
Tratamiento cualitativo del Sistema de Lorenz

TRABAJO DE FIN DE GRADO DEL GRADO EN
DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Jesús Llorente Jorge

Trabajo dirigido por:

Juan Ferrera Cuesta

CURSO 2016-2017

A la memoria de
mi madre,
Inés.

El sistema de Lorenz originó una de las grandes revoluciones del conocimiento del siglo XX dando lugar a una rama de la matemática y la física popularmente conocida como *teoría del caos*. En 1908, el matemático francés H. Poincaré afirmó que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales de un sistema podrían suponer a largo plazo grandes cambios en la evolución del mismo, poniendo como ejemplo la impredecibilidad del tiempo atmosférico. Sus trabajos sentaron las bases de lo que hoy se conoce como *caos determinista* y cuyas ideas permanecieron en estado latente hasta mediados del siglo XX, con el uso intensivo de ordenadores en meteorología tras la Segunda Guerra Mundial.

En 1963, E. Lorenz con la finalidad de modelar la convección atmosférica se encontró con un sistema de ecuaciones diferenciales que exhibía un comportamiento caótico en su dinámica, nunca antes observado en un sistema autónomo tridimensional. Para ciertas combinaciones de los parámetros, las trayectorias se acumulaban en una figura geométrica que hoy es conocida como *atractor de Lorenz*. Además, puso de manifiesto la *sensibilidad respecto a las condiciones iniciales*, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro del sistema, haciendo imposible la predicción a largo plazo a pesar de que el sistema sea en rigor determinista. El objeto de estudio de la teoría del caos son los sistemas dinámicos que presentan esta curiosa propiedad.

La contribución de Lorenz no sólo se reduce a descubrir el comportamiento caótico en sus ecuaciones, sino en llegar a reconocer cierto orden en ese caos.

La motivación de este trabajo es estudiar el comportamiento cualitativo del sistema de Lorenz para diferentes valores de los parámetros, así como poner de manifiesto los desarrollos analíticos matemáticos que justifican dicho comportamiento. Además, expondremos el significado intrínseco de las variables que aparecen en el sistema realizando una deducción de las ecuaciones de Lorenz partiendo del modelo de convección de Rayleigh-Bénard. A lo largo de todo este trabajo, reforzaremos los resultados y propiedades obtenidas utilizando algoritmos de cálculo numérico en lenguajes de programación como Matlab o Python.

Por esta razón, el plan de trabajo es el siguiente:

- En primer lugar, se presenta un apéndice que realiza un recorrido a lo largo de la *teoría cualitativa* de ecuaciones diferenciales, proporcionando una base teórica conceptual sólida y robusta.
- A continuación, comenzamos con un primer capítulo que tiene un carácter intro-

ductorio natural. Se expone el modelo de convección de Rayleigh-Bénard así como las ecuaciones dinámicas que lo gobiernan. Para ello, será necesario introducir brevemente algunos conceptos de mecánica de fluidos y termodinámica. Debido a la complejidad de estas ecuaciones, haremos un recorrido a través de las simplificaciones que se hicieron de las mismas hasta llegar a las ecuaciones del sistema de Lorenz.

- Una vez obtenidas las ecuaciones de Lorenz, mostramos sus propiedades fundamentales proporcionando demostraciones analíticas de las mismas. Además, reforzaremos estas propiedades con gráficas, obtenidas mediante algoritmos de cálculo numérico, que exhiben estas propiedades en la dinámica del sistema.
- Continuamos con un análisis de los *puntos de equilibrio* del sistema justificando las propiedades de estabilidad de los mismos. Además, se presenta un apéndice con un análisis detallado de la *bifurcación Hopf* para cada uno de los parámetros del sistema de Lorenz.
- Para finalizar, mostramos un último capítulo que tiene por objetivo poner sobre la mesa las relaciones entre los desarrollos matemáticos realizados, el comportamiento cualitativo del sistema y la interpretación dinámica del mismo. Describiremos el comportamiento del sistema a lo largo de los valores de r hasta llegar al *regimen caótico* mostrando el famoso atractor de Lorenz.
- Adjuntamos dos apéndices con el código de Matlab y el código de Python empleados para la obtención de las gráficas y vídeos que se adjuntan a este trabajo. Cabe destacar que se han utilizado diferentes *algoritmos numéricos* para aproximar la solución del sistema de Lorenz cuyo código también se adjunta.

En cuanto a los resultados del trabajo, se ha obtenido una descripción muy detallada del comportamiento del sistema de Lorenz aunando los desarrollos matemáticos y los resultados obtenidos a través del cálculo numérico. Además, se ha puesto de manifiesto la relación existente entre dicho comportamiento del sistema y su significado intrínseco dentro del modelo de convección.

Palabras clave

- Teoría del caos
- Atractor extraño
- Edward Lorenz
- Sensibilidad respecto condiciones iniciales
- Bifurcación de Hopf
- Convección de Rayleigh-Bénard
- Modelos de Saltzman y de Lorenz
- Cálculo numérico
- Efecto mariposa
- Teoría cualitativa

Abstract

Lorenz System was the origin of one of the greatest knowledge revolutions of the 20th century, giving rise to a branch of Mathematics and Physics, commonly known as *chaos Theory*. In 1908, the french mathematician H. Poincaré asserted that small changes on the initial conditions in a system could originate large changes on this system's evolution, e.g. the unpredictability of the weather. His works fixed the bases of what, nowadays, is known as *deterministic chaos* and his ideas persisted latently until the 50's, when the intensive use of computers on predicting the weather after the Second World War came true.

In 1963, E. Lorenz, with the aim of modeling the atmospheric convection, found a system of differential equations which showed a chaotic behaviour in its dynamic that had never been recorded on an autonomous three-dimensional system. For certain combinations of parameters, the trajectories gathered on a geometric figure that, nowadays, is known as *Lorenz attractor*. In addition, he showed the *sensitive dependence on initial conditions*, which refers to small changes on initial conditions can lead to large differences on the future behaviour of the system, making imposible to predict in the long-term, in spite of the fact that the system is rigourously deterministic. Chaos theory is focused on the behaviour of dynamical systems that keep this curious property. The contribution of Lorenz achieves also to find some order in this chaos.

The motivation of this work is to study the qualitative behaviour of Lorenz system with different choices of the value of parameters, as well as highlighting the analytical mathematical developments that prove this behaviour. Besides, we will show the intrinsic meaning of the variables which appear on the system performing the deduction of Lorenz equations, taking as the starting point the convection model of Rayleigh-Bénard. Through this paper, we will reforce the results and properties that we obtain by using numerical analysis algorithms written on languages such as MATLAB or Python.

For this reason, our working plan is going to be the following one:

- First of all, we offer an appendix that surveys the *qualitative theory* of differential equations, providing a solid and robust theoretical conceptual basis.
- Then, we begin with a first chapter that has a natural introductory character. We present the convection model of Rayleigh-Bénard as well as the dynamic equations that govern it. To achieve this goal, it will be necessary to briefly introduce some concepts of fluid mechanics and thermodynamics. Due to the complexity of these

equations, we will go through the simplifications that they performed on them to reach the equations of Lorenz system.

- Once obtained Lorenz equations, we will show their basic properties, providing their analytical proofs. In addition, we will reinforce these properties with graphics, obtained by using numerical analysis algorithms, that show these properties on the dynamic of the system.
- We will continue analysing the *equilibrium points* of the system, justifying their stability properties. Besides, we introduce an appendix which shows a detailed analysis of *Hopf bifurcation* for each one of the parameters of Lorenz system.
- Finally, we have a final chapter in which the objective is showing the relations between the mathematical development that we have carried out, the qualitative behaviour of the system and its dynamical interpretation. We will describe the behaviour of the system through the different values of r until achieving the *chaotic regime* and showing the famous Lorenz attractor.
- We attach two appendices that contain MATLAB and Python code. This code has been used to obtain the graphics and media attached to this project. It should be pointed out that we have used many different *numerical algorithms* to approximate the solution of Lorenz system. This code is attached too.

Regarding the results of this work, a very detailed description of the behaviour of Lorenz system has been obtained, joining the mathematical developments and the different results obtained through numerical analysis. In addition, we have exposed the relation between this behaviour of the system and its intrinsic meaning at the convention model.

Keywords

- Chaos theory
- Strange attractor
- Edward Lorenz
- Sensitive dependence on initial conditions
- Hopf bifurcation
- Rayleigh-Bénard convection
- Saltzman and Lorenz models
- Numerical analysis
- Butterfly effect
- Qualitative theory

Índice general

Resumen	III
Palabras clave	V
Abstract	VII
Keywords	IX
Prefacio	XIX
Agradecimientos	XXIII
1. Sistema de Lorenz	1
1.1. Desarrollo teórico	4
1.1.1. Calor. Mecanismos de transmisión	4
1.1.2. Convección de Rayleigh-Bénard	5
1.1.3. Ecuaciones del movimiento	9
1.1.4. Sumario	18
1.2. Modelos y aproximaciones	19
1.2.1. Aproximación de Boussinesq-Oberbeck	19
1.2.2. Modelo de Saltzman	20
1.2.3. Modelo de Lorenz	28
2. Propiedades del Sistema de Lorenz	37
2.1. Existencia y unicidad	38
2.2. Simetría	39
2.3. Eje z	42
2.4. Existencia de un conjunto atractor global acotado de volumen cero	46
2.5. Puntos de equilibrio	51
3. Comportamiento caótico del sistema de Lorenz	65

A. Preliminares	77
A.1. Soluciones. Existencia y unicidad	78
A.2. Estabilidad. Primera aproximación.	82
A.2.1. Linealización	83
A.3. Funciones de Liapunov	85
A.4. Variedades invariantes	87
A.4.1. Subespacios estables, inestables y centrales de un sistema autónomo lineal	88
A.4.2. Variedades estables, inestables y centrales de puntos fijos de un sistema autónomo no lineal	90
A.5. Variedades centrales	92
A.5.1. Variedades centrales para campos vectoriales	93
A.5.2. Variedades centrales dependientes de parámetros	95
A.6. Formas normales	96
A.6.1. Desarrollo teórico	97
A.6.2. Forma normal para la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	100
A.7. Bifurcación de puntos fijos	106
A.7.1. Un autovalor cero	107
A.7.2. Un par de autovalores imaginarios. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	110
A.8. Colocación de raíces en el eje imaginario	113
A.9. Teorema de Liouville	115
A.10. Comportamiento asintótico	116
A.11. Principio de invariancia de LaSalle	118
A.12. Caos y atractores extraños	118
B. Análisis de la bifurcación de Hopf	121
B.1. Caso I: $\mu = \sigma$ parámetro de bifurcación y b, r parámetros de control	121
B.1.1. Punto de equilibrio P_1	122
B.1.2. Punto de equilibrio P_2	123
B.2. Caso II: $\mu = b$ parámetro de bifurcación y σ, r parámetros de control	134
B.2.1. Punto de equilibrio P_1	134
B.2.2. Punto de equilibrio P_2	135
B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control	145
B.3.1. Punto de equilibrio P_1	146
B.3.2. Punto de equilibrio P_2	146
B.4. Conclusiones	156
C. Código de Matlab	157
C.1. Runge-Kutta de orden 4 explícito	157
C.2. Método predictor-corrector. Adams-Bashforth-Adams-Moulton	158
C.3. Método del trapecio implementado con el método de Newton	159
C.4. Método predictor-corrector. Euler-trapecio	161
C.5. Método adaptativo Runge Kutta Felberg	161
C.6. Método de Euler	164
C.7. Método del Trapecio	164

D. Código de Python	167
D.1. Una condición inicial	167
D.2. Múltiples condiciones iniciales	171
Bibliografía	179

Índice de figuras

1.1. Edward N. Lorenz	1
1.2. Atractor de Lorenz	3
1.3. Celda hexagonal de Bénard	6
1.4. Representación de las fuerzas presentes en el fluido	7
1.5. Celdas de la convección de Bénard en ΔT	8
1.6. Volumen de control	9
1.7. Tensiones sobre un elemento de fluido.	14
1.8. Representación esquemática del fluido confinado en la cavidad.	21
1.9. Función $Z(t)$	36
2.1. Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 1, 1.5)$	41
2.2. Solución P.V.I. para $X_0 = (0, -1, 1.5)$ bajo la transformación T	41
2.3. Giro en sentido horario.	43
2.4. Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, 50)$	44
2.5. Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, -50)$	45
2.6. Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, 0)$	45
2.7. Signo de $-r^2 - 2r + 3$	47
2.8. Solución P.V.I. para $X_0 = (20, 35, 60)$, $r = 0.75$	48
2.9. Solución P.V.I. para $X_0 = (20, 35, 60)$, $r = 0.001$	49
2.10. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.02, 0.01)$, Punto de equilibrio $(0, 0, 0)$	59
2.11. Solución P.V.I. para $X_0 = (7, 6.9, 17.9)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{48}, \sqrt{48}, 18)$	59
2.12. Solución P.V.I. para $X_0 = (-7, -6.9, 17.9)$, Punto de equilibrio $(-\sqrt{48}, -\sqrt{48}, 18)$	60
2.13. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$, Punto de equilibrio $(0, 0, 0)$	61
2.14. Solución P.V.I. para $X_0 = (12.01, 12.01, 54.01)$, Punto de equilibrio $(12, 12, 54)$	62
2.15. Solución P.V.I. para $X_0 = (-12.01, -12.01, 54.01)$, Punto de equilibrio $(-12, -12, 54)$	62
3.1. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.2, 0.01)$, $r = 1.2$	68
3.2. Solución P.V.I. para $X_0 = (1.5, 3, 6.5)$, $r = 10$	68

3.3. Esquema de la variedad inestable del origen. Se muestra la órbita homoclina para $r = r_0$.	69
3.4. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.2, 0.15)$, $r = 20$	70
3.5. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.001, 0.001, 0.001)$, $r = 28$	70
3.6. Diagrama de bifurcaciones del sistema de Lorenz en función del parámetro r .	71
3.7. Mapa de Lorenz.	72
3.8. Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.02, 0.01)$, $r = 100$	73
B.1. Región factible.	126
B.2. Solución P.V.I. para $X_0 = (5.3, 5.2, 28.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$	133
B.3. Solución P.V.I. para $X_0 = (5.3, 5.2, 28.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$	133
B.4. Región factible.	137
B.5. Numerador. Función f	139
B.6. Denominador. Función g	140
B.7. Solución P.V.I. para $X_0 = (5.4, 5.3, 18.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29.45}, \sqrt{29.45}, 19)$	144
B.8. Solución P.V.I. para $X_0 = (5.4, 5.3, 18.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{31.35}, \sqrt{31.35}, 19)$	145
B.9. Región factible.	149
B.10. Solución P.V.I. para $X_0 = (4.39, 4.38, 19.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{19.5}, \sqrt{19.5}, 19.5)$	155
B.11. Solución P.V.I. para $X_0 = (4.39, 4.38, 19.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{20.5}, \sqrt{20.5}, 20.5)$	156

Índice de cuadros

1.1. Propiedades de los fluidos	10
1.2. Valores para los números de onda	27

Prefacio

Eadem mutata resurgo
Jakob Bernoulli

En 1963, E.Lorenz estableció un modelo matemático mediante el cual pretendía modelizar el comportamiento atmosférico. Sin embargo, este modelo era tan simplificado que no era capaz de abarcar todos los parámetros que intervenían en la dinámica atmosférica. El sistema no cumplía los fines para los que fue diseñado, pero aportó grandes avances a la matemática ya que puso de manifiesto por primera vez un comportamiento caótico en la dinámica de un sistema autónomo tridimensional.

Este fenómeno ha dado lugar a numerosos estudios sobre el sistema de Lorenz con el objetivo de comprender su comportamiento caótico y su famoso atractor extraño. El *atractor de Lorenz* es quizá, uno de los diagramas de sistemas caóticos más conocidos, no sólo porque fue uno de los primeros que se estudió, sino también porque es uno de los más complejos y curiosos, debido a que desarrolla una forma característica parecida a las alas de una mariposa.

Sin embargo, el trabajo de Lorenz permaneció prácticamente en el olvido hasta mediados de los años setenta. Sus ideas dieron paso a una nueva rama de conocimiento en la matemática y la física denominada *teoría del caos*, que junto con la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica constituye una de las grandes revoluciones del conocimiento del siglo XX. Cabe destacar que las bases para el estudio del *caos determinista* se encuentran presentes en los trabajos del matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) sobre la mecánica celeste, pero estas ideas permanecieron en estado latente durante la primera mitad del siglo pasado hasta el desarrollo de las primeras computadoras.

El desarrollo de la teoría del caos ha provocado un cambio de paradigma en la ciencia. Anteriormente, se pensaba que los sistemas simples, es decir, aquellos que pueden ser descritos con muy pocas variables, mostraban un comportamiento sencillo; a diferencia de los sistemas complejos, aquellos que tienen un elevado número de variables, cuyo análisis de comportamiento es enormemente complicado debido a la gran cantidad de variables que los caracteriza. Una de las grandes lecciones de la teoría del caos sugiere que, en ocasiones, podemos entender la dinámica de los sistemas complejos usando modelos mucho más simples que sean no lineales y caóticos.

La teoría del caos y la matemática caótica han resultado ser una potente herramienta con aplicaciones a muchos campos de la ciencia, la tecnología y la economía. El caos se

traslada también al conocimiento de las redes neuronales y de la fibrilación cardiaca, de hecho, el corazón responde a un sistema caótico, no regular, como habitualmente se cree.

Llegados a este punto, parece lógico aceptar la idea de la gran importancia que ha tenido el sistema de Lorenz para la historia y la humanidad. Esto ha sido, junto a otros, un motivo de peso por el que se ha realizado este trabajo. Podemos agrupar en tres los objetivos de este trabajo,

- Deducir el sistema de ecuaciones que obtuvo Lorenz a partir del fenómeno dinámico que pretendía modelizar. Esto nos permitirá comprender las simplificaciones llevadas a cabo en su trabajo así como las consecuencias que tuvieron en el comportamiento del sistema resultante. Además de obtener una detallada comprensión de dicho sistema desde un aspecto físico y analítico.
- Estudiar las propiedades fundamentales del sistema de Lorenz que justifican su relevancia en la teoría de sistemas dinámicos. Además de ilustrar estas propiedades utilizando herramientas del cálculo numérico con el objetivo de mostrar la confluencia del desarrollo analítico y numérico.
- Describir el comportamiento cualitativo del sistema de Lorenz en función de sus parámetros. Así como, ilustrar este comportamiento haciendo uso de lenguajes de programación como Python y Matlab que nos permitirán emplear tanto cálculo numérico como cálculo simbólico.

Estos tres ingredientes nos permitirán realizar una comprensión detallada del sistema de Lorenz así como justificar con herramientas analíticas el comportamiento que exhibe dicho sistema para ciertos valores de los parámetros. El estudio del sistema de Lorenz se puede abordar desde tres puntos de vista diferentes:

- Análisis numérico
- Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales
- Teoría de la medida

En este trabajo se ha optado por abordarlo desde los dos primeros, ya que el tercero escapa del marco conceptual adquirido en mi titulación. Por esta razón, con el propósito que construir un marco teórico soporte de los conceptos que emplearemos para llevar a cabo los objetivos de este trabajo, se presenta el apéndice de “Preliminares” que expone de forma resumida un recorrido a lo largo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos.

En cuanto al cálculo numérico, se ponen en práctica los conceptos adquiridos durante mi titulación, fruto de ello, presentamos en el apéndice de “Código de Matlab” los algoritmos que se han implementado para llevar a cabo la ilustración de la dinámica y las propiedades comentadas anteriormente. Además, con el objetivo de aprovechar las facilidades que ofrecen lenguajes como Python para realizar gráficas 3D interactivas, se ha desarrollado código para mostrar de una manera más detallada y paulatina la dinámica del sistema de Lorenz. Dicho código se adjunta en el apéndice de “Código de Python”.

Una vez sentadas las bases de este trabajo así como los objetivos que se pretenden conseguir, comenzamos con un primer capítulo que tiene un carácter introductorio natural.

Exponemos el modelo de convección de Rayleigh-Bénard que constituye el punto de partida para obtener las ecuaciones del sistema de Lorenz. A continuación, hacemos un breve repaso sobre los conceptos de mecánica de fluidos y termodinámica con el propósito de comprender fielmente el fenómeno de convección.

Como es lógico, dicho fenómeno viene descrito por tres ecuaciones muy conocidas, ecuación de continuidad, ecuación de Navier-Stokes y ecuación de la energía. Para este tipo de ecuaciones no se dispone de una solución general, y salvo ciertos tipos de flujos y situaciones concretas no es posible hallar una solución analítica.

Por tanto, parece natural realizar simplificaciones de estas ecuaciones con el objetivo de reducir su complejidad y poder trabajar con ellas de una manera más sencilla. Esto nos lleva a la aproximación de Boussinesq-Oberbeck que establece unas condiciones de densidad que simplifican enormemente las ecuaciones mencionadas anteriormente.

Una vez obtenidas las ecuaciones simplificadas, parece intuitivo proponer soluciones de las mismas. Esto es lo que pensó Barry Saltzman desarrollando soluciones en series de Fourier. Siguiendo esta idea, obtuvo un conjunto de 52 ecuaciones diferenciales ordinarias que, a excepción de tres, mostraban un comportamiento aparentemente esperado.

Estas tres ecuaciones que presentaban comportamiento anómalo inspiraron a Lorenz para proponer sus soluciones a las ecuaciones simplificadas que comentábamos antes. Esto le llevó a su famoso sistema que estudiaremos en este trabajo. Esta deducción del sistema de Lorenz nos permitirá conocer el significado intrínseco de las variables que aparecen en el sistema.

En este momento, una vez conocido el origen del sistema de Lorenz presentamos un segundo capítulo donde se ponen de manifiesto las propiedades esenciales de dicho sistema. Con el objetivo de mostrarlas con el mayor rigor y veracidad posibles, se desarrollan las demostraciones analíticas de estas propiedades así como gráficas, obtenidas mediante cálculo numérico, para exponer las mismas de manera visual. Algunas de estas propiedades son la simetría espacial, la invariancia del eje Z o el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio. Una propiedad fundamental que se demuestra es la existencia de un atractor global de volumen cero que caracteriza al sistema de Lorenz.

Continuando con el estudio del sistema de Lorenz, presentamos un apéndice en el que se realiza un análisis completo de la *bifurcación de Hopf* para cada uno de los parámetros del sistema σ , b y r . Para cada uno de ellos, obtenemos un valor de bifurcación denotado por μ_1 a partir del cual el sistema exhibe un cambio de estabilidad en sus puntos de equilibrio. Cabe destacar que en todos los casos, se presenta una bifurcación de Hopf subcrítica.

Finalmente, el capítulo tres trata de aunar los conceptos y resultados expuestos anteriormente realizando una descripción del comportamiento cualitativo del sistema de Lorenz para los diferentes valores de r escenificando la transición del régimen precaótico a un régimen en el que sólo existe el caos. Con este capítulo se cierra un estudio completo y detallado del sistema de Lorenz sobre los cimientos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales poniendo sobre la mesa las relaciones entre los desarrollos y resultados matemáticos obtenidos, la interpretación física y el comportamiento cualitativo del sistema.

Aún quedan problemas abiertos sobre el comportamiento cualitativo del sistema de Lorenz como el estudio de la órbita homoclina que se presenta cuando r atraviesa el valor crítico r_0 . Además, este trabajo podría continuarse abordando el estudio de Lorenz desde el punto de vista de la dimensión fractal y de obtener algoritmos para estimar eficientemente

la dimensión de un conjunto ω -límite provenientes de la integración numérica del sistema de Lorenz. Esto permitiría clasificar el comportamiento del sistema para diferentes elecciones de parámetros analizando la dimensión fractal de los conjuntos ω -límite que se presentan en cada caso.

Jesús Llorente

Agradecimientos

Después de la tormenta... llega la calma. Después de cinco años llenos de momentos de mucho trabajo pero también buenos e inolvidables y tras éstas casi doscientas páginas llega el momento de cerrar una etapa. Como decía Machado en sus “Proverbios y cantares”,

*“Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar”.*

al volver la vista hacia estos cinco últimos años uno se da cuenta de lo valiosos que han sido, he aprendido a superar dificultades, a esforzarme, a disfrutar de las pequeñas satisfacciones... Una etapa que ya no se volverá a repetir y a la que siempre estaré agradecido de haberla podido vivir, pues estoy enormemente orgulloso de poder decir que he disfrutado de casi todas las experiencias que un joven universitario puede vivir en una etapa como esta.

Cuando tomas conciencia de que esto llega a su fin, uno se da cuenta que no importa dónde estudies la carrera o la ciudad en la que vives, sino que lo realmente relevante son las personas que te han acompañado durante estos años y todos los anteriores, ya que han contribuido a mi crecimiento como persona “dándome forma” hasta convertirme en lo que soy.

Durante mis primeros años, iba al colegio de mi pueblo, Escarabajosa de Cabezas, donde cursé parvulitos y la educación primaria. Tuve la suerte de encontrarme con dos profesores que marcaron profundamente mi rumbo a lo largo de los años, la “señorita” Dori en preescolar y Julio Pastor durante la primaria. Especialmente este último me ayudó a descubrir mi verdadera vocación, ser profesor de matemáticas, que he mantenido y mantengo hasta la fecha.

A partir de cuarto de primaria, ya no podía seguir estudiando en el colegio de mi pueblo pues no había profesores para ello. Gracias a mi madre, me fui a estudiar al colegio Madres Concepcionistas de Segovia trasladando mi residencia a esta bonita ciudad. Esta decisión de mi madre no supe valorarla en aquel momento, ya que me hubiera gustado seguir estudiando con mis amigos del pueblo en el instituto de una localidad cercana, pero a la que siempre estaré profundamente agradecido. En este colegio cursé el resto de mis estudios hasta finalizar el bachillerato y del que sólo tengo palabras de cariño y afecto. Durante

mis años como estudiante de las Concepcionistas, tuve la suerte de disfrutar de momentos increíbles, el viaje a Noruega, la preparación del pregón en primero de bachillerato, las casetas de la Niña María... podría seguir enumerando durante bastante rato pero lo más importante que me llevé de mi estapa allí, fueron los amigos para toda la vida, con los que hoy sigo compartiendo momentos de cervezas y risas. También me gustaría destacar la labor formativa y personal que el profesorado de las Concepcionistas ejerció sobre mí, especial recuerdo de mi profesora de física Henar, de filosofía Maria Jesús y cómo no, de mi profesor de química y compañero a la dulzaina Javi.

Al finalizar el bachillerato, decidí estudiar el doble grado en ingeniería informática y matemáticas. Todavía me acuerdo de la reacción que tuvieron mis amigos cuando se lo comenté “Estás loco pero lo conseguirás”. Estos cinco años en la facultad de Matemáticas y de Informática me han permitido crecer no sólo a nivel académico sino también a nivel personal, sobretodo por las personas con las que he convivido. Me gustaría expresar mi gratitud y un especial cariño a todos los profesores que he tenido durante estos años, pues de una forma u otra me han permitido forjarme como persona.

De manera especial, me gustaría agradecer este trabajo a todas las personas que me han acompañado,

A los de siempre, Mario, Víctor, Sito, Laura, Irene, Mariano, Javi, Viejo.... con los que he compartido grandes experiencias a lo largo de mi vida y que a día de hoy constituyen una parte esencial de mi forma de vivir el presente.

A Mike y Dani, sois como mis hermanos, por todos los momentos que hemos vivido juntos y que nos quedan por vivir. Este año habéis sido un pilar fundamental haciéndome ver que en los momentos más difíciles y agobiantes siempre hay tiempo para salir una noche o echarnos unas risas.

A Rubén y Edu, toda una vida juntos desde que nos conocimos en el pueblo cuando éramos unos críos. La cantidad de experiencias que contaremos a nuestros nietos y las que nos quedan por construir.

A Iñigo y Sara, por apoyarme en uno de los momentos más duros de mi vida ese segundo de carrera. Cuánta razón tiene eso que me decís de... “Con un par de cervezas y amigos las cosas se ven de otra manera”. Me habéis enseñado que, a pesar de la distancia, siempre nos tendremos los tres. Siempre quedarán las bajadas a San Lorenzo después del instituto en las que Iñigo y yo nos poníamos a discutir sobre temas de física y matemáticas que Sara no soportaba y se adelantaba para llegar antes a casa. ¡Qué le vamos a hacer si somos así!

A Miguel “Dimitri” y Nacho que me habéis acompañado durante estos cinco años en el colegio mayor Santa María de Europa. ¡Qué sería de mis noches estudiando si no hubiérais venido a “molestarme” dándome golpes en la puerta!. Sois las personas con las que comparto la mayor parte de mi tiempo y con las que he vivido las mejores experiencias de mi vida, aunque las seguiremos mejorando.

A Vicky, Óscar, Ángel, Miguel Ángel, Héctor.... y todos aquellas con los que he disfrutado tocando la dulzaina durante estos últimos trece años. Gracias por hacerme ver que la vida se puede vivir de una forma completamente diferente a mi rutina diaria, y como la afición y el gusto por la música tradicional nos ha unido dándonos tan gratos momentos.

A Juan, gracias por darme esta bonita oportunidad de trabajar juntos y, no sólo por transmitirme tu buen hacer como matemático sino también por ayudarme a crecer como persona en cada tutoría, en cada charla... Que esto sea solo el comienzo.

A mi abuela Maruja, fuiste tú quien me enseñó a dividir por números de dos cifras y quien me corregía los ejercicios de la escuela cada tarde. Aunque sólo fuiste a la escuela hasta los catorce años, has sido la inteligencia natural en persona y una de las que más me han influido.

A mis abuelos, Sebastián y Felipa, y a mis primos, Víctor y Adrián, porque el mejor regalo que puedo hacerlos es verme seguir hacia delante.

A mi tía Belén, por haber estado tan pendiente de mí estos años y haberme ayudado siempre a tomar la decisión correcta.

A mi amiga Alicia, eres una de las mejores personas que me ha dado la carrera y que estoy seguro que conoceré. Gracias por tu apoyo durante estos años que hoy me permite poder decirte que hemos superado el doble grado juntos.

Por último, y especialmente dedicado a ellos, a mis padres, Ignacio e Inés. Me habéis permitido realizar aquellas cosas que se me han “antojado” a lo largo de mi vida, tocar la dulzaina, ir a clases de piano, ir a jugar al fútbol... Además de inculcarme unos valores y una forma de ser de la que siempre os estaré agradecidos. Papá, tenías mucha razón aquello que me decías en los momentos más difíciles... “Poco hemos de poder, pero más que ellos seguro” y hemos podido, a falta de unos días podré decirte que soy matemático e ingeniero informático. Este trabajo está dedicado especialmente a mi madre, Inés, soy lo que soy gracias a ti, por tu apoyo, tu comprensión, tus horas de espera a que saliese de clases del conservatorio o de entrenar.... Por todo eso, y más, siempre te estaré agradecido. La vida ha querido que me vieses empezar la carrera pero no acabarla, así que este trabajo va por ti.

Todo lo que comienza a partir de este momento es nuevo y estoy seguro de que traerá grandes experiencias, ya que esto es sólo el comienzo en el sueño de ser profesor de matemáticas. Por esta razón,

*Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.*

Jesús Llorente

CAPÍTULO 1

Sistema de Lorenz

*La gente con más éxito es la que es buena en el plan B,
y esto quiere decir que en la vida puedes planificar el futuro,
pero tienes que estar preparado para cambiar tus planes.*

James A. Yorke

El sistema de ecuaciones diferenciales que se estudia en este trabajo se debe al matemático y meteorólogo estadounidense Edward Norton Lorenz. Nacido en 1917 en West Hartford, Connecticut, trabajó como meteorólogo para el ejército de EE.UU. durante la Segunda Guerra Mundial. Fruto de ello, decidió realizar estudios de postgrado en meteorología en el Instituto Tecnológico de Massachusetts obteniendo el doctorado en 1948. En sus notas autobiográficas, Lorenz escribió:

“Cuando era un niño siempre estaba interesado en hacer las cosas con números, y también fascinado por los cambios en el clima.”

Lorenz construyó un modelo matemático muy simplificado que intentaba reproducir el comportamiento de convección en la atmósfera. De manera general, podemos decir que la convección es el transporte de calor entre zonas con diferentes temperaturas por medio del movimiento de un fluido. En la atmósfera, este movimiento se debe a la fuerza gravitacional como consecuencia de la diferencia de densidad entre las masas de aire caliente y frío. Grosso modo, durante el día el Sol calienta la superficie terrestre, la cual cede parte de su energía al aire por conducción. Debido a este calentamiento, la densidad de esta masa de aire disminuye haciéndose más liviano. Como consecuencia de la acción de la fuerza de la gravedad, parte de esta masa de aire asciende y, por ende, masas de aire más frío descienden ya que son más pesadas debido a su mayor densidad.



Figura 1.1: E. N. Lorenz en 1991

Consideró que la atmósfera era un fluido, un gas (esta hipótesis parece natural, ya que la atmósfera es básicamente aire y agua) entre dos superficies, una superficie inferior caliente y una superior más fría. Por tanto, se genera una distribución de temperaturas en la atmósfera donde la capa que está en contacto con la superficie inferior se encuentra a una mayor temperatura mientras que la capa en contacto con la superficie superior está a menor temperatura.

La dinámica atmosférica estaba gobernada por complejas ecuaciones diferenciales que relacionaban ciertas variables con su variación puntual en el tiempo y en el espacio, y una gran cantidad de parámetros. El trabajo de Lorenz consistió en simplificar el modelo atmosférico lo máximo posible centrándose en el concepto de convección por temperatura. Fruto de ello, obtuvo un conjunto de tres ecuaciones con tres variables donde las derivadas en el tiempo de cada variable dependían de combinaciones lineales y no lineales de dichas variables y algunos parámetros numéricos. Este conjunto de ecuaciones se conoce como *modelo de Lorenz*

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde σ es el conocido *número de Prandtl*, r es el *número de Rayleigh relativo* y b está relacionado con el tamaño físico del sistema. En la sección posterior, realizamos un detallado análisis de este sistema con el objetivo de mostrar el significado de cada una de las variables y parámetros.

En 1960, una vez obtenido el modelo simplificado, que absolutamente nada tiene que ver con la atmósfera real, intentó resolverlo utilizando un ordenador de aquella época, una Royal McBee LGP-30. Cada cinco iteraciones de su programa, obtenía un valor para cada variable x , y , z . Aproximadamente, la máquina empleaba un segundo por iteración de cómputo. Dado que su objetivo era obtener un resultado más amplio, decidió que era buena idea tomar como condición inicial un valor de los obtenidos por la máquina para cada una de las tres variables, introducirlo como punto de partida y que el programa prosiguiese su ejecución a partir de él. Debido al elevado tiempo de cómputo, decidió introducir dicha condición inicial sólo con tres decimales, pues los valores que devolvía la máquina constaban de seis cifras decimales. Él pensaba que era un cambio ínfimo y su efecto sería prácticamente despreciable, ya que la experiencia que se tenía tanto en física como en matemáticas era que cambiar ligeramente las condiciones iniciales de un problema hacía que la solución cambiara ligeramente también. Puso la máquina a trabajar y se fue a tomar un café con sus colegas.

Cuando regresó y comenzó a observar los resultados, obtuvo una sorpresa de tal calibre que cambiaría su vida y abriría un nuevo campo de exploración en las matemáticas, modificando radicalmente la creencia mencionada anteriormente que le llevó a introducir los datos con un número menor de cifras decimales. Los resultados, aunque durante las primeras iteraciones parecidos a los obtenidos en pruebas anteriores, llegado un momento no se parecían en nada. Una vez comprobado que la máquina funcionaba correctamente y no había errores en su programa tuvo que aceptar que pequeños cambios en las condiciones iniciales generaban soluciones que transcurrido un intervalo de tiempo no se parecían nada entre sí. Este fenómeno pone de manifiesto lo que hoy se conoce como *sensibilidad respecto a las condiciones iniciales*.

Lorenz se dedicó a explorar las matemáticas subyacentes a este modelo y publicó sus conclusiones en 1963 en un artículo titulado DETERMINISTIC NONPERIODIC FLOW. Además, puso de manifiesto que para ciertos valores de los parámetros, el sistema muestra un comportamiento “caótico” dando lugar a un patrón de complejidad muy elevada que hoy se denomina *atractor de Lorenz*.

Las observaciones anteriores, le llevaron a formular lo que hoy se conoce como *efecto mariposa*, presentado en 1972 en un artículo titulado PREDICTABILITY: DOES THE FLAP OF A BUTTERFLY’S WINGS IN BRAZIL SET OFF A TORNADO IN TEXAS?. Esta metáfora adquiere profundo sentido, ya que una mariposa que bate sus alas en algún lugar del Amazonas puede provocar a través de los efectos encadenados y múltiples un huracán en el norte de Europa a miles de kilómetros de distancia.

Este hecho dió lugar a la denominación popular de *teoría del caos* a la rama de las matemáticas, las ciencias y otras ramas que estudian sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Dichas variaciones iniciales pueden producir importantes diferencias en el comportamiento futuro, complicando la predicción a largo plazo. Haciendo un ejercicio de extrapolación, se podría llegar a pensar que pequeñas perturbaciones en la atmósfera pueden cambiar el clima en proporciones gigantescas.

Las ideas de Lorenz dieron comienzo a un nuevo y amplio campo de estudio que afectó no sólo a las matemáticas, sino prácticamente a cada rama de las ciencias biológicas, físicas y sociales. En meteorología, ha permitido llegar a la conclusión de que puede ser fundamentalmente imposible hacer predicciones a partir de dos o tres semanas con un grado de exactitud razonable.

En 1991, fue galardonado con el “*Premio Kyoto*” de las ciencias básicas en el ámbito de la tierra y las ciencias planetarias por establecer la base teórica del tiempo y previsibilidad del clima, así como la base para la física atmosférica y meteorológica asistida por computadora. Algunos científicos consideran el nacimiento de la teoría del caos como una de las grandes revoluciones del siglo XX junto a la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad.

El profesor de ciencias atmosféricas del Instituto Tecnológico de Massachusetts, Kerry Emanuel, describió a Lorenz como

“Un perfecto caballero que, por medio de su inteligencia, integridad y humildad, estableció muy alto el nivel para las generaciones venideras”.

Lorenz falleció el 16 de abril de 2008 a la avanzada edad de 90 años en su casa de Cambridge, Massachusetts.

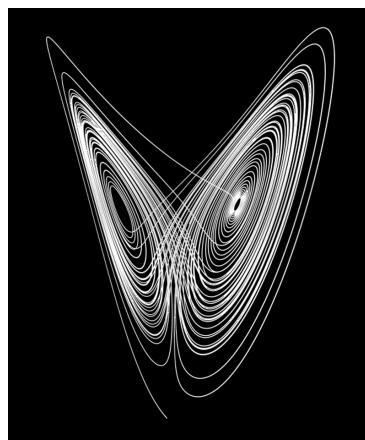


Figura 1.2: Atractor de Lorenz para ciertos parámetros σ , b , r

1.1. Desarrollo teórico

Anteriormente, hemos comentado que Lorenz realizó una simplificación del modelo de convección atmosférica. En esta sección, exponemos el modelo de partida denominado *Convección de Bénard-Rayleigh* así como las posteriores simplificaciones hasta llegar al conjunto de ecuaciones que Lorenz utilizó como punto de inicio para desarrollar su modelo. Además, mostramos en detalle dicho modelo basándonos en su artículo DETERMINISTIC NONPERIODIC FLOW (1963).

En primer lugar, comenzamos introduciendo algunos conceptos básicos de termodinámica que nos permitirán presentar dicho modelo.

1.1.1. Calor. Mecanismos de transmisión

Comenzamos presentando los conceptos de calor y temperatura, que en el lenguaje cotidiano se confunden con frecuencia, pero muy diferentes aunque estrechamente relacionados.

Definición 1.1 (Temperatura). La *temperatura* es una medida de la energía cinética promedio de los átomos y moléculas individuales de una sustancia. La temperatura de un cuerpo depende de la cantidad promedio de energía por partícula, en este sentido, se define como una magnitud escalar relacionada con la energía interna de un sistema. En el Sistema Internacional de Unidades, la unidad de temperatura es el Kelvin (K).

Definición 1.2 (Calor). El *calor* es la energía cinética total de todos los átomos o moléculas de una sustancia. También se puede definir como la energía térmica transferida entre dos sistemas a diferentes temperaturas que entran en contacto. En el Sistema Internacional de Unidades, la unidad de calor es el Julio (J).

El calor es energía en tránsito, siempre fluye de una zona de mayor temperatura a otra de menor. La materia está formada por átomos o moléculas que están en constante movimiento, por ello, posee energía de posición o potencial y energía de movimiento o cinética. Los continuos choques entre los átomos o moléculas transforman parte de la energía cinética en calor, cambiando la temperatura del cuerpo.

La transferencia de calor es el proceso por el que se intercambia energía en forma de calor entre distintos cuerpos, o entre diferentes partes de un cuerpo que se encuentran a diferente temperatura. Por tanto, la transferencia de calor se produce siempre que existe un gradiente térmico o cuando dos sistemas a diferentes temperaturas se ponen en contacto.

Se reconocen tres **mecanismos de transferencia de calor**:

- **Conducción:** La energía calorífica se transmite durante el contacto directo entre cuerpos (o partes de los mismos) a distintas temperaturas y tiene lugar mediante choques entre las moléculas del sistema, donde las partículas más energéticas ceden energía a las de menor energía, originando un flujo de calor desde temperaturas más altas a más bajas. Es un mecanismo basado en el contacto directo entre los cuerpos, sin intercambio de materia.

La conducción de calor sólo se produce si hay diferencias de temperatura entre dos partes del medio conductor. La ecuación que describe la conducción térmica en un

medio continuo es la *ley de Fourier*, viene dada por

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = -\lambda \nabla T \quad (1.2)$$

donde

- $\vec{q}(\vec{x}, t)$ es el vector flujo de calor.
 - λ es el coeficiente de *conductividad térmica* del fluido o material, magnitud que representa la capacidad con la cual la sustancia conduce el calor y produce la consecuente variación de temperatura.
 - $T(\vec{x}, t)$ es el vector temperatura.
- **Radiación:** Es la energía emitida por todos los cuerpos por el hecho de encontrarse a una temperatura dada. Esta energía es producida por cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas constitutivos y transportada por ondas electromagnéticas.
 - **Convección:** La energía calorífica se transmite por el movimiento físico de moléculas “calientes” de las zonas de alta temperatura a las zonas de baja temperatura y viceversa, equilibrándose las temperaturas. En la naturaleza, la mayor parte del calor ganado por la atmósfera mediante conducción y radiación en zonas cercanas a la superficie, es transportado a otras capas de la atmósfera por convección.

La convección puede ser de dos tipos, *forzada* cuando está ayudada por el movimiento de las superficies en contacto con el fluido, y *libre* o *natural* cuando el movimiento se debe exclusivamente a una diferencia de densidades causada por un gradiente de temperaturas.

1.1.2. Convección de Rayleigh-Bénard

La convección natural se genera, normalmente, en fluidos en presencia de un campo gravitatorio debido a gradientes de densidad producidos por la existencia de diferencias de temperatura en el seno del fluido.

Este fenómeno puede explicarse grosso modo diciendo que cuando un fluido es calentado desde abajo, la capa inferior del mismo, debido al incremento de temperatura, se expande volviéndose menos densa y experimentando una fuerza denominada *fuerza de flotación* o *empuje arquimedeiano* que tiende a elevarla. De la misma forma, una capa de fluido más fría y, por tanto, más densa tiende a hundirse produciendo un *flujo convectivo*. Este empuje de flotación está determinado por la diferencia de temperatura entre la parte alta y baja del fluido, además del espesor de dicha capa de fluido.

Un breve análisis histórico del problema nos permitirá situarnos en el contexto en el que se desarrolla la convección de Rayleigh-Bénard. Hacia el año 1900, el físico francés Henri Bénard realizó una serie de experimentos en los que observó la formación de una estructura muy peculiar constituida por celdas hexagonales regulares similares a las que podemos ver en un panel de abejas, generadas cuando una capa delgada de fluido con su superficie superior en contacto con el aire es calentada desde abajo. Las investigaciones realizadas por Bénard en el interior de la celda, pusieron de manifiesto que el flujo ascendía por el

centro de la celda y descendía a lo largo del perímetro hexagonal de la misma. Bénard atribuyó este fenómeno a la tensión superficial de la película de fluido en contacto con el aire.

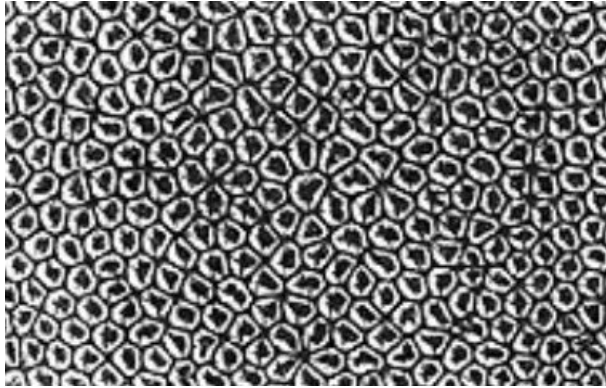


Figura 1.3: Fotografía original realizada por Bénard, muestra las celdas de Bénard en una capa de 0.810 mm de ancho, visulizadas mediante polvo de grafito

Posteriormente, en 1916, Lord Rayleigh puso de manifiesto el desarrollo teórico de los mecanismos físicos involucrados en el fenómeno de convección natural. En efecto, cuando en un fluido la distribución de la densidad no es homogénea y se encuentra en presencia de la fuerza gravitacional, la *fuerza de flotabilidad* es la responsable de que una porción del fluido que en media sea más densa que su entorno tienda a descender, mientras que una con densidad menor tienda a ascender. Además, hay que tener en cuenta los mecanismos que tienden a contrarrestar el efecto de este empuje:

- La fricción originada por las *fuerzas de viscosidad*.
- La *conducción de calor* que tiende a homogeneizar la distribución de temperaturas en el seno del fluido, y por tanto, también la de las densidades.

La convección natural de Rayleigh-Bénard es un tipo de flujo convectivo en espacios confinados, producido por la estratificación en zonas de diferente densidad en dirección vertical como consecuencia de diferencias de temperatura en seno el fluido.

Consideremos una fina capa de fluido entre dos placas infinitas paralelas dispuestas perpendicularmente a la dirección de la gravedad. Asumimos que todas las magnitudes físicas relevantes, en particular la temperatura, están distribuidas de manera homogénea. Por tanto, no se produce ningún movimiento en el fluido, tanto a nivel macroscópico como microscópico mientras la temperatura en la capa de fluido y en las dos placas se mantenga constante. Por esta razón, diremos que el sistema permanece en *equilibrio*.

Podemos pensar que una pequeña perturbación, entendida como un pequeño incremento de la temperatura en la placa inferior durante un corto periodo de tiempo, es rápidamente absorbida por el sistema debido a la conducción térmica, reestableciéndose el estado de equilibrio inicial. En este sentido, podemos decir que un sistema es *estable* si es estacionario, es decir, si su evolución a lo largo del tiempo no se ve modificado por pequeñas variaciones de sus condiciones iniciales. Además, se dice que el estado de un

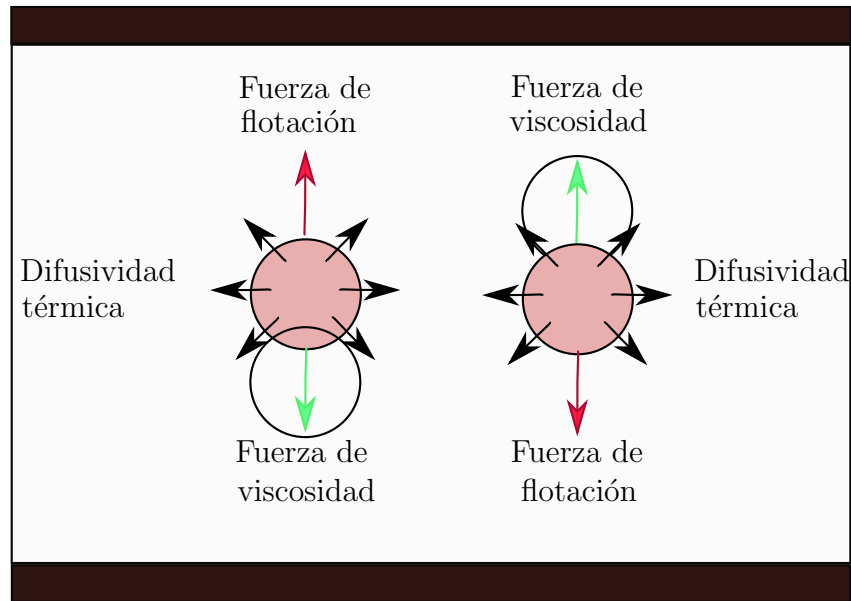


Figura 1.4: Representación de las fuerzas presentes en el fluido

sistema es *asintóticamente estable* cuando los efectos producidos por las perturbaciones desaparecen al cabo de un periodo de tiempo determinado.

Supongamos que suministramos energía en forma de calor de manera uniforme a la placa inferior produciendo un aumento de temperatura. Si dicho suministro de energía es permanente en el sentido de que la temperatura de la placa inferior se mantiene constante, debido a la conducción térmica, se producirá un incremento en la temperatura de la placa superior hasta alcanzar un valor determinado. Como consecuencia de la pérdida de calor en el entorno, la temperatura de la placa inferior es mayor que la de placa superior. El resultado es una diferencia de temperatura

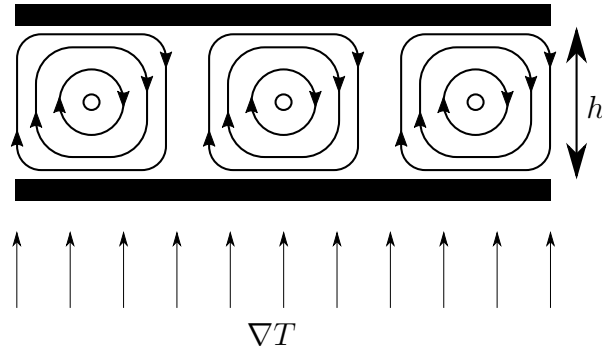
$$\Delta T = T_{\text{placa inferior}} - T_{\text{placa superior}}$$

entre ambas placas que se mantendrá constante y la misma en cualquier punto de ellas.

Con el objetivo de mostrar una explicación rigurosa del fenómeno de convección natural que se producirá cuando incrementemos la diferencia de temperatura entre ambas placas, asumimos las siguientes hipótesis:

- El fluido es incompresible.
- Debido al incremento de temperatura, la densidad del fluido decrece como consecuencia de la expansión térmica del mismo.
- La única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la fuerza gravitacional.

Supongamos que elevamos la temperatura de la placa inferior de manera que la diferencia de temperatura ΔT entre ambas placas sea suficientemente grande. Consideremos una pequeña porción de fluido situada en la parte inferior de la capa del mismo. Como consecuencia del incremento de temperatura de la placa inferior, dicha porción adquirirá una menor densidad en comparación con las parcelas de fluido situadas sobre ella.


