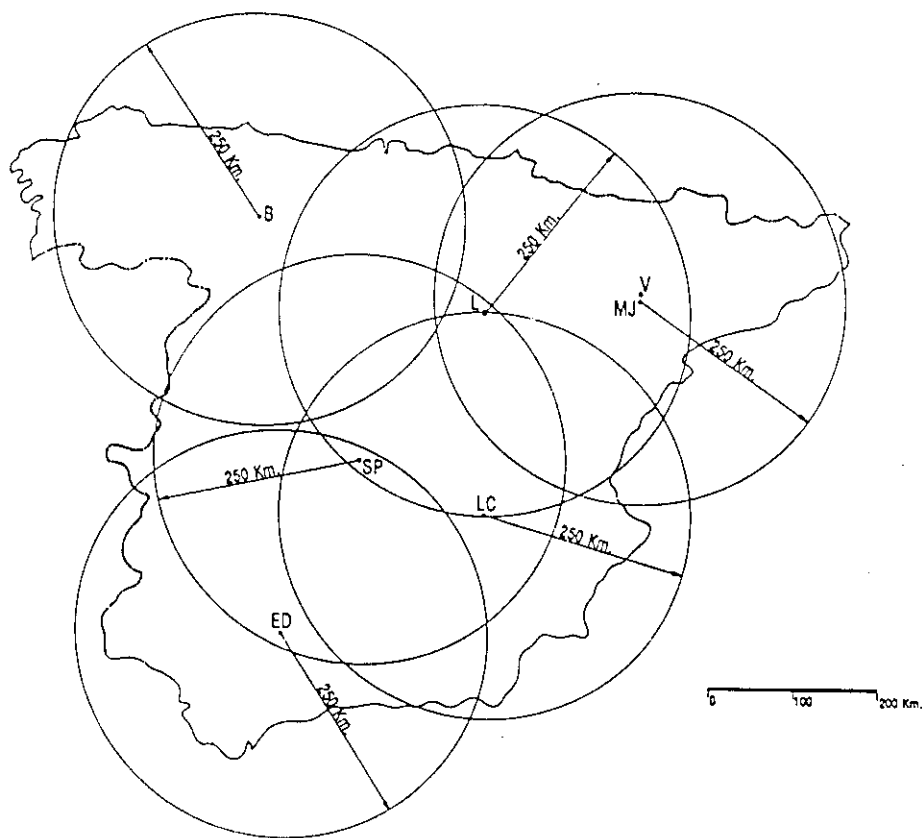


Fig. II,2

En tierra se instalaron magnetómetros automáticos para registrar las variaciones diurna y secular del campo magnético y descontarlas posteriormente de las medidas efectuadas por el magnetómetro del avión (Fig.II,2). Al mismo tiempo, los registros de las estaciones de tierra permitían detectar variaciones temporales se suspendía el vuelo o se repetía posteriormente el trabajo realizado.

Las estaciones se eligieron en lugares donde el gradiente horizontal del campo magnético no sobrepasaba 10 nT en 10 m. Esta condición hubo de rebajarse en algún caso ante la imposibilidad de encontrar un emplazamiento que además presentara bajo nivel de ruido. En general, el nivel de ruido es un factor más crítico que el gradiente ya que al sustraerse los datos tomados en tierra de los obtenidos por el magnetómetro del avión, el ruido se introduciría indirectamente contaminando así la señal obtenida en el avión (Lynam, 1986).

Las estaciones de tierra se instalaron en los siguientes lugares:

Tabla II,1

| ESTACIÓN | LATITUD | LONGITUD | PERÍODO DE REGISTRO |
|----------------------|-----------------|------------------|--|
| Benllera | 39° 46' 20" (N) | 5° 45' 31,5" (O) | 29/10/86 - 01/12/86 22/04/87 - 04/05/87 |
| San Pablo (Toledo) | 39° 32' 50" (N) | 4° 20' 55" (O) | 13/09/86 - 14/06/86 |
| El Donadio (Sevilla) | 37° 25' 50" (N) | 5° 19' 50" (O) | 27/09/86 - 13/11/86 |
| La Cañada (Albacete) | 38° 59' 40" (N) | 2° 41' 15,5" (O) | 10/10/86 - 01/12/86 |
| Lubia (León) | 41° 38' 40" (N) | 2° 31' 46,3" (O) | 22/11/86 - 02/12/86 02/04/87 - 06/06/87 |
| Monte Julia | 41° 45' 00" (N) | 0° 12' 43,5" (O) | 13/05/87 - 07/06/87 |
| Valcarca | 41° 50' 15" (N) | 0° 14' 10,5" (O) | 09/05/87 - 13/05/87 |

El intervalo de muestreo de los registros en tierra fue de un segundo durante el vuelo y de cuatro segundos durante el período de interrupción, mientras que en el caso de los registros obtenidos con el magnetómetro del avión fue de 0,5 segundos (aproximadamente de 1 punto cada 34 m.).

Las tolerancias admitidas fueron las siguientes:

- Altitud: ± 30 m en una distancia superior a 10 Km.
- Espaciado entre líneas de vuelo: ± 500 m en una distancia superior a 10 Km.
- Espaciados entre líneas de control: ± 500 m en una distancia superior a 10 Km.
- Velocidad máxima del avión: 250 Km/h.

Todos estos valores representan los errores máximos de deriva del equipo de navegación.

II.3. LA PLATAFORMA DE TRANSPORTE Y EL EQUIPO DE MEDIDAS.

La plataforma de transporte empleada en la fase de adquisición de datos es un avión ligero Cessna 404 Titan, cuyas principales características son:

| | |
|---------------------|----------------|
| Peso: | 3.81 Tm |
| Autonomía: | 10 horas |
| Radio de acción: | 200 Km |
| Potencia del motor: | 375 HP |
| Velocidad en línea: | (240-290) Km/h |
| Número de plazas: | 5 |

II.3.1. Equipos de medidas del avión.

El equipo de medidas transportado por el avión se compone de los siguientes instrumentos:

- Un magnetómetro de doble resonancia nuclear MRM-360.
- Un radioaltímetro TRT AHV8.
- Un altímetro barométrico ROSEMOUNT 1241-A4C.
- Un sistema de navegación DECCA DOPPLER 72.
- Un girocompás SPERRY C-12.
- Un ordenador TANS 9447G-04.
- Una cámara de video HITACHI VKC 2000.
- Un sistema de adquisición de datos GEOMETRICS G-714
- Un registrador analógico de cuatro canales BRYANS BS314.

II.3.1.1. El magnetómetro del avión

El magnetómetro transportado por el avión, ha sido construido por el Centro de Estudios Nucleares de Grenoble (CENG) y su funcionamiento se basa en el efecto Abragam-Overhauser. Dicho magnetómetro se compone de los siguientes elementos:

- Una consola.

- Dos sensores (uno de ellos de repuesto) cuyo peso y dimensiones son respectivamente: 15 Kg, 155 cm de longitud, 7 cm de diámetro principal y 23 cm de diámetro de cola.
- Un microconvertidor octal - decimal.
- Dos cables (uno de ellos de repuesto) cuyo peso y dimensiones son respectivamente: 5 Kg, 75 m de longitud y 7.5 mm de diámetro.

Las características principales del magnetómetro son las siguientes:

- Rango de medida: 2500 nT - 75000 nT
- Sensibilidad: 0.01 nT
- Envoltura de ruido: inferior a ± 0.2 nT para períodos de 0.5 seg.
- Efecto de direccionalidad del sensor: 0 ? nT pico a pico.
- Deriva térmica: menor de 0-5 nT sobre un rango de 0° a 50°C.
- Salidas: Analógica y digital (razón de muestreo superior a 10 muestras por segundo).

El sensor del magnetómetro va remolcado por el avión mediante el cable que lo une al sistema de medida, cuya longitud se ha mantenido durante todo el levantamiento a 60 m, para alejarlo lo más posible de la influencia magnética del avión. Longitudes mayores favorecerían el arrastre aerodinámico y aumentarían el retardo físico del sistema.

II.3.1.2. El equipo de navegación y posicionamiento

El equipo de navegación y posicionamiento lo constituyen el sistema Doppler, el ordenador TANS, el girocompás SPERRY, los dos altímetros y la cámara de video.

El sistema de navegación Doppler está conectado al ordenador TANS y al girocompás SPERRY tal como indica el diagrama de bloques de la figura II,3 y constituyen los elementos esenciales del sistema primario de navegación. La salida del sistema proporciona las velocidades longitudinal y transversal del avión respecto a la trayectoria fijada inicialmente con ayuda del ordenador TANS. Dichas velocidades son grabadas sobre cinta magnética a intervalos regulares de medio segundo.

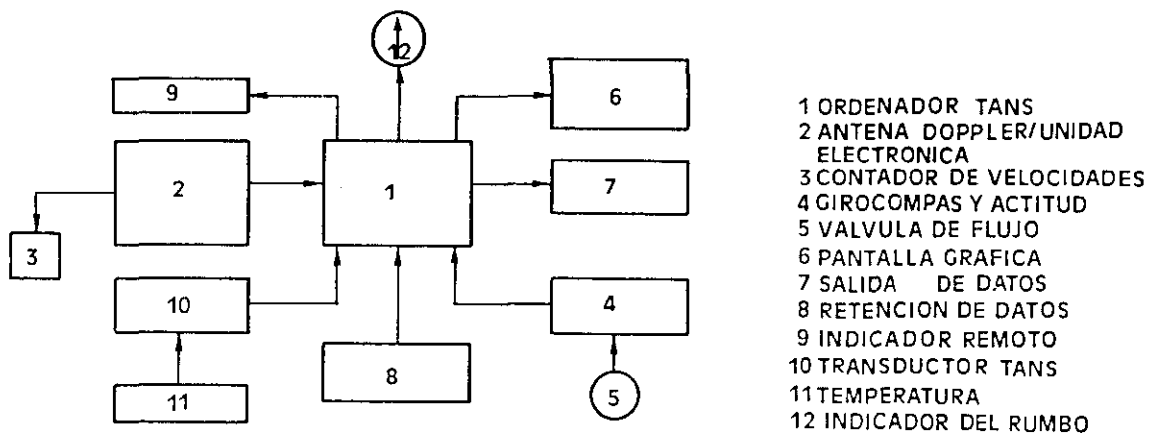


Fig. II,3

Manteniendo la dirección fija usando el girocompás y la desviación transversal a la trayectoria, el piloto puede guiar el avión entre puntos visibles del terreno, señalados previamente por el navegante sobre mapas a escala 1:50000 (con cuadrícula UTM) y comprobados con ayuda de un visor de navegación WILD instalado delante del asiento del copiloto.

La trayectoria del avión, es al mismo tiempo registrada sobre película de vídeo de alta definición, mediante una cámara montada verticalmente y cuyo campo de visión coincide con el del visor WILD. En cada una de las escenas, el sistema de adquisición de datos graba sobre la película un número índice de cinco dígitos (número fiducial) que se corresponde con el tiempo transcurrido en unidades de medio segundo desde el comienzo del registro de los datos. Este número también se graba en la cinta magnética junto con los demás datos y permite correlacionarlos con la imagen del vídeo.

Posteriormente, en tierra, se reconstruye la trayectoria del avión utilizando la película de vídeo y los datos del sistema Doppler. Para ello, de la imagen de vídeo se obtienen puntos fijos de calidad que se transfieren a mapas a escala 1:50000 anotando sus números fiduciales y luego a superponibles transparentes e indeformables. Los puntos intermedios se completan utilizando una salida gráfica de la trayectoria, a escala 1:50000, producida por un ordenador a partir de los datos Doppler. Debido a que dicho sistema de navegación presenta cierta deriva lateral, se buscan referencias visuales buenas que no se hallen separadas más de 20 Km.

Las altitudes barométrica y radiométrica del avión se han medido con el altímetro barométrico y el radioaltímetro respectivamente. En el primer caso, el error relativo se estima en un 2% dentro de un intervalo de 0 a 1524 m, y un 0.25% en el segundo. Ambos altímetros poseen salidas analógica y digital.

II.3.1.3. El registro digital y analógico de los datos

El registro digital se realiza con un sistema de adquisición de datos, el cual controla el muestreo de los instrumentos de medida, formatea los datos y los graba juntos con los números fiduciales en cinta magnética mediante una unidad CIPHER. El sistema también realiza verificaciones de los registros digitales en tiempo real.

El registro analógico se efectúa sobre tiras de papel plegado de 25 cm de ancho, con un registrador analógico de cuatro canales, el cual representa mediante trazo a pluma la siguiente información a distintas escalas y colores:

- Registro del magnetómetro en nT; escala (0-100) nT; color azul.
- Registro del magnetómetro en nT; escala (0-1000); color verde.
- Registro del radioaltímetro en pies; escala (0-10000) pies; color negro.
- Altitud barométrica respecto a 3000 m (± 250 m); color rojo.
- Marcas fiduciales (1 cada 10); color rojo.

II.3.2. Equipo de medida de las estaciones de tierra

Durante la fase de adquisición de datos se utilizó en cada una de las estaciones de tierra, un magnetómetro de bombeo óptico con célula sensora de vapor de rubidio Littelmolve-Hunting H102A/G801. Sus características principales son:

| | |
|------------------------|------------------------|
| Resolución: | 0.01 nT |
| Rango de trabajo: | de 20000 nT a 80000 nT |
| Rango de temperaturas: | de 0° C a 45° C |

Los registros del magnetómetro pueden recogerse en forma analógica y digital. En el primer caso, la salida se presenta sobre tiras de papel plegable de 10 cm de ancho, con tope de escala de 10 nT a 100 nT acompañada de una base de tiempo. En el segundo caso, la salida se graba en cassette de datos tipo PHILIPS capaz de almacenar de forma ininterrumpida el registro obtenido durante un período de 24 horas a razones de uno o cuatro datos por segundo.

Los magnetómetros de bombeo óptico se emplearon por dos motivos:

- a) Detectar el comienzo de perturbaciones magnéticas de período corto (con variación superior a 5 nT en 10 minutos) que pudieran tener lugar durante el vuelo.
- b) Corregir de variaciones diurna y secular (en el caso de la estación de San Pablo de los Montes) los datos obtenidos por el magnetómetro del avión.

En el primer caso, la utilización se reduce a señalar los tramos de vuelo que exceden la tolerancia fijada y que han de ser repetidos posteriormente, mientras que en el segundo caso, el registro de las estaciones de tierra constituye un importante aspecto del procesamiento de datos y está sujeto por ello a cuidadosas consideraciones respecto a la ubicación, (vease II.2). En total, se utilizaron cuatro magnetómetros de vapor de rubidio, los cuales ocuparon un total de siete bases (Fig.II,2).

Además de los magnetómetros de bombeo óptico, se usó también un magnetómetro de protones GEOMETRICS G806 cuyas lecturas pueden realizarse en unidades de 0.25 nT. Este magnetómetro, calibrado frente a un patrón de frecuencias, permitió efectuar revisiones continuas del resto de los magnetómetros y localizar los emplazamientos de las estaciones.

II.4. PRUEBAS Y CALIBRACIÓN DE LOS EQUIPOS

Durante la fase de adquisición de datos se han realizado numerosas pruebas y calibraciones para comprobar el funcionamiento correcto de los equipos, mencionándose éstas a continuación:

- Test de navegación.
- Test de los altímetros.
- Test de retardo.
- Test de direccionalidad.
- Comparación de los magnetómetros.

Algunas de las pruebas anteriores son de uso frecuente en muchos levantamientos aeromagnéticos, tal como ocurre con las cuatro primeras, mientras que las últimas, han sido diseñadas específicamente para este trabajo. Todas las pruebas están dirigidas hacia un objetivo común: la determinación del valor absoluto de campo magnético terrestre sobre el área peninsular del territorio nacional, referido a un datum del campo localizado a 3000 m de altitud respecto al nivel del mar sobre el Observatorio de San Pablo de los Montes, el 1 de Enero de 1987.

II.4.1. Test de navegación

El sistema de navegación se calibra navegando en línea recta entre dos puntos bien definidos y situados a gran distancia; las coordenadas de dichos puntos se introducen manualmente en el ordenador TANS y la navegación se realiza con ayuda exclusiva del sistema Doppler. La reconstrucción posterior de la trayectoria del avión proporciona los errores de posicionamiento. Los resultados demuestran que el error de deriva es de 100 m en una distancia de 27 Km, el cual es inferior al 0.4% de la distancia recorrida y puede considerarse aceptable.

II.4.2. Test de los altímetros

Para comprobar el funcionamiento de los dos altímetros, se analiza la siguiente información en varios puntos de la trayectoria del avión:

- Altitud radiométrica del punto (H_R)
- Desviación respecto a 3000 m de la altitud barométrica (H_B).
- Altitud topográfica de la proyección del punto de medida sobre el terreno (H_T).

Si el resultado del experimento estuviera libre de error, en cada punto la diferencia entre ($H_R + H_T$) y 3000 m debería ser exactamente igual a H_B . Así pues, llamando H_B a la altitud barométrica (Fig.II,4), las diferencias representan errores residuales, los cuales nos dan una idea de la calidad de la navegación a una altitud barométrica fija.

$$\delta = (H_R + H_T - 3000) - \Delta H_B = H_R + H_T - H_B \quad (II, 1)$$

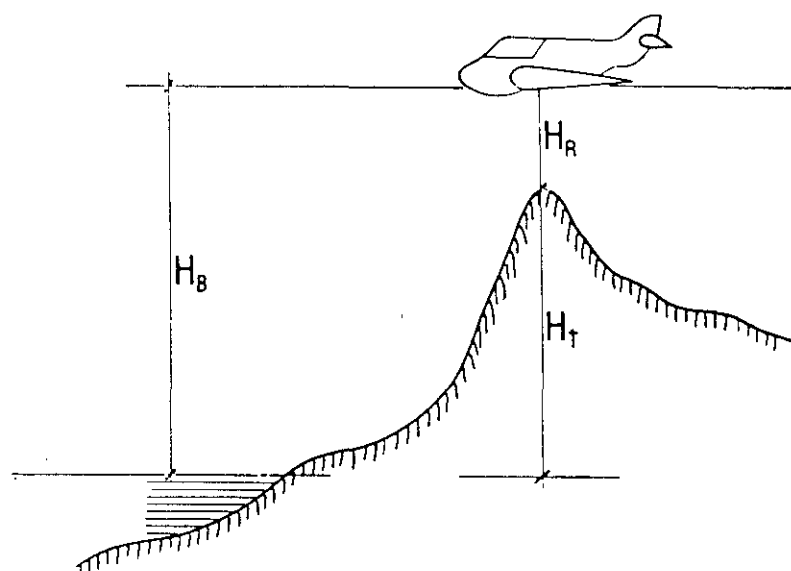


Fig. II,4

La precisión de la determinación de la altitud se ha estimado experimentalmente a partir de las medidas realizadas en un conjunto de puntos del primer tramo de la línea de vuelo 41. La información utilizada de los mismos comprende:

- La altitud radiométrica (H_R).
- La desviación respecto a 3000 m de la altitud barométrica (ΔH_B).
- La altitud topográfica (H_T).

Las dos primeras altitudes, se obtienen de los valores registrados en la cinta magnética, mientras que la última se extrae de mapas topográficos a escala 1:50000.

Admitiendo la raíz cuadrática media de las desviaciones como un estimador de la precisión de las medidas, el valor obtenido de la misma es de 16.4 m, el cual se halla dentro de la tolerancia fijada y da lugar por otro lado a una variación despreciable de la intensidad del campo magnético a la altitud de vuelo.

II.4.3. Test de retardo

El retardo del sistema de adquisición de datos, es el intervalo de tiempo que existe entre el registro de un punto del terreno por la cámara y el registro en cinta magnética del valor de la intensidad de campo que le corresponde.

Generalmente, se considera que el retardo posee dos componentes denominadas retardo físico y retardo electrónico. La primera surge como resultado directo de la separación horizontal entre la cámara y el sensor del magnetómetro. En la presente configuración, con una longitud de cable de 60 m y una velocidad de vuelo de 250 Km/h, el valor máximo de este retardo sería de 0.75 segundos. La segunda componente, surge como resultado del procesamiento y registro de la señal digital. Este valor oscila frecuentemente entre 1.5 y 2.5 segundos para el magnetómetro del avión.

El retardo se determina volando a baja altitud sobre un punto fácilmente identificable sobre el terreno, que produzca una anomalía intensa (un puente metálico, una línea férrea, un oleoducto o un gaseoducto, etc.). El número fiducial correspondiente al pico de la anomalía (t_M) se compara con el de la imagen de video (t'_M) y la diferencia entre ambos nos da el retardo (en fiduciales) (Fig.II,5).

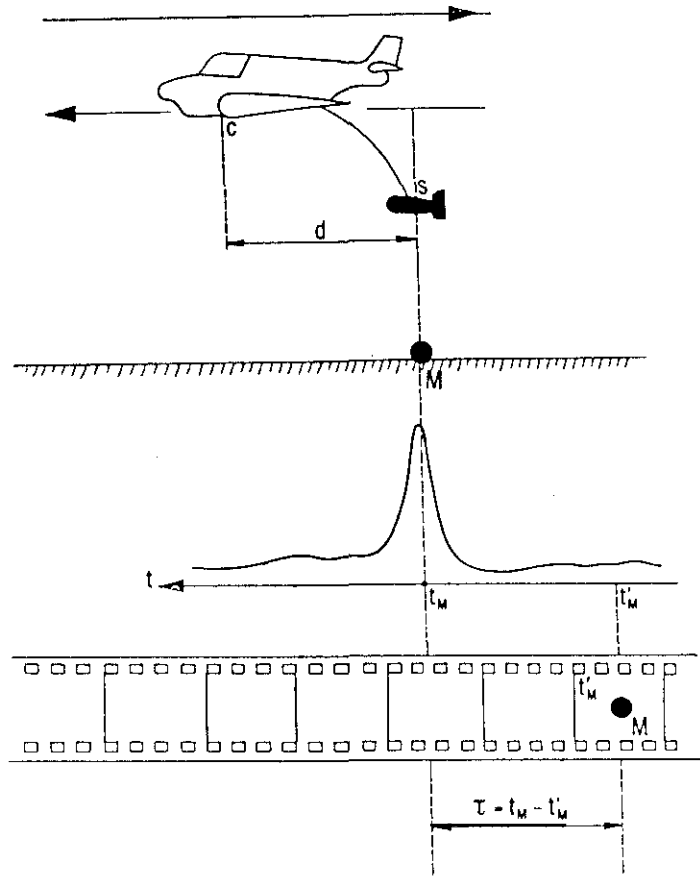


Fig. II,5

En nuestro caso, la razón del muestreo es de 0.5 segundos, por lo que es necesario dividir por dos el número resultante en fiduciales, para obtener el valor del retardo en segundos. El experimento se realiza volando en sentidos opuestos de una misma dirección y los resultados se promedian.

Durante la fase de adquisición de datos el test de retardo se realizó en tres ocasiones. En la primera se eligió como fuente de la anomalía una línea de ferrocarril y en las dos restantes, una tubería metálica. Los resultados obtenidos son los siguientes:

1º Experimento (13/IX/1986):

| AZIMUT | FID.(VIDEO) | FID.(MAGNET.) | DIF. | τ (seg.) |
|--------|-------------|---------------|------|---------------|
| 5° | 25076.75 | 25084 | 7.75 | 3.9 |
| 186° | 25510.75 | 25516 | 5.25 | 2.6 |

2º Experimento (3/XI/1986):

| AZIMUT | FID.(VIDEO) | FID.(MAGNET.) | DIF. | τ (seg.) |
|--------|-------------|---------------|------|---------------|
| 0° | 738 | 741 | 3.0 | 1.5 |
| 190° | 969 | 976.5 | 7.5 | 3.8 |

3º Experimento (18/IV/1987):

| AZIMUT | FID.(VIDEO) | FID.(MAGNET.) | DIF. | τ (seg.) |
|--------|-------------|---------------|------|---------------|
| 30° | 10307.75 | 10312 | 4.25 | 2.15 |
| 210° | 10559.25 | 10564 | 4.75 | 2.4 |
| 210° | | | 4.7 | 2.35 |

(Los fiduciales del video se estiman a intervalos de 1/4 de fiducial (1/8 seg), contando los fotogramas individuales en pantalla).

Las fuentes más importantes del error experimental son las siguientes:

- Si la anomalía no es extremadamente aguda, puede ser difícil determinar exactamente el punto usado.
- La posición del pico de la anomalía únicamente puede determinarse respecto al fiducial más próximo (0.5 seg).
- Los movimientos de cabeceo del avión producirán un error en la determinación del fiducial, correspondiente a la imagen del punto.
- Las variaciones de la velocidad del avión pueden causar cambios en el retardo físico.

El promedio de las diferencias halladas en los experimentos anteriores es de 5.3 fiduciales (aproximadamente 2.5 segundos) y proporciona una estimación de la corrección que debe aplicarse a los datos del avión, antes de realizarse el procesamiento de los mismos. Los errores residuales son tratados adecuadamente durante el paso de nivelación, el cual se describe en el apartado II.6.2.7.

II.4.4. Test de direccionalidad

En términos generales, el error de direccionalidad surge como resultado de las posiciones relativas del sensor del magnetómetro y del avión en condiciones normales de vuelo. Concretamente, el avión posee determinados componentes ferromagnéticos que se imanar por inducción del campo magnético terrestre; el campo inducido, produce una señal en el sensor del magnetómetro cuya magnitud depende de la posición relativa del sensor respecto del avión, de la intensidad de la imanación inducida y de la dirección del vuelo respecto a la del campo magnético terrestre, la cual cambia al invertirse el sentido de avance del avión. En los peores casos, se produce un desfase del nivel cero del campo entre líneas adyacentes apareciendo una distorsión de las líneas de nivel a lo largo de las líneas de vuelo, como la que se aprecia en las líneas (e,i) de la figura II,6.

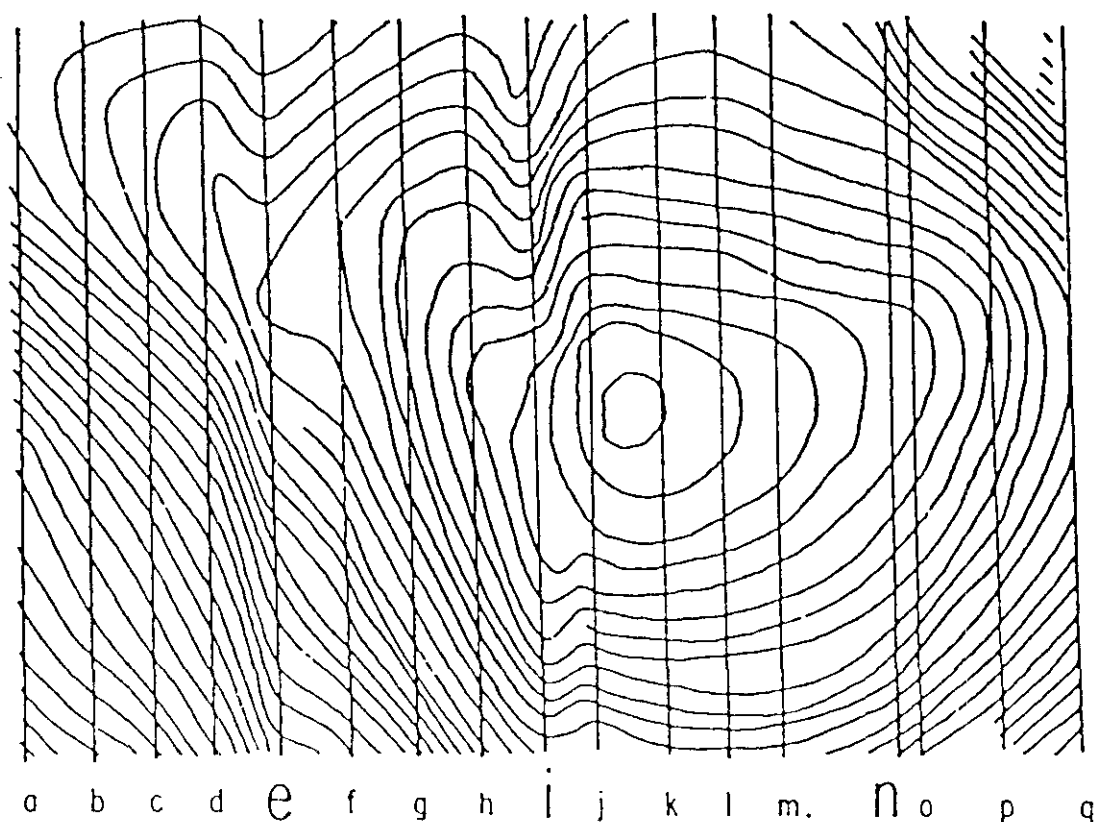


Fig. II,6

Este tipo de distorsión se acusa bastante cuando el intervalo entre líneas de nivel es pequeño (de 0.5 nT a 2 nT), tal como ocurre en los llamados levantamientos de alta sensibilidad.

El efecto de direccionalidad es particularmente importante cuando el sensor del magnetómetro va instalado al final de un mástil unido rígidamente a la estructura del avión. En dichos casos, si no se toman precauciones (sistemas de compensación electromagnética), el efecto puede exceder un valor comprendido entre 5 nT y 15 nT y el tratamiento de los datos es insuficiente para eliminarlo.

En nuestro caso, el sensor del magnetómetro es arrastrado mediante un cable de 60 metros de longitud, por lo que el efecto se reduce sustancialmente manteniéndose en muchos casos dentro del margen del error experimental.

El experimento desarrollado para la evaluación de este efecto, consiste en realizar varias pasadas a altitud constante sobre un punto fácilmente identificable del terreno, en las ocho direcciones de la brújula (Fig.II,7). A los valores medidos por el magnetómetro del avión en el punto de intersección se le resta la variación diurna registrada en una estación situada en las proximidades de su proyección sobre tierra. En ausencia de errores de posicionamiento, el residuo obtenido proporciona el efecto de direccionalidad.

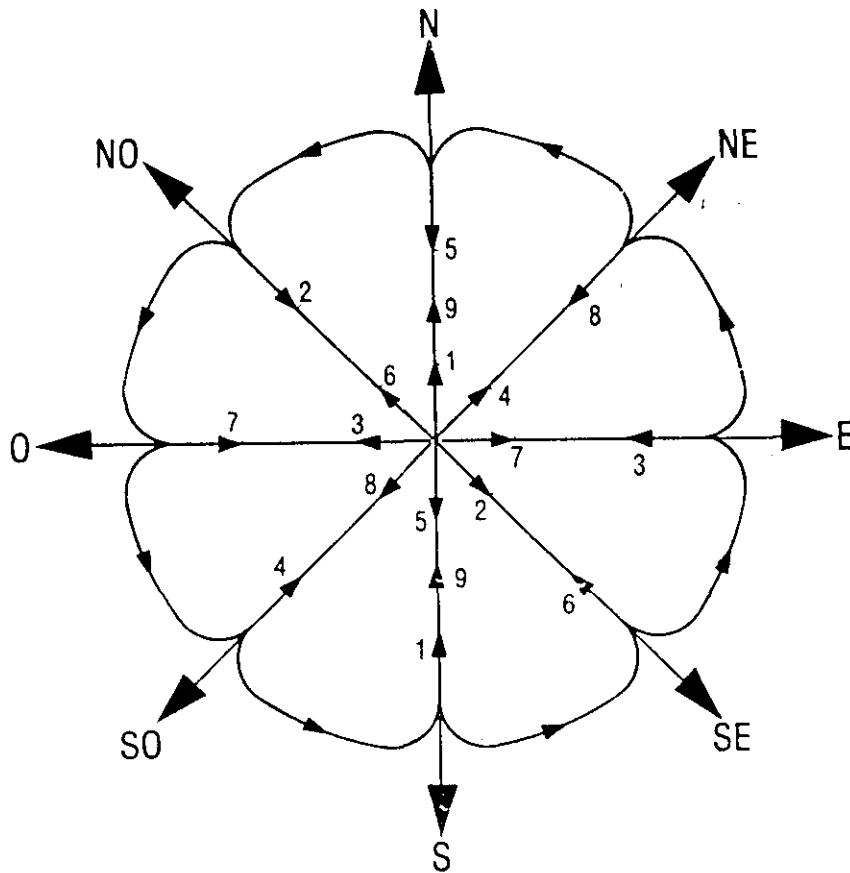


Fig. II,7

Las condiciones en las que ha de realizarse el experimento son bastante restrictivas, pues exigen que:

- El punto sea perfectamente visible.
- La altitud sea constante.
- El terreno sea suave.
- Las anomalías magnéticas sean de gradiente nulo.
- El experimento se realice durante períodos de calma de la variación diurna.

Encontrar un lugar que reúna estrictamente todos los requisitos suele ser difícil, por lo que en muchas ocasiones hay que limitarse al cumplimiento de los mismos en la mejor medida posible.

Durante la fase de adquisición de datos el test de direccionalidad se realizó en cuatro ocasiones, obteniéndose los siguientes resultados en los correspondientes experimentos tras corregirse el efecto del retardo:

1º Experimento (13/IX/1986)

| DIRECCION | $B_A (nT)$ | $\Delta B_A (nT)$ | $\Delta B_T (nT)$ | $\delta (nT)$ |
|-----------|------------|-------------------|-------------------|---------------|
| N (1) | 43906.77 | 0 | 0 | 0 |
| SE | 43907.40 | 0.63 | 0.6 | 0.03 |
| O | 43907.66 | 0.89 | 0.9 | -0.001 |
| NE | 43908.43 | 1.66 | 1.6 | 0.06 |
| S | 43909.20 | 2.43 | 1.9 | 0.53 |
| NO | 43908.79 | 2.02 | 1.4 | 0.62 |
| E | 43908.74 | 1.97 | 1.7 | 0.27 |
| SO | 43909.24 | 2.47 | 2.0 | 0.47 |
| N (2) | 43909.19 | 2.42 | 2.0 | 0.42 |

2º Experimento (30/XI/1986)

| DIRECCION | $B_A (nT)$ | $\Delta B_A (nT)$ | $\Delta B_T (nT)$ | $\delta (nT)$ |
|-----------|------------|-------------------|-------------------|---------------|
| N (1) | 44212.37 | 0 | 0 | 0 |
| SO | 44210.71 | -1.66 | 0 | -1.66 |
| NE | 44212.48 | 0.11 | -0.2 | 0.31 |
| O | 44210.35 | -2.13 | -0.3 | -1.83 |
| S (1) | 44209.58 | -2.79 | -0.8 | -1.99 |
| E | 44213.21 | 0.84 | -0.9 | 1.74 |
| SE | 44211.71 | -0.66 | -1.3 | 0.64 |
| NE | 44212.23 | -0.14 | -1.3 | 1.16 |
| N (2) | 44212.98 | 0.61 | -1.6 | 2.21 |
| S (2) | 44219.31 | -3.06 | -1.6 | -1.46 |

3º Experimento (3/VI/1987)

| DIRECCION | $B_A (nT)$ | $\Delta B_A (nT)$ | $\Delta B_T (nT)$ | $\delta (nT)$ |
|-----------|------------|-------------------|-------------------|---------------|
| N (1) | 43785.49 | 0 | 0 | 0 |
| SE | 43789.27 | 3.78 | 2.4 | 1.38 |
| NO | 43788.66 | 3.17 | 2.6 | 0.57 |
| E | 43788.42 | 2.93 | 2.0 | 0.93 |
| O (1) | 43786.50 | 1.01 | 0.6 | 0.41 |
| NE | 43786.44 | 0.95 | 1.4 | -0.45 |
| SO | 43788.07 | 2.58 | 1.4 | 1.18 |
| N (2) | 43786.73 | 1.24 | 1.2 | 0.04 |
| S | 43789.58 | 4.09 | 1.7 | 2.39 |
| O (2) | 43787.69 | 2.2 | 2.1 | 0.1 |

4º Experimento (3/VI/1987)

| DIRECCION | B_A (nT) | ΔB_A (nT) | ΔB_T (nT) | δ (nT) |
|-----------|------------|-------------------|-------------------|---------------|
| N (1) | 43807.1 | 0 | 0 | 0 |
| SE | 43806.9 | -0.2 | 0.6 | -0.8 |
| O | 43806.6 | -0.5 | -0.8 | 0.3 |
| NE | 43806.1 | -1.0 | 0.3 | -1.3 |
| S | 43805.8 | -1.3 | -1.0 | -0.3 |
| NO | 43805.4 | -1.7 | -3.0 | 1.3 |
| E | 43805.2 | -1.9 | -1.5 | -0.4 |
| SO | 43805.3 | -1.8 | -1.1 | -0.7 |
| N (2) | 43805.0 | -2.1 | -1.5 | -0.6 |

donde B_A y B_T son los valores de la intensidad del campo magnético registrados por los magnetómetros del avión y de tierra respectivamente, ΔB_A y ΔB_T son las variaciones de ambas magnitudes respecto a su valor inicial y δ es el valor del residuo, es decir la diferencia entre B_A y B_T .

Un experimento más se realizó el día 5 de Mayo de 1987. En este caso se trabajó con dos longitudes distintas del cable de remolque (70 m y 50 m) obteniéndose los siguientes resultados:

| DIRECCIÓN | B_A (nT) | B_A (nT) | B_T (nT) | δ (nT) | L (m) |
|-----------|------------|------------|------------|---------------|---------|
| N | 43787.06 | 0 | 0 | 0 | 70 |
| S | 43789.13 | 2.07 | -0.1 | 2.17 | 70 |
| N (1) | 43786.12 | -0.94 | -0.8 | -0.14 | 50 |
| S | 43787.71 | 0.65 | -1.3 | 1.95 | 50 |
| N (2) | 43784.27 | -2.79 | -2.7 | -0.09 | 50 |

Los resultados obtenidos en los cuatro últimos experimentos son peores que los obtenidos en el primero de ellos. Es preciso señalar sin embargo, que los residuos con mayor valor absoluto se deben a una combinación de errores de navegación visual (generalmente producidos por la niebla) y del gradiente horizontal del campo magnético, los cuales constituyen dos fuentes importantes de error.

Los resultados obtenidos en los experimentos demuestran que éstos son más una medida de error experimental que el propio efecto de direccionalidad, el cual debería ser insignificante de acuerdo con la posición del magnetómetro respecto del avión.

II.4.5. Comparación de los magnetómetros

La comparación entre los distintos magnetómetros empleados en la adquisición de datos, tiene como objetivo asegurar el correcto funcionamiento de cada uno de ellos durante la fase de operaciones.

Las comparaciones realizadas entre los magnetómetros se relacionan a continuación:

- Comparación de los magnetómetros de las estaciones de tierra.
- Comparación del magnetómetro base con el del avión.
- Comparación del magnetómetro base con el magnetómetro de control (G806).
- Otras comparaciones.

II.4.5.1. Comparación de los magnetómetros de las estaciones de tierra.

El propósito de estas operaciones es establecer la relación entre los cuatro magnetómetros de vapor de rubidio (más concretamente, entre el magnetómetro base y los tres restantes) en términos de respuesta dinámica y deriva relativa de los mismos.

Los experimentos se realizaron en el Observatorio de San Pablo de los Montes, durante los siguientes períodos:

- Del 12 al 15 de Agosto de 1986.
- Del 8 al 13 de Diciembre de 1986.
- Del 14 al 19 de Marzo de 1987.
- Del 9 al 14 de Junio de 1987.

En los experimentos realizados se determina la desviación típica residual, el coeficiente de regresión y el coeficiente de correlación entre los registros del magnetómetro base y cada uno de los tres restantes una vez descontados de los mismos los períodos mayores de la variación diurna, tal como se explicará en el apartado de proceso de datos. En ausencia de errores experimentales, los coeficientes de correlación deberían ser iguales a la unidad y la desviación típica residual cero, ya que la variación temporal registrada por todos ellos es prácticamente la misma por razón de la proximidad de su ubicación.

Los valores medios de cada uno de los coeficientes estadísticos obtenidos durante los períodos antes mencionados son:

Tabla II,2

| SISTEMA | r | b | S_R |
|------------------------|-------|-------|-------|
| Mag.base frente Mag. 1 | 0.990 | 1.01 | 0.083 |
| Mag.base frente Mag. 3 | 0.965 | 1.002 | 0.239 |
| Mag.base frente Mag. 4 | 0.992 | 0.980 | 0.072 |

siendo r el coeficiente de correlación, b el coeficiente de regresión y S_R la desviación típica de los residuos.

Estos resultados constituyen una medida de la respuesta dinámica relativa de los distintos sistemas respecto al magnetómetro base quedando excluidas las variaciones de largo período, las cuales incluirán la deriva relativa entre los distintos magnetómetros.

Dos estudios estadísticos adicionales, el primero realizado con las diferencias de los valores medios diarios del magnetómetro base respecto a cada uno de los restantes y el segundo con los valores diarios de la desviación típica del perfil diferencia, demuestran que dicha deriva es muy pequeña y que se halla dentro del intervalo del error experimental.

II.4.5.2. Comparación del magnetómetro base con el magnetómetro del avión

En este caso el propósito es el mismo que el del apartado anterior con la diferencia de que al tratarse del magnetómetro del avión y al haberse utilizado durante el levantamiento dos sensores diferentes (RW143 y KT004, el primero entre un 85% y un 90% del levantamiento y el segundo el resto), es necesario emplear ambos en las pruebas.

Las comparaciones se realizaron durante los siguientes períodos:

| | | |
|--|-------|---------------------------------------|
| Sensor RW143 frente al Magnetómetro base | ----- | Del 4 al 6 de Diciembre de 1986. |
| Sensor KT004 frente al Magnetómetro base | ----- | Del 6 al 8 de Diciembre. |
| Sensores RW143 y KT004 frente al Magnetómetro base, simultáneamente. | ----- | Del 28 de Mayo al 1 de Junio de 1987. |

El procedimiento aplicado para determinar la respuesta dinámica y la deriva relativa de los instrumentos es el mismo que el aplicado en el caso de comparación de los magnetómetros de tierra, obteniéndose los siguientes resultados que indican diferencias muy pequeñas entre ambos:

Tabla II,3

| SENSOR | r | b | S_R |
|--------|--------|--------|-------|
| RW143 | 0.9967 | 0.9854 | 0.066 |
| KT004 | 0.9953 | 0.9873 | 0.076 |

No obstante, un detallado estudio del perfil de diferencias de los registros obtenidos con los sensores RW143 y KT004 respecto al magnetómetro base, indica una deriva cíclica con un período de 86400 segundos (24 horas) y una amplitud pico a pico que en el caso del primer sensor es de 4.3 nT y de 5.3 nT en el segundo y que se manifiesta únicamente durante el período de 28 de Mayo al 6 de Junio de 1987.

Dicha deriva podría pensarse que fuera debida a la influencia de la variación diurna de la temperatura sobre el magnetómetro base, sin embargo ésta no se manifiesta durante las comparaciones de los tres restantes magnetómetros de vapor de rubidio con el magnetómetro base, ni en las continuas comparaciones de éste último con el magnetómetro de protones G806. Tanto si la deriva cíclica afecta el sensor del magnetómetro base como a los del avión, deberían preocuparnos más sus efectos. Si la deriva está producida por el sensor del magnetómetro base los efectos en la sustracción de la variación diurna quedarían eliminados, ya que la determinación de esta última se realiza sustrayendo las variaciones de largo período entre las que se halla la deriva cíclica. Por otra parte, cualquier componente residual de ésta sería definitivamente eliminada durante el proceso de nivelación, el cual se explica en II.6.2.7.

Si la deriva la producen los sensores del avión y fuera de origen térmico, tal como en principio se pensó, es poco probable que los afectara durante el vuelo puesto que las variaciones de temperatura son menores que en tierra. Además, en el caso de que alguna componente de la misma permaneciera remanente, también se eliminaría durante la etapa de nivelación.

Así pues, cualquiera que sea el tipo de sensor que cause la deriva, ésta se elimina o se reduce a un nivel aceptable mediante los métodos desarrollados para el procesamiento de datos.

II.4.5.3. Comparación del magnetómetro base con el magnetómetro del control G806

Durante la fase de adquisición de datos se realizaron repetidas comparaciones entre el magnetómetro base y el magnetómetro de protones G806. En la Tabla adjunta se indican las fechas y los resultados de los experimentos.

Durante la realización de las pruebas, se tomó la precaución de situar siempre ambos magnetómetros en la misma posición relativa.

Es necesario destacar un detalle importante relativo a los datos anteriores. El día 13 de Diciembre de 1986 se produjo un desplazamiento de 9.44 nT en el registro del magnetómetro base al aislar su sensor de las inclemencias del invierno y al cambiar la razón de muestreo a un dato cada cuatro segundos.

Este salto ha sido eliminado durante el procesamiento y también ha sido compensado en los valores presentados en la Tabla anteriormente mencionada.

Un análisis estadístico sencillo realizado con dichos datos, proporciona un valor medio de las diferencias $\bar{d} = 11.74$ nT y una desviación típica $S = 0.54$ nT.

Dicho análisis se puede completar con la determinación del intervalo de confianza del valor medio.

En efecto, aplicando el contraste de bondad de ajuste de Kolmogorov para un nivel de significación del 5% (ver Capítulo III), se puede admitir que el conjunto anterior de datos pertenece a una población normal de media $\mu = 11.74$ nT y una desviación típica $S = 0.54$ nT.

Tabla II,4

| FECHA | G806-MAG.BASE (nT) |
|-------------------------|--------------------|
| 10 de Noviembre de 1986 | 15.2 (*) |
| 06 de Diciembre de 1986 | 12.4 |
| 08 de Diciembre de 1986 | 12.1 |
| 09 de Diciembre de 1986 | 11.7 |
| 10 de Diciembre de 1986 | 11.8 |
| 11 de Diciembre de 1986 | 11.2 |
| 12 de Diciembre de 1986 | 11.5 |
| 13 de Diciembre de 1986 | 11.6 |
| 15 de Abril de 1987 | 13.2 |
| 15 de Abril de 1987 | 12.5 |
| 15 de Abril de 1987 | 12.1 |
| 17 de Abril de 1987 | 12.4 |
| 18 de Abril de 1987 | 11.2 |
| 19 de Abril de 1987 | 11.3 |
| 20 de Abril de 1987 | 12.1 |
| 01 de Mayo de 1987 | 11.0 |
| 01 de Mayo de 1987 | 11.5 |
| 01 de Mayo de 1987 | 11.2 |
| 01 de Mayo de 1987 | 11.3 |
| 01 de Mayo de 1987 | 11.5 |
| 22 de Mayo de 1987 | 9.2 (*) |
| 01 de Junio de 1987 | 11.0 |
| 01 de Junio de 1987 | 11.4 |
| 11 de junio de 1987 | 11.8 |
| 13 de junio de 1987 | 10.21 (*) |

(Los valores señalados con (*) se consideran anómalos y han sido rechazados).

Por otra parte, el contraste de aleatoriedad de rachas (ver Capítulo III), (También para un nivel de significación del 5%) permite admitir la serie anterior como aleatoria (lo cual nos confirma por otra parte la ausencia de derivas del magnetómetro base).

Como conclusión, el coeficiente estadístico

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S / \sqrt{n-1}} \quad (11,2)$$

posee una distribución de probabilidad t de Student de $n-1$ grados de libertad, siendo respectivamente \bar{d} y S la media y desviación típica de los valores experimentales de las diferencias, y μ_d la media poblacional de las mismas.

En nuestro caso particular $n-1=23$; fijando un nivel de confianza del 95%, el intervalo que centrado en el origen contiene valores de t con un 95% de probabilidad es

$$-2.069 \leq t \leq 2.069$$

De acuerdo con (11,2), el error experimental quedará acotado así:

$$\frac{-2.069S}{\sqrt{23}} \leq \bar{d} - \mu_d \leq \frac{2.069S}{\sqrt{23}}$$

y por lo tanto

$$\bar{d} - 0.23 \leq \mu_d \leq \bar{d} + 0.23$$

Así pues podemos afirmar con el 95% de confianza, que μ_d se halla en el intervalo (11.51, 11.97).

De todo lo anterior se concluye que la diferencia entre el magnetómetro base y el magnetómetro de control se mantiene prácticamente constante e igual a 11.74 nT, fluctuando dentro de un margen aceptable para los fines de la adquisición de los datos.

II.4.5.4. Otras comparaciones

Además de las comparaciones explicadas en los apartados anteriores se han realizado las siguientes:

- Comparación entre los sensores del magnetómetro del avión.
- Comparación entre el magnetómetro base y el del avión.
- Comparación entre el magnetómetro del avión y el magnetómetro de protones de control (G806).
- Comparación entre el magnetómetro del avión y el magnetómetro de protones del observatorio (G826).

- Comparación entre el magnetómetro G806 y el magnetómetro G826.

Todas ellas se realizaron en el Observatorio de San Pablo de los Montes, las dos primeras se realizaron fuera de la sala de medidas absolutas y las restantes dentro de ella.

Como anteriormente se indica, durante la fase de adquisición de datos se utilizaron dos sensores para el magnetómetro aerotransportado, el primero de los cuales (RW143) se empleó aproximadamente entre el 85% y el 90% y el segundo (KT004) el resto.

El objeto de la primera de las comparaciones antes señaladas, es determinar si existe una diferencia entre el nivel cero de ambos y evaluarla. El experimento realizado se compone de una serie de lecturas realizadas con ambos sensores situados uno a cada lado del sensor del magnetómetro base a 4 m de distancia de él, y otra serie de lecturas con los sensores intercambiados de posición y alineados con aquél. El procedimiento proporciona además la diferencia de la intensidad del campo entre las posiciones de ambos sensores.

En efecto, sea B_{004} y B_{143} los valores del campo magnético registrados respectivamente por los sensores KT004 y RW143, cuando el primero se halla al Oeste del sensor del magnetómetro base y el segundo al Este de él. Sean además B'_{004} y B'_{143} los valores de la intensidad del campo magnético medidos cuando las posiciones de cada uno de ellos han sido intercambiados.

Si existe una diferencia del nivel cero entre ambos (d) y una variación (ΔB) entre sus posiciones tendremos:

$$\begin{aligned} B_{143} &= B_{004} + d + \Delta B \\ B'_{004} &= B'_{143} - d + \Delta B \end{aligned} \quad (II,3)$$

de donde

$$\begin{aligned} \delta &= d + \Delta B = B_{143} - B_{004} \\ \delta &= -d + \Delta B = B'_{004} - B'_{143} \end{aligned} \quad (II,4)$$

Restando ambas ecuaciones

$$d = \frac{\delta - \delta'}{2} \quad (II,5)$$

y sumando ambas ecuaciones

$$\Delta B = \frac{\delta + \delta'}{2} \quad (II,6)$$

El análisis estadístico del conjunto de observaciones realizadas en el experimento proporciona los siguientes resultados:

Sensor RW143 al Este - Sensor KT004 al Oeste

Tabla II,5

| SENSOR | MEDIA (<i>nT</i>) | DESVIACIÓN TÍPICA (<i>nT</i>) |
|------------|---------------------|---------------------------------|
| RW143 | 43819.9 | 1.120 |
| KT004 | 43811.6 | 1.102 |
| DIFERENCIA | 8.3 | |

Sensor RW143 al Oeste - Sensor KT004 al Este

Tabla II,6

| SENSOR | MEDIA (<i>nT</i>) | DESVIACIÓN TÍPICA (<i>nT</i>) |
|------------|---------------------|---------------------------------|
| RW143 | 43819.3 | 0.598 |
| KT004 | 43827.1 | 0.690 |
| DIFERENCIA | -7.8 | |

por lo que según (II,5) y (II,6) la estimación de d y ΔB será

$$d = 0.25 \text{ nT}$$

$$\Delta B = 8.05 \text{ nT}$$

con lo que podemos concluir que dentro del límite de error experimental (aproximadamente 0.5 nT) no existen diferencias apreciables entre los dos sensores del avión.

La comparación entre el magnetómetro del avión (sensor RW143) y el magnetómetro base se realizó, como en el caso anterior, fuera de la sala de medidas absolutas y tiene como objeto calibrar el magnetómetro base frente al magnetómetro del avión. El experimento comprende el registro de la intensidad del campo magnético con los sensores de ambos magnetómetros situados a 20 cm de distancia entre sí, durante un período de 30 minutos. El análisis estadístico de las diferencias ($B_{base} - B_{avión}$) da los siguientes resultados:

Valor Medio: 14.6 nT

Desviación Típica: 0.072 nT

Así pues, podríamos estimar con un grado de confianza superior al 75% que la Media Poblacional de las diferencias entre ambos magnetómetros se halla en el intervalo

$$14.6 \text{ nT} \pm 0.14 \text{ nT}$$

El resto de los experimentos incluyen la comparación entre el magnetómetro del avión (sensor RW143) y el magnetómetro de control (G806), entre el

magnetómetro del avión y el magnetómetro de protones del observatorio (G826) y entre el magnetómetro G806 y el G826.

Todos los experimentos se realizaron en el interior de la sala de medidas absolutas del observatorio durante un período suave de la variación diurna, permitiendo establecer la relación entre los distintos magnetómetros. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla II,7

| SENSOR | VALOR MEDIO (<i>nT</i>) |
|--------|---------------------------|
| G806 | 43808.5 |
| RW143 | 43810.9 |
| G826 | 43812.5 |
| RW143 | 43812.4 |
| G826 | 43813.0 |
| G806 | 43811.3 |

II.5. HARDWARE Y SOFTWARE EMPLEADO EN EL PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

Para procesar los datos adquiridos durante la fase del levantamiento aeromagnético, se ha empleado el siguiente hardware:

- Un ordenador Perkin Elmer 3260 con 8 Mb de memoria principal y un disco formateado de 768 Mb de capacidad.
- Dos unidades de cinta magnética.
- Tres plotters de tambor.
- Una mesa de digitalización Calcomp 9000 (precisión 2.5/1000 cm).
- Un plotter electrostático Versatec de 105 cm y resolución de 200 puntos por pulgada.
- Un ordenador Hewlett Packard HP1000, conectado al plotter electrostático.

El Software, ha sido diseñado y creado por la compañía australiana Exploration and Computer Services y se compone de tres paquetes de programas:

- AGP (Airborne Geophysical Processing)
- GCP (General Purpose Conturing and Gridding).
- MUP (Miscellaneous Utility Programs).

El primero de ellos se dedica al tratamiento de gran variedad de datos geofísicos, mientras que el segundo se emplea para la realización de cartografía de los mismos. El último paquete de programas contiene utilidades para la gestión de ficheros.

Debido a los objetivos finales, se han creado además un conjunto de programas en lenguaje FORTRAN específicos para el presente trabajo.

II.6. PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

El procesamiento de los datos adquiridos en el presente levantamiento, tiene como objetivo principal la determinación del valor absoluto del campo magnético terrestre a 3000 mts de altitud respecto al nivel del mar. La figura II,8 muestra un esquema de dicho procesamiento, el cual se compone de las siguientes etapas fundamentales:

- Carga y revisión de los datos.
- Tratamiento de los datos.
- Cartografía y almacenamiento de los datos procesados.

En la primera etapa se introduce en una base de datos la información procedente de las estaciones de tierra y del avión una vez que ha sido analizada de errores.

La etapa de tratamiento comprende un conjunto de pasos destinados a la eliminación de errores sistemáticos. Algunos de dichos pasos implican la aplicación de aproximaciones de distinto orden. Los errores residuales resultantes, así como los errores de las medidas, se reflejan en las diferencias que surgen en las intersecciones entre las líneas de vuelo y las líneas de control. Dichas diferencias, se reducen con el paso de nivelación hasta lograr que su raíz cuadrática media sea mínima.

