
INTERVENCIÓN PSICOPEDAGÓGICA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

UN PROGRAMA PSICOINSTRUCCIONAL PARA PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

(MENCIÓN HONORÍFICA A LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA)

*Vicente Bermejo Fernández (Director), María Oliva Lago Marcos,
Purificación Rodríguez Marcos, María Pérez Solís, Fe Begerano Villarreal,
Emilia Moriche Martín, Cristina Dopico Crespo, M^a. José Lozano Fernández,
M^a. Teresa Pintos Couto*

INTRODUCCIÓN

Las altas cotas de fracaso escolar en Matemáticas siguen siendo un reto y una gran preocupación, no sólo para todos aquellos que trabajamos e investigamos en este área, sino también para aquellas personas que por su situación socio-política comparten esta responsabilidad. Los resultados obtenidos en las dos últimas evaluaciones del INCE (MEC) son inquietantes y socialmente inaceptables: en 1996 más del 50 % de los niños de sexto curso de EGB fracasaba en Matemáticas, y en 1998 de nuevo el alto número de fracaso escolar se centraba principalmente en el área de Matemáticas. Ello quiere decir, para que los porcentajes no oculten la realidad, que esta situación puede estar afectando a unos dos millones de escolares y a otras tantas familias españolas. Por otra parte, los estudios comparativos internacionales tampoco dejan en buen lugar a nuestros escolares ya que, por ejemplo, en 1996 los niños españoles ocupaban uno de los últimos lugares en el ranking establecido entre los 39 ó 41 países que participaron en esta evaluación (TIMSS), a pesar de las críticas y matizaciones que a veces se hacen a estos estudios (Towse y Saxton, 1998).

Los datos que tenemos sobre el fracaso escolar en Matemáticas en nuestro país se refieren principalmente a cursos superiores de la Educación Primaria (EP), a la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) o al Bachillerato, no obstante, las dificultades de aprendizaje en Matemáticas aparecen, y sobre todo pueden tener su origen, mucho antes en los escolares. Sería bueno que desde

la Educación Infantil (EI), y por supuesto desde los primeros cursos de la EP, la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas se llevara a cabo adecuadamente, evitando hábitos de trabajo, actitudes y creencias negativos en torno a las Matemáticas.

Las causas que se han barajado en torno al fracaso escolar en Matemáticas han sido diversas. En Estados Unidos, por ejemplo, que están haciendo un gran esfuerzo socio-económico para mejorar la situación de sus escolares en este área, se han presentado, entre otras, la insuficiencia de los libros de texto y la pobre preparación de los enseñantes (Ginsburg, Klein y Starkey, 1998). En España, Bermejo (1990, 1998) ha señalado algunas de las posibles causas de este fracaso escolar: contenidos inadecuados y carentes de significado, formación insuficiente del profesorado y libros de texto deficientes. Aquí nos gustaría proponer, como vía que probablemente mejoraría esta preocupante situación escolar, la conveniencia de vincular y de estrechar la relación entre investigación y práctica en educación matemática, de modo que la investigación tenga la incidencia pertinente y deseable en la práctica cotidiana educativa y, a su vez, la práctica educativa influya, oriente y motive la investigación psicoeducativa.

Las aportaciones procedentes de la investigación son cada día más significativas y más orientadas a los problemas del aula, de modo que actualmente existe un cierto consenso en torno a una serie de premisas relevantes para mejorar la educación en este área. Por ejemplo, el acuerdo es unánime en torno a la conveniencia de que los aprendizajes sean significativos (van Oers, 1996), que estos aprendizajes se entienden mejor desde la perspectiva del constructivismo (Fosnot, 1996), que la escuela debe potenciar sobre todo las actividades de alto nivel (razonamiento, representación, toma de decisiones, etc.) y menos las actividades de cálculo, mecánicas y memorísticas. Finalmente, la escuela debe igualmente tener en cuenta los conocimientos informales o extraescolares que tan frecuentemente utiliza el niño en su quehacer cotidiano (Nunes, Schliemann y Carraher, 1993).

Sin embargo, un rápido análisis de lo que acontece en la práctica educativa, en general, permite constatar aún la existencia de grandes discrepancias entre las derivaciones psico-educativas obvias que se siguen de las premisas mencionadas y lo que realmente ocurre en la práctica escolar, tal como se desprende, por ejemplo, de dos hechos de gran importancia:

- 1) Por una parte, lo que suele ocurrir **en el aula**: la enseñanza de las Matemáticas se centra principalmente en torno a la realización de actividades memorísticas y de cálculo, siendo los contenidos demasiado formalistas y descontextuales (por ejemplo: los niños pasan horas *rellenando o completando* cuentas o algoritmos).
- 2) Y en segundo lugar, la programación de **los textos**. Hemos realizado un análisis de los textos de Matemáticas de 1º y 2º de EP y hemos encontrado, en general, los mismos defectos antes mencionados: la enseñan-

za de los procedimientos de cálculo constituye todavía el núcleo central en torno al cual se organiza la programación de los textos. Por ejemplo, la enseñanza de la suma se inicia desde las primeras páginas mediante el algoritmo, y sólo a partir de la página 30, más o menos, se introduce el primer problema verbal.

Esta situación de distanciamiento entre práctica e investigación psico-educativas es manifiestamente negativa para el desarrollo infantil, llegando incluso a crear un cierto talante esquizofrénico en el niño, que vive y hace unas Matemáticas fuera de la escuela y otras diferentes en el aula (ver Nunes, 1992). Pensamos que la celebración del Año Mundial de las Matemáticas el próximo año 2000 puede ser un buen momento para iniciar una reforma eficaz que cambie y mejore notoriamente la situación actual de la educación matemática en nuestro país.

MARCO TEÓRICO

La presente investigación pretende, en general, superar esta situación esquizofrénica mencionada, integrando los conocimientos matemáticos informales y formales y dando significado a los contenidos matemáticos escolares. Para ello, proponemos un programa de intervención que afecte e integre simultáneamente al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Igualmente, el programa aúna las perspectivas evolutiva e instruccional, necesarias, a nuestro entender, para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. La primera nos informa sobre el desarrollo del alumno, los procesos de aprendizaje que sigue el niño en la adquisición de los distintos contenidos matemáticos, así como sobre la dificultad que entrañan los diferentes conceptos matemáticos. La segunda ofrece al profesor estrategias o procedimientos eficaces para facilitar el aprendizaje.

