

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Sección Departamental del Departamento de Física de la Tierra y Astrofísica



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

TRABAJO DE FIN DE GRADO

*Geoestadística y métodos de optimización en el
estudio de erupciones volcánicas*

Marina del Pino Gómez-Serranillos

Dirigido por Fuensanta González Montesinos

Grado en Ingeniería Matemática

Curso académico 2023-2024

Convocatoria Junio 2024

Agradecimientos

Me gustaría agradecer personalmente a Fuensanta por su constante atención durante el desarrollo de este trabajo, así como a todos aquellos profesores que durante el grado me han motivado a querer aprender cada día más.

También agradecer el continuo apoyo de mi familia durante todos mis estudios, sobre todo a mis padres por animarme a hacer este grado y a mi hermana por querer seguir mis pasos.

Quiero agradecer a todos los amigos que he conocido durante estos cuatro años de grado, sin ellos no habría sido capaz de llegar hasta aquí. A todos ellos les deseo lo mejor.

Por último, pero no menos importante, quiero hacer una especial dedicación a Toto y Joaco, por acompañarme cada día de estos 4 años, sobre todo en la locura de las épocas de exámenes encerrados en la biblioteca.

Resumen:

En este trabajo se realizará un estudio de diferentes técnicas matemáticas que se aplican en el posible estudio de variables regionalizadas que presentan una distribución espacial complicada, esto se hace con el fin de conseguir una buena interpretación de los datos de los que disponemos. En primer lugar, se realizará un análisis geoestadístico de un conjunto de datos gravimétricos, con el fin de obtener una representación óptima de la zona de estudio a partir del cálculo del semivariograma y la interpolación. Nos centraremos en una técnica de interpolación concreta, el kriging. En segundo lugar, se ha llevado a cabo la interpretación de estos datos mediante la resolución del denominado problema gravimétrico inverso (PGI), que se caracteriza por ser muy complejo de resolver, entre otras cosas, debido a la no unicidad de las soluciones. Para ello, se ha realizado un estudio de diferentes técnicas metaheurísticas, centrándonos en la optimización por enjambre de partículas (PSO), del que se abordarán diferentes planteamientos. Para probar la eficacia y analizar los diferentes parámetros considerados en el PSO se ha diseñado un ejemplo gravimétrico sintético correspondiente a un modelo de un sistema magmático, compuesto por un dique y un *sill*, para la isla de La Palma. A partir del estudio geoestadístico y de la aplicación del algoritmo PSO se ha demostrado la eficacia de las técnicas desarrolladas en este trabajo.

Abstract:

In this work, a study will be carried out of different mathematical techniques that are applied in the possible study of regionalized variables that exhibit a complicated spatial distribution. This is done in order to achieve a good interpretation of the available data that we have. Firstly, a geostatistical analysis of a set of gravimetric data will be carried out in order to obtain an optimal representation of the study area by calculating the semivariogram and interpolation. We will focus on a specific interpolation technique, kriging. Secondly, the interpretation of these data has been undertaken through the resolution of the so-called inverse gravimetric problem, which is characterized by being very complex to solve, among other things, due to the non-uniqueness of the solutions. To this end, a study of different metaheuristic techniques has been carried out, focusing on particle swarm optimization (PSO), of which different approaches will be addressed. To test the effectiveness and analyze the different parameters considered in PSO, a synthetic gravimetric example corresponding to a model of a magmatic system, consisting of a dike and a sill, has been designed for the island of La Palma. Through the geostatistical study and the application of the PSO algorithm, the effectiveness of the techniques developed in this work has been demonstrated.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Objetivos del trabajo	3
2. Geoestadística y técnicas de interpolación espacial	3
2.1. Clasificación de métodos de interpolación espacial	4
3. Análisis Geoestadístico	5
4. Kriging	9
5. Técnicas de optimización	12
5.1. Técnicas de optimización heurísticas y metaheurísticas	13
6. Métodos de inteligencia por enjambre (SI)	15
6.1. Antecedentes	15
6.2. Método PSO	16
7. Aplicación del PSO al Problema Gravimétrico Inverso	19
7.1. Introducción al Problema Gravimétrico Inverso	19
7.2. Planteamiento del método PSO aplicado al PGI	21
8. Caso de estudio	22
8.1. Anomalía gravimétrica producida por un prisma inclinado	23
8.2. Parámetros utilizados en la implementación del algoritmo PSO	26
9. Resultados	27
9.1. Caso 1	30
9.2. Caso 2	30
9.3. Caso 3	31
9.4. Caso 4	32
9.5. Datos interpolados	33
10. Conclusiones	35
Anexos	41
A. Código de matlab algoritmo PSO (<i>PSO_dique_sill</i>)	41
A.1. Modificación del código para el Caso 2 (coeficientes de aceleración variables)	44
A.2. Modificación del código para el Caso 4 ($\varphi = 50^\circ$ fijo)	45
B. Código de matlab para el cálculo del semivariograma y kriging (<i>variograma_kriging</i>)	45

1. Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Una de las principales dificultades en el estudio *in situ* de un desastre natural es el acceso a las zonas afectadas, lo que se traduce en que los diferentes datos y mediciones que pudieran conseguirse sobre el terreno van a tener una distribución espacial muy heterogénea y dispersa. Es el caso de las medidas gravimétricas, muy utilizadas, por ejemplo, en el monitoreo y modelización de erupciones volcánicas.

En estas situaciones, para poder conseguir un mapa de toda la zona afectada, que muestre la información de todos los constituyentes de la señal observada, resulta imprescindible el uso de técnicas matemáticas eficientes que permitan la interpolación de los datos en las zonas no observadas. Para ello, resulta muy útil realizar un estudio preliminar geoestadístico de la variabilidad de los datos espaciales y elegir, en consecuencia, la técnica de interpolación adecuada.

Estas técnicas son muy útiles y se recurre a ellas en diferentes ámbitos como la meteorología (Kohán et al., 2017), la hidrogeología (Hatvani et al., 2014), la hidrología superficial (Kovács et al., 2012) o la creación de modelos digitales de elevación (Hernández et al., 2013), entre tantos (Nguimbous-Kouoh et al., 2018; Journel and Huijbregts, 1976; Goovaerts, 1997).

En este trabajo nos centraremos en la aplicación de estas técnicas matemáticas a un conjunto de datos gravimétricos distribuidos de forma heterogénea en una zona de estudio, con el fin de obtener un mapa continuo con información de esta zona. Esto se lleva a cabo para realizar una posterior interpretación de los datos, para la cual, se realiza un estudio de técnicas de optimización.

Según la naturaleza del problema que consideremos, podemos aplicar diferentes técnicas de optimización que serán elegidas en función de cual sea nuestro objetivo. Estas técnicas se pueden clasificar en diferentes grupos como globales y locales, que dependerán del espacio de búsqueda considerado; lineales y no lineales, que dependerán de la formulación del problema, etc.

Muchos problemas de optimización como, por ejemplo, el problema del viajante (Jünger et al., 1995; Flood, 1956) o el problema gravimétrico inverso, que definiremos más adelante, se caracterizan por ser complejos de resolver, por lo que se recurre a técnicas de optimización heurísticas y metaheurísticas. Estas técnicas nos dan una solución aproximada del problema, reduciendo la dificultad y el tiempo de resolución de este. Estas técnicas de optimización están inspiradas en diversos campos como la genética (Valencia, 1997), la biología, la física, etc. y su eficacia ha sido demostrada en numerosos ámbitos como telecomunicaciones, bioinformática, minería de datos, ingeniería química o psicología, entre otros (Pace et al., 2021; Valadi and Siarry, 2014).

En el caso de la gravimetría, una de las aplicaciones más interesantes de la optimización es la resolución del problema gravimétrico inverso, que ha sido abordado por diferentes autores (Montesinos et al., 2005; Barbosa et al., 2007; Roy and Kumar, 2021). Para resolver este problema concreto, recurriremos a una técnica de optimización metaheurística, conocida

como PSO, para identificar los elementos intrusivos, como son los diques o *sills* que se producen en una erupción volcánica, estudiando las anomalías gravimétricas producidas por estos.

1.2. Objetivos del trabajo

En la primera parte del trabajo, se realizará un análisis sobre herramientas geoestadísticas y técnicas de interpolación para la obtención de mapas gravimétricos continuos a partir de un conjunto de datos espacialmente distribuido de forma muy arbitraria. El posterior estudio de estos mapas permitirá verificar la eficiencia de esta interpolación. Se analizará el uso del mapa interpolado frente al uso de la distribución heterogénea de datos en la modelización de una posible intrusión durante una erupción volcánica, a partir de la inversión de datos de gravedad.

Para ello, se plantea una segunda parte del trabajo, en el que se realizará un estudio de técnicas de optimización metaheurísticas, más concretamente el PSO y las distintas variantes que han ido surgiendo, así como sus posibles aplicaciones en diversos ámbitos de Ciencias de la Tierra. Se implementarán diferentes variantes del algoritmo PSO y se analizarán los resultados de una simulación, a partir de datos sintéticos, de las estructuras corticales creadas en la zona volcánica en la isla de La Palma, estimando su incertidumbre en función de la variabilidad de los parámetros, así como la influencia de la distribución espacial de los datos, la interpolación realizada y el estudio previo de su variabilidad.

2. Geoestadística y técnicas de interpolación espacial

Para poder hablar de técnicas de interpolación espacial, primero debemos entender el término de geoestadística. Esta ciencia es una rama de la estadística que surgió en los años 60 y fue introducida por Matheron, que la definió como “la aplicación del formalismo de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales” (Matheron, 1962). Aunque en sus inicios fue particularmente aplicada a la explotación minera, en los últimos años las técnicas geoestadísticas han ampliado su aplicación a otras disciplinas como la hidrogeología, la meteorología, ciencias del suelo o protección ambiental, entre otras (Zúñiga et al., 2011).

La geoestadística está especializada en el análisis y la modelización de variables asociadas a una componente espacial, es decir, de las cuales conocemos datos referidos a localizaciones específicas mediante coordenadas. Se considera que entre estas variables existe una dependencia espacial, pues cuanto más cercanos estén situados dos puntos, mayor será la correlación entre estos.

Uno de los principales objetivos de la geoestadística es la interpolación. Esta se basa en la estimación de los valores desconocidos de una variable espacial a partir de otros valores ya conocidos. Estos métodos de interpolación recogen información y nos proporcionan resultados en forma de superficie estadística, esto es, una superficie continua con los valores interpolados a partir de la información de los puntos conocidos.

Cuanto mayor sea la cantidad de puntos de muestreo, se espera un mejor desempeño de las técnicas de interpolación. También es deseable tener una buena distribución de los datos en el área de estudio, pues dependiendo de cómo sea esta distribución obtendremos una mejor precisión y, por tanto, mejores resultados.

2.1. Clasificación de métodos de interpolación espacial

Podemos dividir los métodos de interpolación espacial en dos grandes grupos, los deterministas, que crean una superficie continua mediante el grado de similitud o suavizado utilizando solo las características geométricas de las observaciones puntuales, y los probabilísticos, que usan el concepto de aleatoriedad, permitiendo incluir la varianza en el proceso de interpolación y calcular la significación estadística de los valores predichos (Maglione et al., 2019). Un modelo determinista asocia a cada ubicación desconocida un solo valor estimado, mientras que un modelo probabilístico provee una serie de posibles valores con una probabilidad de ocurrencia (Velázquez, 2017).

Los modelos deterministas son métodos de interpolación aplicables cuando tenemos los datos suficientes para poder ajustarlos a funciones matemáticas de forma precisa y, por tanto, el objetivo será encontrar los parámetros que definen esa función matemática. Son relativamente sencillos de aplicar y en algunos casos bastante eficientes (Hengl, 2009; Rauthe et al., 2013), sin embargo, no suelen proporcionar medidas para el error cometido. Por ello, es conveniente que los mapas de interpolaciones de la variable estén acompañados con los correspondientes mapas de isolíneas de los errores y de las varianzas de predicción para poder identificar zonas de mayor incertidumbre en las predicciones (Giraldo, 2002).

Encontramos varios métodos de interpolación de tipo determinista, como el método de las distancias inversas ponderadas (más conocido como IDW por su nombre en inglés, Inverse Distance Weighting), el método Spline, las redes neuronales, la representación polinomial o el método de interpolación lineal, entre otros (Zúñiga et al., 2011).

Por otro lado, los métodos de interpolación probabilísticos infieren una gran cantidad de información utilizando las muestras disponibles (Maune, 2007; Hernández et al., 2013). Estos métodos constan de dos etapas, en la primera se determina una función que resume la estructura estadística del campo, la cual servirá de base para la determinación de los pesos que se usarán en la interpolación, y en la segunda etapa, se calculan los pesos de la aproximación a través de un proceso de optimización (Maglione et al., 2019).

Los métodos de interpolación probabilísticos más comunes son los métodos geoestadísticos derivados de la forma genérica de Kriging (Goovaerts, 1997; Hernández et al., 2013), de la cual hablaremos más adelante.

A su vez, las técnicas de interpolación también se pueden dividir en otros dos grandes grupos, globales y locales, que se distinguen por el conjunto de datos a considerar en cada caso (Li and Heap, 2014). Las técnicas globales calculan predicciones utilizando todo el conjunto de datos, mientras que las técnicas locales calculan predicciones a partir de un subconjunto de datos dentro de un área de estudio mayor.

Dentro de las técnicas globales encontramos, por ejemplo, el análisis de tendencia de superficies, un método determinista que se utiliza cuando el parámetro que nos interesa estimar tiene una variación continua en el área de estudio, la cual puede representarse mediante ecuaciones polinomiales (Zúñiga et al., 2011).

Un ejemplo de técnica local es el método de los polígonos de Thiessen, en el que se construyen polígonos alrededor de cada punto de muestreo y se supone que todos los puntos dentro de este tienen el mismo valor del punto base alrededor del que fue construido el polígono (Zúñiga et al., 2011). También existen otros métodos locales como el IDW o los splines, mencionados anteriormente.

Por otro lado, los métodos que preservan los valores originales en los puntos muestreados se conocen como interpoladores exactos, mientras que los que predicen un valor distinto del medido se denominan como inexactos. Estos últimos son útiles si queremos evitar picos o valles bruscos en la superficie de salida. Volviendo a los ejemplos anteriores, la técnica basada en la distancia inversa ponderada es un interpolador exacto, mientras que el análisis de tendencia de superficies se considera inexacto.

En este trabajo nos centraremos en los métodos de interpolación probabilísticos, pues nos interesa estudiar una gran cantidad de datos, incluyendo su varianza, de forma que nos den tanto una estimación de los puntos desconocidos situados en la zona de estudio como la probabilidad de error de esta. Desarrollaremos un método concreto de este tipo, el kriging y sus derivados. No obstante, como ya se ha comentado, previamente a la aplicación de la técnica de interpolación será necesario realizar un análisis geoestadístico de los datos que queremos interpolar. En el siguiente apartado explicaremos el procedimiento para llevar a cabo este análisis geoestadístico, para después poder aplicar lo obtenido a la técnica de interpolación elegida.

3. Análisis Geoestadístico

En el apartado anterior hemos introducido el concepto de geoestadística, pero ahora vamos a profundizar en su uso y aplicaciones.

El objetivo del análisis geoestadístico es describir el comportamiento de una variable en el espacio, para lo que se determina el grado de dependencia espacial que presentan las observaciones en relación con sus vecinos, así como la continuidad espacial de la superficie. Para ello, la geoestadística se basa en el cálculo de la semivarianza y el semivariograma. Estos se centran en una serie de desarrollos matemáticos conocidos, según Royle (1980), como teoría de las variables regionalizadas, que fue desarrollada por Matheron (1963) poco después de definir el término de geoestadística en la década de los sesenta (González et al., 2007).

Desde el punto de vista matemático, una variable regionalizada es tan solo una función $Z(x)$ que tiene un cierto valor para todas las coordenadas x en el espacio. De acuerdo con Ovalles (1992), es una función que describe un fenómeno natural geográficamente distribuido (González et al., 2007). Una variable de este tipo contempla un aspecto aleatorio que da

cuenta de las irregularidades locales y un aspecto estructurado que refleja tendencias de gran escala (Velázquez, 2017).

El semivariograma es un estimador no paramétrico que nos da la tasa media de cambio de un atributo con la distancia y se considera óptimo cuando se dispone de una malla regular de muestreo que sea representativa y la distribución sea normal. En estas condiciones el sesgo es el mínimo posible (Viera and González, 2002). El semivariograma mide el grado de autocorrelación entre los valores de un mismo atributo, es decir, describe cómo la semivarianza de las observaciones, que trataremos a continuación, varía con la distancia.

