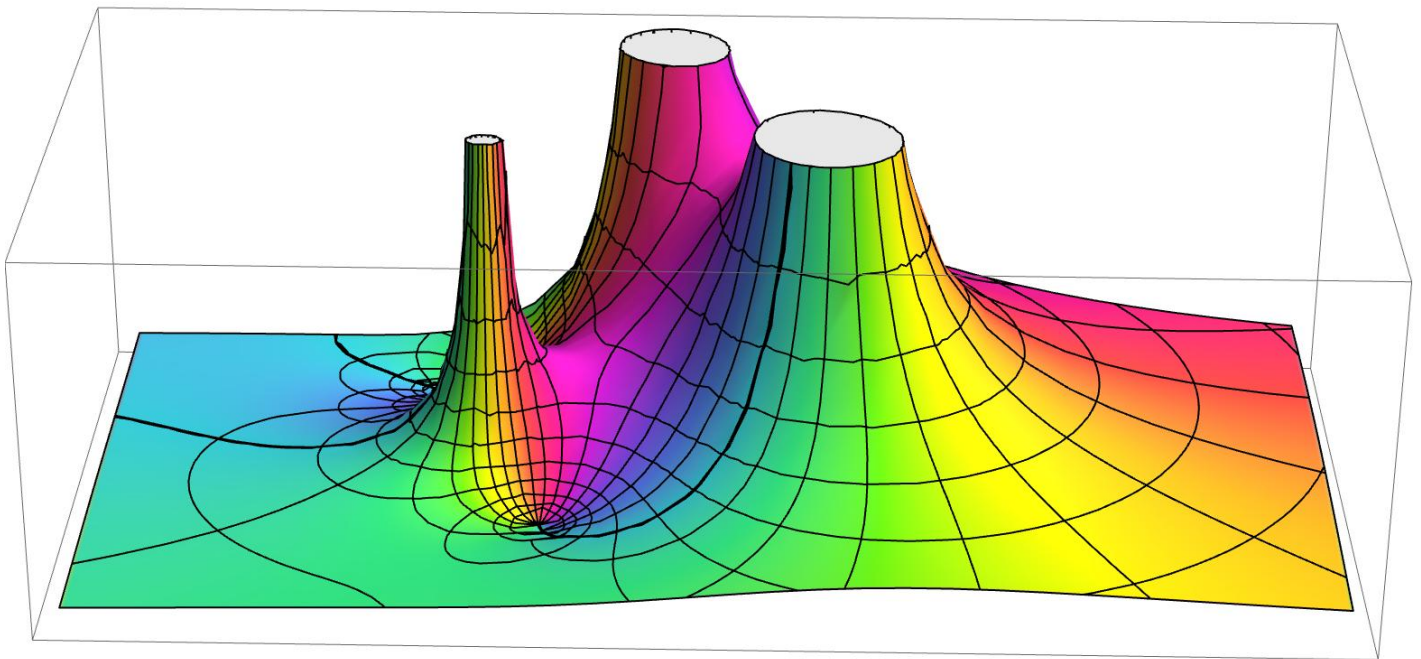


Apuntes de Variable Compleja

Javier Rubio



This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International”](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) license.



1	Números complejos y funciones holomorfas	2
1.1	Propiedades básicas	3
1.2	Representación matricial	6
1.3	Complejo conjugado	6
1.4	Módulo	8
1.5	Forma polar y argumento	9
1.6	Fórmulas de Euler y de De Moivre	10
1.7	El Teorema Fundamental del Álgebra	13
1.7.1	Raíces cuadradas	13
1.7.2	Raíces n -ésimas	14
1.8	Topología del plano complejo	16
1.9	Funciones	18
1.10	Límite funcional y continuidad	19
1.11	Diferenciabilidad y holomorfismos	20
1.11.1	Condiciones de holomorfismo: las ecuaciones de Cauchy-Riemann	22
1.11.2	Relación entre funciones holomorfas y armónicas	24
1.12	Funciones elementales	26
1.12.1	Exponenciales	26
1.12.2	Funciones trigonométricas	28
1.12.3	Funciones hiperbólicas	30
1.12.4	Logaritmos	31
1.12.5	Potencias	32
1.12.6	Derivadas de las funciones elementales	33

2	Integrales complejas	34
2.1	Curvas y contornos	34
2.2	Integrales de línea y contorno	36
2.3	Primitivas	37
2.4	Desigualdad de Darboux	39
2.5	Teorema de Cauchy	40
2.6	Representación integral de Cauchy	43
2.7	Teorema de Morera	46
2.8	Teorema de Liouville	47
3	Series de Taylor y de Laurent	49
3.1	Series de potencias y criterios de convergencia	49
3.1.1	Criterios de convergencia	50
3.2	Series de Taylor	52
3.3	Series de Laurent	55
3.4	Ceros y Singularidades	58
3.4.1	Ceros	58
3.4.2	Polos o singularidades aisladas	59
3.4.3	Singularidades evitables	60
3.4.4	Puntos en el infinito	61
4	Integrales por residuos	62
4.1	Residuos	62
4.2	Teorema de los residuos	63
4.2.1	Residuos de polos de orden n mediante límites y derivadas	64
4.2.2	Residuos de polos de orden n mediante la serie de Laurent	65
4.2.3	Residuos en el infinito	66
4.3	Suma de todos los residuos	67
4.4	Cálculo de integrales definidas	67
4.4.1	Integrales con senos y cosenos	68
4.4.2	Integrales a lo largo de todo el eje real	70
4.4.3	Integrales de tipo Fourier	72
4.4.4	Integrales con polos simples en el camino de integración	74
4.4.5	Integrales con funciones polídromas o multievaluadas	78
4.5	Aplicaciones físicas del teorema de los residuos	82
4.5.1	Electrostática y magnetostática en 2 dimensiones	82

CHAPTER 1

NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES HOLOMORFAS

El número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser.

LEIBNITZ

Ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación.

RENÉ DESCARTES

Los números complejos aparecen por primera vez en los trabajos de Cardano y Bombelli sobre el cálculo de las raíces de la ecuación de tercer grado $x^3 + 1 = 0$, siendo usados con recelo hasta finales del siglo XVIII cuando Gauss les concede un lugar privilegiado en el Olimpo de las Matemáticas mediante la prueba del Teorema Fundamental del Álgebra.

La extensión del sistema de números reales al sistema de números complejos es importante no solo en el campo de las matemáticas, donde su uso es común en casi todas las áreas, sino también en el ámbito de la física:

1. **Análisis de Vibraciones Mecánicas y Ondas:** La variable compleja se utiliza para estudiar sistemas vibratoriales, como osciladores armónicos amortiguados, y soluciones de ondas planas y esféricas.
2. **Electromagnetismo y Dinámica de Fluidos:** Diversas situaciones en electromagnetismo y física de fluidos involucran la llamada ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

para pares de funciones u y v . Una de estas funciones podría corresponder, por ejemplo, con un potencial electrostático bidimensional, mientras que la otra, que genera una familia de curvas ortogonales a la primera, podría describir el campo eléctrico \vec{E} . Alternativamente, la primera función podría describir el potencial de velocidades de un fluido irrotacional, mientras que la segunda correspondería a la función de flujo.

3. **Análisis de Circuitos Eléctricos:** La impedancia en circuitos de corriente alterna se representa mediante números complejos, lo que facilita el análisis de tensiones y corrientes.

4. **Óptica:** La propagación de la luz a través de medios con diferentes índices de refracción se puede describir mediante ecuaciones diferenciales en variable compleja.
5. **Teoría de la Elasticidad:** Las transformaciones de coordenadas complejas son útiles para resolver problemas en cuerpos sólidos deformables.
6. **Mecánica Cuántica:** La mecánica cuántica hace un amplio uso de la variable compleja en la descripción de las funciones de onda y los operadores hermíticos.
7. **Teoría de la Relatividad General:** La complejización de soluciones de las ecuaciones de Einstein es una poderosa herramienta para extender las regiones en la que estas son válidas (continuación analítica).
8. **Física de Partículas:** Las integrales en el plano complejo juegan un papel fundamental en la formulación de propagadores en teoría cuántica de campos.
9. **Problemas de Transferencia de Calor:** Las transformaciones conformes y la variable compleja se aplican para resolver ecuaciones de calor en geometrías complicadas.
10. **Problemas de Difusión y Transporte:** La variable compleja se aplica en problemas de difusión de partículas y transporte de calor en medios heterogéneos. Además, la ecuación de Helmholtz se convierte en una ecuación de difusión mediante la complejización de un parámetro real, transformando, por tanto, funciones de Bessel y funciones de Bessel esféricas en funciones de Bessel modificadas y funciones de Bessel esféricas modificadas.

1.1 Propiedades básicas

La extensión del sistema de números reales al sistema de números complejos está basada en la existencia de una *unidad imaginaria* i y una regla algebraica

$$i^2 = -1. \quad (1.2)$$

La etiqueta *imaginaria* refleja la naturaleza estrictamente matemática de esta cantidad: ninguna experiencia física produce como resultado una medición de i .

Combinando aritméticamente la unidad imaginaria i y los números reales ordinarios, obtenemos el conjunto de los números complejos, denotado tradicionalmente con el símbolo \mathbb{C} , en analogía con la notación \mathbb{R} para números reales. Un número complejo z está determinado de manera única por la expresión¹

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

¹Es habitual representar los números complejos con las letras z y w , reservando las letras x, y, u, v para los números reales.

con x e y un par de números reales llamados *parte real* y *parte imaginaria* de z .

$$\operatorname{Re} z \equiv x, \quad \operatorname{Im} z \equiv y. \quad (1.4)$$

Dicha representación se conoce como *forma binomial o cartesiana* del número complejo z . Es importante notar que la relación $i^2 = -1$ no permite escribir directamente $i = \sqrt{-1}$. De hecho, el uso inocente de esta última expresión puede dar lugar a inconsistencias del tipo

$$-1 = i^2 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 = -1.$$

El error se debe obviamente a qué estamos interpretando -1 como un número real, a pesar de que los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real. En otras palabras, estamos usando las raíces de números complejos sin haberlas definido previamente, dando por supuesto que estas satisfacen las mismas propiedades que las raíces de números reales positivos. Sin embargo, como veremos más adelante, la igualdad $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1z_2}$, válida para $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^+$, no es cierta en general para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo: Parte real e imaginaria de $z = 2 - 5i$

La parte real del número complejo $z = 2 - 5i$ es 2. Lo escribimos como $\operatorname{Re} z = 2$. La parte imaginaria de z es -5 . Lo escribimos como $\operatorname{Im} z = -5$

Dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son iguales si y solo si sus partes reales e imaginarias también lo son,

$$x_1 = x_2, \quad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \quad (1.5)$$

$$y_1 = y_2, \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \quad (1.6)$$

Si la parte imaginaria de un número complejo es cero, $\operatorname{Im}(z) = 0$, decimos que z es *puramente real*. Por el contrario, si la parte real es $\operatorname{Re}(z) = 0$, nos referimos a z como *puramente imaginario o imaginario puro*.

Puesto que \mathbb{C} es isomorfo a \mathbb{R}^2 , los números x e y se corresponden con las coordenadas cartesianas ortogonales de un punto en el plano. Es, por tanto, común visualizar los números complejos en el llamado *plano complejo*, *plano de Gauss* o *plano de Argand*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Las operaciones con números complejos se realizan utilizando las reglas aritméticas habituales, pero teniendo siempre en cuenta la propiedad (1.2). Por ejemplo, dados dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, su suma y multiplicación están dadas por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.7)$$

La adición y resta de números complejos se corresponde exactamente con la adición y resta de vectores en el plano. Nótese, sin embargo, que la multiplicación de números complejos no se corresponde con ninguna operación de vectores estándar.²

Ejemplo: Suma y producto de $(3 + 4i)$ y $(1 + 2i)$

$$(3 + 4i) + (1 + 2i) = 4 + 6i .$$

$$(3 + 4i) \cdot (1 + 2i) = (3 \cdot 1 - 4 \cdot 2) + i(3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = -5 + 10i .$$

Aparte de lo anterior, no se producen cambios sustanciales en la estructura algebraica de los números complejos en comparación con los números reales. En particular, la unidad multiplicativa sigue siendo la unidad real 1, el elemento neutro aditivo coincide con el cero real 0, existen elementos inversos aditivos y multiplicativos

$$z_1 + (-z_1) = 0, \quad z_1 z_1^{-1} = 1, \quad (1.8)$$

y

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (\text{Commutatividad de la adición}) \quad (1.9)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad (\text{Asociatividad de la adición}) \quad (1.10)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (\text{Commutatividad del producto}) \quad (1.11)$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3, \quad (\text{Asociatividad del producto}) \quad (1.12)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \quad (\text{Distributividad}). \quad (1.13)$$

para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. En general, cualquier conjunto que satisfaga las propiedades anteriores se denomina *cuerpo*. En particular, decimos que el cuerpo \mathbb{C} contiene una copia del cuerpo real, $\mathbb{R} \ni x \mapsto x + i0 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo: Determinación de z^{-1}

Escribiendo $z = x + iy$ y $z^{-1} = u + iv$,

$$zz^{-1} = (xu - yv) + i(xv + yu) = 1,$$

e igualando partes reales e imaginarias, tenemos

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

y por tanto

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1.14)$$

²De hecho, no puede hacerlo, puesto que no existe un concepto de inverso multiplicativo para los productos escalar y vector usuales.

1.2 Representación matricial

Un número complejo $z = x + iy$ se puede representar alternativamente como una matriz 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

En esta representación, las identidades aditivas y multiplicativas son la matriz cero y la matriz identidad y la suma y la multiplicación de números complejos se realizan siguiendo las reglas usuales para la suma y multiplicación de matrices. En resumen, la aritmética es la misma que en la sección anterior, pero expresada ahora en formato matricial,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(y_1x_2 + x_1y_2) \\ y_1x_2 + x_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En esta notación, la unidad imaginaria se corresponde con la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

la cual verifica $[i^2 = -1]$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Un número complejo admite, por tanto, la descomposición

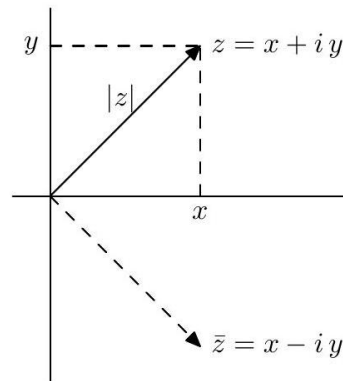
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

1.3 Complejo conjugado

Dado un número complejo $z = x + iy$, el número complejo

$$\bar{z} = x - iy \quad (1.19)$$

se denomina el *complejo conjugado* de z , siendo también utilizada la notación alternativa z^* para la misma cantidad. En términos del plano complejo, esta operación se corresponde con una reflexión con respecto al eje real.



Algebraicamente, tenemos además

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (1.20)$$

y

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2 \quad (z_2 \neq 0), \quad (1.21)$$

con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo: Suma y producto de los conjugados de $z_1 = -7 + 6i$ y $z_2 = 4 - 9i$ »»

Dados dos números complejos $z_1 = -7 + 6i$ y $z_2 = 4 - 9i$, tenemos

$$\bar{z}_1 = -7 - 6i, \quad \bar{z}_2 = 4 + 9i.$$

La suma y el producto de estos números coincide exactamente el conjugado de la suma $z_1 + z_2 = -3 - 3i$ y el conjugado del producto $z_1 \cdot z_2 = 26 + 87i$,

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (-7 - 6i) + (4 + 9i) = -3 + 3i,$$

$$\bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1 = (-7 - 6i) \cdot (4 + 9i) = 26 - 87i.$$

El complejo conjugado permite calcular divisiones de manera eficiente. En particular, dados dos números $z_1 = x_1 + y_1 i$ por $z_2 = x_2 + y_2 i$, con $x_2, y_2 \neq 0$, tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.22)$$

Ejemplo: Cálculo de $(2 + 3i)/(4 + i)$ »»

$$\frac{2 + 3i}{4 + i} = \frac{(2 + 3i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{11 + 10i}{17} = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i.$$

1.4 Módulo

Al contrario de lo que ocurre con números reales, no podemos definir una relación de orden \leq en \mathbb{C} compatible con la estructura algebraica. En otras palabras, es imposible definir un concepto de número complejo positivo en el que la suma y el producto de números complejos positivos sigan siendo positivos. Podemos, sin embargo, introducir el concepto de módulo de un número complejo

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad (1.23)$$

una cantidad real con propiedades similares al valor absoluto de un número real. Se tiene en particular que

$$|z| = |\bar{z}|, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z \leq |z|, \quad (1.24)$$

y

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, & |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2| \quad (z_2 \neq 0), \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, & ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2|, \\ 1/|z_1 - z_2| &\leq 1/(|z_1| - |z_2|), & & \quad (|z_1| > |z_2|), \end{aligned} \quad (1.25)$$

para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Puesto que un número real x se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria nula, las definiciones de módulo, ya sea como número real o como número complejo, son consistentes entre sí,

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x + i0|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

dando lugar a la nomenclatura de *valor absoluto de un número complejo* para referirse a su módulo, como extensión del concepto de valor absoluto introducido en los números reales.

Ejemplo: Módulo de $z_1 = 7 - 4i$ y $w = 2 + i$ y desigualdad triangular

El número complejo $z_1 = 7 - 4i$ tiene módulo $|z_1| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$.

El número complejo $w = 2 + i$ tiene módulo $|z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

El número complejo $z + w = 9 - 3i$ tiene módulo $|z_1 + z_2| = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{90}$.

Estas tres cantidades satisfacen la desigualdad triangular, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, en concreto, $\sqrt{90} \leq \sqrt{65} + \sqrt{5}$.

Puesto que

$$z \cdot \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} \right) = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1, \quad (1.27)$$

el inverso z^{-1} de $z \neq 0$ está dado por $\bar{z}/|z|^2$, que tiene la forma de un número complejo

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}, \quad (1.28)$$

y coincide exactamente con (1.14).

Nótese finalmente que la distancia Euclídea entre dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ se corresponde con el módulo de la diferencia entre los números complejos correspondientes,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad z_1 = x_1 + iy_1. \quad (1.29)$$

La topología en \mathbb{C} permite, por lo tanto, los conceptos de punto de acumulación, punto interior y punto exterior de un conjunto, así como los conceptos de convergencia para una sucesión o una serie.

1.5 Forma polar y argumento

La representación geométrica de los números complejos permite introducir de manera natural la llamada *forma polar o trigonométrica* de un número complejo. Considerando las coordenadas polares en el plano,

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \theta & \longrightarrow & \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= |z| \operatorname{sen} \theta & & \quad \theta = \arctan(x/y), \end{aligned} \quad (1.30)$$

obtenemos³

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (1.31)$$

En esta representación el *módulo* de z introducido anteriormente representa la longitud del vector correspondiente a $x + iy$, y θ es el ángulo desde el eje positivo hasta el vector $x + iy$. En términos matriciales esta expresión toma la forma

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = |z| \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

con

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

una matriz de rotación asociada a un giro de ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj.

Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, el argumento de z está determinado por θ salvo múltiplos enteros de 2π ,

$$\arg z = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.34)$$

i.e. es multivaluado y, por tanto, no es una función. Esto implica en particular que dos números complejos no nulos z_1 y z_2 serán iguales si y solo si

$$|z_1| = |z_2| \quad y \quad \arg z_1 = \arg z_2 \pmod{2\pi}. \quad (1.35)$$

³Aunque no la usaremos en este curso, es conveniente estar familiarizado con la notación alternativa $z = |z| \operatorname{cis} \theta \equiv |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ usada en algunos libros clásicos.