 Figura 1.5: Celdas de la convección de Bénard en ΔT

Imaginemos que dicha porción, como consecuencia de su menor densidad y de la fuerza gravitacional, se desplaza ligeramente hacia arriba. Esta porción se encuentra en una zona del fluido con una menor temperatura y como consecuencia en un entorno más denso. Por consiguiente, dicha porción está sujeta a una fuerza de flotación. Este empuje convectivo ascendente originado en una diferencia de densidad (flotamiento) provoca el ascenso de parcelas de fluido menos densas y el hundimiento por acción de la gravedad de parcelas más densas. La fricción originada por las fuerzas de viscosidad contra la masa del fluido tiende a frenar su ascenso, así como la difusión térmica tiende a disminuir la diferencia de temperaturas en el fluido, que es la causante del empuje convectivo (véase la figura 1.4).

Dependiendo de la relación que exista entre estos tres mecanismos, la porción de fluido permanecerá en reposo (estado de equilibrio estable) o tenderá a ascender (estado de equilibrio inestable). Por tanto, la situación de equilibrio inestable es la que da lugar al fenómeno de convección natural, originando *celdas de convección* (véase la figura 1.5).

La convección comienza cuando la fuerza de flotación es superior a las fuerzas de viscosidad y sobrepasa los efectos disipativos de la difusión térmica. En este caso, la conducción no conseguirá disipar todo el calor y la transferencia de calor se realizará por convección. Esta es la explicación de la existencia de un valor crítico ΔT_{cr} de diferencia de temperaturas entre la placa superior e inferior, de manera que gradientes de temperatura superiores a dicho valor crítico darán lugar al fenómeno de *convección natural de Bénard-Rayleigh*, o simplemente convección de Bénard.

Observamos que los procesos físicos más importantes involucrados en esta convección son la expansión térmica del fluido debida al aumento de temperatura, los efectos de la viscosidad en el seno del fluido y el intercambio de calor entre varias porciones del mismo.

Sorprendentemente, las celdas de Bénard evolucionan, dependiendo de la altura h entre ambas placas, con una longitud característica del orden del milímetro. El experimento de Bénard-Rayleigh pone de manifiesto la dualidad entre azar y determinismo, previo a la irrupción de la mecánica cuántica en física. La evolución de los patrones convectivos que se originan a partir de un cierto umbral ΔT_{cr} es puramente determinista, sin embargo, la rotación en sentido horario o antihorario de cada celda no se puede llegar a predecir.

Cuando la diferencia de temperaturas entre ambas placas es muy elevada, la estructura de celda desaparece convirtiéndose el flujo espacial y temporalmente caótico.

1.1.3. Ecuaciones del movimiento

En esta sección presentamos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido. El estudio del mismo pasa por la definición del sistema en estudio con el objetivo de describir el comportamiento del flujo en una región determinada. Por este motivo, se define la región del espacio que está ocupada por el fluido como *volumen de control*, denotado por V_f . En este espacio se presentan las características termodinámicas, dinámicas y energéticas del fluido.

La superficie cerrada que delimita dicho volumen de control recibe el nombre de *superficie de control*, denotada por Ω , siendo sus características más importantes la permanencia de la forma y el tamaño del volumen que delimita. A través de esta superficie se realizan los procesos de intercambio de energía y masa con el entorno (véase figura 1.5).

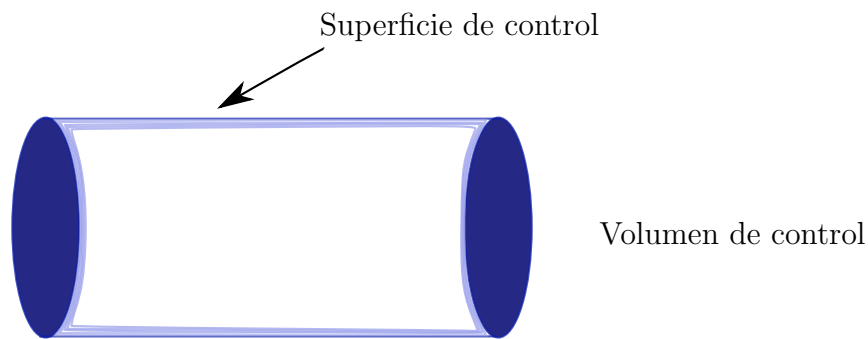


Figura 1.6: Volumen de control

Consideramos el fluido como un continuo que viene caracterizado por las siguientes funciones:

- $\rho(x, t)$. Campo de densidades del fluido. Se considera una distribución continua de la masa en el espacio y el tiempo.
- $p(x, t)$. Campo de presiones en el seno del fluido.
- $T(x, t)$. Campo de temperaturas en el fluido.
- $u(x, t)$. Campo de velocidades en el seno del fluido. Describe el estado del movimiento del fluido en el punto x y el instante t .

Existen dos formas de interpretar el fluido, una de ellas es fijar un punto del volumen de control y medir sus características en dicho punto, mientras que la segunda forma consiste en calcular la variación de sus características a lo largo de la trayectoria de una partícula de fluido en el volumen de control. En esta segunda interpretación, hablamos de *derivada sustancial* o *derivada material*, definida como el operador

$$\frac{D}{Dt}(\star) = \frac{\partial(\star)}{\partial t} + u \cdot \nabla(\star)$$

El primer término representa la variación de la propiedad (\star) en un punto fijo del espacio, por esta razón, recibe el nombre de *derivada local*, mientras que el segundo término representan la variación de dicha propiedad asociada al cambio de posición de la partícula del fluido recibiendo el nombre de *derivada convectiva*.

En la siguiente tabla se presentan las principales propiedades de los fluidos, tanto las que se derivan de factores intrínsecos del fluido denominadas *propiedades termodinámicas* que no se ven influenciadas por fuerzas externas, como las *propiedades dinámicas* que representan cambios físicos o de su estado de evolución del movimiento causados por fuerzas externas.

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS	
Termodinámicas	Dinámicas
Presión	Viscosidad
Densidad	Conductividad térmica
Temperatura	Tensión superficial
Energía interna	Compresibilidad
Entalpía	Capilaridad
Entropía	
Calor específico	
Peso específico	
Volumen específico	

Cuadro 1.1: Propiedades de los fluidos

Además, existen dos maneras de clasificar a los fluidos:

- Por su viscosidad,
 - Fluidos newtonianos: Fluidos de viscosidad constante.
 - Fluidos no newtonianos: Fluidos de viscosidad no constante.
- Por su densidad,
 - Fluidos incompresibles: Fluidos de densidad constante, es decir, $\rho(x, t) = \text{cte}$.
 - Fluidos compresibles: Fluidos de densidad no constante.

En nuestro caso de estudio consideraremos **fluidos newtonianos incompresibles**.

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos son leyes de conservación que resultan al aplicar ciertos principios físicos a un modelo apropiado de fluido. Los principios físicos de los que partimos son:

- Conservación de la masa.
- Conservación de la cantidad de movimiento (Segunda Ley de Newton).
- Conservación de la energía.

Los modelos de fluido a los que se pueden aplicar estos principios pueden ser de dos tipos, o bien se trata de un volumen de control finito o bien uno infinitesimal. Si estos principios se aplican a un modelo de volumen finito se obtienen *formas integrales* de las leyes de

conservación. Por el contrario, si son aplicados a un modelo de volumen infinitesimal diremos que las ecuaciones obtenidas están en *forma diferencial*.

Por lo comentado anteriormente, las formas diferencial e integral de las ecuaciones de conservación no son más que dos maneras diferentes de representar los mismos principios físicos.

Dado que la forma diferencial de las ecuaciones de conservación proporciona una mayor sencillez en la utilización de las mismas, presentamos las *ecuaciones fundamentales del movimiento* en forma diferencial para fluidos newtonianos incompresibles.

Conservación de la masa

El principio físico de conservación de la masa afirma que la masa no se crea ni se destruye, sino que se conserva. Consideremos un volumen de control, denotado por V_f , arbitrario. Dado que el campo de densidad $\rho(x, t)$ expresa la masa por unidad de volumen, la variación de la masa en el volumen V_f viene dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho(x, t) dV = \int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Por el principio de conservación de la masa, la suma de la variación de la masa dentro del volumen de control y la salida de masa a través de la superficie Ω es nula. Por tanto, la *ecuación de conservación de la masa en forma integral* se expresa como

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \rho u \cdot d\Omega$$

donde $d\Omega = \mathbf{n}d\Omega$ define un vector de longitud $d\Omega$ en la dirección del vector unitario \mathbf{n} normal a la superficie de control Ω dirigido hacia fuera de la misma. Por definición, la dirección de dentro hacia fuera de la superficie se considera positiva.

Utilizando el teorema de Gauss, transformamos la integral anterior en

$$\int_{V_f} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] dV = 0$$

Dado que el volumen de control de partida es totalmente arbitrario, la ecuación anterior se verifica si y solo si su integrando es cero, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

obteniendo así la *ecuación de conservación de la masa en forma diferencial*, conocida habitualmente como *ecuación de continuidad*.

Como nuestro estudio está enfocado a fluidos de densidad constante, la ecuación anterior queda reducida a

$$\boxed{\text{Div } u = 0}$$

Conservación de la cantidad de movimiento. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes gobiernan el movimiento de fluidos newtonianos incompresibles, expresan básicamente la segunda ley de Newton aplicada a un volumen infinitesimal de fluido. Con el objetivo de entender el significado de estas ecuaciones, hacemos un breve repaso de las leyes introducidas por Isaac Newton en su obra *PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*.

- Primera ley de Newton: “Todo cuerpo que no está sometido a ninguna interacción (cuerpo libre o aislado) permanece en reposo o se traslada con velocidad constante”

Esta ley es conocida como *ley de inercia* y se puede interpretar que para modificar el estado de movimiento de un cuerpo es necesario actuar sobre él. En este sentido, definimos una magnitud vectorial denominada *cantidad de movimiento* de una partícula, denotada por \vec{p} , como

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Por lo comentado anteriormente, esta ley es equivalente a afirmar que un cuerpo libre se mueve con \vec{p} constante.

- Segunda ley de Newton: “Se define la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, como la variación de su cantidad de movimiento.”

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La unidad de fuerza en el Sistema Internacional es el Newton (N). Una fuerza es cualquier acción que puede modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo. De acuerdo a su posición, las fuerzas pueden ser:

- Fuerzas externas: Dado un cuerpo o sistema de cuerpos se denominan *fuerzas externas* a las fuerzas que realizan otros cuerpos o sistemas sobre el cuerpo o sistema en cuestión.
- Fuerzas internas: Dado un cuerpo o sistema de cuerpos se denominan *fuerzas internas* a las fuerzas que mutuamente se ejercen entre sí las diferentes partículas del cuerpo o sistema.

Sustituyendo la expresión de la cantidad de movimiento de la primera ley, obtenemos la expresión habitual de esta ley,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\vec{a}\end{aligned}$$

Cabe destacar que el término resultante hace referencia a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

- Tercera ley de Newton: “ Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejerce sobre el primero una fuerza de igual en módulo y de sentido contrario a la primera”

De acuerdo con la reciprocidad indicada en la tercera ley de Newton, las fuerzas externas entre dos sistemas o cuerpos son siempre iguales pero de sentidos opuestos. De manera similar, las fuerzas internas son iguales y opuestas dos a dos, por lo que analizando el cuerpo o el sistema de una manera global podemos afirmar que la suma de todas las fuerzas internas es nula.

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se reduce a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el mismo.

De acuerdo a las leyes anteriores, la cantidad de movimiento para un elemento infinitesimal dentro del volumen de control viene dado por

$$\rho \mathbf{u} \cdot dV$$

Procediendo de manera análoga que en la ecuación de conservación de la masa, la variación temporal de esta magnitud dentro del volumen de control es,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} \cdot dV = \int_{V_f} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Cabe destacar que si consideramos la variación de la cantidad de movimiento en el instante t para un volumen de control arbitrario V_f , encerrado en una superficie Ω , debemos tener en cuenta que tanto el integrando $\rho \vec{u}$ como el dominio de integración V_f y la superficie de control Ω dependen del tiempo. Con el objetivo de aligerar la notación, no mostramos la dependencia explícita respecto del tiempo.

Llegados a este punto cabe preguntarse por las fuerzas que pueden actuar sobre un fluido en un volumen de control, pueden ser:

- *Fuerzas másicas.* Se definen como aquellas que actúan directamente sobre la masa del volumen. Denotamos las fuerzas másicas por unidad de masa por \mathbf{f} , consecuentemente, la fuerza másica en el volumen del fluido vendrá dada por $\rho \mathbf{f}$, que recibe el nombre de *término de flotabilidad*.
- *Fuerzas de superficie.* Se definen como aquellas que actúan directamente sobre la superficie que delimita el volumen de control. Estas fuerzas pueden provenir de dos posibles fuentes, la distribución de presiones (impuesta por el fluido que rodea el volumen de control) y las tensiones normales y tangenciales (resultantes de la interacción del fluido con la superficie que delimita el mismo). Estas son una función de la posición, el tiempo y la orientación de la superficie. Denotamos las fuerzas de superficie por unidad de área aplicadas al volumen de control como \mathbf{t}_n .

Concluimos que,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{V_f} \rho \mathbf{f} \cdot dV + \int_{\Omega} \mathbf{t}_n \cdot d\Omega$$

Utilizando lo anterior, obtenemos la *ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral*

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} \cdot dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{f} \cdot dV + \int_{\Omega} \mathbf{t}_n \cdot d\Omega$$

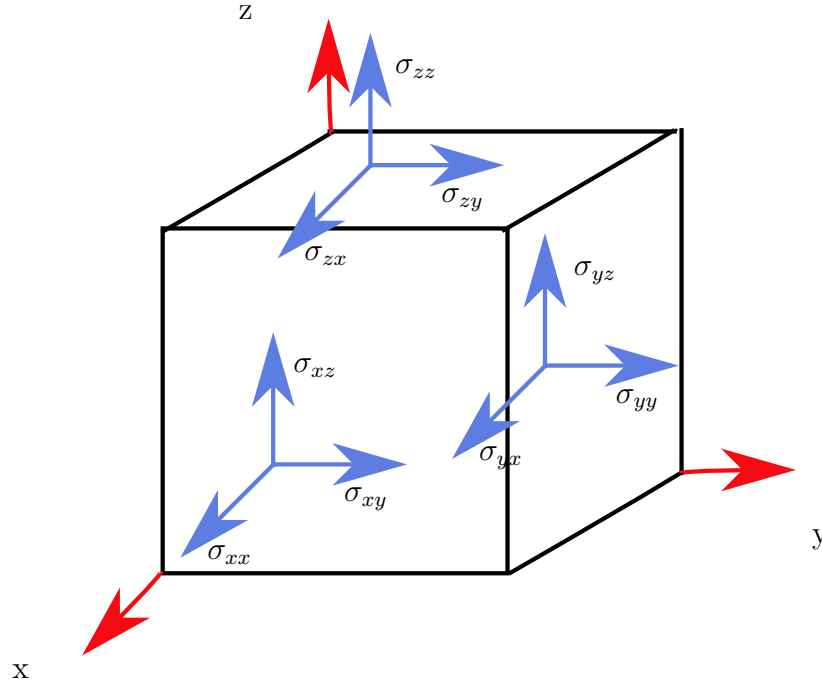


Figura 1.7: Tensiones sobre un elemento de fluido.

Con el objetivo de obtener una expresión de las fuerzas de superficie que nos permita trabajar con mayor comodidad, introducimos el concepto de *tensor de tensión*.

Una tensión se define como fuerza por unidad de área, en el Sistema Internacional sus unidades son Newtons por metro cuadrado. Dado que la fuerza no tiene que ser la misma en cada una de las direcciones de un espacio tres dimensional, la tensión viene expresada por un tensor de segundo orden, el cual tiene nueve componentes. La notación habitual para representar la tensión es

$$\sigma_{nm}$$

donde n corresponde al eje coordenado paralelo al vector normal al área sobre la que actúa dicha tensión, y m corresponde al eje coordenado paralelo a la tensión.

Con esta notación, las tensiones σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} reciben el nombre de *tensiones normales* por ser su dirección normal a la superficie sobre las cuales actúa, mientras que las tensiones σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} y σ_{zy} se denominan *tensiones tangenciales* por ser tangentes a la superficie sobre la que actúan.

Sobre un elemento diferencial de fluido actúa una distribución de tensiones según todas las direcciones como se muestra en la figura 1.7. Dicha distribución se agrupa en un tensor denominado *tensor de tensiones* o *tensor de esfuerzos de Cauchy*, denotado por $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Consideremos el vector normal \mathbf{n} a la superficie Ω , las fuerzas superficiales pueden ser

expresadas utilizando el tensor de tensiones de Cauchy de la siguiente forma,

$$\int_{\Omega} \mathbf{t}_n \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot d\Omega$$

Empleando el teorema de Gauss, transformamos la ecuación en forma integral de la cantidad de movimiento en

$$\int_{V_f} \left[\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \right] dV = 0$$

donde $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}$ denota el vector cuya componente i -ésima coincide con la divergencia de la i -ésima columna del tensor $\boldsymbol{\sigma}$, es decir,

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma})_i = \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3}$$

Dado que el volumen de control de partida era totalmente arbitrario, la integral anterior es nula si y solo si lo es su integrando. Por tanto,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \quad (1.3)$$

En la definición de fuerzas de superficie, hemos comentado que dichas fuerzas se debían a la presión que ejerce el fluido que rodea el volumen de control expresada como la ecuación de estado $p = p(\rho, T)$, y a la interacción del fluido con la superficie de control como consecuencia de las denominadas *fuerzas de viscosidad*.

Por esta razón, cabe esperar que el tensor de esfuerzos de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, pueda descomponerse en los dos factores mencionados anteriormente, es decir,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'$$

donde

- p : Ecuación de estado para la presión.
- \mathbf{I} : Tensor unitario cuyas componentes son todas uno.
- $\boldsymbol{\sigma}'$: Tensor de esfuerzos viscosos.

El tensor de esfuerzos viscosos representa la fricción interna debida a las fuerzas moleculares. Observemos que su dirección de acción es opuesta a la presión, por ello, los dos factores anteriores tienen signos opuestos.

El tensor de esfuerzos viscosos puede descomponerse a su vez, en la suma de dos tensores

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'_h + \boldsymbol{\sigma}'_d$$

donde

- $\boldsymbol{\sigma}'_h$ recibe el nombre de *parte esférica de $\boldsymbol{\sigma}'$* , es un tensor diagonal con los elementos de la diagonal iguales a la media de las tres tensiones principales σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} . Produce deformación hidrostática o cambio de volumen.

- $\boldsymbol{\sigma}'_d$ recibe el nombre de *parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}'$* , se obtiene de restar al tensor la parte esférica y produce deformaciones de distorsión o cambio de forma.

Sustituyendo en la ecuación (1.3), obtenemos

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \text{Div } \boldsymbol{\sigma}' \quad (1.4)$$

donde ∇p hace referencia al gradiente de la presión. Hay que destacar que el tensor de esfuerzos viscosos sólo existe si el fluido está en movimiento. Dicho tensor se puede expresar como

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\eta \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\text{Div } u) \mathbf{I} \right] + \eta_V (\text{Div } u) \mathbf{I}$$

siendo

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: Tensor de velocidad de deformación, definido como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] \quad \text{tal que} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- η : Coeficiente de viscosidad del fluido. Representa la resistencia que éste opone a su deformación. También recibe el nombre de *viscosidad dinámica*.
- η_V : Coeficiente de viscosidad volumétrica. Relaciona la deformación volumétrica del fluido con la parte esférica del tensor de esfuerzos viscosos.

Desarrollando la derivada sustancial de la ecuación (1.4), obtenemos la *ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial*

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \text{Div } (\rho u u^t) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \text{Div } \boldsymbol{\sigma}'$$

donde la componente i -ésima del vector $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}'$ viene dada por

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}')_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\eta \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \eta_V \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

siendo δ_{ij} la conocida *delta de Kronecker*. Dado que nuestro objeto de estudio son los fluidos Newtonianos incompresibles, la ecuación anterior se reduce a

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 u}$$

que recibe el nombre de ecuación de Navier-Stokes. Cabe destacar que el último término del lado derecho de la ecuación anterior, representa el efecto de las fuerzas viscosas y es válido únicamente para fluidos newtonianos, se puede interpretar como la difusión de la cantidad de movimiento en el fluido debido a la acción molecular de la viscosidad.

Además, el tensor de esfuerzos viscosos queda reducido a

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\eta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Observación 1.1. El operador ∇^2 recibe el nombre de *Laplaciano*, definido como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Conservación de la energía.

La ecuación de la energía se basa en el primer principio de la termodinámica. Un *sistema termodinámico* se define como la parte del universo que constituye nuestro objeto de estudio. Ejemplos de sistemas termodinámicos pueden ser una persona, la atmósfera terrestre, una célula...

Un sistema termodinámico puede intercambiar energía con el entorno que le rodea en forma de trabajo y calor, y acumula energía en forma de energía interna.

- *Trabajo*: Se define como la cantidad de energía transferida de un sistema a otro mediante una fuerza cuando se produce desplazamiento. De este modo, podemos decir que el trabajo es energía en movimiento. Es una magnitud física escalar que se denota con la letra W y se expresa en unidades de energía, julios (J) en el Sistema Internacional de Unidades.
- *Calor*: Se comentó en la página 4.
- *Energía interna*: Se define como la energía almacenada por un sistema de partículas. Es el resultado de la contribución de la energía cinética de las moléculas o átomos que lo constituyen, de sus energías de rotación, traslación y vibración, además de la energía potencial intermolecular debida a las fuerzas de tipo gravitatorio, electromagnético y nuclear.

La energía interna es una función de estado, su variación sólo depende del estado inicial y final.

El *Primer Principio de La Termodinámica* relaciona las tres magnitudes anteriores mediante la expresión

$$Q = W + \Delta U$$

siendo

- Q : Calor
- W : Trabajo realizado por las fuerzas externas al sistema.
- ΔU : Variación de energía interna.

Si se aplica este principio a un volumen de control, expresa que la variación temporal de la energía total en el volumen de control es igual al incremento del trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre el volumen y el flujo neto de calor a través de la superficie de control.

En este caso no exponemos el desarrollo teórico de la ecuación de conservación de la energía debido a que carece de especial relevancia en el desarrollo de las secciones posteriores. De este modo, la *ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial* para fluidos newtonianos incompresibles viene dada por

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T + 2\eta \varepsilon : \varepsilon$$

donde

- Calor específico a volumen constante, c_v : Se define el *calor específico* como la cantidad de calor que se necesita por unidad de masa para elevar un grado la temperatura de una sustancia. En este sentido, definimos el *calor específico a volumen constante* como la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura por unidad de masa de una sustancia cuando el volumen se mantiene constante. De manera análoga, se define el *calor específico a presión constante* cuando la presión se mantiene constante, y se denota por c_p .
- Coefficiente de conductividad térmica del fluido, λ : Representa la cantidad o flujo de calor que pasa a través de la unidad de superficie de una muestra del fluido, de extensión infinita, caras planoparalelas y una unidad de espesor, cuando entre ambas caras se establece una diferencia de temperatura igual a la unidad en unas condiciones determinadas fijas y constantes. En el sentido de la ley de Fourier (véase página 5), podemos decir que expresa la capacidad de conducir calor de dicho fluido.
- El término $2\eta\varepsilon : \varepsilon$ hace referencia al producto escalar de tensores, también denominado producto doblemente contraído definido por

$$S : T = \text{traza} (S^T \cdot T) = \text{traza} (S \cdot T^T)$$

siendo S y T tensores.

Observación 1.2. Para fluido incompresibles se verifica $c_p = c_v$

1.1.4. Sumario

Gracias a los desarrollos realizados en el apartado anterior, concluimos que las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido newtoniano incompresible en la convección de Bénard vienen dadas por

- **Ecuación de continuidad**

$$\text{Div } u = 0 \tag{1.5}$$

- **Ecuación de Navier-Stokes**

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \varrho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 u \tag{1.6}$$

- **Ecuación de la energía**

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T + 2\eta\varepsilon : \varepsilon \tag{1.7}$$

Las tres ecuaciones anteriores describen el fenómeno de convección natural de Bénard-Rayleigh teniendo como incógnitas el campo de velocidades u , la distribución de temperaturas T , la distribución de densidades ϱ y el campo de presiones p , siendo los coeficientes característicos del fluido constantes.

1.2. Modelos y aproximaciones

Debido a la complejidad de las ecuaciones mostradas anteriormente, ha sido tradicional en los estudios de la convección natural de Rayleigh-Bénard buscar simplificaciones que faciliten el análisis del problema. Por esta razón, en los apartados posteriores mostramos dichas simplificaciones hasta llegar al modelo propuesto por Edward Lorenz, que responde a una simplificación de las ecuaciones (1.5) a (1.7).

1.2.1. Aproximación de Boussinesq-Oberbeck

Está basada en la observación experimental de que las variaciones de densidad debidas a pequeñas diferencias de temperatura ΔT , son también pequeñas. Debido a que la única fuerza externa que actúa en el fenómeno de convección natural es la fuerza gravitacional, el término de flotabilidad $\rho \mathbf{f}$ se expresa como $\rho \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} representa el vector de aceleración gravitacional dado por

$$\mathbf{g} = \{0 \quad 0 \quad -g\}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, aproximadamente 9.8 m/s^2 .

En fluidos inducidos por convección natural (en los que el movimiento del fluido es originado por efectos de flotación debidos a diferencias de densidad en el seno del fluido, a su vez producidas por variaciones de temperatura), es frecuente hacer una aproximación que consiste en suponer constante la densidad del fluido excepto en el término de flotabilidad de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, donde se supone que la densidad varía de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \quad (1.8)$$

donde

- α representa el *coeficiente de expansión térmica isobárico*. En el caso de fluidos incompresibles, podemos asumir que la variación de la presión en el medio es tan pequeña que la variación de la densidad provocada por dicha variación de presión es despreciable. Por esta razón, dicho coeficiente viene dado por

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

donde el subíndice p indica que la presión se considera constante.

- T_0 es la *temperatura de referencia*, es decir, la diferencia de temperatura viene dada por $\Delta T = T - T_0$.
- ρ_0 representa el valor constante de la densidad en la temperatura de referencia T_0 .

Utilizando la aproximación anterior, la incompresibilidad del fluido y que los coeficientes característicos del mismo λ , c_v , η y α son independientes de la velocidad y la temperatura, y tomando como punto de partida las ecuaciones (1.5) a (1.7), obtenemos las ecuaciones completas de la *aproximación de Boussinesq-Oberbeck* que describen el fenómeno de la convección de Bénard,

■ **Ecuación de continuidad**

$$\text{Div } u = 0 \quad (1.9)$$

■ **Ecuación del movimiento**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u &= \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 u \\ &= [1 - \alpha (T - T_0)] \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 u \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ recibe el nombre de *viscosidad cinemática*, *difusividad viscosa* o simplemente, *coeficiente cinemático de viscosidad*.

■ **Ecuación de la energía**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T \quad (1.11)$$

donde $\chi = \frac{\lambda}{\rho_0 c_v}$ recibe el nombre de *coeficiente de difusividad térmica*, es una propiedad específica de cada tipo de fluido para caracterizar la velocidad a la que varía la temperatura en su interior. Además, $\chi \nabla^2 T$ recibe el nombre de *término de conducción térmica*.

El término $2\eta\epsilon$: ϵ que representa la pérdida de energía debido a la fricción interna en la ecuación de la misma puede ser despreciado, ya que en el experimento de Bénard, en el caso de fluidos como agua o silicona, es mucho más pequeño que el término de conducción térmica $\chi \nabla^2 T$ por un factor de orden 10^{-7} .

La aproximación de Boussinesq-Oberbeck supone una linealización de la dependencia de la densidad con la temperatura, por lo que es aceptable para variaciones de temperaturas no excesivamente grandes.

1.2.2. Modelo de Saltzman

El problema de la convección de Bénard en tres dimensiones es muy complejo de resolver, incluso numéricamente. Sin embargo, en el caso de un flujo bidimensional el problema se simplifica considerablemente. Por esta razón, el profesor Barry Saltzman redujo el problema de convección tridimensional a un problema de dos dimensiones asumiendo que las celdas de Bénard en el plano $x - z$ evolucionan de manera independiente de la coordenada y . Esto implica que la componente del campo de velocidad en la dirección y y todas las derivadas $\partial/\partial y$ desaparecen.

Por tanto, el problema a estudiar será el movimiento bidimensional de un fluido alojado en un recinto rectangular de anchura l y altura h cuyas paredes verticales se consideran adiabáticas (no intercambian calor con su entorno), mientras que la pared superior se encuentra a una temperatura T_0 y la inferior a una temperatura $T_0 + \Delta T$.

Si partimos de las ecuaciones 1.9, 1.10 y 1.11, utilizando la hipótesis anterior y renombrando las variables

$$x = x_1, \quad z = x_3, \quad u = u_1, \quad w = u_3$$

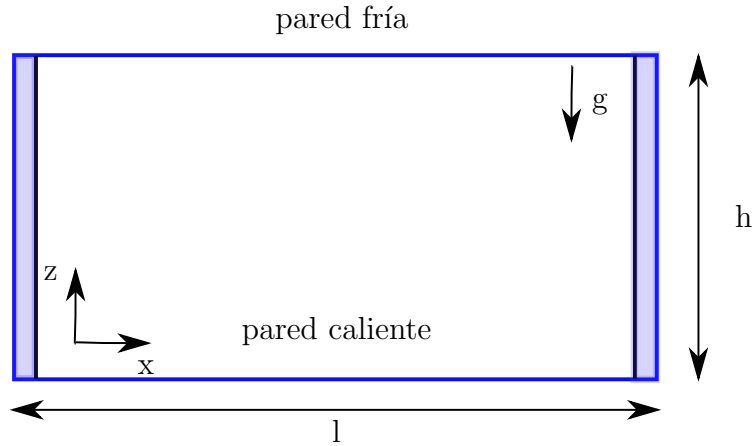


Figura 1.8: Representación esquemática del fluido confinado en la cavidad.

obtenemos las ecuaciones para el problema de convección dos dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \nabla^2 T \tag{1.14}$$

Observemos el sistema de ecuaciones anterior, disponemos de un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas u , w , p y T . Para reducir tanto el número de incógnitas como el de ecuaciones a resolver se va a seguir el procedimiento expuesto por Barry Saltzman en su artículo FINITE AMPLITUDE FREE CONVECTION AS AN INITIAL VALUE PROBLEM, que permite reducir el problema a uno de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por esta razón, introducimos el concepto de *función de corriente*. En el caso de un flujo bidimensional incompresible, se puede definir una función escalar denominada *función de corriente*, denotada por $\psi(x, z, t)$, que permite obtener por derivación el campo de velocidades de la siguiente forma

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \&\& \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La existencia de esta función es una consecuencia de suponer la continuidad e incompresibilidad del fluido. Además, dicha función permite simplificar las ecuaciones ya que elimina una incógnita, pero aumenta en un grado el orden de las ecuaciones diferenciales. La función de corriente representa la posición espacial de las partículas en la celda del fluido, y observemos que la ecuación de continuidad (2.11) se satisface de manera inmediata.

De acuerdo a lo expuesto en la descripción del fenómeno bidimensional, establecemos las condiciones de contorno para la temperatura, es decir,

$$\begin{aligned} T(x, z, t)|_{z=0} &= T_0 + \Delta T \\ T(x, z, t)|_{z=h} &= T_0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Introducimos la función $\theta(x, z, t)$ que representa la manera en la cual la temperatura en cada punto del espacio $T = T(x, z, t)$ se desvía de su componente lineal.

En este sentido, la temperatura viene dada por la siguiente expresión

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \theta(x, z, t) \quad (1.16)$$

donde la función $\theta(x, z, t)$ verifica

$$\theta(x, 0, t) = 0 \quad \&\& \quad \theta(x, h, t) = 0$$

En este modelo asumiremos que las temperatura T_0 y $T_0 + \Delta T$ se mantienen constante por calentamiento externo. Con el objetivo de eliminar la incógnita correspondiente a la presión p en las ecuaciones (2.12), realizamos

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{ primera ecuación} - \frac{\partial}{\partial x} \text{ segunda ecuación}$$

para posteriormente aplicar el lema de Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 u) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \end{aligned}$$

Restando a la primera ecuación la segunda, y utilizando la definición de la función de corriente obtenemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) - g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \nu \nabla^4 \psi = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

equivale al rotacional del campo de velocidades con signo contrario. Por ello, expresa la rotación del fluido en el plano $x - z$. Además, se verifica la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi &= \nabla^2 \nabla^2 \psi \\ &= \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \\ &= \psi_{xxxx} + \psi_{zzzz} + \psi_{zxzx} + \psi_{zxxz} \end{aligned}$$

Observación 1.3. Hemos supuesto que la función ψ es cuatro veces continuamente diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^3 , además de que las derivadas mixtas de ψ existen y son continuas, y por el teorema de Schwarz, dichas derivadas mixtas son iguales.

Introduciendo la ecuación (1.8) que expresa la variación de densidad en el término de flotabilidad de la ecuación de movimiento y la expresión de la ecuación de la temperatura (1.16) en la ecuación desarrollada anteriormente y en la ecuación de la energía (1.14), obtenemos las relaciones entre las variables ψ y θ que describen el modelo de convección natural

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) - g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{h} \right) - \chi \nabla^2 \theta &= 0 \end{aligned}$$

Con el propósito de simplificar la notación, utilizamos el *operador de Jacobi* definido como

$$\frac{\partial (a, b)}{\partial (x, z)} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}$$

para expresar las ecuaciones anteriores de una manera más compacta. Las ecuaciones finales son

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = - \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, z)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi \nabla^2 \theta \quad (1.18)$$

Estas ecuaciones consituyeron el punto de partida de Edward Lorenz para desarrollar su modelo de convección y obtener el famoso sistema de ecuaciones diferenciales que lleva su nombre.

Observación 1.4. Volviendo la vista atrás, empezamos partiendo de un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas y hemos reducido dicho sistema a otro de dos ecuaciones con dos incógnitas, las funciones ψ y θ .

La modelización de un comportamiento, en este caso de la convección atmosférica, se hace en base al *diseño por similitud*, que se fundamenta en los balances macroscópicos de los componentes del sistema. Para analizar la similitud entre el modelo y el prototipo, es necesario contar con datos experimentales. Cabe destacar que el modelo es el diseño a menor escala mientras que el prototipo es el diseño de mayor escala para poder “ensayar” con él el funcionamiento y luego “comprobar” en el prototipo que dicho funcionamiento sea el correcto y el deseado; es decir, que el “cambio de escala” no afecte al comportamiento observado en el modelo y que su similitud con el prototipo no se vea afectada por dicho cambio de escala.

Para realizar el cambio de escala debemos tener determinadas las ecuaciones y parámetros del modelo y su representación en variables adimensionales para “escalar” el prototipo.

Este es el argumento que nos lleva a introducir las siguientes variables adimensionales marcadas con $*$,

$$\begin{aligned} x &= hx^* & \nabla^2 &= \left(\frac{1}{h^2}\right) \nabla^{*2} \\ z &= hz^* & \psi &= \chi\psi^* \\ t &= \frac{h^2}{\chi}t^* & \theta &= \frac{\chi\nu}{g\alpha h^3}\theta^* \end{aligned}$$

en las ecuaciones (1.17) y (1.18), obteniendo las siguientes relaciones para la función de flujo ψ^* y la desviación de la temperatura θ^* ,

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2}\psi^* = -\frac{\partial(\psi^*, \nabla^{*2}\psi^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \sigma \nabla^{*4}\psi^* + \sigma \frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \theta^* = -\frac{\partial(\psi^*, \theta^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \text{Ra} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2}\theta^* \quad (1.20)$$

Fruto de esta adimensionalización de las ecuaciones, surgen dos parámetros adimensionales de suma importancia

Número de Prandtl

Se debe al ingeniero y físico alemán Ludwig Prandtl (1875-1953), especializado en la teoría aerodinámica y la mecánica de fluidos. Es un número adimensional denotado por σ que indica el cociente entre la difusividad viscosa y la difusividad térmica,

$$\sigma = \frac{\nu}{\chi}$$

La fricción del fluido viscoso con la superficie de control produce una tensión de cizalladura proporcional al gradiente vertical de velocidades. La distribución de velocidades va desde cero en el contacto con la superficie de control hasta la velocidad máxima para las zonas alejadas de la superficie. La región comprendida entre ambos estados se denomina *capa límite*.

Se denomina *capa límite viscosa* a la región del fluido donde la viscosidad no se puede despreciar (aunque sea pequeña) debido a la existencia de elevados gradientes de velocidad. Del mismo modo, se denomina *capa límite térmica* a la región del fluido donde la variación de temperatura no se puede despreciar debido a la existencia de una diferencia de temperatura entre el fluido y la superficie de control.

Por lo comentado anteriormente, el número de Prandtl expresa la relación entre la difusión de la cantidad de movimiento debida a la fricción del fluido con la superficie de control, y la difusión del calor debido a este proceso. Por esta razón, dicho número indica el espesor relativo entre la capa límite viscosa y la capa límite térmica.

Cabe destacar que el número de Prandtl sólo depende de las características físicas del fluido.

Número de Rayleigh

Se debe al Premio Nobel de Física John William Strutt, tercer Barón de Rayleigh, físico y matemático británico. Es un número adimensional que expresa el cociente entre la fuerza de flotación (en nuestro caso, la gravedad) y la viscosidad cinemática de un fluido, así como la naturaleza de la transferencia de calor, ya que para cierto valor de este número dicha transferencia puede realizarse por conducción o por convección.

Cabe resaltar que a medida que el número de Rayleigh se incrementa, la fuerza de la gravedad se vuelve más dominante. De su expresión

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha h^3 \Delta T}{\chi\nu}$$

podemos deducir que juega un papel de *parámetro de control* en el problema de convección de Bénard. Dado su dependencia explícita de la diferencia de temperatura entre las dos paredes verticales ΔT , de igual modo que comentábamos que existía un valor crítico ΔT_{cr} para dicha diferencia de temperatura a partir del cual la transmisión de calor se producía por convección dando lugar a dicho fenómeno, podemos concluir que existe un valor crítico para el número de Rayleigh denotado por Ra_{cr} que se obtiene para el incremento de temperatura ΔT_{cr} con la propiedad de que la transferencia de calor se realiza por conducción para valores del número de Rayleigh menores que dicho valor crítico y por convección para valores mayores del mismo.

Debido a que los coeficientes característicos del fluido α , χ y ν , la aceleración de la gravedad y la altura entre las dos paredes verticales son constantes, su dependencia del gradiente de temperatura justifica esa denominación de parámetro de control.

Observación 1.5. Como su propio nombre sugiere, las variables o parámetros adimensionales “no tienen dimensiones”. Esto no significa que no tengan unidades, sino que son una razón de dos variables diferentes, pero con las mismas unidades, luego éstas se cancelan mutuamente.

Una vez obtenidas las ecuaciones adimensionales, el siguiente paso es establecer las condiciones de contorno para $z = 0, h$

- I. La componente vertical de la velocidad en $z = 0, h$ es nula,

$$w|_{z=0, h} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0, h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi|_{z=0, h} = 0$$

- II. La componente tangencial del tensor de esfuerzos viscosos en $z = 0, h$ es nula,

$$\sigma'_{zx}|_{z=0, h} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0, h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0, h} = 0$$

- III. La temperatura de cada pared vertical se mantiene constante,

$$T_0, T_0 + \Delta T = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \theta|_{z=0, h} = 0$$

Observemos que las condiciones I y II implican

$$\nabla^2 \psi|_{z=0, h} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{z=0, h} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0, h} = 0$$

Para las ecuaciones adimensionales, asumimos las siguientes condiciones de contorno,

- I. $\theta^*(x, 0, t) = \theta^*(x, h, t) = 0$
- II. $\psi^*(x, 0, t) = \psi^*(x, h, t) = 0$
- III. $\nabla^{*2}\psi^*(x, 0, t) = \nabla^{*2}\psi^*(x, h, t) = 0$

Partiendo de las ecuaciones adimensionales y las condiciones de contorno anteriores, Barry Saltzman representó la función de corriente ψ^* y la desviación de temperatura θ^* utilizando desarrollos de Fourier, expresando las mismas como suma de componentes de Fourier dobles siendo l la longitud de onda en la dirección x y $2h$ en la dirección z ,

$$\psi^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp \left[2\pi h i \left(\frac{m}{l} x^* + \frac{n}{2h} z^* \right) \right] \quad (1.21)$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp \left[2\pi h i \left(\frac{m}{l} x^* + \frac{n}{2h} z^* \right) \right] \quad (1.22)$$

donde m es el número de onda en la dirección x , n el número de onda en la dirección z , y los coeficientes complejos de Fourier Θ y Ψ vienen dados por

$$\Psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2lh} \int_0^l \int_{-h}^h \psi^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[-2\pi h i \left(\frac{m}{l} x^* + \frac{n}{2h} z^* \right) \right] dx dz \quad (1.23)$$

$$\Theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2lh} \int_0^l \int_{-h}^h \theta^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[-2\pi h i \left(\frac{m}{l} x^* + \frac{n}{2h} z^* \right) \right] dx dz \quad (1.24)$$

Observación 1.6 (Teorema de Fourier). Con el objetivo de dar soporte teórico a lo expuesto anteriormente, presentamos de manera simplificada el teorema de Fourier.

Si $f(t)$ es una función de variable real, integrable en el intervalo $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$, entonces el desarrollo de Fourier de la función f viene dado por

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t}$$

siendo c_n los coeficientes complejos de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} dt$$

Fuera de dicho intervalo la serie es periódica, con periodo T .

Gracias a la observación anterior, asumimos que las funciones ψ^* y θ^* son integrables en el rectángulo $[0, l] \times [-h, h]$. Además, en el desarrollo de Fourier la variable x^* tiene periodo l/h mientras que el periodo de la variable z^* es $1/2$.

Debido a la elección de las condiciones de contorno para ψ^* y θ^* , estas representan el fenómeno de convección en la región $z = 0$ a h .

Con el objetivo de obtener las ecuaciones que describen los coeficientes de Fourier, Saltzman transformó las ecuaciones adimensionales, utilizando las relaciones anteriores (1.21), (1.22), (1.23) y (1.24), en un sistema de dos ecuaciones diferenciales en las variables $\Psi(m, n)$ y $\Theta(m, n)$.

Dado que dichos coeficientes son complejos, descomponiéndolos en sus respectivas partes reales e imaginarias,

$$\begin{aligned}\Psi(m, n) &= \Psi_1(m, n) + i\Psi_2(m, n) \\ \Theta(m, n) &= \Theta_1(m, n) + i\Theta_2(m, n)\end{aligned}$$

obtuvo un total de doce ecuaciones que determinaban las relaciones entre las componentes

$$\begin{aligned}\Psi_1(m, n) \\ \Psi_2(m, n) \\ \Theta_1(m, n) \\ \Theta_2(m, n)\end{aligned}$$

Basándose en las soluciones dadas por *Rayleigh* para las ecuaciones adimensionales, realizó truncamientos en los desarrollos de Fourier tomando los siguientes valores para los números de onda m y n ,

(m, n)	
(1, 1)	(2, 1)
(3, 1)	(4, 1)
(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)
(3, 2)	(4, 2)
(5, 2)	(6, 2)
(0, 1)	(0, 2)
(0, 3)	(0, 4)

Cuadro 1.2: Valores para los números de onda

Además, asumió que el número de Prandtl del fluido en estudio era $\sigma = 10$ y consideró el número de Rayleigh como parámetro de control.

Con todas las premisas anteriores, reescribió las doce relaciones mencionadas previamente como un conjunto de 52 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma

$$\frac{dX_i}{dt^*} = \sum_{j,k} C_{ijk} X_j X_k$$

donde X_i , X_j y X_k denotan las variables $\Psi_1(m, n)$, $\Psi_2(m, n)$, $\Theta_1(m, n)$ y $\Theta_2(m, n)$ para una asignación concreta de subíndices para cada valor de la tupla (m, n) , y C_{ijk} corresponden a los coeficientes. Haciendo uso de las herramientas de cálculo numérico, computó dichos coeficientes para los valores de m y n anteriores.

Lo realmente sorprendente para Saltzman fue que en la mayoría de los casos, todas las variables, a excepción de las tres siguientes

$$\begin{aligned}\Psi_1(3, 1) &\equiv A \\ \Theta_2(3, 1) &\equiv D \\ \Theta_2(0, 2) &\equiv G\end{aligned}$$

tendían a cero, mientras que dichas tres variables mostraban comportamientos irregulares. Este fenómeno llevó a Lorenz a desarrollar su modelo.

1.2.3. Modelo de Lorenz

El punto de partida para Edward Lorenz fueron las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi \nabla^2 \theta \quad (1.26)$$

Fijándose en las ideas expuestas por Barry Saltzman en su trabajo, así como las anomalías que presentaban las tres variables mencionadas anteriormente, expresó la función de corriente ψ y la desviación de temperatura θ en tres amplitudes $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ de la siguiente forma

$$\psi(x, z, t) = \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (1.27)$$

$$\theta(x, z, t) = \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \quad (1.28)$$

donde dichas amplitudes dependen únicamente del tiempo. Se conoce que a es un número adimensional asociado con la transferencia de calor en el interior del fluido. Cuando este número está por encima de un determinado valor crítico, la transferencia de calor se produce principalmente por convección. En este caso, asumiremos que la convección da inicio cuando a alcanza su valor mínimo. Además,

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{\chi \nu} \quad \&\& \quad \text{Ra}_{cr} = \frac{\pi^4 (1+a^2)^3}{a^2}$$

Por tanto, realizando las cuentas pertinentes tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \psi_{xx} + \psi_{zz} \\ &= -\frac{\pi^2 a^2}{h^2}\psi - \frac{\pi^2}{h^2}\psi \\ &= -\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\psi\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\nabla^4\psi &= \nabla^2(\nabla^2\psi) \\ &= \nabla^2\left(-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\psi\right) \\ &= \left[-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\right]\left[-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\right]\psi \\ &= \left[-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\right]^2\psi\end{aligned}$$

Sustituyendo (1.27) y (1.28) en (1.25), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\psi\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\psi\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\psi\right) \\ - g\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta T}{\pi}\frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}}\left[\sqrt{2}Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right)\right]\right) \\ - \nu\left[-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\right]^2\psi = 0\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\frac{\chi(1 + a^2)\sqrt{2}}{a}\sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)\dot{X}(t) \\ + \frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}(\psi) - \frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(\psi) \\ + g\alpha\frac{\Delta T}{\pi}\frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}}\frac{\pi a}{h}\sqrt{2}Y(t)\sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\ - \nu\left[-\frac{\pi^2}{h^2}(a^2 + 1)\right]^2\frac{\chi(1 + a^2)\sqrt{2}}{a}X(t)\sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) = 0\end{aligned}$$

Utilizando el lema de Schwarz y cancelando el factor $\sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$ para $z \neq kh, k \in \mathbb{Z}$

y además $x \neq \frac{kh}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\chi (1 + a^2) \sqrt{2}}{a} \dot{X}(t) \\ & + g\alpha \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\pi a}{h} \sqrt{2} Y(t) \\ & - \nu \left[\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \right]^2 \frac{\chi (1 + a^2) \sqrt{2}}{a} X(t) = 0 \end{aligned}$$

Llegados a este punto, vamos a simplificar cuidadosamente la expresión anterior. Escribimos el cociente

$$\frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3 \chi \nu}{\alpha g h^3 \Delta T a^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\chi (1 + a^2) \sqrt{2}}{a} \dot{X}(t) \\ & + g\alpha \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3 \chi \nu}{\alpha g h^3 \Delta T a^2} \frac{\pi a}{h} \sqrt{2} Y(t) \\ & - \nu \frac{\pi^4}{h^4} (a^2 + 1)^2 \frac{\chi (1 + a^2) \sqrt{2}}{a} X(t) = 0 \end{aligned}$$

Cancelando términos, obtenemos

$$\chi \dot{X}(t) = \pi^2 (1 + a^2) \chi \nu \frac{1}{h^2} Y(t) - \nu \frac{\pi^2 (1 + a^2)}{h^2} X(t)$$

Dividiendo por χ y, sabiendo que el número de Prandtl $\sigma = \frac{\nu}{\chi}$, tenemos que

$$\dot{X}(t) = \frac{\chi \pi^2 (1 + a^2)}{h^2} [\sigma Y(t) - \sigma X(t)] \quad (1.29)$$

¡Salvo constantes es la primera ecuación del sistema de Lorenz!

