

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

FACULTAD DE ÓPTICA Y OPTOMETRÍA



**TESIS DOCTORAL**

Diseño y verificación de sistemas ópticos freeform  
para aplicaciones espaciales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA

PRESENTADA POR

Andrea García Moreno

DIRIGIDA POR

Luis Miguel González Fernández

Tomás Belenguer Dávila



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE ÓPTICA Y OPTOMETRÍA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN ÓPTICA, OPTOMETRÍA Y VISIÓN



TESIS DOCTORAL

**Diseño y verificación de sistemas ópticos *freeform*  
para aplicaciones espaciales**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA  
PRESENTADA POR

**Andrea García Moreno**

DIRECTORES

Luis Miguel González Fernández  
Tomás Belenguer Dávila





# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Luis Miguel González Fernández, mi tutor de la beca de formación con la que entré en el INTA y director de esta tesis. Siempre le estaré profundamente agradecida, no solo por contribuir a que esta tesis haya llegado a ser una realidad, sino también por su constante apoyo, acompañamiento y paciencia. Ha tenido un papel fundamental en mi desarrollo profesional al transmitirme su pasión por la óptica e introducirme en el mundo de la óptica *freeform*.

También quiero agradecer a Tomás Belenguer Dávila, quien ha sido mi tutor y director durante la elaboración de esta tesis. Le agradezco por permitirme compaginar el desarrollo de la tesis con mi actividad laboral en el departamento. Además, su vasto conocimiento y su voluntad inagotable de ayudar han sido un pilar fundamental en este viaje.

Quiero agradecer a todos mis compañeros del LINES porque desde el primer día me acogieron con los brazos abiertos y siempre han estado dispuestos a ayudarme en todo lo que he necesitado. He encontrado una gran atmósfera de trabajo en la que estoy rodeada de gente brillante, lo que me inspira para seguir mejorando y aprendiendo cada día.

Me gustaría hacer una mención especial a los compañeros del laboratorio que han participado en la integración del proyecto ANSER, en el seno del cuál se ha desarrollado mi tesis. A Marianela le agradezco por ser un gran modelo a seguir y por haberme inculcado su rigor y orden en el trabajo. A Carmen le agradezco por acompañarme en la sala limpia para llevar a cabo algunas de las medidas realizadas para mi tesis. A David le agradezco su ayuda durante el montaje de distintas piezas mecánicas, especialmente para las medidas presentadas en el capítulo 6. A Rafa

---

le agradezco el soporte opto mecánico con diseños de monturas específicas para algunos de los montajes presentados en la tesis. A René le agradezco las enseñanzas y el apoyo durante el uso del modulador de fase.

Y porque no toda la ayuda es profesional, quiero agradecer a mis compañeros Carmen, Ángel y Dani por su gran apoyo emocional durante uno de los momentos más bajos que he atravesado en el desarrollo de esta tesis.

Por último, quiero agradecer a mis padres que siempre me han apoyado y han impulsado mi formación, por ello, esta tesis les pertenece. Ambos son un ejemplo de esfuerzo, capacidad de sacrificio y fortaleza mental y siempre serán mi mayor referente. A mi hermana Sara le agradezco por ser mi compañera de viaje durante tantos años y por los que están por venir, siempre nos tendremos la una a la otra. A Kiko le agradezco por permanecer siempre a mi lado y nunca dejarme caer.

# Índice general

Resumen . . . . .	25
Abstract . . . . .	29
<b>1. Preliminar</b>	<b>31</b>
1.1. Motivación . . . . .	31
1.2. Objetivos . . . . .	36
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	38
<b>I Teoría y diseño de sistemas ópticos <i>freeform</i></b>	<b>41</b>
<b>2. Estado del arte</b>	<b>43</b>
2.1. Introducción . . . . .	44
2.2. Descripción de superficies <i>freeform</i> . . . . .	45
2.2.1. Bases no ortogonales . . . . .	46
2.2.2. Bases ortogonales . . . . .	49
2.3. Diseño óptico de sistemas <i>freeform</i> . . . . .	65
2.3.1. Teoría Nodal de Aberraciones . . . . .	65
2.3.2. Métodos de diseño óptico de sistemas <i>freeform</i> . . . . .	78
2.4. Fabricación de superficies <i>freeform</i> . . . . .	83
2.5. Verificación de superficies <i>freeform</i> . . . . .	87
2.6. Conclusiones . . . . .	91
<b>3. Extensión de NAT a sistemas <i>freeform</i> descritos mediante la base de los <i>Q-polynomials</i></b>	<b>93</b>
3.1. Introducción . . . . .	94

3.2.	Cambio de base de $Q$ -polynomials a polinomios de Zernike . . . . .	97
3.3.	NAT en función de los $Q$ -polynomials . . . . .	108
3.3.1.	Polinomio $Q_0(u^2)$ . . . . .	109
3.3.2.	Polinomio $Q_0^1(u^2)$ . . . . .	111
3.3.3.	Polinomio $Q_0^2(u^2)$ . . . . .	115
3.3.4.	Polinomio $Q_0^3(u^2)$ . . . . .	118
3.4.	Discusión . . . . .	121
3.5.	Conclusiones . . . . .	124
<b>4.</b>	<b>Diseño óptico de sistemas <i>freeform</i></b>	<b>127</b>
4.1.	Introducción . . . . .	128
4.2.	Análisis de configuraciones . . . . .	132
4.3.	Diseño inicial . . . . .	140
4.4.	Diseño <i>freeform</i> descrito mediante la base de los $Q$ -polynomials . . . . .	144
4.5.	Diseño descrito mediante los polinomios de Zernike . . . . .	152
4.6.	CINCLUS, un espectrómetro para una misión de Observación de la Tierra . . . . .	156
4.6.1.	Diseño final . . . . .	157
4.6.2.	Análisis de tolerancias . . . . .	158
4.7.	Conclusiones . . . . .	163
<b>II</b>	<b>Verificación y alineamiento de sistemas ópticos con superficies <i>freeform</i></b>	<b>165</b>
<b>5.</b>	<b>Verificación de superficies <i>freeform</i></b>	<b>167</b>
5.1.	Introducción . . . . .	168
5.2.	Instrumentación . . . . .	170
5.2.1.	Interferómetro ZYGO <i>Phase Shifting</i> GPI-XP . . . . .	170
5.2.2.	Hexápodo PI M-850 . . . . .	171
5.2.3.	Máquina de medición por coordenadas (CMM, <i>Control Metrology Machine</i> ) FARO Gage Max . . . . .	172
5.2.4.	Modulador espacial de fase Hamamatsu X8267 . . . . .	173
5.3.	Verificación $M_1$ . . . . .	174
5.3.1.	Metodología . . . . .	176

5.3.2. Resultados . . . . .	179
5.4. Verificación $M_2$ . . . . .	183
5.4.1. Metodología . . . . .	185
5.4.2. Resultados . . . . .	189
5.5. Método para la verificación de superficies <i>freeform</i> . . . . .	193
5.5.1. Metodología . . . . .	193
5.5.2. Resultados . . . . .	198
5.6. Conclusiones . . . . .	200
<b>6. Alineamiento de un telescopio <i>freeform</i> con astigmatismo binodal en el plano imagen</b>	<b>203</b>
6.1. Introducción . . . . .	204
6.2. Diseño de referencia . . . . .	205
6.3. Procedimiento . . . . .	210
6.3.1. Acceso a las distintas posiciones de campo . . . . .	211
6.3.2. Alineamiento del telescopio . . . . .	218
6.4. Resultados y comparación con las simulaciones . . . . .	221
6.4.1. <i>Full Field Displays</i> (FFDs) . . . . .	223
6.5. Conclusiones . . . . .	226
<b>7. Conclusiones</b>	<b>229</b>
7.1. Sumario del trabajo realizado . . . . .	230
7.2. Conclusiones . . . . .	235
7.3. Perspectivas futuras . . . . .	237
7.4. Productos científicos relacionados con la tesis . . . . .	239
7.4.1. Artículos científicos . . . . .	239
7.4.2. Comunicaciones a congresos . . . . .	239
<b>III Anexos</b>	<b>241</b>
<b>A. Planos de fabricación de los espejos</b>	<b>243</b>
<b>B. Informes de pulido de los espejos</b>	<b>247</b>
<b>C. Plano de fabricación del espejo esférico auxiliar para la verificación</b>	

Índice de figuras

---

de $M_2$	251
D. Misión ANSER	253
Bibliografía	257

# Índice de figuras

2.1.	Polinomios de Zernike en su ordenamiento Fringe. . . . .	53
2.2.	Polinomios de Zernike hasta $n = 5$ . . . . .	54
2.3.	(a) Primeros 6 órdenes de los <i>Q-polynomials</i> para la representación de superficies esféricas. (b) Pendientes ortonormales correspondientes. . . . .	56
2.4.	(a) Primeros 10 órdenes de los <i>Q-polynomials</i> para la representación de superficies esféricas con apertura anular. (b) Pendientes ortonormales correspondientes. . . . .	58
2.5.	Representación de los primeros órdenes de <i>Q-polynomials</i> con sus correspondientes gradientes ortonormales. En cada par de filas se representa un orden azimutal $m$ hasta $m = 4$ . Dentro de cada par de filas, en la primera fila se muestran los polinomios mientras que en la segunda fila se muestran los gradientes. Por último, cada columna representa un orden $n$ hasta $n = 4$ . . . . .	63
2.6.	(a) Primera imagen documentada de astigmatismo binodal que impulsó el desarrollo de NAT [1]. Representación esquemática del desplazamiento de los centros de aberraciones de cada elemento óptico del sistema [2]. . . . .	66
2.7.	Desplazamiento del vector pupila con el campo en una superficie que no coincide con el stop del sistema. . . . .	69
2.8.	Representación mediante las ecuaciones del conjunto de aberraciones y su dependencia con el campo que genera cada contribución <i>freeform</i> en una superficie cuya posición no coincide con el stop del sistema óptico. . . . .	71

2.9. Representación mediante los FFDs del conjunto de aberraciones y su dependencia con el campo que genera cada contribución <i>freeform</i> en una superficie cuya posición no coincide con el stop del sistema óptico.	73
2.10. FFDs de $Z_5$ y $Z_6$ de (a) un sistema no <i>freeform</i> que mantiene la simetría rotacional, (b) un sistema centrado con una contribución <i>freeform</i> descrita mediante los polinomios de Zernike de astigmatismo y (c) el mismo sistema <i>freeform</i> pero descentrado. En cada caso, los puntos rojos marcan la posición de los nodos de astigmatismo, puntos con astigmatismo mínimo. Además, se ha representado el vector $\vec{b}_{222}$ para mostrar cómo se definen las posiciones de los nodos. . . . .	77
2.11. (a) Distribución de astigmatismo en el plano imagen del diseño inicial (no <i>freeform</i> ). (b) Contribución al astigmatismo en el plano focal de una componente <i>freeform</i> descrita mediante los polinomios de Zernike de <i>trefoil</i> ( $Z_{10/11}$ ). (c) Distribución de astigmatismo resultante en el plano imagen con la aparición de 4 nodos de astigmatismo. Los puntos rojos señalan las posiciones de los nodos. . . . .	78
2.12. Proceso de corrección de aberraciones mediante óptica <i>freeform</i> . NOTA: en los FFDs de astigmatismo que proporciona Code V se representa la magnitud y dirección, pero no se representa el sentido. Por ello, en los FFDs que se muestran de astigmatismo no se aprecia que el sentido es opuesto como se puede ver claramente en los FFDs de coma. . . . .	80
2.13. Esquema del método de diseño de sistemas ópticos <i>freeform</i> . . . . .	82
2.14. QED technologies Q-flex 100. . . . .	86
3.1. $Q$ -polynomials ordenados en función de los órdenes radial $n$ y azimutal $m$ . . . . .	98

- 3.2. Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^2(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  (0, -0.5, -1, -1.5). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_5$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_5 + Z_{12}$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_5 + Z_{12} + Z_{21}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_5, Z_{12}, Z_{21}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_6, Z_{13}, Z_{22}$ ) son análogos. . . . . 100
- 3.3. Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^1(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  (0, -0.5, -1, -1.5). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_2$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_2 + Z_7$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_2 + Z_7 + Z_{14}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_2, Z_7, Z_{14}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_3, Z_8, Z_{15}$ ) son análogos. . . . . 102
- 3.4. Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^2(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  (0, -0.5, -1, -1.5). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_{10}$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_{10} + Z_{19}$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_{10} + Z_{19} + Z_{30}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_{10}, Z_{19}, Z_{30}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_{11}, Z_{20}, Z_{31}$ ) son análogos. . . . . 104

3.5.	RMS del residuo del ajuste del polinomio $Q_0^2(u^2)$ para distintos valores de $K$ y manteniendo fijo el valor de $A = 0.4$ . (a) Para los ajustes a 1 polinomio ( $Z_5$ ), 2 polinomios ( $Z_5, Z_{12}$ ) y 3 polinomios ( $Z_5, Z_{12}$ y $Z_{21}$ ). (b) Se aíslan los ajustes a 2 y 3 polinomios para una mejor visualización.	105
3.6.	RMS del residuo del ajuste del polinomio $Q_0^2(u^2)$ a 1, 2 y 3 polinomios de Zernike en el caso de (a) $K = 0$ , (b) $K = -0.5$ , (c) $K = -1$ y (d) $K = -1.5$ en función del parámetro $A$ . Nótese que para $A \leq 0.25$ , es posible alcanzar un ajuste aceptable con pocos términos de Zernike.	106
3.7.	Representación de $C_5$ en función de $a_0^2$ con su ajuste lineal (representado con una línea roja) para (a) $K = 0$ , (b) $K = -0.5$ , (c) $K = -1$ y (d) $K = -1.5$ . (e) Dependencia de $P_{5/6}$ con el valor de $A$ para distintos valores de la constante cónica. Se puede observar como para $A < 0.1$ la variación de la pendiente con el valor de $K$ es despreciable.	108
3.8.	Método de diseño de sistemas ópticos <i>freeform</i> incluyendo en color azul las modificaciones debidas a los resultados obtenidos a lo largo del capítulo.	122
4.1.	Unidad estructural básica de 1U del estándar CubeSat (izquierda) y ejemplo de configuración para 3U (derecha).	129
4.2.	(a) Esquema del funcionamiento de los micro espectrómetros. (b) Disposición de los micro espectrómetros en el plano focal del telescopio.	131
4.3.	Diseño inicial de las tres configuraciones con dos espejos. (a) Configuración en eje. (b) Configuración tipo 4. (c) Configuración tipo Z.	133
4.4.	FFDs de (a) astigmatismo y (b) coma obtenidos en el diseño inicial del telescopio en eje.	134
4.5.	FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la configuración tipo 4 (a,b) y una vez corregido el astigmatismo constante con el campo (c,d).	135
4.6.	FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la configuración tipo Z (a,b) y una vez corregido el astigmatismo constante con el campo (c,d).	136
4.7.	Diseño inicial de las tres configuraciones con tres espejos. (a) Configuración 1. (b) Configuración 2. (c) Configuración 3.	137

4.8. FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la Configuración 1 (a,b), la Configuración 2 (c,d) y la Configuración 3 (e,f). . . . .	138
4.9. FFDs de astigmatismo y coma obtenidos tras corregir la contribución de astigmatismo constante con el campo de la Configuración 1 (a,b), la Configuración 2 (c,d) y la Configuración 3 (e,f). . . . .	139
4.10. (a) <i>Layout</i> del diseño. Diagrama de impactos del (b) telescopio Cassegrain clásico y del (c) telescopio tipo Cassegrain con un espejo primario hiperbólico. En estos diagramas, se ha representado la rendija de entrada a los micro espectrómetros mediante dos cuadrados negros.	142
4.11. Mapas de campo del diseño inicial optimizado de los polinomios de Zernike de (a) astigmatismo ( $Z_5$ y $Z_6$ ), (b) coma ( $Z_7$ y $Z_8$ ) y (c) esférica ( $Z_9$ ). . . . .	143
4.12. FFDs de astigmatismo ( $Z_5$ y $Z_6$ ) y esférica ( $Z_9$ ) obtenidos analíticamente (a,b) y obtenidos mediante la optimización del diseño en Code V (c,d). . . . .	149
4.13. Diagrama de impactos del telescopio (a) con $M_2$ <i>freeform</i> (b) con $M_1$ y $M_2$ <i>freeform</i> y (c) añadiendo el polinomio $Q_1^2(u^2)$ en la contribución <i>freeform</i> de ambos espejos. El cuadrado negro indica la rendija de entrada de los micro espectrómetros. . . . .	150
4.14. Contribución <i>freeform</i> resultante del (a) espejo primario $M_1$ y del (b) espejo secundario $M_2$ . . . . .	152
4.15. Diagrama de impacto del telescopio con la contribución <i>freeform</i> descrita mediante (a) los <i>Q-polynomials</i> (b) los polinomios de Zernike en primera aproximación en el cambio de base (c) los polinomios de Zernike llegando a un orden mayor en el cambio de base. . . . .	154
4.16. Diseño final del telescopio para el instrumento CINCLUS. . . . .	157
4.17. (a) Diagrama de impactos del diseño final. (b) Superficie del espejo primario. (d) Superficie del espejo secundario. (c) Componente esférica del espejo secundario. (e) Componente <i>freeform</i> del espejo secundario. . . . .	158
5.1. (a) Interferómetro ZYGO Phase Shifting GPI-XP. (b) Espejo plano de transmisión. . . . .	171

5.2. (a) Hexápodo PI M-850. (b) FARO Gage Max. . . . .	172
5.3. LCoS-SLM X8267 de Hamamatsu. . . . .	173
5.4. Sala limpia ISO 7 del Departamento de Óptica Espacial del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA). . . . .	174
5.5. Espejo primario $M_1$ pegado en su montura. . . . .	174
5.6. (a) Diseño de la cavidad en doble paso para la verificación del espejo primario. (b) Frente de ondas a la salida del montaje simulado en Code V ( $\lambda = 632.8\text{nm}$ ). . . . .	177
5.7. (a) Montaje de laboratorio para la verificación del espejo primario. (b) Frente de ondas medido ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). . . . .	180
5.8. (a) Superficie del espejo $M_1$ nominal de diseño. (b) Superficie del espejo $M_1$ medida. (c) Diferencia entre la superficie nominal de diseño y la superficie medida. . . . .	183
5.9. Espejo secundario $M_2$ pegado en su montura. . . . .	183
5.10. (a) Diseño del montaje para la verificación del espejo secundario. Interferómetro no a escala. (b) Frente de ondas a la salida del montaje simulado en Code V y su valor de RMS ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). . . . .	186
5.11. (a) Lente esférica y (b) espejo esférico en sus monturas. . . . .	190
5.12. Montaje de laboratorio para la medida de $M_2$ . . . . .	190
5.13. (a) Diseño del alineamiento de la lente esférica cerrando la cavidad con una retrobola. (b) Diseño del alineamiento del espejo esférico cerrando la cavidad con un espejo plano de alta calidad. Simulaciones en Code V muestran que este procedimiento es óptimo para lograr el ajuste en <i>tip&amp;tilt</i> y desplazamiento transversal del espejo esférico. En ambos casos, el interferómetro no está a escala. . . . .	191
5.14. (a) Frente de ondas simulado en Code V. (b) Frente de ondas medido ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). . . . .	192
5.15. (a) Concepto general del montaje. (b) Diseño del montaje final para la verificación de $M_2$ . Interferómetro no a escala. . . . .	195
5.16. (a) Fase optimizada en el modulador para compensar las aberraciones generadas por la componente <i>freeform</i> del espejo $M_2$ . (b) Frente de onda resultante en la pupila de salida del montaje simulado en Code V ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). . . . .	196

5.17. Montaje de laboratorio. . . . .	199
5.18. (a) Frente de ondas medido en la configuración de referencia. (b) Frente de ondas medido en la configuración del montaje final ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	199
6.1. Error de frente de ondas con su valor de RMS obtenido en Code V para ambos campos de trabajo del telescopio ( $F_1, F_2$ ) para $\lambda = 632.8$ nm. . . . .	207
6.2. FFDs de (a) astigmatismo, (b) coma y (c) aberración esférica obtenidos en Code V para el diseño que servirá de referencia para el alineamiento. . . . .	208
6.3. (a) Diagrama de impacto para un grid de campos a lo largo del plano focal del telescopio. (b) Diagrama de impactos para los campos de trabajo del telescopio. . . . .	209
6.4. Esquema de la vista lateral del montaje en la que se ve cómo el telescopio completo queda sobre la superficie del hexápodo. Los tamaños del interferómetro y el hexápodo no están a escala. . . . .	211
6.5. Esquema del montaje de alineamiento de $M_1$ con el haz del interferómetro visto desde arriba. . . . .	215
6.6. Frente de ondas obtenido en Code V al simular el montaje de $M_1$ cerrando la cavidad interferométrica con una retrobola ( $\lambda = 632.8$ nm).216	
6.7. (a) Montaje de laboratorio para el alineamiento de $M_1$ con el haz del interferómetro. (b) Frente de ondas medido una vez que $M_1$ ha quedado alineado ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	217
6.8. Esquema del montaje de alineamiento del telescopio visto desde arriba.218	
6.9. Montaje de laboratorio para el alineamiento de $M_1$ - $M_2$ . . . . .	220
6.10. Comparación entre los errores de frente de ondas medidos (a,b) y simulados en Code V (c,d) en $F_1$ y $F_2$ respectivamente ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	222
6.11. Comparación entre los FFDs medidos en el laboratorio una vez que el telescopio ha quedado alineado (a-c) y los FFDs obtenido en la simulación en Code V (d-f). . . . .	224
6.12. Comparación del diagrama de impacto (a) medido y (b) simulado en Code V a lo largo de todo el plano focal del telescopio. . . . .	226

## Índice de tablas

---

A.1. Plano de fabricación del espejo primario $M_1$ . . . . .	244
A.2. Plano de fabricación del espejo secundario $M_2$ . . . . .	245
B.1. Informe de fabricación del espejo primario $M_1$ . . . . .	248
B.2. Informe de fabricación del espejo secundario $M_2$ . . . . .	249
C.1. Plano de fabricación del espejo esférico auxiliar para la verificación de $M_2$ . . . . .	252
D.1. Vuelo en formación del líder y los dos <i>Followers</i> que componen la misión ANSER. . . . .	254
D.2. Los tres satélites que componen la misión ANSER. . . . .	255

# Índice de tablas

2.1. Vectores en 2 dimensiones que representan la magnitud y el sentido de los polinomios de Zernike. . . . .	74
3.1. Cambio de la base de los $Q$ -polynomials a la base de los polinomios de Zernike. . . . .	107
4.1. Parámetros del diseño inicial del telescopio. . . . .	140
4.2. Parámetros del diseño inicial del telescopio Cassegrain considerando el espejo primario $M_1$ como una superficie parabólica ( $K = -1$ ). . . .	141
4.3. Parámetros del diseño inicial optimizado. . . . .	141
4.4. Parámetros de ambos espejos <i>freeform</i> . . . . .	150
4.5. Parámetros de ambos espejos <i>freeform</i> incluyendo el polinomio $Q_1^2(u^2)$ . . . .	151
4.6. Coeficientes de Zernike resultantes del cambio de base. . . . .	154
4.7. Coeficientes de Zernike resultantes del cambio de base. . . . .	155
4.8. Parámetros del diseño <i>freeform</i> final descrito mediante polinomios de Zernike. . . . .	156
4.9. Parámetros que definen las superficies de los espejos del diseño de CINCLUS. . . . .	158
4.10. Resumen de tolerancias. . . . .	161
4.11. Resumen de prestaciones. . . . .	161
4.12. Rango de compensadores. . . . .	162
4.13. Resumen de prestaciones. . . . .	162
5.1. Especificaciones del hexápodo PI M-850 . . . . .	171

5.2.	Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje de verificación $M_1$ con sus correspondientes tolerancias ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	179
5.3.	Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje de verificación de $M_1$ comparando los valores de la simulación en Code V con los valores medidos en el laboratorio ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	181
5.4.	Coeficientes de Zernike que describen la topografía del espejo $M_1$ que difiere de la cónica base. . . . .	182
5.5.	Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas obtenido en la simulación del montaje en Code V ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	186
5.6.	Tolerancias del montaje de verificación de $M_2$ . . . . .	187
5.7.	Tolerancias del montaje de verificación de $M_2$ trasladadas a los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida sin incluir las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen la superficie del espejo ( $\lambda = 632.8$ nm). Se trata de los mismos valores presentados en la tabla 5.5 incluyendo dichas tolerancias. . . . .	188
5.8.	Tolerancias del montaje de verificación de $M_2$ trasladadas a los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	188
5.9.	Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas medido en comparación con los valores obtenidos en Code V ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	192
5.10.	Tolerancias del montaje de verificación de $M_2$ ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	197
5.11.	Comparación del valor máximo de RMS alcanzado en Code V al tener en cuenta las tolerancias del sistema con el valor de RMS medido en el laboratorio ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	200
6.1.	Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en los campos de trabajo del diseño del telescopio ( $\lambda = 632.8$ nm). . . . .	207
6.2.	Coordenadas del hexápodo para el centro del espejo primario. . . . .	214
6.3.	Coordenadas del hexápodo para el centro del stop del sistema. . . . .	214
6.4.	Coordenadas del hexápodo para campo en eje. . . . .	217
6.5.	Coordenadas del hexápodo para los campos $F_1$ y $F_2$ . . . . .	220

6.6. Comparación entre el RMS y los coeficiente de Zernike que describen el error de frente de ondas medido y el obtenido en las simulaciones en Code V ( $\lambda = 632.8$  nm). . . . . 223



# Resumen

La óptica *freeform* consiste en la rotura de la simetría de revolución en alguna de las superficies que componen el sistema óptico. De este modo, constituye una potente herramienta en la corrección de aberraciones ya que proporciona al diseñador un mayor número de grados de libertad. Esto permite reducir el tamaño, número de elementos y masa de sistemas ópticos o alcanzar campos angulares mayores manteniendo la alta calidad óptica. El uso de óptica *freeform* presenta un gran número de ventajas, pero implica el desarrollo de nuevas metodologías de trabajo debido a que dejan de ser válidos los métodos establecidos previamente para sistemas ópticos que mantienen la simetría de revolución. En esta tesis se proponen novedosos métodos de trabajo en las áreas de diseño óptico, verificación de superficies ópticas y alineamiento de sistemas ópticos *freeform*.

El diseño de sistemas ópticos *freeform* no se puede abordar del mismo modo que el diseño de sistemas con superficies esféricas en el que poco a poco se introducen órdenes mayores hasta alcanzar la calidad óptica deseada. En el caso de los sistemas *freeform*, el método establecido se basa en la combinación del conocimiento de las aberraciones generadas por la componente *freeform* proporcionado por la Teoría Nodal de Aberraciones (NAT) y la optimización multiparamétrica. De este modo, NAT se emplea para seleccionar los coeficientes que se van a introducir como variables durante la optimización. Sin embargo, hasta el momento, en la literatura solo se habían presentado las expresiones de las aberraciones y su dependencia con el campo generadas por componentes *freeform* descritas mediante los polinomios de Zernike. Por ello, en esta tesis se propone la extensión de NAT a sistemas cuya componente *freeform* está descrita mediante la base de los *Q-polynomials*. Esta base es de especial interés ya que, al emplearse durante el proceso de optimización del sistema,

permite limitar la desviación de las pendientes locales a lo largo toda la superficie de manera muy sencilla. Esto supone una potente herramienta para llevar a cabo un diseño orientado a facilitar la posterior fabricación y verificación de las superficies ópticas que lo componen. Una vez hecho esto, se propone un método de diseño en el que se combina el uso de las bases de polinomios de Zernike y de  $Q$ -*polynomials* para describir la componente *freeform*. De este modo, se propone emplear cada una de las bases de polinomios en la tarea para la que está mejor optimizada. Este método se ha validado mediante el diseño de un telescopio *freeform* de dos espejos para una misión de Observación de la Tierra.

En cuanto a la verificación de superficies ópticas *freeform*, la principal dificultad radica en que es habitual que las pendientes locales que genera la componente *freeform* a lo largo de toda la superficie sean demasiado pronunciadas. Esto implica que, en una medida interferométrica, se genera una densidad de franjas tan alta en algunas zonas que el interferómetro no las puede resolver. En el caso de la componente *freeform* del espejo secundario del telescopio previamente diseñado, se ha podido medir la componente *freeform* directamente mediante interferometría gracias a la limitación en las pendientes que se introdujo durante el proceso de optimización del diseño. Por ello, se ha propuesto un método de verificación mediante una medida interferométrica no nula, es decir, no se mide un frente de ondas plano sino uno aberrado. Este método de verificación es específico para el espejo secundario de este telescopio, es decir, no se puede adaptar de forma sencilla a la verificación de otras superficies. Por este motivo, adicionalmente, se ha propuesto un método alternativo que emplea un modulador espacial de fase (SLM) para compensar la componente *freeform* del espejo y generar un frente de ondas plano en el interferómetro. El uso de un SLM permite modificar la fase para adaptarla a la compensación de la componente *freeform* específica que presenta la superficie. Por ello, este método permite una fácil adaptación a la verificación de un amplio rango de superficies.

En el alineamiento de este tipo de sistemas ópticos, aparece la dificultad añadida de que las posiciones de campo en las que las aberraciones son mínimas no coinciden necesariamente con el eje. Puede ocurrir que la calidad óptica en eje sea demasiado baja como para emplear esta posición de campo como referencia para el alineamiento. Este es el caso del telescopio que nos ocupa. Por ello, se ha propuesto un método para acceder a las distintas posiciones de campo a lo largo del plano focal del teles-

copio para poder emplear las más adecuadas para garantizar un buen alineamiento. Este acceso a todo el plano focal permite medir la dependencia de las distintas aberraciones con el campo para comprobar que los nodos de aberraciones, puntos con valor nulo o mínimo de aberraciones, se encuentran en las posiciones adecuadas.



