FUENTES Y DOCUMENTOS

TEORIA DE PROBABILIDADES*
(*Ars conjectandi*, Parte Cuarta. Basilea 1713)

JAKOB BERNOULLI

Capítulo I

Cuestiones preliminares sobre certeza, probabilidad, necesidad y contingencia de las cosas

La *certeza* de una cosa se puede considerar *objetivamente*, e.d. en sí y designa en tal caso la existencia real, actual o futura, de tal cosa; o se puede considerar *subjetivamente*, e.d. en relación a nosotros y consiste en la medida de nuestro conocimiento acerca de esta realidad.

Todo lo que existe o surge: lo pasado, lo presente y lo futuro tiene en sí la máxima certeza. Esta afirmación es obvia para las cosas pasadas y presentes, ya que el hecho de que han existido o existen actualmente excluye la posibilidad de que no hayan existido o no existan. Pero tampoco en relación a las cosas futuras se puede dudar de que vayan a existir, si bien no con la necesidad inevitable de una fatalidad, sino por providencia y predeterminación divina. Pues si lo que es futuro no aconteciera con seguridad, entonces no se comprendería por que habría que

* Traducción -a partir de la edición de R. Hausner, Leipzig 1899- y notas de *Andrés Rivadulla*, Universidad Complutense, quien agradece al Ministerio de Educación y Ciencia la concesión de la ayuda 92-169 de la DGICYT, durante cuyo disfrute se concluyó este trabajo. Esta traducción se ha beneficiado de la comparación con el original latino del *Ars conjectandi*, reimpreso en el Vol. 3 de *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser Verlag, Basel 1975, así como con la versión inglesa de Bing Sung, *Translations from James Bernoulli*, Harvard University 1966, una copia de la cual le fue amablemente facilitada al traductor por el Prof. Colin Howson, LSE.

Recibido el 1 de febrero de 1993

atribuir al altísimo creador el reconocimiento ilimitado de la omnisciencia y la omnipotencia. Algunos podrán discutir cómo se puede compaginar esta certeza del ser futuro con la contingencia e independencia de las causas eficientes; pero como esta cuestión queda muy lejos de nuestros objetivos no vamos a entrar en ella.

La certeza de las cosas considerada en relación a nosotros no es la misma en todos los casos, sino que varía considerablemente. Las cosas acerca de cuya existencia presente o futura es seguro que no podemos dudar, sea por revelación, reflexión, percepción sensorial, experiencia, introspección (autopsia), o por cualquier otro medio, tienen para nosotros la certeza más alta y absoluta. Todas las demás reciben, según nuestro conocimiento, un grado más incompleto de certeza, el cual será mayor o menor según sea mayor o menor la probabilidad de que una cosa sea, vaya a ser o haya sido[1].

La *probabilidad* es pues un grado de certeza y se diferencia de ella como la parte del todo[2]. Supongamos que la certeza total o absoluta, que designamos por medio de a ó 1, consta de cinco probabilidades o partes, de las cuales tres son favorables al acaecimiento presente o futuro de cierto suceso y las restantes son contrarias; en tal caso el suceso tiene $3/5a$ ó 3/5 de certeza. De dos cosas la *más probable* será pues la que posea la mayor parte de certeza, si bien en el uso ordinario del lenguaje sólo se denomina *probable* a aquélla cuya probabilidad es notoriamente mayor que la mitad de la certeza[3]. Insisto: *notoriamente*; pues aquella cosa, cuya probabilidad sólo es aproximadamente igual a la mitad de la certeza, se denominará *dudosa* o vacilante. Así, lo que tiene 1/5 de certeza es más probable que lo que posee 1/10 de certeza; pero ninguna de las dos cosas es efectivamente probable.

Posible es lo que tiene una parte de certeza, por muy pequeña que ésta sea; por contra, imposible es lo que carece de certeza o tiene una parte infinitamente pequeña de certeza. Posible es pues p.e. lo que tiene 1/20 ó 1/30 de certeza.

Moralmente cierto es aquello cuya probabilidad equivale casi a la certeza total, de manera que una diferencia no puede ser constatada. Por contra, *moralmente imposible* es aquello que sólo tiene tanta probabilidad como la que le falta a lo moralmente cierto para ser totalmente cierto. Así pues, si lo que tiene una certeza de 999/1000 se considera moralmente cierto, entonces lo que sólo tiene una certeza de 1/1000 es moralmente imposible.

Necesario es lo que tiene que ser, tendrá que ser o tiene que haber sido. Esta *necesidad* o bien es *física* -como p.e. es necesario que el fuego queme, que el triángulo tenga tres ángulos cuya suma equivale a dos rectos, que ocurra un eclipse de luna cuando la luna llena se encuentre en un punto nodal- o bien es *hipotética*, como consecuencia de la cual todo lo que existe o ha existido o se considera como existente o habiendo existido, tiene que existir o haber existido -en este sentido es necesario que Pedro, de quien sé o supongo que va a escribir, realmente escriba-, o bien finalmente es *consensuada* -p.e., quien en los juegos de dados obtenga un seis tiene que haber ganado necesariamente, si entre los jugadores se había acordado previamente que la victoria correspondería al que obtuviera un seis en un lanzamiento del dado-.

Contingente (tanto si depende del albedrío de un ente racional como si depende de sucesos casuales o de la suerte) es lo que, como consecuencia de una posibilidad remota, no próxima, no podría ser, llegar a ser o haber sido; pues la contingencia no siempre excluye del todo la necesidad, inclusive causas de importancia secundaria, como deseo explicar en unos ejemplos. Es completamente cierto que un dado, dadas su posición, velocidad y distancia del tablero, no puede caer de otra manera que en la que cae, a partir del momento que abandona la mano. De igual forma el tiempo que hará mañana no podrá ser distinto al que realmente hará, dada la situación actual de la atmósfera, es decir, la cantidad, posición, movimiento, dirección y velocidad del viento, brumas y nubes, así como determinadas leyes mecánicas según las que en conjunto se mueven. Estos efectos se siguen no menos necesariamente de sus causas próximas que el acontecer de eclipses según el movimiento de los astros. Y sin embargo se acostumbra a considerar sólo los eclipses como sucesos necesarios y como contingentes los lanzamientos de un dado y el tiempo futuro. La razón reside exclusivamente en que, para la determinación de acontecimientos futuros, aún no conocemos suficientemente lo que se considera dado, y lo que en realidad está dado; pero si lo supiéramos, el estudio de la matemática y la física está lo suficientemente desarrollado como para poder calcular los efectos de causas dadas, como p.e. podemos calcular y predecir eclipses a partir de leyes astronómicas conocidas. Pero antes de que la astronomía hubiese alcanzado tal nivel de perfección había que considerar los eclipses como sucesos contingentes futuros, al igual que los otros dos mencionados. De ahí se sigue que lo que a un hombre le parece contingente en un tiempo determinado, a otro (o incluso a él mismo) le parece necesario, una vez conocidas las causas. Por tanto la contingencia depende principalmente también de nuestro conocimiento, en la medida que no podemos reconocer ninguna razón en contra de que algo no sea o no vaya a ser, si bien en base de sus causas próximas, aún desconocidas para nosotros, es o será necesario.

Se denomina *suerte, un Bonheur, ein Glück*, o *infortunio, un Malheur, ein Unglück*, a lo bueno o lo malo que nos pasa; pero no cualquier cosa buena o mala, sino sólo lo que más probablemente, o al menos con igual probabilidad, podría no habernos sucedido; la suerte, o el infortunio, es pues tanto mayor cuanto menor la probabilidad de que lo bueno, o lo malo, ocurriera. Así, especialmente favorecido por la suerte es aquel que, cavando la tierra, encuentra un tesoro, pues esto es algo que no ocurre ni en mil casos. Si de veinte desertores hay que sortear a uno para ser ahorcado como forma de escarmiento para todos, los diecinueve restantes, a quienes la suerte les ha sonreído, propiamente no pueden ser llamados afortunados, pero el vigésimo, al que le ha tocado el boleto funesto, es el más desafortunado. Si de una batalla, en la que sólo una pequeña parte de los combatientes ha sido baja, tu amigo regresa sano y salvo, no puedes llamarlo afortunado, si tal vez no quieres llamarlo así por haber tenido suerte de conservar la vida.

Capítulo II

Ciencia y conjetura. El arte de la conjetura. Razones para conjeturas. Algunos principios generales al respecto

De lo que es cierto e indubitable decimos que lo *sabemos* o *conocemos*, mientras que de todo lo demás afirmamos que lo *conjeturamos* o *suponemos*.

Conjeturar algo quiere decir tanto como medir su probabilidad. Por eso designamos como *arte de la conjetura* o *de la suposición* el procedimiento de medición más exacta posible de las probabilidades de las cosas[4] a fin de elegir y seguir, en nuestros juicios y acciones, lo que nos parece mejor, más adecuado, más seguro o más aconsejable. Sólo ahí reside toda la sabiduría del filósofo y toda la inteligencia del estadista. Las probabilidades se calculan tanto por el *número* como por el *peso de las razones*, las cuales de alguna forma evidencian o señalan que algo es, será o ha sido. Como *peso* entendemos la fuerza demostrativa.

Las *razones* o bien son *internas*, productos del ingenio, tomadas de los puntos probatorios de la causa, del efecto, del sujeto, de la conexión, de la señal o de cualquier otra circunstancia que parezca tener alguna relación con lo que hay que probar, o bien son *externas*, tomadas de la autoridad y los testimonios de los hombres. Supongamos p.e. que Tito es encontrado asesinado en la calle y Mevio es acusado del asesinato. Las razones de la acusación son: 1. Era de dominio público que Mevio odiaba a Tito (una razón tomada de la causa posible, ya que este odio podía haber inducido a Mevio al asesinato); 2. Mevio palideció durante el interrogatorio y contestaba con temor (una razón tomada del efecto, pues la palidez y el miedo pueden ser debidos a la conciencia del asesinato cometido); 3. En casa de Mevio se encontró una daga ensangrentada (lo que constituye un indicio); 4. el día en que Tito fue asesinado Mevio hizo el mismo camino (circunstancia de lugar y tiempo); 5. Cayo declara que el día anterior al asesinato tuvo lugar una discusión entre Tito y Mevio (testimonio).

Mas antes de pasar a nuestra tarea propiamente dicha, que es la de mostrar el empleo de estas razones para la medición de probabilidades, permítasenos anticipar algunas reglas generales o axiomas que el sentido común dicta y toda persona razonable observa en la vida cotidiana.