Del mismo modo que en el caso anterior,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta &= \theta_{xx} + \theta_{zz} \\ &= \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[-\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\pi^2 a^2}{h^2} \right] \\ &+ \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[-\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\pi^2}{h^2} + Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right] \\ &= - (1 + a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right] \\ &+ \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \end{aligned}$$

Ahora, sustiyendo (1.27) y (1.28) en (1.26), tenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \right) \\
 & - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \right) \\
 & + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \right) - \frac{\Delta T}{h} \right) \\
 & - \chi \left(- (1 + a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \right] + \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

y realizando los cálculos oportunos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}\dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \\
 & + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \sqrt{2}Y(t) \frac{\pi a}{h} \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \frac{2\pi}{h} \cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] - \frac{\Delta T}{h} \right) \\
 & - \chi \left(- (1 + a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \right] + \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}\dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] \\
 & + \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \sqrt{2}Y(t) \frac{\pi a}{h} \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & + \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & \cdot \left(\frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \frac{2\pi}{h} \cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \right] - \frac{\Delta T}{h} \right) \\
 & - \chi \left(- (1 + a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \right] + \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Reagrupando los términos y simplificando,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right] \\
& + 2\chi(1+a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} X(t) Y(t) \sin^2\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& + \frac{\chi(1+a^2) \sqrt{2}}{a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& - \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr} \chi(1+a^2) \sqrt{2}}{\pi \text{Ra} a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) Z(t) \frac{2\pi}{h} \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \\
& - \frac{\Delta T \chi(1+a^2) \sqrt{2}}{h a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& - \chi \left(- (1+a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right] + \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

continuando de la misma manera,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right] \\
& + 2\chi(1+a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} X(t) Y(t) \sin^2\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& + 2\chi(1+a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} X(t) Y(t) \cos^2\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& - \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr} \chi(1+a^2) \sqrt{2}}{\pi \text{Ra} a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) Z(t) \frac{2\pi}{h} \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \\
& - \frac{\Delta T \chi(1+a^2) \sqrt{2}}{h a} X(t) \frac{\pi a}{h} \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\
& - \chi \left(- (1+a^2) \frac{\pi^2 \Delta T \text{Ra}_{cr}}{h^2 \pi \text{Ra}} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right] + \frac{\Delta T \text{Ra}_{cr}}{\pi \text{Ra}} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

y, utilizando $\sin^2\left(\frac{\pi a}{h}x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi a}{h}x\right) = 1$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\
 & + 2\chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X(t) Y(t) \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi(1+a^2)}{h^2} 2\sqrt{2}\pi X(t) Z(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\
 & - \Delta T \frac{\chi(1+a^2)}{h^2} \sqrt{2}\pi X(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & + \chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Consideramos la siguiente identidad trigonométrica

$$\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{h}z\right)$$

y, omitiendo el último término de lado derecho de la ecuación aproximamos,

$$\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \approx -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\
 & + 2\chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X(t) Y(t) \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & + \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi(1+a^2)}{h^2} \sqrt{2}\pi X(t) Z(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \Delta T \frac{\chi(1+a^2)}{h^2} \sqrt{2}\pi X(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & + \chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\
 & - \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Considerando la igualdad trigonométrica

$$\cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right)$$

y separando las variables $\dot{Y}(t)$ y $\dot{Z}(t)$ a un lado de la ecuación, escribimos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{Z}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\ &= -\chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X(t) Y(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \\ & \quad - \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}\pi}{h^2} X(t) Z(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\ & \quad + \Delta T \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}\pi}{h^2} X(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\ & \quad - \chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\ & \quad + \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $\cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$ y $\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right)$, obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} \dot{Y}(t) &= -\Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}\pi}{h^2} X(t) Z(t) - \chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} Y(t) \\ & \quad + \Delta T \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}\pi}{h^2} X(t) \\ -\frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{Z}(t) &= -\chi(1+a^2) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X(t) Y(t) + \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} Z(t) \end{aligned}$$

Ahora, simplificando tenemos

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -\frac{\chi(1+a^2)\pi^2}{h^2} X(t) Z(t) - \frac{\chi(1+a^2)\pi^2}{h^2} Y(t) + \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}} \frac{\chi(1+a^2)\pi^2}{h^2} X(t) \\ \dot{Z}(t) &= \frac{\chi(1+a^2)\pi^2}{h^2} X(t) Y(t) - \chi \frac{(1+a^2)4\pi^2}{(1+a^2)h^2} Z(t) \end{aligned}$$

Curiosamente, salvo constantes y renombramientos hemos obtenido las dos últimas ecuaciones del sistema de Lorenz. Por tanto, considerando la primera ecuación que obtuvimos

(1.29) y las dos obtenidas anteriormente, denotando

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\nu}{\chi} && \text{Número de Prandtl} \\ r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}} && \text{Número de Rayleigh relativo} \\ b &= \frac{4}{(1+a^2)} && \text{Número adimensional}\end{aligned}$$

y reescalando el tiempo como $\tau = \frac{\chi(1+a^2)\pi^2}{h^2}t$ obtenemos el famoso **sistema de Lorenz**

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \sigma Y(t) - \sigma X(t) \\ \dot{Y}(t) &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -bZ(t) + X(t)Y(t)\end{aligned}$$

donde el operador \cdot denotará la derivada respecto al tiempo reescalado τ . El parámetro b es un número adimensional que expresa una medida de la dirección x de la celda de Bénard, es decir, es proporcional al ancho de los flujos de convección que se producen. Por lo que hemos comentado en este capítulo, está justificado que empleemos r como parámetro de control. Además, sabemos que cuando $\text{Ra} > \text{Ra}_{cr}$, o lo que es lo mismo $r > 1$ se produce el fenómeno de convección dando lugar a las celdas de Bénard. Este hecho es de vital trascendencia por los resultados que obtendremos en los capítulos posteriores. Ahora queda preguntarse por el significado de las variables $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$.

- La variable $X(t)$ es proporcional a la intensidad de las corrientes convectivas, luego es una representación de la intensidad del movimiento convectivo. Si $X > 0$ el flujo de convección se produce en sentido horario, mientras que si $X < 0$ se produce en sentido antihorario.
- La variable $Y(y)$ representa la diferencia de temperaturas entre los flujos de convección ascendentes y descendentes de la celda, esta función es la que caracteriza la variación de temperatura en el fenómeno de convección que da origen a las celdas de Bénard.
- La variable $Z(t)$ es la desviación de ΔT , como función lineal, desde el centro de la celda. Como función de z , es una representación de la variación global de temperatura de todas las moléculas del fluido desde T_0 hasta $T_0 + \Delta T$.

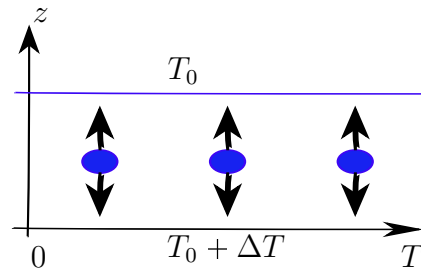


Figura 1.9: Función $Z(t)$.

Como conclusión, podemos resumir el sistema de Lorenz como un sistema autónomo no lineal tridimensional derivado de las ecuaciones simplificadas de rollos de convección que se producen en la dinámica atmosférica terrestre.

CAPÍTULO 2

Propiedades del Sistema de Lorenz

*Advirtió que no debía indagar lo que veía en la figura
o en el mero concepto de ella y, por así decirlo,
leer, a partir de ahí, sus propiedades,
sino extraer éstas a priori por medio de lo que él pensaba
y exponía (por construcción) en conceptos.*

Prólogo de la “Crítica de la razón Pura”
Immanuel Kant

En este capítulo presentamos las propiedades más relevantes del sistema de Lorenz, realizando un análisis detallado de las mismas. Con el propósito de que este análisis se caracterice tanto por su rigor matemático como por su aspecto visual, empleamos un método de trabajo común a todas las propiedades. Dicho método consta de dos partes claramente diferenciadas.

En primer lugar, exponemos el desarrollo matemático estricto y riguroso que justifica cada propiedad específica. A continuación, utilizando la herramienta **Matlab** se han programado varios métodos de resolución numérica del sistema de Lorenz que nos han permitido obtener las gráficas que ilustran de manera descriptiva las propiedades que demostramos. El código de Matlab que se ha desarrollado para este trabajo se adjunta en el apéndice C.

Además, con el fin de exponer de forma interactiva algunas de las propiedades que mostramos, se ha realizado en **Python** un programa que resuelve el sistema de Lorenz para una condición inicial dada, utilizando la función *integrate.odeint* de la biblioteca open source de Python denominada *SciPy*. La ejecución de este programa es interactiva en el sentido de que dada una condición inicial, que será el punto de partida de la solución del sistema, muestra interactivamente la evolución temporal tanto de su trayectoria como de cada una de sus componentes. Se puede fijar el tiempo durante el que se muestra dicha evolución de manera arbitraria.

El código de Python que se ha desarrollado para este trabajo se adjunta en el apéndice D.

2.1. Existencia y unicidad

Como es natural, comenzamos garantizando la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial del sistema de Lorenz. Este sistema viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \sigma Y(t) - \sigma X(t) \\ \dot{Y}(t) &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -bZ(t) + X(t)Y(t)\end{aligned}$$

que denotaremos por (SL) . Reescribimos dicho sistema de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\vec{U}(t) = F(\vec{U}(t))$$

donde

- $\vec{U}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$
- $F(\vec{U}(t)) = (F_1(\vec{U}(t)), F_2(\vec{U}(t)), F_3(\vec{U}(t)))$ tal que

$$\begin{aligned}F_1(\vec{U}(t)) &= \sigma Y(t) - \sigma X(t) \\ F_2(\vec{U}(t)) &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ F_3(\vec{U}(t)) &= -bZ(t) + X(t)Y(t)\end{aligned}$$

Con esta notación, calculamos las derivadas parciales de cada una de las componentes de F

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial F_1}{\partial X} = -\sigma; & \frac{\partial F_1}{\partial Y} = \sigma; & \frac{\partial F_1}{\partial Z} = 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} = r - Z; & \frac{\partial F_2}{\partial Y} = -1; & \frac{\partial F_2}{\partial Z} = -X; \\ \frac{\partial F_3}{\partial X} = Y; & \frac{\partial F_3}{\partial Y} = X; & \frac{\partial F_3}{\partial Z} = -b;\end{array}$$

y concluimos que su matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}$$

Utilizando el teorema (A.1) de existencia y unicidad expuesto en los preliminares, como cada una de las componentes F_i de la función F y las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial X}$, $\frac{\partial F_i}{\partial Y}$ y $\frac{\partial F_i}{\partial Z}$ para $i = 1, 2, 3$ son funciones continuas en \mathbb{R}^3 , tenemos garantizada la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial con $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Además, por el teorema (A.3) de diferenciabilidad respecto de parámetros, podemos afirmar que para todo instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, la solución $\varphi(t; t_0, x_0, b, r, \sigma)$ es una función C^p ($p \geq 1$) para t, t_0, x_0, b, r y σ , ya que la función F es C^p para $p \geq 1$.

2.2. Simetría

El sistema de Lorenz presenta una simetría natural que persiste para cualquier valor de los parámetros. Su significado radica en que si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución del sistema, entonces $(-x(t), -y(t), z(t))$ también lo es.

El siguiente teorema prueba esta propiedad,

Teorema 2.1. *Sea $\varphi(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ una solución del sistema de Lorenz (SL), entonces $\hat{\varphi}(t) = (-X(t), -Y(t), Z(t))$ también lo es. Esta propiedad recibe el nombre de **simetría espacial** en dos dimensiones.*

Demostración. Consideremos el sistema (SL) con la notación anterior

$$\frac{d}{dt} \vec{U}(t) = F(\vec{U}(t))$$

Como $\sigma, b, r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y, utilizando que φ es solución, para la primera componente de F se observa que

$$\begin{aligned} F_1(\hat{\varphi}(t)) &= -\sigma Y(t) + \sigma X(t) \\ &= -F_1(\varphi(t)) \\ &= -\dot{X}(t) \end{aligned}$$

en la segunda componente

$$\begin{aligned} F_2(\hat{\varphi}(t)) &= -rX(t) + Y(t) + X(t)Z(t) \\ &= -F_2(\varphi(t)) \\ &= -\dot{Y}(t) \end{aligned}$$

y para la tercera

$$\begin{aligned} F_3(\hat{\varphi}(t)) &= -bZ(t) + X(t)Y(t) \\ &= F_3(\varphi(t)) \\ &= \dot{Z}(t) \end{aligned}$$

Definimos la siguiente transformación,

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \mapsto (-X(t), -Y(t), Z(t))$$

Luego,

$$T(\varphi) = \hat{\varphi}$$

Dado que φ es solución, satisface

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = F(\varphi(t))$$

y, para probar la invariancia de la solución del sistema (SL) bajo la transformación T debemos comprobar que

$$\frac{d}{dt}T(\varphi) = F(T(\varphi))$$

donde omitimos la dependencia explícita respecto al tiempo con el propósito de simplificar la notación.

Por una parte, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T\varphi(t) &= T'(\varphi) \cdot \varphi' && \text{(Regla de la cadena)} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} && \text{(Cálculo matriz jacobiana)} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{X} \\ -\dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} && \text{(Producto de matrices)} \\ &= \begin{pmatrix} -F_1(\varphi) \\ -F_2(\varphi) \\ F_3(\varphi) \end{pmatrix} && \text{(Relaciones anteriores)} \end{aligned}$$

y por otra,

$$\begin{aligned} F(T(\varphi)) &= F(\hat{\varphi}) \\ &= \begin{pmatrix} -F_1(\varphi) \\ -F_2(\varphi) \\ F_3(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, esto prueba que el sistema de Lorenz es invariante bajo la transformación T . \square

El teorema anterior nos permite concluir que

- o bien $\varphi = \hat{\varphi}$ es una solución simétrica por sí misma,

- o bien φ tiene una compañera simétrica $\hat{\varphi}$ que también es solución.

De acuerdo a lo expuesto en la introducción de este capítulo, utilizando la herramienta Matlab se ha programado el **método de Runge-Kutta** explícito de orden 4 para resolver numéricamente el sistema de Lorenz. Fruto de ello, se han obtenido las siguientes gráficas solución.

Esta primera gráfica corresponde a la solución de problema de valor inicial del sistema de Lorenz con condición inicial $X_0 = (0, 1, 1.5)$ en el intervalo de tiempo $(0, 30)$. Hemos aproximado numéricamente la solución exacta en este intervalo dividiendo el mismo en 20000 subintervalos y tomando los siguientes valores para los parámetros $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$. Nos referiremos a esta solución como *solución de partida* con el fin de construir un ejemplo visual de la propiedad de simetría.

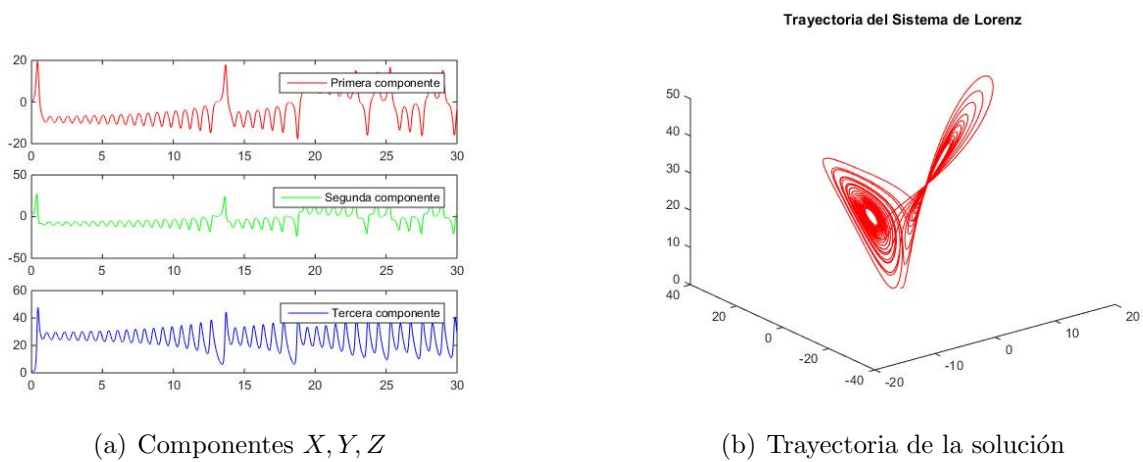


Figura 2.1: Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 1, 1.5)$

Ahora, aplicando la transformación T a la solución obtenida anteriormente conseguimos la siguiente gráfica.

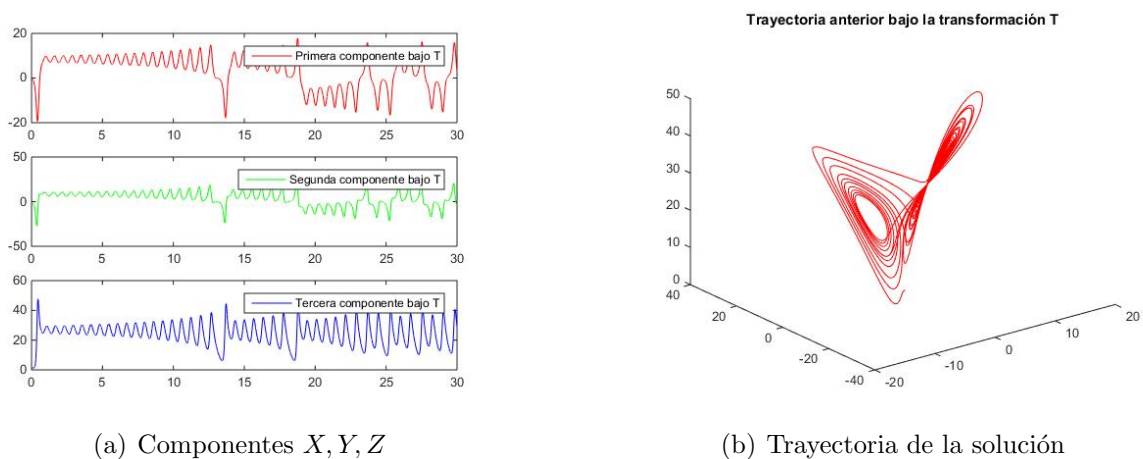


Figura 2.2: Solución P.V.I. para $X_0 = (0, -1, 1.5)$ bajo la transformación T

Con el objetivo de ver que la transformación bajo T de la solución de partida es una solución del sistema, utilizando los mismos valores para los parámetros y cambiando la condición inicial por su simétrica bajo T , es decir, $X_0 = (0, -1, 1.5)$, hemos computado la solución numérica para esta condición inicial utilizando el mismo método Runge-Kutta mencionado previamente. Como era de esperar, hemos obtenido la misma gráfica solución que la mostrada para la transformación de la solución de partida bajo T (Figura 2.2).

Este hecho es una prueba visual de la propiedad de simetría espacial debido a que la función F que hemos definido en el primer apartado es continuamente diferenciable, lo que nos garantiza existencia y unicidad para problemas de valor inicial.

Con el objetivo de mostrar esta curiosa propiedad, se ha realizado un programa en Python que muestra la evolución temporal de las trayectorias del sistema de Lorenz para dos condiciones iniciales dadas, una la simétrica de la otra, $X_0 = (5, -5, 20)$ y $X_1 = (-5, 5, 20)$ para los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$. El siguiente enlace redirige al vídeo de la ejecución de dicho programa

Simetría

Con el propósito de que este enlace sea accesible en la versión impresa de este trabajo, lo mostramos explícitamente

<https://drive.google.com/open?id=0B-SbL6shhAipVi0wNzZwSHhnc1k>

2.3. Eje z

El eje Z es invariante. Esto se traduce en que para todo punto del eje Z , la órbita que pasa por dicho punto permanece en este eje para todo instante $t \in \mathbb{R}$. Además, todas las trayectorias que comienzan en este eje, permanecen en él y tienden hacia el origen cuando $t \rightarrow +\infty$. El siguiente teorema pone de manifiesto esta propiedad.

Teorema 2.2. *El eje Z en el sistema de Lorenz es invariante.*

Demostración. El eje Z viene determinado por los puntos

$$\begin{cases} X \equiv 0 \\ Y \equiv 0 \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Si tomamos como condición inicial un punto arbitrario del eje Z dado por $(0, 0, Z_0)$ y restringimos el sistema de Lorenz a este eje, conseguimos

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t) = 0 \\ \dot{Z}(t) = -bZ(t) \end{cases}$$

Integrando el sistema anterior se obtiene que

- $X(t) = k_1 = 0$ ya que $X(0) = 0$
- $Y(t) = k_2 = 0$ ya que $Y(0) = 0$

De este modo, el eje Z es una solución u órbita del sistema de Lorenz que verifica la siguiente ecuación

$$\dot{Z}(t) = -bZ(t)$$

Esto se traduce a que

$$Z(t) = Z_0 e^{-bt} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

y, concluimos que toda solución cuya condición inicial se encuentre en el eje Z es de la forma $(0, 0, Z_0 e^{-bt})$. Ahora, tomando el límite cuando t tiende a $+\infty$ tenemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t) = 0$$

para cualquier $Z_0 \in \mathbb{R}$. Esto prueba que todas las trayectorias que empiezan en el eje Z permanecen en dicho eje y tienden al origen. En este caso, se dice que el eje Z es siempre parte de la variedad estable para el origen. \square

Además, todas las trayectorias que giran alrededor del eje Z lo hacen en el sentido de las manecillas del reloj cuando se miran sobre el plano $Z = 0$. Esto se debe a que si $X = 0$, realizando un análisis exhaustivo del sistema resultante

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \sigma Y \\ \dot{Y}(t) = -Y \\ \dot{Z}(t) = 0 \end{cases}$$

según el signo de Y tenemos

- Si $Y > 0$, entonces

$$\dot{X} > 0 \quad \&\& \quad \dot{Y} < 0$$

- Si $Y < 0$, entonces

$$\dot{X} < 0 \quad \&\& \quad \dot{Y} > 0$$

La siguiente figura muestra este comportamiento de manera esquemática,

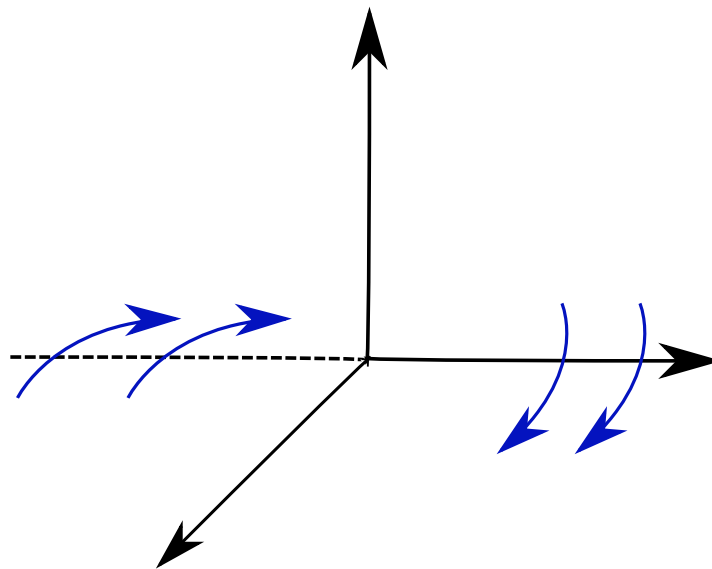
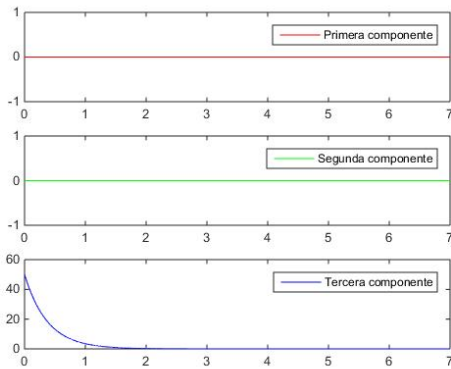


Figura 2.3: Giro en sentido horario.

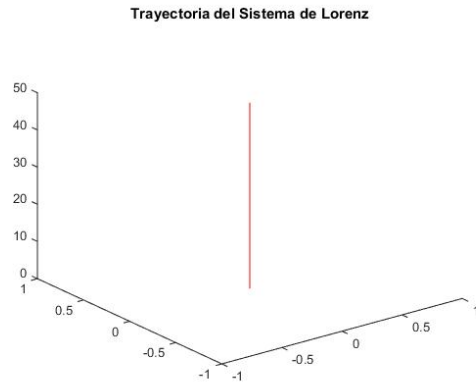
Con el propósito de ejemplificar esta propiedad, se ha programado en Matlab un método **predictor-corrector** para el método implícito **Adams-Moulton** de cuatro pasos, con el fin de resolver numéricamente el sistema de Lorenz. Como este método es implícito, para obtener el valor implícito que se usará en su proceso iterativo, se utiliza el método de **Adams-Bashforth** de cinco pasos que recibe el nombre de *predictor*. Para obtener el siguiente valor en el proceso iterativo se utiliza el ya mencionado método de *Adams-Moulton* de cuatro pasos, que se denomina *corrector*. Como el método predictor tiene cinco pasos, es decir, necesita cinco valores dados para arrancar su proceso iterativo, empleamos el método de **Runge-Kutta** de orden cuatro mencionado en la propiedad anterior para calcular estos primeros cinco valores iniciales del método predictor.

Se ha computado la solución numérica de (SL) en el intervalo (0, 7) dividiendo el mismo en 10000 subintervalos. Esto se ha hecho con el propósito de mostrar detalladamente cómo la componente $Z(t)$ de la solución tiende a cero a medida que evoluciona el tiempo positivamente. Dado que este fenómeno sucede para cualquier elección arbitraria del número real Z_0 , se han desarrollado tres ejecuciones representativas de cada una de los posibles casos: $Z_0 > 0$, $Z_0 < 0$ ó $Z_0 = 0$. Los parámetros empleados en el algoritmo vienen dados por $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$.

Esta primera gráfica corresponde a una elección positiva de Z_0 ,



(a) Componentes X, Y, Z

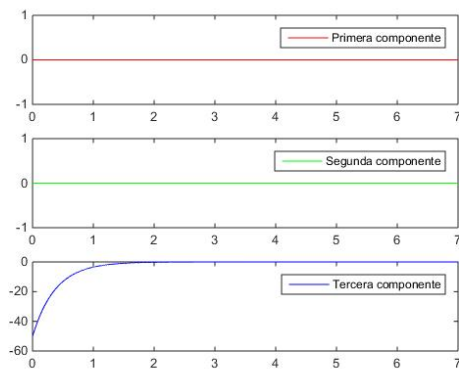
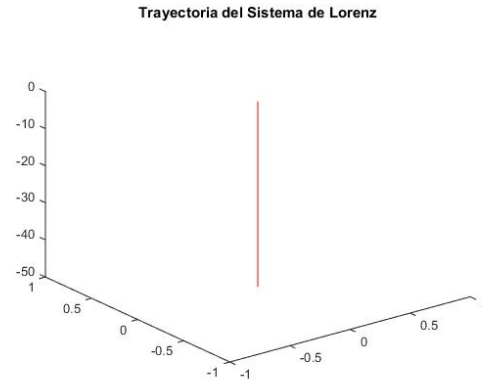


(b) Trayectoria de la solución

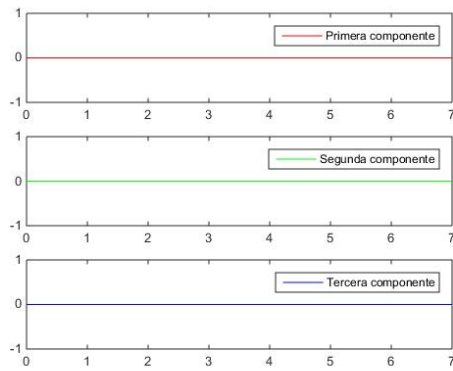
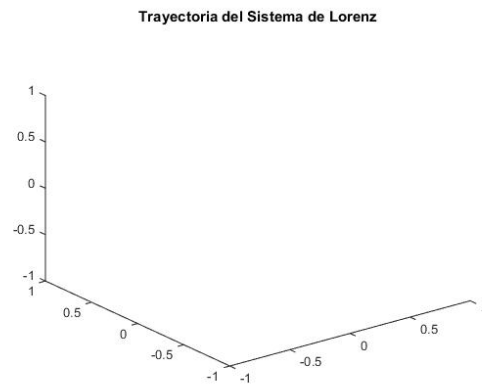
Figura 2.4: Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, 50)$

para una elección negativa del mismo véase la figura 2.5. y para $Z_0 = 0$, obtenemos la figura 2.6 donde la trayectoria está “aparentemente” vacía, este fenómeno nos indica que el origen es un punto de equilibrio del sistema, por este motivo todas las componentes de la solución son nulas.

Además, se ha desarrollado en Python un programa interactivo que, dada una condición inicial para el sistema de Lorenz, un valor determinado para cada uno de los parámetros del sistema de Lorenz y un intervalo de definición de la función, resuelve dicho problema de valor inicial y permite observar la evolución temporal tanto de la trayectoria solución como de cada una de sus componentes. Con el objetivo de que sea completamente interactivo y visual, se han realizado grabaciones de las ejecuciones de dicho programa para los parámetros $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$.

(a) Componentes X, Y, Z 

(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.5: Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, -50)$ (a) Componentes X, Y, Z 

(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.6: Solución P.V.I. para $X_0 = (0, 0, 0)$

En primer lugar, se ha grabado la ejecución de este programa para la condición inicial $X_0 = (0, 0, 50)$, dicho vídeo se encuentra almacenado en la siguiente carpeta de Google Drive, cuyo enlace es el siguiente

Condición inicial positiva

Con el propósito de que sea visible para la versión impresa de este trabajo, lo mostramos explícitamente

[https:](https://drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipenNrZDdjelJOejA?usp=sharing)

[//drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipenNrZDdjelJOejA?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipenNrZDdjelJOejA?usp=sharing)

A continuación, se ha realizado la grabación para la condición inicial $X_0 = (0, 0, -50)$, cuyo vídeo se encuentra en el siguiente enlace

Condición inicial negativa

y, explícitamente

https:
 //drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipd3RWY0FUZmFmRm8?usp=sharing

2.4. Existencia de un conjunto atractor global acotado de volumen cero

Esta propiedad requiere de un análisis matemático muy detallado. La demostración completa de esta propiedad es una tarea muy compleja que durante muchos años fue una cuenta pendiente para todos los matemáticos.

La idea que subyace al conjunto de demostraciones que prueban esta propiedad es la idea intuitiva del método de Liapunov comentada en el capítulo de preliminares. Recordemos que para determinar la estabilidad de un punto crítico \bar{x} es suficiente con encontrar un entorno de dicho punto con la propiedad de que las órbitas que comienzan en dicho entorno permanezcan en él para todo instante positivo. Esto es equivalente a probar que el campo vectorial es, o bien tangente al contorno del entorno mencionado anteriormente, o bien apunta hacia el interior del mismo. Y, además, esto se cumple a medida que reducimos este entorno al punto crítico en cuestión.

Conviene tener presente que encontrar una función de Liapunov es equivalente a encontrar una región de captura. Esto es debido a que si V es una función de Liapunov, los conjuntos de nivel $V_c = \{x : V(x) < c\}$ son positivamente invariantes. Todas estas ideas se abordan con suficiente detalle en el capítulo de preliminares.

A continuación, presentamos las siguientes definiciones que amplían brevemente el concepto de *estabilidad asintótica*,

Definición 2.1. Si \bar{x} es un punto de equilibrio estable de un sistema autónomo no lineal y toda solución de dicho sistema converge a él cuando $t \rightarrow \infty$, se dice entonces que \bar{x} es *globalmente asintóticamente estable*.

Teorema 2.3. Si $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $V(0) = 0$, \dot{V} es definida negativa en todo $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces el origen es *globalmente asintóticamente estable*.

En primer lugar, mostramos un resultado muy interesante para valores del parámetro r menores estrictos que uno.

Proposición 2.1. Para $r < 1$, todas las soluciones del sistema de Lorenz tienden al origen.

Demostración. Consideremos la función $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$V(X, Y, Z) = X^2 + \sigma Y^2 + \sigma Z^2$$

El objetivo es probar que se satisfacen las condiciones del teorema enunciado anteriormente.

- Es claro que

$$V(0, 0, 0) = 0$$

2.4. Existencia de un conjunto atractor global acotado de volumen cero

- Si $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$, entonces

$$V(X, Y, Z) > 0$$

ya que es suma de términos estrictamente positivos. Luego V es definida positiva en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

- Tenemos que probar que \dot{V} definida negativa en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Esto es equivalente a demostrar que es estrictamente decreciente a lo largo de las soluciones del sistema de Lorenz. Por ello, utilizando la regla de la cadena

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

calculamos, para los soluciones del sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2X(\sigma Y - \sigma X) + 2\sigma Y(rX - Y - XZ) + 2\sigma Z(XY - bZ) \\ &= 2X\sigma Y - 2\sigma X^2 + 2\sigma rYX - 2\sigma Y^2 - 2\sigma YXZ + 2\sigma YXZ - 2\sigma bZ^2 \\ &= -2\sigma(X^2 + Y^2 - (1+r)XY) - 2\sigma bZ^2 \end{aligned}$$

Veamos que $\dot{V} < 0$ siempre y cuando $r < 1$. Efectivamente, reescribiendo el resultado obtenido anteriormente,

$$\dot{V} = -2\sigma \left(\frac{1+r}{2}X - Y \right)^2 - 2\sigma bZ^2 - 2\sigma \left(1 - \frac{(1+r)^2}{4} \right) X^2$$

De esta forma, hemos reducido el problema a probar que

$$1 - \frac{(1+r)^2}{4} > 0$$

es decir,

$$4 - 1 - r^2 - 2r > 0 \quad \iff \quad -r^2 - 2r + 3 > 0$$

Calculando las raíces y obteniendo los signos de la expresión anterior a ambos lados de sus raíces obtenemos

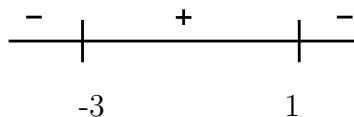


Figura 2.7: Signo de $-r^2 - 2r + 3$.

como $r \geq 0$, concluimos que dicha expresión será positiva si y solo si $r < 1$. Luego, se cumple que \dot{V} definida negativa en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

- Por definición de V , se tiene

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(X, Y, Z) = +\infty$$

Por el teorema enunciado al comienzo de esta sección, concluimos que el origen es *globalmente asintóticamente estable* y, como consecuencia, toda solución del sistema de Lorenz converge a él cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Ilustremos esta “curiosa” propiedad con ejemplo. Para ello, se ha desarrollado en Matlab el **método de trapecio** para resolver numéricamente el sistema de Lorenz. Como dicho método es implícito, se ha utilizado el **método de Newton** para resolver en cada paso iterativo la ecuación implícita. Para ello, ha sido necesario calcular el jacobiano del sistema de Lorenz. Todo el código relevante se adjunta en el apéndice C.

La figura 2.8 representa la solución numérica para el problema con condición inicial $X_0 = (20, 35, 60)$ en el intervalo $(0, 5)$. Con el objetivo de obtener un error suficientemente pequeño, hemos dividido dicho intervalo en 5000 subintervalos y hemos fijado el número máximo de iteraciones para calcular el punto fijo en el método de Newton a 100. Los parámetros empleados para este algoritmo han sido $\sigma = 10$, $r = 0.75$ y $b = 8/3$.

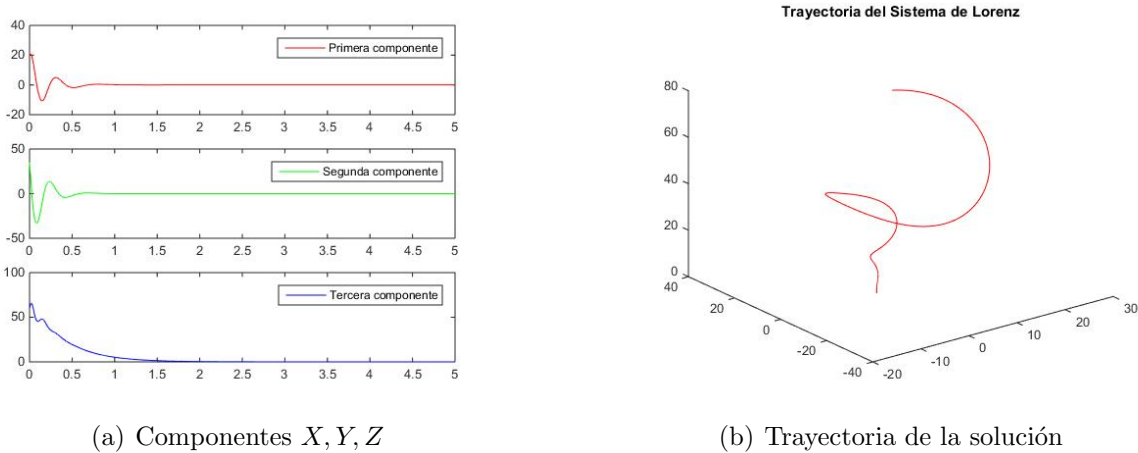
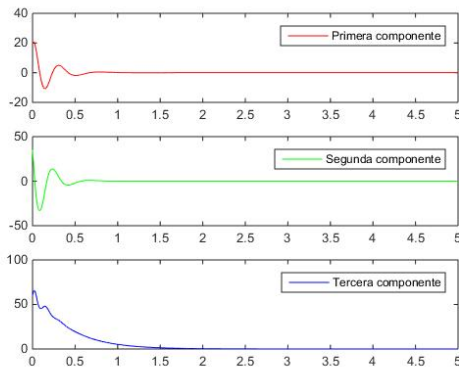


Figura 2.8: Solución P.V.I. para $X_0 = (20, 35, 60)$, $r = 0.75$

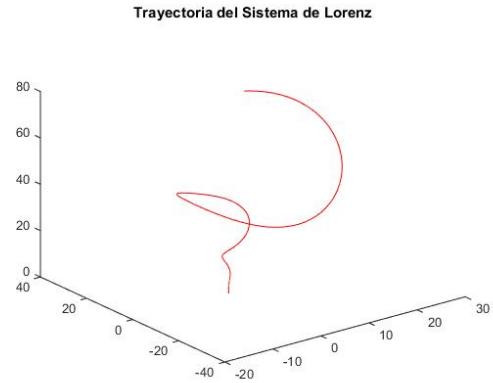
Ahora, empleando la misma condición inicial, el mismo número de iteraciones máximas, el mismo número de subintervalos de $(0, 5)$ y el mismo valor para los parámetros a excepción de r , cuyo valor es 0.001, obtenemos la figura 2.9

De forma experimental, observamos un fenómeno que mostraremos con gran rigor matemático en el próximo capítulo. Tras varias ejecuciones del algoritmo del trapecio con los mismos valores excepto el parámetro r cuyo valor ha ido variando a lo largo del intervalo $(0, 1)$, observamos que el comportamiento cualitativo de todas las soluciones obtenidas es idéntico. En cambio, para $r > 1$ dicho comportamiento cualitativo es completamente diferente. Este fenómeno pone de manifiesto la existencia de una bifurcación para $r = 1$, cuyo significado radica en el cambio de comportamiento cualitativo de las soluciones cuando $r \in (0, 1)$ y cuando $r > 1$.

2.4. Existencia de un conjunto atractor global acotado de volumen cero



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.9: Solución P.V.I. para $X_0 = (20, 35, 60)$, $r = 0.001$

Del mismo modo que en la propiedad anterior, se ha realizado la grabación de la ejecución del programa desarrollado en Python con los mismos valores que en el método del trapecio siendo $r = 0.75$. Dicho vídeo se encuentra en el siguiente enlace

Ejecucion para $r=0.75$

y, explícitamente

[https:](https://drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipYzJ6Snhmb0Fxcmc?usp=sharing)

[//drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipYzJ6Snhmb0Fxcmc?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/0B-SbL6shhAipYzJ6Snhmb0Fxcmc?usp=sharing)

Para valores de r superiores a 1, la propiedad anterior no es cierta. Sin embargo, para cualquier valor de los parámetros, podemos afirmar que las soluciones que comienzan lejos del origen, transcurrido un tiempo, se mueven cerca del mismo.

De manera precisa, consideremos la función

$$V(X, Y, Z) = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2$$

Observamos que $V(X, Y, Z) = \nu > 0$ define un **elipsoide** en \mathbb{R}^3 centrado en $(0, 0, 2r)$.

Proposición 2.2. *Existe ν^* con la propiedad de que cualquier solución que comience fuera del elipsoide definido por $V(X, Y, Z) = \nu^*$, finalmente, entra en este elipsoide y permanece atrapada dentro del mismo para todo instante futuro.*

Demostración. Utilizando la regla de la cadena, calculamos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

para los soluciones del sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2rX(\sigma Y - \sigma X) + 2\sigma Y(rX - Y - XZ) + 2\sigma(Z - 2r)(XY - bZ) \\ &= 2r\sigma XY - 2r\sigma X^2 + 2\sigma rYX - 2\sigma Y^2 - 2\sigma YXZ + 2\sigma YXZ - 2\sigma bZ^2 - 4\sigma rXY + 4\sigma rbZ \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - 2rbZ) \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + b(Z - r)^2 - br^2) \end{aligned}$$

Es claro que la ecuación

$$rX^2 + Y^2 + b(Z - r)^2 = \mu$$

también define un elipsoide cuando $\mu > 0$. Si $\mu > br^2$, entonces $\dot{V} < 0$. Por tanto, podemos elegir ν^* suficientemente grande para que el elipsoide $V = \nu^*$ contenga de manera estricta en su interior al elipsoide dado por

$$rX^2 + Y^2 + b(Z - r)^2 = br^2$$

Luego, se verifica que $\dot{V} < 0$ para todo $\nu \geq \nu^*$. □

Con el objetivo de ejemplificar este fenómeno, se muestra el siguiente vídeo de la ejecución de un programa en Python

Ejecución para r=25

donde se ha tomado como condición inicial $X_0 = (80, 45, 65)$ y parámetros $\sigma = 10$, $r = 25$ y $b = 8/3$. El enlace explícito es el siguiente

<https://drive.google.com/open?id=0B-SbL6shhAipQ2RrS1NiWjNyWWM>

Gracias a la idea intuitiva comentada al inicio de esta sección, es claro que todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas al interior del elipsoide $V = \nu^*$. Esto es debido a que hemos construido una familia de elipsoides encajados $V = \nu$ para $\nu > \nu^*$ con la propiedad de que en cada elipsoide de esta familia, en el contorno de dicho elipsoide, el campo vectorial descrito por F en el sistema de Lorenz apunta hacia el interior del mismo. En la sección de “Comportamiento asintótico” del apéndice de preliminares, para que esto fuese cierto exigíamos que dicho contorno fuese al menos \mathbf{C}^1 , pero es trivial que el contorno de un elipsoide sea continuamente diferenciable.

Además, es claro que la intersección de esa familia de elipsoides es el elipsoide dado por

$$E \equiv V = \nu^*$$

que recibe el nombre de *región de captura*, denotada por E . Claramente, dicha región es acotada. Ahora, denotamos por Λ el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que las soluciones que pasan por dichos puntos permanezcan para todo instante $t \in \mathbb{R}$ en el elipsoide $V = \nu^*$. En otras palabras, y siguiendo la teoría expuesta en el apéndice de preliminares, es claro que si denotamos por $\phi(t, \cdot)$ el flujo generado por el campo de vectores F del sistema de Lorenz, se verifica

$$\phi(t, E) \subset E \quad \text{para todo } t \geq 0$$

, y podemos escribir de manera explícita Λ como

$$\bigcap_{t>0} \phi(t, E) = \Lambda$$

Luego, esto prueba que Λ es un *conjunto de atracción*. Por tanto, deducimos que el conjunto ω -límite de cualquier solución del sistema de Lorenz debe yacer en Λ .

Por último, mostramos el siguiente teorema

Teorema 2.4. *El volumen de Λ es cero.*

Demostración. Para ello, calculamos la divergencia del campo de vectores F del sistema de Lorenz

$$\text{Div } F = \frac{\partial F_1}{\partial X} + \frac{\partial F_2}{\partial Y} + \frac{\partial F_3}{\partial Z}$$

que es una medida de cómo de rápido varía el volumen bajo el flujo $\phi(t, \cdot)$ generado por F . En el sistema de Lorenz, la divergencia es constante y viene dada por

$$\text{Div } F = -(\sigma + 1 + b)$$

Utilizando el teorema de Liouville, sabemos que la variación del volumen viene descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V$$

Como dicha divergencia es negativa, tenemos que $\dot{V} < 0$, luego el volumen de un conjunto de \mathbb{R}^3 se reduce bajo la acción sobre él del flujo generado por el sistema de Lorenz.

Resolviendo la ecuación anterior, la variación del volumen se expresa como

$$V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V(0)$$

donde $V(0)$ denota el volumen inicial del conjunto de partida. Concluimos que cualquier volumen se reduce de manera exponencial a cero. En particular, para $\phi(t, E)$ también es cierto, y se deduce que Λ tiene volumen cero. \square

En resumen, hemos probado que Λ es un conjunto de atracción global, acotado, de volumen cero y no vacío, pues contiene a la singularidad $(0, 0, 0)$. Para probar que dicho conjunto es un *atractor* es necesario ver que es topológicamente transitivo. Esta demostración se escapa del ámbito en el que está enmarcado este trabajo. Efectivamente, Λ es un atractor, además de ser un objeto matemáticamente muy interesante y complicado de abordar conocido como **atractor extraño**, esto no fue probado hasta el año 2001 por Warwick Tucker.

2.5. Puntos de equilibrio

El objetivo de la teoría cualitativa es la descripción más completa y detallada del diagrama de fases, con el propósito de conocer las características cualitativas del comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Debido al “teorema de la caja de flujo”, es conocido que en un entorno de un punto ordinario el diagrama

de fases es esencialmente el mismo. Esto justifica que las propiedades más relevantes del diagrama de fases estén determinadas por la naturaleza de los puntos de equilibrio.

La finalidad de esta sección es mostrar los puntos de equilibrio que aparecen en el sistema de Lorenz en función de los valores de los parámetros, así como determinar su estabilidad a partir de los conceptos y resultados teóricos que conforman nuestro marco de trabajo.

Consideremos el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \sigma Y(t) - \sigma X(t) \\ \dot{Y}(t) &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -bZ(t) + X(t)Y(t)\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio corresponden a las soluciones constantes de dicho sistema, utilizando la notación anterior

$$\frac{d}{dt}\vec{U}(t) = F(\vec{U}(t))$$

y debido al carácter autónomo del mismo, éstos vienen dados por los ceros de la función F . Por esta razón, el cálculo de los puntos de equilibrio se reduce a resolver el sistema

$$\begin{cases} \sigma Y - \sigma X &= 0 \\ rX - Y - XZ &= 0 \\ -bZ + XY &= 0 \end{cases}$$

donde hemos omitido la dependencia respecto al tiempo para simplificar la notación.

Es claro que el origen $(0, 0, 0)$ es solución del sistema anterior para cualquier valor de los parámetros. Dado que el sistema pierde sus propiedades más relevantes cuando todos los parámetros son nulos, consideramos σ , b , r números reales estrictamente positivos. Ahora, suponiendo que $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ resolvemos dicho sistema por sustitución

$$\begin{aligned} \begin{cases} \rightarrow Y = X \\ rX - Y - XZ = 0 \\ -bZ + XY = 0 \end{cases} &\equiv \begin{cases} rX - X - XZ = 0 \\ -bZ + X^2 = 0 \end{cases} \equiv \\ \begin{cases} X(r - 1 - Z) = 0 \\ -bZ + X^2 = 0 \end{cases} &\equiv \begin{cases} \rightarrow Z = r - 1 \\ -bZ + X^2 = 0 \end{cases} \equiv \\ X^2 = b(r - 1) &\equiv \boxed{X = \pm\sqrt{b(r - 1)}} \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que los puntos críticos del sistema vienen dados por

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= \left(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1\right) \\ P_3 &= \left(-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1\right) \end{aligned}$$

Se observa que para determinados valores del parámetro r tendremos un sólo punto de equilibrio o tres. Por ello, procedemos por casos

- Caso $r < 1$: El único punto de equilibrio que se presenta es el *origen*. En la sección anterior se demostró un teorema que garantiza que el origen es *asintóticamente globalmente estable*. Además, se ilustró esta propiedad con gráficas obtenidas a partir de la herramienta Matlab.
- Caso $r = 1$: De modo similar, el único punto de equilibrio que aparece es el *origen*. El siguiente teorema pone de manifiesto la naturaleza de dicho punto.

Teorema 2.5. *Para $r = 1$, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Demostración. Consideremos la función $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$V(X, Y, Z) = X^2 + \sigma Y^2 + \sigma Z^2$$

El objetivo es comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de estabilidad de Liapunov.

- Es claro que

$$V(0, 0, 0) = 0$$

- Si $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$, entonces

$$V(X, Y, Z) > 0$$

ya que es suma de términos estrictamente positivos. Luego V es definida positiva en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

- Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

calculamos, para los soluciones del sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2X(\sigma Y - \sigma X) + 2\sigma Y(rX - Y - XZ) + 2\sigma Z(XY - bZ) \\ &= 2X\sigma Y - 2\sigma X^2 + 2\sigma r Y X - 2\sigma Y^2 - 2\sigma Y X Z + 2\sigma Y X Z - 2\sigma b Z^2 \\ &= -2\sigma(X^2 + Y^2 - (1+r)XY) - 2\sigma b Z^2 && (r = 1) \\ &= -2\sigma(X^2 + Y^2 - 2XY) - 2\sigma b Z^2 \\ &= -2\sigma(X - Y)^2 - 2\sigma b Z^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Observamos que \dot{V} no es definida negativa, ya que no sólo se anula para el origen, sino también para los puntos de \mathbb{R}^3 de la forma

$$\begin{cases} X = Y \\ Z = 0 \end{cases}$$

Luego, concluimos que \dot{V} es *semidefinida negativa*.

Utilizando el teorema de estabilidad de Liapunov, afirmamos que el origen es *estable*. Sin embargo, la función de Liapunov V es semidefinida negativa ya que se anula en el origen y en los puntos de la forma comentada anteriormente. Esto se traduce en que el campo vectorial del sistema de Lorenz F apunta hacia dentro en el elipsoide determinado por la función de Liapunov V salvo en los puntos de la recta

$$\begin{cases} X = Y \\ Z = 0 \end{cases}$$

que es tangente a la misma. Por tanto, para probar la estabilidad asintótica tenemos que garantizar que las trayectorias atraviesan dicha recta. Procedemos por reducción al absurdo, si el origen no fuera asintóticamente estable, tendrían que existir puntos ω -límite en la recta anterior, y como el conjunto ω -límite es invariante, tendría que haber soluciones en dicha recta pero la única que hay es el origen. Luego, concluimos que el origen es asintóticamente estable. \square

- Caso $r > 1$: Se presentan los siguientes tres puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

Con el fin de analizar la estabilidad de cada uno de ellos, haciendo uso de la teoría de linealización de sistemas no lineales, realizamos un análisis detallado de cada uno de ellos.

- $P_1 = (0, 0, 0)$

Consideramos el sistema linealizado en el origen, es decir,

$$\dot{\xi} = DF(0, 0, 0) \xi$$

Por los resultados expuestos en el capítulo de preliminares, sabemos que el signo de la parte real de los autovalores de la matriz $DF(0, 0, 0)$ determina, en algunos casos, la estabilidad del punto de equilibrio. Por esta razón, calcularemos dichos autovalores.

En primer lugar, dicha matriz viene dada por

$$DF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

A continuación, calculamos su polinomio característico

$$\begin{aligned} P_\lambda(0,0,0) &= \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -(\sigma + \lambda) & \sigma & 0 \\ r & -(1 + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -(b + \lambda) \end{pmatrix} \\ &= -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) + \sigma r(b + \lambda) \end{aligned}$$

Sacando factor común a $(b + \lambda)$, tenemos

$$P_\lambda(0,0,0) = (b + \lambda) [-\sigma - \sigma\lambda - \lambda - \lambda^2 + \sigma r]$$

y concluimos que una raíz es

$$\boxed{\lambda_1 = -b}$$

Ahora, calculamos las raíces del otro factor

$$-\lambda^2 - (\sigma + 1)\lambda + \sigma(r - 1) = 0$$

utilizando la famosa fórmula para las ecuaciones de grado dos, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{-2} \\ &= \frac{(1 + \sigma) \pm \sqrt{1 + \sigma^2 + 2\sigma + 4\sigma r - 4\sigma}}{-2} \\ &= \frac{(1 + \sigma) \pm \sqrt{1 + \sigma^2 - 2\sigma + 4\sigma r}}{-2} \\ &= \frac{(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r}}{-2} \end{aligned}$$

Por tanto, los dos autovalores restantes son

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 + \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r} \right]}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 - \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r} \right]}$$

Los autovalores λ_1 y λ_3 son negativos, pero λ_2 es positivo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 + \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r} \right] > 0 &\iff -\sigma - 1 + \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r} > 0 \\ &\iff \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma r} > 1 + \sigma \\ &\iff (1 - \sigma)^2 + 4\sigma r > (1 + \sigma)^2 \\ &\iff 1 + \sigma^2 - 2\sigma + 4\sigma r > 1 + \sigma^2 + 2\sigma \\ &\iff 4\sigma r > 4\sigma \\ &\iff r > 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que el origen es *inestable*.

$$\bullet \quad \boxed{P_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)} \quad \&\& \quad \boxed{P_3 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)}$$

La razón por la que tratamos ambos puntos de equilibrio de manera simultánea es que al obtener el sistema linealizado, el polinomio característico tanto de $DF(P_2)$ como de $DF(P_3)$ es el mismo.