Debemos encontrar una estructura para realizar estudios geoestadísticos, para ello realizamos una serie de hipótesis sobre las funciones aleatorias, que son el conjunto de valores desconocidos que consideramos como un conjunto de variables aleatorias espacialmente dependientes. Primero debemos asumir que las variables son estacionarias, esto es, invariantes ante traslaciones respecto a una distancia h . Como es prácticamente imposible que esto se verifique siempre, solo pedimos que se cumpla para los momentos de primer y segundo orden, es decir, se tiene que cumplir que la media y la covarianza sean constantes. Se dice que una función aleatoria $Z(x)$ es estacionaria de segundo orden si se cumple que:

Su media $m(x)$ existe y no depende de x :

$$E[Z(x)] = m(x) = m \quad \forall x \quad (1)$$

Para cualquier par de variables aleatorias $Z(x)$ y $Z(x+h)$, su covarianza existe y sólo depende del vector de separación h :

$$C(h) = Cov(Z(x), Z(x+h)) = E[Z(x) \cdot Z(x+h)] - m^2 \quad (2)$$

La estacionaridad de la varianza implica que esta existe, es finita y no depende de x :

$$\sigma^2 = C(0) = Var[Z(x)] \quad (3)$$

Que la media sea la misma en todos los puntos implica que no existe una tendencia espacial. La varianza debe ser igual en toda la zona, lo que significa que la precisión será la misma en todos los puntos.

Para flexibilizar las condiciones anteriores, asumimos que los incrementos en la función aleatoria son débilmente estacionarios (hipótesis intrínseca), esto es, la media y la varianza de los incrementos $Z(x) - Z(x+h)$ existen y son independientes del punto x (Velázquez, 2017):

$$E[Z(x) - Z(x+h)] = 0 \quad (4)$$

$$Var[Z(x) - Z(x+h)] = E[(Z(x) - Z(x+h))^2] = 2 \cdot \gamma(h) \quad (5)$$

Esto significa que los puntos más cercanos entre sí tendrán una mayor probabilidad de ser similares que aquellos que se encuentran a mayor distancia.

$\gamma(h)$ se conoce como semivarianza y tiene la siguiente expresión:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Z(x_i) - Z(x_i+h))^2 = \frac{1}{2} E[(Z(x) - Z(x+h))^2] \quad (6)$$

tal que n es el número de pares $(Z(x_i), Z(x_i + h))$ separados a una distancia h .

Además, existe una relación directa entre la semivarianza y la función de covarianza:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (7)$$

Hasta ahora, solo se ha hablado de la distancia entre puntos, sin tener en cuenta la variación de las direcciones entre estos. Es importante hacer un estudio gráfico preliminar para ver si existe una posible tendencia espacial. Si vemos que las muestras se comportan de forma independiente a la dirección, decimos que la variable tiene un comportamiento isotrópico. En cambio, si tras la representación notamos que hay un comportamiento distinto en una determinada dirección, decimos que existe anisotropía. Es interesante realizar semivariogramas considerando por separado diferentes direcciones en el espacio. La construcción de semivariogramas anisotrópicos requiere un ángulo de tolerancia, de forma que todos los puntos de la parcela sean usados (Gallardo, 2006).

Una vez calculada la semivarianza para cada par de puntos, se representan gráficamente los valores medios de $\gamma(h)$ frente a los incrementos de distancia, obteniendo así el semivariograma experimental. Si queremos realizar predicciones tenemos que convertir el semivariograma experimental a uno teórico por medio del ajuste de un modelo estadístico. Estos modelos constan de los siguientes parámetros (Zúñiga et al., 2011):

1) La varianza total o *sill*, es la máxima semivarianza encontrada entre pares de puntos y debe coincidir con la varianza de la población. Se define como los valores asintóticos de la varianza y está dividida en dos. Por un lado, la varianza que representa la dependencia espacial y por otro lado, la varianza aleatoria o *nugget* que refleja la variación espacial en distancias muy cortas, así como, la varianza no explicada por los modelos o los posibles errores analíticos o de muestreo. 2) El rango (a), descrito como la máxima distancia en la cual los puntos de estudio son espacialmente dependientes. 3) Y, por último, la proporción de la varianza, definida por el cociente $\frac{C(h)}{C(0)+C(h)}$, está expresada a menudo en porcentaje y nos da el grado de variación espacial, y por tanto, el grado de incertidumbre a la hora de interpolar puntos en el espacio. Un alto cociente nos indica una variable espacialmente muy predecible (Gallardo, 2006).

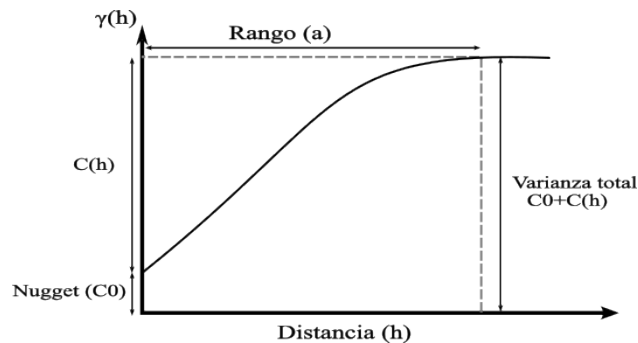


Figura 1: Parámetros de un semivariograma

Los modelos matemáticos más comunes para la estimación del semivariograma teórico son el esférico, el exponencial, el gaussiano y el lineal (Gallardo, 2006).

El modelo esférico muestra un comportamiento lineal a distancias de separación pequeñas cerca del origen, pero se va aplanando a mayores distancias y alcanza el *sill* cuando la distancia es igual al rango ($h = a$). Viene dado por la siguiente formulación:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^3, & \text{si } h \leq a \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (8)$$

El modelo exponencial alcanza el *sill* asintóticamente, llegando al 95% de este en $h = a$, con ecuación:

$$\gamma(h) = 1 - e^{-\frac{3h}{a}} \quad (9)$$

El modelo gaussiano, que al igual que el anterior, tiende a alcanzar el *sill* asintóticamente, y el rango corresponde a la distancia a la cual el variograma alcanza el 95% del “*sill*”.

$$\gamma(h) = 1 - e^{-\frac{3h^2}{a^2}} \quad (10)$$

Por último, el modelo lineal tiene la siguiente expresión:

$$\gamma(h) = C(0) + bh, \text{ siendo } b \text{ la pendiente de la recta.} \quad (11)$$

(Gallardo, 2006)

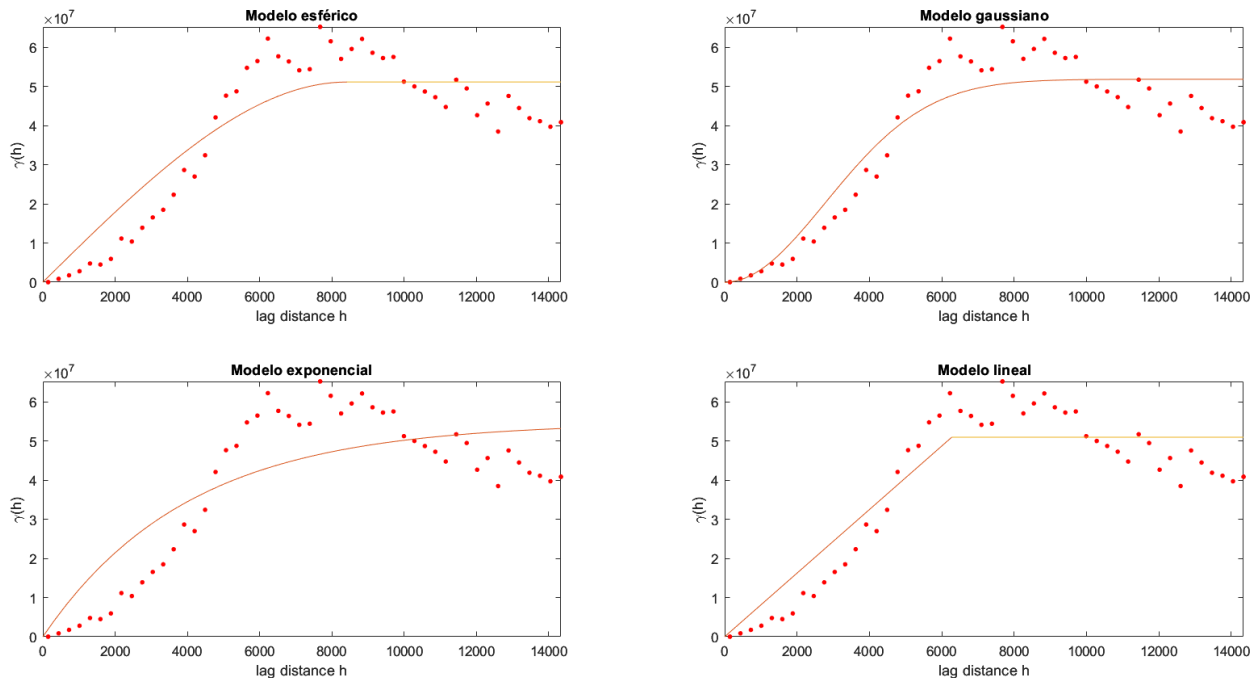


Figura 2: Ejemplos de modelos de variograma teórico. (Obtenidos a partir de datos gravimétricos tomados en la isla de La Palma).

Una vez determinado el semivariograma experimental, se ajusta al modelo teórico que mejor defina la varianza empírica. Este modelo teórico será el que finalmente se utilice en la interpolación, siendo, por ejemplo, necesaria su determinación para el método kriging.

4. Kriging

El método de interpolación conocido como kriging es una técnica local que ofrece el mejor estimador lineal insesgado a la hora de realizar estimaciones. Este término fue acuñado por Matheron, tras los trabajos de D. G. Krige (1919-2013), quién fue probablemente el primero en usarlo en el campo de la evaluación de yacimientos minerales. Es considerado el mejor estimador lineal insesgado porque se trata de una combinación lineal de información en la que los factores de ponderación se determinan de forma que la varianza de la estimación sea mínima, con error nulo, es decir, no hay sesgo en estos. Siendo, por esto, el kriging un método óptimo de estimación.

Es un interpolador exacto que consta de un efecto desagrupador de datos durante la estimación. Esto es muy útil cuando los datos están muy agrupados y repartidos de forma irregular. Además, tiene un efecto selectivo, lo que permite seleccionar las muestras más cercanas. El método consiste en una familia de algoritmos de regresión mediante mínimos cuadrados que utiliza el grado de autocorrelación espacial entre puntos de muestreo para obtener estimaciones de los sitios no medidos. Se asignarán pesos más bajos a las muestras más alejadas y más altos a las más cercanas.

Una de las mayores ventajas del kriging es que el resultado nos proporciona una medida de error o incertidumbre de la superficie estimada. Por lo que a cada punto estimado mediante este método se le puede asignar una distribución teórica que, además, nos da la posibilidad de realizar simulaciones probabilísticas que nos indican la probabilidad de que la variable alcance un determinado valor (Zúñiga et al., 2011). Conociendo el semivariograma y las observaciones originales, se puede conseguir un conjunto de realizaciones para mostrar el intervalo de valores posibles.

Las estimaciones de la gran mayoría de métodos de interpolación se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{Z}_k^* = \hat{Z}_k^*(x_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \quad (12)$$

donde \hat{Z}_k^* es el valor estimado de un atributo en el punto x_k , λ_i es el peso asociado a cada punto x_i , que depende de la variante de kriging y puede cambiar de un punto a estimar a otro, $Z(x_i)$ es el valor conocido en ese punto y n es el número de valores conocidos dentro de la región escogida para la interpolación. Esta región vendrá dada por el rango del semivariograma que, como hemos mencionado anteriormente, nos indica hasta dónde existe correlación espacial (Daya and Bejari, 2015).

Todas las variantes de kriging derivan de la fórmula general anterior de la siguiente forma:

$$\hat{Z}_k^*(x_k) - \mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i [Z(x_i) - \mu(x_k)] \quad (13)$$

Donde μ es una media estacionaria conocida (de los datos conocidos) que se asume constante en todo el dominio y $\mu(x_k)$ es la media de las muestras del área de estudio. Los

coeficientes λ_i son los pesos y se calculan con el fin de que la varianza sea mínima de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\hat{Z}_k^*(x_k) \right] &= \\
E \left[\left(\hat{Z}_k^*(x_k) - Z_k^*(x_k) \right)^2 \right] &= \\
E \left[\left(\hat{Z}_k^*(x_k) \right)^2 + \left(Z_k^*(x_k) \right)^2 - 2\hat{Z}_k^*(x_k)Z_k^*(x_k) \right] &= \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j)) + \text{Cov}(Z(x_k), Z(x_k)) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_j \text{Cov}(Z(x_i), Z(x_k)) &=
\end{aligned} \tag{14}$$

Las técnicas más comunes de kriging son variantes del kriging simple y del kriging ordinario, consideradas técnicas lineales. En el kriging simple la media de las muestras μ es conocida y constante en todo el área, es decir, se cumple la condición de estacionariedad. En cambio, en el kriging ordinario, la media μ es desconocida y, aunque sea constante, se consideran fluctuaciones locales de esta.

Al asumirse la media constante en el kriging simple, podemos reescribir la ecuación de la estimación de la siguiente manera:

$$Z_k^*(x_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \mu \tag{15}$$

Para el kriging simple no es necesario imponer la condición de que no exista sesgo, por lo que no tiene por qué cumplirse $1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Cuanto mayor sea el valor de $1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$, más se aproximará el estimador a la media.

Como para el kriging simple se tiene que asumir la condición de estacionariedad a nivel global, que a veces es demasiado restrictiva, es más común realizar las estimaciones con el método de kriging ordinario. Este solo requiere estacionariedad a nivel local, ya que se tienen en cuenta fluctuaciones locales de la media, forzando que $1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ y, por tanto, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Así, las estimaciones cambian proporcionalmente con las medias de los datos locales, lo que ya tiene en cuenta la posible tendencia en los valores estimados.

Existen extensiones de kriging en las que se añaden una o más variables auxiliares que estén relacionadas con la variable de estudio para intentar mejorar el resultado de la estimación. Se puede construir un semivariograma cruzado, donde la varianza representada no sea entre puntos de la misma variable, si no de una variable con respecto a otra.

Por tanto, para poder aplicar estos métodos tenemos que definir para cada par de puntos $Z_i(x)$, $Z_j(x)$, bajo la hipótesis de estacionariedad de segundo orden, la covarianza cruzada:

$$C_{ij}(h) = E[(Z_i(x+h) - m_i)(Z_j(x) - m_j)] \tag{16}$$

con $m_i = E[Z_i(x)]$ y $m_j = E[Z_j(x)]$ los valores esperados de las variables $Z_i(x)$ y $Z_j(x)$ respectivamente.

También tenemos que conocer la definición de semivariograma cruzado:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2}E[(Z_i(x+h) - Z_i(x))(Z_j(x+h) - Z_j(x))] \quad (17)$$

En el caso en que $i = j$, los momentos cruzados se convierten en la covarianza y semivarianza de la variable $Z_i(x)$ (Viera and González, 2002).

Una de estas extensiones es el co-kriging, aunque rara vez mejora la predicción del kriging, pues la información que tiene una variable sobre otra es siempre menor que la que tiene una variable sobre sí misma. Si una variable se ha muestreado con menor intensidad que otra, el co-kriging puede ser muy útil (Gallardo, 2006). Este método es más eficaz cuando las variables están altamente correlacionadas.

Si suponemos $Z_i(x), i = 1, \dots, n$ una serie de variables aleatorias estacionarias de segundo orden, dados los puntos de muestreo $x_j, j = 1, \dots, m$ y un punto no muestreado x , podemos estimar cada variable aleatoria $Z_i(x)$ mediante combinaciones lineales del resto de variables de la siguiente forma:

$$\hat{Z}_i(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^k Z_j(x_k) \quad (18)$$

de forma que $\sum_{k=1}^m \lambda_{ij}^k = 0$, si $i \neq j$; $\sum_{k=1}^m \lambda_{ij}^k = 1$, si $i = j$

Otro ejemplo de estos métodos multivariantes es el kriging con deriva externa (KED), que permite la predicción de una variable conocida sólo en un pequeño conjunto de puntos de la zona de estudio, a través de otra variable exhaustivamente conocida en la misma zona (Fernández Palomino and Lavado-Casimiro, 2014).

Estas técnicas de interpolación son ampliamente utilizadas en multitud de disciplinas como las ciencias ambientales, la agricultura, la localización de bolsas subterráneas de agua, etc. (Li and Heap, 2014; Zhou et al., 2007). En todas estas aplicaciones, a partir del análisis geoestadístico y la interpolación mediante kriging en sus diferentes variantes, se obtiene, para una variable regionalizada observada en unas determinadas localizaciones, una representación óptima (mapa) de acuerdo a una malla de puntos homogénea. Este mapa será de gran utilidad, no solo para la representación de los datos, si no que, además, tendrá una notable influencia en determinados estudios posteriores que se puedan hacer de los datos observados.