Los valores nivelados quedan referidos a un datum o nivel cero desconocido, el cual se determina con datos obtenidos en un segmento de línea de control volado sobre el Observatorio Nacional de San Pablo de los Montes el día 20 de Abril de 1987.

Una vez fijado el datum en dicha fecha se efectúa una traslación al 1 de Enero de 1987 empleando los registros obtenidos en la estación situada en dicho observatorio.

Por último, se obtienen los residuos mediante sustracción del modelo IGRF85 trasladado a la época de referencia anterior.

En la última etapa, los datos procesados se interpolan regularmente sobre una red cuyo paso es de 2.5 Km, tras lo cual se dibujan mapas de curvas de nivel de la intensidad del campo magnético y del campo residual.

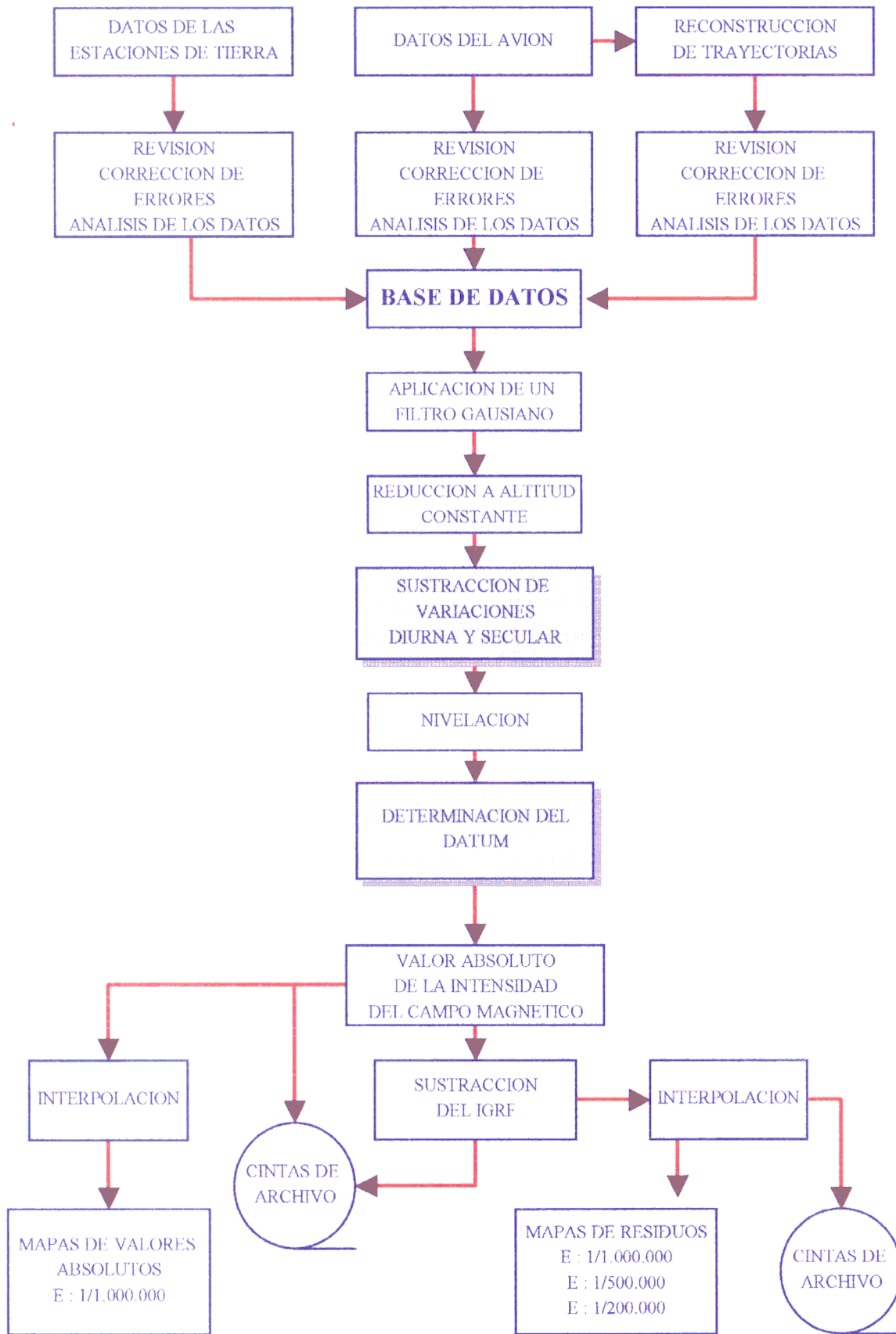


Fig. II, 8

Finalmente, los datos procesados se estructuran debidamente en ficheros que son almacenados en cinta magnética de ordenador.

II.6.1. Carga y revisión de los datos

Los datos se clasifican en tres grupos:

- datos de la trayectoria del avión
- datos del magnetómetro del avión
- datos de los magnetómetros de tierra

a continuación, se describe la carga en la base de datos y la revisión de cada uno de los mismos.

Durante la fase de adquisición de datos, usando las medidas del sistema Doppler y los videos del vuelo, se dibujan las trayectorias del avión a escala 1/50000 sobre material transparente estable superpuesto sobre mapas topográficos a la misma escala. En la fase de procesamiento, dichas trayectorias son digitalizadas y corregidas de errores producidos por deformación del soporte. Posteriormente, se dibujan sobre papel para detectar inconsistencias en la velocidad y dirección del vuelo. Finalmente se almacenan en la base de datos junto con el resto de la información digital adquirida desde el avión.

Los registros obtenidos con el magnetómetro del avión, junto con los de los altímetros, los del sistema Doppler y los del reloj, se dibujan sobre papel a una escala horizontal de 50 fiduciales (25 segundos) por centímetro usando una impresora de línea. Estos perfiles multicanal son inspeccionados línea a línea, para detectar tramos de registro anómalos (vacíos, saltos, puntas, etc.) los cuales son eliminados y sustituidos por datos interpolados finalmente.

Los datos recogidos por los magnetómetros de tierra se almacenan juntos en un fichero cuyos registros contienen el valor del campo magnético medido segundo a segundo por cada estación que en ese instante se halle en estado operativo. Además, las medidas registradas por la estación de San Pablo se compensan del salto de 9.44 nT que, como se explica en II.4.5.3, tuvo lugar el 13 de Diciembre de 1986.

II.6.2. Tratamiento de datos

El tratamiento de los datos comprende las siguientes fases:

- Corrección del retardo.
- Evaluación del efecto de direccionalidad.
- Filtrado de datos.

- Reducción a una misma altitud.
- Sustracción de la variación diurna.
- Sustracción de la variación secular.
- Nivelación.
- Determinación del datum.
- Obtención del campo residual.

II.6.2.1. Corrección del retardo

El retardo entre la posición del avión y la medida del campo magnético se estima mediante la media de un conjunto de valores experimentales que, según lo expuesto en II.4.3, vale 5.9 fiduciales. Sin embargo, los números fiduciales sólo pueden corregirse en una cantidad entera por lo que se adopta como valor de la corrección 5 fiduciales (2.5 segundos), el cual se aplica a los datos del avión al comienzo del procesamiento.

La incertidumbre residual en la posición del avión se estima a partir de la desviación típica de las medidas experimentales, siendo su valor 1.7 fiduciales (aproximadamente 60 metros a la velocidad media de 250 Km/h).

II.6.2.2. Evaluación del efecto de direccionalidad

Los valores medios de los residuos para cada dirección hallados con los valores de los cuatro primeros experimentos expuestos en II.4.4 junto con las desviaciones típicas correspondientes, se presentan a continuación:

Tabla II,8

| AZIMUT (Grados) | $\bar{\delta}$ (nT) | S (nT) |
|-----------------|---------------------|--------|
| 0° | 0.00 | 0 |
| 135° | 0.31 | 0.92 |
| 270° | -0.28 | 1.05 |
| 45° | -0.34 | 0.71 |
| 180° | 0.16 | 1.82 |
| 315° | 0.91 | 0.37 |
| 90° | 0.64 | 0.91 |
| 225° | -0.18 | 1.26 |
| 0° (2) | 0.52 | 1.2 |

La observación de los valores de los residuos medios expuestos en la tabla anterior indican que, aunque sus valores son aceptables, las dispersiones alrededor de las medias son altas lo cual sugiere que el efecto de direccionalidad se halla dentro del error del experimento. Por ello no se aplica ninguna corrección hasta

comprobar que este efecto no se refleja en los resultados finales tal como se confirma mediante su observación.

II.6.2.3. Reducción a una misma altitud

Los puntos de medida no se encuentran todos a una misma altitud sobre el nivel del mar, especialmente en algunas zonas montañosas en las que el relieve sobrepasa los 3000 metros, por este motivo es necesario reducir las medidas a una misma altitud. Un valor aproximado de la traslación que para ello es necesario aplicar, se determina empleando el valor de gradiente vertical del Campo Geomagnético Internacional de Referencia de 1985 (I.G.R.F.85) a 3000 metros de altitud sobre San Pablo de los Montes el 1 de Enero de 1987. Así pues, el valor de la corrección en nanoteslas es

$$\Delta B_H = -0.0209 \Delta H \quad (II,7)$$

donde ΔH se mide positivamente hacia arriba y representa la desviación en metros respecto de la altitud de referencia (3000 mts sobre el nivel del mar). Este término requiere una corrección máxima de ± 0.63 nT suponiendo que el avión se mantiene dentro de las condiciones del vuelo.

Es necesario insistir, que la expresión (II,7) es únicamente una aproximación que reduce las diferencias en las intersecciones de las líneas de vuelo con las de control antes del paso de nivelación.

II.6.2.4. Filtrado de los datos

Algunas de las variaciones registradas son producidas por fuentes que distorsionan al campo magnético de la tierra y cuyo origen principal es ajeno a la misma. Dichas perturbaciones las podemos clasificar según el procedimiento empleado para eliminarlas de los datos en variaciones de largo, medio y corto período, o de larga, media y corta longitud de onda, según se emplee el dominio del tiempo o del espacio.

Las variaciones de largo período se reflejan en las diferencias que existen en las intersecciones de la red del levantamiento producidas por los errores de medida y de posicionamiento. Dichas variaciones se eliminan mediante el paso de nivelación, el cual es un procedimiento estadístico que más adelante se explica y que se basa en minimizar la varianza de las diferencias antes mencionadas. Suponiendo que sus variaciones son suaves y teniendo en cuenta que el tiempo que tarda el avión en recorrer la distancia entre dos intersecciones (40 Km) a la velocidad de 250 Km/h es aproximadamente 10 minutos, una variación con un período menor o igual a 20 minutos (80 Km) no se reflejaría en las intersecciones (Fig.II,9) y no se eliminaría mediante la nivelación.

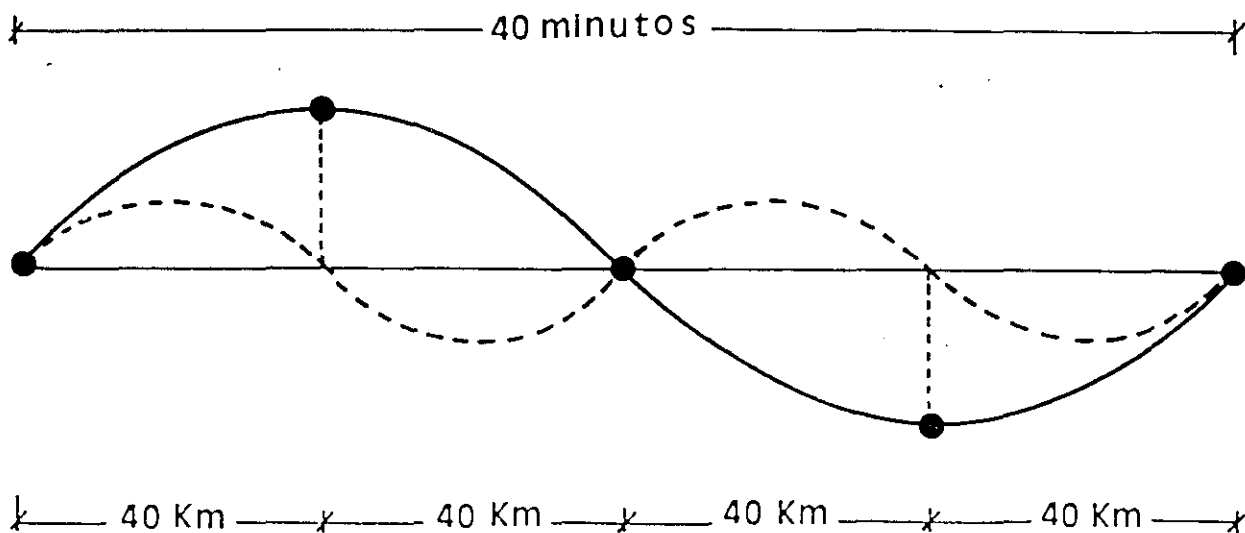


Fig. II,9

No obstante, es preferible adoptar un punto de vista más conservador y admitir que este límite se halla en 40 minutos (160 Km), de manera que una variación con dicho período se recogería como mínimo en dos intersecciones (Fig.II,9)

Las variaciones magnéticas de período corto (ó longitud de onda corta) pueden atribuirse principalmente a fuentes situadas en la superficie terrestre bajo el avión, las cuales pueden representarse mediante dipolos inducidos cuyo campo anómalo a lo largo de un perfil vale (Smellie 1965; Telford, 1985):

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{z_c^3} m f(\alpha) \quad (II,8)$$

siendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Web/Amp.m}$, m el momento magnético del dipolo, z_c la profundidad respecto al plano de observación y $f(\alpha)$ la siguiente expresión:

$$f(\alpha) = \frac{(3 \sin^2 I - 1) - 6\alpha \sin I \cos I + (3 \cos^2 I - 1)I\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^{5/2}} \quad (II,9)$$

en donde I es la inclinación magnética, $\alpha = x/z_c$ y x la distancia horizontal.

La figura II,10 muestra las representaciones gráficas de la expresión (II,9) para distintos valores de I , cada una de las cuales constituye la respuesta relativa del dipolo para cada inclinación del campo magnético inductor.

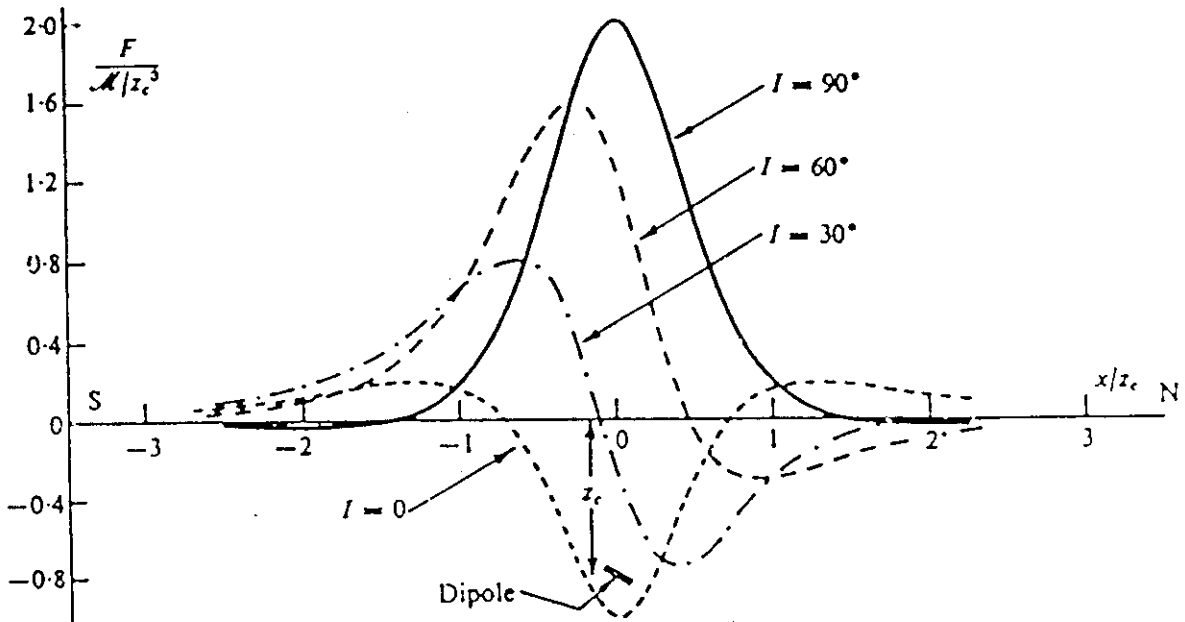


Fig. II,10

La expresión (II,9) nos permite estimar la variación periódica de menor longitud de onda que sería detectada por el sensor del avión, la cual puede considerarse producida por un dipolo magnético inducido situado sobre la superficie terrestre y bajo el avión. En efecto, la representación gráfica de la función (II,9) para el ángulo de inclinación $I=55^\circ$ (valor medio de la inclinación magnética en la península durante la época del vuelo) puede verse en la figura II,11; la cual posee una forma aproximadamente senoidal con una semilongitud de onda aproximadamente de 3000 metros.

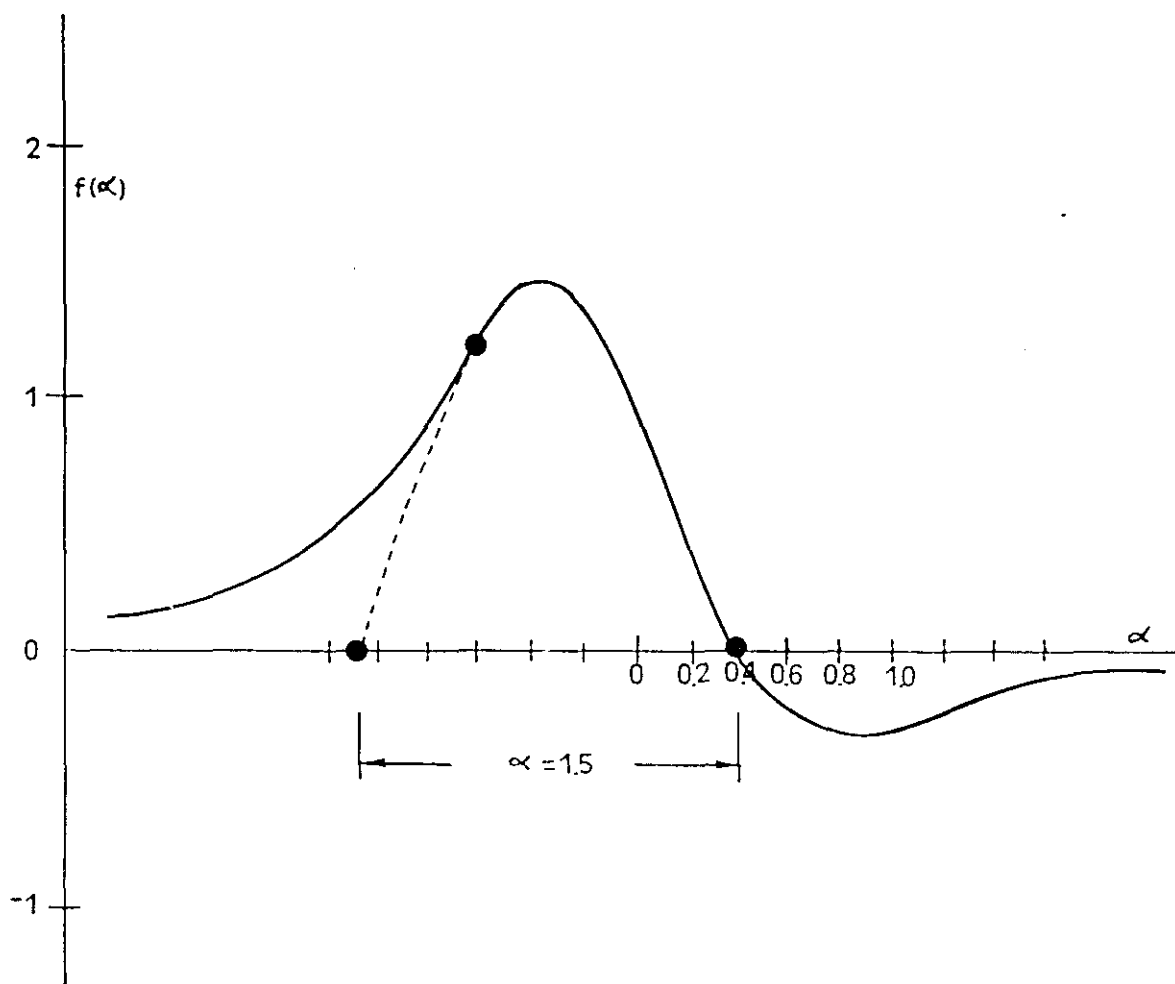


Fig.II,11

Así pues, para un valor $z_c = 2000$ metros (altitud media del vuelo sobre el terreno) las variaciones con una longitud de onda menor de 6000 metros (ó período menor de 85 segundos) se supone que no están producidos por fuentes geológicas y se eliminan mediante la aplicación de un filtro. Sin embargo, es necesario advertir que el análisis anterior es estimativo y únicamente indica el rango de interés más probable, pero la decisión final se adopta tras examinar el resultado que el filtro produce en los datos.

El software usado en el procesamiento emplea filtros de tipo Gaussiano, que son seleccionados fijando un parámetro (semianchura del filtro correspondiente a la longitud de onda cuyos efectos deseamos que se reduzcan al 50%), la cual se da en fiduciales. Con tal motivo, se seleccionaron dos tramos de línea de vuelo. En el primero de ellos (tramo tercero de la línea 15) existen variaciones considerables de alta frecuencia, mientras que en el segundo (tramo tercero de la línea 37) el carácter de las variaciones es más suave. A los valores del campo registrados en dichos tramos se les aplicaron filtros Gaussianos que poseían coeficientes de

atenuación del 50% en 43,55,83 y 97 fiduciales sucesivamente, eligiéndose el de 55 fiduciales (27.5 segundos) (Fig.II,12) en función de los resultados de su aplicación.

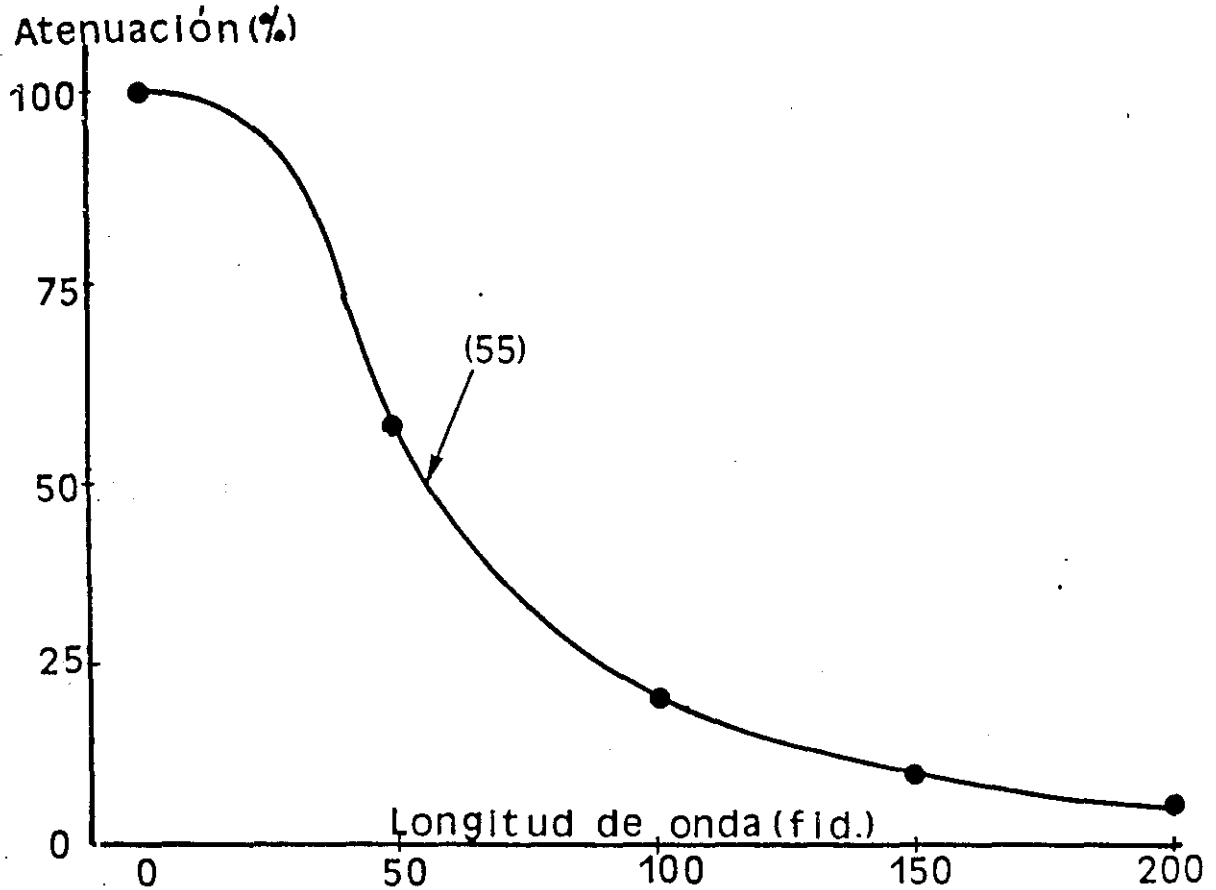


Fig. II,12

En la figura II,12 se aprecia que variaciones con longitud de onda superiores a 7000 metros (200 fiduciales) la respuesta se atenúa menos del 5% y variaciones con longitud de onda inferior a 1000 metros (30 fiduciales) se atenúan más del 90%.

II.6.2.5. Sustracción de la variación diurna

Como es sabido, la variación diurna es una perturbación cíclica del campo magnético terrestre que posee una componente principal con un período de 24 horas, la cual recibe el nombre de variación solar en calma.

Superpuestas a esta variación pueden presentarse otras con períodos generalmente comprendidos entre 0.2 y 600 segundos, tal como ocurre con las pulsaciones y algunas tormentas magnéticas. Estas variaciones no pueden eliminarse de los datos mediante la nivelación ni mediante la aplicación de un filtro por razones expuestas en el apartado anterior, por ello es necesario buscar un método específico con el cual conseguir dicha sustracción.

Antes de exponer los procedimientos para la eliminación de la variación diurna es necesario definir el nivel cero o línea base de la misma. Algunos investigadores (Le Borgne et Le Moüel, 1969; Le Moüel et al, 1979; Feuillard et al, 1980) emplean como nivel cero el promedio de valores del campo magnético registrados durante un período de tiempo, admitiendo así que las desviaciones producidas por la variación diurna se distribuyen alrededor de dicho nivel. Otros investigadores, (Le Borgne et Le Moüel, 1969) sugieren utilizar el promedio de los valores obtenidos durante períodos nocturnos de calma (entre las 2 y las 3 horas de tiempo universal). Una tercera aproximación consiste en emplear exclusivamente aquellos valores adquiridos durante los cinco días internacionales de calma de cada mes.

En nuestro caso, contamos con procedimientos que permiten eliminar las variaciones de corto período (el filtrado) y de largo período (la nivelación), no ocurriendo lo mismo con las variaciones de período intermedio. Por lo tanto, admitiremos que la variación diurna se compone de perturbaciones de período intermedio que fluctúan alrededor de una variación "media" de período largo (Fig.II,13) la cual tomaremos como línea base o nivel cero.

La definición de esta variación "media" es importante únicamente en un aspecto: ha de estar compuesta por períodos que puedan eliminarse mediante el proceso de nivelación. Con tal que este requisito se cumpla, la forma de la línea base *carece de importancia ya que la totalidad de la variación diurna se eliminará* de los datos del avión mediante la combinación conjunta del filtrado, nivelación y eliminación de fluctuaciones.

Una vez definido el nivel cero de la variación diurna, explicaremos tres procedimientos ensayados para la eliminación de la misma.

El primero, posiblemente el más sencillo, se basa en admitir que dicha variación es igual a la registrada en la estación de tierra más próxima y por lo tanto bastaría con restársela directamente a los datos tomados por el magnetómetro del avión.

Esta solución plantea ciertos problemas, el principal de ellos está relacionado con los registros obtenidos en la estación de Benllera los cuales poseen un nivel de ruido considerable y contaminarían los datos registrados por el magnetómetro del avión si fueran usados; si no lo fueran, habría que corregir los datos adquiridos en la zona Noroeste de la península empleando datos de estaciones muy alejados (Fig.II,2) con el consiguiente aumento del riesgo de error.

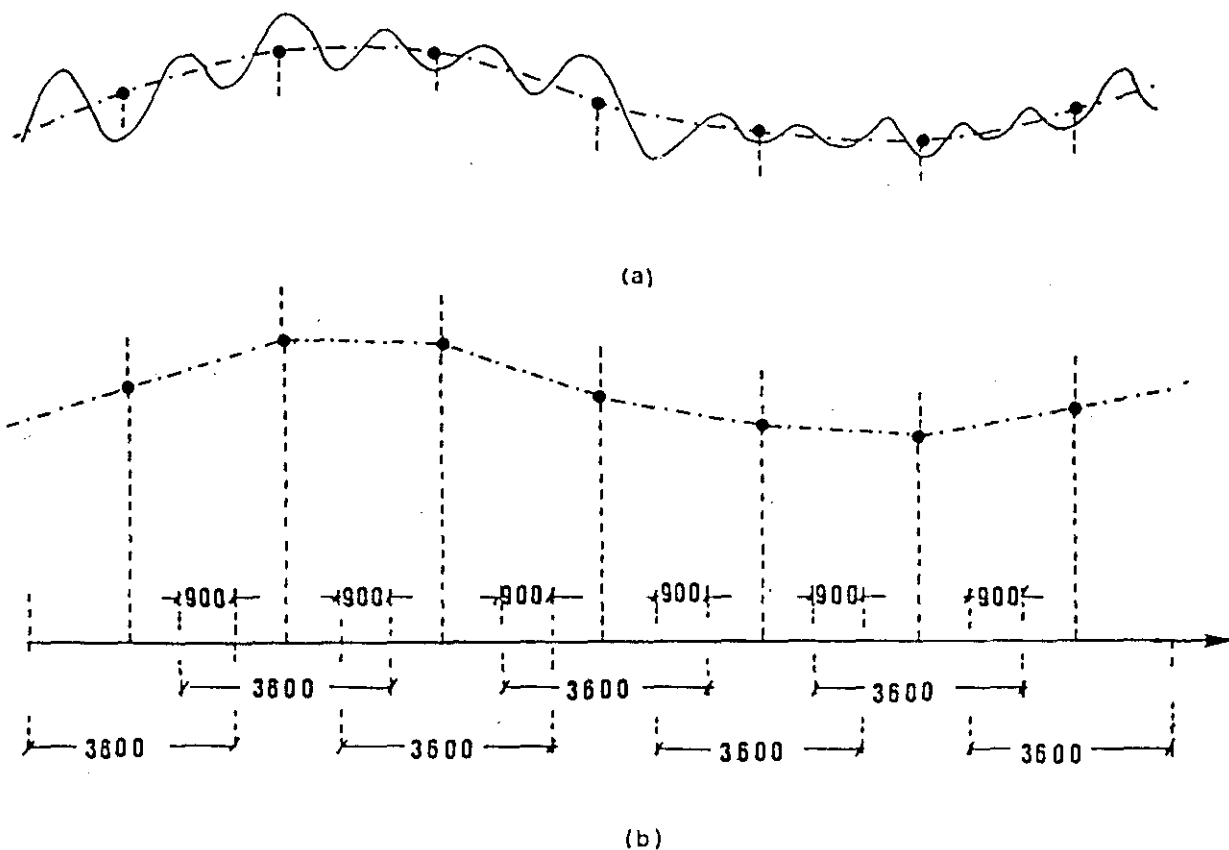


Fig. 11,13

Un problema adicional lo plantea la transferencia del control de la variación diurna conforme el avión pasa del espacio aéreo de una estación al de otra. Una posible solución consistiría en el uso simultáneo de los datos de todas las estaciones ponderándoles con coeficientes peso que garantizarán la transferencia entre estaciones de forma suave. Sin embargo, esta solución es poco realista ya que existen diferencias considerables en el registro de la variación diurna entre ellas, que se ponen de manifiesto cuando se comparan las relaciones entre los registros de cada una de las estaciones con los de San Pablo de los Montes, tal como se ve en la Tabla que se halla más adelante.

El segundo procedimiento, consiste en determinar una relación matemática entre la variación diurna registrada en cada una de las estaciones y la situada en el Observatorio de San Pablo de los Montes, de esta forma únicamente se utilizarían los datos adquiridos en esta última estación los cuales son de mejor calidad que los del resto.

La relación matemática entre ambos registros se determina calculando la recta de regresión tras descontar de los mismos una variación de largo período definida con valores medios en intervalos de 3600 segundos con solapamiento de 900 segundos (Fig.11,13b), la cual constituye la línea base de la variación diurna como anteriormente se explicó. El análisis de regresión se realiza con los registros adquiridos día a día obteniéndose los valores medios de los coeficientes estadísticos (Ardizzone et al, 1989) que a continuación se tabulan junto con las desviaciones típicas de los mismos, las cuales figuran entre paréntesis:

Tabla II,9

| ESTACIÓN | COEFICIENTE DE CORRELACIÓN | COEFICIENTE DE REGRESIÓN | DESVIACIÓN TÍPICA RESIDUAL (nT) |
|-------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| El Donadio | 0.944 (0.004) | 2.173 (0.16) | 0.71 (0.23) |
| la Cañada | 0.932 (0.08) | 1.219 (0.08) | 0.38 (0.11) |
| Benllera | 0.45 (0.17) | 0.39 (0.1) | 0.69 (0.14) |
| Lubia | 0.829 (0.13) | 0.605 (0.06) | 0.38 (0.25) |
| Monte Julia | 0.819 (0.17) | 1.252 (0.18) | 0.8 (0.12) |
| Valcarea | 0.632 (0.11) | 1.485 (0.47) | 1.51 (0.09) |

La observación de los valores medios del coeficiente de regresión que figuran en la tabla anterior indica que existen grandes diferencias entre los mismos pues oscilan entre 0.4 y 2.2 aproximadamente.

Estas variaciones se deben a diferencias geológicas entre los distintos emplazamientos de las estaciones de tierra e indican además que es poco probable hallar una solución sencilla al problema relativo a la transferencia de control de la variación diurna entre las mismas. Por otra parte, el valor del coeficiente de correlación correspondiente a la estación de Benllera es bastante bajo, por lo que es de esperar que la relación entre San Pablo de los Montes y dicha estación se adapte mal a los datos y, como consecuencia de ello, los resultados sean de baja precisión.

El tercer procedimiento consiste en establecer la relación entre el magnetómetro situado en el observatorio y el del avión. Para aplicar este procedimiento se utilizan los datos adquiridos en segmentos de que han sido repetidos. La diferencia entre los valores medidos en el vuelo inicial y en la repetición elimina la mayor parte del efecto geológico local, mientras que retiene la diferencia de las variaciones diurnas.

La relación antes mencionada se determina mediante una regresión lineal entre el perfil de diferencias y el obtenido en el observatorio con los registros adquiridos en las mismas fechas.

Las fuentes de error experimental más importantes son las siguientes:

- Las diferencias relativas de altitud.
- Las diferencias relativas en la posición horizontal.
- El intervalo de tiempo entre el vuelo de un segmento y su repetición.
- La diferencia horaria en la adquisición de los datos.
- Otras fuentes de error (turbulencias, etc.).

En la realización del experimento se han empleado los datos adquiridos en las líneas que limitan las zonas levantadas en 1986 y 1987, las cuales fueron repetidas al comenzar la segunda fase del vuelo.

Antes de realizarse la regresión, se han reducido los datos del vuelo a una misma altitud y se les ha sustraído el valor proporcionado por el Modelo IGRF85, lo cual proporciona una corrección del gradiente horizontal cuando se determina el perfil diferencia.

A continuación se muestran algunos resultados del análisis cuando se usan valores medios en intervalos de 1000 segundos y 1800 segundos, lo cual mejora el ajuste siendo r , b y S_R los coeficientes de correlación, de regresión y la desviación típica residual respectivamente.

Tabla II,10

| PROCEDIMIENTO | r | b | $S_R (nT)$ |
|---------------------------------------|-------|-------|------------|
| Con valores medios cada 1800 segundos | 0.871 | 1.344 | 0.43 |
| Con valores medios cada 1000 segundos | 0.872 | 1.405 | 0.36 |

El mismo análisis se aplicó a otros 17 segmentos de línea repetidos. Los valores medios de los coeficientes estadísticos y sus desviaciones típicas determinados a partir de una cuidadosa selección de los resultados, son los siguientes (Ardizone, 1989):

- Coeficiente de regresión 1.299 (0.18)
- Coeficiente de correlación 0.629 (0.18)
- Desviación típica residual 0.83 (0.53)

Cuando se compara el valor del coeficiente de correlación con los obtenidos mediante el procedimiento anterior, se observa que en algunos casos es más bajo. Sin embargo, si se considera la naturaleza extrema de las fuentes de error implicadas los resultados obtenidos con este procedimiento pueden considerarse razonables, concluyéndose que existe una estrecha relación entre la variación diurna registrada por el magnetómetro del avión y la registrada en el observatorio, debiéndose la baja correlación más a errores experimentales que a una falta de relación entre los mismos.

Este estudio se ha completado con otros dos más que permiten hacernos una idea mejor de la relación que buscamos.

Para realizar el primero de ellos, se han seleccionado los registros correspondientes a 15 segmentos de distintas líneas durante cuyo vuelo las estaciones de tierra muestran una actividad magnética moderada. Estos registros, han sido comparados por separado con los obtenidos en todas las estaciones de tierra buscando puntos en los cuales se detecte una correlación clara entre la variación diurna registrada por ambos magnetómetros, tras lo cual se determinó en dichos puntos la razón de las variaciones diurnas registradas en San Pablo de los Montes y en el avión. Los coeficientes estadísticos obtenidos con 61 observaciones son los siguientes (Ardizone et al, 1989):

| | |
|-----------------------------------|--------|
| - Valor medio de la razón (SP/Av) | 1.3496 |
| - Desviación típica | 0.254 |
| - Valor máximo | 2.11 |
| - Valor mínimo | 0.94 |

En el segundo estudio se ha examinado los efectos producidos en el resultado de la nivelación, al variar los valores de la razón entre los registros de la variación en la estación de San Pablo y en el avión. Dicho de otro modo, se sustrajo del conjunto de datos adquiridos desde el avión distintas fracciones de los valores obtenidos en el Observatorio de San Pablo (tras descontar de los mismos la contribución de la variación de largo período) antes de aplicar el proceso de nivelación. Para cada valor de la razón, se obtiene un valor de la desviación típica residual tal como en el siguiente gráfico se indica (Fig.II,14).

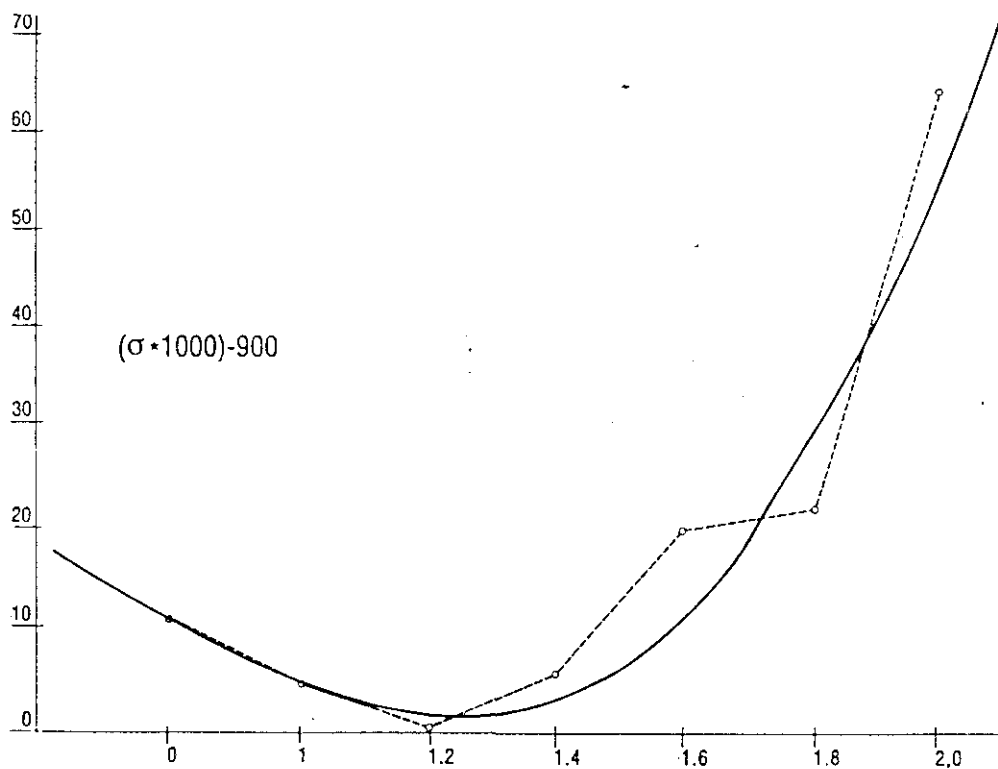


Fig. II,14

La línea suave superpuesta sugiere que el mejor resultado se obtiene cuando aplica a los registros de San Pablo un factor multiplicativo comprendido entre 1.2 y 1.4.

El procedimiento expuesto posee dos ventajas respecto a los demás. En primer lugar es de fácil aplicación y en segundo lugar usa sólo los datos de una estación. Como resultado de todo ello, parece adecuado su elección para realizar la

sustracción de la variación diurna de los datos recogidos por el magnetómetro del avión.

El factor multiplicativo elegido, tras un examen más detallado de los datos y resultados del último estudio es 1.35.

II.6.2.6. Sustracción de la variación secular

Como ya es conocido, la variación secular es una fluctuación continua del campo magnético terrestre que posee un período muy largo (del orden de 1000 años) y cuyo origen es interno. Su acción afecta al campo magnético principal y se refleja de forma bastante clara en los valores medios anuales recogidos en los observatorios. La variación secular de cada componente del campo magnético es una magnitud física que depende de la posición y del tiempo tal como se aprecia en la siguiente tabla, donde se da en nanoteslas por año el incremento de la intensidad del campo magnético en tres observatorios del Instituto Geográfico Nacional (Servicio de Geomagnetismo, 1994).

Tabla II.11

| OBSERVATORIO | 1981.5(*) | 1985.5(*) | 1990(*) |
|--------------------|-----------|-----------|---------|
| San Pablo (Toledo) | +6 | +12 | +19 |
| Almería | +3 | +26 | +11 |
| Tenerife | -27 | -13 | -16 |

((*) Los valores están referidos al centro del año).

Los datos del vuelo, fueron adquiridos en dos temporadas distintas separados entre sí por un intervalo de tres meses aproximadamente, por este motivo es de esperar que existe una diferencia de nivel entre los dos bloques debido a la variación secular. Para sustraer su efecto contamos con los siguientes datos:

- Los datos tomados en tramos repetidos de la línea de vuelo y de la línea de control que separan las dos zonas (Fig.II,1).
- El registro continuo, durante un período de nueve meses, de la estación situada en el Observatorio de San Pablo de los Montes.

Además de los datos anteriores contamos también con el modelo IGRF 85 el cual nos permite, mediante aproximaciones de distinto orden, sustraer la variación secular de los datos del avión tal como a continuación se explica.

En efecto, sean:

(λ, ϕ, Z_H) : Las coordenadas de un punto de medida P .

t : Instante en el que se realiza la medida.

(λ_0, ϕ_0, z_H) : Las coordenadas de un punto P_0 situado sobre el observatorio de San Pablo, a la altitud nominal del vuelo ($z_H = 3000 \text{ m}$).

t_0 : Fecha de referencia ($t_0 = 1$ de Enero de 1987).

Si designamos además por $B(P, t)$ el valor de la intensidad de campo magnético en el punto P e instante t proporcionado por el modelo IGRF 85 y admitimos que la variación temporal de éste se debe exclusivamente a la variación secular, el incremento respecto a t_0 producido por dicha variación en P vale

$$\Delta B_t = B(P, t) - B(P, t_0) \quad (II, 10)$$

Por otra parte, la variación espacial de la intensidad del campo magnético respecto a P_0 , en el instante t_0 , será:

$$\Delta B_e = B(P, t_0) - B(P_0, t_0) \quad (II, 11)$$

Suponiendo que previamente se ha sustraído la variación diurna de los datos del avión y que el valor obtenido en P vale B_{CD} , el valor del campo magnético normalizado respecto a P_0 y a t_0 será:

$$B_N = B_{CD} - \Delta B_t - \Delta B_e \quad (II, 12)$$

Sustituyendo en (II, 12) las expresiones (II, 10) y (II, 11) tendremos:

$$B_N = B_{CD} - B(P, t) + B(P_0, t_0) \quad (II, 13)$$

De esta manera los datos quedan corregidos del efecto producido por las componentes espacial y temporal de la variación secular, o dicho de otra forma: parecería como si todo el levantamiento fuera realizado el 1 de Enero de 1987 y no existiera variación secular sobre el territorio.

La expresión (II, 13) representa una aproximación de primer orden que puede mejorarse como a continuación se expone.

De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior, la sustracción de la variación diurna se realiza restando a los valores registrados por el magnetómetro del avión la cantidad

$$VD = 1.35VD_0 \quad (II, 14)$$

siendo VD_0 la fluctuación de la variación diurna registrada por la estación situada en el observatorio, respecto a una variación de largo período (línea base). Por razones prácticas, la fluctuación VD_0 se obtuvo como residuo de una regresión lineal simple utilizando el segundo conjunto de datos que al principio de este apartado se menciona. Así pues, los valores registrados pueden escribirse de la siguiente forma

$$VD_0 + R \quad (II, 15)$$

donde R representa los valores de la línea base los cuales contienen información de la variación secular, de las fluctuaciones de largo período de la variación diurna y

del campo magnético local. De esta manera, si para obtener B_{CD} (II,13) se resta de medidas del magnetómetro del avión (B_{OBS}) la cantidad

$$1.35VD_0 + R \quad (II,16)$$

en lugar de (II,15), introduciríamos nuevamente allí la influencia de la variación secular, por lo que para compensarla añadiremos $B(P_0, t)$ (valor del IGRF en P_0 y en el instante de la medida). Por lo tanto, la sustracción conjunta de las variaciones diurna y secular se puede realizar mediante la siguiente expresión:

$$B_N = B_{OBS} - (1.35VD_0 + R) - (B(P, t) - B(P_0, t)) + B(P_0, t_0) \quad (II,17)$$

en la que $(R - B(P_0, t))$ representa una corrección adicional que nos permite considerar a el término (II,17) como una aproximación de segundo orden.

Es necesario advertir que las aproximaciones hasta aquí aplicadas para sustraer la variación secular, son teóricas y únicamente sirven para facilitar el trabajo al paso de la nivelación el cual se explica en el siguiente apartado.

II.6.2.7. Nivelación

Tanto los errores de medida como los cometidos al aplicar las distintas aproximaciones expuestas en los apartados anteriores, quedan reflejados en las diferencias de los valores determinados en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control.

Algunas de las fuentes de error que originan dichas diferencias son:

- Errores de altitud.
- Errores de posicionamiento horizontal.
- Errores en la sustracción de la variación diurna.
- Errores en la sustracción de la variación secular.
- Deriva instrumental.
- Otros errores.

Mediante la nivelación se ajusta la red hasta conseguir que la desviación típica de los residuos o diferencias en dichas intersecciones producidos por los errores anteriores sea mínima. El procedimiento se basa en los métodos de Foster (Foster, et al, 1970) y de Yarger (Yarger, et al, 1978) los cuales han sido descritos en el primer capítulo de esta tesis, explicándose aquí únicamente la metodología seguida.

El proceso de nivelación es cíclico y se compone de los siguientes pasos:

- 1º) Usando los datos de navegación, se buscan los puntos de intersección entre líneas de vuelo y líneas de control.
- 2º) Para cada intersección, se almacenan en un fichero (fichero de nivelación) los siguientes datos de la línea de vuelo y de la de control que se cortan en ella:
 - Número fiducial más próximo a la intersección.
 - Lectura del magnetómetro correspondiente a dicho fiducial.
 - Lecturas del magnetómetro en los tres fiduciales más próximos a cada lado.
- 3º) Se calculan las diferencias de los valores del magnetómetro (línea de vuelo - línea de control) en cada intersección.
- 4º) En cada línea de control, se halla el valor medio de las diferencias en las intersecciones a lo largo de ella y se resta dicho valor de todas las medidas tomadas a lo largo de esa línea y almacenadas en el fichero de nivelación (es decir, los siete valores correspondientes a cada intersección).
- 5º) El paso 4º se repite empleando las líneas de vuelo en lugar de las líneas de control y sumando el valor de la diferencia media.
- 6º) Los dos pasos anteriores se repiten varias veces hasta que no se mejore el resultado.
- 7º) Para cada línea de control, se ajusta una función lineal a las diferencias que resultan del paso 6º. A continuación se resta esa función de todos los valores de la línea de control contenidos en el fichero de nivelación.
- 8º) El paso 7º se repite empleando las líneas de vuelo en lugar de las de control y sumando la función lineal.
- 9º) Los pasos 7º y 8º se repiten nuevamente hasta que no mejore el resultado.
- 10º) Los pasos 7º, 8º y 9º se repiten usando un polinomio de 2º grado.
- 11º) El proceso continúa aumentando sucesivamente el grado del polinomio de ajuste hasta que la desviación residual se reduzca a menos del 10% ó 20% del intervalo entre curvas de nivel.
- 12º) En cada uno de los pasos del proceso se obtienen informes (informes de nivelación) que muestran los errores en las intersecciones, con ellos pueden detectarse problemas particulares y eliminarse del fichero de nivelación. Por regla general, no suelen hallarse más de una o dos intersecciones que posean tales problemas.

- 13º) Hasta ahora, cualquier pequeño error en la posición de la intersección es considerado como error aleatorio. Esos errores de navegación pueden investigarse y tratarse aquí ya que el proceso ha eliminado gran parte de la variabilidad de las diferencias en las intersecciones. Para ello, se procede como seguidamente se indica: En primer lugar, se calculan las diferencias en la intersección para cada fiducial de la línea de control moviendo la línea de vuelo tres fiduciales a cada lado de la intersección original. A continuación, se hallan las mismas diferencias para la línea de vuelo reteniendo a ésta y moviendo la línea de control. Con esas diferencias se ajusta localmente una superficie polinómica tomándose como posición mas probable de la intersección el punto en el que esta superficie da un valor mínimo dentro de un círculo de dos fiduciales de radio alrededor de la intersección original.
- 14º) Por último, se aplica a los resultados obtenidos en el paso 13º los pasos 7º, 8º y 9º usando un polinomio de grado igual al alcanzado en el paso 11º.

El resultado final del proceso consiste en un conjunto de correcciones definidas en los puntos de intersección. Para aplicar esas correcciones a los puntos intermedios, se aplica una interpolación lineal. Opcionalmente, puede usarse una interpolación cúbica por "splines".

Durante esta fase del procesamiento se incluyeron los segmentos repetidos en los límites de los bloques correspondientes a las dos fases del vuelo (ver II.6.2.6) para eliminar cualquier diferencia residual entre ambos.

En la siguiente tabla se muestra la desviación típica residual (σ) alcanzada en cada paso junto al número de iteraciones aplicadas en el mismo y el grado polinómico correspondiente.

Tabla II,12

| $\sigma(nT)$ | Nº DE ITERACIONES | GRADO POLINÓMICO |
|--------------|-------------------|------------------|
| 1.83 | 10 | 0 |
| 0.96 | 10 | 1 |
| 0.76 | 10 | 2 |
| 0.62 | 10 | 3 |
| 0.56 | 10 | 4 |
| 0.33(*) | 2 | 4 |

(*) Tras un desplazamiento de las intersecciones.

II.6.2.8. Determinación del Datum

El conjunto de datos nivelados define una superficie $B=B(x,y)$ internamente consistente, es decir: la posición relativa de cualquiera de sus puntos es correcta respecto de la de los demás. Sin embargo, tal superficie no posee un nivel de referencia o datum conocido y como consecuencia de ello no se conoce el valor absoluto de B en cada punto.

La determinación del datum se efectúa en dos etapas. En la primera de ellas se mide cuidadosamente el campo magnético terrestre en un punto e instante determinados. La diferencia entre dicho valor y el obtenido en el mismo punto con la nivelación, proporciona el salto que es necesario aplicar a los datos nivelados para ajustar su nivel cero a la fecha en la que se realizó el experimento (20 de Abril de 1987). En la segunda etapa los datos procesados se trasladan al 1 de Enero de 1987, que es la fecha de referencia del mapa de valores absolutas de B .

Los datos necesarios para realizar la primera etapa se adquirieron durante el vuelo, a la altitud nominal del proyecto, de un segmento de 50 Km de longitud (centrado respecto al Observatorio de San Pablo) perteneciente a la línea de control 1011. Este segmento fue volado diez veces seguidas (cinco en cada sentido) entre las 11 horas y las 14 horas 45 minutos del día 20 de Abril de 1987.

Los datos adquiridos se procesan para eliminar de ellos la influencia de las siguientes fuentes de error:

- Retardo.
- Variaciones de altitud.
- Errores de posicionamiento.
- Variación diurna.

Los errores producidos por el retardo y las variaciones de altitud se corrigen de igual forma que el resto de los datos del vuelo (ver II.6.2.1 y II.6.2.3).

Como consecuencia de los errores de posicionamiento producidos al desviarse el avión de la trayectoria prevista, la respuesta del sensor sufre variaciones que dependen del gradiente del campo en cada punto. Afortunadamente, el gradiente a lo largo de la trayectoria es bajo (0.5 nT por Km) con lo que sus efectos se anularán al promediar todos los perfiles. No ocurre lo mismo con el gradiente en dirección transversal cuyo valor, a la altitud del vuelo sobre San Pablo de los Montes, se estima en 3.7 nT por Km según el modelo IGRF85.

Para compensar el efecto producido por las desviaciones del avión respecto a la trayectoria teórica (trayectoria que pasaría sobre la vertical de San Pablo) se sustrae del valor medido en cada punto P e instante t la siguiente cantidad determinada mediante el I.G.R.F.

$$G = B(P, t) - B(Q, t) \quad (II, 18)$$

siendo Q el punto que correspondería al P sobre la trayectoria teórica.

La sustracción de la variación diurna se realiza de igual forma que en el resto del levantamiento, es decir multiplicando por el factor 1.35 el valor de la fluctuación del campo registrada en tierra respecto a una línea base obtenida mediante regresión lineal de las medidas efectuadas durante el vuelo de cada línea datum.

Para mantener una equivalencia con el resto del levantamiento (exceptuando la nivelación) se ha sustraído también de los datos el resto R de la variación diurna tal como se indica en II.6.2.5.