Este programa se basa fundamentalmente en cuatro pilares básicos del constructivismo cognitivo-social (Cobb, 1996; Fosnot, 1993, 1996; Rogoff, 1990). En primer lugar, partimos de la idea de que los niños construyen su propio conocimiento, de modo que el conocimiento matemático no es recibido pasivamente del medio ambiente, sino que es adquirido activamente por el niño a través de sus acciones físicas y mentales. El niño interpreta la nueva información que se le proporciona en la escuela, no mediante un simple proceso de absorción, sino integrándola y estructurándola en función de su competencia cognitiva (p.e., Clements y Battista, 1990; Cobb, 1988; Resnick y Ford, 1981).

En segundo lugar, y en relación con lo anterior, la instrucción en Matemáticas ha de organizarse de modo que facilite la construcción del conocimiento por parte del alumno. Desde el punto de vista tradicional la instrucción pre-

tende principalmente facilitar la presentación clara de conocimientos por parte del profesor, de modo que éste debe desarrollar materiales curriculares creativos e ingeniosos, así como estrategias pedagógicas que ayuden a los alumnos a adquirir el conocimiento matemático (Cobb, 1988). Desde el marco constructivista, la instrucción concede especial importancia al hecho de que los alumnos desarrollen ideas personales sobre las Matemáticas, puedan discutir, examinar y relacionar la nueva información, así como criticar, explicar y justificar sus métodos de solución. El profesor, por su parte, se convertirá en guía del aprendizaje, estructurando el clima socio-cognitivo de la clase, arrojando luz sobre los conflictos, ayudando a desarrollar relaciones de colaboración, facilitando el diálogo entre los alumnos, reconduciendo las explicaciones, interpretaciones y soluciones de los estudiantes en términos adecuados (Cobb, 1988). En suma, garantizar que los alumnos construyan los conocimientos matemáticos de la manera más eficaz y en las circunstancias más favorables (Cobb, Yackel y Wood, 1991).

Una tercera idea se refiere a que el desarrollo de los conceptos matemáticos debe servir de guía para secuenciar los objetivos de instrucción. Efectivamente, el profesor constructivista ha de estar familiarizado con las interpretaciones, procedimientos y vocabulario matemáticos típicos de los niños en sus distintas edades, conocer el mejor modo de introducir las Matemáticas formales basándose en los conocimientos previos, evaluar los conocimientos actuales de sus alumnos y proponer tareas que provoquen reorganizaciones conceptuales en los estudiantes (Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1996). Ahora bien, este quehacer supone el conocimiento, no sólo de las estructuras generales del desarrollo del alumno en el momento actual, sino también del desarrollo que siguen los niños en el aprendizaje de contenidos Matemáticos específicos (p.e. la adición y la sustracción). Sin embargo, aunque la mayoría de los docentes suele tener un cierto conocimiento de las teorías generales sobre el desarrollo intelectual (principalmente la de Piaget), no obstante, sus conocimientos descienden notoriamente cuando se trata de teorías evolutivas sobre el desarrollo en ámbitos específicos, como la lecto-escritura, las Matemáticas, etc. Por ejemplo, en cuanto al desarrollo de la adición, desconocen los pasos evolutivos que siguen los niños en la adquisición de las estrategias de resolución, los tipos de errores que pueden aparecer en diferentes problemas verbales, las diversas categorías de problemas verbales y su orden de adquisición, los factores explicativos de las dificultades encontradas por los niños a la hora de resolver los problemas, etc.

Finalmente, las habilidades matemáticas deberían enseñarse en relación con la comprensión y solución de problemas, ya que los problemas constituyen el medio natural a través del cual los niños se acercan a las Matemáticas. Los primeros conceptos que desarrollan sobre la adición y la sustracción proceden de los contextos de la vida real en los que "se da" o se "quita" algo, pero nunca

de las expresiones numéricas. Efectivamente, numerosas investigaciones (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1987, 1988; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carey, 1991) muestran que cuando se pide a niños de primer ciclo de EP que resuelvan problemas verbales, raramente escriben la expresión numérica antes de proceder a su resolución e, incluso, se muestran incapaces de hacerlo después de resolverlos correctamente. Además, como señala Schoenfeld (1996):

- a) Los problemas proporcionan la oportunidad para repasar y consolidar ideas matemáticas importantes, así como la posibilidad de incidir en los procesos de resolución.
- b) Los problemas permiten desarrollar en los alumnos el poder matemático, esto es, la habilidad para usar los conceptos matemáticos.
- c) Finalmente, los problemas pueden servir para establecer conexiones entre conceptos matemáticos y lograr así una mejor comprensión de los mismos.

Aunque son escasos los programas o proyectos de intervención para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas para los primeros niveles de EP, no obstante, esta temática constituye una de las áreas más actuales y atractivas para los investigadores que se interesan por la educación matemática (véase, por ejemplo, Carpenter y Fennema, 1992; Cobb *et al.*, 1991; Fennema *et al.*, 1996; Schifter, 1993, 1996; Schifter y Simon, 1992; Simon, 1995; Simon y Schifter, 1991; Wood y Sellers, 1997; Wood, Cobb y Yackel, 1991; Yackel y Cobb, 1996; etc.). Bermejo (1996), Bermejo *et al.* (1997) y Ginsburg, Klein y Starkey (1998) recogen y revisan, a veces con cierto detalle, algunos de estos programas de intervención.

PLANTEAMIENTO DE OBJETIVOS

En general, este estudio pretende mostrar que es posible mejorar la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción, mediante la implementación de un programa psico-instruccional que afecte e integre simultáneamente al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. El programa consta de dos fases:

Fase I: se ocupa principalmente de los contenidos curriculares y, entre éstos, sobresalen especialmente los problemas verbales de sumar y restar, como ya hemos señalado (ver Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998). Partimos de la idea de que los contenidos han de secuenciarse no sólo en función de la estructura matemática de los mismos, sino también en función del desarrollo infantil. Por ello, el objetivo principal de esta fase consiste en jerarquizar los distintos problemas verbales según la dificultad de los mismos. Más en concreto, se pretende:

- a) Analizar el efecto de las variables: tipo de problema, tipo de operación, ubicación de la incógnita y nivel escolar.
- b) Delimitar con precisión y detalle la línea evolutiva que siguen los niños en la adquisición de los conceptos matemáticos de adición y sustracción.