En concreto, centrándonos en el estudio gravimétrico que se plantea en este trabajo, la aplicación adecuada de la técnica de interpolación sobre los datos de gravedad observados es un paso previo esencial a la resolución del denominado problema gravimétrico inverso, planteado como un problema de optimización. Entre las diferentes técnicas de optimización que existen, las llamadas metaheurísticas han resultado ser una excelente alternativa para este tipo de estudios y su aplicación demostrará la eficacia de la interpolación de los datos efectuada.

De esta forma, y como ya se ha comentado en la introducción, describiremos a continuación, en primer lugar, las técnicas de optimización en un sentido genérico para, posteriormente, centrarnos en las técnicas metaheurísticas y su aplicación al PGI.

5. Técnicas de optimización

Tanto en el ámbito científico como en el empresarial o, incluso, en el día a día, surgen problemas en los que se busca mejorar algunas soluciones o procedimientos de los que pretendemos obtener algún beneficio. El concepto de optimización se centra en el estudio de este tipo de problemas, que en muchas ocasiones resultan muy complejos.

Si somos capaces de modelar de forma matemática problemas de la vida real como, por ejemplo, la ganancia o pérdida de beneficios en un entorno empresarial, la coordinación de horarios de algunos transportes, la velocidad o distancia de un problema físico, etc., la optimización puede proporcionar un marco adecuado para la gestión adecuada y eficaz de estas situaciones (Luenberger et al., 1984). Uno de los ejemplos más relevantes en este ámbito es el problema del viajante. Este se basa en el modelado de una ruta que ha de seguir una persona que debe pasar por un número de ciudades una única vez, de forma que la distancia recorrida sea mínima.

En general, los problemas de optimización vienen dados por tres parámetros (\mathcal{S}, Ω, f) :

- \mathcal{S} es el espacio de búsqueda, definido sobre un conjunto finito de variables de decisión $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. En el caso de que estas variables tengan dominios discretos, estamos ante un problema de optimización discreto (u optimización combinatoria) y, en el caso de dominios continuos, el problema se denomina de optimización continua. También existen problemas de variables mixtas.
- Ω define el conjunto de restricciones de las variables, es decir, especifica los espacios factibles de estas. La definición de estas restricciones dependerá de la formulación del problema al que nos enfrentemos.
- Por último una función $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$, llamada función objetivo, que buscamos optimizar, es decir, maximizar o minimizar. Queremos encontrar una solución $s \in \mathcal{S}$ tal que, si el problema es de minimización se cumpla $f(s) \leq f(s') \forall s' \in \mathcal{S}$ y si el problema es de maximización se cumpla $f(s) \geq f(s') \forall s' \in \mathcal{S}$.

Esta función objetivo no tiene por qué ser única sino que también es posible usar varias funciones objetivo al mismo tiempo. Esta forma de optimización se denomina optimización multiobjetivo (Blum and Merkle, 2008). Por ejemplo, en muchos estudios de localización de estructuras subsuperficiales se combina información gravimétrica con información magnética.

Si tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales, nos encontramos ante un problema de programación lineal. En caso contrario el problema se considera de programación no lineal. Las formulaciones lineales son más populares, debido a que son más sencillas de definir. A veces, aunque la función objetivo no sea puramente lineal, se define el problema como lineal, pues es más sencillo esto que decidir sobre alguna otra forma funcional más compleja.

Podemos clasificar los distintos algoritmos de optimización en algoritmos locales y globales. Los algoritmos de optimización global presentan grandes ventajas en comparación con la optimización local, pues como en la optimización local el espacio de búsqueda de soluciones

se reduce, es más probable que dejemos alguna solución del problema fuera de esta zona de búsqueda. Además, la optimización global no requiere un modelo inicial predefinido y puede resolver problemas con funciones objetivo complicadas.

Por otro lado, podemos clasificar estos métodos de optimización en determinísticos y probabilísticos. Los métodos determinísticos han probado tener una rígida garantía de éxito, pero se necesita que la función objetivo satisfaga ciertas condiciones como, por ejemplo, continuidad, diferenciabilidad de segundo orden, etc.

Los métodos probabilísticos, en cambio, solo pueden garantizar convergencia en el sentido probabilístico, pero tienen como mayor ventaja que no hay que imponer restricciones a la naturaleza de la función, pudiendo así ser empleados cuando la función es discontinua o cuando la información acerca de la derivada se dificulta o es imposible de obtener (Gotay-Sariñas and Junco-Bernázar, 2003).

A veces los problemas a resolver son muy complejos y no se puede obtener una solución exacta en un tiempo de computación razonable, por lo que debemos recurrir a algoritmos probabilísticos que nos proporcionen una buena solución aproximada, aunque no sea la mejor solución óptima posible. Estos algoritmos de optimización se centran en las denominadas técnicas heurísticas y metaheurísticas.

5.1. Técnicas de optimización heurísticas y metaheurísticas

En el mundo de la Investigación Operativa, se califica de heurístico a un procedimiento para el que se tiene un alto grado de confianza en que encuentra soluciones de alta calidad con un coste computacional razonable, aunque no se garantice su optimalidad o su factibilidad, e incluso, en algunos casos, no se llegue a establecer lo cerca que se está de dicha situación. Se usa el calificativo heurístico en contraposición a exacto (Melián et al., 2003).

De esta forma, la aplicación de métodos heurísticos se podría enfocar hacia diferentes objetivos: 1) que sirviera para generar una buena solución a un problema complejo, 2) que dada una solución inicial, el método heurístico participara en un paso intermedio del procedimiento para tratar de mejorarla, 3) que la solución del método heurístico sirviera como solución inicial para después aplicar un método de optimización local.

Una ventaja de la heurística frente a las técnicas que buscan la solución exacta es que, por lo general, permiten mayor flexibilidad en las características del problema. Aunque, como no está garantizado que se llegue a un óptimo, se debe de medir la calidad de los resultados, evaluando la eficiencia del algoritmo para poder determinar su valía frente a otros.

Existen técnicas heurísticas más generales o específicas que otras. Los modelos específicos se diseñan a propósito para cada problema concreto, utilizando toda la información disponible y el análisis teórico del modelo. Si estos procedimientos están bien diseñados, suelen tener un rendimiento significativamente más alto que las heurísticas generales. Por otro lado, las heurísticas generales presentan ventajas como la sencillez, adaptabilidad y robustez de los procedimientos (Melián et al., 2003).

El término de metaheurística surge como una estrategia para diseñar o mejorar procedimientos heurísticos muy generales con un alto rendimiento. Este término apareció por primera vez en el artículo sobre la búsqueda *tabú* de Glover (1986). A partir de entonces, han surgido multitud de propuestas para diseñar buenos procedimientos para resolver ciertos problemas que, al ampliar su campo de aplicación, han adoptado la denominación de metaheurísticas.

Existen muchos tipos de metaheurísticas que se establecen, en primer lugar, en función del tipo de procedimientos a los que se refieren. Los fundamentales son las metaheurísticas de relajación, las metaheurísticas para los procesos constructivos, las metaheurísticas para las búsquedas por entornos y las metaheurísticas para los procedimientos evolutivos.

Los métodos de relajación son aquellos en los que se utilizan modificaciones del modelo original, de forma que el problema se vuelva más sencillo de resolver y cuya solución facilite la búsqueda de la solución del problema original. Las metaheurísticas constructivas se centran en los procedimientos que tratan de obtener una solución a partir del análisis y selección gradual de las componentes que la forman.

Las metaheurísticas de búsqueda para resolver problemas de optimización realizan recorridos sobre el espacio de las soluciones alternativas y seleccionan la mejor solución encontrada en cada recorrido. Esto se hace partiendo de una situación inicial y aplicando iterativamente una operación para modificar la situación actual, hasta que se alcance la situación buscada. Por último, las metaheurísticas evolutivas están enfocadas a los procedimientos basados en conjuntos de soluciones que evolucionan sobre el espacio de soluciones (Melián et al., 2003).

Algunas técnicas surgen combinando distintos tipos de metaheurísticas, como la metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) (Resende and Ribeiro, 2003), que combina una fase constructiva con una fase de búsqueda de mejora. Otras metaheurísticas se centran en el uso de algún tipo de recurso computacional o formal especial como las redes neuronales, los sistemas de hormigas o la programación por restricciones. Estas no se incluyen claramente en ninguno de los cuatro tipos anteriores (Melián et al., 2003).

Por otro lado, de una u otra forma, todas las metaheurísticas se pueden entender como estrategias aplicadas a procesos de búsqueda, donde todas las situaciones intermedias en el proceso de resolución del problema se interpretan como elementos de un espacio de búsqueda, que se van modificando a medida que se aplican las distintas operaciones diseñadas para llegar a la resolución definitiva (Melián et al., 2003).

En estas técnicas de búsqueda iterativas, se establece un criterio de parada que determina cuándo se considera resuelto el problema sin que sea necesario disponer, en una situación intermedia, de información de lo cerca que se está de solucionarlo. Sin embargo, en las búsquedas inteligentes deben utilizar este y otro tipo de información para establecer el criterio de parada y la selección de los movimientos.

En el procedimiento de búsqueda, hay dos características importantes que debemos tener en cuenta, las capacidades de exploración y de explotación. La exploración se refiere a la

capacidad del método para explorar las diferentes regiones del espacio de búsqueda para alcanzar la zona en la que se encuentra la solución del problema. Por otro lado, la explotación se refleja en el esfuerzo y la capacidad de mejorar las soluciones con las que trabaja el procedimiento. Estas dos características deben modularse adecuadamente para conseguir precisión y una convergencia más rápida del algoritmo de optimización (Melián et al., 2003).

Existen muchas técnicas heurísticas para resolver todo tipo de problemas de optimización. Algunas de las más utilizadas son, por ejemplo, los algoritmos genéticos, que se basan en el comportamiento evolutivo de sistemas biológicos. Estos son capaces de resolver problemas no lineales complejos simplemente mediante un muestreo directo en el espacio solución. Trabajan modificando una población de soluciones en lugar de una sola solución, lo que permite explorar diferentes áreas del espacio de búsqueda al mismo tiempo, reduciendo la posibilidad de que la solución quede atrapada en un mínimo local (Gotay-Sariñas and Junco-Bernázar, 2003).

También se han desarrollado muchas técnicas heurísticas y metaheurísticas basadas en la inteligencia por enjambre (SI) que se caracterizan por una forma de trabajo descentralizada que imita el comportamiento de enjambres de insectos sociales, bandadas de pájaros o bancos de peces. Tenemos dos ejemplos relevantes en este ámbito: la optimización por colonias de hormigas (ACO) y la optimización por enjambre de partículas (PSO), que trataremos en el siguiente capítulo.

En el caso de la gravimetría, una de las aplicaciones más interesantes de las técnicas de optimización es la resolución del problema gravimétrico inverso (PGI), en el que profundizaremos en los siguientes capítulos. Este se plantea como un problema de optimización para estudiar la distribución de las estructuras subsuperficiales de una zona de estudio a partir de datos de gravedad observados, que producen un campo de anomalías gravimétricas.

En este ámbito, en las últimas décadas se han desarrollado muchos trabajos como, por ejemplo, Montesinos et al. (2005); Amjadi and Naji (2013); Kaftan (2017), recurrieron al algoritmo genético para determinar la profundidad de estructuras subsuperficiales; (Singh and Biswas, 2016; Roshan and Singh, 2017; Essa and Géraud, 2020) contribuyeron en el desarrollo de técnicas basadas en el PSO, etc. (Roy and Kumar, 2021).

Además de los mencionados anteriormente, existen muchos más métodos, pero en este trabajo nos centraremos en las técnicas basadas en la inteligencia por enjambre, más concretamente en el PSO, pues es uno de los métodos más utilizados en el estudio de problemas de inversión gravimétrica.

6. Métodos de inteligencia por enjambre (SI)

6.1. Antecedentes

El concepto de inteligencia por enjambre surge del estudio del comportamiento conjunto de algunos grupos de animales y fue utilizado por primera vez por Beni (1988) en el contexto de sistemas robóticos celulares, donde agentes simples se organizaban a través de la

interacción con el vecino más cercano. Como veremos, el término inteligencia por enjambre se utiliza en un campo de investigación mucho más amplio.

Las técnicas de optimización inspiradas en la inteligencia por enjambre se han vuelto cada vez más populares durante los últimos años, ya que al estar enfocadas en el comportamiento de grupos de animales, presentan grandes ventajas frente a las técnicas tradicionales, como es la solidez o flexibilidad de estas. Estas propiedades hacen que las técnicas basadas en la inteligencia por enjambre proporcionen un diseño exitoso para algoritmos que abordan problemas cada vez más complejos (Blum and Merkle, 2008).

Una de las técnicas más relevantes en este ámbito es la optimización por colonias de hormigas (ACO) que fue propuesta por Marco Dorigio a principios de la década de 1990 y simula el comportamiento natural de búsqueda de alimento de las hormigas, que son capaces de encontrar el camino más corto desde el hormiguero hasta la fuente de alimento.

Las hormigas viven en colonias y cooperan para lograr una supervivencia conjunta del grupo. Cuando estos insectos comienzan a buscar comida, recorren los alrededores de su hormiguero de forma aleatoria y van liberando feromonas. Cuando una hormiga encuentra una fuente de alimento, evalúa la calidad y la cantidad de esta y lleva parte de la comida encontrada hasta el hormiguero. Durante este camino de vuelta, la hormiga libera una cantidad de feromonas que será proporcional a la calidad y cantidad de la comida. El resto de hormigas pueden oler estas feromonas, de forma que cuando elijan qué camino seguir, se guiarán por el que contenga mayor concentración de feromonas (Blum and Merkle, 2008).

El modelado de este comportamiento funciona excelentemente en problemas de optimización combinatoria como, por ejemplo, el problema del viajante o el problema de asignación cuadrática (Liu et al., 2013). Tiene una buena capacidad de optimización y algunas características excelentes como robustez o implementación paralela.

Otro gran ejemplo es el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) que fue propuesto por Kennedy and Eberhart (1995) y se basa en el comportamiento social de distintos grupos de animales como bandadas de pájaros o bancos de peces (Singh and Biswas, 2016). Esta analogía ha servido para introducir el modelo continuo del PSO y deducir toda una familia de algoritmos PSO utilizando diferentes esquemas de diferencias finitas. Desarrollaremos estos algoritmos en detalle a continuación.

6.2. Método PSO

Los algoritmos de optimización PSO son algoritmos globales metaheurísticos que tienen muchas aplicaciones en trabajos de ciencia e ingeniería (Roy and Kumar, 2021). Son muy útiles debido a que no necesitan muchos parámetros de control y, por tanto, se utilizan en problemas complejos aplicados a la vida real como procesamiento de imágenes, minería de datos, inversión de campos potenciales, etc.

Cuando aplicamos un método PSO, buscamos optimizar una función objetivo o error, es decir, buscamos acercarnos a la mejor solución posible para nuestro problema. Para ello, definimos el espacio de posibles soluciones y consideramos una población de partículas

$i = 1, \dots, n$, conocida como enjambre, que está repartida por este espacio. Cada i -partícula contiene unos valores distintos de los parámetros del modelo y es una solución candidata para el problema de optimización. Cada una de estas se mueve por el espacio de soluciones según avanza el algoritmo en busca de la mejor solución y consta de un vector \mathbf{x}_i que almacena los parámetros que definen su posición (posible solución), así como de un vector velocidad asociado \mathbf{v}_i , que es el que establece la variación de las posibles soluciones según avanza el algoritmo.

La velocidad \mathbf{v}_i se modifica iterativamente en función de la mejor posición individual de la partícula i encontrada hasta el momento (\mathbf{p}_i) y la mejor posición encontrada por el conjunto de partículas (\mathbf{p}_g), que corresponden a las posiciones que devuelven los valores más bajos de la función objetivo, ya que estamos buscando minimizarla. Como resultado, cada partícula busca alrededor de una región definida por su mejor posición personal y la mejor posición de su entorno, acercándose cada vez más a la zona que contiene las mejores soluciones (Blum and Merkle, 2008).

En los algoritmos PSO, para un grupo de partículas $i = 1, \dots, n$, los vectores \mathbf{v}_i y \mathbf{x}_i tienen un valor $\mathbf{v}_i(t)$ y $\mathbf{x}_i(t)$ respectivamente para un tiempo t dado y se actualizan para $t + 1$ de acuerdo a las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{v}_i(t + 1) = \mathbf{v}_i(t) + c_1 \cdot R_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i(t)) + c_2 \cdot R_2 \cdot (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_i(t)) \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_i(t + 1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t + 1) \quad (20)$$

siendo R_1 y R_2 dos funciones que devuelven un valor arbitrario comprendido en el intervalo $[0, 1]$ y c_1, c_2 los coeficientes de aceleración del modelo.

La ecuación (19) muestra que el movimiento de cada partícula i está determinado por tres partes: el impulso, la parte cognitiva y la parte social. El impulso viene dado por la velocidad de la iteración anterior $\mathbf{v}_i(t)$. Este término se utiliza para transportar la partícula en la dirección en la que ha viajado hasta ese momento.