Una vez procesados los datos se obtiene un perfil promedio cuyos valores a intervalos regulares de 1 Km entorno a San Pablo, se presentan a continuación junto con sus desviaciones típicas e intervalos del 95% de confianza,

Tabla II,13

| POSICIÓN (Km) | MEDIA (nT) | DESVIACIÓN TÍPICA (nT) | INT.CONF. (95%) |
|---------------|----------------|----------------------------|-----------------|
| 1.0 | -25.36 | 0.48 | (-25.48;-25.24) |
| 2.0 | -25.63 | 0.43 | (-25.74;-25.52) |
| 3.0 | -25.86 | 0.37 | (-25.95;-25.77) |
| 4.0 | -25.80 | 0.36 | (-25.87;-25.71) |
| 5.0 (S.P) | -25.49 | 0.31 | (-25.57;-25.41) |
| 6.0 | -25.14 | 0.18 | (-25.19;-25.09) |
| 7.0 | -24.73 | 0.24 | (-24.79;-24.67) |
| 8.0 | -24.25 | 0.26 | (-24.32;-24.18) |
| 9.0 | -23.81 | 0.26 | (-23.89;-23.74) |
| 1.0 | -23.38 | 0.27 | (-23.45;-23.31) |

Por tanto, podemos afirmar con un 95% de confianza que el valor sobre la estación principal, el día 20 de Abril de 1987 se halla en el intervalo:

$$- 25.5 \pm 0.08 \text{ nT}$$

Sin embargo, debido al tratamiento de los datos, hay que tener en cuenta que esta cantidad está referida al nivel cero de la variación diurna ó línea base (R) de San Pablo de los Montes, por lo que para conocer su valor absoluto es necesario determinar el valor de dicho nivel en la fecha del experimento, el cual es del orden de 43800 nT como a continuación se explica.

En efecto, de acuerdo con lo expuesto en II.6.2.6. la línea base se determina ajustando una recta a los datos obtenidos en el observatorio durante el período de ocupación. Para ello, se calculan los valores medios horarios a intervalos de media hora junto con la desviación típica correspondiente, seleccionándose aquellos períodos en los que la última se mantiene inferior a 0.2 nT. Estos valores definen una primera recta de regresión; posteriormente se eliminan del análisis aquellos datos cuyos residuos superan determinados límites, volviéndose a efectuar nuevos ajustes lineales. La siguiente tabla muestra los resultados de dichos ajustes junto a los valores previstos para el 1 de Enero y el 20 de Abril de 1987, siendo r , b y a el coeficiente de correlación, la pendiente y la ordenada en el origen respectivamente.

Tabla II,14

| LIMITE (nT) | Nº DE DATOS | r | b (nT/día) | a(nT) | VALOR PREVISTO (1/I/87) | VALOR PREVISTO (20/IV/87) |
|----------------|----------------|-------|------------|----------|-------------------------------|---------------------------------|
| 0.0 | 221 | 0.819 | 0.0601 | 43795.54 | 43801.97 | 43808.58 |
| 5.0 | 187 | 0.776 | 0.0565 | 43795.90 | 43801.94 | 43808.16 |
| 2.5 | 141 | 0.742 | 0.0672 | 43795.08 | 43802.27 | 43809.66 |
| 1.5 | 82 | 0.694 | 0.0583 | 43793.88 | 43800.12 | 43808.10 |
| 0.5 | 30 | 0.567 | 0.1544 | 43792.39 | 43808.91 | 43825.74 |

La tabla anterior muestra que los tres primeros resultados son bastante consistentes ya que los valores de b varían poco (especialmente los dos primeros) pese a la reducción del número de datos. No ocurre lo mismo con los dos últimos, especialmente en lo que respecta al coeficiente de correlación que desciende significativamente.

Así pues, usando la media de los dos primeros resultados, tomaremos como nivel cero de la variación diurna 43801.9 nT para el 1 de Enero de 1987 y 43808.3 nT para el 20 de Abril de 1987. De esta forma, el valor absoluto del datum para la fecha del experimento será

$$43808.3 - 25.5 = 43782.8 \text{ nT}$$

El valor nivelado correspondiente a San Pablo de los Montes, es -24.3 nT, por lo que será necesario sumarle 43807.1 nT para que coincida con el valor anterior. De esta manera todo el levantamiento queda referido al 20 de Abril de 1987.

Por último, es necesario trasladar los datos a la fecha final de referencia del mapa (1 de Enero de 1987) lo cual constituye la segunda etapa mencionada al comienzo del presente apartado. Para alcanzar este objetivo, basta con tener en cuenta que, debido a la variación secular, la línea base de la variación diurna ha sufrido un incremento de 6.4 nT al pasar desde el 1 de Enero al 20 de Abril de 1987, por lo que el datum para el 1 de Enero de 1987 será

$$43807.1 - 6.4 = 43800.7 \text{ nT}$$

cantidad que se necesita sumar al conjunto de datos nivelados para obtener su valor absoluto.

II.6.2.9. Sustracción del IGRF

El campo residual se determina restando a los datos procesados el modelo IGRF-85 trasladado al 1 de Enero de 1987 y a continuación se le suman 1200 nT para que todos los residuos sean positivos.

II.6.3. Dibujo de los mapas

Tanto el valor absoluto de la intensidad del campo magnético como el campo residual se interpolan sobre una red de 2500 metros de espaciado, el cual es el adecuado para la distancia existente entre las líneas de vuelo (Lynam,1986).

El resultado final, se representa mediante mapas de isodinámicas totales e isoanómalas a escala 1/1000000, las cuales fueron publicados en 1989 (Ardizzone et al, 1989). Junto a éstos, se dibujaron otros mapas del campo residual a escalas 1/500000 y 1/200000.

CAPITULO III

REPRESENTACION DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE: ANALISIS METODOLOGICO DEL MODELO DE SUPERFICIES POLINOMICAS

III.1. INTRODUCCION

En este capítulo, además de describirse los modelos matemáticos más conocidos para la representación del campo magnético de la Tierra, se exponen los fundamentos teóricos para la realización del estudio estadístico de uno de ellos y constituye la base de la determinación de los resultados del análisis que se realiza en el Capítulo IV.

Los conceptos que aquí se exponen son importantes no sólo para la determinación del modelo elegido, sino además para comprobar las condiciones de validez asociadas al mismo. De no ser así, los resultados y conclusiones únicamente tendrían un valor muestral quedando restringidos a la muestra de puntos de medida, no pudiéndose garantizar de forma rigurosa cualquier inferencia sobre el resto de los puntos del levantamiento los cuales a su vez, de acuerdo con la teoría de errores de medida, también son una muestra aunque de mayor tamaño.

III.2. MODELOS DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE

En muchas ocasiones la finalidad de un levantamiento aeromagnético no se restringe a la obtención de mapas del campo magnético principal de la Tierra, sino que también se busca un modelo matemático del mismo que permita su descripción y representación en la zona del levantamiento así como la determinación del campo anómalo, con el que se puede realizar una interpretación geofísica en la región de interés.

Los procedimientos analíticos para la determinación de modelos del campo magnético principal se clasifican en cinco (Haines 1990):

- Superficies Polinómicas.
- Método de Fuente Dipolar Equivalente.
- Análisis Armónico Esférico.
- Análisis Armónico Rectangular.
- Análisis Armónico en Casquetes Esféricos.

A continuación se describe brevemente cada uno de ellos.

El procedimiento de **Superficies Polinómicas**, entendiéndose como tales aquellas que únicamente dependen de la latitud (ϕ) y de la longitud (λ) pero no son función de la distancia radial (r), consiste en ajustar a las observaciones del campo magnético polinomios de tercer grado o menor en las variables (ϕ) y (λ) u otras coordenadas superficiales. Así, por ejemplo, la declinación magnética (D), la componente horizontal (H) y el campo total (B) se expresarían de la siguiente manera:

$$D = a_0 + a_1\phi + a_2\lambda + a_3\phi\lambda + a_4\phi^2 + a_5\lambda^2 + \dots$$

$$H = b_0 + b_1\phi + b_2\lambda + b_3\phi\lambda + b_4\phi^2 + b_5\lambda^2 + \dots$$

$$B = c_0 + c_1\phi + c_2\lambda + c_3\phi\lambda + c_4\phi^2 + c_5\lambda^2 + \dots$$

Tales modelos podrían considerarse como un desarrollo en serie de potencias truncado en el término de mayor grado.

Pese a la sencillez de este tipo de modelos, pueden presentarse inconsistencias geométricas entre las componentes, ya que existen restricciones entre los elementos H, Z, I y B :

$$H^2 + Z^2 = B^2$$

$$\tan I = Z / H$$

Naturalmente, cuando no se realizan observaciones de más de tres componentes independientes, no existe dificultad alguna, los tres modelos correspondientes pueden determinarse y el resto de las componentes pueden hallarse a partir de ellas sin ninguna inconsistencia. El problema se presenta cuando se miden individualmente más de tres componentes, por ejemplo D, I, H y B ; aunque puede determinarse un modelo polinómico para cada de las cuatro pueden existir inconsistencias geométricas entre ellas.

Las restricciones geométricas pueden satisfacerse imponiendo condiciones a los coeficientes, pero en ese caso las funciones de ajuste dejan de ser lineales en sus coeficientes (Fujita, 1968) con lo que se complica el procedimiento.

Además de la consistencia geométrica, los modelos de las componentes del vector \mathbf{B} han de ser consistentes desde el punto de vista físico, es decir: han de cumplir las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo. Imponiendo dos de dichas ecuaciones para regiones libres de fuentes electromagnéticas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0$$

se determinan las condiciones que han de cumplir los coeficientes de los modelos para que éstos sean consistentes entre sí (Haines, 1967), (Fujita, 1968). Al existir la posibilidad de que en algunos lugares el rotacional del vector \mathbf{B} no sea cero, Haines (Haines, 1968) propuso un método estadístico para comprobar su validez y deducir estadísticamente si existe riesgo de inconsistencia en una región.

Como ejemplos de modelos polinómicos del campo magnético, podemos señalar los propuestos por Haines (Haines, 1968), Fujita (Fujita, 1968), Tanaka (Tanaka et al, 1986), Haines, Hannaford y Serson (1970), Haines y Hannaford (Haines y Hannaford, 1972), Haines y Hannaford (Haines y Hannaford, 1974), o también el correspondiente a Escandinavia publicado por el Danish Meteorologic Institute (1969) y el correspondiente a Japón, publicado por World Data Center en 1966 dentro del proyecto World Magnetic Survey.

El segundo procedimiento para la determinación de modelos del campo magnético terrestre, consiste en hallar una **distribución interna de dipolos** de cuyo potencial derive dicho campo. Así pues, el potencial V será:

$$V = \sum \frac{m_i \cdot r_i}{r_i^2}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{B} = -\nabla V$$

siendo m_i el momento magnético del dipolo i y r_i el vector de posición que une dicho dipolo con el punto P en el que se desea hallar el campo. Cuando se conocen las direcciones y posiciones de m_i (o se suponen, conocidas), las componentes del campo constituyen un sistema lineal de ecuaciones en las incógnitas m_i , que puede resolverse fácilmente mediante el procedimiento de mínimos cuadrados.

Este método se ha restringido a la determinación de modelos del campo residual de \mathbf{B} a partir de datos de satélites. Mayhew (Mayhew, 1979 y 1982) y Langel (Langel, 1982) obtuvieron modelos de este tipo a partir de datos del satélite POGO (altitud no superior a 450 km) mientras que Mayhew y Galliher (Mayhew y Galliher, 1982) lo hicieron con datos del satélite MAGSAT (con altitudes inferiores a 300 km).

Las técnicas del **Análisis Armónico Esférico** consideran que el campo magnético derivan de una función potencial V , la cual depende de las coordenadas espaciales de cada punto. Cuando la posición del punto está definida por las coordenadas esféricas, el potencial se obtiene como solución de la ecuación de Laplace en dichas coordenadas, siendo entonces

$$V = a \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \{g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda\} P_n^m(\cos\theta)$$

obteniéndose a partir de ella el vector \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = -\nabla V$$

y siendo a el radio de la tierra, λ la longitud, θ la colatitud y r la distancia al centro de la Tierra. Las funciones $P_n^m(\cos\theta)$ son las funciones asociadas de Legendre de grado n y orden m en la forma seminormalizada de Schmidt y los coeficientes g_n^m y h_n^m se determinan aplicando el procedimiento de mínimos cuadrados a medidas de

las componentes del campo magnético realizados en observatorios, en satélites, barcos, etc. (Barraclough, 1990).

Lowes (Lowes, 1990a) describe las limitaciones que poseen este tipo de modelos y los problemas que surgen en su determinación (Lowes, 1990b).

Como ejemplos de modelos basados en el Análisis Armónico Esférico, pueden señalarse las distintas versiones del Campo Geomagnético Internacional de Referencia. (I.G.R.F.) propuestos por la División I de la Asociación Internacional de Geomagnetismo y Aeronomía (I.A.G.A) (Langel y Barraclough, 1988; Langel, 1992; Peddie, 1992) ó las propuestas por otras organizaciones, tales como la N.A.S.A. (Langel, Sabaka y Baldwin, 1992) ó el United States Naval Oceanographic Office y el British Geological Survey (Barraclough, Williams y Quinn, 1992).

Los modelos determinados mediante el análisis armónico esférico se obtienen usando datos tomados en toda la Tierra, por lo cual también se les conoce como Desarrollos Globales. Cuando únicamente se utilizan datos de una determinada región, las funciones base $P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda$ y $P_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda$ dejan de ser ortogonales sobre ella y consecuentemente la matriz de mínimos cuadrados no está bien condicionada, por lo que únicamente pueden determinarse los 20 ó 30 primeros términos del potencial (dependiendo del dimensionamiento de la palabra del ordenador que se use) (Haines, 1990). Considerando las dificultades asociadas con el uso, sobre una región de la Tierra, de funciones que han sido diseñadas para utilizarse en toda su superficie, parece adecuado cambiarlas por otras que sean apropiadas para la región de la que deseamos obtener el modelo dando origen a otros dos procedimientos: el **Análisis Armónico Rectangular** y el **Análisis Armónico en Casquetes Esféricos**, a las cuales se suele conocer con el nombre común de **Desarrollos Regionales**.

Las funciones base del potencial empleadas en el Análisis Armónico Rectangular son las de una serie doble de Fourier en senos y cosenos multiplicados por una función exponencial. De esta manera, el potencial en una región rectangular de dimensiones L_x y L_y en las direcciones x e y respectivamente, es:

$$V = Ax + By + Cz + \sum_{m=1}^{M_n} (a_0^m \cos(mx) + b_0^m \sin(mx)) e^{-k_x m z} + \sum_{n=1}^{N_n} \{a_n'' \cos(ny) + c_n'' \sin(ny)\} e^{-k_y n z} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \{a_n^m \cos(mx) \cos(ny) + b_n^m \sin(mx) \cos(ny) + c_n^m \cos(mx) \sin(ny) + d_n^m \sin(mx) \sin(ny)\} e^{-\sqrt{(K_x m)^2 + (K_y n)^2} z}$$

derivando el campo magnético de dicho potencial:

$$B = -\nabla V$$

Las variables x , y , z son las coordenadas rectangulares (con el eje vertical hacia arriba) y

$$K_x = 2\pi / L_x$$

$$K_y = 2\pi / L_y$$

Puesto que ésta es una solución rectangular, la técnica únicamente puede aplicarse en áreas rectangulares cuyos lados no se extiendan más de algunos centenares de kilómetros, aunque esto también depende de las órdenes de truncamiento M y N en el desarrollo en serie.

Haines (Haines, 1990a; 1990b) señala dos problemas que se presentan con este tipo de modelos. El primero está relacionado con el mal condicionamiento de la matriz de mínimos cuadrados cuando tiene lugar una gran diferencia relativa ante términos exponenciales. El segundo problema se presenta cuando el potencial no es una función periódica en los límites de la región del modelo, en ese caso no existirá convergencia uniforme lo cual no es sólo engorroso al trazar las curvas de nivel del modelo en las proximidades de la frontera o cuando se realizan estimaciones de la varianza residual en la región, sino que también posee serias consecuencias matemáticas. Cuando el potencial no es periódico en la región, la derivada del desarrollo con respecto a x o a y no es el desarrollo en serie de las derivadas.

Otros investigadores añaden aún un tercer problema: los términos Ax, By y Cz no tienden a cero cuando z tiende a ∞ , como ocurriría con un potencial debido únicamente a fuentes internas. Dichos términos se introducen para aminorar el efecto producido en la frontera por la falta de convergencia uniforme del desarrollo además de reducir los problemas de contorno asociados con la aproximación rectangular a una geometría esférica. (Haines, 1990a) indica la posibilidad de que dichos errores sean pequeños, ya que la técnica se usa para describir datos en una región, pero la prolongación fuera de ella podría no ser válida.

Como ejemplo de modelos determinados mediante la técnica del Análisis Armónico Rectangular pueden señalarse los propuestos por Nakagama y Yukutake (Nakagama y Yukutake, 1985), utilizando datos del satélite Magsat sobre Japón, y por Barton (Barton, 1987) para determinar el modelo correspondiente a Australia para la época 1985.

En la técnica del Análisis Armónico en Casquetes Esféricos, las funciones base, como en el análisis armónico rectangular, están diseñados para usarse en una región en lugar de en toda la esfera (Haines, 1985). Dicha técnica proporciona el desarrollo en serie del potencial V en coordenadas esféricas y el campo derivado del mismo:

$$V = a \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+1} \{g_k^m \cos(m\lambda) + h_k^m \sin(m\lambda)\} P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)$$

$$\mathbf{B} = -\nabla V$$

donde el grado de funciones asociadas de Legendre es real, en lugar de entero, como en el caso del Análisis Armónico Esférico Global. Las funciones base han sido diseñadas para que los desarrollos en serie de \mathbf{B} sean uniformemente convergentes; el precio que es necesario pagar es la falta de ortogonalidad de las mismas.

Como ejemplos de modelos basados en la aplicación de esta técnica puede citarse el propuesto por Haines y Newitt (Haines y Newitt, 1986) para obtener los

mapas magnéticos del Canadá referidos a 1985. Algunos investigadores españoles, por ejemplo J.M. Torta y A. García han contribuido con su trabajo a la determinación y estudio de modelos de este tipo para el territorio español (García et al, 1990; Torta, 1992)

Con frecuencia, algunos de los modelos anteriormente expuestos se emplean para estimar el campo magnético principal de la Tierra, definiendo el "nivel cero" de las anomalías para extraer éstas de los datos obtenidos en levantamientos aeromagnéticos. Cuando éstos son de gran extensión (varios centenares de kilómetros de lado), suele adoptarse como modelo el Campo Geomagnético Internacional de Referencia (I.G.R.F.) obtenido, como ya se explicó, mediante el Análisis Armónico Esférico Global. Sin embargo, algunos investigadores (Le Mouél y Le Borgne, 1970; Galdeano y Rossignol, 1977a) afirman que esta aproximación puede producir, en ciertos casos, distorsiones considerables debidas a la distribución heterogénea de los observatorios cuyas medidas se han empleado para establecer dicho modelo y también a una descripción insuficiente de la variación secular.

En otras ocasiones, se recurre a seleccionar como modelo una superficie polinómica de grado inferior o igual al tercero. Este tipo de aproximación introduce incertidumbre en los límites de la región del levantamiento debido a la falta de puntos de observación fuera de la misma. Sin embargo, la precisión de tales modelos es mejor que la del I.G.R.F.

Por otra parte, el carácter bidimensional que poseen estos modelos no es inconveniente para que las anomalías extraídas a partir de ellos puedan prolongarse a altitudes distintas a la del levantamiento, atenuándose aquellos detalles que distorsionen las medidas (prolongación ascendente) o acentuando algunas anomalías cuya amplitud, debido a la altitud del vuelo, dificulte su resolución (prolongación descendente). En ambos casos, mapas de anomalías de regiones adyacentes levantados a diferentes altitudes, pueden unirse para constituir un único mapa de una región más extensa y a una misma altitud. Como ejemplo concreto de tal aplicación, podemos citar el ensambaje de los mapas de anomalías del Mediterráneo Norte, del Mediterráneo Sur, del Mar de Alborán y del Golfo de Valencia a una misma altitud (Galdeano y Rossignol, 1977b; Galdeano, 1980).

Otro factor importante que poseen los modelos polinómicos, está relacionado con la variación de menor longitud de onda del campo magnético que pueden representar. Así por ejemplo, la variación de menor longitud de onda que puede discriminarse mediante un modelo en funciones armónico esféricos de grado n es, según Bullard (Bullard, 1967)

$$\lambda_{min} = \frac{c}{n}$$

siendo c la longitud de la circunferencia terrestre. Para el caso concreto del modelo IGRF 85, se obtendría un valor aproximado de 4000 Km. Sin embargo, en el caso de un modelo polinómico de segundo grado, para una región de dimensiones tales como la del territorio español peninsular, ese valor sería de 518 Km.

Las razones expuestas anteriormente, así como la sencillez de su determinación, aconseja la elección de este tipo de modelo para representar el campo magnético principal en este trabajo de investigación.

No obstante, dado que para ello contamos con una muestra de puntos de medida, es necesario realizar un análisis estadístico inferencial que permita obtener la precisión de las estimaciones de tales modelos y su elección.

III.3. ANALISIS ESTADISTICO DEL MODELO DE SUPERFICIES POLINOMICAS.

La explicación de las variaciones de cualquiera de las componentes del campo magnético con las variaciones de la posición horizontal de los puntos de medida mediante modelos de tipo polinómico determinados en el procedimiento de mínimos cuadrados, puede hacerse de una forma más amplia dentro del campo de la estadística tal como se indica a continuación:

Sean k variables (x_1, x_2, \dots, x_k) denominadas variables explicativas o regresores y una variable aleatoria " y ", que llamaremos variable de respuesta, la cual depende de las k variables anteriores. El modelo más general que explique las variaciones de la variable y como función de los regresores puede expresarse así:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + u$$

siendo u una variable aleatoria llamada perturbación del modelo, la cual puede englobar a otras variables $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ que pueden no ser observables e incluso desconocidas para el investigador.

Si admitimos que la función f admite una aproximación lineal, se obtendría el modelo.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + u$$

En nuestro caso concreto, las variables explicativas serían las variables de posición y la variable de respuesta, la intensidad del campo magnético. La perturbación u , contiene los errores de medida no compensados y fundamentalmente las anomalías.

El modelo se construye a partir de las observaciones de las variables x_i ($i=1, 2, \dots, k$) e y , de manera que para una de dichas observaciones tendremos:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_k x_{ki} + u_i \quad (III, 1)$$

Cuando el conjunto de observaciones constituye una muestra y se desean hacer inferencias sobre una población infinita de medidas, es necesario hacer las siguientes hipótesis respecto a la variable aleatoria u :

- a) La perturbación tiene de media cero.
- b) La varianza de la perturbación (σ^2) es constante (**homocedasticidad**).

- c) Las perturbaciones son independientes entre sí.
- d) La perturbación tiene una distribución normal.

Llamando U' al vector fila (u_1, u_2, \dots, u_k) estas condiciones se pueden escribir así:

- U es normal multivariable con $E(U) = 0$
- La matriz de varianzas y covarianzas $E(UU') = \sigma^2 I_n$
siendo I_n la matriz unitaria de orden n .

Además de estas condiciones supondremos otras referentes al número de observaciones y a las variables explicativas:

- (e) El número de datos disponibles es, como mínimo, $k+1$
- (f) Las variables x_i son linealmente independientes.

Las hipótesis respecto a u pueden escribirse también en términos de la variable respuesta como sigue:

- (a') Para cada (x_1, x_2, \dots, x_k) fijo la distribución de y tiene de media

$$E(y/x_1, x_2, \dots, x_k) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_k x_k$$

- (b') Para cada (x_1, x_2, \dots, x_k) , fijo la varianza de y es σ^2 .
- (c') Las variables y_i son independientes.
- (d') La variable respuesta se distribuye normalmente.

En el caso de dos variables explicativas cada observación puede representarse geoméricamente con un punto en un espacio de tres dimensiones (x_1, x_2, y_i) (Fig. III, 1).

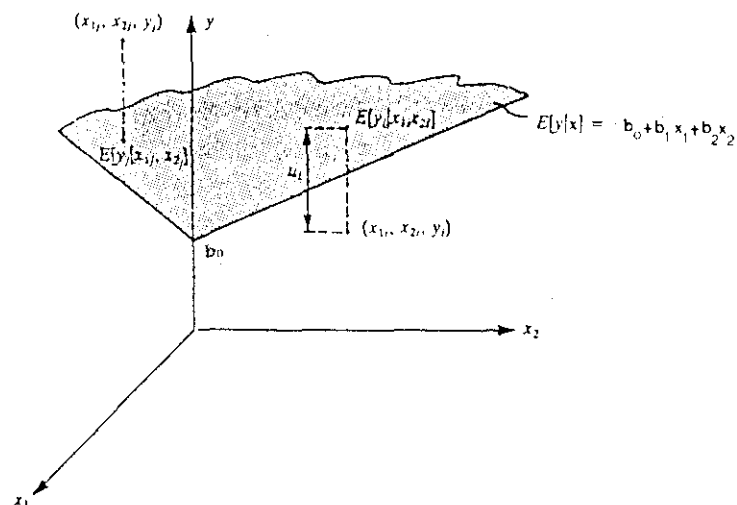


Fig. III,1

La hipótesis (a) indica que los valores medios de las observaciones - para cada (x_1, x_2) fijo- se hallan sobre un plano. En el caso de ser $k > 2$, las medias se distribuirán sobre un hiperplano en un espacio de $k+1$ dimensiones.

Las hipótesis (d) y (b) establecen que para cada punto (x_{1i}, x_{2i}) fijo, las perturbaciones u_i que separan al punto (x_{1i}, x_{2i}, y_i) del plano, siguen una distribución normal, siendo su varianza independiente del punto (x_{1i}, x_{2i}) elegido.

La hipótesis (c) indica que los errores o perturbaciones se producen de manera independiente de una observación a otra, lo que implica según (III, 1) la independencia de las observaciones de y .

Las hipótesis (f) y (e) son necesarias para poder estimar el modelo sin ambigüedad. Si el número de observaciones fuese igual o menor que el de parámetros (b_j) , al sustituir en (III.1), tendríamos, haciendo cero todas las perturbaciones, un sistema de $k+1$ incógnitas y n ecuaciones, que tendrá una solución única si $n=k+1$, e infinitas si $n < k+1$. En ninguno de ambos casos se puede estimar la variabilidad de la perturbación, ya que todos los residuos (perturbaciones estimadas) serán cero.

Finalmente, si existiera una relación lineal exacta entre las variables, no tendríamos k variables sino $k-1$; por ejemplo, si $x_2 = a + cx_1$, sustituyendo x_2 en el modelo

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 (a + cx_1) + \dots + b_k x_k + u$$

es decir

$$y = b'_0 + b'_1 x_1 + b_3 x_3 + \dots + b_k x_k + u$$

siendo

$$b'_0 = b_0 + b_2 a$$

$$b'_1 = b_1 + b_2 c$$

con lo que el modelo equivale a otro con $k-1$ variables.

III.4. ANALISIS ESTADISTICO

III.4.1. Estimación del modelo.

Para estimar el modelo se recurre al método de Máxima Verosimilitud. Ahora bien, dado que la variable aleatoria u es normal, el método de estimación de Máxima Verosimilitud equivale al método de Mínimos Cuadrados.

Así pues, la función que hay que minimizar es

$$M = \sum (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} \dots b_k x_{ki})^2$$

derivándola respecto a b_0 , los estimadores de los coeficientes (b_j) deben verificar

$$\sum (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i} \dots \hat{b}_k x_{ki}) = 0 \quad (III,2)$$

y llamando $e_i = y_i - \hat{y}_i$ a los residuos del modelo, la ecuación (III,2) será

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad (III,3)$$

derivando respecto a b_j se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n e_i x_{ji} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (III,4)$$

El sistema de ecuaciones definido por (III,3) y (III,4) se componen de $k+1$ ecuaciones e incógnitas, y puede escribirse matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \dots \\ \hat{b}_k \end{bmatrix} \quad (III,5)$$

Llamando \mathbf{X} a la matriz de datos (de orden $n (k+1)$), cuyas columnas son los valores de las variables explicativas más la columna de unos del término b_0 , \mathbf{Y} al vector de observaciones y $\hat{\mathbf{b}}$ al de parámetros

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}} \quad (III,6)$$

y como por las hipótesis (e) y (f) $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es no singular

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (III,7)$$

que expresa matricialmente las ecuaciones para obtener la estimación de los coeficientes y por consiguiente la del modelo.

III.4.2. Interpretación geométrica

Consideramos el sistema de vectores de n componentes: $\mathbf{1}$, \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , ..., \mathbf{X}_k que forman las columnas de la matriz \mathbf{X} . El objetivo de la estimación es determinar un vector \mathbf{Y} , dado por

$$\mathbf{Y} = b_0 \mathbf{1} + b_1 \mathbf{X}_1 + b_2 \mathbf{X}_2 + \dots + b_k \mathbf{X}_k$$

que estará contenido, por tanto, en el subespacio vectorial generado por el conjunto de vectores $(1, X_1, X_2, \dots, X_k)$. El criterio de mínimos cuadrados impone que el módulo del vector $e = Y - \hat{Y}$ sea mínimo. Para ello, \hat{Y} debe ser la proyección de Y sobre el subespacio generado por el sistema $(1, X_1, X_2, \dots, X_k)$, lo cual implica que el vector e debe ser ortogonal a dicho subespacio (Fig.III,2) y en particular a cada uno de los vectores $1, X_1, X_2, \dots, X_k$ que lo engendran.

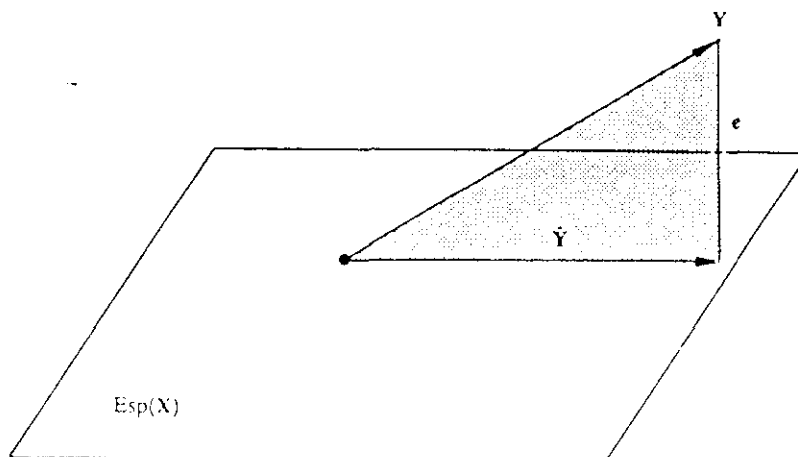


Fig. III,2

Por tanto, las ecuaciones obtenidas por el método de mínimos cuadrados son

$$1'e = X'_1 e = X'_2 e = \dots = X'_k e = Y'e = 0$$

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse matricialmente como

$$X'e = 0 \tag{III,8}$$

donde X es la matriz de datos y 0 un vector de ceros.

Expresando los residuos en función de los datos

$$X'(Y - X\hat{b}) = 0$$

o bien

$$X'Y = (X'X)\hat{b}$$

que es la ecuación (III,6)

En resumen, el método de Mínimos Cuadrados se basa en encontrar un vector Y que pertenezca a un subespacio definido por $k+1$ vectores $1, X_1, X_2, \dots, X_k$, y que esté lo más próximo posible al vector original de observaciones. Esto equivale a tomar \hat{Y} como la proyección ortogonal de Y sobre dicho subespacio.

Por tanto;

$$Y = \hat{Y} + e$$

$$\hat{Y} = X\hat{b} = X(X'X)^{-1} X'Y = VY$$

siendo V una matriz de proyección por lo que será idempotente.

Observemos además que:

$$e = Y - \hat{Y} = (I - V)Y = (I - V)(Xb + U)$$

y como

$$VX = X$$

$$e = (I - V)U$$

Esta igualdad expresa los residuos como combinación lineal de las perturbaciones y juega un papel importante en la diagnosis del modelo.

III.4.3. Propiedades de los estimadores \hat{b}_i .

Los estimadores \hat{b}_i son, según (III,7), funciones lineales de los valores de y , por tanto también se distribuirán normalmente. Vamos a determinar su media y su varianza.

III.4.3.1. Cálculo de las medias

Llamando C a la matriz $(X'X)^{-1} X'$ tendremos, según (III,7)

$$\hat{b} = CY = C(Xb + U)$$

y como

$$CX = (X'X)^{-1} X'X = I$$

tendremos

$$\hat{b} = b + CU \tag{III,9}$$

Teniendo en cuenta que la esperanza matemática de un vector aleatorio es el vector obtenido tomando esperanzas de las componentes,

$$E(\hat{b}) = b + CE(U)$$

pero según las hipótesis del modelo

$$E(U) = 0$$

por lo que

$$E(\hat{b}) = b \quad (III, 10)$$

Esta ecuación expresa que los estimadores mínimos cuadrados son insesgados o centrados.

III.4.3.2. Cálculo de las varianzas

Utilizando (III, 11)

$$\hat{b} - b = CU \quad (III, 11)$$

La matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de b ($Var(\hat{b})$) será, según (III, 10):

$$Var(\hat{b}) = \begin{bmatrix} E\left[\left(\hat{b}_0 - b_0\right)^2\right] & E\left[\left(\hat{b}_0 - b_0\right)\left(\hat{b}_1 - b_1\right)\right] & \dots & E\left[\left(\hat{b}_0 - b_0\right)\left(\hat{b}_k - b_k\right)\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E\left[\left(\hat{b}_0 - b_0\right)\left(\hat{b}_k - b_k\right)\right] & E\left[\left(\hat{b}_1 - b_1\right)\left(\hat{b}_k - b_k\right)\right] & \dots & E\left[\left(\hat{b}_k - b_k\right)^2\right] \end{bmatrix}$$

que puede obtenerse al tomar esperanzas en la matriz

$$A = (\hat{b} - b)(\hat{b} - b)'$$

utilizando (III, 11)

$$A = (CU)(CU)' = CUU' C'$$

tomando esperanzas y teniendo en cuenta que

$$E(UU') = \sigma^2 I$$

tal como se vio en el apartado III.3:

$$\begin{aligned} Var(\hat{b}) &= E(A) = \sigma^2 CC' = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1} \\ Var(\hat{b}) &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (III, 12)$$

Llamando q_{ij} a los elementos de la matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ de (III,10) y (III,12) tendremos que los estimadores \hat{b}_j se distribuyen según una ley normal de media b_j y desviación típica $\sigma\sqrt{q_{jj}}$

$$\hat{b}_j \sim N(b_j, \sigma\sqrt{q_{jj}})$$

III.4.4. Estimación de la varianza de las perturbaciones.

El modelo quedará especificado al estimar el vector \mathbf{b} y la varianza σ^2 de la perturbación, ya que con las b_j queda definido el modelo mientras que con la estimación de σ^2 se obtiene la precisión del ajuste.

Se demuestra (Peña, 1989b) que el estimador centrado de σ^2 , es la varianza residual

$$\hat{S}_R^2 = \sum \frac{e_i^2}{n-k-1} \quad (III, 14)$$

cumpléndose además que el estadístico

$$\frac{(n-k-1)\hat{S}_R^2}{\sigma^2} = \sum \left(\frac{e_i}{\sigma} \right)^2$$

sigue una distribución χ^2 de $n-k-1$ grados de libertad:

$$\frac{(n-k-1)\hat{S}_R^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k-1}^2 \quad (III, 15)$$

Esta propiedad permite hallar el intervalo de confianza de σ^2 sin más que aplicar su definición (Fig.III,3)

$$\text{prob} \left[\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-k-1)\hat{S}_R^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \right] = 1-\alpha$$

de donde

$$\frac{l}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \frac{\sigma^2}{\hat{S}_R^2} (n-k-1) \leq \frac{l}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}$$

o bien

$$(n-k-1) \frac{\hat{S}_R^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq (n-k-1) \frac{\hat{S}_R^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad (III,16)$$

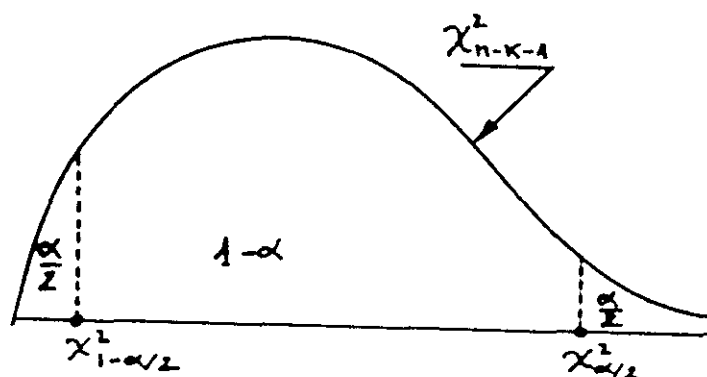


Fig. III,3

III.4.5. Intervalos de confianza de los coeficientes y contrastes individuales.

De acuerdo con lo expuesto en (III,13) y (III,15)

$$\hat{b}_i \sim N(b_i, \sigma \sqrt{q_{ii}})$$

$$\frac{(n-k-1) \hat{S}_R^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k-1}$$

Además, se demuestra (Peña, 1989b) que los vectores $\hat{\mathbf{b}}$ y \mathbf{e} son estadísticamente independientes, por lo que el estadístico

$$t = \frac{\frac{\hat{b}_i - b_i}{\text{Var}(\hat{b}_i)^{1/2}}}{\sqrt{\frac{1}{(n-k-1)} \frac{(n-k-1) \hat{S}_R^2}{\sigma^2}}} = \frac{\hat{b}_i - b_i}{\hat{S}_R \sqrt{q_{ii}}} \quad (III,17)$$

posee una distribución t de Student de $(n-k-1)$ grados de libertad. Esta importante propiedad permite determinar intervalos de confianza para cada coeficiente b_i y realizar contrastes individuales.

III.4.5.1. Intervalos de confianza

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente con (III,16) podemos contruir el intervalo de confianza para cada coeficiente, que será

$$\left(\hat{b}_i \pm t_{n-k-1, (\alpha/2)} \hat{S}_R \sqrt{q_{ii}} \right)$$

siendo q_{ii} el elemento i -ésimo de la diagonal de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ y $t_{n-k-1, (\alpha/2)}$ el valor proporcionado, para un grado de confianza $(1-\alpha)$, por la tabla de la distribución de la t de Student de $n-k-1$ grados de libertad.

III.4.5.2. Contrastes individuales

Los contrastes individuales se emplean cuando se desea establecer que el efecto de una determinada variable x_i , medido por el valor de b_i , debe ser igual a un valor b_i^* prefijado. Esto equivale a demostrar que la variable aleatoria \hat{b}_i tiene de media b_i^* . El test correspondiente se realiza calculando el estadístico.

$$t = \frac{\hat{b}_i - b_i^*}{\hat{S}_R \sqrt{q_{ii}}}$$

que, como antes se ha dicho, seguirá una distribución t con $n-k-1$ grados de libertad si $E(\hat{b}_i) = b_i^*$.

Un contraste importante es el de la hipótesis $b_i^* = 0$, lo que implica que la variable x_i no afecta a la respuesta y por ello, no debería aparecer en el modelo. Si esto es cierto, la variable

$$t_0 = \frac{\hat{b}_i}{\hat{S}_R \sqrt{q_{ii}}} \tag{III, 19}$$

seguirá una distribución t con $n-k-1$ grados de libertad y rechazaremos $b_i=0$, cuando el valor de t_0 sea significativamente grande.

III.4.6. Contrastes para grupos de coeficientes

El contraste más importante en regresión múltiple establece que ninguna de las variables explicativas influye en la respuesta. Este contraste se formula así

$$H_0: b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$$

$$H_1: \text{algún } b_i \neq 0 \quad (i=1,2,\dots,k)$$

Para realizarlo hay que tener en cuenta la descomposición de la variabilidad de la respuesta, la cual puede obtenerse del teorema de Pitágoras (Fig.III,4).

Considerando los vectores

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \bar{Y} = \bar{y} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

y la interpretación geométrica de los vectores e e y estudiada en III.4.2

$$|Y - \bar{Y}|^2 = |\hat{Y} - \bar{Y}|^2 + |Y - \hat{Y}|^2 = |\hat{Y} - \bar{Y}|^2 + |e|^2$$

de donde se deduce que

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum e_i^2 \quad (III,20)$$

que expresa la variación total (VT) como suma de la variación explicada (VE) y de la no explicada o residual (VNE).

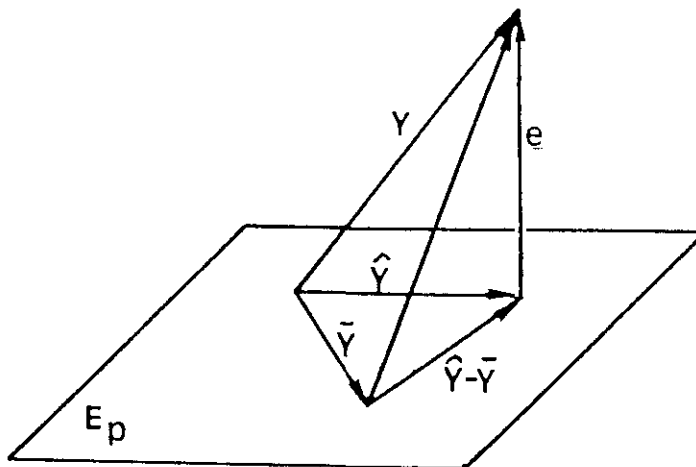


Fig. III,4

La expresión (III,20) es la igualdad fundamental del Análisis de la Varianza, por lo que teniendo en cuenta las hipótesis del modelo, si se cumple la hipótesis nula H_0 , el estadístico

$$F = \frac{VE}{K\hat{S}_R^2} \quad (III,21)$$

posee una distribución F de Snedecor con $(k, n-k-1)$ grados de libertad, pudiéndose así establecer el contraste. La descomposición (III,20) suele escribirse en la siguiente tabla:

Tabla III,1

| FUENTE DE VARIACIÓN | SUMA DE CUADRADOS | GRADOS DE LIBERTAD | VARIANZA | CONTRASTE |
|------------------------------|----------------------------|--------------------|---------------|---------------------------------|
| EXPLICADA POR VARIABLES (VE) | $\sum (y_i - \bar{y})^2$ | (k) | S_e^2 | $F = \frac{S_e^2}{\hat{S}_R^2}$ |
| RESIDUAL (VNE) | $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ | (n-k-1) | \hat{S}_R^2 | |
| TOTAL | $\sum (y_i - \bar{y})^2$ | (n-1) | S_y^2 | |

Este contraste puede extenderse a un subconjunto de coeficientes (b_1, b_2, \dots, b_k) de la siguiente manera:

efectuando primero la regresión del modelo completo

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{b}_j x_j$$

llamaremos $VE(k)$ a la variación explicada por los k regresores y $VNE(k)$ a la variación residual. A continuación se realiza la regresión

$$\hat{y} = \hat{b}'_0 + \sum_{j=i-1}^k \hat{b}'_j x_j$$

llamando $VE(k-i)$ a la variación explicada con los $k-i$ regresores de este segundo modelo. Tendremos que

$$\Delta VE(i) = VE(k) - VE(k-i) \geq 0$$

representa la variabilidad incremental explicada por las i variables sometidas al contraste. Se demuestra que si se cumple la hipótesis de nulidad de los i coeficientes, el estadístico

$$F_{(i, n-k-1)} = \frac{\frac{\Delta VE(i)}{i}}{\frac{VNE(k)}{n-k-1}} = \frac{\Delta VE(i)}{i \hat{S}_R^2} \quad (III,22)$$

posee una distribución F de Snedecor de $(i, n-k-1)$ grados de libertad, siendo \hat{S}_R^2 la varianza residual del modelo completo. Por lo tanto, el contraste de que los coeficientes (b_1, b_2, \dots, b_k) son cero se puede realizar mediante (III,22), rechazándose la hipótesis nula $(b_j = 0, j=1, \dots, k)$, cuando su valor sea estadísticamente alto.

III.4.7. Interpretación de los contrastes

La siguiente tabla presenta los seis casos que pueden presentarse al realizar contrastes en un modelo de regresión:

Tabla III,2

| CASOS POSIBLES | CONTRASTE CONJUNTO (F) | CONTRASTE INDIVIDUAL (t) |
|----------------|------------------------|--------------------------|
| 1 | Significativo | Todos significativos |
| 2 | Significativo | Algunos significativos |
| 3 | Significativo | Ninguno significativo |
| 4 | No significativo | Todos significativos |
| 5 | No significativo | Algunos significativos |
| 6 | No significativo | Ninguno significativo |

El caso 1 indica que todas las variables explicativas influyen. El caso 2 indica que solamente influyen algunas variables, por lo que, en principio, deberíamos eliminar las no significativas -ésto no debe hacerse mecánicamente, dado que implica riesgos de error en la especificación del modelo-. El caso 3 corresponde a aquel en el que las k variables son muy dependientes entre sí y, aunque conjuntamente influyen, los estimadores de los efectos individuales tienen varianzas muy altas por lo que los valores del estadístico

$$t_i = \frac{\hat{b}_i}{[Var(\hat{b}_i)]^{1/2}}$$

son pequeños y no significativos. Este problema recibe el nombre de **multicolinealidad** y se describe en III.4.9.6.

El caso 4 es muy poco frecuente y representa un tipo de multicolinealidad especial: si dos variables influyen mucho sobre la respuesta pero en sentido contrario y tomamos una muestra tal que cuando x_1 es alta x_2 es baja, de manera que exista una fuerte correlación negativa, su efecto conjunto puede ser nulo aunque sus efectos individuales sean detectables. Esto mismo se aplica al caso 5. Finalmente, en el caso 6, ninguna de las variables influye. En este último caso no se puede concluir que las variables independientes no influyan sobre la y , sino solamente que sus efectos no se detectan en la muestra. Por ejemplo, si una variable se mantiene aproximadamente constante, sus efectos sobre las variables de respuesta no serán detectables.

III.4.8. Correlación en regresión multivariable

Para construir una medida descriptiva del ajuste global del modelo se utiliza el cociente entre la variabilidad explicada por la regresión y la variabilidad total (III,23). Esta medida se llama coeficiente de determinación.

$$R^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (III,23)$$

$100(1-R^2)$ representa el porcentaje de variabilidad no explicada por el modelo. Con las ecuaciones (III,20) y (III,23) se comprueba fácilmente que

$$\frac{\hat{S}_R^2}{\hat{S}_y^2} = \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2) \quad (III,24)$$

Sin embargo, la utilización del coeficiente de determinación presenta algunos problemas importantes. En primer lugar, aumenta siempre introduciendo nuevas variables en el modelo, aunque su efecto no sea significativo. Por lo tanto, siempre se puede artificialmente incrementar su valor añadiendo nuevas variables. En segundo lugar, R^2 es muy sensible a la formulación del modelo y a la elección de la variable dependiente; es posible estimar dos modelos formalmente idénticos y con la misma capacidad predictiva pero que conducen a distintos valores de R^2 .

III.4.8.1. El coeficiente de determinación corregido

Para evitar que R^2 aumente siempre con nuevas variables, en lugar de definirlo como un cociente de sumas de cuadrados, se define como un cociente de varianzas:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{S}_R^2}{\hat{S}_y^2} \quad (III,25)$$

que recibe el nombre de "**coeficiente de determinación corregido por el número de grados de libertad**". De esta manera

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (III,26)$$

de (III,20) y (III,23)

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

y sustituyendo en (III,26) y teniendo en cuenta (III,24)

$$\bar{R}^2 = (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1} = \frac{\hat{S}_R^2}{\hat{S}_y^2}$$

es decir

$$\hat{S}_R^2 = \hat{S}_y^2 (1 - \bar{R}^2) \quad (III,27)$$

por lo que al añadir una nueva variable, \hat{S}_R^2 disminuye únicamente si \bar{R}^2 aumenta.

III.4.9. Diagnósis del modelo de regresión

Una vez que se ha construido el modelo, es necesario comprobar las hipótesis de linealidad, normalidad, homocedasticidad e independencia. Estas condiciones fueron formuladas respecto a las perturbaciones (U), las cuales se desconocen. No obstante, si el modelo es adecuado para describir los datos, los valores de residuos (e) deberán representar una estructura similar, cumpliendo las mismas hipótesis.

Por otra parte, es importante, tal como más adelante se verá, exigir que el modelo sea robusto y no posea multicolinealidad.

III.4.9.1. El análisis gráfico de los residuos

A continuación se presentan e interpretan los siguientes gráficos residuos:

- Histograma y gráfico probabilístico normal de los residuos.
- Gráfico de residuos respecto a valores previstos (e_i, \hat{y}_i).
- Gráfico de residuos respecto a variables explicativas.
- Gráficos parciales de residuos.

- Gráficos de residuos frente a variables omitidas.

Histograma y gráfico probabilístico normal de los residuos

Estos gráficos son útiles para detectar valores alejados y analizar la normalidad de los residuos respectivamente.

El análisis gráfico de los residuos puede contemplarse con algunos de los contrastes de hipótesis que se mencionan en III.4.9.3.

Gráfico de residuos respecto a valores previstos

Con estos gráficos se puede detectar la falta de linealidad (Fig.III,5a), la heterocedasticidad -falta de homocedasticidad (Fig.III,5b)- y los valores atípicos.

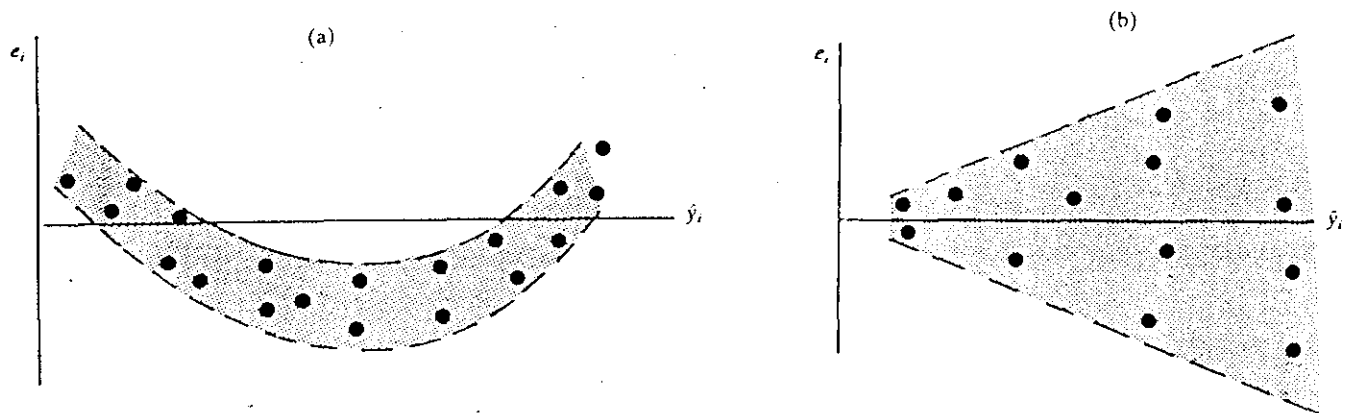


Fig. III,5

Gráfico de residuos respecto a variables explicativas

Pueden ayudar a identificar si la falta de linealidad o de heterocedasticidad es debida a alguna variable explicativa.

Gráficos parciales de residuos

Estos gráficos suplementan a los anteriores y permiten estudiar la relación entre una variable "y" y una variable x_k , eliminando el efecto de las restantes variables explicativas x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . Para ello, basta con dibujar para cada valor x_k el residuo que se obtendría al restar de los valores de y las estimaciones proporcionadas por la regresión efectuada con las $k-1$ variables explicativas mencionadas anteriormente. El gráfico mide, aproximadamente, el efecto marginal de x_k sobre y.

III.4.9.2. Error de especificación (falta de linealidad)

Se dice que existe un error de especificación cuando se establece una dependencia errónea de la respuesta en función de las variables explicativas: omitimos variables importantes, introducimos variables innecesarias o suponemos una relación lineal cuando la dependencia es no lineal.

Omitir una variable relevante conduce a estimaciones sesgadas de los parámetros y de sus varianzas. Esto último, en algunos casos, puede llevar a no detectar como significativas, variables que si lo son.

Incluir variables irrelevantes, puede tener también consecuencias graves, tanto más desfavorables, cuanto mayor sea la dependencia entre las incluidas.

Especificar una relación lineal, cuando la existente es no lineal, es especialmente grave si se hacen predicciones fuera del rango de los datos. Una relación no lineal puede siempre aproximarse en un entorno más o menos reducidos por una lineal. Es posible que el modelo sea adecuado en un estrecho marco de valores observados, pero muy incorrecto fuera de él.

Los gráficos más convenientes para detectar los errores de especificaciones son:

- Residuos respecto a valores estimados.
- Residuos frente a cada variable explicativa.
- Residuos frente a nuevas variables potencialmente influyentes.

También pueden ser útiles los diagramas de valor observado de la variable respuesta frente a valor estimado de la misma. En estos diagramas puede observarse con facilidad si las observaciones se ajustan aceptablemente al modelo, coincidiendo todos los puntos con la bisectriz del primer cuadrante cuando el ajuste es perfecto.

Los errores de especificación por falta de linealidad pueden tratarse con una transformación de las variables, escribiendo el modelo así:

$$y^{(\lambda_0)} = b_0 + b_1 x_1^{(\lambda_1)} + \dots + b_k x_k^{(\lambda_k)} + u$$

llamado z a cualquiera de las variables:

$$z^{(\lambda)} = \frac{z^\lambda - 1}{z^{(\lambda-1)} \lambda} \text{ para } \lambda \neq 0$$
$$z^{(\lambda)} = z \ln z \text{ para } \lambda = 0$$

y siendo z la media geométrica de la variable que se transforma. Para determinar los $k+1$ parámetros $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ hay que maximizar la función de verosimilitud respecto a ellos

$$L(\lambda_0, \lambda) = -\frac{n}{2} \ln VNE(\lambda_0, \lambda)$$

siendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ y $VNE(\lambda_0, \lambda)$ la suma cuadrática de los residuos en el modelo ajustado, aplicando la transformación definida por λ_0 y λ a todas las variables. El máximo se determina calculando el valor de la función cuando el número de valores posibles de λ_0 y λ es pequeño: en caso contrario, se recurre a un algoritmo iterativo.

III.4.9.3. Hipótesis de normalidad

La hipótesis de normalidad es necesaria para realizar el resto de los contrastes y obtener intervalos de confianza para los parámetros. Además, afecta a las propiedades de los estimadores: los estimadores mínimo-cuadráticos dejan de coincidir con los máximo-verosímiles y aunque todavía centrados, dejan de ser eficientes (centrados y de mínima varianza).

La falta de normalidad puede deberse a la presencia de algunas observaciones atípicas. Si la distribución de los residuos no se desvía mucho de la normalidad, los contrastes t y F pueden ser todavía utilizados, aunque sus resultados son sólo aproximados.

La normalidad puede estudiarse empleando los gráficos probabilísticos normales y completando el estudio con alguno de los siguientes contrastes de hipótesis:

- Contraste de D'Agostino (Sachs, 1978).
- Contraste de Kolmogorov-Smirnov (Peña, 1989a).
- Contraste de la χ^2 (Ruiz-Maya, 1986).
- Contraste de Shapiro y Wilk (Peña, 1989a).
- Contrastes de Asimetría y de Curtosis.

