UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

El espacio de órdenes de un cuerpo de funciones algebraicas de una variable

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Manuel Gamboa Mutuberria

DIRECTOR:

Tomás Recio Muñiz

Madrid, 2015

José Manuel Gamboa Mutuberría

EL ESPACIO DE ORDENES DE UN CUERPO DE FUNCIONES ALGEBRAICAS DE UNA VARIABLE

Departamento de Geometría y Topología
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1983

Colección Tesis Doctorales. Nº 238/83

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-37583-1983

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E   DE   M A D R I D

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Algebra y Fundamentos

El espacio de órdenes de un cuerpo de funciones algebraicas de una variable

Memoria presentada por José Manuel Gamboa Mutuberría para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Madrid ,Septiembre de 1982.

A Amparo.

A mis padres.

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del MAL cuyo limitado imperio es la Etica; hablo del infinito. Yo anhelé compilar alguna vez su móvil historia.

J.L. Borges

Mi primer agradecimiento es para Tomás Recio, no sólo por su extraordinaria labor como Director de esta Memoria, sino también por la amistad que me brindó desde que nos conocimos.

Con él a su mujer Isabel quien, junto al cariño que siempre me ha ofrecido, ha sufrido las consecuencias del tiempo que Tomás ha empleado conmigo.

También quiero agradecer a Pedro Abellanas, y con él a los miembros del Departamento de Algebra y Fundamentos, el aliento que, con su palabra y con su ejemplo, siempre me ha dado para seguir trabajando.

A mis compañeros Mª Emilia Alonso, Carlos Andradas, Emilio Bujalance, José Javier Etayo y Jesús Mª Ruiz les agradezco su desinteresada colaboración a través de las discusiones sostenidas con ellos.

A Soledad Estévez por su magnífico trabajo de mecanografía y el interés que ha puesto en el mismo.

Finalmente, -pero no en último lugar- a Amparo que me ha alentado y soportado durante todo este tiempo y que espero lo siga haciendo durante mucho tiempo más.

INDICE

INTRODUCCION

Notas históricas

La definición de cuerpo ordenado fue introducida por HILBERT [1898] en relación con su trabajo sobre "Los Fundamentos de la Geometría", aunque, quizás por falta de motivaciones, no estudió esta noción con detalle. Intuitivamente, su idea de "puntos situados entre dos dados" es la precursora de la noción de cuerpo ordenado.

Un cuarto de siglo después, los trabajos de ARTIN-SCHREIER [1927] y ARTIN [1927] constituyen el pilar fundamental para el desarrollo de la teoría de cuerpos ordenados. Estos artículos están, al menos parcialmente, influidos por la obra de HILBERT. El criterio de ARTIN, que caracteriza los elementos de un cuerpo positivos en todos los órdenes como las sumas de cuadrados, no sólo conduce luego a la respuesta (afirmativa) del decimoséptimo problema de HILBERT, sino que, posiblemente, está motivado por éste.

Los cuarenta años que siguieron a los trabajos de ARTIN y SCHREIER fueron testigos de un considerable desarrollo de la teoría de cuerpos ordenados. Por ejemplo, los escritos de BAER [1927] y [1929] y de KRULL [1931] revelaron la íntima relación entre órdenes y valoraciones; el célebre "Principio de TARSKI" [1948] para cuerpos realmente cerrados, abrió un nuevo capítulo en la Lógica Matemática y el original uso por parte de ROBINSON [1961] de los infinitésimos en el análisis no standard ayudó a rehabilitar los anteriormente des acreditados métodos de Leibniz.

En la década de los setenta, la teoría de cuerpos ordenados ha cobrado un nuevo impulso. Autores tan prestigiosos como LAM [1980] atribuyen este hecho al desarrollo del estudio de formas cuadráticas sobre cuerpos ordenados, cuyo punto de partida es el "Principio Local-Global" de PFISTER [1966]. Para estudiar formas cuadráticas sobre cuerpos es importante considerar, simultáneamente, todos los órdenes de dicho cuerpo. Este punto de vista global abre nuevas vías de investigación y plantea cuestiones que no habían sido consideradas anteriormente. La idea central de las mismas es la siguiente: ¿como reflejan los diversos órdenes de un cuerpo las propiedades de éste?. En [1968], HARRISON dota al conjunto $X(K)$ de los órdenes de un cuerpo K de la topología que tiene por base los conjuntos:

$H(a_1,\dots,a_r) = \{P \in X(K) : a_j \in P, \ 1 \leq j \leq r\}$, donde $a_1,\dots,a_r \in K-\{0\}$. Hoy en día, un aspecto fundamental en la teoría de cuerpos ordenados consiste en analizar el espacio $X(K)$.

El desarrollo experimentado por la teoría de cuerpos ordenados en el último decenio se ha reflejado ostensiblemente en la Geometría Algebraica Real.

Ya en los trabajos de HILBERT, parece latente un intento de obtener un análogo a su Nullstellensatz para el cuerpo de los números reales. Sin embargo, habrían de transcurrir setenta años hasta que DUBOIS [1969] y RISLER [1970] alcanzaran dicho objetivo. Este teorema, enmarcado de lleno en la teoría de cuerpos ordenados, constituye el punto de partida de un buen número de resultados que expondremos más adelante.

Como se aprecia en este rápido resumen de los hitos fundamentales de la teoría de cuerpos ordenados, ésta se halla en estrecha conexión con la teoría de valoraciones, la geometría algebraica real, las formas cuadráticas y la lógica, entre otras ramas de la Matemática. Describiremos a continuación con más detalle el desarrollo de la teoría de cuerpos ordenados a través de estos campos.

1. Teoría de cuerpos ordenados y valoraciones.

En los trabajos de ARTIN-SCHREIER [1927] y BAER [1927] se halla implícita la correspondencia entre los anillos de valoración real de un cuerpo K (aquellos cuyo cuerpo residual es ordenable) y los órdenes de K, definidos como los subconjuntos P de K que verifican:

(a) $P + P \subset P$.

(b) $P.P \subset P$

(c) $P \cap (-P) = \{0_K\}$

(d) $P \cup (-P) = K$

Aunque en los años ventiseis y ventisiete no se disponía todavía del lenguaje de valoraciones, la idea de ARTIN y SCHREIER de formar "cierres convexos" de subcuerpos de un cuerpo ordenado, y las investigaciones de BAER sobre cuerpos ordenados no arquimedianos, anticiparon en parte la teoría general de valoraciones de KRULL.

Con más precisión: Se dice que un subconjunto L de un cuerpo K es convexo respecto de un orden P de K si todos los elemenlos menores (en el orden P) que un elemento de L están en L. Para cada orden P en K y cada subcuerpo F de K, el menor de los subconjuntos de K que contienen a F y son convexos respecto de P es

$$\mathrm{Val}(F,P) = \{a \in K : \text{existe } b \in F \text{ con } b-a \in P \text{ y } b+a \in P\}.$$

Con la terminología de KRULL, $\mathrm{Val}(F,P)$ es un anillo de valoración de K cuyo ideal maximal está formado por los elementos $c \in K$ "infinitesimales" con respecto a F -es decir, $b-c \in P$ y $b+c \in P$ para cada $b \in (F-\{0\}) \cap P$- .

La importancia que la teoría de valoraciones ha tenido en el estudio de los cuerpos de funciones algebraicas sobre los números complejos, empujó a importantes matemáticos de la década de los cincuenta a desarrollar la teoría de valoraciones reales, o mejor, de lugares reales, para cuerpos de funciones algebraicas sobre cuerpos realmente cerrados. Los resultados fundamentales fueron obtenidos por LANG [1953] que demostró los teoremas de extensión y existencia de lugares, el teorema del homomorfismo y el teorema de inmersión.

La correspondencia entre órdenes y lugares reales fue puesta una vez más de manifiesto por BROWN [1971]: Todo orden P de un cuerpo K induce un lugar real $\lambda p : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tal que el anillo de valoración asociado a λp es $\mathrm{Val}(Q,P)$. Recíprocamente, cada lugar real $\lambda : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ coincide con el lugar λp inducido por algún orden P de K. Además $\lambda = \lambda p$ si y sólo si $\lambda(P) \subset \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

Desde el punto de vista global, debemos señalar que en [1973] ROQUETTE define el <u>anillo de holomorfía</u> de un cuerpo K como

$$\mathrm{Hol}(K) = \{a \in K : \lambda(a) \neq \infty \quad \text{para cada} \quad \lambda \in L(K)\},$$

donde $L(K)$ es el conjunto de <u>lugares reales</u> del cuerpo K. Entonces dota a $L(K)$ de la topología inicial para la familia de aplicaciones

$$\hat{a} : L(K) \mapsto \mathbb{R} : \lambda \mapsto \lambda(a), \quad a \in \mathrm{Hol}(K).$$

Los espacios $L(K)$ y $X(K)$ son compactos y

$\phi : X(K) \to L(K) : P \mapsto \lambda p$ es una aplicación continua.

Así, la teoría de lugares reales contribuye al estudio del espacio de órdenes de un cuerpo. En la misma línea, y centrándose en el análisis de los cuerpos de funciones algebraicas, deben citarse los trabajos de BROCKER [1977], SCHULTING [198i] y ANDRADAS [1982].

En el caso de una variable y cuerpo de coeficientes el de los números reales, ALLING y GREENLEAF, en [1971], desarrollan la teoría de <u>superficies de KLEIN</u> y abren nuevos cauces de investigación. Su idea es asociar a cada cuerpo F de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$ el conjunto $\mathrm{Riem}(F)$ de los anillos de valoración de F que contienen a $\mathbb{R}$. $\mathrm{Riem}(F)$ tiene estructura de superficie de KLEIN; su borde está constituido por los anillos de valoración real de F y no es vacío cuando F es ordenable. De este modo establecen una co-equivalencia funtorial entre la categoría de superficies de Klein compactas y con borde y los cuerpos ordenables de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$. Esta equivalencia permite, por ejemplo, obtener información sobre el grupo de automorfismos de F, usando resultados de la teoría de "grupos cristalográficos no euclídeos", desarrollada, entre otros, por WILKIE [1966], SINGERMAN [1974] y BUJALANCE [1981]. Como en el §13 de esta memoria resumimos los resultados básicos de ALLING y GREENLEAF, no nos extenderemos sobre este punto. Sin embargo, debemos señalar, que la correspondencia anteriormente descrita es exclusiva del caso de una variable, lo cual invalida estas técnicas a la hora de abordar el problema de la clasificación por automorfía de los órdenes de extensiones en más variables.

2. La teoría de cuerpos ordenados y la geometría algebraica real.

En el capítulo III, §36 y §37 de sus "Fundamentos de la Geometría", HILBERT trata la cuestión de las construcciones geométricas planas con regla y compás. Partiendo de puntos de coordenadas $x_1,\dots,x_n$, las coordenadas de los puntos constructibles vienen dadas por funciones $f(x_1,\dots,x_n)$ calculables con sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces cuadradas. En su intento de caracterizar estos puntos, HILBERT se enfrenta con el problema decimoséptimo. Podemos considerar por tanto que la teoría de ARTIN-SCHREIER es el primer punto de contacto de la geometría y la teoría de cuerpos ordenados.

En las pruebas actuales del decimoséptimo problema de HILBERT, algunos aspectos técnicos de la solución de ARTIN, tales como el estudio de las propiedades "racionalmente especializables", son reemplazados por los resultados de LANG citados en el epígrafe anterior. Estos, en cuanto que conciernen a los cuerpos de funciones algebraicas, son los precursores en el estudio de la geometría birracional sobre cuerpos realmente cerrados.

Posteriormente, los teoremas de los ceros obtenidos casi simultáneamente por DUBOIS y RISLER, fueron el punto de arranque de una importante parcela de la teoría de cuerpos ordenados y que, con palabras de LAM [1980], llamaremos "Algebra Conmutativa Real". Los primeros trabajos en este área son los de DUBOIS-EFROYMSON [1970] y STENGLE [1974].

Este último generaliza el teorema de DUBOIS-RISLER con su "Semialgebraic Nullstellensatz", caracterizando los polinomios que se anulan sobre un conjunto semialgebraico cerrado. Además, con el Positivstellensatz", caracteriza los polinomios no negativos sobre un semialgebraico cerrado.

Las pruebas realizadas por STENGLE son demasiado largas pues redemuestra un caso particular del conocido "Criterio de Serre" [1949], sobre existencia de un orden en el que sean positivos ciertos elementos dados a priori. En la misma dirección que los resultados anteriores debemos citar el artículo de RECIO [1979] en el que caracteriza los polinomios que se anulan sobre un semialgebraico abierto de una variedad algebraica.

En nuestro recorrido a través de los teoremas de los ceros no podemos olvidar el obtenido por BOCHNAK y EFROYMSON [1980] para el anillo de funciones de Nash sobre un abierto semialgebraico, utilizando el Principio de TARSKI y una "fórmula de sustitución".

El estudio de la geometría semialgebraica ha sido abordado desde distintos ángulos. Las técnicas más adecuadas hasta el momento parecen ser las de BRUMFIEL [1979] y COSTE-COSTE ROY [1980].

El método de BRUMFIEL consiste en asociar a cada semialgebraico S el par formado por el álgebra reducida y finitamente generada $A(S) = \frac{R[\underline{x}]}{I(S)}$ y un orden parcial β_S en $A(S)$. La construcción es reversible por cuanto, a cada par (A,β), donde A es un álgebra reducida finitamente generada y β un orden parcial en A, se le asocia un semialgebraico $S(A)$ de forma que $(A(S(A)), \beta_{S(A)})$ y (A,β) son isomorfos en la categoría de anillos parcialmente ordenados sin nilpotentes. BRUMFIEL redemuestra y generaliza de modo sistemático la mayoría de los resultados conocidos hasta entonces; por ejemplo, el "Positivstellensatz" de STENGLE ó el teorema de extensión de lugares de DUBOIS [1979].

Por su parte, COSTE-COSTE ROY introducen la noción de espectro primo real de un anillo real A. Sus elementos son los preconos primos de A definidos como aquellos subconjuntos α de A que verifican:

(a) $1 \notin \alpha$

(b) $-x^2 \in \alpha$ para cada $x \in A$

(c) $x+y \in \alpha$ para cada $x,y \in A$

(d) $x.y \in \alpha$ si y sólo si $x \in \alpha$, $-y \in \alpha$ ó $x \in -\alpha$, $y \in \alpha$.

La manera de fabricar preconos consiste en elegir un ideal primo real p en A, un orden P en el cuerpo de fracciones de A/p y colecci nar $\alpha = \{a \in A : a+p \in (-P)\}$. Además, todo precono de A es de est forma.

Con estas técnicas, COSTE y COSTE ROY sientan las bases algebraicas para el estudio de la geometría de las variedades reales V a través del espectro primo real de $R[V]$.

Entre otros resultados, demuestran la invarianza birracional del número de componentes conexas de las variedades algebraicas reales acotadas y no singulares; obtienen agradables resultados sobre ascenso y descenso de ideales y establecen una teoría de la dimensión en geometría algebraica real.

Más recientemente, DUBOIS [1980] y DUBOIS-RECIO [1981] consiguen diversos resultados acerca de los subconjuntos semialgebraicos de una variedad algebraica V mediante el estudio del espacio de órdenes de $R(V)$. Los epígrafes cuarto y octavo de esta memoria describen las técnicas introducidas por DUBOIS y RECIO y en los mismos se resuelven problemas planteados en los artículos anteriormente citados, por lo cual, no hacemos sino mención de los mismos.

3. Teoría de cuerpos ordenados y formas cuadráticas.

La teoría algebraica de formas cuadráticas sobre cuerpos comenzó en [1937] con WITT y tomó una nueva dirección a partir del trabajo de PFISTER [1966].

El punto de enlace entre los cuerpos ordenados y las formas cuadráticas se halla en la idea de signatura de SYLVESTER. Si WF es el anillo de WITT de un cuerpo F se define, para cada orden P en F, la aplicación signatura, $sig_P : WF \to \mathbb{Z}$, del modo siguiente: para cada $q \in WF$, se diagonaliza $q = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ y $sig_P(q)$

es la diferencia entre el número de a_j que pertenecen a P y el número de a_j que pertenecen a $(-P)$. Utilizando el argumento clásico de SYLVESTER se demuestra que sig_P está bien definida y que es homomorfismo sobreyectivo. Si R_P es el cierre real de F con respecto a P, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
WR_P \arrow[r, "\mathrm{sig}_{R_P^2}"] & \mathbb{Z} \\
WF \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathrm{sig}_P"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, $\mathrm{sig}_{R_P^2}$ es isomorfismo. Esta es la ley de inercia de SYLVESTER.

Considerando todos los órdenes de F, se asocia a cada $q \in WF$ su <u>signatura total</u> definida como $\{\mathrm{sig}_P(q) : P \in X(F)\}$. La signatura total constituye un sistema completo de invariantes, y resulta natural preguntarse en que condiciones determina la clase de isometría. La respuesta es el "Principio Local-Global" de PFISTER [1966], según el cual si dos formas cuadráticas q_1 y q_2 tienen la misma signatura total, entonces existe una potencia r de dos tal que

$$\underbrace{q_1 \perp q_1 \perp \cdots \perp q_1}_{r} \simeq \underbrace{q_2 \perp q_2 \perp \cdots \perp q_2}_{r}.$$

Este principio permite extender la ley de inercia de SYLVESTER a la clase de los cuerpos pitagóricos.

(aquellos cuerpos ordenables en los que toda suma de cuadrados es un cuadrado).

La relación entre formas cuadráticas y cuerpos ordenados no termina aquí. En [1970], LEICHT y LORENZ e, independientemente, HARRISON, establecen una biyección entre el espacio $X(F)$ de órdenes de un cuerpo F y los primos minimales de WF, haciendo corresponder a cada $P\in X(F)$ el núcleo de sig_P. Cuando se dota al espectro minimal de WF de la topología de ZARISKI, la biyección anterior es un homeomorfismo.

4. La teoría de cuerpos ordenados y la lógica matemática.

La construcción de DEDEKIND del cuerpo de los números reales mediante cortaduras no es expresable en lenguaje de primer orden. La teoría de cuerpos realmente cerrados ordenados supone el paso de los axiomas de DEDEKIND a una formulación muy natural de álgebra real elemental. El único cambio que hay que realizar es restringirse a las cortaduras definidas por fórmulas elementales en el lenguaje de primer orden de la teoría de cuerpos ordenados, en lugar de trabajar con cortaduras arbitrarias. Esta observación es el embrión, como ya indicamos, de la noción de cuerpo realmente cerrado y, aunque no de un modo explícito, se encuentra en los "Fundamentos de la Geometría" de HILBERT.

La clase de los cuerpos realmente cerrados, que de modo empírico fue introducida por ARTIN y SCHREIER, cumple la propiedad de que "toda proposición elemental cerrada del lenguaje de primer orden de la teoría de cuerpos ordenados que es cierta en un cuerpo realmente cerrado lo es en todos ellos".

Este resultado fue establecido alrededor de [1930] por varios matemáticos; entre ellos, TARSKI, HERBRAND y GODEL. Este último no publicó su demostración al saber que, independientemente, TARSKI había obtenido una prueba del mismo.

Además, probaron que la teoría de cuerpos realmente cerrados era decidible, esto es, para cada fórmula cerrada F, existe un subconjunto finito S_F del conjunto de axiomas de dicha teoría, mediante las cuales se puede asegurar la veracidad de F o de su negación $\neg F$.

Sin embargo, la primera prueba impresa de este teorema tarda en aparecer y se debe a TARSKI [1948]. Desde entonces recibe el nombre de "Principio de TARSKI".

Este resultado admite diversos enunciados equivalentes. Destaquemos uno de fuerte contenido geométrico: Si R es un cuerpo realmente cerrado, la imagen por una aplicación polinómica de un conjunto semialgebraico es a su vez semialgebraico. Todo hace pensar que la formulación anterior, cuando la aplicación polinómica es la proyección canónica $\pi : R^n \to R^{n-1}$, era el objetivo perseguido por TARSKI.

Un caso particular de este teorema, sobre el que debía estar centrada la atención de TARSKI, es un viejo resultado de la Aritmética [1835]: el teorema de STURM.

El "Principio de TARSKI" constituye una vía alternativa y mucho más rápida, para demostrar importantes resultados de la geome tría algebraica real. Por ejemplo, el teorema de ARTIN que resuelve el problema decimoséptimo de HILBERT, el teorema de los ceros de DU BOIS-RISLER, el teorema de inmersión de LANG y el teorema de la aplicación abierta de ELMAN, LAM y WADSWORTH [1979].

Por otra parte, resultados de tanta importancia como el teorema de los ceros en el anillo de funciones de NASH citado anteriormente o el teorema de PRESTEL [1975] que asegura que toda propiedad elementalmente universal cierta en $\mathbb{R}$ lo es en todo cuerpo ordenado, necesitan para su demostración del "Principio de TARSKI".

Las aplicaciones del Principio de TARSKI pueden clasificarse del siguiente modo:

A) Extender a todos los cuerpos realmente cerrados resultados conocidos en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y obtenidos en este por métodos transcendentes (completitud, integración, etc.)

B) Demostrar, simultáneamente para todo cuerpo realmente cerrado, que un conjunto definido por una afirmación elemental en términos de conjuntos semialgebraicos es también semialgebraico.

C) Asegurar la veracidad de una afirmación para el cuerpo de los números reales, conocida la veracidad de la misma en un cuerpo realmente cerrado más amplio, adecuado. Por ejemplo, dadas $f_1,\dots,f_r,g \in \mathbb{R}[\underline{x}]$, $\mathbb{R} \subset R$ y $a \in R^n$ tal que $f_j(a) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $g(a) \neq 0$, entonces existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_j(b) = 0$, $g(b) \neq 0$.

El "Principio de TARSKI" no constituye la única aportación de la lógica al estudio de los cuerpos ordenados. Por ejemplo, debemos citar los resultados de ROBINSON en [1955] y [1956] en los que extiende a los cuerpos con un único orden y que son densos en su cierre real, la solución de ARTIN del decimoséptimo problema de HILBERT. Posteriormente, MCKENNA [1975] demostrará que los anteriores son los únicos cuerpos para los que el problema decimoséptimo tiene respuesta afirmativa. Las demostraciones de estos resultados se hacen mediante la teoría de modelos.

Debemos destacar que las técnicas desarrolladas por ROBINSON le podrían haber conducido a formular el teorema de los ceros en el caso real. Todavia hoy resulta difícil de explicar porqué ningún especialista en teoría de modelos demostró el teorema de los ceros que quince años después iban a obtener DUBOIS y RISLER.

La completitud de la teoría de cuerpos realmente cerrados -otra forma de enunciar el Principio de TARSKI- dió pie a un nuevo campo de investigación en Lógica. Cabe aquí destacar los trabajos de VAN den DRIES [1978], PRESTEL [1981] y PRESTEL y ROQUETTE [1981].

Aunque hemos incluido los resultados de COSTE y COSTE ROY en la sección dedicada a la Geometría Algebraica Real, debe destacarse que estos autores, siendo especialistas en la teoría de topos, utilizan las técnicas de la Lógica; son por tanto un claro exponente de la interdependencia de estas áreas de la matemática.

Finalizamos esta sección mencionando los recientes resultados de DELZELL [1980] que es el primero en encontrar una solución constructiva y continua respecto de los coeficientes del problema decimoséptimo. Esta cuestión había sido planteada por KREISEL [1957] veinte años antes, fruto de sus conversaciones con el propio ARTIN.

5. La teoría de cuerpos ordenados tiene hoy en día importancia por sí misma, independientemente de su conexión con otras ramas de la Matemática. Por ello, dedicamos la última parte de esta introducción a comentar algunos de sus aspectos más notables.

A) En la categoría que tiene por objetos los pares (K,P), donde K es un cuerpo y P es un orden de K, y por morfismos los homomorfismos de cuerpos compatibles con el orden, aparece de modo natural el problema de saber cuando un orden P en un cuerpo K se extiende a otro F que lo contiene.

Para cuerpos de funciones algebraicas sobre cuerpos ordenables de la forma $F = \text{c.f.}\left(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{(f)}\right)$, el criterio del cambio de signo de DUBOIS y EFROYMSON [1970] asegura que un orden P en K se extiende a F si y sólo si existen $a,b \in R^n$ $-R$ es el cierre real de K respecto del orden P- tales que $f(a).f(b) < 0$.

Cuando en el teorema anterior se sustituye (f) por un ideal primo p de $K[x_1,\dots,x_n]$, DUBOIS y EFROYMSON prueban, en el mismo artículo, que P se extiende a F si y sólo si la variedad $V_R(p)$ que define p en R^n tiene algún punto simple.

Sin embargo, el trabajo clave acerca del problema de extensión de órdenes es el ya citado de ELMAN; LAM y WADSWORTH en el que, desde el punto de vista global, se estudia el comportamiento de la aplicación $j^* : X(F) \to X(K) : P \mapsto P \cap K$, siendo F una extensión de K.

Esta aplicación es claramente continua y al ser ambos espacios compactos y T_2 es también cerrada. Sin embargo, no es en general abierta como se pone de manifiesto en el artículo al que venimos haciendo mención. No obstante, cuando F es una extensión finitamente generada de K, j^* es abierta: este es el importante teorema de la aplicación abierta. Este resultado, utilizado por DUBOIS y RECIO [1981], es esencial para su análisis del espacio de órdenes de $R(x_1,\dots,x_n)$ y de los semialgebraicos de R^n.

B) Otro punto que merece nuestra atención es el estudio de algunas clases especiales de cuerpos ordenados.

Comenzamos con los cuerpos euclídeos -que reciben este nombre porque sobre ellos puede desarrollarse gran parte de la geometría euclídea, c.f. DIEUDONNE [1969], que son aquellos cuerpos K en los que el conjunto K^2 de los elementos de K que son un cuadrado, es un orden (evidentemente el único) del cuerpo K.

Los cuerpos euclídeos, entre los que se encuentran los realmente cerrados, han sido caracterizados, entre otros, por LAM [1973] y BECKER [1974].

Una clase estrictamente contenida en la anterior es la de los cuerpos hereditariamente euclídeos, definidos como aquellos cuyas extensiones finitas y ordenables son euclídeas. En [1975], PRESTEL Y ZIEGLER caracterizaron estos cuerpos, poniendo de manifiesto su pro ximidad con los realmente cerrados.

A partir del "Principio Local-Global" de PFISTER cobraron interés los cuerpos <u>pitagóricos</u> (K es pitagórico si es ordenable y toda suma de cuadrados de K es un cuadrado de K), y los <u>hereditariamente pitagóricos</u> (toda extensión finita y ordenable es pitagórica).

En particular, el <u>cierre pitagórico</u> F_p de un cuerpo F en un cierre algebraico $\overline{F}$, definido como el menor de los cuerpos pitagóricos que contienen a F y están contenidos en $\overline{F}$, posee la interesante propiedad de que todo orden de F se extiende a F_p, según se desprende de la construcción que hacen de F_p DILLER y DRESS [1965].

Una clase distinguida de cuerpos que ha recibido un tratamiento especial en la literatura son los que tienen la <u>propiedad de la aproximación fuerte</u> (S.A.P. para abreviar). Un cuerpo K se llama S.A.P. si para cada par de cerrados del espacio de órdenes de X(K) existe $a \in K - \{0\}$ tal que $A \subset H(a)$ y $B \subset H(-a)$. Estos cuerpos fueron introducidos por KNEBUSCH, ROSENBERG y WARE [1973] y usualmente se utiliza la siguiente caracterización: K es S.A.P. si y sólo si para cada par de elementos a y b en K existe $c \in K$ tal que $H(a) \cap H(b) = H(c)$. Las aportaciones de más interés en el estudio de los cuerpos S.A.P. han sido realizadas por BROCKER. Cabe destacar la caracterización que obtuvo en [1974]: Un cuerpo K es S.A.P. si y sólo si dados cuatro órdenes P_1, P_2, P_3 y P_4 en K existe $a \in P_1 \cap (-P_2) \cap (-P_3) \cap (-P_4)$.

Un resultado que conecta algunas de las clases de cuerpos que acabamos de introducir es el demostrado en [1973] por ELMAN, LAM y PRESTEL y posteriormente por CRAVEN [1974]: Una extensión finita de $K(x)$ es S.A.P. si y sólo si K es hereditaraiamente euclídeo.

El propio CRAVEN [1975] descubrió la ubicuidad de los espacios de órdenes demostrando que todo espacio topológico <u>booleano</u> X es homeomorfo al espacio de órdenes de algún cuerpo.

C) Para terminar describiremos los resultados de BECKER [1978] en los que expone su teoría de "órdenes de alto nivel". Esta constituye una generalización de la teoría de ARTIN-SCHREIER cincuenta años después.

BECKER define un <u>orden de nivel n</u> en un cuerpo K como un subconjunto propio P de K que cumple $P+P \subset P$ y tal que $P^* = P - \{0\}$ es un subgrupo multiplicativo de $K^* = K - \{0\}$ cuyo cociente K^*/P^* es un grupo cíclico de orden 2^n. Es inmediato que la noción usual de orden coincide con la de orden de nivel uno. BECKER generaliza la caracterización de los cuerpos ordenables de ARTIN y SCHREIER demostrando que en un cuerpo K existe un orden de nivel menor o igual que n si y sólo si -1 no es suma de potencias 2^n-ésimas de elementos de K y que esto último equivale a que K sea formalmente real. (La última parte fue probada con anterioridad por JOLY [1970]).

Utilizando los resultados de BECKER sobre órdenes de nivel n y valoraciones, HARMAN y ROSENBERG [1980] demuestran, sobre un cuerpo ordenable K, la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) No existen órdenes de nivel mayor que uno.

(b) Todo elemento de K que es suma de cuadrados es suma de potencias 2^n-ésimas para cualquier número natural n.

(c) El grupo de valores de toda valoración real sobre K es 2-divisible.

Además, si estas condiciones no se cumplen, existen órdenes de nivel mayor o igual que n para cada número natural n.

Actualmente, BECKER trabaja en sumas de potencias pares, no necesariamente potencias de 2 [1979] y [1982].

Algunos resultados fascinantes que se obtienen utilizando la teoría de órdenes de alto nivel son:

1. (BECKER, [1978]). Si F es un cuerpo con infinitos elementos, n y m son dos números naturales y $x_1,\dots,x_r$ son elementos de F, la ecuación

$$y_1^{2^{n+m}} +\dots+ y_s^{2^{n+m}} = (x_1^{2^n} +\dots+ x_r^{2^n})^m$$

tiene solución en F para algún s.

2. (BECKER, [1979]). Si F es un cuerpo con infinitos elementos, m y n son dos números naturales y $x_1,\dots,x_r$ son elementos de F, la ecuación

$$y_1^{2nm} +\dots+ y_s^{2nm} = (x_1^{2n} +\dots+ x_r^{2n})^m$$

tiene solución en F para algún s.

Este teorema generaliza el obtenido por HILBERT para $n = 1$ en su solución al famoso problema de WARING. Por último

3. (BECKER [1982]). $\dfrac{1+x^2}{2+x^2}$ es suma de potencias 2n-ésimas en $\mathbb{Q}(x)$ para cada número natural n.

Referencias históricas

[1835] STURM, J.C.F. Mémorie sur la resolution des equations numeriques. Mémoire présentes par divers savants étrangers a l'Acad. Roy. Sc. Inst. France. Sc. Math. Phys. 6.

[1898] HILBERT, D. Grundlagen der Geometrie. Teubner. Leipzig.

[1927] ARTIN, E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 5. 110-115.

ARTIN, E. y SCHREIER, O. Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 5. 85-99.

ARTIN, E. y SCHREIER, O. Eine Kennzelchnung der reell obgeschlossenen Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5. 225-231.

BAER, R. Über nicht-archimedisch geordnete Körper, Sitz. Ber. der Heidelberger Akad. 8 Abh. 3-13.

[1929] BAER, R. Zur Topologie der Gruppen, J. reine angew. Math. 160, 208-226.

[1931] KRULL, W. Allgemeine Bewrtungstheorie, J. reine angew. Math. 167, 160-196.

[1937] WITT, E. Theorie der quadratischen Formen in bellebigen Korpern. J. reine angew Math. 176. 31-44.

[1948] TARSKI, A. A decision method for elementary algebra and geometry. Rand Corporation Publication.

[1949] SERRE, J.P. Extensions de corps ordonnés, C.R. Acad. Sci. Paris 229. 576-577.

[1953] LANG, S. The theory of real palces. Ann. Math. 57. 378-391.

[1955] ROBINSON, A. On ordered fields and definite functions, Math. Ann. 130, 257-271.

[1956] ROBINSON, A. Further remarks on ordered fields and definite functions, Math. Ann. 130, 405-409.

[1957] KREISEL, G. Hilbert's 17^{th} Problem I and II. Bull. Amer. Math. Soc. 63.

[1961] ROBINSON, A. Model theory and Non-Standard arithmetic infini tistic Methods. (Symp. of Found. of Math. 61, 265-302. Varsovia.

[1965] DILLER, J. y DRESS, A. Zur Galoistheorie pithagoreischer Körper, Arch. Math. 16. 148-152.

[1966] PFISTER, A. Quadratische Formen in bellebigen Korpern, Invent. Math. 1, 116-132.

WILKIE, H.C. On non-euclidean crystallographic groups. Math. Zeit. 91, 87-102.

[1968] HARRISON, D. Finite and infinite primes for rings and fields. Mem. Amer. Math. Soc. 68.

[1969] DUBOIS, D.W. A nullstellensatz for ordered fields. Diss. Math. LXIX, Varsovia, 1-43.

[1970] DUBOIS, D.W. y EFROYMSON, G. Algebraic theory of real varie ties. En Studies and Essays presentados a Yuwhy Chen en su sexagésimo aniversario. 107-135.

HARRISON, D. Witt Rings. Lect. Notes, Dept. of Math. Univ. de Kentucky.

JOLY, J.R. Sommes des puissances d-iemes dans un anneau commutatif, Acta Arith. 17, 37-114.

[1970] LEICHT, J. y LORENZ, F. Die Primideale des Wittschen Rings. Invent. Math. 10, 378-391.

RISLER, J.J. Une caracterization des idéaux des variétés algebriques réeles, C.R. Acad. Sci. Paris, 271, 1171-1173.

[1971] ALLING, N. y GREENLEAF, N. Foundations of the theory of Klein surfaces. Lect. Not. 219. Springer-Verlag.

BROWN, R. Real places and ordered fields, Rockey Mtn. J. Math. 1, 633-636.

[1973] ELMAN, R; LAM, T.Y. y PRESTEL, A. On some Harve principles over formally real fields, Math., Zeit. 134; 291-301.

KNEBUSCH, M.; ROSENBERG, A. y WARE, R. Signatures on semilocal rings, J.Alg. 26; 208-250.

LAM, T.Y. The Algebraic Theory of Quadratic Forms. W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts.

ROQUETTE, P. Principal ideal theorem for holomorphy rings in fields, J. reine angew. Math. 262 y 263. 361-374.

[1974] BECKER, E. Euklidische Körper and euklidische Hullen von Körpen, J. reine angew. Math. 268 y 269. 41-52.

BRÖCKER, L. Zur Theorie der quadratischen Formen Uber formal reellen Korpern, Math. Ann. 210; 233-256.

CRAVEN, T. The topological space of orderings of a rational function field. Duke Math. J. 41, 339-347.

SINGERMAN, D. On the structure of non-Euclidean crystallographic groups. Proc. Camb. Phil. Soc. 223-240.

[1974] STENGLE, G. A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry, Math. Ann. 207, 87-97.

[1975] CRAVEN, T. The Boolean space of orderings of a field. Trans. Amer. Math. Soc. 209, 225-235.

[1975] McKENNA, K. New facts about Hilbert's 17^{th} problem. Lect. Not. in Math. 498. Springer-Verlag. 220-230.

PRESTEL, A. Lectures on Formally Real Fields. IMPA Lecture Notes. 22. Río de Janeiro.

PRESTEL, A. y ZIEGLER, M. Erblick euklidische Körper, J. reine angew. Math. 274 y 275; 196-205.

[1977] BRÖCKER, L. Uber die Anzahl der Anordnungen eines Kommutativen Körpern, Arch. Math. 29, 458-464.

[1978] VAN den DRIES, L. The model theory of fields. Thesis. Amsterdam.

BECKER, E. Hereditarily Pithagorean Fields and Orderings of higher level. IMPA. Lecture Notes 29. Río de Janeiro.

[1979] BECKER, E. Summer n-ter Potenzen in Körpern. J. reine angew Math. 307 y 308; 8-30.

BRUMFIEL, G. Partially Ordered Rings and Semi-algebraic geometry. Lecture Note series of London Math. Soc. Camb. Univ. Press.

ELMAN, R.; LAM, T.Y. y WADSWORTH, H. Orderings under field extensions, J. reine angew, Math. 306, 7-27.

RECIO, T. Another nullstellensatz in semialgebaric geometry Simp. Geometria Algebrica. Bressanone.

[1980] BOCHNAK, J. y EFROYMSON, G. Real Algebraic Geometry and the 17^{th} Hilbert Problem. Math. Ann. 251. 213-241.

COSTE, M. y COSTE-ROY, M.F. Spectre reel d'un anneau et topos étale reel. These. Paris XIII.

DELZELL, C.N. A constructive, continous solution to Hilbert's 17^{th} Problem, and other results in semialgebraic geometry. Thesis. Stanford. Univ.

DUBOIS, D.W. Second Note on Artin's solution of Hilbert's 17^{th} problem. Order Spaces. Pac. J. of Math.

LAM, T.Y. The theory of ordered fields. Proc. of The Algebra and ring theory Conference. Univ. of Oklahoma.

[1981] BUJALANCE, E. Normal subgroups of N.E.C. groups. Math. Zeit 178; 331-341.

DUBOIS, D.W. y RECIO, T. Order extensions and real algebraic geometry. Contemporary Math. 8.

PRESTEL, A. Pseudo real closed fields. Set Theory and Model theory. Springer Lect. Not. Nr.

PRESTEL, A. y ROQUETTE, P. Quantifier elimination for p-adically closed fields. Aparecerá.

SCHULTING, H.W. "Real points and real places". Communications presented to the special session on ordered fields and real algebraic geometry. A.M.S. S. Francisco.

[1982] ANDRADAS, C. Tesis. Madrid.

BECKER, E. Sums of 2n-powers. Aparecerá en los Proceedings del Congreso de Geometría Algebraica Real y Formas cuadráticas, Mayo 1981. Rennes.

A continuación expondremos los resultados fundamentales obtenidos en esta memoria. Los números entre corchetes corresponden a la bilio grafía del final de la misma.

CAPITULO I

En este capítulo estudiamos los órdenes de las extensiones transcendentes y finitamente generadas $K(x_1,...,x_n)$ de un cuerpo K.

Para ello, dedicamos las secciones primera y segunda a fijar las notaciones que emplearemos y a recopilar algunos resultados sobre el espacio de órdenes de R(t) -R realmente cerrado- que de forma dispersa y poco detallada aparecen en los artículos de Brumfiel [5] y Massaza [27]. Utilizando estas técnicas describimos un mecanismo para fabricar todos los órdenes de $K(x_1,...,x_n)$ y obtenemos una nueva demostración de que el cuerpo de los números reales es el único cuerpo realmente cerrado R tal que todos los órdenes de R(t) son no arquimedianos sobre R.

En la sección tercera se plantea el problema de clasificar por isomorfía los órdenes de $K(x_1,...,x_n)$ -dos órdenes P y Q de un cuerpo F se dicen isomorfos cuando existe un automorfismo f de F tal que $f(P) = Q$-.

Construimos ejemplos de cuerpos $F = K(x_1,...,x_n)$ donde no todos los órdenes son isomorfos y caracterizamos los cuerpos ordenados (K,P) tales que el orden P se extiende a F de modo arquimediano.

Además demostramos que $\mathbb{R}$ es el único cuerpo realmente cerrado y arquimediano R tal que los órdenes de R(t) son isomorfos y mejoramos este resultado con las técnicas del capítulo quinto:

Teorema (3.2 y 5.19).- *El cuerpo de los números reales es el único cuerpo realmente cerrado* R *tal que los órdenes de* R(t) *son isomorfos.*

El problema de la clasificación por isomorfía cobra un mayor interés en el marco del espacio de órdenes de un cuerpo. En [11] Dubois y Recio introducen la noción de cuerpo con la propiedad de las órbitas densas (en lo sucesivo, cuerpo D.O.P.): Se dice que un cuerpo K es D.O.P. si para cada orden P en K, la órbita $O(P) = \{f(P) : f \in Aut(K)\}$ es un subconjunto denso de $X(K)$. Equivalentemente, un cuerpo K es D.O.P. si para cada abierto no vacío H del espacio de órdenes $X(K)$, $\bigcup_{f \in Aut(K)} f(H) = X(K)$. Por la compacidad de $X(K)$, es suficiente considerar uniones finitas.

Es claro que los cuerpos cuyos órdenes son isomorfos son D.O.P. En el epígrafe cuarto obtenemos un contraejemplo al recíproco. Para la construcción del mismo necesitamos un resultado de Dubois y Recio [11] en el que demuestran que si un cuerpo K es D.O.P. y totalmente denso, esto es, denso en todos sus cierres reales, entonces $F = K(x_1,...,x_n)$ también es D.O.P. Más aún, prueban que para cada abierto no vacío H de $X(F)$ existe un automorfismo f de F tal que $H \cup f(H) = X(F)$.

Este teorema suscita dos cuestiones, una de carácter cuantitativo y otra de carácter cualitativo.

A) Si sustituimos $Aut(F)$ por el subgrupo $G = G_n(\mathbb{P})$ de los automorfismos proyectivos de F, ¿se puede asegurar que $\bigcup_{f\in G} f(H) = X(F)$ para cada abierto no vacío H de $X(F)$?. Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿existe una cota superior del mínimo número $D^G(H;F)$ de automorfismos necesarios?.

B) ¿En qué condiciones es necesaria la densidad total de K para poder asegurar que $K(x_1,\dots,x_n)$ es D.O.P.?

La respuesta a la cuestión A) la obtenemos en

Teorema (4.12, 4.15 y 4.16).- *Para cada abierto no vacío* H *de* $X(F)$ *existen* $f_1,\dots,f_{n+1} \in G$ *tales que* $\bigcup_{j=1}^{n+1} f_j(H) = X(F)$. *Por tanto* $D^G(H;F) \leq n+1$. *Además, para cada* r, $1 \leq r \leq n+1$, *existe un abierto no vacío* H_r *en* $X(F)$ *de manera que* $D^G(H_r;F) = r$.

La herramienta básica en la prueba del teorema anterior es la correspondencia establecida entre los abiertos básicos $H = H(f_1,\dots,f_s)$, $f_j \in K[\underline{x}]$ de $X(F)$ y los semialgebraicos $\hat{H} = \{x \in K^n : f_j(x) > 0\}$. Cuando K es realmente cerrado la correspondencia anterior verifica que $H = \emptyset$ si y sólo si $\hat{H} = \emptyset$ y que $H = X(F)$ si y sólo si $\overline{\hat{H}} = K^n$.

Estas relaciones nos permiten interpretar el teorema precedente en términos geométricos, pues para cada semialgebraico S de interior $\mathring{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \{f_{ij} > 0,\ 1 \leq j \leq r\}$ el número $D^G(H,F)$, $H = \bigcup_{i=1}^{m} H(f_{ij},\ 1 \leq j \leq r)$, viene a ser una medida de tamaño de S.

Las secciones quinta y sexta se dirigen a resolver la cuestión B. Para ello introducimos la clase de cuerpos K con la propiedad de la extensión (K es p.e.). Un cuerpo K es p.e. si todo automorfismo de $K(t)$ es extensión de un automorfismo de K.

En el epígrafe quinto estudiamos con detalle esta clase de cuerpos. Es claro que no todo cuerpo tiene la propiedad de la extensión. Por ejemplo, $\mathbb{Q}(x)$ no la tiene. Sin embargo, obtenemos

Teorema (5.8 y 5.12)

(a) Los cuerpos arquimedianos con un único orden son p.e.

(b) Los cuerpos algebraicamente cerrados son p.e.

(c) Las extensiones algebraicas de $\mathbb{Q}$ *son* p.e.

(d) Si en un cuerpo K *existe* $P \in X(K)$ *tal que para cada* $a \in K$ *si* $a-2 \in P$ *entonces* $a^2-4 \in K^2$, *se verifica que* K *es* p.e.

Nótese que en virtud de (d), los cuerpos euclídeos, y en particular los realmente cerrados, son p.e.

Planteamos la cuestión de si todo cuerpo con un único orden es p.e.

Usando el punto (d) del teorema anterior caracterizamos los cuerpos p.e.

Teorema (5.18).- *Sea* K *un cuerpo ordenable. Sea* P *un orden en* K *y* R_P, H_P *los cierres real y euclídeo de* K *con respecto a* P. *Son equivalentes:*

(a) K *es* p.e.

(b) Para cada $P \in X(K)$ *y cada* $f \in Aut(K(t))$*, existe una única extensión* $\bar{f} \in Aut(R_P(t))$ *de* f.

(c) Existe $P \in X(K)$ *tal que para cada* $f \in Aut(K(t))$*, existe una única extensión* $\bar{f} \in Aut(R_P(t))$ *de* f.

(d) Para cada $P \in X(K)$ *y cada* $f \in Aut(K(t))$*, existe una única extensión* $f^* \in Aut(H_P(t))$ *de* f.

(e) Existe $P \in X(K)$ *tal que para cada* $f \in Aut(K(t))$ *existe una única extensión* $f^* \in Aut(H_P(t))$ *de* f.

La cuestión B planteada anteriormente recibe respuesta mediante el siguiente:

Teorema (6.3).- *Sea* K *un cuerpo con un único orden* K^+ *y con la propiedad de la extensión. Son equivalentes:*

(a) (K,K^+) *es denso en su cierre real.*

(b) K(t) *es D.O.P.*

Nótese que usando un resultado de McKenna [31], se puede reenunciar 6.3 diciendo que en un cuerpo K con un único orden y con la propiedad de la extensión el problema decimoséptimo de Hilbert tiene respuesta afirmativa si y sólo si K(t) es D.O.P.

En su clásico libro de Algebra, Lang [24] enuncia una solución incorrecta del problema decimoséptimo, olvidando la hipótesis de densidad en el cuerpo de coeficientes. En [10], Dubois construye el cierre euclídeo H de $\mathbb{Q}(t)$ con respecto al orden en que t es positivo e infinitesimal, y muestra que el polinomio $f(x) = (x^3-t)^2 - t^3 \in H[x]$ toma valores positivos en los puntos de H pero no es suma de cuadrados en $R(x)$ -siendo R un cierre real de H con respecto al único orden de H-. De este modo queda puesto de manifiesto el error de Lang. Sin embargo $f = (x^3-t-t^{3/2})(x^3-t+t^{3/2})$ es reducible en $H[x]$ y se plantea el problema de encontrar un polinomio g irreducible, en las condiciones del f anterior. Resolvemos esta cuestión, usando el criterio del cambio de signo de Viswanathan [41] y la caracterización de Prestel y Ziegler [35] de los cuerpos hereditariamente euclídeos, en un marco más general.