En primer lugar, consideremos el sistema linealizado en cada uno de los puntos

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= DF(P_2) \xi \\ \dot{\eta} &= DF(P_3) \eta \end{aligned}$$

donde las matrices $DF(P_2)$ y $DF(P_3)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} DF(P_2) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \\ DF(P_3) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación, calculamos sus polinomios característicos

$$\begin{aligned} P_\lambda(P_2) &= \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -(\sigma + \lambda) & \sigma & 0 \\ 1 & -(1 + \lambda) & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -(b + \lambda) \end{pmatrix} \\ &= -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) - \sigma b(r-1) - (\sigma + \lambda)b(r-1) \\ &\quad + \sigma(b + \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(P_3) &= \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} -(\sigma + \lambda) & \sigma & 0 \\ 1 & -(1 + \lambda) & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -(b + \lambda) \end{pmatrix} \\
 &= -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) - \sigma b(r - 1) - (\sigma + \lambda)b(r - 1) \\
 &\quad + \sigma(b + \lambda)
 \end{aligned}$$

Luego, utilizando la notación $P_\lambda(P_{23})$ para denotar a dicho polinomio y operando, tenemos

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(P_{23}) &= -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) - \sigma b(r - 1) - (\sigma + \lambda)b(r - 1) \\
 &\quad + \sigma(b + \lambda) \\
 &= (-\sigma - \sigma\lambda - \lambda - \lambda^2)(b + \lambda) - \sigma br + \sigma b - \sigma b(r - 1) - \lambda b(r - 1) \\
 &\quad + \sigma b + \sigma\lambda \\
 &= -\sigma b - \sigma\lambda - \sigma\lambda b - \sigma\lambda^2 - \lambda b - \lambda^2 - \lambda^2 b - \lambda^3 - \sigma br + \sigma b \\
 &\quad - \sigma b(r - 1) - \lambda b(r - 1) + \sigma b + \sigma\lambda \\
 &= -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda(\sigma b + b + b(r - 1)) - 2\sigma b(r - 1) \\
 &= -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda b(\sigma + r) - 2\sigma b(r - 1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Multiplicando la igualdad por -1

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + b) + \lambda b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

El polinomio anterior es un polinomio de grado 3 con coeficientes reales. Por el teorema fundamental del álgebra, sabemos que tiene tres raíces complejas. Debido a que sus coeficientes son reales, es conocido que las raíces complejas vienen dadas por parejas, es decir, ella misma y su conjugada. Por tanto, concluimos que dicho polinomio tiene una raíz real y dos raíces complejas, una la conjugada de la otra. Además, la raíz real de este polinomio es negativa para todo $r > 1$.

La condición para que todas las raíces del polinomio $P_\lambda(P_{23})$ sean reales es complicada y no relevante. Nos limitaremos a afirmar que las tres raíces toman valores reales cuando el parámetro r está cercano a uno. Cabe destacar que si

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

las tres raíces del polinomio anterior tienen parte real negativa. Denotaremos

$$r_H \equiv \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

Luego, para valores de r tales que $1 < r < r_H$ los puntos de equilibrio P_2 y P_3 son *asintóticamente estables*.

Para $r > r_H$ las raíces complejas del polinomio $P_\lambda(P_{23})$ tienen parte real positiva. Por tanto, los puntos de equilibrio P_2 y P_3 son *inestables*.

Cuando $r = r_H$, los autovalores complejos cruzan el eje imaginario dando lugar a una bifurcación de tipo *Hopf*, en la cual los puntos P_2 y P_3 pierden su estabilidad.

La bifurcación de Hopf en el sistema de Lorenz se analiza en profundidad en el siguiente capítulo, donde justificaremos la existencia del valor r_H .

Ilustramos el fenómeno que se produce para valores del parámetro r estrictamente mayores que uno con las siguientes gráficas, que se ha obtenido utilizando la herramienta Matlab. Se ha desarrollado un método **predictor-corrector** para implementar el método implícito del **trapecio** con el propósito de resolver numéricamente el sistema de Lorenz. El funcionamiento de este tipo de implementación de métodos implícitos ya se explicó en la página 44. En este caso, se ha empleado como predictor el método de **Euler**.

Los parámetros empleados por el algoritmo son $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Para representar de manera gráfica la estabilidad de los puntos de equilibrio según los valores del parámetro r , se han tomado condiciones iniciales muy próximas a cada uno de dichos puntos, en el sentido de que difieren en el orden de un décimo. De esta manera, mostraremos el comportamiento de las soluciones cercanas a los puntos de equilibrio cuando r toma valores en los intervalos mencionados anteriormente. Esto nos permitirá obtener un idea intuitiva de los resultados que hemos expuesto previamente.

En primer lugar, para los valores de los parámetros anteriores calculamos r_H

$$\begin{aligned} r_H &= \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \\ &= \frac{10(10 + 8/3 + 3)}{10 - 8/3 - 1} \\ &= \frac{470}{19} \\ &\approx 24.74 \end{aligned}$$

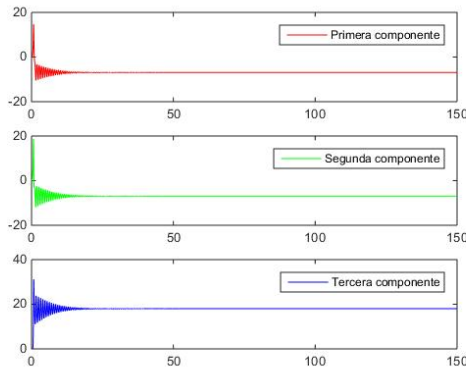
Consideramos los valores,

- $r = 19$

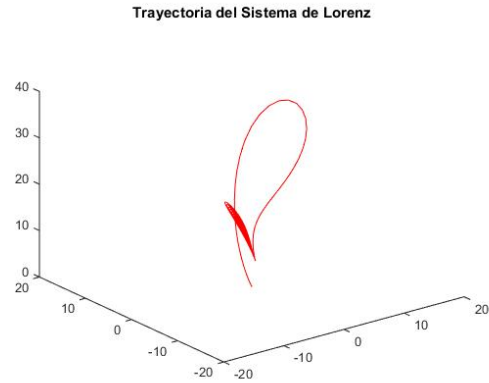
Obtenemos los siguientes puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{48}, \sqrt{48}, 18) \\ P_3 &= (-\sqrt{48}, -\sqrt{48}, 18) \end{aligned}$$

En el caso del origen, hemos tomado como condición inicial $X_0 = (0.1, 0.02, 0.01)$ y hemos aproximado la solución exacta para el intervalo $(0, 150)$, dividiéndolo en 10000 subintervalos. Se observa como las componentes se vuelven especialmente inestables. Este hecho pone de manifiesto la inestabilidad del origen como punto de equilibrio (Figura 2.10).



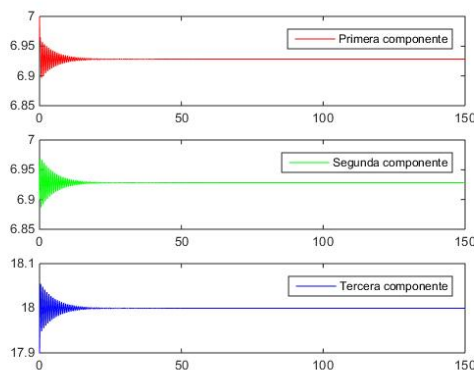
(a) Componentes X, Y, Z



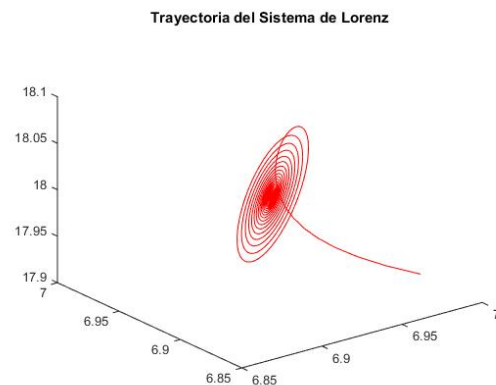
(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.10: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.02, 0.01)$, Punto de equilibrio $(0, 0, 0)$

De manera análoga, para el punto P_2 , hemos cogido como condición inicial $X_0 = (7, 6.9, 17.9)$. En cambio, en esta gráfica se observa como cada una de las componentes de la solución permanecen muy “cercanas” a cada una de las mismas del punto $(7, 6.9, 17.9)$, lo que refleja su estabilidad. Hemos obtenido la solución en el intervalo $(0, 150)$ con el propósito de poder reflejar además su estabilidad asintótica (Figura 2.11).



(a) Componentes X, Y, Z

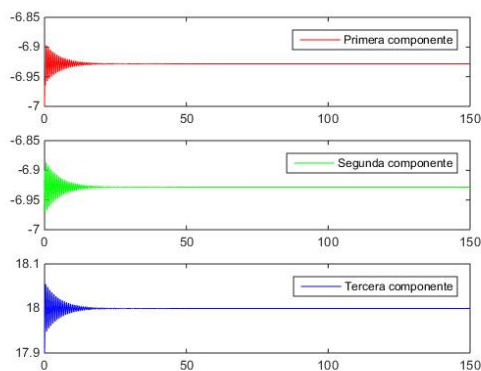


(b) Trayectoria de la solución

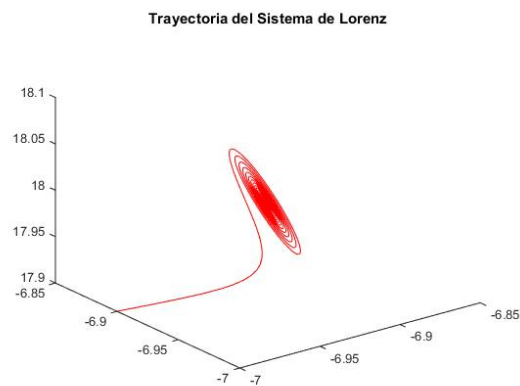
Figura 2.11: Solución P.V.I. para $X_0 = (7, 6.9, 17.9)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{48}, \sqrt{48}, 18)$

Procediendo de manera similar para el punto de equilibrio P_3 , se comprueba que sucede el mismo fenómeno que en el caso anterior. En particular, hemos tomado como

condición inicial $(-7, -6.9, 17.9)$. Además, pone de manifiesto la simetría existente en el sistema de Lorenz, ya que observamos la figura simétrica a la gráfica 2.11 (Figura 2.12).



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.12: Solución P.V.I. para $X_0 = (-7, -6.9, 17.9)$, Punto de equilibrio $(-\sqrt{48}, -\sqrt{48}, 18)$

- $r = 55$

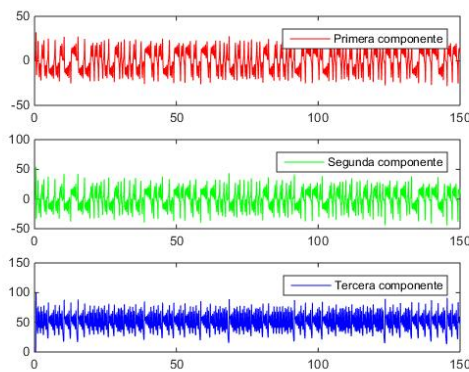
Se presentan los siguientes puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

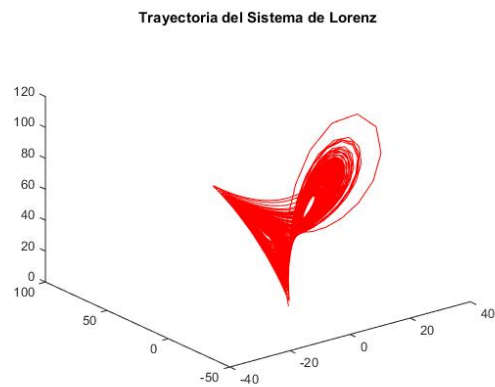
$$P_2 = (12, 12, 54)$$

$$P_3 = (-12, -12, 54)$$

Para el origen, hemos utilizado la condición inicial $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$. Se observa como dicha inestabilidad se vuelve ligeramente más acentuada (Figura 2.13).



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 2.13: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$, Punto de equilibrio $(0, 0, 0)$

Respecto al punto de equilibrio P_2 , hemos considerado el mismo intervalo de definición que en el caso anterior y la condición inicial $X_0 = (12.01, 12.01, 54.01)$. En cambio, obtenemos resultados sorprendentes que ponen de manifiesto su inestabilidad. Se observa como las componentes de la solución, especialmente la primera y la segunda, se vuelven completamente oscilantes provocando la inestabilidad del punto de equilibrio(Figura 2.14).

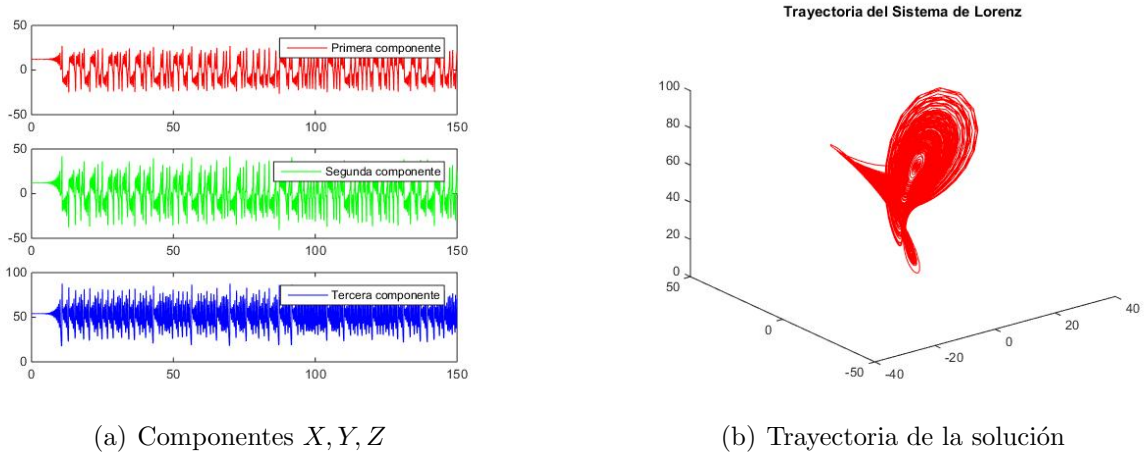


Figura 2.14: Solución P.V.I. para $X_0 = (12.01, 12.01, 54.01)$, Punto de equilibrio $(12, 12, 54)$

Procediendo de manera análoga, para el punto de equilibrio P_3 se produce el mismo fenómeno que para el punto de equilibrio anterior. Se puede apreciar como las componentes de la solución comienzan a oscilar provocando la inestabilidad del punto. Además, se obtiene la gráfica simétrica a la figura 2.14 (Figura 2.15).

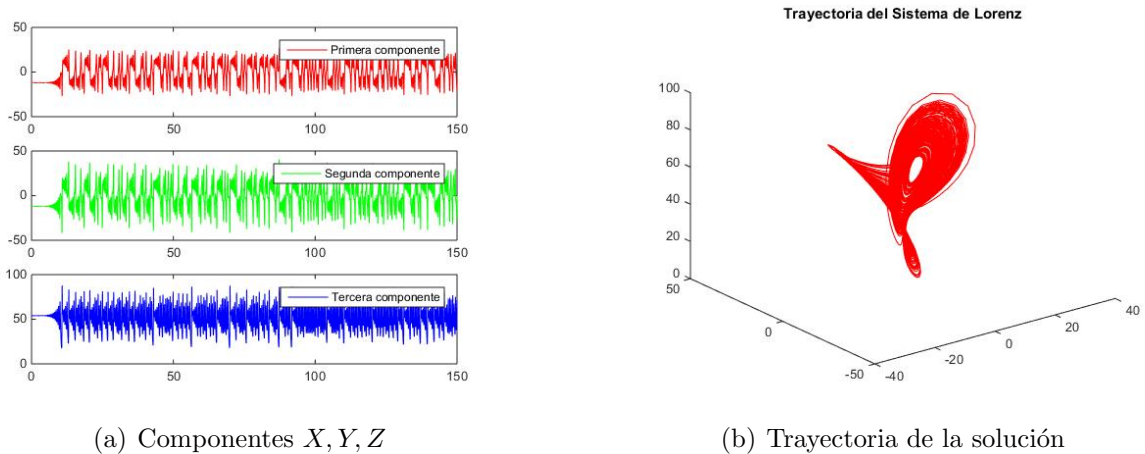


Figura 2.15: Solución P.V.I. para $X_0 = (-12.01, -12.01, 54.01)$, Punto de equilibrio $(-12, -12, 54)$

Con el objetivo de resumir las conclusiones obtenidas en este capítulo, construimos la siguiente tabla:

	Puntos de equilibrio	Estabilidad	Bifurcación
$0 < r < 1$	Origen	Global. Asintótic. Estable	-
$r = 1$	Origen	Asintótic. Estable	Pitchfork
$1 < r < r_H$	Origen	Inestable	-
	P_2	Asintótic. Estable	-
	P_3	Asintótic. Estable	-
$r = r_H$	-	-	Hopf
$r > r_H$	Origen	Inestable	-
	P_2	Inestable	-
	P_3	Inestable	-

Comportamiento caótico del sistema de Lorenz

La palabra *caos* se emplea en muchos y muy variados ámbitos y, coloquialmente hablando, es sinónimo de desorden y confusión. Sin embargo, cuando se habla técnicamente de la *teoría del caos* nos estamos refiriendo al *caos determinista*.

El determinismo surge en el siglo XVII con la mecánica de Newton, quién afirmó que el movimiento de los cuerpos se rige por su segunda ley que adquiere la forma de una ecuación diferencial. Esta ecuación determina el movimiento de un cuerpo para todo tiempo, ya sea hacia el pasado o hacia el futuro, siempre y cuando se conozca la posición y la velocidad en un instante dado, así como las fuerzas que actúan sobre él.

La importancia de este descubrimiento radica en su universalidad, es decir, se puede aplicar a todos los objetos macrocópicos del universo. Por tanto, es posible determinar la trayectoria de todos los objetos del universo conociendo su condición inicial, así como las fuerzas que actúan entre ellos. Esto es la esencia del determinismo, es una cuestión de principio que en la práctica no se cumple, ya que no sólo necesitamos conocer la ecuación que determina el movimiento, sino además encontrar la solución de ésta.

Consideremos el *problema de los tres cuerpos*: supongamos un planeta que siente la atracción gravitacional de dos estrellas y que los tres cuerpos están en interacción. En este caso conocemos las fuerzas que actúan y la ecuación del movimiento, pero no somos capaces de encontrar la forma exacta de la órbita del planeta. Con ayuda de una computadora, podemos resolverla aproximadamente y así obtener la órbita del problema. Cabe destacar que, en general, la órbita será sumamente inestable, es decir, si modificamos ligeramente la posición inicial de la órbita, entonces la órbita resultante será muy distinta a la original. Además, el movimiento de dicha órbita será prácticamente indistinguible de un movimiento errático y aleatorio, aunque viene dado por una dinámica determinista. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *caótico* y nos proporciona un ejemplo del caos determinista.

La *teoría del caos* es una rama de las matemáticas, la física y otras ciencias que estudian sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. El *caos determinista* está caracterizado por su comportamiento dinámico aperiódico (es decir,

oscilaciones irregulares, que no se repiten nunca, de periodo infinito) que aparece bajo condiciones totalmente deterministas y que presenta una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. La irregularidad de las trayectorias está asociada a la imposibilidad práctica de predecir la evolución futura del sistema, aunque ésta sea determinista. A continuación, presentamos las **características fundamentales de los sistemas caóticos**,

- I *Determinista*: Eso significa que se puede conocer con precisión la secuencia que les da origen, debido a que existe una ecuación determinista que gobierna su conducta y al conocimiento de las condiciones iniciales.
- II *Impredictible*: Es la esencia misma de la aperiodicidad, algo que oscila, que no se repite nunca y que además no se puede predecir cual va a ser el comportamiento futuro del sistema, ni mucho menos conocer su pasado. Las trayectorias no se ajustan a un punto fijo, órbita periódica u órbita cuasiperiódica para valores de t suficientemente grandes. Los sistemas caóticos son sistemas dinámicos cuyas variables de estado se mueven en un espacio acotado, de manera no periódica y aparentemente “aleatoria”.
- III *Dependencia sensible a las condiciones iniciales*: Trayectorias que comienzan muy próximas pueden tener comportamientos cualitativamente muy diferentes, sin ninguna intervención exterior. En otras palabras, existe una divergencia exponencial de las trayectorias, al menos en un entorno de la condición inicial de partida. Por tanto, la más mínima perturbación es amplificada exponencialmente. Cuando el comportamiento dinámico es periódico, las órbitas convergen, independientemente de las condiciones iniciales, mientras que, cuando el comportamiento es caótico, la más mínima diferencia en las condiciones iniciales conduce a órbitas divergentes, que terminan siendo completamente diferentes.
- IV *Transitividad topológica*: Implica que órbitas alejadas pueden llegar a aproximarse. Esto se debe al plegamiento del espacio de fases sobre sí mismo, dando lugar a órbitas que están confinadas en una región del espacio de fases, pero que no se cortan. Esto se puede resumir en que existe un gran número de órbitas densas.
- V *Puntos periódicos densos*: Sus órbitas periódicas deben formar un conjunto denso en una región compacta del espacio de fases.

Un *atractor* es una región del espacio de fases hacia la cual convergen las trayectorias posibles de un sistema, en general, los atractores poseen la forma de alguna figura geométrica conocida. El atractor de los sistemas estables es un punto, mientras que para los sistemas periódicos es un ciclo límite. El atractor de un sistema caótico recibe el nombre de *extraño* o *caótico* y está caracterizado por presentar un comportamiento caótico e impredecible. Éste ocupa un subespacio de dimensión menor que el diagrama de fases. Los atractores extraños reaccionan de manera muy sensible a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales. Los atractores anteriormente mencionados - un punto, un ciclo límite - son variedades, mientras que los atractores extraños no lo son.

Una vez introducidos de manera general los conceptos sobre sistemas caóticos y atractores extraños, comprobemos cómo el sistema de Lorenz, para ciertos valores de los parámetros, exhibe un comportamiento caótico y muestra lo que se denomina *atractor extraño de Lorenz*.

En primer lugar, determinamos la divergencia del sistema de Lorenz, denotada por Λ , para adquirir un noción global del movimiento en el diagrama de fases.

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\partial}{\partial X}(-\sigma X + \sigma Y) + \frac{\partial}{\partial Y}(rX - Y - XZ) + \frac{\partial}{\partial Z}(-bZ + XY) \\ &= -(\sigma + 1 + b)\end{aligned}$$

Debido a que Λ es negativa, recibe el nombre de *tasa de contracción del volumen* y, por tanto, el sistema es disipativo. Esto significa que dado un elemento de volumen $V(0)$, el sistema de Lorenz lo contrae exponencialmente en el tiempo de acuerdo a la expresión

$$V(t) = V(0)e^{\Lambda t}$$

Por esta razón, se dice que el tipo de caos que encontró Lorenz es un *caos disipativo* ya que exhibe un fenómeno en donde existe disipación de calor debido a la fricción.

Como se ha comentado a lo largo de este trabajo, está justificado emplear r como parámetro de control ya que viene definido como

$$r = \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}}$$

y, por tanto determina cuándo se produce el fenómeno de convección. A continuación, se muestra la evolución del sistema de Lorenz considerando como parámetro de control r , mientras que los restantes los consideraremos fijos. El análisis de la evolución se podría hacer para valores de σ y b cualesquiera siempre que cumplan determinadas restricciones, pero cómo nuestro propósito es describir esta evolución de la manera más visual posible, consideraremos los valores $\sigma = 10$ y $b = 8/3$ que reciben el nombre de *parámetros de Lorenz* ya que fue utilizando éstos con los que Lorenz descubrió su famoso atractor.

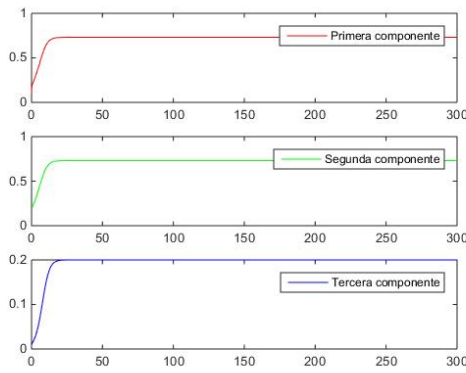
Para $0 < r < 1$ el único punto de equilibrio es el origen que, como se ha visto, es globalmente asintóticamente estable, es decir, un atractor global, lo que significa que todas las trayectorias son atraídas hacia el origen. En términos físicos, el modelo dice que pequeñas diferencias de temperatura entre la placa superior e inferior no serán suficientes para mantener la convección, de modo que todo movimiento circulatorio inicial desaparece eventualmente.

Cuando $r = 1$ se produce una bifurcación de Pitchfork de la solución nula a las soluciones

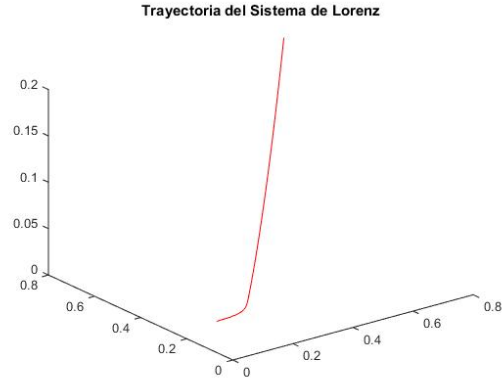
$$\begin{aligned}C^+ &= \left(\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), r-1 \right) \\ C^- &= \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), r-1 \right)\end{aligned}$$

ubicados simétricamente con respecto al eje z . Para el origen, el subespacio estable es el eje Z mientras que el plano $X - Y$ es el subespacio inestable.

Para $r > 1$ el origen se vuelve inestable. En otras palabras, la mayoría de las trayectorias que comienzan cerca del origen se mueven ahora alejándose de él. La siguiente figura ilustra este fenómeno.



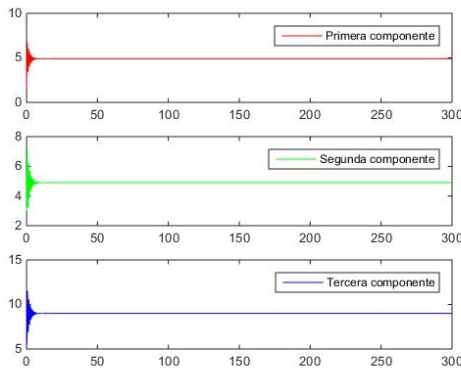
(a) Componentes X, Y, Z



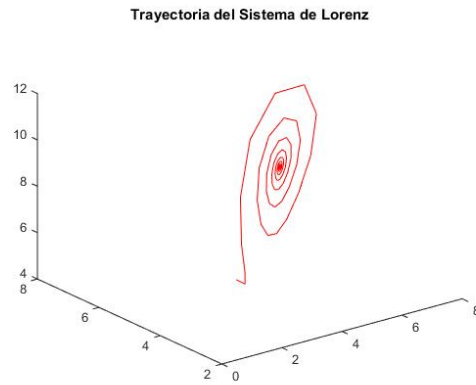
(b) Trayectoria de la solución

Figura 3.1: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.2, 0.01)$, $r = 1.2$

Esto significa que el más ligero cambio del estado de no convección hace que el fluido empiece a circular ya que ΔT estaría ligeramente por encima de ΔT_{cr} . Pero el origen, por así decirlo, genera un par de nuevos estados atractores, los puntos de equilibrio C^+ y C^- que representan estados estables de convección en sentido horario y antihorario respectivamente. Todas las trayectorias giran en espiral hacia dentro, hacia uno u otro de estos puntos, ya que dichos puntos son asintóticamente estables. La siguiente gráfica ilustra este comportamiento



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 3.2: Solución P.V.I. para $X_0 = (1.5, 3, 6.5)$, $r = 10$

Al crecer r , los puntos C^+ y C^- , que estaban simétricamente dispuestos a ambos lados del origen, se alejan cada vez más. En términos físicos, esto se traduce en que, cuando la diferencia de temperatura ΔT es suficientemente grande, el sistema se asienta en una convección estable en una dirección u otra, mientras que la velocidad de circulación aumenta al crecer dicha diferencia de temperaturas.

Pero al crecer r , las trayectorias empiezan a describir espirales en torno a los atractores en ciclos cada vez más abiertos hasta llegar a un valor crítico denotado por r_0 , que para

nuestros parámetros

$$r_0 = 13.93$$

Cuando $r = r_0$ la variedad inestable del origen se retuerce alrededor de los puntos C^+ y C^- , y regresa por la variedad estable del mismo. Surgen de esta manera dos órbitas homoclinas que conectan el cero con sí mismo. Estas órbitas son periódicas, pero como el origen es un punto de silla, la trayectoria va cada vez más despacio según se aproxima al origen haciendo un recorrido infinitamente largo, luego su periodo es infinito. Recordemos que una órbita homoclina es una órbita que tiende hacia el mismo punto cuando el tiempo tiende tanto a $+\infty$ como a $-\infty$.

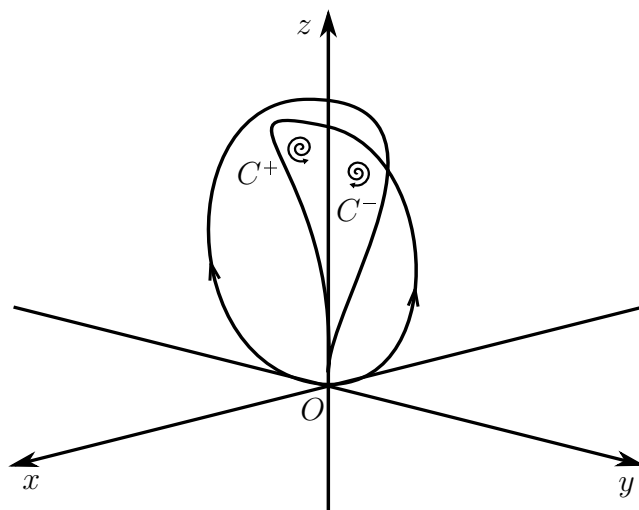
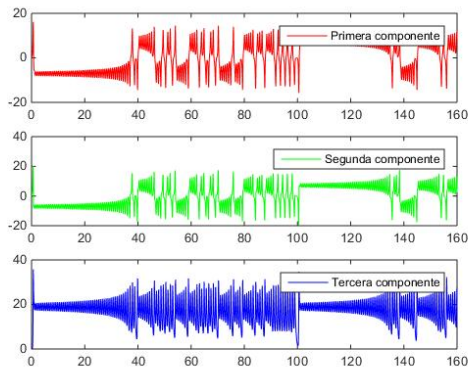


Figura 3.3: Esquema de la variedad inestable del origen. Se muestra la órbita homoclina para $r = r_0$.

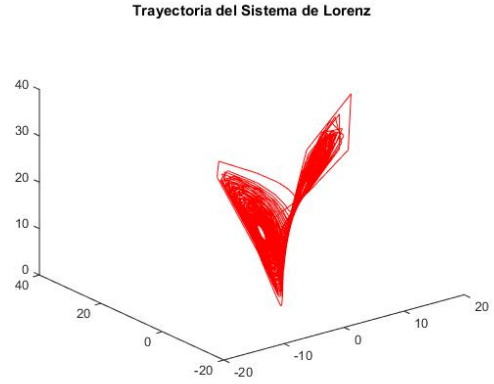
Cuand r crece por encima de r_0 , de cada órbita homoclina surge una órbita periódica alrededor de C^+ o C^- . Recordemos que cuando analizábamos la bifurcación de Hopf tomando como parámetro de control r en el apéndice correspondiente, obtuvimos que para valores de dicho parámetro menores que r_H , los puntos de equilibrio C^+ y C^- son asintóticamente estables con una órbita periódica inestable. Esto provoca que una trayectoria procedente de las proximidades del origen desde el octante donde se encuentra C^+ es rechazada por la órbita periódica de C^+ y se dirige a C^- hacia donde se acerca en espiral, pasa cerca de la órbita periódica de éste, que la rechaza y la obliga a volver hacia C^+ , y así más y más veces antes de caer en uno de los dos puntos. Esta situación parece difícil distinguir del caos, y a veces recibe el nombre de *caos transitorio*. La figura 3.4 ilustra este comportamiento

Estos ciclos límite inestables, con periodos finitos, tienen la propiedad de que su amplitud va decreciendo a medida que r aumenta, terminando por colapsar en C^+ y C^- cuando r alcance el valor r_H de la bifurcación de Hopf. Para valores de r comprendidos entre 1 y r_H se denomina *regimen precaótico*. Cuando se hizo el análisis de la bifurcación de Hopf calculamos el valor r_H para parámetros de control arbitrarios. En nuestro caso viene dado por

$$r_H \approx 24.74$$



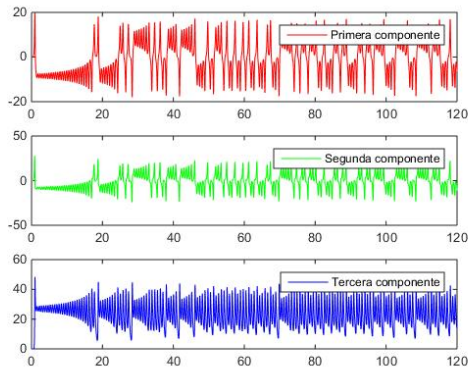
(a) Componentes X, Y, Z



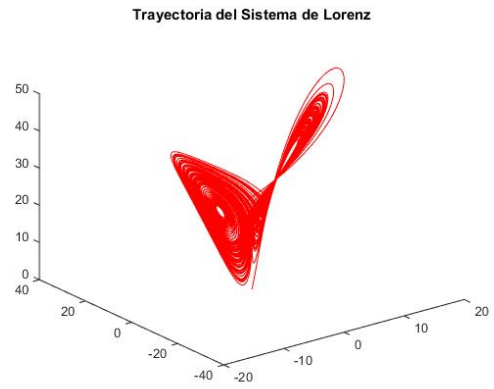
(b) Trayectoria de la solución

Figura 3.4: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.2, 0.15)$, $r = 20$

Cuando r supera el valor crítico anterior, los dos puntos C^+ y C^- dejan de atraer convirtiéndose en inestables, por tanto, el flujo de trayectorias que giran entorno a ellos deja de explosionar hacia dentro y sigue dando vueltas eternamente. Este fenómeno recibe el nombre de regimen caótico. La figura geométrica que emerge se denomina *atractor extraño de Lorenz*. La siguiente figura ilustra este comportamiento



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 3.5: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.001, 0.001, 0.001)$, $r = 28$

De la figura anterior podemos extraer las siguientes conclusiones,

- El movimiento es errático, es decir, las trayectorias se comportan caóticamente y los saltos desde el hemisferio de C^+ al hemisferio de C^- no pueden ser predichos.
- Las trayectorias reaccionan de manera muy sensible a las condiciones iniciales
- Las características del atractor son evidentes para distintas condiciones iniciales.

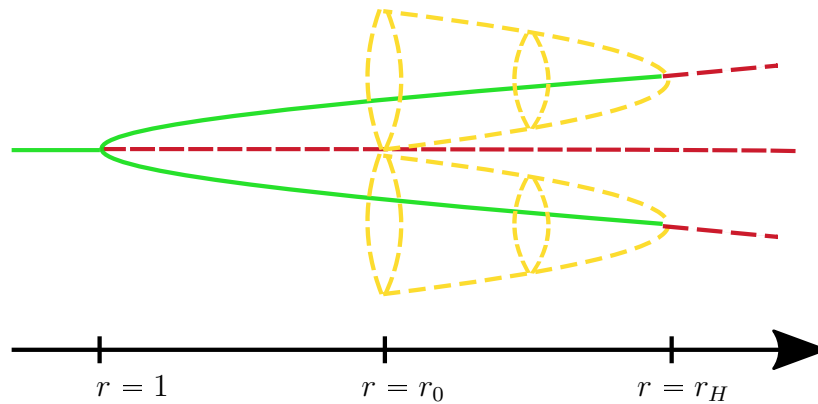


Figura 3.6: Diagrama de bifurcaciones del sistema de Lorenz en función del parámetro r .

La figura 3.6 muestra un diagrama de bifurcaciones esquemático donde la línea continua indica estabilidad asintótica y la discontinua inestabilidad. Comenzando para $r < 1$ donde sólo se presenta el origen como punto de equilibrio asintóticamente estable, terminando con los tres puntos fijos inestables.

Puede demostrarse que no existen órbitas cuasiperiódicas, ya que las órbitas cuasiperiódicas se mueven sobre un toro, y un toro no puede contener un volumen que tiende a cero sin tener una fuente en su interior, y no existen fuentes. Por tanto, para $r > r_H$ tenemos las siguientes características

- Ningún punto de equilibrio es estable.
- El volumen se encoge
- Ningún atractor tiene volumen finito
- Ninguna órbita es cuasiperiódica

Un sistema disipativo está caracterizado por la contracción del volumen, por tanto, su volumen se contrae para $t \rightarrow \infty$ a un atractor de dimensión menor que el espacio de fases. Los experimentos numéricos muestran que las órbitas se aproximan a un atractor extraño con dimensión fractal $D \approx 2.06$. Luego, el atractor de Lorenz es casi bidimensional. Éste se puede visualizar como una órbita que da algunas vueltas alrededor de C^+ , seguidas de algunas vueltas alrededor de C^- y así sucesivamente.

Con el propósito de mostrar que el atractor no es periódico, Lorenz examinó el comportamiento de los máximos sucesivos de las trayectorias en la dirección Z . Es una forma de reducir la dinámica continua y tridimensional del sistema completo a la de un mapeo unidimensional. Para ello, midió los máximos locales de $Z(t)$ y dibujó los puntos (Z_n, Z_{n+1}) para distintos valores de n , donde Z_n es el n -ésimo máximo local de $Z(t)$. El resultado que obtuvo se muestra en la siguiente gráfica

Al graficar estos máximos de manera recurrente, es decir, Z_{n+1} vs Z_n , aparece un gráfico casi lineal, con un grosor muy pequeño. Esto se debe a la enorme contracción del volumen que provoca el sistema de Lorenz. En la gráfica se observa que, la pendiente es, en módulo, mayor que 1.

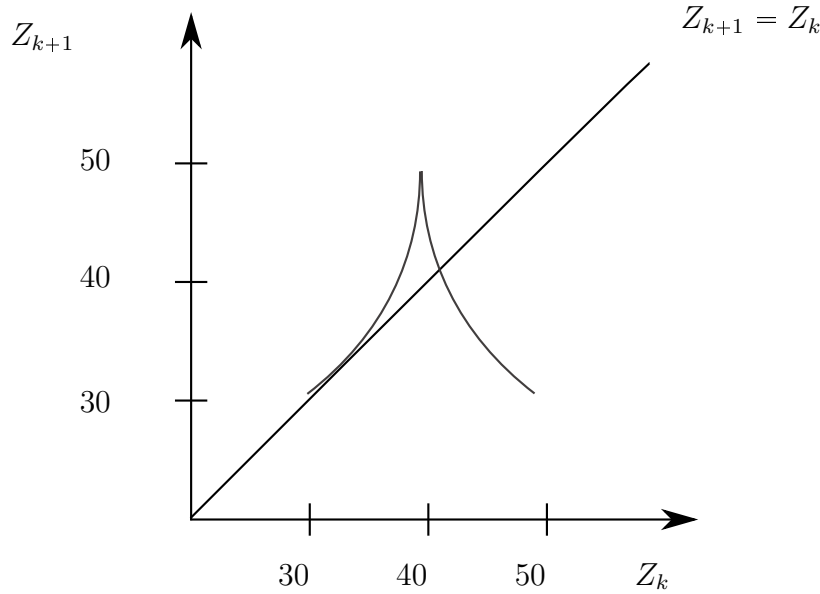


Figura 3.7: Mapa de Lorenz.

A la función $Z_{n+1} = f(Z_n)$ que representa esta gráfica se le conoce como *mapa de Lorenz*. Nos proporciona una importante propiedad dinámica del atractor, dado Z_0 podemos predecir $Z_1 = f(Z_0)$, luego $Z_2 = f(Z_1)$ y así sucesivamente. Esta es la razón por la que se dice que Lorenz llegó a reconocer “orden” en el caos.

Esto nos permite demostrar la siguiente proposición

Proposición 3.1. *Si el sistema de Lorenz posee una órbita periódica, entonces dicha órbita es inestable.*

Demostración. Consideremos la secuencia de $\{Z_n\}$ correspondiente a la órbita periódica. Esta secuencia eventualmente se repetirá, es decir, $Z_{n+p} = Z_n$. Ahora, consideremos una pequeña perturbación de la órbita periódica que pasa a través del punto $Z_n + \eta_n$, donde η_n denota la distancia de dicha trayectoria a la órbita periódica.

Luego, linealizando alrededor de Z_n ,

$$\begin{aligned} Z_{n+1} + \eta_{n+1} &= f(Z_n + \eta_n) \approx f(Z_n) + f'(Z_n) \eta_n \\ &= Z_{n+1} + f'(Z_n) \eta_n \end{aligned}$$

y, concluimos que

$$\eta_{n+1} \approx f'(Z_n) \eta_n$$

Análogamente, tenemos

$$\begin{aligned} \eta_{n+2} &\approx f'(Z_{n+1}) \eta_{n+1} \\ &= f'(Z_{n+1}) f'(Z_n) \eta_n \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera, después de p iteraciones

$$\eta_{n+p} \approx \left[\prod_{i=0}^{p-1} f'(Z_n + i) \right] \eta_n$$

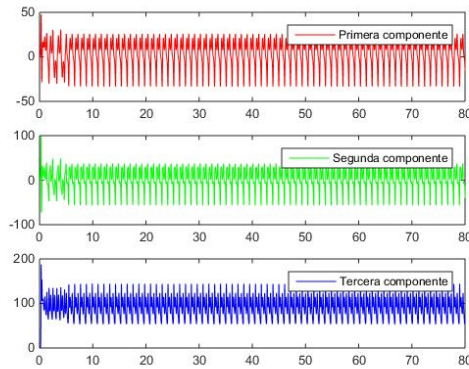
Gracias al mapa de Lorenz, sabemos que $|f'(Z)| > 1$ para todo Z . Luego, tenemos que

$$|\eta_{n+p}| > |\eta_n|$$

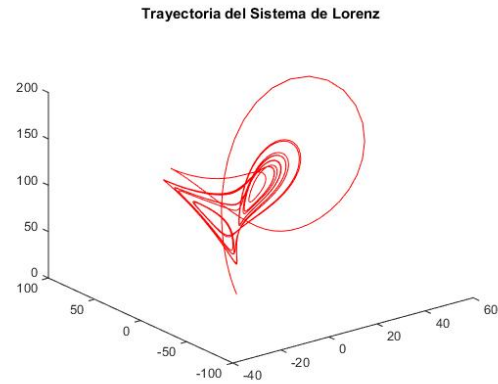
Por tanto, concluimos que una trayectoria que comienza cerca de una órbita periódica se aleja de la misma con el tiempo. Esto prueba que dicha órbita periódica es inestable. \square

La presencia del atractor extraño de Lorenz para ciertas combinaciones de parámetros se puede justificar de manera natural. Dado que todas las órbitas del sistema son acotadas, en el sentido de que siempre es posible encontrar un volumen finito que contenga a todos los puntos de la órbita, para cualquier condición inicial y familia de parámetros. Por tanto, si para ciertas combinaciones de parámetros no existen puntos fijos ni ciclos límite estables, el sistema debe poseer al menos un ω -límite de dimensión fractal mayor que dos y menor que tres. Esto viene reforzado por los experimentos numéricos que comentábamos anteriormente.

Llegados a este punto, cabe preguntarse que sucede para valores de r muy superiores al valor crítico r_H . Por ejemplo, si tomamos $r = 100$ obtenemos la siguiente gráfica en la



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura 3.8: Solución P.V.I. para $X_0 = (0.1, 0.02, 0.01)$, $r = 100$

que descubrimos que el atractor de Lorenz ha desaparecido y que, en su lugar, todas las trayectorias calculadas numéricamente parecen “verse atraídas” hacia una u otra de dos órbitas periódicas muy simples.

Es conocido, pero menos claro, ya que no se pueden utilizar herramientas de análisis de estabilidad, el resultado de que para valores mayores de r aparece un ciclo límite estable. Aumentando aún más r , el ciclo límite pierde su estabilidad y vuelve a aparecer un atractor extraño, y así se presentan intervalos de r para los cuales el ω -límite del sistema es un atractor extraño e intervalos en los que existen ciclos límite estables. Dado que

estos tres tipos de atractores que aparecen tiene dimensiones de Hausdorff esencialmente diferentes - los puntos fijos tienen dimensión cero, los ciclos límite dimensión uno y los atractores extraños dimensión mayor que dos - es posible clasificar el comportamiento del sistema para una combinación de parámetros analizando su dimensión fractal. Este tipo de análisis queda muy alejado del marco teórico en el que se centra este trabajo, por tanto nos limitaremos a mencionarlo.

Todo el análisis realizado anteriormente para diferentes valores de r no es más que el principio de una historia fascinante a la par que compleja. Esto nos permite concluir que las ecuaciones del sistema de Lorenz generan correlaciones muy detalladas entre valores de los parámetros controlables y características de la dinámica, cualitativas y cuantitativas. Esto viene apoyado por el apéndice dedicado al análisis de la bifurcación de Hopf del sistema.

Finalmente, como se dijo en la parte introductoria de este capítulo, una característica fundamental de los sistemas caóticos es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales que muestran. Dados dos puntos iniciales muy próximos el uno del otro, sus respectivas trayectorias divergen tras un cierto periodo de tiempo relativamente corto. Esto significa que cambios muy pequeños en las condiciones iniciales de sistemas caóticos son amplificados enormemente con la evolución del tiempo. Este es el “efecto mariposa” al que hacía referencia Lorenz en su artículo PREDICTABILITY: DOES THE FLAP OF A BUTTERFLY’S WINGS IN BRAZIL SET OFF A TORNADO IN TEXAS? el que cualquier perturbación pequeña (el batir de las alas de una mariposa) puede, en principio, tener un efecto grande a largo plazo (un huracán).

Con el propósito de ilustrar este fenómeno en el sistema de Lorenz, se ha desarrollado un programa en Python en el que dadas dos condiciones iniciales que difieren en 0.0001 pone de manifiesto la divergencia de sus trayectorias dando lugar a comportamientos cualitativos completamente diferentes. El siguiente vídeo muestra la ejecución de dicho programa con dos condiciones iniciales $X_0 = (5, -5, 20)$ y $X_0 = (5.0001, -5.0001, 20.0001)$ para los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$

Dos condiciones iniciales cercanas, $r = 28$

y el enlace explícito viene dado por

<https://drive.google.com/open?id=0B-SbL6shhAipUlZrTEcxUmVMT00>

Con el objetivo de mostrar que este fenómeno también sucede cuando no se presenta el atractor de Lorenz, el siguiente vídeo ha sido realizado para los mismos parámetros que antes salvo $r = 20$ y para las condiciones iniciales $X_0 = (3, -3, 10)$ y $X_1 = (3.0001, -3.0001, 10.0001)$. Se observa cómo esa pequeña diferencia entre ambas condiciones iniciales provoca que una trayectoria sea atraída por un atractor y la otra por el otro atractor. Por esta razón, vemos en el vídeo que cada una de las trayectorias se estabiliza hacia uno de los atractores correspondientes.

Dos condiciones iniciales cercanas, $r = 20$

y, explícitamente

<https://drive.google.com/open?id=0B-SbL6shhAipOWVBZUwwTXNLAEU>

Por último, el próximo vídeo muestra la ejecución del programa comentado anteriormente con $N = 4$ condiciones iniciales aleatorias separadas por 0.01. Este programa se ha desarrollado con vistas a su escalabilidad, fijado un número N arbitrario de condiciones iniciales. El resultado es realmente asombroso, se aprecia con total claridad el comportamiento cualitativo diferente de cada una de las trayectorias.

Cuatro condiciones iniciales cercanas, $r = 28$

y, explícitamente

<https://drive.google.com/open?id=0B-SbL6shhAipdWLLZnktDTU1S1k>

APÉNDICE A

Preliminares

Este capítulo adquiere un carácter introductorio natural. Su objetivo es presentar la notación y los distintos resultados teóricos que emplearemos en el estudio del sistema de Lorenz. Constituye un marco teórico compacto a partir de los conceptos y resultados más significativos de la teoría de sistemas dinámicos no lineales con el fin de proporcionar una base sólida sobre la que cimentar nuestro trabajo. Además, nos permitirá presentar con rigor y exactitud las características cualitativas más relevantes del sistema de Lorenz.

En primer lugar, se exponen los resultados básicos acerca de la existencia y unicidad de soluciones de un sistema autónomo no lineal así como las propiedades de las mismas. Los conceptos relacionados con la estabilidad de las soluciones, además de los resultados que nos permiten garantizar dicha propiedad, juegan un papel transcendental en nuestro estudio cualitativo, por esta razón, introducimos los mismos rigurosamente. En una segunda aproximación para caracterizar la estabilidad de las soluciones, exponemos una clase especial de funciones cuyo nombre se debe al matemático y físico ruso Aleksandr Liapunov.

En numerosos casos, los métodos para determinar la estabilidad de las soluciones presentados en las dos secciones anteriores no nos permiten concluir acerca de la naturaleza de las mismas. Por esta razón, exponemos una breve introducción a las variedades invariantes mostrando especial atención en las variedades centrales. Dichas variedades, constituirán la base para los dos apartados posteriores.

La sección correspondiente a las formas normales nos proporciona un método muy conocido para transformar el sistema dinámico en su forma “más simple”. El apartado acerca de la bifurcación de puntos fijos constituye uno de los ejes centrales de este marco teórico que queremos contruir, ya que nos permitirá realizar un análisis exhaustivo de los puntos de equilibrio del sistema de Lorenz para diferentes valores de los parámetros.

El teorema de Liouville constituye el resultado fundamental que nos permitirá estudiar el comportamiento de los volúmenes bajo la acción del flujo solución del sistema de Lorenz. Con el objetivo de estudiar el carácter cualitativo de los puntos de equilibrio de dicho sistema, realizamos una breve introducción sobre los conceptos más significativos

relacionados con el comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema autónomo no lineal.

Por último, dado que uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de la existencia de atractores para valores significativos de los parámetros, presentamos los conceptos de *caos* y *atractor extraño*, así como un procedimiento para probar que un sistema dinámico posee un atractor extraño.

A lo largo de este trabajo, consideraremos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

un sistema autónomo no lineal, escrito de manera vectorial

$$\dot{x} = f(x)$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad y \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

siendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

A.1. Soluciones. Existencia y unicidad.

Los siguientes teoremas garantizan la existencia, unicidad y diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales y parámetros.