1. *No se permiten conjeturas en relación a cosas sobre las que se puede tener una certeza total.* Así, sería absurdo que un astrónomo, que sabe que anualmente hay dos o tres eclipses de luna, quisiera suponer si una luna llena va a ser eclipsada o no, ya que puede averiguar la verdad por medio de cálculos. De igual forma actuaría estúpidamente el juez que, al interrogar al ladrón acerca de dónde se encuentran los bienes robados, tras recibir de éste la respuesta de que se los ha vendido a Sempronio, estando éste presente y pudiendo averiguarlo todo por él de forma cierta y sencilla, hiciera conjeturas acerca de la probabilidad de esta respuesta a partir de los gestos o el tono de voz del ladrón o de las peculiaridades de los objetos robados, o de cualquier otra circunstancia.

Capítulo II

Ciencia y conjetura. El arte de la conjetura. Razones para conjeturas. Algunos principios generales al respecto

De lo que es cierto e indubitable decimos que lo *sabemos* o *conocemos*, mientras que de todo lo demás afirmamos que lo *conjeturamos* o *suponemos*.

Conjeturar algo quiere decir tanto como medir su probabilidad. Por eso designamos como *arte de la conjetura* o *de la suposición* el procedimiento de medición más exacta posible de las probabilidades de las cosas[4] a fin de elegir y seguir, en nuestros juicios y acciones, lo que nos parece mejor, más adecuado, más seguro o más aconsejable. Sólo ahí reside toda la sabiduría del filósofo y toda la inteligencia del estadista. Las probabilidades se calculan tanto por el *número* como por el *peso de las razones*, las cuales de alguna forma evidencian o señalan que algo es, será o ha sido. Como *peso* entendemos la fuerza demostrativa.

Las *razones* o bien son *internas*, productos del ingenio, tomadas de los puntos probatorios de la causa, del efecto, del sujeto, de la conexión, de la señal o de cualquier otra circunstancia que parezca tener alguna relación con lo que hay que probar, o bien son *externas*, tomadas de la autoridad y los testimonios de los hombres. Supongamos p.e. que Tito es encontrado asesinado en la calle y Mevio es acusado del asesinato. Las razones de la acusación son: 1. Era de dominio público que Mevio odiaba a Tito (una razón tomada de la causa posible, ya que este odio podía haber inducido a Mevio al asesinato); 2. Mevio palideció durante el interrogatorio y contestaba con temor (una razón tomada del efecto, pues la palidez y el miedo pueden ser debidos a la conciencia del asesinato cometido); 3. En casa de Mevio se encontró una daga ensangrentada (lo que constituye un indicio); 4. el día en que Tito fue asesinado Mevio hizo el mismo camino (circunstancia de lugar y tiempo); 5. Cayo declara que el día anterior al asesinato tuvo lugar una discusión entre Tito y Mevio (testimonio).

Mas antes de pasar a nuestra tarea propiamente dicha, que es la de mostrar el empleo de estas razones para la medición de probabilidades, permítasenos anticipar algunas reglas generales o axiomas que el sentido común dicta y toda persona razonable observa en la vida cotidiana.

1. *No se permiten conjeturas en relación a cosas sobre las que se puede tener una certeza total.* Así, sería absurdo que un astrónomo, que sabe que anualmente hay dos o tres eclipses de luna, quisiera suponer si una luna llena va a ser eclipsada o no, ya que puede averiguar la verdad por medio de cálculos. De igual forma actuaría estúpidamente el juez que, al interrogar al ladrón acerca de dónde se encuentran los bienes robados, tras recibir de éste la respuesta de que se los ha vendido a Sempronio, estando éste presente y pudiendo averiguarlo todo por él de forma cierta y sencilla, hiciera conjeturas acerca de la probabilidad de esta respuesta a partir de los gestos o el tono de voz del ladrón o de las peculiaridades de los objetos robados, o de cualquier otra circunstancia.

2. *No es suficiente tomar en consideración una u otra razón; hay que investigar todas las que puedan ayudar a nuestro conocimiento y parezcan servir en cualquier respecto para probar el asunto.* Supongamos p.e. que tres barcos abandonan el puerto; tras un tiempo se anuncia que uno de ellos ha naufragado, y comenzamos a hacer suposiciones acerca de cuál de ellos ha sido. Si sólo tomáramos en consideración el número de los barcos, tendríamos que concluir que la desgracia podría haberse cebado en igual medida sobre cualquiera de ellos; pero si recordamos que uno de ellos ya estaba medio podrido, viejo y mal equipado, y además lo pilotaba un joven inexperto, entonces nos parece más probable que sea éste el que se ha hundido, y no uno de los otros dos.

3. *No sólo hay que tener en cuenta todas las razones que hablan en favor de una cosa sino también todas las que pueden ser presentadas en contra suya, a fin de que tras su sopesamiento exacto quede claro cuáles predominan.* Se plantea p.e. la cuestión acerca de si se puede declarar por muerto a un amigo ausente desde hace ya mucho tiempo. En favor de una respuesta afirmativa hablan las razones siguientes: a pesar de todos los esfuerzos realizados, no se ha tenido ninguna noticia de él en veinte años. Los que viajan están sometidos a muchos peligros, de los que se guardan quienes se quedan en casa; quizás haya muerto ahogado, tal vez haya sido asesinado en camino, posiblemente haya perecido en combate, o por enfermedad, o por cualquier otra desgracia en un lugar en el que nadie le conocía. Pero si aún viviera, tendría una edad que incluso en su país sólo pocos alcanzarían. Aunque se encontrara en las más alejadas costas de la India habría escrito, pues sabía que en su país le esperaba una herencia; y otras razones. Mas uno no debe conformarse con estas razones, pues a ellas hay que oponer las siguientes, que hablan en favor de una respuesta negativa de la pregunta planteada: es sabido que se trataba de una persona frívola, despreocupada, a la que no le gustaba escribir, al que los amigos no le importaban nada. Tal vez haya sido apresado por salvajes, por lo que no podía escribir; quizás incluso escribiera alguna vez desde la India pero las cartas se han perdido por negligencia del cartero o por naufragio. Por último, hay muchos que han estado ausentes incluso durante más tiempo y al final han regresado sanos y salvos.

4. *Para examinar cosas generales bastan razones universales y generales; mas para hacer conjeturas sobre cosas individuales también hay que tener en cuenta razones particulares e individuales, caso de que se pueda dar con ellas.* Si sólo se trata de indicar de una forma muy general cuánto es más probable que un joven de veinte años sobreviva a un anciano sexagenario que éste a aquél, no hay nada, aparte de la diferencia de edad y los años, que haya que tomar en cuenta. Pero si se trata de dos personas determinadas, el joven Pedro y el anciano Pablo, entonces hay que tomar en consideración también el estado de salud de ambos y el cuidado con que cada uno de ellos atiende a su salud; pues si Pedro está enfermo, porque da rienda suelta a sus pasiones y vive sin moderación, entonces Pablo puede esperar con toda razón que le sobrevivirá, a pesar de ser mayor.

5. *Cuando las cosas son inciertas o dudosas hay que aplazar las decisiones hasta que se hayan clarificado más. Pero si la ocasión favorable para la acción no*

tolera aplazamientos, entonces siempre hay que elegir de entre dos cosas la que parece más adecuada, segura, favorable y probable, aunque ninguna de ellas tenga efectivamente estas propiedades. Así, en un incendio, del que no es posible escapar más que saltando desde el tejado o desde un piso inferior, es mejor elegir lo último, porque ofrece una mayor seguridad, si bien ninguna de las dos acciones es completamente segura y puede ser ejecutada sin peligro de lastimarse.

6. *Se ha de preferir lo que en cualquier caso puede aprovechar y nunca perjudicar a lo que nunca aprovecha o perjudica.* Aquí resulta pertinente lo que decimos en nuestra tierra: Hilfft es nicht, so schadt es nicht[5]. Esta frase se sigue inmediatamente de lo anterior; pues lo que puede ser de provecho es, en circunstancias iguales, mejor, más seguro y deseable que lo que no puede aprovechar.

7. *El valor de las acciones humanas no hay que medirlo por su éxito.* Pues las acciones más estúpidas a veces son las más exitosas, mientras las más inteligentes obtienen los mayores fracasos. Por eso dice el poeta: *Que prescinda del éxito quien piense que ha de valorar la acción por su éxito.* Si un jugador p.e. pretende obtener tres seis en una sola tirada con tres dados no podrá evitar que se diga de él que actúa estúpidamente, incluso si casualmente ganara. Erróneos son los juicios de la gente, a la que un hombre le parece tanto más extraordinario cuanto más favorecido es por la suerte, pues incluso un crimen ventajoso suyo a menudo será tenido por una buena acción; sobre esto dice de nuevo Owen acertadamente:

"Algo que había sido mal pensado, le salió bien a Anco, y por ello se le llamó sabio, aunque hasta entonces se le consideraba un necio; pero si algo está bien pensado, basta que falle, para que el pueblo estúpido tenga por necio incluso a Catón"[6].

8. *En nuestros juicios debemos guardarnos de conceder a las cosas más importancia de la que les corresponde, y de tener por completamente seguro lo que es más probable que otra cosa, o instar a los otros a aceptarlo como tal.* La confianza que depositamos en las cosas debe ser pues proporcional a su grado de certeza y tanto menor cuanto más pequeña que su certeza es su probabilidad, lo que en lengua vernácula decimos así: Man muss ein jedes in seinem Werth und Unwerth beruhen lassen[7].

9. *Ahora bien, como sólo raras veces se alcanza completa certeza, es necesario y usual tener por absolutamente cierto lo que sólo es moralmente cierto.* Sería pues útil que la autoridad estableciera determinados límites a la certeza moral, por ejemplo: si para alcanzarla se debe exigir 99/100 ó 999/1000 de certeza, a fin de que un juez no pueda ser partidario, sino que tenga presente un punto de vista fijo a la hora de emitir un fallo.

Todo el que tenga experiencia en la vida ordinaria puede establecer por su propia cuenta más axiomas de este tipo; nosotros no podemos recordarlos todos, ya que nos falta la ocasión propicia para su aplicación.

