

Viendo lo invisible

por

Ana Carpio

RESUMEN. Los problemas de scattering inverso se plantean siempre que se quiere conocer la estructura de un medio emitiendo ondas que interactúan con él y midiendo la onda dispersada resultante. Esta situación es frecuente en medicina, geofísica, control de seguridad de estructuras o calidad de materiales, y otros múltiples contextos. Formulando estos problemas como problemas de optimización con restricciones en los que se busca minimizar el error en las medidas, se pueden implementar estrategias de descenso para aproximar la solución, es decir, la estructura del medio. Para ello es preciso ser capaz de derivar los funcionales de error, sujetos a restricciones en forma de ecuaciones en derivadas parciales, respecto a regiones del espacio y a funciones coeficiente. Introducimos las nociones adecuadas de derivada y esbozamos cómo implementar estrategias de descenso que combinan derivadas topológicas y métodos de gradiente en un problema de microscopía holográfica, técnica en desarrollo actualmente para la observación no invasiva de muestras biológicas. Son ejemplos del papel destacado de las matemáticas en todo tipo de aplicaciones, incluidas las industriales.¹

En la vida diaria nos encontramos con muchas situaciones aparentemente distintas, que, sin embargo, admiten una descripción matemática común. Un paciente llega a un hospital tras una caída, ¿cómo saber si tiene heridas internas? Se produce un terremoto, ¿cómo saber si la estructura de un puente, un edificio o una central nuclear está dañada? Buscamos agua o recursos minerales, ¿cómo saber si estamos perforando en el sitio adecuado? En todos estos casos necesitamos extraer información sobre la estructura interna de un medio a partir de observaciones indirectas externas.

La tecnología nos ha ido proporcionando avances utilizados actualmente con diferentes fines: resonancia magnética, tomografía, ecografía, ultrasonidos, radar, imagen sísmica, etc. [1, 2, 21, 24]. El principio de base en todos ellos es el mismo: se emite una onda que interactúa con el medio en estudio, tras lo cual llega a una red de detectores en los que se mide. Conociendo los datos medidos y las ondas emitidas, se trata de reconstruir la geometría interna y/o las propiedades del medio (véase la figura 1). Ésta es precisamente la estructura matemática de un problema de scattering inverso.

¹Del 15 al 19 de julio de 2019 se celebrará en Valencia el *8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, ICIAM2019. LA GACETA quiere contribuir, con la publicación de este artículo, a la difusión del evento.

Este tipo de problemas está mal puesto [12, 13]. Pueden no tener solución y, cuando la tienen, puede no ser única, o no depender de forma continua de los datos. Esto significa que pequeños errores pueden conducir a una solución completamente diferente de la buscada. Se necesitan técnicas cada vez mejores para tratar situaciones clásicas con resolución creciente, así como nuevas ideas para enfrentar nuevos problemas de detección de objetos y reconstrucción de imágenes.

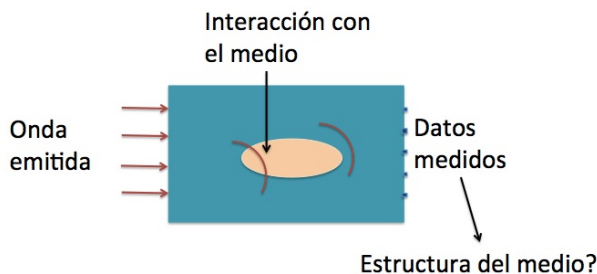


Figura 1: Esquema de un problema de scattering inverso.

La combinación de reformulaciones, variaciones y estrategias de optimización constituye una alternativa efectiva para abordar numerosos problemas de scattering inverso. Algunos ejemplos con aplicaciones en acústica, tomografía y fototerapia en situaciones bidimensionales pueden verse en los trabajos [6] al [10] y sus referencias. Recientemente, hemos adaptado estas técnicas a contextos de microscopía holográfica en tres dimensiones [4, 5]. El desarrollo de la holografía digital está fuertemente ligado a la introducción de nuevos algoritmos matemáticos. Vamos a usar un ejemplo de holografía como guía para ilustrar estas técnicas de reconstrucción.