Teorema (7.9).- *Sea* K *una extensión finita y ordenable de* $\mathbb{Q}$, $F = K(x_1,\ldots,x_n)$ *y* $P \in X(F)$ *tal que* $x_n \in P$ *y* $g-x_n \in P$ *para cada* $g \in K(x_1,\ldots,x_{n-1})$. *Si* R *es un cierre real de* (F,P) *y* H *es el cierre euclídeo de* (E,P) *en* R, *existe* $g \in H[t]$ *irreducible en* $H[t]$, *positivo sobre* H *y que no es suma de cuadrados en* $R(t)$.

Obsérvese que haciendo $K = \mathbb{Q}$ y $n = 1$ estamos ante la situación planteada inicialmente.

CAPITULO II

En el capítulo segundo se estudia el espacio de órdenes de las variedades algebraicas reales.

Sea (K,K^+) un cuerpo ordenado, R su cierre real y p

un ideal primo de $K[x_1,\ldots,x_n]$ de forma que el orden K^+ se extien de a $E = \text{c.f.}\left(\frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{p}\right)$.

Entonces, estudiamos la relación entre el conjunto $X(E|_{K^+})$ de los órdenes de E que extienden K^+ y la geometría de la variedad real de p, esto es, $V_R(p) = \{a \in R^n : f(a) = 0 \text{ para cada } f \in p\}$. Supondremos siempre que (K,K^+) es denso en R.

El instrumento técnico que elaboramos para atacar estas cuestiones está contenido en el epígrafe octavo y, básicamente, consiste en extender la correspondencia entre abiertos básicos del espacio de órdenes y semialgebraicos abiertos, al caso de variedades.

Asociamos a cada abierto básico $H = H(f_1+p,\ldots,f_r+p)$ de $X(E)$ -se puede suponer que cada f_j es un polinomio- el semialgebraico $\hat{H} = V_R(p) \cap \{x \in R^n : f_j(x) > 0\}$. De este modo, si $S = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ es una unión finita de abiertos básicos y llamamos $\hat{S} = \hat{H}_1 \cup \ldots \cup \hat{H}_r$, demostramos:

(a) $S \cap X(E|_{K^+}) \neq \emptyset$ si y sólo si $\hat{S} \cap V_c \neq \emptyset$.

(b) $V_c \subset \overline{\hat{S}}$ si y sólo si $X(E|_{K^+}) \subset S$.

(c) $\overline{\hat{S}}_1 = \overline{\hat{S}}_2$ si y sólo si $S_1 = S_2$,

donde V_c es la adherencia del conjunto de puntos regulares de $V_R(p$

Resumiremos (a), (b) y (c) con el nombre de "Lema de la correspondencia".

Como primer aplicación de este resultado deducimos que el conjunto de órdenes centrales de $X(E|_{K^+})$ es un subconjunto denso d $X(E|_{K^+})$.

En la sección novena abordamos esencialmente dos problemas: (a) describir en términos geométricos el conjunto de órdenes de una variedad algebraica real que se extienden a otra; (b) encontrar modelos adecuados de los cuerpos ordenables de funciones algebraicas.

La solución al problema (a), para la cual resultan imprescindibles las técnicas descritas en el epígrafe anterior y el teorema de la aplicación abierta de Elman; Lam y Wadsworth puede entenderse como una manifestación expresa del teorema de Tarski-Seidemberg, pues encontramos, de modo efectivo, las inecuaciones del semialgebraico que resulta al "proyectar" otro semialgebraico; con precisión

<u>Teorema</u> (9.3).- *Sea* $f_o : V \to W$ *un morfismo dominante con dominio* A *entre dos variedades algebraicas sobre un cuerpo realmente cerrado. Sea* $f : R(W) \to R(V)$ *el homomorfismo de cuerpos asociado a* f_o *y* $f^* : X(R(V)) \to X(R(W)) : P \to f^{-1}(P)$. *Entonces* $\overline{\text{im } f^{*\wedge} \cap W_c} \subset \overline{f_o(V_c \cap A)} \subset \overline{\text{im } f^{*\wedge}}$, *donde* W_c *es la adherencia del conjunto de puntos regulares de* W.

En particular, si $V_c \subset A$ *y* $W_c = W$, *se deduce que* $\overline{\text{im } f^{*\wedge}} = \overline{f_o(V_c)}$.

En su artículo, Dubois y Recio [11] plantean el problema de averiguar en que condiciones un cuerpo E de funciones algebraicas sobre un cuerpo realmente cerrado R es D.O.P. Para resolverlo, es muy útil encontrar modelos de E -esto es, variedades algebraicas de algún R^n cuyo cuerpo de funciones racionales sea E-, que cumplan determinadas condiciones. Aunque pensamos que tiene interés por sí mismo, éste es el motivo fundamental por el que establecemos el siguiente:

<u>Teorema de los modelos</u>.- *Sea* E *un cuerpo ordenable de funciones algebraicas sobre un cuerpo realmente cerrado. Entonces:*

(1) Existe un modelo liso y compacto de E.

(2) Existe un modelo liso y no compacto de E.

La parte (1) de este teorema nos permite encontrar, cuando E es de dimensión uno, un modelo V de E de forma que los órdenes de R(V) no arquimedianos sobre R son centrales. En particular, cuando R es el cuerpo de los números reales, todos los órdenes de R(V) son centrales. Esta observación resulta de interés para caracterizar las curvas algebraicas sobre $\mathbb{R}$ cuyo cuerpo de funciones racionales es D.O.P. (epígrafe 16).

El primer resultado acerca de cuándo el cuerpo de funciones racionales de una variedad algebraica V es D.O.P. (o simplemente para abreviar cuando V es D.O.P.) lo obtenemos en el epígrafe décimo. Utilizando la existencia de modelos no compactos y el "lema de la correspondencia", encontramos una condición necesaria para que V sea D.O.P.:

<u>Teorema</u> (10.2).- *Si una variedad algebraica es D.O.P., el grupo de automorfismos de su cuerpo de funciones racionales no es finito.*

En la sección undécima encontramos condiciones suficiente para que una variedad algebraica sea D.O.P. Puesto que para cada variedad V, su cuerpo R(V) de funciones algebraicas es extensión algebraica de una extensión transcedente pura y finitamente generada $F = R(x_1,\ldots,x_n)$ de R y F es D.O.P., es natural abordar nuestro problema en el marco de la conservación de la D.O.P. bajo extensión algebraica. Para ello introducimos la noción de extensión normal real análoga a la clásica de extensión normal. Esta definición viene motivada por el hecho de que una extensión finita $\mathbb{Q}(a)$ de $\mathbb{Q}$ es D.O.P. si y sólo si todos los conjugados de a en $\mathbb{R}$ pertenecen a $\mathbb{Q}(a)$.

Damos las definiciones de extensión F-normal real y G-real normal y con este lenguaje demostramos:

(1) Dos órdenes cualesquiera de una extensión F-real normal de un cuerpo con un único orden son isomorfos. En particular, dicha extensión es D.O.P.

(2) Toda extensión finita y G-real normal de un cuerpo D.O.P. también lo es.

Haciendo uso de (2) y del "lema de la correspondencia" obtenemos una condición suficiente, aunque no necesaria, para que una variedad algebraica V sea D.O.P.

Teorema (11.20).- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* E *un cuerpo de funciones algebraicas sobre* R *de grado de transcendencia* n. *Si* $\{x_1,\ldots,x_n\}$ *es una base de transcendencia de* E *y* E *es extensión* G-*real normal de* $R(x_1,\ldots,x_n)$, *se verifica* *(a)* E *es D.O.P.*

(b) Todo orden de $R(x_1,\ldots,x_n)$ *se extiende a* E.

En la última sección de este capítulo aplicamos los resultados obtenidos en los epígrafes anteriores al estudio de la geometría semialgebraica.

En primer lugar, utilizando la caracterización de Elman, Lam y Prestel de los cuerpos K hereditariamente euclídeos como aquellos cuyos cuerpos de funciones algebraicas en una variable son S.A.P.,obtenemos algunos resultados sobre las formas de escribir un conjunto semialgebraico.

En la segunda parte de éste epígrafe damos respuesta parcial a una cuestión planteada por Elman; Lam y Wadsworth [13]: Dado un cuerpo ordenable F, ¿como son los abiertos de X(F) para los que existe una extensión finita E de F tal que H coincide con la imagen de $j^* : X(E) \to X(F) : P \to F \cap P$?.

Para abreviar, llamaremos a dichos abiertos, abiertos proyección. Ya en [13] se prueba que todo abierto básico es un abierto proyección. Nosotros mejoramos este resultado demostrando que todo abierto que sea unión de dos abiertos básicos es un abierto proyecció cuando $F = R(x_1,\ldots,x_n)$. Conjeturamos que toda unión finita de abie tos básicos es también un abierto proyección.

Si llamamos semialgebraico básico de R^n a todo conjunto d la forma $S = \{x \in R^n : f_1(x) > 0,\ldots,f_r(x) > 0\}$, donde $f_1,\ldots,f_r \in R[x_1,\ldots,x_n]$, podemos enunciar, utilizando (9.3),la contrapartida geométrica al resultado anterior:

Teorema (12.14).- *La adherencia, en la topología usual, de todo subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *que es unión de uno o dos semialgebraicos básicos coincide con la proyección del conjunto de puntos centrales de alguna variedad algebraica irreducible.*

CAPITULO III

El capítulo tercero se dedica, casi en su totalidad, al análisis del espacio de órdenes de las curvas algebraicas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. En particular, en el epígrafe 16 caracterizamos las curvas algebraicas reales que son D.O.P.

Hay dos razones fundamentales que hacen que el estudio del espacio de órdenes de las curvas sobre $\mathbb{R}$ sea más sencillo que el de las variedades de dimensión arbitraria sobre un cuerpo realmente cerrado cualquiera. La primera de ellas, ya señalada con anterioridad es la existencia de modelos para los cuales todos los órdenes son centrales. La segunda es el desarrollo de la teoría de superficies de Klein debido a Alling y Greenleaf [2] y que desempeña en el caso real el mismo papel que las superficies de Riemann en el caso complejo.

Por ello, en la sección 13 hacemos un rápido resumen de los resultados de [2] estableciendo una equivalencia entre la categoría de superficies de Klein compactas y la de cuerpos de funciones algebraicas en una variable. Esta equivalencia hace corresponder al cuer po F la superficie $\text{Riem}(F)$ formada por los anillos de valoración de F que contienen a $\mathbb{R}$.

En adelante notaremos $Y(F) = \text{Riem}(F)$. El borde de $Y(F)$ se escribe $\partial Y(F)$ y está formado por los anillos de valoración real de F. Para terminar con las notaciones, designaremos por $\mathbb{R}(F)$ al cierre algebraico de $\mathbb{R}$ en F.

En el epígrafe 14 estudiamos la información de carácter topológico y diferencial que sobre $(Y(F), \partial Y(F))$ arroja el par $(F, \mathbb{R}(F))$.

Una primera observación de interés es que $\partial Y(F)$ no es vacío si y sólo si F es ordenable. Por ello, como nosotros estudiamos curvas algebraicas reales, limitamos nuestra atención a las superficies de Klein con borde. Además demostramos que dicho borde es homeomorfo a un modelo liso y acotado de la curva F. De aquí se deduce la invarianza birracional del número de componentes conexas de las curvas reales lisas y acotadas (este resultado ha sido probado por COSTE y COSTE ROY para cuerpos realmente cerrados arbitrarios utilizando técnicas muy diferentes).

Para el caso en que F no es ordenable demostramos que $X(F)$ es orientable si y sólo si $\mathbb{R}(F) = \mathbb{C}$.

Por otro lado, y para géneros bajos, el par $(F, \mathbb{R}(F))$ clasifica topológicamente a $Y(F)$. Por ejemplo:

(a) Si F es ordenable y de género cero, $Y(F)$ es un disc

(b) Si $\mathbb{R}(F) = \mathbb{C}$ y F es de género cero, $Y(F)$ es una esfera.

(c) Si $\mathbb{R}(F) = \mathbb{R}$, pero F no es ordenable y F es de género cero, entonces $Y(F)$ es un plano proyectivo.

(d) Si F es de género uno y no ordenable, $Y(F)$ es una botella de Klein.

(e) Si F es ordenable y $\partial Y(F)$ es conexo, $Y(F)$ es una cinta de Möebius.

(f) Si F es ordenable y $\partial Y(F)$ es disconexo, $Y(F)$ es una corona cirular.

El último resultado de esta sección se refiere a la constructibilidad de curvas reales cuyo género y número de componentes conexas están prefijados.

Teorema (14.14).- *Sean* g *y* k *dos números enteros tales que* $1 \leqslant k \leqslant g+1$. *Entonces existe una curva algebraica real* C *de género* g *y* k *componentes conexas. Además:*

(a) Si $k-1 \not\equiv g(\mathrm{mod}\,2)$, $Y(C)$ *no es orientable.*

(b) Si $k-1 \equiv g(\mathrm{mod}\,2)$ *existen dos curvas* C_1 *y* C_2 *tales que* $Y(C_1)$ *es orientable e* $Y(C_2)$ *no lo es.*

La observación de que el borde de la superficie de Klein asociada a un cuerpo ordenable F de funciones algebraicas en una variable no es vacío juega un papel esencial a la hora de estudiar el grupo de automorfismos de F. La clave radica en que toda superficie de Klein compacta y con borde no vacío se representa en la forma $\mathbb{C}^+/\Gamma$, donde Γ es un grupo cristalográfico no euclídeo (en lo sucesivo grupo N.E.C.) según demuestra Preston [36].

La teoría de grupos N.E.C. introducidos por Wilkie [42] juega así un papel esencial a la hora de calcular el grupo Aut(F). En particular, usando un resultado de Macbeth y Singerman [26], demostramos que el grupo de automorfismos del cuerpo de funciones racionales de una curva algebraica real de género mayor o igual que dos es finito. Utilizando ahora 10.2 se sigue que las curvas de género mayor o igual que dos no son D.O.P.

Por otra parte, utilizando resultados de Alling [1], probamos que dados dos puntos de una curva elíptica real C lisa y acotada, existe un isomorfismo birracional de C que envía uno a otro. De este modo, usando el teorema de los modelos y en particular la existencia de modelos cuyos órdenes son todos centrales, probamos que las curvas elípticas son D.O.P.

En resumen, obtenemos

Teorema (16.1).- *Las únicas curvas algebraicas reales que son D.O.P. son las racionales y las elípticas.*

En la última sección de esta memoria volvemos a las variedades algebraicas de dimensión arbitraria sobre un cuerpo realmente cerrado. Empleamos las secciones hiperplanas para medir el tamaño del conjunto de puntos centrales de las variedades.

Si V es una variedad de R^n cuyo ideal notaremos por p y llamando $A = R[x_1,\dots,x_n]$ y $B = R[x_1,\dots,x_n, \Lambda_o,\dots,\Lambda_n]$, construimos el ideal $q = p.B + (\Lambda_o+\Lambda_1 x_1 +\dots+ \Lambda_n x_n)B$. Si

$G \subset R^n \times R^{n+1}$ es el conjunto de ceros de q y $\pi : R^n \times R^{n+1} \to R^{n+1}$ es la proyección canónica, usaremos el conjunto semialgebraico $\pi(G)$ para medir el tamaño de V. Obsérvese que $\pi(G)$ es el conjunto de $\lambda \in R^{n+1}$ tales que el hiperplano $\lambda_o+\lambda_1 x_1 +\dots+ \lambda_n x_n = 0$ corta a V.

Como $q \cap R[\Lambda_o,\dots,\Lambda_r] = \{0\}$, tenemos un homomorfismo de cuerpos $j : R(\Lambda) \hookrightarrow R(G)$ y la correspondiente $j^* : X(R(G)) \to X(R(\Lambda))$. En virtud de (9.3) se verifica que

$$\overline{\pi(Gc)} = \overline{\text{im } j^{*\wedge}}, \qquad (1)$$

Aunque por (4.12) se sabe que $D^G(\text{im } j^*, R(\Lambda)) \leq n+2$, mejoramos esta cota demostrando

Teorema (17.13).- $D^G(\text{im } j^*, R(\Lambda))$ *es uno o dos.*

Junto con (1) este teorema permite clasificar las variedades algebraicas V de R^n en dos tipos:

Tipo A) Todo hiperplano genérico de R^n corta a V_c.

Tipo B) Existe un automorfismo proyectivo σ de $R(\Lambda)$ tal que, para cada hiperplano genérico H de R^n, o H corta a V_c ó $\sigma(H)$ corta a V_c.

(Si $H : \Lambda_o + \Lambda_1 x_1 +\dots+ \Lambda_n x_n = 0$, llamamos $\sigma(H)$ a $\sigma(\Lambda_o) + \sigma(\Lambda_1)x_1 +\dots+ \sigma(\Lambda_n)x_n = 0$).

Si una variedad V es del tipo A) decimos que su número hiplano $n_H(V) = D^G(\text{im } j^*, R(\Lambda))$ es uno y si es del tipo B), $n_H(V) = 2$. Este número hiperplano no es invariante por isomorfía birracio nal y entendemos que esto es una muestra de la existencia de interesantes propiedades geométricas de las variedades algebraicas reales que no quedan recogidas por su cuerpo de funciones racionales.

CAPITULO I. EXTENSIONES PURAMENTE TRANSCEDENTES DE CUERPOS ORDENADOS.

Dedicamos este primer capítulo al estudio del espacio de órdenes de los cuerpos $E = K(x_1,\ldots,x_n)$, $gr.t.E/K = n$ con especial atención al caso de una sola variable. A lo largo del mismo, $t, x_1,\ldots,x_n$ serán siempre indeterminadas sobre el cuerpo base.

§1. Ordenes en R(t), R realmente cerrado

La descripción del espacio de órdenes de $R(t)$ aparece entre otros en Massaza [27], Craven [8], Brumfiel [5] y Gilmer [17]. Nuestro objetivo en este primer epígrafe es dar una versión más precisa de los resultados allí expuestos y adecuarlos al modo en que los usaremos en lo sucesivo.

1.1. Definición.- *Una cortadura en un cuerpo ordenado* (E,P) *es un subconjunto* D *de* E *que verifica que si* $a \in D$ *y* $a-b \in P$, *entonces* $b \in D$.

Dos cortaduras se llaman isomorfas cuando se diferencian a lo más en un elemento.

Un mecanismo usual para fabricar cortaduras en (E,P) *es el siguiente:*

Si (F,Q) *es una extensión ordenada de* (E,P) *y* $f \in F$, *entonces*

$D_E^Q(f) = \{a \in E : a-f \in Q\}$ *es una cortadura en* (E,P).

Para unificar notaciones convenimos en que una cortadura D en (E,P) es <u>algebraica</u> en cualquiera de los siguientes casos:

(a) $D = E$

(b) $D = \emptyset$

(c) D es isomorfa a $D_E^{R^2}(f)$, siendo (R,R^2) un cierre real de (E,P) y $f \in R$. Una cortadura es <u>transcendente</u> cuando no es algebraica.

Vamos a estudiar los órdenes de $R(t)$ cuando R es un cuerpo realmente cerrado, mediante la cortadura $D_R(t)$. En primer lugar fijaremos algunas notaciones.

1.2. <u>Notaciones</u>.- Sea R un cuerpo realmente cerrado. Llamamos P_∞ al orden de $R(t)$ formado por aquellos elementos para los que existe $b \in R$ de modo que en el intervalo $(b,\rightarrow)$ de R toman valores positivos, junto con el cero de $R(t)$. Al orden que resulta al sustituir $(b,\rightarrow)$ por $(\leftarrow,b)$ en la anterior definición lo notaremos por $P_{-\infty}$.

Para cada $a \in R$ se consideran los órdenes de $R(t)$

$$P_{a^+} = \{0\} \cup \{\tfrac{f}{g} \in R(t) : \text{existe } r \in R^+ \text{ con } \tfrac{f}{g}\Big|_{(a,a+r)} > 0\}$$

$$P_{a^-} = \{0\} \cup \{\tfrac{f}{g} \in R(t) : \text{existe } r \in R^+ \text{ con } \tfrac{f}{g}\Big|_{(a-r,a)} < 0\}.$$

1.3. <u>Proposición</u>.- *Los anteriores* P_∞, $P_{-\infty}$, P_{a^+}, P_{a^-} *son órdenes en* $R(t)$. *Además, si* P_d *es el subconjunto de* $R(t)$ *forma* *do por el cero y los elementos* $\frac{f}{g} \in R(t)$ *tales que el coeficiente director de* $f.g$ *es positivo en* R, *se cumple que* $P_a = P_\infty$.

<u>Demostración</u>.- Es inmediato que P_∞ y $P_{-\infty}$ son órdenes en $R(t)$.

Para comprobar que P_{a^+} es un orden, solo requiere cierto cuidado la igualdad:

$$R(t) = P_{a^+} \cup (-P_{a^+}).$$

Sea $\frac{f}{g} \in R(t) - \{0\}$. Si $f(a).g(a) \neq 0$, un argumento de continuidad es suficiente para probar que $\frac{f}{g} \in P_{a^+} \cup (-P_{a^+})$.

Si $f(a).g(a) = 0$ y escribiendo:

$$f.g = A(t-a)^s \prod_{i \in I} (t-a_i) \,.\, \prod_{j \in J} (t-b_j)^2 + c_j^2 \,,$$

tomamos $L = \{i \in I : a_i - a \in R^+\}$.

Elegimos $r \in R^+$ de manera que para cada $i \in L$ sea $a_i-a-r \in R^+$. Entonces:

(a) Si $A \in R^+$ y card L es par, se tiene $f.g|_{(a,a+r)} > 0$.

(b) Si $A \in R^-$ y card L es impar, se tiene $f.g|_{(a,a+r)} > 0$.

(c) Si $A \in R^+$ y card L es impar, se tiene $f.g|_{(a,a+r)} < 0$.

(d) Si $A \in R^-$ y card L es par, se tiene $f.g|_{(a,a+r)} < 0$

Así $\frac{f}{g} \in P_{a^+} \cup (-P_{a^+})$.

Análogamente se comprueba que P_{a^-} es un orden. Como tanto P_∞ como P_d son órdenes en $R(t)$, para probar que son iguales basta demostrar que $P_d \subset P_\infty$.

Pero, si $\frac{f}{g} \in P_d - \{0\}$, se verifica que

$$f.g = a. \prod_{i\in I} (t-a_i) . \prod_{j\in J} (t-b_j)^2+c_j^2 \qquad y \quad a \in R^+.$$

Por tanto, si $b = \max \{a_i : i \in I\} + 1$, $\frac{f}{g}$ es positivo en $(b,\rightarrow)$ y así $\frac{f}{g} \in P_\infty$.

1.4. <u>Proposición</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* $F = R(t)$ *y* P *un orden en* F. *Entonces:*

(i) Si $D_R^P(t) = R$, *es* $P = P_\infty$.

(ii) Si $D_R^P(t) = \emptyset$, *es* $P = P_{-\infty}$.

(iii) Si existe $a \in R$ *de manera que* $D_R^P(t)$ *es isomorfa a* $D_R^P(a)$, P *coincide con* P_{a^+} *o con* P_{a^-}.

(iv) Si $D_R^P(t) = D$ *no se encuentra entre los casos anteriores, se verifica que* $P = P_D = \{\frac{f}{g} \in R(t)$: *existen* $a,b \in R$ *con* $a \in D$, $b \notin D$ *y* $\frac{f}{g}$ *es positivo en* $(a,b)\} \cup \{0\}$.

<u>Demostración</u>.- (i) Basta probar que $P_d \subset P$.

Sea $\frac{f}{g} \in P_d - \{0\}$. Entonces escribimos:

$$(1): f.g = a . \prod_{i\in I} (t-a_i) . \prod_{j\in J} (t-b_j)^2+c_j^2 \quad \text{con} \quad a \in R^+.$$

Como $D_R^P(t) = R$ cada $t-a_i \in P$. Entonces, puesto que $a \in R^+ \subset P$ y cada $(t-b_j)^2+c_j^2 \in P$, concluimos que $f.g \in P$. Como

$\frac{f}{g} = f \cdot g \cdot (\frac{1}{g})^2 \in P$, hemos terminado.

(ii) Si $\frac{f}{g} \in P - \{0\}$, se verifica que $f.g \in P$, luego, usando la fórmula (I) es $a \cdot \prod_{i \in I} (t-a_i) \in P$. Entonces, como $D_R^P(t) = \emptyset$, cada $a_i - t \in P$, por lo cual ha de cumplirse:

(a) $a \in R^+$ y card I es par ó

(b) $a \in R^-$ y card I es impar.

En cualquier caso, tomando $b = \min \{a_i : i \in I\} - 1$, deducimos que $\frac{f}{g}$ es positivo en $(\leftarrow, b)$ y por tanto $\frac{f}{g} \in P_{-\infty}$.

(iii) Si $D_R^P(t)$ es isomorfo a $D_R^P(a)$, puede suceder que $t-a \in P$ ó que $t-a \notin P$.

Probaremos que en el primer caso $P = P_{a^+}$ y análogamente se comprueba que en el segundo es $P = P_{a^-}$.

Sea pues $\frac{f}{g} \in P_{a^+} - \{0\}$. Es evidente que $f(a).g(a) \geq 0$.

Si $f(a).g(a) > 0$ y escribiendo

$$f.g = A. \prod_{i \in I} (t-a_i) \cdot \prod_{j \in J} (t-b_j)^2 + c_j^2 ,$$

puede ocurrir:

(a) $A \in R^+$ e $I' = \{i \in I : a_i - a \in R^+\}$ es de cardinal par, ó bien

(b) $A \in R^-$ e I' tiene cardinal impar.

Como $t-a \in P$ es $D_R^P(t) = D_R^P(a) \cup \{a\}$, luego $t-a_i \in P$ cuando $i \in I-I'$ y $t-a_i \notin P$ si $i \in I'$.

Así, para probar que $\frac{f}{g} \in P$ es suficiente demostrar que

$A \cdot \prod_{i \in I'} (t-a_i) \in P$, y esto es obvio tanto si (a) como si (b).

Si $f(a).g(a) = 0$, existe $s \in \mathbb{N}$ de modo que $f.g = $
$= (t-a)^s \cdot h(t)$, $h(a) \neq 0$.

Al ser $f.g \in P_{a^+}$ y $t-a \in P_{a^+}$ se deduce que $h \in P_{a^+}$ y por lo que acabamos de ver, $h \in P$. Como $t-a \in P$, obtenemos que $f.g \in P$, es decir, $\frac{f}{g} \in P$.

Así $P_{a^+} \subset P$ y en consecuencia $P_{a^+} = P$.

(iv) Estamos ahora ante el caso en que $D_R^P(t)$ es transcendente.

En primer lugar debemos comprobar que P_D es un orden. Sólo presenta cierta dificultad la igualdad $P_D \cup (-P_D) = R(t)$.

Dada $\frac{f}{g} \in R(t) - \{0\}$, como $\emptyset \neq D \neq R$ y el número de raíces de $f.g$ en R es finito, existen $a,b \in R$ con $t-a \in P$, $b-t \in P$ y tales que el signo de $f.g$ es constante en (a,b).

Ahora, como $a \in D$ y $b \notin D$, se concluye que $\frac{f}{g} \in P_D \cup (-P_D)$.

Finalmente, probaremos que $P \subset P_D$.

Para cada $\frac{f}{g} \in P - \{0\}$ elegimos a y b como acabamos de hacer y descomponemos

$$f.g = A \cdot \prod_{i \in I} (t-a_i) \cdot \prod_{j \in J} (t-b_j)^2 + c_i^2 .$$

Al ser $\frac{f}{g} \in P$ es $A \cdot \prod_{i \in I} (t-a_i) \in P$, luego si llamamos $I' = \{i \in I : a_i \notin D\}$ debe ser

(a) $A \in R^+$ y card I' es par ó bien

(b) $A \in R^-$ y card I' es impar.

Ahora, por la elección de a es $I' = I'' = \{i \in I : a_i - a \in R^+\}$, luego tanto si i) como si ii) es $f(a).g(a) > 0$ y en consecuencia, $\frac{f}{g}$ es positivo en (a,b).

Como acabamos de probar, la cortadura $D_R^P(t)$ determina el orden P. Se puede establecer un recíproco de la proposición anterior en los siguientes términos:

1.5. Proposición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* D *una cortadura de* R. *Entonces existe un único orden* P *en* $R(t)$ *de forma que* $D = D_R^P(t)$.

Demostración.- Si probamos la existencia, la unicidad será consecuencia de 1.4. Veamos pues aquella.

Caso 1. $D = R$. Tomamos $P = P_d$. Como $t-r \in P$ para cada $r \in R$, es $R \subset D_R^P(t) \subset R$, luego $D = D_R^P(t)$.

Caso 2. $D = \emptyset$. Tomamos $P = P_{-\infty}$. Para cada $r \in R$, $r-t$ es positivo en $(\leftarrow, r)$, luego $r-t \in P$ y así $t-r \notin P$.

Caso 3. D es isomorfa a $D_R^{R^2}(a) = (\leftarrow, a)$. Entonces D coincide con $(\leftarrow, a)$ ó con $(\leftarrow, a]$.

Si $D = (\leftarrow, a)$ elegimos $P = P_{a^-}$ y así para cada $b \in D_R^P(t)$ es $t-b \in P_{a^-}$, esto es, existe $r \in R^+$ de manera que $t-b$ es positiva en $(a-r, a)$. En particular $a - \frac{r}{2} - b \in R^+$, luego $b \in (\leftarrow,a) = D$, con lo cual $D_R^P(t) \subset D$.

Recíprocamente, si $b \in D$ y tomando $r = \frac{a-b}{2} \in R^+$, $t-b$ es positiva en $(a-r,a)$, luego $D = D_R^P(t)$.

Para el caso $D = (\leftarrow,a]$ se elige $P = P_{a^+}$ y se repite la misma prueba.

Por último, si D es transcendente, basta elegir $P = P_D$.

Nos interesa distinguir los órdenes P_{a^+} y P_{a^-} de los demás órdenes de $R(t)$. En primer lugar introducimos la siguiente:

1.6. Definición.- *Sea* (K,K^+) *un cuerpo ordenado y* P *un orden de* $K(t)$. *Se dice que* P *está centrado en* $a \in K$ *si* P *contiene a los elementos* $\frac{f}{g} \in K(t)$ *tales que* $\frac{f(a)}{g(a)} \in K^+ - \{0\}$. *Si para cada* $a \in K$ *es* $t-a \in P$ *(respectivamente* $a-t \in P$*) se dice que* P *está centrado en* $+\infty$ *(respectivamente en* $-\infty$*).*

1.7. Proposición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* $a \in R$. *Los únicos órdenes de* $R(t)$ *centrados en* a *son* P_{a^-} *y* P_{a^+}.

Demostración.- Es claro que P_{a^-} y P_{a^+} están centrados en a. Sea P un orden centrado en a. Distinguimos dos casos:

(a) $t-a \in P$; (b) $t-a \notin P$.

(a) Para cada $\frac{f}{g} \in P_{a^+} - \{0\}$ es claro que $f(a).g(a) > 0$. Entonces, si $f(a).g(a) > 0$ y como P está centrado en a, es

$f.g \in P$, luego $\frac{f}{g} = f.g \cdot (\frac{1}{g})^2 \in P$.

Si $f(a).g(a) = 0$ se factoriza

$$f.g = (t-a)^m \cdot h(t), \quad m > 0, \quad h(a) \neq 0.$$

$h \in P_{a^+}$ pues $f.g \in P_{a^+}$ y $t-a \in P_{a^+}$, y como $h(a) \neq 0$, ha de ser $h(a) > 0$. Según acabamos de probar h pertenece a P. Como $(t-a) \in P$ obtenèmos que $f.g \in P$ y finalmente $\frac{f}{g} \in P$.

Así $P_{a^+} \subset P$ de donde $P_{a^+} = P$.

(b) Razonando del mismo modo, obtenemos que $P = P_{a^-}$.

1.8. <u>Definición</u>.- *Un cuerpo ordenado* (F,P) *se llama* <u>*arquimediano sobre un subcuerpo* E</u> *si para cada* $f \in F$ *existe* $a \in E$ *con* $a-f \in P$. *Cuando* (F,P) *sea* <u>*arquimediano sobre el cuerpo* $\mathbb{Q}$</u> *de los números racionales, diremos que* (F,P) *es* <u>*arquimediano*</u>.

Ahora podemos distinguir los órdenes P de $R(t)$ tales que $D_R^P(t)$ es transcendente,de los demás órdenes de $R(t)$.

1.9. <u>Proposición</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* P *un orden en* $R(t)$. *Son equivalentes:*

(a) $(R(t), P)$ *es arquimediano sobre* R

(b) $D_R^P(t)$ *es transcendente.*

<u>Demostración</u>.- Como, para cada $a \in R$, $t-a \in P_\infty$ y $t^2-a \in P_{-\infty}$, ni $(R(t),P_\infty)$ ni $(R(t), P_{-\infty})$ son arquimedianos so

bre R. R(t) con un orden P_{a^+} no es arquimediano sobre R pues para cada $r \in R^+$, $\frac{1}{t-a} - r$ es positivo en $(a, a + \frac{1}{2r})$. Análogamente, $\frac{1}{a-t} - r \in P_{a^-}$ para cada $r \in R$, luego R(t) con un orden P_{a^-} no es arquimediano sobre R.

Así solo falta probar que cuando $D_R^P(t) = D$ es transcendente, $(R(t), P_D)$ es arquimediano sobre R.

Pero, para cada $\frac{f}{g} \in P_D$, existen $a \in D$, $b \notin D$ de modo que $\frac{f}{g}$ es positivo en (a,b) y $g(a).g(b) \neq 0$.

Como $\frac{f}{g} : [a,b] \to R$ es continua y $[a,b]$ es compacto (consideramos en R la topología del orden) existe $M \in R$ de modo que $\frac{f(x)}{g(x)} < M$ para cada $x \in [a,b]$.

Por ello, $M - \frac{f}{g} \in P$.

A continuación distinguiremos, en dos etapas, el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales de los demás cuerpos realmente cerrados por medio de los órdenes de sus extensiones puramente transcendentes con grado de transcendencia uno.

1.10. <u>Proposición</u>.- *El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es el único cuerpo realmente cerrado y arquimediano que cumple que en sus extensiones puramente transcendentes, con grado de transcedencia uno no existen órdenes arquimedianas sobre él.*

<u>Demostración</u>.- De la construcción de $\mathbb{R}$ se sigue la no existencia de extensiones propias de $\mathbb{R}$ arquimedianas sobre $\mathbb{Q}$. Como el ser arquimediano es una propiedad transitiva y $\mathbb{R}$ es arquimedia

no sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}(t)$ no es arquimediano sobre $\mathbb{R}$ con ningún orden.

Como los cuerpos arquimedianos son subcuerpos ordenados de $\mathbb{R}$, y en virtud de 1.5 y 1.9, todo lo que falta es probar que si $R \subsetneqq \mathbb{R}$ es un cuerpo realmente cerrado, existe una cortadura trascendente D en R. Para construirla, seleccionamos $x \in \mathbb{R} - R$ y tomamos $D = \{a \in R : x-a \in \mathbb{R}^+\}$ que es una cortadura en R.

Si $(x-1,x) = \{y \in \mathbb{R} : x-1 < y < x\}$, cada elemento de $\mathbb{Q} \cap (x-1,x)$ está en D, luego $D \neq \emptyset$. Si $(x,\to) = \{y \in \mathbb{R} : y > x\}$, los elementos de $\mathbb{Q} \cap (x,\to)$ pertenecen a $R-D$, y así $D \neq R$.

Además, si para cada $a \in R$ llamamos

$(\leftarrow,a)_R = \{y \in R : a-y > 0\}$ y

$(\leftarrow,a]_R = (\leftarrow,a)_R \cup \{a\}$, veremos que

$(\leftarrow,a)_R \neq D \neq (\leftarrow,a]_R$, con lo cual terminaremos.

Si $D = (\leftarrow,a)_R$, a no pertenece a D luego $a \geqslant x$, y como $x \notin R$, $a > x$.

Tomamos $q \in \mathbb{Q} \cap (x,a)$. Así $q \in D$, esto es, $x-q \in R^+$. Pero esto es falso pues $q > x$. Si $D = (\leftarrow,a]_R$ es $a \in D$, luego $a < x$ y si tomamos $q \in \mathbb{Q} \cap (a,x)$, como $q \in R$ y $x-q \in R^+$, llegamos a que $q \in D$. Esto es falso pues $q > a$.

Para establecer 1.10 suprimiendo la palabra arquimediano necesitamos considerar una situación más general.

1.11. <u>Proposición</u>.- *Sea* (K,P) *un cuerpo ordenado y consideramos* $C(K)$ *el conjunto de cortaduras de* (K,P) *distintas de* K *y de* $\emptyset$ *y que no tienen máximo.*

Se define $f_K : K \to C(K) : a \mapsto D_K^P(a)$. *Entonces:*

(1) f_K *es aplicación inyectiva.*

(2) Si para cada $D \in C(K)$, $K-D$ *tiene mínimo, entonces* f_K *es biyección.*

<u>Demostración</u>.- (1) Como $a-1 \in f_K(a)$ y $a+1 \in K-f_K(a)$, se sigue que $f_K(a)$ no es ni $\emptyset$ ni K.

Si $f_K(a)$ tuviera un máximo b, y eligiendo $c = b + \frac{a-b}{2}$, llegamos a contradicción pues $c-b \in P - \{0\}$ y $c \in f_K(a)$.

Por tanto, f_K es aplicación. Además es inyectiva, puesto que si $a \neq b$, por ejemplo $b-a \in P - \{0\}$, es $a \in f_K(b)$ pero $a \notin f_K(a)$.

(2) Si x es el mínimo elemento de $K-D$, entonces $D = f_K(x)$.

1.12. <u>Observación</u>.- En las condiciones de (2), y llamando $C(P) = f_K(P)$, $C(K)$ queda dotado de estructura de cuerpo ordenado isomorfo a (K,P), definiendo $f_K(x) + f_K(y) = f_K(x+y)$, $f_K(x).f_K(y) = f_K(x.y)$ y siendo $C(P)$ el cono de elementos positivos de $C(K)$.

Además, siguiendo a Landau [23], se deduce que cada cortadura D de $C(C(K))$ tiene mínimo, luego por (2) de 1.11 se deduce que $F_K = f_{C(K)} : C(K) \to C(C(K))$ es biyectiva.

Ahora podemos establecer:

1.13. Proposición.- *Sea* R *cuerpo realmente cerrado y no arquimediano. Entonces existe un orden* P *en* R(t) *de modo que* (R(t),P) *es arquimediano sobre* R.

Demostración.- Por 1.5 y 1.9 es suficiente encontrar una cortadura transcendente D en R, y para esto basta con probar la existencia de $D \in C(R)$ tal que R-D no tenga mínimo.

Pero, si no existiera, en virtud de 1.12, las aplicaciones f_R y F_R serían biyectivas.

Tomamos en tal caso

$$G = \{D \in C(R) : \text{existe } q \in \mathbb{Q} \text{ con } f_R(q)-D \in C(R^+)\},$$

que es una cortadura en C(R).

Veamos que $G \in C(C(R))$. G no es vacío pues $f_R(0) \in G$. Además, al ser R no arquimediano, $G \neq C(R)$.

G no tiene máximo, pues si $D = \text{máx}\, G$, al ser f_R sobreyectiva existiría $r \in R$ con $D = f_R(r) \in G$ y en consecuencia tendríamos: $f_R(q) - f_R(r) \in C(R^+)$ para cierto $q \in \mathbb{Q}$. Entonces $q-r \in R^+$ y $D' = f_R(r + \frac{q-r}{2}) \in G$ cumple que $D'-D \in C(R^+)$.

Así $G \in C(C(R))$ y por la biyectividad de F_R existe un único $D \in C(R)$ tal que $G = F_R(D)$.

Veamos que D está formada por los elementos $a \in R$ para los que existe $q \in Q$ que cumple que $q-a \in R^+$. En efecto:

Si $a \in D$ es $f_R(a) \subset D$, es decir $D-f_R(a) \in C(R^+)$. Por tanto $f_R(a) \in F_R(D) = G$ y así existe $q \in \mathbb{Q}$ verificando que

$$f_R(q) - f_R(a) \in C(R^+).$$

Esto implica que $q-a \in R^+$.

Recíprocamente, si $q-a \in R^+$, $q \in \mathbb{Q}$, se tiene: $f_R(q) - f_R(a) \in C(R^+)$, luego $f_R(a) \in G$. Por ello $D-f_R(a) \in C(R^+)$, esto es, $f_R(a) \subset D$. Pero, por la sobreyectividad de f_R, existe $b \in R$ con $D = f_R(b)$. En consecuencia $b-a \in R^+$, y $a \in f_R(b) = D$.

Finalmente, llegamos a contradicción del siguiente modo: tomamos $q \in \mathbb{Q}^+$ arbitrariamente. Como $q-0 \in R^+$, $f_R(q) - f_R(0) \in C(R^+)$, luego $f_R(q) + D$ es mayor que D en $(C(R),C(R^+))$. (1) Sin embargo, si $D = f_R(c)$, $c \in R$ y para cada $r \in f_R(q) + D = f_R(q+c)$, se verifica que $q+c-r \in R^+$, luego $D-f_R(r-q) \in C(R^+)$.

Por tanto $f_R(r-q) \in F_R(D) = G$, esto es, existe $q_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $f_R(q_1) - f_R(r-q) \in C(R^+)$. Así $q+q_1-r \in R^+$, es decir, $f_R(r) \in G$ o lo que es lo mismo, $r \in D$.

Hemos probado que $f_R(q) + D \subset D$ y esto contradice (1).

De 1.10 y 1.13 se deduce:

1.14. <u>Corolario</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado; son equivalentes:*

(a) R *es el cuerpo de los números reales.*

(b) No existe ningún orden P *en* $R(t)$ *de forma que* $(R(t),P)$ *es arquimediano sobre* R.

§2. <u>Descripción de los órdenes de $K(x_1,\ldots,x_n)$</u>.

Destinamos la sección segunda a describir los órdenes de $E = K(x_1,\ldots,x_n)$ siendo K un cuerpo ordenable y $x_1,\ldots,x_n$ indeterminadas sobre K, utilizando los resultados obtenidos en el epígrafe anterior.

2.1. <u>Proposición</u>.- *Sea* K *un cuerpo ordenable y* P *un orden en* $E = K(t)$. *Si* R *es un cierre real de* $(K, K \cap P)$, *existe un único orden* Q *en* $F = R(t)$ *tal que* $Q \cap E = P$.

<u>Demostración</u>.- (a) <u>Existencia</u>. Tomamos un cierre real $\overline{E}$ de (E,P). Es conocido que el cuerpo M de los elementos de $\overline{E}$ que son algebraicos sobre K es un cierre real de $(K, P \cap K)$.

Por tanto, existe un isomorfismo de cuerpos ordenados $f : (M,M^2) \to (R,R^2)$ con $f|_K = 1_K$.

Extendemos f hasta $g : M(t) \to R(t) = F$ mediante $g(t) = t$, $g|_M = f$.

Como $M(t) \subset \overline{E}$, $Q_1 = \overline{E}^2 \cap M(t)$ es un orden en $M(t)$ y $Q = g(Q_1)$ es un orden en F.

Sólo falta comprobar que $Q \cap E = P$.

Por un lado, $\overline{E}^2 \cap E = P$ por definición de cierre real.

Por otro, como $g|_K = g|_{M \cap K} = f|_K = 1_K$ y $g(t) = t$, se

sigue que $g|_E = 1_E$. En consecuencia, $Q \cap E = g(Q_1) \cap E =$
$= g(Q_1) \cap g(E) = g(Q_1 \cap E) = g(\overline{E}^2 \cap M(t) \cap E) = g(\overline{E}^2 \cap E) = g(P) = P$.

(b) Unicidad. Sean Q_1 y Q_2 órdenes en F con $Q_1 \cap E =$
$= Q_2 \cap E = P$, y R_1, R_2 cierres reales de (F,Q_1) y (F,Q_2) respectivamente. Como F es extensión algebraica de E (pues R lo es de K), R_1 y R_2 son cierres reales de $(E,Q_1 \cap E) = (E,P) =$
$= (E,Q_2 \cap E)$. Por ello, existe un isomorfismo de cuerpos ordenados $f : (R_1,R_1^2) \to (R_2,R_2^2)$ tal que $f|_E = 1_E$.

Veamos que $R = \{a \in R_1 : a$ es algebraico sobre $K\}$.

Un contenido es claro pues $R \subset F \subset R_1$ y R es extensión algebraica de K. El otro es consecuencia de que R no admite extensiones ordenables propias.

Análogamente, $R = \{a \in R_2 : a$ es algebraico sobre $K\}$.
Esto nos permite deducir que $f(R) = R$. En efecto:

Si $a \in R$, es $\sum_{j=o}^{s} a_j a^j = 0$, $a_j \in K$ y como $f|_K = 1_K$, se sigue que $\sum_{j=o}^{s} a_j\, f(a)^j = 0$, luego $f(a) \in R_2$ y es algebraico sobre K, esto es $f(a) \in R$.

Recíprocamente, para cada $b \in R \subset R_2$ existe $a \in R_1$ con $f(a) = b$. Como b es algebraico sobre K, es $\sum_{j=o}^{s} b_j\, b^j = 0$, $b_j \in K$, luego $\sum_{j=o}^{s} b_j\, f(a)^j = 0$, y como $b_j = f(b_j)$ se deduce que $f(\sum_{j=o}^{s} b_j\, a^j) = 0$, o sea, $\sum_{j=o}^{s} b_j\, a^j = 0$. Así $a \in R_1$ y es algebraico sobre K, luego $a \in R$ y $b = f(a) \in f(R)$.

Pero entonces, $g = f|_R : R \to R$ es isomorfismo y $g|_K = 1_K$, por lo que $g = 1_R$, y como $f(t) = t$ obtenemos $f|_F = 1_F$.

Por tanto $Q_2 = R_2^2 \cap F = f(R_1^2) \cap f(F) = f(R_1^2 \cap F) = f(Q_1) =$ $= Q_1$.

2.2. <u>Corolario</u>.- *Sea* K *un cuerpo ordenable,* $E = K(x_1,\dots,x_n)$ *y* P *un orden en* E. *Si* $M = K(x_1,\dots,x_{n-1})$, P *es un orden en* $E = M(x_n)$ *y por 2.1, si* R *es un cierre real de* $(M, P \cap M)$, *existe un único orden* Q *en* $R(x_n)$ *con* $Q \cap E = P$. *(1)*

Por otro lado, usando 1.4 Q *queda determinado por* $D_R^Q(x_n)$. *(2)*.

En consecuencia, P *queda determinado por (1) y (2).*

2.3. <u>Comentario</u>.- Nótese que la descripción que obtenemos de P usando (1) y (2) no viene dada en función del comportamiento de los elementos de E en los puntos de K, incluso cuando K es realmente cerrado, salvo en el caso $n = 1$.

Terminaremos esta sección describiendo una construcción que nos será útil más adelante.