La parte cognitiva, $c_1 \cdot R_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i(t))$, representa la tendencia de la partícula a volver a la mejor posición que ha visitado hasta el momento. Y, por último, la parte social, $c_2 \cdot R_2 \cdot (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_i(t))$, representa la tendencia de la partícula a ser atraída hacia la mejor posición encontrada por todo el enjambre (Blum and Merkle, 2008).

Estudios anteriores han demostrado que la velocidad definida en la ecuación (19) puede exceder los límites del espacio de búsqueda, teniendo una mayor probabilidad de ocurrir esto cuando una partícula está lejos de la mejor posición individual de la partícula i encontrada hasta el momento (\mathbf{p}_i) y de la mejor posición encontrada por las partículas en su vecindad (\mathbf{p}_g) (Blum and Merkle, 2008).

Hay varias formas de solucionar este problema, una de ellas es utilizar un método de fijación de velocidad, estableciendo un valor máximo $\mathbf{v}_i^{\max}(t)$ para cada velocidad $\mathbf{v}_i(t)$. Este método limita el tamaño de paso de las partículas, evitando una mayor divergencia entre estas, pero no impide necesariamente que estas abandonen el espacio de búsqueda ni asegura la convergencia.

Otra forma de abordar este problema es utilizar un coeficiente de inercia w que controle la velocidad $\mathbf{v}_i(t)$. Podemos así reescribir la ecuación (19) como:

$$\mathbf{v}_i(t+1) = w \cdot \mathbf{v}_i(t) + c_1 \cdot R_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i(t)) + c_2 \cdot R_2 \cdot (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_i(t)) \quad (21)$$

La elección del término de inercia w es crucial para optimizar la función objetivo. Para $w > 1$, las velocidades aumentan con el tiempo, lo que provoca que las partículas diverjan eventualmente más allá de los límites del espacio de búsqueda. En cambio, para $w < 0$, las velocidades disminuyen con el tiempo, consiguiendo así una probabilidad más alta de que el método converja.

Si tomamos un valor alto del término de inercia conseguiremos una búsqueda global, en cambio, si tomamos un valor más bajo la búsqueda será local. Este valor se puede tomar fijo o se puede ir variando según avanza el algoritmo. Shi and Eberhart (1998) sugirieron el uso de un sistema variable en el tiempo, disminuyendo gradualmente el valor del coeficiente w desde 0.9 hasta 0.4. Esto ayuda a que el algoritmo no quede atrapado en un mínimo local al comenzar la búsqueda, así como a evitar la divergencia después (Singh and Biswas, 2016).

Una forma de reducir este término de inercia linealmente en cada iteración $t+1$, es fijar unos valores w_{max} y w_{min} del término de inercia y aplicar la siguiente expresión:

$$w(t+1) = w_{max} - \left(\frac{w_{max} - w_{min}}{t_{max}} \right) \cdot t \quad (22)$$

siendo t_{max} el número máximo de iteraciones establecido (Xin et al., 2009).

Cuando se implementa el algoritmo, debemos fijar los coeficientes de aceleración c_1 y c_2 y establecer el término de inercia w , ya sea como constantes o variables en el tiempo. Perez and Behdinan (2007) demostraron que los modelos PSO convergen únicamente si se cumplen las siguientes condiciones:

$$0 < c_1 + c_2 < 4 \quad (23)$$

$$\left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right) - 1 < w < 1 \quad (24)$$

Además, hay que fijar otros dos parámetros que definirán la efectividad y el tiempo de ejecución del método. Por un lado, hay que establecer el número máximo de iteraciones (t_{max}). Por otro lado, se fija un valor predefinido deseado o tolerancia para la función objetivo. El algoritmo PSO finalizará, bien cuando se alcanza el número máximo de iteraciones fijado por el usuario (t_{max}), o bien, cuando se alcanza el valor de error predefinido.

Tras la propuesta de los algoritmos PSO por parte de Kennedy and Eberhart (1995), surgieron muchas variantes para acelerar la convergencia y evitar que la solución quede atrapada en un mínimo local. Una de estas propuestas es la variación progresiva del término de inercia que propusieron Shi and Eberhart (1998), mencionada anteriormente. Otro ejemplo es el PSO jerárquico con coeficientes de aceleración variables en el tiempo (HPSO-TVAC), que fue propuesto por (Ratnaweera et al., 2004).

El método HPSO-TVAC incluye una variación temporal de los coeficientes de aceleración, teniendo así en cuenta el comportamiento social y cognitivo de las partículas para mejorar la convergencia y estabilidad de la solución (Pace et al., 2021).

En esta variante del PSO, los coeficientes de aceleración se toman de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$c_1(t+1) = c_1^{max} - (c_1^{max} - c_1^{min}) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) \quad (25)$$

$$c_2(t+1) = c_2^{min} + (c_2^{max} - c_2^{min}) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) \quad (26)$$

donde $c_j(t+1)$, $j = 1, 2$, son los coeficientes de aceleración para la iteración $t+1$, c_1^{max} , c_2^{max} son los valores máximos fijados para la componente cognitiva y social respectivamente, y c_1^{min} , c_2^{min} son los valores mínimos fijados para la componente cognitiva y social respectivamente. t_{max} es el número máximo de iteraciones establecido.

Más ejemplos relevantes en términos de convergencia y aceleración son el PSO cuadrático híbrido (Ying et al., 2006), el PSO adaptativo (Zhan et al., 2009) o el PSO de evolución de diferencia individual (Gou et al., 2017).

También se han propuesto variantes para poder aplicar este método a problemas no continuos. Por ejemplo, Kennedy y Eberhart desarrollaron un método PSO binario simple, alterando el término de velocidad considerado en el PSO genérico en un umbral de probabilidad para determinar si \mathbf{x}_i toma el valor 0 o 1 (Blum and Merkle, 2008).

Además, se puede ampliar el método PSO para resolver problemas de optimización discretos o mixtos (con variables continuas y discretas). Para ello, simplemente es necesario discretizar los valores después de usarlos en las ecuaciones de actualización de velocidad y posición. Clerc (2010) proporcionó varios ejemplos del PSO aplicados a problemas combinatorios como el problema de la mochila, el problema del viajante y el problema de asignación cuadrática.

En el ámbito de la geodesia y la geofísica, el algoritmo PSO se ha utilizado para estudiar diferentes situaciones como problemas hidrológicos (Chau, 2008) o inversión de ondas sísmicas (Yuan et al., 2009). En este estudio, como veremos en el siguiente capítulo, lo aplicaremos a la inversión de datos gravimétricos.

7. Aplicación del PSO al Problema Gravimétrico Inverso

7.1. Introducción al Problema Gravimétrico Inverso

Como hemos visto, el PSO tiene infinidad de aplicaciones en campos muy diversos. En este trabajo nos centraremos en la aplicación de este método de optimización a estudios geodésicos, más concretamente a la búsqueda de estructuras internas localizadas en el subsuelo de una zona volcánica basándonos en datos de gravedad.

En este trabajo no se abordan las definiciones y conceptos básicos sobre medidas de gravedad, información que se puede consultar en otra bibliografía como, por ejemplo, en el libro (Torge, 1983), si no que se realizará una interpretación de datos gravimétricos en un caso de estudio concreto. La interpretación de datos de gravedad es útil para explorar regiones que tienen diferentes estructuras geológicas subsuperficiales como, por ejemplo, depósitos de petróleo, diques de magma, acuíferos, etc. (Singh and Biswas, 2016; Montesinos et al., 2023)

El estudio de datos gravimétricos para la modelización de estructuras corticales se puede abordar desde dos enfoques, dependiendo de la información de la que dispongamos y la finalidad de nuestro estudio. Si conocemos los parámetros de las estructuras subsuperficiales, como su forma, tamaño, distribución de densidades, etc., podemos calcular la anomalía de la gravedad generada por estas, mediante la obtención de la atracción gravitatoria a partir del problema gravimétrico directo (PGD).

En cambio, si desconocemos las características de estos cuerpos perturbadores, pero conocemos una serie de puntos de gravedad en la zona de estudio, podemos calcular la anomalías gravimétricas generadas por estos cuerpos que, a su vez, podemos modelar e intentar identificar mediante cuerpos de geometría sencilla. Este enfoque se denomina problema gravimétrico inverso (PGI) y es el que abordaremos en esta sección.

Los datos de gravedad estimados para un modelo de estructuras se obtendrán mediante la aplicación del problema gravimétrico directo. Para ello, se elige el cuerpo que más se pueda parecer a la estructura buscada y se dan unos valores aproximados de sus parámetros, es decir, la posición central del cuerpo, la forma, la profundidad, la densidad, la inclinación, etc. Después, se calcula la anomalía gravimétrica producida por estos en los mismos puntos en los que se tomaron las medidas de gravedad. El valor de estos parámetros se va variando, hasta que las anomalías gravimétricas calculadas para el cuerpo sean lo más cercanas posibles a los valores observados.

El procedimiento de optimización juega un papel clave en el problema gravimétrico, como en la mayoría de las demás ciencias naturales y aplicadas. Sin embargo, la naturaleza no uniforme y compleja del interior de la Tierra complica el planteamiento del problema. Además, debido a la existencia de contenido de ruido en los datos y a un número insuficiente de puntos de observación en la mayoría de los casos, la optimización del conjunto de datos gravimétricos es considerablemente complicada y, por tanto, las soluciones suelen ser ambiguas y propensas a errores (Ekinici et al., 2020).

Para resolver el problema de la insuficiencia de puntos de observación, podemos recurrir a técnicas de interpolación como el kriging, mencionado en los apartados anteriores, para obtener una malla de puntos de la zona de muestreo, logrando así conocer una mayor información de la zona de estudio, consiguiendo un mejor rendimiento en la posterior aplicación de métodos de optimización.

Por otro lado, la naturaleza mal planteada de los problemas de modelado inverso da lugar a soluciones inestables y, por tanto, posibles cambios menores en los datos medidos pueden dar lugar a perturbaciones notables en las soluciones que afectan fuertemente la estabilidad del modelo. Además, como consecuencia del Teorema de Stokes, las soluciones

de este problema no son únicas. Este desafiante problema de no unicidad puede resolverse utilizando información geofísica o geológica a priori y restricciones ya conocidas sobre los valores de las variables (Ekinici et al., 2020).

Por tanto, establecer las variables de decisión, las restricciones a las que estarán sujetas y la función objetivo serán determinantes en el planteamiento del problema y su posterior resolución. La función objetivo considerada en este tipo de estudios, debe medir el error entre los datos de gravedad estimados y observados.

7.2. Planteamiento del método PSO aplicado al PGI

Cuando planteamos el problema gravimétrico inverso, asumimos conocida la anomalía gravimétrica en una serie de puntos repartidos por la zona de estudio, que llamaremos g_j^{obs} , para cada punto de observación $j = 1, \dots, m$.

En el problema gravimétrico inverso, los parámetros a estimar son aquellos que definen el cuerpo de geometría sencilla que elijamos en cada caso de estudio. Se toman valores aproximados de estos parámetros y se calcula la anomalía gravimétrica que producen en los puntos observados. Es decir, cuando planteamos un problema gravimétrico inverso, primero tenemos que definir el problema directo.

Este problema directo nos da una estimación de la anomalía gravimétrica $g_j^c(\mathbf{m})$ calculada en cada punto $j = 1, \dots, m$, para un vector de parámetros \mathbf{m} , es decir, es una función de los parámetros que definen la posición y características del cuerpo tomado, siendo \mathbf{m} el vector de parámetros considerados en cada estudio.

Algunas de las geometrías más utilizadas en este tipo de problemas son esferas y cilindros, ya que calcular las anomalías gravimétricas producidas por estas es bastante sencillo. Sin embargo, en este estudio en el que trabajamos en entornos volcánicos, se estimarán las anomalías gravimétricas producidas por un prisma inclinado, pues esta forma es la más parecida a un dique de magma o a un *sill*. En la Sección 8, cuando desarrollemos el caso de estudio concreto, se especificarán las fórmulas necesarias para calcular estas anomalías.

En lo que respecta a función objetivo, esta define el desajuste entre los datos de gravedad medidos y calculados. A su vez, debe incluir los parámetros del modelo (profundidad, densidad, inclinación, etc, del cuerpo elegido). Estos parámetros aparecen de forma implícita, ya que son necesarios para el cálculo de la anomalía gravimétrica.

Podemos utilizar distintas funciones objetivo para abordar este problema de optimización. Considerando n el número de partículas, g_j^{obs} la gravedad observada y $g_j^c(\mathbf{m}_t)$ la gravedad calculada en cada punto de observación j , para los parámetros \mathbf{m}_t que varían en cada iteración t , distintos autores definen las siguientes funciones para cada instante t (Essa and Elhussein, 2018; Roy and Kumar, 2021):

$$f_t(\mathbf{m}_t) = \frac{2 \sum_{j=1}^n |g_j^{obs} - g_j^c(\mathbf{m}_t)|}{\sum_{j=1}^n |g_j^{obs} - g_j^c(\mathbf{m}_t)| + \sum_{j=1}^n |g_j^{obs} + g_j^c(\mathbf{m}_t)|} \quad (27)$$

$$f_t(\mathbf{m}_t) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (g_j^{obs} - g_j^c(\mathbf{m}_t))^2} \quad (28)$$

$$f_t(\mathbf{m}_t) = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (g_j^{obs} - g_j^c(\mathbf{m}_t))^2}}{g_{max}^{obs} - g_{min}^{obs}} \quad (29)$$

En general, la función objetivo se caracteriza principalmente por presentar múltiples colinas y valles (máximos y mínimos). Nosotros buscamos encontrar el mínimo global, que es el mínimo de todos los valles y es único. Al utilizar un método de búsqueda metaheurístico en el espacio modelo, se pueden evitar mínimos locales sin requerir un modelo inicial bien construido (Ekinici et al., 2020).

En el siguiente apartado se plantea el caso de estudio para analizar la eficacia de las técnicas de interpolación y de optimización tratadas en este trabajo, es decir, el kriging y el PSO. Se realizarán varias pruebas del algoritmo PSO para los datos de gravedad observados, en las que se utilizarán diferentes condiciones iniciales, así como diferentes modelados del algoritmo que se explicarán en el siguiente apartado. Tras esto, se realizará una interpolación de los datos observados, para una posterior aplicación del algoritmo de optimización a los resultados obtenidos. Para terminar, se realizará una comparación del mapa obtenido en la interpolación, frente a los resultados calculados a partir del método de optimización.

8. Caso de estudio

El fin de este estudio es encontrar la localización de los distintos diques y *sills* existentes en una zona volcánica en la que se ha producido una erupción recientemente, a partir de los datos gravimétricos observados en la superficie topográfica. Para ello resolveremos el correspondiente problema gravimétrico inverso. Se llevará a cabo una simulación de la existencia de un dique y un *sill* en la isla de La Palma, ya que es una zona de gran interés debido a la erupción producida en 2021. Este caso ha sido tratado por varios autores como Montesinos et al. (2023).

Los diques surgen por la presión que ejerce el magma sobre el terreno. Se crea una grieta que después se ensancha, convirtiéndose en un conducto por el que asciende el magma. Pueden ser verticales o estar inclinados. Por otro lado, los *sills* son regiones horizontales en las que se almacena este magma.

Como hemos mencionado en el apartado anterior (Apartado 7), la forma que más se asemeja a un dique es un prisma inclinado, por lo que plantearemos el problema gravimétrico directo para un prisma inclinado en 3 dimensiones, con el fin de calcular las anomalías gravimétricas producidas por este y compararlas con las observadas. Para el *sill* podemos aplicar el mismo planteamiento que para el dique, pero en este caso se considera una inclinación de $\varphi = 90^\circ$, consiguiendo así un prisma rectangular.

El cálculo de anomalías gravimétricas generadas por estructuras tridimensionales se ha abordado en varias ocasiones de diferentes formas como, por ejemplo, mediante el uso de nomogramas (Sharma, 1972), gráficos de puntos (Morgan and Faessler, 1972), tablas (Sharma, 1971), o aproximaciones de láminas horizontales (Talwani and Ewing, 1960) o de cubos (Botezatu et al., 1971).

Nagy (1966) presentó la expresión analítica para el cálculo de la anomalía gravimétrica producida por un prisma rectangular, correspondiente a la atracción gravitatoria de este cuerpo. Tiempo después, Hjelt (1974) desarrolló la fórmula analítica para calcular la anomalía gravimétrica producida por un prisma tridimensional inclinado. En este trabajo nos basamos en el último artículo mencionado para desarrollar estas fórmulas.