Capítulo III

Tipos diferentes de razones; valoración de su importancia para el cálculo de las probabilidades de las cosas

Quien comprueba las razones de una suposición o conjetura, distinguirá tres tipos distintos: algunas razones *existen necesariamente pero muestran el asunto contingentemente*, otras *existen contingentemente pero lo muestran con necesidad* y finalmente otras *existen contingentemente y lo muestran también contingentemente*. Explicaré la diferencia con ejemplos: Hace ya mucho tiempo que mi hermano no me escribe, y dudo si ello se debe a su pereza o a los negocios; pero temo también que haya muerto. He aquí pues tres razones para la ausencia de cartas: pereza, muerte y negocios. La primera de ellas existe necesariamente (a consecuencia de una necesidad hipotética, ya que sé y acepto que mi hermano es perezoso), si bien sólo muestra contingentemente la ausencia de cartas, ya que la pereza no le debería impedir a mi hermano que escribiera. La segunda razón existe contingentemente (pues mi hermano todavía puede estar vivo), pero muestra necesariamente la ausencia de cartas, ya que un difunto no puede escribir. La tercera razón existe contingentemente y muestra también contingentemente la ausencia de cartas, ya que mi hermano puede tener o no tener negocios, y caso de que los tenga éstos no necesitan ser tan grandes que le impidan escribir. Otro ejemplo es el siguiente: Un jugador ganará, según lo acordado, si obtiene un siete en el lanzamiento de dos dados, y supongo que espera ganar. La razón de su victoria está en la obtención de siete puntos, la cual muestra necesariamente la victoria (en base al acuerdo tomado por los participantes en el juego); pero esta razón sólo existe contingentemente, ya que, además de este resultado, también puede resultar otro número de puntos.

Además de esta variedad de razones se puede tener en cuenta aún otra diferencia entre ellas, a saber: la de ser *puras* o *mixtas*. Denomino razones *puras* a las que en algunos casos prueban una cosa de tal forma que en otros casos no demuestran nada positivamente, y llamo *mixtas* a aquellas razones que en algunos casos prueban una cosa de tal manera que en otros casos demuestran su contraria. Así, supongamos que uno de los contendientes envueltos en una pelea es herido de muerte con una espada, y por medio del testimonio fiable de personas se averigua que el autor llevaba una capa negra. Si Graco y otros tres contendientes vestían capa negra, este atuendo ofrecerá una razón mixta de que el asesinato fue perpetrado por Graco, ya que la capa muestra en un caso su culpabilidad, mientras que en los otros tres casos muestra su inocencia, según que el asesinato hubiera sido cometido por él o por uno de los otros tres, de forma que no puede haber sido cometido por uno de ellos sin que Graco sea inocente. Ahora bien, si durante el interrogatorio Graco palidece, esta palidez proporciona una razón pura, pues muestra la culpabilidad de Graco, si es que procede de una mala conciencia; pero no muestra su inocencia, si es que la palidez tiene otra causa, ya que Graco puede palidecer muy fácilmente a causa de ella, y sin embargo ser el asesino.

De lo dicho se ve claramente que la fuerza probatoria de una razón depende de la cantidad de los casos en que ésta puede existir o no existir, mostrar una cosa o no mostrarla, o mostrar incluso su contraria. Por ello, el grado de certeza, o probabilidad, que proporciona esta razón puede ser calculada a partir de ellos con ayuda de la teoría de la Primera Parte, al modo como se calculan las expectativas de los participantes en un juego de azar. Para demostrarlo supongamos que b es el número de casos en que una razón puede existir contingentemente, c el de los casos en que no puede existir una razón y, $b+c=a$ es el número de ambos. Sea además β el número de casos en que la razón muestra contingentemente una cosa, γ el número de casos en que no la muestra o muestra su contraria, y $\alpha = \beta+\gamma$ el número de ambos. Suponemos además que todos los casos son igualmente posibles, e.d. que es tan fácil que aparezca uno como cualquier otro. De no ser así modificamos la cosa de tal manera que, en lugar de un caso de más fácil ocurrencia que los demás, contamos tantos casos como la facilidad que éste tiene de ocurrir sobre los otros; así p.e. en lugar de un caso tres veces más fácil contamos tres casos que tienen igual facilidad de acontecer como los demás.

1. Cuando una razón puede *existir contingentemente* y *muestra una cosa necesariamente*, entonces, de acuerdo con las estipulaciones adoptadas, hay b casos en los que puede existir, y por consiguiente mostrar la cosa (ó 1), y c casos en los que no puede ni existir ni mostrar nada. Según la Proposición III, Corolario 1 de la Primera Parte[8], esto da el peso $\frac{b.1 + c.0}{a} = \frac{b}{a}$ de manera que tal razón prueba b/a de la cosa o de su certeza.

2. Si la razón *existe necesariamente* y *puede mostrar contingentemente una cosa*, entonces, según nuestras estipulaciones, hay β casos en los que puede mostrar la cosa y γ casos en los que no la muestra, o muestra su contraria. De ahí resulta que esta razón tiene la fuerza probatoria $\frac{\beta.1 + \gamma.0}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$, por lo que prueba un β/α de la certeza de la cosa. Pero si la razón es mixta, entonces resulta (de la misma forma) que la certeza de su contrario es $\frac{\gamma.1+\beta.0}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

3. Cuando una razón *existe contingentemente* y *puede mostrar contingentemente una cosa* primeramente suponemos que existe, en cuyo caso prueba, como se ha indicado antes, β/α de la cosa; pero si la razón es mixta entonces prueba γ/α de su contraria. Pero como hay b casos en los que la razón puede existir, y c casos en que no puede existir, y por tanto nada puede probar, entonces esta razón tiene el

peso $\dfrac{b\dfrac{\beta}{\alpha} + c.0.}{a} = \dfrac{b\beta}{a\alpha}$, para la prueba de la cosa, mientras que si es mixta,

alcanza el valor $\dfrac{b\dfrac{\gamma}{\alpha} + c.0}{a} = \dfrac{b\gamma}{a\alpha}$ para la prueba de su contraria.

4. Pero si además hay varias razones para la prueba de una y la misma cosa y designamos para la

		1ª,2ª,3ª,4ª,5ª,... razón
el número de todos los casos con		$a, d, g, p, s, ...$
el número de todos los casos probadores con	}	$b, e, h, q, t, ...$
el número de todos los casos no probadores o probadores de lo contrario con	}	$c, f, i, r, u, ...$,

entonces la fuerza probatoria resultante de la acción conjunta de todas razones se calcula del modo siguiente. Supongamos primero que todas las razones son *puras*. Entonces, como hemos indicado, el peso de la primera razón es por sí solo igual a $b/a=(a-c)/a$ (en lugar de b/a tenemos que escribir β/α cuando la razón muestra la cosa contingentemente, y $b\beta/a\alpha$ cuando al mismo tiempo existe contingentemente). Mas si concurre una segunda razón que en $e=d-f$ casos prueba la cosa ó 1 y en f casos no la prueba, en estos últimos f casos sólo resulta eficaz el peso $(a-c)/a$ de la primera razón. Ambas razones juntas tienen pues el peso:

$$\frac{(d-f).1 + f\dfrac{a-c}{a}}{d} = \frac{ad - cf}{a\,d} = 1 - \frac{cf}{a\,d}.$$

Si añadimos ahora la tercera razón entonces hay $h=g-i$ casos en los que ésta prueba la cosa e i casos en los que no la prueba y sólo son efectivas las dos primeras razones con su peso $(ad-cf)/ad$. Consecuentemente las tres razones juntas tienen el peso

$$\frac{(g-i).1 + i\,\dfrac{ad - cf}{a\,d}}{g} = \frac{adg - cfi}{adg} = 1 - \frac{cfi}{adg}.$$

Y así sucesivamente, si hay aún más causas. Evidentemente, la probabilidad que todas las razones juntas proporcionan se aleja de la certeza completa o de la unidad en una fracción de unidad equivalente al producto de todos los casos no probadores dividido por el producto de todos los casos de todas las razones.

5. Sean, en segundo lugar, todas las razones *mixtas*. Como ahora el número de todos los casos probadores de la primera razón es igual a b, igual a e el de la segunda, igual a h el de la tercera,... y el de los casos probadores de lo contrario respectivamente igual a $c, f, i, \ldots$ entonces la probabilidad de la cosa a probar se comporta respecto de la de su contraria, sólo en relación a la primera razón, como $b:c$; sólo en relación a la segunda como $e:f$ y sólo en relación a la tercera como $h:i$. Ahora bien, resulta evidente que la fuerza probatoria total resultante de la concurrencia de todas las razones se compone a partir de las fuerzas probatorias de todas las razones individuales, e.d. que la probabilidad de la cosa se comporta respecto de la probabilidad de su contraria como $beh\ldots:cfi\ldots$; consiguientemente, la probabilidad de la cosa equivale a $\frac{beh\ldots}{beh\ldots+cfi\ldots}$ y la de su contraria a $\frac{cfi\ldots}{beh\ldots+cfi\ldots}$.

6. Sean, en tercer lugar, algunas razones *puras* (p.e. las tres primeras de cinco) y algunas *mixtas* (p.e. las dos restantes). Voy a tomar primeramente en cuenta sólo las puras, las cuales (según el parágrafo número 4) prueban $\frac{adg - cfi}{adg}$ de la certeza de la cosa, con lo que aún falta $\frac{cfi}{adg}$ para la unidad. Tenemos pues por así decir $adg\text{-}cfi$ casos en que las tres razones puras prueban conjuntamente la cosa ó 1, y cfi casos en los que no prueban nada y ceden su lugar a las razones mixtas solamente. Pero estas dos últimas tienen para la cosa (según el parágrafo 5) el peso $\frac{qt}{qt + ru}$ y $\frac{ru}{qt + ru}$ para su contraria. Por consiguiente la probabilidad de la cosa resultante de todas las razones es:

$$\frac{(adg\text{-}cfi).1 + cfi\,\frac{qt}{qt+ru}}{adg} = \frac{adg\,(qt+ru) - cfiru}{adg\,(qt+ru)} = 1 - \frac{cfiru}{adg\,(qt+ru)}.$$

Esta probabilidad es en $\frac{cfi}{adg} \cdot \frac{ru}{qt+ru}$ menor que la certeza o unidad; pero el primer quebrado de este producto es exactamente la fracción en que la probabilidad de la cosa resultante de todas las razones puras es menor que la certeza (según el parágrafo 4), mientras que el segundo quebrado equivale a toda la probabilidad de la contraria, resultante (según el parágrafo 5) de las razones mixtas.