2.4. <u>Proposición</u>.- *Sea* (K,P) *un cuerpo ordenado,* $E = K(x_1,\dots,x_n)$. *Existe* P_n^∞ *orden en* E *tal que:*

(a) $P_n^\infty \cap K = P$.

(b) $x_i - h \in P_n^\infty$ *si* $2 \leq i \leq n$ *y* $h \in K(x_1,\dots,x_{i-1})$

(c) $x_1 - a \in P_n^\infty$ *si* $a \in K$.

Trivialmente, $(E,\ P_n^\infty)$ *no es arquimediano sobre* K.

<u>Demostración</u>.- Por inducción sobre n.

Si $n=1$, tomamos un cierre real R de (K,P). Según vimos en 1.5 existe un orden Q en $R(x_1)$ con $D_R^Q(x_1) = R$. Basta tomar $P_1^\infty = Q \cap K(x_1)$. Lo suponemos probado para $n-1$.

Ahora si $F = K(x_1,\dots,x_{n-1})$, $E = F(x_n)$ y tomamos en F el orden P_{n-1}^∞, se considera un cierre real R de $(F,\ P_{n-1}^\infty)$. Si Q es un orden de $R(x_n)$ que cumple que $D_R^Q(x_n) = R$, el orden buscado es $P_n^\infty = Q \cap E$.

§3. <u>Clasificación de órdenes por isomorfía</u>.

3.1. <u>Definición</u>.- *Si* K *es un cuerpo ordenable y* P *y* Q *son dos órdenes de* K*, decimos que* P *y* Q *son <u>isomorfos</u> cuando existe un automorfismo* $f : K \to K$ *tal que* $f(P) = Q$.

La relación de isomorfía no es en general trivial, como queda de manifiesto en los siguientes:

3.2. <u>Ejemplos</u>.- (a) Sea (K,K^+) un cuerpo ordenado contenido en $\mathbb{R}$ y cuyo cierre real R está estrictamente contenido en $\mathbb{R}$.

En virtud de 1.10 existe un orden P en $R(t)$ de forma que $(R(t),P)$ es arquimediano sobre R. Por ser R y K arquimedianos, se deduce que $(K(t),\ P \cap K(t))$ es arquimediano.

Por otro lado, si $a \in K$, el orden $S = P_{a^+} \cap K(t)$ no es arquimediano pues $\frac{1}{t-a} - b \in P_{a^+}$ para cada $b \in K$.

Como el ser arquimediano es invariante por isomorfía (pues los automorfismos de cuerpos de característica cero son la identidad sobre $\mathbb{Q}$), se concluye que $P \cap K(t)$ y S son órdenes no isomorfos de $K(t)$.

(b) El mismo resultado es válido cuando sustituimos K por un cuerpo realmente cerrado R distinto de $\mathbb{R}$. Esto lo probaremos en 5.19 pues necesitamos emplear las técnicas que se desarrollan en el epígrafe quinto.

(c) Sin embargo, todos los órdenes de $\mathbb{R}(t)$ son isomorfos. En efecto:

(i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $F_a : \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}(t)$
$$t \mapsto -t + 2a$$
transforma P_{a^+} en P_{a^-} pues, para cada $r \in \mathbb{R}^+$ y cada $x \in (a-r,a)$ se cumple que $-x+2a \in (a,a+r)$.

(ii) Por otro lado, dados $a,b \in \mathbb{R}$ el automorfismo $F : \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}(t) : t \mapsto t + b-a$ envía P_{a^+} a P_{b^+}.

(iii) Por último, $F : \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}(t) : t \mapsto \frac{1}{t}$ transforma P_∞ en P_{0^+} y $P_{-\infty}$ en P_{0^-}.

3.3. <u>Comentario</u>.- Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que el problema de clasificación de órdenes por isomorfía subsiste aún en el caso de $R(t)$ siendo R realmente cerrado. La propiedad de ser arquimediano cobra especial relevancia por ser el más manejable de los invariantes por isomorfía. Por ello, para exhibir ejemplos más sofisticados que los de 3.2, establecemos:

3.4. <u>Proposición</u>.- *Sea* (K,P) *un cuerpo ordenado y sea* $E = K(x_1,\dots,x_n)$. *Son equivalentes:*

(1) Existe un orden Q *en* E *con* $Q \cap K = P$ *y tal que* (E,Q) *es arquimediano sobre* K.

(2) (K,P) *no es isomorfo como cuerpo ordenado a ningún subcuerpo* S *de* $\mathbb{R}$, *con el orden inducido por* $\mathbb{R}$, *y tal que* $\text{gr.t. } \mathbb{R}/S < n$.

<u>Demostración</u>.- (1) $\Longrightarrow$ (2) Si $f : (K,P) \to (S,\mathbb{R}^+ \cap S)$ es un isomorfismo de cuerpos ordenados, entonces (K,P) es arquimediano y, en consecuencia, lo es (E,Q). Por tanto, existe un homomorfismo no nulo de cuerpos ordenados, $g : (E,Q) \to (\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$. Pero, en tal caso, ha de ser $f = g|_K$ y por ello, $g(K) = S$.

Entonces, $n = \text{gr.t } E/K = \text{gr.t. } g(E)|_{g(K)} \leq \text{gr.t } \mathbb{R}/S < n$. Absurdo.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea R un cierre real de (K,P).

Si $h : (R,R^2) \to (\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ fuese isomorfismo, también lo sería $h/K : (K,P) \to (h(K), \mathbb{R}^+ \cap h(K))$. Haciendo $S = h(K)$ y $f = h/K$, tenemos un isomorfismo $f : (K,P) \to (S,\mathbb{R}^+ \cap S)$ verificando que $\text{gr.t. } \mathbb{R}/S = \text{gr.t. } f^{-1}(\mathbb{R})|_{f^{-1}(S)} = \text{gr.t. } R/K = 0$. Esto es absurdo.

Así (R,R^2) no es isomorfo a $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ y, por 1.10, existe un orden P_1 en $R(x_1)$ de forma que $(R(x_1),P_1)$ es arquimediano sobre R y $P_1 \cap K = P$.

Repetimos el proceso haciendo jugar a $R(x_1)$ el papel desempeñado por K. En un número finito de etapas construimos un cuerpo realmente cerrado M que contiene a E y que verifica que:

(a) gr.t. $M/K = n$

(b) $M^2 \cap K = P$

(c) (M,M^2) es arquimediano sobre K.

Por tanto, $Q = M^2 \cap E$ es el orden buscado.

3.5. <u>Ejemplo</u>.- Sea (K,P) un cuerpo numerable y arquimediano. Llamamos E a $K(x_1,\ldots,x_n)$. Entonces en E hay órdenes no isomorfos.

En efecto: K cumple la condición 2 de 3.4 por ser numerable. Por tanto, existe un orden Q en E tal que (E,Q) es arquimediano sobre K y $Q \cap K = P$. Como (K,P) es arquimediano, también lo es (E,Q). Pero, en virtud de 2.4, existe en E el orden P_n^∞ que verifica que (E,P_n^∞) no es arquimediano.

Así (E,Q) y (E,P_n^∞) no son isomorfos.

3.6. <u>Comentario</u>.- Existen pares de cuerpos (E,K) con $K \subset E$ y órdenes P y Q en E, isomorfos, y tales que uno es arquimediano <u>sobre K</u> y el otro no. Consideremos $E = \mathbb{Q}(x,y)$, x e y algebraicamente independientes. Fijamos en $K = \mathbb{Q}(x)$ el orden P_d del coeficiente director y llamamos R al cierre real de $(\mathbb{Q}(x), P_d)$. Ahora, si P_∞ es el orden del coeficiente director en $R(y)$ y

$P = P_\infty \cap E$, es evidente que (E,P) no es arquimediano sobre K (úsese 1.9).

Sin embargo, si $f : E \to E : h(x,y) \mapsto h(y,x)$, el orden $f(P) = Q$ si es arquimediano sobre K pues para cada $h(x,y) \in E$, y eligiendo $g(x) \in K$ de tal modo que su grado sea mayor que el grado en y de $h(y,x)$ y su coeficiente director sea positivo, se verifica que $g(y) - h(y,x) \in P$, es decir, $f(g(y)) - f(h(y,x)) \in f(P)$, esto es,

$$g(x) - h(x,y) \in Q.$$

Así, en general, el ser arquimediano sobre un subcuerpo no es invariante por isomorfía.

§4. La propiedad de las órbitas densas.

El estudio del conjunto de órdenes de un cuerpo recibió un considerable impulso al ser dotado de estructura de espacio topológico. Establecemos en esta sección diversos resultados sobre la clasificación por isomorfía de los órdenes de $K(x_1,\ldots,x_n)$, utilizando su estructura topológica.

4.1. Definición.- *Sea* K *un cuerpo ordenable y* $X(K)$ *el conjunto de órdenes de* K. *Para cada subconjunto finito* $\{a_1,\ldots,a_r\}$ *de* K *notamos*

$$H(a_1,\ldots,a_r) = \{P \in X(K) : a_j \in P,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}.$$

Se define la topología de Harrison [20] en $X(K)$ como aquella que tiene por base los conjuntos $H(a_1,\ldots,a_r)$, $a_j \in K-\{0\}$.

Obsérvese que al ser $X(K) - H(a_1,\dots,a_r) = H(-a_1) \cup \dots \cup$ $\cup\, H(-a_r)$ *los abiertos básicos son también cerrados.*

También debe destacarse la compacidad de $X(K)$.

Para probar esto último véase [33].

Con este lenguaje, introducimos un nuevo modo de clasificar órdenes en un cuerpo ordenable.

4.2. <u>Definición</u>.- (Dubois y Recio, [11]). *Un cuerpo ordenable* K *tiene la <u>propiedad de las órbitas densas</u> (en lo que sigue,* K *es un cuerpo <u>D.O.P</u>) si para cada* $P \in X(K)$ *y cada abierto no vacío* H *de* $X(K)$ *en la topología de Harrison, existe* $f \in Aut(K)$ *tal que* $f(P) \in H$. *Nótese que si llamamos órbita de* P *a*

$$O(P) = \{f(P) : f \in Aut(K)\}, \quad K \text{ es}$$

D.O.P. si y sólo si cada $O(P)$ *es denso en* $X(K)$. *Es asimismo evidente que* K *es D.O.P. si y sólo si* $X(K) =$ $= \bigcup_{f \in Aut(K)} f(H)$ *para cada abierto básico no vacío* H.

Desde luego, si todos los órdenes de un cuerpo son isomorfos, dicho cuerpo es D.O.P. Para encontrar ejemplos de que el recíproco es falso, incluso para cuerpos de la forma $E = K(x_1,\dots,x_n)$, necesitamos en primer lugar:

4.3. <u>Definición</u>.- *Un cuerpo ordenado* K *se llama <u>totalmente denso</u> si para cada* $P \in X(K)$, K *es denso en el cierre real de*

(K,P).

A continuación enunciamos un resultado fundamental:

4.4. <u>Teorema</u>.- (Dubois - Recio [11]). *Si* K *es D.O.P. y totalmente denso, y* $E = K(x_1,\ldots,x_n)$, *para cada abierto básico* H *de* X(E) *existe un automorfismo* f *de* E *tal que* $H \cup f(H) = X(E)$. *A fortiori* E *es D.O.P.*

4.5. <u>Ejemplo</u>.- Sea K un cuerpo numerable con un único orden P, tal que (K,P) es arquimediano y denso en un cierre real de (K,P).

En virtud de 3.5. no todos los órdenes de $E = K(x_1,\ldots,x_n)$, $gr.t.E/_K = n$ son isomorfos. Sin embargo E es D.O.P. por 4.4.

Si bien el teorema 4.4. proporciona una agradable información sobre el espacio de órdenes de $K(x_1,\ldots,x_n)$, dos cuestiones relativas al mismo merecen especial atención, una de carácter cuantitativo y otra de carácter cualitativo. Para abordar la primera de ellas introducimos:

4.6. <u>Definición</u>.- *Sea* K *un cuerpo D.O.P.,* H *un abierto básico no vacío de* X(K) *y* G *un subgrupo de* Aut(K).

(a) Diremos que $\underline{D^G(H;K) = +\infty}$ *si no existe ningún subconjunto finito* F *de* G*, de modo que* $X(K) = \bigcup_{f \in F} f(H)$. *Por la compacidad de* X(K) *esto equivale a* $\bigcup_{f \in G} f(H) \neq X(K)$.

(b) Diremos que $\underline{D^G(H;K) = m}$ *si existe* $F_H \subset G$ *con*

card $F_H = m$ *tal que* $X(K) = \bigcup_{f \in F_H} f(H)$ *y* $m \leq$ card F *para cada subconjunto* F *de* G *que cumple que* $X(K) = \bigcup_{f \in F} f(H)$.

(c) Notaremos $\underline{D^G(K) = \text{máx } D^G(H;K)}$.

4.7. <u>Definición</u>.- *Sea* K *un cuerpo,* $E = K(x_1,\ldots,x_n)$. *Se define* $\underline{G_n(\mathbb{P})}$ *como el subgrupo de* Aut(E) *inducido por los automorfismos de* $\mathbb{P}^n(K)$.

Los automorfismos de $\mathbb{P}^n(K)$ vienen dados por P.G.L. (K,n), el grupo de las matrices regulares de orden n+1 sobre K, módulo la relación de equivalencia:

$$A \sim B \quad \text{si existe} \quad a \in K - \{0\} \quad \text{con} \quad A = a.B$$

Así a cada automorfismo

$$\mathbb{P}^n(K) \longmapsto \mathbb{P}^n(K)$$

$$(y_o,\ldots,y_n) \longmapsto (\sum_{j=o}^{n} a_{ij}\, y_j \ : \ 0 \leq i \leq n$$

de matriz $A = (a_{ij})$ regular, le corresponde el automorfismo

$$f_A : K(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto K(x_1,\ldots,x_n)$$

$$x_i \longmapsto \frac{a_{io} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{oo} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}\, x_j} \qquad (1)$$

sin más que poner $x_i = \frac{y_i}{y_o}$.

A continuación evaluaremos $D^G(E)$ siendo $E = R(x_1,\ldots,x_n)$

R un cuerpo realmente cerrado y $G = G_n(\mathbb{P})$.

Para ello, comenzamos por establecer una correspondencia entre los abiertos básicos de E y los semialgebraicos abiertos de R^n.

4.8. Definiciones y notación.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* $E = R(x_1,\dots,x_n)$. *Sin más que sustituir* $\frac{f}{g}$ *por* $f.g$, *se observa que los abiertos básicos de* $X(E)$ *son de la forma*

$$H = H(f_1,\dots,f_r), \quad f_j \in R[x_1,\dots,x_n] - \{0\}$$

Llamaremos $\underline{H(f_1,\dots,f_r)^\wedge}$, *o por abuso de lenguaje* $\hat{H}$ *a:*

$$\hat{H} = \{x \in R^n : f_j(x) > 0, \quad 1 \leq j \leq r\}$$

Además si S *es unión finita de abiertos básicos,* $S = \bigcup_{i\in I} H_i$, *llamaremos* $\hat{S} = \bigcup_{i\in I} \hat{H}_i$.

4.9. Proposición.- *Con las notaciones de 4.8. se verifica que:*

(1) Si S *es no vacío, entonces* $\hat{S}$ *es no vacío.*

(2) Si $\overline{\hat{S}} = R^n$, *entonces* $S = X(E)$.

Demostración.- (1) Si $S \neq \emptyset$, $S = \bigcup_{i\in I} H_i$, existe $i \in I$ con $H_i \neq \emptyset$. Por comodidad llamaremos $H_i = H = H(f_1,\dots,f_r)$, $f_j \neq 0$.

Sea $P \in H$ y R_1 un cierre real de (E,P). En virtud de 1.5, si t es transcendente sobre R_1, existe $Q_1 \in X(R_1(t))$ de modo que $D_{R_1}^{Q_1}(t) = R_1$.

Si tomamos $Q = Q_1 \cap E(t)$ es evidente que $Q \in X(E(t))$ y $Q \cap E = P$.

Construimos $g_j = t.f_j - 1 \in A = E[t]$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Si $\hat{S} = \emptyset$, tendríamos:

"$x \in R^n$ y $f_j(x) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant r-1 \Rightarrow -f_r(x) \geqslant 0$", luego

"$(x,t) \in R^{n+1}$, $f_j(x) > 0$, $g_j(x,t) \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant r-1 \Rightarrow$
$\Longrightarrow -f_r(x) \geqslant 0$" (1)

Ahora, si $C = \{f_j, g_j : 1 \leqslant j \leqslant r-1\}$ y L es el mínimo semianillo de A que contiene a R^2, A^2 y C, aplicamos el "positivstellensatz" de Stengle [40], para deducir de (1) que existen $\ell_1, \ell_2 \in L$ de forma que:

$$-f_r\left[(-f_r)^{2m} + \ell_1\right] = \ell_2 \qquad \text{para cierto natural } m.$$

Como $f_j \in P$ deducimos que $g_j \in Q$ y $f_j \in Q$. En consecuencia, tanto ℓ_1 como ℓ_2 pertenecen a Q y por ello $-f_r \in Q \cap E = P$.

Como $p \in H$, también se cumple que $f_r \in P$. Por tanto, $f_r = 0$ y esto es absurdo.

(2) Sea $S = \bigcup_{i \in I} H_i$ y cada $H_i = H(f_{ij} : j \in J_i)$ donde J_i es finito.

Si $S \neq X(E)$, existe un orden P en E y para cada $i \in I$, existe $j(i) \in J_i$ tal que $P \in H = H(-f_{ij(i)} : i \in J)$. Entonces $\hat{H}$ es un abierto semialgebraico no vacío de R^n que no corta a $\hat{S}$. Esto contradice la densidad de $\hat{S}$.

Para establecer los recíprocos de 4.9 necesitamos el conocido:

4.10. Lema.- (Criterio de Serre [38]). *Sea* K *un cuerpo y* S *un subconjunto multiplicativamente cerrado de* K *que contiene a 1.*

(a) Existe $P \in X(K)$ *con* $S \subset P$ *si y sólo si la única solución de la ecuación* $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2 = 0$, $s_i \in S - \{0\}$ *es la trivial.*

(b) Un elemento no nulo t *de* K *es de la forma*

$t = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2$, $s_i \in S$, $x_i \in K$, *si y sólo si* t *es positivo en todo orden de* K *que contiene a* S.

4.11. Proposición.- *Con las notaciones de 4.8 se verifica:*

(a) Si $\hat{S}$ *es no vacío, entonces* S *es no vacío.*

(b) Si $S = X(E)$, *se cumple que* $\overline{S} = R^n$.

Demostración.- Sea $i \in I$ y $H_i = H(f_1,\ldots,f_r)$ de modo que $\hat{H}_i \neq \emptyset$.

Si M es el sistema multiplicativamente cerrado formado por 1 y todos los productos de los f_j, es suficiente con encontrar $P \in X(E)$ de tal forma que $M \subset P$. Para ello utilizamos el criterio de Serre.

Sean $m_1,\ldots,m_\ell \in M$, $h_1,\ldots,h_\ell \in E$, tales que

$$m_1 h_1^2 + \ldots + m_\ell h_\ell^2 = 0$$

Como $\hat{H} \neq \emptyset$, existe $a \in \hat{H}$ de forma que ninguno de los denominadores de $h_1, \ldots, h_\ell$ se anula en a.

Además, al ser $a \in \hat{H}$, se cumple que cada $m_j(a) > 0$. Por continuidad, existe un entorno U de a en cuyos puntos cada m_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, toma valores positivos. Pero, al ser $\sum_{j=1}^{\ell} m_j(x)\, h_j^2(x) = 0$ en cada $x \in U$, deducimos que h_j se anula en U, $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Por tanto, $h_1 = \ldots = h_\ell = 0$.

(b) Supongamos que $\bar{\hat{S}} \neq R^n$. Entonces existe $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ y $r \in R^+$ tal que, si definimos $f = r^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2$, entonces $H(f)^\wedge \cap \hat{S} = \emptyset$.

Así $H(f)\hat{\cap}\, S^\wedge = \emptyset$ y, usando 4.9, deducimos que $H(f) \cap S = \emptyset$. Como $H(f)$ es no vacío, por no serlo $H(f)^\wedge$, concluimos que $S \neq X(E)$. Contradicción.

4.12. Proposición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* $E = R(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $G = G_n(\mathbb{P})$. *Entonces* $D^G(E) \leqslant n+1$.

Demostración.- Sea H un abierto no vacío de $X(E)$. Por 4.9. sabemos que $\hat{H} \neq \emptyset$, y por comodidad supondremos que $\underline{0} \in \hat{H}$. Como $\hat{H}$ es abierto, existe $r \in R^2$ de modo que, si $f(x) = r^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, se cumple que

$$H(\hat{f}) \subset \hat{H}. \qquad (1)$$

Elegimos $c \in R$ tal que $c^2 . r^2 > 2n$ y construimos, para cada j, $1 \leqslant j \leqslant n$ el automorfismo $f_j \in G_n(P)$ definido por:

$$\begin{aligned} f_j : \quad & E \longmapsto E \\ & x_i \longmapsto \frac{x_i}{c.x_j} \qquad \text{si} \quad i \neq j \\ & x_j \longmapsto \frac{1}{c.x_j} \end{aligned}$$

Como la matriz $A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots & 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \quad 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 \quad 0 \ . & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \ . & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \ . & 0 & 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$

tiene determinante $\pm c \neq 0$ y $f_j = f_{A_j}$, se cumple que $f_j \in G_n(\mathbb{P})$. Añadimos $f_o = 1_E$.

Por otro lado, si $M = \{x \in R^n : x_i \neq 0, \ 1 \leq i \leq n\}$, definimos, para cada $0 \leq j \leq n$, $\hat{f}_j : M \longmapsto R^n$

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (f_j(x_1),\dots,f_j(x_n)).$$

Es suficiente probar que $\bigcup_{j=o}^{n} \hat{f}_j(\hat{H}) = X(E)$ y en virtud de 4.9 y (1) basta ver que $\bigcup_{j=o}^{n} \hat{f}_j \ (\hat{H}(f) \cap M)$ es denso en R^n.

Pero, si no lo fuese, existiría $\underline{t} = (t_1,\dots,t_n) \in R^n$ tal que:

$$\begin{cases} r^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \leqslant 0 \\ c^2r^2t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_n^2 \leqslant 0 \\ c^2r^2t_2^2 - t_1^2 - t_3^2 - \ldots - t_n^2 < 0 \\ \vdots \\ c^2r^2t_n^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-1}^2 < 0 \end{cases}$$

Sumando estas desigualdes obtenemos:

$$r^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + c^2r^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (n-1) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n \leqslant 0, \quad \text{luego}$$

$$(c^2r^2-n) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (n-r^2) \leqslant 0 \quad \text{y al ser} \quad c^2r^2-n > 0$$

se sigue que:

$$r^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \leqslant \frac{n-r^2}{c^2r^2-n}, \quad \text{y por tanto,} \quad 1 \leqslant \frac{\frac{n}{r^2} - 1}{c^2 - \frac{n}{r^2}}.$$

Como $c^2r^2-n > 0$, deducimos que $\frac{n}{r^2} - 1 \geqslant c^2 - \frac{n}{r^2}$, esto es, $\frac{2n}{r^2} \geqslant c^2 + \; > c^2$. Esto contradice la elección de c.

Nuestro siguiente objetivo es transformar la desigualdad de 4.11 en igualdad.

Para simplificar las demostraciones introducimos la siguiente:

4.13. Definición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado. Decimos que* $f \in R[x_1,\ldots,x_n]$ *es un* *polinomio hiperplano* *si* $f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + a_o$, $a_j \in R$, $0 \leqslant j \leqslant n$. *Un abierto básico* U *de* $X(E)$, $E = R(x_1,\ldots,x_n)$ *se llama* *hiperplano* *cuando* *existen polinomios hiperplanos* $f_o, f_1, \dots f_n$ *tales que* $H = H(f_o^2 - \sum_{j=1}^{n} f_j^2)$.

4.14. <u>Lema</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* H *un abierto básico hiperplano de* X(E), $E = R(x_1, \dots, x_n)$ *y* $f \in G_n(\mathbb{P})$. *Entonces* f(H) *es un abierto hiperplano.*

<u>Demostración</u>.- Sea $f = f_A$ cuyas ecuaciones hemos escrito en (1) de 4.7., $H = H(f_o^2 - \sum_{j=o}^{n} f_j^2)$ y pongamos:

$f_j = b_{oj} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, x_k$, $0 \leq j \leq n$. Por ello,

$$f_A(f_j) = b_{oj} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \frac{a_{k_o} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell}{a_{oo} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{o\ell}\, x_\ell} = \ell_j \qquad (1)$$

Entonces, $P \in f_A(H)$ equivale a $f_A^{-1}(P) \in H$, esto es, $f_o^2 - \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \in f_A^{-1}(P)$, o lo que es lo mismo, $f_A(f_o)^2 - \sum_{j=1}^{n} f_A(f_j)^2 \in P$.

Como A es regular, $g_o = a_{oo} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{o\ell}\, x_\ell \neq 0$, luego $g_o^2 \in P - \{0\}$ y así, $P \in f_A(H)$ es equivalente a:

$$(g_o \cdot f_A(f_o))^2 - \sum_{j=1}^{n} (g_o \cdot f_A(f_j))^2 \in P$$

Ahora, si $h_j = g_o \cdot \ell_j$ $0 \leq j \leq n$, (2)
se deduce que $f(H) = H(h_o^2 - \sum_{j=1}^{n} h_j^2)$ y cada h_j es un polinomio hiperplano.

4.15. Teorema.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* $G = G_n(\mathbb{P})$ *y* $E = R(x_1,\ldots,x_n)$. *Entonces* $D^G(E) = n+1$.

Demostración.- $H = H(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ es abierto básico no vacío de $X(E)$, pues $1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ no es suma de cuadrados en E.

Es suficiente, usando 4.12, probar que $D^G(H;E) \geq n+1$.

Si esto no ocurriese, existirían $\ell_1,\ldots,\ell_r \in G$, tales que $X(E) = \ell_1(H) \cup \ldots \cup \ell_r(H)$ y $1 \leq r \leq n$. (1).

Utilizaremos la notación de la prueba del lema anterior. Nótese que H es abierto hiperplano, $H = H(f_o^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i^2)$ donde $f_o = 1$, $f_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Llamamos A_i a la matriz asociada a cada ℓ_i, $A_i = (a^i_{k,\ell})$, $f_{A_i} = \ell_i$ y g^i_k al polinomio $g^i_k = a^i_{k_o} + \sum_{\ell=o}^{n} a^i_{k\ell}\, x_\ell$ $\quad 1 \leq i \leq r$, $0 \leq k \leq n$.

En nuestro caso, por ser $f_o = 1$, $f_j = x_j$, $1 \leq j \leq n$ es $f_{A_i}(H) = H(h_{oi}^2 - \sum_{j=1}^{n} h_{ji}^2)$ $\quad 1 \leq i \leq r$ donde $h_{ji} = g^i_j$ según se desprende de (1) y (2) de la prueba de 4.14.

Aplicando 4.11 a (1) obtenemos:

$$R^n = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\ell_j(H)^\wedge} \qquad (2)$$ y como

$\overline{\ell_i(H)^\wedge} \subset M_i = \{\underline{x} \in R^n : h_{oi}^2(X) - \sum_{j=1}^{n} h_{ji}^2(x) \geq 0\}$, se deduce de (2) que $\bigcup_{i=1}^{r} M_i = R^n$. (3)

Si $I = \{1,2,\ldots,r\}$, $I_1 = \{i \in I : h_{oi} \in R\}$, es sencillo observar que $\bigcup_{i \in I_1} M_i$ es acotado (pues para cada $\underline{x} \in R^n$, $h_{ji}(\underline{x})^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia de $\underline{x}$ al hiperplano de ecuación $h_{ji}(x) = 0$). Además, $R^n - \bigcup_{i \in I-I_1} M_i \subset \bigcup_{i \in I_1} M_i$ por (3). Si en el conjunto $M(R)$ de las matrices regulares de orden $n+1$ con coeficientes en R se considera la topología definida por la norma:

$$\|A\| = \sup \{\|A(\underline{x})\| : \|\underline{x}\| = 1\}, \text{ y si}$$

$F : M(R) \to G$ es la proyección canónica, G queda dotado de estructura de espacio topológico con la topología final T para F.

Sin más que usar 4.11 se deduce que

$$B = \{(q_1,\dots,q_r) \in G^r : q_1(H) \cup \dots \cup q_r(H) = X(E)\}$$

es abierto en $(G^r.T^r)$. Por otra parte, es un resultado elemental del algebra lineal que el subconjunto D de G^r formado por aquellos $(q_1,\dots,q_r) \in G^r$ tales que el rango de la matriz formada por las primeras filas de las matrices de $q_1,\dots,q_r$ es r, es denso en (G^r,T^r). Así, como por hipótesis B es no vacío, se deduce que $B \cap D \neq \emptyset$, luego podemos suponer que $(\ell_1,\dots,\ell_r) \in D$. En consecuencia,

$$\dim \left(\bigcap_{i \in I-I_1} (g_o^i)^{-1}(0)\right) = n - \mathrm{card}\,(I-I_1) > 0 \qquad (4)$$

Además, $$\bigcup_{i \in I-I_1} M_i \cap \bigcap_{i \in I-I_1} (g_o^i)^{-1}(0) = \emptyset \qquad (5)$$

En efecto: Si $I-I_1 = \emptyset$, no hay nada que probar. Si $I-I_1 \neq \emptyset$ y (5) fuese falso, existiría $\underline{x} \in R^n$ cumpliendo que:

$$g_o^i(\underline{x}) = 0 \qquad i \in I-I_1$$

$$0 \leqslant h_{oi}^2(\underline{x}) - \sum_{j=1}^{n} h_{ji}^2(x) \qquad i \in I-I_1$$

Como $g_o^i = h_{oi}$, es $h_{ji}(x) = 0$, $i \in I-I_1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Pero entonces, $g_j^i(\underline{x}) = 0$, $i \in I-I_1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, y esto contradice la regularidad de A_i.

Así queda probado (5), lo que junto con (3) nos permite deducir que: $\bigcap_{i \in I-I_1} (g_o^i)^{-1}(0) \subset \bigcup_{i \in I_1} M_i$. (6).

Ahora: (a) Si $I_1 = \emptyset$, deducimos de (6) que $\bigcap_{i \in I-I_1} (g_o^i)^{-1}(0) = \emptyset$ y esto contradice (5).

(b) Si $I_1 \neq \emptyset$, $\bigcap_{i \in I_1} (g_o^i)^{-1}(0)$ es acotado por (6) pero es una variedad lineal de dimensión positiva por (5). Absurdo.

4.16. <u>Comentario</u>.- Para cada abierto H no vacío de X(E), el número $\frac{1}{D^G(H;E)}$ nos proporciona una medida del tamaño del semialgebraico básico $\hat{H}$ de R^n.

En 4.12 probamos que todo semialgebraico básico tiene tamaño mayor o igual que $\frac{1}{n+1}$ y en 4.15 se prueba que el tamaño del interior de una esfera de R^n es $\frac{1}{n+1}$.

Si escogemos $H_K = H(1 - \sum_{i=1}^{K} x_i^2)$, los automorfismos $f_{A_1},\dots,f_{A_K}$ de la demostración de 4.12 junto con la identidad, nos permiten probar que $D^G(H_K;E) \leqslant K+1$, $1 \leqslant K \leqslant n$.

Por otro lado, sin más que cambiar el recorrido $\{1,\dots,n\}$ del índice i en la demostración de 4.15 por $\{1,2,\dots,K\}$, se obtiene que:

$$D^G(H_K;\ E) \geqslant K+1$$

De este modo, encontramos semialgebraicos básicos
$\hat{H}_K = \{\underline{x} \in R^n : 1 - \sum_{i=1}^{K} x_i^2 > 0\}$ de tamaño $\frac{1}{K+1}$, $1 \leqslant K \leqslant n$.

En general, para cada semialgebraico S de R^n, su interior en la topología fuerte de R^n es de la forma

$$\mathring{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \{f_{i1} > 0,\dots,f_{ir} > 0\}, \qquad f_{ij} \in R[x_1,\dots,x_n]\,.$$

Si consideramos el abierto de $X(E)$

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} H(f_{i1},\dots,f_{ir}), \quad \text{el número} \quad r^{-1} = \frac{1}{D^G(H;E)}$$

es una medida del tamaño de $\mathring{S}$ y como $X(E) = \bigcup_{j=1}^{r} \sigma_j(H)$ equivale, por 4.9 y 4.11, a la densidad de

$$\sigma_1(\mathring{S}) \cup \dots \cup \sigma_r(\mathring{S}),$$

r es el mínimo número de copias proyectivas de S necesarias para cubrir R^n.

Los resultados anteriores aclaran cuantitativamente y desde el punto de vista geométrico el teorema 4.4.

§5. Cuerpos con la propiedad de la extensión.

Analizando el teorema 4.4. desde el punto de vista cualitativo, deseamos conocer en qué situaciones la total densidad es una condición necesaria en dicho resultado. Para dar respuesta a esta cuestión en el caso de una variable, cosa que hacemos en el epígrafe sexto, introducimos en éste la clase de cuerpos con la propiedad de la extensión, mostrando un buen número de ellos y obteniendo una caracterización de los mismos.

5.1. Ejemplo.- Sea $K = \mathbb{Q}(t)$, t transcendente sobre $\mathbb{Q}$, y P el orden en K restricción del orden de $\mathbb{R}(t)$ asociado a la cortadura $D = \dot{\mathbb{R}}$. ($\mathbb{R}$ es un cierre real de $\mathbb{Q}$).

Si R_1 es un cierre real de (K,P), K no es denso en R_1 pues $K \cap (\sqrt{t}, 2\sqrt{t}) = \emptyset$. Sin embargo, toda extensión puramente transcendente $E = K(x_1,\ldots,x_n)$ de K es D.O.P. pues $E = \mathbb{Q}(t,x_1,\ldots,x_n)$ y $\mathbb{Q}$ es D.O.P. y totalmente denso.

Así, la densidad total no es una condición necesaria en el teorema 4.4.

5.2. Definición.- *Diremos que un cuerpo K posee la propiedad de la extensión (p.e. en lo que sigue) si para cada automorfismo f de $K(t)$, t transcendente sobre K, $f|_K$ es un automorfismo de K.*

5.3. Proposición.- *Una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo K posea la p.e. es que $f(K) \subset K$ para cada automorfismo f de $K(t)$.*

Demostración.- Es evidente que la condición es necesaria.

Por otro lado, para cada $f \in \mathrm{Aut}(K(t))$, como $f \neq 0$ y $f(K) \subset K$, se verifica que $f|_K : K \to K$ es homomorfismo no nulo de cuerpos.

Aplicando la hipótesis a $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(K(t))$, deducimos que $f^{-1}(K) \subset K$ y de aquí la sobreyectividad de $f|_K$.

5.4. Ejemplo. No todo cuerpo posee la p.e. Basta elegir un cuerpo E cualquiera y $K = E(u)$, donde u es transcendente sobre E. Ahora, el automorfismo de $K(t)$ que fija los elementos de E y envía t sobre u y u sobre t, no transforma K en K.

En la literatura sobre cuerpos ordenados aparece una clase de cuerpos, llamados euclídeos, y definidos como sigue:

5.5. Definición.- *Un cuerpo* K *se llama euclídeo cuando* K^2 *es un orden en* K. *Claramente, es el único orden de* K.

Introducimos una clase estrictamente más amplia que la anterior:

5.6. Definición.- *Un cuerpo* K *se dice semieuclídeo si existe un orden* P *en* K *tal que:*

(*) $a \in K$ *y* $a-2 \in P$ *implican* $a^2-4 \in K^2$.

5.7. Observaciones.- (a) La condición (*) puede sustituirse por:
(**) $a \in K$ y $a-1 \in P$ implican $a^2-1 \in K^2$.

En efecto:

(*) $\Longrightarrow$ (**) Si $a-1 \in P$ entonces $2a-2 \in P$ y por (*) se sigue que existe $b \in K$ tal que $4a^2-4 = b^2$. Por ello, $a^2-1 = (\frac{b}{2})^2 \in K^2$.

(**) $\Longrightarrow$ (*) Si $a-2 \in P$ es $\frac{a}{2}-1 \in P$ luego $\frac{a^2}{4} - 1 = b^2$ para cierto $b \in K$. Entonces $a^2-4 = 4b^2 = (2b)^2 \in K^2$.

Aunque la definición (**) parece más elegante, hemos puesto (*) como definición pues es así como la usaremos en 5.8.

(b) Todo cuerpo euclídeo K es semieuclídeo, pues tomando el orden $P = K^2$ en K y si $a-2 \in K^2 = P$ entonces también $a+2 = a-2+4 \in P$. En consecuencia, existen $x,y \in K$ tales que $a-2 = x^2$, $a+2 = y^2$. Así $a^2-4 = (x.y)^2 \in K^2$.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Basta tomar

$$F_o = \mathbb{Q}$$

$$F_1 = F_o(\sqrt{a^2-4} : a-2 \in F_o \cap \mathbb{R}^+)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1}(\sqrt{a^2-4} : a-2 \in F_{n-1} \cap \mathbb{R}^+) \quad \text{y} \quad F = \bigcup_{n \geq o} F_n.$$

F es semieuclídeo por la construcción pero no es euclídeo pues $\sqrt{2} \notin F$.

5.8. <u>Proposición</u>.- *Todo cuerpo semieuclídeo posee la p.e.*

<u>Demostración</u>.- Sea K un cuerpo semieuclídeo y P un orden en K para el que se cumple la condición (*) de 5.6. Si K no verifica la p.e. existe $f : K(t) \to K(t)$ automorfismo y $a \in K$ con $f(a) \notin K$.

Como $f(a) = -f(-a)$ y $f(a+2) = f(a)+2$, podemos suponer que $M = \{a \in K : a-2 \in P$ y $f(a) \notin K\} \neq \emptyset$.

Para cada $a \in M$ escribimos $f(a) = \frac{h_a}{g_a}$, $h_a, g_a \in K[t]$ y tales que g_a es mónico y $(h_a, g_a) = 1$. Así h_a y g_a quedan unívocamente determinados por a.

Llamaremos grado de $a \in M$ al entero

$g_r(a) = g_r(h_a) + g_r(g_a) > 0$ y elegimos $a \in M$ con $g_r(a) \leqslant gr(x)$ para cada $x \in M$. Como $a \in M$, existe $u \in P$ de forma que $a^2-4 = u^2$. Entonces, si $b = \frac{a+u}{2}$ se comprueba que $a = b + \frac{1}{b}$. Como $f(\frac{1}{b}) = \frac{1}{f(b)}$ y $f(a) \notin K$, se deduce que $f(b) \notin K$.

Ponemos $f(b) = \frac{h_b}{g_b}$, $(h_b, g_b) = 1$, g_b mónico. Así, $\frac{h_a}{g_a} = \frac{h_b^2 + g_b^2}{h_b \cdot g_b}$. (1).

Además $(h_b^2 + g_b^2,\ g_b \cdot h_b) = 1$ pues si $\ell \in K[t]$ es un factor irreducible común a ambos, se tiene, $\ell | g_b . h_b$ y por ejemplo, $\ell | g_b$; ésto, junto con $\ell | h_b^2 + g_b^2$ implica que $\ell | h_b$, lo cual contradice a $(h_b, g_b) = 1$.

Por (1), existe $c \in K - \{0\}$ cumpliendo que:

$$h_a = c(h_b^2 + g_b^2)$$

$$g_a = c . h_b \cdot g_b .$$

Entonces, $gr(h_a) = 2$ máx $\{gr(h_b),\ gr(g_b)\}$ y

$gr(g_a) = gr(h_b) + gr(g_b)$.

Sumando: $gr(a) = 2$ máx $\{gr(h_b),\ gr(g_b)\} + gr(g_b) + gr(h_b) \geqslant$ $\geqslant 2gr(b) > gr(b)$, pues $gr(b) > 0$ al ser $f(b) \notin K$.

En consecuencia, si $b-2 \in P$ se tiene:

$b \in M$ y $gr(b) < gr(a)$, lo cual contradice la elección de a.

Si $b-2 \notin P$, $d = \frac{4}{b}$ cumple que $d-2 \in P$ ya que $b = \frac{a+u}{2} \in P$. Además $f(\underline{d}) = \frac{4}{f(b)} \notin K$ y $gr(d) = gr(b) < gr(a)$.

De nuevo obtenemos contradicción.

5.9. Corolario.- *Los cuerpos euclídeos, y en particular los realmente cerrados, poseen la propiedad de la extensión.*

5.10. Proposición.- *Todo cuerpo algebraicamente cerrado posee la propiedad de la extensión.*

Demostración.- Supongamos que existe un cuerpo algebraicamente cerrado K, un automorfismo $f : K(t) \to K(t)$ y un elemento $a \in K$, de modo que $f(a) = \frac{h}{g} \in K(t) - K$ y $(h,g) = 1$.

Como K es algebraicamente cerrado, existe $a_1 \in K$ tal que $a_1^2 = a$. Repitiendo el argumento construimos una sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de K, cumpliendo que $a_n^{2^n} = a$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $f(a) \notin K$, es $f(a_n) = \frac{h_n}{g_n} \in K(t) - K$ con $(h_n, g_n) = 1$, para cada natural n.

De esta forma, $\frac{h}{g} = \frac{h_n^{2^n}}{g_n^{2^n}}$, es decir,

$$h \cdot g_n^{2^n} = g \cdot h_n^{2^n}$$

Como h_n y g_n son primos entre sí, se deduce que $g_n^{2^n}$ divide a g y $h_n^{2^n}$ divide a h para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$2^n \cdot gr(g_n) \leqslant gr(g)$$

$$2^n \cdot gr(h_n) \leqslant gr(h)$$

Finalmente, como $s = \text{máx}\ \{gr(h),\ gr(g)\} > 0$ y

$(gr(h_s),\ gr(g_s)) \neq (0,0)$, por ejemplo $m_s = gr(h_s) > 0$, obtenemos:

$$2^s \cdot m_s \leqslant s. \quad \text{Absurdo.}$$

5.11. <u>Proposición</u>.- *Toda extensión algebraica de* $\mathbb{Q}$ *posee la propiedad de la extensión.*

<u>Demostración</u>.- Sea K una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ y $f : K(t) \to K(t)$ un automorfismo.

Para cada $a \in K$, existen $a_o,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$ de forma que $a_o+a_1 \cdot a +\ldots+ a_n \cdot a^n = 0$.

Por tanto, $\sum_{j=o}^{n} a_j\ f(a)^j = f\ (\sum_{j=o}^{n} a_j\ a^j) = 0$. Así $f(a)$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y es particular sobre K. Como $f(a) \in K(t)$ y K es algebraicamente cerrado en $K(t)$, resulta que $f(a) \in K$.

5.12. <u>Proposición</u>.- *Todo cuerpo arquimediano con un único orden posee la propiedad de la extensión.*

Antes de realizar la prueba de 5.12. introducimos las siguientes:

5.13. <u>Definición y propiedades</u>.- *Sea* (K,P) *un cuerpo ordenado. Se define la* <u>*aplicación grado*</u>

$$d : K(t) - \{0\} \longmapsto \mathbb{Z}$$

$$\frac{f}{g} \longmapsto d(f) = gr(f) - gr(g),$$

siendo $gr(f), gr(g)$ los grados de los polinomios $f, g \in K[t]$.

Son rutinarias las comprobaciones de:

(a) d es aplicación.

(b) $d(\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2}) = d(\frac{f_1}{g_1}) + d(\frac{f_2}{g_2})$.

(c) $d(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}) \leq \max \{d(\frac{f_1}{g_1}), d(\frac{f_2}{g_2})\}$

(d) Si los coeficientes directores de f_1, f_2, g_1 y g_2 pertenecen a P, las desigualdad de (c) se convierte en igualdad.

5.14. <u>Proposición</u>.- *Sea* K *un cuerpo con un único orden* K^+, *y* $f : K(t) \to K(t)$ *un automorfismo. Entonces,* $d(f(a)) = 0$ *para cada* $a \in K - \{0\}$. *Además, si* $a \in K^+$ *y* $f(a) = \frac{h(t)}{g(t)}$, *el producto de los coeficientes directores de* h *y* g *pertenece a* K^+.

<u>Demostración</u>.- Como $f(-a) = -f(a)$, basta probar la primera parte cuando $a \in K^+ - \{0\}$. Como K^+ es el único orden de K y $a \in K^+$, existe un subconjunto finito, $\{a_i : i \in I\}$ de elementos de K^+, tales que $a = \sum_{i \in I} a_i^2$. Repitiendo este argumento a cada a_i, escribimos

$$a_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij}^2, \qquad J_i \text{ finito}, \qquad a_{ij} \in K^+.$$

Por tanto, $a = \sum_{i \in I} (\sum_{j \in J_i} a_{ij}^2)^2$, y usando el corolario 12.8, página 133, de Lam [22], escribimos $a = \sum_{j=1}^{r_2} b_{j2}^4 = \sum_{j=1}^{r_2} b_{j2}^{2^2}$.

Repitiendo el razonamiento se obtienen, para cada $k \in \mathbb{N}$, elementos $\{b_{jk} : 1 \leqslant j \leqslant r_k\}$ que verifican:

$$a = \sum_{j=1}^{r_k} b_{jk}^{2^k} .$$

Si ponemos $f(b_{jk}) = \frac{h_{jk}}{g_{jk}}$ y $f(a) = \frac{h}{g}$, se deduce que:

$$\text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad \frac{h}{g} = \sum_{j=1}^{r_k} (\frac{h_{jk}}{g_{jk}})^{2^k}. \qquad (1)$$

Como cada $(\frac{h_{jk}}{g_{jk}})^{2^k}$ es un cuadrado, estamos en las condiciones de (d) de 5.13, luego, usando (b) de 5.13 y la fórmula anterior obtenemos:

$$d(\frac{h}{g}) = 2^k \cdot \text{máx } \{d(\frac{h_{jk}}{g_{jk}}) : 1 \leqslant j \leqslant r_k\}. \qquad (2)$$

Ahora, si $s = d(\frac{h}{g})$ no es nulo, elegimos $k = |s|$ y $m_k = \text{máx } \{d(\frac{h_{jk}}{g_{jk}}) : 1 \leqslant j \leqslant r_k\}$, y aplicando (2) se concluye que $\frac{s}{2^s} = m_k \in \mathbb{Z}$. Absurdo.

En consecuencia, $d(f(a)) = 0$.

La segunda parte se deduce inmediatamente de la fórmula (1).

<u>Demostración de 5.12</u>.- Definimos

$$v : K(t) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\frac{h}{g} \longmapsto v(\frac{h}{g}) = \text{ord }(h) - \text{ord }(g).$$

Así, si $\tau : K(t) \to K(t)$ es el automorfismo que deja fijo K y envía t a $\frac{1}{t}$, es obvio que

$$v(f(a)) = d(\tau \circ f(a)) = 0 \qquad \text{para cada}$$

$f \in Aut(K(t))$ y cada $a \in K^+ - \{0\}$, en virtud de la proposición anterior.