8.1. Anomalía gravimétrica producida por un prisma inclinado

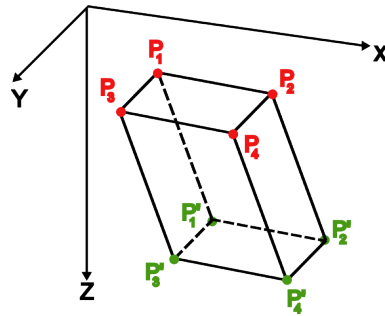
Partimos de que las 6 caras del prisma son las bases superior e inferior, dos superficies opuestas verticales y dos superficies opuestas inclinadas. Además, se asume que el prisma es homogéneo, es decir, la densidad es constante en todo el cuerpo.

Definimos un sistema de coordenadas rectangular tridimensional, de forma que el eje Z es positivo hacia abajo, el eje X es horizontal (paralelo a las bases del prisma) y positivo en la dirección de la cara superior inclinada y, por último, el eje Y es también paralelo a las bases y perpendicular a ambos ejes. En la Figura 3 se puede ver gráficamente para una mejor comprensión.

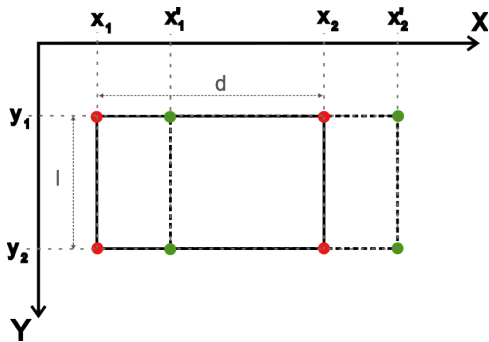
Llamamos P_1, P_2, P_3, P_4 a los vértices de la base superior y P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 a los vértices correspondientes de la base inferior. De forma que tienen las siguientes coordenadas:

$$\begin{array}{llll} P_1 = (x_1, y_1, z_1) & P_2 = (x_2, y_1, z_1) & P_3 = (x_1, y_2, z_1) & P_4 = (x_2, y_2, z_1) \\ P'_1 = (x'_1, y_1, z_2) & P'_2 = (x'_2, y_1, z_2) & P'_3 = (x'_1, y_2, z_2) & P'_4 = (x'_2, y_2, z_2) \end{array}$$

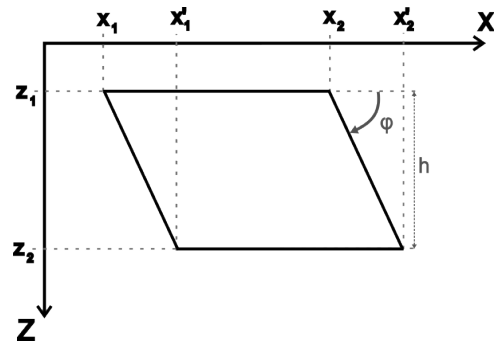
Sea $h = z_2 - z_1$ la altura del prisma, $d = x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$ el largo de las bases y $l = y_2 - y_1$ el ancho de estas. Sea φ la inclinación del prisma con respecto a la horizontal, las coordenadas $x'_i, i = 1, 2$ se pueden escribir como $x'_i = x_i + h \cdot \cot\varphi$.



(a) Vértices del prisma inclinado



(b) Coordenadas del prisma en el plano XY

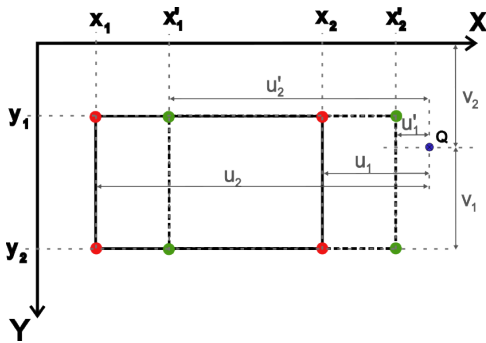


(c) Coordenadas del prisma en el plano XZ

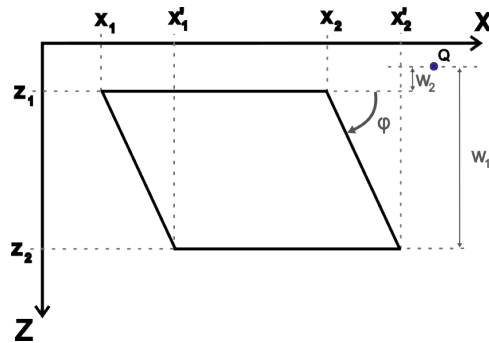
Figura 3: Coordenadas que definen el prisma

Sea $Q(x, y, z)$ el punto en el que queremos calcular la anomalía gravimétrica, denotamos las diferencias entre coordenadas de los vértices del prisma y el punto $Q(x, y, z)$ como u, v, w respectivamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x - x_2 & u_2 &= x - x_1 & u'_1 &= u_1 - h \cdot \cot\varphi & u'_2 &= u_2 - h \cdot \cot\varphi \\
 v_1 &= y - y_2 & v_2 &= y - y_1 & w_1 &= z - z_2 & w_2 &= z - z_1
 \end{aligned}$$



(a) Plano XY



(b) Plano XZ

Figura 4: Distancias entre los lados del prisma y el punto Q

Sea $\Delta\rho$ el contraste de densidades del prisma y G la constante de gravitación universal, la anomalía producida por la atracción gravimétrica del prisma en el punto Q se obtiene a

partir de las siguientes expresiones:

$$\Delta g = G \cdot \Delta \rho \cdot T_0 \quad (30)$$

$$T_0 = \frac{\partial}{\partial z} \int_v \frac{dv}{R} = \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_1}^{z_2} dz_0 \int_{y_1}^{y_2} dy_0 \int_{x_1+\Delta}^{x_2+\Delta} \frac{dx_0}{R} \quad (31)$$

con $\Delta = (z_0 - z_1) \cdot \cot \varphi$ y $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ la distancia entre el punto Q y el punto (x_0, y_0, z_0) en el centro de la base superior del prisma.

Tras una serie de cálculos que se pueden consultar en el apéndice del artículo (Hjelt, 1974), llegamos al siguiente resultado:

$$T_0 = [[\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5]_{u_2, v_2, w_2}^{u_1, v_1, w_1}] \quad (32)$$

con:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= w \cdot \arctan \left(\frac{v \cdot u}{w \cdot R} \right) \\ \phi_2 &= -p \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \arctan \left(\frac{v \cdot q}{p \cdot R} \right) \\ \phi_3 &= -p \cdot \sin^2 \varphi \cdot \ln(v + R) \\ \phi_4 &= -v \cdot \ln(u + R) \\ \phi_5 &= v \cdot \cos \varphi \cdot \ln(q \cdot \sin \varphi + R) \\ R &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ p &= u - w \cdot \cot \varphi \\ q &= u + w \cdot \cot \varphi \end{aligned}$$

Estas fórmulas definen el problema gravimétrico directo. Δg se corresponde con nuestro $g_j^c(\mathbf{m})$, donde \mathbf{m} es el vector de parámetros que definen el prisma. El punto Q es el análogo a cada punto de gravedad observado g_j^{obs} , $j = 1, \dots, m$.

El vector de parámetros del prisma viene dado por $(\mathbf{m}) = (x, y, d, l, zt, zb, \varphi, Az, \theta, \Delta \rho)$, siendo x, y las coordenadas centrales de la base superior del prisma; d, l definen las longitudes de las bases; zt y zb nos dan la profundidad de las bases del prisma, es decir, $zt = z_1$ y $zb = z_2$. φ es el ángulo de inclinación del prisma con respecto a la horizontal, Az es el azimut, θ es el ángulo de rotación en sentido horario y $\Delta \rho$ la densidad del cuerpo. Para mejor comprensión ver Figura 4.

Este vector de parámetros \mathbf{m} es el que queremos obtener, de forma que al calcular la anomalía gravimétrica ($g_j^c(\mathbf{m})$) a partir del problema directo, mediante el modelado del prisma tridimensional, esta sea lo más cercana posible a la observada g_j^{obs} en cada punto j . Es decir, que la función objetivo considerada en el problema de optimización sea mínima.

Para lograr esto, aplicaremos el método de optimización PSO, haciendo pruebas con distintas variantes. Se pueden tomar como incógnitas todos los parámetros que definen el vector \mathbf{m} o podemos asumir conocidos algunos de estos y dejarlos fijos. En este trabajo buscamos calcular las anomalías gravimétricas producidas por un dique y un *sill*, por lo que

tenemos dos cuerpos. El *sill* se asume conocido, mientras que del dique se asumen conocidos todos los parámetros excepto la inclinación del prisma φ y la profundidad de la base inferior zb . En concreto, en este trabajo, como ejemplo sintético se ha diseñado el modelo magmático compuesto por el *sill* y el dique, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 1.

Cuerpo	x	y	dx	dy	zt	zb	φ	Az	θ	$\Delta\rho$
<i>Sill</i>	221703	3162610	3000	3000	5990	6000	90	0	90	3000
Dique	220154	3168515	800	7	100	6000	50	-80	170	3000

Tabla 1: Valores utilizados para los parámetros de los cuerpos. En rojo se han marcado los que se considerarán como incógnitas en la aplicación del PSO.

8.2. Parámetros utilizados en la implementación del algoritmo PSO

Para que el algoritmo proporcione mejores resultados en un tiempo menor de ejecución, es decir, para un número bajo de iteraciones y una población de partículas pequeña (posibles soluciones), se establece un intervalo de búsqueda para las incógnitas (zb, φ). Este intervalo se puede predecir a partir de otra información, como los sismos que suceden en una erupción o información geológica de la zona. Además, es necesario realizar una acotación de parámetros para solventar el problema de la no unicidad de la solución del PGI, pues al tener infinitas soluciones es necesario añadir algún constreñimiento que facilite la búsqueda de la solución óptima y factible. Se realizarán pruebas con distintos intervalos.

En este caso, las partículas son $\mathbf{x}_i = (zb_i, \varphi_i)$ aunque, como ya hemos mencionado, podría ser todo el vector de parámetros \mathbf{m} . Se fija el intervalo de búsqueda para cada incógnita (los valores máximos y mínimos), que servirán para definir los valores iniciales de estas ($t = 1$), que son arbitrarios y vienen dados por la siguiente expresión:

$$zb_i(1) = zb_{min} + r_1 \cdot (zb_{max} - zb_{min}) \quad (33)$$

$$\varphi_i(1) = \varphi_{min} + r_2 \cdot (\varphi_{max} - \varphi_{min}) \quad (34)$$

Para cada partícula $i = 1, \dots, n$, siendo n el número de puntos de observación y r_1, r_2 dos valores arbitrarios en el intervalo $[0, 1]$.

En el Apartado 6.2, se ha definido el método PSO. Se han determinado las condiciones que debe cumplir tanto el término de inercia w , como los coeficientes de aceleración c_1, c_2 para que el algoritmo converja, así como, la posibilidad de tomarlos como constantes o variables en el tiempo (Ecuaciones 22, 23, 24, 25, 26). En este apartado se comentarán los diferentes valores que se han tomado para probar la eficacia y eficiencia del algoritmo de optimización.

Para testear una elección óptima de los parámetros se han realizado diversas pruebas. En todas ellas se ha utilizado el mismo criterio para establecer el término de inercia w . Este se ha tomado variable en cada iteración $t + 1$ de acuerdo con la Ecuación 22. Para ello, se han fijado unos valores máximos y mínimos de este término, $w_{min} = 0.4; w_{max} = 0.9$.

$$w(t + 1) = w_{max} - \left(\frac{w_{max} - w_{min}}{t_{max}} \right) \cdot t = 0.9 - \left(\frac{0.9 - 0.4}{t_{max}} \right) \cdot t \quad (35)$$

siendo t_{max} el número máximo de iteraciones establecido, que será distinto en cada prueba.

También se han considerado diferentes valores para los coeficientes de aceleración del modelo, en algunas prueba se han tomado valores constantes estos los coeficientes de aceleración, $c_1 = 1.2$; $c_2 = 1.7$. En cambio para otras se toman c_1, c_2 variables en cada iteración de acuerdo con las Ecuaciones 25 y 26, tomando para ambos coeficientes como valores máximos y mínimos $c_1^{min} = c_2^{min} = 0.5$; $c_1^{max} = c_2^{max} = 2$, valores recomendados por algunos autores como por ejemplo (Pace et al., 2021).

$$c_1(t+1) = c_1^{max} - (c_1^{max} - c_1^{min}) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) = 2 - (2 - 0.5) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) \quad (36)$$

$$c_2(t+1) = c_2^{min} + (c_2^{max} - c_2^{min}) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) = 0.5 + (2 - 0.5) \left(\frac{t}{t_{max} - 1} \right) \quad (37)$$

De acuerdo a estas expresiones, según avanza el algoritmo c_1 disminuye, mientras que c_2 aumenta, es decir, c_1 empieza tomando el valor máximo y va disminuyendo, mientras que c_2 comienza tomando el valor mínimo y va aumentando. Esto produce una búsqueda más amplia al principio, que se va enfocando cada vez más en una zona cercana a la mejor posición global encontrada en cada iteración.

Para estudiar la eficacia de este método, se utilizarán los datos gravimétricos generados por el modelo sintético mostrado en la Tabla 1. Para ello, se ha desarrollado un programa en MATLAB, llamado *PSO_dique_sill*, el cual se puede consultar en los anexos (Anexo A). Este programa es de implementación propia, a excepción de una parte, el cálculo de la atracción gravimétrica que producen los prismas, el cual ha sido implementado por (Montesinos et al., 2023).

Por otro lado, una vez realizadas las pruebas para los puntos de observación en los que tomamos únicamente los valores medidos, vamos a realizar una interpolación de estos datos, ya que queremos hacer un estudio comparativo de la aplicación del algoritmo PSO a los datos observados frente a los interpolados. Para esto, primero se hace un estudio geoestadístico en el que estudiaremos el semivariograma de los datos observados, para después recurrir a la técnica de interpolación de kriging, más concretamente, kriging ordinario.

Para la interpolación de los datos se ha creado un programa de MATLAB llamado *variograma_kriging* que se puede consultar en los anexos (Anexo B). Para la obtención del semivariograma experimental se ha utilizado una función de matlab llamada "*variogram*" (Schwangerhart, 2013) que nos da el semivariograma tanto isotrópico, como anisotrópico. Después se ha utilizado otra función llamada "*variogramfit*" (Schwangerhart, 2010b), en esta incluimos el semivariograma experimental calculado con la función anterior y nos devuelve el semivariograma ajustado a un modelo teórico, que será el que se usará en la interpolación posterior. Para la interpolación, se utilizará otra función de matlab, "*kriging*", del mismo autor (Schwangerhart, 2010a), que nos devolverá los datos interpolados para una malla de puntos, entre los que hemos establecido una separación de $1km$.

9. Resultados

En el modelo sintético (Tabla 1) que utilizaremos para probar la eficacia del algoritmo de optimización planteado, contamos con 48 estaciones distribuidas de forma no homogénea

por la isla de La Palma. Tenemos la información de las coordenadas de cada una de estas estaciones, así como las anomalías gravimétricas en cada uno de estos puntos, correspondientes a la atracción gravimétrica del modelo sintético. La altura ortométrica se ha considerado cero ($H = 0$) para todas las estaciones.

X_{UTM} (m)	Y_{UTM} (m)	g obs (μ Gal)	X_{UTM} (m)	Y_{UTM} (m)	g obs (μ Gal)
215515	3173181	6	219870	3161205	48
218599	3171911	13	222773	3161326	51
224829	3173362	8	226341	3164532	28
228700	3171427	7	227491	3167133	17
227732	3169794	11	225616	3166528	27
224285	3170580	16	224950	3162959	41
223075	3168766	32	223680	3159512	35
221926	3169371	36	221866	3157274	24
221140	3168705	76	221261	3155157	14
218962	3169129	44	220353	3157213	22
218902	3167375	70	220958	3158302	30
220112	3167737	228	224285	3158302	25
220172	3168645	420	222954	3157153	22
220112	3168947	177	222228	3154491	12
220777	3168282	150	221140	3151709	6
219325	3168221	94	220716	3152798	8
220837	3165439	80	216482	3168887	19
220051	3166225	93	217692	3167616	36
221684	3166649	78	218720	3165862	59
222833	3165923	57	217511	3169612	21
222168	3163625	64	223741	3164471	51
221140	3162717	63	219960	3169695	43
219688	3163383	59	220988	3169634	41
218478	3164592	51	220625	3170360	28

Tabla 2: Datos de las anomalías gravimétricas *observadas* utilizados para las pruebas.

En la siguiente figura, en la imagen de la izquierda podemos ver la distribución de estas estaciones sobre el mapa de anomalías gravimétricas. En la derecha se representa el dique y el *sill* que configuran el modelo del que queremos identificar los parámetros (zb, φ) del dique, que corresponden a la profundidad de la base inferior de este y a su ángulo de inclinación, respectivamente.