7. Cuando además de las razones necesarias para probar la cosa se ofrecen otras razones puras, por medio de las cuales se testimonia su contraria, entonces hay que sopesar individualmente las razones de ambos tipos a fin de averiguar la relación existente entre la probabilidad de la cosa y la probabilidad de su contraria.

Y si ambos tipos de razones son suficientemente fuertes entonces ambas probabilidades pueden sobrepasar notoriamente la mitad de la certeza, con lo que cada una de las posibilidades opuestas entre sí es probable, si bien la una lo es menos que la otra. Así pues es posible que una cosa tenga 2/3 de certeza y que su contraria tenga 3/4 de certeza; cada una de las dos posibilidades contrapuestas es pues probable, si bien la primera lo es menos que la última en la proporción 2/3 : 3/4 = 8 : 9.

Preveo que, a no dudar, en la aplicación especial de estas reglas se presenten muchas circunstancias que pueden ser las culpables de que con frecuencia alguien se equivoque vergonzosamente si no tiene cuidado en la distinción de las razones. Pues en ocasiones éstas pueden parecer distintas, cuando en realidad sólo presentan una única razón, o, a la inversa, diferentes razones puede parecer que constituyen una sola; otras veces se emplean razones que hacen del todo imposible la prueba de lo contrario; etc. Para explicar estas circunstancias voy a añadir todavía algunos ejemplos. En el arriba mencionado sobre Graco supongo que la gente fiable que observó a los que se peleaban constató, además, que el asesino era pelirrojo y que Graco y otros dos más también lo eran, pero que ninguno de ambos llevaba una capa negra. Si ahora alguien quisiera concluir de los indicios de que, aparte de Graco, otros tres llevaban una capa negra y otros dos también eran pelirrojos, que la probabilidad de la culpabilidad de Graco se comporta (según el parágrafo 5) respecto a la probabilidad de su inocencia como 1 : 2.3 = 1 : 6, y que es mucho más probable que Graco sea inocente que culpable, extraería una conclusión completamente falsa. Pues aquí no existen realmente dos razones, sino una única que está apoyada a la vez por dos circunstancias: el color de la capa y el del pelo. Como estas dos circunstancias sólo concurren en Graco, esto constituye un testimonio de que nadie, excepto él, puede ser el asesino.

Supongamos ahora el caso siguiente. En relación a un contrato escrito surge la duda de si la fecha adjunta al documento se ha anticipado con intención fraudulenta. Una razón de que éste no es el caso puede ser la de que el contrato lleva la firma autógrafa de un notario, e.d. de una persona pública que ha jurado su cargo, y de la que es improbable que haya cometido prevaricación, ya que esto no lo puede hacer sino con gran riesgo para su honor y posición; aparte de que entre cincuenta notarios apenas se encontraría uno que se prestase a tal vileza. Por contra, una razón a favor es la de que este notario tiene muy mala fama, que él esperaba sacar muy buen provecho del fraude, y, sobre todo, que ha dado testimonio de algo que es improbable (p.e. que alguien ha prestado a otro 10.000 monedas de oro en una época en que, según la opinión general, apenas si su capital alcanzaba las 100). Si consideramos aquí sólo la razón que se sigue de la responsabilidad y posición del firmante, podemos valorar la probabilidad de la autenticidad de la fecha en 49/50 de certeza. Pero si consideramos las razones para lo contrario, tendremos que reconocer que el documento apenas puede ser auténtico, con lo que la prevaricación posee certeza moral, e.d. poco más o menos que una certeza de 999/1000. De aquí no podemos concluir sin embargo que la probabilidad de la autenticidad del documento se comporte, respecto de su carácter fraudulento (según el parágrafo 7) como 49/50 : 999/1000, e.d. que ambos son casi iguales. Pues si suponemos que el notario tiene mala reputación, entonces estamos asumiendo que no forma parte de aquellos 49 notarios leales que desprecian el engaño, sino que se trata del quincuagésimo, al que la infidelidad a su función no le causa mala conciencia; ahora bien, con ello la razón que hubiera podido testimoniar la autenticidad del domumento pierde toda su fuerza probatoria y deviene completamente vacua.

Capítulo IV

Sobre las dos formas de calcular el número de casos. Qué pensar del modo de averiguarlo por medio de la observación. El principal problema al respecto y demás

En el capítulo anterior se indicó cómo determinar y valorar, a partir de los números de casos en que pueden existir o no existir razones para una cosa cualquiera, las fuerzas probatorias y las probabilidades proporcionales a ellas capaces de mostrarla o no mostrarla, o mostrar incluso su contraria. Y concluimos que, para la formación correcta de suposiciones sobre una cosa cualquiera, tan sólo es preciso averiguar exactamente el número de estos casos y luego determinar en qué medida unos casos pueden ocurrir más fácilmente que los otros. Pero aquí parece residir precisamente la dificultad, pues esto sólo es posible en un número mínimo de fenómenos y casi exclusivamente en los juegos de azar. Pues, a fin de que los jugadores tuvieran las mismas esperanzas de ganar, los juegos de azar fueron diseñados por su creadores de tal manera que los números de casos en que el resultado es ganancia o pérdida están determinados previamente y son conocidos, y todos los casos tienen la misma facilidad de ocurrencia. Pero éste no es el caso para los muchísimos otros fenómenos que dependen de las fuerzas de la Naturaleza o del arbitrio de los hombres. Así, p.e. en los juegos de dados el número de casos es conocido, pues para cada dado hay tantos casos como caras tiene; todos estos casos son también igualmente posibles, ya que de la morfología igual de las caras y de la distribución homogénea del peso del dado no hay ninguna razón para que una cara resulte con más facilidad que otra; cosa que ocurriría si las caras no fueran iguales y una parte del dado fuera de un material más pesado que el resto. Igualmente, si se sabe cuantas piedrecitas blancas y cuántas negras hay en una urna se sabrá también los números de casos en la extracción de una piedrecita, y si no se da ninguna razón del porqué ésta u otra piedrecita se obtiene más fácilmente que cualquier otra, entonces todas las piedrecitas se pueden extraer con la misma facilidad. Pero, ¿qué mortal podría averiguar el número de enfermedades (e.d. el número de casos) que aquejan al cuerpo humano en todas sus partes en cada edad y pueden producir la muerte, e indicar en qué medida una enfermedad resulta más fácilmente funesta que otra para el hombre, p.e. la peste que la hidropesía, la hidropesía que la fiebre, a fin de derivar una suposición sobre la relación de vida y muerte de las generaciones futuras? ¿Quién podría enumerar las incontables transformaciones a que diariamente está sometida la atmósfera y querer conjeturar ya hoy mismo las características que tendrá dentro de un mes o incluso en un año? Más aún, ¿quién puede haber estudiado tan profundamente la naturaleza del espíritu humano o la admirable construcción de nuestro cuerpo, que en los juegos, que dependen total o parcialmente de la agudeza mental o de la agilidad corporal de los jugadores, desee determinar los casos en los que este o aquel jugador puede ganar o perder? Como éstas y cosas semejantes dependen de causas muy ocultas, que además continuamente engañan a nuestro conocimiento, a causa de la infinita variedad de sus interacciones, carecería de sentido querer investigar algo de esta forma.

Pero hay abierto otro camino para hallar lo que buscamos y averiguar, por lo menos *a posteriori*, e.d. por medio del resultado de lo que se ha observado en numerosos casos en ejemplos similares, lo que *a priori* no podemos determinar. Para ello hay que admitir que todo suceso individual puede acontecer o no acontecer en el mismo número de casos, al igual que se observó antes, en un estado igual de las cosas, si tuvo lugar o no. Supongamos p.e. que se ha observado que, de 300 personas de la edad y constitución de Tito, 200 han muerto antes de 10 años, mientras que los otros han vivido más; se puede concluir con suficiente seguridad que hay el doble de casos a favor de que Tito salde su deuda con la Naturaleza en el próximo decenio que a favor de que sobreviva más allá de este periodo. De igual forma, si alguien ha venido observando desde hace años la meteorología y se ha percatado de la frecuencia en que ha hecho buen tiempo o ha llovido; o si alguien ha observado muy asiduamente a dos jugadores y ha visto con qué frecuencia gana uno u otro, entonces puede determinar la proporción probable del número de casos en que los mismos sucesos pueden ocurrir o no ocurrir en el futuro en condiciones iguales.

Esta forma empírica de determinación del número de casos por medio de observaciones no es nueva ni inusual; pues ya el famoso autor del *Ars cogitandi*, un hombre agudo e inteligente[9], describió un procedimiento muy similar en el capítulo 12 y siguientes de la última parte de su obra, y todas las personas constatan el mismo procedimiento en la vida diaria. También le resulta evidente a toda persona que, para enjuiciar un suceso cualquiera, no basta llevar a cabo una observación u otra, sino que es necesario un número grande de observaciones. En ocasiones también un hombre sencillo carente de educación ha experimentado por sí mismo, siguiendo un instinto natural, que, cuantas más observaciones haya a disposición, tanto menor es el riesgo de desviarse de la verdad. Pero si bien esto, por la naturaleza de la cosa, lo entiende cualquiera, la prueba fundada en principios científicos no es evidente, por lo que estoy obligado a ofrecerla en este lugar. Pero creería que mi contribución es muy pequeña si me quedara en la prueba de este único punto que todo el mundo conoce. Más bien hay que tomar en consideración aquello en lo que tal vez nadie haya pensado todavía. Se trata pues de investigar si, por medio del incremento de las observaciones, crece constantemente la probabilidad de que el número de observaciones favorables alcance, respecto del número de observaciones desfavorables, la proporción verdadera, y si esta probabilidad supera en definitiva todo grado de certeza; o si el problema tiene más bien, y por así decir, su asíntota, e.d. si existe un grado determinado de la certeza de haber encontrado la verdadera proporción de los casos, un grado que nunca pueda ser superado, cualquiera que sea el incremento de las observaciones, p.e. que nunca podamos conseguir una seguridad más allá de 1/2, 2/3 o 3/4 de certeza. Para que lo que pienso quede claro por medio de un ejemplo, supongamos que ignoras que una urna contiene 3000 piedrecitas blancas y 2000 negras, pero deseas determinar esta proporción extrayendo piedrecitas una tras otra (pero de tal forma que también las reintroduzcas antes de extraer una nueva, a fin de que no disminuya el número de piedrecitas en la urna) y observando con qué frecuencia resulta una piedrecita blanca y con qué frecuencia sale una negra. La cuestión que se plantea es si esto podrías hacerlo tan a menudo que fuera diez, cien o mil veces más probable (e.d. moralmente cierto) que el número de extracciones de piedrecitas blancas alcance, respecto del número de piedrecitas negras extraídas, la proporción $1\frac{1}{2}$ que existe entre las piedrecitas, a que estos números estén en una proporción diferente. Pero si esto no fuera posible, confieso que nuestro intento de determinar el número de casos por medio de observaciones no funcionaría. Ahora bien, si fuera posible, y en definitiva se lograra de esta manera certeza moral (que esto es así lo voy a mostrar en el capítulo siguiente), entonces podríamos encontrar *a posteriori* los números de los casos casi tan bien como si nos fueran conocidos *a priori*. Y esto basta, según el Axioma 9 del capítulo II, para la vida civil, donde lo moralmente cierto se considera absolutamente cierto, a fin de conducir nuestra suposición en cualquier dominio aleatorio de forma no menos científica que en los juegos de azar. Pues si en lugar de la urna imaginamos la atmósfera o el cuerpo humano, que encierran en sí tal cantidad de transformaciones diferentes y enfermedades como piedrecitas la urna, podremos determinar de igual forma por medio de observaciones cuánta más facilidad de acontecer tiene un suceso que otro en esos dominios.