Todos ellos pueden encontrarse en la bibliografía adjunta a esta tesis, no obstante a continuación se explican brevemente algunos de ellos:

Contraste de Kolmogorov-Smirnov

El contraste de Kolmogorov-Smirnov se aplica únicamente a variables continuas. El procedimiento, en resumen, consiste comparar la función de distribución empírica de los datos $F_n(x)$ con una teórica $F(x)$ (en nuestro caso, una normal), de la siguiente manera:

Sea x_1, \dots, x_n la muestra ordenada de las observaciones (en nuestro caso los residuos) de manera que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n$$

La función de la distribución empírica de la muestra se calcula así:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{r}{n} & \text{si } x_r \leq x < x_{r+1} \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Para contrastar la hipótesis de que el modelo genera los datos es $F(x)$, se calcula el estadístico

$$D_n = \max |F_n(x) - F(x)|$$

cuya distribución, cuando la hipótesis es cierta, se halla tabulada. Si el valor de D_n es mayor que el hallado en las tablas, una vez fijado el nivel de significación α , se rechaza la hipótesis de normalidad.

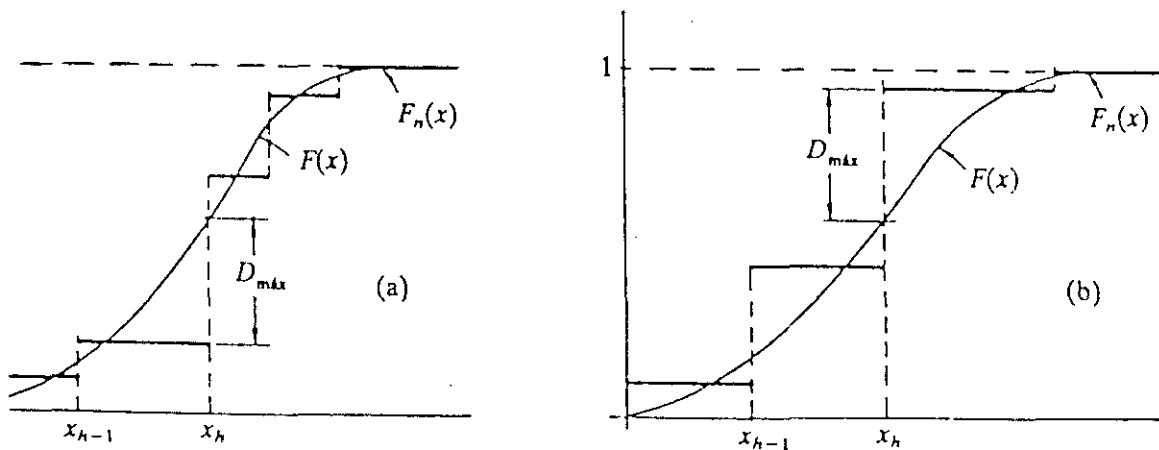


Fig. III,6

Al realizar el contraste, pueden presentarse dos casos

- a) La distancia máxima entre $F(x)$ y $F_n(x)$ se da inmediatamente antes x_h y su valor es

$$|F_n(x_{h-1}) - F(x_h)|$$

- b) La distancia máxima es

$$|F_n(x_h) - F(x_h)|$$

Por lo tanto, al aplicar el test hay que calcular primero en cada punto x_h

$$D_n(x_h) = \max\{|F_n(x_{h-1}) - F(x_h)|, |F_n(x_h) - F(x_h)|\}$$

y después tomar el máximo de los valores $D_n(x)$.

El contraste de Shapiro y Wilks

El contraste consiste en dibujar la distribución empírica en un gráfico de probabilidad normal y ajustarla a una recta. La normalidad se rechaza cuando el ajuste es bajo, que corresponde a valores pequeños del coeficiente

$$W = \frac{1}{nS^2} \left[\sum_{j=1}^h a_{j,n} (x_{n-j+1} - x_j) \right] = \frac{A^2}{nS^2} \quad (III,28)$$

donde s^2 es la varianza de los valores x_j (en nuestro caso los residuos); h es $n/2$ si n es par y $(n-1)/2$ si n es impar. Los coeficientes $a_{j,n}$ se hallan tabulados en función de n . La distribución de W está tabulada y se rechaza la normalidad cuando el valor calculado de W es menor que el valor crítico dado por las tablas.

Los contrastes de asimetría y curtosis

En la mayoría de los casos la falta de normalidad es debida o bien, a una fuerte asimetría, o bien a la presencia de observaciones atípicas que proceden de distribuciones de los residuos con mayor apuntamiento o curtosis que la de una distribución normal. Todo esto puede comprobarse mediante los contrastes de asimetría y de curtosis (Afifi and Azen, 1977) que a continuación se describen.

El coeficiente de asimetría muestral es

$$g_1 = \frac{m_3}{S^3} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n S^3}$$

y el coeficiente de apuntamiento o curtosis es:

$$g_2 = \frac{m_4}{S^4} = \frac{\sum_1^n (x_i - x)^4}{S^4}$$

donde S es la desviación típica muestral de los datos (en nuestro caso concreto, los residuos).

Bajo la suposición de normalidad, el coeficiente de asimetría poblacional valdría 0 y el de apuntamiento 3.

Para muestras grandes ($n \geq 50$ para el caso de la asimetría y $n \geq 200$ en el de la curtosis) la distribución de g_1 es aproximadamente normal con media y varianza

$$\begin{aligned} E(g_1) &= 0 \\ \text{Var}(g_1) &\cong \frac{6}{n} \end{aligned} \quad (III,29)$$

y la de g_2 también es normal, con media y varianza

$$\begin{aligned} E(g_2) &= 3 \\ \text{Var}(g_2) &\cong \frac{24}{n} \end{aligned} \quad (III,30)$$

Consecuentemente, los estadísticos

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{g_1}{\sqrt{\frac{6}{n}}} \approx N(0,1) \\ z_2 &= \frac{g_2 - 3}{\sqrt{\frac{24}{n}}} \approx N(0,1) \end{aligned}$$

es decir, se adaptan asintóticamente a una distribución normal de media 0 y varianza 1. Por lo tanto, fijando un nivel de significación podremos contrastar respectivamente las hipótesis nulas:

$$H_0: g_1 = 0 \quad \text{para el caso de la asimetría}$$

$$H_0: g_2 - 3 = 0 \quad \text{para el caso de la curtosis}$$

Si en cualquiera de los dos casos el valor del estadístico correspondiente fuera superior al que se obtendría para el nivel fijado, la hipótesis de normalidad se rechazaría, pudiéndose averiguar además su origen.

Cuando los residuos indiquen falta de normalidad tendremos que investigar sus causas. Si existen observaciones heterogéneas que producen una distribución

más apuntada de lo normal, deberemos estudiar los datos correspondientes para identificar si son debidas a variables omitidas en el modelo y, cuando así sea, incluirlas.

Si los residuos se desvían de la normalidad por una fuerte asimetría, tendremos que elegir entre:

- (a) Transformar la variable respuesta.
- (b) Renunciar a los contrastes y limitar el análisis a la estimación de los parámetros, incluyendo una medida descriptiva del ajuste, como el coeficiente de determinación corregido por los grados de libertad.
- (c) Deducir de la distribución de residuos un modelo de distribución para la perturbación consistente con lo observado y construir contrastes aproximados, derivados del modelo.

III.4.9.4. Hipótesis de homocedasticidad

En caso de producirse heterocedasticidad en las perturbaciones, la hipótesis

$$Var(u_i) = \sigma^2 = cte$$

no es aplicable.

Las consecuencias de la heterocedasticidad en el modelo lineal de regresión son muy importantes: los estimadores son centrados -obsérvese que en la deducción (III, 10) no se empleó la hipótesis de igualdad de varianzas- pero dejan de ser eficientes. Las fórmulas deducidas para las varianzas de los estimadores no son correctas y los contrastes dejan de ser aplicables.

La identificación de la heterocedasticidad se efectúa, en general, mediante el gráfico de e_i frente a \hat{y}_i , y el de e_i frente a x_k para identificar si la heterogeneidad en la variabilidad es debido, especialmente, a alguna de las variables explicativas.

Cuando el gráfico de los residuos frente a los valores esperados no es concluyente, se suele calcular la varianza de los residuos por tramos y representar su evolución respecto a los \hat{y}_i .

Otro procedimiento consiste en recurrir a un contraste de hipótesis. Se han propuesto muchos contrastes de hipótesis de heterocedasticidad. De todos ellos, describimos aquí el contraste de la razón de verosimilitudes el cual es asintóticamente óptimo. Para aplicarlo, se dividen los n residuos e_i en k grupos cada uno de tamaño n_i y se estima la varianza en cada uno de ellos. Los grupos se hacen por valores crecientes de \hat{y}_i , a no ser que se sospeche que la heterocedasticidad es debida a alguna variable x_i en cuyo caso se ordenan en función de ésta. Sea $\hat{\sigma}_i^2$ la estimación de la varianza del grupo i y $\hat{\sigma}^2$ el estimador máximo-verosímil de los residuos. El contraste es:

$$H_0: e_i \sim N(0, \sigma)$$

$$H_1: e_i \sim N(0, \sigma_i)$$

existiendo k valores distintos de σ_i y el estadístico de contraste es

$$2 \log \lambda = n \log \hat{\sigma}^2 - \sum n_i \log \hat{\sigma}_i^2 \quad (III,31)$$

que se distribuye como una χ^2 con $k-1$ grados de libertad.

Un procedimiento algo más complejo, pero más exacto para pequeñas muestras es establecer el contraste como

$$H_0: Y_i = X'_i b + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma)$$

$$H_1: Y_i = X'_i b + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma_i)$$

que exige calcular regresiones separadas en cada uno de los grupos para determinar $\hat{\sigma}_i^2$. A continuación, el contraste se realiza de igual forma usando (III,31).

Para efectuar el tratamiento de la heterocedasticidad hay que tener en cuenta el tipo de ésta. El caso más frecuente se presenta cuando la variabilidad crece linealmente con el valor medio de y . Esta situación se resuelve expresando la respuesta en forma logarítmica. En el caso general en que la relación es de la forma $S = K_\mu^\alpha$, la transformación adecuada es y^λ con $\lambda = 1 - \alpha$. Si la heterocedasticidad está ligada a una variable explicativa x_k , un procedimiento simple para evitarla es estimar el modelo

$$\frac{y}{x_k} = \frac{b_0}{x_k} + b_1 \frac{x_1}{x_k} + \dots + b_k + \varepsilon$$

donde, al dividir todos los términos por x_k , la perturbación $\varepsilon = u/x_k$ tendrá varianza constante.

Con heterocedasticidad el método ordinario de mínimos cuadrados es ineficiente: si la varianza de los datos es distinta, los puntos con menor varianza son más fiables y deben tener más peso que aquellos con mayor varianza. En este caso se utiliza el método generalizado de mínimos cuadrados, en el que la solución viene dada por la expresión

$$\hat{b} = (X'G^{-1}X)^{-1} X'G^{-1}Y \quad (III,32)$$

en lugar de la ecuación (III,7), siendo G^{-1} la inversa de la matriz de covarianzas de las perturbaciones. Si la matriz G es desconocida, se procede a hacer mínima la función

$$m = \sum \left(\frac{e_i}{\sigma_i} \right)^2$$

en lugar de la (III,3) y suponiendo que los residuos pueden subdividirse en tramos de igual varianza con n_1, n_2, \dots, n_n datos. La estimación de σ_i^2 será

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} e_j^2}{n_i}$$

En resumen, cuando las observaciones son heterocedásticas, la estimación máximo verosímil del modelo equivale a minimizar la suma cuadrática de los residuos con ponderaciones inversas a sus varianzas estimadas.

III.4.9.5. Hipótesis de independencia

La independencia de las perturbaciones implica que la magnitud y signo de cualquiera de ellas no posee ningún efecto en la magnitud o signo de las siguientes. Cuando existe dependencia entre las perturbaciones, se suele decir que están autocorrelacionadas.

La dependencia entre las perturbaciones del modelo de regresión es un problema frecuente cuando las variables que influyen en la de respuesta, dependen del tiempo. En tal caso, las perturbaciones -que recogen el efecto de las variables omitidas- también tendrán una dependencia temporal y sus valores en un instante dado pueden depender de los valores en instantes anteriores. Johnston (Johnston, 1979) demuestra que la aplicación del método ordinario de mínimos cuadrados tiene entonces tres consecuencias principales:

- (a) Las estimaciones de los coeficientes del modelo son centrados, pero las varianzas muestrales de estas estimaciones pueden ser indebidamente grandes con relación a las obtenidas mediante otro método de estimación.
- (b) Los contrastes para los coeficientes (t y F) dejan de ser válidos y están sesgados hacia la detección de relaciones inexistentes.
- (c) Se obtienen predicciones no eficientes, esto es, predicciones con varianzas muestrales innecesariamente grandes.

La identificación de la dependencia entre los residuos puede realizarse dibujando un gráfico de los mismos en orden secuencial, tal como figuran en el fichero de datos.

En la figura III,7a se muestra una dependencia positiva, debido a una tendencia creciente; en la figura III,7b la dependencia es negativa y se manifiesta en que los residuos aparecen alternadamente por encima y por debajo del valor

medio; en la figura III,7c la dependencia es debido a un comportamiento periódico; finalmente en la figura III,7d no se observa una pauta claramente definida.

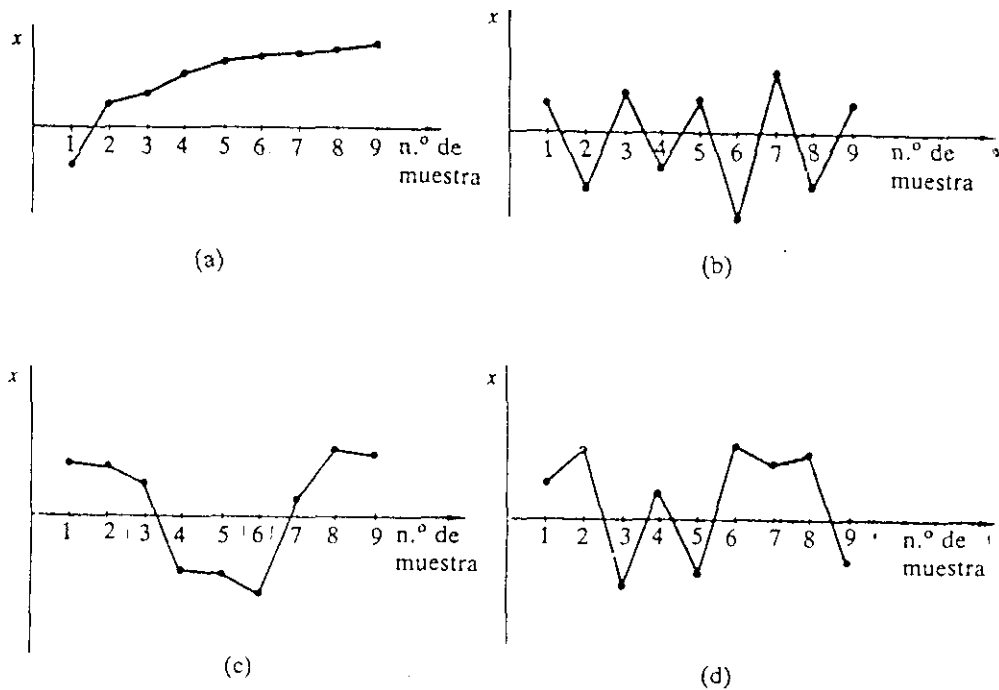


Fig. III,7

La dependencia entre los residuos también puede identificarse mediante los siguientes procedimientos que se basan en la idea anterior:

- Contraste de rachas (Ruiz-Maya, 1986).
- Análisis de autocorrelación (Peña, 1989a).
- Contraste de Durbin-Watson (Peña, 1989b).

los cuales se describen brevemente a continuación.

El Contraste de Rachas

Llamaremos **racha** a una sucesión de los valores de los residuos por encima o por debajo de la mediana. La longitud de la racha es el número de observaciones consecutivas con esa propiedad.

Para realizar el contraste, se asigna a cada residuo con valor superior a la mediana un signo "+" y un signo "-" cuando es inferior a la mediana. A continuación se cuenta el número de signos "-" (n_1), el número de signos "+" (n_2) y el número de rachas (r) de ambos signos.

Cuando la hipótesis de independencia es cierta, el número de rachas sigue una distribución de probabilidad que suele tabularse en función de n_1 , n_2 y α (nivel de significación), obteniéndose los límites de un intervalo dentro del cual debería encontrarse r con una probabilidad $1-\alpha$. Si esto no ocurriera, la hipótesis de independencia se rechaza al nivel α .

Cuando la muestra es grande (n_1 , ó $n_2 > 20$), la distribución de probabilidad de r se aproxima a una distribución normal de media

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \quad (III,33)$$

y varianza

$$\sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)} \quad (III,34)$$

por lo que el contraste anterior puede simplificarse admitiendo que la variable

$$z = \frac{r - \left(\frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}} \quad (III,35)$$

sigue una ley aproximadamente $N(0, 1)$, realizándose el contraste una vez fijado el nivel de significación α .

El Análisis de Autocorrelación

En el caso de que la muestra de observaciones sea grande se calculan los coeficientes de autorrelación de los residuos. Llamando $[e_t]$ a la secuencia de los residuos ordenados respecto al tiempo (o respecto a una variable ordinal t cualquiera), el coeficiente de autocorrelación lineal de orden k de los residuos es

$$r(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n e_t e_{t-k}}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (III,36)$$

el cual representa la correlación lineal entre los residuos separados k posiciones (retardo).

A partir de el coeficiente de autocorrelación, se define el estadístico de Ljung-Box de la siguiente forma:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{n-k} \quad (III,37)$$

Cuando la hipótesis de independencia es cierta, la distribución de probabilidad de Q se aproxima asintóticamente a una distribución χ^2 con $m-k-1$ grados de libertad, siendo m el número de coeficientes de autocorrelación en la suma y $k+1$ el número de parámetros estimados para calcular los residuos. Así pues, fijando el valor de α , puede realizarse el contraste de hipótesis.

De forma gráfica puede detectarse también la autocorrelación entre los residuos usando el autocorrelograma, el cual es la representación gráfica de los coeficientes de autocorrelación en función del retardo k (Fig.III,8).

La figura III,8a indica la existencia de una relación positiva entre cada residuo de la secuencia y las anteriores; en la figura III,8b la dependencia es negativa y aparece únicamente en el primer retardo; en la figura III,8c todos los coeficientes de autocorrelación son muy pequeños y no hay evidencia de dependencia y en la figura III,8d, la dependencia es periódica.

Por otra parte, cuando los residuos son independientes y la distribución de los mismos es normal, los coeficientes de autocorrelación se distribuyen aproximadamente normal con media y varianza respectivamente

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \end{array} \right\} r_k \sim N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Por tanto podremos considerar significativamente distintas de cero, para un nivel del 5%, aquellos coeficientes r_k que sean mayores que $2/\sqrt{n}$. Obteniéndose así otro contraste de hipótesis que sirve para detectar la autocorrelación.

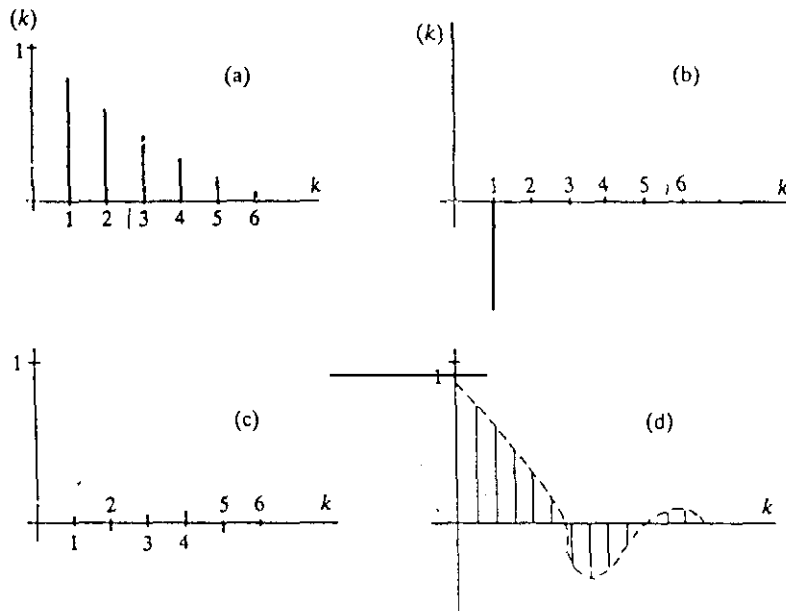


Fig. III,8

El contraste de Durbin-Watson

Si la muestra es pequeña, el número de coeficientes de autocorrelación que podemos calcular es bajo y el test asintótico es poco potente. En ese caso, se recurre al contraste de Durbin-Watson, cuya hipótesis nula es

$$H_0: r_1 = 0$$

y se emplea como estadístico de contraste

$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (III,38)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{t=1}^n e_t^2 \cong \sum_{t=2}^n e_t^2 \cong \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2$$

desarrollando el numerador de (III,38) y simplificando

$$d \cong 2(1 - r_1) \quad (III,39)$$

siendo r_1 el coeficiente de autocorrelación de orden 1 ($k=1$ en III,36). Si $r_1=0$, el valor de d es próximo a 2; si r_1 es positivo d estará entre 0 y 2; finalmente si r_1 es negativo d estará comprendido entre 2 y 4.

La distribución del estadístico d , cuando el coeficiente de autocorrelación poblacional de orden 1 es 0, queda definida mediante las tablas de Durbin-Watson que proporcionan dos cotas, d_L y d_U en función del número de variables explicativas y de n . El test se realiza como se indica en la figura III,9.

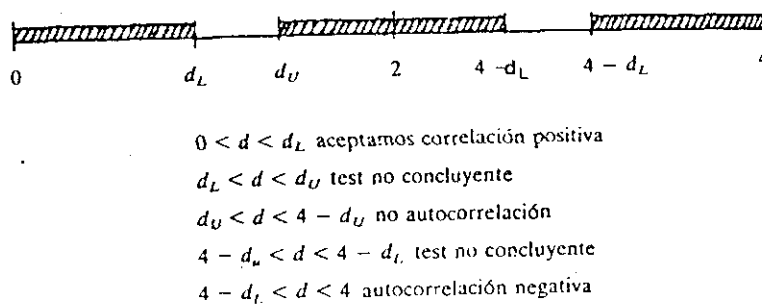


Fig. III,9

Para buscar una solución al problema de la dependencia, se puede recurrir a los procedimientos de series temporales. Sin embargo, Durbin (Durbin, 1960) sugiere una solución sencilla que a continuación se explica.

Supongamos, por ejemplo, que las observaciones se generan mediante modelo

$$y_t = b_0 + b_1 x_{1t} + b_2 x_{2t} + \dots + b_k x_{kt} + u_t \quad (III,40)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (III,41)$$

donde, tal como vemos, la perturbación depende de su pasado según un modelo lineal que se denomina esquema autorregresivo de primer orden. Restando a cada observación la anterior tendremos

$$y_t - y_{t-1} = b_1(x_{1t} - x_{1t-1}) + b_2(x_{2t} - x_{2t-1}) + \dots + b_k(x_{kt} - x_{kt-1}) + u_t - u_{t-1}$$

y admitiendo una dependencia fuerte con t ($\rho \cong 1$).

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \cong b_1 \nabla x_{1t} + b_2 \nabla x_{2t} + \dots + b_k \nabla x_{kt} + \varepsilon_t$$

el cual cumple ya las hipótesis típicas del modelo de regresión.

III.4.9.6. Multicolinealidad

La estimación de los coeficientes del modelo de regresión requiere la inversión de la matriz $X'X$. Si una de las variables independientes es combinación lineal de las demás (colineal con el resto) la matriz X tendrá un rango menor que $k+1$, $X'X$ será singular y el sistema de ecuaciones que determina los coeficientes no tendrá solución única.

Aunque esta situación no suele tener lugar de forma exacta, puede ocurrir que algunas o todas las variables independientes estén intensamente correlacionadas entre sí, se dice entonces que existe una alta multicolinealidad.

Una alta multicolinealidad produce en los coeficientes los siguientes efectos:

- a) los estimadores \hat{b} tendrán varianzas muy altas (baja precisión).
- b) las estimaciones \hat{b}_i serán muy dependientes entre sí.

Lo anteriormente expuesto, podría ilustrarse intuitivamente mediante el siguiente ejemplo (Fig.III,10). Supongamos que las variables independientes x_1 y x_2 están relacionados mediante la recta de regresión OC , de manera que cuando se, aumenta, x_2 aumenta también con pequeña variabilidad alrededor de la recta. En estas condiciones, las observaciones de la variable dependiente (y) se situarán en una delgada lámina perpendicular al plano (x_1, x_2) cuyo centro es el plano $OABC$ y cuyo espesor será tanto menor cuanto mayor sea la relación entre x_1 y x_2 . En consecuencia, dos planos distintos (P_1, P_2) que contengan la línea ED , línea de regresión simple en el plano $OABC$, ajustarán igualmente bien los datos, ya que:

- a) Hay muy poca información en la dirección de variación de una de las variables cuando la otra se mantiene constante.
- b) Se pueden realizar buenas estimaciones cuando ambas variables aumentan a la vez a lo largo de OC , por lo que si b_1 es pequeño necesariamente b_2 ha de ser grande (las estimaciones serán muy dependientes entre sí).

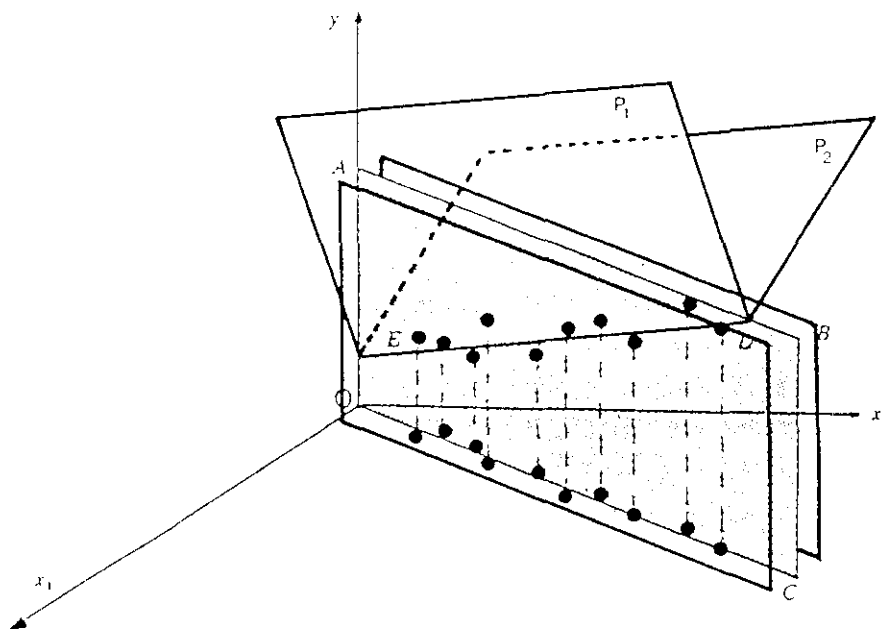


Fig. III,10

Una característica típica de la multicolinealidad, es que los coeficientes estimados no son significativamente distintos de cero a nivel individual (bajos valores del estadístico t), aunque su contraste conjunto mediante el test de la distribución F si es significativo (alto valor de la correlación), lo cual constituye un indicio de la presencia de este problema. No obstante, la multicolinealidad puede también detectarse identificando las variables colineales, para ello puede emplearse (Peña, 1989b):

- La matriz de correlación entre las variables independientes, R , y su inversa, R^{-1} .
- Los valores principales y vectores principales de las matrices $(X'X)$ o R .

El primer camino presenta inconvenientes cuando la matriz de correlaciones es casi singular, pues en ese caso su inversa se calculará con baja precisión.

Las mejores medidas de singularidad de $X'X$ o R utilizan los valores principales de dichas matrices. Un índice de singularidad que se utiliza en cálculo numérico es el índice de condicionamiento (IC), definido por:

$$IC = \sqrt{\frac{\text{maximo valor propio}}{\text{minimo valor propio}}} \geq 1 \quad (III,42)$$

el cual conviene calcularlo mejor sobre la matriz R que sobre $X'X$. Se admite que existe alta multicolinealidad cuando el índice de condicionamiento es mayor que 30. Un índice entre 10 y 30 indica una multicolinealidad moderada. Cuando es menor que 10 se considera que la matriz está bien definida.

La multicolinealidad es un problema de la muestra de datos y, por lo tanto, no tiene solución simple ya que se les pide más información de la que poseen. Las dos únicas soluciones son:

- a) Eliminar regresores.
- b) Incluir información externa a los datos.

En el primer caso, las variables originales se transforman a componentes principales (las cuales son incorreladas) y se eliminan las menos importantes.

En el segundo caso se aplica el procedimiento de regresión contraída, la cual consiste en minimizar el error cuadrático medio, cuyo valor es:

$$E\left(\sum_{i=0}^k (\hat{b}_i - b_i)^2\right)$$

III.4.9.7. Robustez del modelo

Las observaciones atípicas o heterogéneas pueden constituir un subconjunto del total, que ejerza gran influencia sobre las propiedades básicas del modelo, tal como se observa en la figura III,11.

En la figura III,11a el punto A es atípico respecto a x , pero no respecto a y , ya que y_A es próxima $y_A^{(2)}$ (ordenada prevista para x_A por el modelo sin incluir al punto A en el ajuste). El punto A puede ser influyente a priori, pero a posteriori no lo es, ya que si lo elimináramos el modelo no variaría sustancialmente.

Por el contrario, el punto B de la figura III,11b es muy influyente, el valor de la ordenada prevista sin él ($y_B^{(2)}$) es muy distinta de la que se obtendría con la totalidad de los datos.

Este aspecto no prejuzga que el modelo sea o no correcto, pero es indudable que se tendrá más confianza en un modelo cuyas propiedades se deducen y son confirmadas por la totalidad de la muestra. Por lo tanto, antes de aceptar como válido un modelo, es siempre conveniente estudiar hasta que punto sus propiedades básicas son debidas a todas las observaciones y no, únicamente, a un subconjunto de ellas. Este análisis se denomina estudio de robustez del modelo y permite localizar las observaciones que presentan problemas de este tipo.

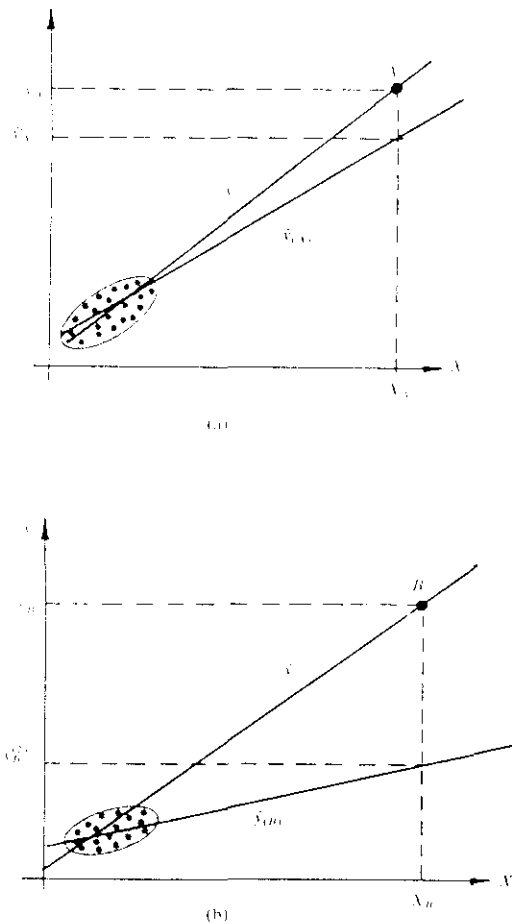


Fig. III,11

Para realizar el análisis, se define previamente una medida de influencia. Existen varias medidas de este tipo, una de las cuales se define de la siguiente manera

$$D_i = \frac{r_i^2}{k+i} \left(\frac{v_{ii}}{1-v_{ii}} \right) \tag{III,43}$$

donde

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{S}_R \sqrt{1-v_{ii}}}$$

y v_{ii} es el elemento diagonal de la fila i en la matriz

$$V = X(X'X)^{-1}X' \tag{III,44}$$

El coeficiente (III,43) se calcula para cada observación (i) y se llama estadístico de Cook. Dicho estadístico representa la variación que sufre tanto el vector \hat{b} como el vector \hat{Y} cuando se elimina la observación (i) del conjunto de datos.

Fijado un nivel de significación α , es posible determinar, usando la distribución F de Snedecor, si una observación (i) es influyente, lo cual tiene lugar cuando

$$D(i) \geq F(k+1; n-k-1; 1-\alpha) \tag{III,45}$$

III.5. CONSTRUCCION DE MODELOS DE REGRESION

Cuando se dispone de un conjunto grande de variables explicativas, es necesario definir un procedimiento operativo para construir el modelo de regresión. Existen tres procedimientos o estrategias para ello:

- a) Eliminación progresiva de variables.

Este método comienza con la regresión de y en función de todas las variables explicativas potencialmente influyentes; a continuación se calculan los estadísticos t para cada coeficiente (III,19). Si alguno de ellos es menor que un valor prefijado, se elimina esta variable, dándose los siguientes pasos:

- (i) Se elimina dicha variable.
- (ii) Se realiza la regresión con las $k-1$ variables restantes.
- (iii) Se repite el procedimiento de eliminación de variables no significativas.

La estrategia de eliminación progresiva tiene el inconveniente de utilizar mucha capacidad de cálculo, sin embargo es excelente para evitar la exclusión de alguna variable significativa, por lo que se usa con frecuencia.

b) Introducción progresiva de variables.

Este procedimiento es inverso al anterior, comenzamos con una única variable y vamos incluyendo el resto, una a una, hasta obtener el modelo definitivo.

La selección de la variable de entrada en cada uno de los pasos se realiza mediante la comparación del coeficiente de correlación parcial entre las variables que restan por entrar y la variable respuesta, eliminando el efecto de las que entraron en pasos anteriores. El proceso es cíclico y finaliza cuando el valor del estadístico t de la última variable introducida deja de ser significativo.

El método tiene la ventaja de requerir menor capacidad de cálculo, sin embargo, es peor respecto al error de especificación por no ser capaz de eliminar variables cuando la introducción de otras nuevas hacen innecesaria su presencia. Por ejemplo, es posible que la primera variable introducida pierda su eficacia al introducir otras nuevas y deba eliminarse en una etapa posterior de la regresión.

c) Regresión por pasos.

Este procedimiento trata de evitar los inconvenientes de la eliminación progresiva de variables, manteniendo su relativa economía de cálculo. Se diferencia en que en cada etapa, al incluir una nueva variable, el papel de todas las ya presentes es evaluado nuevamente mediante un contraste t (o bien F), pudiendo rechazarse alguna de las ya incluidas.

III.6. CRITERIOS DE ELECCIÓN DEL MODELO

Cuando existen muchas variables explicativas potenciales, las anteriores estrategias definen normalmente un subconjunto posible de modelos de entre los que hemos de seleccionar uno.

Supondremos que se comparan modelos con la misma variable de respuesta, pero con distintas variables explicativas. La elección ha de hacerse de manera que no se pierdan las condiciones de normalidad, homocedasticidad e independencia.

Algunos de los criterios y sus correspondientes críticas se exponen a continuación:

a) Criterio basado en el coeficiente de determinación.

Este no es un buen criterio, dado que R^2 aumenta al introducir variables sea cual sea su efecto, por lo que se tendería a seleccionar modelos con variables innecesarias.

b) Criterio basado en el coeficiente de determinación corregido (ver III.4.8.)

Este criterio evita el inconveniente principal de R^2 ; puede comprobarse que este coeficiente aumentará al introducir una variable si su estadístico t correspondiente es mayor que uno. Por tanto, elegir mediante este criterio equivale a imponer una regla amplia de entrada de variables.

c) Criterio basado en la varianza residual.

El modelo con menor varianza residual es también el que tiene mayor coeficiente de determinación corregido, por lo que este criterio equivale al anterior.

d) Estadístico de Mallows.

Este criterio se basa en buscar el modelo de p parámetros ($p-1$ variables explicativas) que minimice el error cuadrático medio de predicción para los puntos observados. Se demuestra (Peña 1989b) que esto equivale a minimizar la siguiente expresión:

$$C_p = p + (m - p) \left[\frac{\hat{S}_R^2(p) - \hat{S}_R^2(k+1)}{\hat{S}_R^2(k+1)} \right] \quad (III,46)$$

en la que $\hat{S}_R^2(k+1)$ es la varianza residual del modelo con todas las variables explicativas (k), $\hat{S}_R^2(p)$ es la varianza residual del modelo con $p-1$ variables explicativas y n es el número total de datos.

La expresión (III,46) recibe el nombre de estadístico de Mallows. Se demuestra también que, cuando el modelo no posee sesgo, se verifica $C_p = p$. Por ejemplo, si el modelo total con k variables explicativas y $k+1$ parámetros es correcto, al aplicarle (III,46) con $p=k+1$ obtendremos $C_{k+1} = k+1$.

Para concluir, la selección del modelo no debe hacerse mediante un criterio automático. La práctica demuestra que los buenos modelos suelen coincidir con cualquier criterio razonable (como el de la varianza residual o el de C_p) y la selección final del modelo es mejor hacerla en relación con su adecuación lógica a la realidad que se describe.

CAPITULO IV

ANALISIS E INTERPRETACION DE MODELOS APLICADOS AL ESTUDIO DE LA VARIACION ESPACIAL DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE DE ESPAÑA PENINSULAR

IV.1. INTRODUCCION

En este capítulo se describen los datos y los programas utilizados en este estudio y se aplican las técnicas expuestas en el capítulo anterior, a la determinación y análisis de los modelos del campo magnético terrestre.

El análisis comprende varias partes. En la primera de ellas, se determinan varios modelos posibles para la representación del campo magnético de la Tierra a 3000 metros de altitud sobre el territorio peninsular de España. En la segunda parte, se comprueban las condiciones de validez y, al no verificarse todas ellas, se investigan las causas, buscándose además otras alternativas. La tercera etapa del análisis se dedica a la búsqueda de regiones donde se cumplan la mayor parte de las hipótesis de los modelos y en la cuarta y última parte se realiza un estudio comparativo para seleccionar el modelo que mejor se adapte a los datos.

IV.2. DESCRIPCION DE LOS DATOS

El conjunto de datos utilizados en este trabajo se compone de las medidas obtenidas en una muestra de 5316 puntos, de un total de 2019690, los cuales se distribuyen sobre las distintas tramos que componen las líneas de vuelo del levantamiento aeromagnético del territorio peninsular de España, por lo tanto la fracción del nuestro es el 0.26%. En terminos absolutos este número puede parecer pequeño. Sin embargo, teniendo en cuenta la superficie cubierta por los mismos (493486 Km²) nos da una densidad más elevada que la empleada para la determinación del modelo polinómico de tercer grado de Escandinavia, en la que se emplearon medidas en 1400 puntos de observación que se extendían sobre una superficie mucho mayor que la de España (1500000 Km²) (Haines, 1968) obteniéndose así una densidad mucho menor que la que aquí se utiliza. Por otra parte, en nuestro caso, los puntos de la muestra estan separados uno del otro a una distancia aproximada de 10 kilómetros a lo largo de la línea de vuelo, mientras que en el caso de Escandinavia lo estaban a 30 kilómetros. Así pues, podemos admitir, al menos en términos comparativos, que la muestra es representativa de la región de estudio.

Los puntos de observación de la muestra se hallan comprendidos entre los paralelos 36° 0' 3.6" N y 43° 48' 0"N y entre los meridianos 3° 15' 3.6" E y 9° 17' 13.56"O, distribuyéndose geográficamente como muestra la Tabla IV,1.

La información extraída en cada uno de los puntos de la muestra se compone de:

- Número de línea y tramo de la misma.
- Coordenadas geográficas del punto de observación.
- Coordenadas UTM y número de huso del punto de observación.
- Valor de la intensidad del campo magnético procesado, tal como se describe en el segundo capítulo.
- Valor de la intensidad del campo, en la fecha de referencia del mapa, proporcionado por el IGRF.
- Residuo o diferencia entre los dos valores anteriores.
- Diferencia de altitud barométrica respecto a 3000 metros.
- Altitud radiométrica.

Tabla IV,1

| HUSO DE LA PROYECCION | LONGITUDES EXTREMAS DEL HUSO | NUMERO DE PUNTOS DE LA MUESTRA |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 29 | (12°O, 6°O) | 1063 |
| 30 | (6° O, 0°) | 3744 |
| 31 | (0°, 6°E) | 509 |
| TOTAL | | 5316 |

Todos estos datos han sido extraídos de las cintas originales de datos procesados y trasladadas a un fichero en código ASCII. Posteriormente, las coordenadas geográficas de los puntos de la muestra han sido transformadas a coordenadas del sistema de proyección oficial Lambert para representar cartográficamente los valores de la intensidad del campo magnético y de los residuos tal como puede observarse en las figuras IV,1 y IV,2. La comparación de las mismas con los mapas originales publicados por el Instituto Geográfico Nacional nos sirve para comprobar que, pese al suavizado producido por el muestreo de los datos, los detalles más importantes se conservan.

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNETICO (Valores procesados)

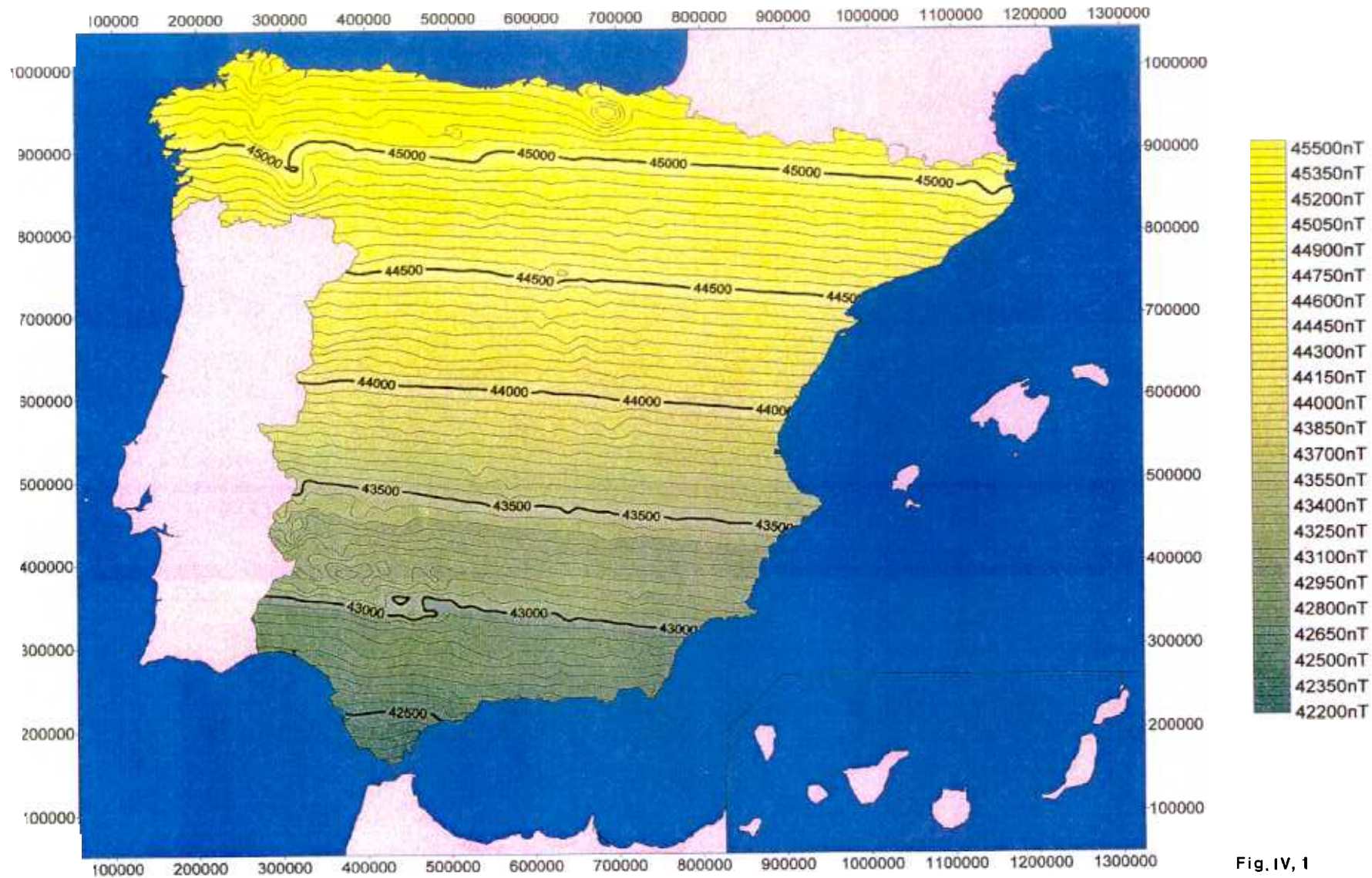


Fig. IV, 1

MAPA DE RESIDUOS (Modelo IGRF)

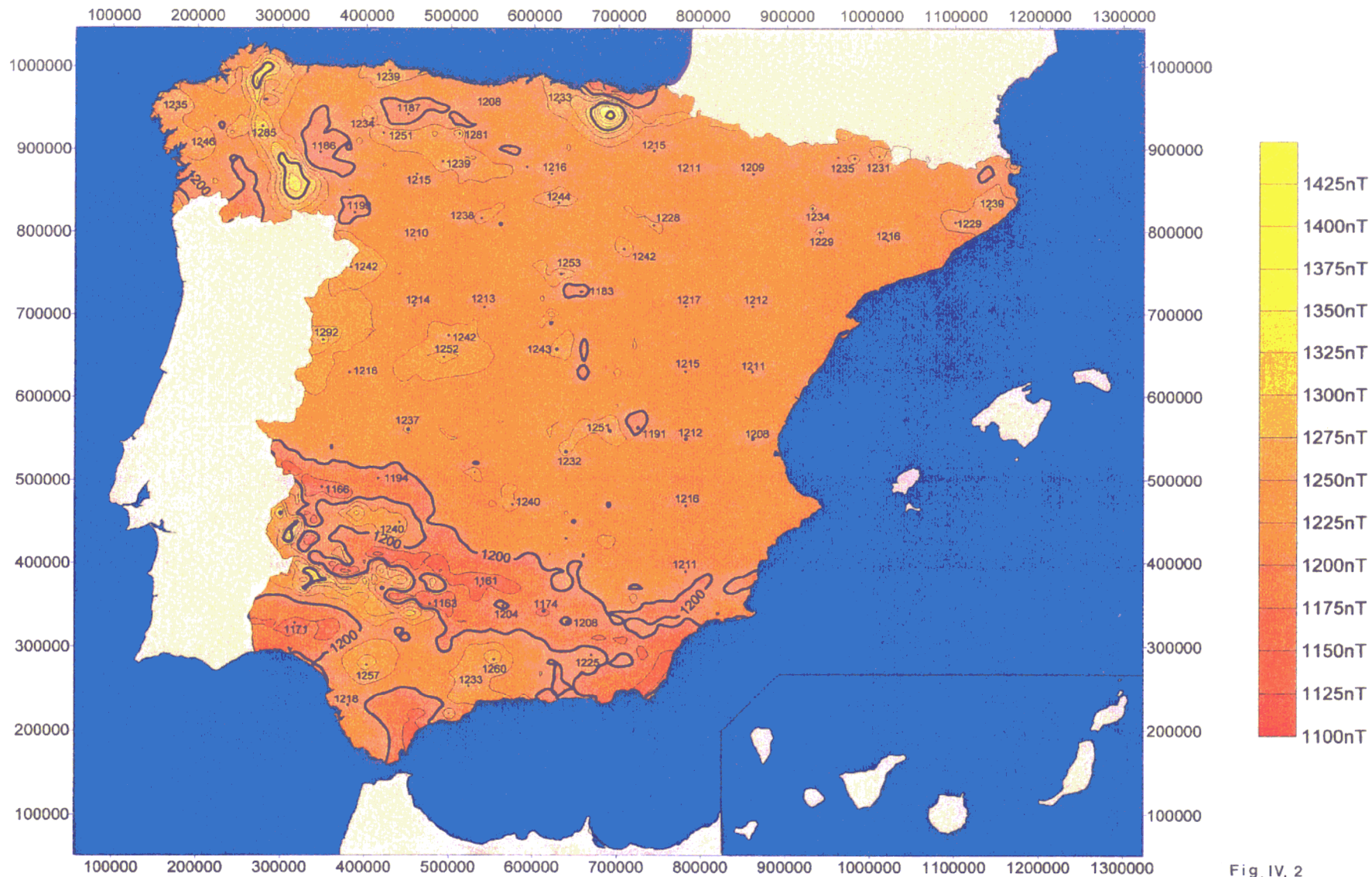


Fig. IV, 2

IV.3. PROGRAMAS EMPLEADOS EN EL ANALISIS DE LOS DATOS

Para la realización del análisis de los datos, se han utilizado los programas que se indican a continuación junto con el ordenador en el que fueron procesados:

Tabla IV,2

| PROGRAMA | VERSIÓN | ORDENADOR |
|---------------------|---------|--------------------|
| Biblioteca BMDP | 7.0 | MicroVAX 9000 |
| Biblioteca BMDP | 7.0 | Estación ALFA 2100 |
| Biblioteca BMDP | PC-90 | DELL XPS Pro 150 |
| Biblioteca SPSS/PC+ | 4.0 | (PC) ASL (80386) |
| STATGRAPHICS | 6.0 | (PC) ASL (80386) |

Las bibliotecas de programa BMDP y SPSS/PC+ se emplearon para determinar los modelos y realizar el análisis estadístico, mientras que el programa STATGRAPHICS se utilizó para la elaboración de gráficos.

Además de los programas mencionados anteriormente, se usó también la biblioteca matemática ISML (versión para sistema operativo VMS), el programa PC-MATLAB (Matrix Laboratory) y el programa de dibujo de mapas SURFER (Versión para WINDOWS).

Las bibliotecas de programas BMDP (7.0) e ISML pertenecen al Centro de Proceso de Datos de la Universidad Complutense de Madrid y han sido usadas en los ordenadores que posee dicho centro, mientras que el resto de los programas son de uso propio y han sido utilizados en ordenadores pertenecientes al Área de Teledetección del Instituto Geográfico Nacional o en ordenadores de propiedad personal.

Por ser la fase de análisis estadístico la más importante dentro del presente trabajo, a continuación se describen las características generales de los tres primeros programas mencionados al principio:

a) Biblioteca BMDP (Biomedical Programs)

Este conjunto de programas ha sido elaborado y comercializado por la (Universidad de California, los Angeles) (UCLA). Pese a que su denominación está relacionada con la biomedicina, ésta sólo debe entenderse como el origen de su desarrollo pero no como una limitación de su campo de aplicación en el momento actual. Los programas que contiene la biblioteca BMDP permiten realizar desde simples descripciones de datos hasta avanzados análisis estadísticos multivariantes.

Los programas de la librería se agrupan en varias series, las cuales se designan mediante una letra:

- D - Descripción de datos.
- R - Análisis de regresión.

- V - Análisis de varianza.
- M - Análisis multivariante.
- L - Tablas de vida y análisis de supervivencia.
- T - Series temporales.

El uso de cada uno de los programas de la biblioteca requiere la creación previa de un programa de explotación con una sintaxis particular que se compone de un conjunto de instrucciones principales, denominadas párrafos, y un conjunto de instrucciones secundarias denominadas comandos, las cuales se agrupan en los primeros.

Existen párrafos de uso general, tales como los relativos a la entrada de datos y salida de resultados, y párrafos específicos para cada análisis. A su vez, los comandos poseen opciones de carácter general y otras específicas para cada programa de la biblioteca.

b) Biblioteca SPSS/PC+ (Statistical Package for Social Sciences).

Esta biblioteca ha sido diseñada para cubrir la mayor parte de las necesidades del análisis estadístico que suelen plantearse en la realización de investigación y estudios empíricos en el campo de las ciencias sociales y humanas. A pesar de estar dirigido a este tipo de disciplinas, es igualmente útil en otros campos de la ciencia, como biología, física, medicina, etc., y en general, en todos aquellos estudios que impliquen un proceso estadístico de datos.

La biblioteca es de carácter modular, siendo opcional la adquisición de algunos de los módulos (exceptuando el módulo BASE). Los módulos que componen la biblioteca son los siguientes:

- Estadística básica.
- Estadística avanzada.
- Análisis categórico de datos.
- Análisis de series temporales.
- Control de calidad.
- Gráficos.

Al igual que en el caso de la biblioteca BMDP, el uso de SPSS, requiere la creación de un programa de explotación escrito con una sintaxis propia, la cual se compone de un conjunto de instrucciones o comandos que son de tres tipos:

- Comandos de operación.
- Comandos de definición y manipulación de datos.

- Comandos de procedimientos.

Los primeros dan información al sistema sobre la forma en la que debe operar, los segundos proporcionan información sobre los datos objeto del análisis y sobre las modificaciones que sobre ellos han de realizar. Los últimos, tienen como finalidad la transformación de los datos mediante la carga y ejecución de los subprogramas correspondientes a los procesos que se van a realizar.

El programa puede usarse en forma interactiva, o por lotes. En el primer caso, se escriben una a una las instrucciones conforme éstas se van ejecutando, mientras que en el segundo caso, se escriben todas las instrucciones que componen el programa de explotación en un fichero que se introduce en el sistema mediante el comando INCLUDE.

c) STATGRAPHICS:

STATGRAPHICS se compone de un conjunto de procedimientos estadísticos y de gráficos de alta calidad. Dichos procedimientos se agrupan en los siguientes capítulos:

- Gestión de datos y utilidades del sistema.
- Gráficos y estadística descriptiva.
- Análisis de la varianza y regresión.
- Procedimientos de series temporales.
- Procedimientos avanzados.
- Procedimientos matemáticos y de usuario.

El manejo es sencillo debido a los menús presentados al usuario para que éste elija las opciones que desea, por lo cual no es necesario aprender ninguna sintaxis ni comandos que compliquen la conexión entre el usuario y el sistema.

IV.4. DETERMINACIÓN DEL MODELO

Según lo expuesto en el tercer capítulo sobre modelos polinómicos superficiales, para representar los valores de la intensidad del campo magnético terrestre (B) sobre el territorio peninsular de España, ha de elegirse uno de los siguientes polinomios:

$$B = a_{00} + a_{10}(\phi - \bar{\phi}) + a_{01}(\lambda - \bar{\lambda}) + \varepsilon_1 \quad (IV,1)$$

$$B = b_{00} + b_{10}(\phi - \bar{\phi}) + b_{01}(\lambda - \bar{\lambda}) + b_{11}(\phi - \bar{\phi})(\lambda - \bar{\lambda}) + b_{20}(\phi - \bar{\phi})^2 + b_{02}(\lambda - \bar{\lambda})^2 + \varepsilon_2 \quad (IV,2)$$

$$B = c_{00} + c_{10}(\phi - \bar{\phi}) + c_{01}(\lambda - \bar{\lambda}) + c_{11}(\phi - \bar{\phi})(\lambda - \bar{\lambda}) + c_{20}(\phi - \bar{\phi})^2 + c_{02}(\lambda - \bar{\lambda})^2 + c_{21}(\phi - \bar{\phi})^2(\lambda - \bar{\lambda}) + c_{12}(\phi - \bar{\phi})(\lambda - \bar{\lambda})^2 + c_{30}(\phi - \bar{\phi})^3 + c_{03}(\lambda - \bar{\lambda})^3 + \varepsilon_3 \quad (IV,3)$$

siendo $(\bar{\phi}, \bar{\lambda})$ las coordenadas geográficas del centro de gravedad de la muestra

$$\bar{\phi} = 40.427^\circ$$

$$\bar{\lambda} = -3.5375^\circ$$

y ε_i son las perturbaciones o errores introducidos al emplear cualquiera de los polinomios anteriores en lugar de la forma explícita real $B=B(\lambda, \phi)$, la cual en realidad se desconoce.