# Abstract

Freeform optics consists of breaking rotational symmetry in one of the surfaces that make up the optical system. In this way, it is a powerful tool in the correction of aberrations as it provides the designer with a larger number of degrees of freedom. This makes it possible to reduce the size, number of elements and mass of optical systems or to achieve larger angular fields while maintaining high optical quality. The use of freeform optics presents a wide range of advantages, but it implies the development of new working methodologies because the previously established methods for optical systems that maintain the rotational symmetry are no longer valid. This thesis proposes new working methods in the areas of optical design, verification of optical surfaces and alignment of freeform optical systems.

The design of freeform optical systems cannot be approached in the same way as the design of systems with aspherical surfaces in which higher orders are gradually introduced until the desired optical quality is achieved. In the case of freeform systems, the established method is based on the combination of the knowledge of the aberrations generated by the freeform component provided by the Nodal Aberration Theory (NAT) and multi-parametric optimisation. Thus, NAT is used to select the coefficients to be introduced as variables during optimisation. However, so far, only the expressions of the aberrations and their dependence on the field generated by freeform components described by means of Zernike polynomials have been presented in the literature. Therefore, in this thesis we propose the extension of NAT to systems whose freeform component is described by the basis of Q-polynomials. This basis is of particular interest because, when used during the system optimisation process, it allows the deviation of the local slopes along the entire surface to be limited in a very straightforward manner. This provides a powerful tool to perform

a design oriented to facilitate the subsequent fabrication and verification of the optical surfaces that constitute it. Once this is completed, a design method is proposed that combines the use of Zernike polynomials and Q-polynomials to describe the freeform component. Thus, it is proposed to use each of the polynomial bases in the task for which it is best optimised. This method has been validated by designing a two-mirror freeform telescope for an Earth Observation mission.

For the verification of freeform optical surfaces, the main difficulty is that it is common that the local slopes generated by the freeform component along the entire surface are too steep. This implies that, in an interferometric measurement, such a high fringe density is generated in some areas that the interferometer cannot resolve them. In the case of the freeform component of the secondary mirror of the previously designed telescope, it has been possible to measure the freeform component directly by interferometry as a result of the slope limitation introduced during the design optimisation process. Therefore, a verification method has been proposed using a non-null interferometric measurement, i.e. not a flat wavefront but an aberrated one is measured. This verification method is specific to the secondary mirror of this telescope, i.e. it cannot be easily adapted to the verification of other surfaces. For this reason, in addition, an alternative method has been proposed that uses a Spatial Light Modulator (SLM) to compensate for the freeform component of the mirror and generate a flat wavefront in the interferometer. The use of a SLM allows the phase to be modified for the compensation of the specific freeform component of the surface. Therefore, this method is easily adaptable to the verification of a wide range of surfaces.

In the alignment of this type of optical systems, there is the added difficulty that the field positions where aberrations are minimal do not necessarily match the optical axis. It may happen that the on-axis optical quality is too low to use this field position as a reference for alignment. This is the case for the telescope in hand. Therefore, a method has been proposed to access the different field positions along the focal plane of the telescope in order to use the most suitable ones to ensure a good alignment. This access to the entire focal plane allows to measure the dependence of the different aberrations with the field in order to ensure that the aberration nodes, points with zero or minimum aberrations, are in the right positions.

# Capítulo 1

## Preliminar

### 1.1. Motivación

La ingeniería óptica es una disciplina científica y tecnológica que abarca aquellos fenómenos físicos y tecnologías asociadas a la generación, transmisión, manipulación, detección y utilización de la luz, o más ampliamente, la radiación electromagnética, desde los rayos X hasta el infrarrojo lejano y las ondas submilimétricas. El ingeniero óptico utiliza la luz para resolver problemas y diseñar y construir dispositivos e instrumentos donde la luz proporciona información relevante.

En el campo de las aplicaciones espaciales, ámbito en el que se desarrolla la presente tesis, esta disciplina adquiere un elevado grado de complejidad que se extiende a todas las fases del desarrollo: diseño, fabricación e integración y verificación. Es necesario disponer de medios humanos y materiales altamente especializados e instalaciones apropiadas que permitan completar con éxito el desarrollo y asegurar el cumplimiento de requisitos en las condiciones espaciales apropiadas. En ocasiones, la complejidad es debida al tamaño de los elementos ópticos, como en los espejos de los telescopios espaciales que precisan de gran capacidad colectora de radiación; en otros casos por la alta resolución espacial requerida que obliga a disponer de sistemas de larga longitud focal. Además, el sistema debe diseñarse para ofrecer las prestaciones requeridas y mantenerlas durante el tiempo de vida de la misión en unas condiciones espaciales hostiles que degradan sus prestaciones.

Dentro de la ingeniería óptica, el diseño óptico constituye en sí mismo otra disciplina. Consiste en la habilidad para seleccionar y ordenar el conjunto de elementos ópticos capaces de satisfacer los requerimientos técnicos o científicos de la misión y también de analizar su comportamiento en condiciones operativas. Engloba un conjunto de técnicas y habilidades en el manejo de herramientas muy específicas como son el trazado de rayos, el diseño de recubrimientos superficiales, el análisis de radiación difusa, análisis de la polarización... En general, se trata de todas aquellas técnicas que permiten conocer y analizar figuras de mérito representativas de la calidad y comportamiento del sistema óptico.

Los sistemas ópticos se construyen combinando elementos ópticos, que pueden ser pasivos (lentes, espejos, redes de difracción, filtros...) o activos (cristales líquidos, moduladores espaciales, sistemas de iluminación...) con el objetivo de lograr un fin concreto: adquirir una imagen, obtener un espectro, detectar radiación, etc. Las lentes y los espejos constituyen los elementos principales de cualquier sistema óptico, y a menudo se clasifican por su forma. Las dos formas de superficie más comunes son la esférica y la asférica. Cada una ofrece características únicas que la hacen adecuada para diferentes aplicaciones. En las lentes y espejos esféricos la superficie es una sección de una esfera, el radio de curvatura es constante en toda la lente. La superficie esférica, al incidir sobre ella un haz colimado, hace que la luz converja si es convexa o diverja si es cóncava, con una potencia focal proporcional al índice de refracción del vidrio y el radio de curvatura, en el caso de una lente, y solo el radio de curvatura en el caso de un espejo.

Las principales ventajas de utilizar lentes esféricas en sistemas ópticos son su diseño superficial más simple y un menor coste de fabricación. Estas lentes se pueden fabricar utilizando aparatos totalmente mecánicos sin control por ordenador. Dependiendo del tamaño de la lente y la cantidad deseada, las lentes esféricas se suelen pulir en lotes, ahorrando un tiempo considerable en el proceso de pulido y en el coste.

Existen múltiples clasificaciones dependiendo de los detalles de la geometría de ambas caras, así tenemos lentes plano-convexas, plano-cóncavas, bi-cóncavas, bi-convexas y también meniscos, cuando ambas caras presentan la misma orientación de los centros de curvatura. Otra ventaja importante de este conjunto de lentes

es que presentan mayor tolerancia de posicionamiento durante la integración y el alineamiento.

Estas son las lentes que se han utilizado tradicionalmente, para un conjunto muy diverso de aplicaciones incluidas las aplicaciones espaciales desde su origen. Casi todos los sistemas ópticos fabricados hoy en día incluyen en su diseño alguna lente esférica.

Por su parte, las lentes y espejos asféricos son aquellos que presentan un radio de curvatura no esférico pero con simetría de revolución. A diferencia de las lentes esféricas, tienen un radio de curvatura que varía desde el centro hasta el borde de la lente. Para dar forma y pulir estas superficies es necesario utilizar máquinas de control numérico asistido por computadora (CNC); el técnico óptico debe programar la máquina CNC para adaptarse al radio variable de curvatura. Dado que las superficies asféricas deben fabricarse en equipos CNC, solamente se puede fabricar una a la vez, no se pueden mecanizar ni pulir en lotes. Esto hace que las superficies asféricas sean considerablemente más caras de producir que las superficies esféricas. Además, el diseñador óptico debe considerar cuidadosamente los detalles de la superficie asférica para que el equipo CNC pueda seguir con precisión una curva que puede resultar compleja. No existe desafío comparable en el caso de las lentes esféricas. Eso sí, cuando se construyen correctamente, pueden ofrecer mayores prestaciones que una lente esférica comparable. Algunos de los beneficios fundamentales de usar una lente asférica en un sistema óptico son:

- Reducción de los efectos de la aberración esférica, la distorsión y el astigmatismo marginal.
- Menor número de elementos requeridos.
- Mayor apertura óptica manteniendo la buena corrección de aberraciones.
- Mejora del enfoque y de la eficiencia de colección de luz.

La corrección de la aberración esférica es una de las ventajas principales de estas lentes, minimizan el desenfoque y producen mejor calidad de imagen. Con lentes esféricas se puede conseguir un resultado similar, pero habría que incluir más elementos en el sistema aumentado así su masa y su volumen.

Por esta razón, las lentes y espejos asféricos han formado parte, desde sus ini-

cios, de los sistemas ópticos utilizados en aplicaciones espaciales, donde estas dos variables, masa y volumen, son tan importantes.

Tradicionalmente, las misiones espaciales se han caracterizado por su alta complejidad, volúmenes y masas muy elevados y largos tiempos de desarrollo que involucran a un gran número de personas. Esto implica elevados costes únicamente alcanzables por algunas instituciones gubernamentales como la NASA (*National Aeronautics and Space Agency*) o la ESA (*European Space Agency*). Este enfoque permite llegar al lanzamiento con las mayores garantías posibles del correcto funcionamiento en vuelo del satélite que habrá pasado previamente por un gran número de pruebas y tests. Sin embargo, al suponer una tan elevada inversión de recursos, un fallo en el lanzamiento tiene un altísimo impacto.

Debido precisamente a la alta complejidad de las misiones espaciales tradicionales, en las últimas décadas se ha desplazado el interés hacia misiones de dimensiones más reducidas. En este contexto, aparece el concepto CubeSat como una estructura comercial rápidamente disponible, de volumen muy reducido, bajo coste y que pone las misiones espaciales al alcance de pequeños países u organizaciones. La idea original del CubeSat surgió en un contexto universitario como herramienta para el desarrollo de tecnología.

La especificación inicial de CubeSat se desarrolló en 1999 en la Universidad Politécnica Estatal de California en San Luis Obispo y se trata de una estructura cúbica de 100 mm de lado y 1.33 kg de masa que se conoce como una unidad (1U) de CubeSat. Esta unidad se puede emplear por sí misma, pero también se puede unir con más unidades para crear satélites de mayor tamaño. Típicamente se emplean satélites compuestos por la unión de tres unidades (3U), 6 unidades (6U) e incluso se han alcanzado estructuras de 27 unidades (27U). Aunque han ido surgiendo distintos modelos de CubeSat, todos ellos coinciden en la interfaz de unión al lanzador. Esto supone una enorme ventaja ya que permite a los lanzadores instalar un sistema de despliegue común válido para cualquier CubeSat.

Los CubeSats proporcionan satélites comerciales con una alta disponibilidad con volumen, masa y coste muy reducidos. Esto abre la puerta al desarrollo de misiones espaciales con tiempos de desarrollo mucho más cortos que permiten que la tecnología que llega al espacio esté más actualizada. Adicionalmente, por la importante

reducción de recursos, se reduce el impacto de un fallo en el lanzador. Aunque el CubeSat surgió en un contexto formativo y de demostración tecnológica, esta tendencia ha cambiado e incluso las agencias gubernamentales están implementando su uso con numerosas misiones. Para alcanzar en prestaciones a las misiones tradicionales, se ha introducido el concepto de carga útil fraccionada. Esto es, separar la carga útil en distintos satélites que vuelan en formación para trabajar como si fueran uno. Esto permite mantener bajos costes y tiempo de desarrollo mientras que se alcanza un alto rendimiento.

Todos estos avances hacia el uso de CubeSats han generado una alta demanda de sistemas ópticos de volumen muy reducido y un limitado número de elementos. Al reducir tanto el volumen como el número de elementos, aparecen importantes dificultades para alcanzar una calidad óptica comparable con aquella que proporcionan las misiones tradicionales. La reducción en volumen es tan grande que, en muchos casos, no es suficiente con recurrir al uso de superficies esféricas para alcanzar la calidad óptica deseada. Por ello, una herramienta que se adapta perfectamente para solventar estas dificultades es la óptica *freeform*. Mientras que las superficies esféricas mantienen la simetría de revolución, una superficie *freeform* rompe con esta simetría, con lo que permite aumentar el número de grados de libertad disponibles para el diseñador que previamente se habían reducido con la reducción del número de elementos. Es por este motivo que la óptica *freeform* ha tenido un importante crecimiento en los últimos años dentro del ámbito espacial. La entrada de la óptica *freeform* en este ámbito se fundamenta en los importantes desarrollos que ha habido en las áreas de diseño óptico, fabricación y verificación de superficies *freeform* y alineamiento de sistemas ópticos *freeform*. Por lo tanto, para poder trabajar con este tipo de sistemas ópticos, es necesario desarrollar las capacidades adecuadas en cada una de ellas. Sin embargo, dentro de estas áreas, hay algunos aspectos que aún no han quedado resueltos.

## 1.2. Objetivos

El principal objetivo de esta tesis es abordar en su totalidad las diferentes fases del desarrollo de sistemas ópticos *freeform* para su aplicación en sistemas espaciales. Para ello, se propone desarrollar las capacidades necesarias en las distintas áreas de trabajo que, en nuestro caso son el diseño óptico, la verificación de la topografía superficial y el alineamiento de sistemas que incluyan este tipo de superficies. Para alcanzar este objetivo, se han establecido los siguientes:

1. Alcanzar un profundo conocimiento del estado del arte de la óptica *freeform* y de la Teoría Nodal de Aberraciones que gobierna su comportamiento e interpretación. Incidir especialmente en la descripción matemática de superficies *freeform*, en el diseño óptico de sistemas y la verificación de superficies.
2. Establecer el marco teórico que permita la directa aplicación de la Teoría Nodal de Aberraciones en el diseño óptico de sistemas *freeform* teniendo en cuenta la viabilidad de fabricación de las superficies que lo componen.
3. Desarrollar estrategias de diseño que permitan incorporar superficies *freeform* en el diseño de sistemas ópticos:
  - a) Analizar distintas bases polinomiales y la viabilidad de su uso en los paquetes comerciales (CodeV®Synopsys, Zemax OpticStudio).
  - b) Incorporar los parámetros que definen estas superficies en la función de error y en el análisis de tolerancias.
  - c) Interpretar para facilitar la fabricación, esto es, limitar los valores de la pendiente de la sagita para evitar procesos críticos de fabricación.
4. Aplicar el desarrollo teórico anterior a un proyecto real consistente en un telescopio espacial destinado a la observación de la Tierra y embarcado en un CubeSat, abordando de forma secuencial las tres áreas siguientes:
  - a) Diseño de un sistema óptico en CodeV (herramienta de diseño óptico que se emplea a lo largo de toda la tesis) que incluya al menos una superficie *freeform*, justificando la selección de la superficie más apropiada y aplicando la metodología de diseño descrita en el marco teórico de esta

tesis.

- b) Elaboración de planos de fabricación e interacción con el fabricante óptico para definir y especificar un rango de tolerancias de fabricación que asegure el cumplimiento de prestaciones.
  - c) Desarrollo de metodologías de verificación de superficies ópticas *freeform* que se adapten a un amplio rango de elementos ópticos diferentes. En concreto, verificación mediante técnicas experimentales basadas en el uso de moduladores espaciales de luz y comparación con interferometría de frente de ondas no nulo. Generación de montajes de laboratorio que permitan asegurar el cumplimiento de especificaciones mediante la comparación con modelos ópticos creados en Code V.
  - d) Alineamiento del sistema óptico *freeform* implementando las técnicas adecuadas derivadas de la Teoría Nodal de Aberraciones.
5. En general, en el campo experimental, se establece como objetivo principal desarrollar una metodología que permita verificar cualquier superficie o lente *freeform* dentro de unas limitaciones específicas, que en nuestro caso vendrán impuestas por el rango dinámico del modulador espacial de luz.
6. En particular, y dentro del campo de la instrumentación espacial pequeña y compacta, el objetivo es demostrar la validez de las metodologías de diseño y verificación desarrolladas.

### 1.3. Estructura de la tesis

La tesis está compuesta por 7 capítulos que a su vez están enmarcados en dos partes bien diferenciadas.

En este primer capítulo introductorio se presenta la motivación para el trabajo realizado y se establecen una serie de objetivos.

A continuación, empieza la primera parte que agrupa los capítulos 2, 3 y 4 y recoge la parte teórica de la tesis. Esta parte se centra en revisar la Teoría Nodal de Aberraciones, extenderla a sistemas descritos mediante la base de los  $Q$ -*polynomials* y llevar a cabo el diseño de un sistema *freeform* enfocado en facilitar la posterior fabricación y verificación de las superficies ópticas que lo componen.

En el capítulo 2 se hace un recorrido por el estado del arte de la óptica *freeform*, especialmente por los aspectos más relevantes para enmarcar y comprender el trabajo que se ha realizado en la tesis. Se comienza por definir lo que es una superficie *freeform* y enumerar las distintas representaciones matemáticas que hay más extendidas para este tipo de superficies, especialmente aquellas más relevantes para la tesis que son la base polinomios de Zernike y la base de  $Q$ -*polynomials*. A continuación, se presenta la teoría de aberraciones que se emplea en este tipo de sistemas y el método de diseño que se ha establecido basado en el empleo de esta teoría. Por último, se presentarán los típicos métodos de fabricación y verificación de elementos *freeform*.

En el capítulo 3 se extiende la Teoría Nodal de Aberraciones a sistemas cuya componente *freeform* se describe mediante los  $Q$ -*polynomials* a través del cambio de base a los polinomios de Zernike. Se obtienen las expresiones de las aberraciones y su dependencia con el campo que genera una contribución *freeform* descrita mediante cada uno de los elementos de la base de los  $Q$ -*polynomials*. Con ello, se establece un nuevo método de diseño que emplea cada una de estas bases de polinomios en la fase del proceso para la que está mejor optimizada.

En el capítulo 4 se lleva a cabo el diseño de un telescopio *freeform* para embarcar en un CubeSat para una misión de Observación de la Tierra. El método empleado se basa en la combinación de la Teoría Nodal de Aberraciones con una optimización

multiparamétrica, por lo que es fundamental realizar un análisis adecuado para seleccionar el diseño inicial. En concreto, se emplea el método de diseño óptico de sistemas *freeform* establecido en el capítulo anterior.

En la segunda parte de la tesis tenemos los capítulos experimentales en los que se desarrollan métodos para verificar superficies *freeform* y para llevar a cabo el alineamiento de sistemas *freeform*.

En el capítulo 5 se lleva cabo la verificación de los espejos que componen el telescopio que se ha diseñado en el capítulo anterior. Se muestra cómo el haber realizado un diseño orientado a facilitar la verificación del espejo *freeform* permite medir la componente *freeform* directamente mediante interferometría. Adicionalmente, se desarrolla un método versátil que permite la verificación de un amplio rango de superficies *freeform*. De este modo, se ha desarrollado la capacidad de verificar superficies *freeform* de distintas características.

En el capítulo 6 se lleva a cabo el alineamiento del telescopio *freeform* verificando las posiciones de los nodos de aberraciones que predice el modelo. Se realizan medidas interferométricas del error del frente de ondas que se ha obtenido para los campos de trabajo y se compara con las simulaciones. Además, se realiza un barrido del campo a lo largo de todo el plano imagen para obtener medidas de la dependencia de las aberraciones con el campo. En concreto, se comprueba la distribución binodal de astigmatismo.

Finalmente, la tesis acaba con un capítulo de conclusiones en el que se recogen los principales resultados obtenidos y se proponen líneas de trabajo futuro.



# Parte I

## Teoría y diseño de sistemas ópticos *freeform*



# Capítulo 2

## Estado del arte

En este capítulo se lleva a cabo una revisión de los aspectos más relevantes de la óptica *freeform*. En primer lugar, se define lo que es una superficie *freeform* y se muestran las distintas opciones para su descripción matemática. A continuación, se explica la teoría de aberraciones que gobierna el diseño de este tipo de sistemas y se presentan los distintos métodos de diseño. Por último, se exponen los distintos métodos disponibles para la fabricación de estas superficies seguido de las opciones que existen para la verificación de las mismas. Con este capítulo se pretende presentar la información necesaria para enmarcar y comprender el trabajo realizado a lo largo de toda la tesis.

## 2.1. Introducción

La óptica *freeform* consiste en la rotura de la simetría de revolución en alguna de las superficies que componen el sistema óptico, por lo que va más allá tanto de sistemas con superficies esféricas como sistemas con superficies descentradas. De este modo, se proporciona al diseñador un mayor número de grados de libertad que permiten alcanzar soluciones que un sistema convencional no alcanzaría, al mismo tiempo que genera nuevos retos para la fabricación y la verificación. Es por esto que, en los últimos años, esta tecnología y sus potenciales campos de aplicación han crecido exponencialmente. Este crecimiento ha sido posible gracias al desarrollo que ha habido tanto en el campo del diseño óptico como en fabricación y verificación de este tipo de superficies complejas con la precisión necesaria. El campo del diseño óptico de sistemas utilizando este tipo de superficies estaba condicionado por la baja velocidad computacional del momento y por la falta de una teoría de aberraciones que diera el soporte teórico necesario. No fue hasta 2012 que se desarrolló y hasta 2014 que se publicó una teoría de aberraciones para sistemas *freeform*. Esto supuso un gran impulso para un campo que no ha dejado de crecer desde entonces. Esta nueva capacidad del diseño óptico impulsó nuevos retos para la fabricación y la verificación que, de igual modo, se hayan en continua evolución. Los grandes avances que se han producido en estas tres áreas, el diseño, la fabricación y la verificación, han posibilitado llevar a cabo diseños con mayor calidad para campos mayores, se han simplificado los sistemas ópticos al poder reducirse el número de elementos y con ello, se ha reducido la masa, el volumen e incluso el coste y, en muchos casos, se simplifica el alineamiento del sistema óptico precisamente por esa reducción en el número de elementos.

Existen muchas áreas de aplicación de la óptica *freeform* en sistemas de formación de imagen, de concentración de la luz o de iluminación. En el caso de los sistemas formadores de imagen, la óptica *freeform* ha permitido mejorar la calidad óptica mediante la corrección de aberraciones, aumentar el campo, o simplificar sistemas ópticos manteniendo la calidad. Podemos encontrar algunos ejemplos como la fabricación de retrovisores para los automóviles con un espejo *freeform* y un campo de visión que llega a los 45° evitando el punto ciego y reduciendo la distorsión [3], el empleo de un espejo *freeform* para la toma de imágenes panorámicas que requieren

un campo de visión muy amplio [4], el uso de óptica *freeform* para proyectores de vídeo de corta distancia [5], para dispositivos de realidad virtual compactos y con un peso ligero [6] o para cámaras de teléfonos móviles cuyo volumen es muy reducido [7]. En el caso de los sistemas de concentración de la luz, la clave no es la calidad óptica sino la eficiencia en la distribución de la energía y más concretamente, el ángulo de aceptación. Se han empleado elementos *freeform* para aumentar ese ángulo de aceptación y mejorar la eficiencia en la colección de luz [8]. En cuanto a los sistemas de iluminación, que se centran en controlar la distribución de intensidad, la óptica *freeform* ha sido empleada con éxito para proporcionar una iluminación uniforme en aplicaciones con LEDs. Por ejemplo, se han diseñado dispositivos de alto brillo con LEDs que alcanzan una alta eficiencia mediante un componente *freeform* [9]. También se ha empleado la óptica *freeform* para mejorar la uniformidad angular de color (ACU, *Angular Colour Uniformity*) de un LED blanco [10]. Adicionalmente, se han empleado componentes *freeform* en aplicaciones de *beam shaping* como en el diseño de un sistema de dos espejos para cambiar la distribución de irradiancia de un láser [11].

Por su parte y hasta la fecha, la penetración de la óptica *freeform* en aplicaciones espaciales ha sido muy débil. La complejidad de las técnicas de fabricación aplicada a superficies de gran apertura como son las propias de telescopios e instrumentos espaciales, la limitación de materiales susceptibles de ser utilizados en el entorno espacial y el riesgo asociado a toda nueva tecnología han limitado su aplicación. Esta tendencia tiende a revertirse con el New Space donde se buscan diseños compactos y ligeros y donde la óptica *freeform* tiene un papel muy relevante que jugar.

## 2.2. Descripción de superficies *freeform*

Una superficie *freeform* se define como una superficie que no tiene ningún eje de simetría [12]. Típicamente, un sistema óptico está compuesto por superficies esféricas, cónicas o asféricas que presentan simetría de rotación entorno a un eje. En cambio, un sistema *freeform* tiene al menos una superficie que no preserva dicha simetría. Estrictamente hablando, en esta consideración entrarían las superficies anamórficas y las cónicas fuera de eje. Sin embargo, no se va a considerar que estas

superficies sean *freeform* ya que el diseñador no las trata como tal y considera las cónicas fuera de eje como superficies centradas con pupila descentrada. En cambio, para el proceso de fabricación y verificación solo el toroide se consideraría *freeform* ya que las cónica fuera de eje se pueden fabricar y verificar del mismo modo que una cónica en eje mientras que el toroide sí que requiere la consideración de los 3 ejes.

Las opciones disponibles para la descripción matemática de las superficies *freeform* son muy diversas y se debe seleccionar la más adecuada en función de la aplicación a la que se destine la superficie [13, 14]. Típicamente se emplean expresiones analíticas que proporcionan una descripción global de la superficie [15], pero también hay casos en los que es más conveniente una descripción discreta por puntos de toda la superficie. Incluso en casos con grandes desviaciones en la pendiente, se emplean métodos híbridos de estas dos opciones. En la literatura, ya se ha abordado la comparativa entre los distintos métodos de representación de superficies *freeform* [16]. En este caso, nos vamos a centrar en la descripción analítica de las superficies ya que será la que presente mayor relevancia para los siguientes capítulos. Esta representación analítica se puede llevar a cabo mediante la descomposición de la superficie en bases ortogonales o no ortogonales de polinomios. Las bases ortogonales son las más usadas debido a la ventaja que constituye la ortogonalidad que permite evaluar cada modo de forma independiente. Las bases no ortogonales presentan la ventaja de adaptarse a todas las superficies independientemente de la forma de su apertura.

### 2.2.1. Bases no ortogonales

La forma más común de representar superficies *freeform* con bases no ortogonales es usando los polinomios XY [17]. Se trata de una representación global que consiste en una superficie base, típicamente una superficie cónica o una superficie anamórfica, a la que se le añade una combinación de monomios del tipo  $x^m y^n$  del siguiente modo:

$$Z(x, y) = \frac{C_x x^2 + C_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (k_x + 1)C_x^2 x^2 - (k_y + 1)C_y^2 y^2}} + \sum_{j=2}^J a_j x^m y^n \quad (2.1)$$

donde  $C_x$  y  $C_y$  son las curvaturas de la superficie base en cada eje,  $k_x$  y  $k_y$

las constantes cónicas en cada eje,  $a_j$  los coeficientes asociados a cada monomio,  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  y  $j = \frac{(m+n)^2+m+3n}{2} + 1$ .

Para la representación de curvas o superficies, otro de los primeros candidatos a tener en cuenta es la parametrización polinómica ya que se trata de un método sencillo, aunque no resulta práctico. Alternativamente a los polinomios de grado  $n$ , se emplean los llamados polinomios de Bernstein [18, 19]. El polinomio  $i$ -ésimo de Bernstein de grado  $n$  se define mediante la expresión 2.2, donde el primer paréntesis representa el número combinatorio.

$$B_i^n(t) \equiv \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.2)$$

Estos polinomios forman una base alternativa de polinomios de grado  $n$  o inferior y tienen la ventaja de ser todos del mismo grado. Se pueden representar las curvas polinómicas de grado  $n$  como una combinación de dichos polinomios, lo que se conoce como curvas de Bèzier (ecuación 2.3).

$$C(t) = \sum_{i=0}^n c_i B_i^n(t) \quad t \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Los coeficientes  $c_i$  son puntos del plano o el espacio que se denominan puntos de control y constituyen los vértices del llamado polígono de control que actúa como envolvente que encierra la curva. Es importante destacar que los vértices  $c_0$  y  $c_n$  son los únicos por los que pasa la curva, los demás puntos están relacionados con las derivadas sucesivas de la parametrización. Una curva de grado  $n$  tiene un polígono de control de  $n + 1$  vértices. El nombre de polígono de control hace referencia a que sirve para controlar la forma de la curva. Sin embargo, ese control no es local ya que, desplazando un vértice, se modifica toda la curva, aunque principalmente la parte más próxima a dicho vértice. Esto constituye la principal desventaja de las curvas de Bèzier.

La solución a este problema es hacer una definición de la curva a trozos. Se segmenta el dominio para definir una curva de Bèzier diferente en cada sub-dominio y se imponen condiciones de continuidad para forzarlas a actuar como una única curva. Cada sub-dominio será el dominio de una curva de Bèzier. Al conectar todas

estas curvas se genera lo que se conoce como una curva de *B-Splines* [20, 21, 22] y los puntos de unión de las curvas son sus nodos. Por lo tanto, por analogía con las curvas de Bèzier, la curva queda definida como una combinación lineal de los *B-splines* de grado  $n$  pesados por los puntos de control  $P_i$ :

$$C(t) = \sum_{i=0}^p P_i N_{i,n}(t) \quad (2.4)$$

donde, considerando el vector de nodos  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , el  $i$ -ésimo *B-spline* de orden  $n$  se define mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$N_{i,n}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} N_{i,n-1}(t) + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1,n-1}(t) \quad (2.6)$$

Tenemos por lo tanto, una curva de orden  $n$  delimitada mediante  $p$  puntos de control y  $(n + p + 1)$  nodos. Un *B-spline* que no tiene nodos es una curva de Bèzier.