Supongamos que K no posee la p.e. Entonces, existe un automorfismo $f : K(t) \to K(t)$ y un elemento $a \in K$, tal que $f(a) = \frac{h}{g} \in K(t) - K$. Como $f(a) = -f(-a)$, se puede suponer que $a \in K^+$. Así h y g tienen el mismo grado y el mismo orden, y tanto sus coeficientes directores como los del término de menor grado son positivos.

Escribimos $h = \sum_{j=r}^{m} a_j t^j$, $g = \sum_{j=r}^{m} b_j t^j$, donde $a_r, b_r, a_m, b_m \in K^+ - \{0\}$.

Estudiamos en primer lugar el caso $\frac{a_r}{b_r} > a$. Como K es arquimediano existe $q \in \mathbb{Q}$ de forma que $q - a \in K^+ - \{0\}$, $\frac{a_r}{b_r} - q \in K^+ - \{0\}$. (1)

Por otro lado, como $f^{-1}(P_{o^+})$ es un orden en $K(t)$, su restricción $f^{-1}(P_{o^+}) \cap K$ a K coincide con el único orden K^+ de K.

Por ello $q-a \in f^{-1}(P_{o^+})$, es decir, $f(q) - f(a) \in P_{o^+}$. Como $f(q) = q$, deducimos que $q - \dfrac{\sum_{j=r}^{m} a_j t^j}{\sum_{j=r}^{m} b_j t^j} \in P_{o^+}$. Entonces, como $\sum_{j=r}^{m} b_j t^j \in P_{o^+}$ por ser $b_r \in K^+ - \{0\}$, deducimos que

$\sum_{j=r}^{m} (q.b_j - a_j)t^j \in P_o{+}$ y esto significa que $q.b_r - a_r \in K^+$, o sea, $q - \frac{a_r}{b_r} \in K^+$. Contradicción con (1).

En el caso $\frac{a_r}{b_r} < a$ se llega asimismo a contradicción con idéntico razonamiento.

En consecuencia, si $F \in Aut(K(t))$ y $a \in K$, $F(a) = \frac{h}{g}$ y el cociente de los coeficientes de menor grado de h y g vale a.(2

Consideremos, para cada $t_o \in K$ el K-automorfismo σ_{t_o} de $K(t)$ que envía t a $t+t_o$. Así, si

$$(\sigma_{t_o} \circ f)(a) = \frac{\sum_{j=r'}^{m'} c_j\, t^j}{\sum_{j=r'}^{m'} d_j\, t^j} \quad \text{sabemos por (2) que} \quad \frac{c_{r'}}{d_{r'}} = a.$$

Pero $f(a)(t_o) = (\sigma_{t_o} \circ f)(a)(0) = \frac{c_{r'}}{d_{r'}} = a$. Por tanto $f(a)$ toma el valor a en cada punto de K. Como K es de característica cero se sigue que $f(a) = a \in K$.

5.15. <u>Construcción</u>.- Hay gran cantidad de cuerpos en las condiciones de 5.12. Construimos algunos ejemplos.

Tomemos $u \in \mathbb{R}^+$ transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Franz [15] demuestra que el cuerpo $\mathbb{Q}(u)$ es hilbertiano, esto es, que para cada su conjunto finito $\{f_1,\dots,f_n\}$ de polinomios de $\mathbb{Q}(u)[x_1,x_2]$, exist $t \in \mathbb{Q}(u)$ de manera que cada $f_j(t,x_2)$ es irreducible en $\mathbb{Q}(u)[x_2]$

Sea $P = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}(u)$ y R un cierre real de $(\mathbb{Q}(u),P)$.

Como $\mathbb{Q}(u)$ es hilbertiano y numerable y $\sqrt{5} \in R - \mathbb{Q}(u)$, el teorema 3.2, página 25, de Prestel [34] permite asegurar la existencia de un cuerpo E con un único orden, contenido en $R-\{\sqrt{5}\}$ y que contiene a $\mathbb{Q}(u)$.

El cuerpo E es arquimediano pues $R-\{\sqrt{5}\} \subset \mathbb{R}$. Por tanto, E satisface las hipótesis de 5.12. Sin embargo, E no es semieuclídeo pues $3-2 \in E^+$ y $3^2-4 = 5 \notin E^2$. Además E no es extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ pues $u \in E$.

En consecuencia, el teorema 5.12. asegura la posesión de la p.e. por cuerpos no incluídos ni en 5.8. ni en 5.11.

5.16. Problema.- La proposición 5.11. permite encontrar cuerpos con más de un orden con la p.e. Sin embargo, el corolario 5.9 y la proposición 5.12. prueban que dos subclases distinguidas de cuerpos con un único orden poseen la p.e. Queda sin resolver la siguiente cuestión:

¿Todo cuerpo con un único orden posee la p.e.?

Antes de caracterizar los cuerpos con la p.e. necesitamos introducir la siguiente:

5.17. Definición.- *Sea* (K,P) *un cuerpo ordenado y* R *un cierre real de* (K,P). *Sean*

$$F_o = K$$

$$F_1 = F_o(\sqrt{a},\ a \in F_o \cap R^2)$$

$$F_2 = F_1(\sqrt{a},\ a \in F_1 \cap R^2)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1}(\sqrt{a},\ a \in F_{n-1} \cap R^2)$$

Entonces el cuerpo $H_R(K) = \bigcup_{n\geq o} F_n$ *es un cuerpo euclídeo, llamado* <u>*cierre euclídeo*</u> *de* (K,P) *en* R.

5.18. <u>Proposición</u>.- *Sea* K *un cuerpo ordenable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) K *posee la p.e.*

(2) Para cada $P \in X(K)$ *y para cada* $f \in Aut(K(t))$, *si* R *es un cierre real de* (K,P), *existe un único* $f^* \in Aut(R(t))$ *tal que* $f^*|_{K(t)} = f$.

(3) Para cada $P \in X(K)$ *y cada* $f \in Aut(K(t))$, *existe un único* $\overline{f} \in Aut(H_R(K)(t))$, *con* $\overline{f}|_{K(t)} = f$.

(4) Existe $P \in X(K)$ *de modo que para cada* $f \in Aut(K(t))$ *existe un único* $f^* \in Aut(R(t))$, *tal que* $f^*|_{K(t)} = f$

(5) Existe $P \in X(K)$ *tal que para cada* $f \in Aut(K(t))$ *existe un único* $\overline{f} \in Aut(H_R(K)(t))$, *con* $\overline{f}|_{K(t)} = f$.

<u>Demostración</u>.- (1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis, $f|_K \in Aut(K)$, luego existe un único $f_1 \in Aut(R)$ con $f_1|_K = f|_K$. Sea $F^* : R(t) \to R(t) : f^*|_R = f_1$, $f^*(t) = f(t)$. De este modo, $f^* \in Aut(R(t))$ y $f^*|_{K(t)} = f$.

Veamos la unicidad. Si $g : R(t) \to R(t)$ está en las condiciones de f^*, es $g|_K = f^*|_K = f_1|_K$ y por 5.9. $g|_R \in Aut(R)$. Ahora, por la unicidad de f_1 sabemos que $g|_R = f^*|_R$ y como $g(t) = f(t) = f^*(t)$, concluimos que $g = f^*$.

(2) $\Longrightarrow$ (4). Trivial.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Dado un automorfismo $f : K(t) \rightarrow K(t)$, consideramos su extensión $f^* : R(t) \rightarrow R(t)$. De nuevo por 5.9, se sabe que $f^*(R)$ R, y en particular, $f(K) = f^*(K) \subset R$. Como $f(K) \subset K(t)$ y $K = K(t) \cap R$, deducimos que $f(K) \subset K$. Ahora basta aplicar 5.3.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Como (1) implica (2), existe $f^* \in \mathrm{Aut}(R(t))$ con $f^*|_{K(t)} = f$. Veamos que $f^*(H_R(K)) \subset H_R(K)$. Sea $a \in H_R(K)$ y $n = \min\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a \in F_j\}$.

Probaremos por inducción sobre n que $f^*(a) \in F_n$.

Si $n = 0$, es $a \in K$. Como K posee la p.e. tenemos que $f^*(a) = f(a) \in K = F_o$.

Lo suponemos probado hasta $n-1$.

Si $a \in F_n$, $a = \Sigma\, m_{j_1,\ldots,j_s} \sqrt{b_1}^{\,j_1} \ldots \sqrt{b_s}^{\,j_s}$ donde $m_{j_1},\ldots,m_{j_s} \in F_{n-1}$, $b_1,\ldots,b_s \in F_{n-1} \cap R^2$.

De este modo,

$$f^*(a) = \Sigma\, f^*(m_{j_1,\ldots,j_s}) \sqrt{f^*(b_1)}^{\,j_1} \ldots \sqrt{f^*(b_s)}^{\,j_s}.$$

Por la hipótesis de inducción, $f^*(m_{j_1,\ldots,j_s}) \in F_{n-1}$. Si $b_j = c_j^2$, $c_j \in R$ se verifica que:

$$f^*(b_j) = f^*(c_j)^2 \in F_{n-1} \cap R^2. \qquad \text{Por tanto}$$

$f^*(a) \in F_n$ y en consecuencia $f^*(H_R(K)) \subset H_R(K)$. (1)

Razonando con $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(K(t))$, deducimos, por (1) $\Longrightarrow$ (2), la existencia de $(f^{-1})^* \in \mathrm{Aut}(R(t))$, tal que $(f^{-1})^*|_{K(t)} = f^{-1}$.

Como $(f^*)^{-1} \in Aut(R(t))$ y $(f^*)^{-1}|_{K(t)} = f^{-1}$, de la unicidad obtenida en (1) $\Longrightarrow$ (2) se concluye que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ (2).

De (1) y (2) obtenemos que $f^*(H_R(K)) = H_R(K)$. Como $f^*(t) = f(t) \in K(t) \subset H_R(K)(t)$, el automorfismo buscado es $\overline{f} = f^*|_{H_R(K)(t)}$.

La unicidad de $\overline{f}$ se deduce fácilmente de la de f^* y del hecho de que R es un cierre real de $H_R(K)$.

(3) $\Longrightarrow$ (5) Es trivial.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Al igual que en (4) $\Longrightarrow$ (1), todo consiste en utilizar que $H_R(K)$ posee la p.e y que $H_R(K) \cap K(t) = K$.

Ahora estamos en condiciones de probar un resultado que anunciamos en 3.2.

5.19. Proposición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* $E = R(t)$. *Si* $R \neq \mathbb{R}$, *en* E *hay órdenes no isomorfos.*

Demostración.- Como $R \neq \mathbb{R}$, sabemos por 1.14. que existen dos órdenes en E, P y Q, tales que (E,P) es arquimediano sobre R y (E,Q) no lo es. Si P y Q fuesen órdenes isomorfos, existiría un automorfismo $f : R(t) \to R(t)$ de modo que $f(P) = Q$.

Como (E,P) es arquimediano sobre R y f es isomorfismo de cuerpos ordenados entre (E,P) y (E,Q), se sigue que (E,Q) es arquimediano sobre $f(R)$. Pero $f(R) = R$ por 5.9. Contradicción.

§6. Caracterización de la densidad total en cuerpos con un único orden.

En esta sección se establece, bajo algunas condiciones, la necesidad de la densidad total en el teorema 4.4.

6.1. Proposición.- *Sea* K *un cuerpo con la propiedad de la extensión y* f *un automorfismo de* K(t).

Entonces, existen a, b, c, d $\in$ K *tales que* $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ *y* $ad-bc \neq 0$.

Demostración.- Como $f|_K \in Aut(K)$, la aplicación $g : K(t) \to K(t)$:

$$\frac{\Sigma\, a_j\, t^j}{\Sigma\, b_j\, t^j} \longmapsto \frac{\Sigma\, f^{-1}(a_j)\, t^j}{\Sigma\, f^{-1}(b_j)\, t^j}$$

es un automorfismo de K(t).

Además $g \circ f \in Aut(K(t))$ y $g \circ f|_K = 1_K$. Por el teorema de Lüroth, existen $a_1, b_1, c_1, d_1 \in K$ de modo que $g \circ f(t) = \frac{a_1 t+b}{c_1 t+d}$ y $a_1 \cdot d_1 - b_1 c_1 \neq 0$.

El resultado buscado se obtiene tomando

$$a = f(a_1), \quad b = f(b_1), \quad c = f(c_1), \quad d = f(d_1).$$

6.2. Proposición.- *Sea* K *un cuerpo con un único orden* K^+ *y con la propiedad de la extensión. Sea* f *un automorfismo de* K(t) *y* Q *un orden de* K(t) *centrado en* $x_o \in K$. *Entonces,* f(Q) *es un orden de* K(t) *centrado en* $y_o \in K \cup \{+\infty, -\infty\}$.

<u>Demostración</u>.- Aplicando 6.1 a $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(K(t))$, sabemos que $f^{-1}(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, $ad-bc \neq 0$.

<u>CASO 1</u>. Suponemos que $c.x_o+d \neq 0$. Entonces $\frac{ax_o+b}{cx_o+d} \in K$ y como K posee la p.e., $y_o = f(\frac{ax_o+d}{cx_o+d}) \in K$.

Comprobamos que $f(Q)$ está centrado en y_o.

Sea $g = \frac{\Sigma\, a_j\, t^j}{\Sigma\, b_j\, t^j} \in K(t)$, con $g(y_o) \in K^+ - \{0\}$, K^+ el único orden de K. Si $h = f^{-1}(g)$ es:

$$h(x_o) = \left[\frac{\Sigma\, f^{-1}(a_j) f^{-1}(t)^j}{\Sigma\, f^{-1}(b_j) f^{-1}(t)^j}\right](x_o) = \frac{\Sigma\, f^{-1}(a_j)\, (\frac{ax_o+b}{cx_o+d})^j}{\Sigma\, f^{-1}(b_j)\, (\frac{ax_o+b}{cx_o+d})^j} = f^{-1}(g(y_o)).$$

Como K^+ es el único orden de K y $g(y_o) \in K^+ - \{0\}$, existen $c_1,\ldots,c_r \in K - \{0\}$, tales que $g(y_o) = c_1^2 + \ldots + c_r^2$. Por ello, $h(x_o) = f^{-1}(c_1)^2 + \ldots + f^{-1}(c_r)^2 \in K^+ - \{0\}$.

Como Q está centrado en x_o, se tiene que $f^{-1}(g) = h \in Q$, esto es, $g \in f(Q)$.

<u>CASO 2</u>. Suponemos que $cx_o+d = 0$. Al ser $ad-bc \neq 0$, se sabe que $ax_o+b \neq 0$, por ejemplo, $ax_o+b \in K^+ - \{0\}$.

Consideremos, para cada $m \in K$ el polinomio

$$h_m(t) = at+b - (ct+d)\ .\ f^{-1}(m) \in K[t]$$

Como $h_m(x_o) = ax_o+b \in K^+ - \{0\}$, es $h_m \in Q$.

2.1. Si $ct+d \in Q$, $f^{-1}(t) - f^{-1}(m) = \frac{at+b}{ct+d} - f^{-1}(m) = \frac{h_m(t)}{ct+d} \in Q$, luego $t-m \in f(Q)$ para cada $m \in K$, es decir, $f(Q)$ está centrado en $+\infty$.

2.2. Si $ct+d \in -Q$, el mismo razonamiento nos permite probar que $f(Q)$ está centrado en $-\infty$.

6.3. Teorema.- *Sea* K *un cuerpo con un único orden* K^+ *y con la propiedad de la extensión. Son equivalentes:*

(1) (K,K^+) *es denso en todos sus cierres reales.*

(2) $K(t)$ *es D.O.P.*

Demostración.- (1) $\Longrightarrow$ (2). Es consecuencia de 4.4. pues, al tener un único orden, K es D.O.P.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si (K,K^+) no es denso en un cierre real R de (K,K^+), existe $f \in K[t]$ tal que $f(x) \in K^+$ para cada $x \in K$ y f no es suma de cuadrados de polinomios de $K[t]$ (úsense los teoremas 1,2 y 4 de McKenna [31]). Aplicando un resultado clásico de Artin [3], f no es suma de cuadrados de elementos de $K(t)$. Por tanto, existe un orden Q en $K(t)$ tal que $-f \in Q$. En consecuencia, el abierto básico $H(-f)$ del espacio de órdenes de $K(t)$ no es vacío.

Tomemos un punto $a \in K$, el orden P_{a^+} de $R(t)$ y $P = P_{a^+} \cap K(t)$ que evidentemente es un orden de $K(t)$ centrado en a.

Como $K(t)$ es D.O.P., existe $F \in Aut(R(t))$, que verifica que $F(P) \in H(-f)$.

Como $f(x) \in K^+$ para cada $x \in K$ y $F(P)$ está centrado en $y_o \in K \cup \{+\infty, -\infty\}$ por 6.2, se deduce que $f \in F(P)$, es decir, $F(P) \in H(f)$. Entonces $H(f) \cap H(-f) \neq \emptyset$, y esto es falso pues $f \neq 0$.

Asimismo, para los cuerpos con la p.e. se puede establecer un recíproco de 4.4.para una variable.

6.4. Proposición.- *Sea* K *un cuerpo ordenable y con la propiedad de la extensión. Si* $E = K(t)$ *es D.O.P., entonces* K *es D.O.P.*

Demostración.- Sea P un orden en K y $H = H_K(a_1,\ldots,a_r) \subset X(K)$ un abierto básico, no vacío, de $X(K)$.

Consideremos un cierre real R de (K,P), el orden P_∞ de $R(t)$ asociado a la cortadura $D = R$ y $P_1 = P_\infty \cap K(t)$.

Nótese que $P_1 \cap K = P_\infty \cap K = P_\infty \cap R \cap K = R^2 \cap K = P$. Llamamos $H_{K(t)}(a_1,\ldots,a_r) = \{y \in X(R(t)) : a_j \in Y, \ 1 \leq j \leq r\}$. Como $H \neq \emptyset$, tomamos $Q \in H$. Si R_1 es un cierre real de (K,Q), Q_d es el orden del coeficiente director de $R_1(t)$ y $Q_1 = Q_d \cap \cap K(t)$, es claro que $Q_1 \cap K = Q$, luego, como $a_1,\ldots,a_r \in Q$, también $a_1,\ldots,a_r \in Q_1$. Por tanto $H_{K(t)}(a_1,\ldots,a_r) \neq \emptyset$.

Como $K(t)$ es D.O.P., existe un automorfismo f de $K(t)$ que cumple que $f(P_1) \in H_1 = H_{K(t)}(a_1,\ldots,a_r)$. Como K cumple la p.e., para cada $1 \leq j \leq r$, se tiene:

$$a_j \in f(P_1) \cap K = f(P_1) \cap f(K) = f(P_1 \cap K) = f(P),$$

y en consecuencia $f|_K(P) \in H$.

§7. Un problema de cambio de signo para polinomios irreducibles.

7.1. Planteamiento.- Como ponen de manifiesto los resultados de McKenna citados en la prueba de 6.3, la densidad de un cuerpo ordenado en su cierre real desempeña un papel primordial en el decimoséptimo problema de Hilbert.

Debe mencionarse que en el libro de álgebra de Lang [24] se omite la hipótesis de densidad en la prueba del célebre teorema de Artin que resuelve el problema decimoséptimo para cuerpos con un único orden.

Fue Dubois [10] quien obtuvo el primer ejemplo de un cuerpo con un único orden y no denso en su cierre real, para el que falla el mencionado resultado de Lang. Dicho cuerpo es el cierre euclídeo H de $(Q(t), P_{o+} \cap Q(t))$, donde P_{o+} es el orden de $R(t)$ asociado a la cortadura $(\leftarrow, o]$. El polinomio $f(x) = (x^3-t)^2 - t^3$ de $H[x]$ es positivo sobre H pero no sobre su cierre real.

Sin embargo, $f(x) = ((x^3-t) - t^{3/2})((x^3-t) + t^{3/2})$ es reducible en $H[x]$.

Se plantea así la siguiente cuestión.

¿Existe $f \in H[x]$, irreducible en $H[x]$, positivo sobre H pero no sobre su cierre real?.

En este epígrafe damos respuesta afirmativa a esta pregunta para una clase de cuerpos que contiene al H anterior. Antes necesitamos:

7.2. Definición.- *Se dice que un cuerpo ordenado* (K,P) *tiene la* *propiedad del cambio de signo si existe un polinomio irreducible* $f \in K[t]$, *positivo sobre* K *pero no sobre un cierre real* R *de* (K,P).

7.3. Definición.- *Un cuerpo* K *se llama hereditariamente euclídeo si todo cuerpo extensión ordenable y finita de* K *es euclídeo.*

Viswanathan [41] caracteriza los cuerpos con la propiedad del cambio de signo mediante la siguiente:

7.4. Proposición.- *Un cuerpo ordenado* (K,P) *tiene la propiedad del cambio de signo si y sólo si* K *no es hereditariamente euclídeo ni denso en su cierre real.*

Por su parte, Prestel y Ziegler [35] obtienen diversas caracterizaciones de los cuerpos hereditariamente euclídeos, de las que nosotros usaremos la siguiente:

7.5. Proposición.- *Un cuerpo ordenado* (K,P) *es hereditariamente euclídeo si y sólo si fijando un cierre real* R *de* (K,P), *todo polinomio* $f \in K[t]$, *irreducible sobre* $K[t]$, *tiene a lo más una raíz en* R.

El resultado fundamental de esta sección es el siguiente:

7.6. <u>Teorema</u>.- *Sea* K *una extensión finita de* $\mathbb{Q}$ *y* E *una extensión puramente transcendente, finitamente generada y ordenable de* K. *Sea* P *un orden en* E *y* R *un cierre real de* (E,P). *Entonces, el cierre euclídeo* $H = H_R(E)$ *de* E *en* R *no es hereditariamente euclídeo.*

Antes de la demostración hacemos notar que si $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(t)$ y $P = P_{o+} \cap E$, H es el cuerpo construido por Dubois, luego, mediante 7.4 y 7.6, damos respuesta afirmativa a la cuestión planteada inicialmente.

Un resultado técnico, esencial para la prueba de 7.6, es el siguiente:

7.7. <u>Lema</u>.- *Para cada número primo* p *existe* $f_p \in \mathbb{Q}[t]$, *irreducible en* $\mathbb{Q}[t]$, *de grado* p *y con* p *raíces en* $\mathbb{R}$.

<u>Demostración</u>.- Para cada primo p tomamos $f_p(t) =$ $= (t-2)(t-4) \ldots (t-2p) - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ y de grado p

$f_2(t) = (t-2)(t-4) - 2 = t^2-6t+6$, irreducible por el criterio de Eisenstein y con dos raíces reales pues $f_2(2) < 0$ y $f_2(0) > 0$.

Comprobemos el resultado para $p \geqslant 3$.

Sean $S_j(y_1,\ldots,y_p)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, las funciones simétricas elementales.

Haciendo $y_k = 2k$, $1 \leqslant k \leqslant p$ y $S_j = S_j(2,4,\ldots,2p)$, se verifica que:

$$g_p(t) = f_p(t) + 2 = \sum_{j=o}^{p} (-1)^j s_j t^{p-j}, \qquad s_o = 1,$$

luego $f_p(t) = t^p + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j s_j t^{p-j} - (s_p+2).$

Por otro lado, cada $s_j \in 2\mathbb{Z}$, $j \neq 0$ y en particular $s_p = 2.4\ldots 2p = 2^p.p! \in 4\mathbb{Z}$. Por ello, $s_p+2 \notin 4\mathbb{Z}$. Aplicando el cri_terio de Eisenstein deducimos que f_p es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$.

Es claro, por la construcción, que para cada K, $1 \leq K \leq p-1$, g_p tiene signo constante en el intervalo $I_K = (2K, 2(K+1))$, y que el signo que toma en I_K es el opuesto al que toma en I_{K+1}.

Así, si $M = \{1,2,\ldots,p-1\}$,

$$M_1 = \{1 \leq j \leq p-1 : g_p|_{I_j} > 0\}, \quad M_2 = \{1 \leq j \leq p-1 :$$

$$: g_p|_{I_j} < 0\},$$

se verifica que $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y card M_1 = card M_2. En consecuencia,

$$\text{card } M_1 = \text{card } M_2 = \frac{p-1}{2} = s.$$

Llamemos c_j, para cada $j \in M_1$, al punto de $\overline{I}_j$ donde $g_p|_{\overline{I}_j}$ al_canza el máximo. Como g_p se anula en los extremos de I_j, se tie-ne que $c_j \in I_j$. Por tanto $f_p'(c_j) = g_p'(c_j) = 0$ y f_p tiene un má_ximo relativo en c_j.

Como además $g_p(c_j) \geq g_p(2j+1) = |\prod_{k=1}^{p} (2j+1)-2K| > 2$, es $f_p(c_j) > 0$.

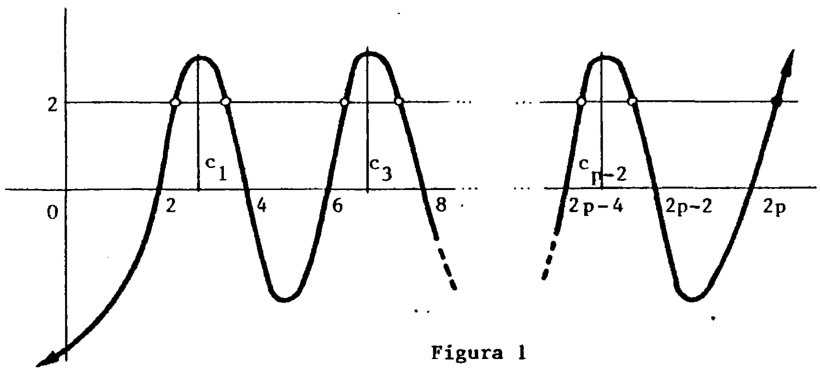


Figura 1

De este modo, $f_p(t)$ posee s máximos relativos en el intervalo $(2,2p)$, en los que toma valores positivos. Además, para cada $j \in M_2$ se cumple que $f_p|_{I_j} < g_p|_{I_j} < 0$ y card $M_2 = s$. De aquí deducimos que f_p tiene al menos $2s$ raíces en $(2,2p)$. Como $f_p(2p) = -2 < 0$ y $\lim_{t\to +\infty} f_p(t) = +\infty$, f_p tiene al menos una raíz en $(2p,\to)$. Por tanto, el número de raíces de f_p en $\mathbb{R}$ es mayor o igual que $2s+1 = p$. Como f_p es de grado p, hemos terminado.

7.8. Lema.- *Sea* K *un cuerpo ordenable y extensión algebraica de* $\mathbb{Q}$. *Sea* $E = K(x_1,\ldots,x_n)$. *Entonces, todo polinomio* $f \in K[t]$, *irreducible en* $K[t]$, *es irreducible en* $E[t]$.

Demostración.- Ponemos $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Si f es reducible en $E[t]$, existen $f_1,f_2 \in E[t]$,

$$f_1 = \sum_{j=o}^{m} \frac{a_j(x)}{b_j(x)} t^j, \quad f_2 = \sum_{j=o}^{r} \frac{c_j(x)}{d_j(x)} t^j \quad \text{tales que } f = f_1 \cdot f_2 \text{ y}$$

$gr_t(f_1) < gr(f)$; $gr_t(f_2) < gr(f)$. Sea P un orden en K, y R un cierre real de (K,P). Como K es extensión algebraica de $\mathbb{Q}$,

K es denso en R.

Ahora, si $V_j = \{x \in R^n : b_j(x) = 0\}$, $0 \leq j \leq m$

$W_j = \{x \in R^n : d_j(x) = 0\}$, $0 \leq j \leq r$

y $Z = \{x \in R^n : a_m(x) = 0\}$, el conjunto

$$C = \bigcup_{j=o}^{m} V_j \cup \bigcup_{j=o}^{r} W_j \cup Z$$ es un cerrado algebraico de R^n, distinto de R^n. Por la densidad de K^n en R^n, existe $y \in K^n \cap (R^n - C)$.

Consideramos $g_1(t) = \sum_{j=o}^{m} \frac{a_j(y)}{b_j(y)} t^j \in K[t]$, y $g_2(t) = \sum_{j=o}^{r} \frac{c_j(y)}{d_j(y)} t^j \in K[t]$. Como $f = g_1 . g_2$ y $gr\ g_1 = gr_t f_1 <$ $< gr\ f$, f es reducible en $K[t]$. Absurdo.

<u>Demostración de 7.6</u>.- Sea $a \in K$ un elemento primitivo de K, $K = \mathbb{Q}(a)$, y $m = [K : \mathbb{Q}]$.

Sea p un primo distinto de dos y tal que $(m,p) = 1$.

Consideremos el polinomio f_p del lema 7.7. En primer lugar observamos que f_p es irreducible en $E[t]$. En efecto:

Sea $b \in \mathbb{R}$ con $f_p(b) = 0$ y $g = Irr(b,K)$.

Sea $r = gr(g)$. Es obvio que $r \leq p$ pues g divide a f_p. Por otro lado:

$[K(b) : \mathbb{Q}] = [K(b) : K] . [K : \mathbb{Q}] = r.m$ y

$[K(b) : \mathbb{Q}] = [K(b) : \mathbb{Q}(b)] . [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = p.[K(b) : \mathbb{Q}(b)]$.

En consecuencia p divide a $r.m$ y, como es primo con m, divide a r. Así $p \leq r$, de donde $p = r$, esto es, $f_p = Irr(b,K)$.

Aplicando 7.8, obtenemos la irreducibilidad de f_p en $E[t]$.

Comprobemos, en segundo lugar la irreducibilidad de f_p en $H[t]$.

Sea $h = Irr(b,H)$, $h = t^q + \sum_{j=1}^{q} a_j t^{q-j}$, $a_j \in H$ y $F = E(a_1,\ldots,a_q)$. Por la construcción de H, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $[F : E] = 2^s$. Además $h = Irr(b,H)$.

Ahora, $[F(b) : E] = [F(b) : F] . [F : E] = 2^s.q$ y

$$[F(b) : E] = [F(b) : E(b)].[E(b) : E] = p.[F(b) : E(b)].$$

Por ello, como p es primo, $p \neq 2$, se deduce que $p|q$, en particular $p \leq q$. Entonces $f_p = h = Irr(b,H)$.

Sea R un cierre real de (H,H^+). El cierre algebraico R_1 de $\mathbb{Q}$ en R es un cierre real de $\mathbb{Q}$.

Como f_p tiene p raíces en $\mathbb{R}$, el teorema de Sturm asegura que f_p tiene p raíces en R_1, luego tiene p raíces en R.

Esto, junto con la irreducibilidad de f_p en $H[t]$, permite deducir, usando 7.5, que H no es hereditariamente euclídeo.

Además, generalizamos el resultado de Dubois mediante el siguiente:

7.9. <u>Teorema</u>.- *Sea* K *extensión ordenable y finita de* $\mathbb{Q}$, $E = K(x_1,\ldots,x_n)$ *y* P *un orden en* E *tal que* $x_n \in P$ *y*

$g-x_n \in P$ *para cada* $g \in P \cap K(x_1,\dots,x_{n-1})$. *Si* R *es un cierre real de* (E,P) *y* $H = H_R(E)$ *es el cierre euclídeo de* E *en* R*, existe* $f \in H[t]$ *irreducible en* $H[t]$*, positivo sobre* H *pero no sobre* R.

Demostración.- En virtud de 7.4 y 7.6 es suficiente probar que H no es denso en R (obsérvese que R es cierre real de H).

Para ello, demostraremos que el polinomio $g(t) = (t^3-x_n)^2 - x_n^3 \in H[t]$, que toma valores de signo contrario en R puesto que $g(1) = x_n^2(1-x_n) \in P$ y $g(\sqrt[3]{x_n}) = -x_n^3 \notin P$, tiene signo constante positivo sobre H.

Sea $M = K(x_1,\dots,x_{n-1})$ y

$$B = \{u \in R \ : \text{ existe } h \in M \text{ con } h - |u| \in R^2\},$$

donde $|u| = \max\{-u,u\}$. B es anillo de valoración cuyo ideal maximal es

$$m_B = \{u \in B : \text{ para cada } h \in M, \text{ es } h-u \in R^2 \text{ y } h+u \in R^2\}.$$

$U_B = B - m_B$ es subgrupo multiplicativo de $R-\{0\}$ y

$$v : R-\{0\} \longmapsto \frac{R-\{0\}}{U_B} = G$$
$$a \longmapsto [a]_{U_B}$$

la valoración asociada.

G no tiene torsión pues si $[a]_{U_B} \in G$ y $[a]_{U_B}^n = [1]_{U_B}$ se cumple que $a^n \in B - m_B$, esto es, $a \in B - m_B$. Entonces $[a]_{U_B} = [1]_{U_B}$. (Si $a \notin B$ sería $\frac{1}{a} \in m_B$, luego

$\frac{1}{a^n} \in m_B$ y por tanto $1 = \frac{1}{a^n} \cdot a^n \in m_B$).

Además, G como grupo libre, tiene rango uno. En efecto: Hay que probar que dados $x,y \in G$, existen $n,m \in \mathbb{Z}$ tales que $x^n.y^m = 1_G$, es decir, que dados $a,b \in R-\{0\}$, existen $n,m \in \mathbb{Z}$ de modo que $x^n.y^m \in U_B$.

Ahora, si $L = E(a,b)$

$$B^* = B \cap L, \qquad B_1 = B \cap E$$

$$m_{B^*} = m_B \cap L, \qquad m_{B_1} = m_B \cap E$$

$$U_{B^*} = U_B \cap L, \qquad U_{B_1} = U_B \cap E,$$

la relación de ramificación:

$$\left[\frac{L-\{0\}}{U_{B^*}} : \frac{E-\{0\}}{U_{B_1}}\right] \cdot \left[\frac{B^*}{m_{B^*}} : \frac{B_1}{m_{B_1}}\right] \leq [L : E]$$

permite limitarnos a estudiar el caso en que a y b pertenecen a $M[x_n]$.

Sean $a = \sum_{j=o}^{p} m_j x_n^j$, $b = \sum_{j=o}^{q} m'_j x_n^j$, $m_j, m'_j \in M$.

Entonces, basta tomar:

(a) $n = m = 1$ si $m_o . m'_o \neq 0$

(b) $m=1$, $n=-1$ si $m_o = 0$, $m'_o \neq 0$

(c) Si $m_o = m'_o = 0$ se eligen $n \in \mathbb{N}$, $-m \in \mathbb{N}$ de modo que las formas iniciales de a^n y b^m sean de igual grado.

Como G es libre de rango uno, dotando a G de notación aditiva, se sumerge $(G+) \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$, de modo que $i(v(x_n)) = 1$. (Véase

Baer [4]; también en Fuchs [16], teorema 42.2, página 149).

Como $\sqrt[q]{x_n} \in R$ para cada $q \in \mathbb{N}$, se concluye que $\frac{1}{q} \in \operatorname{im} i$, luego $(G+) \xrightarrow{i} Q$ es sobreyectiva. Pero, como los elementos de H tienen grado 2^k, $k \in N$ sobre $M(x_n) = E$, es

$$i(v(z)) = \frac{m}{2^k} \quad \text{para cada } z \in H. \text{ Sin embargo, si}$$

$g(y) \notin P$ es $i(v(y)) = \frac{1}{3}$. Por tanto, $g(y) \in P$ para cada $y \in H$.

7.10. <u>Problema</u>.- Parece de interés obtener una demostración constructiva de 7.9, al menos para el caso $K = \mathbb{Q}$, $n = 1$.

CAPITULO 2: EL ESPACIO DE ORDENES DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA REAL

Partiendo de un cuerpo ordenado (K,K^+) denso en su cierre real R y de un ideal primo p de $K[x_1,\dots,x_n]$ de forma que el orden K^+ se extiende a $E = \text{c.f.}\left(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p}\right)$ estudiamos la relación entre el conjunto $X(E/_{K^+})$ de los órdenes de E que extienden K^+ y la geometría de

$$V_R(p) = \{a \in R^n : f(a) = 0 \quad \text{para cada} \quad f \in p\}.$$

§8. El lema de la correspondencia

En este epígrafe se establecen los requisitos técnicos que utilizaremos a lo largo del capítulo. Se construye una correspondencia entre los abiertos de $X(E)$ y los semialgebraicos de $V_R(p)$ cuyas propiedades fundamentales se recogen en 8.2, 8.7 y 8.10.

8.1. Construcción y notaciones.- Observando que la positividad de $\frac{f}{g}$ equivale a la de $f.g$, podemos escribir cada abierto básico de $X(E)$ en la forma $H = H(F_1+p,\dots,F_r+p)$, donde cada F_j es un elemento de $K[\underline{x}] : K[x_1,\dots,x_n]$ que no está en p.

Notaremos $\hat{H} = V_R(p) \cap \{x \in R^n : F_j(x) > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r\}$. Debe observarse que: $H \mapsto \hat{H}$ no es aplicación (véase 12.1), aunque si lo es la correspondencia: $H \to \overline{\hat{H}}^{\bullet}$ (8.8).

Sin embargo, $\hat{H}$ no depende de los representantes $F_1,\dots,F_r$ elegidos, pues, si $F_j+p = G_j+p$, la diferencia F_j-G_j se anula sobre $V_R(p)$ por lo cual, las afirmaciones:

(i) $F_j(x) > 0$ y $x \in V_R(p)$

(ii) $G_j(x) > 0$ y $x \in V_R(p)$,

son equivalentes.

Para uniones finitas, $S = H_1 \cup \ldots \cup H_s$ de abiertos bási cos de $X(E)$, definimos $\hat{S} = \hat{H}_1 \cup \ldots \cup \hat{H}_s$.

8.2. Proposición.- *Manteniendo las notaciones anteriores, se verifica:*

(1) Si $S \cap X(E|_K+) \neq \emptyset$, *entonces* $\hat{S} \cap \operatorname{Reg} V_R(p) \neq \emptyset$.

(2) Si $\operatorname{Reg} V_R(p) \subset \hat{\bar{S}}$, *entonces* $X(E|_K+) \subset S$.

Demostración.- (1). Sean $f_1,\ldots,f_\ell$ los generadores de p y $J_1,\ldots,J_m$ sus jacobianos.

Por hipótesis existe $Q \in \bigcup_{i=1}^{s} H_i \cap X(E|_K+)$ y supondremos que $Q \in H_1 = H(F_1+p,\ldots,F_r+p)$. Llamamos R_1 al cierre real de (E,Q) y consideramos en $R_1(t)$, $-t$ transcendente sobre R_1- el orden P_d del coeficiente director (véase 1.3). Tomamos $Q_1 = P_d \cap E(t)$ que trivialmente verifica que $Q_1 \cap E = Q$, pues P_d extiende Q.

Se construye, para cada j, $1 \leq j \leq r$ el polinomio $G_j = t.F_j - 1 \in K[x_1,\ldots,x_n,t]$.

Como $F_j+p \in Q$, $G_j+p = t.(F_j+p) - (1+p) \in Q_1$.

Si para i, $1 \leq i \leq m$ definimos $L_i = t.J_i^2 - 1$, se verifica que $L_i+p = t.(J_i+p)^2 - (1+p) \in Q_1$ pues $(J_i+p)^2 \in Q$.

Supongamos que $\hat{S} \cap \text{Reg } V_R(p) = \emptyset$ (*). Entonces, notando $z = (\underline{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ los puntos de R^{n+1} se sigue que:

$$\left[f_k(z) \geq 0,\ -f_k(z) \geq 0,\ F_j(z) \geq 0,\ G_j(z) \geq 0,\ L_i(z) \geq 0; \quad 1 \leq k \leq \ell,\ 1 \leq j \leq r-1,\ 1 \leq i \leq m \right] \text{ implica}$$

$$\left[x \in V_R(p),\ F_j(x) > 0,\ J_i(x) > 0,\ 1 \leq j \leq r-1,\ 1 \leq i \leq m \right] \text{ y por (*), esto implica } -F_r(x) \geq 0 .$$

Ahora, si $C = \{f_k, -f_k, F_j, G_j, L_i,\ 1 \leq k \leq \ell,\ 1 \leq j \leq r-1,\ 1 \leq i \leq m\}$, y si A es el mínimo subsemianillo de $K[x_1, \ldots, x_n, t]$ que contiene a p, C y los cuadrados de $K[x_1, \ldots, x_n, t]$, deducimos, usando el "Positivstellensatz" de Stengle [40], que existen $a_1, a_2 \in A$ y un número natural q tales que

$$-F_r((-F_r)^{2q} + a_1) = a_2 \quad \text{y por tanto}$$

$$-(F_r+p)((F_r+p)^{2q} + (a_1+p)) = a_2+p \qquad (**)$$

Pero, al ser $f_K+p = 0+p \in Q \subset Q_1$ y $G_j+p,\ L_i+p \in Q_1$, $1 \leq j \leq r-1$, $1 \leq i \leq m$ tal y como hemos observado anteriormente, deducimos que a_1+p y a_2+p pertenecen a Q_1.

Utilizando (**) se concluye que $-(F_r+p) \in Q_1$ y como $-(F_r+p) \in E$, se tiene: $-(F_r+p) \in Q$.

Por otra parte $F_r+p \in Q$ al ser $Q \in H_1$.

En consecuencia $F_r+p = 0+p$, esto es, $F_r \in p$. Absurdo.

(2) Supongamos que $X(E|_{K^+}) \not\subset S = H_1 \cup \ldots \cup H_s$.

Ponemos $H_i = H(F_{ij}+p,\ 1 \leq j \leq r)$. Entonces, existe un orden $Q \in X(E|_{K^+})$ y para cada i, $1 \leqslant i \leqslant s$ existe $j(i)$, $1 \leqslant j(i) \leqslant r$ de forma que $F_{ij(i)}+p \notin Q$.

Por tanto $Q \in H(-(F_{ij(i)}+p) : 1 \leqslant i \leqslant s) \cap X(E|_{K^+})$. Así, utilizando la parte (1) deducimos que si $H = H(-(F_{ij(i)}+p) : 1 \leqslant i \leqslant s)$, es $\hat{H} \cap \operatorname{Reg} V_R(p) \neq \emptyset$. Como $\hat{H} \cap \hat{S} = \emptyset$, se sigue que $\operatorname{Reg} V_R(p) \not\subset \bar{\hat{S}}$. Hemos terminado.

Si bien los recíprocos de 8.2 son ciertos, demostraremos unos resultados más fuertes. Antes introducimos

8.3. Definición.- *Llamaremos puntos centrales de* $V_R(p)$ *a la adherencia, en la topología del orden de* R^n, *del conjunto* $\operatorname{Reg} V_R(p)$ *de los puntos regulares de* $V_R(p)$. *Escribiremos* $V_c = \operatorname{adh} \operatorname{Reg} V_R(p)$.

8.4. Proposición.- *Si* x *es un punto de* R^n, *son equivalentes:*

(1) $x \in V_c$

(2) Para cada $g \in K[x_1,\ldots,x_n] - p$, *la intersección de* $V_R(p)$ *con cualquier entorno de* x *en* R^n, *contiene puntos donde* g *no se anula.*

Demostración.- (1) $\Rightarrow$ (2) Suponemos que existe $x \in V_c$, un entorno U de x en la topología fuerte de R^n y un polinomio $g \in K[x_1,\ldots,x_n] - p$ de modo que g se anula en $U \cap V_R(p)$.

Como $x \in V_c$, $A = U \cap \operatorname{Reg} V_R(p)$ es un entorno no vacío de x en $\operatorname{Reg} V_R(p)$ y $g(A) = \{0\}$. Por tanto g se anula sobre todo $V_R(p)$.

Como E es ordenable, p es un ideal real. Así, por el Nullstellensatz de Dubois, $g \in p$. Absurdo.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sea $x \notin V_c$, y $J_1,\dots,J_m$ los menores de orden máximo de la matriz jacobiana de p. Como $x \notin V_c$, existe un entorno U de x tal que $U \cap \operatorname{Reg} V_R(p) = \emptyset$. Así $g = J_1^2 +\dots+ J_m^2$ se anula sobre $U \cap V_R(p)$, pero $g \notin p$ pues $\operatorname{Reg} V_R(p) \neq \emptyset$.

8.5. __Definición__.- *Se dice que un orden* Q *de* $E = c.f(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p})$

__está centrado en un punto__ $x_o \in V_R(p)$ *si* Q *contiene al conjunto*

$$\{f+p \in \frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p} : f(x_o) > 0\}$$

8.6. __Proposición__.- *El conjunto* V_c *de los puntos centrales de* $V_R(p)$ *coincide con el conjunto de puntos* x *de* $V_R(p)$ *tales que existe un orden de* $X(E|_{K^+})$ *centrado en* x.

__Demostración__.- Sea $x_o \in V_c$. Aplicamos el criterio de Serre al conjunto multiplicativamente cerrado

$$M = \{f+p \in \frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p} : f(x_o) > 0\}.$$

__Primer paso__. Sean $\ell_1,\dots,\ell_r \in K[x_1,\dots,x_n]$, $m_1,\dots,m_r \in M$ tales que

$$\sum_{i=1}^{r} m_i(\ell_i+p)^2 = 0 \qquad (1)$$

Poniendo $m_i = f_i+p$ y tomando un entorno U de x_o donde todas las f_i sean positivas, se deduce de (1) que cada ℓ_i se anula en

$U \cap V_R(p)$. Como $x_o \in V_c$, se deduce de 8.4 que cada $\ell_i+p = 0$.

Segundo paso. En la situación general, consideremos $\frac{\ell_1}{g_1}, \dots, \frac{\ell_r}{g_r} \in$ $\in K(x_1,\dots,x_n)$, $g_j \notin p$, $1 \leqslant j \leqslant r$ y $m_1,\dots,m_r \in M$ tales que $\sum_{i=1}^{r} m_i \left(\frac{\ell_i+p}{g_i+p}\right)^2 = 0$. (2).

Llamando $h_i = \frac{\prod_{j=1}^{r} g_j}{g_i}$, deducimos de (2) que $\sum_{i=1}^{r} m_i(h_i\cdot\ell_i+p)^2 = 0$ y por lo visto en la etapa anterior, debe ser $h_i.\ell_i \in p$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Como p es primo y cada $g_j \notin p$ concluimos que $\ell_i \in p$, $1 \leqslant i \leqslant r$, esto es, $\frac{\ell_i+p}{g_i+p} = 0$.

Así hemos probado un contenido. Para el otro, tomemos $x \notin V_c$ y, por 8.4, un entorno U de x en R^n y $g \in K[x_1,\dots,x_n] - p$, tal que g se anule sobre $U \cap V_R(p)$.

Por la densidad de K en R, podemos suponer que U es de la forma

$$U = \{x \in R^n : f_j(x) > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant p\},$$

donde cada $f_j \in K[x_1,\dots,x_n] = A$.

Ahora, si S es el mínimo subsemianillo de A que contiene a K^+, A^2 y a $f_1,\dots,f_p$, deducimos del "semialgebraic Nullstellensatz" de Stengle [40], la existencia de $m \in \mathbb{N}$, $s \in S$ tales que $g^{2m} + s \in p$. Por ello, $(g+p)^{2m} + (s+p) = 0$ (3).

Entonces, si existiese un orden $Q \in X(E|_{K^+})$ centrado en x_o y dado que K^+, A^2, $\{f_1+p,\dots,f_r+p,\ (g+p)^{2m}\}$ están conte nidos en Q, deducimos de (3) que $(g+p)^{2m} = s+p = 0$. En particular, $g \in p$. Absurdo.