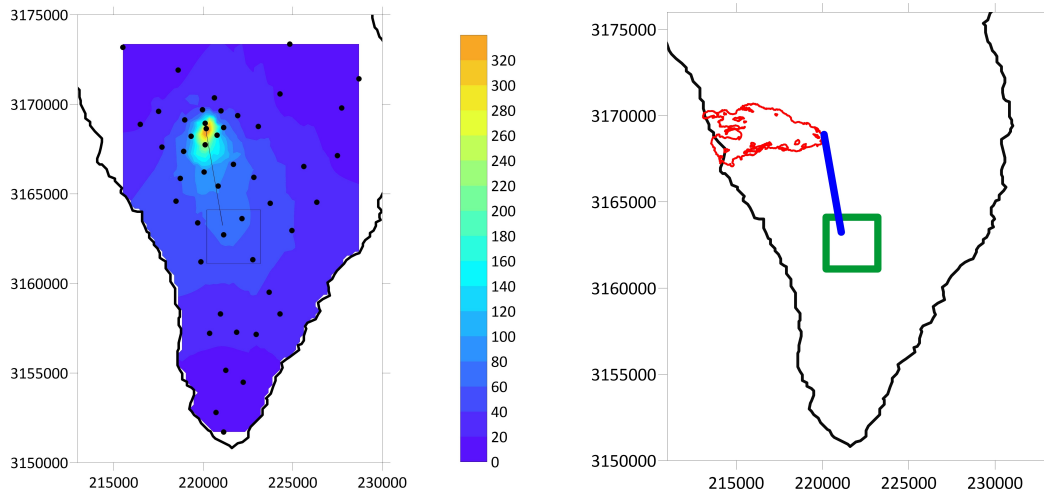


Figura 5: (a) Distribución de las estaciones gravimétricas (puntos negros) sobre el mapa de anomalías. (b) Dique (línea azul) y *sill* (cuadrado verde) utilizados como modelo sintético. La línea roja identifica la colada lávica de la erupción de La Palma de 2021.

Se plantean varios casos en los que se han tomado diferentes intervalos de búsqueda para las incógnitas (z_b, φ), necesarios debido a la ambigüedad y la no unicidad de soluciones del problema gravimétrico inverso, comentadas en apartados anteriores. Como conocemos los valores a los que queremos llegar para estas incógnitas (Tabla 1), que son $\varphi^{mod} = 50^\circ$ y $z_b^{mod} = 6000m$, los intervalos para la búsqueda de las incógnitas se tomarán en torno a estos valores conocidos.

Como se ha comentado en el Apartado 8, en algunos casos se ha considerado c_1 y c_2 constantes, mientras que en otros, se han considerado variables en cada iteración. El término de inercia w se considera siempre variable con las iteraciones, según lo establecido en la Ecuación 35. En todas las pruebas del algoritmo se toma la misma función objetivo, la segunda de las mencionadas en el Apartado 7.2 (Ec. 28). Lo que buscamos es minimizar esta función, es decir, que se aproxime lo máximo posible a cero.

En todos los casos se hacen pruebas con diferentes tamaños de la población de partículas y con diferente número de iteraciones. En el primer caso se toman tamaños de 5, 10 y 15 partículas y se ejecuta el algoritmo con 20, 30 y 40 iteraciones para cada población de partículas, es decir, se ejecuta el algoritmo un total de 9 veces. Esto se hace como un primer análisis para estudiar la influencia de la variación de estos parámetros.

En los siguientes casos, tras analizar los resultados obtenidos en el primer caso, y debido a la larga duración de computación del algoritmo en cada prueba, se realizarán menos ejecuciones del programa. Al ser un algoritmo aleatorio, debemos tener en cuenta que en cada ejecución del algoritmo, aunque se utilicen las mismas condiciones iniciales, obtendremos resultados diferentes.

En los siguientes apartados se verán los resultados de todas las pruebas comentadas anteriormente. Una vez hecho esto, pasaremos a hacer la interpolación de los datos observados, para después aplicar el algoritmo PSO y comparar los resultados de los datos interpolados frente a los resultados de la distribución heterogénea.

9.1. Caso 1

En el primer caso se ha seleccionado $z_b^{min} = 5500m$ y $z_b^{max} = 7000m$, para la profundidad de la base inferior del prisma z_b . Para la inclinación φ , tomamos $\varphi^{min} = 10^\circ$ y $\varphi^{max} = 90^\circ$. Por otro lado, los coeficientes de aceleración se toman constantes, $c_1 = 1.2$; $c_2 = 1.7$. En la Tabla 3 se muestran los resultados correspondientes al Caso 1.

Prueba	Población	Iteraciones	Tiempo (s)	Objetivo (μGal)	zb (m)	$\varphi(^\circ)$
1.1	5	20	1502	0.78	5585.5	50.3
1.2	5	30	2011	0.40	5832.8	50.1
1.3	5	40	2084	1.23	5318	50.4
1.4	10	20	3080	1.19	6808	49.6
1.5	10	30	3094	1.39	6982.8	49.7
1.6	10	40	5887	1.40	6992.3	49.7
1.7	15	20	5252	1.47	7039.6	49.6
1.8	15	30	6373	1.60	7099.8	49.4
1.9	15	40	7866	1.60	7094.2	49.3

Tabla 3: Pruebas del algoritmo PSO con los coeficientes de aceleración c_1, c_2 constantes. La prueba marcada en un color diferente corresponde al mejor resultado.

El mejor resultado (menor función objetivo) nos lo da la Prueba 1.2 (Tabla 3). Para este valor de la función objetivo, que es muy próximo a cero y por tanto excelente, llegamos a un ángulo de inclinación para el dique de $\varphi = 50.1^\circ$. Este resultado es muy bueno, pues en el modelo sintético planteado (Tabla 1) la inclinación es de $\varphi^{mod} = 50^\circ$. Por otro lado, para la profundidad de la base inferior obtenemos un valor de $z_b = 5832.8m$, también muy cercano al valor establecido en el modelo sintético, $z_b^{mod} = 6000m$ ($|z_b - z_b^{mod}| = 167.2m$).

9.2. Caso 2

En el segundo caso hemos seleccionado el mismo rango de búsqueda para las incógnitas que en el Caso 1. En cambio, los coeficientes de aceleración del modelo se consideran variables en cada iteración, según se ha explicado en el Apartado 8, Ecuaciones 36 y 37. En la Tabla 4 se muestran los resultados correspondientes a las pruebas llevadas a cabo para el Caso 2.

Prueba	Población	Iteraciones	Tiempo (s)	Objetivo (μGal)	zb (m)	(φ°)
2.1	5	20	1555	2.53	4732.3	51.1
2.2	5	40	2490	1.48	5183.2	50.4
2.3	10	20	2059	1.38	6956.1	50
2.4	10	40	4775	1.75	6935.7	48.8
2.5	15	20	3256	0.77	6473.6	50
2.6	15	40	6025	1.57	7086.2	49.4

Tabla 4: Pruebas del algoritmo PSO con los coeficientes de aceleración c_1, c_2 variables. La prueba marcada en un color diferente corresponde al mejor resultado.

Vemos que no hay mucha variación de resultados en comparación con el Caso 1 (Tabla 3). Si comparamos los resultados de la mejor prueba del Caso 1 (Tabla 3, Prueba 1.2) con

los de la mejor prueba de este caso (Tabla 4, Prueba 2.5) vemos que, aunque la prueba 1.2 es mejor, logramos alcanzar el valor predefinido para el ángulo de inclinación $\varphi = \varphi^{mod} = 50^\circ$, en cambio, para la profundidad z_b obtenemos un valor más alejado de $z_b^{mod} = 6000m$ ($|z_b - z_b^{mod}| = 473.6m$).

Como hemos obtenido un valor de la función objetivo más bajo en el Caso 1, para las siguientes pruebas también se fijarán los coeficientes de aceleración c_1 y c_2 constantes.

9.3. Caso 3

Tras analizar los mejores resultados de los Casos 1 y 2, se ha reducido el intervalo de búsqueda de las incógnitas, con el fin de acercarnos a una mejor solución. En las dos mejores pruebas (Prueba 1.2 de la Tabla 3 y Prueba 2.5 de la Tabla 4), el ángulo de inclinación es $\varphi \approx 50^\circ$, por lo que, para las siguientes pruebas se tomará $\varphi^{min} = 40^\circ$ y $\varphi^{max} = 60^\circ$. Por otro lado, estudiando los resultados con función objetivo menor que cero, se ha decidido tomar $z_b^{min} = 5500m$ y $z_b^{max} = 6500m$. Podemos ver los resultados de estas pruebas en la Tabla 5.

Prueba	Población	Iteraciones	Tiempo (s)	Objetivo (μGal)	zb (m)	$\varphi(^\circ)$
3.1	5	20	1223	0.64	5648.2	50.1
3.2	5	30	2374	0.63	5658.3	50.1
3.3	10	20	2881	0.53	6291.7	49.9
3.4	10	30	4670	0.45	6227.3	50
3.5	15	20	3400	0.77	6457.2	49.7
3.6	15	30	6621	0.76	6471.6	49.8

Tabla 5: Pruebas del algoritmo PSO con los coeficientes de aceleración c_1, c_2 constantes. La prueba marcada en un color diferente corresponde al mejor resultado.

Al reducir el espacio de búsqueda, observamos que, en general, se obtienen mejores resultados, ya que todos los valores de la función objetivo son menores que uno. En la mejor solución de este caso (Tabla 5, Prueba 3.4), también logramos llegar al ángulo del modelo sintético $\varphi = \varphi^{mod} = 50^\circ$, en cambio, para la profundidad z_b obtenemos mayor variación ($|z_b - z_b^{mod}| = 227.3m$), aunque menos que en el Caso 3.

En la siguiente figura (Figura 6) se muestra cómo varía en cada iteración del algoritmo la mejor función objetivo obtenida hasta ahora en cada caso. Vemos que, en general, no varían mucho. Esto es normal, ya que al partir de unos rangos acotados para las incógnitas y tener soluciones iniciales tan buenas, es difícil mejorarlas, sobre todo teniendo en cuenta la dificultad de resolución del problema planteado.

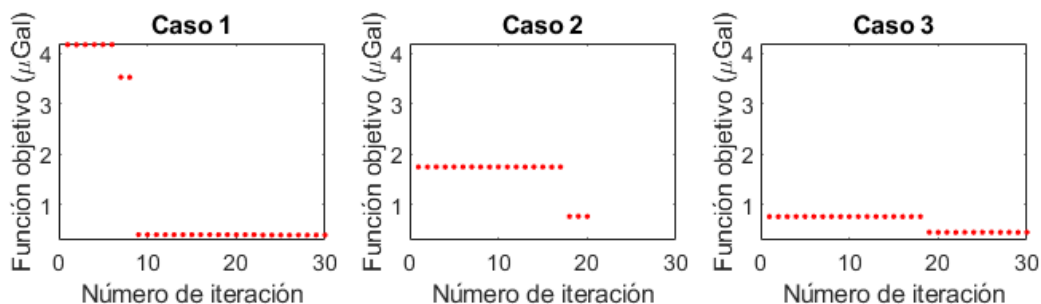


Figura 6: Mejores resultados para los 3 primeros casos.

9.4. Caso 4

Como última prueba, fijaremos el ángulo de inclinación del dique en $\varphi = 50^\circ$, ya que se ha observado que los mejores resultados obtenidos anteriormente nos dan un ángulo de inclinación muy cercano a este valor. También se reducirá un poco más el espacio de búsqueda de z_b , tomaremos $z_b^{min} = 5600m$ y $z_b^{max} = 6300m$. Se muestran los resultados en la Tabla 6.

Prueba	Población	Iteraciones	Tiempo (s)	Objetivo (μGal)	z_b (m)
4.1	5	20	1621	0.30	6042.7
4.2	5	30	2258	0.31	6182.9
4.3	10	20	3587	0.30	6182.9
4.4	10	30	2986	0.30	6192.9
4.5	15	20	4135	0.30	5994.2
4.6	15	30	5270	0.30	5987.9

Tabla 6: Pruebas del algoritmo PSO para $\varphi = 50^\circ$ fijo.

Se observa (Tabla 6) que para valores iguales de la función objetivo, se obtienen diferentes valores de z_b , esto es normal, ya que, como habíamos mencionado, el problema gravimétrico inverso se caracteriza por la no unicidad y la ambigüedad de las soluciones. Veamos gráficamente en la Figura 7 la variación de la función objetivo y de la profundidad de la base inferior del dique para una de estas pruebas, por ejemplo, la Prueba 4.6 de la Tabla 9.4.

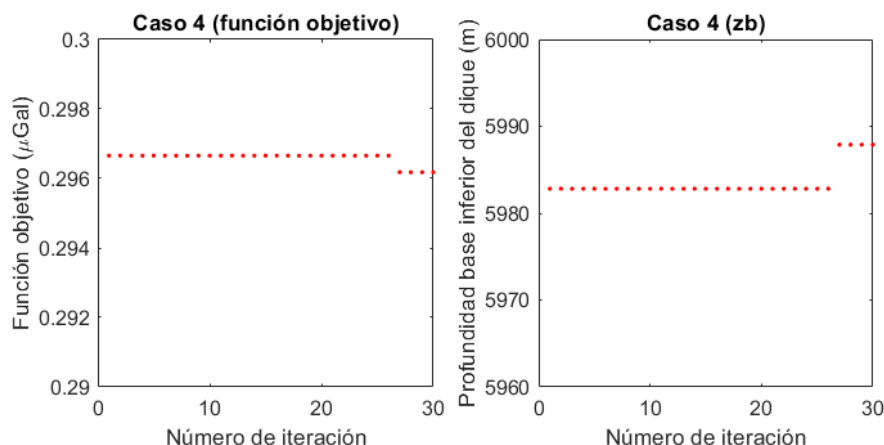


Figura 7: Representación de la variación de los parámetros en la prueba 4.6 (Tabla 6).

9.5. Datos interpolados

Tras las pruebas anteriores, se realiza una interpolación de los datos observados (código del Anexo B) y se aplica el algoritmo PSO para la malla de puntos obtenida en esta interpolación (código del Anexo A).

Para la interpolación, comenzamos estudiando el semivariograma experimental (Figura 8) para entender cómo se comportan unos puntos con respecto a otros. Vemos que nos queda un semivariograma muy disperso, complicado de ajustar a los modelos teóricos mencionados en el Apartado 3. Esto se debe a la poca cantidad de estaciones consideradas en el modelo y a su distribución en el espacio. Si nos fijamos en la Figura 5 (a), se observa un pico muy marcado (naranja) en una zona, mientras que el resto de puntos contienen una información muy similar.

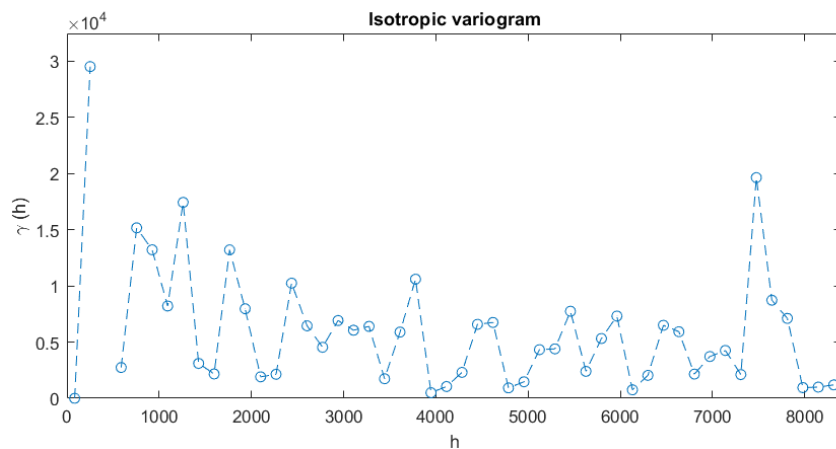


Figura 8: Semivariograma isotrópico de los datos de observación.

Se ha decidido ajustar el semivariograma experimental a un modelo de semivariograma teórico lineal (Figura 9). Para después realizar una interpolación para una malla de puntos con una separación de $1000m$ (Figura 10 (a)). Los valores de gravedad obtenidos para esta malla de puntos serán los utilizados en la posterior aplicación del método PSO.