En definitiva, los *B-Splines* de orden  $n$  son funciones polinómicas definidas a trozos que se emplean como base para construir una curva del mismo orden. Quedan definidos mediante el orden  $n$  y los nodos por los que se fracciona el dominio al que pertenece la curva. En función de cómo se distribuye el espaciado entre los puntos de control, existen *B-Splines* uniformes, si los puntos de control son equidistantes, o no uniformes, en el caso contrario. Además, se puede contemplar una parametrización no racional que se realiza mediante el uso de polinomios no fraccionales o una parametrización racional en la que se presenta un polinomio en el numerador y otro en el denominador. Este tipo de *B-Splines* racionales permiten la representación de superficies cónicas como esferas, elipses o hipérbolas que, en caso de usar *B-Splines* no racionales, solo pueden aproximarse. Los NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) [23, 24] son *B-Splines* racionales cuyos puntos de control se distribuyen de modo no uniforme. Adicionalmente, en los NURBS se introduce un peso  $w_i$  a cada punto de control para determinar la contribución de cada uno de ellos (ecuación 2.7). Esto los hace muy útiles por ser una opción muy versátil y precisa para la representación de curvas o superficies.

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i w_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_i^n(t)} \quad (2.7)$$

Otra opción alternativa para la representación de superficies *freeform* es el uso de las bases de funciones radiales (RBFs por sus siglas en inglés) [25, 26] que constituyen una forma general para describir superficies. Tienen el cometido de aproximar una función que depende de dos o más variables (en este caso una superficie de dos variables) mediante una combinación lineal basada en una única función que depende de una única variable. Las RBFs reconstruyen una superficie mediante la combinación lineal de las translaciones de una función base a lo largo de toda la apertura. Las translaciones se especifican mediante los vectores  $\vec{x}_n$  que se denominan centros y que se pueden elegir libremente a lo largo de toda la superficie. La función base tiene la característica principal de que solo depende del vector posición trasladado, en concreto del módulo de dicho vector, es decir, la distancia al centro, por lo que se dice que son funciones radiales. De este modo, una superficie se puede representar empleando RBFs del siguiente modo:

$$Z(\vec{x}) = \sum_{n=0}^N a_n \phi(\epsilon^2 \|\vec{x} - \vec{x}_n\|_2) \quad (2.8)$$

donde  $\vec{x}$  es el vector posición,  $\phi$  es la función base,  $a_n$  los coeficientes para cada translación,  $\epsilon^2$  es el factor de forma [27],  $\vec{x}_n$  los centros y  $\|\cdot\|_2$  representa la norma del vector.

La función que se elige como base solo debe cumplir la condición de depender únicamente de la distancia. En óptica se suele emplear la función *gaussiana* ya que su transformada de Fourier es otra *gaussiana* y esta sencilla conexión con el espacio de Fourier podría ser de utilidad. Adicionalmente, se ha desarrollado un método llamado *RBF-slope* en el que se relaciona el factor de forma de la función con la pendiente local de la superficie proporcionando una mayor capacidad de ajuste [27].

### 2.2.2. Bases ortogonales

Pese a la amplia disponibilidad de funciones matemáticas, la forma más extendida de representación de superficies *freeform* es mediante una superficie base con

simetría rotacional (típicamente una esfera o una cónica) a la que se añade una contribución *freeform* descrita mediante la combinación lineal de elementos de una base ortogonal. Adicionalmente, se ha propuesto el uso de superficies cónicas fuera de eje como superficies base con lo que se consigue obtener una contribución menor del término *freeform* [28]. Para aperturas circulares, las dos bases más extendidas son la base de polinomios de Zernike [29] y la base de *Q-polynomials* [30, 31]. En las expresiones que se van a mostrar a continuación se podrá ver que ambas bases están definidas de forma muy similar pero presentan algunas diferencias muy interesantes debidas a que cada base fue introducida para un cometido diferente.

Los polinomios de Zernike constituyen la base más extendida porque presenta la ventaja de ser ampliamente conocida y entendida, lo que proporciona al diseñador una gran intuición durante su uso ya que tiene una relación directa con las aberraciones [32, 33]. Sin embargo, aunque los polinomios de Zernike son perfectamente adecuados para la representación de aberraciones, presentan algunas desventajas en la representación de superficies *freeform* mientras que la base de *Q-polynomials* se introdujo precisamente para este cometido.

### Base de polinomios de Zernike

Una superficie óptica con una superficie base cónica y una componente *freeform* descrita mediante los polinomios de Zernike se representa matemáticamente mediante la expresión 2.9, donde  $z(r, \theta)$  es la sagita definida en la dirección del eje óptico,  $C$  y  $K$  son la curvatura y la constante cónica de la superficie base respectivamente,  $C_n^m$  son los coeficientes de Zernike asociados a los polinomios de Zernike  $Z_n^m(u, \theta)$ ,  $n$  y  $m$  son números enteros que cumplen  $n + m = \text{par}$ ,  $|m| \leq n$  y representan el orden radial y el orden azimutal respectivamente,  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas radial y angular de la superficie respectivamente y  $u$  es la coordenada radial normalizada.

$$z(r, \theta) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} + \sum_{n,m} C_n^m Z_n^m(u, \theta) \quad (2.9)$$

Los polinomios de Zernike se pueden expresar mediante el producto de un factor de normalización, una función radial y una función angular del siguiente modo

$$Z_n^m(u, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^m(u) \cos(m\theta) & m \geq 0 \\ N_n^m R_n^m(u) \sin(m\theta) & m < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

donde

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_m}} \quad (2.11)$$

$$R_n^m(u) = \sum_l^{(n-m)/2} \frac{(-1)^l (n-l)!}{l! \left(\frac{n+m}{2} - l\right)! \left(\frac{n-m}{2} - l\right)!} u^{n-2l} \quad (2.12)$$

Estas funciones radiales  $R_n^m(u)$  son polinomios de grado  $n$  que contienen las potencias  $u^n, u^{n-2}, \dots, u^m$  por lo que son funciones pares o impares dependiendo de si  $n$  (o  $m$ ) es par o impar.

Alternativamente, se reescribe la combinación de polinomios de Zernike mediante un único índice  $j = \frac{n(n+2)+m}{2}$ . De este modo, la superficie *freeform* quedaría descrita como se muestra en la ecuación 2.13 mediante una superficie base cónica y una componente *freeform* expresada como la superposición lineal de los polinomios de Zernike.

$$z(r, \theta) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)C^2r^2}} + \sum_{j=0} C_j Z_j(u, \theta) \quad (2.13)$$

Los polinomios de Zernike son ortonormales en el círculo de radio unidad y esta ortonormalidad se expresa del siguiente modo:

$$\frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_j(r, \theta) Z_{j'}(r, \theta) r dr d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\theta} = \delta_{jj'} \quad (2.14)$$

Si separamos en componente radial y angular, la ortonormalidad de los polinomios de Zernike se puede representar mediante las siguientes expresiones:

$$\int_0^1 R_n^m(r) R_{n'}^m(r) r dr = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'} \quad (2.15)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(m'\theta) d\theta = \pi(1 + \delta_{m0}) \delta_{mm'} \quad (2.16)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = \pi \delta_{mm'} \quad (2.17)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = 0 \quad (2.18)$$

Precisamente por estas condiciones de ortogonalidad, se dice que la base de polinomios de Zernike es ortogonal en sagita (expresión 2.14). Esto implica que los coeficientes de Zernike se pueden relacionar directamente con el RMS de la componente de superficie que describen como se muestra en la ecuación 2.19.

$$RMS = \sum_j C_j^2 \quad (2.19)$$

Para obtener los términos de alto orden de la base de polinomios de Zernike evitando errores de redondeo, se puede emplear la siguiente relación de recurrencia para la componente radial [34]:

$$R_n^m(u) = \frac{1}{K_1} (uK_2 + K_3) R_{n-2}^m - K_4 R_{n-4}^m \quad (2.20)$$

donde

$$K_1 = \frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2} \quad (2.21)$$

$$K_2 = 2n(n-1)(n-2) \quad (2.22)$$

$$K_3 = -m^2(n-1) - n(n-1)(n-2) \quad (2.23)$$

$$K_4 = \frac{-(n+m-2)(n-m-2)}{2} \quad (2.24)$$

y las condiciones iniciales para los casos  $n = m$  y  $n - m = 2$  son

$$R_m^m = u^m \quad (2.25)$$

$$R_m^{m+2} = (m+2)u^{m+2} - (m+1)u^m \quad (2.26)$$

En la figura 2.1 se presentan las expresiones analíticas de los polinomios de Zernike en su ordenamiento Fringe hasta  $j = 36$ .

j	Polinomios de Zernike (Fringe)	Descripción	j	Polinomios de Zernike (Fringe)	Descripción
1	1	Piston (constant)	20	$(5R^5 - 4R^3) \sin(3\theta)$	Trefoil, Secondary (y-axis)
2	$R \cos\theta$	Distortion - Tilt (x-axis)	21	$(15R^6 - 20R^4 + 6R^2) \cos(2\theta)$	Astigmatism, Tertiary (axis at $0^\circ$ or $90^\circ$ )
3	$R \sin\theta$	Distortion - Tilt (y-axis)	22	$(15R^6 - 20R^4 + 6R^2) \sin(2\theta)$	Astigmatism, Tertiary (axis at $\pm 45^\circ$ )
4	$2R^2 - 1$	Defocus - Field curvature	23	$(35R^7 - 60R^5 + 30R^3 - 4R) \cos\theta$	Coma, Tertiary (x-axis)
5	$R^2 \cos(2\theta)$	Astigmatism, Primary (axis at $0^\circ$ or $90^\circ$ )	24	$(35R^7 - 60R^5 + 30R^3 - 4R) \sin\theta$	Coma, Tertiary (y-axis)
6	$R^2 \sin(2\theta)$	Astigmatism, Primary (axis at $\pm 45^\circ$ )	25	$70R^8 - 140R^6 + 90R^4 - 20R^2 + 1$	Spherical Aberration, Tertiary
7	$(3R^3 - 2R) \cos\theta$	Coma, Primary (x-axis)	26	$R^5 \cos(5\theta)$	Pentafoil, Primary (x-axis)
8	$(3R^3 - 2R) \sin\theta$	Coma, Primary (y-axis)	27	$R^5 \sin(5\theta)$	Pentafoil, Primary (y-axis)
9	$6R^4 - 6R^2 + 1$	Spherical Aberration, Primary	28	$(6R^6 - 5R^4) \cos(4\theta)$	Tetrafoil, Secondary (x-axis)
10	$R^3 \cos(3\theta)$	Trefoil, Primary (x-axis)	29	$(6R^6 - 5R^4) \sin(4\theta)$	Tetrafoil, Secondary (y-axis)
11	$R^3 \sin(3\theta)$	Trefoil, Primary (y-axis)	30	$(21R^7 - 30R^5 + 10R^3) \cos(3\theta)$	Trefoil, Tertiary (x-axis)
12	$(4R^4 - 3R^2) \cos(2\theta)$	Astigmatism, Secondary (axis at $0^\circ$ or $90^\circ$ )	31	$(21R^7 - 30R^5 + 10R^3) \sin(3\theta)$	Trefoil, Tertiary (y-axis)
13	$(4R^4 - 3R^2) \sin(2\theta)$	Astigmatism, Secondary (axis at $\pm 45^\circ$ )	32	$(56R^8 - 105R^6 + 60R^4 - 10R^2) \cos(2\theta)$	Astigmatism, Quaternary (axis at $0^\circ$ or $90^\circ$ )
14	$(10R^5 - 12R^3 + 3R) \cos\theta$	Coma, Secondary (x-axis)	33	$(56R^8 - 105R^6 + 60R^4 - 10R^2) \sin(2\theta)$	Astigmatism, Quaternary (axis at $\pm 45^\circ$ )
15	$(10R^5 - 12R^3 + 3R) \sin\theta$	Coma, Secondary (y-axis)	34	$(126R^9 - 280R^7 + 210R^5 - 60R^3 + 5R) \cos\theta$	Coma, Quaternary (x-axis)
16	$20R^6 - 30R^4 + 12R^2 - 1$	Spherical Aberration, Secondary	35	$(126R^9 - 280R^7 + 210R^5 - 60R^3 + 5R) \sin\theta$	Coma, Quaternary (y-axis)
17	$R^4 \cos(4\theta)$	Tetrafoil, Primary (x-axis)	36	$252R^{10} - 630R^8 + 560R^6 - 210R^4 + 30R^2 - 1$	Spherical Aberration, Quaternary
18	$R^4 \sin(4\theta)$	Tetrafoil, Primary (y-axis)			
19	$(5R^5 - 4R^3) \cos(3\theta)$	Trefoil, Secondary (x-axis)			

Figura 2.1: Polinomios de Zernike en su ordenamiento Fringe.

En la figura 2.2 se muestran los primeros elementos que componen la base de polinomios de Zernike. Se han representado los elementos hasta  $n = 5$ , aunque típicamente, tanto para la representación de superficies *freeform* como de aberraciones de sistemas ópticos, se suele llegar hasta el orden  $n = 7$  que proporciona 36 polinomios.

### Base de *Q-polynomials*

Por su parte, la base de *Q-polynomials* fue introducida por G. W. Forbes para la representación de superficies tanto esféricas como *freeform* mediante bases que,

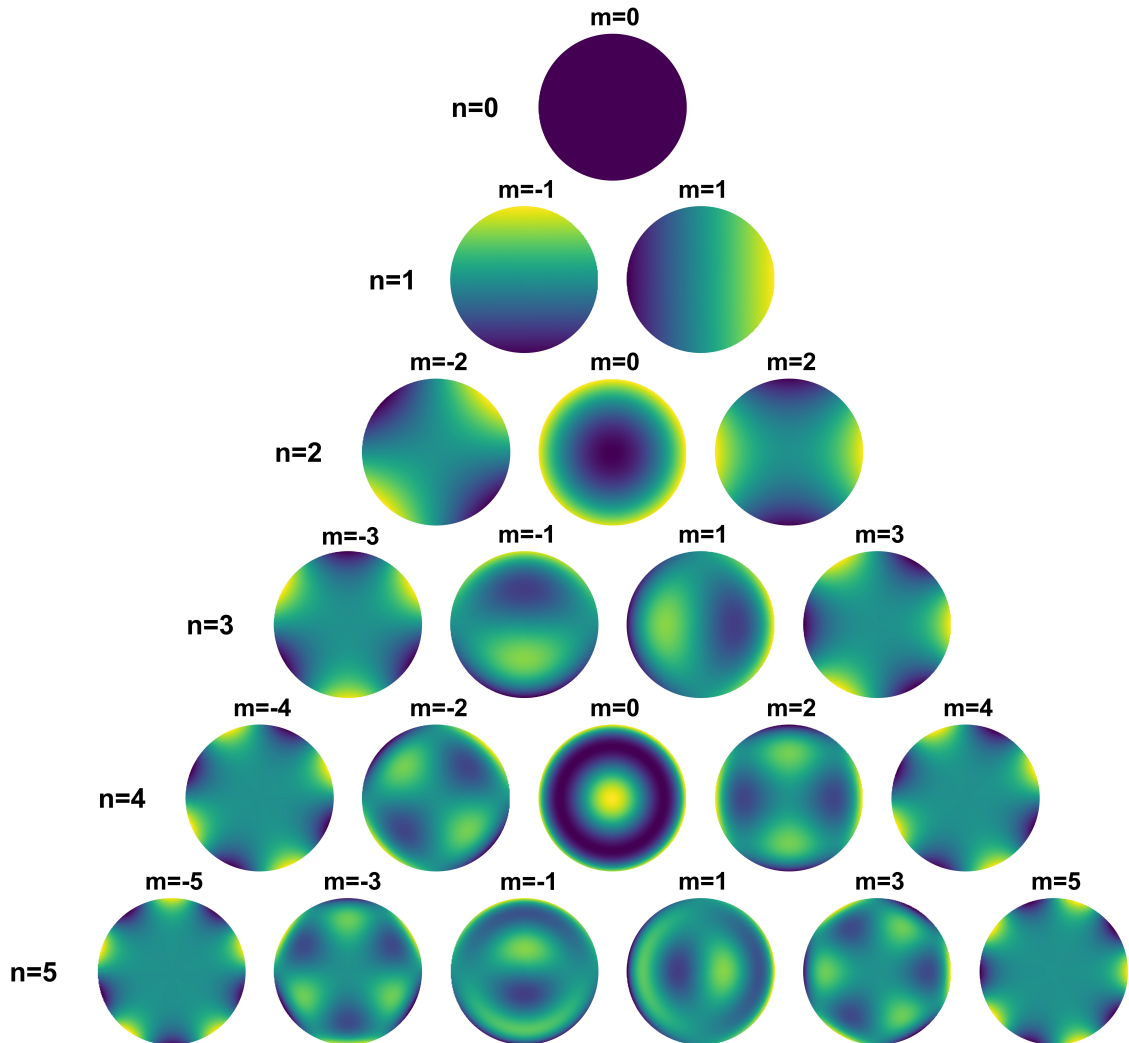


Figura 2.2: Polinomios de Zernike hasta  $n = 5$ .

en lugar de tener ortogonalidad en la sagita como la base de polinomios de Zernike, son ortogonales en la pendiente. De este modo, los coeficientes asociados a estas bases en la representación de superficies proporcionan una relación directa con el RMS en la pendiente. Tanto la fabricación como la verificación de superficies ópticas están directamente relacionadas con el cambio local de la pendiente a lo largo de la superficie, por lo que esta base facilita una optimización del diseño orientada a la posterior fabricación y verificación. Además, Forbes propone el uso de relaciones de recurrencia para generar los polinomios y evitar los problemas asociados a la generación de altos órdenes.

En primer lugar, Forbes propone un método para la representación de superficies esféricas con pupila circular como una superficies esférica base y una desviación en la dirección normal a dicha esfera base en forma de combinación lineal de polinomios ortogonales en la pendiente [35, 36]:

$$Z(r) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - C^2r^2}} + \frac{u^2(1 - u^2)}{\sigma(r)} \sum_{n=0}^N a_n Q_n^{bfs}(u^2) \quad (2.27)$$

donde  $C$  es la curvatura de la esfera base,  $r$  la coordenada radial,  $u$  la coordenada radial normalizada,  $a_n$  los coeficientes y  $Q_n^{bfs}(u^2)$  los elementos de la base. El factor  $\sigma(r) = \sqrt{1 - C^2r^2}$  es el coseno del ángulo entre el eje  $z$  y la dirección normal a la superficie base a lo largo de todos sus puntos. Por lo tanto, este factor proyecta la desviación definida mediante los  $Q$ -polynomials a lo largo de la dirección normal a la esfera base sobre el eje  $z$ . El prefactor  $u^2(1 - u^2)$  representa las condiciones de contorno que se han seleccionado de modo que la desviación respecto a la esfera base se anule tanto en el centro ( $u = 0$ ) como en el extremo de la superficie circular ( $u = 1$ ).

La base de polinomios  $\{Q_n^{bfs}(u^2)\}$  se construye de modo que se cumpla la siguiente condición de ortonormalidad:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 S_n(u) S_{n'}(u) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \delta_{nn'} \quad (2.28)$$

donde  $S_n(u)$  es la pendiente normal:

$$S_n(u) \equiv \frac{d}{du} [u^2(1 - u^2) Q_n^{bfs}(u^2)] \quad (2.29)$$

Y el factor de normalización se debe a que  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \pi/2$ .

De este modo, se ha generado una base ortogonal en la pendiente. En la figura 2.3, se muestran los primeros 6 órdenes de los polinomios  $Q_n^{bfs}(u^2)$  junto con sus correspondientes pendientes ortonormales.

Para órdenes mayores, Forbes propone el uso de la siguiente relación de recurrencia de tres términos mediante el uso de polinomios auxiliares [37]:

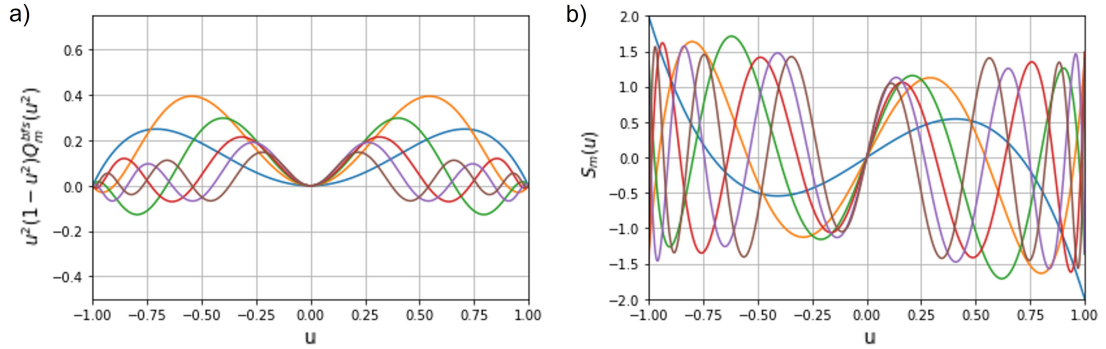


Figura 2.3: (a) Primeros 6 órdenes de los  $Q$ -polynomials para la representación de superficies esféricas. (b) Pendientes ortonormales correspondientes.

$$Q_{n+1}^{bfs}(x) = \frac{P_{n+1}(x) - g_n Q_n^{bfs}(x) - h_{n-1} Q_{n-1}^{bfs}}{f_{n+1}} \quad (2.30)$$

$$Q_0^{bfs}(x) = 1, \quad Q_1^{bfs}(x) = \sqrt{19}(13 - 16x) \quad (2.31)$$

Los polinomios auxiliares  $P_n(x)$  se obtienen mediante otra relación de recurrencia de tres términos:

$$P_{n+1}(x) = (2 - 4x)P_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (2.32)$$

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = 6 - 8x \quad (2.33)$$

Y los coeficientes  $g_n$ ,  $f_n$  y  $h_n$  se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$h_{n-2} = \frac{-n(n-1)}{2f_{n-2}} \quad g_{n-1} = \frac{-1 + g_{n-2}h_{n-2}^2}{f_{n-1}} \quad f_n = \sqrt{n(n+1) + 3 - g_{n-1}^2 - h_{n-1}^2} \quad (2.34)$$

$$f_0 = 2, \quad f_1 = \frac{\sqrt{19}}{2}, \quad g_0 = -1/2 \quad (2.35)$$

Además, Forbes propone una base ortogonal en pendiente para superficies esféricas con pupila anular, es decir, que tienen una obstrucción central de radio  $\epsilon$  de modo

que  $\epsilon \leq u \leq 1$  [37]. Este tipo de aperturas son muy habituales en el ámbito de la óptica espacial. Para ello, toma la base anterior y realiza el siguiente cambio de variable:

$$u^2 \rightarrow \frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \quad (2.36)$$

De este modo, la superficie quedaría descrita mediante la siguiente expresión:

$$Z(r) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - C^2r^2}} + \frac{(u^2 - \epsilon^2)(1 - u^2)}{(1 - \epsilon^2)\sqrt{(1 + \epsilon)(1 - C^2r^2)}} \sum_{n=0}^N a_n Q_n^{bfs} \left( \frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right) \quad (2.37)$$

En este caso, los elementos de la base  $\{Q_n^{bfs}(\frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2})\}$  deben cumplir la siguiente condición de ortonormalidad:

$$\frac{2}{(1 - \epsilon)\pi} \int_{\epsilon}^1 S_n(u) S_{n'}(u) \frac{1}{u} \sqrt{\frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}} du = \delta_{nn'} \quad (2.38)$$

donde

$$S_n(u) \equiv \frac{1}{(1 - \epsilon^2)\sqrt{1 + \epsilon}} \frac{d}{du} \left[ (u^2 - \epsilon^2)(1 - u^2) Q_n^{bfs} \left( \frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right) \right] \quad (2.39)$$

Y el factor de normalización se debe a que  $\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{u} \sqrt{\frac{u^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}} du = (1 - \epsilon) \frac{\pi}{2}$ .

Los 10 primeros órdenes de estos polinomios se muestran en la figura 2.4 junto con sus pendientes ortonomales.

En cuanto a las superficies *freeform*, Forbes propone hacer una representación matemática mediante una superficie base a la que se añade una componente *freeform* descrita mediante un conjunto de polinomios que son ortogonales en gradiente [30, 31]. Al igual que con las superficie esféricas, esta condición de ortogonalidad permite establecer una relación directa entre los coeficientes asociados a estos polinomios y el RMS en gradiente. De nuevo, esta relación permite limitar las desviaciones locales de la pendiente a lo largo de toda la superficie durante el proceso de optimización del diseño óptico simplemente limitando el valor de los coeficientes. Inicialmente,

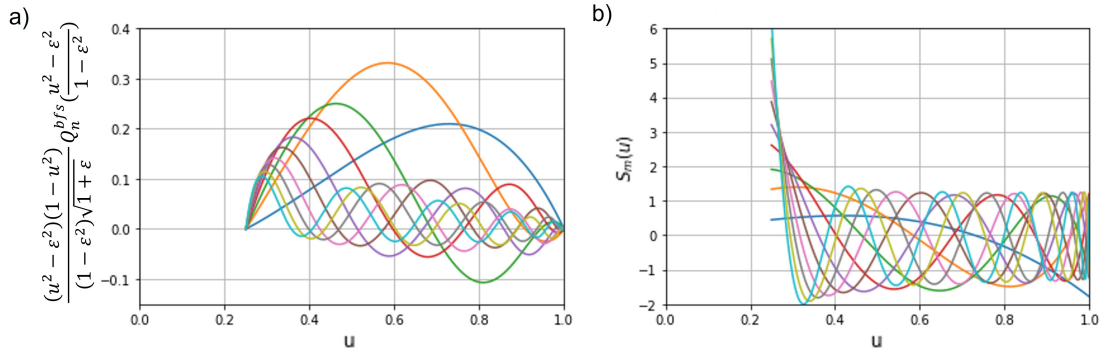


Figura 2.4: (a) Primeros 10 órdenes de los  $Q$ -polynomials para la representación de superficies esféricas con apertura anular. (b) Pendientes ortonormales correspondientes.

Forbes proporcionó una descripción en la que la superficie base era una esfera, sin embargo, esta expresión se puede generalizar al caso de tener una superficie base cónica. Tomando la constante cónica  $K = 0$  se recuperaría la descripción inicial que hizo Forbes con superficie base esférica. Empleando esta base, una superficie *freeform* quedaría descrita mediante la ecuación 2.40, donde  $Q_n^m(u^2)$  son los  $Q$ -polynomials ortogonales en gradiente y  $a_n^m$  y  $b_n^m$  son los coeficientes asociados a las componentes coseno y seno respectivamente,  $n$  representa el orden radial mientras  $m$  representa el orden azimutal,  $\delta(u, \theta)$  es la descripción de la componente *freeform* definida en la dirección del eje normal a la superficie base y  $\sigma(r)$  es el factor de proyección para que la sagita quede descrita en la dirección del eje óptico.

$$z(r, \theta) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} + \frac{\delta(u, \theta)}{\sigma(r)} = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} \quad (2.40)$$

$$+ \frac{1}{\sigma(r)} \left\{ u^2(1 - u^2) \sum_{n=0}^N a_n^0 Q_n^0(u^2) + \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=0}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Q_n^m(u^2) \right\},$$

El factor de proyección  $\sigma(r)$  es el coseno del ángulo que forman el eje óptico y la dirección normal de la superficie base a lo largo de toda la superficie y tiene la forma que se muestra en la ecuación 2.41.