A continuación podemos establecer un resultado más fuerte que el recíproco de 8.2.

8.7. <u>Proposición</u>.- *Con las notaciones habituales, se verifican:*

(a) Si $\hat{S} \cap V_c \neq \emptyset$, *entonces* $S \cap X(E|_{K^+}) \neq \emptyset$.

(b) Si $X(E|_{K^+}) \subset S$, *entonces* $V_c \subset \overline{\hat{S}}$.

<u>Demostración</u>.- (a) Sea $S = H_1 \cup \ldots \cup H_s$ y $x_o \in \hat{S} \cap V_c$. Utilizando 8.6, existe un orden $Q \in X(E|_{K^+})$ centrado en x_o. Como $x_o \in \bigcup_{i=1}^{s} \hat{H}_i \cap V_c$, podemos suponer que $x_o \in \hat{H}_1 \cap V_c$ y que $H_1 = H(F_1+p, \ldots, F_r+p)$. Ahora, al ser $x_o \in \hat{H}_1$, se verifica que cada $F_j(x_o) > 0$ y como Q está centrado en x_o, $F_j \in Q$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Por lo tanto $Q \in H_1 \cap X(E|_{K^+}) \subset S \cap X(E|_{K^+})$.

(b) Sean $H_i = H(F_{ij}+p : 1 \leqslant j \leqslant r)$. Entonces existe un conjunto de índices L, de forma que $V_c - \hat{S} =$

$$= \bigcup_{\ell \in L} \left[x \in V_c : F_{ij_\ell(i)}(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s \right] \qquad \text{donde}$$

$\{j_\ell(i) : \ell \in L\} \subset \{1,2,\ldots,r\}$.

Ahora, para cada $\ell \in L$ consideramos

$$G_\ell = H(-F_{ij_\ell(i)}+p : 1 \leqslant i \leqslant s) \qquad \text{y}$$

es evidente que $G_\ell \cap S = \emptyset$, por lo cual,

$$G_\ell \cap X(E|_{K^+}) = \emptyset \quad \text{para cada} \quad \ell \in L.$$

Utilizando (a) deducimos que $\hat{G}_\ell \cap V_c = \emptyset$. Por ello $V_c - \hat{S} = \bigcup_{\ell \in L} \left[x \in V_c \,:\, F_{ij_\ell(i)} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r \right]$, de donde $V_c \subset \bar{\hat{S}}$.

Una última propiedad de interés en relación con el estudio de la correspondencia: $S \mapsto \hat{S}$ es:

8.8. <u>Proposición</u>.- *Sean* $S_1 = \bigcup_{i \in I_1} H_i$, $S_2 = \bigcup_{i \in I_2} H_i$ *dos uniones finitas de abiertos básicos de* $X(E)$. *Son equivalentes:*

(a) $S_1 \cap X(E|_{K^+}) = S_2 \cap X(E|_{K^+})$

(b) $\bar{\hat{S}}_1 \cap V_c = \bar{\hat{S}}_2 \cap V_c$.

<u>Demostración</u>.- (a) $\Longrightarrow$ (b) Si existe un punto $x_o \in \bar{\hat{S}}_1 \cap V_c - \bar{\hat{S}}_2 \cap V_c$. escogemos, en virtud de 8.6 un orden $Q \in X(E|_{K^+})$ centrado en x_o.

De la definición de orden central se sigue inmediatamente que $Q \in S_1 \cap X(E|_{K^+}) - S_2 \cap X(E|_{K^+})$ en contra de (a).

(b) $\Longrightarrow$ (a) Supongamos que existe un orden

$$Q \in S_1 \cap X(E|_{K^+}) - S_2 \cap X(E|_{K^+})$$

Entonces, si para cada $i \in I_2$ escribimos

$$H_i = H(F_{ij}+p \,:\, 1 \leqslant j \leqslant r),$$

para cada $i \in I_2$ existe $j(i)$, $1 \leqslant j(i) \leqslant r$, de modo que $-F_{ij(i)}+p \in Q$. Sea $H = H(-F_{ij(i)}+p \,:\, i \in I_2)$.

Ahora $H \cap X(E|_{K^+}) \neq \emptyset$, luego, usando 8.2. sabemos que

$\hat{H} \cap \operatorname{Reg} V_R(p) \neq \emptyset$. Como $\hat{H} \cap \hat{S}_2 = \emptyset$, hemos terminado.

8.9. Corolario.- (Lema de la correspondencia).

(1) $\hat{S} \cap V_c \neq \emptyset$ *si y sólo si* $S \cap X(E|_{K^+}) \neq \emptyset$.

(2) $V_c \subset \bar{\hat{S}}$ *si y sólo si* $X(E|_{K^+}) \subset S$.

(3) $\bar{\hat{S}}_1 \cap V_c = \bar{\hat{S}}_2 \cap V_c$ *si y sólo si* $S_1 \cap X(E|_{K^+}) = S_2 \cap$ $\cap X(E|_{K^+})$.

Demostración.- Se sigue inmediatamente de 8.2, 8.7 y 8.8.

En el caso particular de que K tenga un único orden, se verifica que $X(E) = X(E|_{K^+})$, por lo cual, de 8.9 se deduce

8.10. Corolario.- *Sea* K *un cuerpo con un único orden. Si* S, S_1, S_2 *son uniones finitas de abiertos básicos del espacio de órdenes de* $E = c.f\left(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p}\right)$, *se tiene:*

(1) $S \neq \emptyset$ *si y sólo si* $\hat{S} \cap V_c \neq \emptyset$.

(2) $S = X(E)$ *si y sólo si* $V_c \subset \bar{\hat{S}}$.

(3) $S_1 = S_2$ *si y sólo si* $\bar{\hat{S}}_1 \cap V_c = \bar{\hat{S}}_2 \cap V_c$.

8.11. Definición.- *Se dice que un orden* Q *del cuerpo* $E = c.f\left(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p}\right)$ *es central si existe* $x \in V_c$ *tal que* Q *está centrado en* x. *Notaremos* $X_c(E)$ *al conjunto de órdenes centrales de* $X(E)$.

Una interesante aplicación del lema de la correspondencia es:

8.12. Proposición.- $X_c(E) \cap X(E|_{K^+})$ *es denso en* $X(E|_{K^+})$. *En particular, si* K *tiene un único orden,* $X_c(E)$ *es denso en* X(E).

Demostración.- Sea H un abierto básico de X(E) cuya intersección con $X(E|_{K^+})$ no es vacía. En virtud de 8.9 existe un punto $x \in \hat{H} \cap V_c$, y por 8.6 podemos elegir un orden Q centrado en x. Ahora, si $H = H(F_1+p,\ldots,F_r+p)$ sabemos que cada $F_j(x) > 0$ por ser $x \in \hat{H}$. En consecuencia, $F_j+p \in Q$ $1 \leqslant j \leqslant r$, es decir, $Q \in H$. Por lo tanto es

$Q \in H \cap X(E|_{K^+}) \cap X_c(E)$, lo que prueba

la densidad de $X_c(E) \cap X(E|_{K^+})$.

8.13. Observación.- En el caso de que $K = \mathbb{R}$, $V_R(p)$ tenga dimensión uno y sea compacto, mejoramos el resultado anterior en el epígrafe noveno, demostrando que $X_c(E) = X(E)$.

§9. Extensión de órdenes. Teorema de los modelos.

El problema de cuando un orden en un cuerpo E se extiende a otro $F \supset E$ es de capital importancia en la teoría de cuerpos ordenados y, cuando los cuerpos son de funciones algebraicas, suscita interesantes consecuencias geométricas. Un resultado crucial es el siguiente:

9.1. Teorema.- (De la aplicación abierta). *Sean* K *y* F *dos cuerpos y* $f : K \to F$ *un homomorfismo de cuerpos no nulo. Si* F *es extensión finitamente generada de* f(K), *entonces la aplicación* $f^* = f^*_{F/K} : X(F) \to X(K) : P \to f^{-1}(P)$ *es abier* *ta cuando en ambos espacios consideramos la topología de Harrison.*

Este resultado se debe a Elman Lam y Wadsworth [13]. En este mismo artículo demuestran, (5.9), la necesidad de que F sea extensión finitamente generada de K.

9.2. Proposición.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* p *y* q *ideales primos reales de* $R[x_1,\dots,x_m]$ *y* $R[y_1,\dots,y_n]$ *respectivamente. Sean* $W = V_R(p)$, $V = V_R(q)$,

$$R(W) = \text{c.f.}\left(\frac{R[x_1,\dots,x_m]}{p}\right) \quad y \quad R(V) = \text{c.f.}\left(\frac{R[y_1,\dots,y_n]}{q}\right).$$

Sea $f : R(W) \to R(V)$ *un homomorfismo no nulo y*

$f^* : X(R(V)) \to X(R(W)) : P \to f^{-1}(P)$. *Si*

$$f(x_i+p) = \frac{F_i+p}{G_i+p}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \textit{consideramos}$$

$U_f = \{a \in V : G_1(a)\dots G_m(a) = 0\}$, *y llamamos*

$$\overline{f} : V - U_f \to W : a \to \left(\frac{F_1(a)}{G_1(a)}, \dots, \frac{F_n(a)}{G_n(a)}\right).$$

Entonces:

$$\overline{\widehat{\text{im}}\ f^* \cap W_c} \subset \overline{\overline{f}(V_c - U_f)} \subset \overline{\widehat{\text{im}}\ f^*}\ .$$

Demostración.- Como R(V) es extensión finitamente generada de f(R(V)), im f* es abierto en X(R(W)), por el teorema de la aplicación abierta.

Como f* es continua y X(R(V)) es compacto, Prestel [33], im f* es compacto.

Así im f^* es unión finita de abiertos básicos, (en lo sucesivo ya no repetiremos este argumento).

Por tanto ponemos im $f^* = H_1 \cup \ldots \cup H_s$, donde $H_j = H(f_{jk}+p,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, y tiene sentido $\widehat{\text{im } f^*} = \hat{H}_1 \cup \ldots \cup \hat{H}_s$.

Si existe un punto $y_o \in V_c - U_f$ de manera que $x_o = \overline{f}(y_o) \notin \overline{\text{im } f^{*\wedge}}$, tomamos $r \in R^+$ tal que

$$W \cap B(x_o,r) \cap \bigcup_{j=1}^{s} \{x \in R^m : f_{jk}(x) > 0\} = \emptyset,$$

siendo $B(x_o,r)$ la bola abierta de centro x_o y radio r. Si $x_o = (x_{o1},\ldots,x_{om})$, escribimos $h(x) = r^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i-x_{oi})^2$, y se sigue $\bigcup_{j=1}^{s} H(f_{jk}+p,\ h+p)^\wedge = \emptyset$.

Por (1) de 8.10 $\bigcup_{j=1}^{s} H(f_{jk}+p,\ h+p) = \emptyset$ o lo que es lo mismo, im $f^* \subset H(-h+p)$. (1)

Pero, al ser $y_o \in V_c$, existe por 8.6 un orden $P \in X(R(V))$ centrado en y_o. Utilizando (1) deducimos que $f^*(P) \in H(-h+p)$, es decir,

$$-f(h+p) \in P \qquad (2)$$

Por otro lado, como $h(x_o) > 0$, si $f(h+p) = g+q$, se verifica que $g(y_o) = h(\overline{f}(y_o)) = h(x_o) > 0$, esto es, $f(h+p) = g+p \in P$ (3).

Ahora, $f(h+p) = 0$ por (2) y (3), o sea, $h \in p$.

Esto es falso pues $x_o \in V_R(p)$ y $h(x_o) > 0$.

De este modo hemos probado que $\overline{f}(V_c - U_f) \subset \overline{\widehat{\text{im } f^*}}$ y tomando adherencias deducimos que

$$\overline{\overline{f}(V_c - U_f)} \subset \overline{\mathrm{im}^{\wedge} f^*} .$$

Para probar la primera parte basta comprobar que

$$\mathrm{im}^{\wedge} f^* \cap W_c \subset \overline{\overline{f}(V_c - U_f)}.$$

Si esto no sucede, existe $x_o \in \mathrm{im}^{\wedge} f^* \cap W_c$ y $r \in R^+$ de modo que $B(x_o, r) \cap \overline{f}(V_c - U_f) = \emptyset$.

Como $x_o \in W_c$, existe por 8.6 un orden $P \in X(R(W))$ centrado en x_o. Como $x_o \in \mathrm{im}\ f^*$ es inmediato que $P \in \mathrm{im}\ f^*$. Por tanto $P = f^*(Q)$ para cierto orden $Q \in X(R(V))$.

Sea $x_o = (x_{o1}, \ldots, x_{om})$ y $h(x) = r^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{oi})^2$. Como $h(x_o) > 0$, $h + p \in P = f^{-1}(Q)$, es decir, $f(h+p) \in Q$ (4).

Por otro lado, si $f(h+p) = g + q$, $-g$ es positivo sobre $V_c - U_f$ por ser disjuntos $B(x_o, r)$ y $\overline{f}(V_c - U_f)$. Como $V_c - U_f$ es denso en V_c, se sigue que $g(x) \leqslant 0$ para cada $x \in V_c$, y en consecuencia $-f(h+p) \in Q$ (5).

De (4) y (5), $h \in p$ y esto es falso.

Aunque usaremos en lo sucesivo la proposición anterior tal y como la hemos enunciado y en la mayoría de las ocasiones en la situación particular del corolario 9.4, debe notarse que sin más que aplicar 9.2 a todos los representantes de un morfismo dominante entre V y W, podemos reenunciar la proposición anterior en la forma siguiente:

9.3. <u>Corolario</u>.- *Sea* $f_o : V \mapsto W$ *un morfismo dominante con dominio* $A \subset V$, $f : R(W) \mapsto R(V)$ *el homomorfismo de cuerpos asocia-*

do a f_o *y* $f^* : X\ (R(V)) \to X(R(W)) : P \mapsto f^{-1}(P)$. *Entonces:*

$$\overline{\operatorname{im}^{\wedge} f^* \cap W_c} \subset \overline{f_o\ (V_c \cap A)} \subset \overline{\operatorname{im}^{\wedge} f^*}$$

9.4. Corolario.- *Con las notaciones anteriores, se verifica:*

(1) *Si* $W_c = W$, *entonces* $\overline{\operatorname{im}^{\wedge} f^*} = \overline{\overline{f}(V_c - U_f)}$.

(2) *Si* $W_c = W$ *y* $U_f = \emptyset$, *entonces* $\overline{\operatorname{im}^{\wedge} f^*} = \overline{\overline{f}(V_c)}$.

Junto con los anteriores 9.3 y 9.4, otro resultado técnico de utilidad en el problema de clasificación de órdenes es el siguiente:

9.5. Teorema de los modelos.- *Sea* E *un cuerpo de funciones algebraicas de dimensión* d *sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Suponemos que* E *es ordenable. Entonces:*

(a) *Existe una variedad algebraica* V *sobre el cuerpo* R, *lisa, compacta y de dimensión* d *tal que* E *y* R(V) *son cuerpos isomorfos. Diremos que* V *es un modelo compacto de* E.

(b) *Existe una variedad algebraica* W *sobre el cuerpo* R, *lisa, no compacta y de dimensión* d *tal que* E *y* R(W) *son cuerpos isomorfos. Diremos que* W *es un modelo no compacto de* E.

<u>Demostración</u>.- (a) Si E es puramente transcendente, $E = R(x_1,\dots,x_d)$, llamamos V_1 al hiperplano de R^{d+1} de ecuación $x_{d+1} = 2$.

Es obvio que $E \approx R(V_1)$.

Tomamos la esfera S^d de centro el origen de R^{d+1} y radio 1 y la inversión f respecto de S^d,

$$f : R^{d+1} \longmapsto R^{d+1}$$

$$(x_1,\dots,x_{d+1}) \longmapsto \left(\frac{x_j}{\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2} : 1 \leqslant j \leqslant d+1\right)$$

Ahora, $F : R(x_1,\dots,x_{d+1}) \longmapsto R(x_1,\dots,x_{d+1})$

$$x_j \longmapsto \frac{x_j}{\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2} .$$

Es claro que F es automorfismo, pues $F \circ F = 1$. Como $f(V_1)$ es la esfera de R^{d+1} de centro $(0,0,\dots 0, \frac{1}{4})$ y radio $\frac{1}{4}$, que es lisa, compacta y de dimensión d, $V = f(V_1)$ es la solución.

Si $E \neq R(x_1,\dots,x_d)$, existe una hipersuperficie V_1 de R^{d+1}, lisa, y tal que $E \approx R(V_1)$. Podemos suponer que $0 \notin V_1$. Sea $2r = d(0,V_1)$. Ahora, si S^d es la esfera de R^{d+1} de centro 0 y radio r y f es la inversión respecto de S^d,

$$f : R^{d+1} - \{0\} \longmapsto R^{d+1} - \{0\}$$

$$(x_1,\dots,x_{d+1}) \longmapsto \left(\frac{r^2 x_j}{\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2} : 1 \leqslant j \leqslant d+1\right),$$

de nuevo $f(V_1)$ es la solución.

(b) Sea V_1 una hipersuperficie lisa de R^{d+1} tal que $E \approx R(V_1)$. Sea $I(V_1) = f.R[x_1,\dots,x_{d+1}]$.

Ponemos $x_i = \frac{T_i}{T_o}$, $1 \leqslant i \leqslant d+1$ y $F(T_o,\dots,T_{d+1}) =$ $= T_o^n \cdot f(\frac{T_1}{T_o},\dots,\frac{T_{d+1}}{T_o})$, donde $n = \text{máx}\,\{gr_{x_i} f : 1 \leqslant i \leqslant d+1\}$.

Sea V la variedad proyectiva $V(F) \subset \mathbb{P}^{d+1}$. Ahora, si $P = (P_o,\dots,P_{d+1})$ es un punto regular de V y H es el hiperplano tangente a V en P, consideramos la variedad W de R^{d+1} que resulta al afinizar V tomando H como hiperplano del infinito.

W es la solución. Es evidente que W es no compacta y que podemos suponerla lisa. Por último comprobemos que $R(W) \approx R(V_1)$.

Sea C un cierre algebraico de R y $V_1^C = \{x \in C^{d+1} : f(x) = 0\}$. Como $R(V_1)$ es ordenable, el ideal $I(V_1)$ es primo y real. Usando un resultado de Lang [25], se deduce que $I(V_1^C) = f.C[x_1,\dots,x_{d+1}]$ es ideal primo. Así, $C(V_1) =$

$$= \text{c.f.}\ (\frac{C[x_1,\dots,x_{d+1}]}{f.C[x_1,\dots,x_{d+1}]}) = \text{c.f.}\ (R[V_1] \otimes C).$$

Es un resultado conocido, (Shafarevich [39]), que $C(V_1) \approx C(V) \approx C(W)$.

Así $\text{c.f.}(R[V_1] \otimes C) \approx \text{c.f.}(R[W] \otimes C)$, luego $R(V_1) \approx R(W)$.

9.6. <u>Teorema</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado,* E *un cuerpo de funciones algebraicas sobre* R *<u>en una variable</u> y* V *un modelo plano y compacto de* E. *Entonces, todo orden de* $R(V)$ *no arquimediano sobre* R *es central.*

<u>Demostración</u>.- Sea $R(V) = R(t)(u)$, u algebraico sobre $R(t)$ y P un orden en $R(V)$ no arquimediano sobre R. Como $R(V)$ es extensión algebraica de $R(t)$, el orden $Q = P \cap R(t)$ de $R(t)$ no es arquimediano sobre R. Ahora, en virtud de 1.9, $D_R^Q(t)$ no es transcendente, luego usando 1.4 deducimos que Q coincide con P_∞ ó $P_{-\infty}$ ó P_{a^+} ó P_{a^-} para algún $a \in R$.

Ahora, si $Q = P_\infty$, utilizando Brumfiel [5], página 179, existe $b \in R$ tal que para cada $a \in R$ con $a-b \in R^2$, los órdenes P_{a^+} y P_{a^-} se extienden a $R(V)$ (1).

Siguiendo la notación de 9.2 llamamos W a la recta $u = 0$ del plano (t,u) en R^2, y $f : R(W) = R(t) \hookrightarrow R(V) = R(t)(u)$ a la inclusión canónica. Como $W = W_c$ y $U_f = \emptyset$ podemos aplicar 9.4 y tenemos: $\overline{\text{im}\,\hat{}\,f^*} = \overline{\overline{f}(V_c)}$.

Aquí, $\overline{f} = \pi_1 : V \to R : (t,u) \mapsto t$ es la proyección canónica.

Como V_c es compacto y $\overline{f}$ es continua, se verifica que $\overline{f}(V_c) = \overline{\overline{f}(V_c)} = \overline{\text{im}\,\hat{}\,f^*}$ (2).

Por otro lado, $P_{a^+} \in \text{im}\, f^*$ por (1), por lo cual, $a \in \overline{\text{im}\,\hat{}\,f^*}$. En efecto: Sea $r \in R^+$. Si $\text{im}\, f^* = H_1 \cup \ldots \cup H_s$, $H_i = H(f_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant r)$, existe i, $1 \leqslant i \leqslant s$, tal que $P_{a^+} \in H_1$. Por tanto, existe $r_1 \in R^+$ tal que para cada j, $1 \leqslant j \leqslant r$, el polinomio f_j es positivo en $(a, a+r_1)$.

Entonces $c = a + \dfrac{\min(r_1, r)}{2} \in (a-r, a+r) \cap \hat{H}_1$, luego $(a-r, a+r) \cap \text{im}\,\hat{}\,f^* \neq \emptyset$.

Ahora, usando (2), deducimos que el intervalo $(b, \to)$ de los elementos de R mayores que b está contenido en $\pi_1(V_c)$. Es to es absurdo por la compacidad de V_c.

De modo análogo eliminamos el caso $Q = P_{-\infty}$.

Así pues Q es de la forma P_{a^+} o P_{a^-} para algún $a \in R$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $a = 0$ y estudiamos sólo el caso $Q = P_{0^+}$, pues el razonamiento cuando $Q = P_{0^-}$ es el mismo.

Por lo visto anteriormente podemos asegurar que $0 \in \pi_1(V_c)$.

Sean $b_i = (0,a_i)$, $1 \leq i \leq \ell$ los puntos de V_c que se proyectan sobre 0.

Es un resultado conocido que $R_1 = \bigcup_{p\geq 1} R\{t^{1/p}\}$ es un cierre real de $(R(t),P_{0^+})$. Como $P \cap R(t) = P_{0^+}$, R es también un cierre real de $R(t)(u)$, vía

$$\begin{array}{ccccc} R(t) & \hookrightarrow & R(t)(u) & \longmapsto & R_1 \\ & & u & \longmapsto & g(t^{1/p}) \end{array}$$

es obvio que $g(0) = a_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1,\ldots,\ell\}$.

Veamos que P está centrado en b_{i_0}. Si no lo estuviera, existiría $h(t,u) \in R(t,u)$ con $h(b_{i_0}) > 0$ y $h \notin P$. Entonces $-h(t, g(t^{1/p})) \in R_1^2$, y por ello $h(b_{i_0}) = h(0,a_{i_0}) = h(0,g(0)) \leq 0$. Absurdo.

9.7. <u>Corolario</u>.- *Todo cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *de los números reales admite un modelo* V *para el que se cumple que todos los órdenes de* $\mathbb{R}(V)$ *son centrales.*

<u>Demostración</u>.- Es suficiente utilizar 9.5 y 9.6, sin más que observar que $\mathbb{R}$ no admite extensiones arquimedianas propias.

9.8. <u>Ejemplo</u>.- La situación cambia de modo radical cuando aumenta el número de variables. Consideremos la esfera V de $\mathbb{R}^3$ de centro el origen y radio 1. V es compacto y sin embargo no todos los órdenes de $\mathbb{R}(V)$ son centrales. Si lo fueran, como dados dos puntos A y B de V hay un giro de $\mathbb{R}^3$ con centro el origen que transforma A en B y dicho giro es aplicación regular de V en V, se concluiría que todos los órdenes de $\mathbb{R}(V)$ son isomorfos. En consecuencia, al ser $\mathbb{R}(V) \approx \mathbb{R}(x,y)$, todos los órdenes de $\mathbb{R}(x,y)$ lo serían. Pero esto es falso. En efecto:

Sea P orden de $\mathbb{R}(x,y)$ centrado en $(0,0)$. Consideremos, por otro lado el orden P_∞ de $\mathbb{R}(x)$ y un cierre real R de $(\mathbb{R}(x), P_\infty)$. Como R no es arquimediano, existe, por 1.13 un orden Q_1 en $R(y)$, tal que $(R(y),Q_1)$ es arquimediano sobre R. Por tanto, el orden $Q = Q_1 \cap \mathbb{R}(x,y)$ es arquimediano sobre $\mathbb{R}(x)$, ya que R es extensión algebraica de $\mathbb{R}(x)$.

Veamos que P y Q no son órdenes isomorfos. Si $f : (\mathbb{R}(x,y),Q) \to (\mathbb{R}(x,y),P)$ fuese isomorfismo de cuerpos ordenados, $(\mathbb{R}(x,y),P)$ sería arquimediano sobre $\mathbb{R}(f(x))$.

Esto es falso, pues P está centrado en $(0,0)$.

§10. Clasificación de órdenes en variedades. I.

En esta sección encontramos una condición necesaria para que un cuerpo ordenable de funciones algebraicas posea la propiedad de las órbitas densas.

10.1. Construcción.- Sea R un cuerpo realmente cerrado y p un ideal primo de $R[x_1,\dots,x_n]$, de forma que $E = \text{c.f.}(\frac{R[x_1,\dots,x_n]}{p})$ es ordenable.

Asociamos a cada automorfismo f de E una aplicación continua con dominio un abierto denso de $V = V_R(p)$ y con imagen en V, construida del modo usual:

Si notamos $t_i = x_i+p$, $1 \leqslant i \leqslant n$ y si $f(t_i) = \frac{F_i+p}{G_i+p}$, $F_i, G_i \in R[x_1,\dots,x_n]$, $G_i \notin p$, llamamos $C_f = \bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)$. Definimos

$$\begin{aligned} \hat{f} : V - C_f & \longmapsto R^n \\ a : (a_1,\dots,a_n) & \longmapsto \left(\frac{F_1(a)}{G_1(a)}, \dots, \frac{F_n(a)}{G_n(a)}\right). \end{aligned}$$

La continuidad de $\hat{f}$ es evidente. Por otro lado, como cada $G_i \notin p$, la dimensión de $V \cap C_f$ es menor que la de V, luego $V - C_f$ es un abierto denso de V. Además $\operatorname{im} \hat{f} \subset V$ pues si $a \in V - C_f$ y $g \in p$, al ser $f(g+p) = f(0) = 0$, se obtiene $g(\hat{f}(a)) = 0$, esto es, $\hat{f}(a) \in V$.

10.2. Teorema.- *Si E es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo realmente cerrado R y si E es ordenable, una condición necesaria para que E sea D.O.P. es que el grupo de automorfismos de E no sea finito.*

<u>Demostración</u>.- Usando el teorema de los modelos, elegimos una variedad algebraica V de algún R^n, cuyo conjunto de puntos centrales V_c es no compacto, y tal que $E \simeq R(V)$.

Supongamos que E es D.O.P. y que el grupo de automorfismos de E es finito. Entonces, $R(V)$ es D.O.P. y Aut $(R(V))$ es finito.

Ponemos $\mathrm{Aut}(R(V)) = \{f_1,\dots,f_s\}$. Con las notaciones de 10.1 $C = \bigcup_{j=1}^{s} C_{f_j}$ es cerrado y $V - C$ es abierto denso de V en el cual están definidas las aplicaciones $\hat{f}_j$, $1 \leq j \leq s$ construidas en 10.1.

Escogemos $x_o \in V_c$ y una bola abierta B de centro x_o y radio $r \in R^+$ de modo que

$$V \cap \bar{B} \subset V - C.$$

Si $x_o = (x_{o1},\dots,x_{on})$, consideramos

$$h(x_1,\dots,x_n) = r^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{oi})^2 \qquad \text{y el}$$

abierto básico $H = H(h+p)$.

Como $\hat{H} \cap V_c = B \cap V \cap V_c = B \cap V_c \ni x_o$, se sigue de 8.10 que $H \neq \emptyset$. Como $R(V)$ es D.O.P. se verifica que

$$X(R(V)) = \bigcup_{j=1}^{s} f_j(H).$$

Llamando $\dfrac{\ell_j}{g_j} = f_j(h)$ y $h_j = \ell_j g_j$, es inmediato que $f_j(H) = H(h_j+p) = H_j$. (1).

Por tanto, $X(R(V)) = \bigcup_{j=1}^{s} H_j$, y aplicando 8.10 llegamos a que $V_c \subset \bigcup_{j=1}^{s} \hat{\bar{H}}_j$. (2).

De (1), (2) y la definición de $\hat{f}_j$ deducimos que:

$$V_c \subset \bigcup_{j=1}^{s} f_j(\hat{H}). \qquad (3)$$

Obsérvese que $\hat{H} \subset V - C$.

Pero, al ser $\overline{\hat{H}}$ cerrado y acotado, $\hat{f}_j$ continua y $\hat{H} \subset V - C$ deducimos la compacidad de $\hat{f}_j(\overline{\hat{H}})$. En consecuencia, $\hat{f}_j(\hat{H})$ es acotado y por ello, también lo es $\hat{f}_j(\hat{H})$. Pero, aplicando (3), se obtiene que V_c es acotado. Absurdo.

§11. Clasificación de órdenes en variedades. II. Conservación de la D.O.P. por extensión algebraica.

Salvo el caso de una variable que estudiaremos en el capítulo tercero, se dispone de poca información sobre el grupo de automorfismos de una variedad algebraica, incluso sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Un mejor conocimiento del mismo, que permite saber, al menos, en que condiciones es finito o no, permitirá aplicaciones concretas del teorema anterior. Dado que todo cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo realmente cerrado R es extensión algebraica de algún $R(x_1,\dots,x_n)$ y éste es D.O.P., es natural plantearse el estudio de en que condiciones se conserva la D.O.P. bajo extensión algebraica.

Un resultado que no por particular deja de ser esclarecedor es el siguiente:

11.1. Proposición.- *Sea* R *un cierre real de* $\mathbb{Q}$ *y* $E = \mathbb{Q}(a)$ *contenido en* R. *Son equivalentes:*

(a) E *es D.O.P.*

(b) Todas las raíces en $\mathbb{R}$ *del polinomio mínimo de* a *sobre* $\mathbb{Q}$ *pertenecen a* E.

Demostración.- (a) $\Longrightarrow$ (b). Sea $f = \mathrm{Irr}(a,\mathbb{Q})$ y notamos $R_a = \{b \in \mathbb{R} : f(b) = 0\}$.

Para cada $b \in \mathbb{R}$ sea $h_b : E \to \mathbb{R} : g(a) \to g(b)$.

Si $P = \mathbb{R}^2 \cap E$ y $Q = h_b^{-1}(\mathbb{R}^2)$, deducimos, por ser E D.O.P. y X(E) discreto, la existencia de un automorfismo $\ell : E \to E$ de modo que $\ell(Q) = P$. Si $b = \ell(a)$, hemos terminado.

Si $b \neq \ell(a)$, por ejemplo $b-\ell(a) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, elegimos $q \in \mathbb{Q}$ cumpliendo que $b-q \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y que $q-\ell(a) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Como $h_b(a-q) = b-q \in \mathbb{R}^2$, es $a-q \in Q$, luego $\ell(a) - q = \ell(a-q) \in P \subset \mathbb{R}^2$. En consecuencia, $q = \ell(a)$. Pero entonces $a = \ell^{-1}(q) \in \mathbb{Q}$ y $R_a = \{a\}$, es decir, $b = a \in E$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Probaremos que todos los órdenes de E son isomorfos. Dados dos órdenes P y Q de E, existen b y $c \in R_a$ tales que $P = h_b^{-1}(\mathbb{R}^2)$ y $Q = h_c^{-1}(\mathbb{R}^2)$, donde $h_b : E \to \mathbb{R},\ a \mapsto b$ y $h_c : E \to \mathbb{R},\ a \mapsto c$.

Como $b,c \in E$ por hipótesis, h_b y h_c son automorfismos de E, luego también lo es $g = h_c^{-1} \circ h_b$ y $g(P) = Q$.

11.2. Observación.- La situación descrita en 11.1 es ciertamente muy particular pues:

(1°) $\mathbb{Q}$ admite un único orden.

(2°) $\mathbb{Q}$ es denso en sus cierres reales

(3°) Todo automorfismo de cuerpos deja fijos los elementos de $\mathbb{Q}$.

(4°) E es extensión finita de $\mathbb{Q}$.

Así, en general, para obtener que E es D.O.P. necesitamos una propiedad más refinada que (b) de 11.1.

11.3. Definición.- *Sea* F *un cuerpo ordenable y* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F. *Diremos que una extensión* E *de* F *contenida en* $\overline{F}$ *es una extensión real normal de* F *si* E *es ordenable y para cada* $P \in X(E)$ *y cada* $a \in E$, *todas las raíces de* Irr(a,F) *en un cierre real de* $(F, P \cap F)$ *contenido en* $\overline{F}$, *pertenecen a* E.

Por otro lado, para describir la relación entre raíces reales de polinomios irreducibles y homomorfismos no nulos en cierres reales introducimos la siguiente :

Sea F *un cuerpo ordenable,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión ordenable de* F *contenida en* $\overline{F}$. *Para cada* $P \in X(E)$ *consideramos:*

(a) El cierre real R_P *de* $(F, P \cap F)$, $R_P \subset \overline{F}$, y $E \subset R_P$

(b) El conjunto G_P *de homomorfismos no nulos* $E \to R_P$ *que transforman* F *en si mismo.*

(c) Un subconjunto H_P *de* G_P.

Sea $H = \{H_P : P \in X(E)\}$.

11.4. <u>Definición</u>.- *Decimos que* E *es una extensión* <u>*H-real normal de F*</u> *si para cada* $P \in X(E)$ *y cada* $f \in H_P$, $f(E) = E$. *Cuando* $H_P = G_P$ *para cada* P, *decimos que* E *es una extensión* <u>*G-real normal de F*</u> *y si* H_P *es el conjunto de* F-*homomorfismos*, $E \to R_P$, E *es una extensión* <u>*F-real normal de F*</u>.

Nótese que si E *es una extensión* G-*real normal de* F *entonces es* H-*real normal para cualquier elección de* H.

Antes de estudiar la conexión de la real normalidad con la conservación de la D.O.P. por extensión algebraica, analizaremos alguna de sus propiedades.

11.5. <u>Proposición</u>.- *Con las notaciones de 11.4, suponemos que* $[E : F]$ *es finito. Entonces, si* E *es una extensión real normal de* F, *se sigue que* E *es extensión* F-*real normal de* F. *Si además* $F = \mathbb{Q}$, *la* F-*real normalidad equivale a la* G-*real normalidad.*

<u>Demostración</u>.- La equivalencia en el caso $F = \mathbb{Q}$ de la F-real normalidad y la G-real normalidad es consecuencia de que todo homomorfismo no nulo de cuerpos que contienen a $\mathbb{Q}$ es la identidad sobre $\mathbb{Q}$.

Para la primera implicación se procede así: Sea $a \in E$ tal que $E = F(a)$ y $g = \mathrm{Irr}(a,F)$. Entonces, para cada $P \in X(E)$ y cada $f : E \mapsto F_P$ se verifica que $g(f(a)) = 0$, luego $f(a) \in E$ por ser E extensión real normal de F. En consecuencia, $f(E) \subset E$ y un argumento standard (véase Lang.[24], lema 1, página 167) nos permite concluir que $f(E) = E$.

11.6. Problema.- La dificultad para establecer la veracidad o falsedad del recíproco de 11.5. estriba en la siguiente cuestión: Sea $E = \mathbb{Q}(a)$, a algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y R un cierre real de $\mathbb{Q}$ que contiene a E. Si suponemos que todos los conjugados en R de a pertenecen a E, ¿se puede asegurar que para cada $b \in E$ los conjugados de b en R pertenecen a E?. Hemos logrado probarlo para aquellos $b \in E$ tales que $E = \mathbb{Q}(b)$ y en consecuencia, siempre que $[E : \mathbb{Q}]$ sea primo. Incluso también cuando $[E : \mathbb{Q}] = 4$, pero ignoramos la respuesta en el caso general.

Obsérvese que ésta es afirmativa cuando cambiamos cierre real por cierre algebraico.

11.7. Proposición.- *Sea* F *un cuerpo ordenable,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión ordenable de* F *contenida en* $\overline{F}$*, de modo que* $E(\sqrt{-1})$ *es extensión normal de* F*. Entonces:*

(a) E *es extensión real normal de* F.

(b) E *es extensión* F*-real normal de* F.

Demostración.- (a). Sea $P \in X(E)$ y R_P el cierre real de $(F, P \cap F)$ en $\overline{F}$ Así $\overline{F} = R_P(\sqrt{-1})$. Entonces, para cada $a \in E$, todas las raíces de $\mathrm{Irr}(a,F)$ en R_P pertenecen a $E(\sqrt{-1})$. Como $E(\sqrt{-1}) \cap R_P = E$, hemos terminado.

(b) Para cada homomorfismo no nulo $f : E \to R_p$ con $f|_F = 1_F$, se considera la extensión $f^* : E(\sqrt{-1}) \to \overline{F} : \sqrt{-1} \to \sqrt{-1}$, $f^*|_E = f$. Al ser $f^*|_F = 1_F$ y $E(\sqrt{-1})$ extensión normal de F, se concluye que $f^*(E(\sqrt{-1})) = E(\sqrt{-1})$. Por tanto, $f(E) \subset R_p \cap E(\sqrt{-1}) = E$ y aplicando de nuevo el lema 1, página 167 de Lang [24], obtenemos la igualdad $f(E) = E$.

11.8. Ejemplo.- El recíproco de 11.7 no es cierto, pues $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es extensión real normal y F-real normal de $\mathbb{Q}$, pero $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-1})$ no es extensión normal de $\mathbb{Q}$.

11.9. Corolario.- *Con las notaciones de 11.7, si* E *es extensión normal de* F, *también es extensión real normal y* F*-real normal de* F.

Demostración.- Sea $\{f_i : i \in I\}$ una familia de polinomios de $F[t]$, tales que E es cuerpo de descomposición de $\{f_i : i \in I\} = A$. Entonces, $E(\sqrt{-1})$ es un cuerpo de descomposición de $A \cup \{x^2+1\}$, y por tanto, $E(\sqrt{-1})$ es extensión normal de F. Ahora se aplica 11.7.

Respecto de algunas construcciones algebraicas la G-real normalidad tiene un comportamiento mejor que la noción clásica de normalidad. Por ejemplo:

11.10. Proposición.- *Sea* F *un cuerpo ordenable,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión ordenable de* F *contenida* *en* $\overline{F}$.

Sea M *una extensión ordenable de* E *contenida en* $\overline{F}$. *Si* E *y* M *son extensiones* G*-real normales de* F *y* E *respectivamente, entonces* M *es extensión* G*-real normal de* F.

Demostración.- Sea $P \in X(M)$, R_P un cierre real de $(F, P \cap F)$ contenido en $\overline{F}$ y $f : M \to R_P$ un homomorfismo no nulo tal que $f(F) = F$.

Si $Q = P \cap E$, es $Q \cap F = P \cap E \cap F = P \cap F$, luego R_P es un cierre real de $(F, Q \cap F)$. Por razones psicológicas llamamos $R_Q = R_P$. Como $f|_E : E \to R_Q$ es homomorfismo no nulo y $f|_E(F) = F$, de la G-real normalidad de E sobre F se desprende que $f|_E(E)=E$.

Por tanto, $f : M \to R_P$ cumple que $f(E) = E$. Como $\overline{F}$ es también cierre algebraico de E, la G-real normalidad de M sobre E implica que $f(M) = M$.

11.11. Proposición.- *Sea* F *un cuerpo ordenable,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E_1, E_2 *dos extensiones* G*-real normales (respectivamente* F*-real normales) de* F *contenidas en* $\overline{F}$, *de modo que* $[E_1 : F]$ *es finito. Entonces,* $E_1 . E_2$ *es extensión* G*-real normal (respectivamente* F*-real normal) de* F.

Demostración.- (a) Caso G-real normal. Sea $K = E_1 . E_2$, $P \in X(K)$ y R_P un cierre real de $(F, P \cap F)$ contenido en $\overline{F}$. Sea $f : K \to R_P$ un homomorfismo no nulo tal que $f(F) = F$. Si llamamos $P_i = P \cap E_i$, $i=1,2$, es $P_i \cap F = P \cap F$, luego $R_P = R_{P_i}$ es un cierre real de $(F, P_i \cap F)$. Aplicando la G-real normalidad de cada E_i a $f|_{E_i} : E_i \to R_{P_i}$ se deduce que $f(E_i) = E_i$. (1)

Como $[E_1 : F]$ es finito, existe $a \in E_1$ tal que $E_1 = F(a)$.

Por ello $K = E_2(a)$, lo que junto con (1) nos lleva a obtener que $f(K) = K$.

(b) Para la F-real normalidad se repite el razonamiento anterior cambiando $f(F) = F$ por $f|_F = 1_F$.

En relación con el estudio de la conservación de la propiedad de las órbitas densas bajo extensión algebraica de cuerpos con un único orden, es necesario disponer del siguiente lema (Prestel [33], página 41, lema 3.9) cuya demostración daremos aquí pues allí se deja sin hacer.

11.12. Lema.- *Sean* F_1 *y* F_2 *dos cuerpos ordenables,* $P_1 \in X(F_1)$, $P_2 \in X(F_2)$ *y* R_1, R_2 *cierres reales de* (F_1,P_1) *y* (F_2,P_2) *respectivamente. Sea* E_1 *una extensión finita de* F_1 *contenida en* R_1 *y* $Q_1 = E_1 \cap R_1^2$. *Entonces, para cada homomorfismo de cuerpos ordenados* $f : (F_1,P_1) \to (R_2,R_2^2)$, *existe una extensión* $\overline{f} : (E_1,Q_1) \to (R_2,R_2^2)$ *de* f.

Demostración.- Como $\left[E_1 : F_1\right]$ es finito y $E_1 \subset R_1$, existe un elemento $a \in R_1$ tal que $E_1 = F_1(a)$. Si $g = \mathrm{Irr}(a, F_1)$ y $g(t) = \sum_{i=o}^{K} a_i t^i$, escribiremos

$$g^f = \sum_{i=o}^{K} f(a_i)t^i.$$

Por el teorema de Sturm, existe $b \in R_2$ verificando que $g^f(b) = 0$.

De este modo, $f_1 : E_1 \mapsto R_2 = \sum_{j=o}^{K} b_j a^j \mapsto \sum_{j=o}^{K} f(b_j)b^j$ es un homomorfismo que cumple que $f_1\big|_{F_1} = f$.

En consecuencia, si $f_1(Q_1) \subset R_2^2$ hemos terminado.

Si no es así, coleccionamos

$$M = \{f_i : E_1 \mapsto R_2 \text{ homomorfismo: } f_i\big|_{F_1} = f\}.$$

M no es vacío pues $f_1 \in M$. Además M es finito por la finitud del número de raíces de g^f. Pongamos $M = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Todo se reduce a probar la existencia de j, $2 \leqslant j \leqslant n$ tal que $f_j(Q_1) \subset R_2^2$. Si esto no ocurriese, existiría, para cada j, $1 \leqslant j \leqslant n$, un $c_j \in Q_1$ de modo que $f_j(c_j) \notin R_2^2$. (1)

Como cada $c_j \in Q_1 \subset R_1^2$, existe $\sqrt{c_j} \in R_1$. Tomamos $L_1 = E_1(\sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_n})$, $F_1 \subset L_1 \subset R_1$ y como $[L_1 : E_1]$ es finito, lo es $[L_1 : F_1]$. Argumentando sobre L_1 como antes lo hicimos sobre E_1, existe un homomorfismo de cuerpos $f_1^* : L_1 \mapsto R_2$ cuya restricción a F es f. Entonces $f_1^*\big|_{E_1} \in M$, luego existe j, $1 \leqslant j \leqslant n$ de forma que $f_1^*\big|_{E_1} = f_j$.

Así $f_j(c_j) = f_1^*(c_j) = f_1^*(\sqrt{c_j})^2 \in R_2^2$, en contra de (1).

11.13. <u>Proposición</u>.- *Sea* F *un cuerpo con un único orden,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión* F*-real normal de* F *contenida en* $\overline{F}$*. Entonces, para cada par de órdenes* P *y* Q *en* E*, existe un autormorfismo* f *de* E *tal que* $f(P) = Q$*. A fortiori* E *es D.O.P.*

<u>Demostración</u>.- Sea R_Q un cierre real de (E,Q) y por tanto de $(F, Q \cap F)$. Sea Σ la familia de todos los pares (M, f_M) donde M es un cuerpo intermedio entre F y E y f_M un homomorfismo de cuerpos ordenados entre $(M, P \cap M)$ y (R_Q, R_Q^2) que restringido a F es la identidad. Como F tiene un único orden, se cumple que $P \cap F = Q \cap F$. Por tanto, si j es la inclusión de F en R_P, $(F,j) \in \Sigma$.

Definimos en Σ la relación de orden $\leqslant$ mediante: $(M_1\ f_{M_1}) \leqslant$ $\leqslant (M_2, f_{M_2})$ si y sólo si $M_1 \subset M_2$ y $f_{M_2}|_{M_1} = f_{M_1}$.

Como Σ es no vacío y $(\Sigma,\leqslant)$ es inductivo, utilizamos el lema de Zorn para escoger un elemento maximal (M, f_M) en Σ.

Veamos que $M = E$. En caso contrario, existe $a \in E - M$. Como $F \subset M \subsetneq E \subset F$, a es algebráico sobre M, luego $M(a)$ es una extensión finita de M. Ahora, si $(F_1,P_1) = (M, P \cap M)$, R_1 es un cierre real de (E,P), -y por tanto de (F_1,P_1)-, $E_1 = M(a)$ y $Q_1 = M(a) \cap R_1^2$, el homomorfismo $f_M : (M, P \cap M) \mapsto (R_Q, R_Q^2)$ se extiende, en virtud de 11.12, a un homomorfismo $f_{M(a)} : (M(a), M(a) \cap R_1^2) \mapsto (R_Q, R_Q^2)$ y cumpliendo que $f_{M(a)}|_M = f_M$.

Como $M(a) \cap R_1^2 = M(a) \cap E \cap R_1^2 = M(a) \cap P$ y $f_{M(a)}|_F =$ $= (f_{M(a)}|_M)|_F = f_M|_F = 1_F$, se deduce que $(M(a), f_{M(a)}) \in \Sigma$, $(M, f_M) < (M(a), f_{M(a)})$, en contra de la maximalidad de (M, f_M).

Pero, como $(E, f_E) \in \Sigma$, y E es extensión F-real normal de F, deducimos que $f_E(E) = E$.

En consecuencia, $f_E : (E,P) \mapsto (E, R_Q^2 \cap E = Q)$ es isomorfis mo de cuerpos ordenados, es decir, $f(P) = Q$.