Teorema A.1 (Existencia y unicidad). *Supongamos que las funciones f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para $i, j = 1, \dots, n$ son continuas en un abierto Ω de \mathbb{R}^n . Entonces*

(a) *Si $u(t)$ y $v(t)$ son dos soluciones del sistema $\dot{x} = f(x)$ definidas en un mismo intervalo J , con la propiedad $u(t_0) = v(t_0)$ para cierto $t_0 \in J$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $t \in J$.*

(b) *Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \Omega$, existe una función $x(t)$ definida en un intervalo maximal abierto (α, ω) que verifica*

- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$
- $x(t_0) = x_0$

Por tanto, podemos concluir que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega \text{ dado}$$

tiene una solución única definida en un intervalo maximal (α, ω) . Denotaremos dicha solución como $x(t; t_0, x_0)$.

En lo sucesivo, consideraremos el sistema autónomo no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

donde la función f es C^r , para $r \geq 1$.

Corolario A.1. *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución de $\dot{x} = f(x)$ que pasa por este punto.*

Teorema A.2 (Diferenciabilidad respecto condiciones iniciales). *Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, la solución $x(t; t_0, x_0)$ de (A.1) es una función C^r para t, t_0 , y x_0 .*

Teorema A.3 (Diferenciabilidad respecto parámetros). *Consideremos el sistema autónomo*

$$\dot{x} = f(x; \mu) \tag{A.2}$$

donde $f(x; \mu)$ es C^r , para $r \geq 1$, en un abierto U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Entonces, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, \mu) \in U$, la solución $x(t; t_0, x_0, \mu)$ de (A.2) es una función C^r para t, t_0, x_0 , y μ .

Con el objetivo de fijar la notación, presentamos las siguientes definiciones.

Definición A.1.

- Se denomina *trayectoria de una solución* $x(t)$ de (A.1) al recorrido de dicha solución $\{x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : t \in (\alpha, \omega)\}$, es decir, la proyección sobre \mathbb{R}^n de su gráfica. Por esta razón, $x(t; t_0, x_0)$ denotará la trayectoria a través del punto x_0 en el instante $t = t_0$. En lo posterior, utilizaremos t_0 para denotar el instante inicial.
- El grafo de $x(t; t_0, x_0)$ sobre t recibe el nombre de *curva integral*. De manera precisa,

$$\text{grafo } x(t; t_0, x_0) = \{(t, x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x = x(t; t_0, x_0), t \in (\alpha, \omega)\}$$

- El conjunto de las trayectorias de todas las soluciones de (A.1), en tanto que subconjuntos de \mathbb{R}^n se refiere, recibe el nombre de *diagrama de fases*.
- Sea x_0 un punto perteneciente al diagrama de fases de (A.1). Se denomina *órbita que pasa por x_0* , denotada por $O(x_0)$, al conjunto de puntos del diagrama de fases que pertenecen a la trayectoria que pasa por x_0 . Rigurosamente, dado $x_0 \in \Omega$,

$$O(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t; t_0, x_0), t \in (\alpha, \omega)\}$$

- La función $f \in C^r$, $r \geq 1$, recibe el nombre de *campo de direcciones o campo vectorial*, en el sentido de que a cada punto de Ω le hace corresponder una dirección bien definida.

La siguiente proposición pone de manifiesto la propiedad de *invariancia por traslaciones en el tiempo* de las soluciones de un sistema autónomo.

Proposición A.1. Si $x(t)$ es una solución de (A.1), entonces $z(t) = x(t + \tau)$ es también solución, para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Corolario A.2. Si $x(t)$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Entonces, $z(t) = x(t - t_0)$ es solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Este corolario nos permite considerar el estudio de los sistemas autónomos, sin pérdida de generalidad, para problemas de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Luego, $x(t; x_0)$ denotará la trayectoria que en el instante 0 pasa por el punto x_0 .

Proposición A.2 (Propiedades de un flujo).

- $x(t, x_0) \in \mathbf{C}^r$
- $x(0, x_0) = x_0$
- $x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$

Debido a las propiedades anteriores, las soluciones de (A.1) constituyen una familia uniparamétrica de \mathbf{C}^r difeomorfismos ($r \geq 1$) del espacio de fases. Por este motivo, reciben el nombre de *flujo*, denotado por $\phi(t, x)$ o $\phi_t(x)$.

El siguiente teorema nos permite realizar una estimación del intervalo maximal de existencia de las soluciones de (A.1).

Teorema A.4. Si $x(t)$ permanece en un subconjunto cerrado y acotado $B \subset \Omega$ para todo $t \in [t_0, \omega)$, entonces $\omega = \infty$. (Análogamente a la izquierda de t_0).

Las siguiente definición cobrará vital importancia en nuestro estudio.

Definición A.2 (Punto de equilibrio). Una *punto de equilibrio* \bar{x} de (A.1) es la trayectoria correspondiente a la solución constante $x(t) = \bar{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\bar{x} \in \Omega$ es un punto de equilibrio si y solo si

$$f(\bar{x}) = 0$$

Las soluciones de equilibrio también reciben el nombre de *punto fijo*, *punto estacionario* o *punto singular*.

Este resultado nos permite obtener mucha información en la construcción del diagrama de fases.

Teorema A.5. *Supongamos que existe el $\lim x(t) = \xi \in \Omega$ cuando $t \rightarrow \omega$, siendo $x(t)$ una solución de (A.1). Entonces, $\omega = \infty$ y ξ es un punto de equilibrio del sistema. (Análogamente para $t \rightarrow \alpha$).*

Por simplicidad, a lo largo de este capítulo supondremos que las soluciones de (A.1) existen para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

El objetivo de la teoría cualitativa es la descripción lo más completa y precisa del diagrama de fases. Por ello, presentamos un par de resultados que nos permitirán caracterizar las trayectorias de (A.1). El primero de ellos, afirma que por cada punto de Ω pasa una única trayectoria, es decir, dos trayectorias distintas no se pueden cortar nunca.

Proposición A.3. *Sean $x(t), y(t)$ dos soluciones de $\dot{x} = f(x)$ con la propiedad de $x(t_1) = y(t_2)$ para ciertos t_1, t_2 tales que $t_1 \neq t_2$. Entonces, $y(t) = x(t + t_1 - t_2)$ para todo t perteneciente al intervalo de definición de $y(t)$. Por tanto, afirmamos que las trayectorias de dos soluciones $x(t), y(t)$, o bien no tienen ningún punto en común o bien son coincidentes y satisfacen que $y(t) = x(t + \tau)$ para cierto $\tau \in \mathbb{R}$.*

Además, una trayectoria no puede cortarse así misma.

Proposición A.4. *Supongamos que para una solución $x(t)$ de (A.1) existen ciertos $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ tales que $x(t_1) = x(t_2)$. Entonces,*

- I *O bien, $x(t) = \bar{x} \in \Omega$ (\bar{x} es un punto de equilibrio de (A.1)).*
- II *O bien existe un mínimo número positivo T tal que $x(t + T) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Es decir, $x(t)$ es una solución periódica siendo T su periodo, y su trayectoria es una curva cerrada simple.*

De esta manera, hemos obtenido una primera aproximación a la estructura del diagrama de fases de un sistema autónomo. Está constituido por trayectorias que no se cortan entre ellas, y pueden ser de tres tipos:

- Curvas abiertas simples
- Curvas cerradas simples
- Puntos de equilibrio

Con el objetivo de realizar un análisis local del diagrama de fases, introducimos los siguientes conceptos.

Definición A.3. Decimos que $p \in \Omega$ es un *punto ordinario o regular* de (A.1) si y solo si

$$f(p) \neq 0$$

Debido a la continuidad del campo vectorial f , en un entorno de un punto ordinario no existen puntos de equilibrio del sistema. Por este motivo, por cada punto suficientemente próximo a p , incluido el mismo, pasa una trayectoria y el conjunto de todas ellas constituyen, alrededor del punto p , un haz de curvas que no se cortan.

Teorema A.6 (Teorema de la caja de flujo). *Sea p un punto ordinario del sistema (A.1). En un entorno V^p suficientemente pequeño de dicho punto, existe un cambio de coordenadas diferenciable $y = h(x)$, con $h(p) = 0$, mediante el cual el sistema (A.1) se transforma en el sistema*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

de modo que a la solución $\phi(t, x_0)$ de (A.1), donde $x_0 \in V^p$ y t satisface que $\phi(t, x_0) \in V^p$, le corresponde la solución de (A.3) $\psi(t, h(x_0)) = h(\phi(t, x_0))$.

Las soluciones de (A.3) vienen dadas por

$$\begin{cases} y_1(t) = t + y_1^0 \\ y_2(t) = y_2^0 \\ \vdots \\ y_n(t) = y_n^0 \end{cases}$$

cuya representación geométrica es sencilla, son rectas paralelas al eje y_1 .

El teorema anterior adquiere suma importancia, nos permite afirmar que en un entorno de un punto ordinario, el diagrama de fases es esencialmente el mismo, es decir, un haz de curvas regulares que se transforman en rectas paralelas mediante un cambio de coordenadas regular. Gracias a ello, hemos obtenido información precisa y útil sobre las trayectorias del diagrama de fases en las proximidades de un punto ordinario.

A.2. Estabilidad. Primera aproximación.

Los puntos de equilibrio de un sistema autónomo juegan un papel trascendental en la descripción del diagrama de fases. Dado que en un entorno de un punto ordinario todos los diagramas de fases son el mismo, cabe esperar que aquello más significativo se encuentre en los entornos de los puntos de equilibrio.

De manera general, consideremos $\bar{x}(t)$ una solución de (A.1). Intuitivamente, diremos que $\bar{x}(t)$ es estable si todas las soluciones que comienzan suficientemente próximas a $\bar{x}(t)$, permanecen “cerca” de ella en todo instante posterior. Es asintóticamente estable si las soluciones cercanas no sólo permanecen cerca, sino que convergen a $\bar{x}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición A.4 (Estabilidad). Decimos que $\bar{x}(t)$ es *estable* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con la propiedad de que para toda solución $y(t)$ de (A.1) verificando $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$, se tiene

$$|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo } t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$$

Definición A.5 (Estabilidad asintótica). Decimos que $\bar{x}(t)$ es *asintóticamente estable* si es estable y para toda solución $y(t)$ de (A.1), existe una constante positiva b de manera que, si $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$$

Las definiciones anteriores tratan sobre la estabilidad de las trayectorias. A continuación, presentamos una noción de estabilidad ligeramente diferente. Comenzamos con un par de definiciones,

Definición A.6. Se define la *órbita positiva* que pasa por el punto x_0 como

$$O^+(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x}(t), t \geq t_0, \bar{x}(t_0) = x_0\}$$

Definición A.7. Se define la *órbita negativa* que pasa por el punto x_0 como

$$O^-(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x}(t), t \leq t_0, \bar{x}(t_0) = x_0\}$$

Ahora, introducimos la noción de distancia de un punto a un conjunto,

Definición A.8. La *función distancia* a un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ viene definida

$$d_S(x) = \inf_{y \in S} |y - x|$$

Estamos en condiciones de presentar los siguientes conceptos,

Definición A.9 (Estabilidad orbital). Decimos que $\bar{x}(t)$ es *orbitalmente estable* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con la propiedad de que para toda solución $y(t)$ de (A.1) verificando $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$, se tiene

$$d(y(t), O^+(x_0, t_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$$

Definición A.10 (Estabilidad orbital asintótica). Decimos que $\bar{x}(t)$ es *asintóticamente orbitalmente estable* si es orbitalmente estable y para toda solución $y(t)$ de (A.1), existe una constante positiva b de manera que, si $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(y(t), O^+(x_0, t_0)) = 0$$

Las definiciones anteriores describen de manera matemática diferentes tipos de estabilidad, pero es necesario obtener métodos que nos permitan discernir si una solución es estable o no.

A.2.1. Linealización

Para determinar la estabilidad de una solución $\bar{x}(t)$ del sistema (A.1) es necesario conocer la naturaleza de las soluciones “cercanas” a $\bar{x}(t)$. La hipótesis general de partida, $f \in \mathbf{C}^r$, para $r \geq 1$, nos garantiza que las funciones f_i son diferenciables en cada punto de Ω . Sea

$$x = \bar{x}(t) + y$$

una solución próxima a $\bar{x}(t)$. Utilizando un desarrollo de Taylor de f centrado en $\bar{x}(t)$, tenemos

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2)$$

Esta ecuación describe la evolución de las soluciones cercanas a $\bar{x}(t)$. Estamos interesados en las soluciones arbitrariamente cercanas a $\bar{x}(t)$, por este motivo, es natural estudiar el sistema lineal asociado

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y \tag{A.4}$$

Definición A.11. Sea $\bar{x}(t)$ una solución del sistema (A.1). El sistema lineal autónomo

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y, \quad Df(\bar{x}(t)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}(t)) \right)$$

se denomina *linealización* o *primera aproximación* de (A.1) en $\bar{x}(t)$.

Observación A.1.

1 La solución del sistema

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y$$

es $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, por ello, en la nueva variable y , el origen y sus propiedades de estabilidad son, naturalmente, las mismas que las de la solución $\bar{x}(t)$ de (A.1).

2 Si $\bar{x}(t)$ es un punto de equilibrio, entonces $Df(\bar{x}(t)) = Df(\bar{x})$ es una matriz constante, y la solución de (A.21) que pasa por el punto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ viene dada por

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t}y_0$$

En la práctica, utilizaremos el método de la primera aproximación para soluciones de equilibrio. Debido a la observación anterior, se exponen los siguientes resultados acerca de la estabilidad del origen como punto de equilibrio de un sistema autónomo lineal.

Teorema A.7. *El origen es un punto de equilibrio estable de $\dot{x} = Ax$ si y solo si $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ para todo autovalor λ de A y la dimensión de $V_\lambda = A - \lambda I$ coincide con la multiplicada algebraica α_λ para todo autovalor λ de A con parte real nula.*

Teorema A.8. *El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de $\dot{x} = Ax$ si y solo si $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor λ de A .*

Volviendo al sistema (A.1), se recogen los teoremas siguientes que nos permitirán determinar la estabilidad de una solución de equilibrio.

Teorema A.9. *Sea \bar{x} una solución de equilibrio de (A.1). Si todos los autovalores de la matriz $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa, entonces $\bar{x}(t)$ es asintóticamente estable.*

Teorema A.10. *Sea \bar{x} una solución de equilibrio de (A.1). Si algún autovalor de la matriz $Df(\bar{x})$ tienen parte real positiva, entonces $\bar{x}(t)$ es inestable.*

Observación A.2. Cabe destacar que la estabilidad del origen en (A.4) no se transfiere a la solución de equilibrio \bar{x} de (A.1), es decir, si alguno de los autovalores de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula, el método de la primera aproximación no decide.

La observación anterior motiva la siguiente definición.

Definición A.12. Sea $x = \bar{x}$ un punto fijo de (A.1), $x \in \mathbb{R}^n$. Se dice que \bar{x} es un *punto fijo hiperbólico* si ninguno de los autovalores de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula.

Para estudiar las propiedades de estabilidad de una solución de equilibrio, necesitamos conocer la naturaleza de los autovalores de su matriz jacobiana. Dichos autovalores son las raíces del polinomio característico, por este motivo, presentamos los siguientes resultados acerca de las raíces de un polinomio cualquiera

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

Teorema A.11 (Regla de los signos de Descartes). *Consideramos la secuencia de coeficientes de (A.5)*

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$$

Sea k el número total de cambios de signo de un coeficiente al siguiente en dicha secuencia. Entonces el número de raíces reales positivas del polinomio es igual a k , o bien k menos un número entero positivo.

El último resultado requiere de la siguiente definición previa

Definición A.13. Se denomina *tabla de Routh* asociada al polinomio (A.5) a

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & r_{3,4} & \cdots & \\ r_{4,1} & r_{4,2} & r_{4,3} & r_{4,4} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ r_{n+1,1} & r_{n+1,2} & r_{n+1,3} & r_{n+1,4} & \cdots & \end{array}$$

donde

$$(r_{i,1} \ r_{i,2} \ \cdots) \equiv (r_{i-2,2} \ r_{i-2,3} \ \cdots) - \frac{r_{i-2,1}}{r_{i-1,1}} (r_{i-1,2} \ r_{i-1,3} \ \cdots) \quad (i > 2)$$

Teorema A.12 (Test de Routh-Hurwitz). *Todas las raíces del polinomio (A.5) tienen parte real estrictamente menor que cero si y solo si todos los $n+1$ elementos de la primera columna de la tabla de Routh son distintos de cero y tienen el mismo signo.*

A.3. Funciones de Liapunov

El método de Liapunov se utiliza para determinar la estabilidad de puntos fijos cuando el método de la primera aproximación no nos permite obtener información relevante. La teoría de Liapunov se caracteriza por su gran extensión, por esta razón, en este apartado nos limitaremos a introducir rigurosamente el concepto de función de Liapunov y los teoremas que nos permiten conocer la naturaleza de un punto fijo a partir de dicha función.

En cuanto a la idea intuitiva de este método, supongamos que tenemos un sistema autónomo no lineal con un punto fijo \bar{x} y queremos determinar su estabilidad. Utilizando los conceptos relacionados con la definición de estabilidad expuestos en la sección anterior, podemos garantizar que es suficiente con encontrar un entorno $U^{\bar{x}}$ de \bar{x} con la propiedad de que las órbitas que comienzan en dicho entorno permanecen en $U^{\bar{x}}$ para todo instante positivo (no distinguimos entre estabilidad y estabilidad asintótica). Para ello, tendríamos que probar que el campo vectorial es, o bien tangente al contorno de $U^{\bar{x}}$ de \bar{x} , o bien

apunta hacia el interior de dicho entorno. Esta situación debería satisfacerse a medida que reducimos el entorno $U^{\bar{x}}$ hacia \bar{x} .

En términos generales, podemos decir que una función de Liapunov es una función de estado $V(x_1, \dots, x_n)$ que evoluciona monótonamente con el tiempo. Además, diremos que $V \equiv V(x)$ es una función de Liapunov para el sistema (A.1) cuando es decreciente a lo largo de sus soluciones.

Consideremos el sistema autónomo no lineal (A.1) y denotemos por $\phi(t, x)$ el flujo generado por dicho sistema. Además, supongamos que $\phi(t_0, x_0) = x_0$. Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con continuidad. Emplearemos la siguiente notación,

$$\begin{aligned} \{V < c\} &\equiv \{x \in \Omega : V(x) < c\} \\ \{V \leq c\} &\equiv \{x \in \Omega : V(x) \leq c\} \\ \{V = c\} &\equiv \{x \in \Omega : V(x) = c\} \end{aligned}$$

En particular, denotaremos por V_c al conjunto $\{V < c\}$. La variación de la función V a lo largo de las soluciones $x(t) = \phi(t, x_0)$ viene dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= DV(x(t)) \cdot x'(t) \\ &= DV(x(t)) \cdot f(t) \\ &= D_{x_1}V(x(t)) \cdot f_1(t) + \dots + D_{x_n}V(x(t)) \cdot f_n(t) \end{aligned}$$

de manera que el signo de la expresión anterior nos dirá si V crece o decrece a lo largo de las soluciones. Cabe destacar que esta expresión se puede calcular para el instante $t = 0$ sin conocer las soluciones del sistema (A.1), pues $x(0) = x_0$ y tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt}V(x(t, x_0)) \right|_{t=0} = DV(x_0) \cdot f(x_0)$$

La expresión anterior recibe el nombre de *derivada de V a lo largo de las soluciones de (A.1)* y se denota por

$$\dot{V}(x) = DV(x) f(x)$$

Una vez establecidos los conceptos anterior, presentamos la definición de función de Liapunov,

Definición A.14. Decimos que V es una *función de Liapunov* del sistema (A.1) en un subconjunto A de \mathbb{R}^n si $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo punto x de A . Análogamente, decimos que V es una *función de Liapunov estricta* del sistema (A.1) si $\dot{V}(x) < 0$ para todo punto x de A .

Observamos que, si V es una función de Liapunov en todo \mathbb{R}^n y $x(t)$ es una solución de (A.1), entonces se cumple que $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$, luego $V(x(t))$ es decreciente a lo largo de dicha solución y, en particular, tenemos que

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)), \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

Luego, podemos concluir que los conjuntos de nivel V_c son positivamente invariantes.

Teorema A.13 (Estabilidad / Estabilidad asintótica de Liapunov). *Consideremos el sistema autónomo no lineal (A.1). Sean \bar{x} un punto fijo de dicho sistema y $V : U^{\bar{x}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 definida en un entorno $U^{\bar{x}}$ de \bar{x} . Entonces,*

- Si V es una función de Liapunov en $U^{\bar{x}} - \{\bar{x}\}$ y se verifican

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \&\& \quad V(x) > 0 \text{ si } x \neq \bar{x}$$

Entonces, \bar{x} es estable.

- Si V es una función de Liapunov estricta en $U^{\bar{x}} - \{\bar{x}\}$ y se verifican

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \&\& \quad V(x) > 0 \text{ si } x \neq \bar{x}$$

Entonces, \bar{x} es asintóticamente estable.

A.4. Variedades invariantes

Comenzamos esta sección, como es natural, introduciendo los conceptos de conjunto y variedad invariante. Las variedades invariantes adquieren un papel fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos. Posteriormente, presentamos una colección de resultados que nos permitirán conocer la naturaleza de las variedades invariantes estables, inestables y centrales de un sistema autónomo no lineal, realizando previamente un análisis de las mismas en sistemas lineales.

Recordemos que hemos estudiado la estabilidad de un punto fijo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de (A.1) basándonos en las propiedades de estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y$$

Dicho sistema puede transformarse en el sistema $\dot{z} = Jz$ realizando un cambio de coordenadas, siendo J la forma canónica de Jordan de la matriz $Df(\bar{x})$. Esto nos permite resolver el sistema de manera sencilla, mediante la exponencial de J .

A continuación, presentamos algunas definiciones,

Definición A.15. Consideremos el sistema (A.1) y sea S un subconjunto de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces

- Decimos que S es *positivamente invariante* si para todo $x_0 \in S$ se verifica que $x(t, 0, x_0) \in S$ para todo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Es decir, si la órbita positiva que pasa por x_0 en el instante cero, $O^+(x_0, 0)$, permanece en S para todo $x_0 \in S$.
- Decimos que S es *negativamente invariante* si para todo $x_0 \in S$ se verifica que $x(t, 0, x_0) \in S$ para todo $t \leq 0, t \in \mathbb{R}$. Es decir, si la órbita negativa que pasa por x_0 en el instante cero, $O^-(x_0, 0)$, permanece en S para todo $x_0 \in S$.
- Decimos que S es *invariante* si es a la vez positiva y negativamente invariante.

Observamos que un conjunto invariante tiene la propiedad de que todas las trayectorias que comienzan en dicho conjunto permanecen en el mismo para todo instante posterior y anterior.

El concepto de variedad requiere de un estudio detallado, en este texto sólo recogemos la parte teórica de dicho concepto que vamos a emplear. Desde un punto de vista general, una *variedad* es un conjunto que localmente tiene estructura de espacio Euclídeo. En la práctica, las variedades son tratadas como superficies m -dimensionales contenidas en \mathbb{R}^n . Si la superficie no tiene puntos singulares, por el teorema de la función implícita, puede ser localmente representada como un grafo. Diremos que una superficie es una *variedad* \mathbf{C}^r si los grafos “locales” que la representan son \mathbf{C}^r .

Ahora, estamos en condiciones de presentar el siguiente concepto,

Definición A.16.

- Decimos que un conjunto invariante $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad* \mathbf{C}^r *invariante* si S tiene estructura de variedad \mathbf{C}^r diferenciable.
- Decimos que un conjunto positivamente invariante $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad* \mathbf{C}^r *positivamente invariante* si S tiene estructura de variedad \mathbf{C}^r diferenciable.
- Decimos que un conjunto negativamente invariante $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad* \mathbf{C}^r *negativamente invariante* si S tiene estructura de variedad \mathbf{C}^r diferenciable.

A.4.1. Subespacios estables, inestables y centrales de un sistema autónomo lineal

Nuestro objetivo es estudiar la estructura de las órbitas cercanas a los puntos fijos, de esta manera comprenderemos el papel fundamental que juegan las variedades invariantes.

Sea \bar{x} un punto fijo de (A.1). Consideremos el sistema lineal asociado

$$\dot{y} = Ay$$

donde $A \equiv Df(\bar{x})$ es una matriz constante real de dimensión $n \times n$. La solución del sistema lineal anterior, que pasa por el punto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ en el instante $t = 0$, viene dada por

$$y(t) = e^{At}y_0$$

A continuación, hacemos un breve repaso de álgebra lineal,

Definición A.17. Sea λ un autovalor de la matriz A de multiplicidad n_λ . Se denomina *subespacio generalizado* correspondiente al valor propio λ

$$V_\lambda \equiv \text{Ker} (A - \lambda I)^{n_\lambda}$$

La dimensión de V_λ es la multiplicidad algebraica del valor propio, n_λ .

Definición A.18. Sea λ un autovalor real de la matriz A de multiplicidad n_λ . Decimos $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un *autovector generalizado* de A asociado al valor propio λ si

$$(A - \lambda I)^{n_\lambda} \vec{v} = 0$$

Los autovectores generalizados asociados a un autovalor real son reales.

Definición A.19. Sea λ un autovalor no real de la matriz A de multiplicidad n_λ . Decimos $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ es un *autovector generalizado* de A asociado al valor propio λ si

$$(A - \lambda I)^{n_\lambda} \vec{v} = 0$$

Los autovectores generalizados asociados a un autovalor no real son no reales.

Teorema A.14. Si los valores propios de una matriz A de dimensión $n \times n$ de coeficientes reales son distintos, entonces \mathbb{R}^n se descompone en suma directa de subespacios uno y dos-dimensionales. Cada uno de estos subespacios es invariante bajo el flujo que define el sistema lineal $\dot{y} = Ay$.

Además, si A tiene algún valor propio con multiplicidad estrictamente mayor que 1, el subespacio generalizado asociado a dicho valor propio también será invariante respecto al flujo del sistema anterior, con dimensión igual a su multiplicidad.

Utilizaremos la siguiente notación,

- $u_i, 1 \leq i \leq n_u$ denotarán los autovectores generalizados de A asociados a los valores propios con parte real positiva.
- $s_j, 1 \leq j \leq n_s$ denotarán los autovectores generalizados de A asociados a los valores propios con parte real negativa.
- $c_k, 1 \leq k \leq n_c$ denotarán los autovectores generalizados de A asociados a los valores propios con parte real cero.

Claramente, $n_c + n_s + n_u = n$. En este momento, estamos en condiciones de exponer los siguientes conceptos y sus propiedades,

Definición A.20.

1. El espacio invariante generado por los autovectores generalizados u_i se denomina *espacio inestable del punto estacionario $y = 0$* , denotado como E^u .
2. El espacio invariante generado por los autovectores generalizados s_j se denomina *espacio estable del punto estacionario $y = 0$* , denotado como E^s .
3. El espacio invariante generado por los autovectores generalizados c_k se denomina *espacio central del punto estacionario $y = 0$* , denotado como E^c .

Observemos que estos subespacios (o variedades) son invariantes, en el sentido de que las soluciones de $\dot{y} = Ay$ con condiciones iniciales contenidas estrictamente en E^c, E^u o E^s deben permanecer en el subespacio correspondiente para todo instante.

Corolario A.3. Se verifica que

$$\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^u \oplus E^s$$

Estamos interesados en el comportamiento asintótico de las soluciones de $\dot{y} = Ay$ que comienzan en un punto cualquiera de los tres subespacios anteriores. Por este motivo, se presenta el siguiente resultado

Teorema A.15.

- Para cualquier $y_0 \in E^s$, se verifica que la solución $y(t) = e^{At}y_0$ de $\dot{y} = Ay$ tiene la propiedad

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

Por ello, E^s recibe el nombre de variedad estable.

- Para cualquier $y_0 \in E^u$, se verifica que la solución $y(t) = e^{At}y_0$ de $\dot{y} = Ay$ tiene la propiedad

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$$

Por ello, E^u recibe el nombre de variedad inestable.

En otras palabras, las soluciones que comienzan en E^s se aproximan asintóticamente a $y = 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, y las soluciones que empiezan en E^u se aproximan asintóticamente a $y = 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

A.4.2. Variedades estables, inestables y centrales de puntos fijos de un sistema autónomo no lineal

El apartado anterior nos proporciona las herramientas necesarias para poder abordar el siguiente estudio. Sea \bar{x} un punto fijo del sistema (A.1), consideremos el sistema lineal asociado

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

donde $A \equiv Df(\bar{x})$. Las variedades estables, inestables y centrales nos permitirán conocer la naturaleza de las soluciones “cercanas” a \bar{x} .

En primer lugar, transformamos el punto fijo $x = \bar{x}$ en el origen mediante una traslación $y = x - \bar{x}$. En particular, el sistema (A.1) se convierte en

$$\dot{y} = f(\bar{x} + y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Realizando un desarrollo de Taylor de $f(\bar{x} + y)$ centrado en $x = \bar{x}$, obtenemos

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y + R(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{A.6}$$

siendo $R(y) = \mathcal{O}(|y|^2)$. Utilizando álgebra elemental, podemos encontrar una transformación lineal T que transforma el sistema lineal $\dot{y} = Ay$ en un sistema diagonal

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

donde $T^{-1}y \equiv (u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c$. Naturalmente, $s + c + u = n$.

- A_s es una matriz de dimensión $s \times s$ que tiene los autovalores con parte real negativa.
- A_u es una matriz de dimensión $u \times u$ que tiene los autovalores con parte real positiva.

- A_c es una matriz de dimensión $c \times c$ que tiene los autovalores con parte real cero.

Utilizando esta misma transformación lineal para el sistema no lineal (A.6), obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

siendo $R_s(u, v, w)$, $R_u(u, v, w)$, y $R_c(u, v, w)$ las primeras s , u , y c componentes, respectivamente, del vector $T^{-1}R(y)$.

Desde el apartado anterior, sabemos que el sistema (A.7) tiene una variedad estable invariante s -dimensional, una variedad inestable invariante u -dimensional, y una variedad central invariante c -dimensional, intersecando todas ellas en el origen.

El siguiente teorema tiene especial relevancia, nos garantiza la existencia de variedades estables, inestables y centrales en un entorno de un punto fijo.

Teorema A.16 (Variedades locales estables, inestables y centrales de puntos fijos). *Supongamos que el sistema (A.8) es \mathbf{C}^r , $r \geq 2$. Entonces el punto fijo $(u, v, w) = 0$ de (A.8) posee:*

- Una variedad \mathbf{C}^r s -dimensional local, invariante y estable, denotada por $W_{loc}^s(0)$.
- Una variedad \mathbf{C}^r u -dimensional local, invariante e inestable, denotada por $W_{loc}^u(0)$.
- Una variedad \mathbf{C}^r c -dimensional local, invariante y central, denotada por $W_{loc}^c(0)$.

intersecando todas ellas en $(u, v, w) = 0$. Estas variedades son tangentes a los respectivos subespacios invariantes del sistema lineal (A.7) en el origen, luego son localmente representables como grafos. En particular, tenemos

$$W_{loc}^s(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid v = h_v^s(u), w = h_w^s(u); \\ Dh_v^s(0) = 0, Dh_w^s(0) = 0; |u| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

$$W_{loc}^u(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^u(v), w = h_w^u(v); \\ Dh_u^u(0) = 0, Dh_w^u(0) = 0; |v| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

$$W_{loc}^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^c(w), v = h_v^c(w); \\ Dh_u^c(0) = 0, Dh_v^c(0) = 0; |w| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

donde $h_v^s(u)$, $h_w^s(u)$, $h_u^u(v)$, $h_w^u(v)$, $h_u^c(w)$, $h_v^c(w)$ son funciones \mathbf{C}^r . Además, las trayectorias en W_{loc}^s y W_{loc}^u tienen las mismas propiedades asintóticas que las trayectorias en E^s y E^u , respectivamente. En sentido estricto, trayectorias con condiciones iniciales en $W_{loc}^s(0)$ (respectivamente $W_{loc}^u(0)$) se aproximan asintóticamente al origen cuando $t \rightarrow +\infty$ (respectivamente $t \rightarrow -\infty$).

Cabe destacar el término “local”, en el sentido de que estas variedades sólo están definidas en un entorno del punto fijo como un grafo. Supongamos que dicho punto fijo es hiperbólico, entonces, por el teorema anterior, las trayectorias del sistema no lineal en

un entorno suficientemente pequeño del origen tienen el mismo comportamiento que las trayectorias asociadas al sistema lineal.

A continuación, presentamos las siguientes definiciones con el objetivo de relacionar todos los conceptos expuestos hasta ahora.

Definición A.21. Sea x_0 un punto estacionario hiperbólico de (A.1).

- Decimos que x_0 es un *sumidero* si todo autovalor de $Df(x_0)$ tiene parte real negativa. Luego $W_{loc}^u(x_0) = \emptyset$.
- Decimos que x_0 es una *fuentes* si todo autovalor de $Df(x_0)$ tiene parte real positiva. Luego $W_{loc}^s(x_0) = \emptyset$.
- En otro caso, decimos que x_0 es un *punto de silla*.

Por último, como es natural, mostramos un teorema que nos garantiza la existencia de dichas variedades.

Teorema A.17. *Supongamos que el origen es un punto estacionario hiperbólico de (A.1). Sean E^s y E^u los espacios estable e inestable del sistema lineal asociado $\dot{y} = Df(0)y$. Entonces, existen variedades locales estable e inestable, $W_{loc}^s(0)$ y $W_{loc}^u(0)$, de la misma dimensión que E^s y E^u respectivamente.*

A.5. Variedades centrales

El objetivo de esta sección es profundizar en el estudio de las variedades centrales presentadas en el apartado anterior. Estas variedades desempeñan un papel fundamental para determinar la naturaleza de un punto fijo cuando el método de la primera aproximación no nos permite obtener ningún resultado satisfactorio.

En la teoría de los sistemas dinámicos, existen dos aproximaciones que nos permiten simplificar dichos sistemas: la primera de ellas consiste en reducir la dimensionalidad del sistema, mientras que la segunda sugiere eliminar la no linealidad del mismo.

Existen fundamentalmente dos teorías que nos proporcionarán las técnicas necesarias para llevar a cabo las dos aproximaciones anteriores, la teoría de las variedades centrales y la teoría de las formas normales. Además, constituirán la base para el desarrollo de la teoría de la bifurcación en sistemas no lineales que presentaremos en un apartado posterior.

En esta sección, nos centraremos en la teoría de las variedades centrales. Recordemos que, dado un sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde A es una matriz de dimensión $n \times n$, existen subespacios invariantes E^c , E^s y E^u correspondientes a los espacios generados por los autovectores generalizados que corresponden a los autovalores con parte real cero, negativa y positiva respectivamente.

Sabemos que cuando un punto de equilibrio no es hiperbólico, es decir, posee un autovalor con parte real cero, el método de la primera aproximación no nos permite obtener conclusiones acerca de la estabilidad de dicho punto. La teoría de las variedades centrales nos permite resolver esta cuestión, para ello, en esta sección supondremos que $E^u = \emptyset$. En

otras palabras, consideraremos puntos de equilibrio que no poseen autovalores con parte real positiva.

Esta teoría prueba la existencia de una variedad central invariante que pasa por el punto de equilibrio en cuestión, a la cual se puede restringir el propio sistema con el propósito de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones en un entorno del punto fijo.

A.5.1. Variedades centrales para campos vectoriales

Con las premisas anteriores, el sistema (A.8) adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \quad (\text{A.9})$$

donde A es una matrix de dimensión $c \times c$ teniendo en su diagonal los autovalores con parte real cero, B es una matrix de dimensión $s \times s$ con los autovalores con parte real negativa en su diagonal, f y g son funciones \mathbf{C}^r ($r \geq 2$) con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & Df(0, 0) &= 0 \\ g(0, 0) &= 0, & Dg(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Definición A.22. Una variedad invariante se denomina *variedad central* para el sistema (A.9) si puede ser localmente representada como

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeño.

Observemos que las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ sugieren que $W^c(0)$ es tangente al subespacio central invariante E^c en el punto $(0, 0)$. Con el fin de seguir un orden natural, el primer resultado que presentamos es un teorema de existencia.

Teorema A.18 (Existencia). *Existe una variedad central \mathbf{C}^r para el sistema (A.9). La dinámica del sistema anterior restringida a la variedad central viene dada por la siguiente ecuación c -dimensional*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)) \quad u \in \mathbb{R}^c \quad (\text{A.10})$$

para u suficientemente pequeño.

El siguiente teorema nos va a permitir estudiar la dinámica de las soluciones de (A.9) cercanas al origen a partir de la dinámica de las soluciones del sistema restringido (A.10) próximas a $u = 0$.

Teorema A.19 (Estabilidad).

- I Si la solución cero del sistema restringido (A.10) es estable (asintóticamente estable) (inestable), entonces, la solución cero del sistema completo (A.9) es también estable (asintóticamente estable) (inestable).

II *Supongamos que la solución cero del sistema restringido (A.10) es estable. Si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema completo (A.9) con condiciones iniciales $(x(0), y(0))$ suficientemente cercanas al origen, entonces existe una solución $u(t)$ del sistema (A.10) tal que*

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Siendo γ una constante positiva.

El teorema anterior cobra suma importancia. De manera intuitiva, afirma que para condiciones iniciales del sistema completo (A.9) suficientemente pequeñas, las trayectorias que las atraviesan se aproximan asintóticamente a una trayectoria de la variedad central.

El siguiente objetivo es calcular la variedad central $W^c(0)$. Observemos que dicha variedad es el grafo de la función $h(\cdot)$, por lo que reducimos el problema a obtener esta función. Consideremos la variedad central

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeño. Utilizando la invariancia de esta variedad bajo la dinámica del sistema completo (A.9), obtendremos una ecuación diferencial quasilineal que la función $h(\cdot)$ deberá satisfacer. Seguimos los siguientes pasos:

- Las coordenadas (x, y) de cualquier punto de $W^c(0)$ satisfacen

$$y = h(x)$$

- Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo t , obtenemos que las coordenadas (\dot{x}, \dot{y}) de cualquier punto de $W^c(0)$ verifican

$$\dot{y} = Dh(x) \dot{x}$$

- Cualquier punto de la variedad central está sujeto a la dinámica generada por el sistema completo (A.9). Por este motivo, sustituyendo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x)) \\ \dot{y} &= Bh(x) + g(x, h(x)) \end{aligned}$$

en la ecuación anterior, obtenemos

$$Dh(x) [Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x))$$

Atendiendo a los pasos anteriores, definimos

$$\mathcal{N}(h(x)) \equiv Dh(x) [Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (\text{A.11})$$

La ecuación anterior (A.11) es una ecuación diferencial parcialmente quasilineal que la función $h(x)$ debe satisfacer debido a que su grafo debe ser una variedad central invariante.

Sin embargo, resolver la ecuación (A.11) puede resultar más complejo que nuestro problema de partida. Por esta razón, el siguiente teorema nos proporciona un método para computar una solución aproximada de la misma para cualquier grado de exactitud que sea requerido.

Teorema A.20 (Aproximación). Sea $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$ una función \mathbf{C}^r verificando que $h(0) = Dh(0) = 0$ tal que

$$\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$$

cuando $x \rightarrow 0$, para algún q estrictamente mayor que 1. Entonces,

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q)$$

cuando $x \rightarrow 0$.

Gracias a este teorema, para calcular la función $h(x)$ consideraremos desarrollos de Taylor con coeficientes arbitrarios alrededor del origen del grado de exactitud que deseemos. Sustituyendo el desarrollo anterior en (A.11) obtendremos los coeficientes del desarrollo de Taylor buscados.

A.5.2. Variedades centrales dependientes de parámetros

En este apartado estudiaremos la técnica a proceder cuando el campo vectorial es dependiente de parámetros. Del mismo modo que en lo desarrollado previamente, supondremos $E^u = \emptyset$ y escribiremos el sistema (A.9) indicando explícitamente la dependencia respecto a los parámetros de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, & Df(0, 0, 0) &= 0 \\ g(0, 0, 0) &= 0, & Dg(0, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

siendo f y g funciones \mathbf{C}^r en un entorno de $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$. Las matrices A y B vienen definidas como en el sistema (A.9) y asumiremos que no dependen del parámetro ε . Más adelante, justificaremos esta decisión.

La técnica para trabajar con sistemas parametrizados consiste en considerar el parámetro ε como una nueva variable independiente, es decir, escribimos el sistema (A.12) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s \quad (\text{A.13})$$

Naturalmente, el sistema (A.13) posee un punto fijo en $(x, \varepsilon, y) = (0, 0, 0)$. Utilizando el método de la primera aproximación, la matriz correspondiente al sistema linealizado de (A.13) tiene $c + p$ autovalores con parte real cero y s con parte real negativa. Estamos en condiciones de aplicar la teoría de las variedades centrales descrita anteriormente.

Modificando la definición de variedad central, afirmamos que puede ser representada como un grafo sobre las variables x y ε , es decir, como el grafo de la función $h(x, \varepsilon)$ para (x, ε) suficientemente pequeños. Aplicando el teorema de existencia de variedades centrales, el sistema restringido viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + f(u, h(u, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^p \quad (\text{A.14})$$

Procediendo de esta forma, respecto a la matriz A del sistema completo (A.9) estamos añadiendo p nuevas direcciones centrales que no tienen dinámica. Por esta razón, la teoría descrita anteriormente resulta tremendamente útil.

Del mismo modo que en el apartado anterior, nuestro objetivo es computar la variedad central. En otras palabras, obtener la función $h(x, \varepsilon)$. Gracias al teorema de existencia, tenemos

$$W^c(0) = \{(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s : y = h(x, \varepsilon), |x| < \delta, |x| < \bar{\delta}, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

para δ y $\bar{\delta}$ suficientemente pequeños. Utilizando la invariancia del grafo de $h(x, \varepsilon)$ bajo la dinámica del sistema parametrizado (A.13) tenemos

$$\dot{y} = D_x h(x, \varepsilon) \dot{x} + D_\varepsilon h(x, \varepsilon) \dot{\varepsilon} = Bh(x, \varepsilon) + g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon)$$

Sustituyendo el sistema restringido (A.14) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\mathcal{N}(h(x, \varepsilon)) \equiv D_x h(x, \varepsilon) [Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon)] - Bh(x, \varepsilon) - g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (\text{A.15})$$

una ecuación diferencial parcialmente quasilineal que la función $h(x, \varepsilon)$ debe satisfacer debido a que su grafo es una variedad central.

Observamos que la ecuación obtenida anteriormente es muy similar a la ecuación (A.11) del apartado previo. Por esta razón, utilizaremos la misma técnica comentada en el desarrollo de dicha ecuación para obtener una solución aproximada de (A.15).

Al considerar ε como una variable independiente, los términos de la forma

$$x_i \varepsilon_j \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq j \leq p$$

$$y_i \varepsilon_j \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq p$$

se convierten en *términos no lineales*. Por este motivo, las partes de las matrices A y B dependientes de ε se consideran términos no lineales y se incluyen en las funciones f y g respectivamente.

A.6. Formas normales

La teoría de las formas normales nos permite simplificar los sistemas dinámicos encontrando un sistema de coordenadas en el cual el sistema adquiere su forma más “simple”. Es un método local en el sentido de que la transformación de coordenadas mencionada anteriormente está definida en un entorno de un punto fijo.

En una primera parte, presentamos el marco teórico que constituye la base de este método. Posteriormente, aplicaremos estos resultados para calcular la forma normal para la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf, que cobrará vital importancia en este trabajo. Cabe mencionar que todavía no hemos introducido el término bifurcación que presentaremos más adelante, pero no es necesario para la comprensión de los resultados obtenidos.

A.6.1. Desarrollo teórico

Consideremos el campo vectorial

$$\dot{w} = G(w), \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad G \in \mathbf{C}^r \ (r \geq 4)$$

siendo $w = w_0$ un punto fijo del mismo. Realizamos una traslación del punto fijo al origen mediante

$$v = w - w_0, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

y obtenemos

$$\dot{v} = G(v + w_0) \equiv H(v)$$

A continuación, separamos la parte lineal de la no lineal mediante $DH(0)$, es decir,

$$\dot{v} = DH(0)v + \bar{H}(v)$$

siendo $\bar{H}(v) = \mathcal{O}(|v|^2)$. Denotamos por T a la matriz que transforma $DH(0)$ en su forma canónica de Jordan real. Entonces, utilizando la transformación

$$v = Tx$$

conseguimos

$$\dot{x} = T^{-1}DH(0)Tx + T^{-1}\bar{H}(Tx)$$

Utilizando la notación,

$$J \equiv T^{-1}DH(0)T$$

$$F(x) \equiv T^{-1}\bar{H}(Tx)$$

escribimos el sistema de partida como

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{A.16}$$

Recordando la idea mencionada en la introducción de este apartado, observamos que la transformación $v = Tx$ permite simplificar la parte lineal del sistema lo máximo posible.

Realizando un desarrollo de Taylor de $F(x)$, reescribimos el sistema (A.16) como

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_{r-1}(x) + \mathcal{O}(|x|^r) \tag{A.17}$$

siendo $F_i(x)$ el término de orden i en dicho desarrollo. Nuestro objetivo es “simplificar” los términos de orden dos de la ecuación anterior. Para ello, introducimos la siguiente transformación de coordenadas

$$x = y + h_2(y)$$

donde $h_2(\cdot)$ es un término de orden 2 en la variable y . Sustituyendo la ecuación anterior,

$$\dot{x} = (\text{id} + Dh_2(y))\dot{y} \tag{A.18}$$

$$= Jy + Jh_2(y) + F_2(y + h_2(y)) + \cdots + F_{r-1}(y + h_2(y)) + \mathcal{O}(|x|^r) \tag{A.19}$$

Podemos escribir cada término de la forma $F_k(y + h_2(y))$ mediante un desarrollo de Taylor como

$$F_k(y) + \mathcal{O}\left(|y|^{k+1}\right) + \cdots + \mathcal{O}\left(|y|^{2k}\right) \quad \text{para } 2 \leq k \leq r-1$$

De esta manera, la igualdad (A.18) se transforma en

$$(\text{id} + Dh_2(y))\dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r) \quad (\text{A.20})$$

donde $\tilde{F}_k(y)$ denota el término de orden $\mathcal{O}\left(|y|^k\right)$ que ha sido modificado como consecuencia de la transformación de coordenadas.

Ahora, para y suficientemente pequeño podemos escribir mediante un desarrollo de Taylor

$$(\text{id} + Dh_2(y))^{-1} = \text{id} - Dh_2(y) + \mathcal{O}(|y|^2)$$

de manera que sustituyendo en (A.20) obtenemos

$$\dot{y} = Jy + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r) \quad (\text{A.21})$$

Cabe destacar que la elección de $h_2(y)$ ha sido totalmente arbitraria. Por esta razón, elegiremos $h_2(y)$ de tal manera que los términos de $\mathcal{O}(|y|^2)$ sean lo más simple posible. En el mejor de los casos, si existe $h_2(y)$ tal que

$$Dh_2(y)Jy - Jh_2(y) = F_2(y) \quad (\text{A.22})$$

eliminaríamos $F_2(y)$ de la ecuación (A.21), es decir, los términos de orden 2.

Naturalmente, nuestro problema se reduce a resolver la ecuación (A.22) que será lineal en algún espacio vectorial. Por este motivo, estructuramos la resolución de esta ecuación en los siguientes tres puntos,

- En primer lugar, introducimos el *espacio vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado k* , denotado por H_k . Sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ una base de \mathbb{R}^n y denotamos por (y_1, \dots, y_n) las coordenadas de un punto $y \in \mathbb{R}^n$. Consideramos como coeficientes de cada uno de los elementos de la base a los polinomios homogéneos de grado k , es decir,

$$(y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}) s_i, \quad \sum_{j=1}^n m_j = k, \quad m_j \in \mathbb{Z}^+$$

Estos objetos son vectores cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado k . El espacio vectorial lineal constituido por el conjunto de todos estos objetos se denota por H_k . Obviamente, una base de este espacio estará formada por los vectores resultantes de multiplicar todos los posibles polinomios homogéneos de grado k por cada elemento de la base s_i .

- Podemos considerar a $h_2(y)$ como un elemento de H_2 . De esta manera, la aplicación

$$h_2(y) \longmapsto Dh_2(y)Jy - Jh_2(y)$$

es lineal de H_2 en H_2 . Análogamente, podríamos definir la aplicación anterior para cualquier elemento $h_k(y) \in H_k$

$$h_k(y) \longmapsto Dh_k(y) Jy - Jh_k(y)$$

Esta aplicación es especialmente utilizada en el álgebra de Lie, por esta razón es denotada por

$$L_J^{(k)}(h_k(y)) \equiv -(Dh_k(y) Jy - Jh_k(y))$$

Un *Álgebra de Lie* es una estructura algebraica definida sobre un espacio vectorial, asociada habitualmente a los grupos de Lie y ampliamente utilizadas en el estudio de dichos grupos y de otras variedades diferenciables. En honor al matemático noruego Sophus Lie, dada una aplicación lineal L , se define el *corchete de Lie*

$$\begin{aligned} [\cdot, L] : H_k &\rightarrow H_k \\ Y &\mapsto (DL)Y - (DY)L \end{aligned}$$

siendo Y un campo vectorial. Claramente, el corchete de Lie es un operador bilineal y, en nuestro caso $L = Jy$.

- Una vez presentados los conceptos anteriores, abordamos la resolución de la ecuación (A.22). Como $F_2(y)$ es un término de grado dos en la variable y , podemos considerarlo como un elemento de H_2 . Basándonos en el álgebra lineal, es conocido que H_2 se puede representar como

$$H_2 = L_J^{(2)}(H_2) \oplus G_2$$

siendo G_2 el espacio complementario a $L_J^{(2)}(H_2)$. Esto justifica que resolver la ecuación (A.22) es equivalente a resolver una ecuación de la forma $Ax = b$ en álgebra lineal.

Si $F_2(y)$ está en $L_J^{(2)}(H_2)$, podemos encontrar $h_2(y)$ de forma que todos los términos $\mathcal{O}(|y|^2)$ son eliminados de la ecuación (A.21). En cualquier caso, elegiremos $h_2(y)$ de tal manera que todos los términos $\mathcal{O}(|y|^2)$ de la ecuación (A.21) pertenezcan a G_2 . Denotaremos estos términos por

$$F_2^r(y) \in G_2$$

donde el superíndice r hace referencia al término *resonancia*. Siguiendo los pasos anteriores, eligiendo adecuadamente $h_2(y)$, la ecuación (A.21) puede ser escrita como

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + \tilde{F}_3(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r)$$

La ecuación anterior esclarece lo que se comentaba al principio de esta sección de “simplificar” los términos de orden dos. Introduciendo el cambio de coordenadas $x = y + h_2(y)$ eligiendo $h_2(y)$ cuidadosamente, en el nuevo sistema de coordenadas todos los términos $\mathcal{O}(|y|^2)$ que aparecen en la ecuación se encuentran en el espacio complementario a $L_J^{(2)}(H_2)$. Si $L_J^{(2)}(H_2) = H_2$, entonces todos los términos de orden dos pueden ser eliminados.