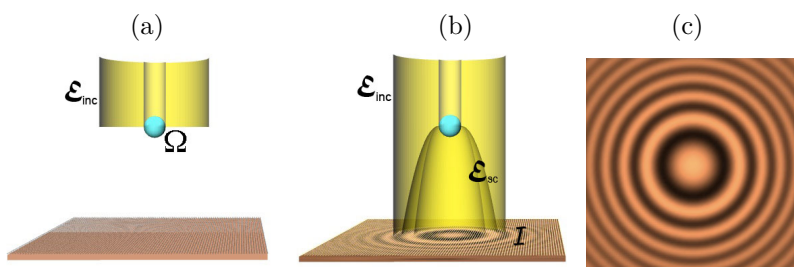


Figura 2: Representación esquemática de la formación de un holograma. Un haz de luz \mathcal{E}_{inc} alcanza el objeto Ω (a), se dispersa produciendo el haz \mathcal{E}_{sc} (b), y llega a una pantalla al mismo tiempo que la parte del haz de luz no dispersada. El patrón de interferencia resultante $\mathcal{I} = |\mathcal{E}_{inc} + \mathcal{E}_{sc}|^2$ se mide en una red de detectores, formando el holograma (c). Decodificando el holograma \mathcal{I} , deberíamos recuperar el objeto tridimensional original.

La figura 2 ilustra cómo se forman los hologramas: un laser de luz monocromática incide sobre un objeto y, tras dispersarse, alcanza una pantalla, donde se

mide al mismo tiempo que porciones no perturbadas del haz de luz. El patrón de interferencia que resulta constituye el holograma. Se puede decodificar un holograma por procedimientos ópticos, dando lugar a reconstrucciones tridimensionales de los objetos originales (como las que se ven en ocasiones en películas o en tiendas). Para decodificarlos numéricamente se precisan algoritmos adecuados [20]. La holografía digital se basa en la reconstrucción numérica de hologramas. Actualmente, las técnicas holográficas están cobrando relevancia en el diseño de microscopios para el análisis de muestras biológicas y materia blanda. La falta de contraste en los tejidos, por ejemplo, fuerza el uso de tintes o marcadores fluorescentes, que pueden dañar las muestras. La holografía proporciona una alternativa no invasiva para la visualización de la estructura de células en tres dimensiones a alta velocidad [25].

El artículo está organizado como sigue. La sección 1 presenta una formulación variacional del problema de scattering inverso. Replanteamos el problema de identificar objetos, así como sus propiedades materiales, en términos de encontrar formas y parámetros que minimicen funcionales de error adecuados. Los métodos basados en derivadas topológicas para optimizar funcionales de forma que permiten reconstruir objetos a partir de medidas de campos de onda dispersados por ellos se introducen en la sección 2. Podemos predecir los parámetros de los materiales que los constituyen mediante técnicas de tipo gradiente. En la sección 3 combinamos ambas técnicas para predecir las formas de los objetos así como el material que los forma. La sección 4 analiza cómo ha de variar la interpretación de los campos topológicos para conseguir reconstruir los objetos a medida que la longitud de la onda de luz empleada disminuye en relación con el tamaño del objeto. Finalmente, en la sección 5 se comentan cuestiones abiertas y posibles desarrollos futuros.

1. FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE SCATTERING INVERSO

La representación intuitiva de los problemas de scattering inverso esbozada en la figura 1 admite una formulación matemática precisa una vez fijado el tipo de onda con la que se trabaja. La naturaleza de la onda a emplear (acústica, elástica, electromagnética, térmica, etc.) se elige para aumentar el contraste entre las propiedades de los objetos y el medio que los contiene. Las ecuaciones que gobiernan la evolución de estas ondas y su interacción con el entorno serán, según su naturaleza, ecuaciones de ondas acústicas, de elasticidad, de electromagnetismo o del calor.

Bajo ciertas hipótesis, muchos problemas de ondas vectoriales en el espacio se pueden reducir al estudio de ecuaciones de ondas escalares. Por ejemplo, si suponemos que la onda incidente está polarizada, se puede reducir el estudio del campo eléctrico vectorial \mathcal{E} al estudio de la componente polarizada \mathcal{E} . Si asumimos además una estructura armónica en el tiempo para la onda incidente, es decir, $\mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = e^{-i2\pi\nu t} E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$, entonces el campo de onda generado por ella es también armónico en el tiempo: $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = e^{-i2\pi\nu t} E(\mathbf{x})$. Su amplitud $E(\mathbf{x})$ es solución de un problema de contorno para ecuaciones de Helmholtz con condiciones de transmisión

en la interfaz entre los objetos y el medio circundante [12, 13]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta E + k_e^2 E = 0, & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \Delta E + k_i^2 E = 0, & \text{en } \Omega, \\ (E)^- = (E)^+, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \beta(\partial_{\mathbf{n}}E)^- = (\partial_{\mathbf{n}}E)^+, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \lim_{r:=|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} r(\partial_r(E - E_{\text{inc}}) - ik_e(E - E_{\text{inc}})) = 0, & \end{array} \right. \quad (1)$$

donde Ω es el conjunto de objetos inmersos en el medio, k_e el número de onda adimensionalizado que caracteriza el medio externo, k_i el número de onda adimensionalizado que caracteriza los objetos y $\partial_{\mathbf{n}}$ designa las derivadas normales, eligiendo como dirección positiva del vector normal \mathbf{n} la que apunta hacia el exterior de Ω . Los superíndices «+» y «-» en las condiciones de transmisión sobre la frontera $\partial\Omega$ denotan límites desde el interior y el exterior de Ω , respectivamente.