Esta Fase I se ha llevado a cabo durante el curso escolar 1995-1996.

Fase II: se centra en torno a la instrucción de la adición y sustracción, que se caracteriza fundamentalmente por los siguientes principios:

- 1) El alumno construye sus conocimientos matemáticos, mientras que el profesor crea las condiciones pertinentes que favorezcan el aprendizaje.
- 2) El aprendizaje de la adición y sustracción ha de ser contextual, de modo que su enseñanza partirá de los problemas verbales, no de las expresiones numéricas o algoritmos. Además, se utilizarán todas las categorías de problemas verbales, y no solamente alguna de ellas, como suele hacerse.
- 3) Finalmente, el programa de intervención otorga un rol relevante y autónomo al profesor, dejando en sus manos la estructuración y métodos de enseñanza de los contenidos matemáticos curriculares. No obstante, para que tomen decisiones informadas, debatiremos con los profesores las aportaciones más significativas de la investigación actual.

Más en concreto, en esta Fase II se pretende reestructurar los contenidos matemáticos curriculares en función de los resultados obtenidos en la Fase I y propiciar una mejora del aprendizaje de la suma y resta en los alumnos.

Para ello, proponemos:

- a) Una serie de seminarios de información y debate con los profesores con un doble objetivo: ofrecer a los docentes un conjunto de conocimientos sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil y ayudar al profesor a crear un clima en el aula que propicie, no sólo la construcción del conocimiento, sino también un desarrollo que se ajuste a los principios teóricos establecidos anteriormente.
- b) Evaluar el efecto posible del programa de intervención con respecto a la ejecución y comprensión de los conceptos matemáticos de adición y sustracción.

La Fase II se realizó durante el curso escolar 1996-1997.

METODOLOGÍA

Fase I: Diseño Evolutivo

En esta fase participaron 72 niños elegidos al azar, distribuidos en tres grupos de edad. El primero estaba formado por alumnos de 3º de EI (de 5 a 6

años, media de 5;7); el segundo, estaba constituido por escolares de 1º de EP (de 6 a 7 años, media de 6;8) y, finalmente, el tercer grupo lo integraban alumnos de 2º de EP (de 7 a 8 años, media de 7;9). Todos los participantes procedían de colegios públicos y pertenecían a una clase socio-cultural media-alta.

Las pruebas se administraron de manera individual, grabándose en vídeo las entrevistas para facilitar el análisis posterior de los resultados. Asimismo, los investigadores leyeron en voz alta todas las tareas. Cada niño realizó un total de 33 pruebas, con dos ensayos cada una, presentadas en 4 sesiones de 20 minutos de duración media. Las tareas se agruparon en 6 categorías, de las que una estaba constituida por expresiones numéricas (p.e., $4 + 6 = ?$), y las cinco restantes eran problemas verbales de adición y sustracción de diferentes tipos:

- **Cambio:** hacen referencia a un suceso que introduce modificaciones en una cantidad inicial (p.e., "Juan tiene 3 canicas, Tomás le da 5 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Juan ahora?").

- **Combinación:** proponen dos cantidades disjuntas que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo (p.e., "Juan tiene 3 canicas y Tomás tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?").

- **Comparación:** presentan dos cantidades disjuntas siendo necesario determinar la diferencia entre ellas o averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas (p.e., "Juan tiene 3 canicas, Tomás tiene 5 canicas más que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?").

- **Igualación:** suponen la comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para hacerlo equivalente al otro (p.e., "Marta tiene 13 globos. Si a José le diesen 5 globos tendría los mismos que Marta. ¿Cuántos globos tiene José?").

- **Relacional:** describen una relación inicial entre dos sujetos que mediante un cambio externo produce una relación final (p.e., "Al principio Esther tenía algunos cromos más que su amiga. Esther encuentra 3 cromos y ahora tiene 9 cromos más que su amiga. ¿Cuántos cromos tenía al principio Esther más que su amiga?").

En cada tarea se hizo variar tanto el lugar de la incógnita, como el tipo de operación (i.e., adición y sustracción), excepto en los problemas de combinación, que no admiten su formulación en términos de sustracción.

Las respuestas de los niños se consideraron correctas cuando resolvían correctamente la operación y daban una justificación adecuada.

Fase II: Diseño Psico-Instruccional

En la Fase II de esta investigación participaron cinco clases de alumnos de 1º curso de EP de clase socio-cultural media-alta, pertenecientes a colegios públicos. Tres clases constituyeron el grupo experimental, mientras que las

dos clases restantes formaron el grupo control. La asignación de los profesores y alumnos a los grupos experimental y control fue voluntaria y en función de la disponibilidad del profesorado.

Por lo que respecta a los alumnos, el grupo experimental fue evaluado tres veces a lo largo del curso: en noviembre, febrero y mayo; mientras que el grupo control lo fue solamente en noviembre y mayo. La primera evaluación pretendía diagnosticar los conocimientos previos de los niños de ambos grupos, así como elaborar un perfil matemático de cada niño del grupo experimental. Las pruebas utilizadas en estas evaluaciones consistían en problemas verbales y expresiones numéricas de adición y sustracción, siendo las mismas para los dos grupos (experimental y control).

En todos los casos, los niños pasaron las pruebas individualmente, registrándose en video las entrevistas. En líneas generales, las condiciones experimentales en que se realizaron estas pruebas fueron similares a las descritas en la Fase I de esta investigación.