La restricción del argumento de un número complejo a un intervalo semiabierto I de longitud 2π se denomina *determinación del argumento*, denotándose comúnmente por \arg_I . Al contrario que \arg , \arg_I es univaluada y, por tanto, una función. La elección particular

$$\text{Arg } z \equiv \arg_{(-\pi, \pi]} z \quad (1.36)$$

se conoce como *determinación principal del argumento* y es una función *discontinua* a lo largo del semieje real negativo. Nótese que la aparición de dicha discontinuidad es inevitable. En particular, si hubiéramos considerado una determinación alternativa del argumento en el intervalo $[0, 2\pi)$, nos encontraríamos con una discontinuidad en el eje real positivo. La elección $(-\pi, \pi]$ viene motivada por la extensión a los complejos de algunas funciones reales, como el logaritmo o las raíces, para las cuales será conveniente definir argumentos principales que garanticen su continuidad en \mathbb{R}^+ .

Ejemplo: -1 en forma polar y su argumento en diversos intervalos

$$\begin{aligned} -1 &= 1 \cdot (\cos(\pi + 2\pi k) + i \operatorname{sen}(\pi + 2\pi k)), \\ \arg(-1) &= \pi + 2\pi k, \text{ for } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Eligiendo diversos intervalos tenemos por ejemplo,

$$\arg_{[-\pi, \pi)}(-1) = -\pi, \quad \arg_{[0, 2\pi)}(-1) = \pi, \quad \text{Arg}(-1) = \arg_{(-\pi, \pi]}(-1) = \pi.$$

1.6 Fórmulas de Euler y de De Moivre

Usando las expansiones de las funciones trigonométricas

$$\cos \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sen} \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (1.37)$$

para calcular

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k}_{(i)^{2k}} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{i(-1)^k}_{(i)^{2k+1}} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}, \quad (1.38)$$

obtenemos la conocida como fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (1.39)$$

con $\theta \in \mathbb{R}$. Nótese que esta expresión es consistente con el reemplazo formal $i \leftrightarrow -i$ en la conjugación compleja (1.19),

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = |z|e^{-i\theta}, \quad (1.40)$$

y de gran utilidad para realizar operaciones trigonométricas,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (1.41)$$

y multiplicaciones y divisiones de número complejos, algo más complicadas de llevar a cabo en la representación cartesiana. En particular, dados dos números complejos $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} = |z_1|(\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} = |z_2|(\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$ en representación polar, tenemos

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \quad (1.42)$$

o alternativamente

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)(\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 + i(\cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned} \quad (1.43)$$

lo cual es consistente con la primera propiedad en (1.25) y las reglas

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \\ \arg(z^{-1}) &= -\arg z \pmod{2\pi}, \\ \arg(\bar{z}) &= -\arg z \pmod{2\pi}, \\ \arg(z_1/z_2) &= \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

La interpretación geométrica de la expresión (1.42) es evidente: el producto de dos números complejos es geoméricamente un giro (se suman los argumentos) seguido de una homotecia (se multiplican los módulos).

Además, la ecuación (1.39) nos permite obtener como caso particular la famosa identidad de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (1.45)$$

una de las relaciones más bellas en matemáticas, involucrando simultáneamente la identidad aditiva (0), la identidad multiplicativa (1), la constante del círculo fundamental (π), el número $e = 2.718\dots$ y la unidad imaginaria i .

Otro resultado importante es la llamada *fórmula de De Moivre*

$$\cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta) = (\cos \theta + i \text{sen } \theta)^n, \quad (1.46)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Esta expresión se obtiene por inducción de la fórmula de Euler (1.39). En particular, asumiendo que la ecuación $(\cos \theta + i \text{sen } \theta)^n = \cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta)$ es válida para algún entero positivo n , tenemos

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \text{sen } \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \text{sen } \theta)^n (\cos \theta + i \text{sen } \theta) = (\cos n\theta + i \text{sen } n\theta)(\cos \theta + i \text{sen } \theta) \\ &= (\cos n\theta \cos \theta - \text{sen } n\theta \text{sen } \theta) + i(\cos n\theta \text{sen } \theta + \text{sen } n\theta \cos \theta) \\ &= \cos(n+1)\theta + i \text{sen}(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Para n negativo, consideramos $m = -n$ y reutilizamos el resultado que acabamos de demostrar para los números enteros positivos,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i m \operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta}{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta,$$

completando la demostración para todos los enteros.

En términos geométricos, la fórmula de De Moivre refleja el hecho de que n rotaciones de ángulo θ son equivalentes a una sola rotación de ángulo $n\theta$,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Ejemplo: Cálculo de $(-1 + i)^{20}$

Para calcular $(-1 + i)^{20}$, expresamos $(-1 + i)$ en forma polar

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)),$$

y aplicamos la fórmula de De Moivre

$$(-1 + i)^{20} = 2^{20/2}(\cos(20 \cdot 3\pi/4) + i \operatorname{sen}(20 \cdot 3\pi/4)) = 1024(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1024.$$

Combinada con la fórmula binomial de Newton, válida también para los complejos,

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}, \quad (1.48)$$

la fórmula de De Moivre permite obtener fácilmente expresiones para los senos y cosenos de los múltiplos de un ángulo.

Ejemplo: Cálculo de $\operatorname{sen}(5\theta)$ como un polinomio en $\operatorname{sen} \theta$

Para expresar $\operatorname{sen}(5\theta)$ como un polinomio en $\operatorname{sen} \theta$, aplicamos la fórmula de De Moivre

$$\begin{aligned} (\cos(5\theta) + i \operatorname{sen}(5\theta)) &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^5 \\ &= \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta - 10 \cos^3 \theta \operatorname{sen}^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen}^5 \theta \end{aligned}$$

e igualamos partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(5\theta) &= 5 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta - 10 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen}^5 \theta \\
 &= 5 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 \operatorname{sen} \theta - 10 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen}^5 \theta \\
 &= 5 \operatorname{sen} \theta - 10 \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \operatorname{sen}^5 \theta - 10 \operatorname{sen}^3 \theta + 10 \operatorname{sen}^5 \theta + \operatorname{sen}^5 \theta \\
 &= 5 \operatorname{sen} \theta - 20 \operatorname{sen}^3 \theta + 16 \operatorname{sen}^5 \theta.
 \end{aligned}$$

1.7 El Teorema Fundamental del Álgebra

Como probaremos en la Sección 2.8, el Teorema Fundamental del Álgebra establece que todo polinomio con coeficientes complejos tiene por lo menos una raíz compleja. Consideremos la ecuación polinómica

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (1.49)$$

con coeficientes complejos a_0, \dots, a_n . Dada una solución z de esta ecuación, \bar{z} satisface

$$\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = 0. \quad (1.50)$$

Esto demuestra que las raíces no reales de una ecuación polinómica con coeficientes reales se presentan en pares conjugados complejos. Denotando las raíces de (1.49) como z_1, \dots, z_n podemos escribir dicha expresión en la llamada *forma factorizada*

$$a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0. \quad (1.51)$$

1.7.1 Raíces cuadradas

La raíz cuadrada $z = x + iy = \sqrt{z_0}$ de cualquier número complejo $z_0 = x_0 + iy_0$ debe satisfacer

$$(x + iy)^2 = z_0 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x_0, \quad 2xy = y_0. \quad (1.52)$$

Combinando las dos ecuaciones obtenemos

$$x_0^2 + y_0^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2, \quad (1.53)$$

A partir de la primera ecuación en el sistema, tenemos

$$x^2 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right), \quad y^2 = \frac{1}{2} \left(-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right). \quad (1.54)$$

Los signos de x y y al tomar la raíz cuadrada de las expresiones anteriores vienen determinados por la segunda ecuación en el sistema, $2xy = y_0$. En concreto tenemos

$$z = x + iy = \sqrt{x_0 + iy_0} = \pm \left(\sqrt{\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}} + i \frac{y_0}{|y_0|} \sqrt{\frac{-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}} \right), \quad y_0 \neq 0. \quad (1.55)$$

La raíz cuadrada de cualquier número complejo tiene, por tanto, dos valores opuestos, que coinciden solo si $x_0 + iy_0 = 0$. Nótese que el caso $y_0 = 0$ se corresponde con las raíces cuadradas de números reales. En concreto, tenemos

$$z = \pm\sqrt{x_0} \quad \text{si} \quad x_0 \geq 0, \quad z = \pm i\sqrt{-x_0} \quad \text{si} \quad x_0 < 0, \quad y_0 = 0. \quad (1.56)$$

Estos resultados nos permiten resolver ecuaciones cuadráticas del tipo

$$az^2 + bz + c = 0, \quad (1.57)$$

con coeficientes $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. De hecho, completando cuadrados, tenemos

$$a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a} (b^2 - 4ac) = 0, \quad (1.58)$$

y

$$z = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) = 0. \quad (1.59)$$

1.7.2 Raíces n -ésimas

Las raíces n -ésimas de un número complejo conocido z_0 son las soluciones de la ecuación polinómica

$$z^n = z_0, \quad (1.60)$$

con n un número natural, $n \geq 2$. Escribiendo z y z_0 en forma polar,

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}, \quad (1.61)$$

y usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir (1.60) en la forma

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} = |z_0| e^{i\theta_0}. \quad (1.62)$$

Aplicando ahora el criterio de igualdad de números complejos en forma polar

$$|z|^n = |z_0|, \quad \theta_k = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.63)$$

deducimos que

$$z_k = \sqrt[n]{|z_0|} \exp \left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]. \quad (1.64)$$

De acuerdo con esta expresión, existen n raíces diferentes de z , contenidas todas ellas en un círculo de radio $|z| = \sqrt[n]{|z_0|}$ centrado en el origen y separadas por múltiplos de $2\pi/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Nótese en particular que podemos reescribir la expresión (1.64) como

$$z_k = \sqrt[n]{|z_0|} \exp \left(i \frac{\theta_0}{n} \right) \omega_n^k, \quad (1.65)$$

con

$$\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (1.66)$$

una rotación en sentido antihorario de $2\pi/n$ radianes. Las raíces n -ésimas forman, por tanto, un polígono regular de n lados. En concreto, las raíces n -ésimas de la unidad ($z = 1$) son los números (1.66).

La raíz n -ésima asociada a la *determinación principal del argumento*,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z_0|} \left(\cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \text{sen} \frac{\text{Arg } z}{n} \right) \quad (1.67)$$

se denomina *raíz n -ésima principal*. Como anticipamos, nuestra elección del argumento principal (1.36) garantiza que la raíz principal de z como número complejo coincida con la raíz de $z \in \mathbb{R}^+$.

Ejemplo: Cálculo de las raíces cúbicas de -27

Para calcular las raíces cúbicas de -27 , podemos utilizar dos métodos:

- Método 1. Las raíces cúbicas de -27 son las soluciones de la ecuación polinómica $z^3 + 27 = 0$, la cual admite una factorización

$$(z + 3)(z^2 - 3z + 9) = 0.$$

El primer factor da la solución -3 . Las raíces del segundo factor nos dan las otras dos soluciones,

$$\frac{3}{2} \left(1 \pm i\sqrt{3} \right)$$

- Método 2. Escribiendo -27 en forma polar,

$$-27 = 27e^{i\pi},$$

la ecuación polinómica $z^3 + 27 = 0$ toma la forma

$$|z|^3 e^{i3\theta} = 27e^{i\pi}.$$

Identificando módulo y argumentos a ambos lados y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante,

$$|z|^3 = 27, \quad 3\theta = \pi + 2\pi k,$$

obtenemos

$$|z| = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt[3]{-27} = 3e^{i(\pi/3 + 2\pi k/3)},$$

con $k = 0, 1, 2$ (añadir otros múltiplos de 2π da el mismo número complejo). Para estos valores de k , recuperamos los resultados obtenidos con el primer método,

$$\frac{3}{2} (1 + i\sqrt{3}), \quad 3, \quad \frac{3}{2} (1 - i\sqrt{3}).$$

Estas raíces están igualmente espaciadas a lo largo de un círculo centrado en el origen y de radio $|z| = 3$.

Nótese que el producto de raíces n -ésimas principales de números complejos no es necesariamente igual a la raíz principal n -ésima del producto de números complejos. De hecho, dadas las raíces de dos números complejos z_1 y z_2 tenemos,

$$\sqrt[n]{|z_1|} \sqrt[n]{|z_2|} = \sqrt[n]{|z_1 z_2|}, \quad \frac{\text{Arg } z_1}{n} + \frac{\text{Arg } z_2}{n} = \frac{\text{Arg } z_1 z_2}{n} + 2k\pi, \quad (1.68)$$

o más explícitamente $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1 z_2 + 2kn\pi$. Como $n \geq 2$ y $-2\pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq 2\pi$, necesariamente debemos tener $k = 0$, pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geq 4\pi$ y no puede darse la igualdad. Concluimos, por tanto, que $\sqrt[n]{z_1} \sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1 z_2}$ si y solo si

$$-\pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq \pi. \quad (1.69)$$

Por ejemplo, si las partes reales de z_1 y z_2 son positivas y, por tanto, ambos números complejos están en el semiplano derecho, tenemos $-\pi/2 < \text{Arg } z_1 < \pi/2$ y $-\pi/2 < \text{Arg } z_2 < \pi/2$; y, por tanto, $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \text{Arg}(z_1 z_2)$ por lo que, en este caso, si se cumple que $\sqrt[n]{z_1} \sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1 z_2}$. Por el contrario, en el caso $n = 2$, $z_1 = z_2 = -1$, tenemos

$$\text{Arg}(-1) + \text{Arg}(-1) = 2\pi \neq 0 = \text{Arg}(1) = \text{Arg}((-1)(-1)),$$

y, por tanto, no se cumple la condición (1.69). En este caso, como anticipamos,

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)},$$

es decir, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

1.8 Topología del plano complejo

Como el conjunto \mathbb{C} no es otra cosa que \mathbb{R}^2 , definir una topología en \mathbb{C} es equivalente a hacerlo en \mathbb{R}^2 . En concreto, si z_0 es un número complejo y $r > 0$, podemos definir:

1. Disco abierto, entorno o vecindad con centro en z_0 y radio r :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}. \quad (1.70)$$

El disco abierto no incluye su frontera, indicada en la figura con una línea punteada. Nótese que un disco abierto no puede ser vacío. Por convenio, $D(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$.

2. Disco abierto punteado o entorno reducido con centro en z_0 y radio r :

$$D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}. \quad (1.71)$$

3. Disco cerrado con centro en z_0 y radio r :

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \quad (1.72)$$

El disco cerrado incluye su frontera, indicada en la figura con una línea sólida. Nótese que $\overline{D}(z_0, 0) = \{z_0\}$.

4. **Conjunto abierto:** Un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si cada punto z_0 del conjunto está rodeado por puntos vecinos que también están en el conjunto, o más formalmente si

$$\forall z_0 \in U, \quad \exists r > 0 : D(z_0, r) \subseteq U. \quad (1.73)$$

Por ejemplo, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ es abierto, pero $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$ no lo es.

5. **Conjunto cerrado:** Un conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si el complemento de E en \mathbb{C} ($\mathbb{C} \setminus E \equiv \{z \in \mathbb{C} : z \notin E\}$) es un conjunto abierto. Por ejemplo, el conjunto $F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$ es cerrado.⁴6. **Conjunto conexo:** Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es conexo si no puede ser dividido en conjuntos abiertos disjuntos no vacíos U y V , es decir, si no existen dos partes U y V tales que $U \cap E \neq \emptyset, V \cap E \neq \emptyset$, y $E = (U \cap E) \cup (V \cap E)$.

Si E es un conjunto abierto, entonces E es conexo si y solo si es conexo por trayectoria; es decir, si cualquier par de puntos en E puede conectarse por una trayectoria o curva continua que se encuentra completamente dentro del conjunto.

7. **Conjunto simplemente conexo:** Un conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si su frontera ∂D es un conjunto conexo (en caso contrario, lo llamaremos múltiplemente conexo). Intuitivamente, un dominio simplemente conexo es un conjunto abierto formado por una sola pieza y sin agujeros. Por ejemplo, \mathbb{C} y un disco abierto $D(z_0, r)$ son dominios simplemente conexos. Por el contrario, un disco punteado es conexo, pero no es simplemente conexo.8. **Dominio o región:** Un dominio o región es un conjunto abierto y conexo.

Ejemplo: Descripción de $\operatorname{Im}(z^{-1}) > 1$

Para $z = x + iy \neq 0$ y usando la expresión (1.28) podemos escribir

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

⁴Nótese que no todo conjunto es abierto o cerrado. Por ejemplo, $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re} z \leq 2\}$ no es ni abierto ni cerrado.

y, por tanto,

$$\operatorname{Im}(z^{-1}) > 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{-y}{x^2 + y^2} > 1 \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 + y < 0.$$

Completando cuadrados,

$$x^2 + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

podemos identificar la región $\operatorname{Im}(z^{-1}) > 1$ como el interior de un disco abierto con centro $z_0 = -i/2$ y radio $1/2$.

1.9 Funciones

La definición de una función en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es equivalente a establecer una regla asociando a cada punto $z \in D$ un único número complejo,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad w = f(z), \quad (1.74)$$

con w el *valor de f en z* . De acuerdo con esta definición, una función es única o monódromica, es decir, tiene un solo valor. Separando la parte real e imaginaria en f y su argumento z , tenemos, por tanto,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y), \quad (1.75)$$

o

$$f(|z|, \theta) = u(|z|, \theta) + iv(|z|, \theta), \quad \bar{f}(z) = u(|z|, \theta) - iv(|z|, \theta), \quad (1.76)$$

con u, v funciones reales de las variables reales x e y o $|z|$ y θ .

Ejemplo: Partes reales e imaginarias de $f(z) = z^2$

Para $f(z) = z^2$ tenemos

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

y, por tanto,

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Alternativamente, en forma polar, tenemos

$$f(|z|e^{i\theta}) = |z|^2 e^{2i\theta} = |z|^2 (\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta))$$

y, por tanto,

$$u(|z|, \theta) = |z|^2 \cos(2\theta), \quad v(|z|, \theta) = |z|^2 \operatorname{sen}(2\theta).$$

1.10 Límite funcional y continuidad

Los conceptos de límite y continuidad para funciones complejas se siguen de los correspondientes para las transformaciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , permitiendo extender automáticamente los teoremas elementales sobre límites y continuidad al caso complejo. En particular, el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad w_0 \in \mathbb{C} \quad (1.77)$$

de una función de variable compleja $w = f(z)$ definida en un disco punteado alrededor de z_0 se corresponde con la existencia de un número positivo $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ para cada entorno $|f(z) - w_0| < \epsilon$ de w_0 . Dada la analogía formal entre esta definición y las correspondientes para funciones reales de variable real, las reglas de cálculo de límites conocidas siguen siendo válidas para funciones de variable compleja, con las mismas demostraciones. En particular, si los límites $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen:

1. El límite es único.
2. Las partes real e imaginaria del límite de una función coinciden con los límites de las partes real e imaginaria de la función.

$$\lim_{x+iy \rightarrow z_0} u(x, y) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{x+iy \rightarrow z_0} v(x, y) = \operatorname{Im} w_0. \quad (1.78)$$

3. El límite de la suma es la suma de los límites,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z). \quad (1.79)$$

4. El límite del producto es el producto de los límites,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z). \quad (1.80)$$

5. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq 0$, el límite de $1/f(z)$ es

$$\lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 1 / \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (1.81)$$

Una función compleja $f(z)$ es continua en z_0 si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. De manera similar, una función compleja $f(z)$ es continua en $U \subset \mathbb{C}$ si y solo si f es continua en todos los puntos de U . Al igual que con el límite, las propiedades de continuidad conocidas para funciones de una variable real son también válidas para funciones de variable compleja. En particular, dadas dos funciones f y g continuas en z_0 , su suma, producto y composición son continuos en z_0 . Además, su cociente es continuo para $g(z_0) \neq 0$.