En un contexto de holografía, E es la componente polarizada del campo vectorial eléctrico y ν es la frecuencia de la luz monocromática empleada, característica del color elegido. La amplitud del haz de luz incidente, $E_{\text{inc}} = e^{ik_e z}$, es una onda plana en la dirección z que apunta hacia la pantalla donde se graba el holograma. Los números de onda adimensionales son $k_e = \frac{2\pi\nu}{c_e}L$, $k_i = \frac{2\pi\nu}{c_i}L$, donde c_e, c_i representan las velocidades de onda en el medio exterior y el interior de los objetos, respectivamente, y L es una longitud de referencia, que puede ser el diámetro de un objeto representativo. El parámetro β , que está próximo a 1, es la razón entre la permeabilidad magnética de la biopartícula en observación y la permeabilidad en el espacio libre.

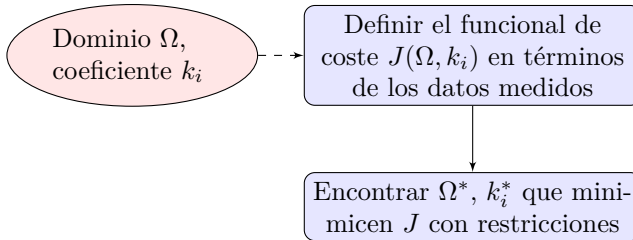


Figura 3: Regularización variacional de un problema inverso.

Dados los objetos Ω , los números de onda k_e, k_i y la amplitud del campo incidente E_{inc} , el sistema (1) define el *problema directo* para la amplitud del campo de onda total. El *problema inverso* consiste en encontrar Ω y k_i tales que la solución E del problema directo correspondiente coincide con los datos medidos E_{med} en un conjunto de receptores \mathbf{x}_j , $j = 1, \dots, N$. En realidad, no necesitamos conocer con total exactitud estos objetos y parámetros. A efectos prácticos, bastaría con obtener una aproximación para la cual la diferencia entre la solución E del problema directo asociado y los datos medidos en los receptores E_{med} es suficientemente pequeña.

Esto sugiere introducir el funcional de error

$$J(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, k_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |E(\mathbf{x}_j) - E_{\text{med},j}|^2, \quad (2)$$

que permite reformular el problema inverso como un *problema de optimización con restricciones* (véase figura 3): encontrar dominios Ω^* y funciones coeficiente k_i^* que minimicen el funcional de error $J(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, k_i)$ definido por (2) cuando E es la solución del problema directo (1) correspondiente a Ω y k_i . Las regiones Ω y las funciones k_i son las variables de diseño. El problema de contorno para E actúa como restricción. Obsérvese que los objetos y parámetros verdaderos para los que se miden los datos son un mínimo global de (2) en el que el funcional se anula.

2. MÉTODOS DE DERIVADAS TOPOLÓGICAS PARA RECONSTRUCCIÓN DE FORMAS

Reformular el problema inverso como un problema de optimización tiene la ventaja de permitir la aproximación de soluciones mediante estrategias de descenso. Cuando buscamos los mínimos de una función $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, la dirección de descenso más rápida viene dada por $-\nabla F(\mathbf{x})$. Dada una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, se espera que la sucesión

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \delta_n \nabla F(\mathbf{x}^{(n)}), \quad \delta_n > 0,$$

decrezca a un mínimo local. Se puede implementar una estrategia similar para funcionales más complejos. En ambos casos, se plantea el problema de que converja a un mínimo local muy distinto del mínimo global buscado. La elección de una buena aproximación inicial es clave para evitarlo.

Nuestro problema de optimización involucra dominios y parámetros. Vamos a desacoplar las dificultades considerando primero casos en los que los parámetros son conocidos y sólo es preciso determinar Ω . Deseamos optimizar el *funcional de forma* $J(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ definido por (2) cuando k_i es conocido. Para implementar una técnica de descenso, necesitamos recurrir a algún tipo de derivada con respecto al dominio Ω [17, 23]. La idea de derivada topológica es particularmente adecuada para nuestros fines.