Pero para que esto no se entienda mal, hay que hacer notar que la razón entre los números de casos que nos proponemos determinar por medio de observaciones sólo la obtendremos con una aproximación determinada, e.d. incluida entre dos límites, que pueden ser aceptados arbitrariamente próximos entre sí, y no de forma absolutamente exacta (pues entonces resultaría lo contrario y sería tanto más improbable haber encontrado la proporción correcta cuantas más observaciones hubieran sido hechas). Si en el ejemplo anterior de la urna que contiene piedrecitas suponemos dos razones, p.e. 301/200 y 299/200, ó 3001/2000 y 2999/2000, ó etc., de las que una es algo menor y la otra algo mayor que $1\frac{1}{2}$, entonces con cualquier probabilidad resulta que es más probable que la razón encontrada por medio de observaciones frecuentemente repetidas se sitúe dentro que fuera de estos límites de la razón $1\frac{1}{2}$.

Este es el problema que me he propuesto aquí sacar a la luz, después de que lo llevo meditando desde hace ya 20 años; su novedad y su utilidad extraordinariamente grande, juntamente con su gran dificultad permiten acrecentar la importancia y significado de los demás capítulos de esta teoría. Pero antes de entrar en su solución quiero refutar brevemente las objeciones que algunos eruditos han planteado[10].

1. En primer lugar objetan que la razón entre las piedrecitas es de otra naturaleza que la que existe entre las enfermedades y las transformaciones atmosféricas, pues el número de aquéllas es determinado, pero el de éstas es indeterminado e inseguro. A ello respondo que, en relación a nuestro conocimiento, ambas son igualmente inciertas e indeterminadas. Pero, que una cosa por su propia naturaleza sea incierta e indeterminada, a nosotros nos resulta tan incomprensible como que Dios al mismo tiempo haya creado algo y no lo haya creado; pues todo lo que Dios ha creado, por el mero hecho de crearlo, también lo ha determinado.

2. En segundo lugar objetan que el número de piedrecitas es finito, pero infinito el de las enfermedades. A lo que respondo que este último no es tanto infinito como asombrosamente grande; mas aunque admitiéramos que es infinitamente grande, es sabido que también entre dos números infinitamente grandes puede existir una relación susceptible de ser expresada, o bien exactamente o al menos tan exactamente como se desee, por medio de números finitos. Así, la circunferencia de un círculo siempre mantiene una relación determinada con su diámetro, la cual sólo se puede indicar exactamente por medio de infinitos decimales del *número de Ludolfo*, si bien Arquímedes, Mecio y Ludolfo[11] lo acotan entre límites que bastan para su uso. Por ello nada nos impide determinar, por medio de un número finito de observaciones, la razón que existe entre dos números infinitamente grandes, los cuales pueden ser representados de modo muy aproximado por números finitos.

3. La tercera objeción que hacen es la de que el número de enfermedades no es constante, pues diariamente aparecen enfermedades nuevas. Yo no niego el hecho de que en el transcurso del tiempo las enfermedades se multiplican, pero se desviaría rotundamente de la verdad quien, a partir de observaciones actuales, quisiera extraer conclusiones sobre las épocas antediluvianas. De aquí se sigue pues que en ocasiones hay que llevar a cabo nuevas observaciones; también en el caso de las piedrecitas serían necesarias nuevas observaciones si se supusiera que el número de ellas en la urna ha cambiado[12].

Capítulo V

Solución del problema anterior

A fin de llevar a cabo esta minuciosa prueba del modo más breve y claro posible, la voy a formular toda de manera enteramente matemática, por lo que adelanto los lemas siguientes, probados los cuales todo lo demás resultará de su aplicación.

Lema 1. Sea dada la serie de los números naturales

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r\text{-}1,\ r,\ r{+}1,\ \ldots,\ r{+}s,$$

donde r es un valor medio cualquiera y r-1 y r+1 los designadores de los números vecinos a él a derecha e izquierda. Continuando la serie hasta que su último miembro sea un múltiplo entero cualquiera de $r+s$, p.e. $nr+ns$, surge la serie nueva:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ nr-n,\ \ldots,\ nr,\ \ldots,\ nr+n,\ \ldots,\ nr+ns.$$

Un incremento de n comporta un aumento del número de miembros situados entre nr y $nr+n$ y $nr-n$ respectivamente, así como del número de miembros que se extienden desde los miembros límite $nr+n$ y $nr-n$ hasta los miembros más extremos $nr+ns$ y 0. Ahora bien, por muy grande que se elija n, el número de miembros mayores que $nr+n$ nunca superará s-1 veces al número de miembros situados entre nr y $nr+n$, ni el número de miembros menores que $nr-n$ superará nunca más de r-1 veces al número de miembros situados entre $nr-n$ y nr.

Prueba. El número de miembros mayores que $nr+n$ es igual a $n(s-1)$, y el de los miembros menores que $nr-n$ equivale a $n(r-1)$. El número de miembros situados entre nr (exclusive) y uno de ambos límites (inclusive) es n. Sucede empero siempre que

$$n(s-1):n = s-1:1$$

y

$$n(r-1):n = r-1:1\ .$$

De ahí resulta, etc[13].

Lema 2. Cuando el binomio $r+s$ se eleva a una potencia cualquiera entonces el desarrollo tiene siempre un miembro más que unidades tiene el exponente. Pues el desarrollo de un cuadrado tiene tres miembros, el de un cubo cuatro, el de una cuarta potencia cinco, etc.

Lema 3. En el desarrollo de una potencia del binomio $r+s$, cuyo exponente es un múltiplo entero cualquiera de $r+s=t$, p.e. $n(r+s)=nt$, un miembro M tiene el valor mayor de todos los miembros, cuando el número de todos los que le preceden se comporta como s a r en relación a todos los miembros que le siguen, o -lo que es lo mismo-, cuando en él los exponentes de r y s se comportan como r a s y cada miembro próximo a la izquierda o a la derecha del miembro M tiene un mayor valor que un miembro lejano situado al mismo lado. En segundo lugar, M está en una razón menor con un miembro próximo que -situados los miembros a igual distancia- este otro con los más lejanos.

Prueba. 1. Los matemáticos saben que la nt-ésima potencia del binomio $r+s$ se expresa por medio de la serie siguiente:

$$(r+s)^{nt} = r^{nt}+\binom{nt}{1} r^{nt-1}s+\binom{nt}{2} r^{nt-2}s^2+\ldots+\binom{nt}{2} r^2s^{nt-2}+\binom{nt}{1} rs^{nt-1}+s^{nt}$$

en la que los exponentes de r descienden constantemente mientras que los de s crecen y los coeficientes de los miembros primero y último, segundo y penúltimo, etc. coinciden[14]. Ahora bien, como el número de todos los miembros excepto M (según el Lema 2) es igual a $nt=nr+ns$ y, según lo supuesto, el número de miembros que anteceden a M se comporta con respecto al de los que le siguen como s a r, entonces el número de miembros que le preceden ha de ser ns y el de los que le siguen nr. Según la ley de formación de sucesiones es pues

$$M=\binom{nt}{ns} r^{nr}s^{ns}=\binom{nt}{nr} r^{nr}s^{ns} .$$

Si respectivamente designamos con L_1, L_2, L_3,... y con R_1, R_2, R_3,... los miembros situados sucesivamente a izquierda y derecha de M, entonces resulta:

$$L_1=\binom{nt}{ns-1} r^{nr+1}s^{ns-1} \quad , \quad R_1=\binom{nt}{nr-1} r^{nr-1}s^{ns+1} \ ;$$

$$L_2=\binom{nt}{ns-2} r^{nr+2}s^{ns-2} \quad , \quad R_2=\binom{nt}{nr-2} r^{nr-2}s^{ns+2} \ ;$$

....

Dividiendo se sigue de aquí :

$$\frac{M}{L_1}=\frac{(nr+1)s}{nsr} \ , \ \frac{M}{R_1}=\frac{(ns+1)r}{nrs} \ ;$$

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{(nr+2)s}{(ns-1)r} \ , \ \frac{R_1}{R_2}=\frac{(ns+2)r}{(nr-1)s} \ ;$$

....

Pero como[15]

$$(nr+1)s > nsr \quad , \quad (ns+1)r > nrs \quad ,$$

$$(nr+2)s > (ns-1)r, \quad (ns+2)r > (nr-1)s \ ,$$

....,

resulta

$$M > L_1, \quad M > R_1;$$

$$L_1 > L_2, \quad R_1 > R_2;$$

.... **Q.E.D.**

2. Es obvio que

$$\frac{nr+1}{ns} < \frac{nr+2}{ns-1}, \quad \frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$$

y por consiguiente también es

$$\frac{(nr+1)s}{nsr} < \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r}, \quad \frac{(ns+1)r}{nrs} < \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s}$$

o, lo que es lo mismo[16]

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_1}{L_2}, \quad \frac{M}{R_1} < \frac{R_1}{R_2}.$$

Se puede mostrar igualmente, que

$$\frac{L_1}{L_2} < \frac{L_2}{L_3} < \ldots, \quad \frac{R_1}{R_2} < \frac{R_2}{R_3} < \ldots$$

Consiguientemente el miembro mayor M está, con un miembro muy próximo a él, en una razón menor que éste con uno más alejado situado al mismo lado, siempre que ambos intervalos sean iguales. **Q.E.D.**

Lema 4. En la potencia de un binomio con exponente nt el número n puede ser tomado tan grande que las razones del miembro mayor M con otros dos miembros L_n y R_n, los cuales son los n-simos miembros del desarrollo de la potencia situados a izquierda y derecha de M, tienen los valores mayores que cualquier razón dada.