Ejemplo: $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4+z^2}{(z-1)^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4+z^2}{(z-1)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4+z^{-2}}{(z^{-1}-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z^2+1}{(1-z)^2} = \frac{\lim_{z \rightarrow 0} (4z^2+1)}{\lim_{z \rightarrow 0} (1-z)^2} \\ &= \frac{4(\lim_{z \rightarrow 0} z)^2 + \lim_{z \rightarrow 0} 1}{(\lim_{z \rightarrow 0} 1 - \lim_{z \rightarrow 0} z)^2} = 1 \end{aligned}$$

1.11 Diferenciabilidad y holomorfismos

Dada una función $f(x, y)$ definida en un abierto en \mathbb{R}^2 , se dice que f es diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in U$ si existe una forma lineal del tipo $\alpha h + \beta k$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \alpha h + \beta k + \Omega(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}, \quad (1.82)$$

con α y β en el mismo conjunto de valores asumidos por la función f en las variables h y k y

$$\Omega(h, k) \rightarrow 0, \quad \text{para } h, k \rightarrow 0. \quad (1.83)$$

En otras palabras, dichas funciones son diferenciables si la diferencia entre el incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ y la expresión lineal $\alpha h + \beta k$ es un infinitesimal de orden superior a $\sqrt{h^2 + k^2}$ cuando h y k tienden a cero.

Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , las cantidades α y β en (1.82) están determinadas de manera única y coinciden con las derivadas parciales,

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.84)$$

Nótese, sin embargo, que la mera existencia de derivadas parciales en (x_0, y_0) indica únicamente la diferenciabilidad a lo largo de los ejes coordenados $k = 0$ o $h = 0$. Para que f sea diferenciable en ese punto, se requieren condiciones adicionales como la existencia de las derivadas parciales en un entorno del punto y que estas sean continuas en el punto (x_0, y_0) .

Aunque la condición de diferenciabilidad (1.82) es perfectamente válida para funciones complejas de una variable compleja, estaremos principalmente interesados en aquellas funciones diferenciables en las que expresión lineal $\alpha h + \beta k$ aparece únicamente en la forma $w = h + ik$. Para dichas funciones, la diferenciabilidad de f está íntimamente relacionada con la condición de *holomorfismo* en un punto $z_0 \in U$,

$$\exists \gamma \in \mathbb{C} : \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \gamma + \frac{|w|}{w} \Omega(w), \quad \text{con } \Omega(w) \rightarrow 0 \quad \text{con } w \rightarrow 0. \quad (1.85)$$

Esta definición puede extenderse a todo un subconjunto del plano complejo. En particular, diremos que f es holomorfa en un subconjunto U de \mathbb{C} si es holomorfa en cada punto $z \in U$. Algunos libros utilizan los términos “analítica”, “diferenciable” o “diferenciable en el plano complejo” en lugar de “holomorfa”. El uso del término analítica deriva del hecho de que

una función holomorfa admite una expansión local en serie de potencias en cada punto de su dominio. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman funciones enteras.

Si tomamos $z_0 = x_0 + iy_0$ y $w = h + ik$ y comparamos las relaciones (1.82) y (1.85), la condición de holomorfismo en un punto implica de hecho la diferenciabilidad de f como función de las variables reales x e y , con la condición adicional de que α y β dependan únicamente de γ ,

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} = \gamma, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y} = i\gamma, \quad \alpha + i\beta = \gamma + i^2\gamma = 0, \quad (1.86)$$

o alternativamente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.87)$$

Puesto que el cociente $|w|/w$ en (1.85) es un número complejo con módulo unitario, la condición de holomorfismo es también equivalente a la existencia del límite del cociente incremental en el punto z_0 ,⁵

$$\gamma = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0), \quad (1.88)$$

con $f'(z_0)$ la derivada de f en z_0 . De esta condición se sigue fácilmente que si una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en z_0 , entonces es continua en z_0 ,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Las operaciones aritméticas elementales respetan la propiedad de holomorfismo. En particular, si dos funciones $f(z)$ y $g(z)$ son holomorfas en un punto z_0 , entonces su suma $f(z) + g(z)$, su diferencia $f(z) - g(z)$, su producto $f(z) \cdot g(z)$ y su cociente $f(z)/g(z)$ para $g(z_0) \neq 0$ son también funciones holomorfas en z_0 , y, por tanto, derivables.

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0), \quad (1.90)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \quad (1.91)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}, \quad g(z_0) \neq 0. \quad (1.92)$$

En concreto, los polinomios

$$p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n \quad (1.93)$$

con $c_k \in \mathbb{C}$ para $0 \leq k \leq n$ y las funciones racionales

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (1.94)$$

⁵Dicho límite es, de hecho, un límite doble, donde tanto la parte real como la parte imaginaria de w deben tender a cero.

con $p(z)$ y $q(z)$ funciones polinómicas, son diferenciables en cada punto de su dominio, pudiéndose calcular sus derivadas con las mismas reglas que se aplican a la derivada real, incluida la regla de la cadena,

Ejemplo: Monomios como funciones holomorfas

Para un monomio arbitrario $z^n = (x + iy)^n$, tenemos por ejemplo

$$\frac{(z+w)^n - z^n}{w} = \binom{n}{1} z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (w)^{k-1} z^{n-k} \xrightarrow{w \rightarrow 0} n z^{n-1}.$$

Por otro lado, es fácil verificar que dicha función satisface las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z^n)}{\partial x} &= n(x+iy)^{n-1}, & \frac{\partial(z^n)}{\partial y} &= in(x+iy)^{n-1}, \\ \frac{\partial(z^n)}{\partial x} + i \frac{\partial(z^n)}{\partial y} &= n(x+iy)^{n-1} (1+i^2) = 0. \end{aligned}$$

1.11.1 Condiciones de holomorfismo: las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Separando la parte real e imaginaria en la última expresión en (1.86),

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad (1.95)$$

obtenemos las llamadas condiciones de holomorfismo de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.96)$$

Este resultado pone de manifiesto que la mera elección y combinación de dos “buenas” funciones de variable real u, v , no garantiza que la función $f(z)$ sea derivable en el sentido complejo, ya que dichas funciones reales no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Como subproducto de estas relaciones tenemos también que para funciones holomorfas

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.97)$$

Ejemplo: Una función holomorfa

Para una función

$$f(z) = z^2 - z = (x + iy)^2 - (x + iy) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y) \equiv u(x, y) + iv(x, y).$$

independiente de \bar{z} , las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen explícitamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

La función $f(z)$ es, por tanto, holomorfa.

Ejemplo: Una función no holomorfa

Para una función

$$g(z) = |z|^2 - 4z + 2\bar{z} = z\bar{z} - 4z + 2\bar{z} = (x^2 + y^2 - 2x) + i(-6y) \equiv u(x, y) + iv(x, y),$$

dependiente de z como de \bar{z} , las condiciones de Cauchy-Riemann no se cumplen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2 \neq -6 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \neq -2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

La función $g(z)$ es, por tanto, no holomorfa.

Ejemplo: Ecuaciones de Cauchy-Riemann y física de fluidos

Para ilustrar la relación de las ecuaciones de Cauchy con problemas de relevancia en física, consideremos el campo de velocidad de un fluido en 2 dimensiones,

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y).$$

En ausencia de fuentes, sumideros o vórtices, el movimiento del fluido es solenoidal e irrotacional, es decir, el campo de velocidades tiene divergencia y rotacional nulos,

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla \times \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0.$$

Identificando

$$u(x, y) = V_x(x, y), \quad v(x, y) = -V_y(x, y),$$

estas propiedades son equivalentes a las condiciones de Cauchy-Riemann en (1.96). En otras palabras, el movimiento solenoidal e irrotacional de un fluido puede describirse en términos de una función holomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z = x + iy$.

Reescribiendo las relaciones de Cauchy-Riemann en términos de las variables $z = x + iy$

y $\bar{z} = x - iy$ mediante la regla de la cadena y las relaciones

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (1.98)$$

obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.99)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.100)$$

Teniendo en cuenta (1.87) y (1.96), esto implica

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.101)$$

Una función holomorfa no puede, por tanto, depender explícitamente de \bar{z} ! En otras palabras, las funciones complejas derivables son “auténticas funciones complejas,” en el sentido de que si la función $u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable, la expresión que se obtiene al realizar el cambio (1.98) en $u(x, y) + iv(x, y)$,

$$f(z) = u \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + iv \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right), \quad (1.102)$$

depende únicamente de la variable z . Nótese también que

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1. \quad (1.103)$$

Ejemplo: Revisión de los ejemplos anteriores

Es ilustrativo examinar los dos ejemplos anteriores con este nuevo criterio:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z^2 - z) = 2z \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0 - 0 = 0.$$

La función f es holomorfa.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (|z|^2 - 4z + 2\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z \cdot \bar{z} - 4z + 2\bar{z}) = z + 2 \neq 0.$$

La función g no es holomorfa.

1.11.2 Relación entre funciones holomorfas y armónicas

La derivada de una función holomorfa es también holomorfa, implicando la existencia de segundas derivadas parciales para su parte real e imaginaria. Es fácil ver que si una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad (1.104)$$

es holomorfa, tanto u como v son funciones armónicas,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = 0. \quad (1.105)$$

En particular, basta multiplicar la condición (1.101) por $\partial/\partial z$,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \left(\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right]\right) \left(\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right]\right) [u + iv] = 0, \quad (1.106)$$

multiplicar por 4 y desarrollar las derivadas,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[u + iv] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = 0. \quad (1.107)$$

Viceversa, dada una función real de dos variables reales que sea armónica, es siempre posible encontrar una función holomorfa de la cual esta sea la parte real o imaginaria. Dicha función está determinada salvo una constante. En particular, si $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, la parte imaginaria debería cumplir

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt + h(x), \quad (1.108)$$

Derivando con respecto a x , teniendo en cuenta (1.105), e imponiendo $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dt + h'(x) = - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} dt + h'(x) \\ &= - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} + h'(x) = - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.109)$$

obtenemos

$$h'(x) = - \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y}, \quad \longrightarrow \quad h(x) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(t, y_0)}{\partial y} dt + c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (1.110)$$

y por tanto

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(t, y_0)}{\partial y} dt + c. \quad (1.111)$$

Por construcción la función $f = u + iv$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejemplo: Función holomorfa con parte real $u(x, y) = xy - x + y$ 

La función $u(x, y) = xy - x + y$ es claramente armónica puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 1, \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Si $u(x, y) = xy - x + y$ es la parte real de una función holomorfa la parte imaginaria $v(x, y)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y - 1.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 - x + g(y),$$

con g una función arbitraria de y a determinar mediante la segunda ecuación de Cauchy-Riemann,

$$g'(y) = y - 1.$$

La solución de esta ecuación es de la forma $g(y) = \frac{1}{2}y^2 - y + c$, con c una constante arbitraria. La función $f = u(x, y) + iv(x, y)$ buscada es por tanto

$$f(x, y) = xy - x + y + i \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x - y + c \right).$$

Haciendo uso de las relaciones $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ and $y = -i\frac{1}{2}(z - \bar{z})$ y tras algo de álgebra obtenemos

$$f(z) = -iz^2 - (1 + i)z + ic.$$

Nótese que el resultado no depende de \bar{z} , como es de esperar para una función holomorfa.

1.12 Funciones elementales

Las funciones elementales de variable compleja son extensiones de las correspondientes funciones de variable real. Para definir dichas funciones, recurriremos a la expansión en serie de potencias de las funciones reales, sustituyendo la variable real por una variable compleja y demostrando que la expansión formal obtenida converge en un dominio apropiado, como un disco en el plano complejo o la totalidad del mismo.

1.12.1 Exponenciales

Consideremos por ejemplo la expansión en serie de la función exponencial y su extensión al caso complejo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.112)$$

con

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (1.113)$$

la operación de factorización usual. La serie resultante será convergente si la sucesión de las sumas parciales

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \quad (1.114)$$

da lugar a una secuencia de puntos en el plano complejo que converge a un punto definido como e^z . Asumiendo $N > M$ y teniendo en cuenta la generalización de la desigualdad triangular en (1.25),

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|, \quad (1.115)$$

tenemos

$$|S_N - S_M| = \left| \sum_{n=M+1}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=M+1}^N \frac{|z|^n}{n!} \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} 0, \quad (1.116)$$

puesto que la serie (en \mathbb{R})

$$e^{|z|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \quad (1.117)$$

es convergente para todo $|z|$. Dado que el criterio de Cauchy es necesario y suficiente en \mathbb{R}^2 , y, por tanto, en \mathbb{C} , la serie exponencial

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.118)$$

converge para cualquier z . Definida de esta forma, la exponencial compleja satisface todas las propiedades de la exponencial real. En concreto, para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^z \neq 0, \forall z, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad 1/e^z = e^{-z}. \quad (1.119)$$

Otras propiedades importantes se siguen inmediatamente de la descomposición de la exponencial en sus partes reales e imaginarias,⁶

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (1.120)$$

En concreto, tenemos

$$\begin{aligned} e^0 = 1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1, \\ |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Además, la función exponencial es periódica con período imaginario puro $2\pi i$,

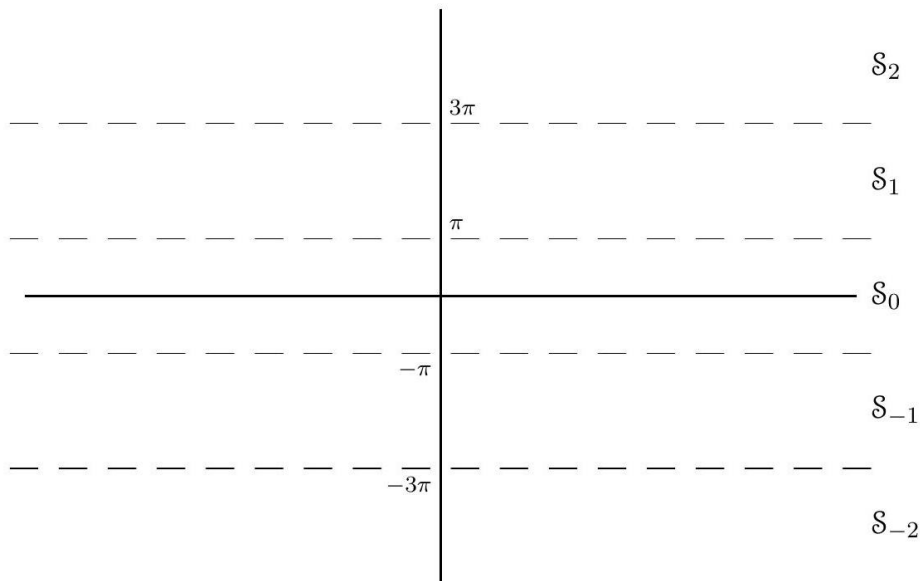
$$e^{z+2ik\pi} = e^z e^{2ik\pi} = e^z, \quad (1.122)$$

⁶En algunos textos, esta expresión constituye la definición de la exponencial compleja.

puesto que para $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$. Esto significa que la función exponencial en el plano complejo no es inyectiva, en marcado contraste con la función exponencial real. En concreto, dados dos números complejos z_1 y z_2 , se tiene

$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad (1.123)$$

si y solo si $z_1 = z_2 + 2\pi ik$, para algún entero k . De cara definir una función inyectiva podemos dividir el plano complejo en franjas horizontales de altura 2π ,



correspondientes a los subconjuntos

$$\mathcal{S}_k \equiv \{x + iy \in \mathbb{C} \mid (2k - 1)\pi < y \leq (2k + 1)\pi\}. \quad (1.124)$$

De esta manera, si z_1 y z_2 pertenecen al mismo conjunto \mathcal{S}_k , entonces $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ implica que $z_1 = z_2$. Cada uno de los conjuntos \mathcal{S}_k se conoce como una región fundamental para la función exponencial. La propiedad básica que satisface una región fundamental de una función periódica es que, si se conoce el comportamiento de la función en la región fundamental, se puede usar la periodicidad para determinar el comportamiento de la función en todo el dominio. Además, es la región más pequeña con esta propiedad. Como veremos más adelante, la periodicidad de la exponencial compleja tiene como consecuencia que el logaritmo complejo no será monovaluado.

1.12.2 Funciones trigonométricas

De manera similar a la exponencial, el seno y el coseno de un número complejo vienen definidos por las series convergentes

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (1.125)$$

cuya manipulación algebraica,

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = e^{iz}, \quad (1.126)$$

permite generalizar la fórmula de Euler,

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z. \quad (1.127)$$

Puesto que las funciones coseno y seno en esta expresión están definidas por potencias pares e impares respectivamente, tenemos que dichas funciones son par e impar bajo el cambio $z \rightarrow -z$,

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z), \quad (1.128)$$

y, por tanto,

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z. \quad (1.129)$$

Combinando (1.127) y (1.129), podemos expresar el seno y el coseno en términos de funciones exponenciales complejas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.130)$$

y verificar las expresiones

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \quad (1.131)$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2, \quad (1.132)$$

para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y la relación fundamental de la trigonometría,

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (1.133)$$

con todas las implicaciones algebraicas que eso conlleva. Además, debido a la última propiedad en (1.121), se tiene $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ y $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$.

Del mismo modo, se pueden extender al caso complejo todas las demás funciones trigonométricas como la tangente,

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad (\cos z \neq 0), \quad (1.134)$$

la cotangente,

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\tan z}, \quad (\operatorname{sen} z \neq 0) \quad (1.135)$$

la secante,

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad (\cos z \neq 0), \quad (1.136)$$

y la cosecante

$$\operatorname{csc} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad (\operatorname{sen} z \neq 0). \quad (1.137)$$

Nótese que

$$\operatorname{sen} z = 0 \longrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \longrightarrow e^{2iz} = 1 \longrightarrow z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1.138)$$

y, análogamente.

$$\operatorname{cos} z = 0 \longrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (1.139)$$

1.12.3 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas también pueden extenderse al plano complejo mediante una extensión de su desarrollo en series convergentes,

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{cosh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (1.140)$$

o de manera más simple a través de las relaciones

$$\operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (1.141)$$

de las cuales se sigue inmediatamente la relación fundamental

$$\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \quad (1.142)$$

y las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(iz) &= i \operatorname{sen} z, & \operatorname{sen}(iz) &= i \operatorname{senh} z, \\ \operatorname{cosh}(iz) &= \operatorname{cos} z, & \operatorname{cos}(iz) &= \operatorname{cosh} z, \end{aligned} \quad (1.143)$$

con las funciones trigonométricas. Tenemos, por ejemplo,

$$\operatorname{senh}(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = i \operatorname{sen} z. \quad (1.144)$$

Tomando $z = x + iy$ se sigue también que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \operatorname{cos} x \operatorname{senh} y, & \operatorname{senh} z &= \operatorname{senh} x \operatorname{cos} y + i \operatorname{cosh} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{cos} z &= \operatorname{cos} x \operatorname{cosh} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y, & \operatorname{cosh} z &= \operatorname{cosh} x \operatorname{cos} y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Nótese que aunque que las funciones seno y coseno en estas expresiones conservan su periodicidad característica a lo largo de la dirección del eje real ($f(z) = f(z + 2\pi k)$, k entero), divergen exponencialmente en la dirección del eje imaginario ($y \rightarrow \infty$). Por otro lado, las funciones hiperbólicas correspondientes, muestran periodicidad a lo largo de la dirección imaginaria ($f(z) = f(z + i2\pi n)$, n entero) y divergen exponencialmente en la dirección real ($x \rightarrow \infty$). Ninguna de estas funciones es, por tanto, acotada.