Cualquiera de las expresiones anteriores puede reducirse a un polinomio de primer grado mediante sencillos cambios de

$$w_{ij} = (\phi - \bar{\phi})^i (\lambda - \bar{\lambda})^j$$

convirtiéndose en

$$B = a_{00} + a_{10} w_{10} + a_{01} w_{01} + \varepsilon_1 \quad (IV,4)$$

$$B = b_{00} + b_{10} w_{10} + b_{01} w_{01} + b_{11} w_{11} + b_{20} w_{20} + b_{02} w_{02} + \varepsilon_2 \quad (IV,5)$$

$$B = c_{00} + c_{10} w_{10} + c_{01} w_{01} + c_{11} w_{11} + c_{20} w_{20} + c_{02} w_{02} + c_{21} w_{21} + c_{12} w_{12} + c_{30} w_{30} + c_{03} w_{03} + \varepsilon_3, \quad (IV,6)$$

Para determinar los coeficientes a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} contamos con el conjunto de datos descritos en el apartado segundo de este capítulo al cual aplicamos el método de mínimos cuadrados. Sin embargo, al ser este conjunto una muestra del de observaciones, el método de estimación de mínimos cuadrados nos proporciona únicamente estimaciones de dichos coeficientes que los designamos como \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{ij} y \hat{c}_{ij} , de esta manera los modelos (IV,4), (IV,5) y (IV,6) serán ahora de la forma

$$B = \hat{a}_{00} + \hat{a}_{10} w_{10} + \hat{a}_{01} w_{01} + e_1 = \hat{B}_1 + e_1 \quad (IV,7)$$

$$B = \hat{b}_{00} + \hat{b}_{10} w_{10} + \hat{b}_{01} w_{01} + \hat{b}_{11} w_{11} + \hat{b}_{20} w_{20} + \hat{b}_{02} w_{02} + e_2 = \hat{B}_2 + e_2 \quad (IV,8)$$

$$B = \hat{c}_{00} + \hat{c}_{10} w_{10} + \hat{c}_{01} w_{01} + \hat{c}_{11} w_{11} + \hat{c}_{20} w_{20} + \hat{c}_{02} w_{02} + \hat{c}_{21} w_{21} + \hat{c}_{12} w_{12} + \hat{c}_{30} w_{30} + \hat{c}_{03} w_{03} + e_3 = \hat{B}_3 + e_3 \quad (IV,9)$$

y el término e_i representa el residuo, cuyos valores constituyen una estimación de las perturbaciones o errores.

El resultado del procedimiento de mínimos cuadrados aplicado al conjunto de datos de esta tesis, se resume en la siguiente tabla:

Tabla IV,3

| Grado del Polinomio | Estimación de los coeficientes | | Desviación típica de los coeficientes | Estadístico t de cada coeficiente | Valos crítico para 5% significación |
|---------------------|--------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1° | a_{00} | 44149.6 | 0.446 | $9.94 \cdot 10^4$ | ± 1.96 |
| | a_{10} | 401.536 | 401.532 | 1763.47 | |
| | a_{01} | 21.791 | 0.1717 | 126.86 | |
| 2° | b_{00} | 44151 | 0.4642 | $9.5 \cdot 10^4$ | ± 1.96 |
| | b_{10} | 395.362 | 0.1525 | 2591.86 | |
| | b_{01} | 21.602 | 0.1157 | 186.64 | |
| | b_{11} | -2.914 | 0.0613 | -47.50 | |
| | b_{20} | -4.216 | 0.0779 | -54.10 | |
| | b_{02} | 2.346 | 0.0361 | 64.91 | |
| 3° | c_{00} | 44151.812 | 0.5218 | $8.5 \cdot 10^4$ | ± 1.96 |
| | c_{10} | 396.123 | 0.3663 | 1081.41 | |
| | c_{01} | 21.918 | 0.2331 | 94.03 | |
| | c_{11} | -2.938 | 0.0757 | -38.82 | |
| | c_{20} | -4.425 | 0.0929 | -47.62 | |
| | c_{02} | 2.279 | 0.0538 | 42.32 | |
| | c_{21} | -0.097 | 0.0397 | -2.43 | |
| | c_{12} | 0.023 | 0.0281 | 0.81 | |
| | c_{30} | -0.124 | 0.0429 | -2.88 | |
| | c_{03} | -0.2×10^{-3} | 0.012 | -0.02 | |

La medida de la bondad del ajuste se expresa mediante la desviación típica residual (\hat{S}_R), mediante el coeficiente de determinación (R^2) o mejor aún, tal como en el tercer capítulo se indica, mediante el coeficiente de determinación corregido por el número de grados de libertad (\bar{R}^2). En la tabla adjunta se indican dichos coeficientes para cada uno de los modelos anteriores.

Tabla IV,4

| Grado del polinomio | \hat{S}_R | R^2 | \bar{R}^2 |
|---------------------|-------------|--------|-------------|
| 1 | 32.42 | 0.9983 | 0.9992 |
| 2 | 19.66 | 0.9994 | 0.9994 |
| 3 | 19.63 | 0.9994 | 0.9994 |

Los valores de \hat{S}_R en la tabla anterior indican que, ateniéndonos exclusivamente al conjunto de observaciones de la muestra, existe incremento en la precisión del ajuste más intensa al pasar del modelo de primer grado al de segundo grado que al pasar del de segundo grado al de tercer grado. Sin embargo, en los tres casos el porcentaje de las variaciones de B explicadas por el modelo es aproximadamente el mismo (99.9%) y por consiguiente se aprecian menos las diferencias entre los tres. Estos valores tan elevados de los coeficientes de

determinación se deben en gran parte a la varianza de las observaciones de B , que es bastante elevada ($S_B^2 = 628547.69 \text{ nT}^2$).

Por otra parte, si se verificaran las condiciones de validez (especialmente la de normalidad), los contrastes individuales de cada coeficiente indicarían, según la Tabla IV,1, que únicamente podemos considerar nulos los coeficientes c_{12} y c_{03} , siendo significativamente distintos de cero el resto al rechazarse en todos esos casos la hipótesis nula al 5% de significación. Esto nos indicaría una posible simplificación del modelo polinómico de tercer grado.

Para tener una idea mas concreta de las semejanzas y diferencias entre los tres modelos, se han dibujado los correspondientes mapas de curvas de nivel, que se representan en las figuras IV,3; IV,4 y IV,5 y, aunque en apariencia los tres son muy parecidos, puede observarse que las líneas del primero se curvan ligeramente hacia el Norte, mientras que en los otros dos lo hacen hacia el Sur.

La dificultad en la discriminación entre los tres modelos se debe a la equidistancia entre las curvas de nivel, por ello se han dibujado los mapas de las diferencias de cada uno de dichos modelos respecto al modelo IGRF 85 trasladado a la fecha de referencia del datum (Figs. IV,6; IV,7 y IV,8).

En la figura IV,6 se aprecia que las líneas de diferencia nula se encuentran al Este y Oeste de la Península, mientras que en los dos restantes (Figs. IV,7 y IV,8) no atraviesan el territorio peninsular, debiendo situarse la misma, según la tendencia, al Sur de la Península y fuera de ella. Además, el punto de ensilladura que el primero de estos tres mapas muestra en las proximidades del centro (Fig. IV, 6) no aparece en el segundo (Fig. IV,7) y se halla desplazado hacia el Noreste en el tercero (Fig. IV,8).

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNETICO (Modelo de 1° grado)

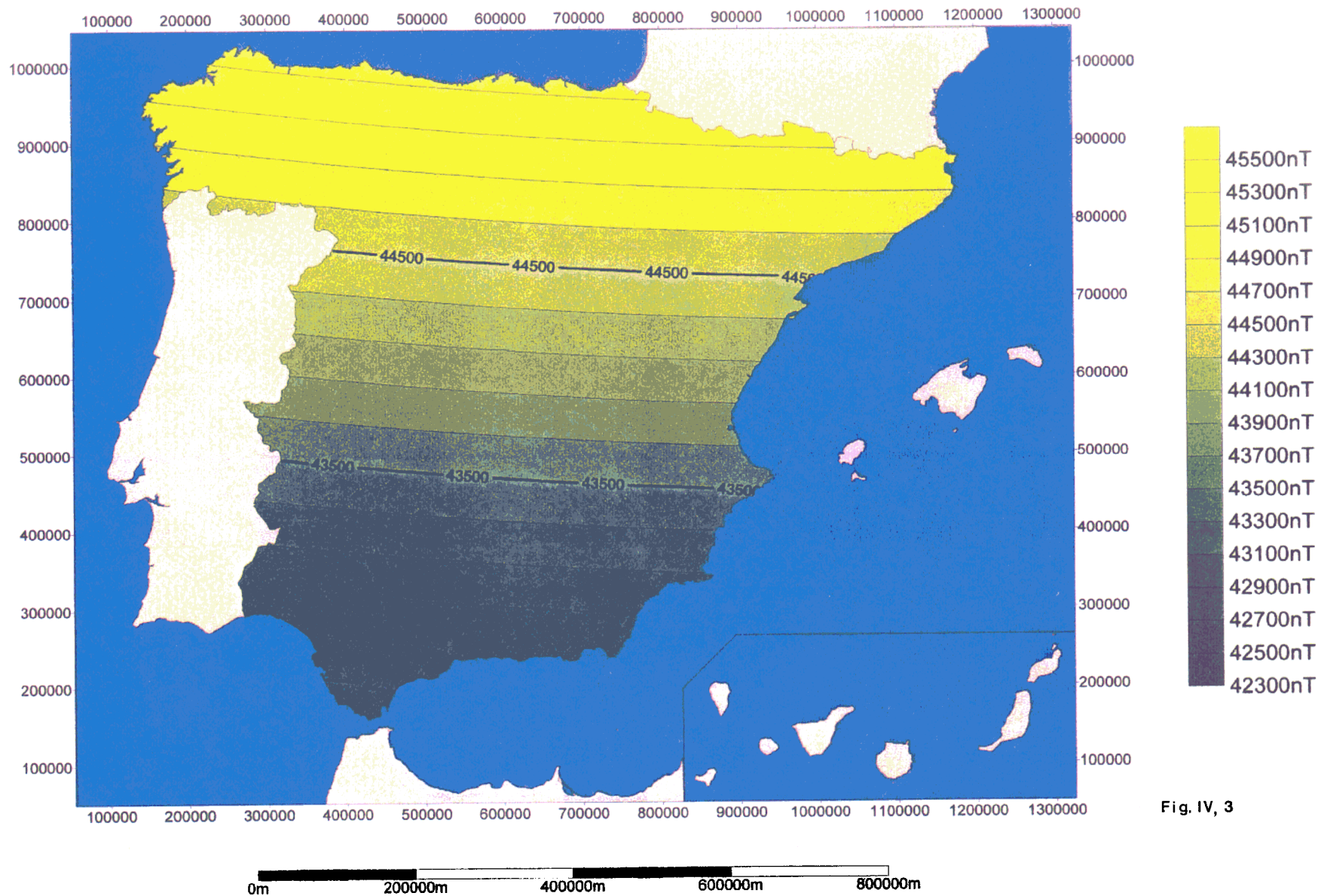


Fig. IV, 3

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNETICO (Modelo de 2º grado)

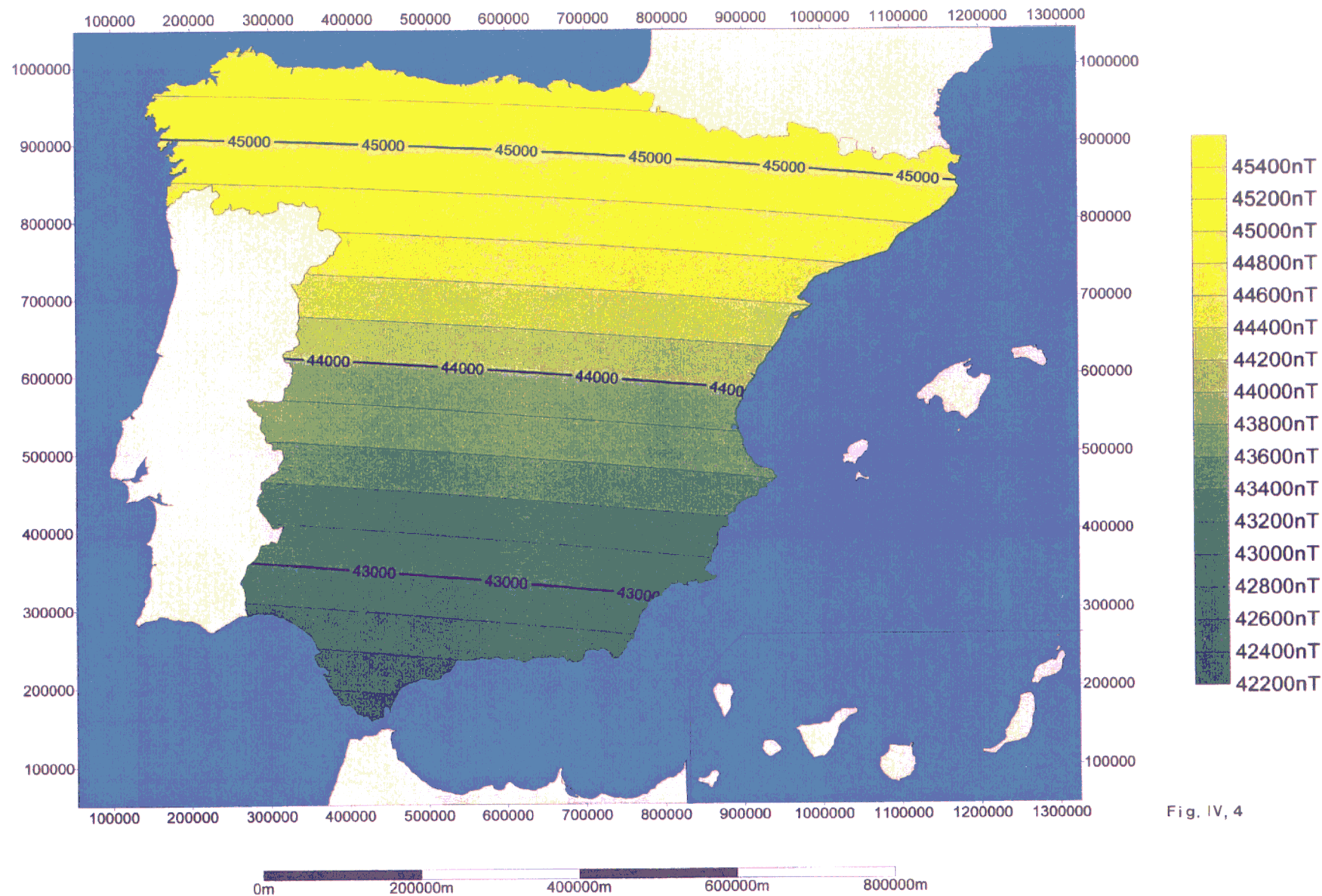


Fig. IV, 4

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNETICO (Modelo de 2º grado)

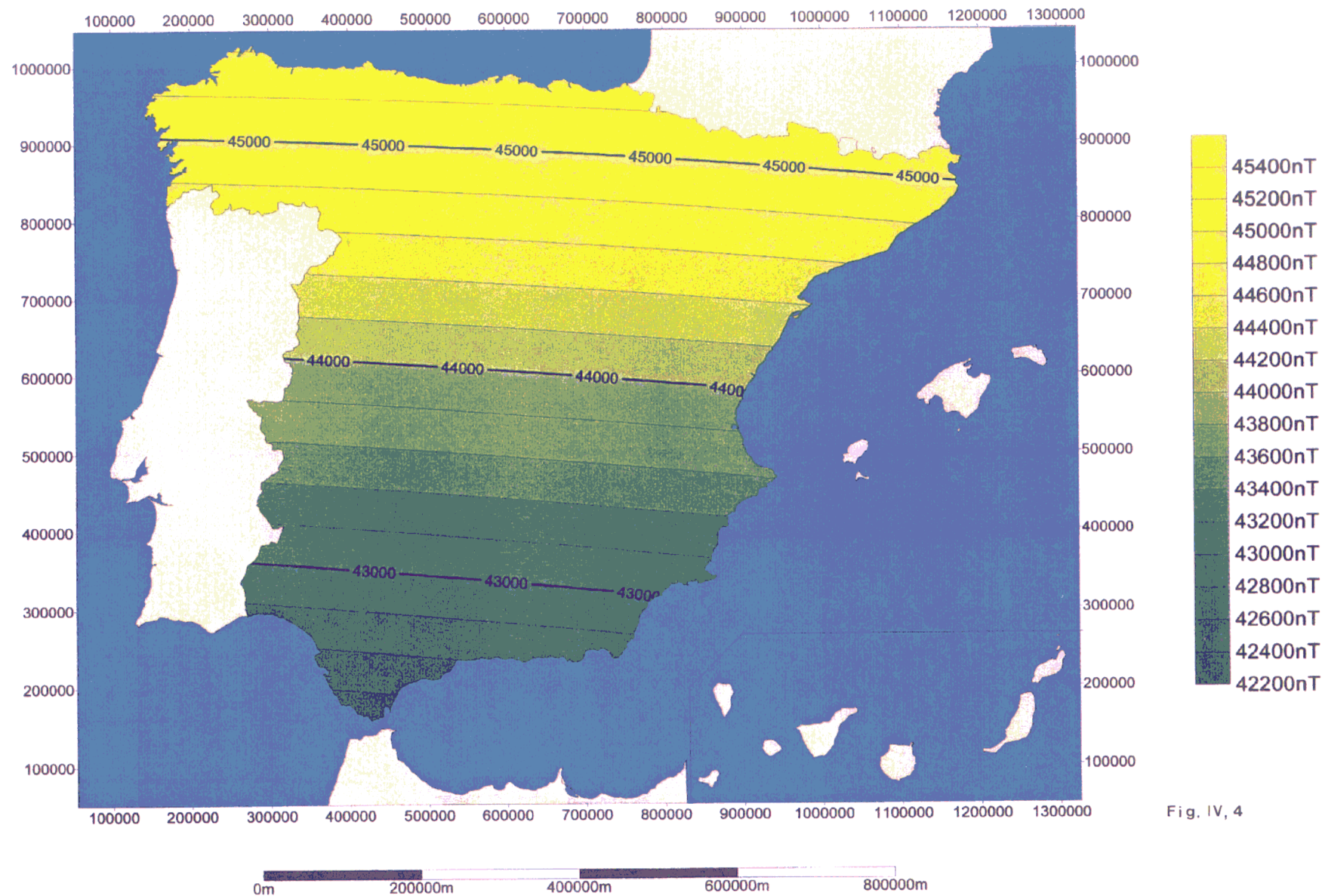


Fig. IV, 4

MAPA DE DIFERENCIAS (Modelo de 1° grado)

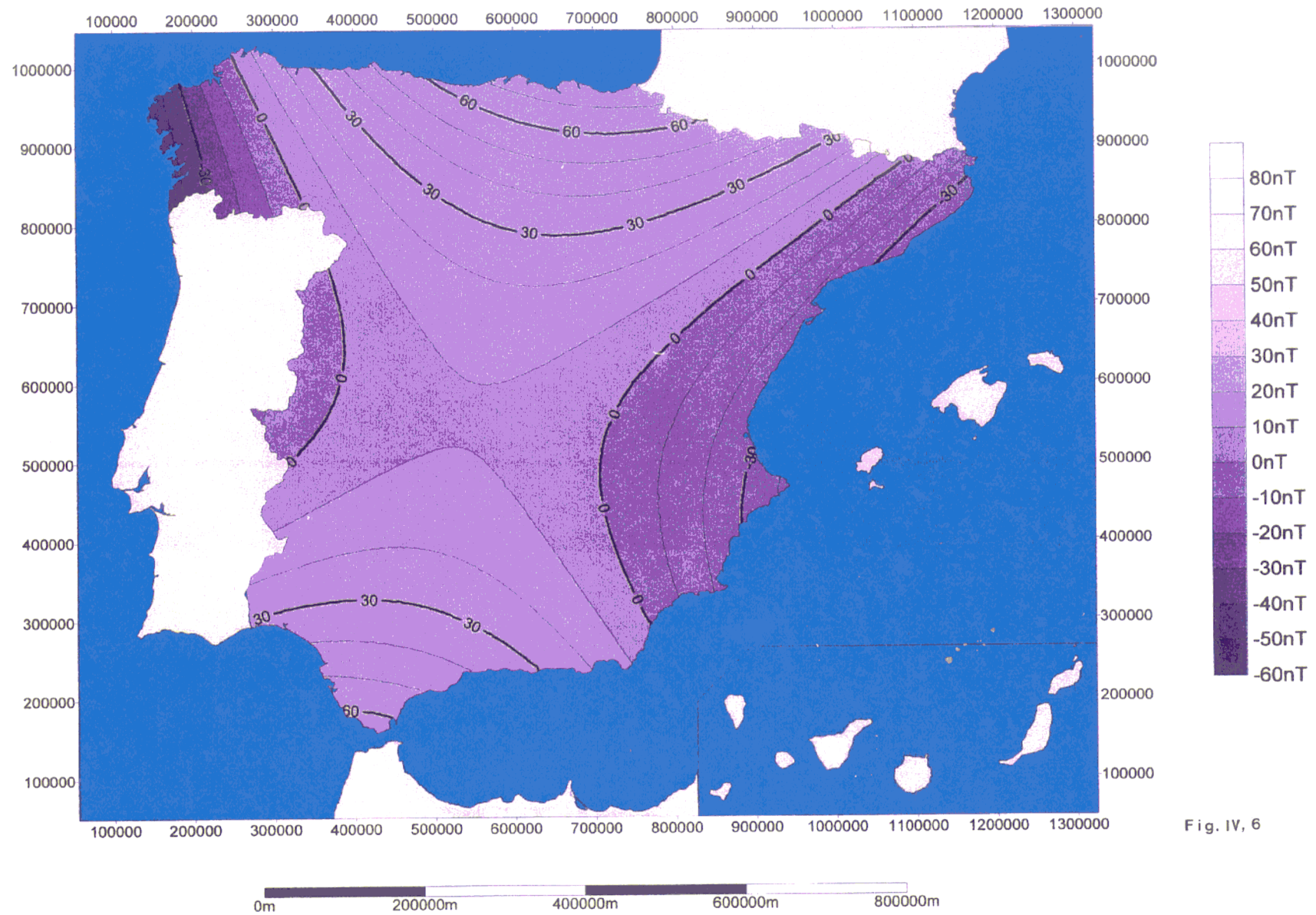


Fig. IV, 6

MAPA DE DIFERENCIAS (Modelo de 2º grado)

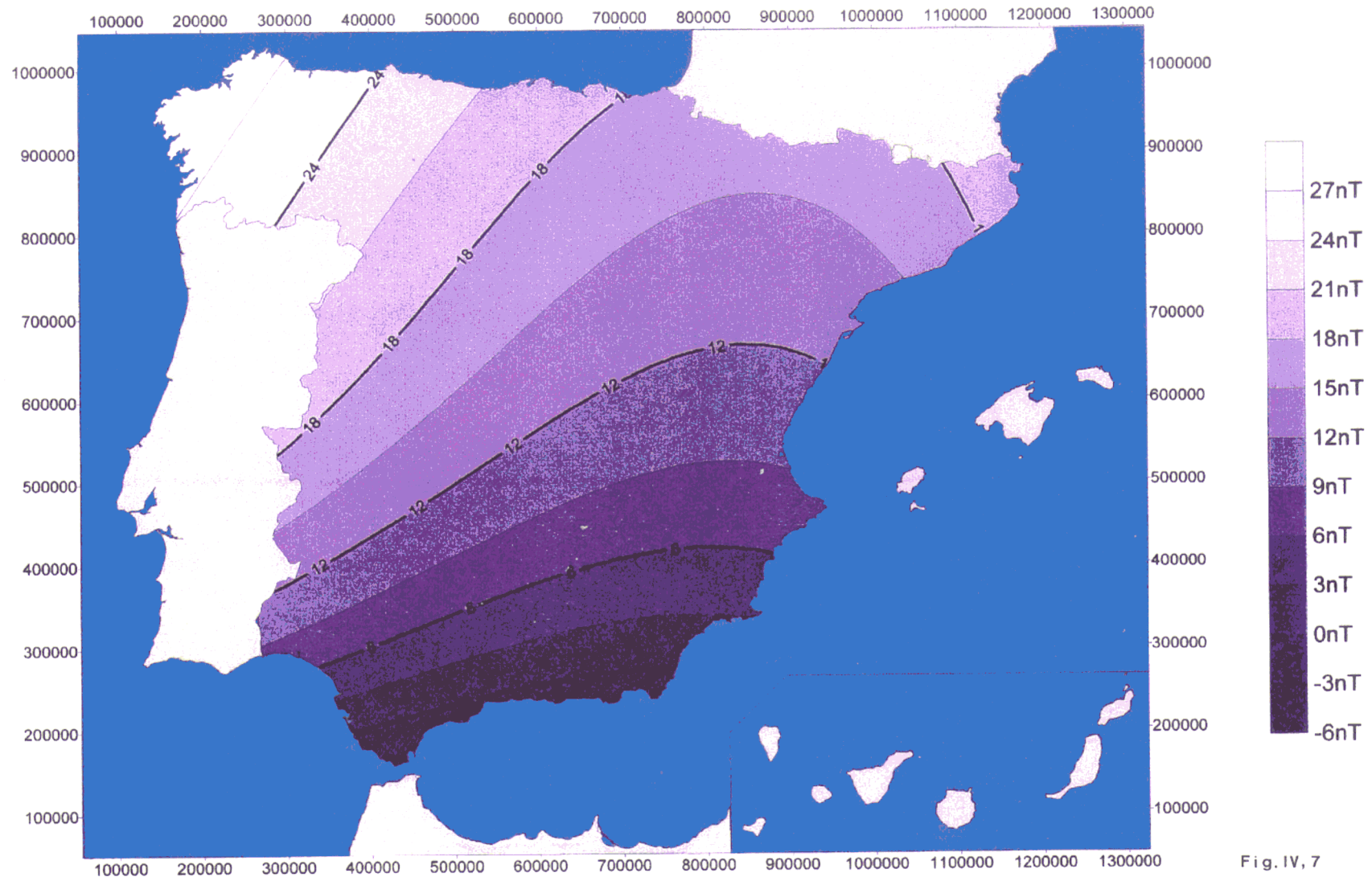


Fig. IV, 7

MAPA DE DIFERENCIAS (Modelo de 3° grado)

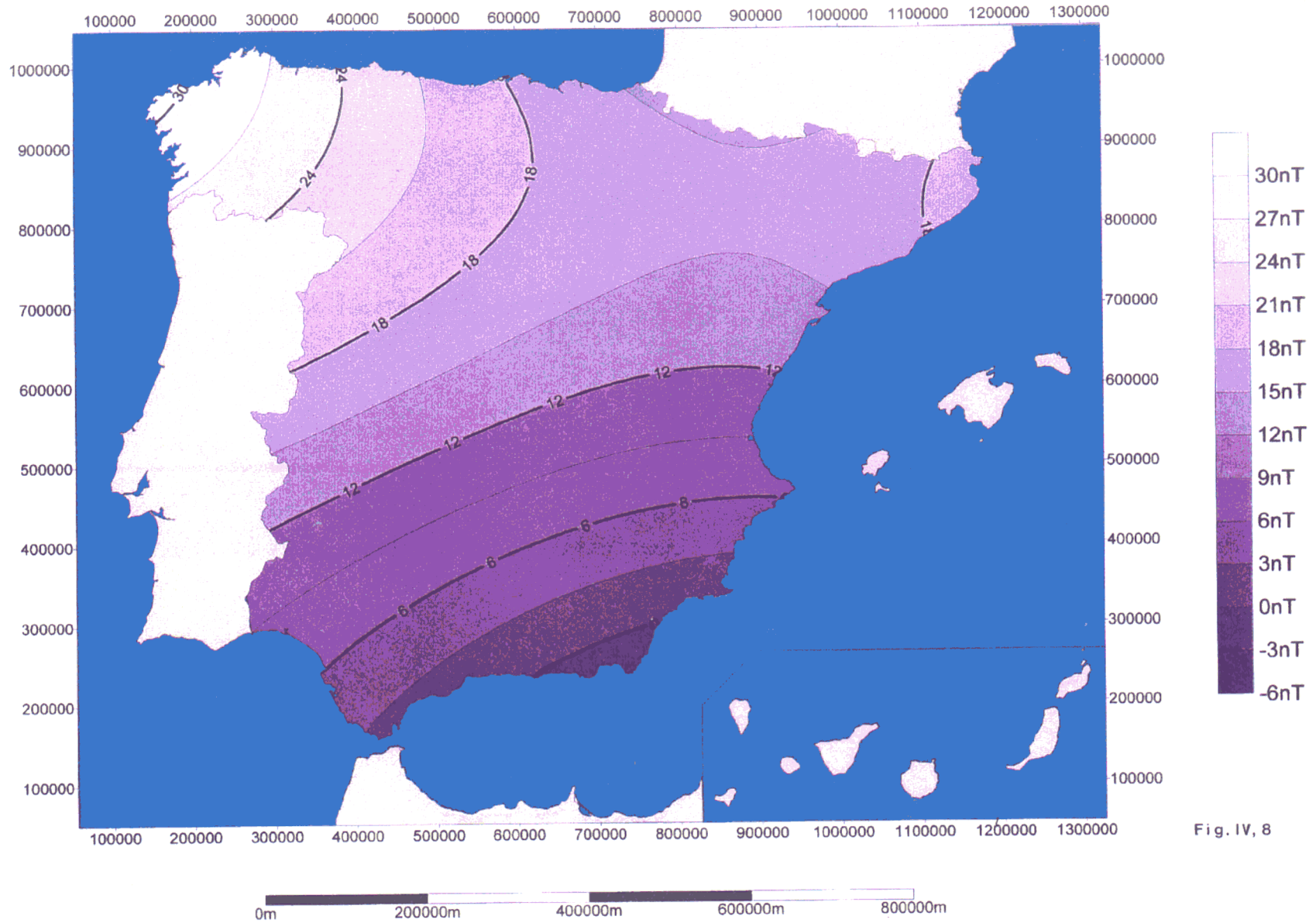


Fig. IV, 8

Por otra parte los valores numéricos de las diferencias con respecto al IGRF son más parecidos entre sí en los dos últimos modelos que en el primero, Además, en estos dos casos, las diferencias numéricas se distribuyen de forma muy parecida.

Los mapas de residuos (Figs. IV,9; IV,10 y IV,11) muestran que, con excepción de las grandes anomalías situadas al Norte, Noroeste y Sur del territorio peninsular, las discrepancias de los dos últimos modelos respecto al primero son mayores que las que existen entre ambos, las cuales sólo se manifiestan en la zona central.

El estudio descriptivo de comparación de los tres modelos se completa realizando un estudio espectral sobre el perfil de residuos más extenso del modelo (perfil 48), cuya extensión aproximada de Norte a Sur es de 757.2 Km (Figs. IV,12 y IV,13).

El estudio en cuestión consiste en determinar la curva de densidad espectral del perfil de residuos, obtenido a partir de cada modelo. Como puede verse, el perfil de los dos últimos casos (Figs. IV,12b y IV,12c) es muy similar y posee un comportamiento muy distinto al del primer caso (Fig. IV,12a), ya que la tendencia de crecimiento hacia el Norte que muestran los dos últimos modelos es más compatible con el comportamiento natural del campo magnético, que la del primero.

En cuanto a los espectros (Fig. IV,13), las diferencias mayores entre el modelo de primer grado respecto al de segundo o tercer grado tienen lugar, como fácilmente puede apreciarse, en el dominio de las longitudes de onda superiores a los 60 Km. Para cuantificar las discrepancias entre los tres espectros, recurrimos a la raíz cuadrática media de las diferencias entre ellos, las cuales valen

$$rcm_1 = 769.98$$

$$rcm_2 = 768.73$$

$$rcm_3 = 8.12$$

siendo rcm_1 , rcm_2 y rcm_3 la raíz cuadrática media de las diferencias entre los espectros del primer y segundo modelo, entre el primer y tercer modelo, y entre el segundo y tercer modelo respectivamente.

De esta manera, se puede afirmar de una forma más rigurosa que el comportamiento de los modelos de segundo y tercer grado, aún presentando ciertas diferencias entre sí, es mucho mejor que el primero. Asimismo, las discrepancias entre ellos son menores que las que presentan con respecto al modelo de primer grado.

MAPA DE RESIDUOS (Modelo de 1º grado)

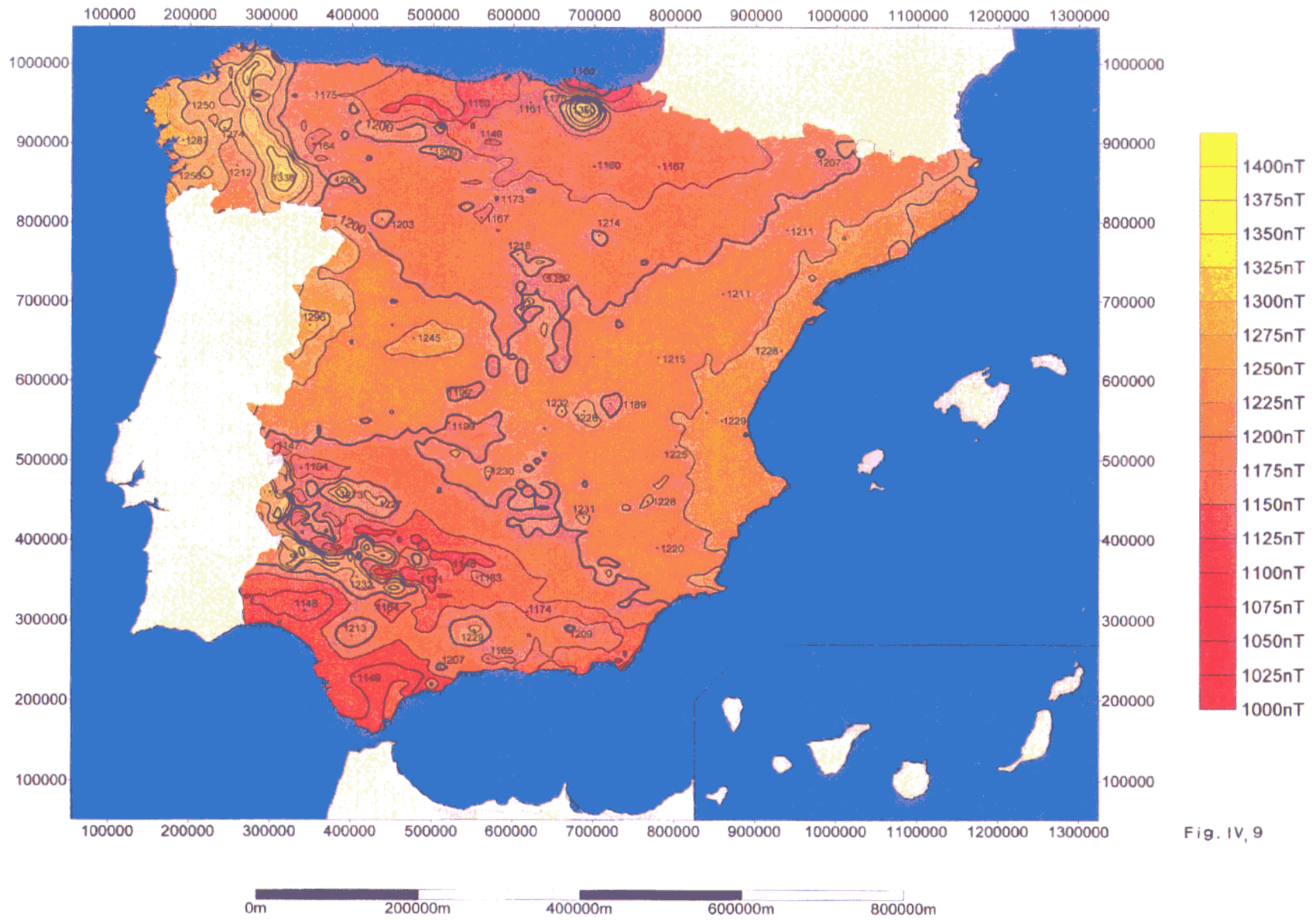


Fig. IV, 9

MAPA DE RESIDUOS (Modelo de 2º grado)

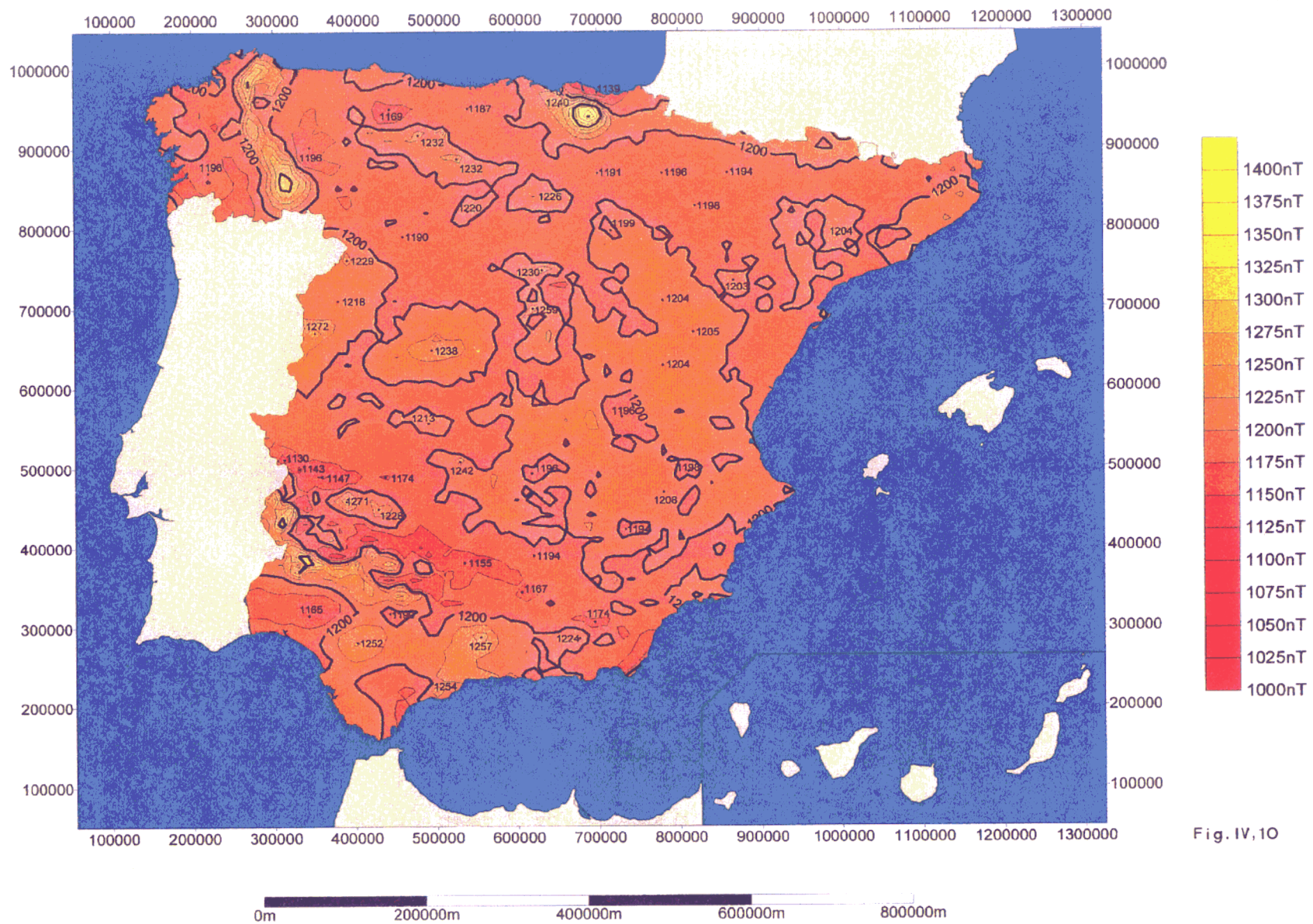


Fig. IV,10

MAPA DE RESIDUOS (Modelo de 3° grado)

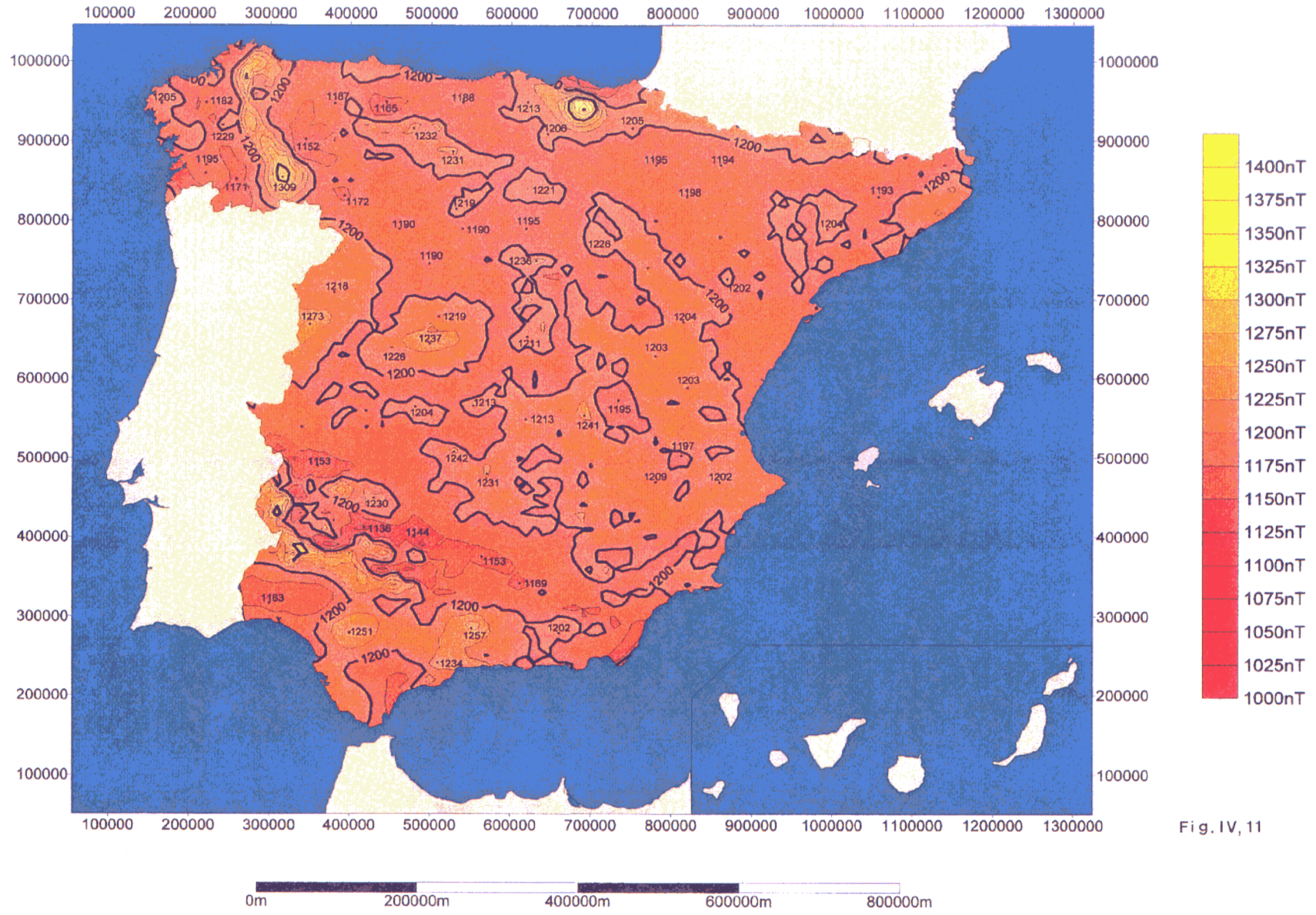
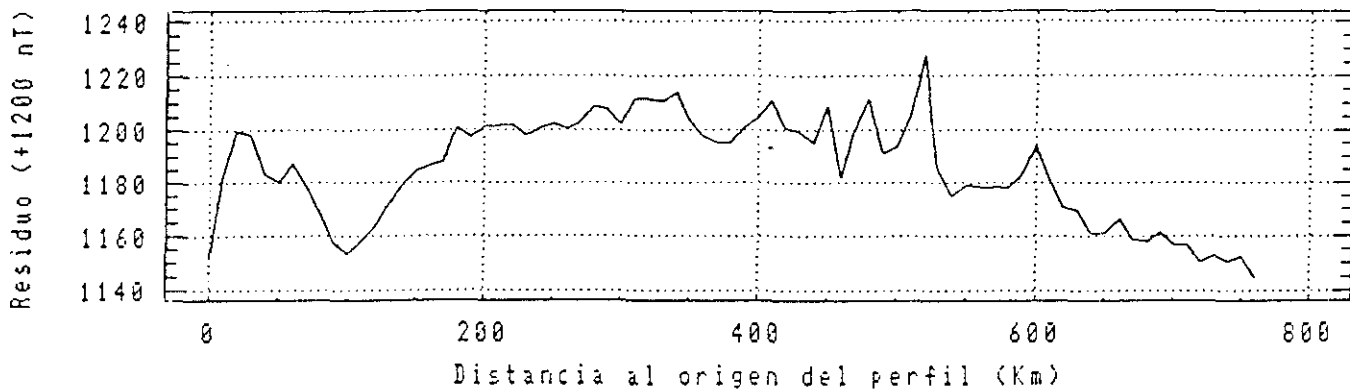


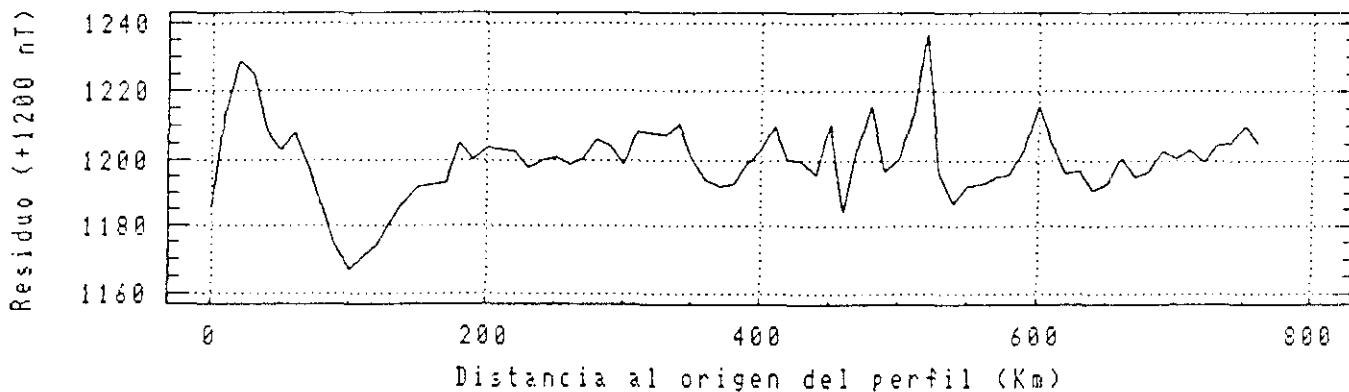
Fig. IV, 11

PERFIL DE LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 1º grado)



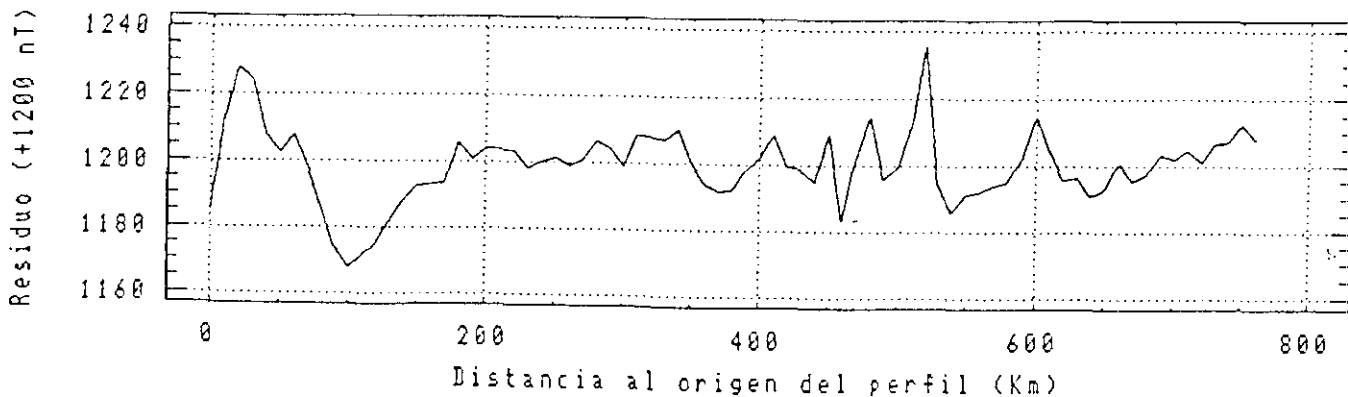
a)

PERFIL DE LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 2º grado)



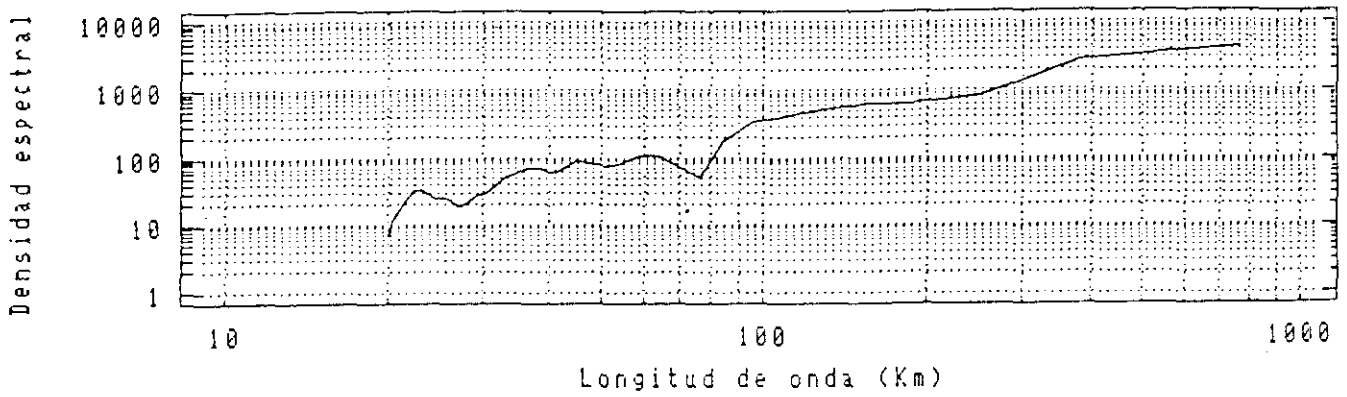
b)

PERFIL DE LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 3º grado)



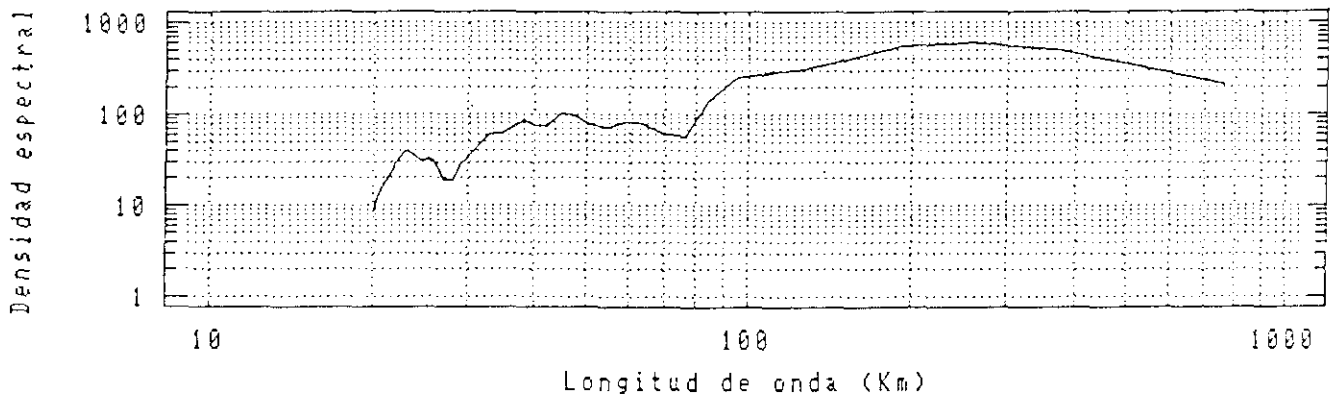
c)

ESPECTRO LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 1º grado)



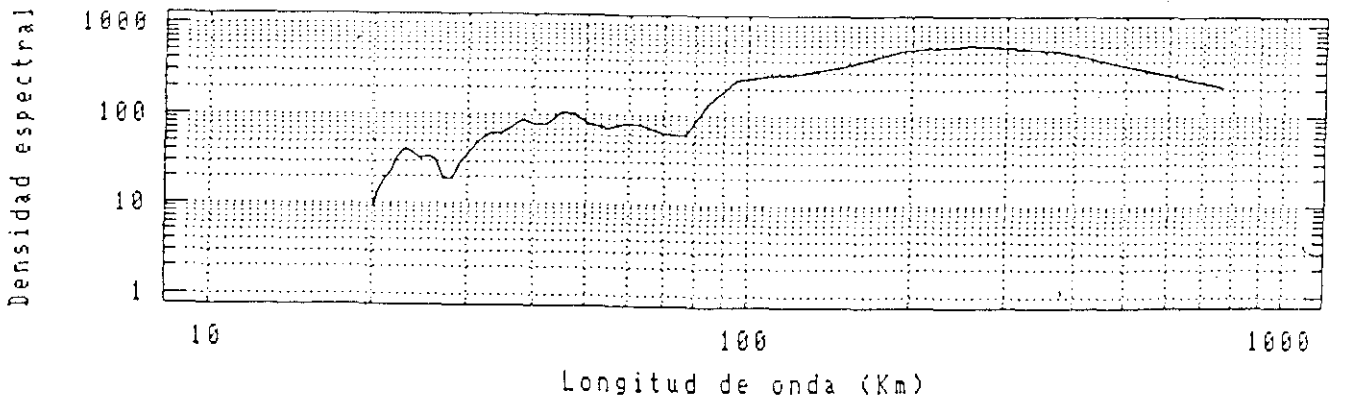
a)

ESPECTRO DE LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 2º grado)



b)

ESPECTRO DE LOS RESIDUOS DE LA LINEA 48
(Modelo de 3º grado)



c)

IV.5. LAS CONDICIONES DE VALIDEZ DEL MODELO.