Consideremos un funcional de forma $J(\mathcal{R})$ definido en una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$. Su *derivada topológica* en un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$, que denotaremos por $D_T(\mathbf{x}, \mathcal{R})$, mide su variación cuando un objeto infinitesimal se coloca en \mathbf{x} [23]. Cuando este objeto es una bola de radio ε centrada en \mathbf{x} se tiene el desarrollo

$$J(\mathcal{R} \setminus \overline{B_\varepsilon(\mathbf{x})}) = J(\mathcal{R}) + \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 D_T(\mathbf{x}, \mathcal{R}) + o(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Si $D_T(\mathbf{x}, \mathcal{R}) < 0$, entonces $J(\mathcal{R} \setminus \overline{B_\varepsilon(\mathbf{x})}) < J(\mathcal{R})$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Colocando objetos Ω en las regiones donde la derivada topológica toma valores negativos grandes, se espera que el funcional de coste disminuya [17]: $J(\mathcal{R} \setminus \overline{\Omega}) < J(\mathcal{R})$. De esta

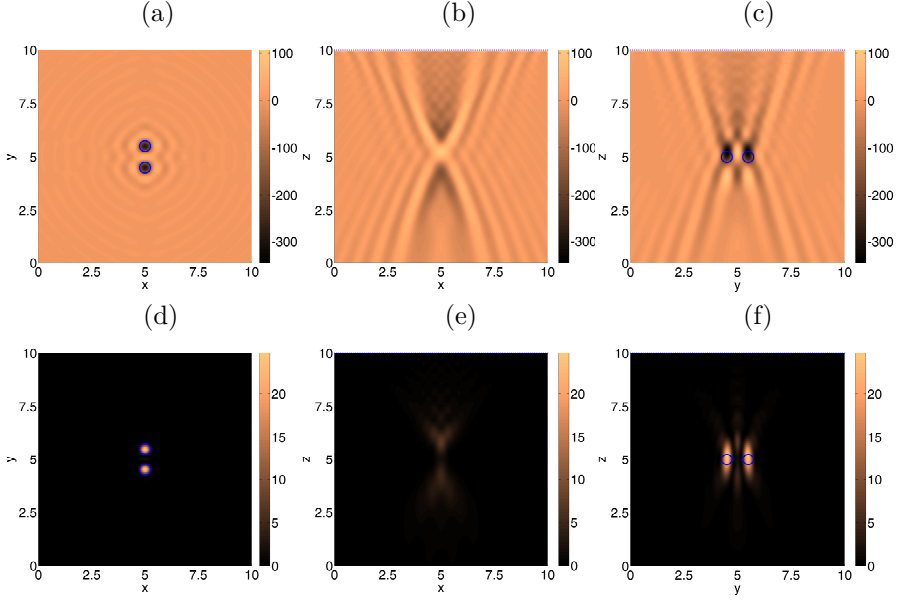


Figura 4: Cortes (a) $z = 5$, (b) $y = 5$ y (c) $x = 5$ de la derivada topológica cuando $k_e = 12.56$ y $k_i = 15.12$ (luz roja). Los objetos originales son dos esferas de diámetro 0.5 (500 nm), separadas una distancia 0.5 en el plano $z = 5$ a lo largo del eje y . Las correspondientes energías topológicas se muestran en (d)–(f). En (a), (c), (d) y (f) se han superpuesto los contornos de los objetos originales.

forma, podemos obtener una predicción inicial del número, ubicación y tamaño de los objetos, como se muestra en la figura 4.

Evaluar derivadas topológicas usando la definición es demasiado costoso. En su lugar, se recurre a expresiones explícitas en términos de campos directos y adjuntos obtenidas por métodos asintóticos [7, 18]. Para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$,

$$D_T(\mathbf{x}, \mathcal{R}) = \text{Re} \left[3 \frac{1 - \beta}{2 + \beta} \nabla E(\mathbf{x}) \cdot \nabla \bar{P}(\mathbf{x}) + (\beta k_i^2 - k_e^2) E(\mathbf{x}) \bar{P}(\mathbf{x}) \right], \quad (4)$$

donde E y P son campos directos y adjuntos adecuados. Si $\mathcal{R} = \mathbb{R}^3$, entonces $E = E_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{ik_e z}$ y $\bar{P}(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^N \frac{e^{ik_e |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} (\overline{E_{\text{med},j} - E(\mathbf{x}_j)})$, que satisfacen

$$\begin{cases} \Delta E + k_e^2 E = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r(E - E_{\text{inc}}) - ik_e(E - E_{\text{inc}})) = 0, \\ \Delta P + k_e^2 P = \sum_{j=1}^N (E_{\text{med},j} - E) \delta_{\mathbf{x}_j} & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r P + ik_e P) = 0, \end{cases}$$

siendo $\delta_{\mathbf{x}_j}$ distribuciones delta de Dirac con soporte en los detectores \mathbf{x}_j . Los datos medidos afectan al resultado a través de los campos adjuntos, mientras que la onda incidente influye en el campo directo, y, a través de él, en el adjunto.