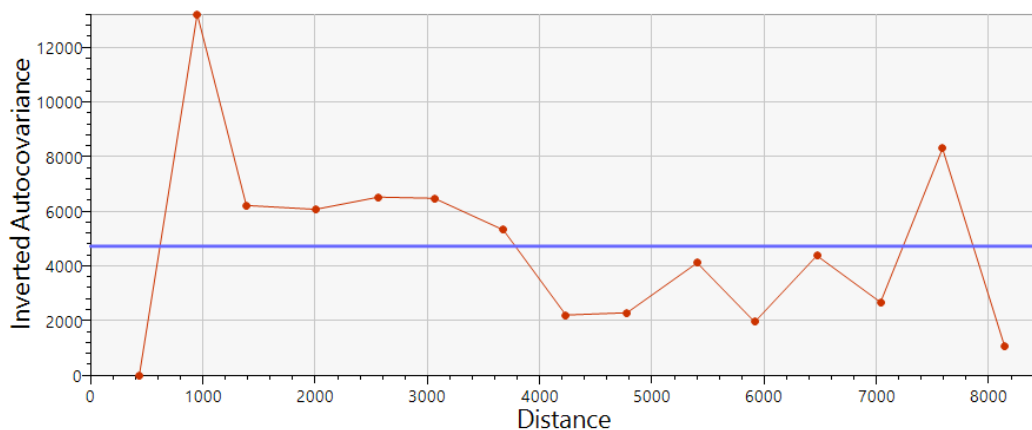


Figura 9: Ajuste del semivariograma experimental a uno teórico lineal.

En vista de los resultados obtenidos para los datos sin interpolar, se ha decidido realizar 3 pruebas distintas, en las que los coeficientes de aceleración c_1 y c_2 se toman constantes ($c_1 = 1, 2$; $c_2 = 1, 7$), mientras que el término de inercia w se toma variable en cada iteración, al igual que en todas las pruebas anteriores. Fijaremos los mismos valores iniciales de la profundidad del dique para las 3 pruebas, $z_b^{min} = 5500m$ y $z_b^{max} = 6500m$. En cambio, los valores iniciales para el ángulo de inclinación del dique φ , se tomarán distintos en cada una de estas pruebas.

- Prueba 1: Fijamos como valores iniciales $\varphi^{min} = 30^\circ$ y $\varphi^{max} = 70^\circ$.
- Prueba 2: Fijamos como valores iniciales $\varphi^{min} = 40^\circ$ y $\varphi^{max} = 60^\circ$.
- Prueba 3: Por último, como en las pruebas realizadas para los datos sin interpolar se ha observado que los mejores resultados se obtienen para $\varphi = 50^\circ$, fijamos $\varphi = 50^\circ$, tomando como incógnita solo la profundidad del dique.

Se muestran los resultados en la Tabla 7.

Prueba	Población	Iteraciones	Tiempo (s)	Objetivo (μGal)	zb (m)	$\varphi(^\circ)$
I1	10	30	18314	9.60	6697	71
I2	10	40	19721	8.96	7791	72.7
I3	10	40	25399	10.6	11510.6	50 (fijo)

Tabla 7: Pruebas del algoritmo PSO para los datos interpolados.

Si comparamos los resultados obtenidos en la Tabla 7 con los obtenidos en las Tablas 3, 4, 5 y 6, observamos que los resultados son peores para los datos interpolados (Tabla 7) que para la distribución heterogénea de puntos (Tablas 3, 4, 5 y 6). Esto se debe a la mala distribución de los puntos de observación en el espacio. En la Figura 5 podemos observar que el mapa de anomalías presenta un pico muy marcado, esto dificulta la obtención de un buen resultado en la interpolación. Aún así, aunque estos resultados puedan parecer peores, siguen siendo muy buenos, pues estamos ante un problema muy complejo de resolver, trabajando con unidades de gravedad pequeñas (μGal), intentando estimar los parámetros de una estructura subsuperficial situada a una gran profundidad.

Si en vez de un solo máximo tuvieramos unos valores de anomalías más complejos, el semivariograma podría ser bien modelado y la interpolación sería más eficaz, por lo que la aplicación del PSO también sería más satisfactoria. Se propone como línea de futuro probar con modelos más complejos que den lugar a mapas con una señal gravimétrica que afecte a más estaciones verificándose así, la aplicabilidad del método PSO a mapas interpolados.

En la Figura 10, se observa que el mapa obtenido tras la aplicación del método PSO a los datos interpolados (derecha) es muy parecido al mapa generado a partir de la interpolación de estos datos observados, por lo que podemos concluir que los resultados obtenidos tras la aplicación del algoritmo PSO son bastante buenos.

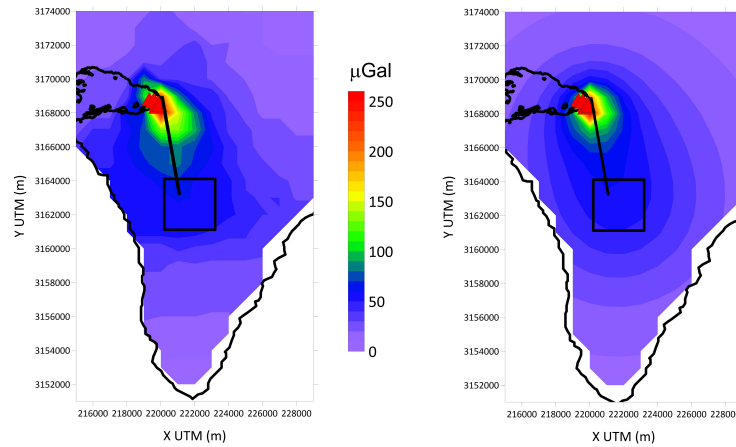


Figura 10: (a) Mapa de anomalías calculadas tras la aplicación del método PSO a los datos interpolados. Datos obtenidos en la Prueba I2 (mejor resultado). (b) Mapa interpolado de anomalías observadas generadas por el modelo.

10. Conclusiones

En muchas ocasiones el estudio de datos georreferenciados puede ser complejo, sobre todo si estos datos son tomados en una zona en la que se ha producido un desastre natural reciente. En este trabajo se han analizado diferentes técnicas matemáticas que pueden ser aplicadas al estudio de este tipo de datos. Se ha introducido el término de geoestadística y se ha llevado a cabo el desarrollo de un estudio geoestadístico, con el fin de conocer el comportamiento de una serie de puntos según las distancias comprendidas entre ellos. Este paso es importante para la posible aplicación posterior de un método de interpolación que nos proporcione un mapa continuo de la zona de estudio. Para poder realizar esta interpolación, se ha llevado a cabo un estudio sobre la clasificación de este tipo de técnicas, con el fin de elegir la más adecuada para el propósito del estudio. Es por esto que nos hemos centrado en una técnica de interpolación probabilística conocida como kriging. Una vez realizado el análisis previo de los datos, pasamos a su interpretación. Para ello, se introducen las técnicas de optimización, ya que buscamos resolver el problema gravimétrico inverso, que es planteado como un problema de optimización. Por tanto, se ha hecho un estudio de diferentes métodos de este tipo, centrándonos en las denominadas técnicas heurísticas y metaheurísticas, pues son las que mejor se ajustan a la resolución del problema planteado, que como se ha mencionado a lo largo del trabajo, es muy complejo de resolver. En concreto, nos hemos centrado en el método PSO.

Una vez desarrollada toda la parte teórica, para entender la complejidad del problema y la amplia variedad de técnicas matemáticas que tenemos a nuestro alcance para resolverlo, pasamos a plantear un ejemplo sintético en el que se prueba la eficacia de las técnicas elegidas. Para ello, se parte de dos estructuras subsuperficiales que aparecen en entornos volcánicos (un dique y un *sill*), cuyos parámetros se pueden consultar en la Tabla 1. A partir de esta información, se establecen una serie de estaciones gravimétricas (Tabla 2) en la superficie topográfica situada sobre las estructuras mencionadas, que nos dan la información de la anomalía gravimétrica generada por estos cuerpos. Se toman como incógnitas del problema de optimización la profundidad de la base inferior del dique z_b y su inclinación φ (marcado

en rojo en la Tabla 1) y se desarrolla un código en MATLAB para poder aplicar el algoritmo PSO planteado. En este, se toman una serie de partículas que representan posibles soluciones al problema y se inicia un proceso iterativo en búsqueda de mejorarlas. En cada iteración se calcula la atracción gravimétrica que producen el dique y el *sill* en función de estas posibles soluciones y se compara con la anomalía observada, con el fin de que el error entre estas sea mínimo. En las Tablas 3, 4, 5 y 6, se exponen los resultados obtenidos para cuatro casos en los que se escogen diferentes parámetros de control del algoritmo PSO, aplicado a los datos de la Tabla 2. Tras esto y tras ver que se obtienen buenos resultados, se pasa a realizar la interpolación de estos datos (Tabla 2) mediante el uso de otro programa de MATLAB, para una posterior aplicación del algoritmo. Esto se hace con el fin de comparar si es mejor estudiar los datos de observación o los interpolados y se concluye que debido a la mala distribución de puntos de observación del ejemplo planteado en el trabajo, en este caso se obtienen mejores resultados tras aplicar el algoritmo a los datos sin interpolar. Aún así, todos los resultados obtenidos son muy buenos, debido a la complejidad del problema y a la distribución de los datos considerados, por lo que se concluye que el uso de métodos metaheurísticos como el PSO es una muy buena opción para resolver este tipo de problemas. Se puede observar en los mapas de la Figura 10, correspondientes a la interpolación de los datos de observación y a la representación de lo obtenido tras aplicar el proceso de optimización, que efectivamente los resultados no son malos. Se propone como línea de futuro probar con modelos más complejos que den lugar a mapas con una señal gravimétrica que afecte a más estaciones verificándose así, la aplicabilidad del método PSO a mapas interpolados.

Referencias

- Amjadi, A. and Naji, J. (2013). Application of genetic algorithm optimization and least square method for depth determination from residual gravity anomalies. *Journal of Science, Engineering and Technology*, 11:114–123.
- Barbosa, V. C., Menezes, P. T., and Silva, J. B. (2007). Gravity data as a tool for detecting faults: In-depth enhancement of subtle almadá's basement faults, brazil. *Geophysics*, 72(3):B59–B68.
- Beni, G. (1988). The concept of cellular robotic system. In *Proceedings 1988 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 57–58. IEEE Computer Society.
- Blum, C. and Merkle, D. (2008). *Swarm intelligence: introduction and applications*. Springer Science & Business Media.
- Botezatu, R., Visarion, M., Scurtu, F., and Cucu, G. (1971). Approximation of the gravitational attraction of geological bodies. *Geophysical Prospecting*, 19(2):218–227.
- Chau, W. (2008). Application of a particle swarm optimization algorithm to hydrological problems. *Water resources research progress*, pages 3–12.
- Clerc, M. (2010). *Particle swarm optimization*, volume 93. John Wiley & Sons.
- Daya, A. A. and Bejari, H. (2015). A comparative study between simple kriging and ordinary kriging for estimating and modeling the cu concentration in chehlkureh deposit, se iran. *Arabian journal of Geosciences*, 8:6003–6020.

- Ekinci, Y. L., Balkaya, Ç., and Göktürkler, G. (2020). Global optimization of near-surface potential field anomalies through metaheuristics. *Advances in modeling and interpretation in near surface geophysics*, pages 155–188.
- Essa, K. S. and Elhussein, M. (2018). Gravity data interpretation using different new algorithms: A comparative study. *Gravity-geoscience applications, industrial technology and quantum aspect*.
- Essa, K. S. and Géraud, Y. (2020). Parameters estimation from the gravity anomaly caused by the two-dimensional horizontal thin sheet applying the global particle swarm algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 193:107421.
- Fernández Palomino, C. and Lavado-Casimiro, W. (2014). Análisis comparativo de métodos de interpolación espacial para la elaboración de mapas climáticos de precipitación: cuencas chillón, rímac, lurín, parte alta del mantaro.
- Flood, M. M. (1956). The traveling-salesman problem. *Operations research*, 4(1):61–75.
- Gallardo, A. (2006). Gallardo a. 2006. geostadística. ecosistemas. 2006/3 (url: http://www.revistaecosistemas.net/articulo.asp?id=431&id_categoria=1&tipo=portada).
- Giraldo, R. (2002). Introducción a la geoestadística: Teoría y aplicación. *Bogotá: Universidad Nacional de Colombia*.
- Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, 13(5):533–549.
- González, J., Guerra, F., and Gómez, H. (2007). Conceptos básicos de geoestadística en geografía y ciencias de la tierra: manejo y aplicación. *Geoenseñanza*, 12(1):81–90.
- Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for natural resources evaluation*. Oxford University Press, USA.
- Gotay-Sariñas, J. and Junco-Bernázar, P. G. (2003). Optimización global eficiente y efectiva en la inversión de datos de campos potenciales. *Minería y Geología*, 19(1-2):12–12.
- Gou, J., Lei, Y.-X., Guo, W.-P., Wang, C., Cai, Y.-Q., and Luo, W. (2017). A novel improved particle swarm optimization algorithm based on individual difference evolution. *Applied Soft Computing*, 57:468–481.
- Hatvani, I. G., Magyar, N., Zessner, M., Kovács, J., and Blaschke, A. P. (2014). The water framework directive: Can more information be extracted from groundwater data? a case study of seewinkel, burgenland, eastern austria. *Hydrogeology Journal*, 22(4):779.
- Hengl, T. (2009). *A practical guide to geostatistical mapping*, volume 52. Hengl Amsterdam.
- Hernández, C. U. P., Castillo, W. E. S., Becerra, X. M., and Hernández, S. B. J. (2013). Evaluación y comparación de métodos de interpolación determinísticos y probabilísticos para la generación de modelos digitales de elevación. *Investigaciones Geográficas, Boletín del Instituto de Geografía*, 2013(82):118–130.

- Hjelt, S.-E. (1974). The gravity anomaly of a dipping prism. *Geoexploration*, 12(1):29–39.
- Journel, A. G. and Huijbregts, C. J. (1976). Mining geostatistics.
- Jünger, M., Reinelt, G., and Rinaldi, G. (1995). The traveling salesman problem. *Handbooks in operations research and management science*, 7:225–330.
- Kaftan, İ. (2017). Interpretation of magnetic anomalies using a genetic algorithm. *Acta Geophysica*, 65:627–634.
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*, volume 4, pages 1942–1948. ieee.
- Kohán, B., Tyler, J., Jones, M., and Kern, Z. (2017). Variogram analysis of stable oxygen isotope composition of daily precipitation over the british isles. In *EGU General Assembly Conference Abstracts, Vienna, Austria*, volume 19, pages 12989–12990.
- Kovács, J., Korponai, J., Kovács, I. S., and Hatvani, I. G. (2012). Introducing sampling frequency estimation using variograms in water research with the example of nutrient loads in the kis-balaton water protection system (w hungary). *Ecological engineering*, 42:237–243.
- Li, J. and Heap, A. D. (2014). Spatial interpolation methods applied in the environmental sciences: A review. *Environmental Modelling & Software*, 53:173–189.
- Liu, S., Hu, X., and Liu, T. (2013). A stochastic inversion method for potential field data: Ant colony optimization. *Pure and Applied Geophysics*, 171:112–.
- Luenberger, D. G., Ye, Y., et al. (1984). *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer.
- Maglione, D., Soto, J., Sáenz, J. L., and Bonfili, O. (2019). Utilización de diferentes metodologías para la construcción de un mapa de precipitación acumulada en la provincia de santa cruz. *Informes Científicos Técnicos-UNPA*, 11(1):154–169.
- Matheron, G. (1962). *Traité de géostatistique appliquée, tome i, mémoires du bureau de recherches géologiques et minières, no. 14. Editions Technip, Paris*, page 333.
- Maune, D. F. (2007). *Digital elevation model technologies and applications: the dem users manual*. American Society for Photogrammetry & Remote Sensing.
- Melián, B., Pérez, J. A. M., and Vega, J. M. M. (2003). Metaheurísticas: Una visión global. *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 7(19):0.
- Montesinos, F., Arnosó, J., and Benavent, M. (2005). New study of the local gravity field of el hierro (canary islands).
- Montesinos, F. G., Sainz-Maza, S., Gómez-Ortiz, D., Arnosó, J., Blanco-Montenegro, I., Benavent, M., Vélez, E., Sánchez, N., and Martín-Crespo, T. (2023). Insights into the magmatic feeding system of the 2021 eruption at cumbre vieja (la palma, canary islands) inferred from gravity data modeling. *Remote Sensing*, 15(7):1936.