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \frac{\sqrt{1 - KC^2r^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} \quad (2.41)$$

Como se ha dicho anteriormente, los  $Q$ -polynomials se definen de modo que sean ortogonales en el gradiente, de este modo, la suma de los cuadrados de los coeficientes proporcionan la pendiente cuadrática media. Esto se expresa del siguiente modo: si la desviación *freeform* en términos de  $Q$ -polynomials a lo largo del eje normal a la superficie base se expresa mediante  $\delta(u, \theta)$  (ecuación 2.40), la base de  $Q$ -polynomials se construye de tal forma que la media del cuadrado del gradiente cumpla la condición 2.42.

$$\langle |\nabla \delta(u, \theta)|^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial \delta}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle = \sum_{n,m} [(a_n^m)^2 + (b_n^m)^2] \quad (2.42)$$

Los corchetes de esta condición denotan el promedio sobre la apertura que se define como se hizo en la referencia [30]:

$$\langle g(u, \theta) \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} g(u, \theta) [1 - u^2]^{-1/2} d\theta du \quad (2.43)$$

Si se llevan a cabo las integrales en la componente angular, la condición de ortogonalidad se reduce a la ecuación 2.44.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[ u^m \frac{\partial}{\partial u} [Q_n^m(u^2)], mu^{m-1} Q_n^m(u^2) \right] \cdot \left[ u^m \frac{\partial}{\partial u} [Q_{n'}^m(u^2)], mu^{m-1} Q_{n'}^m(u^2) \right] \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \delta_{nn'} \quad (2.44)$$

De nuevo, para obtener estos polinomios, especialmente los altos órdenes, es conveniente emplear relaciones de recurrencia. El propio Forbes propuso una forma robusta de obtener los  $Q$ -polynomials mediante las siguientes relaciones de recurrencia:

$$m = 0 \quad \rightarrow \quad Q_n^0(x) = Q_n^{bfs}(x) \quad (2.45)$$

$$m \neq 0 \quad \rightarrow \quad Q_n^m(x) = \frac{P_n^m(x) - g_{n-1}^m Q_{n-1}^m(x)}{f_n^m} \quad (2.46)$$

$$Q_0^m(x) = \frac{1}{2f_0^m} \quad (2.47)$$

Los coeficientes  $g_n^m$  y  $f_n^m$  se obtienen del siguiente modo:

$$g_{n-1}^m = \frac{G_{n-1}^m}{f_{n-1}^m}, \quad f_n^m = \sqrt{F_n^m - g_{n-1}^m g_{n-1}^m} \quad (2.48)$$

$$f_0^m(x) = \sqrt{F_0^m} \quad (2.49)$$

Los coeficientes  $G_n^m$  y  $F_n^m$  se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$F_n^m = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{2^{m+1}(m-1)!} & n = 0 \\ -\frac{(2n^2-1)(n^2-1)}{8(2n-1)^2} + \frac{1}{24}\delta_{n1} & n > 0, m = 1 \\ \frac{2n\chi(3-5m+4n\chi)+m^2(3-m+4n\chi)}{(m+2n-3)(m+2n-2)(m+2n-1)(m+2n)}\gamma_n^m & n > 0, m > 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$G_n^m = \begin{cases} \frac{m^2(2m-3)!!}{2^{m+1}(m-1)!} & n = 0 \\ \frac{4n^2(n-1)^2+1}{8(2n-1)^2} + \frac{11}{32}\delta_{n1} & n > 0, m = 1 \\ \frac{[2n(m+n-1)-m](n+1)(2m+2n-1)}{(m+2n-2)(m+2n-1)(m+2n)(2n+1)}\gamma_n^m & n > 0, m > 1 \end{cases} \quad (2.51)$$

donde

$$\gamma_n^m = \frac{n!(2m+2n-3)!!}{2^{m+1}(m+n-3)!(2n-1)!!} \quad (2.52)$$

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)! \quad (2.53)$$

$$-1!! = 1, \quad 0!! = 1, \quad n!! = n(n-2)!! \quad (2.54)$$

$$\chi = m + n - 2 \quad (2.55)$$

Se puede ver que solo se requieren los valores de  $\gamma_n^m$  para  $n > 0$  y  $m > 1$  y, además, también se pueden obtener mediante la siguiente relación:

$$\gamma_1^{m+1} = \frac{2n+1}{2(m-1)}\gamma_1^m \quad (2.56)$$

$$\gamma_{n+1}^m = \frac{(n+1)(2m+2n-1)}{(m+n-2)(2n+1)}\gamma_n^m \quad (2.57)$$

$$\gamma_1^2 = \frac{3}{8} \quad (2.58)$$

Por último, los polinomios auxiliares  $P_n^m(x)$  se pueden obtener mediante la siguiente relación de recurrencia de tres términos:

$$P_{n+1}^m(x) = [A_n^m + xB_n^m]P_n^m(x) - C_n^m P_{n-1}^m(x) \quad (2.59)$$

$$P_0^m(x) = \frac{1}{2} \quad (2.60)$$

$$P_1^m(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & m = 1 \\ m - \frac{1}{2} - (m-1)x & m > 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Si  $m = 1$ , la relación de recurrencia solo se cumple para  $n > 1$  y se inicia con

$$P_2^1(x) = \frac{3 - x(12 - 8x)}{6} \quad (2.62)$$

$$P_3^1(x) = \frac{5 - x[60 - x(120 - 64x)]}{10} \quad (2.63)$$

Finalmente, los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$A_n^m = \frac{(2n-1)(m+2n-2)[4n(m+n-2) + (m-3)(2m-1)]}{D_n^m} \quad (2.64)$$

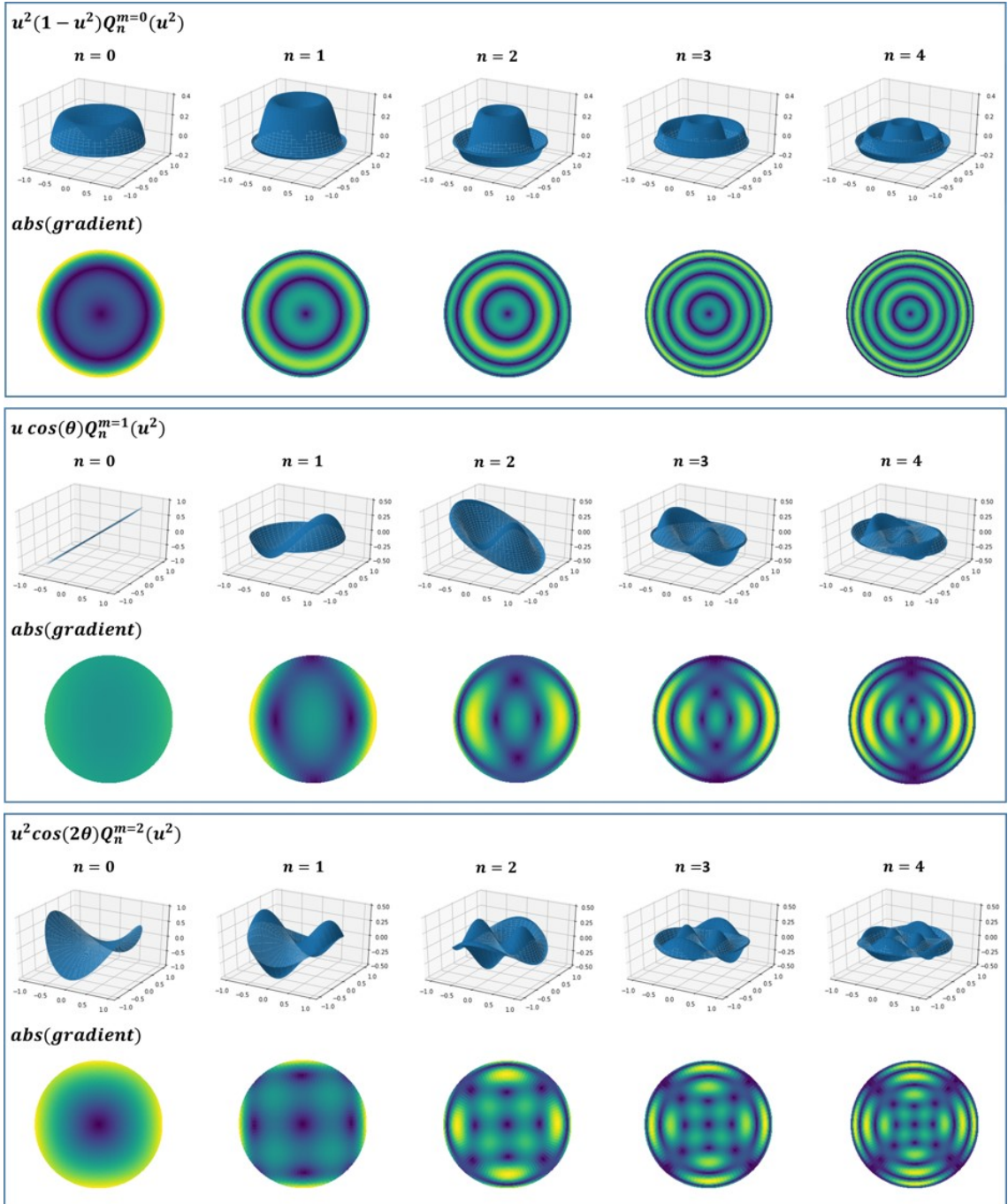
$$B_n^m = \frac{-2(2n-1)(m+2n-3)(m+2n-2)(m+2n-1)}{D_n^m} \quad (2.65)$$

$$C_n^m = \frac{n(2n-3)(m+2n-1)(m+2n-3)}{D_n^m} \quad (2.66)$$

$$D_n^m = (4n^2 - 1)(m+n-2)(m+2n-3) \quad (2.67)$$

De este modo, se pueden calcular los distintos elementos de la base de  $Q$ -polynomials. En la figura 2.5 se muestran los primeros órdenes de los  $Q$ -polynomials acompañados del módulo de los gradientes ortogonales.

Estas dos bases de polinomios de Zernike y de  $Q$ -polynomials son las más comúnmente empleadas para la descripción de superficies *freeform* con apertura circular e incluso anular. Ambas se definen de manera similar pero tienen algunas



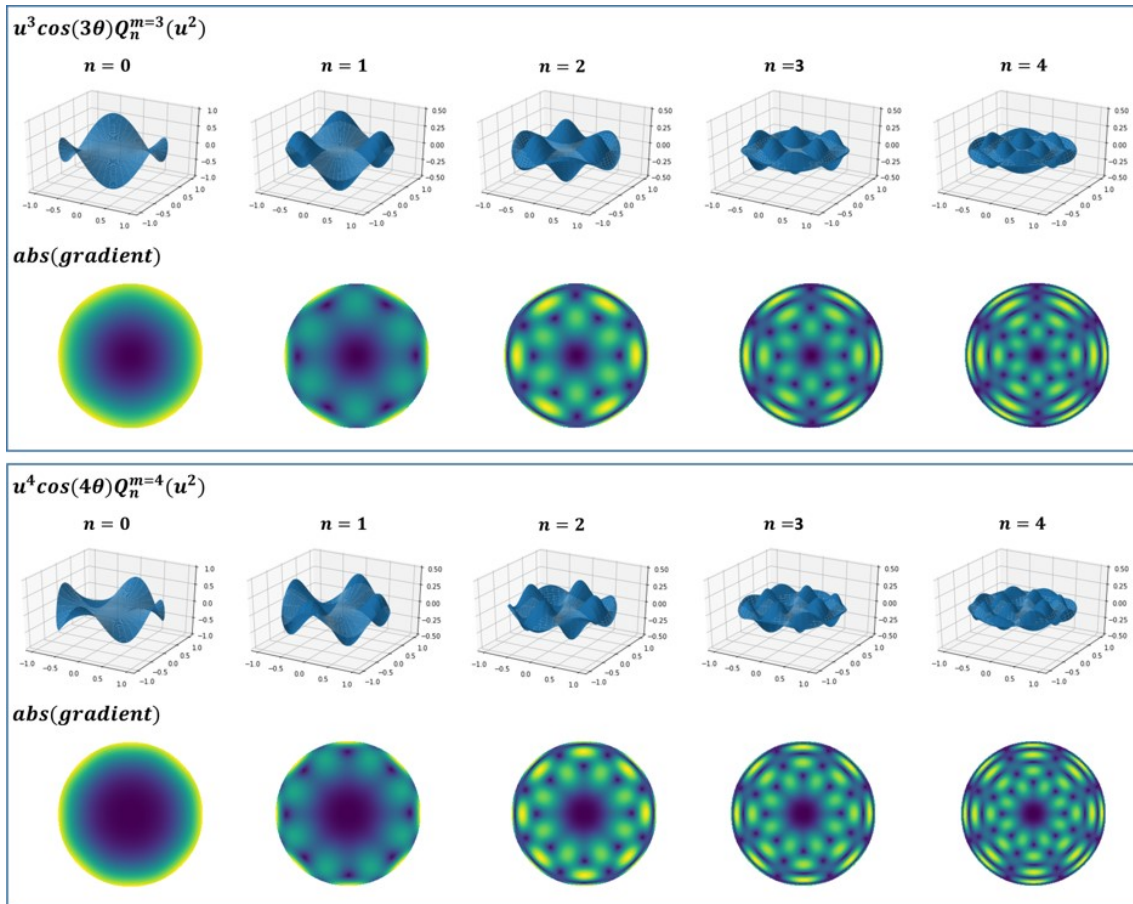


Figura 2.5: Representación de los primeros órdenes de  $Q$ -polynomials con sus correspondientes gradientes ortonormales. En cada par de filas se representa un orden azimutal  $m$  hasta  $m = 4$ . Dentro de cada par de filas, en la primera fila se muestran los polinomios mientras que en la segunda fila se muestran los gradientes. Por último, cada columna representa un orden  $n$  hasta  $n = 4$ .

diferencias que son fundamentales. La primera diferencia entre ambas es que la base de polinomios de Zernike contiene los polinomios individuales de pistón y foco mientras que en la base de *Q-polynomials* estos elementos han sido eliminados. Esto es interesante ya que dichos elementos presentan una degeneración con otras variables del sistema (el pistón es equivalente a un desplazamiento de la superficie óptica a lo largo de su eje y el foco a un cambio de curvatura). La segunda y principal diferencia entre estas bases es el eje en el que están definidas. Los polinomios de Zernike se definen en la dirección del eje óptico, típicamente el eje  $z$ , mientras que los *Q-polynomials* se definen a lo largo del eje normal a la superficie base a lo largo de toda la superficie, motivo por el cuál aparece el factor de proyección  $\sigma(r)$  en la expresión 2.40. Esta diferencia en el eje de definición de estas bases implica a su vez, un cambio en la condición de ortogonalidad de cada una de ellas y, por lo tanto, una diferencia en el significado de los coeficientes asociados a cada base. Esta diferencia en la condición de ortogonalidad es fundamental ya que introduce una conexión directa entre el diseño y la fabricación y verificación de la superficie descrita mediante los *Q-polynomials*. Esta condición permite limitar fácilmente la desviación de la pendiente durante el proceso de optimización del diseño simplemente introduciendo una limitación en los valores que toman los coeficientes. Es bien sabido que un aumento en la desviación de la pendiente respecto a la superficie base genera un aumento en la dificultad de fabricación y verificación. Esto se debe a que las zonas de la superficie con pendientes locales muy pronunciadas generan, en su verificación mediante interferometría, un patrón de franjas con una densidad muy alta que el interferómetro puede no ser capaz de resolver. Por ello, limitar esta desviación en las pendientes locales a lo largo de toda la superficie durante el proceso de diseño puede ser de gran utilidad posteriormente [38, 39].

### Otras bases ortogonales

Para casos con aperturas no circulares existen otras bases ortogonales como los polinomios de Chebyshev [40] o los polinomios de Legendre [41] en caso de tener aperturas rectangulares. Además, para otras aperturas se puede emplear el método de ortogonalización de Gram-Schmidt como se ha hecho para ortogonalizar los polinomios de Zernike en aperturas elípticas [42], anulares [43] o hexagonales [44].

Adicionalmente, se ha propuesto un método híbrido que propone tomar una superficie con forma arbitraria y dividirla en secciones circulares que se pueden solapar para cubrir la superficie completa [45]. En cada una de las subdivisiones, se emplean los polinomios de Zernike o los *Q-polynomials* para el ajuste de esa porción de la superficie en la que sí constituyen una base ortogonal. Una vez realizados los ajustes locales en las porciones de superficies, se combinan usando las funciones RBFs como peso. Este método es análogo al uso de las RBFs pero, en lugar de trasladar una función base a lo largo de toda la superficie, se traslada el origen de coordenadas de los polinomios de Zernike o los *Q-polynomials* a cada uno de los centros de las subaperturas. Una de las principales ventajas de este método radica en que las subaperturas pueden solaparse y definirse de la manera más conveniente. Esto posibilita definir dichas subaperturas de manera estratégica para poder ajustar incluso superficies con defectos muy pronunciados con un número bajo de órdenes de polinomios y con una alta precisión.

## 2.3. Diseño óptico de sistemas *freeform*

### 2.3.1. Teoría Nodal de Aberraciones

En el campo del diseño óptico se ha desarrollado una teoría matemática para la optimización y el tratamiento de aberraciones en estos sistemas. Esta teoría se conoce como Teoría Nodal de Aberraciones (NAT por sus siglas en inglés) y fue desarrollada en 2012 y publicada en 2014. Hasta entonces, el tratamiento de aberraciones se había realizado mediante la *Wave Aberration Theory* desarrollada por Hopkins [46] que era la teoría implementada en las principales herramientas de diseño. Sin embargo, tras su publicación, la Teoría Nodal de Aberraciones se implementó en las herramientas de diseño óptico, lo que ha permitido la optimización de diseños ópticos *freeform*.

El origen de esta teoría data de 1976 cuando se hizo llegar al profesor Roland Shack una imagen proporcionada por un telescopio durante su fase de puesta a punto (*commissioning*) que presentaba un extraño comportamiento de astigmatismo a lo largo del plano focal. En concreto, esta imagen presentaba dos nodos de astigmatismo, o puntos de astigmatismo nulo, que se encontraban alejados del eje óptico.

En la figura 2.6(a) se puede ver dicha imagen con los dos puntos de astigmatismo nulo alejados del eje óptico. En esta figura ya se puede ver el análisis posterior de la imagen hecho desde el punto de vista de NAT. El profesor Shack se dio cuenta de que la aparición de estos nodos de astigmatismo se debía a la rotura de la simetría de revolución del sistema. Esta rotura de simetría se produjo por errores tanto en el alineamiento como en el astigmatismo superficial inducido por la deformación por gravedad de un espejo primario de masa elevada. El profesor Shack desarrolló un marco teórico para explicar el astigmatismo binodal que impulsó la búsqueda de una teoría completa de aberraciones y desembocó en lo que hoy se conoce como Teoría Nodal de Aberraciones. Además, esta teoría permitió diferenciar entre la contribución al astigmatismo debida al error de forma o error superficial de los espejos y a los errores de alineamiento. Precisamente por esto, NAT también se ha empleado para asistir el alineamiento de sistemas ópticos.

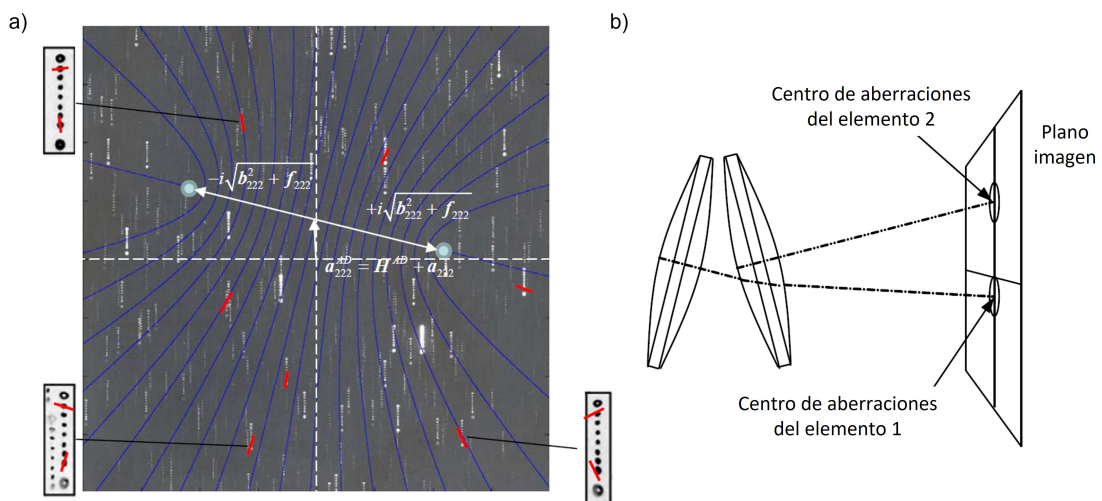


Figura 2.6: (a) Primera imagen documentada de astigmatismo binodal que impulsó el desarrollo de NAT [1]. Representación esquemática del desplazamiento de los centros de aberraciones de cada elemento óptico del sistema [2].

Tras los trabajos del profesor Shack, la teoría fue desarrollada matemáticamente y extendida para otras aberraciones por Thompson [47, 48]. El desarrollo se basó en la expresión vectorial de la teoría de aberraciones de Hopkins [46] y en el trabajo desarrollado por Buchroeder [2] sobre elementos descentrados y el desplazamiento de los centros de aberraciones en el plano imagen. En la figura 2.6(b) se puede ver

la contribución de cada elemento del sistema al desplazamiento de los centros de aberraciones. La interacción entre estas aberraciones generadas por cada elemento para componer el patrón final de aberraciones del sistema es precisamente lo que constituye la base del trabajo realizado por Buchroeder y el concepto fundamental en el que se basó el desarrollo de NAT. Adicionalmente, Fuerschbach et al. [49, 50] extendieron la teoría a sistemas con superficies *freeform* descritas mediante la base de polinomios de Zernike. Se elaboró un desarrollo matemático que considera las aberraciones que genera en el plano focal cada uno de los polinomios de Zernike como componente *freeform* en una superficie del sistema.

Para el desarrollo de la teoría, se tomó como punto de partida la teoría de aberraciones de Hopkins [46]. Esta teoría representa las aberraciones del sistema como se muestra en la expresión 2.68 donde  $H$  es el campo normalizado,  $u$  y  $\varphi$  son las coordenadas en pupila, radial normalizada y angular respectivamente,  $W_{klm}$  son los coeficientes de aberraciones y el subíndice  $j$  hace referencia al número de la superficie.

$$W(H, u, \varphi) = \sum_j \sum_{p,m,n} (W_{klm})_j H^k u^l \cos^m \varphi \quad (2.68)$$

$$k = 2p + m, l = 2n + m$$

Para extender la teoría a sistemas en los que no se preserva la simetría de revolución, Shack expresó el campo en el plano imagen y las coordenadas en la pupila de salida como vectores en dos dimensiones. De este modo, las aberraciones se pueden reescribir en forma vectorial y se obtiene la expresión 2.69, donde  $\vec{H}$  es el vector campo normalizado y  $\vec{u}$  es el vector pupila normalizado.

$$W(\vec{H}, \vec{u}) = \sum_j \sum_{p,m,n} (W_{klm})_j (\vec{H} \cdot \vec{H})^p (\vec{H} \cdot \vec{u})^m (\vec{u} \cdot \vec{u})^n \quad (2.69)$$

$$k = 2p + m, l = 2n + m$$

A partir de esta expresión, se introduce el desplazamiento de los centros de aberraciones  $\vec{\sigma}_j$  que genera cada elemento realizando el cambio de variable  $\vec{H} \rightarrow \vec{H} - \vec{\sigma}_j$  y se obtiene la expresión 2.70.

$$W(\vec{H}, \vec{u}) = \sum_j \sum_{p,m,n} (W_{klm})_j ((\vec{H} - \vec{\sigma}_j) \cdot (\vec{H} - \vec{\sigma}_j))^p ((\vec{H} - \vec{\sigma}_j) \cdot \vec{u})^m (\vec{u} \cdot \vec{u})^n \quad (2.70)$$

$$k = 2p + m, l = 2n + m$$

Cabe destacar que los valores de los coeficientes  $W_{klm}$  no se ven afectados por el desplazamiento de los centros de aberraciones ya que se obtienen únicamente a partir de parámetros paraxiales.

De este modo, se alcanzó una expresión analítica para el cálculo de aberraciones en sistemas que no preservan la simetría de revolución por la presencia de elementos descentrados. A partir de esto, Fuerschbach et al. [49, 50] extendieron la teoría a sistemas que rompen la simetría de revolución mediante superficies *freeform*. Para ello, en lugar de centrarse en los desplazamientos de los centros de aberraciones, tuvieron en cuenta el desplazamiento de la pupila que se produce con el campo cuando una superficie no coincide con el diafragma de apertura (stop) del sistema. Así, obtuvieron las aberraciones y la dependencia con el campo que generan en el plano imagen cada uno de los polinomios de Zernike introducidos como componente *freeform* hasta sexto orden (los primeros 16 polinomios de Zernike). Los resultados componen precisamente la Teoría Nodal de Aberraciones.

Como ya se ha mencionado, el desarrollo de la teoría se centró en el desplazamiento que sufre la pupila sobre una superficie para distintos campos cuando dicha superficie no coincide con el stop del sistema. Este desplazamiento se puede expresar del siguiente modo:

$$\Delta \vec{h} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ y \end{pmatrix} \vec{H} = \begin{pmatrix} \bar{u}t \\ y \end{pmatrix} \vec{H} \quad (2.71)$$

donde  $\bar{y}$  es la altura del rayo principal sobre la superficie,  $y$  la altura del rayo marginal sobre la superficie,  $\bar{u}$  es el ángulo del rayo principal sobre la superficie y  $t$  es la distancia entre la superficie y el stop del sistema. Este desplazamiento del haz con el campo, es totalmente análogo a un desplazamiento de la propia superficie si coincidiera con la posición del stop del sistema como se ha representado en la figura 2.7. En esta figura se puede ver cómo se desplaza la superficie y ahora el vector pupila sufre el cambio  $\vec{\rho} \rightarrow \vec{\rho}' = \vec{\rho} - \Delta \vec{h}$ .

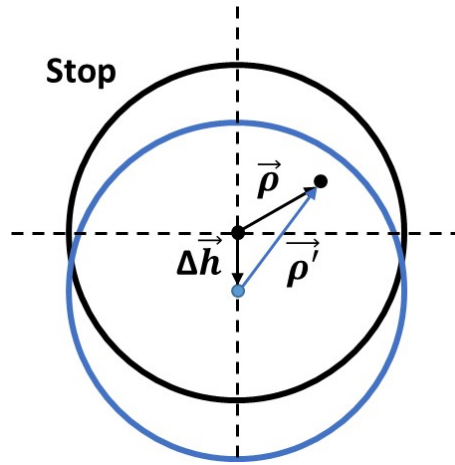


Figura 2.7: Desplazamiento del vector pupila con el campo en una superficie que no coincide con el stop del sistema.

Por lo tanto, se puede hacer un desarrollo análogo al que se ha hecho previamente para sistemas con superficies descentradas y se pueden escribir las aberraciones del sistema mediante el siguiente cambio de variable:

$$W(\vec{\rho}) \rightarrow W(\vec{\rho} - \Delta\vec{h}) \quad (2.72)$$

De este modo, se obtiene la contribución a las aberraciones que genera en el plano imagen una superficie *freeform*. Se establece que la rotura de simetría de revolución en un sistema óptico no genera nuevos tipos de aberraciones, sino que cambia la dependencia de las aberraciones con el campo de visión. Esta es una de sus consecuencias más importantes. Además, se puede ver claramente, que este cambio de las aberraciones con el campo depende de la posición que ocupa la superficie *freeform* respecto al stop del sistema. Si la superficie *freeform* coincide con el stop del sistema, no hay desplazamiento  $\Delta\vec{h}$  con el campo, por lo que cualquier contribución a las aberraciones no dependerá del campo. Por lo tanto, una superficie *freeform* situada en el stop del sistema genera una contribución a las aberraciones constante con el campo. Además, esa contribución será del mismo tipo que la contribución *freeform* que presenta la superficie, es decir, si la contribución *freeform* está descrita mediante los polinomios de Zernike de astigmatismo ( $Z_5$  y  $Z_6$  en su ordenamiento Fringe), se genera una contribución de astigmatismo en el plano imagen que es constante con el campo. Lo mismo ocurre con cualquier otro polinomio.

Sin embargo, si la superficie *freeform* se sitúa alejada del stop del sistema, existe un desplazamiento del haz  $\Delta\vec{h}$  y se genera una contribución a las aberraciones en el plano imagen que sí tienen dependencia con el campo.

Es precisamente esta contribución a las aberraciones y su dependencia con el campo lo que obtuvieron Fuerschbach et al. en la referencia previamente citada [50]. En concreto, obtuvieron las expresiones analíticas para la contribución a las aberraciones de una superficie *freeform* que no coincide con el stop del sistema descrita mediante cada uno de los modos de polinomios de Zernike de tercer orden.

En las figuras 2.8 y 2.9 se muestran los resultados obtenidos. Se muestran las aberraciones que genera cada contribución *freeform* y su dependencia con el campo a través de las ecuaciones que se obtuvieron para dichas aberraciones (figura 2.8). En las expresiones de las aberraciones generadas en el plano imagen se ha identificado cada término dejando a un lado los términos de *tilt* o pistón ya que estos últimos no deforman la imagen. En estas expresiones, aparecen los vectores  $\vec{B}_{222}^2$ ,  $\vec{A}_{131}$ ,  $\vec{C}_{333}^3$ ,  $\vec{B}_{242}^2$  y  $\vec{A}_{151}$  que son vectores en 2 dimensiones que representan la magnitud y el sentido de la componente *freeform* descrita mediante los polinomios de Zernike. Las expresiones de estos vectores se muestran en la tabla 2.1 donde se relacionan los polinomios ( $Z_{i/i+1}$ ) y coeficientes de Zernike ( $C_{i/i+1}$ ) con su expresión vectorial a través del módulo  $|z_{i/i+1}|$  y el ángulo  $\xi_{i/i+1}$ . Adicionalmente, las aberraciones se han representado mediante los FFDs (*Full Field Displays*) en la figura 2.9. Los FFDs son una herramienta que Thompson desarrolló durante la década de 1980 específicamente para la evaluación de aberraciones en sistemas *freeform* [51, 52]. Hasta entonces, la dependencia de las aberraciones con el campo se evaluaba a lo largo de un eje (típicamente el eje y) ya que, si el sistema mantiene la simetría de revolución, la dependencia de las aberraciones con el campo también mantiene dicha simetría. Sin embargo, esta forma de evaluar esta dependencia pierde utilidad en el caso de sistemas *freeform* ya que dicha simetría se rompe. Por ello, se introdujo una herramienta en la que se representan las aberraciones en un diagrama de dos dimensiones para cada punto del plano imagen mediante la magnitud y la dirección de los polinomios de Zernike descritos en su ordenamiento Fringe y notación vectorial.