La energía topológica es un campo escalar asociado definido como

$$E_T(\mathbf{x}, \mathcal{R}) = |E(\mathbf{x})|^2 |P(\mathbf{x})|^2,$$

donde E y P son campos directos y adjuntos [14]. A medida que el número de onda crece, puede ser una alternativa útil a la derivada topológica debido a su habilidad para cancelar oscilaciones y seleccionar los picos.

La figura 4 ilustra la estructura de los campos topológicos correspondientes a dos bolas de diámetro 0.5 separadas una distancia 0.5 y localizadas en el centro de una caja de lado 10 ($10 \mu\text{m} = 10 \times 10^{-6} \text{m}$). Se emite un haz de luz roja desde $z = 0$. El holograma se registra, tras la interacción del haz con el objeto, en una red de detectores que cubre la pantalla $z = 10$. A partir del holograma se puede construir una aproximación del campo eléctrico total en los detectores, que permite evaluar las energías y derivadas topológicas [5]. Se aprecia claramente la presencia de dos objetos en la posición y a la distancia adecuada. Las secciones xy sugieren la forma y el diámetro correctos. Sin embargo, las secciones zy muestran una elongación espuria de los objetos a lo largo de la dirección de incidencia de la luz, hacia la pantalla.

Podemos definir una aproximación inicial Ω_0 de los objetos seleccionando picos de la energía topológica:

$$\Omega_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid E_T(\mathbf{x}, \mathbb{R}^3) \geq C_0\}, \quad C_0 > 0. \tag{5}$$

Alternativamente, podemos ubicarlos en depresiones de la derivada topológica:

$$\Omega_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid D_T(\mathbf{x}, \mathbb{R}^3) \leq -C_0\}.$$

La constante C_0 se elige para garantizar el decrecimiento del funcional de coste al crear objetos: $J(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0) < J(\mathbb{R}^3)$.

Para mejorar la predicción inicial de los objetos podemos utilizar esquemas iterativos basados en derivadas topológicas. La idea consiste en actualizar los campos topológicos para tomar en cuenta la presencia de las sucesivas aproximaciones del objeto [7, 8]. Se espera que esta técnica mejore la reconstrucción cuando el tamaño de los objetos cae por debajo de un umbral crítico que depende de la geometría (distancia a la pantalla, tamaño de la región cubierta por detectores. . .) [4]. La figura 5 muestra cómo la predicción inicial del objeto, elongada a lo largo de la dirección de incidencia hacia la pantalla, pierde ese efecto y recupera su orientación original. Iteraciones posteriores afinan la forma aperada.

En cada paso, se construye un nuevo objeto Ω_{n+1} a partir del anterior Ω_n definiendo

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} := & \{\mathbf{x} \in \Omega_n \mid D_T(\mathbf{x}, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_n) < c_{n+1}\} \\ & \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_n \mid D_T(\mathbf{x}, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_n) < -C_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Es decir, añadimos puntos donde la derivada topológica toma valores negativos grandes y eliminamos puntos donde la derivada topológica toma valores positivos grandes. Un desarrollo similar al presentado en la fórmula (3) sugiere que el funcional decrece al añadir y suprimir tales puntos. La derivada topológica viene dada otra vez por la

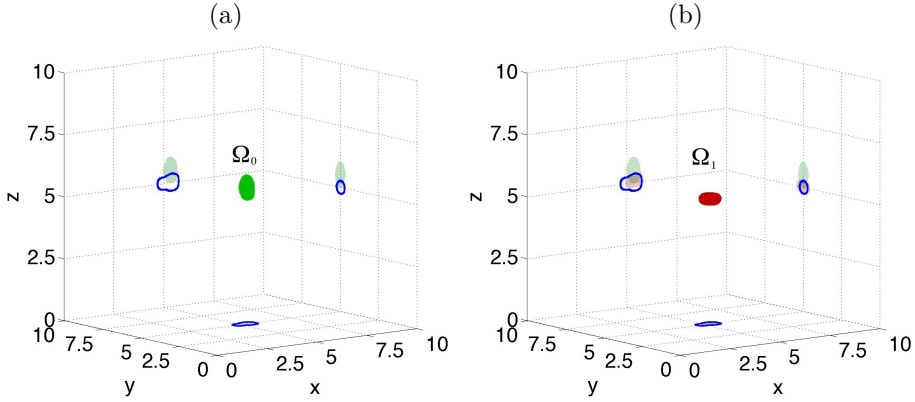


Figura 5: (Imagen tomada de [4]; la escala es $1 = 1 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}$). (a) Primera aproximación Ω_0 . (b) Segunda aproximación Ω_1 . Las proyecciones sobre los planos comparan la proyección del objeto (curva continua azul) con las proyecciones de las reconstrucciones (sólidas). La elongación de Ω_0 (verde) en la dirección z (dirección de incidencia de la luz) desaparece en Ω_1 (rojizo), recuperándose la elongación natural del objeto a lo largo del eje x .