11.14. <u>Ejemplo</u>.- Sea $\overline{\mathbb{Q}}$ un cierre algebraico de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ la intersección de todos los cuerpos realmente cerrados contenidos en $\overline{\mathbb{Q}}$.

$\mathbb{Q}^*$ es un cuerpo D.O.P. extensión algebraica no finita de $\mathbb{Q}$.

En efecto: En Griffin [19] y Craven [9] se prueba que $\mathbb{Q}^*$ es una extensión normal de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}^*$ es ordenable, se deduce de 11.9 que $\mathbb{Q}^*$ es una extensión F-real normal de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ tiene un único orden, $\mathbb{Q}^*$ es D.O.P. según 11.13.

Por otro lado, Craven [9] demuestra que $\mathbb{Q}^* = \{a \in \overline{\mathbb{Q}} \ ; \ f_a = \mathrm{Irr}(a,\mathbb{Q})$ no tiene raíces en $\mathbb{C}\}$. Así, es suficiente aplicar 7.7 para observar que $[\mathbb{Q}^* : \mathbb{Q}]$ no es finito.

El anterior no es sino un caso particular de la siguiente:

11.15. <u>Proposición</u>.- *Sea* E *un cuerpo con un único orden y denso en su cierre real. Sea* F *una extensión ordenable y finita de* E*, todos cuyos automorfismos son* E*-automorfismos. Si* F *es D.O.P., cada extensión algebraica y* F*-real normal de* F *es D.O.P.*

<u>Demostración</u>.- Sea K una extensión algebraica y F-real normal de F. Como $K = F.K$, y aplicando 11.11 y 11.13, es suficiente demostrar que F es extensión F-real normal de E.

Sea pues $P \in X(F)$, R_P un cierre real de $(E, P \cap E)$ y $f : F \to R_P$ un homomorfismo tal que $f|_E = 1_E$.

Como $[F : E]$ es finito, existe $a \in F$ con $F = E(a)$. Todo se reduce a probar que $f(a) \in E$.

Sea $Q = f^{-1}(R_P^2) \in X(F)$; como $X(F)$ es discreto -E tiene un único orden y F es extensión algebraica de E- y F es D.O.P., existe $g \in Aut(F)$ con $g(Q) = P$. Para probar que $f(a) \in F$, todo lo que hay que hacer es ver que $f(a) = g(a)$.

Si fuesen distintos, por ejemplo $f(a) - g(a) \in R_P^2 - \{0\}$, utilizamos la densidad de E en R_P para elegir $e \in E$ tal que:

$$f(a) - e \in R_P^2 - \{0\}, \qquad e-g(a) \in R_P^2 - \{0\}. \qquad (1)$$

Como $f|_E = 1_E$ es $f(a-e) = f(a) - e \in R_P^2 - \{0\}$, luego $a-e \in Q = g^{-1}(P)$. Así $g(a) - e \in P$ lo que junto con (1) implica que $g(a) = e$. Pero en este caso $F = g(F) = g(E(a)) = E$ y estamos en la situación de 11.13.

En el estudio de la conservación de la propiedad de las órbitas densas por extensión algebraica de cuerpos con más de un orden, la G-real normalidad desempeña un papel primordial.

Veremos en primer lugar que la noción de G-real normalidad sobre cuerpos con más de un orden no es vacía.

11.16. Ejemplo.- Sea Q^* como en 11.14. $\sqrt[3]{2} \notin Q^*$ pues $t^3-2 \in Q[t]$ tiene raíces complejas. Por ello $t^3-2 = Irr(\sqrt[3]{2}, Q^*)$. Sea $\overline{Q^*}$ un cierre algebraico de Q^* que contiene a $Q^*(\sqrt[3]{2})$. Veremos que $Q^*(\sqrt[3]{2})$ es extensión G-real normal de Q^*.

Para cada orden P en $Q^*(\sqrt[3]{2})$, consideramos un cierre real R_P de $(\mathbb{Q}^*, P \cap \mathbb{Q}^*)$ que contiene a $\mathbb{Q}^*(\sqrt[3]{2})$. Entonces, para cada homomorfismo $f : \mathbb{Q}^*(\sqrt[3]{2}) \to R_P$ es evidente que $f(\sqrt[3]{2})$ es raíz de t^3-2. Por el teorema de Sturm, t^3-2 tiene una única raíz en R_P. Como $\sqrt[3]{2}$ y $f(\sqrt[3]{2})$ son raíces de t^3-2 y ambas pertenecen a R_P, deben coincidir. En consecuencia, $\mathbb{Q}^*(\sqrt[3]{2})$ es extensión G-real normal de $\mathbb{Q}^*$.

Por otro lado, es obvio que $\mathbb{Q}^*$ admite más de un orden.

11.17. <u>Proposición</u>.- *Sean* F *y* E *cuerpos ordenables y* $F \subset E$. *Sea* $j : F \hookrightarrow E$ *la inclusión y* $j^* : X(E) \to X(F) : P \mapsto P \cap F$.

(a) Si $P \in \operatorname{im} j^*$ *y* R_P *es un cierre real de* (F,P), *entonces* $P \in f(\operatorname{im} j^*)$ *para cada homomorfismo no nulo* $f : E \to R_P$ *tal que* $f(F) = F$.

(b) Para cada automorfismo f *de* F *y cada* $P \in \operatorname{im} j^* \cap \cap f(\operatorname{im} j^*)$, *existe un homomorfismo* $\overline{f} : E \to R_P$ *tal que* $\overline{f}|_F = f$.

<u>Demostración</u>.- (a) Como $F = f(F) \subset f(E) \subset R_P$, $R_P^2 \cap f(E)$ es un orden en $f(E)$ que extiende P. Por tanto, $f^{-1}(R_P^2) \cap E$ es un orden en E que extiende a $f^{-1}(P) \in X(F)$. En consecuencia $f^{-1}(P) \in \operatorname{im} j^*$, esto es, $P \in f(\operatorname{im} j^*)$.

(b) Como $P \in f(\operatorname{im} j^*)$, existe $Q \in X(E)$ tal que $Q \cap F = f^{-1}(P)$.

Sea R_P un cierre real de (F,P), $P_1 = f^{-1}(P)$, $F_1 = F$ y $f : (F_1,P_1) \to (F_1,P) \hookrightarrow (R_P,R_P^2)$ que es homomorfismo de cuerpos ordenados.

Sea R_1 un cierre real de (F_1,P_1) y $Q_1 = R_1^2 \cap E$. Usando 11.12, existe un homomorfismo de cuerpos ordenados $\overline{f} : (E_1,Q_1) \mapsto (R_P,R_P^2)$, tal que $\overline{f}|_F = f$.

11.18. <u>Proposición</u>.- *Sea* F *un cuerpo ordenable,* $\overline{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión finita y* G*-real normal de* F *contenida en* $\overline{F}$. *Entonces, para cada automorfismo* f *de* F *tal que* $\mathrm{im}\, j^* \cap f(\mathrm{im}\, j^*) \neq \emptyset$ *se verifica que* $\mathrm{im}\, j^* = f(\mathrm{im}\, j^*)$, *siendo*

$$j^* : X(E) \mapsto X(F) : P \mapsto P \cap F$$

<u>Demostración</u>.- Sea $P \in \mathrm{im}\, j^* \cap f(\mathrm{im}\, j^*)$.

Si R_P es un cierre real de (F,P), utilizamos 11.17 para asegurar la existencia de $\overline{f} : E \mapsto R_P$ tal que $\overline{f}|_F = f$.

En consecuencia, $\overline{f}(F) = F$ y la G-real normalidad de E implica que $\overline{f}(E) = E$.

Disponemos así del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f}"] & E \arrow[r, hook] & R_P \\ F \arrow[u, hook] \arrow[r] & F \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Entonces, para cada $Q \in \mathrm{im}\, j^*$, existe $Q_1 \in X(E)$ con $Q = Q_1 \cap F$ y $(\overline{f})^{-1}(Q_1)$ es un orden en E que cumple que $(\overline{f})^{-1}(Q_1) \cap F = f^{-1}(Q)$.

De este modo $f^{-1}(Q) \in \mathrm{im}\, j^*$, o lo que es lo mismo,

$Q \in f(\text{im } j^*)$. De este modo queda probado el contenido $\text{im } j^* \subset$ $\subset f(\text{im } j^*)$.

Repitiendo el argumento para f^{-1}, se obtiene la igualdad.

11.19. Proposición.- *Sea* F *un cuerpo ordenable,* $\bar{F}$ *un cierre algebraico de* F *y* E *una extensión finita y* G*-real normal de* F *contenida en* $\bar{F}$. *Si* F *es D.O.P., entonces* E *es D.O.P.*

Demostración.- Sea $P \in X(E)$ y H un abierto no vacío en la topología de Harrison de $X(E)$.

Como E es extensión finita de F y tomando $j^* : X(E) \to X(F) : Q \to Q \cap F$, el teorema de la aplicación abierta (9.1) asegura que $j^*(H)$ es abierto en $X(F)$. Como F es D.O.P., existe $f \in \text{Aut}(F)$ tal que $f(j^*(P)) \in j^*(H)$. Así $Q = j^*(P)$ pertenece tanto a $\text{im } j^*$ como a $f^{-1}(\text{im } j^*)$. Por (b) de 11.17 existe un homomorfismo

$$\overline{f^{-1}} : E \to R_Q \quad \text{que extiende a } f^{-1},$$

siendo R_Q un cierre real de (F,Q).

Por la G-real normalidad de E, disponemos del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f^{-1}}"] & E \arrow[r, hook] & R_Q \\ F \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^{-1}"] & F \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Como $f(j^*(P)) \in j^*(H)$, existe $Q_1 \in H$ de modo que $f(j^*(P)) =$

$= j^*(Q_1)$. Usando el diagrama, concluimos que

$$\overline{(f^{-1})}^{-1}(P) = Q_1 \in H.$$ Esto demuestra

que E es D.O.P.

Utilizaremos el resultado anterior para encontrar condiciones que aseguren que el cuerpo de funciones racionales de algunas variedades algebraicas es D.O.P.

11.20. Teorema.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* E *un cuerpo de funciones algebraicas sobre* R. *Sea* $n = gr.t.\ E|_R$ *y* $x_1,\ldots,x_n \in E$ *tales que* E *es extensión algebraica de* $F = R(x_1,\ldots,x_n)$. *Suponemos que* E *es extensión* G-*real normal de* F. *Entonces:*

(a) E *es D.O.P.*

(b) Todo orden de F *se extiende a* E.

Demostración.- (a) F es D.O.P. por 4.4. Aplicando 11.19 deducimos que E es D.O.P.

(b) Debemos probar que $j^* : X(E) \to X(F)$ es sobreyectiva.

$$P \mapsto P \cap F$$

Del teorema de la aplicación abierta, (9.1), -nótese que E es extensión finita de F- se deduce que $S = \operatorname{im} j^*$ es unión finita de abiertos básicos de X(F). Como E es ordenable, $S \neq \emptyset$.

Con las notaciones de 4.8 y utilizando 4.9 obtenemos que $\hat{S}$ es un abierto no vacío de R^n. Por comodidad supondremos que $\underline{o} \in \hat{S}$. Elegimos $r \in R^+$ de modo que $\hat{S}$ contiene a la bola abierta

B de centro $\underline{o}$ y radio $2r$.

Consideremos la hipercorona definida por:

$C = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n : r^2 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 4r^2\}$ y construimos

$$f : F \to F : x_i \mapsto \frac{r^2 x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

Llamamos $\hat{f} : R^n - \{0\} \longrightarrow R^n$

$$(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \left(\frac{r^2 x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} : 1 \leq i \leq n\right)$$

a la inversión respecto de la hiperesfera de centro $\underline{o}$ y radio r.

Entonces, si $f^* : X(F) \to X(F) : P \mapsto f^{-1}(P)$ y poniendo $S_1 = f^*(S)$ se verifica de modo obvio que: $(S \cap S_1)^\wedge = \hat{S} \cap \hat{S}_1 = \hat{S} \cap f^*(S)^\wedge = \hat{S} \cap \hat{f}(\hat{S} - \{0\})$.

Como $C \subset B \subset \hat{S}$ y $C \subset \hat{f}(B(0,r) - \{0\}) \subset \hat{f}(\hat{S} - \{0\})$, se deduce que $\hat{S} \cap \hat{S}_1$ contiene a C. En particular, $(S \cap S_1)^\wedge = \hat{S} \cap \hat{S}_1 \neq \emptyset$.

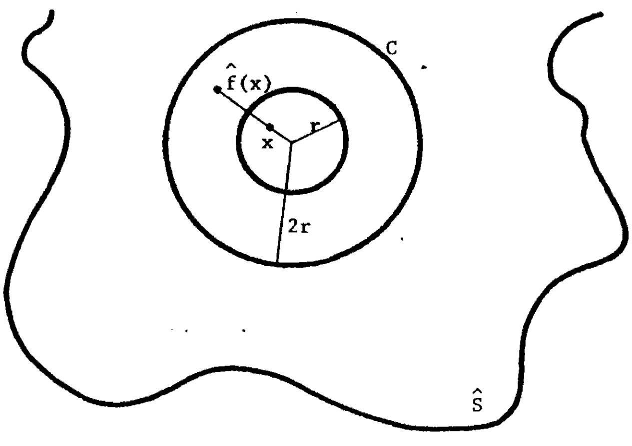


Figura 2

Aplicando ahora 11.8 se llega a: $\operatorname{im} j^* = f^*(\operatorname{im} j^*)$.

Utilizando (3) de 8.10 para $V = R^n$, deducimos que $\operatorname{im} j^* = f^*(\operatorname{im} j^*)$.

Por tanto, $\operatorname{im} j^* = \operatorname{im} j^* \cup f^*(\operatorname{im} j^*)$ que contiene a $B(0,r) \cup (R^n \;\; \overline{B(0,r)})$, denso en R^n.

Ahora, de 4.11 se concluye que $\operatorname{im} j^* = X(F)$.

11.21. <u>Observación</u>.- El teorema anterior, que en su parte (a) pone de manifiesto la suficiencia de la G-real normalidad para obtener la D.O.P., nos hace ver en su parte (b) que dicha condición no es necesaria, pues no hace falta que todos los órdenes de $R(x_1,\ldots,x_n)$ se extiendan a E para que éste sea D.O.P.

Por ejemplo, si $R = \mathbb{R}$ y V es la circunferencia $\{x^2+y^2-1 = 0\}$, es $E = R(V) = R(x)(y)$, donde y es raíz de la ecuación T^2+x^2-1.

Por tanto, los órdenes de $R(x)$ que se extienden a E son aquellos en los que $1-x^2$ es positivo, esto es, $H(1-x^2)$. Como $P_\infty \notin H(1-x^2)$, no todo órden de $R(x)$ se extiende a E. En consecuencia, por (b) de 11.20, E no es extensión G-real normal de $R(x)$.

Sin embargo, como $R(x)$ es D.O.P. por 4.4 y E es isomorfo a $R(x)$, también E es D.O.P. -el ser D.O.P. es evidentemente invariante por isomorfía-.

§12. Aplicaciones a la geometría semialgebraica.

En el último epígrafe de este capítulo explotaremos las técnicas desarrolladas en la sección octava para establecer un puente de enlace entre la geometría semialgebraica y la teoría de cuerpos ordenados. El resultado central es 12.14 en el que se prueba que todo semialgebraico que sea unión de dos semialgebraicos básicos es proyección de un algebraico irreducible.

12.1. Ejemplo.- Como se pone de manifiesto en (c) de 8.10, los abiertos H de $X(R(V))$ están en correspondencia con $\overline{\hat{H}}$, más que con $\hat{H}$.

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2 = V$, $E = \mathbb{R}(x,y)$ y sean $f(x,y) = \frac{1}{4} - (x^2+y^2)$,

$$g(x,y) = -(x^2(1-x) + y^2).$$ Tomamos en $X(E)$ los abiertos básicos $H_1 = H(f)$, $H_2 = H(g)$. Ahora, si $h = -gf$ veremos que $H_1 \cup H_2 = H(h)$.

Para ello, por (c) de 8.10 es suficiente con probar que $\overline{H_1 \cup H_2}^{\wedge} = \overline{H(h)}^{\wedge}$.

Observemos que $\underline{x} \in H(h)$ si y sólo si $f(\underline{x}).g(\underline{x}) < 0$ lo cual equivale a

$$(f(\underline{x}) > 0 \text{ y } g(\underline{x}) < 0) \text{ ó } (f(\underline{x}) < 0 \text{ y } g(\underline{x}) > 0).$$

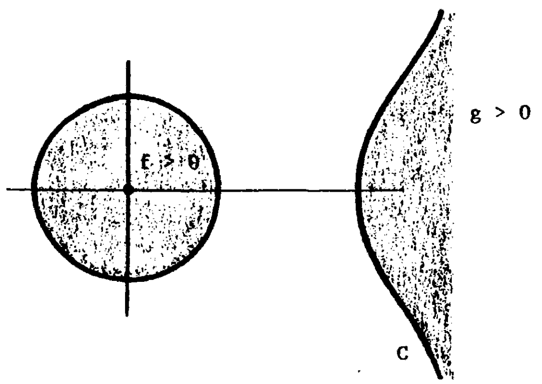


Figura 3

Así, $\underline{x} \in H(h)^\wedge$ si y sólo si: $[f(\underline{x}) > 0,\ \underline{x} \neq (0,0)]$ ó $g(\underline{x}) > 0$, es decir, $H(h)^\wedge = [H(f)^\wedge - \{\underline{o}\}] \cup H(g)^\wedge$. Por tanto, $\overline{H(h)^\wedge} = \overline{H(f)^\wedge - \{0\}} \cup \overline{H(g)^\wedge} = \overline{B(\underline{o}, \frac{1}{4}) - \{0\}} \cup \overline{H(g)^\wedge} = \overline{B(0,\frac{1}{4})} \cup \overline{H(g)^\wedge} = \overline{\hat{H}}_1 \cup \overline{\hat{H}}_2$. En consecuencia, $H_1 \cup H_2$ es un abierto básico de $X(E)$. Sin embargo, $(H_1 \cup H_2)^\wedge$ no es abierto semialgebraico básico de $\mathbb{R}^2$, es decir, para cada familia finita $f_1,\ldots,f_r$ de polinomios de $\mathbb{R}[x,y]$, se verifica que $\hat{H}_1 \cup \hat{H}_2 \neq H(f_1,\ldots,f_r)^\wedge = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : f_j(\underline{x}) \geq 0,\ 1 \leq j \leq r\}$.

En efecto: supongamos que

$$\hat{H}_1 \cup \hat{H}_2 = H(f_1,\ldots,f_r)^\wedge. \qquad \text{Entonces,}$$

para cada j, $1 \leq j \leq r$ se tiene $\hat{H}_1 \cup \hat{H}_2 \subset H(f_j)^\wedge$. Como $\underline{o} \in \hat{H}_1$, se deduce que $f_j(\underline{o}) > 0$, $1 \leq j \leq r$. (1)

Llamemos C a $g^{-1}(0) - \{\underline{o}\}$ como en Fig 3.

Como $\hat{H}_2 \subset H(f_j)^\wedge \subset f_j^{-1}([0,\to))$ y C está contenida en

$\bar{\hat{H}}_2$, obtenemos $C \subset f_j^{-1}([0,\to))$, esto es, $f_j(C) \subset [0,\to)$. (2)

Por otro lado, $C \cap (\hat{H}_1 \cup \hat{H}_2) = \emptyset$, y por ello $C \cap H(f_1,\dots,f_r)^\wedge = \emptyset$. Así, para cada $\underline{x} \in C$ existe $j(\underline{x}) \in \{1,2,\dots,r\}$ de modo que

$$f_{j(x)}(x) \leqslant 0, \qquad (3)$$

Usando (2) y (3), $f_{j(\underline{x})}(\underline{x}) = 0$ para cada $\underline{x} \in C$, luego $F = f_1 \dots f_r \in I(C)$. Como $C \cup \{\underline{o}\}$ es el mínimo algebraico que contiene a C, se concluye que $F(\underline{o}) = 0$. Esto contradice (1).

En la teoría de cuerpos ordenados han recibido especial atención los cuerpos S.A.P. (con la propiedad de la aproximación fuerte) introducidos por Knebusch - Rosenberg y Ware [21].

12.2. <u>Definición</u>.- *Un cuerpo ordenable* K *es* <u>*S.A.P.*</u> *si para cada* $a,b \in K$ *existe* $c \in K$ *tal que* $H(a) \cap H(b) = H(c)$.

12.3. <u>Proposición</u>.- *Sea* K *un cuerpo con un único orden y* p *un ideal primo de* $K[x_1,\dots,x_n]$, *de modo que* $E = \text{c.f.}\left(\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{p}\right)$ *es ordenable y no es S.A.P. Sea* R *un cierre real de* K *y* $V = V_R(p) = \{\underline{a} \in R^n : f(a) = 0,\ f \in p\}$. *Suponemos que todos los puntos de* V *son centrales. Entonces existen dos polinomios* f_1 *y* f_2 *en* $K[x_1,\dots,x_n]$ *tales que el semialgebraico*

$$Y = V \cap \{\underline{x} \in R^n : f_1(x) > 0,\ f_2(x) > 0\}$$

no se escribe de la forma

(1) $Y = V \cap \{\underline{x} \in R^n : f(x) > 0\}$, *para ningún* $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$.

Demostración.- Como E no es S.A.P., existen $a = \frac{F_1+p}{G_1+p}$, $b = \frac{F_2+p}{G_2+p}$, $F_1,F_2,G_1,G_2 \in K[x_1,\ldots,x_n]$, tales que para cada $c \in E$ es $H(a) \cap H(b) \neq H(c)$. Sean $f_1 = F_1 \cdot G_1$, $f_2 = F_2 \cdot G_2$. Utilizando que $f_1+p = a.(G_1+p)^2$ y $f_2 = b(G_2+p)^2$, es claro que $H(a) = H(f_1+p)$ y $H(b) = H(f_2+p)$.

Si Y se escribiera en la forma (1), se tendría: $H(f_1+p,\ f_2+p)^\wedge = H(f+p)^\wedge$. Tomando adherencias y aplicando (3) de 8.10. deducimos que $H(a) \cap H(b) = H(f+p)$. Absurdo.

Para averiguar en que condiciones $E = K(V)$ es S.A.P. utilizaremos el siguiente lema (véase [12]).

12.4. Lema.- *Sea* E *un cuerpo ordenable,* t *transcendente sobre* E. *Son equivalentes:*

(a) E *es hereditariamente euclídeo.*

(b) Toda extensión finita de $E(t)$ *es S.A.P.*

(c) Existe una extensión finita de $E(t)$ *que es S.A.P.*

12.5. Proposición.- *Sea* K *un cuerpo hereditariamente euclídeo,* R *un cierre real de* K*,* p *un ideal primo de* $K[x_1,\ldots,x_n]$ *y* $V = V_R(p)$ *de modo que* $E = \text{c.f.}\left(\frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{p}\right) = K(V)$ *es ordenable. Son equivalentes:*

(1) $K(V)$ *es S.A.P.*

(2) La dimensión de V *es menor o igual que 1.*

Demostración.- (1) $\Longrightarrow$ (2) Si V tiene dimensión mayor que 1 es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie W de R^d, $d \geqslant 3$. Por tanto, $K(W) \simeq K(V)$ es S.A.P. y extensión algebraica finita de $K(x_1,\dots,x_{d-1}) = F(x_{d-1})$, siendo $F = K(x_1,\dots,x_{d-2})$.

Aplicando 12.4 se concluye que F es hereditaraimete euclí deo y en particular que tiene un único orden. Esto es absurdo por ser $d \geqslant 3$. (Usese 1.5 y 2.1).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si V tiene dimensión cero, $K(V)$ es isomorfo a K que es S.A.P. por tener un único orden.

Si V tiene dimensión uno, $K(V)$ es extensión algebraica finita de $K(t)$. Como K es hereditariamente euclídeo, se deduce de 12.4 que $K(V)$ es S.A.P.

12.6. Corolario.- *Con las notaciones de 12.5, si* K *es hereditariamente euclídeo,* V *tiene dimensión mayor que uno y todos los puntos de* V *son centrales, existen* $f_1, f_2 \in K[x_1,\dots,x_n]$ *tales que el semialgebraico*

$$Y = V \cap \{\underline{x} \in R^n : f_1(\underline{x}) > 0, \quad f_2(\underline{x}) > 0\}$$

no se puede escribir de la forma

$$Y = V \cap \{\underline{x} \in R^n : f(\underline{x}) > 0\}, \quad \textit{para}$$

ningún $f \in K[x_1,\dots,x_n]$.

Demostración.- Es consecuencia de 12.3 y 12.5. pues un cuerpo hereditariamente euclídeo tiene un único orden.

Nótese que el resultado anterior, en particular, se aplica al caso en que K es realmente cerrado, pues todo cuerpo realmente cerrado es hereditariamente euclídeo.

Para variedades de dimensión uno, incluso para curvas sobre R todos cuyos puntos sean centrales, no se verifica el contrario de 12.6, como queda de manifiesto en el siguiente:

12.7. Ejemplo.- Sea $V = \{(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0\}$,
$Y = V \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$.

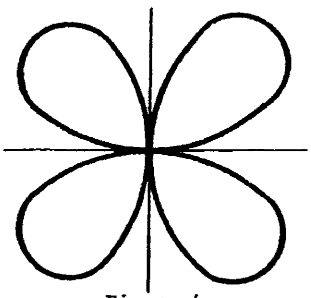


Figura 4

Un sencillo cálculo con las parametrizaciones

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \\ y = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}} \end{cases} \qquad \text{para } V \cap \{y > 0\}, \quad \text{y}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-t}{(1+t^2)^{3/2}} \\ y = \dfrac{-t^2}{(1+t^2)^{3/2}} \end{cases} \qquad \text{para } V \cap \{y < 0\}$$

permite demostrar que no existe $f \in \mathbb{R}[x,y]$ de forma que $Y = V \cap \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) > 0\}$.

El mejor resultado que se puede obtener en esta dirección es:

12.8. <u>Proposición</u>.- *Con las notaciones de 12.5, si* K *es hereditariamente euclídeo,* V *tiene dimensión uno y todos los puntos de* V *son centrales, entonces para cada familia finita* $f_1,\dots,f_r$ *de polinomios de* $K[x_1,\dots,x_n]$ *existe* $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ *que verifica que:*

$$\overline{V \cap \{\underline{x} \in R^n : f_j(x) > 0,\ 1 \leq j \leq r\}} = \overline{V \cap \{\underline{x} \in R^n : f(x) > 0\}}$$

<u>Demostración</u>.- Notaremos p al ideal de V en $K[x_1,\dots,x_n]$ y $H_j = H(f_j+p)$, $1 \leq j \leq r$. Como $K(V)$ es S.A.P. por 12.5, existe $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ de modo que $\bigcap_{j=1}^{r} H_j = H(f+p)$. El resultado buscado se obtiene aplicando (3) de 8.10 a la última igualdad.

La última, pero la más interesante, cuestión que abordamos en este epígrafe es el estudio de qué semialgebraicos son proyección de variedades algebraicas irreducibles. En lenguaje de cuerpos ordenados obtenemos la siguiente:

12.9. <u>Proposición</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* H *un abierto básico no vacío del espacio de órdenes de* $E = R(x_1,\dots,x_n)$. *Entonces existe una extensión finita* F *de* E *tal que* H *coincide con la imagen de*

$j^* : X(E) \to X(E) : P \mapsto P \cap E$. *Además, existe* $k \in \mathbb{N}$ *y una variedad irreducible, no singular* V *de* R^{n+k}*, tal que* $F = R(V)$.

Demostración.- Sean $f_1,\dots,f_k \in R[x_1,\dots,x_n]$, tales que $H = H(f_1,\dots,f_k)$. Como H no es vacío, existe $P_1 \in X(E)$ con $f_j \in P_1$, $1 \leq j \leq k$.

Si R_1 es un cierre real de (E,P_1), para cada $1 \leq j \leq k$ existe $u_j \in R_1$ de forma que $u_j^2 = f_j$.

Sea $v_j = \frac{1}{u_j}$ y $F = E(v_1,\dots,v_k)$ extensión algebraica finita de E.

Ahora si $j : E \to F$ y $P \in \operatorname{im} j^*$, existe un orden Q en F con $Q \cap E = P$. Como $f_j = (\frac{1}{v_j})^2 \in Q$, se tiene $P \in H$.

Recíprocamente, si $P \in H$ y llamando R_2 a un cierre real de (E,P), se deduce que cada $f_j \in R_2^2$, luego $v_j \in R_2$. Así $F \subset R_2$ y $Q = R_2^2 \cap F$ es un orden en F cuya imagen por j^* es P. Hemos probado que $H = \operatorname{im} j^*$.

Para probar la segunda parte comenzamos por escribir $H = H(f_1,\dots,f_k)$ de modo que para cada j, $1 \leq j \leq k$ sea $H(f_1,\dots,f_{j-1},f_{j+1},\dots,f_k) \not\subset H(f_j)$. (1)

(Basta suprimir aquellos f_j que no lo cumplan). En primer lugar veremos que:

(a) $[E(v_1) : E] = 2$ y

$[E(v_1,\dots,v_j) : E(v_1,\dots,v_{j-1})] = 2$, $2 \leq j \leq n$.

La primera parte es inmediata, pues si $v_1 \in E$ entonces f_1 es positivo en todos los órdenes de E, con lo cual $H(f_1) \supset H(f_2)$ en contra de (1).

Para la segunda comprobaremos que $[E(v_1,v_2) : E(v_1)]$ es dos. Luego se procede análogamente.

Todo consiste en ver que $u_2 \notin E(u_1)$.

Si esto no ocurriese, sería $u_2 = au_1+b$, $a,b \in E$. Por tanto $f_2 = u_2^2 = a^2f_1+b^2 + 2abu_1$ y por ello

$$(f_2 - a^2f_1 - b^2)^2 = 4a^2b^2f_1.$$

a no puede ser cero, pues entonces $f_2 = b^2$ y $H(f_2) = X(E) \supset H(f_1)$.

Tampoco b puede ser cero. En tal caso $f_2 = a^2.f_1$ y por ello $H(f_1) = H(f_2)$ en contra de (1).

En consecuencia $a.b \neq 0$, luego

$$f_1 = \left(\frac{f_2 - a^2f_1 - b^2}{a.b}\right)^2 \qquad \text{y así}$$

$H(f_1) = X(E) \supset H(f_2)$.

Queda pues probado (a).

En segundo término, definimos

$$G : A = R[x_1,\ldots,x_n, x_{n+1},\ldots,x_{n+k}] \longmapsto F$$

$$h \longmapsto h(x_1,\ldots,x_n, v_1,\ldots,v_k).$$

Veremos que $\operatorname{Ker} G = (g_1,\ldots,g_k).A$ donde

$$g_j = x_{n+j}^2 \cdot f_j - 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Un contenido es evidente, pues $v_j^2 . f_j = 1$.

Sea $h \in \operatorname{Ker} G$. Si $x' = (x_1,\dots,x_{n+k-1})$ obtenemos por división: $h = q_k . g_k + x_{n+k} \cdot r_k(x') + s_k(x')$.

Por tanto, $v_{n+k} \cdot G(r_k) + G(s_k) = 0$ y usando (a) obtenemos $G(r_k) = G(s_k) = 0$.

Dividiendo r_k y s_k entre g_{k-1} y repitiendo el proceso se deduce, puesto que Ker G corta a $R[x_1,\dots,x_n]$ solo en $\{0\}$, la igualdad deseada.

De esta forma, $p = (g_1,\dots,g_k)A$ es ideal primo. Como $H(f_1,\dots,f_k) \neq \emptyset$, el anillo $E[v_1,\dots,v_k]$ es real y, en consecuencia, p es un ideal real de A.

Entonces, llamando V a la variedad de ceros de p se verifica que $I(V) = p$, con lo cual $R(V) = \text{c.f.} \left(\frac{R[x_1,\dots,x_{n+k}]}{p}\right) \simeq F$ es el cuerpo de funciones de una variedad algebraica real de R^{n+k}.

Solo nos falta ver que V es no singular, pero esto es claro pues la matriz jacobiana de p,

$$J = \begin{pmatrix} x_{n+1}^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, x_{n+1}^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, & 2f_1 . x_{n+1}, & 0,\dots,0 \\ \\ x_{n+k}^2 \frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \dots, x_{n+k}^2 \frac{\partial f_k}{\partial x_n}, & 0,\dots,0, & 2x_{n+k} . f_k \end{pmatrix}$$

tiene un menor de orden máximo k que no se anula sobre V.

$$\begin{vmatrix} 2f_1 \cdot x_{n+1}, & 0,\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0,\dots & 2f_k \cdot x_{n+k} \end{vmatrix} = 2^k . x_{n+1} \dots x_{n+k} \neq 0 \quad \text{en} \quad V-.$$

12.10. <u>Corolario</u>.- *Sean* $f_1,\dots,f_s \in R[x_1,\dots,x_n]$ *de modo que* $S = \{\underline{x} \in R^n : f_j(\underline{x}) > 0,\ 1 \leq j \leq k\} \neq \emptyset$. *Entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *y una variedad algebraica irreducible* V *no singular, de modo que, si* $\pi : R^{n+k} \to R^n$ *es la proyección canónica sobre las* n *primeras coordenadas, es* $\overline{\pi(V)} = \overline{S}$.

<u>Demostración</u>.- $H = H(f_1,\dots,f_s)$ es abierto básico no vacío de $X(E)$, $E = R(x_1,\dots,x_n)$ por 4.11.

Usando 12.9 existe una variedad algebraica no singular V de cierto R^{n+k} de modo que $H = \text{im } j^*$, siendo $j : E \hookrightarrow R(V)$ y $j^* : X(R(V)) \to X(E) : P \mapsto P \cap E$.

Aplicando 2 de 9.4 -aquí $\overline{j} = \pi$ y $V_c = V$ por ser V no singular- se concluye.

12.11. <u>Comentario</u>.- En [13] se plantea el problema de determinar cuando una unión finita H de abiertos básicos del espacio de órdenes de un cuerpo E es de la forma $\text{im } f^*$ para algún homomorfismo no nulo $f : E \to L$ que cumpla que L es extensión finita de $f(E)$. Allí mismo se prueba que los abiertos básicos cumplen esta propiedad y así, la primera parte de 12.9 no es sino otra demostración de este resultado en el caso $E = R(x_1,\dots,x_n)$.

A continuación obtendremos para $E = R(x_1,\dots,x_n)$ el mismo resultado para abiertos que sean unión de <u>dos</u> abiertos básicos de $X(E)$. En primer lugar necesitamos un sencillo lema técnico.

12.12. <u>Lema</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* $A = R[x_1,\dots,x_n]$. *Sean* $f,g \in A-\{0\}$. *Entonces, para cada subconjunto infinito* M *de* R^2 *existe* $m \in M$ *tal que* $m^2f^2+g^4$ *no es cuadrado en* A.

<u>Demostración</u>.- En caso contrario llamaremos, para cada $m \in M$, h_m al elemento de A que cumple que $m^2f^2+g^4 = h_m^2$.

Completando cuadrados, obtenemos

$$(mf+g^2)^2 - 2mfg^2 = h_m^2\,, \qquad \text{es decir,}$$

$$(mf+g^2 - h_m)(mf+g^2+h_m) = 2mfg^2$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\sqrt{m}\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}} - \frac{h_m}{\sqrt{m}})(\sqrt{m}.f + \frac{g^2}{\sqrt{m}} + \frac{h_m}{\sqrt{m}}) = 2f.g^2 \qquad (1)$$

Notamos S a la familia de productos de factores irreducibles de $2f.g^2$ y $\phi : M \to S$ a la aplicación que a cada $m \in M$ hace corresponder $g_m = \sqrt{m}\,.\,f + \frac{g^2}{\sqrt{m}} + \frac{h_m}{\sqrt{m}}$. Al ser M infinito y S finito, existe un subconjunto infinito N de M, tal que para cada $m,m' \in N$ es $g_m = g_{m'}$.

Llamaremos $G = g_m$ para cada $m \in N$.

De (1) se deduce que $f_m = \sqrt{m}\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}} + \frac{h_m}{\sqrt{m}} = F$ para cada $m \in N$.

Como $G.F = 2fg^2$ y $G+F = \sqrt{m}\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}}$, G y F son las soluciones de todas las ecuaciones:

$$T^2 - (\sqrt{m}\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}})T + 2f.g^2 = 0, \qquad m \in N$$

En consecuencia dichas ecuaciones coinciden y así $m\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}}$ no depende de $m \in N$.

Ahora, fijamos $m_o \in N-\{0\}$ y para cada $m \in N-\{0\}$ se tiene:

$$\sqrt{m}\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m}} = \sqrt{m_o}\, .\, f + \frac{g^2}{\sqrt{m_o}}, \quad \text{es decir,}$$

$$\sqrt{m_o}\, .\, (mf + g^2) = \sqrt{m}\, (m_o f + g^2).$$

Entonces $\frac{mf + g^2}{m_o . f + g^2} = \sqrt{\frac{m}{m_o}} = a_m$ y $(m-a_m.m_o)f + (1-a_m).g^2 = 0$. Finalmente $g^2 = \frac{m-a_m.m_o}{a_m-1}\, .\, f$. Esto es absurdo puesto que $\frac{m-a_m.m_o}{a_m-1} = \sqrt{m.m_o}$ depende de m.

12.13. <u>Proposición</u>.- *Sea* R *un cuerpo realmente cerrado y* $E = R(x_1,\dots,x_n)$. *Sean* H_1 *y* H_2 *dos abiertos básicos de* $X(E)$ *y* $H = H_1 \cup H_2$. *Entonces existe una extensión finita* L *de* E *de modo que* $H = \text{im}\, j^*$, *siendo* $j : E \hookrightarrow L$ *la inclusión canónica.*

<u>Demostración</u>.- Ponemos $H_1 = H(f_1,\dots,f_r)$ y $H_2 = H(g_1,\dots,g_s)$. Podemos suponer que cada f_i y cada g_j son polinomios no nulos.

En virtud de 12.12 y si notamos $A = R[x_1,\dots,x_n]$, sabemos que para cada par $(i,j) \in \{1,\dots,r\} \times \{1,\dots,s\}$ existe $m_{ij} \in R^2$

de modo que

$$m_{ij}^2 \; g_j^2 + f_i^4 \quad \text{no es un cuadrado en } A. \ (1)$$

Construimos la familia de polinomios de $A[T]$

$$F_{ij}(T) = f_i T^4 + (m_{ij} \; g_j - f_i^2)T^2 - \frac{m_{ij}}{2} \cdot f_i \cdot g_j$$

donde $i \in \{1,\ldots,r\}$, $j \in \{1,\ldots,s\}$.

En virtud de (1) cada F_{ij} es irreducible en $A[T]$, y por ello en $E[T]$.

Veamos que para cada orden P de $H_1 \cup H_2$ y cada (i,j), el polinomio F_{ij} tiene una raíz en cualquier cierre real R^* de (E,P). (2)

Sea $P \in H_1 \cup H_2 = \bigcap_{i,j} (H(f_i) \cup H(g_j))$ y sea (i,j) cualquiera.

Si $f_i \in P$ y $g_j \in P$, (2) es inmediato pues $F_{ij}(0) < 0$ y F_{ij} tiene grado par y coeficiente director positivo. (Todo ello en P).

Si $f_i \notin P$ y $g_j \in P$; (2) es asimismo cierto por ser $F_{ij}(0) > 0$ y F_{ij} de grado par y coeficiente director negativo.

Si $f_i \in P$ y $g_j \notin P$ se verifica que

$$h_{ij} = \frac{f_i^2 - m_{ij}g_j + \sqrt{m_{ij}^2 g_j^2 + f_i^4}}{2f_i} \quad \text{es positivo en } R^*,$$

luego existe $v_{ij} = \sqrt{h_{ij}} \in R^*$. Además $F_{ij}(v_{ij}) = 0$.

De este modo hemos probado (2), y llamando a_{ij} a una raíz de F_j en R^*, construimos $L = E(a_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant r, \ 1 \leqslant j \leqslant s)$.

Por la construcción, al ser F_{ij} el polinomio mínimo de a_{ij} sobre E, se obtiene que $H_1 \cup H_2 \subset \mathrm{im}\ j^*$.

Para probar el otro contenido es suficiente con observar que si $P \notin H_1 \cup H_2$, entonces existe (i,j), de modo que F_{ij} no tiene ninguna raíz real en el cierre real R^* de (E,P). Pero esto es claro, pues si $P \notin H_1 \cup H_2$, existe i,j tal que $f_i \notin P$ y $g_j \notin P$, entonces f_i, $m_{ij}\, g_j - f_i^2$ y $-\frac{m_{ij}}{2} \cdot f_i g_j$ son negativas en R^*, luego, por la regla de Descartes, F_{ij} no tiene raíces en R^*.

12.14. <u>Interpretación geométrica</u>.

Sea R un cuerpo realmente cerrado. Consideremos el semialgebraico de R^n

$$S = \overline{\{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cup \{g_1 > 0,\dots,g_s > 0\}},$$

donde $f_i, g_j \in R[x_1,\dots,x_n]$.

Sean $\{T_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s\}$ indeterminadas sobre $R[x_1,\dots,x_n]$, $T = (T_{ij})$.

Eligiendo m_{ij} como en 12.13 y definiendo

$$(1) \qquad F_{ij}(\underline{x},T) = f_i\, T_{ij}^4 + (m_{ij}\, g_j - f_i^2)T_{ij}^2 - \frac{m_{ij}}{2} f_i g_j$$

construimos la variedad algebraica <u>irreducible</u> de R^{n+rs}.
$V = V(F_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$.

Entonces, si $\pi : R^{n+r.s} \mapsto R^n$ es la proyección canónica sobre las n primeras coordenadas, de 9.4 y 12.13 deducimos que $\overline{\pi(V_c)} = S$.

Este resultado mejora, en cierto modo, los obtenidos por

Motzkin en [32], pues allí no se tiene la irreducibilidad de V.

12.15. Conjetura.- Si R es un cuerpo realmente cerrado y $E = R(x_1,\ldots,x_n)$, para cada unión finita H de abiertos básicos de $X(E)$ existe una extensión finita F de E de forma que si $j : E \hookrightarrow F$ y $j^* : X(F) \to X(E) : P \mapsto P \cap E$, H coincide con $\operatorname{im} j^*$.

La contrapartida geométrica de 12.15 implicaría que todo semialgebraico abierto de R^n es proyección de una variedad algebraica irreducible de algún R^{n+k}.

12.16. Observación.- Debemos destacar que la prueba de 12.13. se puede repetir, palabra por palabra, cambiando $R(x_1,\ldots,x_n)$ por un cuerpo ordenable cualquiera E que verifique la siguiente propiedad:

(*): Para cada par de elementos $a,b \in E-\{0\}$, existe $m \in E^2$ de modo que $m^2a^2+b^4$ no es un cuadrado en E.

12.17. Ejemplo.- Como caso particular de 12.14 consideremos $S = \{x \geq 0\} \cup \{y \geq 0\}$, semialgebraico de $\mathbb{R}^2$.

La superficie V de ecuación

$$xz^4 + (2y - x^2)z^2 - xy = 0 \qquad \text{obtenida}$$

de (1) de 12.14 con $T_{ij} = T_{11} = Z$, $m_{ij} = m_{11} = 2$, cumple que $\overline{\pi(V_c)} = S$, para la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x,y)$.

Es sencillo observar que en este caso $\overline{\pi(V)} = \overline{\pi(V_c)}$, luego $S = \pi(V)$.

Por otro lado es sencillo demostrar que $H = H(x) \cup H(y)$

no es un abierto básico de $X(\mathbb{R}(x,y))$, luego estamos ante un caso que no podíamos resolver con 12.10.

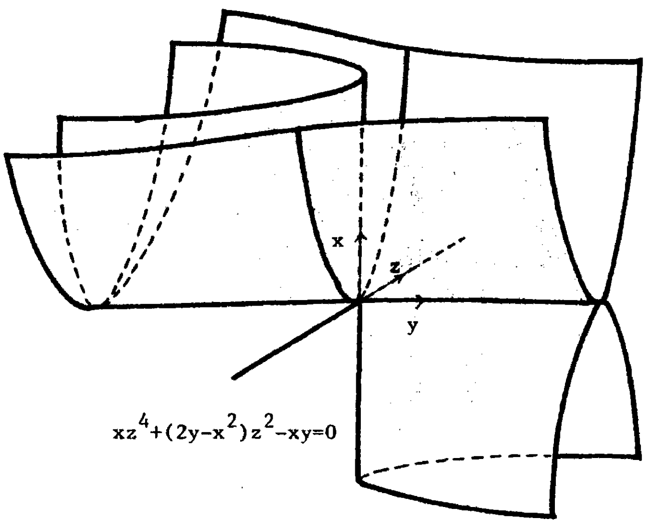


Figura 5

CAPITULO 3: CURVAS ALGEBRAICAS REALES

En este capítulo se caracterizan las curvas algebraicas C sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales cuyo cuerpo de funciones racionales posee la propiedad de las órbitas densas. Demostramos que $\mathbb{R}(C)$ es D.O.P. si y sólo si C es racional o elíptica. Para ello empleamos la teoría de superficies de Klein y de grupos cristalográficos no euclídeos, esencialmente con el fin de obtener un mejor conocimiento del grupo de automorfismos de $\mathbb{R}(C)$.

En el último epígrafe, y mediante secciones hiperplanas de variedades, obtenemos un procedimiento para clasificar variedades algebraicas reales según su "tamaño".

§13. Generalidades sobre superficies de Klein.

En este epígrafe expondremos la teoría de superficies de Klein elaborada por Alling y Greenleaf [2], y que constituye una herramienta fundamental, tanto para conocer el grupo de automorfismos de un cuerpo F de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$ como para analizar las curvas algebraicas reales desde el punto de vista topológico.

13.1. <u>Definición</u>.- *Para cada abierto* A *de* $\mathbb{R}^2$ *y cada aplicación de clase 2* $f : A \to \mathbb{R}^2$ *se notará*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}}{2} \quad \textit{donde} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Si M es un subconjunto de A, se dice que f es <u>analíti-</u>

ca (respectivamente antianalítica) sobre M cuando $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ (respectivamente $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$) para cada elemento a de M. Cuando sobre cada componente conexa de A, f es analítica ó antianalítica, se dice que f es dianalítica sobre A.

13.2. Definiciones.- *Si* X *es un espacio topológico conexo y Hausdorff y* $\mathbb{C}^+ = \{a+bi \in \mathbb{C} : b \geq 0\}$, *se llama atlas sobre* X *a toda familia* $\mathcal{U} = \{(U_j, f_j) : j \in J\}$ *donde* $\{U_j : j \in J\}$ *es un recubrimiento por abiertos de* X *y cada* $f_j : U_j \to \mathbb{C}$ *es un homeomorfismo sobre* $f(U_j)$, *que a su vez es un abierto de* $\mathbb{C}$ *ó* $\mathbb{C}^+$.