Como se puede ver en las ecuaciones que se presentan en la figura 2.8, al introducir una contribución *freeform* descrita mediante un polinomio de Zernike en una

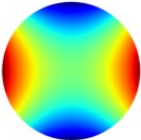
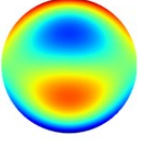
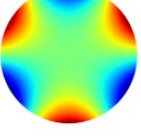
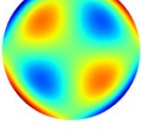
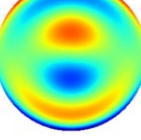
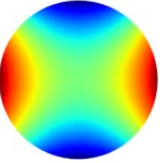
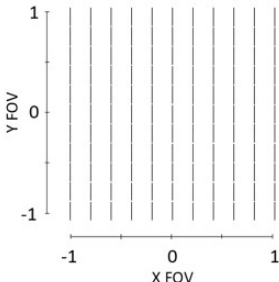
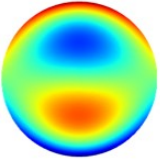
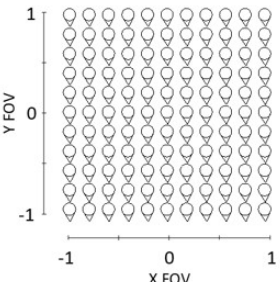
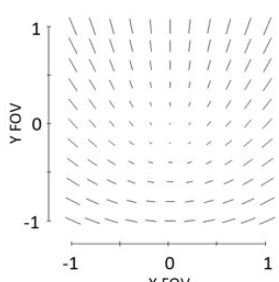
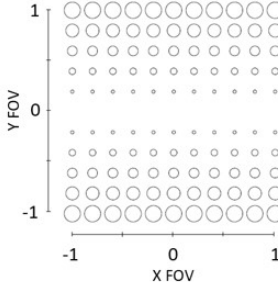
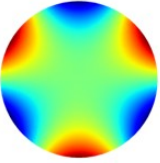
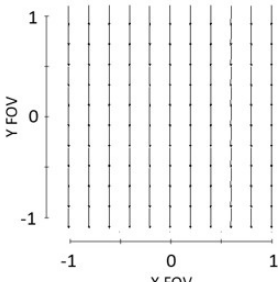
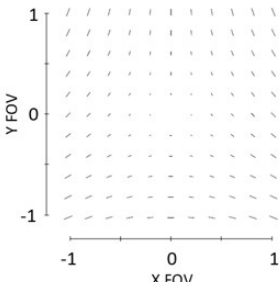
Componente FF	Aberraciones generadas en el plano imagen por una superficie no coincidente con el stop del sistema
<p>Z<sub>5/6</sub></p> 	$W = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\vec{B}_{222}^2 \cdot \vec{u}^2}_{\text{astigmatismo}} + \vec{B}_{222}^2 \cdot \Delta \vec{h}^2 + 2\vec{B}_{222}^2 \Delta \vec{h}^T \cdot \vec{u} \right]$
<p>Z<sub>7/8</sub></p> 	$W = \underbrace{(\vec{A}_{131} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{\text{coma}} + \underbrace{\vec{A}_{131} \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2}_{\text{astigmatismo}} + \underbrace{2(\vec{A}_{131} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{\text{curvatura de campo}} +$ $2(\vec{A}_{131} \cdot \vec{u})(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) + \vec{A}_{131} \vec{u} \cdot \Delta \vec{h}^2 + (\vec{A}_{131} \cdot \Delta \vec{h})(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})$
<p>Z<sub>10/11</sub></p> 	$W = \frac{1}{4} \left[ \underbrace{\vec{B}_{333}^3 \cdot \vec{u}^3}_{\text{trefoil}} + \underbrace{\vec{B}_{333}^3 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2}_{\text{astigmatismo}} + 3\vec{B}_{333}^3 \vec{u} \cdot \Delta \vec{h}^2 + \vec{B}_{333}^3 \cdot \Delta \vec{h}^3 \right]$
<p>Z<sub>12/13</sub></p> 	$W = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(\vec{B}_{242}^2 \cdot \vec{u}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{2^\circ \text{ astigmatismo}} + \underbrace{3(\vec{B}_{242}^2 \Delta \vec{h}^T \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{\text{coma}} + \underbrace{\vec{B}_{242}^2 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^3}_{\text{trefoil}} + \underbrace{3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{B}_{242}^2 \cdot \vec{u}^2)}_{\text{astigmatismo}} + \right.$ $\left. \underbrace{3(\vec{B}_{242}^2 \cdot \Delta \vec{h}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{\text{curvatura de campo}} + 2(\vec{B}_{242}^2 \cdot \Delta \vec{h}^2)(\Delta \vec{h} \cdot \vec{u}) + 2(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{B}_{242}^2 \Delta \vec{h}^T \cdot \vec{u}) + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{B}_{242}^2 \cdot \Delta \vec{h}^2) \right]$
<p>Z<sub>14/15</sub></p> 	$W = \underbrace{(\vec{A}_{151} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2}_{2^\circ \text{ coma}} + \underbrace{3(\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2}_{\text{esférica}} + \underbrace{2(\vec{A}_{151} \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{2^\circ \text{ astigmatismo}} + \underbrace{\vec{A}_{151} \Delta \vec{h}^2 \cdot \vec{u}^3}_{\text{trefoil}} +$ $\underbrace{[6(\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})\Delta \vec{h} + 3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})\vec{A}_{151}]}_{\text{coma}} \cdot \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \underbrace{[2(\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})\Delta \vec{h}^2 + 2(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})\vec{A}_{151} \Delta \vec{h}]}_{\text{astigmatismo}} \cdot \vec{u}^2 +$ $\underbrace{6(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{\text{curvatura de campo}} + \left[ \vec{A}_{151}(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})^2 + 4(\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})\Delta \vec{h} \right] \cdot \vec{u} + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})^2 (\vec{A}_{151} \cdot \Delta \vec{h})$

Figura 2.8: Representación mediante las ecuaciones del conjunto de aberraciones y su dependencia con el campo que genera cada contribución *freeform* en una superficie cuya posición no coincide con el stop del sistema óptico.

Componente FF	Aberraciones generadas en el plano imagen por una superficie no coincidente con el stop del sistema		
<p data-bbox="335 683 383 705"><b>Z<sub>5/6</sub></b></p> 	<p data-bbox="869 638 1045 660"><b>Astigmatismo Z<sub>5/6</sub></b></p> 		
<p data-bbox="335 1064 383 1086"><b>Z<sub>7/8</sub></b></p> 	<p data-bbox="598 1019 694 1041"><b>Coma Z<sub>7/8</sub></b></p> 	<p data-bbox="869 1019 1045 1041"><b>Astigmatismo Z<sub>5/6</sub></b></p> 	<p data-bbox="1236 1019 1300 1041"><b>Foco Z<sub>4</sub></b></p> 
<p data-bbox="335 1456 383 1478"><b>Z<sub>10/11</sub></b></p> 	<p data-bbox="742 1400 853 1422"><b>Trefoil Z<sub>10/11</sub></b></p>  <p data-bbox="1061 1400 1236 1422"><b>Astigmatismo Z<sub>5/6</sub></b></p> 		

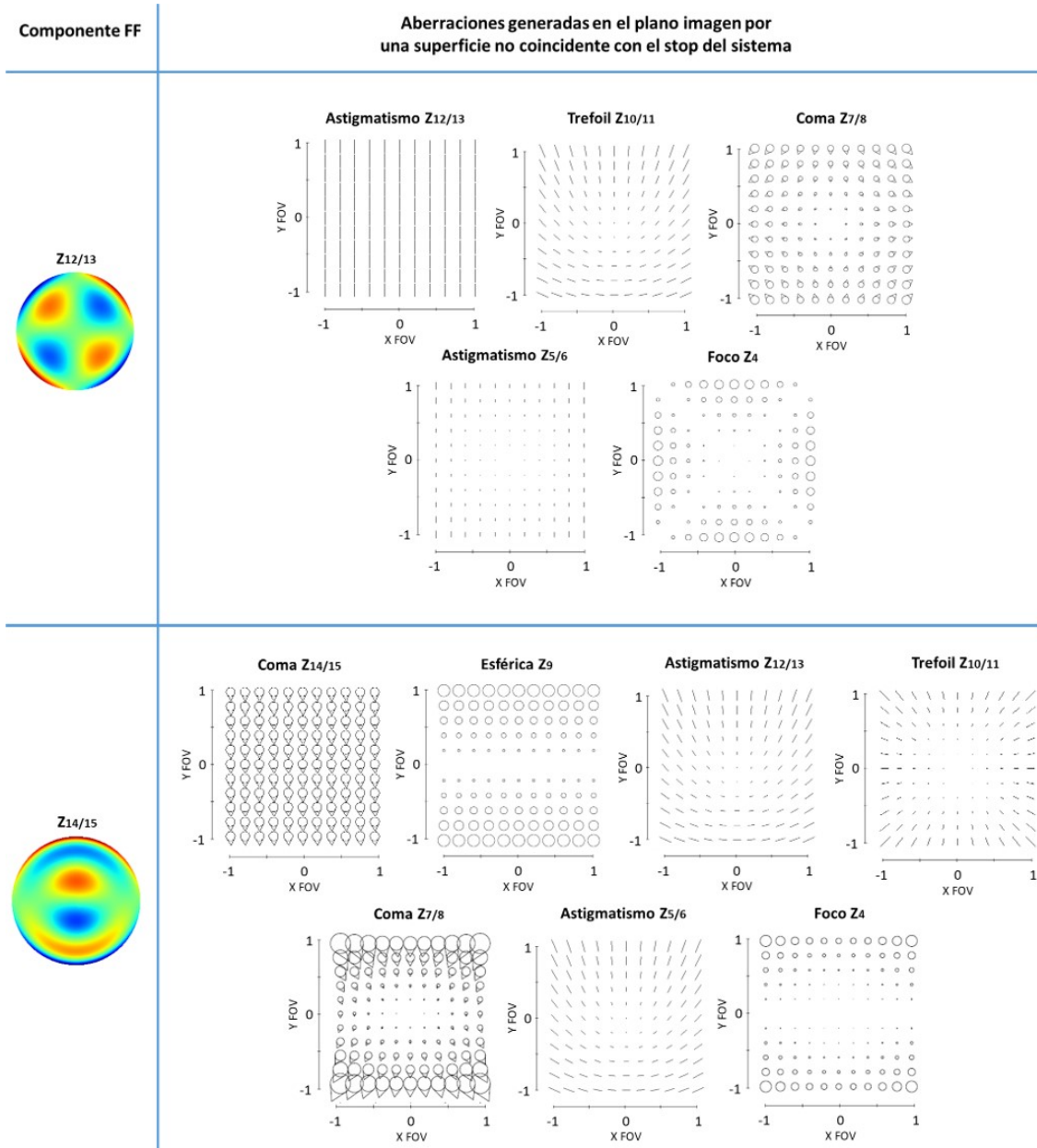


Figura 2.9: Representación mediante los FFds del conjunto de aberraciones y su dependencia con el campo que genera cada contribución *freeform* en una superficie cuya posición no coincide con el stop del sistema óptico.

$Z_5, Z_6$	$ z_{5/6}  = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$	$\vec{B}_{222}^2 = 2(n' - n) z_{5/6} e^{i2\xi_{5/6}}$
$C_5, C_6$	$\xi_{5/6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{C_6}{C_5}\right)$	
$Z_7, Z_8$	$ z_{7/8}  = \sqrt{C_7^2 + C_8^2}$	$\vec{A}_{131} = 3(n' - n) z_{7/8} e^{i\xi_{7/8}}$
$C_7, C_8$	$\xi_{7/8} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C_8}{C_7}\right)$	
$Z_{10}, Z_{11}$	$ z_{10/11}  = \sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2}$	$\vec{C}_{333}^3 = 4(n' - n) z_{10/11} e^{i3\xi_{10/11}}$
$C_{10}, C_{11}$	$\xi_{10/11} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{C_{11}}{C_{10}}\right)$	
$Z_{12}, Z_{13}$	$ z_{12/13}  = \sqrt{C_{12}^2 + C_{13}^2}$	$\vec{B}_{242}^2 = 8(n' - n) z_{12/13} e^{i2\xi_{12/13}}$
$C_{12}, C_{13}$	$\xi_{12/13} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{C_{13}}{C_{12}}\right)$	
$Z_{14}, Z_{15}$	$ z_{14/15}  = \sqrt{C_{14}^2 + C_{15}^2}$	$\vec{A}_{151} = 10(n' - n) z_{14/15} e^{i\xi_{14/15}}$
$C_{14}, C_{15}$	$\xi_{14/15} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C_{15}}{C_{14}}\right)$	

Tabla 2.1: Vectores en 2 dimensiones que representan la magnitud y el sentido de los polinomios de Zernike.

superficie que no coincide con el stop del sistema, se generan una serie de distintas componentes de aberraciones en el plano imagen. Aparece una primera contribución de aberración constante con el campo que coincide con el mismo polinomio que se ha empleado para describir la componente *freeform*. Esta es precisamente la contribución a las aberraciones que genera la componente *freeform* cuando su posición coincide con el stop del sistema. Adicionalmente, por no coincidir la posición de la superficie con el stop, aparecen otras contribuciones a las aberraciones de otros modos de Zernike que sí tienen dependencia con el campo. Únicamente los polinomios de Zernike de astigmatismo ( $Z_5$  y  $Z_6$ ) presentan la peculiaridad de generar solo astigmatismo constante con el campo en el plano imagen, independientemente de que la superficie se encuentre coincidente o no con el stop del sistema. Cualquier otro polinomio que describa la componente *freeform* en una superficie alejada del stop generará otras aberraciones dependientes con el campo de visión.

A través de las ecuaciones (figura 2.8) y los FFDs (figura 2.9), se puede ver

el conjunto de aberraciones que genera cada componente *freeform*. Es importante destacar que este conjunto de aberraciones aparece siempre que se introduce la componente *freeform* adecuada y siempre con la misma proporción entre la magnitud de cada una de ellas. Por ejemplo, si se introduce una contribución *freeform* descrita mediante el polinomio de Zernike de coma ( $Z_{7/8}$ ) en una superficie que no coincide con el stop del sistema, se genera una contribución a las aberraciones en el plano imagen de coma constante con el campo y de astigmatismo y desenfoque que sí tienen dependencia con el campo. Siempre que se introduce esta contribución *freeform* aparece el conjunto de estas tres aberraciones en el plano imagen, con la misma dependencia con el campo y con la misma relación entre ellas. Esto significa que la óptica *freeform* no es una herramienta universal para corregir aberraciones. En muchos casos, para alcanzar una buena corrección de aberraciones es necesario introducir la misma contribución *freeform* en varias superficies del sistema ajustando su magnitud en cada superficie para balancear las aberraciones que se generan. Además, cuanto mayor es el orden del polinomio que describe la contribución *freeform*, más tipos de aberraciones distintas se generan en el plano focal del sistema y más difícil es alcanzar ese balance en las aberraciones.

Este conjunto de aberraciones generado por la componente *freeform* de la superficie se suma a la distribución de aberraciones ya existente en el sistema inicial no *freeform* dando lugar a una nueva distribución de aberraciones. En concreto, al sumar ambas contribuciones, se puede generar la aparición de nodos de aberraciones, puntos o regiones del plano imagen donde las aberraciones son mínimas, y que pueden hallarse desplazados del eje óptico, del centro de la imagen. El caso más típico es el astigmatismo binodal [53, 54], que fue precisamente el que impulsó todo el desarrollo de la Teoría Nodal de Aberraciones. Esta distribución de nodos de astigmatismo se produce cuando, en un sistema en eje o con un astigmatismo que depende de forma cuadrática con el campo, se introduce una contribución *freeform* descrita mediante los polinomios de zernike de astigmatismo ( $Z_5$  y  $Z_6$ ). En este caso se suma la componente cuadrática que estaba inicialmente en el sistema con la componente constante con el campo que introduce la superficie *freeform* y se obtiene una distribución de astigmatismo binodal.

La contribución de astigmatismo cuadrática con el campo que aparece en el sistema inicial no *freeform* se puede expresar como

$$W_{Ast} = \frac{1}{2} W_{222} \vec{H}^2 \cdot \vec{\rho}^2 \quad (2.73)$$

Si le sumamos la componente de astigmatismo constante con el campo que genera la componente *freeform*, se obtiene la siguiente expresión para el astigmatismo resultante:

$$W_{Ast} = \frac{1}{2} \left[ W_{222} \vec{H}^2 + \vec{B}_{222}^2 \right] \cdot \vec{\rho}^2 = \frac{1}{2} W_{222} \left[ \vec{H}^2 + \frac{\vec{B}_{222}^2}{W_{222}} \right] \cdot \vec{\rho}^2 \quad (2.74)$$

Si definimos el vector  $\vec{b}_{222}^2 = \frac{\vec{B}_{222}^2}{W_{222}}$ , la expresión resultante para el astigmatismo en el plano imagen del sistema es

$$W_{Ast} = \frac{1}{2} W_{222} \left[ \vec{H}^2 + \vec{b}_{222}^2 \right] \cdot \vec{\rho}^2 \quad (2.75)$$

Se puede ver que la expresión 2.75 se anula cuando se cumple  $\vec{H}^2 + \vec{b}_{222}^2 = 0$ . Como se trata de una ecuación cuadrática, se anula para las dos posiciones de campo  $\vec{H} = \pm (-\vec{b}_{222}^2)^{1/2}$ . Por lo tanto, el astigmatismo en el plano imagen del sistema se anula en estas dos posiciones de campo:

$$\vec{H} = \pm i \vec{b}_{222} \quad (2.76)$$

En la expresión 2.76 se puede ver que se trata de dos posiciones de campo alejadas del eje óptico, pero simétricas respecto a este y cuya posición la marca el vector  $\vec{b}_{222}$ .

En la figura 2.10 se puede ver la distribución de astigmatismo en el plano imagen del sistema representada mediante los FFDs de los polinomios de Zernike  $Z_5$  y  $Z_6$  en su ordenamiento Fringe. La figura 2.10(a) muestra el astigmatismo del sistema inicial no *freeform* que presenta un nodo en eje (marcado en rojo en la figura) y crece de forma cuadrática con el campo. La figura 2.10(b) muestra la distribución de astigmatismo binodal que aparece cuando se introduce la componente *freeform*. Se puede ver la aparición de los nodos de astigmatismo en posiciones simétricas respecto al eje óptico.

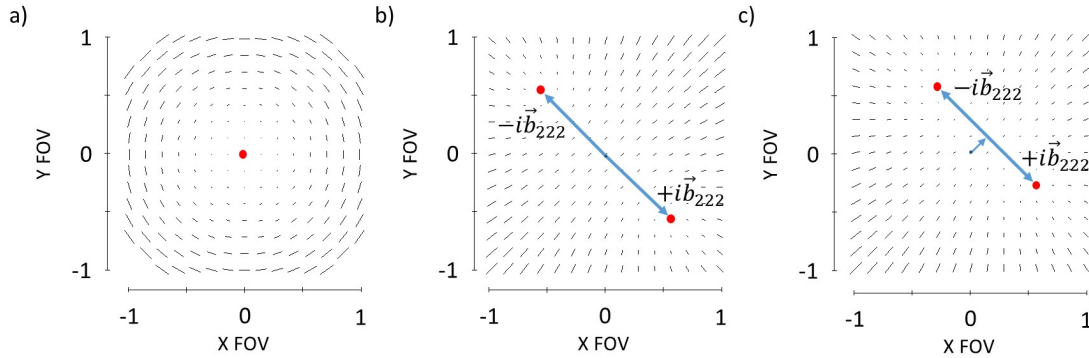


Figura 2.10: FFDs de  $Z_5$  y  $Z_6$  de (a) un sistema no *freeform* que mantiene la simetría rotacional, (b) un sistema centrado con una contribución *freeform* descrita mediante los polinomios de Zernike de astigmatismo y (c) el mismo sistema *freeform* pero descentrado. En cada caso, los puntos rojos marcan la posición de los nodos de astigmatismo, puntos con astigmatismo mínimo. Además, se ha representado el vector  $\vec{b}_{222}$  para mostrar cómo se definen las posiciones de los nodos.

Adicionalmente, se combinaron estos resultados obtenidos por Fuerschbach et al. para sistemas *freeform* con los resultados previos de NAT para sistemas descentrados. Se obtuvo que, cuando en un sistema óptico aparece una contribución *freeform* de astigmatismo y una contribución de desalineamientos de superficies, también aparecen dos nodos de astigmatismo en el plano imagen, pero que no se encuentran en posiciones simétricas respecto al eje óptico. Esta distribución de nodos de astigmatismo se puede ver en la figura 2.10(c).

Otro ejemplo típico es en el que se introduce una contribución *freeform* descrita mediante el polinomio de Zernike de *trefoil* en una superficie que no coincide con el stop del sistema y se generan en el plano imagen 4 nodos de astigmatismo [55, 56]. Esto se debe a la suma del astigmatismo con dependencia cuadrática con el campo que presenta el diseño inicial (figura 2.11a) más el astigmatismo generado por la componente *freeform* de *trefoil* (figura 2.11b). El resultado es una distribución de astigmatismo en plano imagen que presenta 4 nodos, uno en eje y otros tres colocados en posiciones simétricas respecto al eje (figura 2.11c). Este caso es habitual en los espejos primarios de telescopios de gran masa, que se unen a su montura en tres puntos y producen una deformación en la superficie de tipo *trefoil*, muy pequeña, pero suficiente para que se pueda observar su efecto.

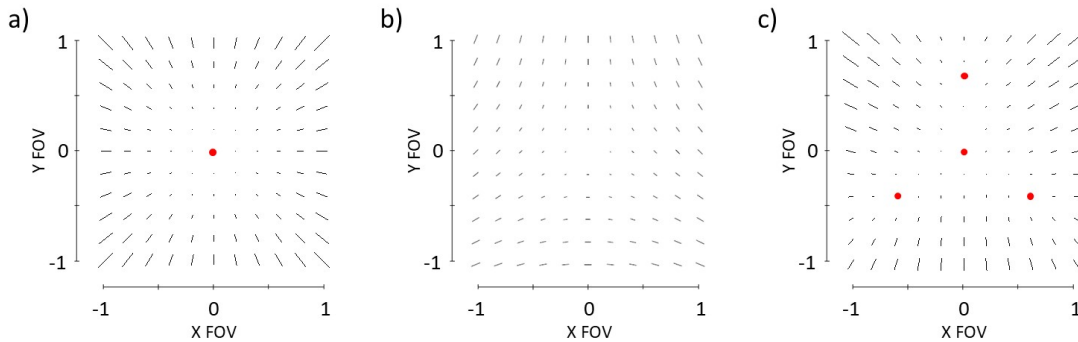


Figura 2.11: (a) Distribución de astigmatismo en el plano imagen del diseño inicial (no *freeform*). (b) Contribución al astigmatismo en el plano focal de una componente *freeform* descrita mediante los polinomios de Zernike de *trefoil* ( $Z_{10/11}$ ). (c) Distribución de astigmatismo resultante en el plano imagen con la aparición de 4 nodos de astigmatismo. Los puntos rojos señalan las posiciones de los nodos.

### 2.3.2. Métodos de diseño óptico de sistemas *freeform*

En el área de diseño óptico, al introducirse la óptica *freeform* de forma habitual, es necesario desarrollar una metodología adecuada y eficiente para el diseño de este tipo de sistemas ópticos [57, 58, 59, 60]. Hay numerosos métodos que se pueden emplear, pero el más extendido y comúnmente usado se basa en la optimización multiparmétrica de un diseño inicial hasta alcanzar la calidad óptica deseada [61]. Este método depende de la elección del punto inicial que puede llevar a posiciones de mínimo local que no alcancen los requisitos establecidos. Adicionalmente, en el caso de sistemas *freeform*, una mala elección del diseño inicial puede llevar a no alcanzar requisitos o a obtener una componente *freeform* resultante poco deseable. Esto puede ser por tratarse de una componente excesivamente pronunciada. Además, si se introduce más de una superficie *freeform*, puede ocurrir que el efecto en las aberraciones que generan las componentes de cada superficie se compensen, obteniendo de nuevo componentes *freeform* innecesariamente grandes que, como ya se ha mencionado, complica tanto la fabricación como la verificación de estas superficies. Por ello, un método óptimo debería combinar esta optimización multiparamétrica con la teoría de aberraciones que permita realizar una elección adecuada del diseño inicial que se va a emplear como punto de partida [62, 63].

A. Bauer [64] propuso un método para el diseño de sistemas *freeform* combinando la teoría nodal de aberraciones y la optimización multiparamétrica del sistema óptico. Para comenzar el diseño de cualquier sistema *freeform*, el primer paso siempre es establecer el diseño de un sistema inicial que preserve la simetría de revolución respecto al eje. Al contrario de lo que se pueda pensar, el mejor diseño inicial no es necesariamente el que tiene mejor calidad. Esto se debe a que cada contribución *freeform* genera unas aberraciones concretas en el plano imagen, con una dependencia con el campo concreta y una relación concreta entre ellas (figuras 2.8 y 2.9). De este modo, lo primero que se debe hacer es una evaluación de la geometría que mejor se presta a la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. Esto significa buscar una geometría cuyo diseño inicial tenga unas aberraciones que, por su dependencia con el campo, se puedan corregir simultáneamente mediante el menor número posible de términos de contribución *freeform*. Para ello, se deben evaluar las aberraciones que presenta cada geometría para saber cuál de ellas presenta una distribución de aberraciones en el plano imagen que se adapte mejor a su corrección. Por ejemplo, como se muestra en las figuras 2.8 y 2.9, una contribución *freeform* de coma ( $Z_{7/8}$ ) en una superficie del sistema que no coincide con el stop genera en el plano imagen una contribución de coma constante con el campo y una contribución de astigmatismo lineal y asimétrica con el campo. Por lo tanto, si se encuentra una configuración en la que el diseño inicial presente estas dos aberraciones y con esta dependencia con el campo concreta, ambas aberraciones se podrían corregir con una única contribución *freeform* descrita mediante los polinomios de Zernike de coma. Además, al existir una relación concreta entre las aberraciones generadas, es decir, la proporción entre ellas está fijada, es conveniente situar una superficie óptica coincidente con el stop del sistema. Esto permite introducir aberraciones concretas, de forma individual y constantes con el campo en el plano imagen para balancear la relación que haya entre unas y otras. De este modo, las aberraciones generadas por la componente *freeform* serían iguales en módulo y opuestas en signo a las que presenta el sistema inicial.

Este proceso de evaluación de aberraciones que se emplea para seleccionar la configuración más adecuada se puede ver en la figura 2.12. En primer lugar, se analizan las aberraciones que presenta el diseño inicial, la proporción que aparece entre ellas y su dependencia con el campo. A continuación, en caso de que sea posible,

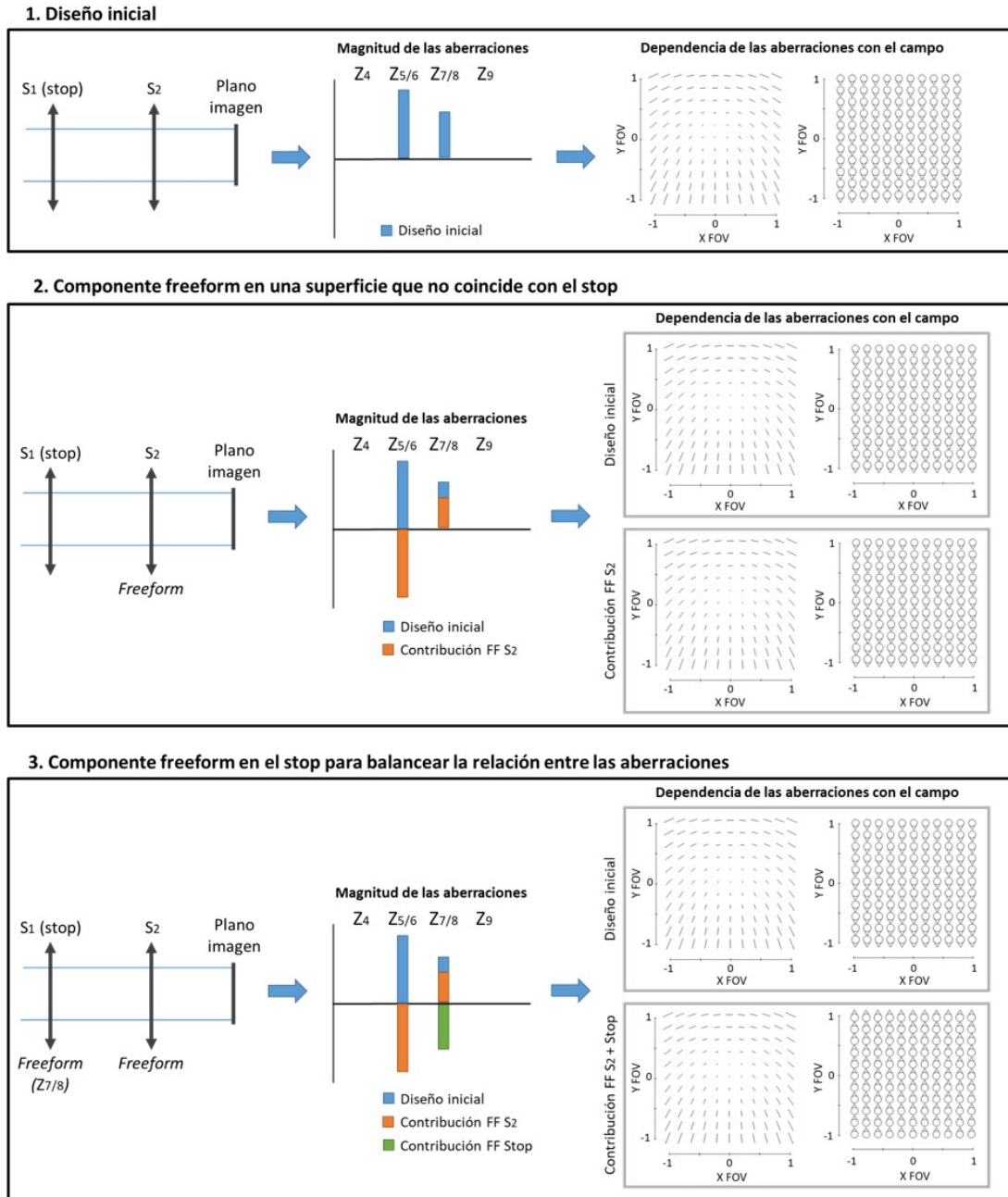


Figura 2.12: Proceso de corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. NOTA: en los FFDs de astigmatismo que proporciona Code V se representa la magnitud y dirección, pero no se representa el sentido. Por ello, en los FFDs que se muestran de astigmatismo no se aprecia que el sentido es opuesto como se puede ver claramente en los FFDs de coma.

se introduce en una superficie no coincidente con el stop del sistema una contribución *freeform* que permita corregir más de un término de aberraciones de forma simultánea. Por último, se introduce en la superficie del sistema que coincide con el stop la contribución *freeform* que sea necesaria para balancear la relación entre las aberraciones y alcanzar su corrección. Con este análisis se estima cuál será la configuración que mejor se presta a la corrección de aberraciones y con ello, se establece el diseño inicial. De este modo, una elección adecuada de la configuración y del diseño inicial permite alcanzar la corrección de aberraciones del sistema minimizando la magnitud de la contribución *freeform*. Una selección óptima del diseño inicial permitirá corregir un mayor número de aberraciones con una contribución *freeform* descrita por un menor número de polinomios que, a su vez, supone un menor número de variables durante el proceso de optimización. Sin embargo, si no se ha alcanzado un diseño inicial óptimo o no es posible alcanzarlo, esto puede suponer una dificultad al introducir muchas variables para el proceso de optimización que generan muchas aberraciones de distinto tipo en el plano imagen. Por todo esto, si se selecciona el diseño inicial adecuado, se genera una contribución *freeform* que se aleja menos de la superficie base. Esto es importante ya que facilita tanto la fabricación como la verificación de la superficie. Se ha mostrado que una superficie base cónica descentrada también puede generar una contribución *freeform* con una desviación menor [28]. Además, se sabe que si se introduce una restricción que limite el valor de los coeficientes, ya sea empleando la base de polinomios de Zernike o la base de Q-polynomials, se obtiene una solución con una contribución *freeform* menos alejada de la superficie base [39]. De ese modo, el método está orientado a realizar una optimización eficiente y alcanzar un diseño orientado a facilitar tanto la fabricación como la verificación de las superficies ópticas.