Las demás funciones hiperbólicas se definen análogamente al caso trigonométrico. Por ejemplo, tenemos

$$\operatorname{tanh} z \equiv \frac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{cosh} z} = -i \tan(iz) \quad (\operatorname{cosh} z \neq 0). \quad (1.146)$$

1.12.4 Logaritmos

La determinación de funciones inversas de la exponencial y las funciones trigonométricas e hiperbólicas requiere precauciones especiales debido a sus propiedades de periodicidad. Por ejemplo, a diferencia de lo que ocurre en la exponencial real, la exponencial compleja toma el mismo valor para un número infinito de números complejos,

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.147)$$

Con esto en mente, definimos el logaritmo de un número complejo no nulo z como todos los números complejos w tales que $e^w = z$. Las soluciones a esta ecuación vienen dadas por

$$\log z = \text{Log } |z| + i \arg z, \quad (1.148)$$

con Log el logaritmo real.

Ejemplo: Determinación de $w = x + iy$ en $e^w = 1 + i$

Para determinar el número complejo $w = x + iy$ tal que $e^w = 1 + i$, expresamos el número complejo $z = 1 + i$ en coordenadas polares, obteniendo

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sen y) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sen(\pi/4)).$$

Comparando módulos y argumentos, tenemos

$$x = \text{Log } \sqrt{2}, \quad y = \pi/4 + 2\pi k, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y, por tanto,

$$\log(1 + i) = \text{Log } \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k),$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Nótese que, aunque Log es una función, \log es multivaluada debido a \arg . La *determinación del logaritmo* se sigue de la *determinación del argumento*,

$$\log_I z = \text{Log } |z| + i \arg_I z. \quad (1.149)$$

Definido de esta manera $\log_I z$ es univaluado. El precio a pagar por esto es que $\log_I z$ no es continuo a lo largo del eje negativo real. Nótese además que

La *determinación principal del logaritmo* se corresponde de nuevo con una elección de intervalo $(-\pi, \pi]$. Puesto que el argumento principal de los números reales es 0, la determinación principal del logaritmo de un número real coincide con su logaritmo real. Esto nos permite escribir

$$\text{Log } z = \log_{(-\pi, \pi]} z = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z. \quad (1.150)$$

1.12.5 Potencias

La función potencia compleja se puede definir a través función de logaritmo complejo,

$$z^w = e^{w \log z}, \quad (1.151)$$

adquiriendo también sus ambigüedades. Nótese que, en general, si $z \neq 0$, $z^{w_1+w_2} \neq z^{w_1} z^{w_2}$.

Ejemplo: Cálculo de 2^i

$$\begin{aligned} 2^i &= \exp(i \log 2) = \exp(i(\operatorname{Log} 2 + i2\pi k)) \\ &= \exp(-2\pi k + i \operatorname{Log} 2) = e^{-2\pi k} (\cos(\operatorname{Log} 2) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Log} 2)), \end{aligned}$$

con k entero.

La función de potencia compleja nos proporciona una alternativa a la factorización y fórmula de De Moivre para el cálculo de raíces n -ésimas de números complejos.

Ejemplo: Raíces cúbicas de $2i$

Para calcular las raíces cúbicas $2i$ podemos escribir

$$(2i)^{1/3} = \exp\left(\frac{1}{3} \log 2i\right),$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \log(2i) &= \operatorname{Log} 2 + i(\pi/2 + 2\pi k), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{3} \log(2i) &= \frac{1}{3} \operatorname{Log} 2 + i(\pi/6 + 2\pi k/3). \end{aligned}$$

Tenemos, por tanto, tres raíces

$$\exp\left(\frac{1}{3} \log(2i)\right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) \right)$$

para $k = 0, 1, 2$, todas con magnitud $\sqrt[3]{2}$.

1.12.6 Derivadas de las funciones elementales

Las funciones exponenciales, seno, coseno, seno hiperbólico y coseno hiperbólico son diferenciables en todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\partial}{\partial z} e^z = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z, \quad (1.152)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{sen} z = \cos z, \quad \frac{\partial}{\partial z} \cos z = -\operatorname{sen} z, \quad (1.153)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{senh} z = \cosh z, \quad \frac{\partial}{\partial z} \cosh z = \operatorname{senh} z, \quad (1.154)$$

Las funciones tangente y tangente hiperbólicas son diferenciables en todo el plano complejo, salvo en los ceros del coseno y el coseno hiperbólico, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial z} \tan z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \forall z \neq \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.155)$$

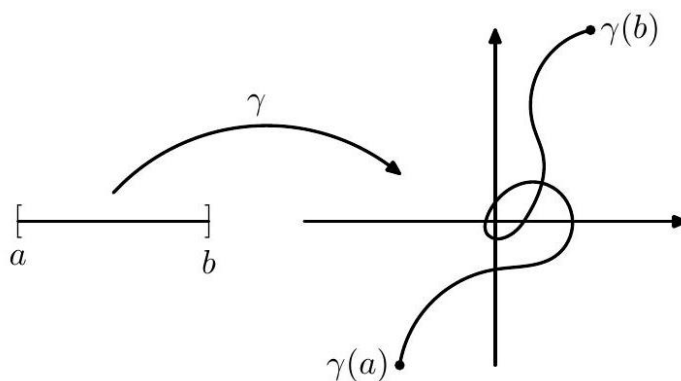
$$\frac{\partial}{\partial z} \tanh z = \frac{1}{\cosh^2 z}, \quad \forall z \neq \pi i/2 + k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.156)$$

El logaritmo principal es diferenciable en todo el plano complejo, excepto en el eje real no positivo. En este conjunto, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} \log z = \frac{1}{z}. \quad (1.157)$$

2.1 Curvas y contornos

- **Caminos:** Un *camino* $z = \gamma(t)$ es una parametrización continua a través de una variable real t que varía en un intervalo $[\alpha, \beta]$ que asumimos finito. Los puntos $a = \gamma(\alpha)$ y $b = \gamma(\beta)$ se llaman *extremos*. Si estos coinciden, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, el camino se llama *cerrado*.



Algunos caminos usuales son, por ejemplo, el segmento de origen a y extremo b ,

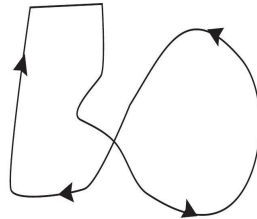
$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1-t)a + bt, \quad (2.1)$$

y la circunferencia de centro a y radio r ,

$$\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) = a + re^{it}. \quad (2.2)$$

- **Camino simple:** Un camino se llama *simple* si la parametrización γ es continua y biyectiva en el intervalo (α, β) de variación del parámetro. En la práctica, esto es

equivalente a requerir que el camino no se corte a sí mismo, es decir, que no tenga nodos u otros puntos que se obtienen para dos o más valores distintos de t , $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ para todo $t, t' \in [\alpha, \beta]$. La siguiente curva, por ejemplo, *no es simple*,



- **Camino de Jordan:** Un camino simple y cerrado se llama *camino de Jordan* (la biyectividad se pierde solo en los extremos).
- **Camino diferenciable:** Un camino se dice *diferenciable* o *regular* si es posible definir una dirección tangente al camino en cada punto del mismo, o en otras palabras, si la parametrización admite una derivada $\gamma'(t)$ continua y no nula en cada punto. estas condiciones excluyen el caso en el que recorremos la curva deteniéndonos en un punto (sin velocidad, no conocemos la dirección del movimiento), o cuando hay más de una dirección tangente.
- **Camino rectificable:** Un camino $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ se dice *rectificable* si “en casi todas partes”¹ tiene una derivada $\gamma'(t)$ con un valor absoluto integrable que define la longitud del camino, i.e.

$$L_\gamma = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (2.3)$$

Obviamente, un camino es diferenciable a trozos también es rectificable.

- **Caminos equivalentes:** Dos caminos $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ se dicen *equivalentes* si uno se obtiene a partir del otro mediante un cambio de variable adecuado, o más formalmente si existe una función $\tau : [\alpha_1, \beta_1] \xrightarrow{\text{sur}} [\alpha_2, \beta_2]$ continua, sobreyectiva y estrictamente creciente, tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ para cada $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.
- **Curvas:** La clase de caminos equivalentes según la relación de equivalencia anterior se llama *curva*, siendo está determinada únicamente por su trayectoria geométrica y no por la manera en que se recorre. Nótese, sin embargo, que, al haber requerido que el cambio de variable entre caminos equivalentes se exprese a través de una función creciente que mantiene el orden de los puntos a lo largo de la curva, la dirección de recorrido sigue siendo relevante. Diremos que una curva cerrada limitando una región D se recorre en el *sentido o dirección positiva* si al hacerlo dicha región queda a la

¹Más concretamente, en todas partes, excepto en un conjunto finito de puntos de (α, β) en los cuales tiene límites laterales distintos.

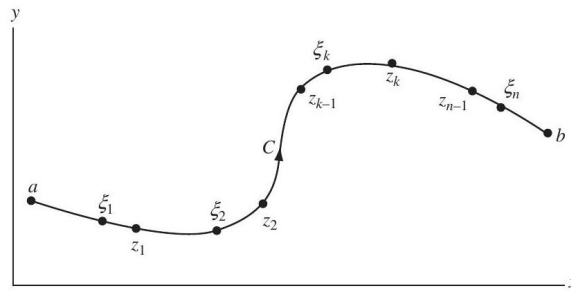
izquierda de la curva. Por ejemplo, en el caso de un círculo centrado en el origen, la dirección positiva es la *dirección en sentido antihorario*.

Las mismas condiciones y definiciones aplicables a caminos se extienden naturalmente a las curvas, definiendo definir los conceptos de curva de Jordan, rectificable y diferenciable (siempre y cuando el cambio de variable τ este dado por una función diferenciable, continua y con derivada estrictamente positiva).

2.2 Integrales de línea y contorno

Consideremos ahora la integración de funciones $f(z)$ de variable compleja $z = x + iy$ a lo largo de curvas γ en el plano complejo. A menos que se especifique lo contrario, asumiremos siempre que estas curvas son rectificables y no se cruzan a sí mismas.

Sea $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ la ecuación paramétrica de una curva γ en el plano complejo, con $t_1 \leq t \leq t_2$ un parámetro real y $x(t)$ e $y(t)$ funciones unívocas, reales, continuas y derivables, con derivadas primeras continuas.



Dividiendo el arco situado entre los puntos terminales de la curva en n intervalos, $z_0 = a, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$, y eligiendo un punto adicional ζ_k en cada arco $z_{k-1}z_k$, evaluamos el límite $n \rightarrow \infty$ de la suma

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \tag{2.4}$$

con $\Delta z_k \equiv z_k - z_{k-1}$ y $|\Delta z_k| \rightarrow 0$ para cada k , definiendo en caso de existir la llamada *integral de línea* de $f(z)$ a lo largo de la curva γ ,

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{2.5}$$

Las *integrales de línea* a lo largo curvas cerradas con puntos terminales coincidentes reciben el nombre de *integrales de contorno* y vienen denotadas como

$$I = \oint_{\gamma} f(z) dz. \tag{2.6}$$

Las propiedades fundamentales de las integrales de línea son análogas a las de las integrales ordinarias. En particular, tenemos linealidad,

$$\int_{\gamma} [af(z) + bg(z)]dz = a \int_{\gamma} f(z)dz + b \int_{\gamma} g(z)dz, \quad (2.7)$$

y aditividad con respecto al intervalo,

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz. \quad (2.8)$$

Esta última propiedad permite definir integrales para curvas que no sean simples. Además, podemos recorrer la curva $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ en sentido inverso $(-\gamma)(t) = \gamma(\beta + \alpha - t)$ (variando t de t_2 a t_1),

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz, \quad (2.9)$$

y considerar cambios de variable complejos a través de transformaciones de coordenadas $z = z(\zeta)$ invertibles y con Jacobiano no nulo,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z(\zeta)) \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} d\zeta, \quad (2.10)$$

con γ y γ' imágenes una de la otra, $\gamma = z(\gamma')$.

2.3 Primitivas

Supongamos que una función $f(z)$ pueda expresarse como la derivada de una función primitiva $F(z)$ en una región abierta del plano complejo que contiene la curva γ ,

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz}. \quad (2.11)$$

Si $f(z)$ es continua, esta propiedad nos permite recuperar el llamado teorema fundamental del cálculo integral o regla de Barrow,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{dF(z)}{dz} dz = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dF(z(t))}{dt} dt = F(z) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.12)$$

Nótese que la integral no depende del camino, sino solo de los extremos a y b . En particular, para un camino cerrado γ con extremos coincidentes $a = b$ tenemos


$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} \frac{dF(z)}{dz} dz = 0. \quad (2.13)$$

Además, si todas las derivadas existen y son continuas, podemos escribir

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f(z) \frac{dg(z)}{dz} + \frac{df(z)}{dz} g(z), \quad (2.14)$$

y

$$\int_{\gamma} \frac{df(z)}{dz} g(z) dz = f(z)g(z) \Big|_{z=a}^{z=b} - \int_{\gamma} \frac{dg(z)}{dz} f(z) dz. \quad (2.15)$$

Ejemplo: Evaluación de la integral de línea $\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt$ 

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt = -\frac{e^{-2it}}{2i} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Ejemplo: Evaluación de la integral de contorno $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ a lo largo de una curva γ 

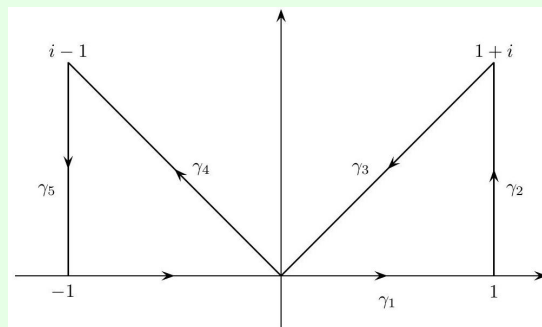
Para calcular la integral

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz$$

en un contorno cerrado γ definido por las condiciones

$$\begin{cases} y = 0 & -1 \leq x \leq 1, \\ x = 1 & 0 \leq y \leq 1, \\ y = x & 0 \leq x \leq 1, \\ y = -x & -1 \leq x \leq 0, \\ x = -1 & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

dividimos la curva en los cinco caminos diferenciables $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ y γ_5 indicados en la figura.



Para γ_1 ,

$$z(t) = t, \quad |z(t)|^2 = t^2, \quad dz(t) = dt, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

obtenemos

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

Para γ_2 ,

$$z(t) = 1 + it, \quad |z(t)|^2 = 1 + t^2, \quad dz(t) = i dt, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

obtenemos

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 dz = i \int_0^1 (1 + t^2) dt = i \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} i.$$

Para γ_3

$$z(t) = (1+i)t, \quad |z(t)|^2 = 2t^2, \quad dz(t) = (1+i)dt, \quad 1 \geq t \geq 0,$$

obtenemos

$$\int_{\gamma_3} |z|^2 dz = 2(i+i) \int_1^0 t^2 dt = \frac{2}{3}(1+i)t^3 \Big|_1^0 = -\frac{2}{3}(1+i).$$

Para γ_4 ,

$$z(t) = (i-1)t, \quad |z(t)|^2 = 2t^2, \quad dz(t) = (i-1)dt, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

se tiene

$$\int_{\gamma_4} |z|^2 dz = 2(i-1) \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}(i-1)t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(i-1).$$

Para γ_5 ,

$$z(t) = -1+it, \quad |z(t)|^2 = 1+t^2, \quad dz(t) = idt, \quad 1 \geq t \geq 0,$$

encontramos

$$\int_{\gamma_5} |z|^2 dz = i \int_1^0 (1+t^2) dt = i \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -\frac{4}{3}i.$$

Sumando las 5 contribuciones, se tiene finalmente

$$\oint_{\gamma} dz |z|^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i - \frac{2}{3}(1+i) + \frac{2}{3}(i-1) - \frac{4}{3}i = -\frac{2}{3}.$$

2.4 Desigualdad de Darboux

Si $f(z)$ es una función holomorfa en una región simplemente conexa D y γ es un camino rectificable en D , podemos acotar la suma (2.4) que define la integral (2.5) para $n \rightarrow \infty$ mediante desigualdad triangular generalizada,

$$|I_n| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq \max_{\gamma} |f(z)| \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq \max_{\gamma} |f(z)| L_{\gamma}, \quad (2.16)$$

y con ello el módulo de la integral de una función compleja f a lo largo de una curva γ ,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| L_{\gamma}, \quad (2.17)$$

con $|f(z)|$ el valor absoluto de la $f(z)$ y L_{γ} la longitud de la curva en el plano complejo. En otras palabras, la desigualdad de Darboux establece que el valor absoluto de una integral

compleja a lo largo de un camino es acotado por el máximo valor absoluto de la función $f(z)$ en ese camino, multiplicado por la longitud del camino. Esta desigualdad es extremadamente útil para estimar el valor de integrales complejas, ya que proporciona una forma de acotar el valor absoluto de la integral sin calcular la integral en sí.

Ejemplo: $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right|$ en el arco del círculo $|z| = 3$ entre $z = 3$ y $z = 3i$

Teniendo en cuenta que para $|z| = 3$

$$|\bar{z}^2 + \bar{z} + 1| \geq |\bar{z}^2| - |\bar{z}| - 1 = |z|^2 - |z| - 1 = 5, \quad \left| \frac{1}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \leq \frac{1}{5},$$

tenemos

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \leq \frac{6\pi}{4} \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} < \frac{9\pi}{16}.$$

2.5 Teorema de Cauchy

El análisis de la sección 2.3 asume la existencia de una primitiva para demostrar que el valor de la integral depende solo de los puntos extremos, lo cual no está garantizado para funciones complejas genéricas. Este si es el caso, sin embargo, de las funciones holomorfas en un disco, para las cuales la nulidad de la integral a lo largo de una trayectoria cerrada simple, garantiza la independencia del camino entre los puntos extremos. Este resultado se resume en el llamado teorema (integral) de Cauchy.²



Teorema de Cauchy

Sea $f(z)$ una función holomorfa en una región abierta simplemente conexa D , entonces, si γ es una curva de Jordan, regular a trozos, contenida en D , se cumple

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (2.18)$$

Además, f admite una primitiva en D .