El borde de X *es*

$$\partial X = \{x \in X : \text{ existe } j \in J \text{ con } x \in U_j,$$

$f_j(x) \in \mathbb{R}$ *y* $f_j(U_j)$ *es abierto en* $\mathbb{C}^+$ *pero no en* $\mathbb{C}\}$.

El atlas $\mathcal{U}$ *se dice dianalítico cuando*

$f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_j \cap U_i)$ *es dianalítica.*

Definiendo en la clase de los atlas dianalíticos relación de equivalencia usual: $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ *si y sólo si* $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ *es un atlas dianalítico, se define superficie de Klein como el par* $(X, [\mathcal{U}])$, *donde* $[\mathcal{U}]$ *es una clase de equivalencia de atlas dianalíticos sobre* X.

Los morfismos entre dos superficies de Klein $K_1 = (X_1, [\mathcal{U}_1])$ *y* $K_2 = (X_2, [\mathcal{U}_2])$ *son las aplicaciones continuas* $f : X_1 \to X_2$ *que verifican:*

1º) $f(\partial X_1) \subset \partial X_2$

2º) Para cada $x_1 \in X_1$ *existen* $(U_1, g_1) \in \mathcal{U}_1$, $(U_2, g_2) \in \mathcal{U}_2$, *con* $x_1 \in U_1$, $f(x_1) \in U_2$ *y existe* $F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ *aplicación dianalítica sobre* $g_1(U_1)$, *que hacen conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"] & U_2 \arrow[dr, "g_2"] & \\ \mathbb{C}^+ \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C}^+ \end{tikzcd}$$

donde $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^+ : a+bi \mapsto a + |b|\, i$. *Se nota por* $\mathbb{K}$ *la categoría cuyos objetos son las* *<u>superficies de Klein</u>* *y cuyos morfismos son los anteriormente definidos.*

Un concepto que desempeña un papel esencial es el de *<u>función meromorfa</u>* *sobre la superficie de Klein* $K = (X, [\mathcal{U}])$.

Designando Σ *la* *<u>esfera de Riemann</u>*, *llamaremos* *<u>función memorfa</u>* $g_{\mathcal{U}}$ *sobre* X *relativa a* $\mathcal{U}$ *a una familia* $\{g_j : j \in J\}$ *de aplicaciones* $g_j : U_j \to \Sigma$ *tales que*

1º) Cada $g_j \circ f_j^{-1} : f_j(U_j) \to \Sigma$ *es meromorfa.*

2º) $g_j(\partial X \cap U_j) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3º) Para todo conexo V *de* $U_j \cap U_k$, *y si* $f_j \circ f_k^{-1}$ *es analítica (respectivamente antianalítica) sobre* V, *se cumple que* $g_j|_V = g_k|_V$ *(respectivamente* $g_j|_V = \overline{g}_k|_V$*).*

El conjunto de funciones meremorfas sobre X *relativas a* $\mathcal{U}$ *constituyen evidentemente un cuerpo extensión de* $\mathbb{R}$. *Como los cuerpos de funciones meromorfas respecto de atlas equivalentes son isomorfos, ([2], corolario al lema 1.3.1) se puede independizar del atlas* $\mathcal{U}$ *elegido en* $[\mathcal{U}]$ *la noción de funcion meromorfa, y notaremos* E(K) *al* *cuerpo de funciones meromorfas sobre* K.

A cada función meromorfa $\underline{g} \in E(K) - \{0\}$ *se le asocia ([2], lema 1.3.4) una aplicación continua* $g : X \to \overline{\mathbb{C}^+}$ *que constituye un morfismo en* Ⓚ *entre* K *y la superficie de Klein de soporte* $\overline{\mathbb{C}^+}$; *en estas condiciones, a cada morfismo no constante* f *entre dos superficies de Klein* $K_1 = (X_1, [\mathcal{U}_1])$ *y* $K_2 = (X_2, [\mathcal{U}_2])$ *le corresponde un* $\mathbb{R}$*-homomorfismo no nulo de cuerpos* $f^* : E(K_2) \to E(K_1)$, *de modo que el morfismo correspondiente a* $f^*(\underline{g})$ *es* $g \circ f$. *Además* f^* *es único con esta propiedad.*

13.3. Teorema (1.4.9. de [2]).

Si Ⓡ *es la categoría cuyos objetos son los cuerpos extensión de* $\mathbb{R}$ *y cuyos morfismos son los* $\mathbb{R}$*-homomofismos no nulos de cuerpos, existe un funtor contravariante* E : Ⓚ $\to$ Ⓡ *definido por:*

(a) E(K) *es el cuerpo de funciones meromorfas sobre* K.

(b) Para cada $f \in Mor_{Ⓚ}(K_1, K_2)$, *es* $E(f) = f^*$.

13.4. Construcción.- Cuando nos restringimos a las subcategorías de superficies de Klein compactas y cuerpos de funciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$ en una variable, el funtor E tiene inverso. Para construir este inverso se procede del modo siguiente:

Si F es un cuerpo de funciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$ en una variable, se llama superficie de Klein de F a

$$\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(F) = \{D : D \text{ es anillo de valoración de } F|_{\mathbb{R}}\}.$$

Por 2.1.2 de [2], para cada $f \in F$ transcendente sobre $\mathbb{R}$ la aplicación

$$\hat{f} : \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(F) \to \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(f)) = \overline{\mathbb{C}^+}$$
$$D \mapsto D \cap \mathbb{R}(f)$$

es sobreyectiva, y así, considerando en $\overline{\mathbb{C}^+}$ la topología usual, se dota a $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(F)$ de la topología inicial para la familia

$$\mathcal{F} = \{\hat{f} : f \in F, \ f \text{ transcendente sobre } \mathbb{R}\}.$$

Además, (véase 2.2.5 de [2]), $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(F)$ es un espacio compacto conexo y Haussdorff, luego, por 1.7.1 de [2], existe en él una estructura dianalítica.

13.5. Teorema (2.3.1. de [2]).- *Las categorías* Ⓚ *de superficies de Klein conexas y compactas y* Ⓡ, *de cuerpos de funciones algebraicas sobre* $\mathbb{R}$ *en una variable son funtorialmente coequivalentes.*

Esta equivalencia está dada por los funtores $E|_{Ⓚ}$, y $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}$. Este último está definido en objetos del modo obvio y en mor fismos por:

$$\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(f) : \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(K_2) \to \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(K_1)$$
$$D \mapsto f^{-1}(D \cap K_1)$$

para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(K_1, K_2)$.

14. Componentes conexas de curvas algebraicas reales.

Dedicaremos esta sección al estudio de algunas propiedades topológicas de las curvas algebraicas reales.

En primer lugar fijaremos notaciones y recordaremos resultados básicos de la teoría topológica de superficies (véase Massey [28]).

4.1. Definición.- *Para cada superficie compacta, conexa y sin borde* M *notaremos por* $\chi(M)$ *su característica de Euler y llamaremos género topológico de* M *a*

$$p(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi(M)) & \text{si } M \text{ es orientable} \\ 2-\chi(M) & \text{si } M \text{ no es orientable.} \end{cases}$$

Si M *es una superficie compacta y con borde* $\partial M \neq \emptyset$, *notaremos* M^* *a la superficie sin borde asociada a* M, *construida pegando un disco a cada componente conexa de* ∂M. *El género topológico de* M *se define como* $p(M) = p(M^*)$ *y si* k *es el número de componentes conexas de* M *resulta* $\chi(M) = \chi(M^*) - k \leq 2-k$.

De este modo, si M es orientable se tiene:

$$p(M) = p(M^*) = \frac{1}{2}\,(2 - \chi(M^*)) = \frac{1}{2}\,(2 - \chi(M) - k) \quad \text{y}$$

si M es no orientable,

$$p(M) = p(M^*) = 2 - \chi(M^*) = 2 - \chi(M) - k.$$

14.2. Construcciones.- Sean $r \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$ con $r+k \leq 2$.

a) Si $r+k$ es par existe M, superficie compacta y orientable con $\chi(M) = r$, tal que ∂M tiene k componentes conexas.

b) Existe M, superficie compacta y no orientable con $\chi(M) = r$, tal que ∂M tiene k componentes conexas.

Esquematizamos estas construcciones:

a) Sea D el disco, L la tira $[0,1] \times [0,1]$ y L^* el par de tiras cruzadas.

Así si M es el resultado de pegar a D $k-1$ tiras L_j y $1 - (\frac{r+k}{2})$ pares $L_i^{\sim}$ es obvio que ∂M tiene k componentes conexas y $\chi(M) = \chi(D + L_1 + \ldots + L_{K-1}) - 2\,(1 - \frac{(k+r)}{2}) = 2 - k - 2 + k+r = r$

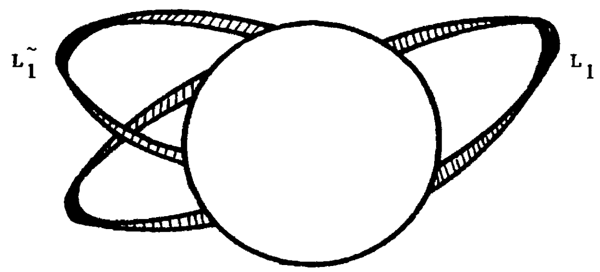


Figura 6

b) Si C es la cinta de Möebius y pegamos a D $k-1$ tiras L_j y $2-(k+r)$ cintas de Möebius C_j obtenemos una superficie M de modo que ∂M tiene k componentes conexas y

$$\chi(M) = \chi(D+L_1 + \ldots + L_{k-1}) - (2-(k+r)) = 2-k-2 + k+r = r.$$

Para conectar los resultados topológicos de superficies compactas con nuestro estudio de superficies de Klein y curvas algebraicas de $\mathbb{R}^n$ se necesita:

14.3. Definición.- *Sea* F *un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre* $\mathbb{R}$ *y* $F_{\mathbb{R}}$ *el cierre algebraico de* $\mathbb{R}$ *en* F. *Consideremos* $\Omega(F)$, *el espacio vectorial sobre* $F_{\mathbb{R}}$, *de dimensión finita, de las diferenciales sobre* F.

Llamaremos *género geométrico de* F *a* $g(F) = \dim_{F_{\mathbb{R}}} \Omega(F)$.

14.4. Comentario.- Si $K = (X, [\mathcal{U}])$ es una superficie de Klein compacta (respectivamente de Riemann compacta) y $F = E(K)$ es el cuerpo de funciones meromorfas de K, $\Omega(F)$ es el espacio vectorial sobre $F_{\mathbb{R}}$ de las diferenciales holomorfas sobre X y llamaremos género geométrico de K a $g(K) = g(E(K))$. Asi mismo usaremos R_K^* en lugar de $F_{\mathbb{R}}$ para designar el cierre algebraico de $\mathbb{R}$ en $E(K)$.

14.5. Observación.- Si $F = \mathbb{R}(x)(y)$, y algebraico sobre $\mathbb{R}(x)$, es un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$ y $F_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(x)(y)$, entonces $g(F) = g(F_{\mathbb{C}})$ pues el género es invariante por extensión separable del cuerpo de coeficientes.

14.6. <u>Definición</u>.- *Un morfismo* $f : K_1 \to K_2$ *donde* $K_1 = (X, [\mathcal{U}_1])$ *y* $K_2 = (Y, [\mathcal{U}_2])$ *son dos superficies de Klein se dice un* <u>*recubrimiento doble*</u> *si para cada* $y \in Y$ *existe un entorno* V *de* y *de manera que: (a)* $f^{-1}(V)$ *tiene dos componentes conexas* M_1 *y* M_2 *con* $f : M_i \to V$ *homeomorfismo, ó (b)* $f^{-1}(y) = \{x\}$ *y existen cartas* (U,z), (V,w) *de* X *e* Y *centradas en* x *e* y, *tales que* $f(U) \subset V$ *y cumpliendo:*

(i) $w \circ f|_U = \phi \circ z$ *si* $y \in \partial Y$, $x \in \partial X$

(ii) $w \circ f|_U = \phi \circ z \circ z$ *si* $y \in \partial Y$, $x \notin \partial X$

(iii) $w \circ f|_U = z^2$ *si* $y \notin \partial Y$,

donde $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^+ : a+bi \to a+|b|i$.

Las superficies de Riemann y de Klein están intimamente relacionadas, pues se prueba en 1.6.1 de [2] que para cada superficie de Klein K existe una superficie de Riemann $K_{\mathbb{C}}$ y un recubrimiento doble $f_{\mathbb{C}} : K_{\mathbb{C}} \to K$. Además existe una involución antianalítica $\sigma_{\mathbb{C}} : K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}$ cumpliendo que $f_{\mathbb{C}} \circ \sigma_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{C}}$. La tripla $(K_{\mathbb{C}}, f_{\mathbb{C}}, \sigma_{\mathbb{C}})$ es única salvo isomorfismo.

14.7. <u>Observación</u>.- Sea $K = (X, [\mathcal{U}])$ una superficie de Klein y $K_{\mathbb{C}}$ su recubrimiento doble. Si $E(K) = \mathbb{R}(x)(y)$ entonces $E(K_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(x)(y)$. En consecuencia, usando 14.5 deducimos que $g(K) = g(K_{\mathbb{C}})$.

14.8. <u>Proposición</u>.- *Sea* $K = (X, [U])$ *una superficie de Klein compacta y con borde. Entonces:*

(a) Si $R_K^* = \mathbb{C}$, $g(K) = \frac{1}{2}(2 - \chi(K))$.

(b) Si $R_K^* = \mathbb{R}$, $g(K) = 1 - \chi(K)$.

Además, en caso de ser $R_K^* = \mathbb{R}$, *se verifica:*

(b.1) Si K *es orientable,* $p(K) = \frac{1}{2}(g(K) - k+1)$

(b.2) Si K *es no orientable,* $p(K) = g(K) - k+1$, *siendo* k *el número de componentes conexas de* ∂X.

<u>Demostración</u>.- (a) Si $R_K^* = \mathbb{C}$ es clásica la igualdad entre $g(K)$ y $p(K)$. Además K es orientable por 1.3.2 de [2], luego

$$g(K) = p(K) = \frac{1}{2}(2 - \chi(K)).$$

(b) Si $R_K^* = \mathbb{R}$ se tiene $\chi(K) = \frac{1}{2}\chi(K_{\mathbb{C}})$. Por tanto,

$$g(K) = g(K_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}(2 - \chi(K_{\mathbb{C}})) = 1 - \chi(K).$$

(b.1) $p(K) = \frac{1}{2}(2-k - \chi(K)) = \frac{1}{2}(2-k + g(K) - 1) =$

$= \frac{1}{2}(1 + g(K) - k)$.

(b.2) $p(K) = 2-k - \chi(K) = 2-k - (1-g(K)) = 1 + g(K) - k$.

Con espíritu simplificador, para evitar el uso constante de la equivalencia funtorial entre curvas algebraicas reales (respectivamente complejas) y superficies de Klein (resp. de Riemann), enunciamos:

14.9. <u>Proposición</u>.- *a) Si* C *es una curva algebraica irreducible sobre* $\mathbb{C}$ *la superficie de Riemann de* C, *esto es,* $X = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}(C))$ *es una superficie compacta, conexa y sin borde con* $p(X) = g(\mathbb{R}(C))$.

b) Recíprocamente, toda superficie compacta y conexa y sin borde es la superficie de Riemann de una curva algebraica irreducible sobre $\mathbb{C}$.

c) Si C *es una curva algebraica irreducible sobre* $\mathbb{R}$ *tal que* $\mathbb{R}(C)$ *es ordenable, la superficie de Klein* $X = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(C))$ *de* C *es una superficie compacta, cuyo borde tiene* $k \neq 0$ *componentes conexas y tal que:*

i) $p(X) = \frac{1}{2}(g(\mathbb{R}(C) - k+1)$ *si* X *es orientable.*

ii) $p(X) = g(\mathbb{R}(C) - K+1)$ *si* X *es no orientable.*

d) Recíprocamente, toda superficie X *compacta y con borde con* $k \neq 0$ *componentes conexas en* ∂X *es la superficie de Klein asociada a un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre* $\mathbb{R}$.

<u>Demostración</u>.- (a) $p(X) = g(E(X)) = g(\mathbb{R}(C))$.

(b) Es obvio pues hay curvas algebraicas irreducibles sobre $\mathbb{C}$ de todos los géneros.

(c) Si $\partial X = \emptyset$, se prueba en 2.5.6 de [2] que -1 es suma de dos cuadrados en $E(X) \approx \mathbb{R}(C)$, en contra de la ordenabilidad de

$\mathbb{R}(C)$. Así $\partial X \neq \emptyset$. El resto se sigue de b) de 14.8.

(d) Véase 1.7.1 de [2].

14.10. <u>Observación</u>.- En 11.20 de [1], se hace notar que para $X = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}(C))$ es

$$\partial X = \{D \in \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}(C))\ :\ D/m_D \simeq \mathbb{R}\},$$

donde m_D es el ideal maximal de D.

Así si $\mathbb{R}(C)$ es ordenable y $K = (X, [U])$, es $R_K^* = \mathbb{R}$ y $\partial X \neq \emptyset$; es más, ∂X es homeomorfo a un modelo liso y completo de $\mathbb{R}(C)$.

14.11. <u>Proposición</u>.- *Sea* C *una curva algebraica real, esto es, con* $\mathbb{R}(C)$ *ordenable, de modo que* $X = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}(C))$ *es orientable. Sea* k *el número de componentes conexas de* C. *Entonces:*

(1) $k \leqslant g(\mathbb{R}(C)) + 1$. *(Teorema de Harnack).*

(2) $k-1 \equiv g(\mathbb{R}(C))$ *(módulo 2).*

<u>Demostración</u>.- Sea $K = (X, [U])$. Al ser $\mathbb{R}(C)$ ordenable, se verifica que $R_K^* = \mathbb{R}$. Puesto que X es orientable, deducimos de 14.8 que

$$p(K) = \frac{1}{2}\ (g(K) - k+1).$$

Como $p(K) \geqslant 0$, se deduce que $g(K) \geqslant k-1$. Así probamos (1).

Por otra parte, como $p(K)$ es un número entero, ha de ser $g(K) - k+1$ par, con lo que se demuestra (2).

14.12. <u>Proposición</u>.- *Sea* F *un cuerpo de funciones algebraicas sobre* $\mathbb{R}$ *en una variable y* $K = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}} F$ *la superficie de Klein asociada a* F. *Pongamos* $K = (X, [\mathcal{U}])$. *Entonces:*

(a) $\partial X \neq \emptyset$ *si y sólo si* F *es ordenable.*

(b) $R_K^* = \mathbb{C}$ *si y sólo si* $\partial X = \emptyset$ *y* K *es orientable.*

(c) $R_K^* = \mathbb{R}$ *y* F *no es ordenable si y sólo si* $\partial X = \emptyset$ *y* K *no es orientable.*

<u>Demostración</u>.- (a) En c) de 14.9 vimos que si F es ordenable, entonces $\partial X \neq \emptyset$.

Recíprocamente, si $\partial X = \{D \in X : \frac{D}{m_D} \simeq \mathbb{R}\}$ no es vacío, existe $D \in X$, $\mathbb{R} \subset D \subset F$ tal que $\frac{D}{m_D}$ es ordenable. Entonces F también lo es.

(b) Aplíquese 1.6.3. de [2].

(c) Si F no es ordenable, $\partial X = \emptyset$ por (a). Si K fuese orientable, sería $R_K^* = \mathbb{C}$ en virtud de (b).

Recíprocamente, como K no es orientable, no puede ser $R_K^* = \mathbb{C}$ aplicando (b). En consecuencia $R_K^* = \mathbb{R}$. La no ordenabilidad de F se deduce de (a).

14.13. <u>Observación</u>.- Con las notaciones anteriores, es cierto que $\partial X \neq \emptyset$ implica que $R_K^* = \mathbb{R}$. Sin embargo el recíproco no es cierto: considérese $f = x^2+y^2+1$ y F el cuerpo de fracciones de $\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)}$. Tomemos $X = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(F)$.

Como $-1 = x^2+y^2$ en F, por (a) de 14.12 deducimos que $\partial X = \emptyset$.

Sin embargo, al ser f irreducible en $\mathbb{C}[x,y]$, un resultado clásico de Lang [24] permite concluir que $R_K^* = \mathbb{R}$.

Ahora estamos en condiciones de construir curvas algebraicas reales cuyo género y número de componentes conexas esté prefijado.

14.14. Teorema.- *Sean* g *y* k *dos número enteros tales que* $1 \leq k \leq g+1$. *Entonces, existe una curva algebraica real* C *de género* g *y* k *componentes conexas. Además, si* $K = (X, [U]) = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(C))$, *se tiene:*

(a) Si $k-1 \not\equiv g(\mathrm{mod}.2)$, K *es necesariamente no orientable.*

(b) Si $k-1 \equiv g \pmod 2$, *existen dos curvas* C_1 *y* C_2, *tales que* $K_1 = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(C_1))$ *es orientable y* $K_2 = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(C_2))$ *no lo es.*

Demostración.- (a) Se sigue de 14.11.

Probamos en primer lugar la existencia, en el caso $k-1 \equiv g$ (mod. 2) de curvas algebraicas reales cuya superficie de Klein es orientable.

Tomamos $r = 1-g$. Como $k \leq g+1$, se tiene: $r+k \leq 1-g + g+1 = 2$.

Además $r+k = 1-g+k = (k-1-g)+2$ que es par.

Ahora por 14.2 (a), existe una superficie compacta y orien table X cumpliendo:

(i) $\chi(X) = r$

(ii) X tiene k componentes en el borde.

Como $k \neq 0$, se sigue de 14.9 (d) la existencia de un cuerpo F de funciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$, de modo que $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}} F = X$.

Escogemos C modelo liso y completo de F. Como $\partial X \neq \emptyset$, se sigue de 14.12 que F es ordenable, luego C es curva algebraica real. Además, por 14.10, ∂X es homeomorfo a C, luego C tiene k componentes conexas.

Sólo falta probar que $g(\mathbb{R}(C)) = g$. Pero, al ser $\partial X \neq \emptyset$ es $R_F^* = \mathbb{R}$, luego por b) de 14.8 es

$$g(\mathbb{R}(C)) = g(X) = 1 - \chi(X) = 1-r = g.$$

La construcción de una curva algebraica real con género g y k componentes conexas, cuya superficie de Klein sea no orientable, se realiza de modo análogo, usando (b) de 14.2.

Finalizamos este párrafo recuperando la información que de una superficie de Klein se recibe a partir de su cuerpo de funciones meromorfas, esto es, de la curva algebraica asociada.

14.15. <u>Proposición</u>.- *Sea* $K = (X,[\mathcal{U}])$ *una superficie de Klein compacta y* $F = E(K)$ *su cuerpo de funciones meromorfas. Sea* $K_{\mathbb{C}}$ *el recubrimiento doble de* K.

(a) Si $R_F^* = \mathbb{C}$, $E(K_{\mathbb{C}}) \simeq E(K) \times E(K)$

(b) Si $R_F^* = \mathbb{R}$, $E(K_{\mathbb{C}}) \simeq E(K) \otimes \mathbb{C}$.

Demostración.- (a) Si $R_F^* = \mathbb{C}$, $\partial X = \emptyset$ y X es orientable, luego $K_{\mathbb{C}}$ es disconexo y consta exactamente de dos componentes conexas. (Puede verse en 1.6.3 de [2], o algebraicamente, sin más que observar que todo $f \in \mathbb{R}[x,y]$ irreducible en $\mathbb{R}[x,y]$ pero no en $\mathbb{C}[x,y]$, se descompone en $f = f_1 . f_2$, $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x,y]$ e irreducibles).

(b) Cuando $R_F^* = \mathbb{R}$ se sigue de 1.6.3 en [2] y de 14.12. la conexión de $K_{\mathbb{C}}$, luego $E(K_{\mathbb{C}}) = E(K)\ (\sqrt{-1})$.

14.6. Ejemplos.- Sea $f \in \mathbb{R}[x,y]$ irreducible en $\mathbb{R}[x,y]$, $F = \text{c.f.}\ (\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)})$, R_F^* el cierre algebraico de $\mathbb{R}$ en F y $\text{Riem}_{\mathbb{R}} F = Y(F)$.

A) Caso en que $R_F^* = \mathbb{C}$. Entonces, usando 14.12 $Y(F)$ es orientable y su borde es vacío. Además f es reducible en $\mathbb{C}[x,y]$ como producto de dos factores irreducibles. Llamando f_1 y f_2 a dichos factores y $F_i = \text{c.f.}\ (\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(f_i)})$ se tiene:

(1) $g(Y(F)) = g(F) = g(F \otimes \mathbb{C}) = g(F_i)$, $i=1,2$.

(2) $\dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{f.\mathbb{C}[x,y]} \simeq E(Y(F)_{\mathbb{C}}) \simeq F \times F$.

B) Caso en que F es ordenable. En virtud de 14.12, el borde de $Y(F)$ no es vacío, y si k es el número de componentes conexas de $\partial Y(F)$, entonces, por 14.10, todo modelo liso y completo de F tiene k componentes conexas.

Además $\chi(X(F)) = 1 - g(F)$, luego, usando un resultado de [2], $\chi(Y(F)_{\mathbb{C}}) = 2 - 2g(F)$. Así, el género topológico de $Y(F)_{\mathbb{C}}$ es

$g(F)$. Además, utilizando 14.15, $E(Y(F)_{\mathbb{C}}) \simeq F \otimes \mathbb{C}$.

C) <u>Caso en que F no es ordenable y $R_F^* = \mathbb{R}$</u>. Usando 14.12 sabemos que el borde de $Y(F)$ es vacío y que $Y(F)$ no es orientable. Además, $E(Y(F)_{\mathbb{C}}) \simeq F \otimes \mathbb{C}$.

14.17. <u>Ejemplos</u>. 1.- Sea $f \in \mathbb{R}[x,y]$ y $\{f = 0\}$ una curva algebraica <u>real</u> (esto es, $\frac{\mathbb{R}[x\ y]}{(f)}$ es ordenable), de género cero. En tal caso $F \simeq \mathbb{R}(X)$ y estamos en el caso B de 14.16. Como $g(F) = 0$, $\chi(Y(F)_{\mathbb{C}}) = 2$ y por tanto $Y(F)_{\mathbb{C}}$ es una esfera.

Como los ideales maximales de $\mathbb{R}[x]$ son de la forma $(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$ ó $((x-a)^2 + b^2)$, $a,b \in \mathbb{R}$, los puntos $a+b_i$ y $a-b_i$ de la esfera -entendida como compactificación de $\mathbb{C}$- son indistinguibles. Por ello $Y(F)$ es la compactificación de $\mathbb{C}^+ = \{a+b_i \in \mathbb{C} : b \geqslant 0\}$, que es el disco D.

Este mismo resultado lo podemos obtener sin más que apreciar que $Y(F)$ tiene borde no vacío y evidentemente conexo -la circunferencia es un modelo liso y completo de F- y utiñizando la igualdad: $\chi(Y(F)) = 1-g(F) = 1$. Por 14.2 $Y(F) = D$ ya que al ser $p(Y(F)) = 0$, $Y(F)$ es necesariamente orientable.

2.- Sea $f(x,y) = x^2+y^2$, $F = c.f.\ (\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)})$.

Así en $F, (\frac{x}{y})^2 = -1$ luego $R_F^* = \mathbb{C}$. Estamos pues en el caso A de 14.16.

Como $f = (x+iy)(x-iy)$ en $\mathbb{C}[x,y]$, es $g(Y(F)_{\mathbb{C}}) = $
$= g(c.f.\ \frac{\mathbb{C}[x,y]}{x+iy}) = 0$. Consecuentemente, $Y(F)_{\mathbb{C}}$ es la esfera.

Como $Y(F)$ no tiene borde y es orientable de género algebraico cero, también es una esfera.

3.- Sea $f(x,y) = x^2+y^2+1$. Como vimos en 14.13 si $F = \text{c.f.}\left(\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)}\right)$, F no es ordenable y $R_F^* = \mathbb{R}$.

Usando C de 14.16 deducimos que $Y(F)$ no tiene borde, no es orientable y su género algebraico es cero. Por (b) de 14.8 $\chi(Y(F)) = 1$, luego $Y(F)$ es un plano proyectivo.

4.- Sea $f \in \mathbb{R}[x,y]$ y $F = \text{c.f.}\left(\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)}\right)$ de género algebraico uno -esto es, $\{f = 0\}$ es una curva elíptica <u>no necesariamente real</u>. En cualquier caso, $\chi(Y(F)) = 0$ por 14.8. Utilizando 12.38 de [1] y nuestro 14.12 obtenemos:

(a) Si $R_F^* = \mathbb{C}$, entonces $Y(F)$ es una botella de Klein.

(b) Si $\partial Y(F)$ es conexo, $Y(F)$ es una cinta de Möebius.

(c) Si $\partial Y(F)$ no es conexo, entonces, por (1) de 14.11 tiene dos componentes conexas e $Y(F)$ es una corona circular.

§15. <u>El grupo de automorfismos de una curva algebraica real</u>

En esta sección estudiaremos el grupo de automorfismos del cuerpo de funciones algebraicas de una curva algebraica real en función de su género g. El caso $g = 0$ no merece atención. Para ello empleamos la técnica de los grupos cristalográficos no euclídeos.

15.1. <u>Teorema</u>.- *Sea* C *una curva algebraica real de género mayor o igual que dos. Entonces, el grupo de automorfismos de* $\mathbb{R}(C)$

es finito.

Demostración.- Llamemos $K = (X, [U])$ a la superficie de Klein $Riem_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(C))$ asociada a $\mathbb{R}(C)$. Como $\mathbb{R}(C)$ es ordenable, el borde de X no es vacío. En consecuencia, X se representa en la forma $X = \frac{D}{\Gamma}$ donde $D = \mathbb{C}^+$ y Γ es un grupo cristalográfico no euclídeo -para abreviar, Γ es un grupo N.E.C.- (véase Preston [36]). (Para la definición de grupo N.E.C. nos remitimos a Wilkie [42]).

Por tanto, $G = Aut(\mathbb{R}(C)) = Aut(E(K))$ es un grupo de automorfismos de $\frac{D}{\Gamma}$. Llamando H al grupo de isometrías del plano hiperbólico, incluyendo aquellas que invierten la orientación, se sabe, May [29], que $G \simeq \frac{N_H(\Gamma)}{\Gamma}$.

En virtud del teorema de Macbeth y Singerman [26], y puesto que $N_H(\Gamma)$ es un grupo N.E.C., deducimos la finitud de $\frac{N_H(\Gamma)}{\Gamma}$ y en consecuencia la de G.

15.2. Comentario.- La información acerca del grupo de automorfismos de $\mathbb{R}(C)$ cuando el género de C es mayor o igual que dos es mucho mayor que su finitud. Aunque no los usaremos en lo que sigue, destacaremos algunos resultados en esta dirección.

En [7] hemos probado, para curvas algebraicas reales de género dos, que $Aut(\mathbb{R}(C))$ es siempre no trivial, y que los únicos grupos que son subgrupos de $Aut(\mathbb{R}(C))$ son:

$$\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_4,\ D_2,\ \mathbb{Z}_6,\ D_3,\ D_4 \text{ y } D_6, \quad \text{donde}$$

D_n representa el grupo diedral de $2n$ elementos.

También probamos que existen curvan algebraicas reales de género dos cuyos grupos de automorfismos son D_2, D_4 y D_6.

Por otro lado, usando el teorema 2.4 de [6] para las curvas C construidas en 14.14 con $k = 1$, se observa que $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}(C))$ es cíclico o diedral.

Además, si $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ donde $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ son números primos, el género algebraico g de la curva algebraica real C de mínimo género y conexa, tal que $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}(C))$ es $\mathbb{Z}n$ ó Dn vale:

$$g = \begin{cases} n - \dfrac{n}{p_1} - p_1 + 1 & \text{si } a_1 = 1,\ a_2 = 0 \text{ y } K \text{ orientable} \\ p_1 - 1 & \text{si } n = p_1 \neq 2 \text{ y } K \text{ orientable} \\ 2 & \text{si } n = 2 \text{ y } K \text{ orientable} \\ n - \dfrac{n}{p_1} & \text{si } a_1 \neq 1 \text{ y } K \text{ orientable} \\ n - \dfrac{n}{p_1} + 1 & \text{si } K \text{ no es orientable.} \end{cases}$$

donde $K = \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}(C)$.

Este resultado se prueba utilizando (4.1) y (4.2) de [6] y las fórmulas (b.1) y (b.2) de 14.8.

Aunque en el teorema 15.1 estábamos interesados únicamente en la finitud del grupo de automorfismos de $\mathbb{R}(C)$, se desprende de [30] y aplicando 13.5 que para cada curva algebraica real de género g, el orden del grupo de automorfismos de $\mathbb{R}(C)$ está acotado superiormente por $12(g-1)$.

Por último, resaltemos que para curvas algebraicas reales de género mayor o igual que tres se conjetura que el conjunto formado por aquellas cuyo cuerpo de funciones algebraicas tiene por único automorfismo a la identidad es denso en el espacio de Teichmüller; es más, que su complementario es analítico. Para curvas algebraicas complejas este resultado se obtiene, utilizando técnicas de grupos fuschianos, a partir del teorema 2 de Greenberg [18].

Un análisis profundo del grupo de automorfismos del cuerpo de funciones de una curva elíptica real es el realizado por Alling en [1]. Expondremos en líneas generales dicho estudio, remitiéndonos a [1] para las demostraciones y sin pretender resumir toda la información que allí se obtiene, pues tan solo estamos interesados en probar la existencia de "suficientes" automorfismos.

15.3. <u>Definición</u>.- *Se llama <u>retículo de $\mathbb{C}$</u> a todo subgrupo discreto L de $(\mathbb{C},+)$ que sea $\mathbb{Z}$-módulo de rango dos.*

15.4. <u>Observaciones</u>.- Si L es un retículo de $\mathbb{C}$ y $B = \{w_1,w_2\}$ es una base de L, $w_1,w_2 \in \mathbb{C}$ es $L = w_1\mathbb{Z} \oplus w_2\mathbb{Z}$ y $\tau = \frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$ por ser L discreto. A τ se le llama <u>cociente de L</u>, no depende de la base escogida y $L = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$. Véase 6.20 de [1].

El siguiente objetivo consiste en dotar a $\mathbb{C}/L$ de estructura de superficie de Riemann compacta de género uno y probar que toda superficie de Riemann compacta de género 1 es analíticamente equivalente a $\mathbb{C}/L$ para cierto L. Esto se obtiene en 8.4 y 8.50 de [1]:

15.5. <u>Lema</u>.- *(a) Sea* L *un retículo de* $\mathbb{C}$*,* G *un grupo abeliano y* $0 \to L \to \mathbb{C} \xrightarrow{h} G \to 0$ *una sucesión exacta. Entonces* G *admite una estructura de superficie de Riemann compacta de género 1, de modo que* h *es homeomorfismo local.*

(b) Toda superficie de Riemann compacta de género 1 es analíticamente equivalente a $\mathbb{C}/L$ *para cierto retículo* L *de* $\mathbb{C}$*. Además* $L = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ *con* $\operatorname{im} \tau > 0$.

Tomando $G = \mathbb{C}/L$ *y* h *la proyección canónica se obtiene el resultado buscado.*

De modo análogo, se prueba en 12.11 de [1] la siguiente:

15.6. <u>Proposición</u>.- *Sea* $K = (X, [U])$ *una superficie de Klein compacta de género 1 de modo que* $R^*_{E(K)} = \mathbb{C}$*. Entonces, existe* $\tau \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{im} \tau > 0$ *de modo que* K *y* $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ *son dianalíticamente equivalentes.*

En virtud de la coequivalencia funtorial definida en 13.5 estudiaremos el grupo de automorfismos del cuerpo E(K) de funciones meromorfas sobre la superficie de Klein K a través del grupo de automorfismos de K (en la categoría (K)) y que vienen definidas, naturalmente, por:

15.7. <u>Definición</u>.- *Sea* $K = (X, [U])$ *una superficie de Klein. El* <u>*grupo de automorfismos de* K</u> *está constituido por los morfismos* $g : K \to K$ *tales que* $g : X \to X$ *es homeomorfismo dianalítico. Notamos dicho grupo por* Aut(K) *y llamaremos* $\mathrm{Aut}^+(K)$ *al subgrupo de los automorfismos de* K *que conser* *van la orientación.*

En 13.10 de [1] se pone de manifiesto que considerando en $\mathbb{C}$ la estructura que hace de $\mathbb{C}$ una superficie de Klein,

$$\mathrm{Aut}^+(\mathbb{C}) = \{f_{a,b} : a \in \mathbb{C}-\{0\},\ b \in \mathbb{C}\},$$

donde $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to az+b$. En particular tiene gran interés el subgrupo $\mathrm{Trans}\ \mathbb{C} = \{f_{1,b} = b \in \mathbb{C}\}$.

15.8. <u>Construcción</u>.- (Véase [1], 13.11).

Sea $K = (X, [U])$ una superficie de Klein compacta de género 1 y tal que $R^*_{E(K)} = \mathbb{C}$. En virtud de 15.6 y notando $L_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, existe $\tau \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{im}\,\tau > 0$ de modo que $X = \mathbb{C}/L\tau$.

Sea $G_\tau = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) : z-z' \in L_\tau \iff g(z) - g(z') \in L_\tau\}$ y $G_\tau^+ = G_\tau \cap \mathrm{Aut}^+(\mathbb{C})$. G_τ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ que contiene a $\mathrm{Trans}\ \mathbb{C}$.

Además, si $\pi : \mathbb{C} \to K = \mathbb{C}/L\tau$ es el epimorfismo canónico, existe $\pi^* : G_\tau \to \mathrm{Aut}(K) : g \mapsto g^*$ donde g^* es el homeomorfismo dianalítico que cierra el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ K \arrow[r, mapsto, "g^*"] & K \end{tikzcd}$$

. La existencia y unicidad de g^* son consecuencia de ser g constante sobre cada clase de $\mathbb{C}$ módulo L_τ.

Se verifica que π^* es sobreyectivo y

$\mathrm{Ker}\ \pi^* \cap G_\tau^* = \{f_{1,b} : b \in L_\tau\}$.

Tenemos así descrito el grupo de automorfismos de K en el caso $R^*_{E(K)} = \mathbb{C}$. Sin embargo, para curvas algebraicas reales con cuerpo de funciones ordenable necesitamos abordar el caso $R^*_{E(K)} = \mathbb{R}$, $\partial X \neq \emptyset$.

Esto queda resuelto en 13.15 de [1] mediante la siguiente:

15.9. <u>Construcción</u>.- Sea $K = (X, [\mathcal{U}])$ superficie de Klein compacta de género uno con $\partial X \neq \emptyset$.

Usando 1.6 de [2], existe (Y,ξ,P), donde $K' = (Y, [\mathcal{U}'])$ es superficie de Klein compacta de género uno con $R^*_{E(K')} = \mathbb{C}$, ξ es una involución antianalítica en Y, $p : Y \to Y/\xi$ es el epimorfismo canónico, y tal que X es dianalíticamente equivalente a Y/ξ.

Entonces $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}^+(Y) \cap \mathrm{Aut}_\xi(Y) = \mathrm{Aut}_\xi^+(Y)$ donde $\mathrm{Aut}_\xi(Y) = \{f \in \mathrm{Aut}(Y) : f\circ\xi = \xi\circ f\}$.

Además, eligiendo $\tau \in \mathbb{C}$ con parte imaginaria positiva y tal que $Y = Y_\tau$ se verifica que

$$\pi_*(\mathrm{Trans}\ \mathbb{R}) \subset \mathrm{Aut}_\xi^+(Y_\tau), \quad \text{donde,}$$

siguiendo la notación de 15.7,

$$\mathrm{Trans}\ \mathbb{R} = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}.$$

15.10. <u>Proposición</u>.- *Sea* E *un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre* $\mathbb{R}$, *ordenable y de género uno. Sea* C *un modelo liso y completo de* E *y* P, Q *dos puntos de* C.

Entonces existe un morfismo birracional $f : C \mapsto C$ *que envía* P *a* Q.

<u>Demostración</u>.- Consideremos $X = \mathrm{Riem}_R(E)$ y $K = (X, [U])$ la superficie de Klein de soporte X. Por (c) de 14.9 sabemos que $\partial X \neq \emptyset$ y por hipótesis K es de género 1.

Sea (Y,ξ,P) la construida en 15.9.

Al ser $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}^+_\xi(Y)$ y

$$\pi_*(\mathrm{Trans}\ \mathbb{R}) \subset \mathrm{Aut}^+_\xi\ (Y),$$

para cada par de puntos de ∂X, la imagen por π^* de la traslación asociada a su diferencia es un automorfismo de X que transforma uno en otro.

Ahora, al ser C y ∂X homeomorfos por 14.10 y puesto que existe una equivalencia funtorial entre los automorfismos de X y los morfismos birracionales de C según 13.5, existe $f : C \mapsto C$ morfismo birracional con $f(P) = Q$.

§16. <u>La propiedad de las órbitas densas en curvas algebraicas reales</u>.

Las técnicas desarrolladas en los epígrafes anteriores de este capítulo permiten obtener información sobre el espacio de órdenes de curvas algebraicas reales.

Con precisión, obtenemos una agradable caracterización geométrica de los cuerpos de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$

que poseen la D.O.P., mejorando los resultados obtenidos en el capí tulo anterior para más variables.

16.1. Teorema.- *Las únicas curvas algebraicas reales cuyo cuerpo de funciones algebraicas es D.O.P. son las racionales y las elípticas.*

Demostración.- Si un cuerpo F de funciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$ tiene género mayor o igual que dos, su grupo de automorfismos es finito en virtud de 15.1. Ahora de 10.2 se deduce que F no es D.O.P.

Por otra parte, el cuerpo de funciones algebraicas de una curva racional es $\mathbb{R}(t)$. Pero $\mathbb{R}(t)$ es D.O.P. por 4.4.

Tan solo queda estudiar el caso en que F sea de género 1.

En primer lugar elegimos C modelo liso y acotado (completo), de F de modo que todos los órdenes de F están centrados en puntos de C, usando 9.7.

Consideremos ahora un orden P en F y un abierto no vacío H de $X(F)$.

Así, existen $f_1+I(C),\dots,f_r+I(C) \in F$, f_j polinomios, tales que

$$\emptyset \neq H_1 = H(f_1 + I(C),\dots,f_r + I(C)) \subset H$$

Como $H_1 \neq \emptyset$, se sigue de 8.10 la existencia de $A \in C$ con $f_j(A) > 0$, $1 \leq j \leq r$. Puesto que los órdenes de F están centra dos en puntos de C, llamamos $B \in C$ al punto en el que está centrado P.

Usando 15.10 existe un morfismo birracional $f : C \leftrightarrow C$ tal que $f(A) = B$. Sea g el automorfismo de $F = \mathbb{R}(C)$ asociado a f. Veamos que $g^{-1}(P) \in H_1$.

En caso contrario, existiría j, $1 \leqslant j \leqslant r$ verificando que $f_j \notin g^{-1}(P)$. Entonces $g(f_j) \notin P$ y en particular, $g(f_j)(B) \leqslant 0$.

Pero $g(f_j(B)) = f_j(A)$ y $f_j(A) \leqslant 0$ es absurdo.

Así $g^{-1}(P) \in H$ y F es D.O.P.

16.2. <u>Comentario</u>.- Al no ser $\mathbb{R}(C)$ D.O.P. en general, no cabe plantearse cual es el mínimo número r de automorfismos de $\mathbb{R}(C)$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$, necesarios para que $X(\mathbb{R}(C)) = \sigma_1(H) \cup \ldots \cup \sigma_r(H)$, para cada abierto H de $X(\mathbb{R}(C))$. Por ello no podemos utilizar las técnicas elaboradas en el párrafo 4 para "medir" el "tamaño" de las curvas algebraicas reales y de sus subconjuntos semialgebraicos.

Sin embargo, utilizaremos las proyecciones ortogonales para calibrar el "tamaño" de las curvas algebraicas reales.

Para ello necesitamos con anterioridad el siguiente:

16.3. <u>Teorema</u> (Alling, [1]).- *Sea* F *un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre* $\mathbb{R}$ *y* g *el género de* F. *Entonces, si* $n = 2(g+1)$, *existe* $f \in \mathbb{R}[x]$ *de grado* n *ó* $n-1$ *tal que* $F \approx \mathbb{R}(V)$, *siendo* V *la variedad de ecuación* $y^2 - f(x) = 0$.

Ahora podemos establecer

16.4. Teorema.- *Sea* F *un cuerpo de funciones algebraicas sobre* $\mathbb{R}$ *en una variable. Entonces:*

(a) Existe un modelo plano V *de* E *tal que ninguna proyección lineal de* V *es densa.*

(b) Existe un modelo plano W *de* E *tal que alguna proyección lineal de* W *es densa.*

Demostración.- (a) Es suficiente utilizar el teorema de los modelos, 9.5 (a).

(b) Por el teorema anterior, existe $f \in \mathbb{R}[x]$ de modo que F c.f. $\left(\frac{\mathbb{R}[x,y]}{y^2-f(x)}\right)$. Como allí, notamos $n = 2(g+1)$, siendo g el género de F.

b.1. Si f es de grado $n-1$ impar, es suficiente considerar la proyección sobre $x = 0$.

b.2. Si f es de grado n y $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, proyéctese sobre $y = 0$.

b.3. Si no suceden ni b.1 ni b.2, elegimos $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < 0$. Ahora, para cada $y \in \mathbb{R}$ el polinomio $F_y(x) = f(x)-y^2$ es negativo en a, luego, al ser F_y de grado par, se anula en algún punto.

Así pues, de nuevo es suficiente considerar la proyección sobre $x = 0$.

16.5. Comentario.- Reescribimos el teorema anterior en lenguaje de extensiones de órdenes. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ el de (a). Sea $x \in \mathbb{R}(V)$ trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ponemos $g : \mathbb{R}(x) \hookrightarrow \mathbb{R}(V)$ y

$$g^* : X(\mathbb{R}(V)) \to X(\mathbb{R}(x)) : P \mapsto g^{-1}(P).$$

Ahora, usando 9.4 (2) se cumple que

$$\overline{\mathrm{im}\ g^{*\wedge}} = \overline{\bar{g}(V)} \qquad (1)$$

Por (a) de 16.4 $\bar{g}(V)$ no es denso, luego, $\mathrm{im}\ g^* \neq X(\mathbb{R}(x))$, esto es, no todo orden en $\mathbb{R}(x)$ se extiende a F.

Sin embargo, se deduce de 4.15 que existen dos automorfismos proyectivos h_1 y h_2 de $\mathbb{R}(x)$, tales que $h_1(\mathrm{im}\ g^*) \cup h_2(\mathrm{im}\ g^*) = X(\mathbb{R}(x))$. Usando de nuevo (1) concluimos que para cada proyección de V existen dos "copias proyectivas" de la misma cuya unión es densa en la recta sobre la que proyectemos.

En (b) se prueba que para una elección adecuada de V' y x, $\bar{g}(V')$ es denso, luego todo orden de $\mathbb{R}(x)$ se extiende a F.

§17. Secciones hiperplanas de variedades algebraicas

Dedicamos la última sección de esta memoria a presentar un procedimiento para clasificar las variedades algebraicas construidas sobre cuerpos realmente cerrados. Esta clasificación viene dada por el tamaño del conjunto de puntos centrales de la variedad. Dicho tamaño lo "medimos" a través del conjunto de hiperplanos que cortan a la variedad en un punto central.