Una vez establecido el sistema inicial y hecho un análisis de las aberraciones y la dependencia con el campo que presentan, se puede introducir la contribución *freeform* en el proceso de optimización. Para ello se emplean una combinación de métodos numéricos basados en el trazado de rayos y la teoría nodal de aberraciones. La optimización de un sistema *freeform* no se lleva a cabo como se hace, por ejemplo, con las superficies esféricas, que se van introduciendo términos de órdenes mayores poco a poco hasta que se alcanza la calidad deseada. En el caso de un sistema *freeform* se usa NAT para determinar el siguiente coeficiente que se debe

introducir en la descripción de la superficie para corregir las aberraciones concretas del sistema. Además, es en este momento cuando se hace uso de la ventaja de tener una superficie coincidente con el stop para balancear aberraciones. También debe tenerse en cuenta que si se introduce una contribución *freeform* descrita mediante los órdenes más bajos de los polinomios de Zernike, se generan menos tipos de aberraciones en el plano imagen, mientras que si se introducen los órdenes más altos, también se generan más tipos de aberraciones y de mayor orden en el plano imagen.

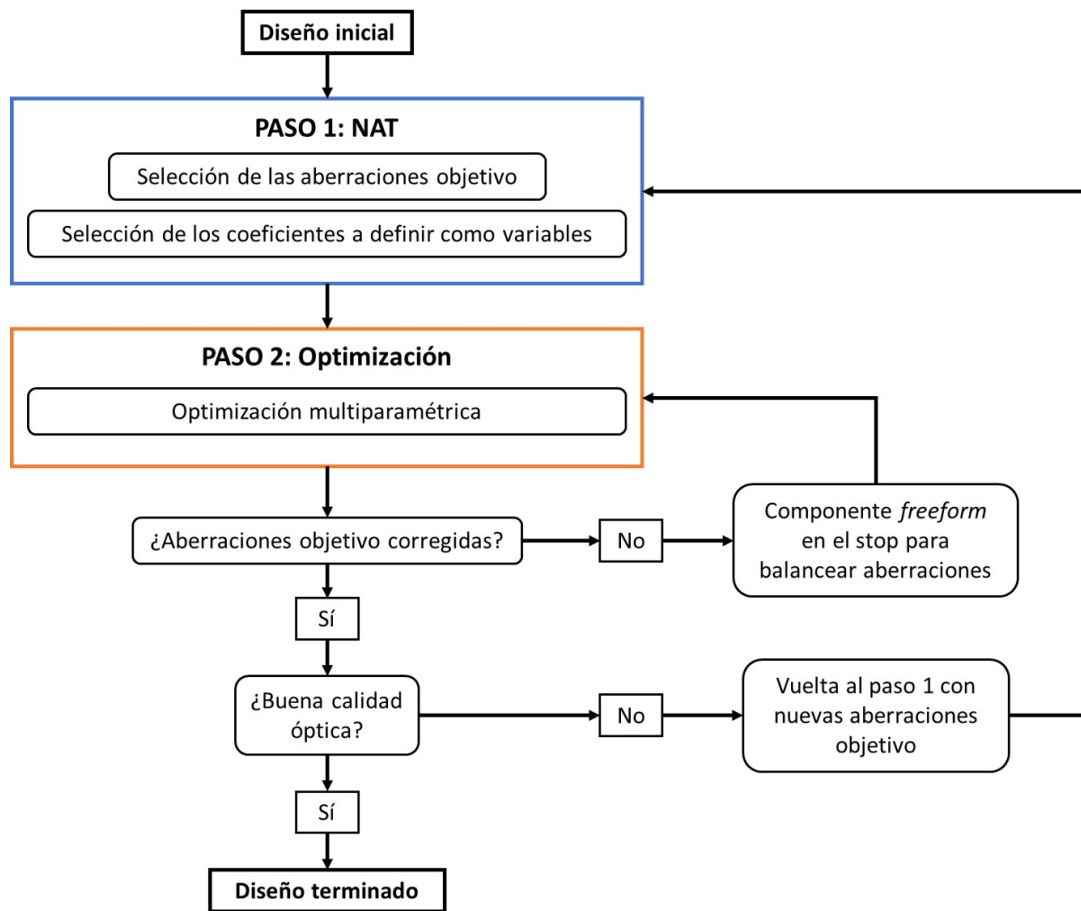


Figura 2.13: Esquema del método de diseño de sistemas ópticos *freeform*.

En la figura 2.13 se representa esquemáticamente el proceso de diseño óptico de un sistema *freeform*. Partiendo del diseño inicial previamente seleccionado, se seleccionan las aberraciones que se van a corregir (aberraciones objetivo) y el término *freeform* que se va a introducir como variable en el diseño para corregir dichas aberraciones objetivo. Típicamente, se suele comenzar estableciendo como aberraciones

objetivo aquellas de menor orden que constituyen la contribución dominante. Una vez hecha esta elección, se introduce el término *freeform* seleccionado como variable en una superficie que no coincide con el stop del sistema. A continuación, se realiza una optimización multiparámetrica del sistema y se evalúa si las aberraciones objetivo han quedado corregidas. Si dichas aberraciones aún no han quedado corregidas será debido a que la relación entre ellas no está balanceada, por lo que se vuelve a introducir el término *freeform* adecuado como variable pero esta vez en la superficie que sí coincide con el stop del sistema. De este modo, las aberraciones objetivo quedarán corregidas y se pasará a evaluar la calidad óptica del sistema. Si aún no se ha alcanzado la calidad óptica requerida, se vuelve a seleccionar nuevas aberraciones objetivo y se repite el proceso. Esto se hace tantas veces como sea necesario hasta que la calidad óptica alcance el valor requerido y, con ello, la optimización del diseño quede finalizada.

Este método constituye un método de diseño indirecto que combina el uso de NAT con la optimización multiparamétrica por lo que requiere establecer un diseño inicial que posteriormente se optimiza para encontrar el mínimo de una función de mérito. Precisamente por esto, es importante hacer una buena elección del diseño inicial y usar NAT para seleccionar los parámetros que deben entrar en la optimización. De este modo, se evita complicar el problema innecesariamente reduciendo las probabilidades de encontrar un mínimo local en lugar de encontrar el mínimo absoluto. Aparte del método de optimización multiparamétrica, existen otros métodos de diseño que son directos y no requieren de dicha optimización como son el método de ecuaciones diferenciales parciales [65, 66], el método de mapeo punto a punto [67, 68] y el método de Superficies Múltiples Simultáneas (SMS) [69]. Este último, resulta ser uno de los métodos directos más potentes, especialmente porque permite el diseño de múltiples superficies de manera simultánea, de ahí el nombre que recibe, y porque permite tratar con fuentes extensas.

## 2.4. Fabricación de superficies *freeform*

El hecho de no presentar simetría de revolución, hace que las superficies *freeform* conformen un reto tanto para su fabricación como para su verificación. La

fabricación de estas superficies es compleja ya que se requieren más grados de libertad de los dos que típicamente entran en juego en la fabricación de superficies convencionales. Además, el proceso de fabricación cambia en complejidad en función de la superficie concreta a fabricar y la precisión requerida en el pulido superficial de la misma. Una de las métricas de la complejidad de fabricación de la superficie es la desviación de la misma respecto a la esfera de mejor ajuste (*best-fit sphere*), a mayor desviación, mayor es la dificultad. Sin embargo, esta desviación no es el único parámetro que entra en juego, la forma de la superficie y el cambio local en la pendiente también influyen en la dificultad de fabricación. Por ejemplo, en líneas generales, una superficie convexa es más fácil de fabricar que una superficie cóncava por limitaciones geométricas de las herramientas empleadas mientras que en la verificación es justamente lo contrario [36, 70]. Por el mismo motivo, zonas cóncavas locales a lo largo de la superficie generadas por una componente esférica o *freeform* aumentan la complejidad e incluso imposibilitan la fabricación si son excesivamente pronunciadas.

El proceso de fabricación de una superficie *freeform*, como el de cualquier superficie óptica de precisión, comienza con un mecanizado de alta precisión. El mecanizado de la pieza se realiza mediante una máquina dirigida por control numérico (CNC) con una herramienta de punta de diamante [71, 72]. En esta herramienta se introduce una configuración multieje mediante elementos como un FTS (*fast-tool servo*) que introduce el tercer grado de libertad coordinando el movimiento lineal en dos ejes con la rotación en torno a uno de ellos. También existen otras geometrías como extensiones del FTS o geometrías que prescinden de él y que introducen elementos de rotación pudiendo alcanzar incluso el movimiento lineal en 3 ejes y rotaciones en torno a 2 de ellos [73, 74].

En este proceso de mecanizado se suelen generar errores debidos a factores como los defectos en la forma de la propia herramienta, error de radio, el desgaste de las herramientas o errores en el alineamiento. Además, se producen errores debido a las condiciones durante el proceso de mecanizado como pueden ser la fuerza de corte, vibración o temperatura. Todo ello hace que sea necesario un proceso de compensación de errores. Los errores en la fabricación se dividen en 3 categorías: errores de forma, rugosidad de la superficie y ondulaciones en la superficie. En términos de frecuencia, la rugosidad representa errores de alta frecuencia, las ondulaciones

representan errores de frecuencia media y los errores de forma son de baja frecuencia. En esta parte del proceso, el foco se pone en la compensación de los errores de forma que se puede realizar mediante una medida de la superficie con sus errores y la programación de la máquina CNC para generar una superficie que es la suma de la forma nominal original y los errores medidos. Además, la corrección de errores se puede realizar en tiempo real, aunque esto implica introducir una serie de dispositivos de medida que también trabajen en tiempo real por lo que el proceso puede ser inconveniente y costoso.

A continuación, se realiza un proceso de pulido en el que se pretende reducir fundamentalmente la rugosidad de la superficie, es decir, los errores de alta frecuencia, aunque también puede contemplar la corrección de errores de baja frecuencia y reducción de errores de media frecuencia. El pulido de la apertura completa de una superficie *freeform* suele ser muy complejo por lo que se lleva a cabo un pulido por secciones, es decir, solo una parte de la superficie está en contacto con la herramienta de pulido en cada momento. El método tradicional lleva a cabo un pulido mediante una herramienta sólida en contacto con la superficie. Sin embargo, hay algunas opciones más recientes que llevan a cabo la retirada de material empleando un fluido. Un método que se ha extendido ampliamente es el que emplea un fluido magnetorreológico (MR) que cambia su estado a sólido al aplicar un campo magnético. Con este método se puede alcanzar una precisión en la superficie de 30 nm *peak-to-valley* y una rugosidad menor de 10 Å RMS [75, 76]. QED technologies ha aplicado con éxito el acabado magnetorreológico (MRF®), *Magnetorheological Finishing*) en la fabricación de superficies *freeform* con el sistema Q-flex [70, 77, 78, 79]. En la figura 2.14 se pueden ver imágenes del sistema Q-flex 100.

Como se ha mencionado, durante el proceso de mecanizado de una superficie *freeform* se producen los llamados errores de frecuencia media (MSF) que son ondulaciones periódicas residuales a lo largo de toda la superficie. Este tipo de errores son inherentes al proceso de fabricación, el pulido es capaz de suavizarlo ligeramente pero no lo elimina, y no hay un método universal y demostrado que permita su corrección. Tampoco hay una definición exacta del rango de frecuencias que se considera MSF ya que para cada sistema de fabricación dicho rango será diferente. Para cada proceso de fabricación, se consideran como errores MSF aquellos con frecuencias demasiado grandes como para ser corregidas y demasiado pequeñas co-

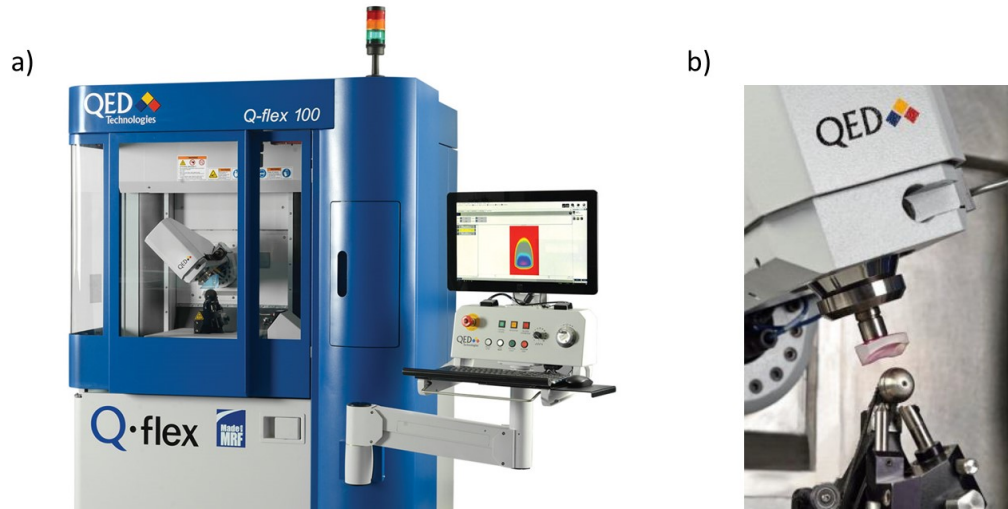


Figura 2.14: QED technologies Q-flex 100.

mo para ser suavizadas de forma eficiente durante el pulido. Otra forma en la que se podría delimitar este rango es a través del impacto que tienen los errores en la superficie sobre la calidad óptica del sistema. Se sabe que los errores de forma o de baja frecuencia generan un ensanchamiento de la PSF del sistema y que los errores de rugosidad o alta frecuencia generan *scattering* con ángulos de incidencia grandes. En cambio, los errores de frecuencia media no cambian la forma de la PSF y generan *scattering* a ángulos pequeños por lo que iluminan el plano focal. Este tipo de errores genera difracción que depende de la longitud de onda y que, en algunos casos en los que el patrón tiene una alta periodicidad como el que se produce por el uso de herramientas basadas en la rotación de punta de diamante, permite calcular el ángulo difractado mediante la ecuación de la red de difracción. En casos en los que el patrón es más aleatorio, la ecuación de la red no se ajusta al patrón de *scattering* que se genera [80].

Por todo ello, es importante especificar al fabricante cuál es límite de errores de frecuencia media que son aceptables en términos de calidad óptica del sistema. Sin embargo, no hay una forma clara para especificar este tipo de errores. Los errores MSF no son isotrópicos a lo largo de toda la superficie por lo que, las típicas métricas de calidad como el RMS no son válidas en este caso. Superficies con el mismo RMS pueden tener calidades ópticas resultantes muy diferentes ya que pueden presentar una distribución de errores MSF completamente distinta y, por lo tanto, la calidad

óptica también se ve afectada de forma diferente. Esto muestra la dificultad que se presenta en la especificación de este tipo de errores, ya que dos superficies pueden tener el mismo RMS, el mismo RMS en la pendiente o un *Strehl ratio* muy similar pero tener una calidad de imagen totalmente diferente. Un método que se propone para especificar los errores de frecuencia media es el uso de mapas de RMS direccional en coordenadas polares [81].

## 2.5. Verificación de superficies *freeform*

El desarrollo de la óptica *freeform* es fuertemente dependiente de la capacidad de verificación de superficies que no presentan simetría de revolución. El mayor reto es encontrar un método de verificación que proporcione una alta precisión, gran rango dinámico y que tenga versatilidad para medir un amplio rango de superficies diferentes [82]. Además, la fabricación de este tipo de elementos depende de un método de verificación que permita medir la topografía de la superficie en los distintos estados del proceso de fabricación [83].

En la verificación de superficies se puede diferenciar entre métodos de contacto y métodos sin contacto. Entre los métodos de contacto se consideran algunas técnicas ampliamente extendidas en la industria como lo son las CMM (*Coordinate Measuring Machines*) [84, 85]. En esta categoría también se contemplan métodos como el microscopio de fuerza atómica (AFM) o el microscopio de efecto túnel (STM) aunque la interacción de ambos con la superficie es despreciable [86, 87, 88]. Sin embargo, los métodos con contacto tienen la desventaja de que, para no dañar la superficie y alcanzar una escala de precisión nanométrica, se requieren velocidades de movimiento muy lentas por lo que no representan una solución deseable para la medida de superficies ópticas de gran apertura. Otra distinción que se puede hacer es entre los métodos de verificación por muestreo o lo que se conoce como *full-field*, es decir, que se obtiene la medida de toda la superficie al completo de una sola vez. Existen métodos de muestreo basados en interferometría que alcanzan una precisión de nanómetros y que realizan la medida de toda la superficie en un tiempo razonable. Sin embargo, los métodos de muestreo son típicamente más lentos y requieren del uso de mecanismos, por lo que un método de medida *full-field* resulta más deseable

para la verificación de superficies ópticas.

Entre los métodos de verificación de superficies *freeform* sin contacto y *full-field*, destaca principalmente la interferometría, técnica que proporciona una alta precisión y tiempos de medidas cortos. Típicamente se usa una configuración de interferómetro de Fizeau ya que es la más sencilla por utilizar el menor número de elementos y ha sido comercializada con éxito. El mayor reto en la verificación de superficies *freeform* mediante interferometría aparece cuando el frente de ondas reflejado en la superficie a verificar se desvía considerablemente del frente de onda de referencia. En concreto, cuando hay alguna zona de la superficie que presenta una pendiente demasiado pronunciada. Esto genera una densidad de franjas demasiado alta que el interferómetro no es capaz de resolver. Este problema se puede abordar de dos maneras diferentes. En primer lugar, durante la fase de diseño se puede evitar que esto ocurra, llevando a cabo un diseño orientado tanto a la fabricación como a la verificación. Esto se puede conseguir limitando las pendientes locales de la contribución *freeform* a lo largo de toda la superficie. La forma más sencilla de hacer esto, es empleando los *Q-polynomials* para describir la contribución *freeform* y limitar los valores que pueden tomar los coeficientes. De este modo, se podría obtener una superficie cuya componente *freeform* se puede verificar directamente mediante interferometría. Esto permite realizar lo que se conoce como una medida interferométrica no nula, es decir, que el error de frente de ondas esperado no es plano, sino que se espera un error de frente de ondas aberrado [89].

Sin embargo, esto no siempre es posible ya que los requisitos que se imponen sobre el sistema pueden requerir una contribución *freeform* más pronunciada para alcanzar la calidad óptica deseada. En este caso, se recurre a introducir elementos en el camino óptico que compensen la deformación del frente de onda de medida y generen un nulo de aberraciones en el interferómetro.

Para este propósito, se han empleado con éxito los CGHs (*Computer Generated Holograms*), hologramas que se generan directamente por ordenador y que posteriormente se graban sobre un sustrato mediante litografía. Este CGH se introduce en el camino óptico de modo que el frente de ondas plano que sale del interferómetro y se deforma al pasar por la superficie a verificar, vuelve a transformarse en un frente de onda plano al pasar a través del CGH de vuelta al interferómetro. Este método se

ha empleado con éxito para verificación tanto de superficies esféricas como de superficies *freeform*. Sin embargo, se trata de una solución específica para una superficie concreta que además resulta costosa. Por ello, no es óptimo a no ser que se trate de producciones en serie de un gran volumen de superficies [90, 91, 92].

Como alternativa a los CGHs, se han empleado otros elementos que proporcionan mayor flexibilidad al adaptarse a la verificación de distintas superficies como es el caso de los espejos deformables (DMs) [93, 94, 95]. De nuevo, el espejo deformable se introduce en el camino óptico y se va modificando su forma mediante una serie de actuadores en tiempo real hasta alcanzar la corrección del frente de ondas generado por la superficie a verificar. Los espejos deformables se pueden emplear para medir superficies completamente desconocidas utilizando un algoritmo de optimización que analiza el frente de ondas o la PSF de salida del sistema y se va modificando la forma del espejo hasta alcanzar la compensación requerida. Esos dispositivos, solo pueden trabajar en reflexión. Por un lado, esto supone un limitante para su aplicación, mientras que, por otro lado, supone la ventaja de eliminar la dependencia con la longitud de onda. Además, se trata de elementos de óptica adaptativa cuya principal característica es su alta velocidad de respuesta. Sin embargo, en la verificación de superficies en el laboratorio, el corto tiempo de respuesta de los espejos deformables no representa una ventaja por lo que se pueden explorar otros métodos.

Además del uso de espejos deformables, los moduladores espaciales (SLM, *Spatial Light Modulators*) son una buena alternativa en términos de sensibilidad y rango dinámico cuando el tiempo de respuesta no es un factor limitante [96]. Los moduladores espaciales son dispositivos en dos dimensiones que permiten modular la intensidad, fase o polarización de un haz de luz mediante cambios locales en el camino óptico a lo largo de toda su superficie. Aunque existen otras tecnologías, típicamente se emplean los moduladores que hacen uso de las características electro-ópticas que proporcionan los cristales líquidos. Por ello, los moduladores más extendidos son los que se basan en cristales líquidos (LC-SLM, *Liquid Crystal Spatial Light Modulators*) y más en concreto, los basados en cristales líquidos sobre silicio (LCoS-SLM, *Liquid Crystal on Silicon SLM*). Los cristales líquidos son materiales que presentan un orden molecular intermedio entre sólido cristalino y líquido [97]. El sustrato de silicio contiene el circuito de control cuya capa superior está dividida en píxeles formados por electrodos, de modo que el potencial de cada píxel se puede controlar

independientemente. De este modo, las partículas del cristal líquido que inicialmente está alineadas paralelamente, cambian su orientación en función del campo eléctrico de cada píxel cambiando el índice de refracción en cada píxel, lo que cambia el camino óptico y con ello, se produce la modulación de la fase [98, 99].

Los moduladores de fase tienen tiempos de respuesta más lentos que los espejos deformables, requieren que la luz esté linealmente polarizada y su actuación es dependiente de la longitud de onda. Sin embargo, existen moduladores tanto en reflexión como en transmisión, lo que amplía sus posibles aplicaciones y sobre todo, ofrecen un mayor rango dinámico ya que envuelven la fase para generar cambios de fase mayores de  $2\pi$  radianes, como se demostró en la corrección de aberraciones del ojo humano [100] o las aberraciones inducidas por turbulencias atmosféricas [101]. Se han propuesto distintos métodos y se ha llevado a cabo la verificación de superficies *freeform* mediante el uso de SLMs [102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109].

Como se ha mencionado anteriormente, otra alternativa para medir superficies cuando aparece una densidad de franjas demasiado alta es hacerlo por sub-aperturas y unir los datos de las distintas secciones, esto es lo que se conoce como *stitching*. Este método puede ser de gran utilidad por aumentar las capacidades del interferómetro pudiendo alcanzar una mayor precisión en superficies con pendientes locales muy pronunciadas o con una gran desviación de la esfera de mejor ajuste [110].

Además, aunque cuando se habla de interferometría típicamente se hace en referencia a la interferometría láser, también existe la posibilidad de utilizar un interferómetro de luz blanca [111]. El hecho de que tenga una longitud de coherencia mucho más corta tiene la desventaja de que aumenta la dificultad de encontrar las franjas pero tiene la ventaja de evitar la aparición de varios patrones de franjas debido a luz no deseada.

Una técnica que también se ha usado ampliamente es la deflectometría de medida de fase (PMD, *Phase Measuring Deflectometry*) que constituye un método *full-field* que además no requiere de la generación de un nulo, por lo que se elimina la necesidad del uso de elementos ópticos de compensación. Este método consiste en proyectar un patrón de franjas sinusoidales sobre la superficie a medir donde se reflejan para llegar a una pantalla que recoge la distribución de franjas resultantes que habrán sido modificadas en su paso por la superficie. Los datos de la superficie se obtienen de

aplicar algoritmos de *phase shifting* a dichas franjas. Este método alcanza precisiones muy altas y tiene una menor sensibilidad que otros métodos a desalineamientos pero su uso se limita a superficies especulares [112].

Una alternativa dentro de los métodos de muestro sería el uso de un microscopio confocal que presenta la ventaja de tener la posibilidad de medir pendientes mayores que otros métodos. Sin embargo, presenta las desventajas mencionadas anteriormente sobre los métodos de muestro.

Existen otras opciones como TWI (*Tilted-Wave Interferometry*) [113] o técnicas de medida de pendiente como los sensores de tipo Shack-Hartmann [114, 115]. Todas estas técnicas presentan ventajas y desventajas y aún no se ha encontrado un método general que se adapte a la verificación de todas las superficies *freeform* con una precisión adecuada y que requiera de un tiempo y un coste reducidos. Por lo tanto, se debe seleccionar el método que mejor se adapte para cada aplicación.

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo, se ha llevado a cabo un recorrido por los aspectos más relevantes en relación a sistemas ópticos con superficies *freeform*. Para poder trabajar habitualmente con este tipo de sistemas, es necesario tener amplios conocimientos en todas las áreas mencionadas para poder desarrollar una metodología de trabajo. Los puntos más relevantes para el trabajo realizado a lo largo de la tesis son:

- Se debe seleccionar la forma más adecuada para describir la contribución *freeform*. Típicamente, se emplean bases ortogonales y, si es posible, se emplean bases que permitan llevar a cabo un diseño orientado a facilitar la fabricación y la verificación como es la base de *Q-polynomials*.
- En el área de diseño, se emplea un método que combina los conocimientos de la Teoría Nodal de Aberraciones y la optimización multiparamétrica. NAT se emplea precisamente para seleccionar el diseño inicial y para permitir que la optimización se realice de la forma más eficiente posible. Por lo tanto, se hace indispensable tener un profundo conocimiento sobre la Teoría Nodal de Aberraciones para afrontar el diseño óptico de un sistema *freeform*.

- Los procesos de fabricación y verificación de la superficie *freeform* pueden ir de la mano, ya que la verificación de la superficie es necesaria durante los distintos estados del proceso de fabricación. Entre los métodos de verificación, métodos *full field* sin contacto como la interferometría, son los más deseables.

Durante el estudio llevado a cabo a lo largo de este capítulo, se identificaron algunos puntos en los que el desarrollo del estado del arte no era suficiente.

- A priori, la base de *Q-polynomials* es la más adecuada para la representación de la componente *freeform* ya que se introdujo precisamente con este propósito y permite llevar a cabo un diseño orientado a facilitar tanto el proceso de verificación como de fabricación. Sin embargo, la Teoría Nodal de Aberraciones no está desarrollada para sistemas cuya componente *freeform* esté descrita mediante esta base. Esto impide emplear el método de diseño descrito anteriormente y dificulta el diseño óptico de sistemas *freeform* empleado dicha base.
- En cuanto a la verificación de superficies *freeform*, se han desarrollado numerosos métodos, pero no se ha alcanzado un método general que se adapte a la verificación de cualquier elemento *freeform*.
- Tampoco se ha encontrado un método para alineamiento de este tipo de sistemas. En la literatura, se ha reportado la integración de sistemas ópticos *freeform*, pero no se ha establecido un método universal de alineamiento. Se trata de sistemas ópticos que, en algunos casos, pueden presentar mala calidad óptica en el campo en eje y tener sus puntos de mejor calidad alejados de este. Esto puede complicar el proceso e invalidar los métodos típicos empleados en el alineamiento de sistemas ópticos.

A lo largo de la tesis, se va a mostrar el trabajo que se ha realizado para cubrir estos aspectos. De este modo, se han desarrollado metodologías de trabajo en las áreas de diseño, verificación de superficies y alineamiento de este tipo de sistemas ópticos.

## Capítulo 3

# Extensión de NAT a sistemas freeform descritos mediante la base de los *Q-polynomials*

En este capítulo se va a expandir la Teoría Nodal de Aberraciones a sistemas ópticos en los que la componente *freeform* está descrita mediante la base de los *Q-polynomials*. Se va a obtener la expresión analítica de las aberraciones que se generan al introducir una componente *freeform* descrita mediante cada elemento de la base. Para ello, se va a comenzar llevando cabo un cambio de base entre los polinomios de Zernike y los *Q-polynomials* y, partiendo de los resultados obtenidos por Fuerschbach et al. [50], se obtendrán las expresiones para las aberraciones y su dependencia con el campo. Estos resultados permiten emplear NAT para seleccionar la componente freeform más adecuada para la corrección de aberraciones del sistema. Además, permiten emplear ambas bases durante el proceso de diseño y fabricación de un sistema óptico, cada una de ellas para el cometido para el que está mejor optimizada. La base de *Q-polynomials* es la más adecuada para llevar a cabo una optimización del diseño que facilite la posterior fabricación y verificación de las superficies. La base de polinomios de Zernike puede ser más adecuada para el intercambio de información con los típicos *softwares* de diseño optomecánico y fabricación.

### 3.1. Introducción

La base de polinomios de Zernike es la forma más común de describir superficies *freeform*, pero existen otras opciones matemáticas disponibles. Típicamente, las bases empleadas para la descripción matemática de superficies *freeform* se clasifican atendiendo a criterios de ortogonalidad [13]. Las bases ortogonales son de especial interés debido a las propiedades derivadas de su ortogonalidad como la independencia de sus elementos. Concretamente la base de  $Q$ -polynomials fue introducida por G. W. Forbes [30] específicamente para la representación de superficies esféricas y *freeform*.