fórmula explícita (4) cuando $\mathcal{R} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_n$, modificando los campos directo y adjunto para tener en cuenta la presencia de Ω_n :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta E_n + k_e^2 E_n = 0, & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_n, \\ \Delta E_n + k_i^2 E_n = 0, & \text{en } \Omega_n, \\ E_n^- = E_n^+, & \text{en } \partial\Omega_n, \\ \beta \partial_{\mathbf{n}} E_n^- = \partial_{\mathbf{n}} E_n^+, & \text{en } \partial\Omega_n, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r(E_n - E_{\text{inc}}) - \imath k_e(E_n - E_{\text{inc}})) = 0, & \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta P_n + k_e^2 P_n = \sum_{j=1}^N (E_{\text{med},j} - E_n(\mathbf{x}_j)) \delta_{\mathbf{x}_j} & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_n, \\ \Delta P_n + k_i^2 P_n = 0, & \text{en } \Omega_n, \\ P_n^- = P_n^+, & \text{en } \partial\Omega_n, \\ \beta \partial_{\mathbf{n}} P_n^- = \partial_{\mathbf{n}} P_n^+, & \text{en } \partial\Omega_n, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r P_n + \imath k_e P_n) = 0. & \end{array} \right. \quad (7)$$

Las constantes positivas C_{n+1} , c_{n+1} se seleccionan de modo que garanticen el decrecimiento del funcional de coste al actualizar el objeto, $J(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{n+1}) < J(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_n)$.

3. MÉTODOS HÍBRIDOS BASADOS EN DERIVADAS TOPOLÓGICAS Y TÉCNICAS DE GRADIENTE

Cuando el material del que están hechos los objetos es desconocido, necesitamos predecir también el valor de k_i . Obsérvese que los campos topológicos proporcionan una primera aproximación de los objetos mediante (5), aun cuando k_i es desconocido. Suponiendo que disponemos de una aproximación Ω_0 para los objetos, podemos

elegir una perturbación de los parámetros del medio externo como valor de arranque $k_{i,0} = k_e + \epsilon$, $\epsilon > 0$, y corregirla mediante un método de gradiente para obtener una mejor aproximación $k_{i,1}$.

Definimos el funcional

$$J(\delta) = J(k_{i,0} + \delta\phi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |E(\mathbf{x}_j) - E_{\text{med},j}|^2,$$

siendo E la solución del problema directo (6) cuando $k_i = k_{i,0} + \delta\psi$, $\delta > 0$ y $\Omega = \Omega_0$. Diferenciando para obtener una dirección de descenso obtenemos [7, 9]

$$\left. \frac{dJ}{d\delta} \right|_{\delta=0} = 2 \operatorname{Re} \left[\int_{\Omega_0} \psi k_{i,0} E_0 \bar{P}_0 d\mathbf{z} \right],$$

donde E_0 y P_0 son soluciones del problema directo (6) y adjunto (7) con $\Omega = \Omega_0$ y $k_i = k_{i,0}$. Eligiendo como función correctora

$$\psi = \psi_0 = -\operatorname{Re} [E_0 \bar{P}_0], \quad \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

y definiendo

$$k_{i,1} = k_{i,0} + \delta\psi_0$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, garantizamos $J(k_{i,1}) < J(k_{i,0})$. Podemos iterar este procedimiento para mejorar la aproximación del coeficiente, que puede variar en el espacio, manteniendo Ω_0 fijo. Hecho esto actualizamos Ω_0 recalculando la derivada topológica e iterando como describimos en la sección anterior. Alternando la aproximación de tipo gradiente para los parámetros y la iteración mediante derivadas topológicas para los dominios obtenemos un esquema iterativo híbrido que permite predecir objetos y parámetros [7, 8].

4. COMPORTAMIENTO PARA NÚMEROS DE ONDA GRANDES

A medida que la magnitud de los números de onda crece, el comportamiento de los campos topológicos cambia. En lugar de alcanzar picos en el interior de los objetos, los alcanzan en torno a sus fronteras. Cuando usamos ondas incidentes provenientes de múltiples direcciones en torno al objeto, esto define la frontera por completo [6, 19]. En microscopía holográfica sólo se emplea una dirección incidente debido a la forma en que se construyen los microscopios. Los picos de los campos topológicos se concentran antes y después del objeto en la dirección de incidencia, véase la figura 6 (a)–(b). Esto marca la ubicación $[z_1, z_2]$ del objeto en esa dirección. Por el contrario, los cortes $z = z_0 \in [z_1, z_2]$ muestran campos topológicos todavía concentrados en el interior del objeto. Estas observaciones permiten obtener una reconstrucción tridimensional pegando las secciones $z = z_0 \in [z_1, z_2]$, como en la figura 6 (c). Una vez hemos identificado la forma del objeto podríamos predecir sus parámetros, si fuera necesario, como hemos hecho en la sección anterior.

