

# Resumen e historia de los apuntes <sup>1</sup>

Los *Apuntes de Métodos Matemáticos II (EDPs)* fueron seleccionados por la Junta de Facultad de Ciencias Físicas para ser editados como libro dentro de la colección de Manuales Complutenses. Aquí se ha cambiado el título inicial para dejar más claro su contenido.

Este manual recoge el material de teoría y problemas utilizado por el autor entre 2012 y 2025 en la asignatura de 2º curso del Grado en Física y en otras similares anteriores. Contiene un curso elemental de ecuaciones en derivadas parciales, abreviadas en todo el libro como EDPs. Se dirige a estudiantes de Física (u otras ciencias o ingenierías). Y puede ser útil para estudios de Matemáticas, pese a omitir bastantes demostraciones.

El texto es asequible con las matemáticas de primero de un grado en Física (o similar) y con conocimientos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Hay un breve apéndice de repaso con ello al final. Incluye muchos ejemplos y problemas, utiliza un lenguaje matemático sencillo, no entra en conceptos abstractos de análisis funcional y estudia casi siempre las ecuaciones en dos variables lineales, evitando complicaciones técnicas. Claramente hay muchos buenos libros dedicados a las EDPs, pero la concisión de este y su corta longitud, lo pueden hacer de interés para muchos estudiantes.

Los temas se ajustan al programa de los Métodos II de Físicas y pueden ser explicados completos en un cuatrimestre de 4 horas semanales de clase (en unas 55 horas).

El libro incluye 4 temas de diferente duración. El primero, *Introducción a las EDPs*, recoge el estudio de las de primer orden, la clasificación de las de orden 2, la unicidad de las EDPs clásicas (ondas, calor y Laplace), el estudio de la cuerda vibrante y la transformada de Fourier (después en otros textos). Se resuelven las ecuaciones haciendo desaparecer una de las dos variables mediante cambios o a través de una transformada integral.

El capítulo 2, menos habitual en los libros de EDPs, describe cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante series de potencias. Entre ellas se resuelven las de Legendre y Bessel que surgirán en las ecuaciones de la física.

El 3, *Problemas de contorno para EDOs*, trata los autovalores y autofunciones que surgen al imponer datos de contorno, lo que no ocurría con los datos iniciales. Y se estudian los desarrollos en esas autofunciones (las series de Fourier), básicos en el último capítulo.

El largo capítulo 4, *Separación de variables*, resuelve las EDPs clásicas de la física y otras similares (homogéneas y no homogéneas, con variados datos iniciales y de contorno, en distintas coordenadas y en 2 o más variables) en recintos sencillos (y acotados en alguna variable). También se estudian, brevemente, las funciones de Green.

Pasemos a describir brevemente la historia de las asignaturas de EDPs en los planes de estudios de Físicas y la evolución de las *versiones* de estos apuntes ligada a ellos.

Mis primeras clases de ecuaciones diferenciales las impartí en el curso 1980-1981. Eran los Métodos Matemáticos II anuales de 3º, con 5 horas semanales. Incluían EDOs y EDPs y en 2º se habían estudiado variable compleja y espacios de Hilbert. Al año siguiente ya elaboré (para un 'grupo piloto') sus primeros apuntes (mecanografiados y con dibujos a mano). Evolucionaron con los años y la última versión de la parte de EDPs acabó siendo esta: *apuntes de ecuaciones en derivadas parciales* (del 2000, para el grupo residual).

*Versión 2007*. Primeros *apuntes de Ecuaciones Diferenciales II (EDPs)*, del nuevo plan. Ahora en 2º, de 4 horas y solo cursadas Álgebra, Cálculo y EDOs. Se recortaron temas y otros pasaron a título informativo. Con más detalle, se abrevió la unicidad, los problemas de contorno se centraron en las condiciones separadas, sin comparación de autovalores y con la  $\delta$  en letra pequeña. En separación de variables se juntaron homogéneos y no homogéneos, viéndose primero calor y ondas, y luego Laplace (con armónicos esféricos).

<sup>1</sup> Al final del manual hay un listado de códigos QR enlazados con los apuntes citados y las soluciones de los problemas básicos.

Pasaron al final las ondas en una, tres y dos dimensiones, con la  $\mathcal{F}$  y el método de las imágenes. Los problemas se dividieron en “problemas” (los de clase) y “problemas adicionales”, desapareciendo varios de los viejos. Fue la primera versión hecha en  $\text{\LaTeX}$ , eligiendo ese año, para distinguirse de las letras habituales, el tipo Palatino.