En caso de elegir una base distinta de la base de polinomios de Zernike para describir la contribución *freeform*, no se dispone de la extensión de la Teoría Nodal de Aberraciones, es decir, no hay una relación directa entre cada elemento de la base y las aberraciones que genera en el plano imagen del sistema. Esto supone una limitación ya que, como se ha explicado en el capítulo anterior, la optimización de sistemas *freeform* no se realiza como la optimización de sistemas con superficies esféricas en los que se van introduciendo términos esféricos aumentando el orden hasta alcanzar la calidad óptica deseada. En los sistemas *freeform*, hay que realizar un análisis previo mediante NAT para seleccionar los elementos de la base que se van a introducir por ser los más adecuados para la corrección de aberraciones. Por lo tanto, el hecho de que NAT no esté extendida a la base de los  $Q$ -polynomials, es decir, que no se relacione cada uno de sus elementos con las aberraciones que introduce en el plano imagen del sistema, supone una dificultad importante a la hora de emplear esta base. Para superar esta limitación, en este capítulo, se desarrolla un procedimiento para realizar un cambio de base de los  $Q$ -polynomials a la base de Zernike y a partir de ese cambio de base, se adapta NAT a la base de  $Q$ -polynomials. Esto va a permitir realizar ese análisis previo del diseño que nos llevará a una optimización lo más eficiente posible. Adicionalmente, el cambio entre estas base es interesante ya que permite usar cada representación matemática en su contexto más apropiado. Durante la optimización del diseño es útil usar la base de  $Q$ -polynomials por su condición de ortogonalidad que permite restringir la desviación de la pendiente respecto a la superficie base, lo que facilita la fabricación y la verificación de la superficie. Sin embargo, la base de polinomios de Zernike puede

ser más apropiada ya que es la base más extendida, se tiene un mejor entendimiento de cada modo individual y se adapta mejor a la exportación a otras aplicaciones, como por ejemplo, a herramientas para estudios optomecánicos como modelos de elementos finitos o a herramientas de análisis de radiación difusa (*Straylight*).

La base de *Q-polynomials* fue introducida por G. W. Forbes para la representación de superficies *freeform* [30, 31]. Cualquier superficie arbitraria  $S(r, \theta)$  se puede describir en términos de la base de *Q-polynomials* como

$$S(r, \theta) = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} + \frac{\delta(u, \theta)}{\sigma(r)} = \frac{Cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} \quad (3.1)$$

$$+ \frac{1}{\sigma(r)} \left\{ u^2(1 - u^2) \sum_{n=0}^N a_n^0 Q_n^0(u^2) + \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=0}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Q_n^m(u^2) \right\},$$

donde  $C$  y  $K$  son la curvatura y la constante cónica de la superficie base respectivamente,  $r$  es la coordenada radial,  $u$  es la coordenada radial normalizada y  $\theta$  es la coordenada angular.  $Q_n^m(u^2)$  son los *Q-polynomials* y  $a_n^m$  y  $b_n^m$  son los coeficientes asociados a las componentes coseno y seno respectivamente. Finalmente,  $n$  representa el orden radial mientras  $m$  representa el orden azimutal. Adicionalmente,  $\sigma(r)$  es un factor de proyección que se explicará continuación. La ecuación (3.1) muestra la suma de dos términos, el primero es la superficie base que consiste en una cónica en eje y el segundo es la contribución que se define mediante esta nueva base de polinomios que a su vez tiene dos contribuciones, una contribución esférica que se corresponde con  $m = 0$  y una contribución *freeform* ( $m > 0$ ).

Como se ha expuesto en el capítulo anterior, la definición de esta base es muy similar a la de los polinomios de Zernike pero presenta algunas diferencias importantes. La primera es que no existen los polinomios de pistón y foco como elementos individuales en la base de *Q-polynomials*. Esto constituye una ventaja en la representación de la contribución *freeform* de una superficie ya que estos elementos individuales están degenerados con el desplazamiento axial y la curvatura de la superficie. Sin embargo, la principal diferencia es el eje en el que se define cada base. La base de polinomios de Zernike está definida a lo largo del eje óptico, típicamente el eje  $z$ , mientras que la base de *Q-polynomials* está definida a lo largo de la dirección normal a la superficie base en cada punto de la superficie. Esta es la razón

por la que  $S(r, \theta)$  expresada en función de los *Q-polynomials* necesita el factor de proyección  $\sigma(r)$ . En concreto, se trata del coseno del ángulo que forman el eje óptico y la dirección normal a la superficie base en cada punto de coordenadas  $r$  y  $\theta$  de la superficie. Para una superficie base cónica, en primera aproximación, el factor de proyección es

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \frac{\sqrt{1 - KC^2r^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)C^2r^2}} = \frac{\sqrt{1 - KC^2r_{max}^2u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)C^2r_{max}^2u^2}} = \frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}}. \quad (3.2)$$

El proyector de la ecuación (3.2) cambia para cada posición radial en la superficie y depende del parámetro  $A = C^2r_{max}^2$  y de la constante cónica  $K$ , lo que implica una dependencia con la superficie específica de la que se trata. El parámetro  $A = C^2r_{max}^2$  puede considerarse como un factor de forma asociado a la relación entre la apertura y el radio de curvatura de la superficie óptica y solo puede tomar valores entre 0 y 1:  $A$  es cero para una superficie plana y aumenta su valor hasta 1 a medida que aumenta la curvatura y/o la apertura de la superficie. Es importante notar que, en el caso de tener una superficie base plana ( $A = 0$ ), el proyector toma valor unidad a lo largo de toda la superficie. Esto significa que el eje óptico y la dirección normal a la superficie base coinciden y ambas bases coinciden.

El hecho de que ambas bases estén definidas en los distintos ejes permite que, mientras que los polinomios de Zernike se definen para ser ortogonales en la sagita, los *Q-polynomials* se definen para ser ortogonales en gradiente, es decir, los *Q-polynomials* se definen de modo que se cumpla

$$\langle |\nabla\delta(u, \theta)|^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial\delta}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \left( \frac{\partial\delta}{\partial\theta} \right)^2 \right\rangle = \sum_{n,m} [(a_n^m)^2 + (b_n^m)^2]. \quad (3.3)$$

Como ya se ha explicado anteriormente, esta propiedad representa la principal ventaja de este conjunto de polinomios e implica que están asociados al cambio de pendiente en vez de al cambio en la sagita como los de Zernike. Por ello, se puede introducir una restricción en el valor máximo que pueden alcanzar dichos coeficientes que directamente significa restringir la desviación de las pendientes locales que introduce la contribución *freeform* respecto a la superficie base. Esta restricción permite

limitar las complicaciones que podrían aparecer durante los procesos de fabricación y verificación de la superficie, ya que es bien sabido que los costes de fabricación y las dificultades en la metrología de una superficie óptica aumentan a medida que esta se desvía de la superficie base de mejor ajuste (*best-fit base surface*). Por lo tanto, la base 2D propuesta por Forbes ( $Q$ -polynomials) constituye una potente herramienta para realizar diseños ópticos que tengan en cuenta la calidad óptica, el coste de fabricación de las superficies y las posibles complicaciones en la verificación de dichas superficies [36]. Takaki et al. [39] presentaron una restricción para el proceso de optimización que permite buscar el equilibrio entre fabricabilidad y prestaciones en el diseño de sistemas ópticos con superficies *freeform* descritas mediante bases ortogonales (Zernike y  $Q$ -polynomials), demostrando las ventajas que presenta su uso en el proceso de diseño óptico.

Al margen de las importantes diferencias recién mencionadas, la definición de los  $Q$ -polynomials es igual que la de los polinomios de Zernike. El orden azimutal  $m = 0$  corresponde a la aberración esférica para  $n = 0$  y, a medida que  $n$  aumenta, los órdenes mayores de aberración esférica aparecen. El orden azimutal  $m = 1$  coincide con una deformación de *tilt* para  $n = 0$  y, para  $n > 0$ , aparecen el coma y sus órdenes mayores. El orden azimutal  $m = 2$  es astigmatismo para  $n = 0$  y los órdenes mayores de astigmatismo aparecen para  $n > 0$ . Del mismo modo, el orden azimutal  $m = 3$  corresponde con *trefoil* para  $n = 0$  y los órdenes mayores de *trefoil* aparecen para  $n > 0$  y el orden azimutal  $m = 4$  es *tetrafoil* para  $n = 0$  y los órdenes mayores de *tetrafoil* aparecen para  $n > 0$ . Estos polinomios ordenados según sus órdenes radial  $n$  y azimutal  $m$  se muestran en la figura 3.1.

## 3.2. Cambio de base de $Q$ -polynomials a polinomios de Zernike

Vamos a comenzar realizando el cambio de base de los  $Q$ -polynomials a los polinomios de Zernike. Como se ha mencionado anteriormente, esto no solo va a resultar útil para la extensión de NAT a los  $Q$ -polynomials, también es útil para poder emplear ambas bases durante el proceso de diseño del sistema óptico. Dado que estas bases se definen a lo largo de ejes distintos y que la dirección de uno de estos ejes

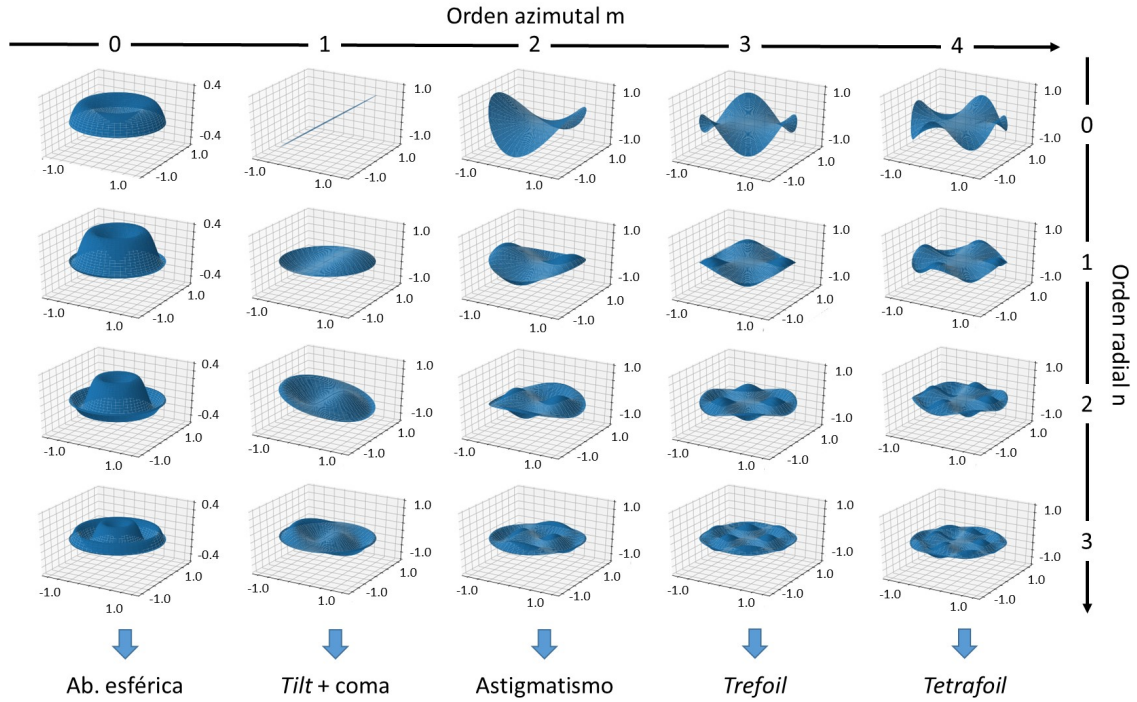


Figura 3.1:  $Q$ -polynomials ordenados en función de los órdenes radial  $n$  y azimutal  $m$ .

cambia a lo largo de toda la superficie, el cambio entre bases no es directo ni exacto, debe realizarse mediante un ajuste. En este ajuste, podríamos llegar a órdenes tan altos de polinomios de Zernike como fuera necesario, pero podrían requerirse tantos elementos que el ajuste se vuelva complejo y lento. Por ello, conviene buscar una manera eficiente de realizar dicho ajuste de modo que, solo se tengan en cuenta los polinomios de Zernike que vayan a tener un valor representativo, es decir, los coeficientes que resultarían nulos, nunca se introducen como variables de ajuste. En concreto, se va a aproximar cada  $Q$ -polynomial al polinomio de Zernike con el que se corresponde en el caso de tener una superficie base plana ( $A = 0$ ). Una vez hecho esto, se analizará el residuo de dicha aproximación para decidir el siguiente polinomio que se incluirá para realizar el ajuste. De este modo, los polinomios de Zernike con una contribución nula, nunca serán introducidos en el ajuste.

Para ilustrar el proceso, se va a realizar el ajuste del polinomio  $Q_0^2(u^2)$  con orden radial  $n = 0$  y orden azimutal  $m = 2$  cuya proyección sobre el eje óptico es

$$\frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} u^2 Q_0^2(u^2) \begin{pmatrix} a_0^2 & b_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0^2 & b_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \cos 2\theta \\ u^2 \sin 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Para realizar el ajuste vamos a comenzar haciendo una aproximación al polinomio de Zernike con el que coincide en caso de tener una superficie base plana. En este caso, la aproximación comienza con los polinomios de Zernike de astigmatismo en ordenamiento Fringe ( $Z_5$  y  $Z_6$ ). La componente coseno de  $Q_0^2(u^2)$ , asociada al coeficiente  $a_0^2$ , se aproxima al polinomio  $Z_5$  y la componente seno de  $Q_0^2(u^2)$ , asociada al coeficiente  $b_0^2$ , se aproxima a  $Z_6$ . Esto lo vamos a hacer para distintos valores de la constante cónica  $K$  y manteniendo, de momento el parámetro  $A$  constante. En concreto, vamos a mantener  $A = 0.4$  y vamos a contemplar los casos de tener una superficie base esférica ( $K = 0$ ), elíptica con  $K = -0.5$ , parabólica ( $K = -1$ ) e hiperbólica con  $K = -1.5$  para, de este modo, abarcar un amplio rango de superficies cónicas. Si observamos el residuo de esta primera aproximación en la primera columna de la figura 3.2, vemos que, para todos los valores de  $K$ , tiene una forma muy similar al siguiente orden de astigmatismo. En dicha figura, solo se ha representado la componente coseno, pero el resultado es completamente análogo para la componente seno. Esto son los polinomios  $Z_{12}$  y  $Z_{13}$ , así que se van a introducir dichos polinomios en el ajuste. Si de nuevo se observa el residuo de este ajuste en la segunda columna de la figura 3.2, se ve que, para todos los valores de  $K$ , tiene una forma muy similar al polinomio  $Z_{21}$  que es la componente coseno del siguiente orden de astigmatismo (análogamente, el residuo de la componente seno toma la forma del polinomio de Zernike  $Z_{22}$ ). Por lo tanto, se introducen estos polinomios en los ajustes. De nuevo, los residuos de estos ajustes (tercera columna de la figura 3.2) tiene forma de astigmatismo de un orden mayor por lo que serían los siguientes polinomios que entrarían en los ajustes.

Así se podría continuar hasta que el RMS de los residuos alcanzara un valor lo suficientemente pequeño. Por lo tanto, este  $Q$ -polynomial se puede expresar como una serie de polinomios de Zernike empezando por una contribución de astigmatismo seguida de los órdenes mayores de este mismo polinomio de Zernike y el residuo continúa reduciéndose a medida que se introducen nuevos órdenes. Esta tendencia no depende del valor de la constante cónica por lo que, para distintos valores de  $K$ ,

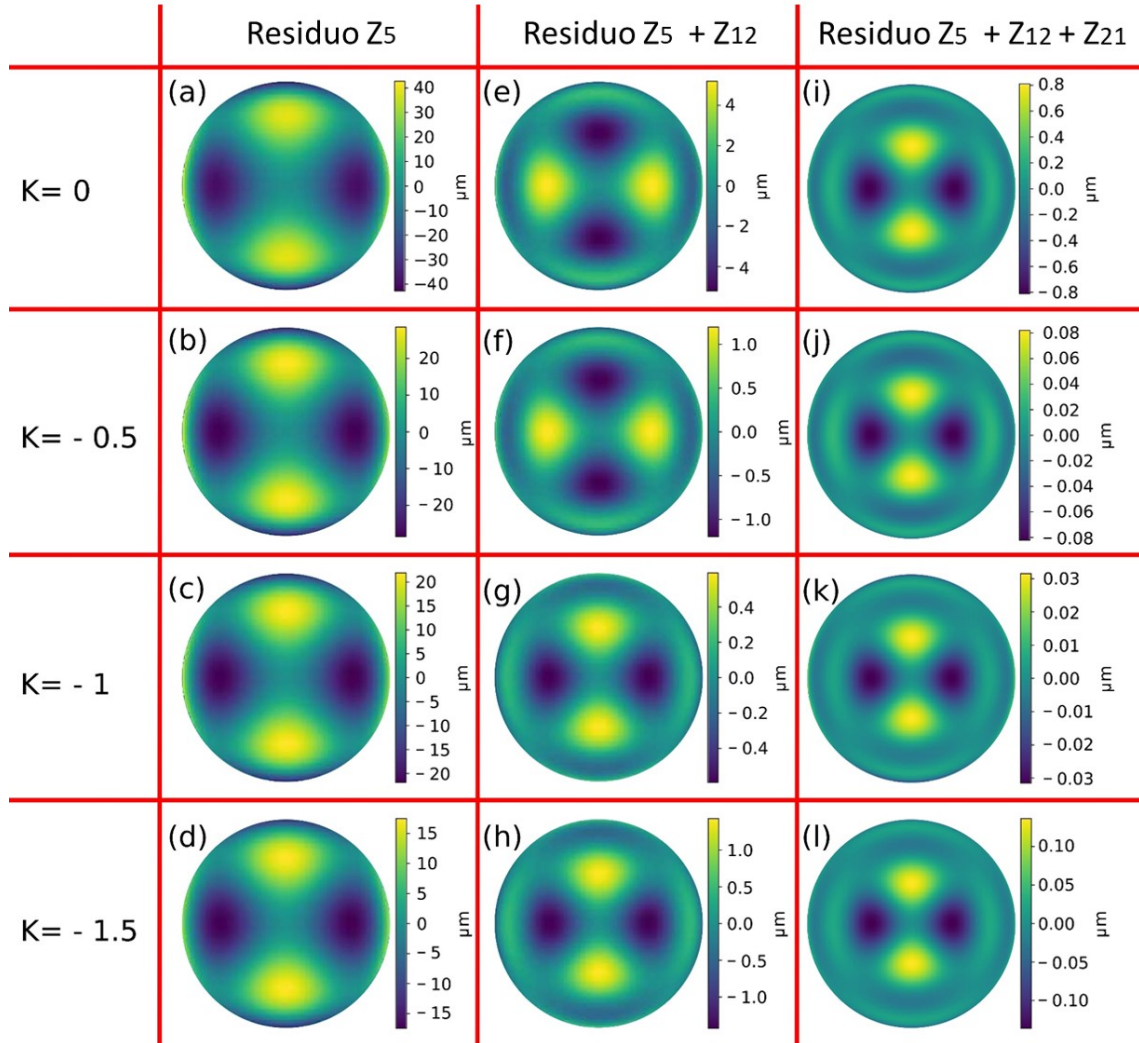


Figura 3.2: Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^2(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  ( $0, -0.5, -1, -1.5$ ). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_5$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_5 + Z_{12}$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_5 + Z_{12} + Z_{21}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_5, Z_{12}, Z_{21}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_6, Z_{13}, Z_{22}$ ) son análogos.

los mismos polinomios de Zernike estarán involucrados en el ajuste pero se obtendrán distintos valores para los coeficientes ajustados.

Al aumentar el orden radial  $n$  cambia el polinomio de Zernike al que se debe hacer la primera aproximación en caso de tener una superficie base plana. El polinomio  $Q_1^2(u^2)$  requiere incluir al menos la suma de  $Z_5$  y  $Z_{12}$  para la componente coseno y la suma de  $Z_6$  y  $Z_{13}$  para la componente seno en el caso de una superficie base plana. Del mismo modo, el polinomio  $Q_2^2(u^2)$  requiere al menos la suma de  $Z_5$ ,  $Z_{12}$  y  $Z_{21}$  para la componente coseno y la suma de  $Z_6$ ,  $Z_{13}$  y  $Z_{22}$  para la componente seno en caso de tener una superficie plana. Estas series representan el mínimo número de polinomios de Zernike que se necesitarán en el ajuste en función del valor de  $n$ . Para valores pequeños de  $A$  (correspondiente a superficies de pequeña apertura o baja curvatura) podría ser suficiente para tener un buen ajuste (RMS de residuo bajo), pero nunca alcanzaremos un buen ajuste con un número menor de polinomios de Zernike.

Por lo tanto, esta familia de *Q-polynomials* se puede expresar como la suma de polinomios de Zernike de astigmatismo de distintos órdenes y se puede resumir matemáticamente como se muestra en la ecuación 3.5.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} Q_n^2(u^2) \begin{pmatrix} a_n^2 & b_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \cos 2\theta \\ u^2 \sin 2\theta \end{pmatrix} & (3.5) \\ = & \begin{pmatrix} C_5 & C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_5(u, \theta) \\ Z_6(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12}(u, \theta) \\ Z_{13}(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{21}(u, \theta) \\ Z_{22}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Este proceso es totalmente análogo para otros elementos de la base de los *Q-polynomials*. El polinomio  $Q_0^1(u^2)$  se puede ajustar a los polinomios de Zernike de *tilt* y coma más órdenes mayores de coma hasta alcanzar un RMS del residuo lo suficientemente pequeño. En la figura 3.3 se puede ver como el residuo del ajuste va tomando la forma del siguiente orden de coma para los distintos valores de la constante cónica  $K$ .

De este modo, y de forma análoga al polinomio  $Q_0^2(u^2)$ , la familia de *Q-polynomials* con  $m = 1$  se puede expresar como la suma de polinomios de Zernike de *tilt* y coma de distintos órdenes y se puede resumir matemáticamente como se muestra en la

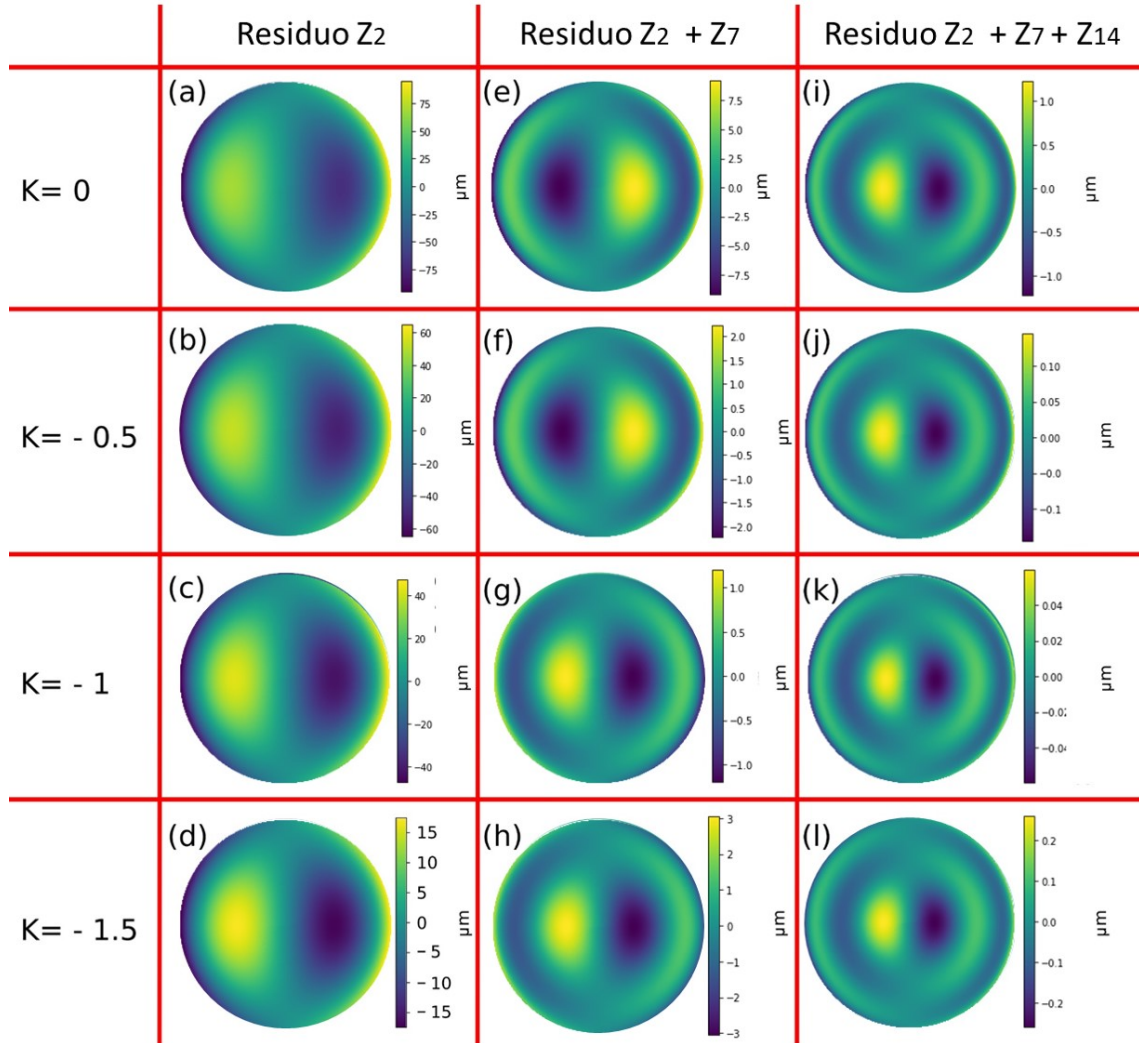


Figura 3.3: Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^1(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  ( $0, -0.5, -1, -1.5$ ). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_2$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_2 + Z_7$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_2 + Z_7 + Z_{14}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_2, Z_7, Z_{14}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_3, Z_8, Z_{15}$ ) son análogos.

ecuación 3.6.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - K Au^2}}{\sqrt{1 - (1 + K) Au^2}} Q_n^1(u^2) \begin{pmatrix} a_n^1 & b_n^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \cos \theta \\ u \sin \theta \end{pmatrix} \\ = & (C_2 \ C_3) \begin{pmatrix} Z_2(u, \theta) \\ Z_3(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_7 \ C_8) \begin{pmatrix} Z_7(u, \theta) \\ Z_8(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{14} \ C_{15}) \begin{pmatrix} Z_{14}(u, \theta) \\ Z_{15}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Del mismo modo, el polinomio  $Q_0^3(u^2)$  se puede ajustar a los polinomios de Zernike de *trefoil* de distintos órdenes hasta alcanzar un RMS del residuo lo suficientemente pequeño. En la figura 3.4 se puede ver como el residuo del ajuste va tomando la forma del siguiente orden de *trefoil* para los distintos valores de la constante cónica  $K$ .

Por lo tanto, la familia de  $Q$ -polynomials con  $m = 3$  se puede expresar como la suma de polinomios de Zernike de *trefoil* de distintos órdenes y se puede resumir matemáticamente como se muestra en la ecuación 3.7.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - K Au^2}}{\sqrt{1 - (1 + K) Au^2}} Q_n^3(u^2) \begin{pmatrix} a_n^3 & b_n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \cos 3\theta \\ u^3 \sin 3\theta \end{pmatrix} \\ = & (C_{10} \ C_{11}) \begin{pmatrix} Z_{10}(u, \theta) \\ Z_{11}(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{19} \ C_{20}) \begin{pmatrix} Z_{19}(u, \theta) \\ Z_{20}(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{30} \ C_{31}) \begin{pmatrix} Z_{30}(u, \theta) \\ Z_{31}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Este proceso de ajuste se podría extender del mismo modo para todas las familias de  $Q$ -polynomials con distintos valores de  $m$ . Además, se puede ver que el RMS del residuo del ajuste depende del valor de  $K$ , por lo que el número de polinomios requerido para el ajuste de cada polinomio puede ser distinto en función de la constante cónica. En concreto, tomando como referencia el polinomio  $Q_0^2(u^2)$  ya que los demás se comportan de manera análoga, se puede ver (figura 3.5) cómo evoluciona el valor del RMS del ajuste para distintos valores de  $K$  y se observa que aparece un mínimo para  $K \simeq -0.8$  cuando se introduce el segundo polinomio en el ajuste. Este valor de  $K$  con RMS mínimo cambia ligeramente con el valor de la constante  $A$ , pero siempre aparece un mínimo en las proximidades de dicho valor. Esto es muy interesante ya que en ese valor no solo se minimiza el valor del RMS del residuo sino

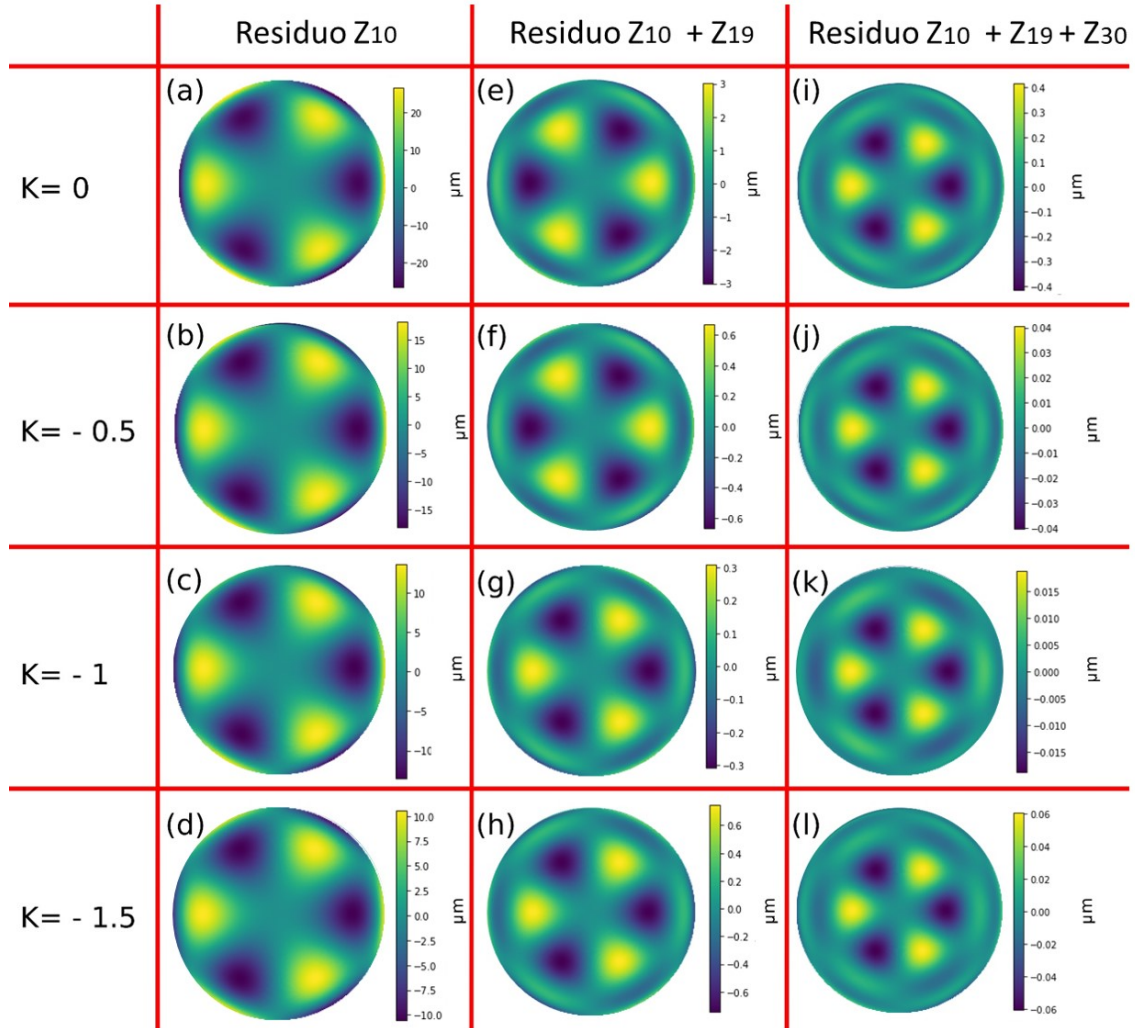


Figura 3.4: Residuos de los ajustes del polinomio  $Q_0^2(u^2)$ . Cada fila muestra el residuo del ajuste para distintos valores de la constante cónica  $K$  ( $0, -0.5, -1, -1.5$ ). La primera columna (a-d) muestra los residuos de ajustar al polinomio  $Z_{10}$ , la segunda columna (e-h) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_{10} + Z_{19}$  y la tercera columna (i-l) muestra los residuos de ajustar a los polinomios  $Z_{10} + Z_{19} + Z_{30}$ . Se puede observar como cada residuo invita a incluir el siguiente orden de astigmatismo en la siguiente iteración del ajuste. En la figura solo se presenta la componente coseno ( $Z_{10}, Z_{19}, Z_{30}$ ) pero los resultados para la componente seno ( $Z_{11}, Z_{20}, Z_{31}$ ) son análogos.

también la diferencia de dicho RMS entre el ajuste con dos o tres polinomios. Se puede alcanzar un buen ajuste con un menor número de polinomios, lo que, como se verá más adelante, resulta muy conveniente.