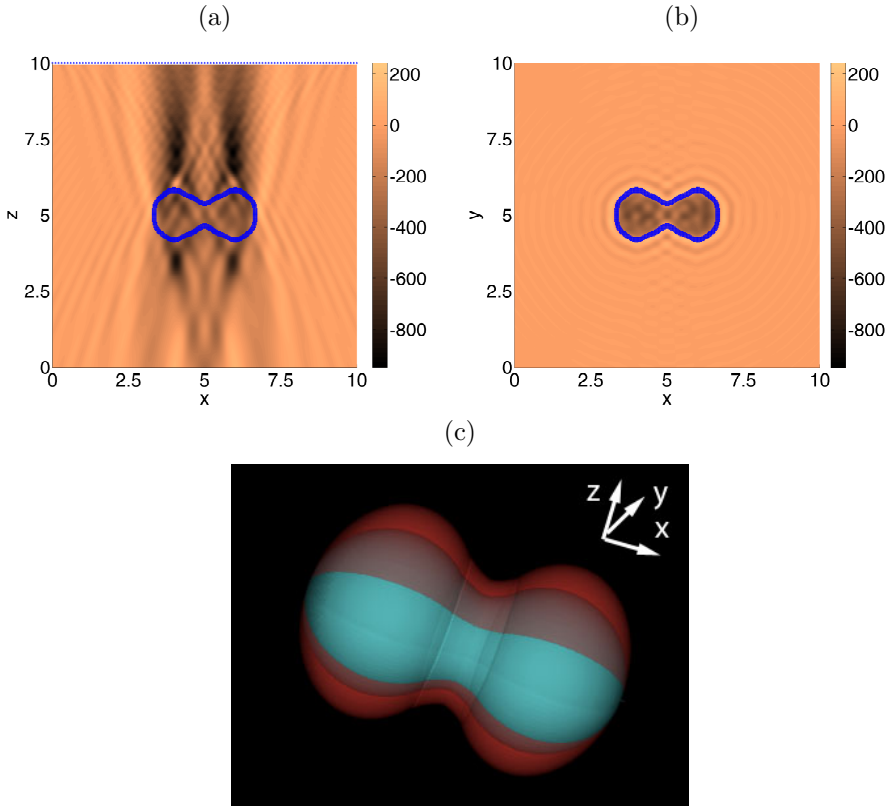


Figura 6: (Imagen tomada de [4]; la escala es $1 = 1 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}$). Cortes (a) $y = 5$ y (b) $z = 5$ de la derivada topológica cuando $k_e = 20.6$ y $k_i = 24.79$ (luz violeta) para un esferocilindro en proceso de división de longitud 4 y diámetro máximo 2. Se superpone el contorno del objeto (curva continua). En (c) se muestra la posible reconstrucción del objeto. Los puntos más oscuros del panel (a) marcan el rango de interés $[z_1, z_2]$ en z . La zona más oscura en los cortes $z = z_0$ a lo largo de ese rango de z representa la sección del objeto, como en el panel (b). Uniendo esos cortes obtenemos la reconstrucción representada en la imagen (c).

5. PERSPECTIVAS

Las técnicas de reconstrucción de imágenes basadas en derivadas topológicas proporcionan reconstrucciones iniciales de objetos sin más información a priori que las ondas incidentes, los parámetros del medio circundante y los datos medidos. Tienen la habilidad de localizar variaciones abruptas en la naturaleza del medio. Una vez se dispone de una aproximación inicial a los objetos, se plantean dos posibles situaciones prácticas.

En la primera, los parámetros de las anomalías son conocidos y deseamos reconstruir su geometría. Esto puede hacerse por métodos iterativos basados en derivadas

topológicas [7] o mediante otras técnicas de reconstrucción que monitorizan la evolución de contornos, tales como los conjuntos de nivel [15, 16] o las deformaciones de contornos siguiendo campos vectoriales [11].

En la segunda, los parámetros del objeto también son desconocidos. Cualquiera de los métodos mencionados para reconstruir formas se puede combinar con técnicas de gradiente para reconstruir la variación espacial de los parámetros [8, 9]. Se podría también optar, de entrada, por reconstruir la variación de los parámetros en todo punto [3, 22], como estrategia para ubicar objetos observando esas variaciones. Sin embargo, definir primero las fronteras de los objetos mediante métodos de derivadas topológicas y seguir entonces las variaciones espaciales de los parámetros desconocidos dentro de los objetos parece una estrategia más eficiente [9]. Reemplazar las técnicas de gradiente por métodos de tipo Newton podría ayudar a mejorar la resolución [3, 22].