Aunque la formulación del teorema es extremadamente simple, su demostración general es algo laboriosa y no la consideraremos aquí. Nos conformaremos con demostrarlo con la asunción adicional de que $f'(z)$ es continua. Esta última condición nos permite hacer uso

²En su forma original, el teorema requería una hipótesis adicional, es decir, no solo que $f(z)$ fuera derivable, sino también que dicha derivada fuera continua. Posteriormente, Goursat se dio cuenta de que la derivada de una función holomorfa siempre es continua y demostró que la continuidad de la derivada no es necesaria. Con base en esto, el teorema también es conocido como el teorema de Cauchy-Goursat.

del teorema de Green en \mathbb{R}^2 , el cual relaciona la integral de línea de un campo vectorial $F = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre una curva cerrada γ (con P y Q continuas y con derivadas parciales continuas) con una integral doble sobre el recinto D que encierra la curva,

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.19)$$

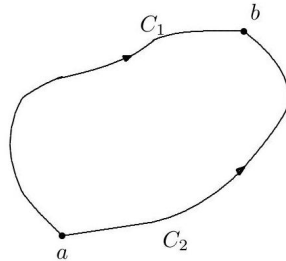
En particular, separando $f(z)$ y dz en sus partes reales e imaginarias, $f = u + iv$ y $z = x + iy$,

$$\oint_{\gamma} f dz = \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy), \quad (2.20)$$

y usando el teorema de Green en ambas integrales obtenemos

$$\oint_{\gamma} f = - \oint_B (u_y + v_x) dx dy + i \oint_B (u_x - v_y) dx dy = 0, \quad (2.21)$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta las condiciones de holomorfismo en (1.96). Como anticipamos, este resultado garantiza que la integral de contorno entre dos puntos en un dominio de holomorfismo simplemente conexo no dependa del camino elegido para conectar los dos puntos. En particular, dada la unión de dos curvas arbitrarias C_1 y C_2 conectando dos puntos fijos a y b , con una de ellas recorrida en sentido inverso,

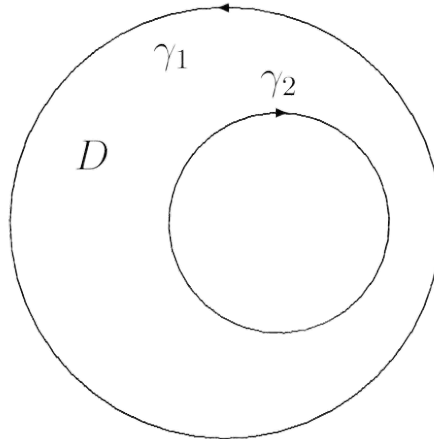


se tiene que

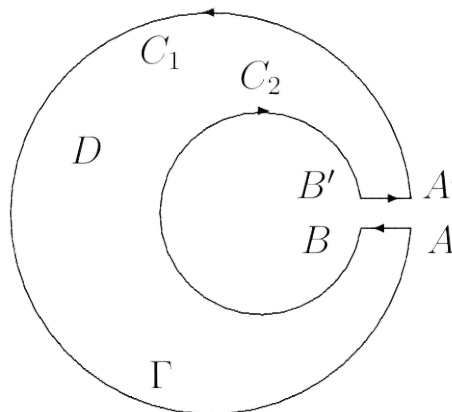
$$0 = \oint_{C_1 \cup \{-C_2\}} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz. \quad (2.22)$$

En este caso, tiene sentido hablar de $\int_a^b f(z) dz$, ya que la integral no depende del camino.

El teorema de Cauchy se puede extender a regiones múltiplemente conexas que se vuelven simplemente conexas mediante la formación de barreras o líneas de corte. En este caso, es importante prestar atención a la orientación relativa de las diversas curvas que componen la curva total. En particular, dichas curvas deben tener una orientación relativa de manera que, desde un mismo lado, encierren una región conexa en la cual la función es holomorfa. Consideremos por ejemplo una función $f(z)$ holomorfa en un dominio abierto D como el de la figura, con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ y γ_1 y γ_2 dos curvas de Jordan recorridas respectivamente en sentido antihorario y horario. En particular, la orientación es tal que las curvas tienen una región a su izquierda que está completamente contenida en D .



Abriendo γ_1 y γ_2 y agregando segmentos orientados que conecten dichas curvas sin cambiar las orientaciones anteriores, podemos obtener una sola curva cerrada Γ , regular a trozos.



Puesto que la nueva curva Γ rodea ahora una región simplemente conexa donde $f(z)$ es holomorfa, podemos aplicar sin problemas el teorema de Cauchy en la formulación (2.18),

$$0 = \oint_{\Gamma} f(z)dz = \left(\int_{C_1} + \int_{AB} + \int_{C_2} + \int_{B'A'} \right) f(z)dz. \quad (2.23)$$

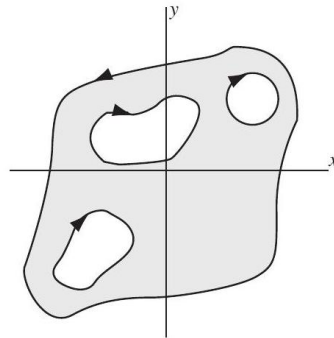
Nótese ahora que, en el límite en que A y B se acercan infinitesimalmente a A' y B' , las integrales a lo largo de los segmentos orientados AB y $B'A'$ se anulan entre sí, mientras que las integrales a lo largo de los arcos C_1 y C_2 se aproximan a las integrales en las curvas cerradas γ_1 y γ_2 . Tenemos, por tanto, que

$$\left(\oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} \right) f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (2.24)$$

Este resultado es fácilmente extensible a regiones con un mayor número de “agujeros”. En particular, en una región conexa, la integral de una función holomorfa a lo largo de una curva

de Jordan γ recorrida en sentido antihorario está dada por la suma de integrales a lo largo de las curvas que rodean los agujeros contenidos en γ , recorridas en sentido horario,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_k \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 0. \quad (2.25)$$



Además de ilustrar la aplicabilidad del Teorema de Cauchy a regiones múltiplemente conexas, el resultado (2.24) prueba el llamado *Teorema de deformación de circuitos*.



Teorema de deformación de circuitos

Si una función es holomorfa en una región limitada por dos curvas de Jordan disjuntas γ y γ' recorridas en sentido antihorario, entonces

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma'} f(z)dz. \quad (2.26)$$

En otras palabras, una trayectoria cerrada puede ser modificada libremente y de manera continua, siempre y cuando dichas modificaciones ocurran dentro de la región de holomorfismo del integrando y las características topológicas de la curva permanezcan inalteradas.

2.6 Representación integral de Cauchy

A partir del teorema de Cauchy, es posible derivar una fórmula integral de gran importancia para el desarrollo de la teoría y con una amplia variedad de aplicaciones en problemas físicos.



Teorema de representación integral de Cauchy

Dada una función $f(z)$ holomorfa en una región abierta y simplemente conexa D , y una curva de Jordan γ , regular a trozos y recorrida en sentido antihorario (positivo), se

cumple que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ está en el interior de } \gamma, \\ 0 & \text{si } z \text{ está en el exterior de } \gamma. \end{cases} \quad (2.27)$$

Si z está fuera de la curva γ , el resultado del teorema es inmediato, ya que el integrando

$$g(z') = \frac{f(z')}{z' - z} \quad (2.28)$$

es holomorfo en todo el interior de la curva γ y, por tanto, según el teorema de Cauchy, su integral a lo largo de ella es idénticamente cero,

$$\oint_{\gamma} g(z') dz' = 0. \quad (2.29)$$

Para demostrar el teorema en el caso en el que z está dentro de la curva γ , tendremos en cuenta que, debido a su diferenciabilidad, la función $f(z)$ es continua en D , existiendo, por tanto, un número positivo $\delta > 0$ tal que $|z' - z| < \delta(\epsilon)$ para cada entorno $|f(z') - f(z)| < \epsilon$ de z . Parametrizando en sentido antihorario un círculo Γ con centro en z y radio $r < \delta(\epsilon)$ suficientemente pequeño para que el círculo esté dentro de γ ,

$$z'(\theta) = z + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z' \in \Gamma, \quad (2.30)$$

tenemos

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| = \frac{|f(z') - f(z)|}{r} < \frac{\epsilon}{r}, \quad (2.31)$$

Utilizando ahora la desigualdad de Darboux,

$$\left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz' \right| \leq \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon, \quad (2.32)$$

y teniendo en cuenta que

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z' - z} dz' = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = 2\pi i f(z), \quad (2.33)$$

podemos escribir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz'}_{=0} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z' - z} dz' = 2\pi i f(z). \quad (2.34)$$

Puesto que el integrando $f(z')/(z' - z)$ en el lado izquierdo de la expresión anterior es holomorfo en cada punto $z' \neq z$, la integral sobre la circunferencia Γ es igual a la integral sobre γ , permitiéndonos escribir

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 2\pi i f(z), \quad (2.35)$$

lo cual concluye la prueba del teorema. Nótese que, salvo que $f(z')$ se anule para $z' \rightarrow z$, la integral en esta expresión no existe para $z \in \gamma$.

Ejemplo: $\int_{\gamma} \frac{2dz}{z^2-1}$ en círculo γ de radio $1/2$, centro $z = 1$, orientado positivo. 

Escribiendo el integrando en la forma

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1},$$

obtenemos

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z^2-1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz.$$

La primera integral puede calcularse usando la fórmula integral de Cauchy (2.35), obteniendo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i.$$

La segunda integral es nula por el teorema de Cauchy, puesto que su integrando es analítico dentro de γ

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz = 0.$$

Tenemos, por tanto,

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z^2-1} dz = 2\pi i.$$

Una de las consecuencias más importantes de la fórmula integral es que la derivada de una función holomorfa en un dominio es también holomorfa.³ En particular, escribiendo la expresión (2.35) en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz', \quad (2.36)$$

y teniendo la continuidad de $f(z')$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{f(z')}{z' - z - \Delta z} - \frac{f(z')}{z' - z} \right] \frac{dz'}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^2} dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{f(z')}{z' - z - \Delta z} - \frac{f(z')}{z' - z} - \frac{f(z')\Delta z}{(z' - z)^2} \right] \frac{dz'}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Si el integrando en último término está acotado, la correspondiente integral se anula en el límite $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\left| \oint_{\gamma} \left[\frac{f(z')}{z' - z - \Delta z} - \frac{f(z')}{z' - z} - \frac{f(z')\Delta z}{(z' - z)^2} \right] \frac{dz'}{\Delta z} \right| = \left| \oint_{\gamma} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)^2 (z' - z - \Delta z)} \right| |\Delta z| \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0,$$

³Nótese, por el contrario, que la derivabilidad de funciones reales de variable real no implica en absoluto que las derivadas de la función sean nuevamente derivables.

dando lugar a una representación integral para la derivada

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^2} dz'. \quad (2.37)$$


Este resultado se puede generalizar por inducción a derivadas superiores,

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz', \quad (2.38)$$

permitiéndonos concluir que para si una función de variable compleja es derivable una vez (garantizando, por tanto, la continuidad), esta será derivable a cualquier orden. En otras palabras, las funciones holomorfas son "suaves" en su dominio de holomorfismo y no presentan saltos o zonas puntiagudas.

2.7 Teorema de Morera

El llamado teorema de Morera puede entenderse como el "inverso" del teorema de Cauchy.

 **Teorema de Morera**

Si la integral de una función continua en una región abierta y conexa D se anula para cada curva cerrada, simple y regular por tramos en D ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (2.39)$$

entonces $f(z)$ es holomorfa en D .

La demostración es sencilla. El hecho de que la integral se anule para cualquier curva γ nos dice que $f(z)$ no depende del camino, permitiéndonos definir

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz', \quad (2.40)$$

con z_0 un punto fijo en D y z variable en D . Teniendo en cuenta ahora la continuidad de $f(z)$,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^z \right) f(z') dz' = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z') dz'. \quad (2.41)$$

separando explícitamente dicha función en la integral,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(z) + f(z') - f(z)) dz' = f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(z') - f(z)) dz',$$

y teniendo en cuenta la desigualdad de Darboux,

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)] dz' \right| \leq \max_{z' \in [z, z+\Delta z]} |f(z') - f(z)| \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0, \quad (2.42)$$

concluimos que la función $F(z)$ es holomorfa (derivable)

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z). \quad (2.43)$$

Puesto que $f(z)$ es la derivada de una función holomorfa, es también holomorfa, completando la demostración del teorema.

2.8 Teorema de Liouville



Teorema de Liouville

Si una función de variable compleja $f(z)$ es holomorfa y acotada por una constante M , $|f(z)| < M$, en todo el plano complejo, entonces f es constante.

Para demostrar el teorema consideremos una circunferencia de radio r y centro z_0 en el plano complejo que encierra otro punto $z_1 \in \mathbb{C}$. De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, podemos escribir

$$f(z_1) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z_1} dz' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' = \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_1)(z' - z_0)}. \quad (2.44)$$

Teniendo en cuenta que

$$|z - z_0| = r, \quad |z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \geq |z - z_0| - |z_0 - z_1| = r - |z_0 - z_1| \geq r/2, \quad (2.45)$$

y escogiendo r lo suficientemente grande para como para que $|z_0 - z_1| < r/2$, obtenemos

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi} \left| \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_1)(z - z_0)} \right| \leq \frac{|z_1 - z_0| M (2\pi r)}{2\pi (r/2) r} = \frac{2|z_1 - z_0| M}{r}, \quad (2.46)$$

Puesto que $|f(z_1) - f(z_0)| \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, $f(z)$ debe ser necesariamente constante, como queríamos demostrar.

Demostración del teorema fundamental del álgebra

El teorema de Liouville proporciona una de las demostraciones más sencillas del teorema fundamental del Álgebra, el cual establece que toda ecuación polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$, con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$ tiene por lo menos una raíz. En particular, si $P(z) = 0$ no tuviera ningún cero, la función $f(z) = 1/P(z)$

sería analítica en todo el plano complejo, estando además acotada para $|z| \rightarrow \infty$ (en concreto, $|f(z)| = 1/|P(z)|$ tiende a cero cuando $|z| \rightarrow \infty$). De acuerdo con el teorema de Liouville esto implicaría que $f(z)$, y por ende $P(z)$, deberían ser constante, lo cual es obviamente una contradicción. Se concluye, por tanto, que $P(z) = 0$ debe tener por lo menos una raíz.

3.1 Series de potencias y criterios de convergencia

Consideremos una serie de potencias infinita centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad (3.1)$$

con $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ y $a_n \in \mathbb{C}$. De manera análoga al caso real podemos introducir diferentes criterios de convergencia:

- **Convergencia puntual:** Se dice que la serie converge puntualmente a una función $f(z)$ en un dominio D si y solo si, para cada z ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^k f_n(z) - f(z) \right) = 0. \quad (3.2)$$

- **Convergencia absoluta:** Se dice que la serie converge absolutamente si lo hace la serie de sus valores absolutos, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$. La convergencia absoluta de una serie implica su convergencia puntual.

Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse de cualquier manera, y todas esas series reordenadas convergen a la misma suma. Asimismo, la suma, la diferencia y el producto de series absolutamente convergentes es absolutamente convergente. Esto no es cierto, sin embargo, para series condicionalmente convergentes.


- **Convergencia condicional:** Se dice que la serie es condicionalmente convergente si esta converge, pero no lo hace la serie de sus valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$.

- **Convergencia uniforme:** Se dice que una serie de potencias infinita $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a una función $f(z)$ en un dominio D si y solo si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sup_{z \in D} \left| \sum_{n=0}^k f_n(z) - f(z) \right| \right] = 0. \quad (3.3)$$

3.1.1 Criterios de convergencia

- **Criterio de comparación:** Si $\sum |g_n(z)|$ converge y $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|$, entonces $\sum f_n(z)$ converge absolutamente. Sin embargo, si $\sum |g_n(z)|$ diverge y $|f_n(z)| \geq |g_n(z)|$, $\sum |f_n(z)|$ diverge, pero $\sum f_n(z)$ puede converger o no.

Ejemplo: Convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ en $|z| \leq 1$. 

Puesto que $|z| \leq 1$ podemos escribir

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Identificando $f_n(z) = z^n/n(n+1)$ y $g_n(z) = 1/n^2$, aplicando el criterio de comparación y teniendo en cuenta que la suma $\sum 1/n^2$ es una serie p convergente, concluimos que $\sum |f_n(z)|$ converge, y, por tanto, que $\sum f_n(z)$ converge absolutamente.

- **Criterio del cociente:** Dado el límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{n+1}(z)/f_n(z)|$, la serie $\sum f_n(z)$ converge (absolutamente) si $L < 1$ y diverge si $L > 1$ (o $L = +\infty$). Si $L = 1$, este criterio no proporciona información.

Ejemplo: Convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ 

Excluyendo el punto $z = 0$ para el que la serie converge y aplicando el criterio del cociente, obtenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z| = \infty.$$

Por tanto, la serie converge únicamente para $z = 0$.

- **Criterio de la raíz n -ésima:** Dado el límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|}$, la serie $\sum f_n(z)$ converge (absolutamente) si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ o no existe, esta prueba

no proporciona información.

Ejemplo: Convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Aplicando el criterio de la raíz a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ y teniendo en cuenta la relación $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, obtenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{z^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < 1.$$

La serie es absolutamente convergente para todo z en el plano complejo.

- **Fórmula de Cauchy-Hadamard:** La fórmula de Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (3.4)$$

permite determinar el radio de convergencia R de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ con $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ y $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$. Esta fórmula involucra el límite superior,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k)$$

un concepto matemático definido como el límite del supremo o mínimo límite superior de una secuencia x_n . Es decir, estamos tomando el supremo de todos los términos a partir del término n -ésimo hasta el final de la secuencia y tomando el límite cuando n tiende a infinito. En términos simples, este resultado nos dice que el radio de convergencia de la serie está relacionado con la tasa de crecimiento de los coeficientes a_n . Si el límite $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, la serie converge absolutamente para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$. Si el límite es ∞ , el radio de convergencia es $R = 0$, indicando convergencia solo en el centro de la serie.

Ejemplo: Convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) z^n$

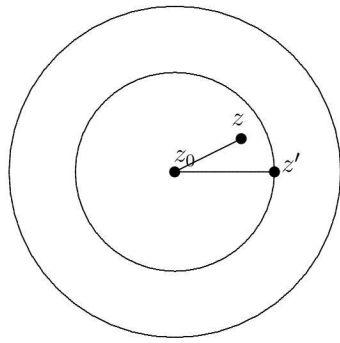
Los criterios del cociente y la raíz n -ésima no permiten determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) z^n$, puesto que los límites de las sucesiones $|\sin n|/|\sin(n+1)|$ y $\sqrt[n]{|\sin n|}$ no existen. El criterio de Cauchy-Hadamard es, sin embargo, aplicable. Puesto

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sin n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|\sin k|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.!$$

el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

3.2 Series de Taylor

Una de las propiedades más importantes de las funciones holomorfas es que son desarrollables en series de Taylor. En concreto, dada una función de variable compleja $f(z)$ holomorfa en el interior de un disco D de centro $z = z_0$ y radio r , podemos escribir



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz', \quad (3.5)$$

con $z \in D$ y γ una circunferencia centrada en z_0 y contenida en D , con z en su interior.¹ Reescribiendo el kernel $1/(z' - z)$ en la integral (3.5) como una serie geométrica

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{(z' - z_0)}} = \frac{1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n, \quad (3.6)$$

con $n > 0$ y

$$\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1, \quad (3.7)$$

obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \quad (3.8)$$

Puesto que la serie de potencias en esta expresión es uniformemente convergente dentro de su radio de convergencia, podemos integrar cada sumando de manera individual, obteniendo una expansión en *serie o desarrollo de Taylor*,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dz^n}, \quad (3.9)$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta la representación integral para la derivada en (2.37). Nótese que la expansión (3.9) deja de ser válida si la circunferencia γ encuentra

¹Dicha circunferencia puede por supuesto deformarse en cualquier otra curva cerrada, siempre y cuando esta no incluya puntos singulares de la función y contenga z_0 en su interior.

un punto en el que $f(z)$ no es holomorfa o derivable en sentido complejo. Esto determina el *radio de convergencia de la serie*.