Para simplificar los términos $\mathcal{O}(|y|^3)$ procedemos de manera análoga. Introducimos el cambio de coordenadas

$$x = y + h_3(y)$$

siendo $h_3(y)$ un término de orden tres en la variable y . Realizando cálculos similares que en el caso de orden dos, tenemos

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + Jh_3(y) - Dh_3(y)Jy + \tilde{F}_3(y) + \tilde{F}_4(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r) \quad (\text{A.23})$$

Empleamos la notación $\tilde{F}_k(y)$ para $4 \leq k \leq r-1$ con el objetivo de enfatizar que dicha transformación de coordenadas modifica los términos de orden superior a tres. Del mismo modo que antes, tenemos

$$Dh_3(y)Jy - Jh_3(y) = \tilde{F}_3(y)$$

Realizando los mismos pasos que en el caso de orden dos y empleando el operador corchete de Lie, escribimos

$$H_3 = L_J^{(3)}(H_3) \oplus G_3$$

siendo G_2 el espacio complementario a $L_J^{(3)}(H_3)$. Ahora, los términos de orden tres se pueden simplificar y los denotamos por

$$F_3^r(y) \in G_3$$

De manera similar, escribimos la ecuación (A.21) como

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + Jy + F_3^r(y) + \tilde{F}_4(y) + \cdots + \tilde{F}_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r)$$

Si $L_J^{(3)}(H_3) = H_3$, entonces todos los términos de orden tres pueden ser eliminados.

Observamos que, en función de los términos que deseemos simplificar, el desarrollo teórico anterior muestra que este proceso puede convertirse en un proceso iterativo. El siguiente teorema prueba que esto realmente sucede así.

Teorema A.21 (Forma Normal). *Utilizando una secuencia de coordenadas analíticas, la ecuación (A.17) puede transformarse en*

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + Jy + F_3^r(y) + \cdots + F_{r-1}^r(y) + \mathcal{O}(|y|^r) \quad (\text{A.24})$$

donde $F_k^r(y) \in G_k$ para $2 \leq k \leq r-1$ y G_k denota el espacio complementario a $L_J^{(k)}(H_k)$. En este caso, decimos que la ecuación (A.24) está en forma normal de orden $r-1$.

A.6.2. Forma normal para la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

En esta sección extenderemos las técnicas expuestas anteriormente para sistemas con campos vectoriales dependientes de parámetros aplicando las mismas a la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf.

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \mu \in \mathbb{R}^p \quad (\text{A.25})$$

siendo f de \mathbf{C}^r en cada variable. Supongamos que (A.25) posee un punto fijo en $(x, \mu) = (0, 0)$, es decir,

$$f(x, \mu) = 0$$

Nuestro propósito es transformar el sistema (A.25) en forma normal localmente en el punto fijo. A diferencia del caso desarrollado anteriormente, los coeficientes de la transformación de coordenadas dependerán de parámetros.

La bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf se produce cuando $Df(0, 0)$ posee dos autovalores imaginarios puros $\lambda(0) = \pm iw$. Supongamos $x \in \mathbb{R}^2$, entonces existe una transformación lineal que convierte $D_x f(0, \mu)$ en una matriz con la siguiente forma

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} \Re \lambda(\mu) & -\Im \lambda(\mu) \\ \Im \lambda(\mu) & \Re \lambda(\mu) \end{pmatrix}$$

para μ suficientemente pequeño. Por el teorema de la función implícita, el punto fijo varía de manera \mathbf{C}^r diferenciable con μ . Por esta razón, asumiremos que $x = 0$ es un punto fijo para μ suficientemente pequeño. Utilizando que

$$\begin{aligned} \Re \lambda(\mu) &= |\lambda(\mu)| \cos(2\pi\theta(\mu)) \\ \Im \lambda(\mu) &= |\lambda(\mu)| \sin(2\pi\theta(\mu)) \end{aligned}$$

podemos escribir

$$D_x f(0, \mu) = |\lambda(\mu)| \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta(\mu) & -\sin 2\pi\theta(\mu) \\ \sin 2\pi\theta(\mu) & \cos 2\pi\theta(\mu) \end{pmatrix}$$

Buscamos escribir en forma normal la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = |\lambda(\mu)| \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta(\mu) & -\sin 2\pi\theta(\mu) \\ \sin 2\pi\theta(\mu) & \cos 2\pi\theta(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(x, y; \mu) \\ f^2(x, y; \mu) \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

donde las funciones f^i son no lineales en x e y .

En adelante, omitiremos la dependencia explícita respecto al parámetro μ con el objetivo de simplificar la notación. Cuando se trabaja con autovalores complejos es habitual utilizar coordenadas complejas, es decir,

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Realizando las cuentas pertinentes, transformamos el sistema (A.26) en

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^1(z, \bar{z}; \mu) \\ F^2(z, \bar{z}; \mu) \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

siendo

$$\begin{aligned} F^1(z, \bar{z}; \mu) &= f^1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) + i f^2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) \\ F^2(z, \bar{z}; \mu) &= f^1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) - i f^2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) \end{aligned}$$

Nos centraremos en el estudio de

$$\dot{z} = |\lambda| e^{2\pi i \theta} z + F^1(z, \bar{z}; \mu)$$

ya que la segunda componente es el conjugado complejo de la primera. De manera análoga que en el caso sin parámetros, realizamos un desarrollo de Taylor de $F^1(z, \bar{z}; \mu)$ obteniendo

$$\dot{z} = |\lambda| e^{2\pi i \theta} z + F_2 + F_3 + \cdots + F_{r-1} + \mathcal{O}(|z|^r, |\bar{z}|^r) \quad (\text{A.28})$$

donde F_j es un polinomio homogéneo en z y \bar{z} de orden j cuyos coeficientes dependen de μ .

Simplificación de los términos de orden dos

Consideremos la transformación de coordenadas

$$z \longmapsto z + h_2(z, \bar{z})$$

donde $h_2(z, \bar{z})$ es un polinomio homogéneo de orden dos en z y \bar{z} con coeficientes dependientes del parámetro μ . Por simplicidad, omitiremos la dependencia explícita respecto a este parámetro.

Utilizando la transformación anterior, reescribimos la ecuación (A.28) como

$$\dot{z} \left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} = \lambda z + \lambda h_2 + F_2(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(3) \quad (\text{A.29})$$

Despejando tenemos

$$\dot{z} = \left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right)^{-1} \left[\lambda z + \lambda h_2 + F_2(z, \bar{z}) - \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} + \mathcal{O}(3) \right]$$

Utilizando la segunda componente de la ecuación (A.27)

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\lambda} \bar{z} + \overline{F_2}(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(3)$$

y, para z y \bar{z} suficientemente pequeños, el desarrollo de Taylor de

$$\left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right)^{-1} = 1 - \frac{\partial h_2}{\partial z} + \mathcal{O}(2)$$

escribimos la ecuación (A.29) como

$$\dot{z} = \lambda z - \lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z - \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \lambda h_2 + F_2 + \mathcal{O}(3)$$

Para poder eliminar los términos de orden dos se tiene que verificar

$$-\lambda h_2 + \left(\lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) = F_2 \quad (\text{A.30})$$

De igual manera que en el desarrollo para el caso sin parámetros, denotamos por H_2 el espacio de los polinomios homogéneos de grado dos en z y \bar{z} . Es claro que F_2 puede ser visto como un elemento de H_2 . Por esta razón, consideremos la siguiente aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 : H_2 &\rightarrow H_2 \\ h_2 &\mapsto \lambda h_2 - \left(\lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) \end{aligned}$$

De esta manera, resolver la ecuación (A.30) se ha convertido en un problema de álgebra lineal. Consideremos una base de H_2 , es decir,

$$H_2 = \text{span} \{z^2, z\bar{z}, \bar{z}^2\}$$

Ahora, calculamos la imagen de la aplicación \mathcal{L}_2 de cada uno de los elementos de la base anterior

$$\begin{aligned} \lambda z^2 - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} z^2 \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \right) \bar{z} \right] &= -\lambda z^2 \\ \lambda z\bar{z} - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} z\bar{z} \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z\bar{z} \right) \bar{z} \right] &= -\bar{\lambda} z\bar{z} \\ \lambda \bar{z}^2 - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{z}^2 \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 \right) \bar{z} \right] &= (\lambda - 2\bar{\lambda}) \bar{z}^2 \end{aligned}$$

Una vez realizados los cálculos anteriores, la representación matricial de la aplicación \mathcal{L}_2 viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\lambda(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda(\mu) - 2\bar{\lambda}(\mu)) \end{pmatrix}$$

Para $\mu = 0$, como la matriz $Df(0,0)$ tiene dos autovalores imaginarios puros $\lambda(0) = \pm iw$, es claro que $\lambda(0) \neq 0$ y $\lambda(0) = -\bar{\lambda}(0)$. Luego, para μ suficientemente pequeño tenemos

$$\lambda(\mu) \neq 0 \quad \&\& \quad (\lambda(\mu) - 2\bar{\lambda}(\mu)) \neq 0$$

Por este motivo, la dimensión de la matriz de la aplicación \mathcal{L}_2 es 3, y por tanto, la dimensión de la imagen de esta aplicación es 3. Concluimos,

$$\mathcal{L}_2(H_2) = H_2$$

Luego, todos los términos de orden dos pueden ser eliminados.

Simplificación de los términos de orden tres

En el apartado anterior hemos visto que todos los términos de orden dos pueden ser eliminados. Por tanto, tenemos

$$\dot{z} = \lambda z + F_3 + \mathcal{O}(4)$$

Ahora, consideremos la transformación de coordenadas

$$z \mapsto z + h_3(z, \bar{z})$$

donde $h_3(z, \bar{z})$ es un polinomio homogéneo de orden tres en z y \bar{z} con coeficientes dependientes del parámetro μ . Realizando cálculos similares que en el caso de orden dos, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left(1 + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right)^{-1} \left[\lambda z + \lambda h_3 + F_3(z, \bar{z}) - \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} + \mathcal{O}(4) \right] \\ &= \lambda z - \lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z - \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \lambda h_3 + F_3 + \mathcal{O}(4) \end{aligned}$$

Para poder eliminar los términos de orden tres, nuestro objetivo es resolver la ecuación

$$-\lambda h_3 + \left(\lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) = F_3$$

Del mismo modo que en el caso anterior, consideramos el espacio de los polinomios homogéneos de grado tres en z y \bar{z} , denotado por H_3 . Observamos que F_3 puede ser visto como un elemento de H_3 . Para resolver la ecuación anterior, consideramos la siguiente aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 : H_3 &\rightarrow H_3 \\ h_3 &\mapsto \lambda h_3 - \left(\lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) \end{aligned}$$

Gracias a la teoría de álgebra lineal, sabemos que podemos escribir

$$H_3 = \mathcal{L}_3(H_3) \oplus G_3$$

siendo G_3 el espacio complementario a $\mathcal{L}_3(H_3)$. Es conocido que

$$H_3 = \text{span} \{z^3, z^2\bar{z}, z\bar{z}^2, \bar{z}^3\}$$

Por ello, con el objetivo de estudiar el subespacio $\mathcal{L}_3(H_3)$, calculamos la imagen de cada uno de los vectores de la base de H_3 por la aplicación \mathcal{L}_3 :

$$\begin{aligned} \lambda z^3 - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} z^3 \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^3 \right) \bar{z} \right] &= -2\lambda z^3 \\ \lambda z^2\bar{z} - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} z^2\bar{z} \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2\bar{z} \right) \bar{z} \right] &= -(\lambda + \bar{\lambda}) z^2\bar{z} \\ \lambda z\bar{z}^2 - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} z\bar{z}^2 \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z\bar{z}^2 \right) \bar{z} \right] &= -2\bar{\lambda} z\bar{z}^2 \\ \lambda \bar{z}^3 - \left[\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{z}^3 \right) z + \bar{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^3 \right) \bar{z} \right] &= (\lambda - 3\bar{\lambda}) \bar{z}^3 \end{aligned}$$

Una vez realizados los cálculos anteriores, obtenemos la matriz asociada a la aplicación lineal \mathcal{L}_3

$$\begin{pmatrix} -2\lambda(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda(\mu) + \bar{\lambda}(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\bar{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\mu) - 3\bar{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}$$

Observamos que, para $\mu = 0$ se verifica

$$\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = 0$$

pero, el resto de columnas de la matriz de \mathcal{L}_3 son siempre no nulas para μ suficientemente pequeño. Por esta razón, la matriz anterior tiene dimensión siempre tres para μ suficientemente pequeño. Sabemos que H_3 tiene dimensión cuatro, luego todos los términos de orden tres que se encuentren en $\mathcal{L}_3(H_3)$ podrán ser eliminados. En otras palabras, en la forma normal solo permanecerán los términos de orden tres de la forma $z^2\bar{z}$ y escribiremos

$$\dot{z} = \lambda z + c(\mu) z^2\bar{z} + \mathcal{O}(4)$$

siendo $c(\mu)$ una constante dependiente del parámetro μ .

Simplificación de los términos de orden cuatro

Para llevar a cabo esta simplificación, realizamos la siguiente observación que nos permitirá extrapolar el resultado para todos los términos de orden par. Tanto en los desarrollos de orden dos como de orden tres, la eliminación de los términos de dicho orden estaba condicionada a que la ecuación

$$\lambda h - \left(\lambda \frac{\partial h}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) = 0 \tag{A.31}$$

para algún $h = z^n \bar{z}^m$, donde $n + m$ es el orden del término que buscamos simplificar. Sustituyendo el valor de h en la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda z^n \bar{z}^m - (n\lambda z^n \bar{z}^m + m\bar{\lambda} z^n \bar{z}^m) &= 0 \\ (\lambda - n\lambda - m\bar{\lambda}) z^n \bar{z}^m &= 0 \end{aligned}$$

En $\mu = 0$, se verifica que $\lambda = -\bar{\lambda}$, luego la ecuación (A.31) se anula si se cumple que

$$1 + m - n = 0$$

Es claro que la igualdad anterior no se verifica nunca si m y n son números pares. Concluimos que todos los términos de orden par pueden ser eliminados. En particular, en el caso de orden cuatro tenemos

$$\dot{z} = \lambda z + c(\mu) z^2\bar{z} + \mathcal{O}(5)$$

Suponiendo que $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu)$ y $c(\mu) = a(\mu) + ib(\mu)$, escribimos la ecuación anterior en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - wy + (ax - by)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5) \\ \dot{y} &= wx + \alpha y + (bx + ay)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5) \end{aligned}$$

y en coordenadas polares

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r + ar^3 + \dots \\ \dot{y} &= w + br^2 + \dots \end{aligned}$$

A.7. Bifurcación de puntos fijos

En este apartado presentamos un breve introducción a la bifurcación de puntos de equilibrio de un campo de vectores parametrizado. El propósito de la teoría de bifurcación es estudiar la naturaleza de un punto fijo en un campo vectorial dependiente de parámetros, es decir, su estabilidad o inestabilidad y, además, analizar cómo afecta a dicha estabilidad o inestabilidad la variación de los parámetros.

En el estudio que llevaremos a cabo, centraremos nuestra atención en la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf. Por este motivo, exponemos detalladamente este tipo de bifurcación en esta sección. Como motivación, exponemos brevemente los resultados de la bifurcación que se produce cuando la linealización del sistema posee un único autovalor cero, siendo el resto con parte real no nula.

En primer lugar, consideramos el campo de vectores parametrizado

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p \quad (\text{A.32})$$

donde g es una función \mathbf{C}^r en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Suponemos que el sistema anterior posee un punto fijo en $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$, es decir,

$$g(y_0, \lambda_0) = 0$$

Sabemos que los puntos fijos pueden ser hiperbólicos si no tienen autovalores con parte real cero o no hiperbólicos en caso contrario. En primer lugar, vemos como la estabilidad o inestabilidad de un punto fijo hiperbólico en función de la variación del parámetro λ no presenta excesiva dificultad.

Consideremos que el punto fijo (y_0, λ_0) es hiperbólico, es decir, la matriz

$$D_y g(y_0, \lambda_0)$$

no tiene autovalores en el eje imaginario. Por tanto, dicha matriz es invertible. Utilizando el teorema de la función implícita, afirmamos que existe una única función \mathbf{C}^r , denotada por $y(\lambda)$ con la propiedad

$$g(y(\lambda), \lambda) = 0 \quad \&\& \quad y(\lambda_0) = y_0$$

para λ suficientemente cerca de λ_0 . Gracias al teorema (A.3), por la continuidad de los autovalores con respecto a los parámetros, tenemos que

$$D_y g(y(\lambda), \lambda)$$

no tiene autovalores con parte real cero para λ suficientemente cerca de λ_0 . Por consiguiente, el punto fijo hiperbólico de (A.32) persiste y su estabilidad permanece inalterada. En otras palabras, en un entorno de un punto fijo de (A.32) se mantiene el mismo tipo

de estabilidad. Por esta razón, decimos que los puntos fijos hiperbólicos son *estructuralmente estables* en el sentido de que una variación leve de λ no afecta a la naturaleza de la estabilidad de dicho punto.

Debido al resultado anterior, es claro que el foco de estudio serán los puntos fijos no hiperbólicos. Aquí es dónde aplicaremos la teoría de las variedades centrales expuesta anteriormente, pues sabemos que para estudiar la naturaleza del punto fijo para λ “cerca” de λ_0 tenemos que analizar el campo vectorial de (A.32) restringido a la variedad central asociada al mismo.

Existen varios tipos de bifurcación, pero como hemos comentado en la introducción de este apartado, focalizaremos nuestra atención en la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf. Previamente, mostramos las condiciones que nos permiten identificar los distintos tipos de bifurcación asociados al caso en el que la matriz de la linealización posee un único autovalor cero.

A.7.1. Un autovalor cero

Supongamos que la matriz $D_y g(y_0, \lambda_0)$ posee un único autovalor cero siendo los restantes autovalores con parte real no nula. Por la teoría de las variedades centrales, sabemos que la naturaleza de las soluciones cercanas a (y_0, λ_0) viene determinada por la ecuación de la variedad central asociada a dicho punto fijo, que escribimos como

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}^p \quad (\text{A.33})$$

siendo $\mu = \lambda - \lambda_0$ para trasladar el punto fijo al origen. Dado que sólo existe un autovalor cero, la dimensión de la variedad central es uno. Además, se verifica que

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{Condición de punto fijo})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (\text{Condición de autovalor cero}) \quad (\text{A.34})$$

$$(\text{A.35})$$

Supondremos a lo largo de esta sección que el parámetro μ es un número real. En el caso de que $\mu \in \mathbb{R}^p$ siendo $p > 1$, consideraremos todos los autovalores, a excepción de uno, como fijos.

De manera intuitiva, podemos decir que el término bifurcación hace referencia al estudio de la estructura de las soluciones cercanas a puntos fijos no hiperbólicos. A continuación, presentamos rigurosamente el concepto de bifurcación.

Definición A.23. Un punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$ de una familia uniparamétrica de un campo de vectores unidimensional se dice que experimenta una *bifurcación* en $\mu = 0$ si el flujo para valores de μ y x cercanos a cero no es cualitativamente el mismo que el flujo en $\mu = 0$ para valores de x cercanos a cero. En ese caso, diremos que (x, μ) es un *punto de bifurcación* y que el parámetro $\mu = 0$ es un *valor de bifurcación*. Además, se denomina *diagrama de bifurcación* a la representación de la curva de puntos fijos $\mu(x)$ en el plano $\mu - x$.

A continuación, presentamos los distintos tipos de bifurcación con un único autovalor cero que pueden ocurrir. Cada uno de ellos está caracterizado por la geometría de las curvas de puntos fijos en el diagrama de bifurcación en un entorno del punto de bifurcación.

Bifurcación silla-nodo

Consideremos la ecuación de la variedad central (A.33) asociada al punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$. Diremos que dicho punto fijo experimenta una *bifurcación silla-nodo* si se cumplen las condiciones siguientes

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{C1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (\text{C2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C4})$$

Observemos que las condiciones C1 y C2 corresponden a la premisa de punto fijo no hiperbólico. La condición C3 implica que sólo una única curva de puntos fijos pasa por el punto $(x, \mu) = (0, 0)$, y la última condición garantiza que la curva yace localmente a un lado de la recta $\mu = 0$.

Las condiciones anteriores garantizan que la estructura de las órbitas cercanas a $(x, \mu) = (0, 0)$ es cualitativamente la misma que la estructura de la órbita

$$\dot{x} = \mu \pm x^2$$

cerca del punto $(x, \mu) = (0, 0)$. Recibe el nombre de *forma normal para la bifurcación silla-nodo*.

Bifurcación transcítica

De manera análoga al caso anterior, consideramos la ecuación de la variedad central (A.33) asociada al punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$. Diremos que dicho punto fijo experimenta una *bifurcación transcítica* si se cumplen las condiciones siguientes

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{C1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (\text{C2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0 \quad (\text{C3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C4})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C5})$$

De manera similar, las dos primeras condiciones corresponden a la premisa de punto fijo no hiperbólico. La condición C3 garantiza que dos curvas de puntos fijos pasan por el punto $(x, \mu) = (0, 0)$, mientras que las dos últimas condiciones aseguran que ambas curvas de puntos fijos existen a ambos lados de la recta $\mu = 0$.

Las condiciones anteriores demuestran que la estructura de las órbitas cercanas a $(x, \mu) = (0, 0)$ es cualitativamente la misma que la estructura de la órbita

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2$$

cerca del punto $(x, \mu) = (0, 0)$. Recibe el nombre de *forma normal para la bifurcación transcítica*.

Bifurcación de tridente

Análogamente, consideramos la ecuación de la variedad central (A.33) asociada al punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$. Diremos que dicho punto fijo experimenta una *bifurcación de tridente* si se cumplen las condiciones siguientes

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{C1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (\text{C2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0 \quad (\text{C3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad (\text{C4})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C5})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0 \quad (\text{C6})$$

Las condiciones anteriores implican que la estructura de las órbitas cercanas a $(x, \mu) = (0, 0)$ es cualitativamente la misma que la estructura de la órbita

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3$$

cerca del punto $(x, \mu) = (0, 0)$. Recibe el nombre de *forma normal para la bifurcación de tridente*.

A.7.2. Un par de autovalores imaginarios. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Supongamos que la matriz del sistema (A.32) linealizado $D_y g(y_0, \lambda_0)$ posee dos autovalores imaginarios puros (uno el conjugado del otro) siendo los restantes con parte real no nula. Gracias a la teoría de las variedades centrales, como el punto fijo $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$ no es hiperbólico, sabemos que la naturaleza de las órbitas cercanas a dicho punto viene determinada por el campo de vectores de (A.32) restringido a la variedad central.

Dado que el número de autovalores con parte real cero es dos, esta restricción nos proporciona una familia p -paramétrica de campos de vectores de una variedad central de dimensión dos. Asumiremos que el parámetro a considerar es un número real, es decir, $p = 1$. En caso de que el número de parámetros sea estrictamente mayor que uno, consideraremos todos ellos, a excepción de uno, como fijos.

El sistema restringido a la variedad central viene dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\lambda(\mu) & -\Im\lambda(\mu) \\ \Im\lambda(\mu) & \Re\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(x, y; \mu) \\ f^2(x, y; \mu) \end{pmatrix} \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{A.36})$$

donde $\lambda(\mu)$ y $\bar{\lambda}(\mu)$ son los autovalores de la matriz del sistema linealizado en el punto fijo y las funciones f^i son no lineales en x e y .

El procedimiento llevado a cabo para transformar el sistema (A.32) en la ecuación anterior se ha desarrollado en el apartado correspondiente a las formas normales. En primer lugar, transformamos el punto fijo al origen y, si fuese necesario, realizamos una transformación lineal de coordenadas para que el sistema (A.32) adquiriera la forma de la ecuación anterior.

Observamos que el autovalor λ depende del parámetro μ . Por ello, denotamos dicho autovalor como

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu)$$

donde, debido a las premisas iniciales, se verifica

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \\ w(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Como se hizo en el apartado de forma normales, transformamos la ecuación de la variedad central en su forma normal, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - w(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5) \\ \dot{y} &= w(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5) \end{aligned}$$

Por comodidad, reescribimos el sistema anterior en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + \mathcal{O}(r^5) \\ \dot{\theta} &= w(\mu) + b(\mu)r^2 + \mathcal{O}(r^4)\end{aligned}$$

Queremos estudiar la dinámica de las soluciones cerca de $\mu = 0$, por ello, parece natural considerar los desarrollos de Taylor de los coeficientes de la ecuación (A.37) centrados en el punto $\mu = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + \mathcal{O}(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= w(0) + w'(0)\mu + b(0)r^2 + \mathcal{O}(\mu^2, \mu r^2, r^4)\end{aligned}\tag{A.37}$$

donde $'$ denota la derivada con respecto al parámetro μ . Nuestro objetivo es estudiar la dinámica del sistema anterior para valores de r y μ pequeños. Por esta razón, eliminaremos los términos de orden superior de dicho sistema con el fin de estudiar su dinámica de manera sencilla. Una vez asimilada la naturaleza cualitativa del sistema resultante, veremos que ambos sistemas son cualitativamente equivalentes.

El siguiente sistema, en el que se han eliminado los términos de orden superior, recibe el nombre de *forma normal truncada*

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} &= w + c\mu + br^2\end{aligned}\tag{A.38}$$

donde, para simplificar la notación, hemos denotado

$$\begin{aligned}d &\equiv \alpha'(0) \\ a &\equiv a(0) \\ w &\equiv w(0) \\ c &\equiv w'(0) \\ b &\equiv b(0)\end{aligned}$$

El siguiente lema muestra que valores de r estrictamente positivos y μ tales que

$$\dot{r} = 0 \quad \&\& \quad \dot{\theta} \neq 0$$

corresponden a órbitas periódicas del sistema truncado (A.38).

Lema A.1. Para $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$ y μ suficientemente pequeño

$$(r(t), \theta(t)) = \left(\sqrt{\frac{-\mu d}{a}}, \left[w + \left(c - \frac{bd}{a} \right) \mu \right] t + \theta_0 \right)$$

es una órbita periódica para el sistema truncado (A.38).

Sobre la naturaleza de dicha órbita,

Lema A.2. *La órbita periódica es*

- *Asintóticamente estable para $a < 0$.*
- *Inestable para $a > 0$.*

Como $r > 0$ por definición, la órbita anterior es la única órbita periódica posible para el sistema (A.38). Luego, para $\mu \neq 0$, el sistema truncado (A.38) posee una única órbita periódica de amplitud $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$.

Con el fin de analizar la estabilidad de esta órbita periódica y su existencia para $\mu > 0$ o $\mu < 0$, distinguimos los siguientes casos:

- $d > 0, a > 0$.
 - Si $\mu > 0$, entonces el origen es un punto fijo inestable.
 - Si $\mu < 0$, entonces el origen es un punto fijo asintóticamente estable con una órbita periódica inestable.
- $d > 0, a < 0$.
 - Si $\mu > 0$, entonces el origen es un punto fijo inestable con una órbita periódica asintóticamente estable.
 - Si $\mu < 0$, entonces el origen es un punto fijo asintóticamente estable.
- $d < 0, a > 0$.
 - Si $\mu > 0$, entonces el origen es un punto fijo asintóticamente estable con una órbita periódica inestable.
 - Si $\mu < 0$, entonces el origen es un punto fijo inestable.
- $d < 0, a < 0$.
 - Si $\mu > 0$, entonces el origen es un punto fijo asintóticamente estable.
 - Si $\mu < 0$, entonces el origen es un punto fijo inestable con una órbita periódica asintóticamente estable.

Observemos que en todos los casos anteriores, el origen es un punto fijo

- Estable en $\mu = 0$ para $a < 0$.
- Inestable en $\mu = 0$ para $a > 0$.

El número $a \equiv a(0)$ nos informa si la órbita periódica de bifurcación es estable ($a < 0$) o inestable ($a > 0$). Dicho parámetro recibe el nombre de *primer coeficiente de Liapunov*. Dado el sistema (A.36), su valor viene dado por la expresión

$$a = \frac{1}{16} [f_{xxx}^1 + f_{xyy}^1 + f_{xxy}^2 + f_{yyy}^2] + \frac{1}{16w} [f_{xy}^1 (f_{xx}^1 + f_{yy}^1) - f_{xy}^2 (f_{xx}^2 + f_{yy}^2) - f_{xx}^1 f_{xx}^2 + f_{yy}^1 f_{yy}^2]$$

donde todas las derivadas parciales son evaluadas en el punto de bifurcación $(x, y; \mu) = (0, 0, 0)$. El caso de $a < 0$ recibe el nombre de *bifurcación supercrítica* y se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de un órbita periódica atractora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu = 0$. El caso $a > 0$ se denomina *bifurcación subcrítica* y viene caracterizado por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica repulsora, cuando se varía el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu = 0$.

El parámetro d viene dado por la expresión

$$d = \frac{d}{d\mu} (\Re \lambda(\mu)) \Big|_{\mu=0}$$

Dado que $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu)$, para $d > 0$, los autovalores cruzan desde el semiplano izquierdo al semiplano derecho según μ se incrementa, y, para $d < 0$, los autovalores cruzan desde el semiplano derecho al semiplano izquierdo según μ se incrementa. Por este motivo, dicho parámetro d recibe el nombre de *velocidad de cruce*. Además,

- Para $d > 0$, el origen es
 - asintóticamente estable si $\mu < 0$.
 - inestable si $\mu > 0$
- y, para $d < 0$, el origen es
 - inestable si $\mu < 0$.
 - asintóticamente estable si $\mu > 0$

Llegado este momento, hemos realizado un análisis completo de la estructura de las soluciones de la forma normal truncada cerca de $(r, \mu) = (0, 0)$. Para finalizar, presentamos el siguiente teorema que afirma que la dinámica del sistema de partida (A.37) es la misma que la del sistema truncado (A.38).

Teorema A.22 (Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf). *Consideremos la forma normal completa (A.37). Entonces, para μ suficientemente pequeño, los cuatro casos descritos anteriormente se verifican.*

A.8. Colocación de raíces en el eje imaginario

El propósito de esta sección es determinar que relaciones deben existir entre los coeficientes de un polinomio de orden tres para poseer una raíz real y dos complejas, siendo una la conjugada de la otra. Esto nos permitirá conocer que relaciones deben cumplir los coeficientes del polinomio característico asociado a la matriz de la linealización del sistema para que presente un autovalor real y dos complejos, es decir, para que pueda ocurrir una bifurcación de Hopf.

Consideremos la ecuación cúbica

$$\lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu) = 0$$

donde observamos que los coeficientes de la ecuación anterior dependen del parámetro real μ . Nuestro objetivo es encontrar valores del parámetro μ con la propiedad de que dicha ecuación posea un par de raíces imaginarias y una real negativa.

Denotamos por $\lambda = i\omega_0$ una solución imaginaria, entonces se debe verificar

$$\begin{aligned} (i\omega_0)^3 + L_1(\mu)(i\omega_0)^2 + L_2(\mu)(i\omega_0) + L_3(\mu) &= 0 \\ -i\omega_0^3 - L_1(\mu)\omega_0^2 + iL_2(\mu)\omega_0 + L_3(\mu) &= 0 \\ i\omega_0(L_2(\mu) - \omega_0^2) + (L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos la siguientes condiciones

$$\begin{aligned} L_2(\mu) - \omega_0^2 &= 0 \\ L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

, es decir,

$$L_2(\mu) = \omega_0^2 = \frac{L_3(\mu)}{L_1(\mu)}$$

Luego, concluimos que la ecuación cúbica anterior posee un par de raíces imaginarias si existe μ tal que

$$L_2(\mu) > 0 \quad \&\& \quad L_3(\mu) = L_1(\mu)L_2(\mu)$$

Sea $\mu = \mu_1$ con la propiedad de satisfacer las condiciones anteriores, y sean $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ y $\lambda_3 = \lambda_0$. Entonces,

$$\omega_0 = \sqrt{L_2(\mu_1)}$$

y, además se debe satisfacer

$$(\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)(\lambda - \lambda_0) = 0$$

Concluimos que

$$\lambda_0 = -\frac{L_3(\mu_1)}{L_2(\mu_1)}$$

Para garantizar que sucede una bifurcación de Hopf, además tener el valor de bifurcación μ_1 que nos coloca los autovalores en el eje imaginario, también es necesario verificar que dichos autovalores atraviesan este eje, es decir, si la velocidad de cruce

$$d = \left. \frac{d}{d\mu} (\Re \lambda(\mu)) \right|_{\mu=\mu_1}$$

es no nula. Utilizando la notación anterior, y denotando μ_1 al valor del parámetro de bifurcación que nos coloca las raíces del polinomio característico en el eje imaginario, *la velocidad de cruce de los autovalores a través del eje imaginario* viene dada por

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{L_3'(\mu_1) - \omega_0^2 L_1'(\mu_1) + \lambda_0 L_2'(\mu_1)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

A.9. Teorema de Liouville

El objetivo de esta sección es describir la evolución del volumen de un subconjunto de \mathbb{R}^n bajo el flujo. Sean $\phi_t(\cdot)$ el flujo generado por el sistema (A.1) y D_0 un dominio en \mathbb{R}^n . Estamos interesados en estudiar la variación del volumen de D_0 bajo el flujo $\phi_t(\cdot)$ con el tiempo. Para ello, $D_t \equiv \phi_t(D_0)$ denotará la evolución del dominio D_0 bajo el flujo y V_t el volumen de D_t . Cabe destacar que V_0 denotará el volumen inicial de dicho dominio en t_0 .

La siguiente proposición nos permitirá calcular la variación de dicho volumen.

Proposición A.5.

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla \cdot f dx$$

donde $\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ denota la divergencia de f .

En la proposición anterior no se hace ninguna especial alusión al punto $t = 0$. Por este motivo, podemos reescribirlo como

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D_{t_0}} \nabla \cdot f dx \quad (\text{A.39})$$

para $t_0 \neq 0$ arbitrario.

Gracias a la proposición A.5, podemos calcular, en determinados casos, la ecuación que describe la evolución del volumen con el tiempo. Supongamos que la divergencia de la función es una constante c , es decir,

$$\nabla \cdot f = c$$

Tomando t_0 arbitrario, y utilizando la ecuación (A.39) obtenemos

$$\dot{V} = cV$$

cuya solución viene dada por

$$V(t) = e^{ct} V_0$$

El siguiente teorema se debe al matemático francés Joseph Liouville

Teorema A.23. *Supongamos que $\nabla \cdot f = 0$. Entonces, para cualquier región D_0 de \mathbb{R}^n se tiene*

$$V(t) = V_0$$

donde V_0 es el volumen de D_0 y $V(t)$ es el volumen de $\phi_t(D_0)$

En otras palabras, si la divergencia del campo vectorial es cero, la variación de volumen es nula y, por tanto, el volumen de la región de partida permanece constante con el tiempo.

Definición A.24. Se denomina *tasa de cambio de volumen* Λ a la traza del Jacobiano de f , es decir,

$$\Lambda(x) = \nabla \cdot f = \text{tr } Df(x)$$

Si $\Lambda(x) > 0$ diremos que el proceso dinámico es *expansivo*. En cambio, si $\Lambda(x) < 0$ diremos que el proceso dinámico es *contractivo*.

Definición A.25. Decimos que un sistema dinámico es *dissipativo* si $\Lambda(x) = \Lambda < 0$. Análogamente, diremos que un sistema dinámico es *expansivo* si $\Lambda(x) = \Lambda > 0$

A.10. Comportamiento asintótico

El propósito de este apartado es ofrecer los conceptos y resultados necesarios que nos permitan estudiar en profundidad la naturaleza del flujo de soluciones de un sistema autónomo no lineal. Consideremos el sistema (A.1) y su flujo de soluciones $\phi(t, x)$.

Definición A.26. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de ω *límite de* $x \in \mathbb{R}^n$, denotado como $\omega(x)$, si existe una sucesión $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$ tal que

$$\phi(t_i, x) \rightarrow x_0$$

Definición A.27. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de α *límite de* $x \in \mathbb{R}^n$, denotado como $\alpha(x)$, si existe una sucesión $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow -\infty$ tal que

$$\phi(t_i, x) \rightarrow x_0$$

Definición A.28. El conjunto de todos los puntos ω límite de un flujo $\phi_t(\cdot)$ se denomina *conjunto ω límite*. Análogamente, el conjunto de todos los puntos α límite de un flujo $\phi_t(\cdot)$ se denomina *conjunto α límite*.

A continuación, describimos las propiedades básicas de los conjuntos ω límite.

Proposición A.6. Sean $\phi_t(\cdot)$ el flujo correspondiente al sistema (A.1) y \mathcal{M} un conjunto compacto positivamente invariante para este flujo. Entonces, para todo punto $p \in \mathcal{M}$ tenemos

- I. $\omega(p) \neq \emptyset$
- II. $\omega(p)$ es cerrado.
- III. $\omega(p)$ es invariante bajo el flujo, es decir, $\omega(p)$ es unión de órbitas.
- IV. $\omega(p)$ es conexo.

Definición A.29. Un punto x_0 se dice *no deambulante* si para todo entorno U^{x_0} de dicho punto y $T > 0$, existe un número real t , $|t| > T$ tal que

$$\phi(t, U^{x_0}) \cap U^{x_0} \neq \emptyset$$

Observemos que los puntos fijos y las órbitas periódicas son no deambulantes.

Definición A.30. El conjunto de todos los puntos no deambulantes de un flujo $\phi_t(\cdot)$ recibe el nombre de *conjunto no deambulante* de dicho flujo.

Nuestro siguiente propósito es introducir la noción de atractor. Para ello, necesitaremos los conceptos que se muestran a continuación,

Definición A.31. Se dice que un conjunto cerrado invariante A de \mathbb{R}^n es un *conjunto de atracción* si existe un entorno U^A de dicho conjunto que verifica las dos propiedades siguientes:

I. $\phi(t, U^A) \subset U^A$ para todo $t \geq 0$.

II. $\bigcap_{t>0} \phi(t, U^A) = A$

El conjunto abierto U^A recibe el nombre de *región de captura*.

Claramente, encontrar una función de Liapunov es equivalente a encontrar una región de captura. Una forma de averiguar si un conjunto es candidato a ser una región de captura es evaluar el campo vectorial en la frontera de dicho conjunto. Si en la frontera del conjunto, el campo vectorial apunta hacia el interior de la región, o es tangente a dicha frontera, entonces dicho conjunto es una región de captura. Para ello, es necesario que la frontera de dicha región sea al menos C^1 .

Definición A.32. Un subconjunto B compacto y positivamente invariante de \mathbb{R}^n recibe el nombre de *conjunto de absorción* si existe un subconjunto acotado U de \mathbb{R}^n con las dos propiedades siguientes:

- $B \subset U$
- Existe $t_U > 0$ tal que $\phi(t, U) \subset B$ para todo $t \geq t_U$

Dado un conjunto de atracción, es natural preguntarse por los puntos del espacio que se aproxima a dicho conjunto.

Definición A.33. Se denomina *cuenca de atracción* de un conjunto de atracción A a

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi(t, U)$$

siendo U su región de captura.

La siguiente propiedad aporta un detalle fundamental en la definición de atractor,

Definición A.34. Un conjunto cerrado invariante A se dice *topológicamente transitivo* si para cualesquiera subconjuntos abiertos U y V de A , existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$$

En otras palabras, ser topológicamente transitivo equivale a afirmar que dadas dos zonas cualesquiera del conjunto, existe un punto de la primera zona cuya órbita visita en algún momento la segunda zona, es decir, existen puntos cuya órbita viaje de una parte arbitraria del espacio a otra igualmente arbitraria.

Definición A.35 (Atractor). Un *atractor* es un conjunto de atracción topológicamente transitivo.

A.11. Principio de invariancia de LaSalle

El resultado fundamental de esta sección se debe al matemático estadounidense Joseph Pierre LaSalle, especialista en sistemas dinámicos y teoría de la estabilidad. Cuando por medio del teorema de estabilidad de Liapunov no es posible determinar la estabilidad asintótica de un punto de equilibrio ya que la derivada de la función de Liapunov solamente es semidefinida negativa, entonces recurriremos al *principio de invariancia* para intentar probar la estabilidad asintótica del mismo.

Consideremos el sistema (A.1) y su flujo de soluciones $\phi(t, x)$. Sea $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto positivamente invariante bajo el flujo $\phi_t(\cdot)$ cuya frontera es al menos \mathbf{C}^1 . Debido a los resultados expuestos en el apartado anterior, podemos concluir que \mathcal{M} es una región de captura.

Consideremos una función de Liapunov $V(x)$ sobre el conjunto \mathcal{M} , es decir,

$$V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Ahora, denotamos por E al conjunto de todos los puntos de \mathcal{M} donde $\dot{V}(x) = 0$, con notación matemática

$$E \equiv \{x \in \mathcal{M} \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

y denotemos por L a la unión de todos los conjuntos invariantes dentro de E . Luego, L es el mayor conjunto invariante contenido en E , en notación matemática,

$$L = \bigcup_{X^{inv} \subset E} X$$

Con estas hipótesis, enunciamos el siguiente principio

Teorema A.24 (Principio de invariancia de LaSalle). *Toda solución que comienza en \mathcal{M} tiende a L cuando $t \rightarrow \infty$.*

Cabe destacar que, a diferencia del Teorema de Liapunov, el Teorema de LaSalle no requiere que $V(x)$ sea definida positiva y el conjunto \mathcal{M} no necesariamente debe estar ligado a la construcción de $V(x)$.

En muchos casos, la construcción de la función de Liapunov $V(x)$ va a implicar la existencia de un conjunto \mathcal{M} . Concretamente, si

$$\mathcal{M}_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$$

es acotado para $c > 0$ y $\dot{V}(x) \leq 0$ en \mathcal{M}_c . Entonces, podemos tomar $\mathcal{M} = \mathcal{M}_c$.

A.12. Caos y atractores extraños

En este apartado introducimos el significado de *caos* tanto aplicado a un sistema dinámico determinista como a la noción de *atractor extraño*. Un *sistema determinista* es aquel en el que su comportamiento puede ser completamente determinado a partir de

sus condiciones iniciales. De manera intuitiva, el término caos es el fenómeno por el cual pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden suponer significativas diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo.

En general, el caos determinista pone de manifiesto trayectorias que reflejan la evolución temporal de forma muy irregular dando la sensación de ser completamente azarosas, pero en realidad, son totalmente deterministas. Esta irregularidad mostrada por las trayectorias está asociada a la imposibilidad práctica de predecir la evolución futura del sistema, aunque dicha evolución sea totalmente determinista.

Consideramos un sistema autónomo no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbf{C}^r \quad (r \geq 1)$$

Denotamos por $\phi(t, x)$ el flujo generado por el sistema anterior y asumimos que existe para todo t número real positivo. Además, suponemos que Λ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n invariante bajo el flujo $\phi(t, x)$.

La siguiente definición muestra de manera precisa la sensibilidad de un sistema dinámico respecto a pequeñas variaciones de sus condiciones iniciales,

Definición A.36. Se dice que el flujo $\phi(t, x)$ posee *dependencia sensible respecto de sus condiciones iniciales* en Λ si existe $\varepsilon > 0$ de manera que, para todo punto x de Λ y todo entorno suyo U^x , existen $y \in U^x$ y $t > 0$ con la propiedad

$$|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \varepsilon$$

Francamente, la definición anterior afirma que para cualquier punto x de Λ existe al menos un punto arbitrariamente cercano a él que diverge desde x .

Definición A.37. Se dice que Λ es *caótico* si cumple las siguientes propiedades:

- $\phi(t, x)$ tiene dependencia sensible respecto a sus condiciones iniciales en Λ .
- $\phi(t, x)$ es topológicamente transitivo en Λ .
- Las órbitas periódicas de $\phi(t, x)$ son densas en Λ .

Definición A.38. Supongamos que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ es un atractor. Diremos que \mathcal{A} es un *atractor extraño* si es caótico.

Para probar que un sistema dinámico posee un atractor extraño podemos proceder de la siguiente forma:

- Encontrar una región de captura, \mathcal{M} , en el diagrama de fases.
- Demostrar que \mathcal{M} contiene un conjunto invariante caótico Λ .
- Probar que \mathcal{A} es un conjunto de atracción, es decir,

$$\bigcap_{t>0} \phi(t, \mathcal{M}) \equiv \mathcal{A}$$

Además, se verifica que $\Lambda \subset \mathcal{A}$. Por este motivo, \mathcal{A} contiene un mecanismo que da lugar a la dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales. Finalmente, para concluir que \mathcal{A} es un atractor extraño hay que probar las dos siguientes propiedades:

- Extender la dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales en Λ a \mathcal{A} .
- Probar que \mathcal{A} es topológicamente transitivo.

Este último paso es el más complicado de probar, ya que la existencia de una única órbita estable en \mathcal{A} destruye su transitividad topológica.

Análisis de la bifurcación de Hopf

En este capítulo realizamos un detallado análisis de la bifurcación de Hopf en el sistema de Lorenz. Dicho sistema consta de tres parámetros σ , b y r que supondremos estrictamente positivos. Con el objetivo de proceder de la misma manera que se expuso teóricamente en el apéndice de preliminares, consideraremos en cada caso un único *parámetro de bifurcación* denotado por μ siendo los dos restantes considerados fijos, a los que denominaremos *parámetros de control*.

Recordemos que la bifurcación de Hopf se presenta cuando la matriz asociada al sistema linealizado posee dos autovalores imaginarios puros, siendo los restantes con parte real no nula. En nuestro caso, dado que trabajamos con coeficientes reales y un polinomio de grado tres, tendremos un autovalor real y dos autovalores complejos, siendo uno conjugado del otro. El objetivo será ver, para qué valores de los parámetros de control se produce una bifurcación de Hopf, dando lugar a un *valor de bifurcación* denotado por μ_1 y estudiar qué tipo de bifurcación de Hopf se produce al variar el parámetro de bifurcación μ a través del valor de bifurcación μ_1 . En todos los casos, seguiremos el mismo método de trabajo.

B.1. Caso I: $\mu = \sigma$ parámetro de bifurcación y b , r parámetros de control

Consideramos el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mu Y - \mu X \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para este sistema vienen dados por

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \\ P_3 &= \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \end{aligned}$$

y, la matriz jacobiana por

$$\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ r-Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}$$

Realizamos un análisis de la bifurcación de Hopf para cada uno de los puntos de equilibrio

B.1.1. Punto de equilibrio P_1

En este caso, la matriz jacobiana en dicho punto viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores, calculados en el apartado de “Puntos de equilibrio” del capítulo dos, vienen dados por

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -b \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[-\mu - 1 + \sqrt{(1-\mu)^2 + 4\mu r} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[-\mu - 1 - \sqrt{(1-\mu)^2 + 4\mu r} \right] \end{aligned}$$

Obsevamos que tenemos un autovalor real no nulo ya que $b \neq 0$. Para que ocurra una bifurcación de Hopf es necesario colocar los autovalores λ_1 y λ_2 en el eje imaginario. Por esta razón, necesitamos que se verifique

$$-\mu - 1 = 0$$

lo que implica $\mu = -1$, pero como estamos considerando parámetros estrictamente positivos, concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

B.1.2. Punto de equilibrio P_2

Las matrices jacobianas en los puntos de equilibrio P_2 y P_3 vienen dadas por

$$DF(P_2) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

$$DF(P_3) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

dando lugar al mismo polinomio característico, denotado por

$$P_\lambda(P_{23}) = -\lambda^3 - \lambda^2(\mu + 1 + b) - \lambda b(\mu + r) - 2\mu b(r - 1)$$

Por esta razón, nos limitaremos a estudiar sólo el punto de equilibrio P_2 . A lo largo de este análisis iremos coleccionando las restricciones que deben satisfacer los parámetros del sistema con el objetivo de que lo que estamos haciendo tenga sentido.

En primer lugar, el punto de equilibrio P_2 debe pertenecer a \mathbb{R}^3 . Esto se traduce a la condición

$$b(r - 1) \geq 0$$

y, dado que el origen como punto de equilibrio se obtiene cuando se produce la igualdad en la condición anterior, nos limitaremos a considerar

$$b(r - 1) > 0$$

que se verifica cuando

$$\boxed{r > 1}$$

obteniendo así la primera de nuestras restricciones.

A continuación, denotaremos

$$P_\mu(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\mu + 1 + b) + \lambda b(\mu + r) + 2\mu b(r - 1) = 0$$

donde hemos multiplicado por -1 al polinomio característico asociado al punto P_2 . Observamos que los coeficientes del polinomio anterior dependen del parámetro de bifurcación μ , lo que justifica nuestra notación.

Dado que las raíces del polinomio $P_\mu(\lambda)$ son los autovalores de la matriz asociada al sistema lineal y que nuestro objetivo es determinar cuándo se produce una bifurcación de Hopf, deseamos encontrar los valores del parámetro de μ con la propiedad de que el polinomio cúbico $P_\mu(\lambda)$ posea un par de raíces complejas y una real. Para ello, empleamos la siguiente notación

$$L_1(\mu) = \mu + 1 + b$$

$$L_2(\mu) = b(\mu + r)$$

$$L_3(\mu) = 2\mu b(r - 1)$$

Utilizando los resultados expuestos en el apéndice de preliminares, para que la ecuación cúbica posea un par de raíces complejas y una real, se deben satisfacer las siguientes relaciones entre los coeficientes de dicho polinomio

$$L_3(\mu) = L_1(\mu) \cdot L_2(\mu) \quad \&\& \quad L_2(\mu) > 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} b(\mu + r) &> 0 \\ 2\mu b(r - 1) &= (\mu + 1 + b) \cdot b(\mu + r) \end{aligned}$$

La primera condición se verifica con nitidez ya que consideramos parámetros estrictamente positivos, mientras que la segunda se traduce a la siguiente ecuación de grado dos

$$\mu^2 + \mu(-r + b + 3) + r(b + 1) = 0$$

Utilizando la famosa fórmula para este tipo de polinomios y simplificando el discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - br - 3r - br + b^2 + 3b - 3r + 3b + 9 - 4br - 4r \\ &= r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 \end{aligned}$$

obtenemos las dos raíces siguientes

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{r - b - 3 + \sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2}}{2} \\ \mu_2 &= \frac{r - b - 3 - \sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2}}{2} \end{aligned}$$

En este caso, sólo realizaremos el análisis para μ_1 ya que para μ_2 es análogo. A continuación, debemos imponer la condición

$$\mu_1 \in \mathbb{R}$$

lo que se traduce a la siguiente restricción

$$\boxed{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 > 0}$$

Observamos que la inecuación anterior corresponde a la parte estrictamente positiva de la hipérbola $r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 = 0$ en las variables b y r . La justificación del mayor estricto se expondrá más adelante.

El siguiente paso es analizar los valores de los parámetros de control tales que μ_1 sea estrictamente positivo,

$$\frac{r - b - 3 + \sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2}}{2} > 0$$

para ello consideraremos dos casos:

B.1. Caso I: $\mu = \sigma$ parámetro de bifurcación y b, r parámetros de control

- Si $r - b - 3 \geq 0$, entonces obtenemos la siguiente condición

$$\boxed{r \geq b + 3}$$

Luego, trivialmente tenemos $\mu_1 > 0$.