AGRADECIMIENTOS. El trabajo descrito resume colaboraciones con T. G. Dimiduk (Harvard University), M. L. Rapún (Universidad Politécnica de Madrid), V. Selgas (Universidad de Oviedo) y P. Vidal (Universidad Complutense de Madrid). Esta investigación ha sido financiada por los proyectos MINECO n.º FIS2008-04921-C02-02, n.º FIS2011-28838-C02-02 y n.º MTM2014-56948-C2-1-P. Parte de los cálculos computacionales se llevaron a cabo en EOLO, en el marco del programa de Cambio Climático del Campus Internacional de Excelencia de Moncloa, financiado por MECD y MICINN.

REFERENCIAS

- [1] B. L. BIONDI, *3D Seismic imaging*, Investigations in Geophysics No. 14, Society of Exploration Geophysicists, 2006.
- [2] R. W. BROWN, Y.-C. N. CHENG, E. M. HAACKE, M. R. THOMPSON Y R. VENKATESAN, *Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design*, Wiley-Blackwell, 2014.
- [3] I. CATAPANO, L. CROCCO, M. D'URSO Y T. ISERNIA, 3D microwave imaging via preliminary support reconstruction: testing on the Fresnel 2008 database, *Inverse Problems* **25** (2009), 024002.
- [4] A. CARPIO, T. G. DIMIDUK, M. L. RAPÚN Y V. SELGAS, Noninvasive imaging of three-dimensional micro and nanostructures by topological methods, *SIAM J. Imaging Sci.* **9** (2016), 1324–1354.
- [5] A. CARPIO, T. G. DIMIDUK, V. SELGAS Y P. VIDAL, Optimization methods for in-line holography, *SIAM J. Imaging Sci.* **11** (2018), 923–956.
- [6] A. CARPIO Y M. L. RAPÚN, Topological derivatives for shape reconstruction, *Inverse problems and imaging*, Lect. Not. Math., 1943, 85–133, Springer, Berlin, 2008.
- [7] A. CARPIO Y M. L. RAPÚN, Solving inverse inhomogeneous problems by topological derivative methods, *Inverse Problems* **24** (2008), 045014.

- [8] A. CARPIO Y M. L. RAPÚN, An iterative method for parameter identification and shape reconstruction, *Inverse Probl. Sci. Eng.* **18** (2010), 35–50.
- [9] A. CARPIO Y M. L. RAPÚN, Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography, *Inverse Problems* **28** (2012), 095010.
- [10] A. CARPIO Y M. L. RAPÚN, Parameter identification in photothermal imaging, *J. Math. Imaging Vision* **49** (2014), 273–288.
- [11] F. CAUBET, M. GODOY Y C. CONCA, On the detection of several obstacles in 2D Stokes flow: topological sensitivity and combination with shape derivatives, *Inverse Probl. Imaging* **10** (2016), 327–367.
- [12] D. COLTON, The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves, *SIAM Review* **26** (1984), 323–350.
- [13] D. COLTON Y R. KRESS, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer, Berlin, 1992.
- [14] N. DOMINGUEZ Y V. GIBIAT, Non-destructive imaging using the time domain topological energy method, *Ultrasonics* **50** (2010), 367–372.
- [15] O. DORN Y D. LESSELIER, Level set methods for inverse scattering, *Inverse Problems* **22** (2006), R67–R131.
- [16] O. DORN Y D. LESSELIER, Level set methods for inverse scattering—some recent developments, *Inverse Problems* **25** (2009), 125001.
- [17] G. R. FEJOO, A new method in inverse scattering based on the topological derivative, *Inverse Problems* **20** (2004), 1819–1840.
- [18] B. B. GUZINA Y M. BONNET, Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics, *Inverse Problems* **22** (2006), 1761–1785.
- [19] B. GUZINA Y F. POUHRAMADIAN, Why the high-frequency inverse scattering by topological sensitivity may work, *Proc. R. Soc. A.* **471** (2015), 2179.
- [20] G. INDEBETOUW Y P. KLYSUBUN, A posteriori processing of spatiotemporal digital microholograms, *J. Opt. Soc. Am. A* **18** (2001), 326–331.
- [21] A. C. KAK Y M. SLANEY, *Principles of computerized tomographic imaging*, Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [22] M. LI, A. ABUBAKAR Y P. M. VAN DEN BERG, Application of the multiplicative regularized contrast source inversion method on 3D experimental Fresnel data, *Inverse Problems* **25** (2009), 024006.
- [23] J. SOKOWLOSKI Y A. ZOCHOWSKI, On the topological derivative in shape optimization, *SIAM J. Control Optim.* **37** (1999), 1251–1272.
- [24] T. L. SZABO, *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*, Academic Press, 2004.
- [25] T. VINCENT, *Introduction to Holography*, CRC Press, 2012.