Prueba. Como, según el lema anterior, M tiene el valor:

$$M = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nr+1)}{1.2.3\ldots ns} r^{nr}s^{ns}$$

$$= \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(ns+1)}{1.2.3\ldots nr} r^{nr}s^{ns}$$

entonces los miembros L_n y R_n, según la ley de formación de sucesiones, tienen los valores:

$$L_n = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nr+n+1)}{1.2.3\ldots(ns-n)} r^{nr+n}s^{ns-n},$$

$$R_n = \frac{nt(nt-1)\,(nt-2)\ldots(ns+n+1)}{1.2.3\ldots(nr-n)}\, r^{nr-n} s^{ns+n}\ .$$

De aquí resulta, tras eliminar por división factores comunes:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nr+n)\,(nr+n-1)\,(nr+n-2)\ldots(nr+1)}{(ns-n+1)\,(ns-n+2)\,(ns-n+3)\ldots ns}\,\frac{s^n}{r^n}\,,$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(ns+n)\,(ns+n-1)\,(ns+n-2)\ldots(ns+1)}{(nr-n+1)\,(nr-n+2)\,(nr-n+3)\ldots nr}\,\frac{r^n}{s^n}$$

o también, tras distribuir igualmente r^n y s^n en los factores individuales de los coeficientes, pues los numeradores y denominadores de los coeficientes tienen n factores cada uno:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nrs+ns)\,(nrs+ns-s)\,(nrs+ns-2s)\ldots(nrs+s)}{(nrs-nr+r)\,(nrs-nr+2r)\,(nrs-nr+3r)\ldots nrs}\,,$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(nrs+nr)\,(nrs+nr-r)\,(nrs+nr-2r)\ldots(nrs+r)}{(nrs-ns+s)\,(nrs-ns+2s)\,(nrs-ns+3s)\ldots nrs}\,.$$

Las razones obtienen sin embargo un valor infinito cuando n deviene infinitamente grande; pues entonces desaparecen los números 1, 2, 3,... contra n, y los factores $nr \pm n \mp$ 1, 2, 3,... tienen el mismo valor que $nr \pm n$, y los factores $ns \mp n \pm 1$, 2, 3,... el mismo que $ns \mp n$, de manera que si se divide numerador y denominador por n se obtiene:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(rs+s)\,(rs+s)\,(rs+s)\ldots rs}{(rs-r)\,(rs-r)\,(rs-r)\ldots rs}\,,$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(rs+r)\,(rs+r)\,(rs+r)\ldots rs}{(rs-s)\,(rs-s)\,(rs-s)\ldots rs}\,.$$

Ambas magnitudes constan de tantas fracciones $\frac{rs+r}{rs-s}$ y $\frac{rs+s}{rs-r}$ como factores hay en el numerador (o denominador), cuyo número es n, e.d. infinitamente grande, pues la diferencia entre los primeros factores: $nr+n$ y $ns+n$ y los últimos: $nr+1$ y $ns+1$, respectivamente, es n-1[17]. Por eso aquellas dos razones son las potencias infinitamente grandes de las fracciones $\frac{rs+s}{rs-r}$ y $\frac{rs+r}{rs-s}$, y por consiguiente ellas mismas infinitamente grandes[18]. Quien dude de esta conclusión que tome dos sucesiones geométricas infinitamente decrecientes con los cocientes $\frac{rs-r}{rs+s}$ y $\frac{rs-s}{rs+r}$; en ellas la razón del primer miembro al tercero, cuarto, quinto,..., último es igual al resultado de multiplicar por sí mismas las fracciones $\frac{rs+s}{rs-r}$ y $\frac{rs+r}{rs-s}$ dos, tres, cuatro, ..., infinitas veces. Pero evidentemente la razón del primero al último miembro, que en una sucesión infinitamente decreciente tiene que ser igual a cero, es infinitamente grande. Por eso resulta que las potencias infinitamente grandes de $\frac{rs+s}{rs-r}$ y $\frac{rs+r}{rs-s}$ también tienen un valor infinitamente grande. Con ello se ha demostrado que en el desarrollo de la potencia infinitamente alta de un binomio el miembro mayor M está con los miembros L_n y R_n en razones que son mayores que cualquier razón indicable.

Lema 5. En la potencia de un binomio con exponente nt el número n puede ser elegido tan grande que la suma de todos los miembros a partir del miembro mayor M hacia ambos lados hasta inclusive los miembros L_n y R_n está en una razón tal con la suma de todos los demás miembros situados a ambos lados fuera de estos límites L_n y R_n, que ninguna otra razón dada puede tener un valor mayor.

Prueba. Como, según la afirmación segunda del Lema 3,

$$\frac{M}{L_1}<\frac{L_n}{L_{n+1}}, \; \frac{L_1}{L_2}<\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, \; \frac{L_2}{L_3}<\frac{L_{n+2}}{L_{n+3}}, \dots$$

también es

$$\frac{M}{L_n}<\frac{L_1}{L_{n+1}}<\frac{L_2}{L_{n+2}}<\frac{L_3}{L_{n+3}}<\dots$$

Pero según el Lema 4, para un valor infinitamente grande de n, el valor de $\frac{M}{L_n}$ deviene infinitamente grande y por consiguiente las razones $\frac{L_1}{L_{n+1}}, \frac{L_2}{L_{n+2}}, \frac{L_3}{L_{n+3}}$, ... tienen también valores infinitamente grandes. Pero de ahí se sigue además:

$$\frac{L_1+L_2+L_3+\dots+L_n}{L_{n+1}+L_{n+2}+L_{n+3}+\dots+L_{2n}}=\infty,$$

e.d. la suma de todos los miembros entre el miembro mayor M e inclusive el miembro L_n es infinitamente mayor que la suma de igual número de miembros situados a la izquierda de L_n. Mas como según el Lema 1 el número de todos los miembros situados a la izquierda de L_n sólo supera s-1 veces (e.d. un número finito de veces) al de los situados entre L_n y M[19], y, como según el Lema 3, los miembros devienen tanto más pequeños cuanto más se alejan por la izquierda de L_n, entonces todos los miembros situados entre inclusive L_n y M (incluso si éste no se cuenta) superan infinitamente en conjunto a todos los miembros situados a la izquierda de L_n.

De igual forma se muestra que todos los miembros situados entre inclusive R_n y M (incluso si éste no se cuenta) superan infinitamente en conjunto a todos los miembros situados a la derecha de R_n, cuyo número, según el Lema 1, sólo supera r-1 veces al de los primeros. Por eso, la suma de todos los miembros situados entre los límites L_n y R_n, ambos inclusive, pero excluido el miembro mayor M, supera infinitamente a la de todos los que están fuera de ellos; y esto es aún más válido si a la primera suma se le añade el miembro M. **Q.E.D.**

Escolio. Quienes no estén familiarizados con consideraciones de infinitud pueden objetar contra los Lemas cuarto y quinto lo siguiente: Aunque en el caso de un valor infinitamente grande del número n los factores de las expresiones que representan las razones $\frac{M}{L_n}$ y $\frac{M}{R_n}$, a saber $nr \pm n \mp 1,2,3,...$ y $ns \mp n \pm 1,2,3,...$ tengan el mismo valor que $nr \pm n$ y $ns \mp n$, pues los números 1,2,3,... desaparecen en los factores individuales en relación a las otras partes, sin embargo multiplicados entre sí todos estos números producen también (por haber infinitos factores) un número infinitamente grande y por tanto se sustrae infinitamente mucho de las potencias infinitamente elevadas de las fracciones $\frac{rs+s}{rs-r}$ y $\frac{rs+r}{rs-s}$, por lo que pueden resultar números finitos. La mejor forma de responder a esta objeción es haciendo el cálculo real para un valor finito de n; mostraré que, también en una potencia finitamente alta del binomio, la suma de los miembros situados entre los valores límite L_n y R_n, ambos inclusive, está en una razón con la suma de todos los miembros restantes que supera el valor c de cualquier razón dada arbitrariamente grande. Pero si es posible mostrar esto, la objeción se derrumba necesariamente.

Al efecto tomo, para los miembros situados a la izquierda de M una razón menor que $\frac{rs+s}{rs-r}$, p.e. $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$ y la multiplico tantas veces por sí misma (m veces) que el producto resulta igual o mayor que $c(s-1)$:

$$\frac{(r+1)^m}{r^m} \geq c\,(s-1)\,.$$

Para determinar m se tiene:

$$m\log(r+1) - m\log(r) \geq \log[c(s-1)],$$

por lo que hay que elegir

$$m \geq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1) - \log(r)}$$

Ahora bien, en el Lema 4 la razón $\frac{M}{L_n}$ se determinó a partir del producto de las fracciones

$$\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}, \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}, \frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}, ..., \frac{nrs+s}{nrs}$$

cada una de las cuales es menor que $\frac{rs+s}{rs-r}$ y se aproxima tanto más a esta fracción cuanto mayor se toma n[20]. Por consiguiente, una vez que se ha elegido un n adecuado, una de estas fracciones tiene que llegar a ser igual a $\frac{r+1}{r}$. Si ahora se designa con m el lugar de esta fracción en la serie de factores, será[21]:

$$\frac{r+1}{r} = \frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr},$$

y consecuentemente

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1},$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

Yo afirmo ahora que este valor encontrado para nt indica el exponente de la potencia a la que hay que elevar el binomio $(r+s)$, si en su desarrollo el miembro mayor M debe superar al miembro límite L_n más de $c(s\text{-}1)$ veces. Por esta suposición la fracción m-sima en el producto anterior es igual a $\frac{r+1}{r}$, y por lo supuesto es $\frac{(r+1)^m}{r^m} \geq c\ (s\text{-}1)$; pero todas las fracciones que preceden en el producto a la m-sima son mayores que $\frac{r+1}{r}$ y todas las que le siguen son como mínimo mayores que 1. Consiguientemente el producto de todos los miembros sobrepasa con seguridad $\frac{(r+1)^m}{r^m}$, y mucho más $c(s\text{-}1)$; y como este producto equivale a $\frac{M}{L_n}$, entonces resulta que

$$M > c(s\text{-}1)L_n\ [22].$$

Además, como se mostró antes, es:

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} <...< \frac{L_n}{L_{2n}}$$

luego también sucede que

$$L_1 > c(s\text{-}1)\,L_{n+1}\,,$$
$$L_2 > c(s\text{-}1)\,L_{n+2}\,,$$
$$L_3 > c(s\text{-}1)\,L_{n+3}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_n > c(s\text{-}1)\,L_{2n}\,,$$

y sumando:

$$L_1+L_2+L_3+\ldots+L_n > c(s\text{-}1)\,[L_{n+1}+L_{n+2}+L_{n+3}+\ldots+L_{2n}].$$

Pero como a partir de M los miembros disminuyen constantemente, y como el número de los situados a la izquierda de L_n no sobrepasa más de s-1 veces el número de los miembros L_1, L_2,..., L_n, entonces resulta además que

$$L_1+L_2+L_3+\ldots+L_n > c\,[L_{n+1}+L_{n+2}+L_{n+3}+\ldots].$$

donde en el corchete de la derecha aparecen todos los miembros situados a la izquierda de L_n.