- Si $r - b - 3 \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mu_1 > 0 &\iff \sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} > b + 3 - r \\ &\iff r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 > (b + 3 - r)^2 \\ &\iff r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 > b^2 + 3b - br + 3b + 9 - 3r - br - 3r + r^2 \\ &\iff -4br - 4r > 0 \\ &\iff -4b - 4 > 0 \\ &\iff b < -1 \quad \zeta\end{aligned}$$

Por tanto, para que se produzca una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio P_1 concluimos que deben satisfacerse las siguientes restricciones sobre los parámetros de control

- $r > 1$
- $r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 > 0$
- $r \geq b + 3$

dando lugar a la denominada *región factible*, lugar geométrico de puntos del plano que verifican las restricciones anteriores. Utilizando la herramienta Matlab, hemos obtenido gráficamente dicha región

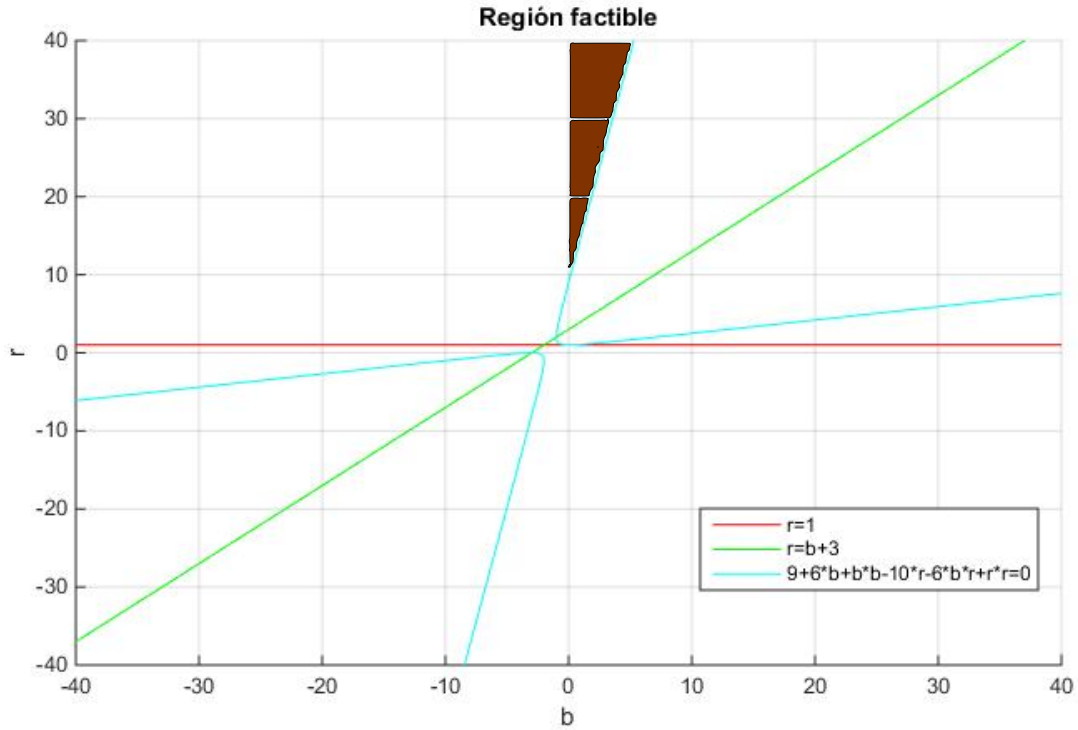


Figura B.1: Región factible.

donde la zona coloreada de color marrón indica la región factible de los parámetros de control para que se produzca una bifurcación de Hopf. Cabe destacar que se ha utilizado la función *ezplot* de Matlab para graficar las restricciones mencionadas anteriormente.

Resumamos, hemos obtenido el polinomio

$$P_{\mu}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2(\mu + 1 + b) + \lambda b(\mu + r) + 2\mu b(r - 1) = 0$$

cuyas raíces son los autovalores de la matriz jacobiana $DF(P_2)$. Si $\mu = \mu_1$, entonces dicho polinomio tendrá dos raíces complejas y una real denotadas por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \&\& \quad \lambda_3 = \lambda_0$$

Utilizando los resultados expuestos en el apartado de “Colocación de raíces en el eje imaginario de un polinomio cúbico”, dichas raíces vienen determinadas por

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{L_2(\mu_1)} \\ &= \sqrt{b(\mu_1 + r)} \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{L_3(\mu_1)}{L_2(\mu_1)} \\ &= -(\mu_1 + 1 + b) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +i\sqrt{b(\mu_1 + r)} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{b(\mu_1 + r)} \\ \lambda_3 &= -(\mu_1 + 1 + b)\end{aligned}$$

En la bifurcación de Hopf, denominábamos *velocidad de cruce de los autovalores* a la expresión

$$d = \left. \frac{d}{d\mu} (\Re\lambda(\mu)) \right|_{\mu=\mu_1}$$

Por esta razón, se denotaba $d = \alpha'(\mu_1)$. El siguiente paso es calcular dicha velocidad de cruce, cuya expresión se presentó en el apartado correspondiente a “Colocación de raíces en el eje imaginario” dada por

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

donde

$$\begin{aligned}L'_1(\mu_1) &= 1 \\ L'_2(\mu_1) &= b \\ L'_3(\mu_1) &= 2b(r - 1)\end{aligned}$$

En primer lugar, operando el numerador

$$\begin{aligned}L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1) &= 2br - 2b - b(\mu_1 + r) - (\mu_1 + 1 + b)b \\ &= b[2r - 2 - \mu_1 - r - \mu_1 - 1 - b] \\ &= b[r - 3 - 2\mu_1 - b] \\ &= b\left[r - 3 - r + b + 3 - \sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} - b\right] \\ &= -b\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2}\end{aligned}$$

y el denominador

$$\begin{aligned}2(\lambda_0^2 + \omega_0^2) &= 2(b\mu_1 + br + \mu_1^2 + \mu_1 + \mu_1 b + 1 + \mu_1 + b + b\mu_1 + b + b^2) \\ &= 2(1 + 2b + b^2 + 2\mu_1 + 3b\mu_1 + \mu_1^2 + br) \\ &= 2 + 4b + 2b^2 + 4\mu_1 + 6b\mu_1 + 2\mu_1^2 + 2br\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 4\mu_1 &= 2r - 2b - 6 + 2\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 6b\mu_1 &= 3br - 3b^2 - 9b + 3b\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 4\mu_1^2 &= r^2 - br - 3r + r\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad - br + b^2 + 3b - b\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad - 3r + 3b + 9 - 3\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad + r\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad - b\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad - 3\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad + r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 \\
 2\mu_1^2 &= r^2 + b^2 - b\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad + 9 - 3\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} + r\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2} \\
 &\quad + 6b - 4br - 8r
 \end{aligned}$$

Con el fin de hacer más ligera la notación, denotamos $\sqrt{r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2}$ como $\sqrt{\cdot}$, escribimos

$$\begin{aligned}
 2(\lambda_0^2 + \omega_0^2) &= 2 + 4b + 2b^2 + 4\mu_1 + 6b\mu_1 + 2\mu_1^2 + 2br \\
 &= 2 + 4b + 2b^2 + 2r - 2b - 6 + 2\sqrt{\cdot} + 3br - 3b^2 - 9b + 3b\sqrt{\cdot} + 2br \\
 &\quad + r^2 + b^2 - b\sqrt{\cdot} + 9 - 3\sqrt{\cdot} + r\sqrt{\cdot} + 6b - 4br - 8r \\
 &= r^2 - b + 5 - 6r + br + \sqrt{\cdot} [2 + 3b - b - 3 + r] \\
 &= r^2 - b + 5 - 6r + br + \sqrt{\cdot} [2b - 1 + r]
 \end{aligned}$$

Utilizando la notación anterior, concluimos

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{-b\sqrt{\cdot}}{r^2 - b + 5 - 6r + br + \sqrt{\cdot} [2b - 1 + r]}$$

Observando esta expresión, podemos deducir que la velocidad de cruce es distinta de cero en nuestra región factible ya que $r^2 + 9 + 6b - 6br - 10r + b^2 > 0$, esto justifica la decisión de considerar el mayor estricto. Además, dicha velocidad de cruce es siempre negativa en nuestra región de factibilidad debido a que el numerador es siempre negativo y el denominador siempre positivo, ya que en nuestra región de factibilidad la condición $r > 1$ implica

$$\sqrt{\cdot} [2b - 1 + r] > 0$$

Por tanto, el problema se reduce a ver que

$$r^2 - b + 5 - 6r + br > 0$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} r^2 - b + 5 - 6r + br &> br + 3r - b + 5 - 6r + br && (r^2 \geq br + 3r) \\ &> 2br - 3r - b + b + 5 && (r > 1) \\ &> 2b + 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Concluimos que en el punto de equilibrio P_2 ocurre una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la variedad central

Siguiendo la técnica expuesta en el apartado correspondiente a “Variedades centrales”, trasladamos el punto de equilibrio P_2 al origen mediante un cambio de variables

$$\begin{aligned} y_1 &= X - \sqrt{b(r-1)} \\ y_2 &= Y - \sqrt{b(r-1)} \\ y_3 &= Z - (r-1) \end{aligned}$$

Luego, considerando $\mu = \mu_1$ el sistema de Lorenz queda

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \mu_1 (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 - y_1 y_3 - y_3 \sqrt{b(r-1)} \\ \dot{y}_3 &= -b y_3 + y_1 (y_2 + \sqrt{b(r-1)}) + y_2 \sqrt{b(r-1)} \end{aligned}$$

Ahora, la matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ 1 - y_3 & -1 & -y_1 - \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & y_1 + \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

que particularizada en el origen

$$DF = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, el punto de equilibrio es el origen y los autovalores siguen siendo los mismos, ya que sólo hemos realizado una traslación. La forma tradicional para calcular los autovectores asociados a los autovalores es muy compleja y tediosa. Por esta razón, nos basaremos en el *teorema de Cayley-Hamilton* que establece que cada matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Así, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de A se cumple

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$$

por lo que los vectores columna de $(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I)$ son vectores propios de λ_1 .

Procediendo de esta manera, calculamos

$$\begin{aligned}
 DF - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} -\mu_1 - i\sqrt{b(r + \mu_1)} & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{b(r + \mu_1)} & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & -b - i\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix} \\
 DF - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} -\mu_1 + i\sqrt{b(r + \mu_1)} & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 + i\sqrt{b(r + \mu_1)} & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & -b + i\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix} \\
 DF - \lambda_3 I &= \begin{pmatrix} 1 + b & \mu_1 & 0 \\ 1 & b + \mu_1 & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & 1 + \mu_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A continuación, haremos el producto de matrices para obtener los autovectores. Sólo realizaremos los cálculos para las columnas que vayamos a tomar como autovectores.

■ $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 + b & \mu_1 & 0 \\ 1 & b + \mu_1 & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & 1 + \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b + i\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & -\mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b(r + \mu_1) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(r - 1)}\sqrt{b(r + \mu_1)} \\ \cdot & \cdot & (1 + \mu_1)\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 obtenemos el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ \mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ b(r + \mu_1) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{b(r - 1)}\sqrt{b(r + \mu_1)} \\ -(1 + \mu_1)\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix}$$

■ $\lambda = \lambda_3$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -\mu_1 - i\sqrt{b(r + \mu_1)} & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{b(r + \mu_1)} & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & -b - i\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b + i\sqrt{b(r + \mu_1)} \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & (1 + b)\sqrt{b(r - 1)} \\ \cdot & \cdot & b(\mu_1 + b + 1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 , hemos obtenido el autovector

$$v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1\sqrt{b(r - 1)} \\ -(1 + b)\sqrt{b(r - 1)} \\ -b(\mu_1 + b + 1) \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz en forma de Jordan de DF viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(r + \mu_1)} & 0 \\ \sqrt{b(r + \mu_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + b + \mu_1) \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1\sqrt{b(r-1)} & \mu_1\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)}\sqrt{b(r+\mu_1)} & \mu_1\sqrt{b(r-1)} & -(1+b)\sqrt{b(r-1)} \\ -(1+\mu_1)\sqrt{b(r+\mu_1)} & b(r+\mu_1) & -b(\mu_1+b+1) \end{pmatrix}$$

Utilizando cálculo simbólico en Matlab, se ha computado la inversa de la matriz de paso P , debido a su gran extensión, no la mostraremos explícitamente. Por tanto, se verifica la siguiente expresión

$$J = P^{-1}DFP$$

Recordemos que la diferencial es la encargada de llevarse la parte lineal del sistema, con el objetivo de mostrar el procedimiento con claridad, consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicando cuidadosamente por P y P^{-1} se tiene

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} P P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &+ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, simplificando

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(r + \mu_1)} & 0 \\ \sqrt{b(r + \mu_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + b + \mu_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde se han introducido las nuevas variables

$$(z_1 \ z_2 \ w) = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \&\& \quad \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

donde f_{11}, f_{22}, f_{33} representan la parte no lineal del sistema de Jordan, se han calculado en Matlab simbólicamente pero se omiten por ser expresiones muy extensas.

Ahora, utilizando los resultados teóricos expuestos en el apartado de “Variedades centrales”, sabemos que existe una variedad invariante que puede ser localmente representada por

$$W^c(0) = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid w = h(z_1, z_2), \|(z_1, z_2)\| < \delta, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

Esto nos garantiza que la variedad central $W^c(0)$ es tangente al espacio invariante E^c . Por tanto, la expresión de la variedad central viene dada por

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2$$

que derivando tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

Una vez conocida la expresión de la variedad central, calculamos el primer coeficiente de Liapunov, dado por

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2)$$

donde

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{b(r + \mu)} \\ R_1 &= G_{z_1 z_2} (G_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2}) - T_{z_1 z_2} (T_{z_1 z_1} + T_{z_2 z_2}) - G_{z_1 z_1} T_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2} T_{z_2 z_2} \\ R_2 &= G_{z_1 z_1 z_1} + G_{z_1 z_2 z_2} + T_{z_1 z_1 z_2} + T_{z_2 z_2 z_2} \end{aligned}$$

utilizando la notación

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, w) &= G(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) &= T(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

Utilizando calculo simbólico en Matlab, se ha computado la expresión del coeficiente de Liapunov, pero debido a su enorme extensión la omitiremos. Dando valores b y r pertenecientes a nuestra región factible, con ayuda de Matlab, concluimos que

$$a \neq 0 \quad \&\& \quad a > 0$$

en la región de factibilidad. Utilizando los resultados expuestos en el apartado de “Bifurcación de Hopf”, dado que

$$d < 0 \quad \&\& \quad a > 0$$

en la región factible, concluimos que el sistema presenta una órbita periódica inestable ya que $a > 0$. Además, el punto de equilibrio P_2 es inestable para $\mu = \mu_1$ por la misma razón que antes. Cabe preguntarse que sucede a ambos lados del valor de bifurcación μ_1 .

- Si $\mu < \mu_1$, entonces el punto de equilibrio P_2 es inestable.
- Si $\mu > \mu_1$, entonces el punto de equilibrio P_2 es asintóticamente estable con una órbita periódica inestable.

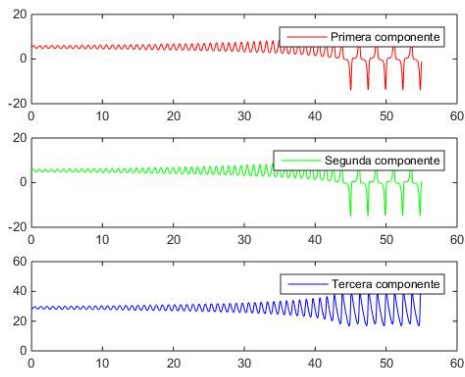
B.1. Caso I: $\mu = \sigma$ parámetro de bifurcación y b, r parámetros de control

Dados los parámetros de control $b = 1$ y $r = 30$, utilizando la herramienta Matlab presentamos las siguientes gráficas que ejemplifican los resultados obtenidos. Con estos datos, el valor de bifurcación viene dado por

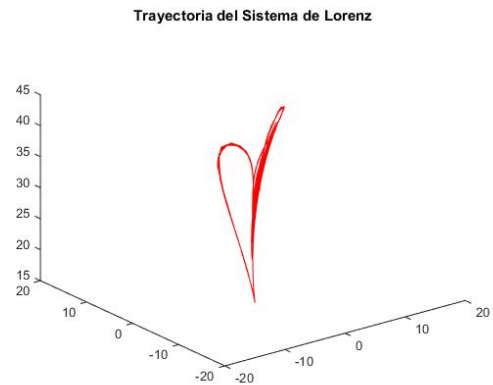
$$\mu_1 = \frac{30 - 1 - 3 + \sqrt{900 + 9 + 6 - 180 - 300 + 1}}{2}$$

$$\approx 23.44$$

Si tomamos $\mu = 22$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$. Las siguientes gráficas ponen de manifiesto la inestabilidad de dicho punto de equilibrio.



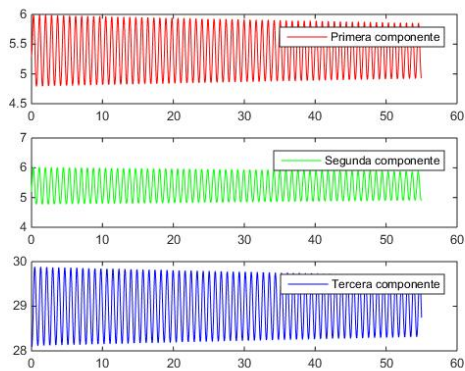
(a) Componentes X, Y, Z



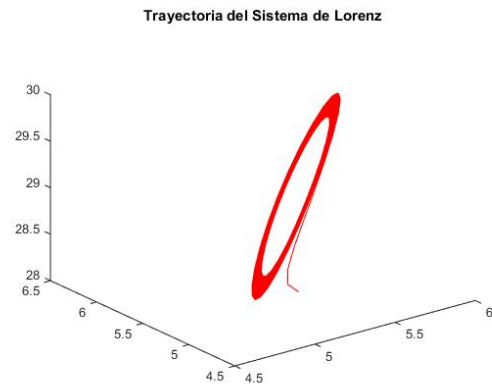
(b) Trayectoria de la solución

Figura B.2: Solución P.V.I. para $X_0 = (5.3, 5.2, 28.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$

Si tomamos $\mu = 25$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$. Las siguientes gráficas ponen de manifiesto la estabilidad asintótica de dicho punto de equilibrio.



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura B.3: Solución P.V.I. para $X_0 = (5.3, 5.2, 28.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29}, \sqrt{29}, 29)$

B.2. Caso II: $\mu = b$ parámetro de bifurcación y σ, r parámetros de control

Bajo estas hipótesis, consideramos el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma Y - \sigma X \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\mu Z + XY\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para este sistema vienen dados por

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= \left(\sqrt{\mu(r-1)}, \sqrt{\mu(r-1)}, r-1\right) \\ P_3 &= \left(-\sqrt{\mu(r-1)}, -\sqrt{\mu(r-1)}, r-1\right)\end{aligned}$$

y, la matriz jacobiana por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-Z & -1 & -X \\ Y & X & -\mu \end{pmatrix}$$

De manera análoga al caso anterior, realizamos un análisis de la bifurcación de Hopf para cada uno de los puntos de equilibrio.

B.2.1. Punto de equilibrio P_1

Para este punto, su matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores, calculados en el apartado de “Puntos de equilibrio” del capítulo dos, vienen dados por

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -\mu \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 + \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma r} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 - \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma r} \right]\end{aligned}$$

La condición para que se produzca una bifurcación de Hopf es que la matriz asociada al sistema lineal posea dos autovalores imaginarios puros y uno real. Para ello, dado que μ es un número estrictamente positivo, tenemos que colocar λ_1 y λ_2 en el eje imaginario. Luego, se debe verificar

$$-1 - \sigma = 0$$

lo que implica que $\sigma = -1$, por tanto, en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

B.2.2. Punto de equilibrio P_2

Las matrices jacobianas en los puntos de equilibrio P_2 y P_3 vienen dadas por

$$DF(P_2) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\mu(r-1)} \\ \sqrt{\mu(r-1)} & \sqrt{\mu(r-1)} & -\mu \end{pmatrix}$$

$$DF(P_3) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\mu(r-1)} \\ -\sqrt{\mu(r-1)} & -\sqrt{\mu(r-1)} & -\mu \end{pmatrix}$$

dando lugar al mismo polinomio característico denotado por

$$P_\lambda(P_{23}) = -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + \mu) - \lambda\mu(\sigma + r) - 2\sigma\mu(r - 1)$$

Por este motivo, nos limitaremos únicamente al estudio del punto de equilibrio P_2 . De la misma manera que en el caso anterior, iremos coleccionado restricciones para los parámetros de control que darán lugar a una región factible.

Primero, el punto de equilibrio P_2 debe pertenecer a \mathbb{R}^3 . Esta condición se traduce en

$$r - 1 > 0 \quad \iff \quad r > 1$$

ya que la igualdad en la condición anterior da lugar al origen como punto de equilibrio. Luego, hemos obtenido la primera de nuestras restricciones

$$\boxed{r > 1}$$

A continuación, denotaremos

$$P_\mu(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + \mu) + \lambda\mu(\sigma + r) + 2\sigma\mu(r - 1) = 0$$

donde hemos multiplicado por -1 al polinomio característico asociado al punto P_2 . Observamos que los coeficientes del polinomio anterior dependen del parámetro de bifurcación μ , lo que justifica nuestra notación.

Dado que las raíces del polinomio $P_\mu(\lambda)$ son los autovalores de la matriz asociada al sistema lineal y que nuestro objetivo es determinar cuándo se produce una bifurcación de Hopf, deseamos encontrar los valores del parámetro de μ con la propiedad de que el polinomio cúbico $P_\mu(\lambda)$ posea un par de raíces complejas y una real. Para ello, empleamos la siguiente notación

$$L_1(\mu) = \sigma + 1 + \mu$$

$$L_2(\mu) = \mu(\sigma + r)$$

$$L_3(\mu) = 2\sigma\mu(r - 1)$$

Utilizando los resultados expuestos en el apéndice de preliminares, para que la ecuación cúbica posea un par de raíces complejas y una real, se deben satisfacer las siguientes relaciones entre los coeficientes de dicho polinomio

$$L_3(\mu) = L_1(\mu) \cdot L_2(\mu) \quad \&\& \quad L_2(\mu) > 0$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mu(\sigma + r) &> 0 \\ 2\sigma\mu(r - 1) &= (\sigma + 1 + \mu) \cdot \mu(\sigma + r)\end{aligned}$$

La primera condición se satisface trivialmente ya que estamos considerando parámetros estrictamente positivos, mientras que la segunda

$$\begin{aligned}2\sigma r - 2\sigma &= \sigma^2 + \sigma r + \sigma + r + \mu\sigma + \mu r \\ &= \sigma^2 - \sigma r + 3\sigma + r + \mu(\sigma + r) \\ &= 0\end{aligned}$$

Despejando μ tenemos

$$\mu_1 = \frac{-\sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r}{\sigma + r}$$

El siguiente paso es estudiar para qué valores de los parámetros de control μ_1 es estrictamente positivo

$$\begin{aligned}\mu_1 > 0 &\iff \frac{-\sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r}{\sigma + r} > 0 \\ &\iff -\sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r > 0 \\ &\iff -\sigma^2 + r(\sigma - 1) - 3\sigma > 0 \\ &\iff r > \frac{\sigma^2 + 3\sigma}{\sigma - 1} \quad (\sigma \neq 1)\end{aligned}$$

Por tanto, nuestra región factible viene dada por las siguientes tres restricciones

- $r > 1$
- $\sigma \neq 1$
- $r > \frac{\sigma^2 + 3\sigma}{\sigma - 1}$

que, con ayuda de Matlab, viene representada por

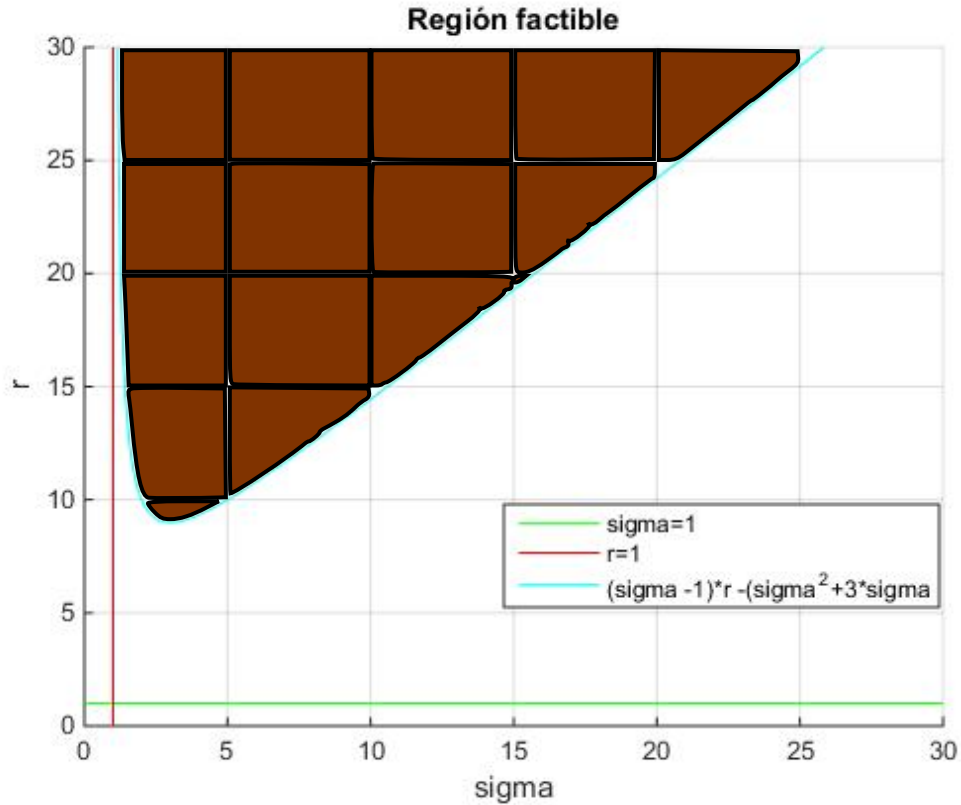


Figura B.4: Región factible.

donde la zona coloreada de color marrón indica la región factible de los parámetros de control para que se produzca una bifurcación de Hopf.

Resumamos, hemos obtenido el polinomio

$$P_{\mu}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + \mu) + \lambda\mu(\sigma + r) + 2\sigma\mu(r - 1) = 0$$

cuyas raíces son los autovalores de la matriz jacobiana $DF(P_2)$. Si $\mu = \mu_1$, entonces dicho polinomio tendrá dos raíces complejas y una real denotadas por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \&\& \quad \lambda_3 = \lambda_0$$

Utilizando los resultados expuestos en el apartado de “Colocación de raíces en el eje imaginario de un polinomio cúbico”, dichas raíces vienen determinadas por

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{L_2(\mu_1)} \\ &= \sqrt{\mu_1(\sigma + r)} \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{L_3(\mu_1)}{L_2(\mu_1)} \\ &= -(\sigma + 1 + \mu_1) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +i\sqrt{\mu_1(\sigma+r)} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{\mu_1(\sigma+r)} \\ \lambda_3 &= -(\sigma+1+\mu_1)\end{aligned}$$

De manera análoga al caso anterior, denominábamos *velocidad de cruce de los autovalores* a la expresión

$$d = \left. \frac{d}{d\mu} (\Re\lambda(\mu)) \right|_{\mu=\mu_1}$$

Por esta razón, se denotaba $d = \alpha'(\mu_1)$. El siguiente paso es calcular dicha velocidad de cruce, cuya expresión se presentó en el apartado correspondiente a “Colocación de raíces en el eje imaginario” dada por

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

donde

$$\begin{aligned}L'_1(\mu_1) &= 1 \\ L'_2(\mu_1) &= \sigma + r \\ L'_3(\mu_1) &= 2\sigma(r-1)\end{aligned}$$

Operando el numerador tenemos

$$\begin{aligned}L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1) &= 2\sigma r - 2\sigma - \mu_1(\sigma+r) - (\sigma+1+\mu_1)(\sigma+r) \\ &= 2\sigma r - 2\sigma - \mu_1\sigma - \mu_1 r - \sigma^2 - \sigma r - \sigma - r - \mu_1\sigma - \mu_1 r \\ &= -\sigma^2 - 3\sigma + \sigma r - 2\mu_1\sigma - 2\mu_1 r - r \\ &= -\sigma^2 - 3\sigma + \sigma r - 2\mu_1(\sigma+r) - r \\ &= -\sigma^2 - 3\sigma + \sigma r - 2(-\sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r) - r \\ &= -\sigma^2 - 3\sigma + \sigma r + 2\sigma^2 - 2\sigma r + 6\sigma + 2r - r \\ &= \sigma^2 + 3\sigma - \sigma r + r\end{aligned}$$

y antes de operar el denominador, conviene

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -(\sigma+1+\mu_1) \\ &= -\left(\sigma+1 + \frac{-\sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r}{\sigma+r}\right) \\ &= -\frac{\sigma^2 + \sigma r + \sigma + r - \sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r}{\sigma+r} \\ &= -\frac{2\sigma r - 2\sigma}{\sigma+r} \\ &= -\frac{2\sigma(r-1)}{\sigma+r}\end{aligned}$$

B.2. Caso II: $\mu = b$ parámetro de bifurcación y σ, r parámetros de control

ahora,

$$\begin{aligned} 2(\lambda_0^2 + \omega_0^2) &= 2 \left(\frac{4\sigma^2 (r-1)^2}{(\sigma+r)^2} + \mu_1\sigma + \mu_1r \right) \\ &= 2 \left(\frac{4\sigma^2 (r-1)^2}{(\sigma+r)^2} - \sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r \right) \end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad de cruce de los autovalores queda

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{\sigma^2 + 3\sigma - \sigma r + r}{2 \left(\frac{4\sigma^2 (r-1)^2}{(\sigma+r)^2} - \sigma^2 + \sigma r - 3\sigma - r \right)}$$

Ahora, con el objetivo de ver el signo de la velocidad de cruce, reescribimos y denotamos

$$\begin{aligned} f &= (\sigma+r)^2 (\sigma^2 + 3\sigma - \sigma r + r) \frac{1}{2} \\ g &= 4\sigma^2 (r-1)^2 - (\sigma+r)^2 \sigma^2 + (\sigma+r)^2 \sigma r - 3(\sigma+r)^2 \sigma - r(\sigma+r)^2 \end{aligned}$$

Utilizando la función *ezplot* de Matlab para la función implícita f obtenemos la gráfica B.5, dando valores para r y σ obtenemos la distribución de signos que se muestra en dicha gráfica.

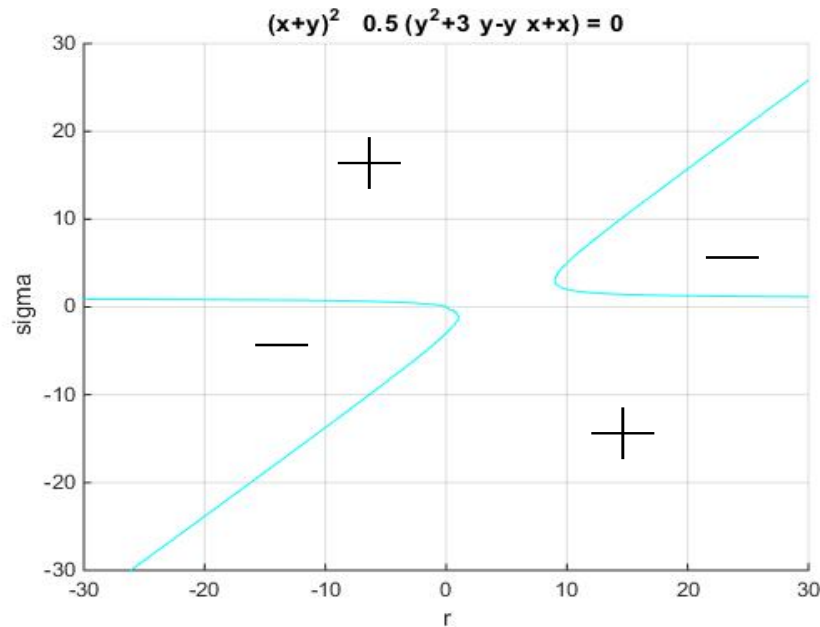


Figura B.5: Numerador. Función f

Del mismo modo, para el denominador se ha obtenido la gráfica B.6, dando valores para r y σ obtenemos la siguiente distribución de signos,

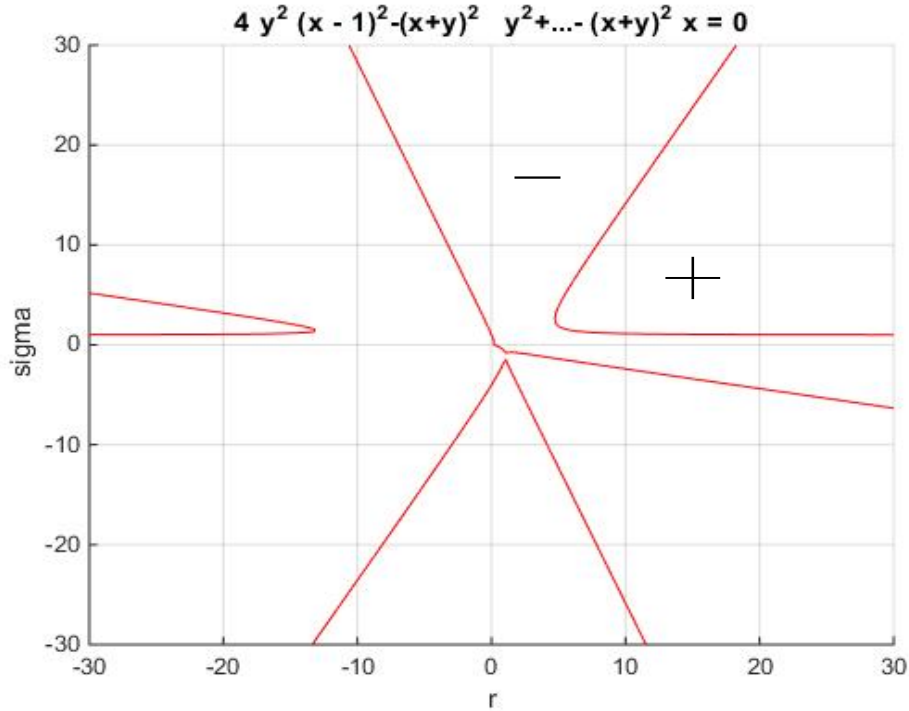


Figura B.6: Denominador. Función g

De manera gráfica, se observa que para valores de σ y r pertenecientes a nuestra región factible, el numerador toma valores positivos mientras que el denominador toma valores negativos. Luego, concluimos que la velocidad de cruce es siempre negativa y no nula.

Cálculo de la variedad central

Del mismo modo que en el caso anterior, seguimos las técnicas expuestas en el apartado correspondiente a “Variedades centrales”. En primer lugar, trasladamos el punto de equilibrio P_2 al origen mediante un cambio de variables

$$\begin{aligned} y_1 &= X - \sqrt{\mu_1 (r - 1)} \\ y_2 &= Y - \sqrt{\mu_1 (r - 1)} \\ y_3 &= Z - (r - 1) \end{aligned}$$

Luego, tomando $\mu = \mu_1$ el sistema de Lorenz queda

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 - y_1 y_3 - y_3 \sqrt{\mu_1 (r - 1)} \\ \dot{y}_3 &= -\mu_1 y_3 + y_1 (y_2 + \sqrt{\mu_1 (r - 1)}) + y_2 \sqrt{\mu_1 (r - 1)} \end{aligned}$$

B.2. Caso II: $\mu = b$ parámetro de bifurcación y σ, r parámetros de control

Ahora, la matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 - y_3 & -1 & -y_1 - \sqrt{\mu_1(r-1)} \\ y_2 + \sqrt{\mu_1(r-1)} & y_1 + \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 \end{pmatrix}$$

que particularizada en el origen

$$DF = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, el punto de equilibrio es el origen y los autovalores siguen siendo los mismos, ya que sólo hemos realizado una traslación. De la misma forma que en el caso anterior, para calcular los autovectores nos basaremos en el *teorema de Cayley-Hamilton*.

$$\begin{aligned} DF - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} -\sigma - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} \\ DF - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} -\sigma + i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 + i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 + i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} \\ DF - \lambda_3 I &= \begin{pmatrix} 1 + \mu_1 & \sigma & 0 \\ 1 & \mu_1 + \sigma & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & 1 + \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación, haremos el producto de matrices para obtener los autovectores. Sólo realizaremos los cálculos para las columnas que vayamos a tomar como autovectores.

- $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 + \mu_1 & \sigma & 0 \\ 1 & \mu_1 + \sigma & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & 1 + \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & -\mu_1 + i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & -\mu_1(r+\sigma) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{\mu_1(r-1)}\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \\ \cdot & \cdot & (1+\sigma)\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 obtenemos el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \mu_1(r+\sigma) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\mu_1(r-1)}\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \\ -(1+\sigma)\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix}$$

▪ $\lambda = \lambda_3$

$$\begin{pmatrix} -\sigma - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 - i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & -\mu_1 + i\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & (1+\mu_1)\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \cdot & \cdot & \mu_1(\sigma + \mu_1 + 1) \end{pmatrix}$$

Luego, multiplicando por -1 , hemos obtenido el autovector

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ -(1+\mu_1)\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ -\mu_1(\sigma + \mu_1 + 1) \end{pmatrix}$$

Por tanto, utilizando la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} & \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)}\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & \sigma\sqrt{\mu_1(r-1)} & -(1+\mu_1)\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ -(1+\sigma)\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & \mu_1(r+\sigma) & -\mu_1(\sigma + \mu_1 + 1) \end{pmatrix}$$

obtenemos la forma de Jordan de DF viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & 0 \\ \sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\mu_1+\sigma) \end{pmatrix}$$

Utilizando cálculo simbólico en Matlab, se ha computado la inversa de la matriz de paso P , debido a su gran extensión, no la mostraremos explícitamente. Por tanto, se verifica la siguiente expresión

$$J = P^{-1}DFP$$

Recordemos que la diferencial es la encargada de llevarse la parte lineal del sistema, con el objetivo de mostrar el procedimiento con claridad, consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicando por P y P^{-1} se tiene

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\mu_1(r-1)} \\ \sqrt{\mu_1(r-1)} & \sqrt{\mu_1(r-1)} & -\mu_1 \end{pmatrix} P P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &+ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B.2. Caso II: $\mu = b$ parámetro de bifurcación y σ, r parámetros de control

y, operando obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & 0 \\ \sqrt{\mu_1(r+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\mu_1+\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde se han introducido las nuevas variables

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \&\& \quad \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

donde f_{11}, f_{22}, f_{33} representan la parte no lineal del sistema en forma de Jordan, se han calculado en Matlab simbólicamente pero se omiten por ser expresiones muy extensas.

Utilizando los mismos resultados que en caso anterior, sabemos que existe una variedad invariante que puede ser localmente representada por

$$W^c(0) = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid w = h(z_1, z_2), \|(z_1, z_2)\| < \delta, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

Esto nos garantiza que la variedad central $W^c(0)$ es tangente al espacio invariante E^c . Por tanto, la expresión de la variedad central viene dada por

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2$$

que derivando tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

Una vez conocida la expresión de la variedad central, nuestro objetivo es determinar el signo del coeficiente de Liapunov, dado por

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2)$$

donde

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{\mu_1(r+\sigma)} \\ R_1 &= G_{z_1 z_2} (G_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2}) - T_{z_1 z_2} (T_{z_1 z_1} + T_{z_2 z_2}) - G_{z_1 z_1} T_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2} T_{z_2 z_2} \\ R_2 &= G_{z_1 z_1 z_1} + G_{z_1 z_2 z_2} + T_{z_1 z_1 z_2} + T_{z_2 z_2 z_2} \end{aligned}$$

utilizando la notación

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, w) &= G(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) &= T(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

Utilizando calculo simbólico en Matlab, se ha computado la expresión del coeficiente de Liapunov, pero debido a su extensa expresión no podemos deducir de manera analítica

ninguna conclusión, por esta razón la omitiremos. Dando valores σ y r pertenecientes a nuestra región factible, con ayuda de Matlab, concluimos que

$$a \neq 0 \quad \&\& \quad a > 0$$

en la región de factibilidad. En resumen, tenemos que

$$a > 0 \quad \&\& \quad d < 0$$

y, utilizando los resultados expuestos en la bifurcación de Hopf concluimos que el sistema presenta una órbita periódica inestable ya que el coeficiente de Liapunov tiene signo positivo. Por esta misma razón, el punto de equilibrio P_2 es inestable para $\mu = \mu_1$. Ahora, cabe preguntarse por la estabilidad de dicho punto de equilibrio cuando el parámetro de bifurcación atraviesa el valor μ_1 . Utilizando los resultados acerca de la bifurcación de Hopf, concluimos

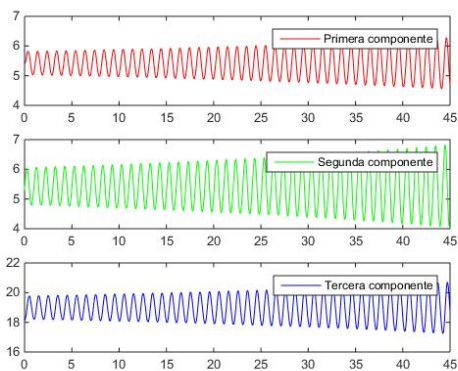
- Si $\mu < \mu_1$, entonces el punto de equilibrio P_2 es inestable.
- Si $\mu > \mu_1$, entonces el punto de equilibrio P_2 es asintóticamente estable con una órbita periódica inestable.

Dados los parámetros de control $\sigma = 5$ y $r = 20$, el valor de bifurcación viene dado por

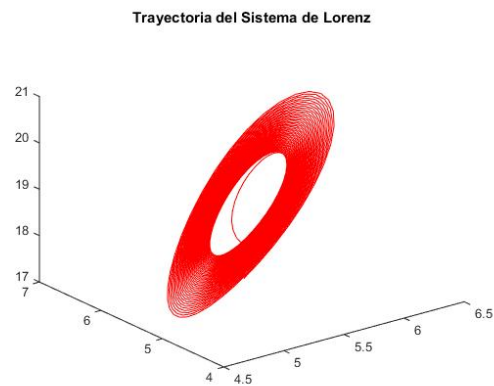
$$\mu_1 = \frac{-5^2 + 5 \cdot 20 - 3 \cdot 5 - 20}{5 + 20} = 1.6$$

Las siguientes gráficas ejemplifican de manera visual los fenómenos que se producen para valores del parámetro μ más grandes y más pequeños que el valor de bifurcación μ_1 .

Si tomamos $\mu = 1.55$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{29.45}, \sqrt{29.45}, 19)$, ya que $\mu < \mu_1$ la siguiente gráfica pone de manifiesto la inestabilidad de dicho punto.



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura B.7: Solución P.V.I. para $X_0 = (5.4, 5.3, 18.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{29.45}, \sqrt{29.45}, 19)$

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

Si tomamos $\mu = 1.65$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{31.35}, \sqrt{31.35}, 19)$, ya que $\mu > \mu_1$ la siguiente gráfica pone de manifiesto la estabilidad asintótica de dicho punto.

En estas gráficas se aprecia la existencia de la bifurcación de Hopf, debido al cambio de estabilidad del punto de equilibrio al variar el parámetro de bifurcación.

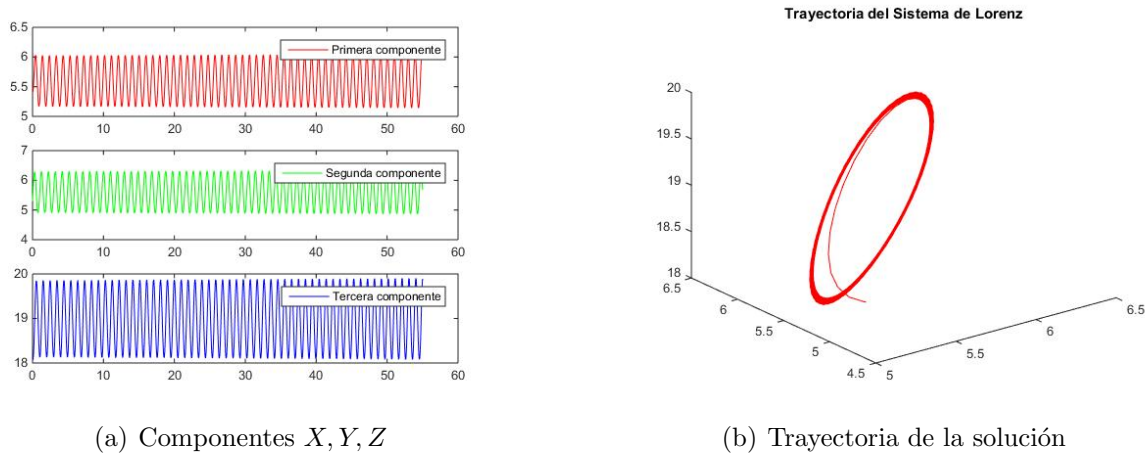


Figura B.8: Solución P.V.I. para $X_0 = (5.4, 5.3, 18.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{31.35}, \sqrt{31.35}, 19)$

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

Con estas premisas, el sistema de Lorenz resulta

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma Y - \sigma X \\ \dot{Y} &= \mu X - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para este sistema vienen dados por

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= \left(\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1\right) \\ P_3 &= \left(-\sqrt{b(\mu - 1)}, -\sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1\right)\end{aligned}$$

y, la matriz jacobiana por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \mu - Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}$$

Siguiendo el método de trabajo que venimos empleado, realizamos un análisis de la bifurcación de Hopf para cada uno de los puntos de equilibrio.

B.3.1. Punto de equilibrio P_1

Para este punto, su matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores, calculados previamente, vienen dados por

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -b \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 + \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma\mu} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 - \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma\mu} \right] \end{aligned}$$

Dado que λ_0 es un autovalor real, para que se produzca una bifurcación de Hopf necesitamos colocar los autovalores λ_1 y λ_2 en el eje imaginario. Por esta razón, se debe cumplir

$$-\sigma - 1 = 0$$

Luego, necesariamente $\sigma = -1$, y por tanto concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf, ya que consideramos parámetros de control estrictamente positivos.

B.3.2. Punto de equilibrio P_2

Las matrices jacobianas en los puntos de equilibrio P_2 y P_3 vienen dadas por

$$\begin{aligned} DF(P_2) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu-1)} \\ \sqrt{b(\mu-1)} & \sqrt{b(\mu-1)} & -b \end{pmatrix} \\ DF(P_3) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(\mu-1)} \\ -\sqrt{b(\mu-1)} & -\sqrt{b(\mu-1)} & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dando lugar al mismo polinomio característico denotado por

$$P_\lambda(P_{23}) = -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda b(\sigma + \mu) - 2\sigma b(\mu - 1)$$

Por este motivo, nos limitaremos únicamente al estudio del punto de equilibrio P_2 . De acuerdo con el método de trabajo seguido en los dos casos anteriores, iremos coleccionado restricciones para los parámetros de control, que nos proporcionarán una región factible para los que se produce una bifurcación de Hopf.

Primero, el punto de equilibrio P_2 debe pertenecer a \mathbb{R}^3 . Esta condición se traduce en

$$\mu - 1 > 0 \quad \iff \quad \mu > 1$$

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

Esta restricción afecta al parámetro de bifurcación, no a los parámetros de control.

Ahora, denotamos

$$P_\mu(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + b) + \lambda b(\sigma + \mu) + 2\sigma b(\mu - 1) = 0$$

donde hemos multiplicado por -1 al polinomio característico asociado al punto P_2 . Observamos que los coeficientes del polinomio anterior dependen del parámetro de bifurcación μ , lo que justifica nuestra notación.

Dado que las raíces del polinomio $P_\mu(\lambda)$ son los autovalores de la matriz asociada al sistema lineal y que nuestro objetivo es determinar cuándo se produce una bifurcación de Hopf, deseamos encontrar valores del parámetro μ con la propiedad de que el polinomio cúbico $P_\mu(\lambda)$ posea un par de raíces complejas y una real. Para ello, empleamos la siguiente notación

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= \sigma + 1 + b \\L_2(\mu) &= b(\sigma + \mu) \\L_3(\mu) &= 2\sigma b(\mu - 1)\end{aligned}$$

De manera análoga a los casos anteriores, para que la ecuación de grado tres posea un par de raíces complejas y una real, se deben cumplir las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$L_3(\mu) = L_1(\mu) \cdot L_2(\mu) \quad \&\& \quad L_2(\mu) > 0$$

Luego,

$$\begin{aligned}b(\sigma + \mu) &> 0 \\2\sigma b(\mu - 1) &= (\sigma + 1 + b) \cdot b(\sigma + \mu)\end{aligned}$$

La primera condición se verifica trivialmente ya que estamos considerando parámetros del sistema estrictamente positivos, mientras que la segunda

$$\begin{aligned}2\sigma\mu - 2\sigma &= \sigma^2 + \sigma\mu + \sigma + \mu + b\sigma + b\mu \\&= \sigma^2 - \sigma\mu + 3\sigma + \mu + b\sigma + b\mu \\&= \sigma^2 + \sigma(b + 3) + \mu(-\sigma + 1 + b) \\&= 0\end{aligned}$$

Despejando μ tenemos

$$\mu_1 = \frac{-\sigma^2 - \sigma(b + 3)}{-\sigma + 1 + b}$$

donde, sacando factor -1 , se obtiene

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2 + \sigma b + 3\sigma}{\sigma - 1 - b}$$

Observamos que μ_1 es el valor que denominábamos r_H en el apartado de “Puntos de equilibrio” del capítulo dos (véase página 57).