Ejemplo: Serie de potencias de $f(z) = z \sin z$ en torno a $z_0 = \pi$ 

Para calcular la serie de potencias de $f(z) = z \sin z$ en torno a $z_0 = \pi$, calculamos sus derivadas,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sin z + z \cos z, \\ f''(z) &= 2 \cos z - z \sin z, \\ f'''(z) &= -3 \sin z - z \cos z, \\ f^{(iv)}(z) &= -4 \cos z + z \sin z, \\ &\vdots \\ f^{(2n+1)}(z) &= (-1)^n (2n+1) \sin z + (-1)^n z \cos z, \\ f^{(2n)}(z) &= (-1)^{n+1} (2n) \cos z + (-1)^n z \sin z. \end{aligned}$$

Evaluando en $z = z_0 = \pi$, y usando la segunda expresión en (3.9), podemos identificar fácilmente los siguientes coeficientes de la serie de Taylor,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= -\pi, & a_2 &= -1, & a_3 &= \frac{\pi}{3!} \\ a_4 &= \frac{1}{3!}, & a_5 &= -\frac{\pi}{5!}, & a_6 &= -\frac{1}{5!}, \end{aligned}$$

o de manera más general

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}, \quad a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2n+1}.$$

La correspondiente serie de Taylor de $f(z) = z \sin z$ en torno a $z_0 = \pi$ toma, por tanto, la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= -\pi(z-\pi) - (z-\pi)^2 + \frac{\pi}{3!} \cdot (z-\pi)^3 + \frac{1}{3!} \cdot (z-\pi)^4 - \frac{\pi}{5!} \cdot (z-\pi)^5 + \dots \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n-1)!}. \end{aligned}$$


Este método proporciona una manera sistemática de calcular la serie de Taylor de una de función holomorfa dada y su correspondiente radio de convergencia. Para expansiones en torno a $z_0 = 0$ (llamadas usualmente *series de Maclaurin*), tenemos por ejemplo²

²En el caso de funciones multívocas utilizamos la rama principal.

Función	Serie en torno a $z_0 = 0$	Radio de convergencia
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$ z < 1$
$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$	$ z < 1$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$ z < \infty$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$ z < \infty$
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$ z < \infty$
$\log(1+z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$	$ z < 1$
$(1+z)^\beta$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} z^n$	$ z < 1$

El conjunto de puntos del dominio donde una función es analítica se llama *dominio de analiticidad* de la función. Si el dominio de analiticidad coincide con todo el plano complejo (es decir, si la función es desarrollable en series de potencias en un entorno de cada punto con un radio de convergencia infinito), la función se llama *entera*. Por ejemplo, las funciones e^z , $\sin z$, $\cos z$ en la tabla anterior son funciones enteras. Viceversa, si una serie de potencias tiene un radio de convergencia infinito, la serie representa una función entera.

En determinadas ocasiones es posible obtener la expansión en serie de potencias mediante trucos y manipulaciones algebraicas, evitando así el tedioso cálculo de coeficientes que acabamos de ilustrar en el ejemplo anterior.

Ejemplo: Serie de potencias de $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}$ en torno a $z_0 = 0$ 

Para calcular la serie de potencias de $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}$ en torno a $z_0 = 0$, podemos hacer uso de la expansión

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots$$

válida para $|\alpha| < 1$. Tomando en particular $\alpha = z^2$, obtenemos

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$$

Derivando a ambos lados de esta expresión,

$$\frac{2z}{(1-z^2)^2} = 2z + 4z^3 + 6z^5 + \dots,$$

y multiplicando por $z/2$, tenemos

$$\frac{z^2}{(1-z^2)^2} = z^2 + 2z^4 + 3z^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{2n}.$$

El resultado (3.9) ilustra el hecho de que toda función holomorfa es también analítica o desarrollable en series de potencias y viceversa. Esta última propiedad es una consecuencia directa del teorema de Morera, que establece que toda función analítica es también holomorfa. De hecho, desarrollando $f(z)$ en serie de potencias en un entorno del origen³ dentro del radio de convergencia,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R, \quad (3.10)$$

e integrando el resultado término a término⁴ a lo largo de una curva cerrada γ dentro también del radio de convergencia,

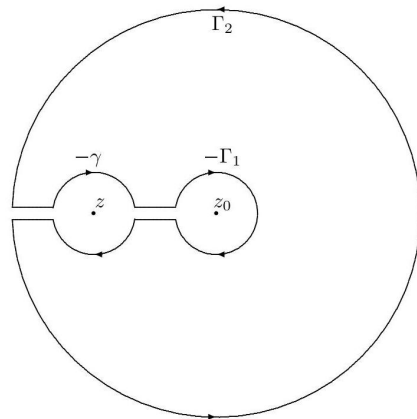
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{\gamma} z^n dz = 0, \quad (3.11)$$

verificamos fácilmente que $f(z)$ cumple el mencionado teorema, siendo, por tanto, holomorfa dentro del radio de convergencia. Este resultado permite utilizar indistintamente los términos holomorfa y analítica.

3.3 Series de Laurent

Hemos visto que si una función es holomorfa en un punto z_0 y en todo su entorno circular, entonces puede ser desarrollada en una serie de Taylor alrededor de ese punto. A continuación, desarrollaremos un nuevo tipo de serie doblemente infinita de gran utilidad.

Consideremos una función $f(z)$ holomorfa en una región anular o corona circular $r_1 < |z - z_0| < r_2$ alrededor de un punto z_0 en el cual $f(z)$ no es necesariamente holomorfa. Dado un punto z dentro de la corona circular y una curva cerrada a trozos C compuesta por los arcos y segmentos en la figura y encerrando una región simplemente conexa en la que $f(z)$ es holomorfa, podemos escribir



$$\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0. \quad (3.12)$$

Eliminando los segmentos como hicimos en la sección 2.5, obtenemos

³No es restrictivo considerar el origen.

⁴Nótese que z^n es holomorfa para cada $n > 0$.

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0, \quad (3.13)$$

o equivalentemente

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz'. \quad (3.14)$$

Puesto que la curva γ en este límite sin segmentos contiene z , la representación integral de Cauchy en (2.27) nos permite escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz'}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz'}_{I_1} \equiv I_2 - I_1. \quad (3.15)$$

Escribiendo el kernel $1/(z' - z)$ en I_2 como

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} = \frac{1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}}, \quad (3.16)$$

y teniendo en cuenta que para $z' \in \Gamma_2$,

$$\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1, \quad (3.17)$$

la integral sobre Γ_2 en (3.15) se puede expresar en términos de potencias positivas de $z - z_0$,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz', \quad (3.18)$$

en perfecta analogía con la serie de Taylor. Por el contrario, para $z' \in \Gamma_1$ tenemos

$$\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < 1. \quad (3.19)$$

Escribiendo el correspondiente denominador en la integral I_1 en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - z} &= -\frac{1}{z - z'} = -\frac{1}{z - z_0 - (z' - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n < 0} \frac{1}{(z' - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (3.20)$$

obtenemos una serie uniformemente convergente que se puede integrar término a término,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n < 0} \left[\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \right] (z - z_0)^n = -\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.21)$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'. \quad (3.22)$$


Combinando finamente las ecuaciones (3.15), (3.18) y (3.21), y teniendo en cuenta que las curvas de integración en la región de holomorfismo pueden variarse libremente para unificar Γ_1 y Γ_2 en una única curva de Jordan Γ con z_0 en su interior, obtenemos la llamada *serie o desarrollo de Laurent*⁵

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz', \quad (3.23)$$

involucrando en general potencias positivas y negativas en cada punto z dentro de la corona. Según esta demostración, el radio menor de la corona delimita un disco en el plano complejo fuera del cual la serie de potencias negativas converge, mientras que el radio exterior identifica un disco dentro del cual la serie de potencias positivas converge. Nótese en particular que no se excluye el caso $r_1 = 0$ y que $r_2 = \infty$ si $f(z)$ es holomorfa en todas partes, excepto en el punto z_0 o un entorno del mismo.

La suma de potencias positivas se conoce como la *parte analítica de la serie de Laurent de $f(z)$ en $z = z_0$* , mientras que el resto de la serie, que consta de potencias negativas, recibe el nombre de *parte principal de la serie de Laurent de $f(z)$ en $z = z_0$* . Si la parte principal es cero, la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor. El coeficiente a_{-1} recibe el nombre de *residuo*

$$a_{-1} \equiv \text{Res}(f, z_0).$$

Ejemplo: Serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}$ en la corona $1 < |z| < 2$ 

El primer término de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}$$

admite una expansión de Taylor en el disco $|z| < 2$,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Aunque el segundo término admite una expansión de Taylor en el disco $|z| < 1$, lo que necesitamos realmente es una expansión fuera de este disco. Para obtenerla factorizamos $1/z$ y expandimos el resultado en potencias de $1/z$ con radio de convergencia $|1/z| < 1$, es decir, $|z| > 1$,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

⁵Aunque los coeficientes de esta serie son formalmente los mismos que los del desarrollo en serie de Taylor, estos no son ahora expresables mediante la derivada n -ésima de $f(z)$ en el punto z_0 .

La serie de Laurent de $f(z)$ en el anillo $1 < |z| < 2$ es, por tanto,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

3.4 Ceros y Singularidades

3.4.1 Ceros

Si una función holomorfa $f(z)$ se anula en un punto $z = z_0$, ese punto recibe el nombre de *cero* de $f(z)$, siendo el *orden* n del mismo determinado por las condiciones

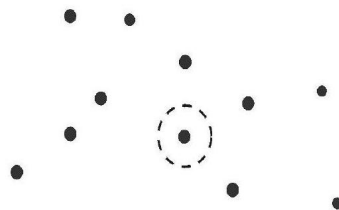
$$f(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \dots = \frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}}(z_0) = 0, \quad \frac{d^n f}{dz^n}(z_0) \neq 0. \quad (3.24)$$

En este caso, si $f(z)$ es holomorfa en un entorno de z_0 incluyendo z_0 , los primeros n coeficientes de su serie de Taylor son idénticamente nulos, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, permitiéndonos escribir

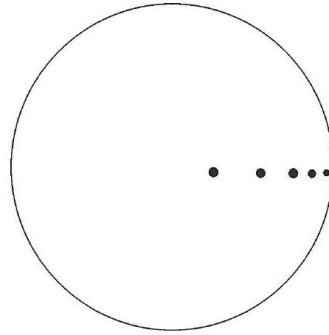
$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n g(z), \quad (3.25)$$

con $g(z)$ una función holomorfa, regular y no nula en $z = z_0$, y por continuidad no nula en todo un entorno de z_0 . Esto implica a su vez la existencia de un entorno completo de z_0 en el cual la función $f(z)$ es no nula. El punto z_0 es, por tanto, un *cero aislado*.

Si es imposible determinar el orden del cero de una función holomorfa $f(z)$ en un entorno completo de z_0 , o equivalentemente, si todas sus derivadas son nulas en ese punto, la expansión en serie de Taylor impone que $f(z)$ sea idénticamente nula en ese entorno. Esto implica en particular que los ceros de una función analítica son necesariamente aislados, formando a lo sumo un conjunto discreto sin *puntos de acumulación* en el dominio de holomorfismo, como en la figura. Una función que es analítica en todas partes del plano complejo, excepto en una cantidad finita de polos, se llama función *meromórfica*.



Por el contrario, si un punto z_0 es un punto de acumulación de ceros para una función $f(z)$ no nula, entonces necesariamente será un punto no holomorfo de la función.



Ejemplo:

La función $f(z) = \sin z$ tiene infinitos ceros en $z = k\pi$. Sin embargo, dado que el dominio de f es todo el plano complejo, estos no tienen ningún punto de acumulación, no existiendo, por tanto, ninguna contradicción en que f no sea idénticamente cero.

3.4.2 Polos o singularidades aisladas

Las series de Laurent permiten clasificar singularidades aisladas. En concreto, si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en un punto $z = z_0$ y es analítica dentro de un disco centrado en ese punto, pero excluyéndolo, podemos desarrollar la función en una *serie de Laurent* alrededor de z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (3.26)$$

Es claro que si $f(z)$ es singular en z_0 , al menos uno de los coeficientes a_{-n} es necesariamente no nulo. En particular:

- Si $a_{-1} \neq 0$ y todos los demás coeficientes de las potencias negativas son nulos, decimos que z_0 es un polo simple.
- Si $a_{-n} \neq 0$ y $a_{-(n+1)} = a_{-(n+2)} = \dots = a_{-(n+k)} = \dots = 0$, el punto z_0 se llama *polo de orden n* . En este caso, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^n} \left[a_{-n} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{n-1} + \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^{n+k} \right] \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{-n+k} (z - z_0)^k = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

con $h(z)$ una función regular y no nula en z_0 y por continuidad en todo un entorno del mismo. En otras palabras, si una función $f(z)$ tiene un polo de orden n , la función recíproca $1/f(z)$ tiene un cero de orden n en el mismo punto.

- Si número de coeficientes no nulos para las potencias negativas a_{-n} es infinito, el punto z_0 se llama *singularidad esencial aislada*. La característica más importante de una singularidad esencial se desprende del teorema de Weierstrass, que establece que si una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial aislada en un punto z_0 , entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe algún punto z con $|z - z_0| < \delta$ tal que

$$|f(z) - a| < \epsilon, \quad (3.28)$$

con a un número complejo arbitrario. En otras palabras, en cualquier entorno de una singularidad esencial aislada z_0 , la función $f(z)$ varía tan rápida y ampliamente que puede tomar cualquier valor complejo.

Ejemplo: Desarrollo en serie de $f(z) = e^{1/z}$

La función $e^{1/z}$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en el origen, donde presenta una singularidad esencial. Su expansión en serie de Laurent de $e^{1/z}$ en torno a este punto contiene de hecho un número infinito de potencias negativas,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

3.4.3 Singularidades evitables

Si $f(z)$ no está definida en un punto $z = z_0$ pero existe el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces $z = z_0$ es una *singularidad evitable*. En tal caso, la función $f(z)$ en $z = z_0$ se define como $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, con lo que $f(z)$ es analítica en z_0 .

Ejemplo: Desarrollo en serie de $f(z) = \sin z/z$

La singularidad de $f(z) = \sin z/z$ en $z = 0$ es una singularidad evitable, puesto que el límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

existe y podemos definir

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

De hecho, dicha singularidad aparente puede eliminarse mediante un mero truco algebraico,

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Si definimos $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, la función f está dada por la suma de la serie anterior para todo $z \in \mathbb{C}$, y es, por tanto, entera.

3.4.4 Puntos en el infinito

Las consideraciones anteriores se extienden de manera natural al estudio de una función analítica en el infinito. En particular, realizando el cambio de variable $z = 1/\zeta$ y definiendo $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta)$, podemos estudiar el comportamiento de una función $f(z)$ en $z = \infty$ a través del comportamiento de $\varphi(\zeta)$ en $\zeta = 0$. Diremos así que $z = \infty$ es un cero de orden n , un polo de orden n , o una singularidad esencial aislada de $f(z)$, si $\zeta = 0$ es respectivamente un cero de orden n , un polo de orden n , o una singularidad esencial aislada de $\varphi(\zeta)$.

4.1 Residuos

Consideremos una función analítica $f(z)$ en una región abierta D , excluyendo un punto z_0 en el que $f(z)$ tiene una singularidad aislada. Dada una curva de Jordan γ en torno a z_0 , regular a trozos, orientada en sentido positivo y contenida en D , la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (4.1)$$

define el residuo de $f(z)$ en z_0 ,

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (4.2)$$

Esta definición se extiende también a puntos regulares de la función, siendo el residuo nulo en ese caso por el teorema de Cauchy.

Ejemplo: Residuos y física de fluidos

Físicamente, el valor del residuo determina la importancia de la singularidad. Consideremos por ejemplo el caso del fluido en dos dimensiones analizado en la Sección 1.11.1. Como vimos allí, la función de variable compleja $f(z)$ asociada al movimiento solenoidal e irrotacional de dicho fluido es completamente regular. La introducción de fuentes, sumideros o vórtices da lugar a violaciones de las condiciones de Cauchy-Riemann y, por tanto, del carácter holomorfo de $f(z)$. El residuo de la función en ese punto caracteriza precisamente la intensidad de la violación. En particular, dada una curva cerrada γ en torno a una singularidad aislada z_0 , la separación de la ecuación

(4.2) en partes reales e imaginarias implica

$$\oint_{\gamma} (u dx - v dy) = -2\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} ,$$

$$\oint_{\gamma} (u dy + v dx) = 2\pi \operatorname{Re} \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} .$$

Expresando estas integrales de contorno en términos de las componentes del campo de velocidades identificadas en la Sección 1.11.1, $u(x, y) = V_x(x, y)$ y $v(x, y) = -V_y(x, y)$, obtenemos las relaciones

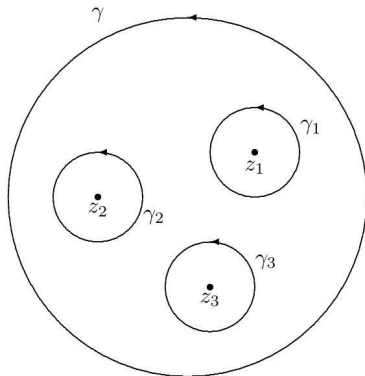
$$\oint_{\gamma} (V_x dx + V_y dy) = \oint_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{\tau} ds = -2\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} ,$$

$$\oint_{\gamma} (V_x dy - V_y dx) = \oint_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 2\pi \operatorname{Re} \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} ,$$

con $\vec{\tau}$ y \vec{n} los vectores tangente y normal a la curva γ . La parte imaginaria del residuo resulta, por tanto, proporcional a la intensidad del vórtice en $z = z_0$, con el signo del mismo indicando la dirección de rotación. La parte real del residuo es, por otro lado, proporcional a la intensidad de emisión de la fuente o absorción del sumidero, según el signo del mismo.

4.2 Teorema de los residuos

Consideremos ahora la integración de una función de variable compleja $f(z)$ a lo largo de una curva cerrada γ que rodea un número finito m de singularidades aisladas z_j ($j = 1, \dots, m$). Encerrando cada una de estas singularidades en el interior de una serie de circunferencias γ_j conectadas a γ mediante pares de segmentos infinitesimalmente próximos, podemos recorrer el contorno de integración de manera conexa, es decir, sin atravesar puntos singulares de $f(z)$. Haciendo coincidir la dirección de integración en cada circunferencia γ_j con la de la curva γ , la integral sobre γ se convierte en una integral sobre todas las “islas” contenidas en esta,



$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \oint_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_j}$$

(4.3)

donde en el último paso hemos hecho uso de la definición (4.2). Esta fórmula aparentemente trivial constituye el llamado *Teorema de los Residuos*, un resultado de alcance extraordinario

que, como veremos en la sección 4.4, nos permitirá calcular integrales definidas difícilmente abordables por métodos tradicionales de variable real. Pero antes de eso, veamos como calcular residuos de manera eficiente.