De la misma manera procedo en relación a los miembros situados a la derecha de M. Ahora tomo la relación

$$\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs\text{-}s}$$

y encuentro, cuando determino m, que

$$\frac{(s+1)^m}{s^m} \geq c\,(r\text{-}1)$$

y

$$m \geq \frac{\log\,[c(r\text{-}1)]}{\log\,(s+1)\,\text{-}\,\log\,(s)}\,.$$

Seguidamente coloco en la sucesión de fracciones

$$\frac{nrs+nr}{nrs\text{-}ns+s}\,,\ \frac{nrs+nr\text{-}r}{nrs\text{-}ns+2s}\,,\ \frac{nrs+nr\text{-}2r}{nrs\text{-}ns+3s}\,,\ldots,\ \frac{nrs+r}{nrs}\,,$$

que determinan la razón $\frac{M}{R_n}$, la fracción m-sima, es decir

$$\frac{nrs+nr\text{-}mr+r}{nrs\text{-}ns+ms} = \frac{s+1}{s}\,,$$

de donde resulta:

$$n = m + \frac{mr-r}{s+1}$$

y

$$nt = mt + \frac{mrt-rt}{s+1} \,.$$

Después de lo cual se muestra, de la misma forma que antes, que, en el binomio $r+s$, elevado a la nt-sima potencia, el miembro mayor M sobrepasa al miembro derecho R_n más de $c(r\text{-}1)$ veces, y también que la suma de todos los miembros situados entre exclusive M e inclusive R_n sobrepasa más de c veces a la suma de todos los demás miembros, cuyo número sólo es igual a $r\text{-}1$ veces el número de los primeros miembros.

De ahí infiero finalmente que la suma de todos los miembros entre L_n y R_n (ambos inclusive) es más de c veces mayor que el número de todos los demás miembros, cuando el binomio $r+s$ se eleva a la potencia cuyo exponente es igual al mayor de los números

$$mt + \frac{mst-st}{r+1} \quad y \quad mt + \frac{mrt-rt}{s+1} \,.$$

Se ha encontrado pues una potencia finitamente alta que posee la propiedad deseada. **Q.E.F.**

Ahora sigue finalmente el teorema por cuya causa se han llevado a cabo todas las consideraciones precedentes y cuya prueba sólo precisa de la aplicación de las hipótesis establecidas. Para evitar perífrasis molestas voy a llamar *fértiles* o *favorables* a los casos en que un suceso cualquiera puede acaecer, y *estériles* o *desfavorables* a aquéllos en los que el mismo suceso no puede ocurrir. Igualmente llamo *fértiles* o *favorables* a los ensayos y observaciones en que ocurre uno de los casos favorables, y *estériles* o *desfavorables* a aquéllos en que acontece uno de los casos desfavorables.

Teorema[23]. Supóngase que el número de los casos favorables se comporta respecto al de los casos desfavorables como $\frac{r}{s}$, o sea respecto del número total de casos como $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$, estando contenida esta última razón entre los límites $\frac{r+1}{t}$ y $\frac{r-1}{t}$. Así pues hay que demostrar ahora que se pueden realizar tantas observaciones que resulte tantas veces como se quiera (p.e. c veces) más probable que la razón de las observaciones favorables respecto de todas las observaciones realizadas se sitúa dentro que no fuera de estos límites, e.d. que no es mayor que $\frac{r+1}{t}$, ni menor que $\frac{r-1}{t}$.

Prueba. Supóngase igual a nt el número de todas las observaciones a realizar. La pregunta es: cuál es la esperanza de que todas las observaciones sean favorables; y luego: todas excepto una, todas excepto dos, tres, cuatro,... Pero como, por suposición, en cada observación hay t casos posibles, de los que r son favorables y s desfavorables, y como cada caso de una observación puede ser combinado con cada caso de una segunda observación y los casos combinados pueden ser combinados de nuevo con cada caso de una tercera, cuarta,... observación, entonces es evidente que aquí hay que aplicar tanto la regla que sigue a la nota de la Proposición XII de la primera parte, como su corolario segundo[24]. De acuerdo con ello, la esperanza de ninguna observación desfavorable es $\frac{r^{nt}}{t^{nt}}$, la de una observación desfavorable es $\binom{nt}{1}\frac{r^{nt-1}s}{t^{nt}}$, la de dos, tres,... observaciones desfavorables $\binom{nt}{2}\frac{r^{nt-2}s^2}{t^{nt}}, \binom{nt}{3}\frac{r^{nt-3}s^3}{t^{nt}}$,... Así pues, si se suprime el denominador común t^{nt}, los grados de probabilidad o números de casos en que puede ocurrir que todas las observaciones sean favorables, que todas excepto una lo sean, todas excepto dos, tres,... serán

$$r^{nt}, \binom{nt}{1} r^{nt-1}s, \binom{nt}{2} r^{nt-2}s^2, \binom{nt}{3} r^{nt-3}s^3, \ldots .$$

Pero estas expresiones son precisamente los miembros de la nt-ésima potencia del binomio $r+s$ que han sido observados en nuestros Lemas, por lo que todo lo demás está claro. De la naturaleza de este desarrollo de series resulta evidente que el número de casos en que hay nr observaciones favorables y ns observaciones desfavorables restantes es, según el Lema 3, exactamente igual al miembro mayor M, ya que éste está precedido por ns miembros y seguido de nr miembros. Igualmente es claro que el número de casos en que de todas las nt observaciones $nr+n$ ó $nr-n$ son favorables, mientras que las demás son desfavorables, viene dado respectivamente por los miembros L_n y R_n, ya que éstos se distancian en n miembros a ambos lados del miembro mayor M. Consiguientemente el número de casos en que no hay más de $nr+n$ observaciones favorables, ni menos de $nr-n$, de entre todas las nt observaciones, es igual a la suma de todos los miembros del desarrollo de $(r+s)^{nt}$ situados entre L_n y R_n, ambos inclusive. El número de los casos restantes en que hay más de $nr+n$ o menos de $nr-n$ observaciones favorables equivale a la suma de todos los demás miembros del desarrollo de la potencia situados fuera del intervalo L_n hasta R_n. Pero como el exponente del binomio puede ser tomado tan grande que la suma de los miembros comprendidos entre los límites L_n y R_n, ambos inclusive, sea c veces mayor que la suma de los restantes miembros fuera de estos límites (según los Lemas 4 y 5), entonces resulta lo siguiente: Se pueden llevar a cabo tantas observaciones, que el número de casos en que la razón de las favorables respecto a todas las observaciones realizadas no sobrepasa los valores límites $\frac{nr+n}{nt}$ y $\frac{nr-n}{nt}$ o $\frac{r+1}{t}$, $\frac{r-1}{t}$ es más de c veces mayor que la suma de los casos restantes, e.d. que es más de c veces más probable que la razón del número de observaciones favorables respecto del número total de observaciones no sobrepase los límites $\frac{r+1}{t}$ y $\frac{r-1}{t}$, a que los sobrepase. **Q.E.D.**

En la aplicación especial de este teorema a números se reconoce fácilmente que, cuanto mayores son los valores numéricos de r, s y t (donde $\frac{r}{s}$ debe no obstante conservar el mismo valor) tanto más se aproximan uno a otro los límites $\frac{r+1}{t}$ y $\frac{r-1}{t}$ de la razón $\frac{r}{t}$. Así pues, si la razón $\frac{r}{s}$, que ha de ser determinada por medio de observaciones, es igual a $\frac{3}{2}$, no colocaré $r=3$, y $s=2$, sino $r=30$ y $s=20$, o sea $t=r+s=50$, ó $r=300$ y $s=200$, es decir $t=500$. En el primer caso los límites son $\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50}$ y $\frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}$. Y si tomo $c=1000$, entonces los valores m y nt, para los miembros situados a la izquierda de M, se determinan según el escolio del modo siguiente:

$$m \geq \frac{\log [c(s-1)]}{\log (r+1) - \log (r)} = \frac{4{,}2787536}{0{,}0142405} < 301\,,$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1} < 24728$$

y para los miembros situados a la derecha de M:

$$m \geq \frac{\log [c(r-1)]}{\log (s+1) - \log (s)} = \frac{4{,}4623980}{0{,}0211893} < 211\,,$$

$$nt = mt + \frac{mrt-rt}{s+1} < 25550$$

Por eso, según el teorema arriba demostrado, es más de 1000 veces más probable que, para 25.500 observaciones realizadas, la razón de las observaciones favorables respecto del total de las llevadas a cabo se encuentre dentro de los límites $\frac{31}{50}$ y $\frac{29}{50}$, ambos inclusive, que fuera de ellos. Y si se pone $c=10000$ ó $c=100000$, igualmente resulta que son necesarias 31.258 observaciones para que sea 10000 veces más probable que la razón indicada se encuentre contenida dentro de los límites indicados que fuera de ellos, y que, para que sea 100000 veces más probable serán necesarias 36.966 observaciones, y así hasta el infinito añadiendo siempre a 25.500 un múltiplo de 5.708 observaciones.

De modo que si todos los sucesos fuesen continuamente observados por toda la eternidad (con lo que en definitiva la probabilidad acabaría transformándose en certeza absoluta), se hallaría que todo lo que ocurre en el mundo sucede en base a razones y con regularidad determinadas, que estaríamos obligados a aceptar una cierta necesidad, y por así decir un sino, incluso en las cosas que parecen ser tan contingentes. Ignoro si ya Platón apuntaba a esto mismo en su teoría del desarrollo cíclico general de las cosas, en la que afirma que todo regresa a su estado originario, transcurridos innumerables siglos.