En el capítulo anterior se expusieron las condiciones en las que se basa un modelo de regresión, las técnicas más generales para su verificación y los riesgos que habría que asumir si éste se usara para realizar estimaciones y predicciones. En el presente apartado se verifican dichas condiciones para el conjunto de modelos resumidos en la Tabla IV,3 y, en el caso de no cumplirse alguna de ellas, se analizan las causas buscándose, donde es posible, soluciones que disminuyan los efectos producidos por el incumplimiento de tales condiciones.

IV.5.1. Estudio preliminar de condiciones de validez.

Las condiciones de validez del modelo las dividimos en dos grupos. Las del primero de ellos son de carácter más general y su comprobación implica los siguientes análisis:

- Homogeneidad
- Influencia de las observaciones
- Multicolinealidad

mientras que los del segundo, se corresponden con las hipótesis básicas del modelo de regresión y los análisis que han de realizarse son:

- Linealidad
- Normalidad
- Homocedasticidad
- Independencia

IV.5.1.1. Homogeneidad

Por homogeneidad se entiende aquí la ausencia de observaciones con residuos atípicos, los cuales pueden causar distorsiones importantes del modelo.

Los residuos atípicos se caracterizan por hallarse muy alejados de la media. La experiencia confirma que pueden considerarse atípicos los residuos que se hallan a una distancia de la media superior o igual a tres veces la desviación típica. En la siguiente Tabla se resumen los resultados de un análisis estadístico sencillo aplicado a los residuos de cada modelo:

Tabla IV,5

| Modelo | S | e_m | e_M | Q_1 | Q_3 |
|----------|-------|---------|--------|--------|-------|
| Grado 1° | 32.41 | -130.25 | 205.09 | -19.71 | 19.31 |
| Grado 2° | 19.65 | -87.49 | 228.62 | -6.86 | 4.62 |
| Grado 3° | 19.62 | -87.24 | 230.16 | -6.95 | 4.66 |

siendo

S : la desviación típica de los residuos.

e_m : el residuo mínimo.

e_M : el residuo máximo.

Q_1 : el cuartil inferior (percentil del 25%).

Q_3 : el cuartil superior (percentil del 75%).

por lo que, según el criterio empírico establecido anteriormente:

- Los residuos mínimo y máximo de cada modelo pueden considerarse atípicos.
- Los siguientes intervalos contendrían residuos atípicos en cada modelo:

Tabla IV,6

| Modelo | Intervalos | |
|----------|-------------------|-----------------|
| Grado 1° | (-97.23, -130.25) | (97.23, 205.09) |
| Grado 2° | (-87.49, -58.95) | (58.95, 228.62) |
| Grado 3° | (-87.24, 58.86) | (58.86, 230.16) |

- El porcentaje de las observaciones que podrían considerarse atípicas es inferior al 12%.

De una forma más rigurosa, es posible discriminar los residuos atípicos mediante el uso de los residuos estudentizados (Peña, 1989b):

$$t_i = \frac{e_i}{\hat{S}_{R(i)} \sqrt{I - v_{ii}}}$$

siendo:

e_i = el valor del residuo de la observación i .

$\hat{S}_{R(i)}$ = la desviación típica residual cuando no interviene la observación i .

v_{ii} = el término i de la diagonal principal de la matriz V , definida en el tercer capítulo.

Dichos residuos poseen una distribución de probabilidad t con $n-k-2$ grados de libertad cuando no existen observaciones, siendo n el número de observaciones y k el número de parámetros del modelo.

Con el resultado anterior, se construye un contraste de hipótesis que nos permite averiguar si un residuo es atípico para un nivel de significación, usando la desigualdad de Bonferroni. El contraste se aplica de la siguiente manera:

- a) Fijamos un nivel global de significación α_T , es decir un nivel de significación que permita contrastar la hipótesis de la existencia de al menos un residuo atípico.
- b) Se determina el nivel de significación individual α , de manera que

$$\alpha = \frac{\alpha_T}{n} \quad (IV,10)$$

- c) Se determinan un valor crítico t_c correspondiente a una distribución t con $n-k-2$ grados de libertad tal que

$$Prob(|t| < t_c) = \alpha$$

- d) Consideraremos atípica una observación si su residuo estudentizado es mayor que t_c .

En nuestro caso concreto, al ser n muy grande ($n=5316$), la distribución t se aproxima a una distribución $N(0,1)$, por lo que el valor crítico t_c correspondiente a cada modelo, fijando un nivel global $\alpha_T=0.05$, tomará los siguientes valores:

Tabla IV,7

| Modelo | t_c | t_m | t_M |
|----------|-------|--------|-------|
| Grado 1° | 4.43 | -4.018 | 6.33 |
| Grado 2° | 4.44 | -4.45 | 11.64 |
| Grado 3° | 4.57 | -4.44 | 11.74 |

En la tabla anterior se muestran también los valores mínimos (t_m) y máximo (t_M) de los residuos estudentizados, con dicha tabla pueden definirse los intervalos en los que se hallan las observaciones atípicas, los cuales son,

$$(t_m, -t_c) \text{ y } (t_c, t_M)$$

Ahora bien, al ser el tamaño de la muestra un número grande, es fácil demostrar que los residuos estandarizados y los residuos estudentizados son aproximadamente iguales. De esta manera, podemos afirmar con total seguridad (pues el valor de α es muy bajo) que todos los residuos que se hallan a una distancia de la media superior a cuatro desviaciones típicas aproximadamente, pueden considerarse atípicos.

Sin embargo, entre tres y cuatro desviaciones típicas (e incluso bajo tres desviaciones atípicas) también pueden existir residuos atípicos, los cuales no se ponen de manifiesto ya que al ser el nivel de significación global (α_T) un número muy bajo, el nivel de significación individual (α) es más bajo aún (IV, 10) y como consecuencia de ello, el valor crítico (t_c) correspondiente al contraste individual es mayor que el que corresponde al contraste global.

IV.5.1.2. Influencia de las observaciones.

La distancia de Cook (véase el Capítulo III) permite definir un contraste de hipótesis con el que podemos localizar medidas influyentes. En efecto, cuando las observaciones no son influyentes sus correspondientes distancias de Cook poseen una distribución $F(k+1, n-k-1)$. De esta forma, diremos que la observación "i" es influyente cuando

$$D(i) \geq F_c$$

siendo F_c el valor crítico para un nivel de significación α que tomaremos igual a 0.05.

Aplicando todo lo anteriormente expuesto a este caso se obtiene la siguiente Tabla:

| Modelo | F_c | D_m | D_M |
|----------|-------|---------------------|-------|
| Grado 1° | 2.60 | $11 \cdot 10^{-12}$ | 0.01 |
| Grado 2° | 2.1 | $44 \cdot 10^{-4}$ | 0.03 |
| Grado 3° | 1.83 | $11 \cdot 10^{-14}$ | 0.03 |

siendo D_m y D_M las distancias de Cook mínima y máxima respectivamente correspondientes a cada modelo, por lo tanto los resultados no revelan la existencia de observaciones influyentes.

IV.5.1.3. Multicolinealidad.

La forma más sencilla de buscar posibles indicios de multicolinealidad consiste en examinar la matriz de correlaciones de las variables independientes. De acuerdo con los datos, la matriz de correlaciones correspondiente a cada modelo sería

Grado 1º

| | w_{10} | w_{01} |
|----------|----------|----------|
| w_{10} | 1.0000 | 0.0706 |
| w_{01} | 0.0706 | 1.0000 |

Grado 2º

| | w_{10} | w_{01} | w_{11} | w_{20} | w_{02} |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| w_{10} | 1.0000 | 0.0706 | -0.2145 | -0.2457 | 0.2848 |
| w_{01} | 0.0706 | 1.0000 | 0.3478 | -0.2157 | 0.1598 |
| w_{11} | -0.2145 | 0.3478 | 1.0000 | 0.0474 | 0.0564 |
| w_{20} | -0.2457 | -0.2157 | 0.0474 | 1.0000 | -0.0654 |
| w_{02} | 0.2848 | 0.1598 | 0.0564 | -0.0654 | 1.0000 |

Grado 3º

| | w_{10} | w_{01} | w_{11} | w_{20} | w_{02} | w_{21} | w_{12} | w_{30} | w_{03} |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| w_{10} | 1.0000 | 0.0706 | -0.2145 | -0.2457 | 0.2848 | 0.094 | 0.6563 | 0.8862 | 0.047 |
| w_{01} | 0.0706 | 1.0000 | 0.3478 | -0.2157 | 0.1598 | 0.7635 | 0.0950 | 0.0529 | 0.8312 |
| w_{11} | -0.2145 | 0.3478 | 1.0000 | 0.0474 | 0.0564 | 0.2571 | -0.2288 | -0.3094 | 0.5190 |
| w_{20} | -0.2457 | -0.2157 | 0.0474 | 1.0000 | -0.0654 | -0.3895 | -0.0361 | -0.4176 | -0.1738 |
| w_{02} | 0.2848 | 0.1598 | 0.0564 | -0.0654 | 1.0000 | -0.0567 | 0.6659 | 0.2055 | 0.3348 |
| w_{21} | 0.0940 | 0.7635 | 0.2571 | -0.3895 | -0.0567 | 1.0000 | -0.0079 | 0.1588 | 0.6186 |
| w_{12} | 0.6563 | 0.0950 | -0.2288 | -0.0361 | 0.6659 | -0.0079 | 1.0000 | 0.5233 | 0.1718 |
| w_{30} | 0.8862 | 0.5229 | -0.3094 | -0.4176 | 0.2055 | 0.1588 | 0.5233 | 1.0000 | -0.0062 |
| w_{03} | 0.047 | 0.8312 | 0.5190 | -0.1738 | 0.3348 | 0.6186 | 0.1718 | -0.0062 | 1.0000 |

En las dos primeras matrices los coeficientes de correlación lineal entre parejas de variables independientes son muy bajos, sin embargo, en la tercera matriz de correlaciones algunos de sus elementos son altos, principalmente r_{81} , r_{92} , r_{62} , r_{71} y r_{75} los cuales indican que existe correlación lineal entre las siguientes parejas de variables y que en algunos casos ésta es bastante alta, pudiendo deberse al cambio de variables,

$$w_{ij} = (\varphi - 40.427) \cdot (\lambda + 3.5375) \quad (IV, 11)$$

que se efectuó al principio para linealizar los modelos.

Tabla IV,8

| Pareja de variables | r_{ij} |
|---------------------|----------|
| w_{10}, w_{11} | 0.8862 |
| w_{11}, w_{01} | 0.8312 |
| w_{21}, w_{01} | 0.7635 |
| w_{12}, w_{02} | 0.6659 |

Para cuantificar el efecto se recurre a la determinación del índice de condicionamiento

$$IC = \sqrt{\frac{L_M}{L_m}} \quad (IV,12)$$

siendo L_M y L_m respectivamente los valores propios máximo y mínimo de la matriz de correlaciones de las variables independientes. En la siguiente tabla se presenta el índice de condicionamiento correspondiente a cada uno de los tres modelos polinómicos:

Tabla IV,9

| Modelo | L_M | L_m | IC |
|----------|--------|--------|-------|
| Grado 1º | 1.0706 | 0.9294 | 1.073 |
| Grado 2º | 1.5307 | 0.5390 | 1.685 |
| Grado 3º | 3.0621 | 0.0723 | 6.508 |

Según se vio en III.4.9.6., cuando el índice de condicionamiento es menor de 10 se considera que no existe multicolinealidad o que ésta es muy baja. Un valor entre 10 y 30 indica una multicolinealidad moderada y cuando es mayor de 30 se dice que existe una alta multicolinealidad (Belsley et al., 1980; Peña, 1989b).

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, los dos primeros modelos no poseen multicolinealidad y la del tercero es muy baja, por lo que en los tres puede considerarse bien condicionada la matriz $X'X$, con cuya inversa se estiman los coeficientes de los modelos.

IV.5.1.4. Linealidad

De acuerdo con lo expuesto en IV.3, la hipótesis de linealidad exige que la esperanza matemática de los valores de B para cada conjunto fijo de valores de las variables independientes w_{ij} cumpla la siguiente condición:

$$E(B/w_{10}, w_{01}, \dots, w_{ij}, \dots) = b_{00} + b_{10} w_{10} + b_{01} w_{01} + \dots + b_{ij} w_{ij} + \dots$$

Por lo tanto, el modelo teórico de la intensidad del campo magnético se expresaría de la siguiente forma

$$B = E(B/w_{10}, w_{01}, \dots, w_{ij}, \dots) + u_k$$

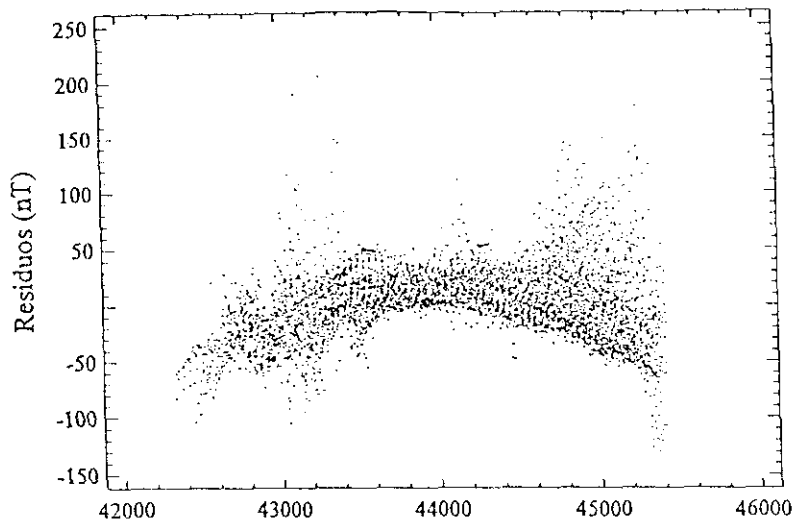
siendo u_k la perturbación del modelo.

La forma más sencilla de investigar la linealidad de un modelo, tal como se explica en III.4.9.2., consiste en examinar el gráfico de residuos frente a los valores estimados de la variable dependiente. Cuando la nube de puntos que en dicho gráfico se representa, posee una tendencia a curvarse de forma sistemática, puede considerarse que existe una falta de linealidad posiblemente debida a la omisión de alguna variable relevante en el modelo.

En nuestro caso, dichos gráficos se presentan en las figuras IV,14a, IV,14b y IV,14c. La primera de ellas, corresponde al modelo polinómico del primer grado. En ella se observa que la nube de puntos posee una tendencia clara a curvarse hacia las ordenadas negativas (dicha tendencia se aprecia aún mejor en la figura IV,15). La curvatura anteriormente mencionada, no se manifiesta en las figuras IV,14b y IV,14c, las cuales corresponden a los modelos polinómicos de segundo y tercer grado respectivamente, donde la zona de mayor concentración de observaciones se extiende alrededor de la ordenada cero (valor medio de los residuos), tal como predice la ecuación (III,3). Las mismas conclusiones se alcanzan cuando se representan gráficamente la totalidad de los puntos.

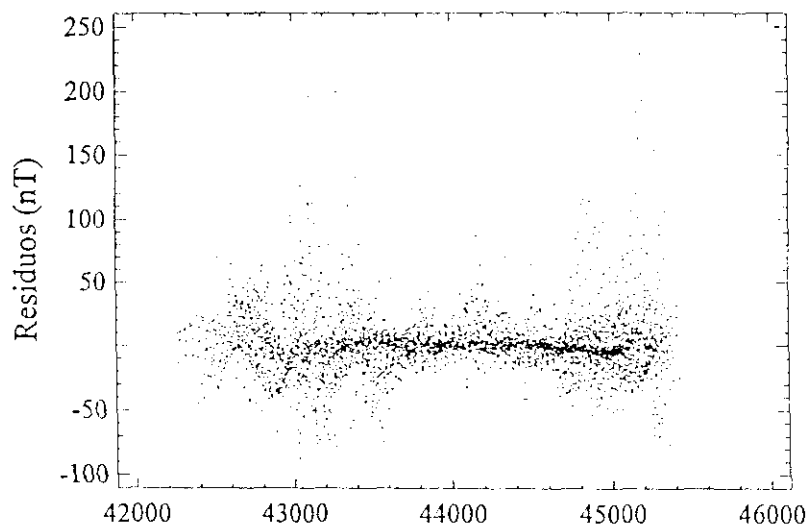
De todo lo anteriormente expuesto, podemos concluir que, mientras el modelo de primer grado manifiesta una falta de definición, posiblemente debida a la ausencia de variables (en nuestro caso términos de grado superior al primero), los dos modelos restantes están bien definidos y poseen un comportamiento muy similar.

Modelo de 1º grado



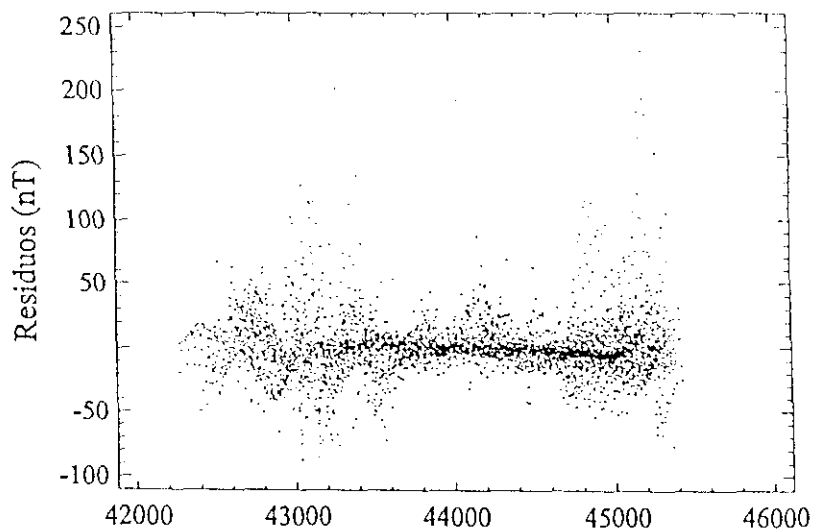
Valores estimados de B (nT)

Modelo de 2º grado



Valores estimados de B (nT)

Modelo de 3º grado



Valores estimados de B (nT)

Fig. IV, 14

Modelo de 1° grado

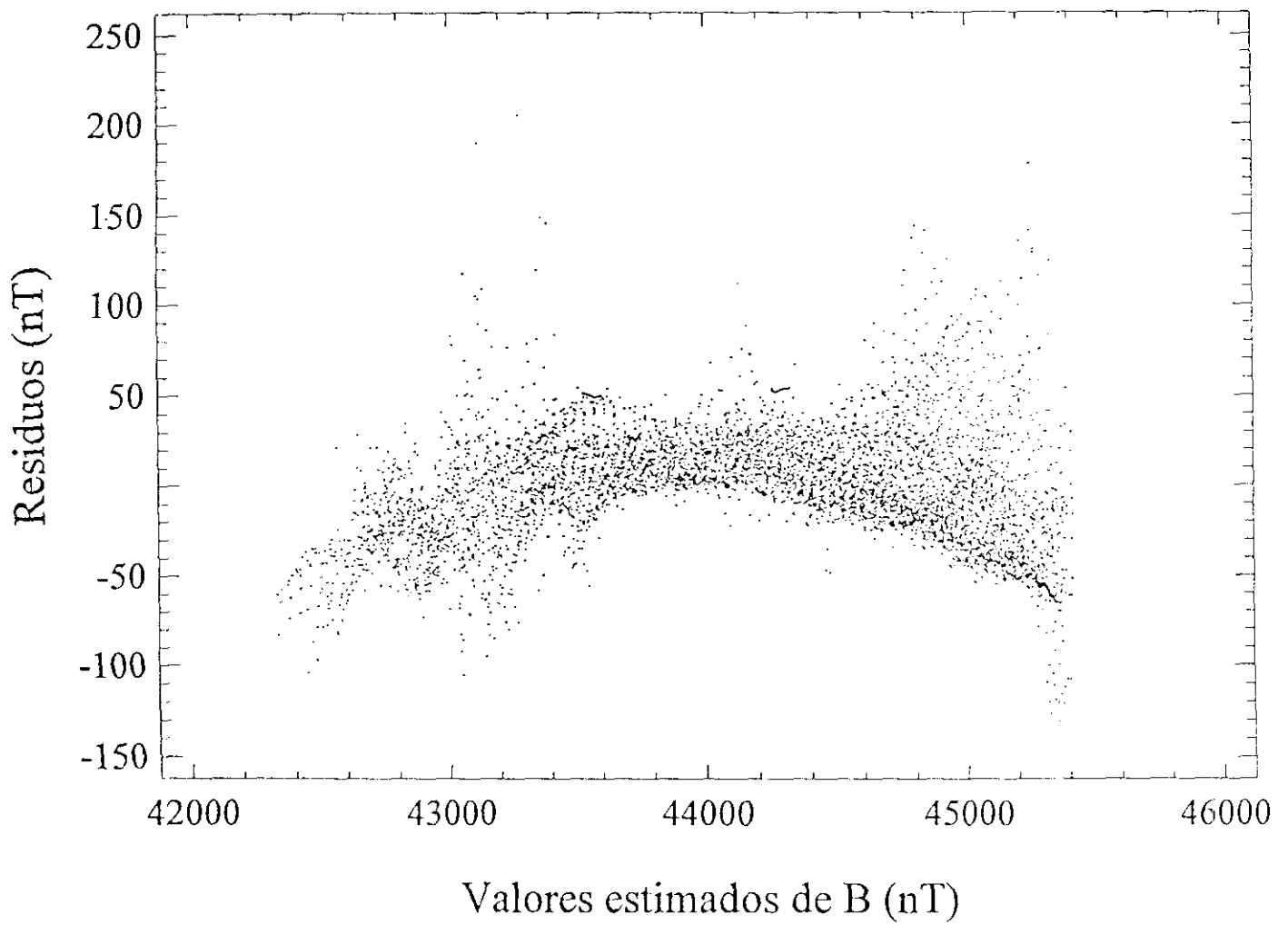


Fig. IV,15

IV.5.1.5. Normalidad.

Con frecuencia, la condición de normalidad se verifica mediante alguno de los contrastes descritos en III.4.9.3., completándose esta verificación con alguna representación gráfica que explique, en el caso de no verificarse la hipótesis, cuales pueden ser sus causas.

En nuestro caso concreto se ha elegido el contraste de Kolmogorov-Smirnov, el cual consiste en comparar la distribución acumulada experimental de los residuos, con una de tipo normal cuya media y desviación típica posean valores iguales a los de sus homólogos en la muestra. Si dicha diferencia supera un valor crítico definido mediante un nivel de significación α muy pequeño, entonces se considera que la misma es muy elevada y que es poco probable que este suceso tenga lugar.

El valor crítico se determina con las tablas de Kolmogorov, algunos ejemplos de los cuales pueden verse en las anotaciones bibliográficas citadas en el apartado mencionado. Sin embargo, si el tamaño de la muestra es grande, tal como ocurre en nuestro caso, las tablas mencionadas son insuficientes para dar el valor crítico. En este caso, el valor crítico se determina teniendo en cuenta que el estadístico

$$Z_k^+ = 4nD_M^{+2} \quad (IV,13)$$

sigue una distribución de probabilidad χ^2 de dos grados de libertad, siendo D_M^+ la máxima diferencia positiva entre las distribuciones empírica y teórica (Neave y Worthington, 1988; Goodman, 1954). De igual forma, el estadístico

$$Z_k = 4n|D|_M^2 \quad (IV,14)$$

(siendo $|D|_M$ la máxima diferencia en valor absoluto) también posee el mismo tipo de distribución, pero en ese caso nivel de significación necesario para fijar el valor crítico sería la mitad. Así pues, si deseamos fijar un nivel $\alpha=5\%$ buscaríamos el valor crítico para un nivel del 25%, el cual es

$$Z_{kC} = 7.38$$

y de acuerdo en (IV,14), el valor crítico de la diferencia máxima absoluta para un nivel del 5% sería

$$|D|_{MC} = \sqrt{\frac{7.38}{4n}} = \frac{1.36}{\sqrt{n}} \quad (IV,15)$$

El resultado del contraste de Kolmogorov-Smirnov aplicado a los residuos de cada uno de los modelos polinómicos se resume en la siguiente tabla:

Tabla IV,10

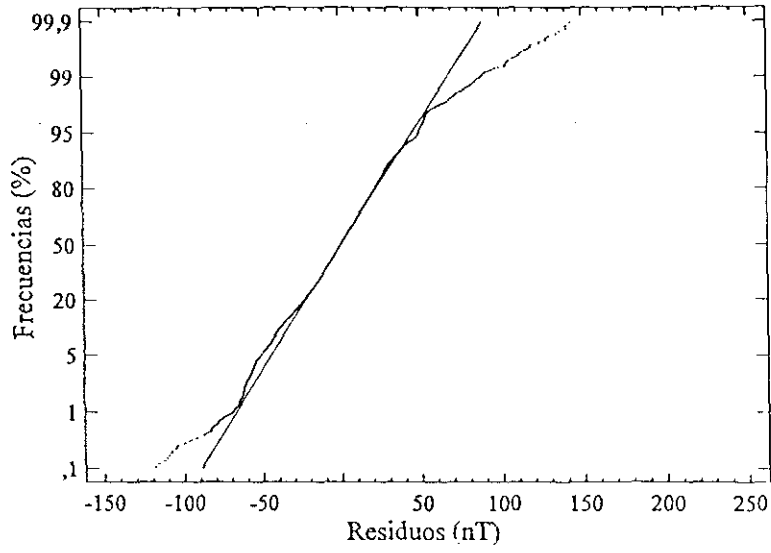
| Modelo | $ D _M$ | $ D _{Mc}$ |
|----------|---------|------------|
| Grado 1° | 0.04 | 0.019 |
| Grado 2° | 0.16 | 0.019 |
| Grado 3° | 0.16 | 0.019 |

Según se aprecia, en los tres casos se rechaza la hipótesis de normalidad al 5% de significación. Sin embargo, el primer modelo se aproxima más al cumplimiento de dicha condición que los dos últimos.

Mediante los gráficos de probabilidad normal puede profundizarse más aún sobre los resultados obtenidos anteriormente. Dichos gráficos se obtienen representando en abscisas los valores de los residuos y en ordenadas la frecuencia acumulada correspondiente a cada uno de los mismos. El eje ha sido escalado de acuerdo a los valores que tomarían tales frecuencias si la distribución fuera normal. Por ello, si la distribución de los residuos cumpliera la condición de normalidad, la nube de puntos será una línea recta.

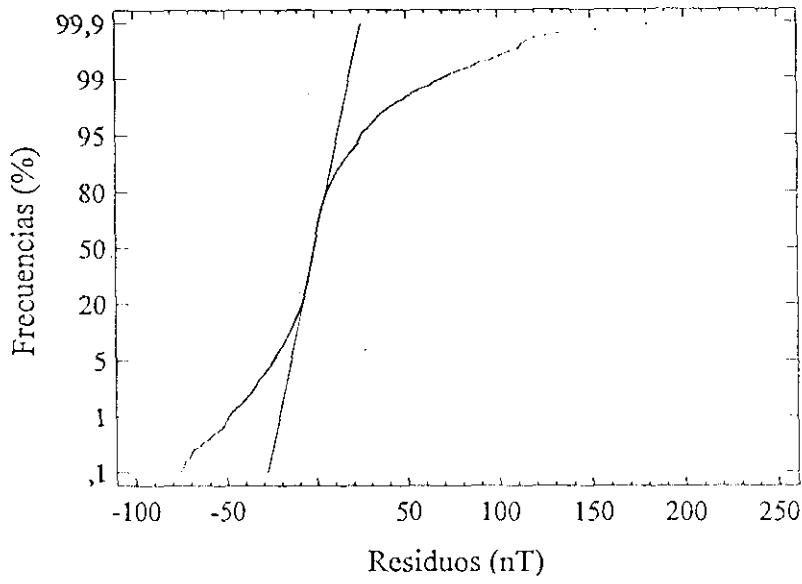
Como puede verse, existen residuos que se desvían bastante de la normalidad, cuyos valores absolutos superan en el primer caso (Fig.IV,16a) 80 nT y de 50 nT aproximadamente en los dos últimos casos (Figs.IV,16b y IV,16c), es decir aproximadamente dos veces y media la desviación típica residual. Esto, junto con lo expuesto en IV.5.1, sugiere que los residuos atípicos contribuyen a la desviación respecto a la normalidad. Todo ello puede confirmarse comparando las figuras IV,14 y IV,16.

Modelo de 1° grado



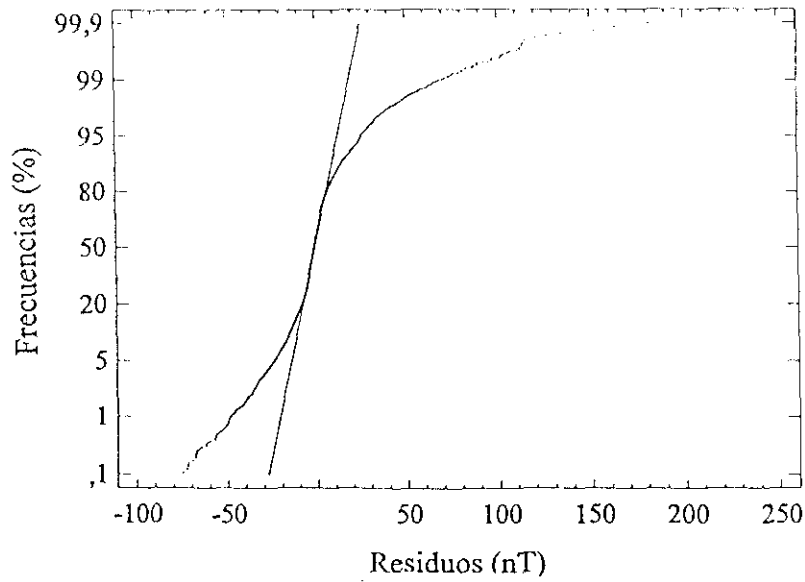
a)

Modelo de 2° grado



b)

Modelo de 3° grado



c)

Fig. IV, 16

IV.5.1.6. Homocedasticidad

La homocedasticidad, es decir la homogeneidad de varianzas de las perturbaciones del modelo (ver III.3), puede estudiarse mediante contrastes de hipótesis y mediante gráficos de residuos frente a valores estimados de la variable dependiente.

Cuando existe más de una medida en cada uno de los puntos de observación, los contrastes constituyen el procedimiento más riguroso para verificar ésta hipótesis. Sin embargo, cuando sólo hay una medida por cada punto de observación, tal como ocurre en este caso, es necesario proceder a realizar grupos de observaciones en cada uno de los cuales se estima su varianza, para posteriormente compararla con las del resto (vease III.4.9.4). Estas técnicas pueden conducir a rechazar la hipótesis de homocedasticidad según se realicen las agrupaciones, aún cuando no existen evidencias de heterocedasticidad, por lo que no deben aplicarse hasta estar muy seguro de ello.

En nuestro caso, los gráficos de las figuras IV,17a, IV17b y IV17c indican claramente la heterogeneidad de varianzas sin necesidad de recurrir a ningún contraste de hipótesis ya que, aunque no se aprecia un incremento o un decremento sistemático con el valor estimado de la intensidad del campo magnético terrestre, existen grupos cuya variabilidad es mucho mayor que la de los demás debido a la presencia en ellos de residuos con valores muy altos.

Sin embargo, en las figuras IV,17b y IV,17c, puede apreciarse que dentro del intervalo comprendido entre ± 50 nT (aproximadamente $\pm 2,5 \hat{S}_R$), que contiene aproximadamente el 97% de las observaciones de la muestra, existe homogeneidad en la dispersión de los residuos, especialmente dentro del intervalo ± 40 nT (aproximadamente $\pm 2 \hat{S}_R$).

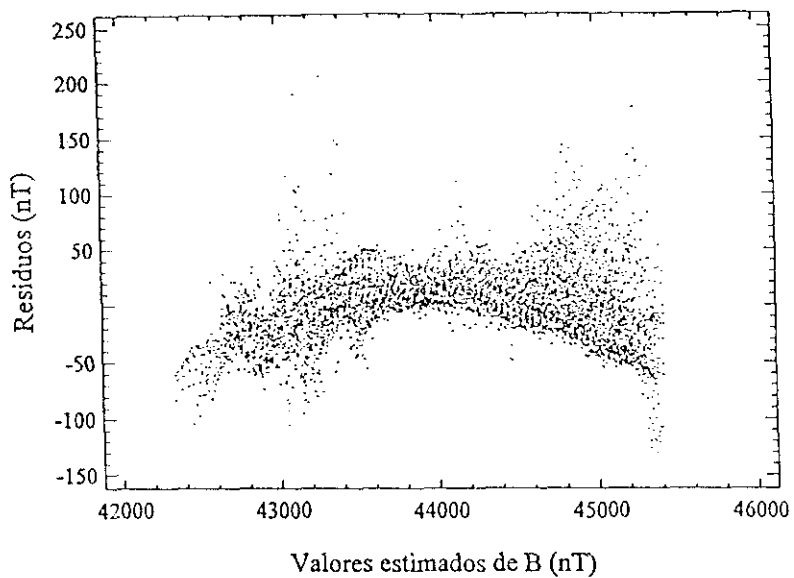
De todo lo anterior se desprende que la heterogeneidad de varianzas se debe a la presencia de residuos atípicos.

IV.5.1.7. Independencia

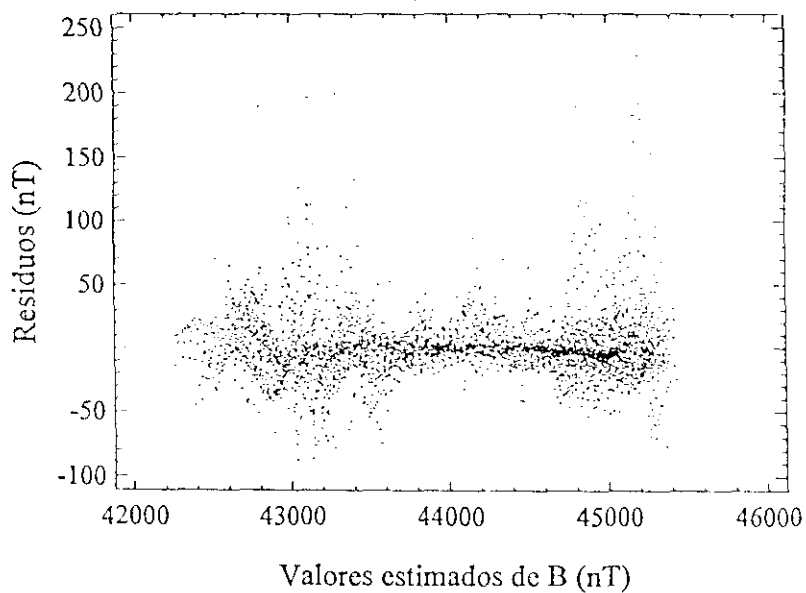
La hipótesis de independencia puede verificarse mediante el contraste de rachas que, según lo explicado en III.4.9.5., consiste en determinar sucesiones de residuos por encima o por debajo de la mediana (rachas).

La hipótesis de independencia se rechaza cuando el número de rachas (r) es significativamente alto o bajo. El primer caso indica la existencia de una elevada autocorrelación positiva de los residuos, mientras que el segundo una alta autocorrelación negativa de los mismos.

Modelo de 1° grado



Modelo de 2° grado



Modelo de 3° grado

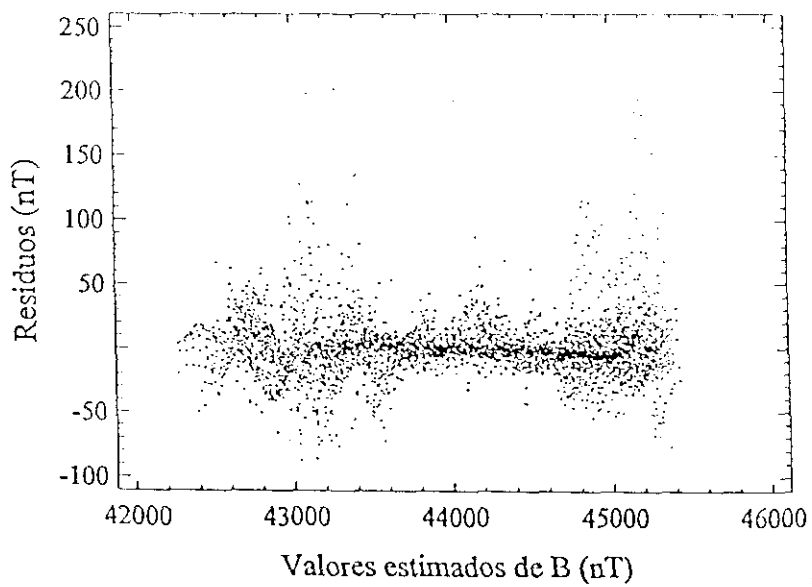


Fig. IV, 17

En nuestro caso concreto, la aplicación del contraste de rachas se realiza mediante la aproximación normal explicada en el apartado antes mencionado. De acuerdo con lo allí expuesto es necesario determinar el coeficiente (III,35) y compararlo con los valores críticos, para un nivel de significación α , de una distribución normal cuya media es cero y cuya varianza es uno.

Los resultados del análisis aplicados a los residuos de los tres modelos polinómicos, se resumen en la siguiente Tabla:

Tabla IV.11

| Modelo | r | Z | $\pm Z_c$ |
|----------|------|--------|------------|
| Grado 1° | 699 | -53,77 | ± 1.96 |
| Grado 2° | 1297 | -37,86 | ± 1.96 |
| Grado 3° | 1278 | -37,64 | ± 1.96 |

siendo r el número de rachas, Z el estadístico del contraste y $\pm Z_c$ son los valores críticos para un nivel de significación del 5%.

Así pues, la hipótesis de independencia, puede rechazarse para el nivel del 5% en los tres casos.

IV.5.2. ANALISIS DE LAS CONDICIONES DE VALIDEZ

En el apartado IV.5.1. se han verificado las condiciones de validez de cada uno de los tres modelos polinómicos superficiales del campo magnético, comprobándose que algunas no se cumplen. En el presente apartado se analizan las causas para hallar, donde sea posible, una solución.

IV.5.2.1. Linealidad

Como se ha visto ya, el modelo polinómico de primer grado presenta evidencias claras de falta de linealidad mientras que en los dos restantes no existen indicios de ello.

Para corregir esta falta de linealidad, existen dos alternativas:

- Efectuar cambios de variable que corrijan este efecto.
- Añadir variables no incluidas en el modelo.

En el primer caso, es frecuente recurrir a la transformación de Box- Cox, que consiste en realizar el siguiente cambio de la variable dependiente

$$B^{(1)} = \frac{B^l - 1}{l} = a'_{00} + a'_{10}w_{10} + a'_{01}w_{01} \quad (IV, 16)$$

estimándose el parámetro l de la transformación mediante el procedimiento de máxima verosimilitud (Peña, 1989b).

En nuestro caso, por razones de precisión en el cálculo del parámetro l efectuado con los programas de la librería estadística BMDP, ha sido necesario realizar previamente un cambio de unidades de B dividiéndola por 1000, es decir

$$B' = \frac{B}{1000} \quad (IV,17)$$

De acuerdo con los datos, el valor del parámetro de la transformación de Box-Cox es

$$l=3.8564$$

Esta transformación corrige la falta de linealidad del modelo tal como puede apreciarse en las figuras IV,18a y IV,18b que representan respectivamente el estado de los residuos antes y después de la transformación. Como puede observarse la curvatura presente en la figura IV,18a (indicio de que la esperanza matemática de las perturbaciones es distinta de cero), desaparece en la figura IV,18b.

Los coeficientes a'_{00} , a'_{10} y a'_{01} se determinan hallando la regresión de B^y sobre w_{10} y w_{01} y valen

$$a'_{00} = 98878.8437$$

$$a'_{10} = 2997.0059$$

$$a'_{01} = 155.9105$$

La forma explícita del modelo es:

$$B = 1000(331838.3996 + 10057.9518w_{10} + 523.2356w_{01})^{\frac{1}{l}} \quad (IV,18)$$

siendo

$$\frac{1}{l} = 0.29797$$

sin embargo, es necesario recordar que el modelo que cumple la linealidad es el (IV,16) y no el (IV,18).

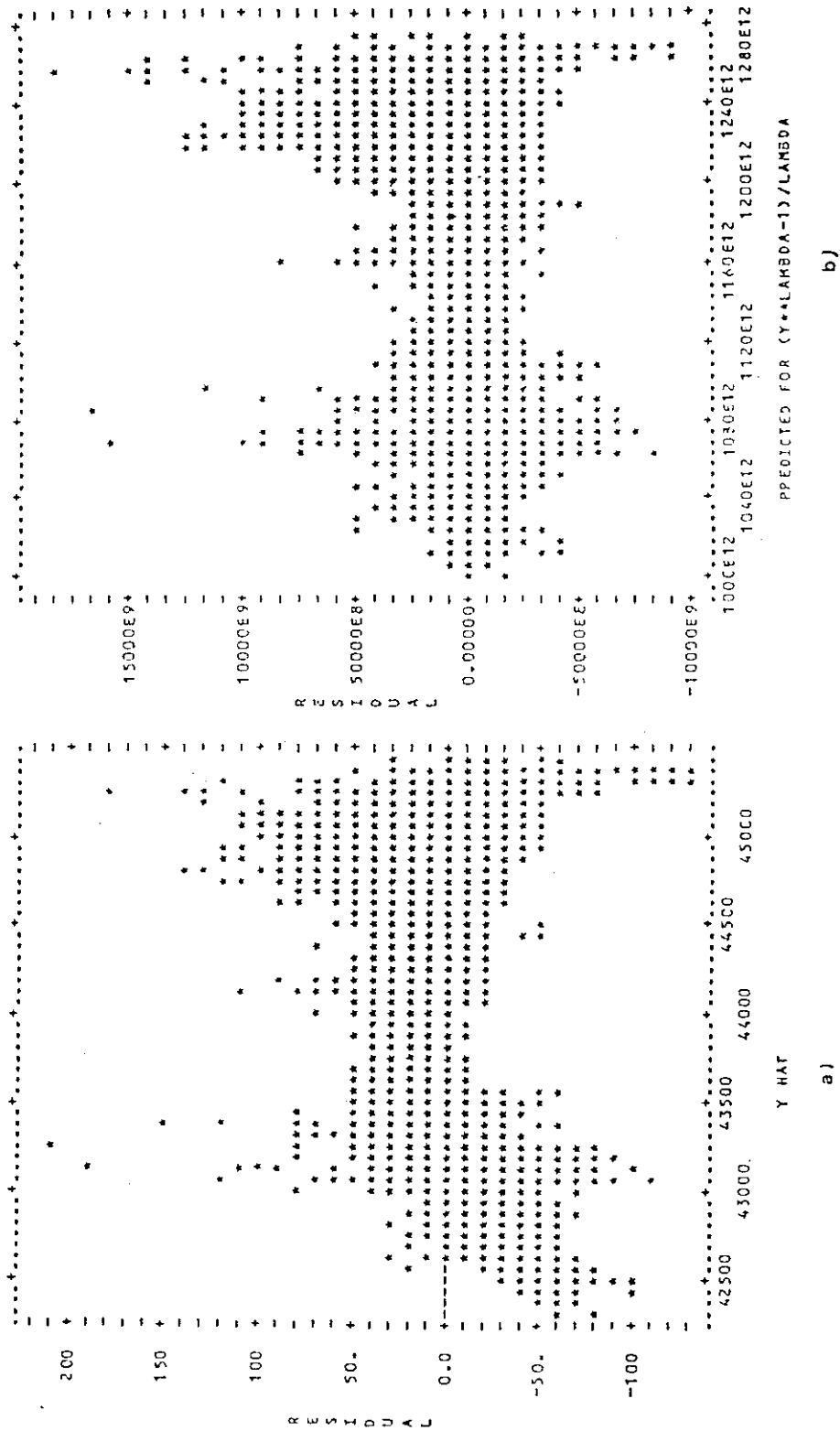


Fig. IV.18

Por otra parte el modelo (IV,18) deja de ser polinómico pasando a adquirir una forma más compleja, de todo lo cual se concluye que la solución más adecuada, consiste en tomar la segunda de las dos soluciones presentadas al principio, es decir añadir nuevas variables que corrijan la falta de linealidad. Esto se consigue empleando los modelos de segundo y tercer grado, cuyos términos de grado superior al primero corrigen la curvatura que manifiesta la nube de puntos en el diagrama de los residuos frente a valores estimados de B , tal como muestran las figuras IV,14b y IV,14c.

IV.5.2.2. Normalidad

Para estudiar las causas de la falta de normalidad de la distribución de los residuos, determinamos los histogramas de los residuos de cada modelo así como los diagramas de caja (box-plot). El estudio se completa con los contrastes de asimetría y de curtosis para confirmar las conclusiones obtenidas del estudio gráfico anterior.

Las figuras IV,19a, IV,19b y IV,19c muestran los histogramas de los residuos de cada uno de los modelos, superpuestos a la curva de una distribución normal con la misma media y desviación típica y como puede apreciarse, las distribuciones correspondientes a los modelos de segundo y tercer grado son prácticamente iguales, con excepción de los intervalos de clase cuyas marcas se hallan en las proximidades de 0 nT y -10 nT, donde existe una acumulación de residuos ligeramente superior en el caso del modelo de segundo grado. Sin embargo, las tres distribuciones poseen las siguientes características comunes:

- Fuerte asimetría positiva, especialmente en los modelos de segundo y tercer grado
- Fuerte apuntamiento de las distribuciones, que también se acusa más en el caso de los modelos de segundo y tercer grado.

La asimetría y el apuntamiento o curtosis se ponen aún mejor de manifiesto observando los diagramas de caja que se presentan en las figuras IV,20a, IV,20b y IV,20c.

En estos gráficos, propuestos por Tuckey (Tuckey, 1977) como una técnica bastante útil para el análisis exploratorio de datos, se dibuja un rectángulo cuyos extremos horizontales se definen mediante el primer cuartil (Q_1) y el tercer cuartil (Q_3), y como consecuencia la caja encierra dentro el 50% central de los datos. Una línea vertical en su interior indica la posición de la mediana. El gráfico se completa dibujando dos segmentos horizontales que partiendo de cada uno de los extremos de la caja terminan en los puntos

$$Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$$

$$Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$$

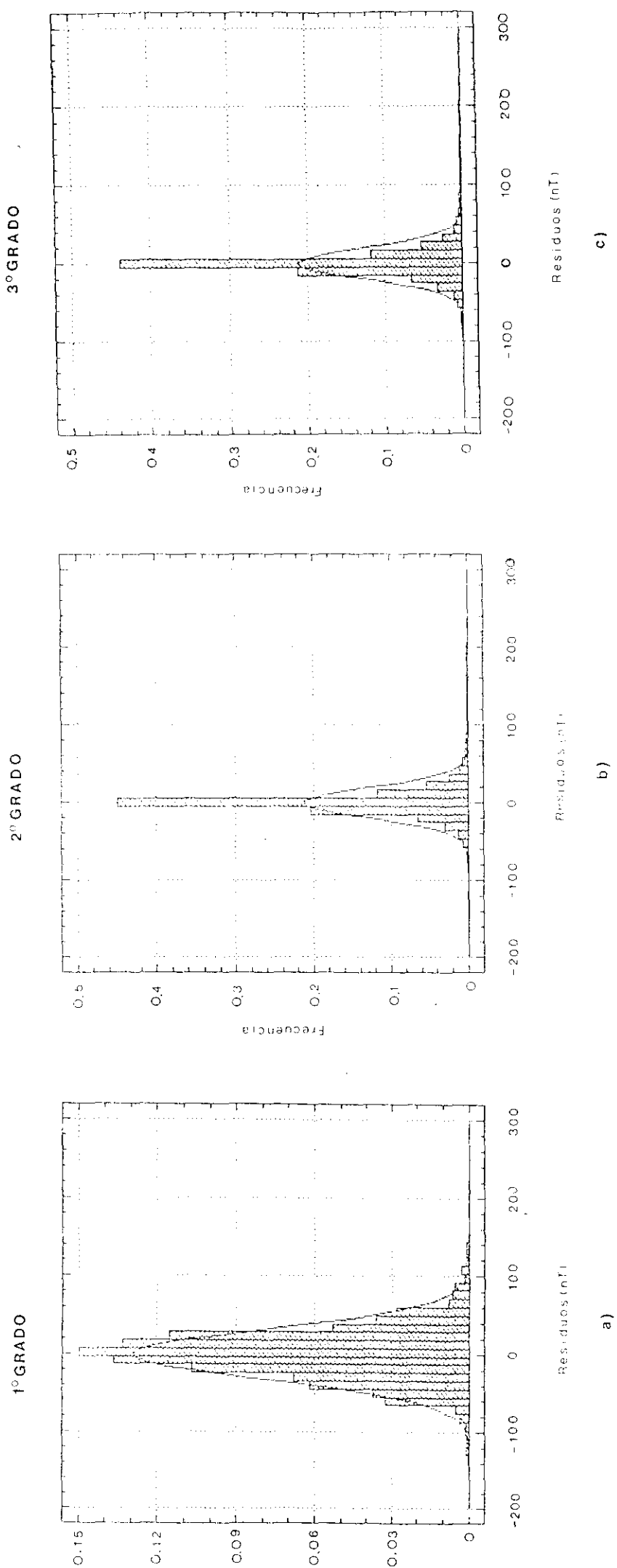


Fig. IV.19

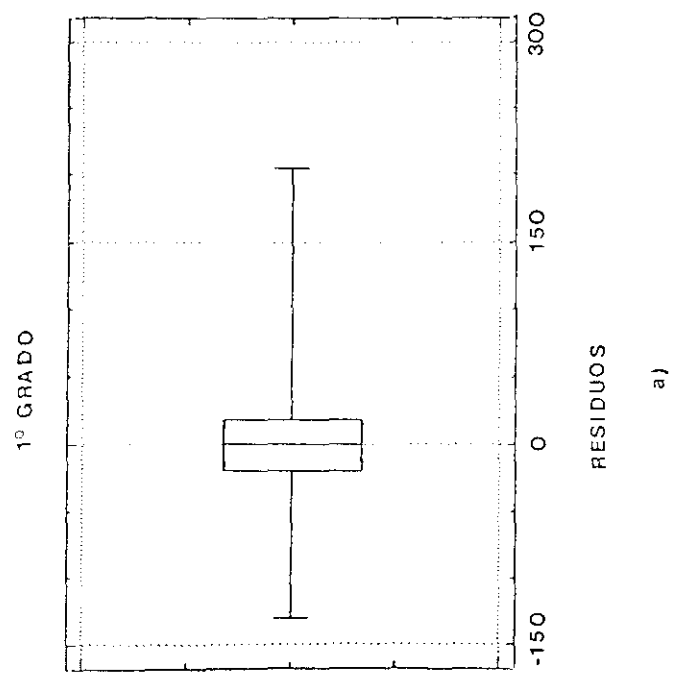
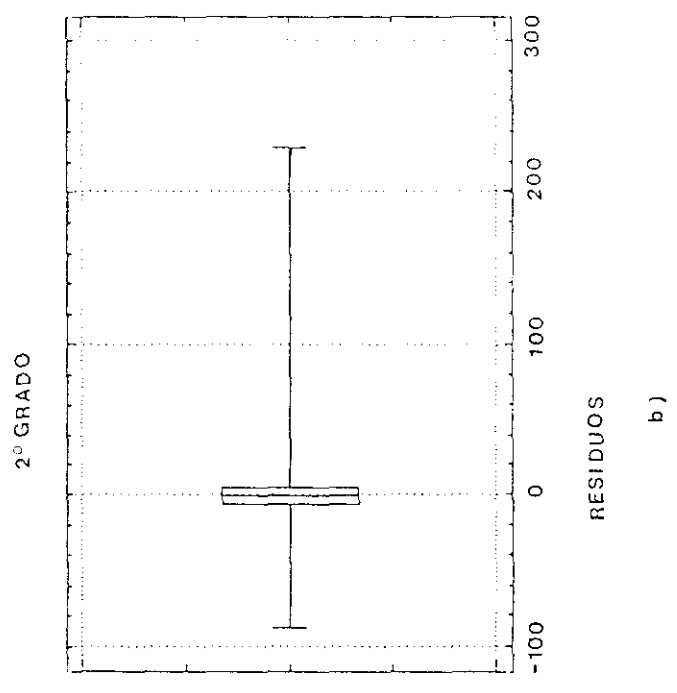
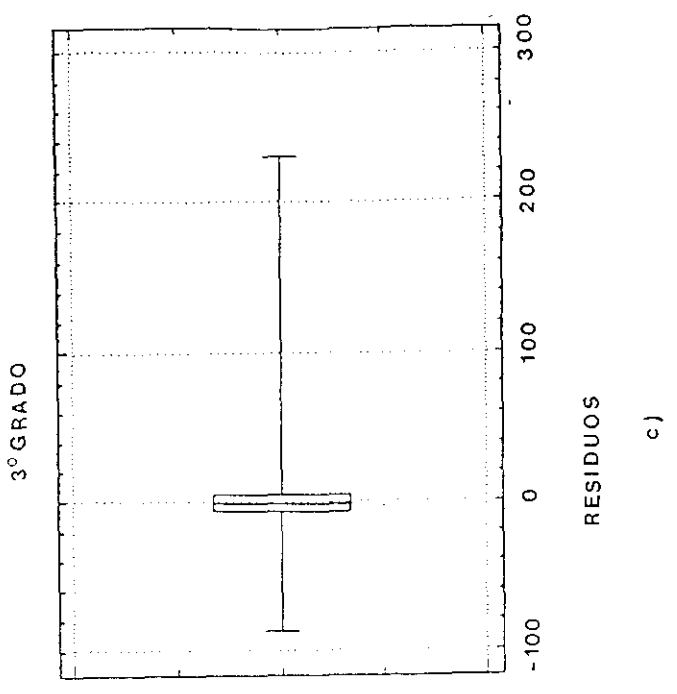


Fig. IV, 20

La situación de la caja dentro del segmento definido por los dos puntos anteriores da una idea del grado de asimetría de la distribución. A su vez la anchura de la caja indica el grado de apuntamiento de la misma.

Todo lo anterior se muestra de forma evidente en los gráficos de las figuras IV,20a, IV,20b y IV,20c, especialmente en las dos últimas.

De forma cuantitativa, las conclusiones anteriores se ponen de manifiesto mediante los contrastes de asimetría y curtosis que se realizan como ayuda de los resultados (III,29) y (III,30) expuestos en III.4.9.2. y cuyos resultados se resumen en las siguientes Tablas.

Tabla IV,12

| GRADO POLINOMICO | COEFICIENTE DE ASIMETRIA | ESTADISTICO DEL CONTRASTE | VALORES CRITICOS $\alpha=5\%$ |
|------------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1° | 0.30 | 9.066 | ± 1.96 |
| 2° | 2.25 | 66.91 | ± 1.96 |
| 3° | 2.32 | 69.2 | ± 1.96 |

Tabla IV,13

| GRADO POLINOMICO | COEFICIENTE DE CURTOSIS | ESTADISTICO DEL CONTRASTE | VALORES CRITICOS $\alpha=5\%$ |
|------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1° | 1.81 | 26.92 | ± 1.96 |
| 2° | 18.45 | 274.55 | ± 1.96 |
| 3° | 18.99 | 282.64 | ± 1.96 |

Así pues, las hipótesis nulas de asimetría y de curtosis son rechazadas para un nivel del 5%. Consecuentemente, de forma más rigurosa, concluimos que las causas que motivan el rechazo de la hipótesis de normalidad son la asimetría y la curtosis de las distribuciones. La primera se debe al desequilibrio producido por valores positivos de los residuos muy altos. Mientras que la segunda se debe a la fuerte concentración de éstos en las colas y el centro de las distribuciones. El histograma presentado en la figura IV,21 confirma esta afirmación en el caso del modelo de segundo grado. La figura en cuestión se acompaña con tres columnas, que presentan sucesivamente el número de observaciones contenidas en cada intervalo de clase, el número previsto de las mismas para el caso de una distribución normal y los valores estandarizados de las marcas de clase de cada intervalo.