4.2.1 Residuos de polos de orden n mediante límites y derivadas

Como vimos en la sección 3.4.2, si $z = z_0$ es un polo de orden n , la función $f(z)$ en un entorno de z_0 puede escribirse como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (4.4)$$

con $g(z)$ una función regular y no nula en z_0 . Teniendo en cuenta la representación integral (2.38), esto implica que

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z)|_{z=z_0}, \quad (4.5)$$

o equivalentemente

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)], \quad (\text{polo de orden } n), \quad (4.6)$$

con γ una curva en torno a z_0 . Esta expresión proporciona un método útil para calcular los residuos asociados a singularidades de tipo polar, tomando una forma particularmente sencilla para polos simples,

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad (\text{polo simple}). \quad (4.7)$$

Si dicho polo simple surge además de un cociente

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (4.8)$$

con $q(z_0) = 0$, podemos escribir el residuo como

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{q(z) - q(z_0)} p(z), \quad (4.9)$$

o equivalentemente

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}, \quad (\text{polo simple}). \quad (4.10)$$

Ejemplo: Residuos de $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

La función $f(z)$ tiene un polo doble en $z = -1$ y dos polos simples en $z = \pm 2i$. Teniendo en cuenta la expresión (4.6), el residuo en $z = -1$ está dado por

$$\text{Res } f(z)|_{z=-1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right] = -\frac{14}{25}.$$

Análogamente, los residuos en $z = \pm 2i$ son respectivamente

$$\text{Res } f(z)|_{z=+2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} \left[(z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right] = -\frac{4+4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25},$$

$$\text{Res } f(z)|_{z=-2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} \left[(z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right] = -\frac{4-4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}.$$

4.2.2 Residuos de polos de orden n mediante la serie de Laurent

Si una función $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 y es holomorfa en un anillo en torno a dicho punto, podemos realizar un desarrollo de la misma en serie de Laurent. Al examinar la expresión para los coeficientes a_n en (3.23), observamos en particular que el coeficiente a_{-1} proporciona directamente el residuo de la función

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \equiv \text{Res } f(z)|_{z=z_0}. \quad (4.11)$$

Ejemplo: Residue of $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$

Expandiendo en serie

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^2(z - \frac{z^3}{6} + \dots)} = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots \end{aligned}$$

e identificando el coeficiente a_1 tenemos

$$\text{Res } f(z)|_{z=0} = \frac{1}{6}.$$

4.2.3 Residuos en el infinito

Para estudiar el residuo de una función en el infinito, construiremos una curva de Jordan γ_∞ encerrando todas las singularidades finitas de la función y recorrida en sentido antihorario. Reinterpretando dicha curva como una curva $-\gamma_\infty$ en torno a $z = \infty$ recorrida en sentido horario (es decir, con el infinito a su izquierda o interior), podemos escribir

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_\infty} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\infty} f(z) dz. \quad (4.12)$$

Para evaluar esta integral, realizamos el cambio de variable compleja $z = 1/\zeta$ introducido en la sección 3.4.4. Bajo esta transformación conforme, el punto al infinito se convierte en $\zeta = 0$, y la curva γ_∞ se transforma en una curva γ_0 en torno al origen, pero recorrida en sentido opuesto, es decir γ_∞ se transforma en $-\gamma_0$. Teniendo en cuenta además que

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta^2}, \quad (4.13)$$

obtenemos finalmente

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = -\operatorname{Res} \left\{ f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} \right\} \Big|_{\zeta=0}, \quad (4.14)$$

con γ_0 orientada en sentido antihorario.

Ejemplo: Residuo de $f(z) = \frac{1}{z}$ en el infinito

Existen funciones de variable compleja que, aun siendo regulares en el infinito, tienen un residuo no nulo en dicho punto. Por ejemplo, aunque la función $f(z) = 1/z$ tiene un único punto singular en $z = 0$ con residuo

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=0} = 1,$$

su residuo en el punto regular $z = \infty$ ($\zeta = 0$, $f(1/\zeta) = \zeta$) es no nulo,

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = -\operatorname{Res} \left\{ f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} \right\} \Big|_{\zeta=0} = -1.$$

Nótese que la suma de ambos residuos es idénticamente cero.

Nótese que las consideraciones de la sección anterior se aplican también al residuo en el infinito. En particular, si una función $f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent en un

anillo circular $r < |z| < \infty$, con r apropiado,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \cdots + \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad (4.15)$$

tenemos

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} = \cdots + a_{-3}\zeta + a_{-2} + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_0}{\zeta^2} + \frac{a_1}{\zeta^3} + \cdots, \quad (4.16)$$

y, por tanto,

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=\infty} = -a_{-1}. \quad (4.17)$$

En otras palabras, el residuo de una función $f(z)$ en $z = \infty$ coincide con el opuesto del coeficiente de $1/z$ en el desarrollo asintótico de $f(z)$ alrededor de $z = \infty$.

4.3 Suma de todos los residuos

El ejemplo de la sección anterior ilustra un resultado completamente general y de gran utilidad práctica. Consideremos una función $f(z)$ holomorfa en todo el plano complejo excepto en un número finito de singularidades aisladas incluyendo potencialmente el punto en el infinito. Dada una curva de Jordan γ , orientada positivamente y no atravesando ninguna singularidad, los resultados de la sección anterior nos permiten expresar la correspondiente integral de camino en términos de los residuos interiores a la curva,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{internos}} \operatorname{Res} f(z), \quad (4.18)$$

o alternativamente en términos de los residuos exteriores a ella, incluido el punto en el infinito,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{\text{externos}} \operatorname{Res} f(z). \quad (4.19)$$

La suma de todos los residuos, tanto internos como externos a la curva, es, por tanto, nula,

$$\sum_{\text{total}} \operatorname{Res} f(z) = 0. \quad (4.20)$$

4.4 Cálculo de integrales definidas

La aplicación del teorema de los residuos (4.3) se extiende de manera significativa al cálculo de integrales definidas de funciones reales a lo largo del eje real. Dicho cálculo involucra no solo la determinación de una función de variable compleja adecuada, sino también la elección ingeniosa de una trayectoria cerrada. En la práctica, los tipos más comunes son los siguientes:

1. Integrales de funciones racionales de senos y cosenos *sin singularidades en el círculo* $x^2 + y^2 = 1$,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) dt. \quad (4.21)$$

2. Integrales de función racionales de variable real $R(x)$ sin singularidades en el eje real y tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x R(x) = 0$.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx. \quad (4.22)$$

3. Integrales de tipo Fourier

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{l} e^{\pm ix} \\ \cos mx \\ \text{sen } mx \end{array} \right\} dx. \quad (4.23)$$

4. Integrales de diversa índole con contornos especiales.

A continuación analizamos cada uno de estos casos en detalle.

4.4.1 Integrales con senos y cosenos

Consideremos una integral de la forma

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) dt \quad (4.24)$$

con $R(x, y)$ una función racional (cociente de dos polinomios) *sin singularidades en el círculo* $x^2 + y^2 = 1$. Parametrizando la circunferencia unitaria en el plano complejo por $z = e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$ y teniendo en cuenta que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (4.25)$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta, \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz, \quad (4.26)$$

podemos interpretar I_1 como una integral de contorno sobre el círculo $|z| = 1$ de una nueva función $\tilde{R}(z)$,

$$I_1 = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) dz = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz. \quad (4.27)$$

Puesto que R es una función racional, $\tilde{R}(z)$ es también racional, y, por tanto, holomorfa en todo el plano complejo, salvo en un número finito de polos *dentro* o *fuera* del círculo $|z| = 1$, pero no en él ¹ Por el teorema de los residuos tenemos, por tanto,

$$I_1 \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) dt = 2\pi i \sum_{|z_p| < 1} \operatorname{Res} \tilde{R}(z) \Big|_{z=z_p}, \quad (4.28)$$

con la suma extendida a todos los polos z_p dentro del círculo de radio unitario.

Ejemplo: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$

Introduciendo $z = e^{i\theta}$ y teniendo en cuenta las relaciones (4.25) y (4.26) podemos escribir

$$\cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2},$$

y

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{(z^3 + z^{-3})/2}{5-4(z+z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1+z^6}{z^3(2z-1)(z-2)} dz.$$

El integrando de esta expresión presenta un polo triple en $z = 0$, un polo simple $z = 1/2$ y un polo simple en $z = 2$. De estos, solo el polo triple y el polo simple en $z = 1/2$ están en el interior de la circunferencia $|z| = 1$. Teniendo en cuenta la expresión (4.6), los correspondientes residuos están dados por

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right]_{z=0} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right] = \frac{21}{8},$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right]_{z=1/2} = \lim_{z \rightarrow 1/2} \left[\left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right] = -\frac{65}{24}.$$

Por el teorema de los residuos, tenemos, por tanto, que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{2i} \oint_{\Gamma_L} \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz = -\frac{1}{2i} (2\pi i) \left[\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right] = \frac{\pi}{12}.$$

¹Nótese que una singularidad en la circunferencia $|z| = 1$ implicaría una singularidad de $R(x, y)$ en $x^2 + y^2 = 1$, contradiciendo las suposiciones realizadas.

4.4.2 Integrales a lo largo de todo el eje real

Consideremos ahora integrales de la forma

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \quad (4.29)$$

con $R(x)$ una función racional de variable real sin singularidades en el eje real y tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} xR(x) = 0 \quad (\text{criterio de convergencia}). \quad (4.30)$$

Interpretando (4.29) como el límite $L \rightarrow \infty$ de una integral $I_2(L)$ definida en un segmento entre $-L$ y L ,

$$I_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} R(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} I_2(L), \quad (4.31)$$

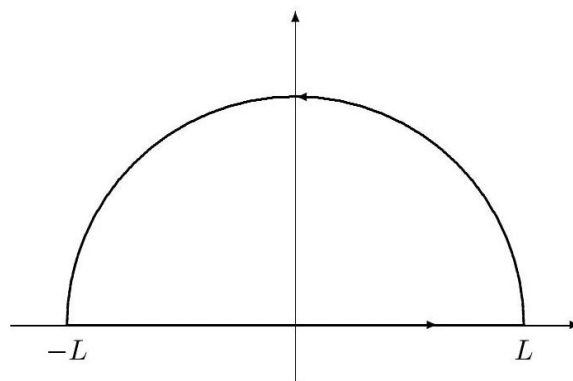
y complejizando $R(x)$ mediante la sustitución del argumento real x por una variable compleja $z = x + iy$, obtenemos una integral

$$\int R(z) dz \quad (4.32)$$

con $R(z)$ una función racional (cociente de dos polinomios) convergente en todo el plano complejo,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zR(z) = 0, \quad (4.33)$$

y conteniendo potencialmente un número finito de singularidades de tipo polar en puntos z_k fuera del eje real. Para aplicar el teorema de los residuos elegimos un camino cerrado Γ_L en el plano complejo compuesto del segmento entre $-L$ y L y una semicircunferencia C_L de radio L en el semiplano superior, como se muestra en la figura.



El valor del radio L se asume lo suficientemente grande como para que todos los polos en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ estén contenidos en el interior de Γ_L , permitiéndonos escribir

$$\oint_{\Gamma_L} R(z) dz = I_2(L) + \int_{C_L} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res } R(z)|_{z=z_k}. \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta que la combinación del teorema de Darboux y el criterio de convergencia (4.33) garantiza que la contribución sobre el arco C_L se anule en el límite $L \rightarrow \infty$,

$$\left| \int_{C_L} R(z) dz \right| \leq \pi L \sup_{z \in C_L} |R(z)| \quad \longrightarrow \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{C_L} R(z) dz = 0, \quad (4.35)$$

obtenemos finalmente

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_L} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res } R(z)|_{z=z_k}. \quad (4.36)$$

Ejemplo: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

Usando el hecho de que el integrando es par, podemos reescribir la integral buscada como una integral entre $-\infty$ e ∞ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

El integrando de la correspondiente expresión de variable compleja

$$\oint_{\Gamma_L} \frac{dz}{z^6+1} = \int_{-L}^L \frac{dx}{x^6+1} + \int_{C_L} \frac{dz}{z^6+1},$$

presenta polos simples ($z^6+1=0$) en $z = e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$. De todos estos, solo los polos en $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}$ y $e^{5\pi i/6}$ están dentro del contorno Γ_L . Identificando $R(z) = 1/(z^6+1)$ y utilizando la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Res } R(z)|_{z=e^{\pi i/6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left[(z - e^{\pi i/6}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6}, \\ \text{Res } R(z)|_{z=e^{3\pi i/6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left[(z - e^{3\pi i/6}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2}, \\ \text{Res } R(z)|_{z=e^{5\pi i/6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left[(z - e^{5\pi i/6}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6}, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\oint_{\Gamma_L} \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{6} e^{-5\pi i/6} + \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2} + \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6} \right] = \frac{2\pi}{3}.$$

Teniendo en cuenta que la contribución de la integral sobre la circunferencia C_L se anula cuando $L \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{dx}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}, \quad \longrightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

4.4.3 Integrales de tipo Fourier

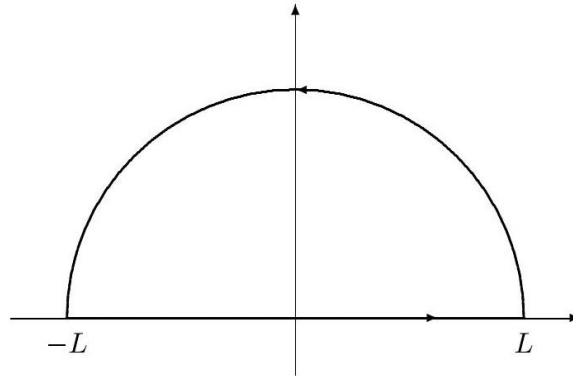
Consideremos ahora una integral de tipo Fourier

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx, \quad (4.37)$$

donde asumimos que la extensión compleja $f(z)$ es holomorfa en el semiplano $\text{Im } z \geq 0$, excluyendo a lo sumo un número finito de singularidades *fuera del eje real*. Al igual que en el caso anterior interpretaremos (4.37) como el límite $L \rightarrow \infty$ de una integral $I_3(L)$ definida en un segmento entre $-L$ y L ,

$$I_3 = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{ix} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} I_3(L), \quad (4.38)$$

Promoviendo de nuevo el integrando al plano complejo mediante la sustitución del argumento real x por una variable compleja $z = x + iy$ y eligiendo un camino cerrado Γ_L compuesto por el segmento entre $-L$ y L y una semicircunferencia C_L de radio L en el semiplano superior,



podemos escribir

$$\oint_{\Gamma_L} f(z) e^{iz} dz = I_3(L) + \int_{C_L} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} [f(z) e^{iz}]_{z=z_k}. \quad (4.39)$$

Utilizando el teorema de Darboux y la simetría de la función $\sin \theta$ respecto a $\theta = \pi/2$, podemos expresar el valor absoluto de la integral sobre C_L en un intervalo $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ en función del supremo de $|f(Le^{i\theta})|$ en dicho arco, $M(L) = \sup_{z \in C_L} |f(z)|$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_L} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Le^{i\theta}) e^{iLe^{i\theta}} iLe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(Le^{i\theta})| Le^{-L \sin \theta} d\theta \leq M(L) \int_{\theta_1}^{\theta_2} Le^{-L \sin \theta} d\theta \\ &\leq M(L) \int_0^{\pi} Le^{-L \sin \theta} d\theta = 2M(L) \int_0^{\frac{\pi}{2}} Le^{-L \sin \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Teniendo ahora en cuenta que la función $\sin \theta$ está comprendida entre la cuerda $y = 2\theta/\pi$ y la tangente $y = \theta$,

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta, \quad (4.41)$$

podemos escribir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-L \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^L e^{-x} dx = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-L}) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.42)$$

acotando con ello el valor de la integral sobre C_L ,

$$\left| \int_{C_L} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \pi M(L) \quad (4.43)$$

Por tanto, si $M(L)$ tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$, tenemos

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_L} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} [f(z) e^{iz}]_{z=z_k}. \quad (4.44)$$

La demostración anterior incluye la prueba del llamando *lema de Jordan*.



Lema de Jordan

Dada una función $f(z)$ definida en el semiplano superior con $\text{Im } z > 0$ y $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ uniformemente con respecto al ángulo en un sector $0 \leq \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2 \leq \pi$, entonces

$$\int_{C_L} f(z) e^{iz} dz \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad (4.45)$$

con C_L el arco de la circunferencia en dicho sector. Análogamente, si $\lim_{|z| \rightarrow 0} f(z) = 0$, entonces


$$\int_{C_L} f(z) e^{iz} dz \xrightarrow{L \rightarrow 0} 0. \quad (4.46)$$

Elección del contorno de integración

Nótese que si la integral de tipo Fourier involucra una exponencial con coeficiente negativo,

$$I_3^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix} dx, \quad (4.47)$$

es necesario cerrar el contorno de integración por el semiplano inferior $\text{Im } z < 0$, ya que el término e^{-iz} con z complejo diverge en el semiplano superior. De manera general, en presencia de un factor $e^{\alpha z}$ con α complejo, es necesario considerar el semiplano para el cual $|e^{\alpha z}| \leq 1$.

Ejemplo: $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ 

Usando el hecho de que el integrando es par, podemos reescribir la integral buscada como una integral entre $-\infty$ e ∞ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Teniendo en cuenta ahora que esta expresión corresponde a la parte real de una función $e^{iz}/(z^2+1)$ y escogiendo un contorno de integración Γ_L en el semiplano superior, podemos escribir

$$\oint_{\Gamma_L} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)} dz = \int_{-L}^L \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_L} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)} \right]_{z=z_k}.$$

El integrando en esta ecuación tiene 2 polos simples en $z = \pm i$, pero solo uno de ellos, $z = i$, está en el interior de Γ_L . Teniendo en cuenta (4.7), el correspondiente residuo está dado por

$$\text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)} \right]_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{1}{2ei}.$$

Tenemos, por tanto, que

$$\int_{-L}^L \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_L} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{1}{2ei} = \frac{\pi}{e},$$

y por ende

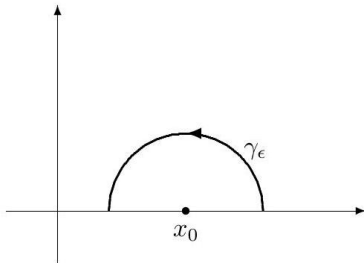
$$\int_{-L}^L \frac{\cos x}{x^2+1} dx + i \int_{-L}^L \frac{\sin x}{x^2+1} dx + \int_{C_L} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}.$$

Puesto que la integral sobre C_L tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$, esto implica

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = 0.$$

4.4.4 Integrales con polos simples en el camino de integración

Si el integrando tiene un punto singular a lo largo del camino de integración, es posible evitarlo mediante la elección de un contorno de integración “infinitesimalmente cercano” a este. Para ilustrar este procedimiento consideremos una función $f(x)$ con un polo simple en un punto $x = x_0$ del eje real y evaluemos la integral de la función $f(z)$ asociada sobre una semicircunferencia positivamente orientada y de radio infinitesimal $\epsilon \rightarrow 0$ en torno a dicho punto,



$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.48)$$

Puesto que x_0 es un polo simple, es siempre posible escribir

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - x_0} + g(z), \quad (4.49)$$

con $g(z)$ una función regular en un entorno de x_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow x_0} (z - x_0) g(z) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz = 0. \quad (4.50)$$

Considerando ahora una parametrización $z = x_0 + \epsilon e^{i\theta}$ para la semicircunferencia γ_ϵ , obtenemos²

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{a_{-1}}{z - x_0} dz = a_{-1} \int_0^\pi i d\theta = \pi i a_{-1}, \quad (4.51)$$

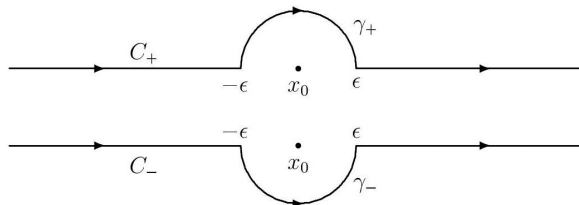
y por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z=x_0}. \quad (4.52)$$