NOTAS

1 Cætera omnia imperfectiorem ejus mensuram in mentibus nostris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores sunt probabilitates, quae saudent rem aliquam esse, fore aut fuisse.

2 *Probabilitas* enim est gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto.

3 Illud igitur altero *probabilius* vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etsi in positivo *probabile* ex usu loquendi tantùm dicatur id, cujus probabilitas semissem certitudinis notabiliter superat.

4 *Conjicere* rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri potest exactissimè probabilitates rerum, ...

5 No ayuda, luego no perjudica.

6 *Epigr. lib. sing.* §. 216.

Quòd malè consultum cecidit feliciter, Ancus
Arguitur sapiens, qui modo stultus erat;
Quod prudenter erat provisum, si malè vortat,
Ipse Cato populo judice stultus erit.

El poeta inglés Owen (1560-1622) publicó su *Epigrammata* en Londres, 1606. Traducido a varios idiomas, fue incluido en el *Indice*.

7 Hay que darle a cada cosa su valor.

8 La proposición en cuestión dice lo siguiente:

Sea p el número de casos en que obtengo la suma a, q el número de casos en que obtengo la suma b, y supongamos que todos los casos pueden ocurrir con la misma facilidad; entonces el valor de mi esperanza (*expectatio*) será $(pa+qb)/(p+q)$.

Por su parte el Corolario 1 afirma: si en p casos me corresponde a y en q casos nada, entonces mi esperanza es $pa/(p+q)$.

9 Se trata de Antoine Arnauld autor de *La logique ou l'art de penser* publicada en Paris en 1662, también conocida como *Logique de Port Royal.*

10 Bernoulli está pensando en Leibniz, con quien mantuvo una interesante correspondencia entre 1703 y 1704 sobre el cálculo empírico de probabilidades, ante el escepticismo del alemán. En este intercambio epistolar destaca también el interés de Bernoulli por recibir de Leibniz un ejemplar de la *Waerdye* de De Witt, en que Bernoulli presumía una aplicación del cálculo de probabilidades a campos

ajenos a los juegos de azar. Al respecto puede leerse RIVADULLA, A. (1991) "Apriorismo y base empírica en los orígenes de la estadística matemática". *Llull* 14, 187-219.

11 El holandés Adriano Metius (1571-1635), discípulo de Tycho Brahe, mejoró el valor de π, que desde Arquímedes venía siendo estimado en 3.1428, dándole el de 3.14159. El también holandés Ludolph van Ceulen (1540-1610) aproximó este valor con 35 decimales.

12 El convencimiento de Bernoulli en la posibilidad de determinar *a posteriori* la probabilidad de ocurrencia de los fenómenos estocásticos queda patente en su correspondencia con Leibniz. Corrado Gini ha recogido las partes más interesantes de este intercambio epistolar en su trabajo "Gedanken zum Theorem von Bernoulli", *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 82*, 1946, 401-413.

13 En efecto, el número de miembros mayores que $nr+n$ es $nr+ns-nr-n = n(s-1)$. Pero como entre $nr+n$ y nr hay n miembros, entonces el número de miembros situados a la derecha de $nr+n$ es como máximo s-1 veces mayor al de los colocados a su izquierda hasta nr.

14 Bernoulli no utiliza la notación moderna combinatoria en su trabajo, sino que desarrolla la potencia nt-sima del binomio como

$$nt + \frac{nt}{1}\, r^{nt-1}.s + \frac{nt(nt-1)}{1.2}\, r^{nt-2}.s^2 + ...etc .$$

Tampoco emplea Bernoulli las expresiones L_1, L_2,... R_1, R_2,... para designar los miembros colocados a derecha e izquierda del término M, sino los símbolos F, G, H. El término que aparecerá simbolizado aquí como L_n adopta en Bernoulli la forma L, mientras que R_n es Λ, y para L_{n+1}, etc., Bernoulli emplea P, Q, R,... Por su parte Bing Sung traslada a su versión inglesa en parte la notación originaria de Bernoulli y en parte la de Hausner.

15 Efectivamente, la diferencia entre $(nr+1)s$ y nsr es s; la diferencia entre $(nr+2)s$ y $(ns-1)r$ es $2s+r$. La diferencia entre $(ns+1)r$ y nrs es r, mientras que entre $(ns+2)r$ y $(nr-1)s$ la diferencia es $2r+s$.

16 Como vimos en la nota anterior, M se diferencia de L_1 en s, mientras que L_1 se diferencia de L_2 en $2s+r$; luego el cociente entre los dos primeros tiene que ser menor que el cociente entre los otros dos. El mismo razonamiento se aplica para la relación entre las razones de M a R_1 y R_1 a R_2.

17 Obsérvese que en las penúltimas expresiones de $\frac{M}{L_n}$ y $\frac{M}{L_n}$, eliminando s [r], el primer factor del numerador es $nr+n$ [$ns+n$] mientras que el último es $nr+1$ [$ns+1$]. Luego el número de fatores es n-1.

18 Efectivamente, para cualesquiera valores de r y s, y tanto si ocurre que $r>s$ como que $s>r$, las fracciones $\frac{rs+s}{rs-r}$ y $\frac{rs+r}{rs-s}$ son siempre mayores que 1. Luego toda potencia infinita de ellas es ella misma infinita.

19 Ver al respecto *Lema* 1, *Prueba* y nota 13

20 En efecto, $\left[\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r} = \frac{ns(r+1)}{nr(s-1)+r}\right] < \left[\frac{rs+s}{rs-r} = \frac{s(r+1)}{r(s-1)} = \frac{ns(r+1)}{nr(s-1)}\right]$ ya que la primera fracción suma r al denominador. Por otra parte, y para cualesquiera valores de r y s, $\left[\frac{nrs+s}{nrs} = 1 + \frac{1}{nr}\right] < \left[\frac{rs+s}{rs-r} = \frac{s(r+1)}{r(s-1)}\right]$.

21 Para n muy grande sucede que

$$\frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-nr+mr} = \frac{rs+s-\frac{m-1}{n}\cdot s}{rs-r+\frac{mr}{n}}$$

$$= \frac{rs+s-\frac{m-1}{n}\cdot s}{rs+r\left(\frac{m}{n}-1\right)} \approx \frac{rs+s}{rs-r}$$

22 Por lo que conocemos acerca de $\frac{M}{L_n}$ y de la fracción $\frac{r+1}{r}$ es claro que $\frac{M}{L_n} > \left(\frac{r+1}{r}\right)^m$, y por tanto $\frac{M}{L_n} > c\,(s-1)$; luego $M > c\,(s-1)\,L_n$.

23 *Propositio principalis.* Sit igitur numerus casuum ferlitilium ad numerum sterilium vel præcisè vel proximè in ratione r/s, adeoque ad numerum omnium in ratione $r/(r+s)$ seu r/t, quam rationem terminent limites $(r+1)/t$ & $(r-1)/t$. Ostendendum est, tot posse capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus verisimilius evadat, numerum fertilium observationum intra hos limites quàm extra casurum esse, h.e. numerum fertiliuum ad numerum omnium observationum rationem habitarum nec majorem quàm $(r+1)/t$, nec minorem quâm $(r-1)/t$.

El diario matemático de Bernoulli, las *Meditationes*, reimpreso con comentarios de B. L. van der Waerden en el Vol. 3 de *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Basilea 1975, contiene dos artículos en los que no sólo se recogen las ideas previas de Bernoulli sobre la Ley de los grandes números, sino, a decir de van der Waerden, p. 378, ésta se demuestra rigurosamente por vez primera. Se trata del número 133*a*, escrito hacia 1689, y el 151*a*, realizado entre 1688 y 1690. El primero, muy breve, traducido enteramente al alemán e incorporado por Ivo Schneider a su obra *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988, lleva por lema: *Cuantas más observaciones llevo a cabo, menos me desvío de la proporción verdadera.* El 151*a*, traducido libremente y comentado por Van der Waerden, anuncia la *Propositio principalis* del *Ars conjectandi* del modo siguiente: *Es posible llevar a cabo tantas observaciones que sea tan probable como se quiera que la razón del número de juegos, en los que un jugador o el otro gana, se encuentra entre dos límites dados arbitrariamente próximos, que fuera de ellos* [*Possibile est, tot observationes instituere, ut datâ quâvis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intrà datos limites quantumcunque arctos cadant, quàm extrà illos.*].

24 La regla en cuestión es la siguiente:

Regla

para la determinación de la esperanza de un jugador a quien le están permitidas algunas jugadas y quien desea conseguir algo con algunas jugadas exactamente prescritas y no con otras:

Fórmese el producto de los números de los casos en que, en las jugadas prescritas donde se debe lograr el objetivo, éste se alcanza, con los casos en que, donde éste no se debe lograr, no se alcanza, y divídase por el producto de los números de todos los casos en la totalidad de las jugadas; el cociente es el valor de la esperanza buscada.

Por su parte los Corolarios 1. y 2. son los siguientes:

Corolario 1. Si en todas las jugadas hay un número igual de casos [*a*: número total de casos, *b*: número de casos favorables, *c*: número de casos desfavorables], entonces el valor calculado de la esperanza es... en general $\frac{b^m.c^{n-m}}{a^n}$ donde *n* es el número de todas las jugadas y *m* el de aquéllas en que hay que conseguir el objetivo.

Corolario 2. Si en todas las jugadas hay un número igual de casos y está determinado el número de jugadas en que se ha de alzanzar el objetivo, pero no las jugadas mismas, que puede ser un número cualquiera (p.e. si hay que hacer 5 jugadas y cualesquiera tres de ellas deben ser afortunadas), entonces el valor encontrado de la esperanza obviamente tiene que ser tomado tantas veces como grupos de *m* elementos puedan ser formados con *n* cosas (p.e. con 5 jugadas grupos de 3 jugadas cada una). Ahora bien, según el cálculo combinatorio,..., esto puede ocurrir $\binom{n}{m}$ veces, o, lo que es lo mismo, $\binom{n}{n-m}$, y por ello la esperanza del que juega este juego tiene el valor $\binom{n}{m}\frac{b^m.c^{n-m}}{a^n} = \binom{n}{n-m}\frac{b^m.c^{n-m}}{a^n}$