Como venimos haciendo, el siguiente paso es estudiar para qué valores de los parámetros de control μ_1 es estrictamente positivo. Dado que el numerador es siempre positivo, debemos imponer que el denominador también lo sea

$$\begin{aligned}\mu_1 > 0 &\iff \sigma - 1 - b > 0 \\ &\iff \sigma > 1 + b\end{aligned}$$

Ahora, debemos garantizar que μ_1 sea estrictamente mayor que uno debido a la condición mencionada anteriormente,

$$\begin{aligned}\mu_1 > 1 &\iff \frac{\sigma^2 + \sigma b + 3\sigma}{\sigma - 1 - b} > 1 \\ &\iff \sigma^2 + \sigma b + 3\sigma > \sigma - 1 - b \\ &\iff \sigma^2 + b\sigma + 1 + 2\sigma + 1 > 0 \quad (\text{se cumple } \forall \sigma, b > 0)\end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple para todo valor estrictamente positivo de los parámetros de control, en particular para $\sigma > 1 + b$. Por tanto, para que el punto de equilibrio P_2 pertenezca a \mathbb{R}^3 y μ_1 sea estrictamente positivo, los parámetros de control deben satisfacer la siguiente condición

$$\boxed{\sigma > 1 + b}$$

dando lugar a la siguiente región factible

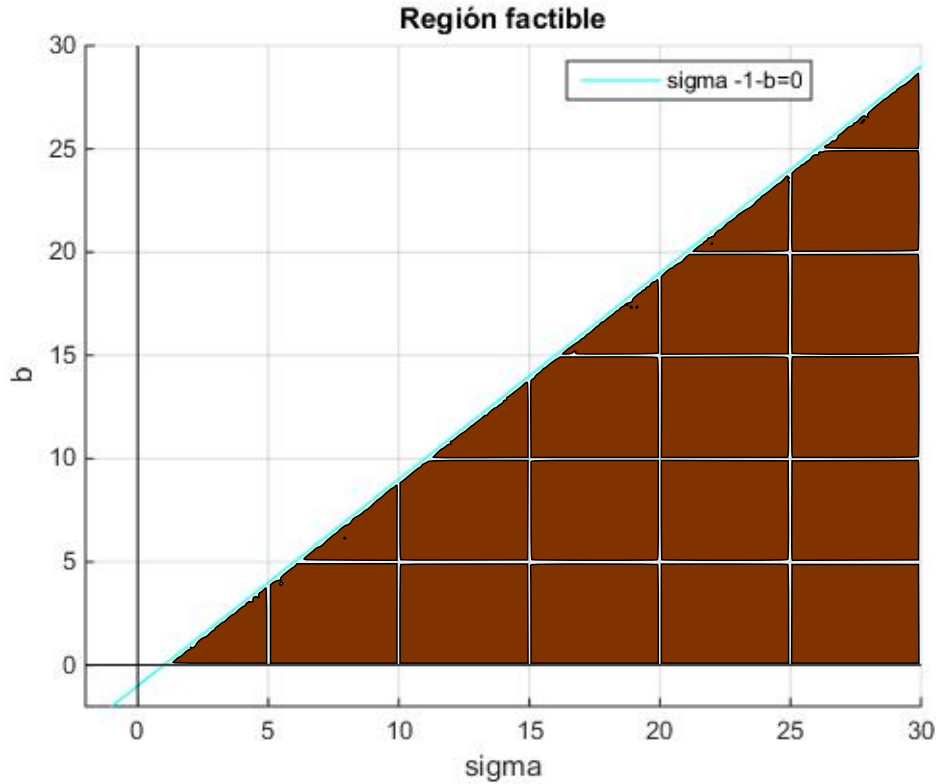


Figura B.9: Región factible.

donde la zona coloreada de color marrón indica la región factible de los parámetros de control para que se produzca una bifurcación de Hopf.

En resumen, hemos obtenido el polinomio

$$P_{\mu}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + b) + \lambda b(\sigma + \mu) + 2\sigma b(\mu - 1) = 0$$

cuyas raíces son los autovalores de la matriz jacobiana $DF(P_2)$. Para el valor $\mu = \mu_1$, este polinomio tendrá dos raíces complejas y una real denotadas por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \&\& \quad \lambda_3 = \lambda_0$$

Como en los casos anteriores, utilizando los resultados expuestos en el apartado de “Colocación de raíces en el eje imaginario de un polinomio cúbico”, dichas raíces vienen determinadas por

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{L_2(\mu_1)} \\ &= \sqrt{b(\sigma + \mu_1)} \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{L_3(\mu_1)}{L_2(\mu_1)} \\ &= -(\sigma + 1 + b) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +i\sqrt{b(\sigma + \mu_1)} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{b(\sigma + \mu_1)} \\ \lambda_3 &= -(\sigma + 1 + b)\end{aligned}$$

En el apéndice de “preliminares” denominábamos *velocidad de cruce de los autovalores* a la expresión

$$d = \left. \frac{d}{d\mu} (\Re\lambda(\mu)) \right|_{\mu=\mu_1}$$

Por esta razón, se denotaba $d = \alpha'(\mu_1)$. El siguiente paso es determinar el signo de la velocidad de cruce, cuya expresión se presentó en el apartado correspondiente a “Colocación de raíces en el eje imaginario” dada por

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

donde

$$\begin{aligned}L'_1(\mu_1) &= 0 \\ L'_2(\mu_1) &= b \\ L'_3(\mu_1) &= 2\sigma b\end{aligned}$$

Operando el numerador tenemos

$$\begin{aligned}L'_3(\mu_1) - \omega_0^2 L'_1(\mu_1) + \lambda_0 L'_2(\mu_1) &= 2\sigma b - 0 - (\sigma + 1 + b)b \\ &= \sigma b - b - b^2 \\ &= b(\sigma - 1 - b)\end{aligned}$$

y el denominador,

$$\begin{aligned}2(\lambda_0^2 + \omega_0^2) &= 2((\sigma + 1 + b)^2 + b(\sigma + \mu_1)) \\ &= 2\left((\sigma + 1 + b)^2 + b\sigma + \frac{b\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - 1 - b}\right)\end{aligned}$$

Luego, la velocidad de cruce viene dada por

$$\alpha'(\mu_1) = \frac{b(\sigma - 1 - b)}{2\left((\sigma + 1 + b)^2 + b\sigma + \frac{b\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - 1 - b}\right)}$$

Nuestra región factible viene dada por la condición $\sigma > 1 + b$, lo que implica que el numerador es positivo y no nulo para valores de los parámetros de control pertenecientes

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

a la misma. En cuanto al denominador, el término $(\sigma + 1 + b)^2$ es siempre positivo y no nulo, el segundo término $b\sigma$ también lo es, y veamos el tercer término

$$\frac{b\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - 1 - b}$$

donde el numerador es siempre positivo y no nulo para b, σ estrictamente positivos, y el denominador también lo es para valores de los parámetros de control en la región factible $\sigma > 1 + b$.

Por tanto, concluimos que la velocidad de cruce es siempre no nula y positiva para valores de los parámetros de control pertenecientes a la región factible. Luego, podemos afirmar que en la región de factibilidad se produce una bifurcación de Hopf.

Cálculo de la variedad central

Siguiendo el método de trabajo expuesto en los casos anteriores, trasladamos el punto de equilibrio P_2 al origen mediante un cambio de variables

$$\begin{aligned}y_1 &= X - \sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\y_2 &= Y - \sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\y_3 &= Z - (\mu_1 - 1)\end{aligned}$$

Luego, tomando $\mu = \mu_1$ el sistema de Lorenz queda

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \sigma(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 - y_1 y_3 - y_3 \sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \dot{y}_3 &= -b y_3 + y_1 \left(y_2 + \sqrt{b(\mu_1 - 1)} \right) + y_2 \sqrt{b(\mu_1 - 1)}\end{aligned}$$

Ahora, la matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 - y_3 & -1 & -y_1 - \sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ y_2 + \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & y_1 + \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b \end{pmatrix}$$

que particularizada en el origen

$$DF = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b \end{pmatrix}$$

Por tanto, el punto de equilibrio es el origen y los autovalores siguen siendo los mismos, ya que sólo hemos realizado una traslación. De la misma forma que en los casos anteriores,

nos basaremos en el *teorema de Cayley-Hamilton* para el cálculo de los autovectores.

$$\begin{aligned}
 DF - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} -\sigma - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix} \\
 DF - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} -\sigma + i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 + i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b + i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix} \\
 DF - \lambda_3 I &= \begin{pmatrix} 1 + b & \sigma & 0 \\ 1 & b + \sigma & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & 1 + \sigma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A continuación, haremos el producto de matrices para obtener los autovectores. Sólo realizaremos los cálculos para las columnas que vayamos a tomar como autovectores.

▪ $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 + b & \sigma & 0 \\ 1 & b + \sigma & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & 1 + \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b + i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b(\mu_1 + \sigma) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)}\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \\ \cdot & \cdot & (1 + \sigma)\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 obtenemos el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ b(\mu_1 + \sigma) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)}\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \\ -(1 + \sigma)\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix}$$

▪ $\lambda = \lambda_3$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -\sigma - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b - i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & -b + i\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & (1 + b)\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \cdot & \cdot & b(\sigma + b + 1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 , hemos obtenido el autovector

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ -(1 + b)\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ -b(\sigma + b + 1) \end{pmatrix}$$

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

Luego, utilizando la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)}\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & \sigma\sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -(1+b)\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ -(1+\sigma)\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & b(\mu_1 + \sigma) & -b(\sigma + b + 1) \end{pmatrix}$$

obtenemos la forma de Jordan de la matriz DF dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & 0 \\ \sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b+\sigma) \end{pmatrix}$$

Utilizando cálculo simbólico en Matlab, se ha computado la inversa de la matriz de paso P , debido a su gran extensión, no la mostraremos explícitamente. Por álgebra lineal, sabemos que se verifica

$$J = P^{-1}DFP$$

Recordemos que la diferencial es la encargada de llevarse la parte lineal del sistema, con el propósito de mostrar el procedimiento con claridad, consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicando cuidadosamente por P^{-1} y P se tiene

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu_1 - 1)} \\ \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & \sqrt{b(\mu_1 - 1)} & -b \end{pmatrix} PP^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

y, operando obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & 0 \\ \sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b+\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix}$$

donde se han introducido las nuevas variables

$$(z_1 \ z_2 \ w) = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \&\& \quad \begin{pmatrix} f_{11}(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) \\ f_{33}(z_1, z_2, w) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$$

donde f_{11}, f_{22}, f_{33} representan la parte no lineal del sistema en forma de Jordan, se han calculado en Matlab simbólicamente pero se omiten por ser expresiones muy extensas.

Utilizando los mismos resultados que en los casos anteriores, sabemos que existe una variedad invariante que puede ser localmente representada por

$$W^c(0) = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid w = h(z_1, z_2), \|(z_1, z_2)\| < \delta, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

Esto nos garantiza que la variedad central $W^c(0)$ es tangente al espacio invariante E^c . Por tanto, la expresión de la variedad central viene dada por

$$w = h(z_1, z_2) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2$$

que derivando tenemos

$$\dot{w} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

Empleando cálculo simbólico en Matlab, se ha computado la expresión de la función h , es decir, se han obtenido los coeficientes a_1 , a_2 y a_3 , pero debido a su gran extensión no se muestran explícitamente.

Una vez conocida la expresión de la variedad central, nuestro objetivo es determinar el signo del coeficiente de Liapunov, dado por

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2)$$

donde

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{b(\mu_1 + \sigma)} \\ R_1 &= G_{z_1 z_2} (G_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2}) - T_{z_1 z_2} (T_{z_1 z_1} + T_{z_2 z_2}) - G_{z_1 z_1} T_{z_1 z_1} + G_{z_2 z_2} T_{z_2 z_2} \\ R_2 &= G_{z_1 z_1 z_1} + G_{z_1 z_2 z_2} + T_{z_1 z_1 z_2} + T_{z_2 z_2 z_2} \end{aligned}$$

utilizando la notación

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, w) &= G(z_1, z_2, w) \\ f_{22}(z_1, z_2, w) &= T(z_1, z_2, w) \end{aligned}$$

Utilizando cálculo simbólico en Matlab, se ha computado la expresión del coeficiente de Liapunov, pero debido a su extensa expresión no podemos deducir de manera analítica ninguna conclusión, por esta razón la omitiremos. Dando valores σ y b pertenecientes a nuestra región factible, con ayuda de Matlab, concluimos que

$$a \neq 0 \quad \&\& \quad a > 0$$

en la región de factibilidad. En resumen, tenemos que

$$a > 0 \quad \&\& \quad d > 0$$

Por tanto, utilizando los resultados acerca de la bifurcación de Hopf, el sistema presenta una órbita periódica inestable. Debido a que el coeficiente de Liapunov a es estrictamente positivo en la región de factibilidad, afirmamos que el punto de equilibrio P_2 es inestable para $\mu = \mu_1$. Ahora, cabe preguntarse por la estabilidad de dicho punto de equilibrio cuando el parámetro de bifurcación μ se encuentra a la derecha o a la izquierda del valor de bifurcación μ_1 ,

B.3. Caso III: $\mu = r$ parámetro de bifurcación y σ, b parámetros de control

- Si $\mu > \mu_1$, entonces el punto de equilibrio P_2 es inestable.
- Si $\mu < \mu_1$, entonces dicho punto de equilibrio es asintóticamente estable con una órbita periódica inestable.

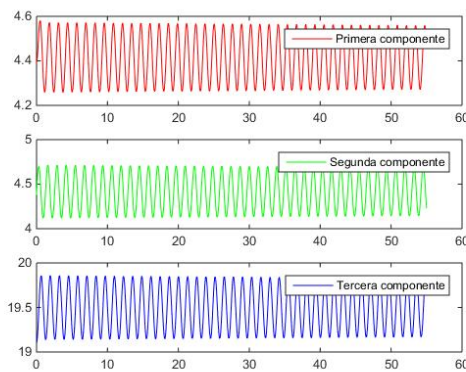
Este cambio de estabilidad del punto de equilibrio al pasar el parámetro de bifurcación el valor μ_1 justifica la presencia de una bifurcación de Hopf.

Con el propósito de ejemplificar este fenómeno, considerando los parámetros de control $\sigma = 3$ y $b = 1$ pertenecientes a nuestra región factible, calculamos

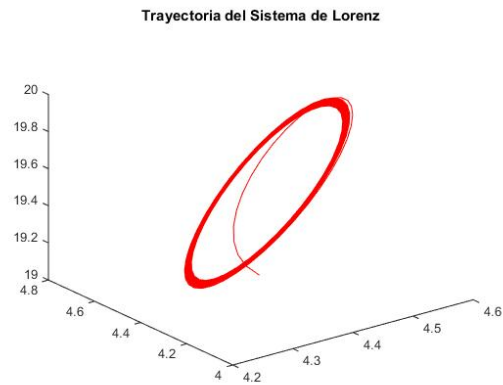
$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\sigma^2 + \sigma b + 3\sigma}{\sigma - 1 - b} \\ &= \frac{9 + 3 + 9}{3 - 1 - 1} \\ &= \frac{21}{1} \\ &= 21 \end{aligned}$$

Ahora, las siguientes gráficas exponen de manera visual el cambio de estabilidad que se produce para valores del parámetro de bifurcación μ a la derecha y a la izquierda del valor μ_1 .

Si tomamos $\mu = 20.5$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{19.5}, \sqrt{19.5}, 19.5)$. Dado que $\mu < \mu_1$, las siguientes gráficas obtenidas con la herramienta de Matlab ponen de manifiesto la estabilidad asintótica del mismo,



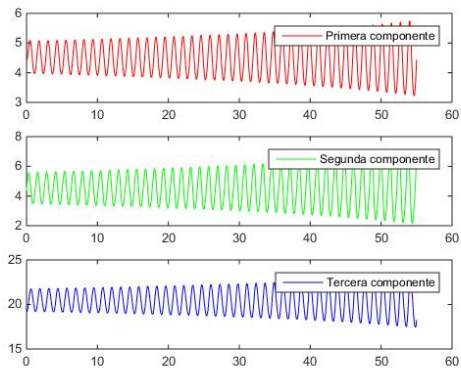
(a) Componentes X, Y, Z



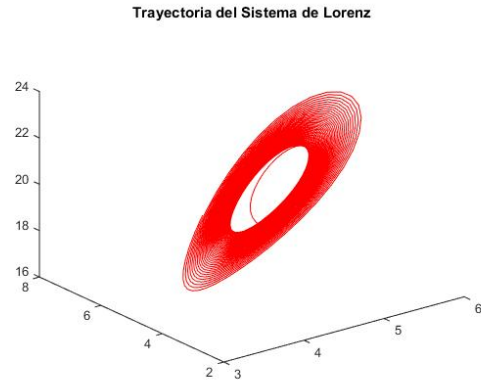
(b) Trayectoria de la solución

Figura B.10: Solución P.V.I. para $X_0 = (4.39, 4.38, 19.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{19.5}, \sqrt{19.5}, 19.5)$

Si tomamos $\mu = 21.5$, obtenemos el punto de equilibrio $P_2 = (\sqrt{20.5}, \sqrt{20.5}, 20.5)$. Dado que $\mu > \mu_1$, las siguientes gráficas ponen de manifiesto la inestabilidad del mismo,



(a) Componentes X, Y, Z



(b) Trayectoria de la solución

Figura B.11: Solución P.V.I. para $X_0 = (4.39, 4.38, 19.1)$, Punto de equilibrio $(\sqrt{20.5}, \sqrt{20.5}, 20.5)$

B.4. Conclusiones

Recopilando los resultados obtenidos del análisis de los tres casos anteriores, concluimos que si se considera cualquiera de los parámetros del sistema como parámetro de bifurcación μ , entonces

- En el origen como punto de equilibrio nunca se produce una bifurcación de Hopf.
- En los puntos de equilibrio P_2 y P_3 sí ocurre una bifurcación de Hopf para valores de los parámetros de control en la región factible de cada caso. En todos ellos, el sistema exhibe una *bifurcación de Hopf subcrítica* ya que el coeficiente de Liapunov en todos los casos anteriores es estrictamente positivo.

Código de Matlab

Este apéndice está destinado a mostrar el código de Matlab de todos los algoritmos numéricos que he desarrollado para resolver numéricamente el sistema de Lorenz y obtener así las gráficas que se muestran a lo largo de este trabajo.

Con el objetivo de que este apéndice sea lo más compacto y breve posible, no mostraremos las llamadas a las funciones que aquí se muestran, sino simplemente la implementación de los algoritmos.

C.1. Runge-Kutta de orden 4 explícito

```

1  %MIRK4: Metodo Rung-Kutta de orden 4
2  function [t,u] = mirk4(fun,tinic,tfin,N,x0,par)
3  etapas = 4;
4  % 1.Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
5  m = size(x0,1);
6  % 2.Defino el paso
7  h = (tfin - tinic)/N;
8  % 3.Defino el mallado (salida)
9  t= tinic:h:tfin;
10 % Los puntos calculados son columnas de 3 componentes
11 % Calculo N+1 puntos
12 % 4.Inicializo
13 u = zeros(m,N+1);
14 %5.Meto en la primera columna x0
15 u(:,1) = x0;
16 % Tablero de Butcher
17 c = [0;1/2;1/2;1];
18 A = [0 0 0 0; 1/2 0 0 0; 0 1/2 0 0; 0 0 1 0];
19 b = [1/6 2/6 2/6 1/6];

```

```

20
21 % 6. Bucle
22 K = zeros(etapas,m);
23 for n=1:N
24     for i=1:etapas
25         K(i,:) = fun(t(n) + c(i,1)*h,u(:,n) + h*(A(i,:)*K)',par);
26     end
27     u(:,n+1) = u(:,n) +h*(b*K)';
28 end
29 end

```

C.2. Método predictor-corrector. Adams-Bashforth-Adams-Moulton

```

1 %MIAB5AM4:
2 %Predictor -> Metodo de Adams-Bashforth de 5 pasos
3 %Corrector -> Metodo de Adams-Moulton de 4 pasos
4 %Metodo inicializador: Runge-Kutta de orden 4
5 function [t,u] = miab5am(fun,tinic,tfin,N,x0,par)
6 %1. Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
7 m = size(x0,1);
8 %2. Defino el paso
9 h = (tfin - tinic)/N;
10 %3. Defino el mallado (salida)
11 t= tinic:h:tfin;
12 % Los puntos calculados son columnas de m componentes
13 %Calculo N+1 puntos
14 %4. Inicializo
15 u = zeros(m,N+1);
16 %5. Meto en la primera columna x0
17 u(:,1) = x0;
18 %INICIALIZAMOS X0,X1,X2,X3,X5 CON MIRK4 PARA ARRANCAR ADAMS-
19 % BASHFORTH de 5 pasos
20 % Lo que devuelve se coloca en las cinco primeras columnas de u
21 [%~,u(:,1:5)] = mirk4 (fun, tinic, tinic + 4*h,4,x0,par);
22
23 % Utilizamos una matriz en la que guardemos las evaluaciones de la
24 %funcion f
25 matriz_eval = zeros(m,N+1);
26 %INICIALIZAMOS LOS 3 PRIMEROS VALORES(f_0,f_1,f_2)
27 for i=1:4
28     matriz_eval(:,i) = fun(t(i),u(:,i),par);
29 end
30 for n=5:N

```

```

31     matriz_eval(:,n) = fun (t(n), u(:,n),par);
32     %PREDICTOR: Calculo de Z_0 con Adams-Bashforth
33     Z_0 = u(:,n) + (h/720)* (1901*matriz_eval(:,n) - 2774*
        matriz_eval(:,n-1) + 2616*matriz_eval(:,n-2) - 1274*
        matriz_eval(:,n-3) + 251*matriz_eval(:,n-4));
34     %CORRECTOR: u(:,n+1) = F_n(Z_0) Adams-Moulton
35     u(:,n+1) = u(:,n) + (h/720) * (251 * fun (t(n+1),Z_0,par) +
        646* matriz_eval(:,n) - 264* matriz_eval(:,n-1) + 106*
        matriz_eval(:,n-2) -19*matriz_eval(:,n-3));
36 end
37 end

```

C.3. Método del trapecio implementado con el método de Newton

```

1  %MITRAP: Metodo del trapecio, utilizando el metodo de Newton en
    cada
2  %iteracion para resolver la ecuacion implicita
3  %Entrada: jac -> fichero de tipo function con el jacobiano de la
    ec dif.
4  %          itmax -> Numero maximo de iteracion en el metodo de
    Newton
5  %Salida: t -> vector fila de tiempos
6  %          u -> matriz con la aproximacion
7  %          numfun -> contador del numero de evaluaciones de la
    funcion
8  function [t,u,numfun] = mitrap(fun,tinic,tfin,N,x0,par,jac,itmax)
9  %1.Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
10 m = size(x0,1);
11 %2.Defino el paso
12 h = (tfin - tinic)/N;
13 %3.Defino el mallado (salida)
14 t= tinic:h:tfin;
15 % Los puntos calculados son columnas de m componentes
16 %Calculo N+1 puntos
17 %4.Inicializo
18 u = zeros(m,N+1);
19 %5.Meto en la primera columna x0
20 u(:,1) = x0;
21 numfun = 0;
22 %Para las iteraciones del Metodo de Newton, los Z_j se guardan
23 % en la matriz Z (como maximo haremos itmax iteraciones)
24 %Inicializacion
25 Z = zeros(m,itmax);
26 %6.Bucle

```

```

27 for n=1:N
28     %El calculo x(n) + (h/2)*f(t(n),x(n)) es el mismo para
29     %todas las iteraciones del Met. Newton
30     valor = u(:,n) + (h/2)*fun(t(n),u(:,n),par);
31     numfun = numfun +1;
32     %Inicializamos Z_0 (Z_0 = x(n))
33     Z(:,1) = u(:,n);
34     %Inicializacion bucle
35     j = 1;
36     seguimos = true;
37     while (seguimos)
38         %G_n(Z_j) = Z_j - valor - (h/2)*f(t(n+1),Z_j)
39         G = Z(:,j) - valor - (h/2)*fun(t(n+1),Z(:,j),par);
40         %Incrmentamos el contador de evaluaciones de la funcion f
41         numfun = numfun +1;
42         %Calculamos la diferencial de G_n (Derivada respecto a Z)
43         %DG_n(Z_j) = I - (h/2)*D_xf(t(n+1),Z_j)
44         DG = eye(m) - (h/2)*jac(t(n+1),Z(:,j),par);
45         %Resolvemos el sistema DG_n(Z_j)W = G_n(Z_j);
46         W = DG\G;
47         %W es el error W = x(n)-x(n+1);
48         Z(:,j+1) = Z(:,j) - W;
49         j = j+1;
50         %Criterio de parada: mientras que norm_inf(W) >= h^3 && no
           hayamos
51         %llegado a las oteraciones maximas, seguimos con el bucle
52         %W es el error, Recuerda: f'(x(n))= f(x(n))/(x(n) - x(n+1)
           )
53         %En cada vuelta se mejora la aproximacion x(n+1)
54         seguimos = (norm(W,inf) >= h^3 && j < itmax);
55     end
56     u(:,n+1) = Z(:,j);
57 end
58 end

```

```

1 %Jacobiano del sistema de Lorenz
2 function f = jaclorenz(t,x,par)
3     sigma = par(1);
4     rho = par(2);
5     beta = par(3);
6     f = [-1*sigma,sigma,0;rho - x(3),-1,-x(1);x(2),x(1),-beta];
7 end

```

C.4. Método predictor-corrector. Euler-trapecio

```

1  %MIEULERTR: Metodo prediccion correccion
2  %Predictor -> Metodo de Euler
3  %Corrector -> Metodo del trapecio
4  function [t,u] = mieulertr(fun,tinic,tfin,N,x0,par)
5  %1.Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
6  m = size(x0,1);
7  %2.Defino el paso
8  h = (tfin - tinic)/N;
9  %3.Defino el mallado (salida)
10 t= tinic:h:tfin;
11 %4.Inicializo
12 u = zeros(m,N+1);
13 %5.Meto en la primera columna x0
14 u(:,1) = x0;
15 %UTILIZAMOS UN METODO PREDICTOR(EULER) PARA CALCULAR Z_0
16 for n=1:N
17     % Por eficiencia, evaluamos f(t_n,x_n)
18     eval_n = fun(t(n), u(:,n),par);
19     %PREDICTOR explicito(EULER) PARA CALCULAR Z_0
20     %Z_0 = x_n + h*fun(t_n,x_n)
21     Z_0 = u(:,n) + h * eval_n;
22     %CORRECTOR: F_n(Z) = Z %% (Z_(j+1) = F_n(Z_j))%% TRAPECIO
23     %x_(n+1) = x_n + (h/2) * (f(t_n,x_n) + f(t_(n+1),x_(n+1)))
24     % x_(n+1) = Z_1 = F_n(Z_0)
25     u(:,n+1) = u(:,n) + (h/2) * (eval_n + fun(t(n+1),Z_0,par));
26 end
27 end

```

C.5. Método adaptativo Runge Kutta Felberg

```

1  %MIRKF45: Implementacion del metodo de Runge Kutta Felberg
2  % El metodo de Runge kutta Felber utiliza un metodo interno de
3  % orden 4 y
4  % un metodo externo de orden 5
5  % Por lo que el orden siempre es del metodo que queremos resolver,
6  % es,
7  % decir, el interno, por lo que orden = 4;
8  function [t,u,H,ERROR,rechazo]= mirkf45(fun,tinic,tfin,x0,par,h0,
9  TOL,hmin)
10 %1. Generamos el tablero de Butcher
11 c = [0;1/4;3/8;12/13;1;1/2];
12 A = [0 0 0 0 0 0;

```

```

11     1/4 0 0 0 0 0;
12     3/32 9/32 0 0 0 0;
13     1932/2197 -7200/2197 7296/2197 0 0 0;
14     439/216 -8 3680/513 -845/4104 0 0;
15     -8/27 2 -3544/2565 1859/4104 -11/40 0];
16
17 b = [25/216 0 1408/2565 2197/4104 -1/5 0];
18 b_gorro = [16/135 0 6656/12825 28561/56430 -9/50 2/55]
19
20 %2.Introducimos las constantes del programa
21
22 hmax = (tfin - tinic)/10;
23 fac = 0.9;
24 facmax = 5;
25
26 %3. INICIALIZAMOS LAS VARIABLES
27
28 % Inicializamos el primer paso tentativo h
29 h = h0;
30
31 %Inicializamos t
32 t = [tinic];
33
34 %Inicializamos el vector fila H que contiene los pasos
35 H = [h0];
36
37 %Inicializamos u
38 u = [x0];
39
40 %Inicializamos el vector fila que contiene los errores
41 ERROR = [0];
42
43 %Inicializamos la varibale rechazo que mide el numero de veces que
44     se rechaza el calculo
45 rechazo = 0;
46
47 %Inicializamos n
48 n = 1;
49
50 %Inicializamos la variable K
51 etapas = 6;
52 %Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
53 m = size(x0,1);
54 K = zeros(etapas,m); % K tiene 6 filas[k1;k2;k3;k4;k5;k6]
55
56 coefs_error = [1/360 0 -128/4275 -2197/75240 1/50 2/55];
57
58 %Para calcular el l_opt, utilizamos el orden del metodo interno

```

```
58 orden = 4;
59 while (t(n) <= tfin)
60     % Comprobamos que desde el nodo que estamos + el paso
        tentativo
61     % que vamos a probar no nos salgamos del intervalo
62     if (t(n) + h > tfin)
63         h = tfin - t(n);
64     end
65
66     % Calculamos los K_i
67     for i=1:etapas
68         K(i,:) = fun(t(n) + c(i,1)*h,u(:,n) + h*(A(i,:)*K)',par);
69     end
70     %CALCULAMOS EL ERROR ERR
71     ERR = norm(coefs_error * K,inf);
72     %COMPARAMOS EL ERR CON LA TOLERACIA
73     % Si el ERR > TOL descartamos los calculos
74     % Si ERR <= TOL aceptamos los calculos y los almacenamos
75     if (ERR <= TOL)
76         u(:,n+1) = u(:,n) +h*(b*K)';
77         t(n+1) = t(n) + h;
78         H(n) = h;
79         ERROR(n) = ERR;
80         n = n+1;
81     else
82         rechazo = rechazo + 1;
83     end
84
85     % Tanto si se aceptan como si rechazan los calculos,
        redefinimos el
86     % paso tentativo de forma optima
87     l_opt = min ([hmax,h * min([facmax, fac * (TOL/ERR)^(1/orden)
        ])]);
88
89     %CONDICION DE PARADA
90     if (l_opt < hmin)
91         sprintf('Como el valor del paso optimo es menor que hmin,
        para el programa');
92         break;
93     end
94     h = l_opt; % Volvemos a repetir el bucle con el paso optimo
95
96 end
97 end
```

C.6. Método de Euler

```
1
2 %MIEULER
3 function [t,u]= mieuler(fun,tinic,tfin,N,x0,par)
4
5 %1.Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
6 m = size(x0,1);
7 %2.Defino el paso
8 h = (tfin - tinic)/N;
9 %3.Defino el mallado (salida)
10 t= tinic:h:tfin;
11 %4.Inicializo
12 u = zeros(m,N+1);
13 %5.Meto en la primera columna x0
14 u(:,1) = x0;
15 %6.Bucle
16 for n=1:N
17     %x(n+1) = x(n) + h*f(t(n),x(n))
18     u(:,n+1) = u(:,n) + h*fun(t(n),u(:,n),par);
19 end
20
21 end
```

C.7. Método del Trapecio

```
1
2 %MITRAP: Metodo del trapecio, utilizando el metodo de Newton en
3     cada
4 %iteracion para resolver la ecuacion implicita
5 %Aproximamos la funcion fun con el emtodo del trapecio
6 %Entrada: jac -> fichero de tipo function con el jacobiano de la
7     ec dif.
8 %
9     itmax -> Numero maximo de iteracion en el metodo de
10    Newton
11 %Salida: t -> vector fila de tiempos
12 %
13     u -> matriz con la aproximacion
14 %
15     numfun -> contador del numero de evaluaciones de la
16    funcion
17 function [t,u,numfun] = mitrap(fun,tinic,tfin,N,x0,par,jac,itmax)
18 %1.Obtengo el numero de filas de x0(dimension)
19 m = size(x0,1);
20 %2.Defino el paso
21 h = (tfin - tinic)/N;
22 %3.Defino el mallado (salida)
```

```

16 t= tnic:h:tfin;
17 % Los puntos calculados son columnas de m componentes
18 %4.Inicializo
19 u = zeros(m,N+1);
20 %5.Meto en la primera columna x0
21 u(:,1) = x0;
22 %Inicializo la variable numfun
23 %(contador del numero de evaluaciones de la funcion fun)
24 numfun = 0;
25 %Para las iteraciones del Metodo de Newton, los Z_j se guardan
26 % en la matriz Z (como maximo haremos itmax iteraciones)
27 %Inicializacion
28 Z = zeros(m,itmax);
29 %6.Bucle
30 for n=1:N
31     %El calculo x(n) + (h/2)*f(t(n),x(n)) es el mismo para
32     %todas las iteraciones del Met. Newton
33     valor = u(:,n) + (h/2)*fun(t(n),u(:,n),par);
34     numfun = numfun +1;
35     %Inicializamos Z_0 (Z_0 = x(n))
36     Z(:,1) = u(:,n);
37     %Inicializacion bucle
38     j = 1;
39     seguimos = true;
40     while (seguimos)
41         %G_n(Z_j) = Z_j - valor - (h/2)*f(t(n+1),Z_j)
42         G = Z(:,j) - valor - (h/2)*fun(t(n+1),Z(:,j),par);
43         %Incrmentamos el contador de evaluaciones de la funcion f
44         numfun = numfun +1;
45         %Calculamos la diferencial de G_n (Derivada respecto a Z)
46         %DG_n(Z_j) = I - (h/2)*D_xf(t(n+1),Z_j)
47         DG = eye(m) - (h/2)*jac(t(n+1),Z(:,j),par);
48         %Resolvemos el sistema DG_n(Z_j)W = G_n(Z_j);
49         W = DG\G;
50         %W es el error W = x(n)-x(n+1);
51         Z(:,j+1) = Z(:,j) - W;
52         j = j+1;
53         %Criterio de parada: mientras que norm_inf(W) >= h^3 && no
           hayamos
54         %llegado a las iteraciones maximas, seguimos con el bucle
55         %W es el error, Recuerda: f'(x(n))= f(x(n))/(x(n) - x(n+1)
           )
56         %En cada vuelta se mejora la aproximacion x(n+1)
57         seguimos = (norm(W,inf) >= h^3 && j < itmax);
58     end
59     u(:,n+1) = Z(:,j);
60 end
61 end

```

Código de Python

En este apéndice se presenta el código de Python que se ha implementado para realizar las ejecuciones que se ven en los vídeos que adjunto. Hay dos tipos de código, el primero resuelve el sistema de Lorenz para una condición inicial, un valor determinado para los parámetros y un intervalo de definición de la función. Como se puede ver en los vídeos, este programa muestra de manera interactiva la evolución de la trayectoria y de cada una de las componentes de la solución a medida que avanza el tiempo en el intervalo de definición de la solución. El segundo permite resolver el sistema de Lorenz para múltiples condiciones iniciales, mostrando interactivamente la evolución de sus trayectorias y de cada una de las componentes de la solución. Cada solución se dibuja de un color determinado con el objetivo de distinguir las diferentes trayectorias solución. Además, también es posible especificar al programa el número de condiciones iniciales y, él mismo, se encarga de inicializarlas aleatoriamente.

D.1. Una condición inicial

Fijada una condición inicial, una valor para cada uno de los parámetros y un intervalo de definición, representa de manera interactiva la solución de este problema de valor inicial.

```
1  """
2  """
3  Created on Thu Jun  8 03:27:26 2017
4
5  @author: Jesus Llorente Jorge
6  """
7  import numpy as np
8  from scipy import integrate
9  import time
10
```

```
11 from matplotlib import pyplot as plt
12 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
13 from matplotlib.colors import cnames
14 from matplotlib import animation
15
16 N_trajectories = 1
17
18 # Parametros
19 sigma = 10.
20 rho = 28.
21 beta = 8./3.
22
23
24 # Condiciones iniciales aleatorias
25 alea = False
26 delta = 0.1
27
28 t_inic = 0
29 t_fin = 7
30 number_points = 650
31
32 # Para introducir condiciones iniciales
33 numero_ccii = 1
34
35 # Sistema de Lorenz
36
37 def sistema_lorenz (estado_actual, t):
38
39     # posicion de la x, y, z en instante actual
40     x, y, z = estado_actual
41
42     # Ecuaciones sistema de Lorenz
43     dx_dt = sigma * (y - x)
44     dy_dt = x * (rho - z) - y
45     dz_dt = x * y - beta * z
46
47     # Devolvemos el valor del campo vectorial en el instante
48     # actual
49     return [dx_dt, dy_dt, dz_dt]
50
51 """
52 Es una matriz de N_trajectories x 3, para cada fila hay una
53 condicion
54 inicial para cada trayectoria
55 """
56
57 if alea:
58     np.random.seed(1)
```

```

56     x0 = -15 + 30 * np.random.random((N_trajectories, 3))
57 else:
58     x0 = np.array([0, 0, -50])
59     ccii = [x0]
60
61 t = np.linspace(t_inic, t_fin, number_points)
62 x_t = np.asarray([integrate.odeint(sistema_lorenz, ccii[i], t)
63                    for i in range(numero_ccii)])
64
65 # Utilizamos diferentes colores para cada trayectoria
66 colors = plt.cm.jet(np.linspace(0, 1, N_trajectories))
67
68 fig = plt.figure()
69
70 """ __EJE X__
71     """
72 ax1 = fig.add_subplot(2, 2, 1)
73 ax1.axis('on')
74
75 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
76 lines1 = sum([ax1.plot([], [], '-', color=c) for c in colors], [])
77 pts1 = sum([ax1.plot([], [], 'o', color=c) for c in colors], [])
78
79 ax1.set_xlim((t_inic, t_fin))
80 ax1.set_ylim((-25, 25))
81 ax1.set_xlabel("t")
82 ax1.set_ylabel("X(t)")
83 ax1.set_title("Componente X")
84
85 """ __EJE Y__
86     """
87 ax2 = fig.add_subplot(2, 2, 2)
88 ax2.axis('on')
89
90 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
91 lines2 = sum([ax2.plot([], [], '-', color=c) for c in colors], [])
92 pts2 = sum([ax2.plot([], [], 'o', color=c) for c in colors], [])
93
94 ax2.set_xlim((t_inic, t_fin))
95 ax2.set_ylim((-35, 35))
96 ax2.set_xlabel("t")
97 ax2.set_ylabel("Y(t)")
98 ax2.set_title("Componente Y")
99
100 """ __EJE Z__
101     """
102 ax3 = fig.add_subplot(2, 2, 3)
103 ax3.axis('on')

```

```

104
105 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
106 lines3 = sum([ax3.plot([], [], '-', color=c)for c in colors], [])
107 pts3 = sum([ax3.plot([], [], 'o', color=c)for c in colors], [])
108
109 ax3.set_xlim((t_inic, t_fin))
110 ax3.set_ylim((-55, 5))
111 ax3.set_xlabel("t")
112 ax3.set_ylabel("Z(t)")
113 ax3.set_title("Componente Z")
114
115 """ __GRAFICA 3D__
116         """
117 ax = fig.add_subplot(2, 2, 4, projection='3d')
118 ax.axis('on')
119
120
121 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
122 lines = sum([ax.plot([], [], [], '-', c=c)
123             for c in colors], [])
124 pts = sum([ax.plot([], [], [], 'o', c=c)
125           for c in colors], [])
126
127
128 ax.set_xlim((-25, 25))
129 ax.set_ylim((-35, 35))
130 ax.set_zlim((-55, 0))
131 ax.set_xlabel("Eje X")
132 ax.set_ylabel("Eje Y")
133 ax.set_zlabel("Eje Z")
134 ax.set_title("Sistema de Lorenz")
135
136 # Para fijar la posicion de la camara
137 ax.view_init(30, 0)
138
139
140 # Funcion de animacion: se llama secuencialmente cada frame
141 def animate(i):
142
143     i = (2 * i) % x_t.shape[1]
144
145     temp = t[:i]
146     ult = temp[-1:]
147     for line, pt, xi in zip(lines, pts, x_t):
148         # Transponemos
149         x, y, z = xi[:i].T
150         # Damos los valores para cada una de las dimensiones
151         line.set_data(x, y)

```

```

152     line.set_3d_properties(z)
153
154     # Cogemos el ultimo
155     pt.set_data(x[-1:], y[-1:])
156     pt.set_3d_properties(z[-1:])
157
158     for line, pt, xi in zip(lines1, pts1, x_t):
159         # Transponemos
160         x, y, z = xi[:i].T
161         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
162         line.set_data(temp, x)
163
164         # Cogemos el ultimo
165         pt.set_data(ult, x[-1:])
166
167     for line, pt, xi in zip(lines2, pts2, x_t):
168         # Transponemos
169         x, y, z = xi[:i].T
170         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
171         line.set_data(temp, y)
172
173         # Cogemos el ultimo
174         pt.set_data(ult, y[-1:])
175
176     for line, pt, xi in zip(lines3, pts3, x_t):
177         # Transponemos
178         x, y, z = xi[:i].T
179         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
180         line.set_data(temp, z)
181
182         # Cogemos el ultimo
183         pt.set_data(ult, z[-1:])
184     ax.view_init(30, 0.3 * i)
185     fig.canvas.draw()
186     return lines + pts
187
188     anim = animation.FuncAnimation(fig, animate,
189                                   frames=number_points, interval=30,
190                                   blit=True)
191
192     plt.show()

```

D.2. Múltiples condiciones iniciales

Dado un número N , muestra de manera interactiva la evolución temporal tanto de las trayectorias como de cada una de las componentes de las soluciones correspondientes a

las N condiciones iniciales. Éstas pueden ser tomadas aleatoriamente asignando el valor *True* a la variable booleana *alea*, o mediante definición explícita del usuario. Además, se pueden ajustar los parámetros del sistema según se desee.

```
1
2 #!/usr/bin/env python2
3 # -*- coding: utf-8 -*-
4 """
5 Created on Thu Jun  8 03:27:26 2017
6
7 @author: jesus
8 """
9 import numpy as np
10 from scipy import integrate
11
12 from matplotlib import pyplot as plt
13 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
14 from matplotlib.colors import cnames
15 from matplotlib import animation
16
17 N = 4
18 N_trajectories = N
19
20 # Parametros
21 sigma = 10.
22 rho = 28.
23 beta = 8./3.
24
25
26 # Condiciones iniciales aleatorias
27 alea = True
28 delta = 0.01
29
30 t_inic = 0
31 t_fin = 12
32 number_points = 1000
33
34 # Para introducir condiciones iniciales
35 numero_ccii = N
36 # Sistema de Lorenz
37
38 def sistema_lorenz (estado_actual, t):
39
40     # posicion de la x, y, z en instante actual
41     x, y, z = estado_actual
42
43     # Ecuaciones sistema de Lorenz
44     dx_dt = sigma * (y - x)
```

```

45     dy_dt = x * (rho - z) - y
46     dz_dt = x * y - beta * z
47
48     # Devolvemos el valor del campo vectorial en el instante
49     # actual
50     return [dx_dt, dy_dt, dz_dt]
51
52     """
53     Es una matriz de N_trayectorias x 3, para cada fila hay una
54     condicion inicial para cada trayectoria
55
56     """
57
58     if alea:
59         np.random.seed(1)
60         ccii = -15 + 30 * np.random.random((N_trayectorias, 3))
61     else:
62         x0 = np.array([5, -5, 20])
63         x1 = x0 + np.array([1, 1, 1]) * delta
64         ccii = [x0, x1]
65
66     t = np.linspace(t_inic, t_fin, number_points)
67     x_t = np.asarray([integrate.odeint(sistema_lorenz, ccii[i], t)
68                       for i in range(numero_ccii)])
69
70     # Utilizamos diferentes colores para cada trayectoria
71     colors = plt.cm.jet(np.linspace(0, 1, N_trayectorias))
72
73     fig = plt.figure()
74
75     """ __EJE X__
76         """
77
78     ax1 = fig.add_subplot(2, 2, 1)
79     ax1.axis('on')
80
81     # Fijamos las lineas y puntos a puntar
82     lines1 = sum([ax1.plot([], [], '-', color=c) for c in colors], [])
83     pts1 = sum([ax1.plot([], [], 'o', color=c) for c in colors], [])
84
85     ax1.set_xlim((t_inic, t_fin))
86     ax1.set_ylim((-45, 45))
87
88     """ __EJE Y__
89         """
90
91     ax2 = fig.add_subplot(2, 2, 2)
92     ax2.axis('on')
93
94     # Fijamos las lineas y puntos a puntar

```

```

90 lines2 = sum([ax2.plot([], [], '-', color=c)for c in colors], [])
91 pts2 = sum([ax2.plot([], [], 'o', color=c)for c in colors], [])
92
93 ax2.set_xlim((t_inic, t_fin))
94 ax2.set_ylim((-45, 45))
95
96 """ __EJE Z__
97         """
98 ax3 = fig.add_subplot(2, 2, 3)
99 ax3.axis('on')
100
101 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
102 lines3 = sum([ax3.plot([], [], '-', color=c)for c in colors], [])
103 pts3 = sum([ax3.plot([], [], 'o', color=c)for c in colors], [])
104
105 ax3.set_xlim((t_inic, t_fin))
106 ax3.set_ylim((-50, 55))
107
108 """ __GRAFICA 3D__
109         """
110 ax = fig.add_subplot(2, 2, 4, projection='3d')
111 ax.axis('on')
112
113
114 # Fijamos las lineas y puntos a puntar
115 lines = sum([ax.plot([], [], [], '-', c=c)
116             for c in colors], [])
117 pts = sum([ax.plot([], [], [], 'o', c=c)
118          for c in colors], [])
119
120 # prepare the axes limits
121 ax.set_xlim((-45, 45))
122 ax.set_ylim((-45, 45))
123 ax.set_zlim((-50, 55))
124
125 # Para fijar la posicion de la camara
126 ax.view_init(30, 0)
127
128 # Funcion de animacion: se llama secuencialmente cada frame
129 def animate(i):
130     # we'll step two time-steps per frame. This leads to nice
131     # results.
132     i = (2 * i) % x_t.shape[1]
133
134     temp = t[:i]
135     ult = temp[-1:]
136     for line, pt, xi in zip(lines, pts, x_t):
137         # Transponemos

```

```
137     x, y, z = xi[:i].T
138     # Damos los valores para cada una de las dimensiones
139     line.set_data(x, y)
140     line.set_3d_properties(z)
141
142     # Cogemos el ultimo
143     pt.set_data(x[-1:], y[-1:])
144     pt.set_3d_properties(z[-1:])
145
146     for line, pt, xi in zip(lines1, pts1, x_t):
147         # Transponemos
148         x, y, z = xi[:i].T
149         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
150         line.set_data(temp, x)
151
152         # Cogemos el ultimo
153         pt.set_data(ult, x[-1:])
154
155     for line, pt, xi in zip(lines2, pts2, x_t):
156         # Transponemos
157         x, y, z = xi[:i].T
158         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
159         line.set_data(temp, y)
160
161         # Cogemos el ultimo
162         pt.set_data(ult, y[-1:])
163
164     for line, pt, xi in zip(lines3, pts3, x_t):
165         # Transponemos
166         x, y, z = xi[:i].T
167         # Fijamos el valor del tiempo y la coordenada x
168         line.set_data(temp, z)
169
170         # Cogemos el ultimo
171         pt.set_data(ult, z[-1:])
172     ax.view_init(30, 0.3 * i)
173     fig.canvas.draw()
174     return lines + pts
175
176
177     anim = animation.FuncAnimation(fig, animate,
178                                   frames=number_points, interval=30,
179                                   blit=True)
180
181     plt.show()
```

Bibliografía

- [1] Alligood, Kathleen T., Sauer, Tim D., and Yorke, J. A. *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag (1996)
- [2] Amann, H. *Ordinary Differential Equations. An Introduction to Nonlinear Analysis*. de Gruyter Studies in Mathematics 13 (1990)
- [3] Argyris, J., Faust, G., Haase, M. and Friedrich, R. *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*. Berlin: Springer-Verlag (2015)
- [4] Arnold, V.I. *Ordinary Differential Equations*. Cambridge: MIT Press (1973)
- [5] Arrowsmith, D. and Place, C. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1990)
- [6] Birman, J. S. and Williams, R. F. *Knotted periodic orbits in dynamical systems-I: Lorenz's equations*. Topology Vol. 22 (1983), 47
- [7] Buitrago Puentes, R. H. *El sistema y el atractor geométrico de Lorenz*. Trabajo fin de Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia (2010)
- [8] Bustos Fajardo, L. F. *Sistemas de comunicación basados en el circuito chua*. Trabajo para la obtención del Grado: Ingeniería Electrónica Especialidad en Instrumentación y Control. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México (2010)
- [9] Coddington, E. and Levinson, N. *Theory of Ordinary Equations*. New York: McGraw-Hill (1955)
- [10] Córdoba Gazolaz, D. *Las ecuaciones de Navier-Stokes*. Barcelona, ES: Jornadas sobre los problemas del milenio (2011)
- [11] Devaney, R. L. *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Boulder, CO: Westview Press (1989)

- [12] Devaney, R. L., Hirsch, M. W. and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Oxford, UK: Elsevier (2013).
- [13] Enbeita Basterrechea, I. *Inestabilidades térmicas: Célula de Bénard*. Trabajo de fin de Grado en Física. Universidad del País Vasco, España (2015)
- [14] Fernandez Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. and Vegas Montaner, J. M. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Madrid, ES: Thomson Editores (2003)
- [15] Gleick, J. *Chaos, the Amazing Science of the Unpredictable*. London, UK: Vintage Books (1987)
- [16] Guckenheimer, J. and Williams, R. F. *Structural stability of Lorenz attractors* Publ. Math. IHES. Vol 50 (1979), 59
- [17] Gutiérrez Roncero, C., Lévano Yataco, V., Luyo Aguilar, S., Magallanes Martínez, R., and Sobrino Mejía, P. *Teoría del caos: Efecto Mariposa*. Universidad Ada A. Byron, Perú.
- [18] Katok, A. and Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1995)
- [19] Logemann, H. and Ryan, E. P. *Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control*. London, UK: Springer, Undergraduate Mathematics Series (2013)
- [20] López Peña, F. *Mecánica de fluidos*. Universidade da Coruña, España (2004)
- [21] Lorenz, Edward N. *Deterministic Nonperiodic Flow*. J. Atmos. Sci. Vol 20 (1963), 130
- [22] Lorenz, Edward N. *Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wing in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*. American Association for the Advancement of Science (1972)
- [23] Lorenz, Edward N. *The Predictability of Hydrodynamic Flow* Transactions of the New York Academy of Sciences. Vol 25 (1963)
- [24] Marsden, J. E. and McCracken, M. *The Hopf Bifurcation and Its Applications* New York: Springer- Verlag (1976)
- [25] Munguía Gámez, G. M. *Sistemas tipo Lorenz*. Tesis para la obtención del título de licenciado en Matemáticas. Universidad de Sonora, México (2006)
- [26] Newton, Isaac *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Real Sociedad de Londres (1687)
- [27] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier- Villars, Paris (1899)

-
- [28] Ruelle, D. *Chaotic Evolution and Strange Attractors* Cambridge, UK: Cambridge University Press (1989)
- [29] Ruelle, D. and Takens, F. *On the nature of turbulence* Commun. Math. Phys. 20, 167-192 (1971)
- [30] Salazar Orellana, D. I. *Ecuaciones de Lorenz de fluidos determinísticos no periódicos*. Proyecto previo a la obtención del título de matemático. Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador (2014)
- [31] Saltzman, B. *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem - I*. J. Atmos. Sci. 19, 329-341 (1962)
- [32] Sámano Tirado, D. A. and Sen, M. *Mecánica de fluidos*. Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, México y Universidad de Notre Dame, Indiana, EE.UU (2009)
- [33] Sparrow, C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. New York: Springer-Verlag (1982)
- [34] Strogatz, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, MA: Addison-Wesley (1994)
- [35] Theler, G. *Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termo-hidráulico-neutrónico. Tesis de la carrera de Maestría en Ingeniería* Universidad Nacional de Cuyo, Argentina (2008)
- [36] Tucker, W. *The Lorenz attractor exists* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), 1197
- [37] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag (2010)