A lo largo del epígrafe usaremos las siguientes:

7.1. Notaciones.- Sea R un cuerpo realmente cerrado, $V \subset R^n$ una variedad algebraica real de dimensión no nula y p el ideal de V.

Sean $X = (X_1,\ldots,X_r)$, $\Lambda = (\Lambda_o,\ldots,\Lambda_r)$ indeterminadas sobre R, $A = R|X,\Lambda|$ y $g = \Lambda_o + \Lambda_1 x_1 +\ldots+\Lambda n x_n \in A$.

Llamamos q al ideal $p.A + g.A$ y $G = V(q)$ a su variedad de ceros en R^{2n+1}.

Ahora, si $\pi : R^n \times R^{n+1} \to R^{n+1} : (X,\Lambda) \mapsto \Lambda$,

$$\pi(G) = \{\lambda \in R^{n+1} : \text{existe } x \in V \text{ con } g(x,\lambda) = 0\},$$

luego si notamos H_λ al hiperplano de ecuación

$\lambda_o + \lambda_1 x_1 +\ldots+ \lambda_n x_n = 0,$ son equivalentes:

(a): $\lambda \in \pi(G)$

(b): $H_\lambda \cap V \neq \emptyset$

Es obvio que $0_{R^{n+1}} \in \pi(G)$ y que para cada $r \in R-\{0\}$, $\lambda = (r,\underline{o}) \notin \pi(G)$.

17.2. Proposición.- *1.* $\pi(G)$ *es un cono de vértice* $0 \in R^{n+1}$.

2. Si G_c *es el conjunto de puntos dentrales de* G, *entonces*

$$\pi(G_c) = \{\lambda \in R^{n+1} : \textit{ existe } x \in V_c \textit{ con } g(x,\lambda) = 0\}$$

3. Si V *es compacto, entonces* $\pi(G)$ *y* $\pi(G_c)$ *son cerrados y* $\pi(G)$ *no es denso en* R^{n+1}.

4. $q \cap R[\Lambda] = 0$.

<u>Demostración</u>.- 1. Es obvio pues $0_{R^{n+1}} \in \pi(G)$ y para cada $\lambda \in R^{n+1}$, $r \in R - \{0\}$, los hiperplanos H_λ y $H_{r.\lambda}$ coinciden.

2. Véase [11].

3. $F : R^n \times R^{n+1} \to R : (x,\lambda) \mapsto g(x,\lambda)$ es obviamente continua, luego $F^{-1}(0)$ es cerrado. Como para cada $\lambda \notin \pi(G)$ $F^{-1}(0) \cap (V \times \{\lambda\}) = \emptyset$, para cada $x \in V$ y cada $\lambda \notin \pi(G)$ elegimos U^x y U_x^λ entornos de x y λ en R^n y R^{n+1} respectivamente, de modo que $U^x \times U_x^\lambda \cap F^{-1}(0) = \emptyset$.

Por la compacidad de V existen $x_1,\ldots,x_k \in V$ cumpliendo que $V \subset \bigcup_{j=1}^{k} U^{x_j}$ y así, sin más que tomar $U^\lambda = U_{x_1}^\lambda \cap \ldots \cap U_{x_k}^\lambda$, se obtiene $\pi(G) \cap U^\lambda = \emptyset$.

Para probar que $\pi(G_c)$ es cerrado es suficiente repetir el razonamiento anterior utilizando la compacidad de V_c (V_c es cerrado contenido en V) y 2.

Veamos que $\pi(G)$ no es denso en R^{n+1}.

Sea $r \in R^+$ tal que la bola B de centro el origen y radio r contiene a V.

Entonces, si $\lambda \in \pi(G)$, $H_\lambda \cap B \neq \emptyset$ luego $d(0,H_\lambda)^2 \leq r^2$ y por tanto

$$\lambda_o^2 - r^2\,(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2) \leq 0$$

Así el abierto

$$U = \{\lambda \in R^{n+1} : \lambda_o^2 - r^2(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2) > 0\} \quad \text{es}$$

no vacío, pues $(1,0,\dots,0) \in U$, y $U \cap \pi(G) = \emptyset$.

4. Si $h(\Lambda) \in q \cap R[\Lambda]$, para cada $x \in V$ sería $h(\Lambda) = = \ell_x(\Lambda).(\Lambda_o+x_1\Lambda_1 +\dots+ x_n\Lambda_n)$, luego cada $f_x(\Lambda) = \Lambda_o+x_1\Lambda_1 +\dots+ x_n\Lambda_n$, $x \in V$, seria un factor irreducible de $h(\Lambda)$. Como V es no finito, $h(\Lambda)$ es cero.

17.3. <u>Ejemplos</u>.- 1. La compacidad no se puede suprimir en (3) de 17.2.

Por ejemplo, si $V = \{y^3-2xy+1 = 0\}$, $(0,0,1) \notin \pi(G)$ y sin embargo para cada $r \in R^+$ $(-r,0,1) \in \pi(G)$ pues $(\frac{r^3+1}{2r}, r) \in V \cap$ $\cap \{y = r\}$.

Así $\pi(G)$ no es cerrado. Como $V = \text{Reg } V$, se sigue de 17.2 que $\pi(G) = \pi(G_c)$ luego tampoco $\pi(G_c)$ es cerrado.

2. Sin embargo, la compacidad no es condición necesaria en (3) de 17.2.

Por ejemplo, si $V = \{y - x^2 = 0\}$.

$\pi(G) : \{(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) \in R^3 : \lambda_1^2 - 4\lambda_o.\lambda_2 \geqslant 0\}$

que evidentemente es cerrado.

Como $V = V_c$ de nuevo $\pi(G_c) = \pi(G)$ y por tanto $\pi(G_c)$ también es cerrado. Sin embargo V no es compacto.

17.4. <u>Observación</u>.- Conservando las notaciones de 17.1, y puesto que $q \cap R[\Lambda] = \{0\}$, existe un homomorfismo no nulo de cuerpos

$$j : R(\Lambda) \hookrightarrow R(G)$$

Con las notaciones de 9.3 es $\bar{j} = \pi : R^{n+1} \times R^{n} \to R$ y por (2) de corolario 9.4 se obtiene:

$$\overline{\mathrm{im}\ j^{*\wedge}} = \overline{\pi(G_c)} \qquad (1)$$

Así el "tamaño" (véase 4.16) de im $j^{*\wedge}$ es el de $\overline{\pi(G_c)}$, y utilizaremos ésta para clasificar V.

17.5. <u>Definición</u>.- *Llamaremos <u>número hiperplano</u> de* V, *y lo notaremos* $n_H(V)$ *a* $D^{G_{n+1}(\mathbb{P})}(\mathrm{im}\ j^*, R(\ ))$ *definido en 4.6 y 4.7.*

17.6. <u>Proposición</u>.- *(a) Son equivalentes:*

(i) El conjunto de hiperplanos que cortan a V *en un punto central es denso.*

(ii) Todo orden de $R(\Lambda)$ *se extiende a* $R(G)$.

(iii) $n_H(V) = 1$.

(b) Si V *es compacto, no todo orden de* $R(\Lambda)$ *se extiende a* $R(G)$.

(c) $n_H(V) \leq n+2$.

<u>Demostración</u>.- (a): (i) $\Rightarrow$ (ii)

Por (i), $\overline{\pi(G_c)} = R^{n+1}$, luego por la fórmula (1) de 17.4 es $\overline{\mathrm{im}\ j^{*\wedge}} = R^{n+1}$.

Así, usando 4.9, es im $j^* = X(R(\Lambda))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i).

Como $n_H(V) = 1$, existe $f \in G_{n+1}(\mathbb{P})$, con $f(\text{im } j^*) = X(R(\Lambda))$. Como f es biyección también $\text{im } j^* = X(R(\Lambda))$, luego, por 4.11 es $\overline{\text{im } j^{*\wedge}} = R^{n+1}$ y por (1) de 17.4 se concluye.

(b) Es inmediato usando (a) y (3) de 17.2.

(c) Por 4.12.

Obtenemos una primera mejora de (c) de la observación anterior mediante:

17.7. Proposición.- *El número hiperplano de toda variedad algebraica real de dimensión positiva contenida en* R^n *es menor o igual que* $n+1$.

Demostración.- I. En primer lugar probaremos la existencia de $f \in R[\Lambda_o,\ldots,\Lambda_n]$ homogéneo y tal que

$$A = \{\lambda \in R^{n+1} : f(\lambda) > 0\} \subset \pi(G_c).$$

V_c es no vacío pues $\dim V \neq 0$. Así $\pi(G_c) \neq \emptyset$, luego $\overline{\text{im } j^{*\wedge}} \neq \emptyset$, es decir, $\text{im } j^{*\wedge} \neq \emptyset$. Como $\text{im } j^{*\wedge}$ es abierto, se deduce que $\dim \text{im } j^{*\wedge} = n+1$, y puesto que

$$\text{im } j^{*\wedge} \subset \overline{\pi(G_c)} \subset V(I(\pi(G_c)) \subset R^{n+1},$$

llegamos a que $\dim V(I(\pi(G_c))) = n+1$.

Así, usando un resultado de Recio [37], $\pi(G_c)$ tiene dimensión igual a $n+1$.

En consecuencia, $\pi(G_c)$ contiene una bola abierta y, por comodidad, supondremos que es la de centro $(0,0,\ldots,s)$, $s \neq 0$ y ra-

radio r. Llamamos B a dicha bola y $D = B \cap \{\Lambda_n = s\}$. Es obvio que $D \subset \pi(G_c)$ y al ser éste un cono de vértice el origen 0, la región encerrada por el cono C que proyecta el borde de D desde 0 está contenida en $\pi(G_c)$.

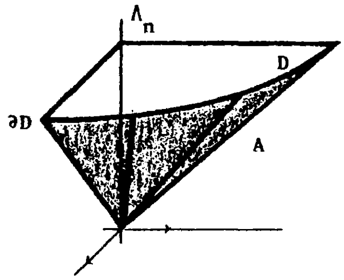


Figura 7

Pero el cono C tiene por ecuación

$$0 = s^2 \cdot (\Lambda_o^2 + \ldots + \Lambda_{n-1}^2) - r^2\, \Lambda_n^2, \qquad \text{luego}$$

$f(\Lambda_o, \ldots, \Lambda_n) = s^2(\Lambda_o^2 + \ldots + \Lambda_{n-1}^2) - r^2\, \Lambda_n^2$ es el polinomio buscado.

2. Para cada $0 \leqslant k \leqslant n-1$ consideremos

$$f_k : R(\Lambda) \to R(\Lambda)$$

$$\Lambda_n \to a \cdot \Lambda_k$$

$$\Lambda_k \to b \cdot \Lambda_n$$

$$\Lambda_j \to \Lambda_j, \qquad j \neq n, \quad j \neq k$$

donde $a = \frac{s(n+1)}{r}$, $b = a^{-1}$.

Como la matriz asociada a f_k es

$$M_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \ldots b \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots a \ldots 0 \end{pmatrix} , \quad \text{cuyo}$$

determinante es $\pm 1 \neq 0$, cada $f_k \in G_{n+1}(\mathbb{P})$.

Llamamos $f_n = 1_{R(\Lambda)}$.

Es evidente que cada

$$\overline{f}_k : \begin{array}{ccc} R^{n+1} & \longmapsto & R^{n+1} \\ (\Lambda_o,\ldots,\Lambda_n) & \longmapsto & (f_k(\Lambda_o),\ldots,f_k(\Lambda_n)) \end{array}$$

es homeomorfismo.

Probaremos que $f_o(\text{im } j^*) \cup \ldots \cup f_n(\text{imj}^*) = X(R(\Lambda))$. Para ello es suficiente, usando 4.9 y que $\overline{f}_k$ es homeomorfismo, con demostrar que $\overline{f}_o\overline{(\text{im } j^*)^\wedge} \cup \ldots \cup \overline{f}_n\overline{(\text{im } j^*)^\wedge} = R^{n+1}$.

Ahora bien, al ser $A \subset \pi(G_c)$ y $\overline{\pi(G_c)} = \overline{\text{im } j^{*\wedge}}$, es

$$\{0\} \cup \overline{f}_k(A) \subset \overline{f}_k\overline{(\text{im } j^*)^\wedge}.$$

Así, todo se reduce a ver que

$$R^{n+1} - \{0\} \subset \overline{f}_o(A) \cup \ldots \cup \overline{f}_n(A).$$

Pero, si esto no ocurriese, existiría $(\lambda_o,\ldots,\lambda_n) \in R^{n+1} - \{0\}$ tal que:

$$r^2\,\lambda_n^2 - s^2\,(\lambda_o^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2) \leqslant 0$$
$$a^2r^2\,\lambda_o^2 - s^2\,(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + b^2\,\lambda_n^2) \leqslant 0$$
$$a^2r^2\,\lambda_1^2 - s^2\,(\lambda_o^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + b^2\,\lambda_n^2) \leqslant 0$$
$$\vdots$$
$$a^2r^2\,\lambda_{n-1}^2 - s^2\,(\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + b^2\,\lambda_n^2) \leqslant 0$$

Sumando:

$$\lambda_n^2(r^2 - s^2.n.b^2) + \lambda_{n-1}^2(a^2r^2-n.s^2) - \ldots - \lambda_o^2(a^2r^2-s^2.n) \leqslant 0,$$

luego

$$\lambda_n^2(r^2 - \frac{n.s^2.r^2}{s^2(n+1)^2}) + (s^2(n+1)^2 - n\,s^2)(\lambda_o^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2) \leqslant 0$$

Entonces

$$\lambda_n^2\,\left| r^2(1 - \frac{n}{(n+1)^2})\right| + s^2|(n+1)^2 - n|\,(\lambda_o^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2) \leqslant 0$$

Esto es absurdo pues $(n+1)^2 > n$ y $(\lambda_o,\ldots,\lambda_n) \neq 0$.

Como comprobaremos más adelante, $n_H(V)$ no es invariante bajo isomorfismos birracionales; más aún, ni siquiera lo es bajo isomorfismos algebraicos ambiente. Sin embargo:

17.8. Proposición.- *El número hiperplano es invariante bajo cambios lineales de coordenadas.*

Demostración.- Sea $V \subset R^n$ variedad algebraica real y $g : R^n \to R^n$ un cambio lineal de coordenadas. Notemos $W = g(V)$ y probaremos que $n_H(V) = n_H(W)$.

Ponemos $g^{-1} = h = (h_1,\dots,h_n)$, con $h_i(y_1,\dots,y_n) =$
$= a_{i_o} + a_{i_1} y_1 +\dots+ a_{i_n} y_n$.

La matriz $A = (a_{i_j})$ $1 \leqslant i,j \leqslant n$ es regular al ser h un cambio lineal de coordenadas. Ahora, si $Y = (y_1,\dots,y_n)$ y llamamos $p' = I(W)\ R[Y,\Lambda] + (\Lambda_o+\Lambda_1 y_1 +\dots+ \Lambda_n y_n)\ R[Y,\Lambda]$, $G' = V(p')$, se tiene:

$$\lambda \in \pi(G_c) \Leftrightarrow \text{ existe } x \in V_c \text{ con } 0 = \lambda_o+\lambda_1 x_1 +\dots+ \lambda_n x_n$$

y como $W_c = g(V_c)$, esto equivale a: existe $y \in W_c$ con

$$(\lambda_o + \sum_{i=1}^{n} a_{i_o} \lambda_i) + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{i_j} \lambda_i) y_j = 0.$$

Como $f : R(\Lambda_o\dots\Lambda_n) \to R(\Lambda_o\dots\Lambda_n)$

$$\Lambda_o \mapsto \Lambda_o + \sum_{i=1}^{n} a_{i_o} \Lambda_i$$

$$\Lambda_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Lambda_i$$

tiene por matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{10} \ \dots\dots & a_{no} \\ 0 & 0 & a_{11} \ \dots\dots & a_{n1} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & a_{1n} \ \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que es regular por serlo A, se deduce que $f \in G_{n+1}(\mathbb{P})$.

Finalmente, llamando

$$\overline{f}: \begin{array}{ccc} R^{n+1} & \longmapsto & R^{n+1} \\ (\Lambda_o,\dots,\Lambda_n) & \longmapsto & (f(\Lambda_o),\dots,f(\Lambda_n)), \end{array}$$

es inmediato que $\overline{f}$ es homeomorfismo.

Por ello, si $n_H(V) = k$, existen $f_1,\dots,f_k \in G_{n+1}(\mathbb{P})$ tales que $R^{n+1} = \overline{f}_1\ \overline{(\text{im } j^*)^\wedge} \cup \dots \cup \overline{f}_K\ \overline{(\text{im } j^*)^\wedge}$, luego, al ser $\overline{\pi(G_c)} = \overline{f}^{-1}(\overline{\pi(G_c')})$, se sigue que $\bigcup_{j=1}^{k} \overline{f_j \circ f^{-1}\ (\overline{\pi(G_c')})} = R^{n+1}$ y de aquí concluimos que $\bigcup_{j=1}^{k} f_j \circ f^{-1}(\text{im } j_1^*) = (R(\Lambda))$, donde $j_1 : R(\Lambda) \hookrightarrow R(W)$.

En consecuencia $n_H(W) < k$ y por simetría $n_H(V) = n_H(W)$.

17.9. <u>Proposición</u>.- *El número hiperplano de una variedad algebraica real no depende del ambiente en el que está sumergida.*

<u>Demostración</u>.- Sea $V \subset R^n$ y suponemos que su dimensión de inmersión es d. En virtud de 17.8 se puede suponer:

$$V \subset \{X_{d+1} = \dots = X_n = 0\}$$

Llamamos $W = \{(X_1,\dots,X_d) \in R^d : (X_1,\dots,X_d, 0,\dots,0) \in V\}$

Debemos probar que $n_H(V) = n_H(W)$.

Notemos que $X' = (x_1,\dots,x_d)$, $\Lambda' = (\Lambda_o,\dots,\Lambda_d)$,

$q^1 = I(W)\ R[X',\Lambda'] + (\Lambda_o+\Lambda_1 X_1 + \dots + \Lambda_d X_d)\ R[X'\Lambda']$

$G' = V(q')$ y $j_1 : R(\Lambda') \hookrightarrow R(G')$.

Es obvio que $\lambda = (\lambda_o \dots \lambda_n) \in \pi(G_c)$ si y sólo si $(\lambda_o,\dots,\lambda_d) \in \pi(G_c')$.

Ahora, si $f_1,\dots,f_k \in G_{d+1}(\mathbb{P})$ y $\bigcup_{j=1}^{k} f_j(\text{im } j_1^*) = X(R(\Lambda))$ se concluye, llamando

$$g_j : R(\Lambda_o \dots \Lambda_n) \longmapsto R(\Lambda_o \dots \Lambda_n)$$

$$\Lambda_i \longmapsto f_j(\Lambda_i) \quad i \leqslant d$$

$$\Lambda_i \longmapsto f_j(\Lambda_i) \quad i > d$$

que $\bigcup_{j=1}^{k} g_j(\text{im } j_1^*) = X(R(\Lambda))$ y por tanto $n_H(V) \leqslant n_H(W)$.

Recíprocamente, si $g_1,\dots,g_k \in G_{n+1}(\mathbb{P})$ y $\bigcup_{i=1}^{k} g_i(\text{im } j_1^*) =$ $= X(R(\Lambda))$, las ecuaciones de cada g_i serán:

$$g_i(\ _j) = \frac{b^i_{jo} + \sum_{\ell=o}^{n} a^i_{j\ell}\,\Lambda_\ell}{c^i_{oo} + \sum_{\ell=o}^{n} d^i_{o\ell}\,\Lambda_\ell},$$

siendo $A_i = \begin{pmatrix} c^i_{oo} & d^i_{oo} & \dots & d^i_{on} \\ b^i_{oo} & a^i_{oo} & \dots & d^i_{on} \\ \vdots & & & \\ b^i_{no} & a^i_{no} & \dots & a^i_{nn} \end{pmatrix}$ regular.

Así, y quizás tras un nuevo cambio lineal de coordenadas se puede su poner que

$$B_i = \begin{pmatrix} c^i_{oo} & d^i_{oo} & \dots & d^i_{od} \\ b^i_{oo} & d^i_{oo} & \dots & a^i_{od} \\ \vdots & & & \\ b^i_{do} & a^i_{do} & \dots & a^i_{dd} \end{pmatrix} \text{ es regular,}$$

luego cada

$$f_i : R(\Lambda_o,\ldots,\Lambda_d) \longmapsto R(\Lambda_o \;\cdots\; \Lambda_d)$$

$$\Lambda_j \longmapsto \frac{b^i_{jo} + \sum_{\ell=o}^{d} a^i_{j\ell}\,\Lambda_\ell}{c^i_{oo} + \sum_{\ell=o}^{d} d^i_{o\ell}\,\Lambda_\ell}$$

es un elemento de $G_{d+1}(\mathbb{P})$ y

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i\ (\mathrm{im}\ j_1^*) = X(R(\Lambda')),$$ por lo

que $n_H(W) \leqslant n_H(V)$.

17.10. <u>Ejemplos</u>.- (a) El número hiperplano de una recta es 1. En virtud de 17.8 y 17.9 es suficiente probarlo para el eje $\{y = 0\} = V$ de R^2.

Así $\pi(G_c) = \{(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) \in R^3 : \lambda_1 \neq 0\}$ denso en R^3, luego $n_H(V) = 1$ por 17.5.

(b) El número hiperplano de una cónica irreducible es dos. Basta hacerlo para

(i) $V = \{y = x^2\}$

(ii) $V = \{xy-1 = 0\}$

(iii) $V = \{x^2+y^2 = 1\}$

(i) $\pi(G_c) = \{(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) \in R^3 : \lambda_1 - 4\lambda_o\cdot\lambda_2 \geqslant 0\}$

Así, como $\pi(G_c)$ no es denso en R^3, se sigue de 17.5 que $n_H(V) > 1$.

Pero si $f : R(\Lambda_o,\Lambda_1,\Lambda_2) \longmapsto R(\Lambda_o,\Lambda_1,\Lambda_2)$

$$\Lambda_o \longmapsto \Lambda_o$$

$$\Lambda_1 \longmapsto \Lambda_1$$

$$\Lambda_2 \longmapsto -\Lambda_2$$

y $\overline{f} : R^3 \to R^3 : (\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) \mapsto (\lambda_o,\lambda_1,-\lambda_2)$, es claro que $\pi(G_c) \cup \overline{f}(\pi(G_c))$ es denso en R^3, pues $\pi(G_c) \subset \{\lambda_o.\lambda_2 < 0\}$.

Así como $\overline{f}$ es homeomorfismo, usando 4.9 se obtiene que $\text{im } j^* \cup f(\text{im } j^*) = X(R(\Lambda))$, luego $n_H(V) = 2$.

(ii) Sencillos cálculos permiten probar que

$$\pi(G_c) = \{0\} \cup \{\lambda_2 = 0,\ \lambda_o.\lambda_1 \neq 0\} \cup$$

$$\cup\ [\{\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_o^2 - 4\lambda_1\ \lambda_2 \geq 0\} \cap (\{\lambda_1 \neq 0\} \cup \{\lambda_1 = 0,\ \lambda_o \neq 0\})]$$

Si $\pi(G_c)$ fuese denso, también lo sería $\{\lambda_o^2 - 4\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0\}$, y ésto es falso.

Así $n_H(V) > 1$.

Como $\pi(G_c) \subset \{\lambda_1.\lambda_2 < 0\}$, la f definida en (i) cumple que

$$\text{im } j^* \cup f(\text{im } j^*) = X(R(\Lambda)), \text{ luego } n_H(V) = 2.$$

(iii) Es fácil comprobar que

$$\pi(G_c) = \{\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \leq 0\}$$

Como V es acotado, $n_H(V) > 1$.

Por otra parte, si

$$\begin{aligned} f : R(\Lambda_o,\Lambda_1,\Lambda_2) &\longmapsto R(\Lambda_o,\Lambda_1,\Lambda_2) \\ \Lambda_o &\longmapsto \Lambda_1 \\ \Lambda_1 &\longmapsto \Lambda_o \\ \Lambda_2 &\longmapsto \Lambda_2 \end{aligned}$$

el mismo razonamiento seguido en (i) prueba que $\operatorname{im} j^* \cup f(\operatorname{im} j^*) = \chi(R(\Lambda))$. Así $n_H(V) = 2$.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que no toda la información geométrica de una variedad algebraica real queda recogida en su anillo.

17.11. <u>Proposición</u>.- *Existe un isomorfismo algebraico* $F : R^2 \to R^2$ *y una variedad algebraica* V *de* R^2 *de manera que si* $W = F(V)$, $n_H(V) \neq n_H(W)$.

<u>Demostración</u>.- Sea

$$\begin{aligned} F : R^2 &\longmapsto R^2 \\ (x,y) &\longmapsto \left(2x + \frac{y^2}{2},\ 2x + \frac{y^2}{2} + y\right) \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} G : R^2 &\longmapsto R^2 \\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{2u - (v-u)^2}{4},\ v-u\right), \end{aligned}$$

se comprueba que $F\circ G = G\circ F = 1_{R^2}$, luego ambos definen automorfismos algebraicos de $R[x,y]$.

Sea V la recta $X = Y$. Ya hemos visto que $n_H(V) = 1$.

Sin embargo, $W = F(V)$ es la cónica

$$(y-x)\,(4+y-x) - 2x = 0, \qquad \text{que}$$

mediante el cambio lineal de coordenadas $\begin{matrix} y-x = u \\ x = v \end{matrix}$ se transforma en la parábola $(u+2)^2 - 2(v+2) = 0$.

Así, por 17.10 y 17.8 es $n_H(W) = 2$.

Como cabe esperar a la vista de la proposición anterior, el número hiperplano no es invariante por desingularización:

17.12. Ejemplo.- Sea $V = \{y^2 - x^2(1+x) = 0\}$.

Sencillos cálculos permiten apreciar que

$\{\lambda_2 \neq 0\} \subset \pi(G_c)$, de donde se concluye la densidad de $\pi(G_c)$. Por tanto $n_H(V) = 1$.

Sin embargo, explotando el origen se obtiene la parábola $\{y^2 - (1+x) = 0\} = W$ y por 17.10 es $n_H(W) = 2$.

La cota obtenida en 17.7 se puede reducir de modo sensible:

17.13.- Teorema.- *El número hiperplano de toda variedad algebraica real es uno ó dos.*

Demostración.- Es claro que basta hacerlo para curvas.

Sea pues $C \subset R^n$ una curva algebraica real; situándonos alrededor de un punto regular de C, podemos asegurar la existencia de un entorno A de R y de funciones analíticas $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \mapsto R$, tales que si $f : A \mapsto R^n : t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, se verifica que $\operatorname{im} f \subset C_c$.

Por comodidad supondremos que $0 \in A$.

Escribimos $f_j(t) = \sum_{i=o}^{\infty} b_{ij}\, t^j$, $t \in A$ y para cada $\lambda = (\lambda_o,\ldots,\lambda_n) \in R^{n+1}$, se construye

$$F_\lambda(t) = \lambda_o + \sum_{i=o}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \lambda_j\right) t^i .$$

Si r_j es el radio de convergencia de cada f_j, se tiene que

$$r_j = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[m]{|bm_j|}}, \quad \text{luego} \quad \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[m]{\left|\sum_{j=1}^{n} bm_j\ \lambda_j\right|}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \overline{\lim}\ \sqrt[m]{|bm_j|\ |\lambda_j|}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}} .$$

Así, si $r = \min\{r_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$, podemos suponer $(-r,r) \subset A$ y $\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}} \geqslant \dfrac{r}{n}$, luego $F_\lambda : (-\frac{r}{n}, \frac{r}{n}) \subset A \to R$ es analítica en $(-\frac{r}{n}, \frac{r}{n}) = A'$. Como C no es un punto y cada f_j es analítica en $(-\frac{r}{2n}, \frac{r}{2n})$ no constante, existe $t_o \in (0, \frac{r}{2n})$ de modo que, llamando $c_j = f_j(t_o)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, los puntos $P = (b_{o1},\ldots,b_{on})$ y $Q = (c_1,\ldots,c_n)$ son distintos.

Pongamos $M = \{\lambda \in R^{n+1} : F_\lambda(0)\ .\ F_\lambda(t_o) < 0\}$.

Así, si $\lambda \in M$, existe $t \in (0,t_o) \subset A'$ tal que $F_\lambda(t) = 0$, por lo cual $\lambda_o + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ f_j(t) = 0$ y así $\lambda \in \pi(G_c)$. En consecuencia

$$M \subset \pi(G_c)$$

Ahora bien, si notamos por H_λ al hiperplano $\lambda_o+\lambda_1 x_1 +\ldots+ \lambda_n x_n = 0$, es obvio que $M = \{\lambda \in R^{n+1} : H_\lambda$ deja a P y Q en distinto "semiespacio"$\}$. Por ello, si $[P\ Q]$ es el segmento que une P con Q, se verifica que

$$M = \{\lambda \in R^{n+1} : H_\lambda \cap [P\ Q] \neq \emptyset\}.$$

Pero, por 17.8 se puede suponer que $P = (0,0,\dots,0)$ y $Q = (0,0,\dots$ $\dots,1)$, con lo cual

$$M = \{\lambda \in R^{n+1} : \text{existe } t \in (0,1) \text{ con } \lambda_o+\lambda_n \cdot t = 0\} =$$

$$= \{(\lambda_o+\lambda_n)\lambda_o < 0\} \cup \{\lambda_o = \lambda_n = 0\}.$$

Entonces, si $g : R(\Lambda_o \dots \Lambda_n) \longmapsto R(\Lambda_o \dots \Lambda_n)$

$$\Lambda_o \longmapsto 3\Lambda_o + \Lambda_n$$

$$\Lambda_n \longmapsto -5\Lambda_o - 2\Lambda_n$$

$$\Lambda_j \longmapsto \Lambda_j \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

y $\bar{g} : R^{n+1} \longmapsto R^{n+1}$

$$(\lambda_o \dots \lambda_n) \longmapsto (3\lambda_o+\lambda_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -5\lambda_o-2\lambda_n)$$

afirmamos que $M \cup \bar{g}(M) = R^{n+1}$.

Si no fuera así, existiría $\lambda \in R^{n+1}$ con $(\lambda_o,\lambda_n) \neq (0,0)$ y cumpliendo que:

$$\begin{cases} (\lambda_o + \lambda_n)\lambda_o \geqslant 0 \\ (3\lambda_o + \lambda_n)(2\lambda_o + \lambda_n) \leqslant 0. \end{cases}$$

Entonces $\begin{cases} \lambda_o^2 + \lambda_o\,\lambda_n \geqslant 0 \\ 6\lambda_o^2 + 5\lambda_o\,\lambda_n + \lambda_n^2 \leqslant 0, \end{cases}$ de donde $\lambda_o^2 + \lambda_n^2 \leqslant 0$, y esto es falso.

Ahora, como $M \subset \pi(G_c)$ y $\overline{\text{im } j^{*\wedge}} = \overline{\pi(G_c)}$ obtenemos:

$\overline{\text{im } j^{*\wedge}} \cup \bar{g}(\overline{\text{im } j^*})^{\wedge} = R^{n+1}$. Aplicando 4.9, $X(R(\Lambda)) = \text{im } j^* \cup g(\text{im } j^*)$.

17.14. Comentario.- El teorema anterior permite clasificar las variedades algebraicas reales de R^n en dos clases, según que su número hiperplano sea uno o dos.

Aunque en 17.6 se obtiene una caracterización algebráica en función de la extendibilidad de órdenes de cuándo dicho número es uno o dos, parece de interés conseguir una caracterización geométrica. De momento conocemos:

(a) Si V es acotado, $n_H(V)$ es dos.

(b) Si V es una cónica irreducible, $n_H(V) = 2$.

(c) Si V contiene una recta, $n_H(V) = 1$.

El número hiperplano, más que medir el "tamaño" de la variedad V, mide el de sus puntos centrales (que constituyen el "pedazo" grande de la variedad). Para apreciar el tamaño de V_c respecto de V, es razonable evaluar $\pi(G) - \pi(G_c)$. La situación es particularmente sencilla cuando V es una curva.

17.15. Proposición.- *Sea* V *una curva algebraica real de* R^n. *Entonces existe un subconjunto algebraico propio de* R^{n+1} *que contiene a* $\pi(G) - \pi(G_c)$. *En particular* $R^{n+1} - (\pi(G) - \pi(G_c))$ *es denso en* R^{n+1}.

Demostración.- Según se prueba en [14], $\dim G = n + \dim V$. Así en nuestro caso $\dim G = n+1$, luego $\dim (G-G_c) < n+1$, de donde $\dim \pi(G-G_c) < n+1$.

Sea W el mínimo conjunto algebraico que contiene a $\pi(G-G_c)$. Según prueba Recio en [37], $\dim W = \dim \pi(G-G_c) < n+1$.

Así $\pi(G) - \pi(G_c) \subset \pi(G-G_c) \subset W$ y W es un subconjunto algebraico propio de R^{n+1}.

La situación anterior no es exclusiva de las curvas, como queda de manifiesto en el siguiente:

17.16. Ejemplo.- Sea V el paraguas de Whitney, $V : \{x^2-zy^2 = 0\}$. Veremos que:

(a) $\pi(G) = R^4 - \{\lambda \in R^4 : \lambda_o \neq 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\}$.

(b) $\pi(G_c) = \{\lambda_o = \lambda_3 = 0\} \cup \{\lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0\} \cup \{\lambda_2 \neq 0\} \cup$
$\cup \{\lambda_3 \cdot \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0\} \cup \{\lambda_3 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_1 = 0,$
$\lambda_o \cdot \lambda_3 \leq 0\}$,

con lo cual $\pi(G) - \pi(G_c) \subset \{\lambda_2 = 0\}$.

(a) El contenido $\subset$ es evidente.

Por otra parte, si $\lambda_o = 0$, el hiperplano $H = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ y V se cortan en el origen.

Si $\lambda_3 \neq 0$, entonces $(0,0 - \frac{\lambda_o}{\lambda_3}) \in V \cap H_\lambda$, luego $\lambda \in \pi(G)$.

Si $\lambda_o \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ se verifica que

(1) $\left(-\left(\frac{\lambda_2 + \lambda_o}{\lambda_1}\right), 1, \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_o}{\lambda_1}\right)^2\right) \in V \cap H_\lambda$

Por último, si $\lambda_o \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, elegimos $r \in R$

tal que $\lambda_o + r\lambda_1 = s \neq 0$, y así: $(r, -\frac{s}{\lambda_2}, (\frac{r\lambda_2}{s})^2) \in H_\lambda \cap V$. (2)

(b) Es claro que $V_c = V - \{x = y = 0, \ z < 0\}$.

1. $(\lambda_3 = 0) \cap \pi(G_c) = (\lambda_3 = 0) \cap \pi(G)$.

Un contenido es evidente.

Para el otro, si $\lambda \in ((\lambda_3 = 0) \cap \pi(G)$ y $\lambda_o = 0$, se sigue que $\lambda \in (\lambda_3 = 0) \cap \pi(G_c)$ pues el origen está en $H_\lambda \cap V_c$.

Si $\lambda \in (\lambda_3 = 0) \cap \pi(G)$ y $\lambda_o \neq 0$, se deduce de (a) que

(i) $\lambda_o \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$
ó
(ii) $\lambda_o \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Para (i), usando (1), y como $(\frac{\lambda_2 + \lambda_o}{\lambda_1})^2 \geqslant 0$, deducimos que $\lambda \in (\lambda_3 = 0) \cap \pi(G_c)$.

Para (ii), usando (2) vemos que $\lambda \in (\lambda_3 = 0) \cap \pi(G_c)$.

2. $(\lambda_3 \neq 0) \cap \pi(G_c) = (\lambda_3 \neq 0) \cap [(\lambda_2 \neq 0) \cup \{(\lambda_2 = 0) \cap$

$\cap((\lambda_1 \neq 0) \cup (\lambda_1 = 0, \lambda_o \cdot \lambda_3 \leqslant 0))\}]$.

En efecto:

Sea $\lambda \in (\lambda_3 \neq 0) \cap \pi(G_c)$. Si $\lambda_2 \neq 0$, nada que probar. Suponemos por tanto que $\lambda_2 = 0$. Ahora, si $\lambda_1 \neq 0$, hemos concluido. Pero, si $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ y $\lambda \in \pi(G_c)$, se sigue que $H_\lambda : \lambda_o + \lambda_3 z = 0$ y $H_\lambda \cap V_c \neq \emptyset$.

Por tanto existe $z_o \geqslant 0$ de modo que $\lambda_o + \lambda_3 z_o = 0$ y así $\lambda_o^2 + \lambda_3 \cdot \lambda_o z_o = 0$.

Si $\lambda_o = 0$, se tiene que $\lambda_o \cdot \lambda_3 = 0$.

Si $\lambda_o \neq 0$, concluimos que $\lambda_3 \cdot \lambda_o = \frac{-z_o}{\lambda_o^2} \leq 0$.

Para probar el otro contenido, tomemos $\lambda \in R^4$ tal que $\lambda_3 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Entonces la ecuación $\lambda_2 T^3 + (\lambda_1+\lambda_o)T^2 + \lambda_3 = 0$ tiene alguna raíz a en R por ser de grado 3, y esta raíz es no nula pues $\lambda_3 \neq 0$.

Así $(1,a,\frac{1}{a^2}) \in V_c \cap H_\lambda$, luego $\lambda \in \pi(G_c)$. Si $\lambda \in R^4$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, puede suceder: (i) $\lambda_o = 0$ ó (ii) $\lambda_o \neq 0$.

Si (i), $(0,0,0) \in V_c \cap H_\lambda$ luego $\lambda \in \pi(G_c)$.

Si (ii), elegimos $b \in R$ de forma que $b^2 \lambda_1^2 - 4\lambda_o \cdot \lambda_3 > 0$ (tómese $b = 1$ si $\lambda_o \cdot \lambda_3 < 0$ y $b = \frac{4\sqrt{\lambda_o \cdot \lambda_3}}{\lambda_1}$ si $\lambda_o \cdot \lambda_3 > 0$).

Así la ecuación $\lambda_3 T^2 + \lambda_1 b^2 T + \lambda_o b^2 = 0$ tiene solución no nula y real c, y $(c, b, \frac{c^2}{b^2}) \in H_\lambda \cap V_c$, con lo cual $\lambda \in \pi(G_c)$.

Por último, si $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ y $\lambda_o \cdot \lambda_3 \leq 0$, es $(0, 0, -\frac{\lambda_o}{\lambda_3}) \in H_\lambda \cap \pi(G_c)$.

Sin embargo, ni siquiera la densidad de $R^{n+1} - (\pi(G) - \pi(G_c)$ se verifica en general.

17.17. <u>Ejemplo</u>.- Sea V el balón de Coste-Roy:

$$V = \{(1-z^2)x^2 - x^4 - y^4 = 0\}$$

Como V contiene a la recta $\{x = y = 0\}$, tenemos

$$\pi(G) \supset R^4 - \{\lambda_o \neq 0, \ \lambda_3 = 0\}.$$

Por otro lado, es obvio que $\operatorname{sing} V = \{x = y = 0\}$.

Además $\operatorname{Reg} V \subset \{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ |z| \leqslant 1\}$. En efecto:

Si $(x,y,z) \in \operatorname{Reg} V$, como $(1 - x^2 - x^2)x^2 = y^4$, para $y = 0$ no puede ser $x = 0$, y por lo tanto $x^2 + z^2 = 1$. En particular $|x| \leqslant 1$, $|y| = 0$, $|z| \leqslant 1$.

Para $y \neq 0$, es $1 - z^2 - x^2 \geqslant 0$ y así $x^2+z^2 \leqslant 1$. Por tanto $|x| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$ y $|y|^4 = |x|^2 \cdot |1-z^2-x^2| \leqslant |x|^2 \leqslant 1$, es decir, $|y| \leqslant 1$.

Por ello $\operatorname{Reg} V \subset \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3\}$.

Así, si $\lambda \in \pi(G_c)$ el hiperplano H_λ corta a $\{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3\}$. En consecuencia $d^2(0,H_\lambda) \leqslant 3$, esto es,

$$\frac{\lambda_o^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leqslant 3.$$

Por ello, $\pi(G_c) \subset \{\lambda_o^2 - 3\ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \leqslant 0\}$.

Finalmente,

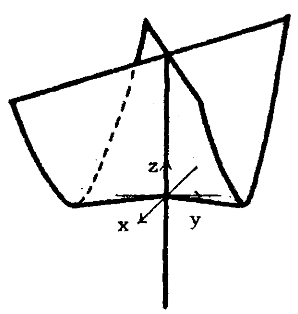
$$\pi(G) - \pi(G_c) \supset \{\lambda_3 \neq 0,\ \lambda_o^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) > 0\}$$

que es abierto no vacío de la topología fuerte de R^4.

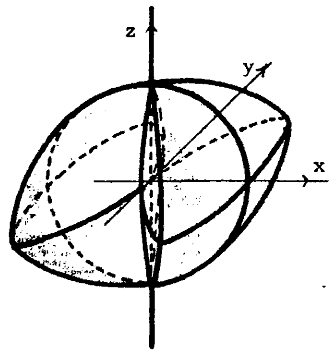
Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto el distinto tamaño que ocupa el conjunto de puntos centrales en diferentes variedades algebraicas.

Sin embargo la densidad, amén de topológico, parece un criterio algo grosero para distinguir el tamaño de $\pi(G) - \pi(G_c)$.

Desgraciadamente, no hemos podido definir adecuadamente el número hiperplano de un conjunto semialgebraico, con lo cual no disponemos de herramientas algebraicas para evaluar $\pi(G) - \pi(G_c)$ a través de secciones hiperplanas.



Paraguas de Whitney



Balón de Coste-Roy

Figura 8

REFERENCIAS

[1] Alling, N.L. Real elliptic curves. Math. Studies. Notes of Math. Vol. 54. North Holland. (1981).

[2] Alling, N.L. y Greenleaf, N. Foundations of the theory of Klein surfaces. Lect. Not. 219. Springer-Verlag. (1971).

[3] Artin, E. Uber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3, pag. 110-115. (1927).

[4] Baer, R. Abelian groups without elements of finite order; Duke Math. Journal 3. pag. 68-122 (1937).

[5] Brumfiel, G. Partially ordered rings and semi-algebraic geometry. Lect. Note Series of London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1979).

[6] Bujalance, E. Automorphisms groups of compact Klein surfaces with one boundary component. Aparecerá.

[7] Bujalance, E. y Gamboa, J.M. Automorphisms groups of algebraic curves of R^n of genus two. Aparecerá.

[8] Craven, T. The Boolean space of orderings of a field. Trans. Amer. Math. Soc. 209, pag. 225-235 (1975).

[9] Craven, T. Intersections of real closed fields. Canadian Journal of Math. pág. 431-440. (1978).

[10] Dubois, D.W. Note on Artin's solution of Hilbert's 17^{th} problem. Bull. Amer. Math. Soc. 73 pág. 540-541 (1967).

[11] Dubois, D.W. y Recio, T. Order extensions and real algebraic geometry. Contemporary Math. 8. (1982).

[12] Elman, R., Lam T.Y. y Prestel, A. On some Hasse principles over formally real fields. Math. Zeit. 134. pág. 291-301 (1973).

[13] Elman, R., Lam, T.Y. y Wadsworth A. Orderings under field extensions. J. reine angew. Math. 306. pág. 7-27 (1979).

[14] Espino, V. y Recio, T. Sobre la sección hiperplana genérica de una variedad algebraica real. Rev. Hispano Amer. de Mat. (1980).

[15] Franz, W. Untersuchungen Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Zeit. 33 pág. 275-293. (1931).

[16] Fuchs, L. Abelian groups. Akademiai Kiado, Budapest. Int. Serie of monographies in Pure and applied Math. Pergamon Press (1960).

[17] Gilmer, R. Extensions of an order to a simple transcendental extension. Contemporary Math. 8 (1982).

[18] Greenberg, L. Maximal Fuchsian groups. Bull. Amer. Math. Soc. 4. pág. 569-573 (1963).

[19] Griffin, M. Galois theory and ordered fields. Queen's Univ. Preprint; Kingston, Ontario (1972)

[20] Harrison, D. Finite and infinite primes for rings and fields Mem. Amer. Math. Soc. n° 68, (1968).

[21] Knebusch, M.; Rosenberg, A. y Ware, R. Signatures on semilocal rings. Journal of Alg. 26, pág. 208-250 (1973).

[22] Lam, T.Y. The theory of ordered fields. Proc. of the Algebra and ring theory conference. Univ. of Oklahoma (1980).

[23] Landau, E. Foundations of Analysis. Chelsea. Publ. Comp. (1960).

[24] Lang, S. Algebra. Addison-Wesley. (1965).

[25] Lang, S. Introduction to algebraic geometry. Interscience, New York. (1958).

[26] Macbeath, D.M. y Singerman, D. Space of subgroups and Teichmüller space. Proc. of the London Math. Soc. 21. pág. 211-256 (1975).

[27] Massazza, C. Sugli ordinamenti di un campo ordinato estesione puramente trascendente di un campo ordianto. Rend. Mat. 6, pág. 202-218. (1968).

[28] Massey, W. Algebraic topology: an introduction. Harcourt, Brace and World, Inc. (1967).

[29] May, C.L. Large automorphisms groups of compact Klein surfaces with boundary - I. Galsgow Math. J. 18, pág. 1-10. (1977).

[30] May, C.L. Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein syrfaces. Houston J. of Math. 3. pág. 395-405 (1977).

[31] McKenna, K. New facts about Hilbert's 17^{th} problem. Lect. Not. in Math. 498. Springer-Verlag. pág. 220-230. (1975).

[32] Motzkin, T.S. "The real solution set of a system of algebraic inequalities". Inequalities II. Acad. Press (1970).

[33] Prestel, A. Lectures on Formally real fields. IMPA. Lect. Notes 22. Río de Janeiro (1975).

[34] Prestel, A. Pseudo real closed fields. Set Theory and Model Theory. Springer Lect. Noe. Nr. (1981).

[35] Prestel, A. y Ziegler, M. Erblich euklidische Körper. J. reine angew. Math. 274/275. pág. 196-205. (1975).

[36] Preston, R. Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces. Ph. D. Thesis. Univ. of Texas. (1975).

[37] Recio, T. Teoría de la dimensión para conjuntos semialgebraicos. Sem. Geometría algebraica real. 1979-80. Univ. Complutense. Madrid.

[38] Serre, J.P. Extensions de corps ordonnés. Acad. des Sciences. pág. 576-577 (1949).

[39] Shafarevich, I.R. Basic Algebraic Geometry. Grundlehren 213, Springer-Verlag. (1974).

[40] Stengle, G. A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann. 207, pág. 87-97 (1974).

[41] Viswanathan, T.M. Ordered fields and sign changing polynomials. J. reine angew Math. 296. pág. 1-9 (1977).

[42] Wilkie, H.C. On non-Euclidean crystallographic groups.Math. Zeit. 91. pág. 87-102. (1966).