Cuando la desviación de la normalidad se produce por una fuerte asimetría, como en este caso, se suele recurrir a transformar la variable dependiente. Con frecuencia esta desviación suele ir unida a la falta de linealidad y al transformarla se resuelven los dos problemas, siendo aconsejable entonces la transformación de Box-Cox. Sin embargo, aunque este efecto fuera corregido mediante un cambio de variables, la condición de normalidad sería verificada por aquel modelo cuya variable dependiente es la variable transformada y no su forma explícita, que es la que realmente interesa. Además, en nuestro caso, no existen evidencias de la falta de linealidad en los modelos polinómicos de segundo y tercer grado, tal como se ha estudiado anteriormente. Por lo tanto no parece práctica la solución del cambio de variable.

```

      N      Exp N      (* = 28 Cases,      . : = Normal Curve)
      72      4.10      Cut ***
      12      8.15      3.00
      23      20.77     2.67 :
      29      47.42     2.33 *.
      39      97.00     2.00 * .
      86     177.72     1.67 *** .
      156    291.66     1.33 *****
      163    428.77     1.00 *****
      304    564.61     .67 *****
      666    665.98     .33 *****:
      1654   703.67     .00 *****:*****
      1099   665.98    -.33 *****:*****
      432    564.61    -.67 *****
      221    428.77   -1.00 *****
      138    291.66   -1.33 *****
      91     177.72   -1.67 *** .
      48     97.00   -2.00 **.
      31     47.42   -2.33 *.
      23     20.77   -2.67 :
      8      8.15   -3.00
      21     4.10   Cut *

```

Fig. IV,21

Por otra parte, la falta de normalidad se debe no sólo a la asimetría de la distribución de los residuos, sino también a la elevada curtosis producida por residuos con valores muy elevados, los cuales causan una gran variabilidad en la distribución. La solución, por lo tanto, está ligada a la búsqueda de zonas en las que la variabilidad de los residuos sea menor, tal como se verá más adelante.

La hipótesis de normalidad es necesaria para la determinación de los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis de los coeficientes del modelo. Sin embargo, es posible estimar los intervalos, aunque con menos precisión, usando la desigualdad de Chebyshev:

$$Pr ob\left\{|b_j - \hat{b}_j| \leq K\sigma\sqrt{q_{jj}}\right\} \geq 1 - \frac{1}{K^2} \quad (IV,20)$$

donde q_{jj} son los elementos de la matriz $(\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}, \sigma^2 q_{jj}$ la varianza del estimador \hat{b}_j y K un número real. De esta manera, para los coeficientes del modelo de segundo grado, y para un grado de confianza superior al 85% ($K= 2.58$) se estiman los intervalos listados en la Tabla IV,14

Tabla IV,14

| VARIABLES | EXTREMO INFERIOR | EXTREMO SUPERIOR |
|-----------------|------------------|------------------|
| Term. Indep. | 44149.8023 | 44152.1976 |
| w ₁₀ | 394.9685 | 395.7555 |
| w ₀₁ | 21.30341 | 21.9005 |
| w ₁₁ | -3.0722 | -2.7558 |
| w ₂₀ | -4.417 | -4.0150 |
| w ₀₂ | 2.2529 | 2.4391 |

los intervalos de los coeficientes del modelo polinómico de tercer grado aparecen en la tabla IV,15

Tabla IV,15

| VARIABLES | EXTREMO INFERIOR | EXTREMO SUPERIOR |
|-----------------|------------------|------------------|
| Term. Indep. | 44150.4658 | 44153.1582 |
| w ₁₀ | 395.1779 | 397.0681 |
| w ₀₁ | 21.3166 | 22.5140 |
| w ₁₁ | -3.1333 | -2.7427 |
| w ₂₀ | -4.6647 | -4.1853 |
| w ₀₂ | 2.1402 | 2.4178 |
| w ₂₁ | -0.1994 | 0.0054 |
| w ₁₂ | -0.0495 | 0.955 |
| w ₃₀ | -0.2347 | -0.0133 |
| w ₀₃ | -0.031 | 0.031 |

IV.5.2.3. Homocedasticidad

Según se ha visto en IV.5.1.6, la heterocedasticidad de los modelos es debida a la presencia de observaciones con residuos atípicos que crean una fuerte curtosis. En ese caso, las estimaciones determinadas mediante el método de mínimos cuadrados pierden eficiencia. Para corregir en lo posible esta pérdida de precisión en las estimaciones se recurre a los métodos de regresión robusta cuya idea es obtener los estimadores minimizando:

$$M = \sum w_i(e_i)e_i^2 \quad (IV,21)$$

donde $w_i(e_i)$ es una función de ponderación introducida para reducir el efecto de los datos con residuos atípicos. Esta formulación requiere, en primer lugar, definir la función de ponderación w , y, en segundo lugar, hallar un procedimiento iterativo para hallar los estimadores, ya que al ser desconocidos los e_i son desconocidas las ponderaciones $w_i(e_i)$ que deben aplicarse a los cálculos.

La función de ponderación puede definirse siguiendo algún criterio estadístico que permita corregir las desviaciones intensas de la normalidad y suponga poca pérdida de eficiencia para datos normales. Una de las funciones de ponderación mas usadas es debida a Huber (Huber y Andrews, 1982) definida como:

$$w_i = \frac{1}{2}, \quad \text{si: } |r_i| < c$$

$$w_i = \left| \frac{c}{r_i} - \frac{1}{2} \right| \frac{c}{|r_i|}, \quad \text{si: } |r_i| > c \quad (IV,22)$$

donde r_i son los residuos estandarizados y c una constante que suele tomarse entre 1.5 y 2, que determina el grado de "protección" que se desea. Al disminuir c el peso de los residuos extremos disminuye también. La figura IV,22 representa la función de ponderación de Huber.

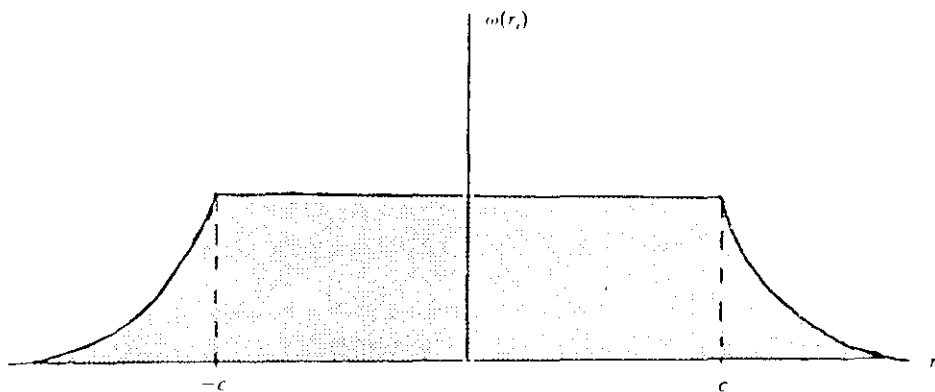


Fig. IV,22

El procedimiento se aplica de la siguiente manera:

- 1) Se realiza una estimación inicial de los coeficientes $\mathbf{b}^{(0)}$, que suele ser la minimocuadrática, la cual define un vector de residuos $\mathbf{e}^{(0)}$.
- 2) A partir de los residuos de la etapa anterior se determinan las ponderaciones $w_i(e_i^{(0)})$ de las observaciones y se minimiza (IV,22) obteniéndose un nuevo vector $\mathbf{b}^{(1)}$.
- 3) Los coeficientes determinados en la etapa anterior definen un nuevo vector de residuos $\mathbf{e}^{(1)}$ que da las nuevas ponderaciones $w_i(e_i^{(1)})$.
- 4) El proceso continua de forma iterativa hasta alcanzar la convergencia.

Este proceso ha sido aplicado a la determinación del modelo polinómico de segundo y tercer grado, eligiéndose como parámetros de la función de ponderación los valores $c=2$ y $c=1.75$, ya que, como se observa en la figura IV,17c, existe bastante homogeneidad en el conjunto de residuos estandarizados cuyo valor absoluto es inferior a cualquiera de esas dos cantidades. Los resultados pueden verse en la siguiente Tabla:

Tabla IV,16

| Variables | c=2 | | c=1.75 | |
|-----------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| | Coefficientes | Desv.Típicas | Coefficientes | Desv.Típicas |
| Term. Indep. | 44150.8 | 0.3857 | 44150.8 | 0.3799 |
| w ₁₀ | 395.22 | 0.1396 | 395.208 | 0.1375 |
| w ₀₁ | 21.7689 | 0.1059 | 21.8095 | 0.1043 |
| w ₁₁ | -2.9583 | 0.0561 | -2.9637 | 0.0553 |
| w ₂₀ | -4.2882 | 0.0712 | -4.3018 | 0.0702 |
| w ₀₂ | 2.3373 | 0.033 | 2.3329 | 0.0325 |

En el segundo caso los errores de estimación son ligeramente inferiores que los del primero y por lo tanto podemos decir que los resultados en ambos casos son parecidos. Sin embargo, comparando estos resultados con los presentados en la Tabla IV.1, puede verse que son de una precisión algo superior a los obtenidos mediante el método de mínimo cuadrados sin ponderar (Tabla IV,1).

En el caso del modelo polinómico de tercer grado, los resultados, para un valor igual a 2 del parámetro c, son los siguientes:

Tabla IV,17

| Variables | Coefficientes | Desv.Típicas |
|-----------------|---------------|--------------|
| Term. Indep. | 44151.8 | 0.5218 |
| w ₁₀ | 396.123 | 0.3663 |
| w ₀₁ | 21.9184 | 0.2331 |
| w ₁₁ | -2.9381 | 0.0757 |
| w ₂₀ | -4.4249 | 0.0929 |
| w ₀₂ | 2.279 | 0.0538 |
| w ₂₁ | -0.0967 | 0.0397 |
| w ₁₂ | 0.0227 | 0.0281 |
| w ₃₀ | -0.1239 | 0.0429 |
| w ₀₃ | -0.0002 | 0.012 |

que también poseen una precisión algo mayor que los correspondientes al mismo modelo en la Tabla IV,1.

IV.5.2.4. Independencia

Los resultados del contraste de hipótesis de las rachas (Tabla IV,11, del apartado IV.5.1.7.) indican que la hipótesis de independencia no se verifica en ninguno de los tres casos, lo cual es un indicio de la existencia de autocorrelación de los residuos. Sin embargo, no sabemos aún si ésta es alta o baja. Este aspecto cuantitativo es de especial importancia, ya que la precisión de los estimadores de los coeficientes del modelo está relacionada directamente con el coeficiente de autocorrelación de los residuos, de manera que sería baja si el coeficiente de autocorrelación fuera alto. Dicho de otra forma, los estimadores, aún siendo centrados, dejarían de ser eficientes.

Para estudiar cuantitativamente el coeficiente de autocorrelación, se recurre a la determinación del autocorrelograma de los residuos que, en el caso del modelo

polinómico de segundo grado, se representa en la figura IV,23 para valores del desplazamiento o retardo (k) de 1 a 10 y la siguiente tabla muestra las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación (r_k) para dichos valores junto con la desviación típica de las estimaciones.

Tabla IV,18

| k | r_k | σ_k |
|-----|----------|------------|
| 1 | 0.55417 | 0.01372 |
| 2 | 0.28350 | 0.01743 |
| 3 | 0.15801 | 0.01827 |
| 4 | 0.07484 | 0.01853 |
| 5 | 0.02836 | 0.01858 |
| 6 | -0.00469 | 0.01859 |
| 7 | 0.00538 | 0.01859 |
| 8 | 0.01741 | 0.01859 |
| 9 | 0.01741 | 0.01860 |
| 10 | 0.00571 | 0.01860 |

En la figura IV,23 se dibuja superpuesta al autocorrelograma, la región fuera de la cual los valores de los coeficientes r_k pueden considerarse significativamente distintos de cero para un nivel del 5%. Ello ocurre únicamente en los cuatro primeros retardos. Sin embargo, pese a considerarse distintos de cero dichos coeficientes, su valor es muy bajo, especialmente desde $k=2$ (ver Tabla IV,18) dónde se produce una disminución considerable de los valores de r_k . Únicamente el valor correspondiente a $k=1$ es el que podemos considerar más importante. En la siguiente tabla se presentan los valores de r , correspondientes a cada modelo.

Tabla IV,19

| GRADO DEL MODELO | r_i |
|------------------|--------|
| 1° | 0.8009 |
| 2° | 0.5542 |
| 3° | 0.5537 |

De ella se deduce que el modelo polinómico de primer grado es el que peor comportamiento posee, mientras que el de los dos modelos últimos es muy parecido.

La explicación de la existencia de la autocorrelación positiva que motiva la falta de independencia, se halla en la naturaleza intrínseca de los datos y en la distribución de los mismos dentro del fichero que los contiene. En efecto, al tratarse de datos geográficos, el valor de la intensidad del campo magnético, así como el del residuo en cada punto, estará relacionado con los de los que le rodean,

MODELO DE 2° GRADO

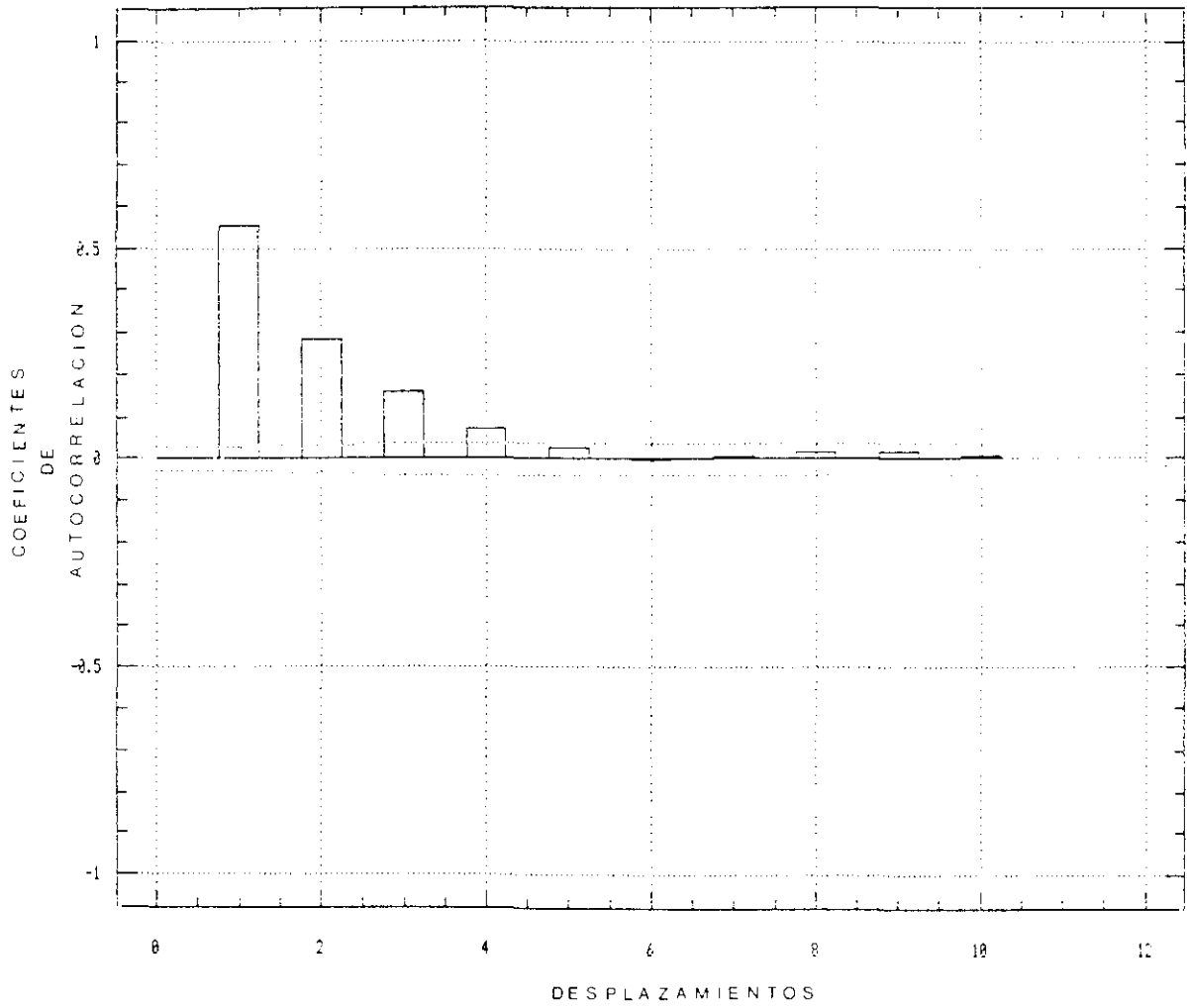


Fig. IV,23

existiendo por ello una correlación entre cada perfil y los más próximos a él. Por otra parte, los perfiles se hallan ordenados de Oeste a Este y dentro de cada perfil, gran parte de los tramos que lo componen, se encuentran ordenados en el mismo sentido. Como consecuencia, existirá autocorrelación en los datos debido a la presencia de periodicidades motivadas por el orden secuencial de los perfiles. Es evidente que si el fichero de datos se ordenara totalmente de Oeste a Este y de Sur a Norte, el coeficiente de autocorrelación aumentaría. La siguiente Tabla muestra los valores de r_i cuando se ordenan los datos de la forma antes mencionada.

Tabla IV,20

| GRADO DE POLINOMIO | r_i |
|--------------------|--------|
| 1° | 0.8252 |
| 2° | 0.5730 |
| 3° | 0.5723 |

Puede observarse que los valores de r_i han aumentado respecto a los de la Tabla IV,19.

A pesar de la existencia de valores de r_k distintos de cero, cuando los coeficientes de autocorrelación se calculan separadamente (por perfiles) sus valores disminuyen. Ello puede apreciarse en las figuras IV,24 y IV,25, y en la Tabla IV,21 correspondiente a los autocorrelogramas de los perfiles 27 y 48 cuya localización se presenta en la figura IV,26.

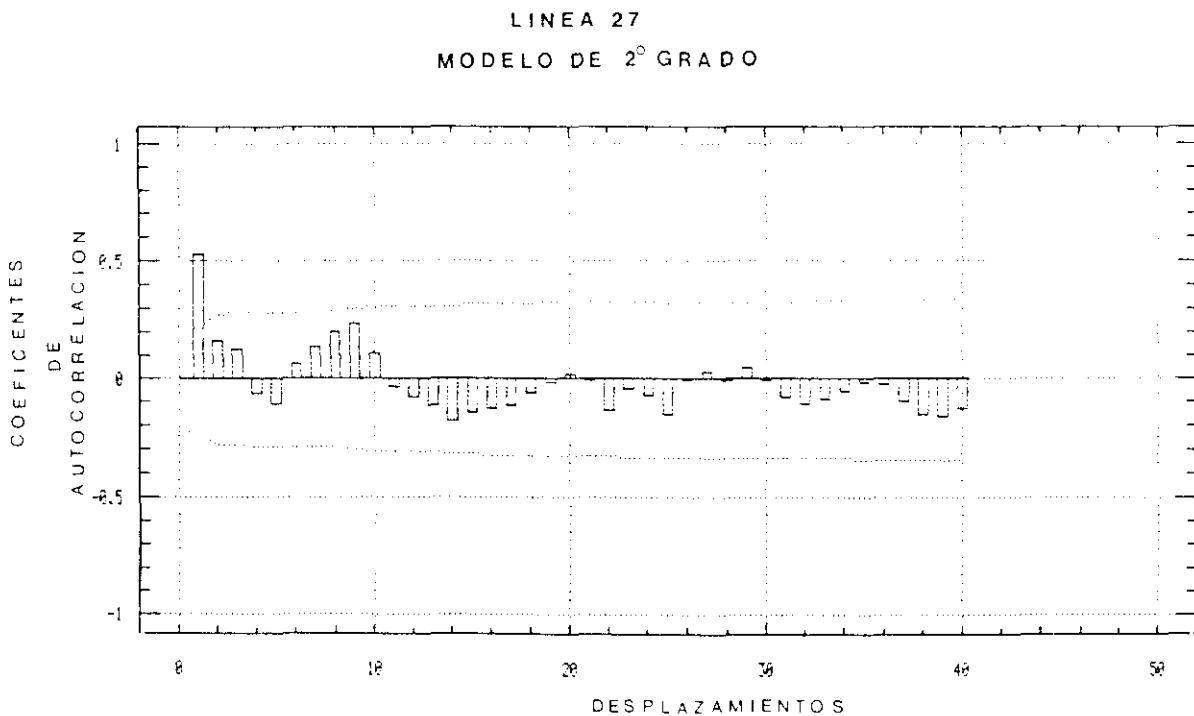


Fig. IV,24

Tabla IV,21

| k | PERFIL27 | | PERFIL 48 | |
|----|----------|------------|-----------|------------|
| | r_k | σ_k | r_k | σ_k |
| 1 | 0.52799 | 0.11111 | 0.32654 | 0.09285 |
| 2 | 0.16406 | 0.13867 | 0.19776 | 0.10227 |
| 3 | 0.13284 | 0.14104 | 0.14512 | 0.10551 |
| 4 | -0.06257 | 0.14258 | 0.15316 | 0.10722 |
| 5 | -0.10862 | 0.14292 | 0.00712 | 0.10909 |
| 6 | 0.06980 | 0.14393 | -0.10094 | 0.10910 |
| 7 | 0.13897 | 0.14435 | -0.04701 | 0.10990 |
| 8 | 0.19889 | 0.14599 | -0.18426 | 0.11007 |
| 9 | 0.23726 | 0.14930 | -0.10505 | 0.11270 |
| 10 | 0.11037 | 0.15389 | -0.10055 | 0.11354 |
| 11 | -0.03162 | 0.15486 | -0.13124 | 0.11430 |
| 12 | -0.07610 | 0.15494 | -0.16538 | 0.11560 |
| 13 | -0.11571 | 0.15540 | -0.03799 | 0.11762 |
| 14 | -0.17603 | 0.15646 | -0.06085 | 0.11772 |
| 15 | -0.14591 | 0.15889 | -0.08604 | 0.11799 |
| 16 | -0.12789 | 0.16053 | -0.05034 | 0.11853 |
| 17 | -0.11822 | 0.16179 | -0.01908 | 0.11872 |
| 18 | -0.06471 | 0.16285 | -0.03761 | 0.11874 |
| 19 | -0.01128 | 0.16317 | 0.07264 | 0.11885 |
| 20 | 0.02426 | 0.16318 | 0.20668 | 0.11923 |
| 21 | -0.00931 | 0.16322 | 0.04076 | 0.12228 |
| 22 | -0.12879 | 0.16323 | 0.03208 | 0.12240 |
| 23 | -0.04126 | 0.16448 | 0.00058 | 0.12247 |
| 24 | -0.07353 | 0.16460 | 0.09976 | 0.12247 |
| 25 | -0.15257 | 0.16501 | 0.00039 | 0.12317 |
| 26 | -0.00765 | 0.16674 | -0.07793 | 0.12317 |
| 27 | 0.02935 | 0.16675 | -0.02185 | 0.12359 |
| 28 | -0.00625 | 0.16681 | 0.06142 | 0.12362 |
| 29 | 0.04943 | 0.16681 | -0.03407 | 0.12389 |
| 30 | -0.00533 | 0.16699 | -0.00463 | 0.12397 |
| 31 | -0.07814 | 0.16700 | 0.05588 | 0.12397 |
| 32 | -0.10182 | 0.16745 | 0.10639 | 0.12419 |
| 33 | -0.09007 | 0.16821 | 0.03304 | 0.12497 |
| 34 | -0.05547 | 0.16880 | 0.05023 | 0.12505 |
| 35 | -0.01772 | 0.16903 | 0.14229 | 0.12522 |
| 36 | -0.02473 | 0.16905 | 0.01744 | 0.12661 |
| 37 | -0.09839 | 0.16910 | 0.03548 | 0.12663 |
| 38 | -0.15499 | 0.16980 | 0.04607 | 0.12671 |
| 39 | -0.16297 | 0.17154 | 0.04650 | 0.12686 |
| 40 | -0.12083 | 0.17344 | -0.09639 | 0.12700 |

En ambos casos, únicamente los valores de r_k pueden considerarse significativamente distintos de cero, lo cual no ocurría en el caso del autocorrelograma de todo el levantamiento (Fig.IV,23) en el que existían tres valores más que también lo eran.

De todo lo anterior se puede concluir que el efecto que la autocorrelación causa en la eficiencia de las estimaciones de los coeficientes se reduciría restringiendo los modelos a regiones menos extensas del territorio.

Otra solución alternativa consistiría en recurrir a un esquema autorregresivo, tal como el presentado al final del apartado III.4.9.5. Sin embargo, esta solución sería poco práctica ya que sólo proporcionaría valores incrementales en lugar de valores absolutos.

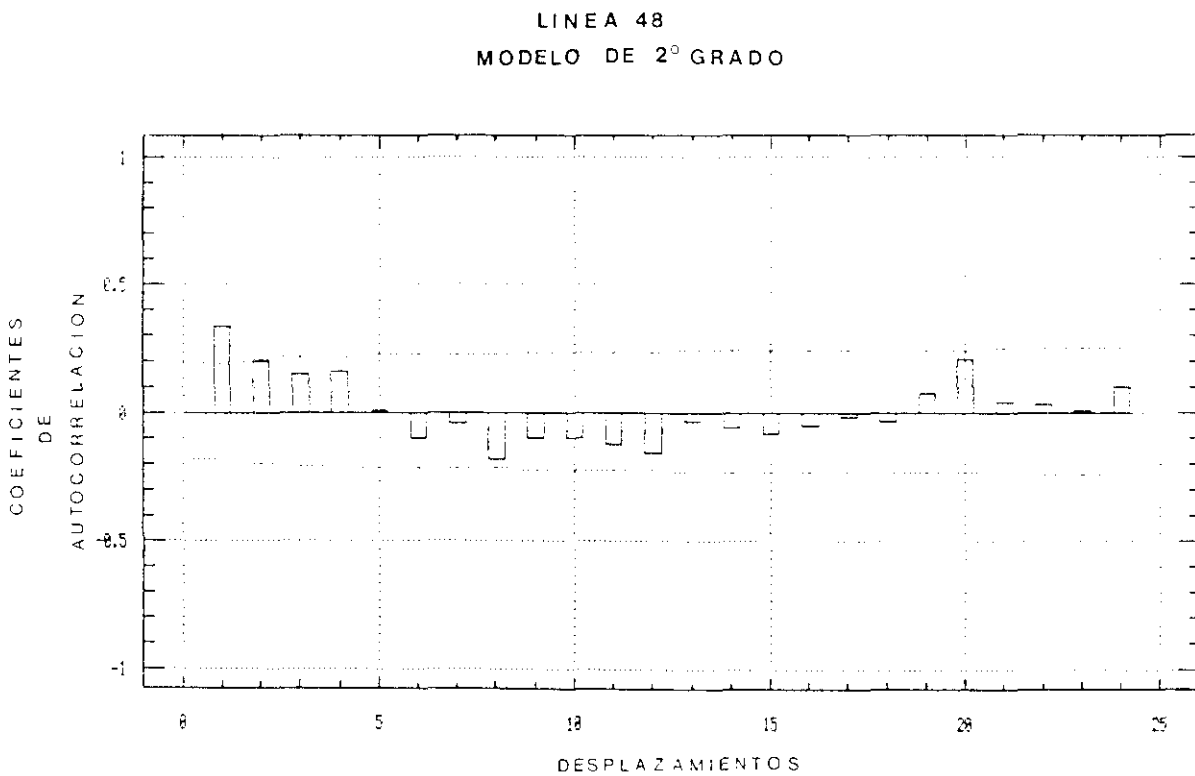


Fig. IV,25

PERFILES 27 Y 48

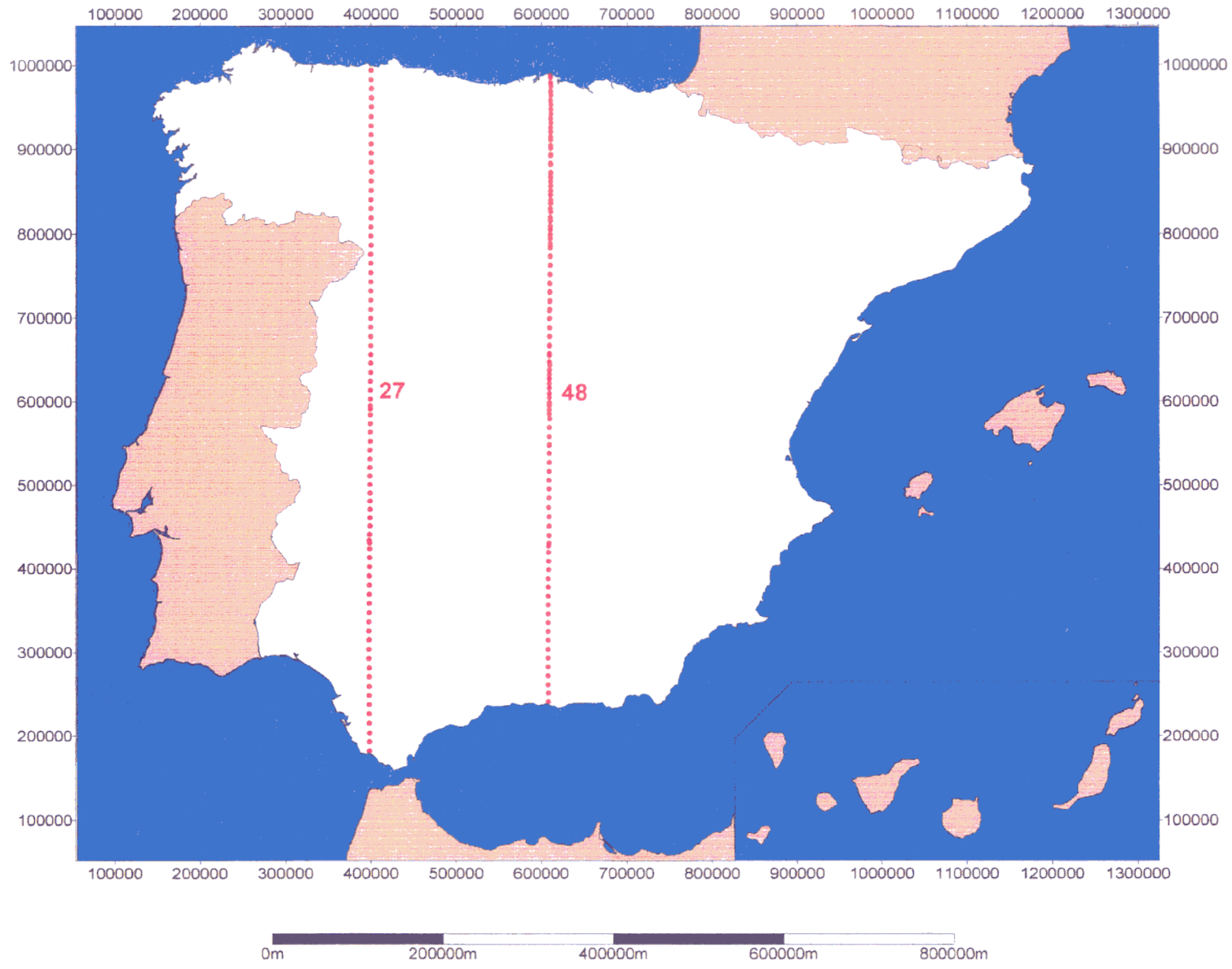


Fig. IV, 26

IV.5.3. Búsqueda de una región de verificación de las hipótesis del modelo.

A la vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores se concluye que la gran heterogeneidad de los residuos y la naturaleza intrínseca de los datos son las causas principales que motivan la desviación de las hipótesis de normalidad, homocedasticidad e independencia. Una posible solución a estos problemas es reducir el área de estudio, eliminando las observaciones que causan las desviaciones antes mencionadas.

La eliminación de observaciones con residuos cuyo valor se aleja demasiado de la media, no es el único criterio que se ha elegido para seleccionar los casos de la región de verificación. Como es sabido (Peña 1989b), la precisión del valor medio de la respuesta del modelo, en nuestro caso de B , para valores concretos de las variables independientes $x_h = (x_{1h}, x_{2h}, \dots, x_{kh})$ vale:

$$Var(\hat{B}_h) = \frac{\sigma^2}{n} (1 + (\mathbf{x}_h - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}_h - \bar{\mathbf{x}})) \quad (IV,23)$$

siendo $\bar{\mathbf{x}}$ el vector de medias de las variables independientes, \mathbf{S}_{xx}^{-1} la matriz de varianzas y covarianzas de los mismos, σ^2 la varianza de las perturbaciones del modelo. El último término de la expresión (IV,23) recibe el nombre de la **distancia de Mahalanobis**. Se demuestra también que:

$$\frac{\sigma^2}{n} \leq Var(\hat{B}_h) \leq \sigma^2 \quad (IV,24)$$

así pues, cuanto mayor es la distancia de Mahalanobis de una observación tanto menor será la precisión en la estimación del valor previsto \hat{B}_h .

Por otra parte dichos puntos pueden considerarse también atípicos en el sentido de producir desviaciones respecto de la normalidad cuando su distancia de Mahalanobis es significativamente alta (Afifi y Azen, 1977; Jobson, 1992). Para detectarlos se recurre al contraste de significación propuesto por estos autores, que da para el modelo polinómico de segundo grado y un nivel de significación $\alpha=5\%$, un valor crítico de la distancia de Mahalanobis igual a 11.10.

De acuerdo con lo visto anteriormente y lo expuesto al final de los apartados IV.5.1.5. y IV.5.1.6., se procede a eliminar de forma iterativa las observaciones cuyos residuos se alejan mucho de la media (por encima de 2.5 veces la desviación típica) y cuya distancia de Mahalanobis supera a 11.10. Tras diez iteraciones se llega a la determinación del modelo de segundo grado, resumido en la Tabla IV,22, y que se restringe a la región cuya situación geográfica se muestra en el mapa de la figura IV,27, la cual contiene 1872 puntos de observación:

Tabla IV,22

| VARIABLES | COEFICIENTES | t | INTERVALO DE CONFIANZA (95%) |
|-----------------|--------------|----------|------------------------------|
| Term. Indep. | 44150.2107 | 303500.7 | (44149.9254, 44150.496) |
| w ₁₀ | 394.7966 | 4934.95 | (394.6397, 394.9535) |
| w ₀₁ | 23.2914 | 286.936 | (23.1322, 23.4506) |
| w ₁₁ | -3.2679 | -57.887 | (-3.3786, -3.1572) |
| w ₂₀ | -4.4066 | -91006 | (-4.5016, -4.3116) |
| w ₀₂ | 1.9845 | -47.805 | (1.9031, 2.0659) |

Los valores correspondientes a la varianza residual (\hat{S}_R^2), el intervalo de confianza de σ^2 , el coeficiente de determinación (R^2) y el coeficiente de determinación corregido por el número de grados de libertad (\bar{R}^2) son:

Tabla IV,23

| \hat{S}_R^2 | Int. Conf.(95%) | R^2 | \bar{R}^2 |
|---------------|-----------------|---------|-------------|
| 11.669 | (10.97;12.49) | 0.99996 | 0.99996 |

Comparando la distribución muestral de los residuos con una distribución normal de media cero y desviación típica 3.41, el contraste de normalidad da el siguiente resultado:

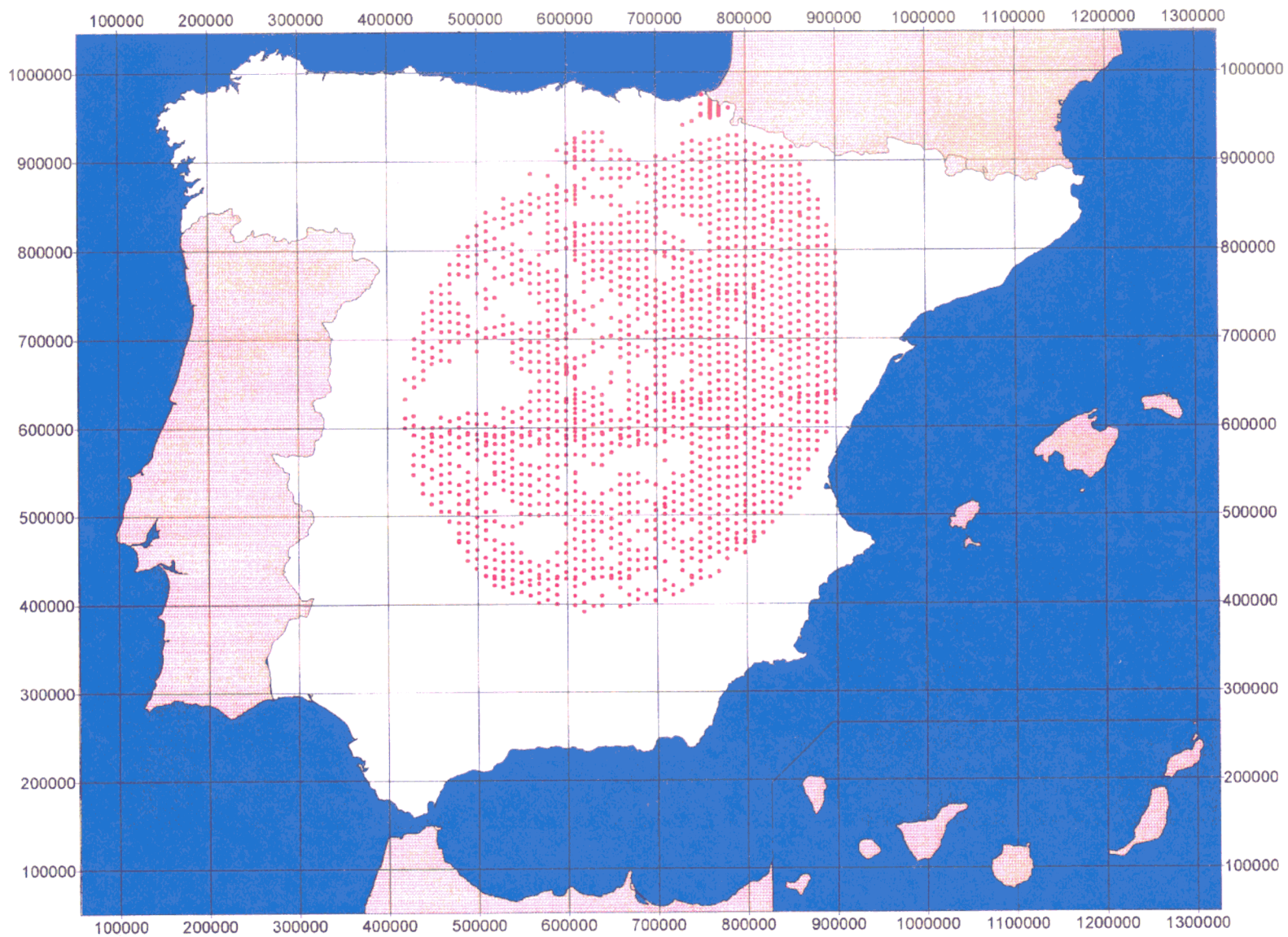
$$|D|_M = 0.0287$$

siendo el valor crítico para un 5% de significación

$$|D|_{MC} = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = 0.0314$$

La hipótesis de normalidad puede aceptarse y como consecuencia los contrastes e intervalos de confianza de la Tabla IV,22 y de la Tabla IV,23 pueden considerarse válidos.

REGION DE LAS CONDICIONES DE VALIDEZ (Modelo de 2º grado)



0m 200000m 400000m 600000m 800000m

Fig. IV, 27

La figura IV,28 muestra el gráfico de residuos (eje horizontal) frente a valores estimados de B (eje vertical), hallándose estandarizados los valores medidos sobre ambos ejes, y no apareciendo en él indicios de heterogeneidad de varianzas.

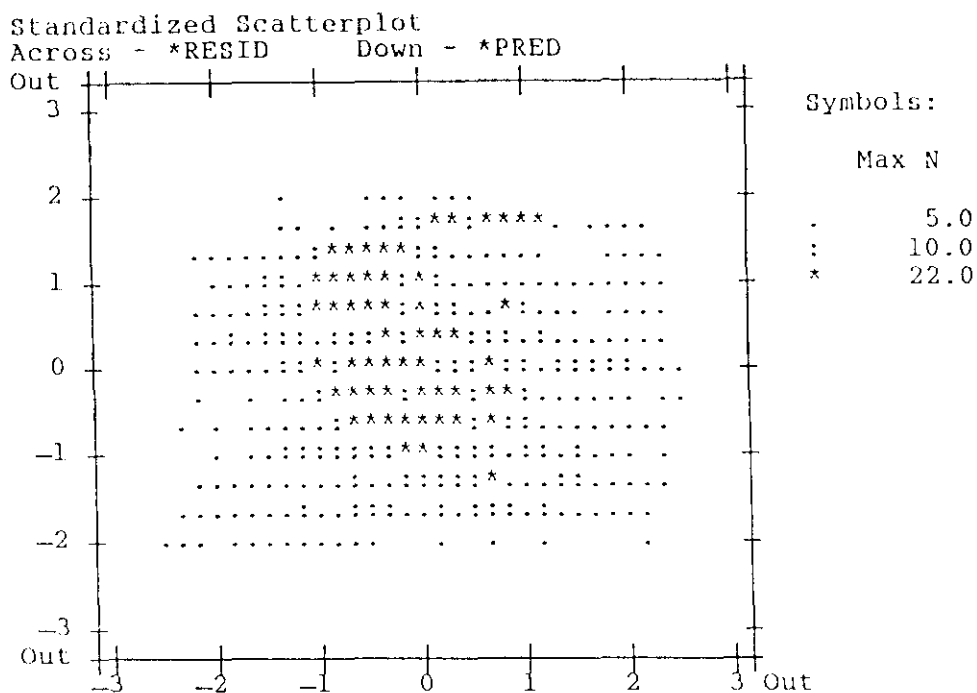


Fig. IV,28

Por lo tanto, en esta región pueden admitirse las hipótesis de normalidad y homocedasticidad, las cuales no se cumplían en el resto de los datos. Las demás hipótesis, con excepción de la independencia, también se cumplen ya que esta región es un subconjunto de los datos.

Sin embargo, el contraste de rachas respecto a la mediana prueba que la hipótesis de independencia se rechaza para un nivel de significación $\alpha=5\%$.

Tabla IV,24

| r | Z | $\pm Z_c$ |
|-----|---------|------------|
| 570 | -16.969 | ± 1.96 |

Así pues, se puede admitir que el modelo polinómico de segundo grado cumple dentro de la región representada en la figura IV,27 todas las condiciones de validez menos la de independencia, lo cual es consistente con las razones dadas en IV.5.2.4.

El modelo de tercer grado no cumple la hipótesis de normalidad en esta región, por lo que el proceso anteriormente expuesto se continúa con la diferencia de que ahora la distancia de Mahalanobis crítica vale 16.92. De esta manera, se determina una nueva región de validez de las condiciones, la cual se halla dentro de la anterior (Fig.IV,29) y contiene 962 observaciones. En dicha región los coeficientes y sus intervalos del 95% de confianza son los siguientes:

Tabla IV,25

| VARIABLE | COEFICIENTE | INTERVALO DE CONFIANZA (95%) |
|-----------------|-------------|------------------------------|
| Term. Indep. | 44148.315 | (44167.9717, 44148.659) |
| w ₁₀ | 392.235 | (391.849, 392.621) |
| w ₀₁ | 24.2824 | (23.7724, 24.7924) |
| w ₁₁ | -3.3197 | (-3.9873, -2.6520) |
| w ₂₀ | -3.7039 | (-4.0678, -3.3400) |
| w ₀₂ | 3.667 | (3.0035, 4.3304) |
| w ₂₁ | -1.2222 | (-1.5239, -0.9206) |
| w ₁₂ | 0.5272 | (0.2093, 0.8451) |
| w ₃₀ | 0.6571 | (0.5290, 0.7851) |
| w ₀₃ | -0.6121 | (-0.8143, -0.4099) |

La hipótesis de normalidad puede verificarse mediante el contraste de Kolmogorov-Smirnov, cuyo resultado es el siguiente

$$|D|_M = 0.039$$

$$|D|_{MC} = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = 0.044$$

pudiéndose aceptar así la mencionada hipótesis.

La homogeneidad de varianzas se verifica con el gráfico de residuos frente a valores estimados de B (Fig.IV,30) donde, no se aprecian tampoco indicios de heterocedasticidad.

REGION DE LAS CONDICIONES DE VALIDEZ (Modelo de 3° grado)

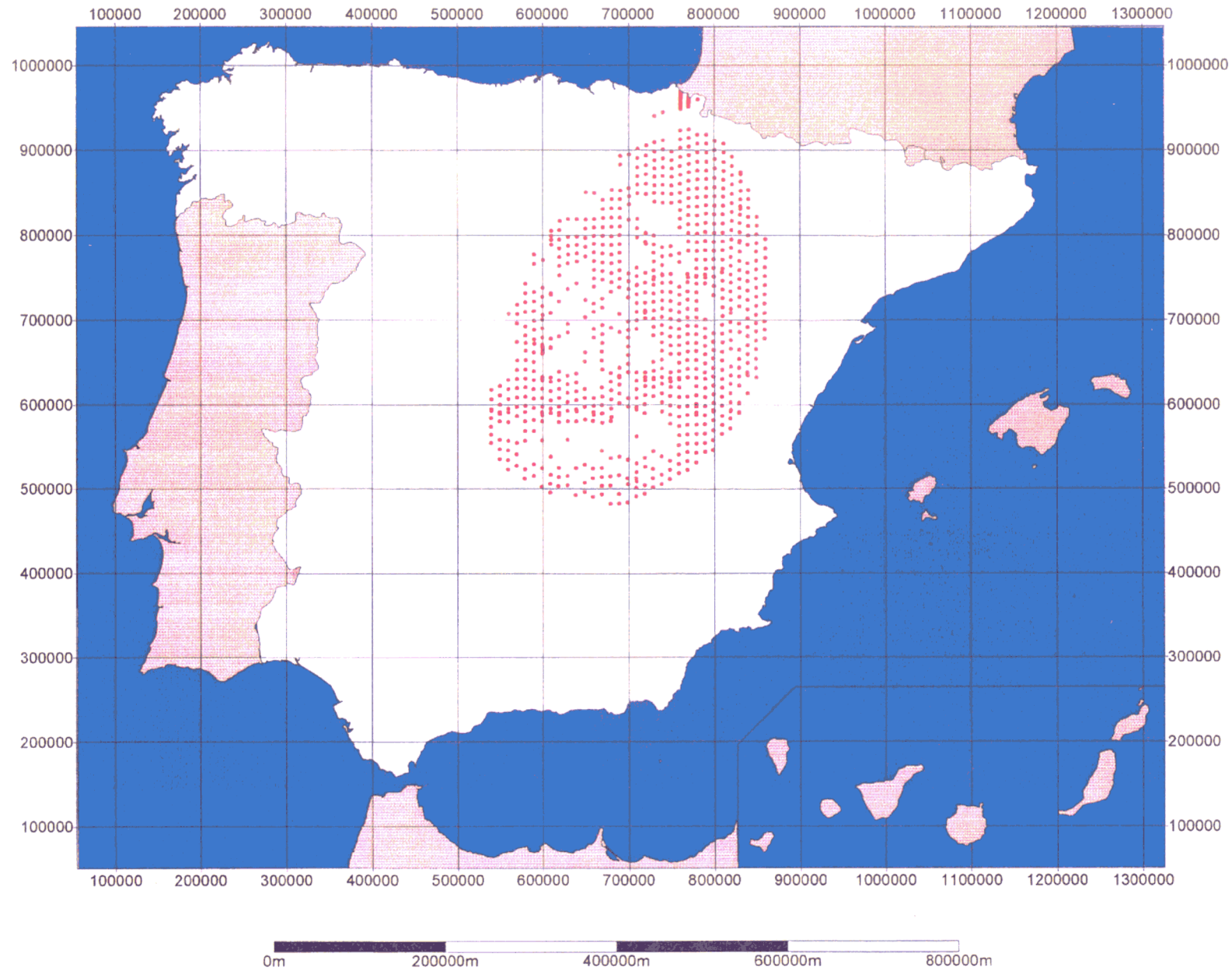


Fig. IV, 29

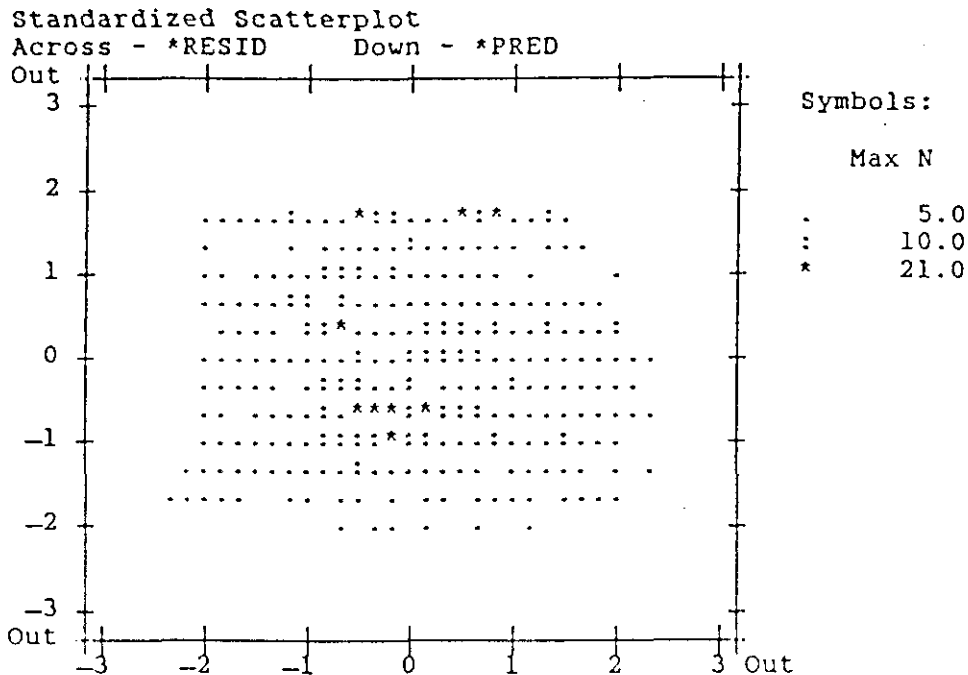


Fig. IV,30

IV.6. DIFERENCIAS DE LOS MODELOS

Como se ha visto hasta aquí, únicamente dentro de la región mostrada en los mapas de la figuras IV,27 y IV,29 se verifican la mayor parte de las condiciones de validez de los modelos de segundo y tercer grado respectivamente.

Sería interesante ahora determinar la diferencia de respuestas entre el modelo propuesto para todo el conjunto de datos y el propuesto para la región de verificación de las hipótesis. Con este propósito se ha realizado un análisis estadístico con las diferencias entre ambos modelos.

En primer lugar, para cuantificar la semejanza de ambos, se recurre al cálculo de la raíz cuadrática media (*r.c.m.*) de las diferencias

$$d_i = \hat{B}_{1i} - \hat{B}_{2i}$$

$$r.c.m. = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}}$$

siendo \hat{B}_1 el modelo extendido al conjunto total de datos y \hat{B}_2 el restringido a la región de verificación, cuyo valor únicamente puede ser cero cuando ambos modelos sean coincidentes. En el caso los modelos de segundo grado, el estudio estadístico de las diferencias nos da los siguientes resultados:

| | |
|--------------------|----------|
| r.c.m.: | 2.46 nT |
| Valor máximo: | 6.68 nT |
| Valor mínimo: | -2.86 nT |
| Valor medio: | 1.22 nT |
| Desviación típica: | 2.13 nT |

De esta forma, podemos decir que en términos medios la diferencia entre ambos modelos dentro de la región de validez es de casi 2.5 nT pudiendo valer como máximo casi 7 nT, existiendo más de un 75% con valores comprendidos entre -2.85 nT y 5 nT.

Aunque el modelo *B* no debe extrapolarse fuera de su dominio de validez, también se ha realizado un análisis de las diferencias que permita estimar el riesgo de esta extrapolación desde un punto de vista descriptivo

| | |
|--------------------|----------|
| r.c.m.: | 6.45 nT |
| Valor máximo: | 19.96 nT |
| Valor mínimo de: | -3.94 nT |
| Valor medio: | 4.13 nT |
| Desviación típica: | 4.95 nT |

En este caso más del 75% de las diferencias se encuentran entre -3.94 nT y 14.03 nT. Se concluye así que mientras en este segundo caso las diferencias son más grandes que en el primero, existe un riesgo menor del 25% de alcanzar diferencias que superan 14 nT.

IV.7. SELECCION DEL MODELO

Para elegir el modelo más adecuado, aplicaremos el criterio de Mallows por las razones expuestas en III.6. Por otra parte, al basarse este criterio en la minimización del error cuadrático medio de predicción en los puntos de observación, el riesgo de error en las conclusiones se reducirá.

Determinado el valor del coeficiente c_p de Mallows para todas las combinaciones posibles de las nueve variables independientes $w_{10}, w_{01}, \dots, w_{03}$, en grupos de una, dos, tres, etc., construimos la siguiente tabla que contiene el valor mínimo del estadístico c_p para un grupo de n variables y la combinación que le corresponde:

Tabla IV,26

| NUMERO DE VARIABLES | COMBINACION DE c_p MINIMO | VALOR DE c_p DE LA COMBINACION |
|---------------------|--|----------------------------------|
| 1 | w_{10} | 53060.67 |
| 2 | w_{10}, w_{01} | 9177.71 |
| 3 | w_{10}, w_{01}, w_{02} | 5633.29 |
| 4 | $w_{10}, w_{01}, w_{20}, w_{02}$ | 2280.17 |
| 5 | $w_{10}, w_{01}, w_{11}, w_{20}, w_{02}$ | 19.67 |
| 6 | $w_{10}, w_{01}, w_{11}, w_{20}, w_{02}, w_{30}$ | 10.26 |
| 7 | $w_{10}, w_{01}, w_{11}, w_{20}, w_{02}, w_{21}, w_{30}$ | 6.66 |
| 8 | $w_{10}, w_{01}, w_{11}, w_{20}, w_{02}, w_{21}, w_{12}, w_{30}$ | 8.0 |
| 9 | $w_{10}, w_{01}, w_{11}, w_{20}, w_{02}, w_{21}, w_{12}, w_{30}, w_{03}$ | 10.0 |

El modelo correspondiente a la combinación con el valor mínimo de c_p será:

Tabla IV,27

| VARIABLE | COEFICIENTE | DESVIACION TIPICA |
|-------------|-------------|-------------------|
| w_{10} | 396.261 | 0.324 |
| w_{01} | 21.9155 | 0.1769 |
| w_{11} | -2.9567 | 0.0638 |
| w_{20} | -4.4102 | 0.091 |
| w_{02} | 2.308 | 0.0381 |
| w_{21} | -0.0934 | 0.0394 |
| w_{30} | -0.1286 | 0.0425 |
| TERM.INDEP. | 44151.6 | 0.49 |

Restringiéndose a la región de validez de las hipótesis que cumple el modelo de segundo grado, el modelo polinómico de tercer grado es el que posee el menor valor del estadístico c_p ($c_p=10$), en cuyo caso la estimación de los coeficientes es la siguiente

Tabla IV,28

| VARIABLE | COEFICIENTE | DESVIACION TIPICA |
|-------------|-------------|-------------------|
| w_{10} | 393.429 | 0.1714 |
| w_{01} | 24.2118 | 0.1663 |
| w_{11} | -3.5859 | 0.1410 |
| w_{20} | -4.6474 | 0.08149 |
| w_{02} | 2.4203 | 0.0665 |
| w_{21} | -0.2061 | 0.0662 |
| w_{12} | 0.2776 | 0.0551 |
| w_{30} | 0.3478 | 0.0478 |
| w_{03} | -0.2553 | 0.0398 |
| TERM.INDEP. | 44150 | 0.17 |

sin embargo, este modelo no cumple todas las condiciones de validez en dicha región, por lo que en ella debería emplearse el que figura en la Tabla IV,25 del apartado IV.5.3.