En cuanto a los tres profesores que impartieron docencia en las clases experimentales, se evaluaron y discutieron sus creencias acerca de sus alumnos, la asignatura de Matemáticas y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma. Para ello se llevaron a cabo las siguientes pruebas:

- 1) Cumplimentaron el *Cuestionario I* sobre actitudes y conocimientos en torno a la enseñanza de los problemas verbales de adición y sustracción.
- 2) Asistieron a seminarios en los que se trataba y debatía, con el apoyo de vídeos, acerca de los siguientes temas: principios básicos de la enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva constructivista; tipos de problemas verbales de adición y sustracción; niveles de dificultad de los mismos y las variables explicativas; estrategias más frecuentes utilizadas por los niños; errores típicos cometidos en cada tipo de problema; los resultados de las pruebas de evaluación realizadas en su zona en el curso anterior.
- 3) Teniendo en cuenta el rango de dificultad de los problemas verbales obtenido en la Fase I de esta investigación, se puso a disposición de los tres profesores la secuencia de problemas verbales que por su dificultad convenía enseñar durante el primer curso de EP, para que personalmente los integrasen dentro de los contenidos del currículo escolar de Matemáticas. En concreto, se propusieron los seis tipos de problemas más sencillos, incluyendo al menos uno de cada una de las cuatro categorías clásicas. Asimismo, se incluyeron expresiones numéricas de adición y sustracción, con la incógnita en el resultado y en el segundo término.
- 4) Finalmente, se entregó a los profesores el perfil matemático de cada uno de sus alumnos, obtenido a partir de la evaluación realizada en noviembre (y después en febrero), aconsejándoles su uso diario en clase y la modificación de los perfiles cada vez que cambiase el comportamiento matemático de los niños.

A lo largo del curso, dos observadores adiestrados asistieron dos veces por mes a cada una de las clases experimentales de Matemáticas a fin de conocer la dinámica y el estilo de enseñanza de la clase, anotando sobre una "Guía de Observación" lo que acontecía en cada minuto, tanto por parte del profesor, como de los alumnos. En esta guía se recogía información sobre cuatro áreas: (1) las intervenciones del profesor y el grado de iniciativa del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje; (2) la naturaleza de las actividades requeridas al alumno; (3) los recursos didácticos; y (4) la evaluación de los aprendizajes.

Por último, una vez terminada la tercera evaluación, se pidió a los profesores del grupo experimental que cumplimentaran de nuevo el *Cuestionario I* sobre creencias que pasaron al concluir la primera evaluación, así como el *Cuestionario II* auto-evaluativo sobre el influjo que el programa había tenido en su docencia.

Por su parte, los profesores del grupo control cumplimentaron en noviembre sólo la tercera parte del *Cuestionario I*, y en mayo respondieron al *Cuestionario III* sobre los contenidos matemáticos de sus clases.

ALGUNOS RESULTADOS MÁS SIGNIFICATIVOS

En la presentación de resultados, que haremos muy sucintamente debido a la penuria de espacio disponible, y en orden a perfilar mejor el alcance de los mismos, ofreceremos, en primer lugar, los correspondientes a la Fase I y a continuación los datos obtenidos en la Fase II.

Fase I: Jerarquización de los Problemas Verbales

Tal como hemos reseñado anteriormente, en la fase evolutiva evaluamos el comportamiento matemático de niños de tres cursos escolares (3º de EI, 1º de EP y 2º de EP) en la resolución de las distintas categorías y subcategorías de problemas verbales y expresiones numéricas de adición y sustracción. Entre los principales resultados encontrados destacamos los siguientes:

- 1) Los diversos análisis cuantitativos ponen de manifiesto que el comportamiento de los niños en general difiere significativamente según los cursos escolares, el tipo de prueba y la ubicación de la incógnita (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter, 1986; Hiebert, 1982). En cambio, es interesante resaltar que el factor tipo de operación (suma o resta) no es significativo, de modo que una vez más insistimos en el desacierto de los libros de texto al posponer la enseñanza de la sustracción con respecto a la de la adición.

2) Aunque las medias globales de las diferentes tareas nos permiten ordenar jerárquicamente estas pruebas, no obstante, el Escalograma de Guttman ofrece una secuenciación más precisa en función de la dificultad de las mismas. De este análisis se desprende que el conjunto de problemas forman una "cuasi-escala", al cumplir el criterio de escalabilidad ($CE = 0.83 > 0.60$), pero no el de reproductibilidad ($CR = 0.856 < 0.90$) (Meliá, 1991); de modo que podríamos afirmar, con ciertas reservas, que el orden de aprendizaje y adquisición de las tareas sería el siguiente:

1. *Combinación con conjunto total desconocido.*
2. *Cambio con resultado desconocido.*
3. *Igualación en el conjunto desconocido.*
4. *Cambio con conjunto de cambio desconocido.*
5. *Igualación en el conjunto conocido.*
6. *Combinación con parte inicial desconocida.*
7. *Cambio con comienzo desconocido.*
8. *Comparación con referente desconocido.*
9. *Comparación con diferencia desconocida.*
10. *Igualación con cantidad comparada desconocida.*
11. *Combinación con parte desconocida en el segundo sumando.*
12. *Comparación con conjunto de comparación desconocido.*
13. *Transformación de relaciones con sumando inicial desconocido.*
14. *Transformación de relaciones con resultado desconocido.*
15. *Transformación de relaciones con segundo sumando desconocido.*

A la hora de explicar esta secuenciación evolutiva relativa a los tres grupos, hay que tener en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, nuestros datos confirman los procedentes del ANOVA, ya que el comportamiento de los niños en las diferentes tareas se encuentra mediado por el lugar de la incógnita y la estructura semántica del problema. Por ejemplo, el problema de cambio con el conjunto de cambio desconocido resulta más sencillo que el problema de comparación en el que se desconoce el conjunto de comparación, lo que concuerda con los datos encontrados en otras investigaciones (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a y b; Carpenter y Mooser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987). En segundo lugar, el hecho de que un problema implique acción no garantiza, en todos los casos, un nivel de rendimiento superior en los niños, como parece desprenderse de algunas investigaciones (p.e. Carpenter y Mooser, 1982, 1983). Finalmente, la resolución correcta de un tipo de problema no garantiza la misma ejecución en otros, ni siquiera en aquellos que tienen una estructura semántica similar. Por ejemplo, mientras que el problema de combinación con la incógnita en el resultado es el más sencillo, el de combinación con la parte inicial desconocida ocupa el sexto lugar y este mismo problema con la incógnita en el segundo sumando ocupa el undécimo lugar.