- Morgan, N. and Faessler, C. (1972). A two-and three-dimensional gravity dot chart. *Geophysical Prospecting*, 20(2):363–374.
- Nagy, D. (1966). The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics*, 31(2):362–371.
- Nguimbous-Kouoh, J., Ndougsa-Mbarga, T., and Manguelle-Dicoum, E. (2018). Gravity data transformation by polynomial fitting and kriging data analysis of the mamfe basin (cameroon). *geoinfor geostat: An overview* 6: 2. *of*, 12:2.
- Ovalles, F. (1992). Metodología para determinar la superficie representada por muestras tomadas con fines de fertilidad. *FONAIAP, Instituto de Investigaciones Agrícolas Generales. Maracay. Serie B*.
- Pace, F., Santilano, A., and Godio, A. (2021). A review of geophysical modeling based on particle swarm optimization. *Surveys in Geophysics*, 42(3):505–549.
- Perez, R. E. and Behdinin, K. (2007). Particle swarm approach for structural design optimization. *Computers & Structures*, 85(19-20):1579–1588.
- Ratnaweera, A., Halgamuge, S. K., and Watson, H. C. (2004). Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 8(3):240–255.
- Rauthe, M., Steiner, H., Riediger, U., Mazurkiewicz, A., Gratzki, A., et al. (2013). A central european precipitation climatology—part i: Generation and validation of a high-resolution gridded daily data set (hyras). *Meteorologische Zeitschrift*, 22(3):235–256.
- Resende, M. G. and Ribeiro, C. C. (2003). Greedy randomized adaptive search procedures. In *Handbook of metaheuristics*, pages 219–249. Springer.
- Roshan, R. and Singh, U. K. (2017). Inversion of residual gravity anomalies using tuned pso. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*, 6(1):71–79.
- Roy, A. and Kumar, T. S. (2021). Gravity inversion of 2d fault having variable density contrast using particle swarm optimization. *Geophysical Prospecting*, 69(6):1358–1374.
- Schwanghart, W. (2010a). kriging, matlab central file exchange <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29025-ordinary-kriging>.
- Schwanghart, W. (2010b). variogramfit, matlab central file exchange <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25948-variogramfit>.
- Schwanghart, W. (2013). Experimental (semi-) variogram , matlab central file exchange <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/20355-experimental-semi-variogram>.
- Sharma, P. V. (1971). *Tables of solid angles and potential field functions for geophysical applications*. Københavns Universitets Institut for Geofysik, Københavns Universitets Fond.

- Sharma, P. V. (1972). Nomograms for determining the gravity attraction of a right rectangular prism. *pure and applied geophysics*, 96:28–36.
- Shi, Y. and Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm optimizer. In *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98TH8360)*, pages 69–73. IEEE.
- Singh, A. and Biswas, A. (2016). Application of global particle swarm optimization for inversion of residual gravity anomalies over geological bodies with idealized geometries. *Natural Resources Research*, 25:297–314.
- Talwani, M. and Ewing, M. (1960). Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics*, 25(1):203–225.
- Torge, W. (1983). Gravimetry. In *its Natl. Rept. of Federal Republic of Germany on Geodetic Activities*, pages 128–139.
- Valadi, J. and Siarry, P. (2014). *Applications of metaheuristics in process engineering*, volume 31. Springer.
- Valencia, P. E. (1997). Optimización mediante algoritmos genéticos. In *Anales del Instituto de Ingenieros de Chile*, volume 109, pages 83–92.
- Velázquez, A. P. (2017). Variables regionalizadas.
- Viera, M. A. D. and González, R. C. (2002). Geoestadística aplicada. *Instituto de Geofísica, UNAM-Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA. Cuba*.
- Xin, J., Chen, G., and Hai, Y. (2009). A particle swarm optimizer with multi-stage linearly-decreasing inertia weight. In *2009 International joint conference on computational sciences and optimization*, volume 1, pages 505–508. IEEE.
- Ying, T., Yang, Y.-p., and Zeng, J.-c. (2006). An enhanced hybrid quadratic particle swarm optimization. In *Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, volume 2, pages 980–985. IEEE.
- Yuan, S., Wang, S., and Tian, N. (2009). Swarm intelligence optimization and its application in geophysical data inversion. *Applied Geophysics*, 6(2):166–174.
- Zhan, Z.-H., Zhang, J., Li, Y., and Chung, H. S.-H. (2009). Adaptive particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 39(6):1362–1381.
- Zhou, F., Guo, H.-C., Ho, Y.-S., and Wu, C.-Z. (2007). Scientometric analysis of geostatistics using multivariate methods. *Scientometrics*, 73(3):265–279.
- Zúñiga, F. B., Prieto, J. L. P., González, H. D., BISTRAN, R. P., JIMÉNEZ, E. C., and CARRANZA, M. D. C. D. (2011). *Técnicas de muestreo para manejadores de recursos naturales*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Anexos

A. Código de matlab algoritmo PSO (*PSO_dique_sill*)

Este programa es el utilizado para los casos 1 y 3 de la sección de resultados, así como para las dos primeras pruebas para los datos interpolados. Al final de este código se comentan los cambios realizados para los casos 2 y 4. El código correspondiente al caso 4 es el utilizado para la tercera prueba para los datos interpolados.

No se incluye la función para el cálculo de la anomalía gravimétrica producida por la atracción de los prismas (Montesinos et al., 2023).

```

1 tic
2 %Incluimos los datos conocidos
3 % [num_modelo,x,y,dx,dy,zt,zb,phi,azimut,var_az,rho]
4 sill=[1 221703 3162610 3000 3000 5990 6000 90 0 90 3000]; %
    conocido
5 % dique=[2 220154 3168515 800 7 100 zb phi -80 170 3000]; %Dos
    parametros desconocidos
6 zb_min=5500; zb_max=6500; %metros
7 phi_min=40; phi_max=60; %grados
8 %Cargamos los datos observados
9 gra_red=readmatrix('gra_GRID_1000m_Modelo_dique_sill.dat');
10 xo=gra_red(:,1); yo=gra_red(:,2); zo=gra_red(:,3);
11 grav_obs=gra_red(:,4);
12
13 %Y abrimos los ficheros para los resultados
14 %mejores estimaciones en cada iteración (función objetivo y
    valores de los parámetros incógnita)
15 resultados_PSO_iteracion = fopen('resultados_PSO_iteracion.txt'
    , 'w');
16 fprintf(resultados_PSO_iteracion, '%s\n', 'Iteración    Mejor
    posición global(zb, phi)        Valor función objetivo');
17 form1='    %d \t (%15.11f,    %15.11f) \t %15.11f \n';
18 %solución final (gravedades calculadas y observadas)
19 resultados_PSO_final= fopen('resultados_PSO_final.txt', 'w');
20
21 %Parámetros de control
22 n=size(gra_red, 1); %numero puntos observados
23 m=1; %tamaño población de partículas
24 c1=1.2; %coeficiente de aceleración de la parte cognitiva
25 c2=1.7; %coeficiente de aceleración de la parte social
26 w_max=0.9; %valor máximo del coeficiente de inercia
27 w_min=0.4; %valor mínimo del coeficiente de inercia
28 kmax=2; %número máximo de iteraciones
29

```

```

30 %Pasamos a asignar valores iniciales de cada partícula i
31 rng("default");
32 %posicion de cada parametro y del vector de ambos
33 zb_pos=zeros(m, 1); phi_pos=zeros(m, 1); pos=zeros(m, 2);
34 %velocidad de cada parametro y del vector de ambos
35 zb_vel=zeros(m, 1); phi_vel=zeros(m, 1); vel=zeros(m, 2);
36 %gravedad calculada (atraccion del dique)
37 g_calc=zeros(m, 1);
38 %funcion objetivo
39 f=zeros(m,1);
40 %mejor posición y objetivo de cada partícula
41 best_pos=zeros(m, 2); best_obj=Inf(m, 1);
42 %mejor posición y objetivo globales
43 global_best_pos=zeros(kmax,2); global_best_obj=Inf(kmax,1);
44 %gravedades calculadas
45 best_grav_calc=zeros(n,1);
46
47 for i=1:m
48     %fijamos POSICIONES (valores) iniciales para cada parámetro
        por separado
49     zb_pos(i)=zb_min +rand(1)*(zb_max-zb_min);
50     phi_pos(i)=phi_min+rand(1)*(phi_max-phi_min);
51     pos(i,:)=[zb_pos(i) phi_pos(i)];
52
53     %fijamos VELOCIDADES iniciales
54     vel(i,:)=pos(i,:); %podemos fijarlas también en cero y no
        haría falta meterlo en el bucle
55
56     %fijamos valor FUNCIÓN OBJETIVO
57     dique=[2 220154 3168515 800 7 100 zb_pos(i) phi_pos(i) -80
        170 3000];
58     modelo=[sill; dique];
59
60     [f(i), grav_calc]=obj(modelo, gra_red);
61
62     %mejores valores individuales
63     best_pos(i,:)=[zb_pos(i) phi_pos(i)];
64     best_obj(i)=f(i);
65
66     %mejores valores globales
67     if best_obj(i)<global_best_obj(1)
68
69         global_best_obj(1)=best_obj(i);
70         global_best_pos(1,:)=best_pos(i,:);
71         best_grav_calc=grav_calc;
72     end

```

```

73 end
74 k=1;
75 fprintf(resultados_PSO_iteracion, form1, k, global_best_pos
    (1,1),global_best_pos(1,2) , global_best_obj(1));
76
77 %Y pasamos a implementar la parte iterativa
78 tol=0.1;
79
80 k=2;
81 while (k<=kmax) && (global_best_obj(k-1)>tol)
82     %establecemos el factor de inercia
83     w=w_max-(w_max-w_min)*(k)/kmax;
84
85     for i=1:m
86
87         %actualizamos velocidad
88         vel(i,:)=w*vel(i, :)+c1*rand(1)*(best_pos(i, :)-pos(i, :))
            +c2*rand(1)*(global_best_pos(k-1, :)-pos(i, :));
89
90         %actualizamos posición
91         pos(i,:)=pos(i, :)+vel(i, :); %=[zb_pos phi_pos]
92
93         %evaluamos función objetivo
94         dique=[2 220154 3168515 800 7 100 pos(i,1) pos(i,2)
            -80 170 3000];
95         modelo=[sill; dique];
96
97         %primera funcion objetivo
98         [f(i), grav_calc]=obj(modelo, gra_red);
99
100        %actualizamos mejores valores individuales
101        if f(i)< best_obj(i)
102            best_pos(i,:)=pos(i, :);
103            best_obj(i)=f(i);
104        end
105
106        %actualizamos mejores valores globales
107        if best_obj(i)<global_best_obj(k-1)
108            global_best_obj(k)=best_obj(i);
109            global_best_pos(k,:)=best_pos(i, :);
110            best_grav_calc=grav_calc;
111        else
112            global_best_obj(k)=global_best_obj(k-1);
113            global_best_pos(k,:)=global_best_pos(k-1, :);
114        end
115    end
end

```

```

116
117     fprintf(resultados_PSO_iteracion, form1, k, global_best_pos
           (k,1),global_best_pos(k,2), global_best_obj(k));
118
119     k=k+1;
120 end
121
122 %Escribimos los resultados en el archivo
123 fprintf(resultados_PSO_final, '%s\n', ' X           Y
           H     gravedad observada     gravedad calculada
           diferencia(gobs-gcalc)');
124 form2='%d \t %d \t %d \t %d\t\t\t\t%9.5f\t\t\t\t%9.5f \n';
125 for i=1:n
126     fprintf(resultados_PSO_final, form2, xo(i), yo(i), zo(i) ,
           grav_obs(i) , best_grav_calc(i), grav_obs(i)-
           best_grav_calc(i));
127 end
128 fclose(resultados_PSO_iteracion);
129 fclose(resultados_PSO_final);
130 %Paramos temporizador
131 t=toc;
132
133 %Función objetivo: dependerá de la gravedad observada y la
           calculada
134 function [valor_obj, grav_calc]=obj(modelo,gra_red)
135     xo=gra_red(:,1);
136     yo=gra_red(:,2);
137     zo=gra_red(:,3);
138     grav_obs=gra_red(:,4);
139     [Atr]=atr_dikes(xo,yo,zo,grav_obs,modelo);
140     grav_calc=Atr(:,5);
141     obj=0;
142     n=size(gra_red,1);
143     for p=1:n
144         obj=obj+(1/n)*(grav_obs(p)-grav_calc(p))^2;
145     end
146     valor_obj=sqrt(obj);
147 end

```

A.1. Modificación del código para el Caso 2 (coeficientes de aceleración variables)

Se cambian los valores fijos de las líneas 24 y 25 del código anterior y se sustituyen por unos valores máximos y mínimos de los coeficientes de aceleración:

```

1 | c1_min=0.5;c2_min=0.5;%límites coef aceleración parte cognitiva

```

```
2 c1_max=2;c2_max=2; %límites coef de aceleración parte social
```

En el bucle iterativo, debajo de la fórmula para el término de inercia w en la línea 83 se añade el siguiente código:

```
1 c1=c1_max-(c1_max-c1_min)*k/(kmax-1)
2 c2=c2_min+(c2_max-c2_min)*k/(kmax-1)
```

A.2. Modificación del código para el Caso 4 ($\varphi = 50^\circ$ fijo)

Para llevar a cabo esta modificación, basta con tomar todos los valores de $\varphi = 50$. Se puede modificar todo el código, cambiando las matrices "*pos*" y "*vel*" por otras que contengan solo la información para z_b o simplemente fijar la segunda columna de cada una de estas (correspondiente a φ).

B. Código de matlab para el cálculo del semivariograma y kriging (*variograma_kriging*)

```
1 %Cargamos los datos
2 clear
3 format long
4 C=readmatrix('gra_Modelo_dique_sill.dat')
5 % [x y H dif_grav]
6 x=C(:,1); y=C(:,2); H=C(:,3); dif_grav=C(:,4);
7 %Abrimos el fichero en el que se guardarán los resultados
8 result = fopen('resultados_kriging.txt','w');
9 %Pintamos los puntos de las observaciones
10 plot(x,y,'r.')
11 xmin=min(x), xmax=max(x)
12 ymin=min(y), ymax=max(y)
13 axis([xmin xmax ymin ymax])
14
15 %Pasamos a realizar el semivariograma experimental isotrópico y
    anisotrópico
16 d = variogram([x y],dif_grav,'plotit',true,'nrbins',50)
17 title('Isotropic variogram')
18
19 d2 = variogram([x y],dif_grav,'plotit',true,'nrbins',50,'
    anisotropy',true,'thetastep',30)
20 title('Anisotropic variogram')
21
22 %Ajuste a un modelo de variograma teórico a partir de lo
    obtenido en el semivariograma experimental
23 subplot(2,2,1)
```

```
24 [range,sill,nugget,S] = variogramfit(d.distance,d.val,[],[],[],  
    'model','spherical')  
25 title('Modelo esférico')  
26 subplot(2,2,2)  
27 [range_gaus,sill_gaus,nugget_gaus,S_gaus] = variogramfit(d.  
    distance,d.val,[],[],[],'model','gaussian')  
28 title('Modelo gaussiano')  
29 subplot(2,2,3)  
30 [range_exp,sill_exp,nugget_exp,S_exp] = variogramfit(d.distance  
    ,d.val,[],[],[],'model','exponential')  
31 title('Modelo exponencial')  
32 subplot(2,2,4)  
33 [range_lin,sill_lin,nugget_lin,S_lin] = variogramfit(d.distance  
    ,d.val,[],[],[],'model','bilinear')  
34 title('Modelo lineal') %bounded lineal  
35  
36 %Interpolación  
37 % Establecemos el número de puntos de la cuadrícula  
38 numgridX=round((xmax-xmin)/100);  
39 numgridY=round((ymax-ymin)/100);  
40 %creamos la cuadrícula  
41 xi = linspace(xmin,xmax,numgridX);  
42 yi = linspace(ymin,ymax,numgridY);  
43 [Xgrid, Ygrid]=meshgrid(xi,yi);  
44 %Interpolado por el método natural  
45 Z = griddata(x,y,dif_grav,Xgrid,Ygrid,'natural');  
46 figure  
47 mesh(Xgrid,Ygrid,Z);  
48 xlabel('X UTM');  
49 ylabel('Y UTM');  
50 zlabel('gravedad');  
51 title('Interpolación por el método natural');  
52  
53 %Interpolado por kriging  
54 [zi,zivar] = kriging(S,y,x,dif_grav,Ygrid,Xgrid)  
55 figure  
56 surf(Xgrid,Ygrid,zi)  
57 xlabel('X UTM');  
58 ylabel('Y UTM');  
59 zlabel('gravedad');  
60 title('Interpolación por el método kriging');  
61 %Gráficas  
62 subplot(1,2,1)  
63 imagesc(Xgrid(1,:),Ygrid(:,1),zi); axis image; axis xy  
64 title('kriging predictions')  
65 subplot(1,2,2)
```

```
66 contour(Xgrid,Ygrid,zivar); axis image
67 title('kriging variance')
68 %Guardamos lo obtenido en un fichero
69 x_resultado=[]; y_resultado=[]; z_resultado=[];
70 for i=1:size(Xgrid, 2)
71     %for j=1:size(Xgrid,1)
72     x_resultado=[x_resultado ; Xgrid(:,i)];
73     y_resultado=[y_resultado ; Ygrid(:,i)];
74     z_resultado=[z_resultado ; zi(:,i)];
75     %end
76 end
77 H_resultado=zeros(length(x_resultado), 1);
78
79 fprintf(result, '%s\n', '      X      Y      H      grav
      ');
80 form='%0f \t %0f \t %0f \t %15.13f \n';
81 for i=1:length(x_resultado)
82     fprintf(result, form, x_resultado(i), y_resultado(i) ,
      H_resultado(i) , z_resultado(i));
83 end
84 fclose(result);
```