En la región en la que se verifican las condiciones de validez del modelo de tercer grado (Fig.IV,29), el valor del estadístico de Mallows que le corresponde es $c_p=10$, que es el mínimo de todas las combinaciones de variables. Por lo tanto, el modelo de la Tabla IV,23 es el que posee más precisión de predicción en los puntos de observación de esta región, donde las diferencias respecto al modelo de segundo grado oscilan entre -2.26 nT y 3.15 nT. No obstante, según sean los fines que se persiguen, podría ser mas práctico emplear también en este caso el modelo de segundo grado, por su sencillez y por la extensión de su región de validez.

IV.8. COMPARACION CON OTROS MODELOS

Al ser el método de superficies polinómicas un procedimiento alternativo a los de potencial, es interesante comparar resultados obtenidos por ambos caminos. La comparación se realiza aquí, mediante un estudio estadístico de las diferencias de los modelos polinómicos de segundo y de tercer grado respecto a dos de los modelos de potencial propuestos para España, el del Campo Internacional de Referencia para 1985 (IGRF85) y el obtenido por el método del Análisis Armónico en Casquetes Esféricos (SCHA) (Torta, 1992) trasladados ambos a la época 1987.0 y a 3000 de altitud sobre el nivel del mar. Los resultados del estudio comparativo en puntos de las regiones de validez, se resumen en las siguientes tablas:

Tabla IV,29

| MODELO DE SEGUNDO GRADO | | | | | |
|-------------------------|------------|------------|----------------|-----------------------|----------|
| Modelo de referencia | d_m (nT) | d_M (nT) | \bar{d} (nT) | $\hat{\sigma}_d$ (nT) | rcm (nT) |
| IGRF | 3.32 | 15.38 | 12 | 0.05 | 12.22 |
| SCHA | -35.51 | 6.60 | -18.43 | 0.26 | 20.48 |

Tabla IV,30

| MODELO DE TERCER GRADO | | | | | |
|------------------------|------------|------------|----------------|-----------------------|----------|
| Modelo de referencia | d_m (nT) | d_M (nT) | \bar{d} (nT) | $\hat{\sigma}_d$ (nT) | rcm (nT) |
| IGRF | -3.53 | 25.82 | 12.25 | 0.06 | 12.49 |
| SCHA | -36.91 | 0.98 | -19.68 | 0.33 | 21.7 |

siendo d_m : la diferencia mínima

d_M : la diferencia máxima

\bar{d} : la diferencia media

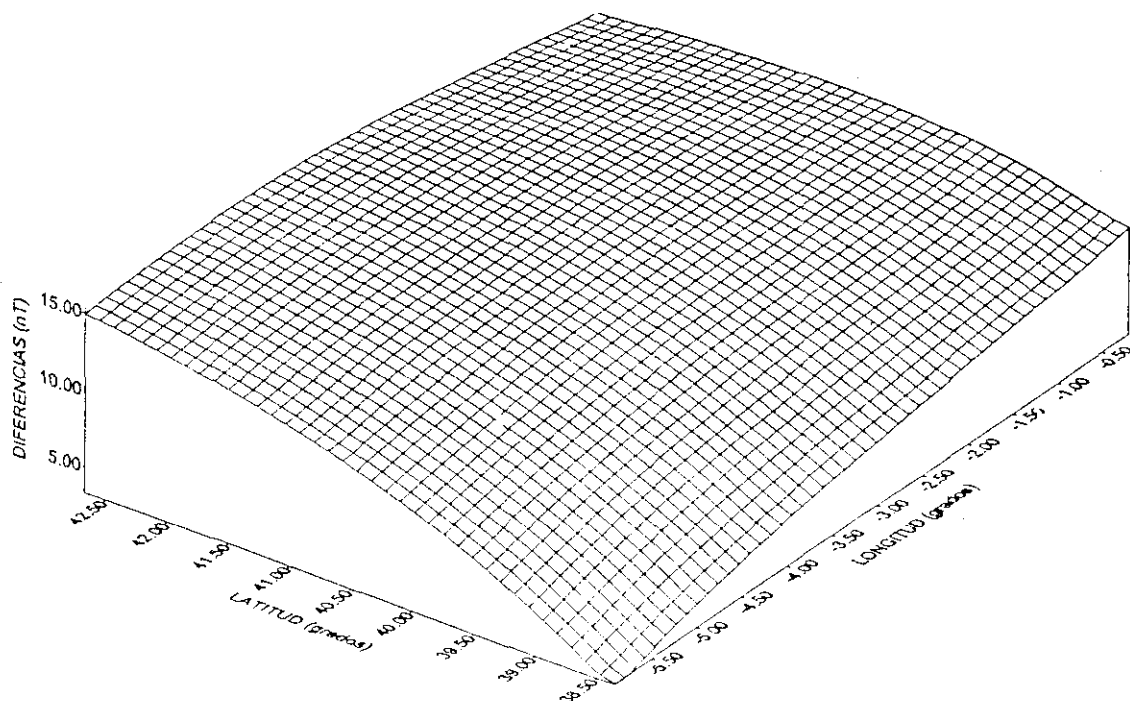
$\hat{\sigma}_d$: la estimación del error de la media

rcm : la raíz cuadrática media de las diferencias

considerando este último coeficiente como una medida de similaridad entre los modelos que se comparan, en ambos casos se aprecia que el comportamiento de las dos superficies polinómicas respecto a cada uno de los modelos de potencial dentro de las respectivas regiones de validez, es muy parecido, adaptándose algo mejor al IGRF. Por otra parte, tal como se observa en los valores medios, las diferencias respecto al SCHA tienden a mantenerse con signo opuesto a las obtenidas respecto al IGRF, es decir los modelos polinómicos representarían un estado intermedio entre ambas soluciones. En las figuras IV,31 y IV,32 se representa la distribución espacial de las diferencias entre los modelos polinómicos y los modelos IGRF y SCHA respectivamente.

Las discrepancias que existen entre las soluciones polinómicas y las de potencial, pueden deberse a dos tipos de causas. Por un lado, la traslación de época de los modelos a 1987.0 y la prolongación a 3000 m de altitud introducen incertidumbres en los resultados, ya que ambos han sido construidos con datos en su mayoría procedentes de satélite (entre 500 y 300 km. de altitud nominal). Por otro lado, las variaciones periódicas de menor longitud de onda contenidas en cada uno de los modelos son diferentes. En el caso del IGRF la longitud de onda mínima corresponde a 4000 km, mientras que la de un modelo de tipo polinómico de segundo grado es del orden de 500 km tal como se indicó en el tercer capítulo. Para el modelo SCHA esta longitud de onda mínima es de 416 km (Torta,1992). Estas diferencias espectrales pueden explicarse debido a que el modelo IGRF representa sobre todo variaciones originadas por fuentes muy profundas (próximas al núcleo de la Tierra), mientras que las de los otros dos modelos se encuentran a una profundidad que es bastante menor, pudiendo incluso considerarse su origen en la parte inferior de la corteza terrestre.

DIFERENCIAS DEL MODELO POLINOMICO DE SEGUNDO GRADO RESPECTO DEL IGRF



DIFERENCIAS DEL MODELO POLINOMICO DE TERCER GRADO RESPECTO DEL IGRF

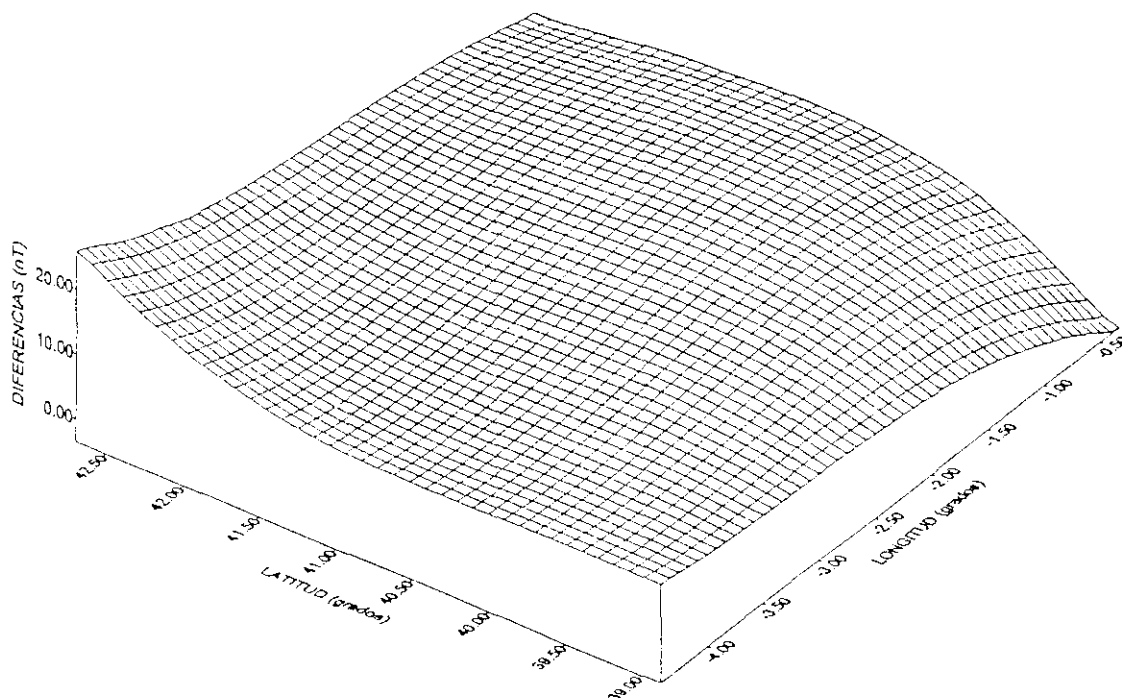
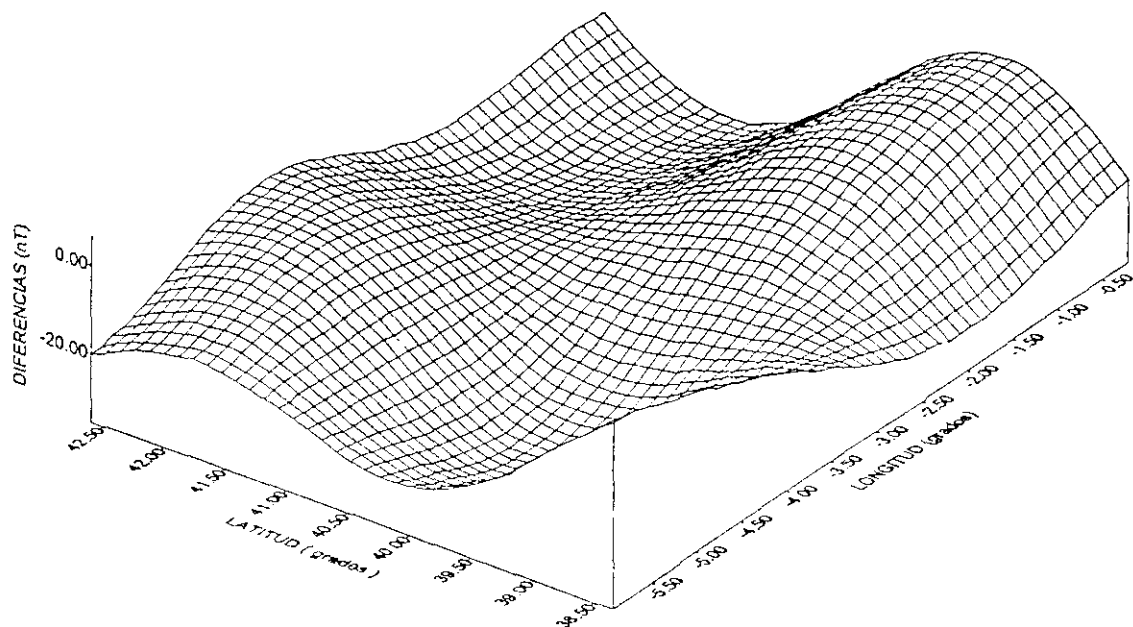


Fig. IV, 31

DIFERENCIAS DEL MODELO POLINOMICO DE SEGUNDO GRADO RESPECTO DEL SCHA



DIFERENCIAS DEL MODELO POLINOMICO DE TERCER GRADO RESPECTO DEL SCHA

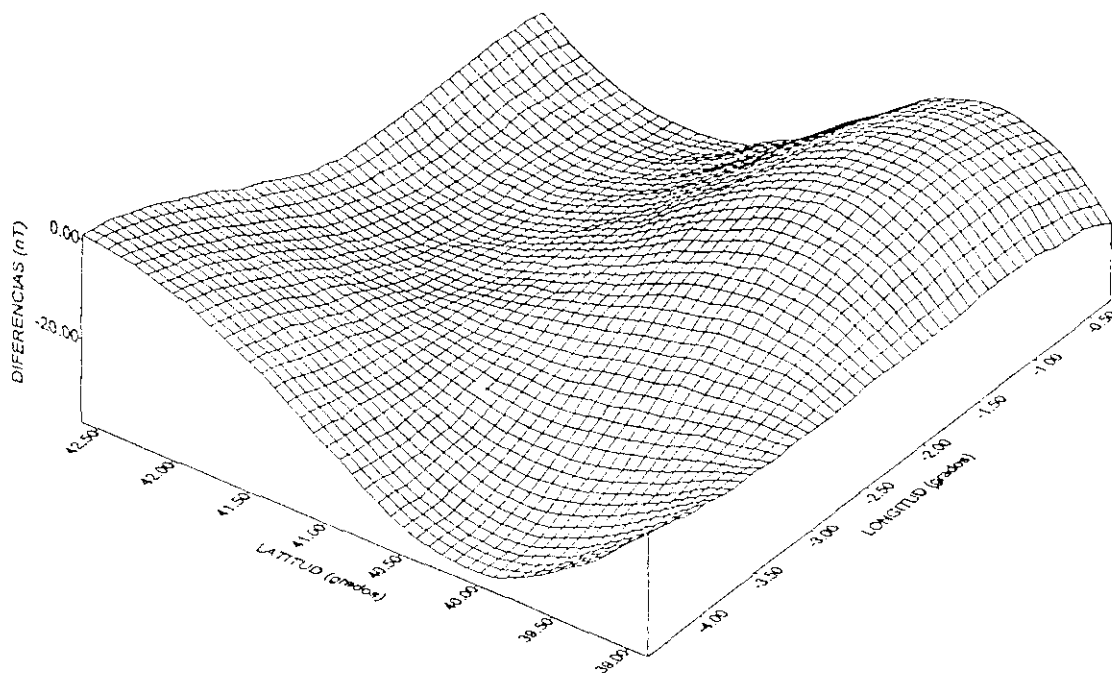


Fig. IV, 32

CAPITULO V

CONCLUSIONES

V.1.- INTRODUCCION

En este capítulo se presenta un resumen de los resultados más concluyentes de la presente Tesis, cuyos aspectos relevantes son, tal como se desprende de su lectura, el **tratamiento** y el **análisis** de los datos aeromagnéticos. Consecuentemente, este capítulo se divide también en dos apartados principales, cuyos nombres coinciden con los dos propósitos antes mencionados. El primero de ellos comprende todo lo referente a la corrección de errores de medida, sustracción de variaciones temporales y reducción de los datos a un nivel de referencia fijo o datum; mientras que el segundo se dedica a la determinación de modelos que expliquen la variación espacial de la intensidad del campo magnético terrestre a la altitud del vuelo, así como al estudio de las condiciones de validez de dichos modelos.

V.2.- CONCLUSIONES SOBRE EL TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Las etapas principales del tratamiento de los datos son las siguientes:

- la corrección de errores sistemáticos
- la reducción de las observaciones a una altitud constante
- la sustracción de las variaciones temporales
- la reducción de los valores procesados a un nivel de referencia fijo o datum.

La corrección de errores sistemáticos se realiza mediante la estimación de los mismos, usando pruebas y calibraciones instrumentales como las descritas en el segundo capítulo de este estudio. Los errores sistemáticos más importantes son:

- el error de retardo
- el error de direccionalidad
- los errores debidos al funcionamiento del magnetómetro base.

El error de retardo es de 2.5 segundos y se compensa al comenzar el procesamiento de los datos, así como el salto brusco de 9.44 nT producido en los registros del magnetómetro base al terminar la primera fase del levantamiento. Sin embargo, los errores producidos por el efecto de direccionalidad son inferiores al error experimental del método aplicado para su detección y no han sido corregidos al no haberse puesto de manifiesto en el mapa final. De todas maneras, este error puede considerarse pequeño debido a la distancia entre el sensor y el avión.

El resto de los errores, tal como los debidos a los registros defectuosos del magnetómetro del avión o los de posicionamiento, se corrigen durante las fases preliminar y de nivelación respectivamente.

Como es lógico pensar, es imposible mantener constante la altitud del vuelo, por lo que es necesario reducir los datos a una misma altitud, lo cual se consigue mediante la aproximación determinada con ayuda del IGRF, expuesta en II.6.2.3., cuyo valor oscila dentro de la región del levantamiento, en el intervalo ± 0.63 nT.

Para sustraer las variaciones temporales se considera el espectro de las mismas dividido en tres partes:

- variaciones con períodos inferiores a 85 segundos
- variaciones con períodos superiores a 20 minutos
- variaciones con períodos comprendidos entre 85 segundos y 20 minutos

cuyos orígenes se explican en II.6.2.4.

Las primeras se eliminan aplicando a los datos del avión un filtro Gaussiano con una atenuación del 50% a los 27.5 segundos. Las variaciones con períodos superiores a los 20 minutos quedan reflejadas en las intersecciones de las líneas de vuelo con las líneas de control y se eliminan mediante el proceso de nivelación. Para sustraer las variaciones comprendidas entre los 85 segundos y los 20 minutos es necesario recurrir a los datos adquiridos por las estaciones de tierra. A tal respecto se han probado tres procedimientos:

- Restar de los datos del avión las variaciones registradas en la estación de tierra más próxima.
- Determinar la relación matemática entre la estación base y la estación de tierra más próxima al avión, para posteriormente restar sus variaciones a los datos del avión.
- Determinar la relación entre las variaciones registradas por el magnetómetro del avión y el magnetómetro base, para posteriormente sustraer de los datos del avión éstas últimas.

De los tres procedimientos, el tercero ha resultado ser el más eficiente por razones que se detallan en II.6.2.5., donde se determina que la razón entre las variaciones registradas por ambos magnetómetros es 1.35.

Así pues, para eliminar de los datos del avión las variaciones temporales comprendidas entre los 85 segundos y los 20 minutos, fundamentalmente debidas a la variación diurna, se resta de los datos del avión 1.35 veces la variación registrada por el magnetómetro situado en el Observatorio de San Pablo de los Montes. Estas variaciones se determinan mediante el ajuste de una recta a los datos registrados por dicho magnetómetro, la cual puede considerarse como el nivel cero de la variación diurna y cuya pendiente refleja la variación secular.

El levantamiento aeromagnético se ha realizado en dos etapas separadas entre sí por un intervalo de cuatro meses aproximadamente. Lo cual produce una diferencia de nivel entre las dos fases, debido a la variación secular.

La sustracción de la variación secular de los datos adquiridos por el magnetómetro del avión, se realiza al mismo tiempo que la de la variación diurna. Usando el método explicado en II.6.2.6., el cual no sólo consiste en restar 1.35 veces los valores de la fluctuación diurna registrada por el magnetómetro base, sino también la línea base de la misma, la diferencia entre el valor del IGRF en el observatorio e instante de medida y añadir además al resultado el valor del IGRF en la estación base e instante de referencia, tal como queda expresado en la ecuación (II,17). Además, para corregir el desfase mencionado anteriormente, se introducen en la etapa de nivelación los datos adquiridos en las líneas repetidas, situadas en los límites de los dos bloques del levantamiento.

Los errores que no han sido corregidos hasta aquí, así como los introducidos por la aplicación de las aproximaciones usadas en la reducción de altitud y la sustracción de las variaciones diurna y secular, se compensan en la fase de nivelación, obteniéndose un resultado con una precisión de 0.33 nT.

El conjunto de datos nivelados define una superficie $B=B(x,y)$ internamente consistente, es decir: la posición relativa de cualquiera de sus puntos es correcta respecto a la de los demás; sin embargo, tal superficie no posee un nivel de referencia conocido y, como consecuencia de ello, se desconoce el valor absoluto de B .

La determinación de dicho nivel o datum se efectúa en dos pasos. En el primero de ellos los datos nivelados se refieren al valor del campo en un punto situado a 3000 metros de altitud sobre el Observatorio de San Pablo de los Montes el 1 de Abril de 1987. En el segundo paso se trasladan los datos desde el 1 de Abril de 1987 al 1 de Enero del mismo año. Para efectuar el primer paso se utilizan los datos adquiridos en un tramo de 50 km volado diez veces en la fecha indicada, mientras que para el segundo se emplean los datos registrados con el magnetómetro base. El datum final para el 1 de Enero de 1987 es 43800.7 nT, cantidad que se suma a los datos nivelados para obtener el valor absoluto de los mismos.

V.3. CONCLUSIONES SOBRE EL ANALISIS DE LOS DATOS

Para realizar el análisis de los datos se aplica a una muestra formada por 5316 puntos seleccionados a lo largo de las líneas de vuelo, a razón de un punto cada 10 Km aproximadamente. Este análisis comprende dos partes:

- Analisis descriptivo.
- Análisis inferencial.

El objetivo del primero de ellos es sacar conclusiones únicamente sobre la muestra de datos, mientras que el del segundo consiste en, partiendo de la muestra, obtener conclusiones acerca de la población.

V.3.1. Análisis descriptivo

Utilizando el conjunto muestral de observaciones se determinan tres modelos polinómicos de primero, segundo y tercer grado respectivamente, mediante el método de mínimos cuadrados. Los coeficientes de dichos modelos se presentan en la Tabla IV,3 y la precisión de cada uno de los ajustes en la Tabla IV,4. Los resultados indican que, aunque los coeficientes de determinación son muy parecidos, no ocurre lo mismo con las precisiones, pues, a pesar de que las desviaciones típicas residuales de los modelos de segundo y tercer grado son muy similares, difieren bastante de la correspondiente al modelo de primer grado.

Los mapas de intensidad del campo magnético (Figs. IV,3; IV,4 y IV,5) presentan una apariencia bastante similar debido a la equidistancia entre las curvas de nivel. Para discriminar mejor los resultados, se recurre a los mapas de las diferencias de cada uno de ellos respecto al del IGRF 85 trasladado a la fecha de referencia del datum (Figs. IV,6; IV,7 y IV,8). En ellos se observa que los valores numéricos de las diferencias son más parecidos entre sí en los dos últimos modelos que en el primero. Además, en estos dos casos la distribución de las diferencias es muy parecida.

Los mapas de residuos (Figs. IV,7; IV,8 y IV,10) muestran que, con excepción de las grandes anomalías situadas al Norte, Noroeste y Sur del territorio peninsular, las discrepancias de los dos últimos modelos respecto al primero son mayores que las que existen entre los mismos, manifestándose principalmente en la zona central.

Un estudio espectral sobre el perfil de residuos más extenso del modelo (perfil 48), cuya longitud aproximada de Norte a Sur es de 757.2 Km (Figs. IV,11 y IV,12) confirma estos resultados. Como puede verse, el perfil obtenido mediante los modelos de segundo y tercer grado (Figs. IV,11b y IV,11c) es muy similar y posee un comportamiento muy distinto al de primer grado (Fig. IV,11a), ya que la tendencia de crecimiento hacia el Norte que muestran los dos últimos modelos es más compatible con el comportamiento natural del campo magnético, que la del primero.

En cuanto a los espectros (Fig. IV,12), las diferencias mayores entre el modelo de primer grado respecto al de segundo o tercer grado tienen lugar, como fácilmente puede apreciarse, en el dominio de las longitudes de onda superiores a los 60 Km. Para cuantificar las discrepancias entre los tres espectros, recurrimos a la raíz cuadrática media de las diferencias entre ellos, las cuales valen

$$rcm_1 = 769.98$$

$$rcm_2 = 768.73$$

$$rcm_3 = 8.12$$

siendo rcm_1 , rcm_2 y rcm_3 la raíz cuadrática media de las diferencias entre los espectros del primer y segundo modelo, entre el primer y tercer modelo, y entre el segundo y tercer modelo respectivamente.

De esta manera, se puede afirmar de una forma más rigurosa que el comportamiento de los modelos de segundo y tercer grado, aún presentando ciertas

diferencias entre sí, es mucho mejor que el primero. Asimismo, las discrepancias entre ellos son menores que las que presentan con respecto al modelo de primer grado.

V.3.2. Análisis inferencial

Para que los modelos polinómicos posean un valor inferencial es necesario que cumplan las siguientes condiciones:

- Homogeneidad
- Robustez del modelo
- Ausencia de multicolinealidad
- Linealidad
- Normalidad
- Homocedasticidad
- Independencia

cuya verificación y análisis se realiza en los apartados IV.5.1. y IV.5.2. y se resumen en éste.

El análisis de homogeneidad indica la existencia de observaciones con residuos atípicos. Estos residuos son los causantes de que no se verifiquen algunas de las condiciones arriba enumeradas.

Mediante el estadístico de Cook, se intenta detectar la existencia de observaciones influyentes. Los resultados del estudio correspondiente no revelan la existencia de tales observaciones, pudiéndose considerar que los modelos son robustos.

La matriz de correlaciones de las variables independientes indica que algunas de las mismas poseen una alta correlación, lo que suele considerarse como un indicio de multicolinealidad. Sin embargo, los valores del índice de condicionamiento son muy bajos, por lo que puede suponerse que el efecto es mínimo e incluso nulo y, por lo tanto se admite que la matriz $X'X$ está bien condicionada.

El análisis de linealidad revela la falta de la misma en el modelo de primer grado, mientras que en los restantes modelos no existen evidencias de ello. Esta falta de linealidad sugiere que es necesario incluir en dicho modelo términos de grado superior al primero para que éste sea capaz de explicar las variaciones de la intensidad del campo magnético terrestre en una región de las dimensiones del territorio peninsular.

Para buscar una alternativa, se recurre a la transformación de Box-Cok. Sin embargo, esta solución no es práctica, pues además de poseer una forma explícita más compleja que la de un polinomio, son los valores transformados, y no los de \hat{B} , los que cumplen la condición, por lo que se rechaza el modelo de primer grado.

La hipótesis de normalidad se investiga mediante los gráficos de probabilidad normal y mediante el contraste de Kolmogorov-Smirnov. Del resultado del análisis se desprende que no se verifica esta condición. La causa de ello se debe a la existencia de zonas del territorio que poseen residuos con valores tan altos que no pueden compensarse con los de otras regiones, en las que, aún siendo sus correspondientes residuos también elevados en valor absoluto, poseen un signo negativo. Esto queda confirmado por los contrastes de asimetría cuyos resultados se encuentran en IV.5.2.2.

Por otra parte, existe una gran extensión del territorio que posee residuos con un valor absoluto muy bajo (Figs.IV9,; IV10, y IV11,) y, al mismo tiempo, existen residuos con un valor absoluto muy alto en número mucho mayor que el previsto por una distribución normal en sus colas, lo que se confirma con los contrastes de apuntamiento o curtosis que acompañan a los de asimetría en IV.5.2.2.

La falta de normalidad afecta a las propiedades de los estimadores: los estimadores mínimo-cuadráticos dejan de coincidir con los máximo-verosímiles y, aunque todavía centrados, dejan de ser eficientes, con lo que no se obtiene el máximo partido de la información.

La solución que suele adoptarse en estos casos es recurrir a los cambios de variable, pero este remedio posee los mismos inconvenientes que los expuestos al hablar de la linealidad.

El elevado apuntamiento o curtosis debido a la existencia de residuos atípicos, es también causa de la heterogeneidad de varianzas o falta de homocedasticidad, la cual origina una pérdida de eficiencia de las estimaciones al aplicar el método de mínimos cuadrados. Para corregir en lo posible este efecto se recurre a los métodos de regresión robusta usando la función de ponderación de Huber. Los resultados se presentan en las Tablas IV,16 y IV,17, observándose una cierta mejoría en la precisión de los mismos, con respecto a los resultados expuestos en la Tabla IV,1.

La hipótesis de independencia no se verifica en ninguno de los tres casos, debido a la existencia de una autocorrelación positiva en las series de residuos. Esta autocorrelación se debe al carácter geográfico de los datos y al modo de distribución de los mismos en el fichero que los contiene. A pesar de ello, cuando se estudia la autocorrelación en perfiles separados, ésta disminuye considerablemente y, como consecuencia, también la incertidumbre en la estimación de los coeficientes.

Al no cumplirse todas las condiciones de validez de los modelos polinómicos de segundo y tercer grado en todo el área de estudio, se procede a buscar una zona más reducida en la que se verifiquen la mayor parte de las mismas, tal como se explica en IV.5.3. Dicha región se representa en las figuras IV,14 y IV,15 para los modelos de segundo y tercer grado respectivamente. En esta región las diferencias

con respecto al modelo original oscilan entre -2.86 nT y 6.68 nT, para el caso del modelo polinómico de segundo grado, y entre -2.26 nT y 3.15 nT para el modelo polinómico de tercer grado.

Para elegir el modelo más adecuado se aplica el criterio de Mallows ya que al basarse este criterio en la minimización del error cuadrático medio de predicción en los puntos de observación, el riesgo de equivocación en las conclusiones se reduce. El criterio antes mencionado indica que el modelo óptimo para todo el territorio peninsular es el polinomio de tercer grado incompleto que figura en la Tabla IV,27.

Restringiéndonos a las condiciones de validez de los modelos de segundo y tercer grado, el modelo más adecuado, en el primer caso, es el que figura en la Tabla IV,22 y, en el segundo, el de la Tabla IV,25. No obstante, por razones prácticas, debería elegirse el modelo de segundo grado, ya que su región de validez contiene a la del otro modelo y su expresión matemática es más sencilla.

Los resultados anteriores pueden resumirse en los siguientes puntos:

- I) Desde un punto de vista descriptivo, el comportamiento de los modelos polinómicos de segundo y tercer grado, es similar y distinto al de primer grado.
- II) Ninguno de los modelos polinómicos analizados verifica todas las condiciones de validez en toda España peninsular.
- III) El comportamiento de los modelos de segundo y tercer grado es claramente mejor que el de primer grado.
- IV) Es posible atenuar algunos de los problemas planteados por las condiciones físicas de los datos:
 - El uso de mínimos cuadrados ponderados atenúa la heterocedasticidad.
 - La reducción de la región de estudio atenúa la autocorrelación.
- V) Los modelos de segundo y tercer grado verifican las condiciones de validez en zonas de la Península Ibérica bien definidas (modelos restringidos).
- VI) En dichas zonas, las diferencias entre los modelos extendido y restringido oscilan entre -2.86 nT y 6.68 nT ($r_{cm} = 2.46$ nT) para el polinomio de segundo grado y entre -2.26 nT y 3.15 nT ($r_{cm} = 1.44$ nT) para el polinomio de tercer grado.
- VII) Según el criterio de Mallows, el modelo óptimo para todo el territorio peninsular de España es de tercer grado incompleto (sin términos en w_{12} ni w_{03}).
- VIII) Dentro de las regiones de validez de los modelos de segundo y tercer grado, la solución más práctica es el uso de un modelo polinómico de grado dos.

- IX) Dentro de las regiones de validez, los modelos restringidos poseen un comportamiento similar al de algunos modelos de potencial, particularmente al del Campo Geomagnético Internacional de Referencia.

V.3.3. Resumen de las conclusiones sobre el análisis de los datos.

Las conclusiones que pueden extraerse del análisis de los datos pueden resumirse en los siguientes puntos:

- I) Los modelos polinómicos constituyen una alternativa útil a los modelos de potencial.
- II) En su aplicación, es necesario examinar con rigor el cumplimiento de las condiciones de validez.
- III) La aplicabilidad de los métodos polinómicos a datos aeromagnéticos se verifica en zonas restringidas pero no en toda España peninsular.
- IV) En las zonas restringidas puede cuantificarse el error de estimación.
- V) Parte de las limitaciones de estos modelos responden a las características propias de los datos.
- VI) Estas características pueden presentarse en otros datos geofísicos y por tanto la utilidad y limitaciones del método de superficies polinómicas vistas en el caso de datos aeromagnéticos, volverán a presentarse en ellos.

V.4. FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN.

El trabajo desarrollado en esta Tesis no agota todas las posibilidades del tema sino que abre nuevas vías de investigación en el campo del Geomagnetismo, entre las cuales podemos destacar las siguientes:

- I) El aprovechamiento más completo de la información sobre los campos magnéticos de la Tierra que se reflejan en los datos del levantamiento, especialmente en lo que respecta a fenómenos transitorios de origen externo, que han sido excluidos en el estudio del campo magnético principal.
- II) La aplicación de la metodología desarrollada a otros campos de la Geofísica diferentes del Geomagnetismo, como podría ser el caso de la Gravimetría donde en ocasiones se desea separar las anomalías locales de las anomalías regionales mediante un campo anómalo regional compuesto por variaciones más suaves.

- III) El estudio de las posibles influencias intrínsecas de los datos geofísicos en las condiciones de validez, puestas de relieve en la autocorrelación de los residuos y en la falta de normalidad de los mismos por la asimetría y la curtosis de su distribución.
- IV) El análisis de la posible utilización de los datos empleados en esta Tesis para obtener una prolongación descendente mas precisa de otros modelos de potencial obtenidos mediante datos de satélite.
- V) La búsqueda de modelos para regiones de interés geofísico más restringidas, donde además puedan emplearse otras funciones de ponderación que reduzcan en lo posible la pérdida de eficiencia debida a la aplicación del método de mínimos cuadrados sin el cumplimiento de las condiciones de homocedasticidad y normalidad.
- VI) El estudio de la influencia de la utilización de distintos modelos en el proceso de interpretación de anomalías magnéticas.

BIBLIOGRAFIA

- ABRAGAM, A. (1955): "Overhauser effects in nonmetals". **Physical Review**, v. 98, nº 6, pp.1729-1735.
- ABRAGAM, A., COMBRISSEON, J. y SOLOMON, I. (1957): "Polarisation nucleaire par effect Overhauser dans les solutions d'ions paramagnetics". **C. R. Académie des Sciencies**, 245, pp. 157-160.
- ACHACHE, J. (1977): "Les déffauts de réduction dans le levé aéromagnétique dé la Martinique: existence d'une anomalie de conductivité au sud de l'île". **Ann. Geophys.**, t. 33, pp. 217-224.
- AFIFI, A. A., AZEN, S.P. (1977): **Statistical Analysis. A computer Oriented Approach**. Edit. Academic press, Londres.
- AGOCS, W.B. (1955): "Line spacing effect and determination of optimum spacing illustrated by Marmora, Ontario magnetic anomaly". **Geophysics**, v. XX, nº 4, pp. 871-885.
- ALEXANDRESCU, M.; HA DUYEN, CH.; LE MOÜEL, J.L. (1994): "Geographical Distribution of Magnetic Observatoires and Field Modelling", **J. Geomag. Geoelectr.**, v.46, pp. 891-901.
- ALONSO, M. y FINN, E.J. (1971): **Física III: Fundamentos cuánticos y estadísticos**. Edit. Fondo Educativo Interamericano, Méjico.
- ARDIZONE, J.A.; MEZCUA, J. y SOCIAS, I. (1989): **Mapa aeromagnético de España Peninsular**. Dirección General del Instituto Geográfico Nacional, Madrid.
- BALSELEY, J.R. (1952): "Aeromagnetic surveying", **Advances in Geophysics**. Academic Press Inc. Publishers, v. 1, pp.319-349.
- BARKER, R.D. (1975): "Elementary approximations in aeromagnetic interpretation for application in low latitudes". **Geophysics**, v. 40, nº 9, pp.686-688.
- BARRACLOUGH, D.R. (1990): "Modelling the Geomagnetic Field". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, nº 9, pp.1051-1070.
- BARRACLOUGH, D.R., WILLIAMS, L.D. y QUINN, J.M. (1992): "US/UK candidates for Definitive Geomagnetic Reference Field model IGRF-90". **J. Geomag. Geoelectr.**, v.44, nº 9, pp. 719-734.

- BARTON, C.E., McEWIN, A.J. y McFADEN, P.L. (1987): "Australian Geomagnetic Reference Field 1985". **EOS. Trans. A.G.U.**, v. 68, p.1157.
- BELSLEY, D.A. (1980): **Regression Diagnostics**. Edit. John Wiley, Nueva York.
- BHATTACHARYYA, B.K. (1969): "Bicubic Spline interpolation as a method for treatment of potential field data". **Geophysics**, v. 34, pp.402-428.
- BHATTACHARYYA, B.K. (1970): "Some important considerations in the acquisition and treatment of high-resolution aeromagnetic data". **Bolletino di Geofisica teorica ed Applicata**, v. 12, pp.21-44.
- BHATTACHARYYA, B.K. (1971): "An automatic method of compilation and mapping of high-resolution aeromagnetic data". **Geophysics**, v. 36, pp.695-717.
- BLOOM, A. y MANSIR, D. (1954): "Measurement of nuclear induction relaxation times in weak magnetic fields". **Physical Review**, v. 93, pp.941.
- BOISARD, P. (1966): "Discusion on "Line spacing effect and determination of optimun spacing illustrated by Marmora Ontario magnetic anomaly" by W.B. Agocs (Goephysics 19955)". **Geophysics**, v. 31, nº 3, pp.638
- BONDAR, T.N., GOLOVKOV, V.P. (1992): "IZMIRAM candidate models for DGRF 1985, IGRF 1990 and secular variation forecast model for 1990-1995 period". **J. Geomagn. Geoelectr.**, v. 44, nº 9, pp. 709-717.
- BRUN, J.M. (1990): **Introducción a la teoría de las funciones armónico esféricas**. Instituto Geográfico Nacional, Serie Monografías, v. 7, Madrid.
- COLLIN, C.R.; SALVI, A.; LEMERCIER, D.; LEMERCIER, P.; ROBACH, F. (1973): "Magnétomètre différentiell à haute sensibilité". **Geophysical Prospecting**, v. XXI, nº 4, pp.706-712.
- COWLES, L.G. (1938): "The adjustment of misclosures". **Geophysics**, v.3, pp.332-339.
- DANISH METEOROLOGICAL INSTITUTE (1969): **The aeromagnetic survey of Denmark, Finland, Norway, Sweden 1965 (Contribution to the World Magnetic Survey)**. Geomagnetic Section of the Swedish Board of Shipping and Navigation, Estocolmo.
- DE MIGUEL, L. (1980): **Geomagnetismo**. Instituto Geográfico Catastral, Madrid..
- DE MIGUEL, L. y COGOLLOR, A.G. (1964): **Magnetómetros Atómicos**. Instituto Geográfico Catastral, Madrid..

- DOBRIN, M.B. (1976): **Introduction to geophysical prospecting**. Edit. McGraw Hill Book Co., Nueva York.
- FEUILLARD, M.; LE MOÛEL, J.L.; POZZI, J.P.; THOMAS, D. (1980): "Le levé aéromagnétique de la Martinique". **Bull. Soc. Géol. France.**, t. XXII, n° 1, pp. 125-134.
- FOSTER, M.R.; JINES, W.R. y VAN DER WERG, K. (1970): "Statistical estimation of systematic errors at intersections lines of aeromagnetic survey data". **J. Geogh. Res.**, v. 75, n° 8, pp. 1507-1511.
- FUJITA, N. (1968): "G.S.I. airborne magnetometer and geomagnetic studies on aeromagnetic survey". **Bull. Geogr. Surv. Ins.**, v. 13, pp. 1-69
- GALDEANO, A. y ROSSIGNOL, J. C. (1977): "Assemblage à altitude constante des cartes d'anomalies magnétiques couvrant l'ensemble du bassin occidental de la Mediterrané ". **Bull. Soc. Géol. France.**, v. XIX, n° 3, pp. 461-468 .
- GALDEANO, A. (1980): **La cartographie aéromagnétique du Sud-Est de l'Europe et de la region Afar: Realisation, méthodes de traitement, applications geodinamiques**. Thèse pour obtenir le grade Docteur en Sciences Physiques. Universite de Paris VII.
- GARCIA, A.; TORTA, J.M.; CURTO, J.J.; SANCLEMENT, E. (1990): "Geomagnetic Secular Variation over Spain 1970-1988 by Means of Spherical Cap. Harmonic Analysis". **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, n° 68, pp. 65-75.
- GIBSON, M.O. (1941): "Adjustement by least squares. Alternative formulation and solution by iteration". **Geophysics**, v. 6, pp. 168-179.
- GIRET, R.I. (1965): "Some results of aeromagnetic surveying with a digital cesium-vapor magnetometer". **Geophysics**, v. 30, pp. 883-890.
- GIRET, R.I. (1966): "Reply to W.C. Kellog". **Geophysics**, v. 31, pp. 827-828.
- GOODMAN, L.A. (1954): "Kolmogorov-Smirnov Test for Psycological Research". **Psycoll. Bull.** 51, pp.160-168.
- GREEN, A.A. (1983): "A comparation of adjustment procedures for leveling aeromagnetic survey data". **Geophysics**, v. 48, n° 6, pp. 745-753.
- HAINES, G.V. (1967): "A Taylor expansion of the geomagnetic field in the Canadian Artic". **Publications of the Dominion Observatory**, v. XXXV, pp. 115-140.
- HAINES, G.V. (1968): "Polinomial estimation of certain geomagnetic quantities, applied to a survey of Scandinavia". **Publ. Dom. Obs.** v. XXXVII, n° 4, pp. 79-112.

- HAINES, G.V. (1985): "Spherical cap harmonic analysis". **J. Geophys. Res.** v. 90, pp. 2583-2591.
- HAINES, G.V. (1990 a): "Regional magnetic field modelling: A review". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, nº 9, pp. 1001-1018.
- HAINES, G.V. (1990 b): "Modelling by series expansions: A discussion". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, nº 9, pp. 1037-1049.
- HAINES, G.V. y NEWITT, L.R. (1986): "Canadian Geomagnetic Reference Field 1985". **J. Geomag. Geoelectr.**, v.38, pp. 895-921.
- HAINES, G.V., HANNAFORD, W. y SERSON, P.H. (1970): "Magnetic anomaly maps of the Nordic Countries and the Greenland and Norwegian Seas". **Publications of the Dominion Observatory**, v. XXXIX, nº 5.
- HAINES, G.V., y HANNAFORD, W. (1972): "Magnetic anomaly maps of British Columbia and the adjacent Pacific Ocean". **Publications of the Earth Physics Branch**, Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa, v. 42, nº 8, pp. 215-228.
- HAINES, G.V., y HANNAFORD, W. (1974): "A three component aeromagnetic survey of the Canadian Arctic". **Publications of the Earth Physics Branch**, Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa, v. 44, nº 8, pp. 213-234.
- HOLROYD, M.T. y BHATTACHARYYA, B.K. (1970): "Automatic contouring of geophysical data using bicubic spline interpolation". **Geological Survey of Canada**, paper 70-55, pp. 1-40.
- HONKURA, Y.; OSHIMAN, N. y NGAYA, Y. (1994): "An Attempt of Searching for a Change in the Distribution of the Geomagnetic Total Intensity over the site of submarine Eruption in the Northeastern Izu Region, Central Japan". **J. Geomag. Geoelectr.**, v.46, pp. 557-567.
- HOOD, P.J. HOLROYD, M.T. y McGRATH, P.H. (1979): "Magnetic methods applied to base metal exploration". **Geological Survey of Canada**, pp. 77-104.
- HUBER, P.J. (1981): **Robust Statistics**. Edit. J. Wiley, Nueva York.
- I.A.G.A., Division V, Working Group 8 (1995): "International Reference Field 1995 Revision", **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 47, pp. 1257-1261.
- JACOBSEN, P. (1981): "An evaluation of basement depth determinations from airborne magnetometer data". **Geophysics**, v. XXVI, nº 3, pp. 309-319.
- JENSEN, H. (1965): "Instrument details and applications of a new airborne magnetometer data". **Geophysics**, v. 30, pp. 875-882.

- JENSEN, H. (1965): "Reply to W.C. Kellog". **Geophysics**, v. 30, pp. 875-882.
- JOBSON, J.D. (1991): **Applied Multivariate Data Analysis**, Vol. I, **Regression and Experimental Design**. Edit. Springer-Verlag, Nueva York.
- JOHNSTON, J. (1975): **Métodos de Econometría**. Edit. Vicens Vives, Barcelona.
- KELLOG, W.C. (1966): "Discussion on "Some results of aeromagnetic surveying with a digital cesium-vapor magnetometer" by R.I. Giret (Geophysics 1965)". **Geophysics**, v. 31, pp. 824-828.
- KELLOG, W.C. (1966): "Discussion on "Instrumental details and applications of a new airborne magnetometer" by H. Jensen (Geophysics 1965)". **Geophysics**, v. 31, pp. 824-828.
- KELLOG, W.C. (1978): "Discussion on "Diurnal drift removal from aeromagnetic data using least squares" by H.L. Yarger, R.R. Robertson and R.L. Wentland in Geophysics, Oct. 1978, pp. 1148-1156". **Geophysics**, v. 6, pp. 1592-1593.
- LANGEL, R.A. y THORNING, A. (1982): "A satellite magnetic anomaly map of Greenland". **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, v. 71, pp. 599-612.
- LANGEL, R.A. y BARRACLOUGH, D.R. (1988): "Definive IGRF models for 1945, 1950, 1955 y 1960". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 40, n° 6, pp. 645-702.
- LANGEL, R.A. SABAKA, T.J. y BALDWIN, R.T. (1992): "The Geomagnetic Reference Field: 1970-1990 and the NASA candidate models for DGRF-85 and IGRF-1990". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 44, n° 9, pp. 745-763.
- LANGEL, R.A. (1992): "International Reference Field: The sixth generation". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 44, n° 9, pp. 679-707.
- LANGEL, R.A. BALDWIN, R.T. y GREEN, A.W. (1995): "Toward an Improved Distribution of Magnetic Observatories for Modelling of the Main Geomagnetic Field and its Temporal Change". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 47, pp. 475-508.
- LE BORGNE, E. y LE MOÜEL, J. (1969): "La réduction des observations et la précision des levés aeromagnétiques de la France Continentale et de la Mediterranée Occidentale". **Ann. Geophys.**, t. 25, fasc. 1, pp. 371-379.
- LE BORGNE, E. LE MOÜEL, J. y LE PICHON, X. (1971): "Aeromagnétic survey of South-Western Europe". **Earth and Planetary Science Letters**, n° 12, pp. 287-299.

- LE MOÛEL, J. y LE BORGNE, E. (1970): "Les anomalies magnétiques du Sud-Est de la France et de la Méditerranée occidentale". **C. R. Acad. Sc. Paris.**, v. 271, pp. 1348-1350.
- LE MOÛEL, J. et al. (1979): "Le levé aeromagnétique de l'archipel de Guadeloupe: description et implications tectoniques". **Bull. Soc. Géol. Franc.**, t. Xxi, n° 2, pp. 135-148.
- LILLEY, F.J. (1968): "Optimum direction of survey lines". **Geophysics**, v. 33, n° 2, pp. 329-336.
- LOWES, F.J. (1990 a): "The limitations of numerical models of the Main Geomagnetic Reference Field". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, n° 8, pp. 1071-1078.
- LOWES, F.J. (1990 b): "Some problems in modeling of the Main Geomagnetic Reference Field". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, n° 9, pp. 961-971.
- LYNAM, J.T. (1986): "Airborne geophysics-potential developments". **Extract from the transactions of the Institution of Mining and Metallurgy (Section B, Applied Earth Science)**, v.95, pp. B57-B63.
- MAYHEW, M.A. (1979): "Inversion of satellite magnetic anomaly data". **J. Geophys. Res.**, v. 45, pp. 119-128.
- MAYHEW, M.A. (1982): "An equivalent layer magnetization model for the United States derived from satellite altitude magnetic anomalies". **J. Geophys Res.**, v. 87, pp. 4837-4845.
- MAYHEW, M.A. y GALLIGER, S.C. (1982): "An equivalent layer magnetization model for the United States derived from Magsat data". **Geophys. Res. Lett.**, v. 9, pp. 311-313.
- MUFFLY, G. (1946): "The airborne magnetometer". **Geophysics**, v. 11, pp. 321-334.
- NAKATSUKA, T., TAMURA, Y. y SUYAMA, J. (1976): "The compensation for the aircraft magnetism in the aeromagnetic survey". **Bull. of the Geological Survey of Japan**, v.27, pp. 773-781.
- NAKATSUKA, T. (1994): "Aeromagnetic Anomalies over the Area of Unzendake Volcano". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 46, pp. 529-540.
- NAKAWA, I. y YUKUTAKE, T. (1985): "Rectangular harmonic analysis of geomagnetic anomalies derived from Magsat data over the area of the Japanese Islands". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 37, pp. 957-977.
- NEAVE, H.R. y WORTHINGTON, P.L. (1988): **Distribution Free Test**. Edit. Unwyn Hyman, Nueva York.

- NETTLETON, L.L. (1973): **Elementary Gravity and Magnetism for geologists and seismologists**. Soc. of Expl. Geophys, Tulsa (Oklahoma).
- OVERHAUSER, A.W. (1953): "Paramagnetic relaxation in metals". **Physical Review**, v. 89, nº 4, pp. 689-700.
- OVERHAUSER, A.W. (1953): "Polarization in nuclei in metals". **Physical Review**, v. 92, nº 2, pp. 411-415.
- PACKARD, M. y VARIAN, R. (1954): "Free nuclear induction in the Earth's magnetic field". **Physical Review**, v. 93, pp. 941.
- PARASNIS, D.S. (1966): "Letter to the editor 'On Optimun Line Spacing'". **Geophysics**, v.XXXI, nº 6, p.181.
- PEDDIE, N.W. (1985): "Analysis of geomagnetic secular variation during 1980-1985, and geomagnetic models proposed for the 1991. Revision of the International Reference Field". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 44, nº 9, pp. 735-743.
- PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D. (1989 a): **Estadística Modelos y Metodos, V. 1 Fundamentos**. Edit. Alianza Universidad Textos, Madrid.
- PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D. (1989 b): **Estadística Modelos y Metodos, V. 2 Modelos Lineales y Series Temporales**. Edit. Alianza Universidad Textos, Madrid.
- PODSKLAN, J. y VACZYOVA, M. (1990): "Results of the modelling of the Geomagnetic Field for small territory". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 42, nº 9, pp. 1099-1102.
- REFORD, M.S. (1964): **Airborne magnetometer surveys for petroleum exploration**. Aero Service Corporation, Filadelfia.
- REFORD, M.S. Y SUMNER, J.S. (1964): "Aeromagnetism". **Geophysics**, v. XXIX, nº 4, pp. 482-516.
- RIOS, S. (1977): **Métodos estadísticos**. Eds. del Castillo, Madrid.
- RUIZ-MAYA, L. (1986): **Métodos Estadísticos de Investigación (Introducción al Análisis de la Varianza)**. I.N.E., Madrid.
- SACHS, L. (1978): **Estadística Aplicada**. Edit. Labor S. A., Barcelona.
- SALVI, A. (1970): "Perfectionements apportés aux magnétomètres a resonance magnétique nucleaire a ponpage électronique". **Revue de Physique Appliquée**, T. 5, pp. 131-134.

- SERSON, P.H., MACK, S.Z. y WHITHAM, P.H. (1957): "A three-component airborne magnetometer". **Publications of the Dominion Observatory**, Ottawa, v. XIX, nº 2.
- SMELLIE, D.W. (1956): "Elementary approximations in aeromagnetic interpretation". **Geophysics**, v. XXI, nº 4, pp. 1021-1040.
- SOCIAS, I. (1994): **Estudio de los elementos del campo magnético en la España peninsular a partir de datos aeromagnéticos**. Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid.
- TANAKA, M. et al. (1986): "Aeromagnetic surveys in the Geographical Survey Institute and the magnetic anomalies in and around Japan". **Bull. of the Geological Survey of Japan**, v. XXX, pp. 1-14.
- TELFORD, W.M.; GELDART, L.P.; SHERIFF, R.E.; KEYS, D.A. (1985): **Applied Geophysics**. Edit. Cambridge University Press, Cambridge.
- TORTA, J.M. (1992): **Modelización regional del campo geomagnético sobre España: Campo anómalo, variación secular y campo de referencia**. Publicaciones del Observatorio del Ebro, nº 15. Tortosa.
- TORTA, J.M.; GARCIA, A. y DE SANTIS, A. (1992): "New representation of geomagnetic secular variation over restricted regions by means of spherical cap harmonic analysis: application to the case of Spain". **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, v. 74, pp. 209-217.
- TORTA, J.M.; GARCIA, A. y DE SANTIS, A. (1993): "A Geomagnetic Reference Field for Spain at 1990". **J. Geomag. Geoelectr.**, v. 45, pp. 573-588.
- TUKEY, J. (1977): **Exploratory Data Analysis**. Edit. Addison-Wesley, Nueva York.
- WHITHAM, K. y LOOMER, E.I. (1957): "Irregular magnetic activity in northern Canada with special reference to aeromagnetic survey problems". **Geophysics**, v. 22, pp. 646-659.
- WHITHAM, K. y NIBBLETT, E.R. (1961): "The diurnal problem in aeromagnetic surveying in Canada". **Geophysics**, v. 26, pp. 211-228.
- WORLD DATA CENTER C2 FOR GEOMAGNETISM (1966): **Report on aeromagnetic survey in Japan**. World Data Center C2 for Geomagnetism.
- WYCKOFF, R.D. (1948): "The Gulf magnetometer". **Geophysics**, v. 13, pp. 182-208.

YARGER, H.L., ROBERTSON, R.R. y WETLAND, L.R. (1978): "Diurnal drift removal from aeromagnetic data using least squares". **Geophysics**, v. 46, pp. 1148-1156.

YARGER, H.L., ROBERTSON, R.R. y WETLAND, L.R. (1978): "Reply to W.C. Kellog". **Geophysics**, v. 46, pp. 1592-1596.

ZURFLUEH, E.G. (1968): "High speed processing of aeromagnetic survey data". **Trans. Amer. Geophys. Union**, v. 49, nº 4, p. 671.