- 3) El análisis minucioso realizado en torno a las estrategias empleadas por los niños permite resaltar que el tipo de estrategia utilizada parece estar más relacionada con el lugar de la incógnita y el tipo de operación que con la categoría de problema (ver también Carpenter, 1996). Igualmente, las estrategias de los niños cambian en general en función de su nivel escolar. Los niños de Educación Infantil recurren preferentemente a estrategias de modelado directo, como "*contar todo*". Los de 1º de EP utilizan sobre todo las basadas en el conteo (p.e., "*contar hasta*") y los de 2º siguen utilizando las de conteo, pero también otras más sofisticadas como las "*memorísticas*" o el "*cálculo mental*".
- 4) Finalmente, los errores varían únicamente en función del nivel de escolaridad. Así, los niños de Educación Infantil cometen errores de "*repetir una de las cantidades*" e "*inventar la respuesta*" en las seis categorías de problemas, independientemente del lugar de la incógnita y del tipo de operación, lo que confirma los resultados obtenidos en otras investigaciones (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990a y b; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987). En 1º de EP los errores más característicos son los de "*inventar la respuesta*" y "*palabras clave*". Y, finalmente, en 2º de EP predominan los errores de "*transformar el problema*" y "*palabras clave*", aunque aparece una mayor variabilidad de errores dependiendo del lugar de la incógnita y el tipo de operación.

Fase II: Intervención Psicopedagógica

Para facilitar el análisis y la exposición de los numerosos datos recogidos durante la fase II de esta investigación, examinaremos primero los resultados obtenidos sobre los profesores, para estudiar después los datos correspondientes a los alumnos de los grupos experimental y control.

Perfil psico-educativo de los profesores

El *Cuestionario I* consta de tres partes y se pasó al principio y final del curso 1996-1997 a los profesores del grupo experimental. En cambio, los profesores del grupo control pasaron sólo la tercera parte de este cuestionario al principio de curso.

En cuanto a la primera pasación en el mes de noviembre, la primera y segunda parte de este cuestionario pusieron de manifiesto la insuficiencia de conocimientos del profesorado sobre las distintas categorías de problemas verbales existentes, así como sobre el grado de dificultad de los mismos, las estrategias y errores que suelen cometer los niños. Estos resultados confirman lo señalado por Carpenter *et al.* (1988, 1989) en el sentido de que el profes-

rado de EE.UU. presenta o presentaba parecidas lagunas de formación en torno a esta temática.

En la tercera parte del cuestionario se evaluaron las creencias del profesor en torno a la enseñanza de las Matemáticas. Los resultados de esta tercera parte del cuestionario muestran:

- 1) Existen diferencias estadísticamente significativas entre los dos profesores del grupo experimental con respecto al grado de acuerdo/desacuerdo con los planteamientos constructivistas.
- 2) No hay diferencias entre los profesores del grupo control y el profesor 1 del grupo experimental.

En cuanto a la segunda aplicación del cuestionario de creencias a los profesores del grupo experimental, encontramos que el profesor 3 (Gex III) presentó de nuevo un patrón de respuesta similar al de la primera aplicación. En cambio, la prueba de McNemar indicó que en el profesor 1 (Gex I) se produce un cambio significativo entre sus respuestas de la primera y segunda aplicación ($X [1, n=27] = 2.86, p < 0.05$ con la corrección de Yates), mostrando un mayor acuerdo con los principios constructivistas. Este resultado viene a resaltar el efecto positivo que el programa de intervención ha tenido sobre el pensamiento instruccional de este profesor.

El *Cuestionario II* de auto-evaluación sobre el programa de intervención sugiere que el programa de intervención ha influido, en general, en los profesores de los grupos experimentales con respecto a la enseñanza de las Matemáticas en sus clases de primer curso de EP Efectivamente, el profesor 1 (Gex I) respondió afirmativamente a las cuestiones relativas al desarrollo del pensamiento matemático, al modo de enseñar y a la evaluación. Por su parte, el profesor 2 (Gex II) contestó positivamente a todas las cuestiones planteadas. Finalmente, el comportamiento del profesor 3 (Gex III) se adaptó en todo a las pautas propias de esta investigación.

Las observaciones en clase se centraron fundamentalmente en la conducta del profesor, encontrando que los profesores 1 y 2 centraron su enseñanza de la suma y resta en torno al algoritmo, mientras que el profesor 3 lo hizo claramente en torno a los problemas verbales. Igualmente, se puede observar que la evaluación no se centraba exclusivamente en el resultado, sino que los tres profesores optaron por evaluar también los procesos.

El *Cuestionario III* muestra que no hay diferencias notables entre los profesores del grupo control, ya que plantearon a sus alumnos sobre todo los problemas de cambio, combinación y expresiones numéricas. Asimismo, ambos profesores apuntaron que a lo largo del curso sus alumnos habían resuelto más cuentas o algoritmos que problemas verbales.

Concluyendo, la aplicación de los cuestionarios y las observaciones en el aula nos han permitido realizar un seguimiento de los cambios instrucciona-

les producidos en el profesorado de los grupos experimentales, como resultado de su participación en este programa de intervención. Estos cambios se manifiestan, por ejemplo, en diferentes ámbitos:

- a) En el *Cuestionario I* sobre conocimientos relacionados con la adición y sustracción, estos profesores justificaban el escaso uso de los problemas verbales en sus clases alegando que eran complejos para los niños. No obstante, a lo largo del curso escolar no sólo conocieron la existencia de diferentes tipos de problemas verbales de suma y resta (otros que los problemas de cambio), sino que además propusieron estos problemas a sus alumnos (cambio, combinación, comparación e igualación).
- b) Igualmente, el apartado relativo a las estrategias y errores de este mismo *Cuestionario I* no registraba prácticamente respuesta alguna por parte de los profesores del grupo experimental. Sin embargo, tanto en las Observaciones en clase como en el *Cuestionario II* de auto-evaluación y en la tercera parte del *Cuestionario I* (creencias), los profesores consideraron estos aspectos fundamentales, no sólo en el proceso de evaluación, sino también como una herramienta útil a la hora de comprender el desarrollo del razonamiento matemático de los niños. De ahí que los tres profesores insistieran en la importancia de individualizar la enseñanza.
- c) Vale la pena resaltar los cambios que se produjeron en el profesor 1 (Gex I) tras la segunda aplicación sobre creencias del *Cuestionario I* de creencias. En efecto, estos cambios resultaron fundamentales, ya que afectaron a la tercera dimensión del cuestionario referente a la aplicación de los principios constructivistas a la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción.
- d) Finalmente, los cambios que acabamos de señalar presentan un alcance diferente en cada uno de los profesores, repercutiendo dichas diferencias en el rendimiento diferencial de los niños, como veremos en el siguiente apartado. Por ejemplo, el profesor 3 (Gex III) estableció como objetivo prioritario en la enseñanza de la adición y sustracción la resolución de problemas verbales, relegando a un segundo plano las expresiones numéricas. En cambio, los otros dos profesores propusieron a los niños diferentes tipos de problemas verbales, pero hicieron hincapié en la resolución de expresiones numéricas.