*Versión 2008.* Correcciones leves en 1.2 y 3.1. Los problemas incluyeron los de examen del 07, algunos pasaron a adicionales y otros fueron problemas a entregar en el piloto.

*Versión 2009.* Bastantes novedades. La letra pasó a ser Bitstream-Vera y se debió reescribir gran parte del texto. Se modificó el tema 1. El 2 perdió una sección incluyendo nuevos ejemplos, lo mismo que de series de Fourier y de problemas no homogéneos. 3.1 incluyó más ejemplos del calor y 3.2 dos más en cartesianas y uno en polares. 3.3 cambió poco y como 3.4 aparecieron las funciones de Green para Laplace. En todo el 4 se modificaron ejemplos. En 4.1, uno de cuerda semi-infinita y otro de cuerda acotada, dos de ondas en 3 dimensiones en 4.2, y tres de la  $\mathcal{F}$  de 4.3. Se creó un apéndice con repaso de EDOs, de convergencia uniforme y cálculo en varias variables. Los problemas cambiaron bastante (los grupos piloto exigen muchos problemas nuevos y se notó).

*Versión 2011.* Adaptación a otro grupo residual de otra licenciatura. Pasaron a “letra pequeña” temas no vistos en otros grupos (como las ondas en tres y dos dimensiones), bastantes problemas pasaron a adicionales y llegaron otros desde el piloto del 08/09.

*Versión 2012.* Primeros *apuntes de métodos matemáticos II* del grado incluyendo las soluciones por series (dejaron la asignatura de EDOs haciendo sitio a la variable compleja). Se debieron recortar contenidos de Ecuaciones II. Se limaron sutilezas de tangencias en 1.1. En 1.2 hay solo coeficientes constantes. La cuerda vibrante vuelve simplificada al tema 1 y casi no hay ondas en más dimensiones. El tema 2 recogió el tema 3 de los apuntes de EDOs, reduciendo ejemplos y problemas. Del anterior tema 2 (ahora 3) salen las funciones de Green para unirse a las de Laplace. En el de separación de variables pasan a tener sección propia las ondas (con más ejemplos y comparando con D’Alembert). Desaparecen las transformadas seno y coseno de Fourier. Cambios en el apéndice. Y la mayor reducción, como en el otro cambio de plan, se hizo en los problemas. Para separar los ejemplos se incluyeron (como en otros apuntes de ese curso) **recuadros coloreados**.

*Versión 2013.* El mayor cambio es el traslado de la  $\mathcal{F}$  al final del capítulo 1, con nuevo nombre (y de las funciones de Green al final del 4). Bastantes retoques en teoría y ejemplos de separación de variables. Como cada curso, cambios en problemas.

*Versión 2014.* Bastantes retoques. En el 1,  $\Delta$  pasa a llamarse  $T$ , se reordenan 1.2 y 1.3 y hay nuevos ejemplos. Cambios en 2.1, 2.2, 3.1 y 3.2. Más ejemplos en 4.1. Las reflexiones sobre separación de variables se retrasan. Y las novedades en problemas.

*Versión 2017.* Más ejemplos en 1.1, 1.4, 3.2 y 3.3, creciendo en páginas. Algún cambio en ejemplos de 4.1 y en las ideas sobre separación de variables. Problemas del 13-14.

*Versión 2020.* Leves cambios en teoría (en 2.3 y 3.2). Inclusión de problemas del 16-17. Reducción ligera de los márgenes del texto (lo que implicó muchos cambios estéticos).

*Versión 2021.* Escasas modificaciones en los apuntes, pero fueron creadas y actualizadas las versiones resumidas de sus secciones en formato horizontal para ser utilizados en tiempos de COVID-19 como transparencias en las clases desde casa o para estudiantes de DNI pares o impares.

*Versiones 2022 y 2023.* Retoques mínimos en teoría, pero se vuelven a actualizar los problemas a partir de los creados para los cursos pandémicos, y para el 21-22.

*Versión 2024.* Nueva portada, numeración y el índice tiene ahora enlaces a cada sección. Abundantes leves cambios en los apuntes, pero manteniendo las 90 páginas del 2023. Se conservaron las 6 páginas de problemas (y pasaron a 12 los de adicionales).

*Versión 2025 (y final).* Para ajustarlos al orden habitual de mis clases: Laplace simétrica en esfera se adelanta a 4.3. Retoques en introducción y menores. Y siempre nuevos problemas: siguen siendo 90 básicos (30+20+15+25) y los adicionales han crecido hasta 170 (58+32+29+51). Las soluciones de los 90 problemas básicos se pueden ver [aquí](#). Las de los adicionales solo están a disposición de docentes que quieran utilizarlos.