Este resultado es de especial utilidad en la evaluación de integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad (4.53)$$

con $f(x)$ una función regular para todo x real que tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y x_0 un punto en el eje real. Para ver esto, consideremos la integral de una función $f(z)/(z - x_0)$ con $f(z)$ holomorfa a lo largo de un cortorno de integración coincidente esencialmente con el eje real pero evitando la singularidad mediante una semicircunferencia γ_+ de radio $\epsilon > 0$ por encima de ella o una semicircunferencia γ_- de radio $\epsilon > 0$ por debajo de ella,



²Aunque en este caso concreto el camino de integración elegido se extiende a toda la semicircunferencia, $0 \leq \theta \leq \pi$, la lógica aquí presentada es válida también para otro tipo de arcos de circunferencia. En tal caso, el factor π en las ecuaciones (4.51) y (4.52) se ve reemplazado por el ángulo correspondiente a dicho arco de circunferencia.

$$\begin{aligned} \int_{C_+} \frac{f(z)}{z-x_0} dz &= \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{z-x_0} dz, \\ \int_{C_-} \frac{f(z)}{z-x_0} dz &= \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z-x_0} dz. \end{aligned} \tag{4.54}$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, los dos primeros términos en el lado derecho de estas expresiones definen la llamada *parte principal* de la integral (4.53),

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right]. \tag{4.55}$$

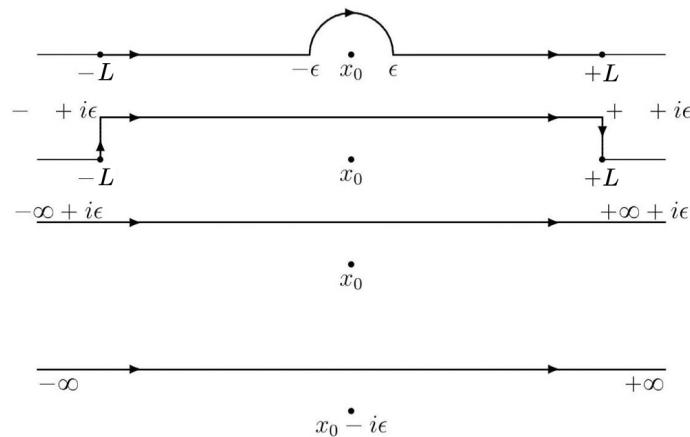
Teniendo en cuenta esta definición y el resultado (4.52) para evaluar las restantes integrales sobre las circunferencias γ_+ y γ_- ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\pm}} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = \mp i\pi f(x_0),$$

podemos escribir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\pm}} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \mp i\pi f(x_0). \tag{4.56}$$

Aunque formalmente correcta, es usual reescribir esta expresión utilizando la llamada *prescripción $\pm i\epsilon$* , que "desplaza" de manera efectiva la singularidad "fuera" del eje real. Para ello, consideremos la siguiente secuencia de deformaciones de la curva C_+ ,



o más formalmente

$$\begin{aligned} \int_{C_+} \frac{f(z)}{z-x_0} dz &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\int_{-L}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+L} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] + \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{z-x_0} dz \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\int_0^\epsilon \frac{f(-L+iy)}{-L-x_0+iy} i dy + \int_{-L+i\epsilon}^{L+i\epsilon} \frac{f(z)}{z-x_0} dz + \int_\epsilon^0 \frac{f(L+iy)}{L-x_0+iy} i dy \right] \\ &= \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+i\epsilon)}{x-x_0+i\epsilon} dx, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que en el límite $L \rightarrow \infty$, los integrales sobre los segmentos verticales de altura finita ϵ se anulan.³ Puesto que la función $f(z)$ es holomorfa y, por tanto, continúa en todo un entorno de la recta real, podemos identificar $f(x+i\epsilon) = f(x)$ para $\epsilon \rightarrow 0$ y escribir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0 \pm i\epsilon} dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \mp i\pi f(x_0). \quad (4.57)$$

Generalizando esta expresión al recorrido C_- mediante la sustitución formal $\epsilon \rightarrow -\epsilon$, obtenemos finalmente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0 \pm i\epsilon} dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \mp i\pi f(x_0). \quad (4.58)$$

Interpretación de la *parte principal*

Es importante darse que aunque en sentido estricto la integral (4.53) no está bien definida para $f(x_0) \neq 0$, la suma de los límites definiendo su parte principal (4.55) sí lo está, incluso si estos términos divergen logarítmicamente de manera individual,

$$\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \sim f(x_0) \ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty, \quad \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \sim -f(x_0) \ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

De hecho, realizando el cambio $x \rightarrow x_0 + x$, se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x_0+x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x_0+x)}{x} dx \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \underbrace{\frac{f(x_0+x) - f(x_0-x)}{x}}_{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+x) - f(x_0-x)}{x} = 2f'(x_0)} dx. \end{aligned}$$

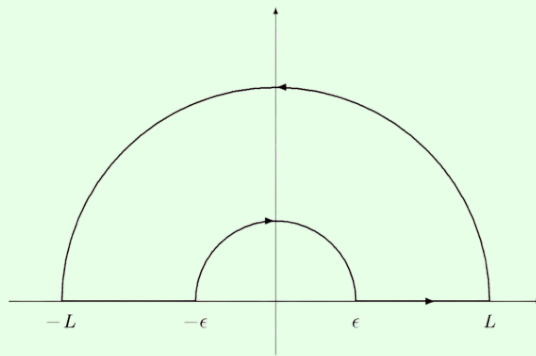
³Recuérdese que la función $f(x)$ tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo: Integral de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Teniendo en cuenta la paridad del integrando, podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^L \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \operatorname{Im} \left(\int_{\epsilon < |x| < L} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

La función $f(z)/z$ con $f(z) = e^{iz}$ asociada satisface lema de Jordan para $|z| \rightarrow \infty$ y presenta un polo simple en el origen. Considerando la curva $\Gamma(L, \epsilon)$ en la figura



y teniendo en cuenta la ecuación (4.56) junto con el hecho de que no existen singularidades internas al camino de integración, tenemos que

$$\oint_{\Gamma(L, \epsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon < |x| < L} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i e^{iz} \Big|_{z=0} = \pi i,$$

y con ello

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4.4.5 Integrales con funciones polídromas o multievaluadas**Integrales del tipo** $\int_0^\infty R(x)/x^\alpha dx$

Consideremos una integral de la forma

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.59)$$

con $R(x)$ es una función racional (cociente de dos polinomios) *sin singularidades en el semieje real positivo* y tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0 \quad (\text{criterio de convergencia}).$$

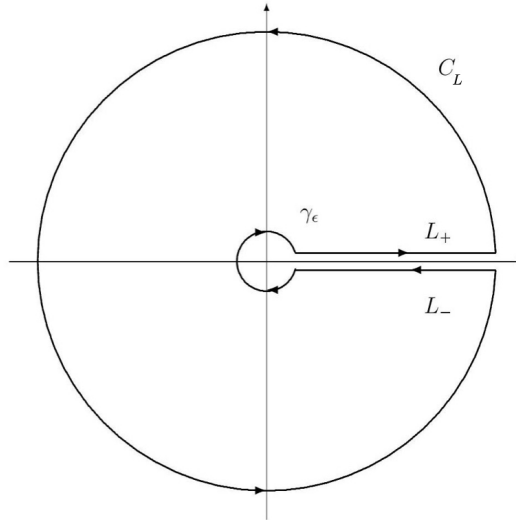
La extensión de este tipo de integrales al plano complejo presenta sutilezas asociadas al carácter multivaluado de la función z^α ,

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \quad \longrightarrow \quad z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \log |z| + i\alpha\theta + 2k\pi i\alpha} = |z|^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)}, \quad (4.60)$$

con los diferentes valores enteros del parametro k dando lugar a diferentes determinaciones de la potencia genérica z^α . Para calcular la integral

$$\int \frac{R(z)}{z^\alpha} dz, \quad (4.61)$$

situaremos el corte de rama exactamente sobre el semieje real positivo en el que queremos integrar (extremos excluidos), $0 < \theta < 2\pi$, y consideraremos un contorno de integración que lo excluya.



Aplicando el teorema de los residuos, tenemos

$$\int_{\Gamma(L,\epsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \left(\int_{C_L} + \int_{\gamma_\epsilon} + \int_{L_+} + \int_{L_-} \right) \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res} \frac{R(z)}{z^\alpha}. \quad (4.62)$$

Puesto que $0 < \alpha < 1$ y $R(z)$ es una función racional con denominador de grado mayor que el numerador,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \frac{R(z)}{z^\alpha} = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} z \frac{R(z)}{z^\alpha} = 0, \quad (4.63)$$

y las integrales sobre C_L y γ_ϵ tienden a cero cuando $L \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$, reduciendo el problema al cálculo de las integrales sobre L_+ y L_- . Teniendo en cuenta que L_+ y L_- están ligeramente por encima y por debajo del corte de rama, podemos escribir

$$\frac{R(z)}{z^\alpha} = \frac{R(x)}{x^\alpha} \quad \text{con} \quad z = xe^{i0^+}, \quad (4.64)$$

y


$$\frac{R(z)}{z^\alpha} = \frac{R(x)}{x^\alpha} e^{-2\pi i \alpha} \quad \text{con} \quad z = x e^{i2\pi^-}, \quad (4.65)$$

obteniendo

$$\left(\int_{L_+} + \int_{L_-} \right) \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx - e^{-2\pi i \alpha} \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = (1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx, \quad (4.66)$$

y con ello

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{z \neq 0} \text{Res} \frac{R(z)}{z^\alpha}. \quad (4.67)$$

Ejemplo: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ 

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \text{Res} \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \Big|_{z=-1} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \frac{1}{z^\alpha} \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \frac{1}{e^{\pi i \alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)} \end{aligned}$$

Integrales del tipo $\int_0^\infty R(x) \log x dx$

Consideremos finalmente integrales del tipo

$$I_5 = \int_0^\infty R(x) \log x dx, \quad (4.68)$$

con $R(x)$ es una función racional sin singularidades en el semieje real positivo y tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xR(x) = 0 \quad (\text{criterio de convergencia}). \quad (4.69)$$

Para calcular la integral (4.68) consideramos la integral compleja

$$\int R(z) \log^2(z) dz, \quad (4.70)$$

situando el corte de rama exactamente sobre el semieje real positivo en el que queremos integrar (extremos excluidos),

$$\log z = \log |z| + i\theta, \quad 0 < \theta = \arg z < 2\pi, \quad (4.71)$$

y el contorno de integración $\Gamma(L, \epsilon)$ utilizado en el caso anterior. Puesto que la función $\log^2 z$ no tiene singularidades internas a dicho recorrido,

$$zR(z) \log^2 z \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0, \quad (4.72)$$

y $R(z)$ es una función racional con un denominador de grado al menos 2 superior al del numerador,

$$zR(z) \log^2 z \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0, \quad (4.73)$$

la aplicación del teorema de los residuos nos permite escribir

$$\int_{\Gamma(L,\epsilon)} R(z) \log^2 z \, dz = \left(\int_{L_+} + \int_{L_-} \right) R(z) \log^2 z \, dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res} (R(z) \log^2 z). \quad (4.74)$$

Teniendo en cuenta de nuevo que L_+ y L_- están ligeramente por encima y por debajo del corte de rama, podemos escribir

$$\log z = \log x + i0^+ = \log x \quad \text{con} \quad z = xe^{i0^+}, \quad (4.75)$$

y

$$\log z = \log x + i2\pi \quad \text{con} \quad z = xe^{i0^-}, \quad (4.76)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \left(\int_{L_+} + \int_{L_-} \right) R(z) \log^2(z) \, dz &= \int_0^\infty R(x) [\log^2 x - (\log x + 2\pi i)^2] \, dx \\ &= \int_0^\infty R(x) [-4\pi i \log x + 4\pi^2] \, dx \\ &= 4\pi^2 \int_0^\infty R(x) \, dx - 4\pi i \int_0^\infty R(x) \log x \, dx, \end{aligned} \quad (4.77)$$

y con ello

$$2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res} (R(z) \log^2 z) = 4\pi^2 \int_0^\infty R(x) \, dx - 4\pi i \int_0^\infty R(x) \log x \, dx. \quad (4.78)$$

Separando las partes reales e imaginarias en esta expresión, nos permite obtener la integral buscada

$$I_5 = \int_0^\infty R(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \sum_{z \neq 0} \text{Res} (R(z) \log^2 z) \right\}, \quad (4.79)$$

proporcionando también un nuevo modo de calcular integrales del tipo

$$I_6 = \int_0^\infty R(x) \, dx = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \sum_{z \neq 0} \text{Res} (R(z) \log^2 z) \right\}. \quad (4.80)$$

Ejemplo: $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$ y $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} dx$

Escogiendo

$$R(z) = \frac{1}{(1+z)^3}, \tag{4.81}$$

aplicando (4.78) y teniendo en cuenta que $z = -1$ está contenido en el contorno de integración $\Gamma(L,\epsilon)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} dx - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx &= 2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(1+z)^3} \right) = \pi i \frac{d^2}{dz^2} \log^2 z \Big|_{z=-1} \\ &= 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{\log z}{z} \Big|_{z=-1} = 2\pi i \frac{1 - \log z}{z^2} \Big|_{z=-1} \\ &= 2\pi i(1 - \pi i) = 2\pi^2 + 2\pi i. \end{aligned}$$

Identificando partes real e imaginaria, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{2}.$$

4.5 Aplicaciones físicas del teorema de los residuos

4.5.1 Electrotástica y magnetostástica en 2 dimensiones

El estudio de la electrostática en dos dimensiones se beneficia significativamente del uso de métodos de variable compleja, permitiendo abordar de manera eficiente escenarios con simetría cilíndrica o problemas en el plano $x - y$. En este contexto, los conceptos de analiticidad y funciones holomorfas juegan un papel crucial, ya que permiten expresar las leyes fundamentales del electromagnetismo, como la ley de Ampère o la ley de Gauss, en términos de integrales de contorno sobre funciones complejas, proporcionando además una interpretación geométrica clara y unificada de conceptos como el flujo y la circulación de los campos.

Como referencia, la siguiente tabla recoge las leyes de Maxwell para campos estáticos con \vec{E} el campo eléctrico, B el campo magnético y ϵ_0 y μ_0 la permeabilidad y permeatividad en el vacío.

Ley	Forma diferencial	Forma integral	
3 dimensiones	Gauss campos eléctricos	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$
	Gauss campos magneticos	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
	Inducción de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
	Ampere generalizada	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{I}$	$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Residuos y fuentes magnéticas

El teorema de los residuos,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res } f(z)|_{z_k}, \quad (4.82)$$

guarda una similitud formal con la ley de Ampere en magnetostática,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_n I_n, \quad (n = 1, 2, \dots, n) \quad (4.83)$$

que establece que la integral de línea del campo magnético alrededor del contorno cerrado es proporcional a la suma de las corrientes I_n que atraviesan el área encerrada por dicho contorno, con μ_0 la permeabilidad en el vacío. En particular, el lado derecho de cada una de estas expresiones representa una suma de cantidades relacionadas con las singularidades de los integrandos en el lado izquierdo de las mismas, pudiéndose evaluar las correspondientes integrales simplemente sumando sobre ellas.

Aunque la mayoría de textos introductorios en electromagnetismo obtienen la forma integral de la ley de Ampere a partir de la expresión para el campo magnético generado por una densidad de corriente continua, es posible recuperar esta ley mediante la construcción de una función holomorfa y la aplicación directa del teorema de los residuos. Para ver esto explícitamente, consideremos el campo magnético generado un alambre largo y recto que conduce una corriente I a lo largo del eje z de un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.84)$$

con r la distancia al origen en el plano $x - y$. Identificando las coordenadas cartesianas del campo $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$,

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (4.85)$$

y definiendo un campo magnético complejo $\tilde{B} = B_y + iB_x$, obtenemos una función holomorfa

$$\tilde{B}(z) = B_y + iB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z^*}{zz^*} = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \quad (4.86)$$

dependiente únicamente de z . Aplicando el teorema de los residuos a esta función y teniendo en cuenta que el residuo de \tilde{B} en $z = 0$ es $\mu_0 I / (2\pi)$, podemos escribir

$$\oint_{\gamma} \tilde{B} dz = 2\pi i \text{Res } \tilde{B}(z) \Big|_{z=0} = i\mu_0 I. \quad (4.87)$$

Este resultado se puede extender de manera sencilla a un número arbitrario de corrientes I_1, I_2, \dots, I_n mediante la utilización del teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_{\gamma} \tilde{B} dz = i\mu_0 \sum_n I_n \quad (n = 1, 2, \dots, n). \quad (4.88)$$

En términos de las componentes B_x y B_y , la integral de contorno (4.87) toma la forma

$$\oint_{\gamma} (B_y + iB_x)(dx + idy) = \oint_{\gamma} (B_y dx - B_x dy) + i \oint_{\gamma} (B_x dx + B_y dy) = i\mu_0 I. \quad (4.89)$$

Igualando las partes reales e imaginarias obtenemos

$$\oint_{\gamma} (B_y dx - B_x dy) = \oint_{\gamma} \vec{B} \times d\vec{l} = 0, \quad \oint_{\gamma} B_x dx + B_y dy = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (4.90)$$

La primera de estas expresiones es el análogo bidimensional de la ley de Gauss para el campo magnético, con el producto vectorial $\vec{B} \times d\vec{l}$ seleccionando la componente de campo magnético normal a la curva en la ubicación del elemento $d\vec{l}$ y midiendo por tanto el “flujo” de B a través de esta, el cual es nulo, pues \vec{B} forma bucles cerrados. La segunda expresión es simplemente la prometida ley de Ampere. Notese que la formulación empleada es también consistente con la forma diferencial de las correspondientes ecuaciones de Maxwell. En particular, a partir de las expresiones (4.85) y las condiciones de Cauchy-Riemann, es fácil comprobar que

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.91)$$

Residuos y fuentes eléctricas

Para continuar explorando las conexiones entre el electromagnetismo en dos dimensiones y el análisis complejo, consideremos ahora el campo eléctrico generado por una línea de carga positiva estacionaria a lo largo del eje z ,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, \quad (4.92)$$

con λ la densidad de carga lineal, ϵ_0 la permitividad del vacío, r la distancia radial a la línea de carga y \hat{r} es un vector unitario radial. Expresando este resultado en coordenadas cartesianas,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2}, \quad (4.93)$$

podemos identificar fácilmente las componentes rectangulares

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.94)$$

y construir con ellas una función holomorfa

$$\tilde{E} = E_x - iE_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z^*}{z^*z} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \quad (4.95)$$

dependiendo únicamente de z . Aplicando como antes el teorema de los residuos obtenemos

$$\oint_{\gamma} \tilde{E} dz = 2\pi i \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \frac{i\lambda}{\epsilon_0}, \quad (4.96)$$

expresión que, en términos de E_x y E_y , toma la forma

$$\oint_{\gamma} (E_x - iE_y)(dx + idy) = \oint_{\gamma} (E_x dx + E_y dy) - i \oint_{\gamma} (E_y dx - E_x dy) = \frac{i\lambda}{\epsilon_0}. \quad (4.97)$$

Igualando otra vez las partes reales e imaginarias obtenemos

$$\oint_{\gamma} (E_x dx + E_y dy) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \int_{\gamma} (E_y dx - E_x dy) = - \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}. \quad (4.98)$$

La primera de estas expresiones refleja el hecho de que el campo electrostático es conservativo. La segunda ecuación es el análogo bidimensional de la ley de Gauss para la electrostática. Al igual que para las fuentes magnéticas, estos resultados son consistentes con la forma diferencial de las correspondientes ecuaciones de Maxwell,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.99)$$