Perfil matemático de los alumnos

En este apartado analizaremos solamente las respuestas correctas de los niños, siguiendo el orden cronológico de las evaluaciones: noviembre, febrero y mayo. Por razones de espacio exclusivamente, no recogemos aquí las estrategias y los errores cometidos por los niños.

Los resultados de la **primera evaluación** muestran que sólo es significativo el factor Tarea ($F_{3,285}=3.62, p<0.05$); mientras que no lo son los efectos princi-

Tabla 1. Medias y desviaciones típicas de las respuestas correctas en las tres evaluaciones para las tareas de adición (*)

Tareas de adición	GI		GII		GIII		GIV		GV	
	Media	DT	Media	DT	Media	DT	Media	DT	Media	DT
CAMBIO:										
1ª evaluación	0.76	0.96	0.40	0.06	0.68	0.64	0.51	0.69	0.33	0.69
2ª evaluación	1.08	1.15	0.92	0.96	0.93	0.88				
3ª evaluación	1.62	1.25	1.55	1.18	1.92	1.09	0.92	1.08	0.52	0.52
COMBINACIÓN:										
1ª evaluación	1.49	1.27	0.92	0.95	1.69	1.16	1.99	1.21	1.21	1.21
2ª evaluación	2.11	1.17	1.52	1.21	1.91	1.09				
3ª evaluación	2.32	1.04	1.70	1.18	2.70	0	1.99	1.22	1.71	0.81
COMPARACIÓN:										
1ª evaluación	0.50	0.72	0.36	0.01	0.60	0.67	0.37	0.50	0.39	0
2ª evaluación	0.83	0.05	0.51	0.83	0.93	1.13				
3ª evaluación	0.95	1.11	0.84	0.99	1.28	1.12	0.59	0.83	0.30	0.02
IGUALACIÓN										
1ª evaluación	0.31	0.03	0.37	0.03	0.48	0.08	0.29	0.03	0.32	0.04
2ª evaluación	0.71	0.51	0.58	0.60	0.93	0.88				
3ª evaluación	0.75	0.95	0.42	0.07	1.09	1.04	0.41	0.50	0.33	0.03
EXP. NUMÉRICA										
1ª evaluación	0.45	0.51	0.73	0.83	0.66	0.65	0.44	0.49	0.44	0.52
2ª evaluación	1.09	1.14	0.92	0.96	1.91	1.08				
3ª evaluación	1.93	1.21	1.54	1.18	2.32	0.85	1.13	1.17	0.60	0.62

(*) puntuación máxima: 2.85.

Tabla 2. Medias y desviaciones típicas de las respuestas correctas en las tres evaluaciones para las tareas de sustracción (*)

Tareas de adición	GI		GII		GIII		GIV		GV	
	Media	DT	Media	DT	Media	DT	Media	DT	Media	DT
CAMBIO:										
1ª evaluación	0.54	0.71	0.40	0.06	0.68	0.86	0.50	0.82	0.33	0.04
2ª evaluación	1.10	1.10	0.63	0.56	0.97	0.86				
3ª evaluación	1.10	1.14	1.06	1.03	0.72	1.13	0.82	1.01	0.35	0.04
COMPARACIÓN:										
1ª evaluación	0.50	0.72	0.38	0.04	0.41	0.03	0.29	0.03	0.29	0.00
2ª evaluación	0.94	1.12	0.53	0.62	0.43	0.03				
3ª evaluación	1.05	0.17	0.69	0.84	0.66	0.68	0.79	1.03	0.38	0.39
IGUALACIÓN										
1ª evaluación	0.30	0.02	0.38	0.04	0.47	0.07	0.29	0.01	0.31	0.02
2ª evaluación	0.43	0.51	0.41	0.06	0.92	0.88				
3ª evaluación	0.74	0.96	0.41	0.06	0.93	0.88	0.41	0.50	0.32	0.03
EXP. NUMÉRICA										
1ª evaluación	0.30	0.03	0.39	0.05	0.45	0.06	0.41	0.50	0.31	0.03
2ª evaluación	0.76	0.95	0.59	0.60	0.51	0.07				
3ª evaluación	1.31	1.21	0.80	0.80	1.36	1.06	0.73	0.92	0.34	0.04

(*) puntuación máxima: 2.85.

pales de los factores Grupo ($F_{4,95}=1.81$) y tipo de Operación ($F_{1,95}=0.94$). En efecto, las medias correspondientes a los grupos o al tipo de operación no muestran diferencias importantes (ver tablas 1 y 2), de modo que al principio del curso todos los grupos (experimental y control) tenían una competencia matemática parecida, o, para ser más precisos, no había diferencias estadísticamente significativas entre ellos.

La **segunda evaluación** se realizó exclusivamente en los grupos experimentales. El análisis de varianza muestra la existencia de diferencias significativas sólo en los efectos principales del factor Tarea ($F_{3,141}=5.97$, $p<0.01$); mientras que de nuevo no aparecen diferencias significativas entre las tres clases del grupo experimental, tal como ya encontramos en la evaluación de noviembre.

En la **tercera evaluación** examinamos de nuevo el rendimiento de los grupos experimental y control. Los resultado del ANOVA muestran que son significativos los efectos principales de los factores Grupo ($F_{4,94}=9.42$, $p<0.01$) y Tarea ($F_{3,282}=9.48$, $p<0.01$). Efectivamente, aunque el factor Grupo no había sido significativo en ninguna de las evaluaciones precedentes (ver medias en la tablas 1 y 2). Sin embargo, en esta ocasión la media del grupo experimental supera claramente la obtenida por el grupo control (Media_{ex} = 1.25 y Media_{co} = 0.68), lo que permite afirmar, al menos provisionalmente, que el

Figura 1. Rendimientos promedio agrupados de los grupos experimental y control

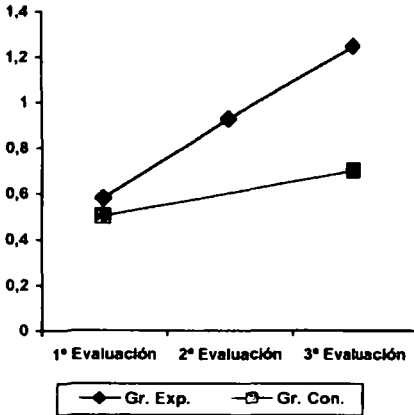
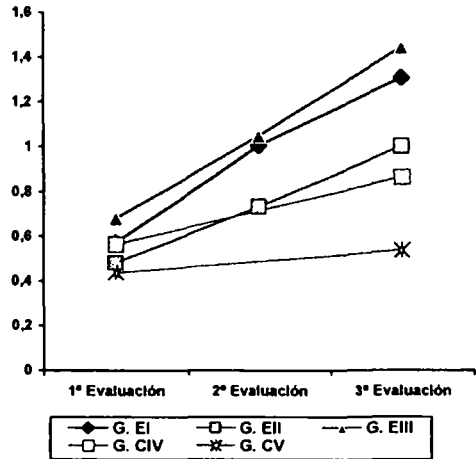


Figura 2. Rendimientos promedio de los grupos experimentales (I, II y III) y controles (IV y V) que participaron en el programa psico-instruccional



programa de intervención ha tenido un efecto positivo en los niños del grupo experimental. Este dato confirmaría nuestras expectativas, en el sentido de que un mayor conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático infantil y una mayor comprensión y aplicación en el aula de los principios constructivistas por parte del profesor redundaría positivamente en la comprensión y el rendimiento matemático de los alumnos.

Por otra parte, aunque las comparaciones múltiples entre los grupos no muestran diferencias significativas entre los grupos experimentales, no obstante, la media del grupo III (1.51) es superior a la media del grupo I (1.28), siendo la media del grupo II (0.97) la más baja de los grupos experimentales. Estos resultados confirman igualmente nuestra hipótesis, ya que tanto en las observaciones en clase, como en los *Cuestionarios I y II*, el profesor del grupo III mostró un mayor conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil, así como el clima de su clase estuvo siempre más próximo a los principios constructivistas que fundamentan esta investigación. En esta dirección apuntan también los resultados obtenidos por Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988) y Peterson, Fennema, Carpenter y Loef (1989), cuando encuentran que los profesores que obtenían una puntuación más alta en el cuestionario de creencias y mostraban, por tanto, una perspectiva más constructivista, obtenían rendimientos más altos en sus alumnos que aquellos pro-

fesores que puntuaban más bajo. Fennema *et al.* (1996) muestran de un modo más detallado y preciso en un estudio longitudinal, cómo una formación del profesorado, que tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento matemático infantil y la perspectiva constructivista, cambia las creencias y el modo de enseñar de los profesores, y cómo, a su vez, los alumnos de estos profesores mejoran sus rendimientos matemáticos en la clase.

Para concluir este apartado, resaltamos que el nivel de rendimiento de los niños de todos los grupos mejoró en el transcurso de las distintas evaluaciones, como era de esperar. Sin embargo, el aprendizaje del grupo experimental presenta un progreso manifiestamente superior al obtenido por el grupo control, tal como puede constatarse en la figura 1. Efectivamente, las cinco clases que participan en la investigación parten en el mes de noviembre con unas puntuaciones similares. En cambio, en la última evaluación de mayo las puntuaciones de las clases experimentales sobresalen notoriamente con respecto a los resultados conseguidos por las clases del grupo control (ver figura 2).

Estos resultados, aunque discrepan con los obtenidos por Cobb *et al.* (1991), concuerdan con los datos encontrados en el programa de CGI de Carpenter *et al.* (1989, 1996, etc.), ya que en este programa el nivel de éxito en el grupo experimental fue mayor que en el grupo control, debido a que los profesores de los grupos experimentales se ajustaban mejor al perfil del enseñante que imparte su instrucción guiado por los avances obtenidos por la psicología cognitiva en el área de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y los principios constructivistas.

CONCLUSIONES

Siempre nos ha parecido enriquecedor aunar en la investigación psico-educativa la vertiente evolutiva y la psico-instruccional. El presente estudio experimental conjuga exitosamente ambos aspectos. Resumimos aquí algunas de las aportaciones más significativas.

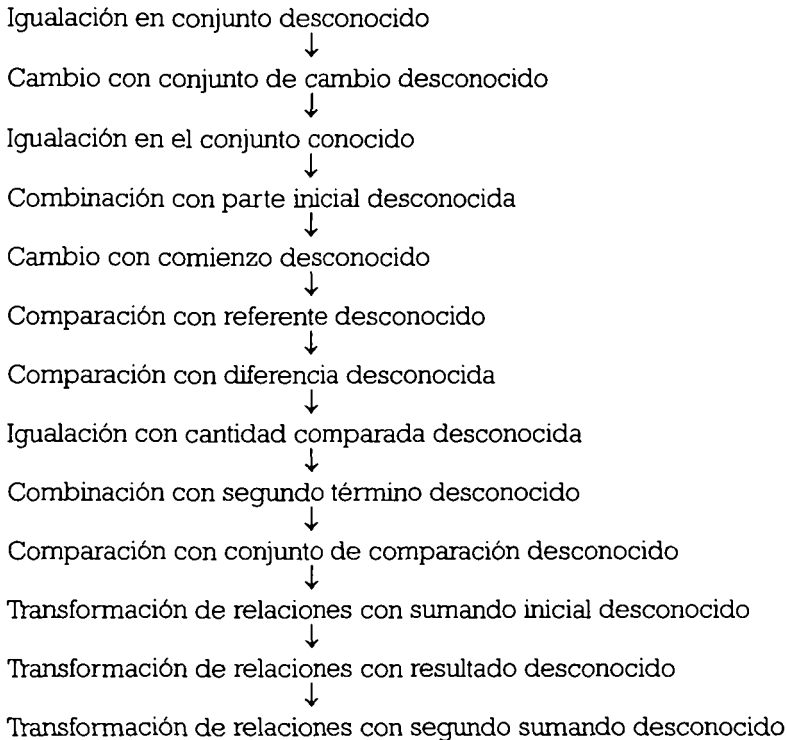
Con respecto a los problemas verbales de adición y sustracción, hemos propuesto una nueva clasificación de los mismos, que resulta más exhaustiva que las categorizaciones clásicas conocidas. Igualmente, hemos presentado una jerarquización de los problemas verbales según la dificultad de los mismos, encontrando el siguiente orden de aprendizaje:

Combinación con conjunto total desconocido



Cambio con resultado desconocido





Nuestros datos manifiestan también que hay diferencias significativas entre los cursos escolares con respecto al tipo de estrategias utilizado y los errores cometidos, de modo que cada curso tendía a utilizar unas estrategias determinadas y a cometer igualmente unos errores característicos.

La implementación del programa de intervención en primer curso de EP ofrece, entre otros, los siguientes resultados:

- 1) Los profesores del grupo experimental dedicaron en general más tiempo a la enseñanza de los problemas verbales en la clase de Matemáticas.
- 2) Igualmente, cambiaron sus creencias en torno a la enseñanza de las Matemáticas; de modo que aplicaron en el aula, aunque desigualmente, los principios constructivistas.
- 3) La evaluación del profesorado se centró no sólo en los resultados, sino también en los procesos.
- 4) En cuanto a los niños, el grupo experimental obtuvo rendimientos más altos, estadísticamente significativos, que el grupo control, a pesar de que al inicio del programa (primera evaluación) sus rendimientos fueron similares.

5) Finalmente, hubo también diferencias significativas entre los grupos experimental y control con respecto a la categoría de estrategias utilizada y los tipos de errores cometidos.

Concluyendo, los cambios producidos por el programa de intervención confirman el efecto positivo del mismo, tanto en la docencia de los profesores colaboradores, como en el comportamiento matemático de los alumnos participantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. Beltrán; V. Bermejo; M. D. Prieto y D. Vence (Coords.), *Intervención Psicopedagógica*. Madrid: Pirámide.
- Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción* Vol. I (pp. 571-594). Madrid: Síntesis.
- Bermejo, V. (1998). Fracaso escolar en matemáticas. *Tribuna*, 20 de julio.
- Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, 6, 159-174.
- Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 51 (3-4), 533-552.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1988). La genèse de l'operation d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education*, Numero Special, 75-76.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, 8, 23-41.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo, *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V. et al. (1997). *Intervención psicopedagógica en el aula de matemáticas*. Memoria de investigación inédita. Madrid: CIDE.
- Carey, D. (1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal of Research of Mathematics Education*, 22, 266-280.
- Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.),

- Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carpenter, T. (1996). *Children's solution strategies of addition/subtraction problems*. Manuscrito enviado por el autor.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). NY: Academic Press.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.
- Carpenter, T., Fennema, E. y Franke, M. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, 97, 3-20.
- Carpenter, T., Moser, J. y Bebout, H. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 345-357.
- Carpenter, T. y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. y Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (5), 385-401.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Chiang, Ch. y Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26, 499-531.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1), 3-29.
- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23, 87-103.
- Cobb, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 33-52). NY: Teachers College Press.
- Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 57-176). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Cummins, D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, 8, 261-289.

- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 3-21.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 42-59). NY: Oxford University Press.
- Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R. y Empson, S. B. (1996): A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematical instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 403-434.
- Fosnot, C. (1993). Science education revisited: A defense of Piagetina constructivism. *Journal for Research in Science Education*, 30, 1189-1201.
- Fosnot, C. (Ed.) (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice*. NY: Teachers College Press.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). NY: MacMillan.
- Ginsburg, H., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En Sigel, I. y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology* Vo. 4 (pp. 401-476). NY: John Wiley & Sons.
- Hiebert, J. (1982): The position of unknown set in children's solutions of verbal arithmetic problems. *Journal for Research of Mathematics Education*, 13, 341-349.
- Kaplan, R. C., Yamamoto, T. y Ginsburg, H. P. (1996). La enseñanza de conceptos matemáticos. En L. Resnick y L. Klopfer (Eds.), *Curriculum y cognición* (pp. 105-139). Madrid: AIQUE.
- Nunes, T. (1992). Ethnomethodology and every day cognition. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-574). N. York: Macmillan.
- Nunes, T., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Peterson, P., Carpenter, T. y Fennema, E. (1989). Teachers' knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analysis. *Journal of Educational Psychology*, 81, 558-569.
- Peterson, P., Fennema, E., Carpenter, T. y Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, 6 (1), 1-40.
- Resnick, L. y Ford, W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Schifter, D. (1993). Mathematics process as mathematics content: A course for teachers". *Journal of Mathematical Behavior*, 12 (3), 271-283.

- Schifter, D. (1996). A constructivist perspective on teaching and learning mathematics. En C. T. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 73-91). NY: Teachers College Press.
- Schifter, D. y Simon, M. A. (1992). Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning. *Teaching and Teacher Education*, 8 (2), 187-197.
- Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical behavior and beliefs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), 338-355.
- Simon, M. A. (1995a). Elaborating models of mathematics teaching: A response to Steffe and D'Ambrosio. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 160-162.
- Simon, M. A. (1995b). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- Simon, M. A. y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 309-331.
- Towse, J. y Saxton, M. (1998). Mathematics across national boundaries: Cultural and linguistic perspectives on numerical competence. En Ch. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills*, (pp. 129-150). London: Psychology Press.
- Wood, T. y Sellers, P. (1997). Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 163-186.
- Wood, T., Cobb, P. y Yackel, E. (1991). Change in teaching mathematics: A case study. *American Educational Research Journal*, 28, 587-616.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.