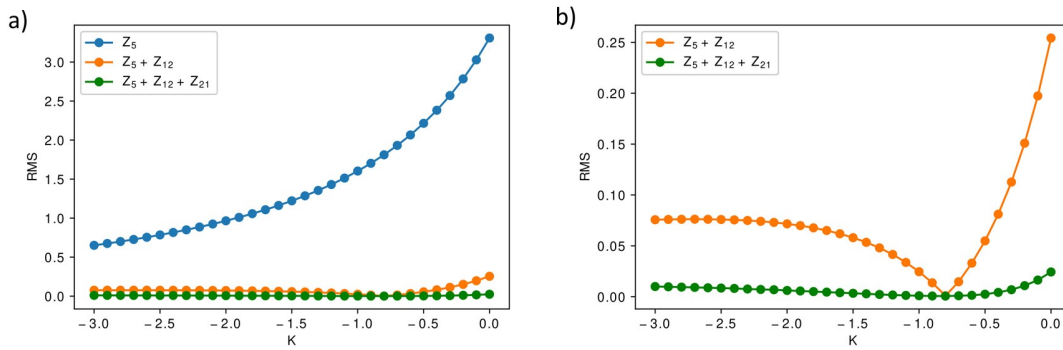


Figura 3.5: RMS del residuo del ajuste del polinomio  $Q_0^2(u^2)$  para distintos valores de  $K$  y manteniendo fijo el valor de  $A = 0.4$ . (a) Para los ajustes a 1 polinomio ( $Z_5$ ), 2 polinomios ( $Z_5, Z_{12}$ ) y 3 polinomios ( $Z_5, Z_{12}$  y  $Z_{21}$ ). (b) Se aíslan los ajustes a 2 y 3 polinomios para una mejor visualización.

Como hemos visto, el número de polinomios de Zernike necesarios para el ajuste depende fuertemente del valor del parámetro  $A = c^2 r_{max}^2$ . La figura 3.6 muestra el RMS del residuo del ajuste de la componente coseno del polinomio  $Q_0^2(u^2)$  en función del valor de  $A$ , para distintos números de polinomios de Zernike considerados en la serie y para distintos valores de la constante cónica  $K$ . A medida que  $A$  aumenta, la superficie se aleja más de ser plana y se requieren polinomios de Zernike de órdenes mayores. Esto se debe a que, al aumentar la curvatura de la superficie, también aumenta la diferencia entre los ejes de definición de cada base. En concreto, aumenta el cambio de ángulo entre los dos ejes en la posición más externa de la superficie respecto a la posición central.

Esta tendencia no depende del valor de la constante cónica aunque el valor del RMS del residuo sí depende de ella, como se mostró anteriormente.

Estos resultados se pueden generalizar para cualquier valor del orden azimutal  $m$  estableciendo una relación entre los polinomios de ambas bases. En consecuencia, cualquier superficie  $S(r, \theta)$  expresada en  $Q$ -polynomials puede ajustarse a los correspondientes polinomios de Zernike con una superficie base plana más los órde-

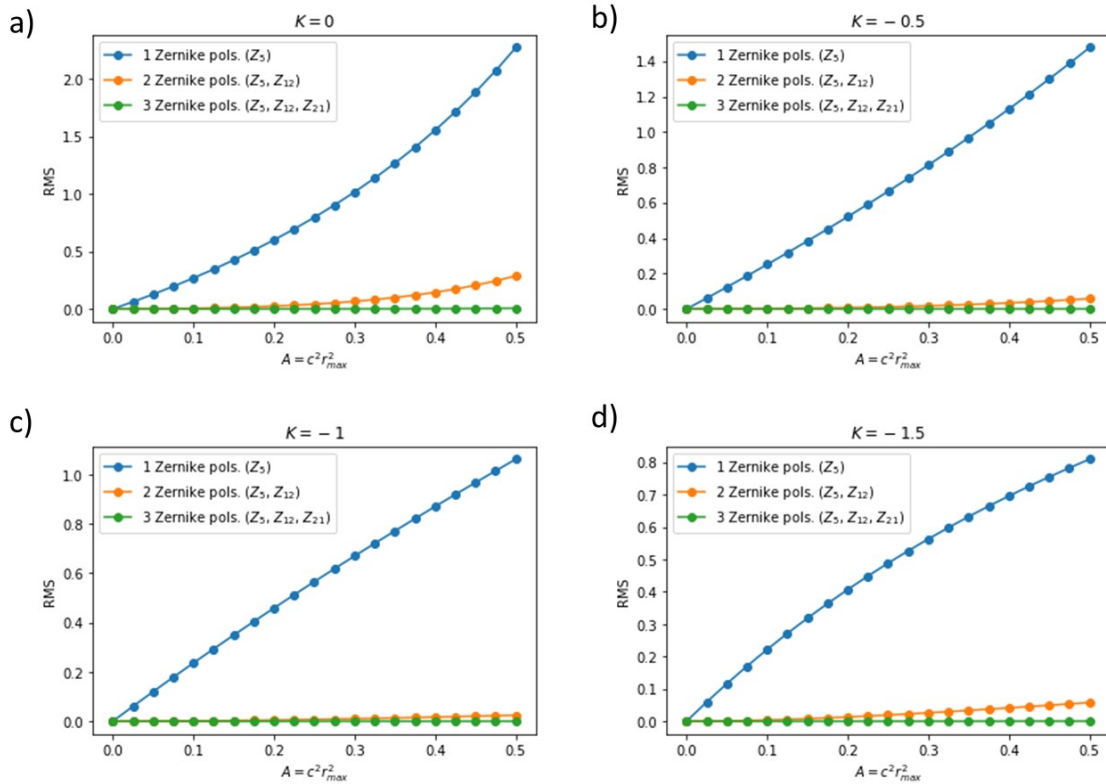


Figura 3.6: RMS del residuo del ajuste del polinomio  $Q_0^2(u^2)$  a 1, 2 y 3 polinomios de Zernike en el caso de (a)  $K = 0$ , (b)  $K = -0.5$ , (c)  $K = -1$  y (d)  $K = -1.5$  en función del parámetro  $A$ . Nótese que para  $A \leq 0.25$ , es posible alcanzar un ajuste aceptable con pocos términos de Zernike.

nes mayores de estos mismos polinomios. La tabla 3.1 resume el resultado para el cambio entre las bases de polinomios. De nuevo, el número de polinomios de Zernike requeridos para el ajuste depende de los valores que tomen  $A$  y  $K$ .

Una vez establecida la relación entre polinomios de ambas bases, se puede obtener una relación entre los coeficientes asociados a los  $Q$ -polynomials ( $a_n^m, b_n^m$ ) y los coeficientes asociados a los polinomios de Zernike ( $C_i$ ). En este caso, se va a observar cómo cambian los valores de los coeficientes de Zernike en el ajuste para los distintos valores del coeficiente  $a_0^2$  para un valor fijo de  $A = 0.4$ . En la figura 3.7(a-d) se puede ver una clara dependencia lineal con un coeficiente de determinación en el ajuste lineal  $R^2 \geq 0.99$ . Como se muestra en dicha figura, la dependencia

$Q_0(u^2)$	$C_1Z_1(u) + C_4Z_4(u) + C_9Z_9(u) + C_{16}Z_{16}(u) + \dots$
$Q_0^1(u^2)$	$(C_2 \ C_3) \begin{pmatrix} Z_2(u, \theta) \\ Z_3(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_7 \ C_8) \begin{pmatrix} Z_7(u, \theta) \\ Z_8(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{14} \ C_{15}) \begin{pmatrix} Z_{14}(u, \theta) \\ Z_{15}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots$
$Q_0^2(u^2)$	$(C_5 \ C_6) \begin{pmatrix} Z_5(u, \theta) \\ Z_6(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{12} \ C_{13}) \begin{pmatrix} Z_{12}(u, \theta) \\ Z_{13}(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{21} \ C_{22}) \begin{pmatrix} Z_{21}(u, \theta) \\ Z_{22}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots$
$Q_0^3(u^2)$	$(C_{10} \ C_{11}) \begin{pmatrix} Z_{10}(u, \theta) \\ Z_{11}(u, \theta) \end{pmatrix} + (C_{19} \ C_{20}) \begin{pmatrix} Z_{19}(u, \theta) \\ Z_{20}(u, \theta) \end{pmatrix} + \dots$

Tabla 3.1: Cambio de la base de los  $Q$ -polynomials a la base de los polinomios de Zernike.

lineal se mantiene para los distintos valores de  $K$ , solo cambia el valor concreto de la pendiente. Además, se cumple que el valor concreto que toma la pendiente de dicho ajuste lineal es el mismo para las dos componentes, por lo que la relación entre coeficientes se puede expresar como  $C_5 = P_{5/6}a_0^2$  y  $C_6 = P_{5/6}b_0^2$ , siendo  $P_{5/6}$  la pendiente del ajuste.

La dependencia lineal aparece para todos los valores de  $K$  y también para todos los valores de  $A$  pero, de nuevo, el valor de la pendiente cambia. La figura 3.7(e) muestra la dependencia de la pendiente  $P_{5/6}$  con el valor del parámetro  $A$  para diferentes valores de  $K$ . De este modo, el valor de la pendiente depende tanto de  $A$  como de  $K$  y debe ser calculado para cada superficie específica.

Este resultado, se ha ejemplificado para la pendiente  $P_{5/6}$ , pero es completamente análogo para los demás coeficientes. Por lo tanto, la relación entre coeficientes de Zernike ( $C_i$ ) y los coeficientes asociados a los  $Q$ -polynomials ( $a_n^m, b_n^m$ ) se puede generalizar como se muestra en las ecuaciones 3.8 y 3.9.

$$m = 0 \rightarrow C_i = P_i a_0 \quad (3.8)$$

$$m > 0 \rightarrow \begin{pmatrix} C_i \\ C_{i+1} \end{pmatrix} = P_{i/i+1} \begin{pmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

De este modo, se ha obtenido una expresión analítica para el cambio de base, a pesar de tratarse de un cambio de base realizado mediante una aproximación.

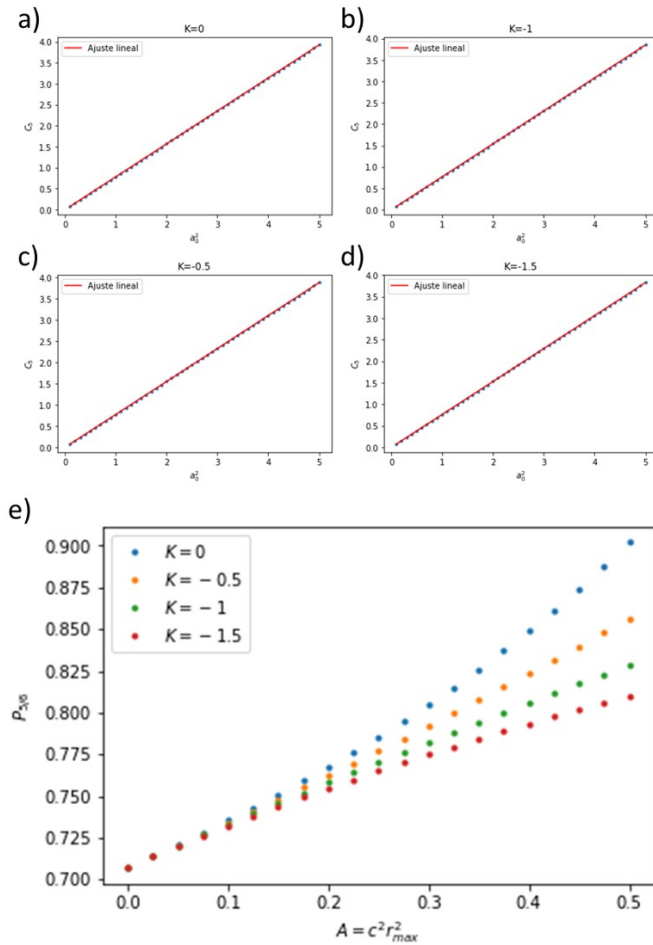


Figura 3.7: Representación de  $C_5$  en función de  $a_0^2$  con su ajuste lineal (representado con una línea roja) para (a)  $K = 0$ , (b)  $K = -0.5$ , (c)  $K = -1$  y (d)  $K = -1.5$ . (e) Dependencia de  $P_{5/6}$  con el valor de  $A$  para distintos valores de la constante cónica. Se puede observar como para  $A < 0.1$  la variación de la pendiente con el valor de  $K$  es despreciable.

### 3.3. NAT en función de los $Q$ -polynomials

A continuación, vamos a mostrar cómo se puede aplicar la Teoría Nodal de Aberraciones (NAT) a un sistema óptico con alguna superficie *freeform* descrita mediante los  $Q$ -polynomials a través de los resultados obtenidos en la sección anterior.

Realizaremos el análisis para los principales  $Q$ -polynomials sabiendo que el pro-

cedimiento puede extenderse de forma similar para términos de mayor orden.

### 3.3.1. Polinomio $Q_0(u^2)$

Se va comenzar con el polinomio  $Q_0(u^2)$ , es decir, el polinomio de orden radial  $n = 0$  y orden azimutal  $m = 0$ . Este polinomio no introduce una contribución *freeform*, sino esférica. Mostraremos las aberraciones que genera en el plano imagen y su dependencia con el campo.

Contemplamos únicamente los casos en los que el valor de  $A$  se encuentra en un rango de valores  $A < 0.25$ , por ser lo más habitual, lo que permitirá aproximar el polinomio  $Q_0$  mediante los polinomios de Zernike de pistón, foco, esférica y esférica de segundo orden como se hace en la expresión 3.10. Para valores mayores del parámetro  $A$ , aumenta la complejidad matemática, pero el proceso es totalmente análogo.

$$\frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} a_0 u^2 (1 - u^2) \simeq C_1 Z_1(u) + C_4 Z_4(u) + C_9 Z_9(u) + C_{16} Z_{16}(u) \quad (3.10)$$

Como sabemos por NAT, si la superficie descrita por este polinomio se encuentra en el stop del sistema óptico, las aberraciones que genera en el plano imagen no dependen del campo. En este caso, las aberraciones generadas vendrían dadas en función de los coeficientes de Zernike por la ecuación 3.11 [50].

$$W_{stop} = (C_1 - C_4 + C_9 - C_{16}) + (2C_4 - 6C_9 + 12C_{16})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + (6C_9 - 30C_{16})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 20C_{16}(\vec{u} \cdot \vec{u})^3 \quad (3.11)$$

Para obtener la expresión de las aberraciones en función del coeficiente  $a_0$  asociado al polinomio  $Q_0(u^2)$ , se va a utilizar su relación con los coeficientes de Zernike (ecuación 3.12).

$$C_1 = P_1 a_0, \quad C_4 = P_4 a_0, \quad C_9 = P_9 a_0, \quad C_{16} = P_{16} a_0, \quad (3.12)$$

De este modo, la ecuación 3.11 y, por lo tanto, las aberraciones en términos del coeficiente  $a_0$  cuando la superficie *freeform* que está descrita mediante el polinomio  $Q_0(u^2)$  se encuentra en la posición del stop del sistema tomará la forma:

$$\begin{aligned}
 W_{Stop} = & (P_1 - P_4 + P_9 - P_{16})a_0 + \underbrace{(2P_4 - 6P_9 + 12P_{16})a_0(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{W_{Stop}^{Foco}} + \\
 & + \underbrace{(6P_9 - 30P_{16})a_0(\vec{u} \cdot \vec{u})^2}_{W_{Stop}^{Esférica}} + \underbrace{20P_{16}a_0(\vec{u} \cdot \vec{u})^3}_{W_{Stop}^{2^\circ Esférica}} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Definidas las aberraciones, podemos aplicar NAT de manera directa [50], y obtener la dependencia que toman las aberraciones con el campo al desplazar la superficie del stop, esto es, introducir el desplazamiento  $\vec{u} \rightarrow \vec{u} + \Delta\vec{h}$ . De este modo se obtienen las expresiones 3.14, 3.15 y 3.16.

$$W_{NoStop}^{Foco} = (2P_4 - 6P_9 + 12P_{16})a_0 \left[ (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u}) + (\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h}) \right] \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{Esférica} = & (6P_9 - 30P_{16})a_0 [(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 4(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 & + 2\Delta\vec{h}^2 \cdot \vec{u}^2 + 4(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u}) + (\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})^2] \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{2^\circ Esférica} = & 20P_{16}a_0 [(\vec{u} \cdot \vec{u})^3 + 6(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 9(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 6(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 & + 2\Delta\vec{h}^3 \cdot \vec{u}^3 + 18(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 6(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})(\Delta\vec{h}^2 \cdot \vec{u}^2) + \\
 & + 9(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 9(\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})^2(\Delta\vec{h} \cdot \vec{u}) + (\Delta\vec{h} \cdot \Delta\vec{h})^3] \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Prescindiendo de los términos de *tilt* y pistón, la expresión final para la dependencia de las aberraciones en el plano imagen con el campo se presenta en la ecuación 3.17.

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop} = & 2a_0\{10P_{16}(\vec{u} \cdot \vec{u})^3 + 60P_{16}(\vec{\Delta h} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + \\
 & + \left[ (90(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h}) - 15)P_{16} + 3P_9 \right] (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 60P_{16}(\vec{\Delta h} \cdot \vec{u}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 & + 20P_{16}(\vec{\Delta h}^3 \cdot \vec{u}^3) + \left[ (180(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h}) - 60)P_{16} + 12P_9 \right] (\vec{\Delta h} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 & + \left[ (60(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h}) - 30)P_{16} + 6P_9 \right] (\vec{\Delta h}^2 \cdot \vec{u}^2) + \\
 & + \left[ (90(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h})^2 - 60(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h}) + 6)P_{16} + (12(\vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h}) - 3)P_9 + P_4 \right] (\vec{u} \cdot \vec{u}) \}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

En la expresión 3.17 se puede observar que las aberraciones generadas, por orden de aparición son esférica de segundo orden, coma secundario, esférica, astigmatismo secundario, *trefoil*, coma, astigmatismo y foco. También se puede ver que su dependencia con el campo a primer orden no cambia respecto a la que aparece en el sistema inicial. Esto se debe a que, como ya se ha mencionado, el polinomio  $Q_0(u^2)$  genera una contribución esférica, no *freeform*, por lo que no rompe la simetría de revolución del sistema.

### 3.3.2. Polinomio $Q_0^1(u^2)$

A continuación emplearemos la relación obtenida entre el polinomio  $Q_0^1(u^2)$  y los polinomios de Zernike para calcular las aberraciones en el plano imagen a través de la Teoría Nodal de Aberraciones.

Contemplaremos igualmente los casos en los que  $A < 0.25$  lo que permitirá aproximar el polinomio  $Q_0^1(u^2)$  mediante los polinomios de Zernike de *tilt*, coma y coma secundario como se hace en la expresión 3.18.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{1 - Au^2}} u Q_0^1(u) \begin{pmatrix} a_0^1 & b_0^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \simeq \\
 & \simeq \begin{pmatrix} C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2(u, \theta) \\ Z_3(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_7 & C_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_7(u, \theta) \\ Z_8(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{14}(u, \theta) \\ Z_{15}(u, \theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ahora bien, como sabemos por NAT, si la superficie descrita por este polinomio se encuentra en el stop, las aberraciones generadas en el plano imagen no dependerán

del campo y vendrán dadas por la ecuación 3.19 en función de los coeficientes de Zernike. En la ecuación 3.19 se ha empleado notación de la referencia [50] que se mostró en el capítulo 2.

$$\begin{aligned}
 W_{Stop} = & (\vec{A}_{111} \cdot \vec{u}) + (\vec{A}_{131} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \frac{2}{3}(\vec{A}_{131} \cdot \vec{u}) + \\
 & + (\vec{A}_{151} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 - \frac{6}{5}(\vec{A}_{151} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \frac{3}{10}(\vec{A}_{131} \cdot \vec{u})
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Prescindimos igualmente de los términos de *tilt* ya que solo generarán aberraciones de *tilt* y pistón en el plano imagen. De este modo, las aberraciones generadas por la superficie en la posición coincidente con el stop del sistema vienen dadas por la ecuación 3.20 donde los vectores  $\vec{A}_{131}$  y  $\vec{A}_{151}$  se definen en función de los coeficientes de Zernike como se muestra en las ecuaciones 3.21 y 3.22.

$$W_{Stop} = (\vec{A}_{131} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) + (\vec{A}_{151} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2 - \frac{6}{5}(\vec{A}_{151} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_{131} &= -3|C_{7/8}|e^{i\xi_{7/8}} \\
 |C_{7/8}| &= \sqrt{C_7^2 + C_8^2} \\
 \xi_{7/8} &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C_8}{C_7}\right)
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_{151} &= -10|C_{14/15}|e^{i\xi_{14/15}} \\
 |C_{14/15}| &= \sqrt{C_{14}^2 + C_{15}^2} \\
 \xi_{14/15} &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C_{15}}{C_{14}}\right)
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para obtener la expresión de las aberraciones en función de los coeficientes asociados al polinomio  $Q_0^1(u^2)$  ( $a_0^1$  y  $b_0^1$ ), utilizaremos las relaciones de estos con los coeficientes de Zernike (ecuaciones 3.23 y 3.24).

$$\begin{pmatrix} C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = P_{7/8} \begin{pmatrix} a_0^1 \\ b_0^1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} C_{14} \\ C_{15} \end{pmatrix} = P_{14/15} \begin{pmatrix} a_0^1 \\ b_0^1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

De este modo, las expresiones 3.21 y 3.22 se pueden reescribir como se muestra en la expresiones 3.25 y 3.26.

$$\begin{aligned} |C_{7/8}| &= \sqrt{(P_{7/8}a_0^1)^2 + (P_{7/8}b_0^1)^2} = P_{7/8} \sqrt{(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2} \equiv P_{7/8}|C_0^1| \\ \xi_{7/8} &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{P_{7/8}b_0^1}{P_{7/8}a_0^1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b_0^1}{a_0^1}\right) \equiv \xi_0^1 \\ \vec{A}_{131} &= -3P_{7/8}|C_0^1|e^{i\xi_0^1} \equiv 3P_{7/8}\vec{C}_0^1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} |C_{14/15}| &= \sqrt{(P_{14/15}a_0^1)^2 + (P_{14/15}b_0^1)^2} = P_{14/15} \sqrt{(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2} \equiv P_{14/15}|C_0^1| \\ \xi_{14/15} &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{P_{14/15}b_0^1}{P_{14/15}a_0^1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b_0^1}{a_0^1}\right) = \xi_{7/8} \equiv \xi_0^1 \\ \vec{A}_{151} &= -10P_{14/15}|C_0^1|e^{i\xi_0^1} \equiv 10P_{14/15}\vec{C}_0^1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

De este modo, las aberraciones en términos de los coeficientes  $a_0^1$  y  $b_0^1$  quedan descritas mediante la expresión 3.27 donde el vector de coeficientes  $\vec{C}_0^1$  se describe como se muestra en la expresión 3.28.

$$W_{Stop} = \underbrace{\left[ (3P_{7/8} - 12P_{14/15})\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u} \right]}_{W_{Stop}^{Coma}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \underbrace{10P_{14/15}(\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})^2}_{W_{Stop}^{2^o Coma}} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_0^1 &\equiv -|C_0^1|e^{i\xi_0^1} \\ |C_0^1| &\equiv \sqrt{(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2} \\ \xi_0^1 &\equiv \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b_0^1}{a_0^1}\right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Una vez que se han obtenido las aberraciones cuando la superficie *freeform* está situada en el stop, podemos aplicar NAT de manera directa [50], y obtener la dependencia que toman las aberraciones con el campo al desplazar la superficie del stop (ecuaciones 3.29 y 3.30).

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{Coma} &= (3P_{7/8} - 12P_{14/15}) [(\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{C}_0^1 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2 + 2 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) \\
 &\quad + 2(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u}) + (\vec{C}_0^1)^* \Delta \vec{h}^2 \cdot \vec{u} + (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})] \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{2^\circ Coma} &= 10P_{14/15} [(\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 3 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + (\vec{C}_0^1 \Delta \vec{h}^2 \cdot \vec{u}^3) + \\
 &\quad + [6 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) \Delta \vec{h} + 3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \vec{C}_0^1] \cdot \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 &\quad + [2 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) \Delta \vec{h}^2 + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \vec{C}_0^1 \Delta \vec{h}] \cdot \vec{u}^2 + \\
 &\quad + 2 (\vec{C}_0^1 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 6(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 &\quad + [(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})^2 \vec{C}_0^1 + 4 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \Delta \vec{h}] \cdot \vec{u} + \\
 &\quad + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h})^2 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h})] \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

De nuevo, prescindiendo de los términos de *tilt* y pistón, la expresión final para la dependencia de las aberraciones en el plano imagen con el campo se presenta en la ecuación 3.31.

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop} &= 10P_{14/15} (\vec{C}_0^1 \cdot \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 30P_{14/15} (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + \\
 &\quad + 20P_{14/15} (\vec{C}_0^1 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^2) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 10P_{14/15} \vec{C}_0^1 \Delta \vec{h}^2 \cdot \vec{u}^3 + \\
 &\quad + [10P_{14/15} [6 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) \Delta \vec{h} + 3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \vec{C}_0^1] + (3P_{7/8} - 12P_{14/15}) \vec{C}_0^1] \cdot \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 &\quad + [10P_{14/15} [2 (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) \Delta \vec{h}^2 + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \vec{C}_0^1 \Delta \vec{h}] + (3P_{7/8} - 12P_{14/15}) \vec{C}_0^1 \Delta \vec{h}] \cdot \vec{u}^2 + \\
 &\quad + [60P_{14/15} (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h}) + (6P_{7/8} - 24P_{14/15}) (\vec{C}_0^1 \cdot \Delta \vec{h})] (\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Esta expresión describe las aberraciones que genera el polinomio  $Q_0^1(u^2)$  y su dependencia con el campo. Son, por orden de aparición, coma secundario, esférica, astigmatismo secundario, *trefoil*, coma, astigmatismo y foco.

### 3.3.3. Polinomio $Q_0^2(u^2)$

De la misma manera que para los *Q-polynomials* anteriores, emplearemos la relación entre el polinomio  $Q_0^2(u^2)$  y los polinomios de Zernike para calcular las aberraciones en el plano imagen a través de la Teoría Nodal de Aberraciones.

En el rango  $A < 0.25$  se puede aproximar el polinomio  $Q_0^2(u^2)$  mediante los polinomios de Zernike de astigmatismo y astigmatismo secundario con se hace en la expresión 3.32.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-Au^2}} u^2 Q_0^2(u) \begin{pmatrix} a_0^2 & b_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \simeq \\ & \simeq \begin{pmatrix} C_5 & C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_5(u, \theta) \\ Z_6(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12}(u, \theta) \\ Z_{13}(u, \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como sabemos por NAT, si la superficie descrita por este polinomio se encuentra en el stop del sistema óptico, las aberraciones que genera en el plano imagen no dependen del campo. Por lo tanto, las aberraciones generadas en dicha posición sería aquellas dadas por la ecuación 3.33 donde los vectores  $\vec{B}_{222}^2$  y  $\vec{B}_{242}^2$  se definen en las ecuaciones 3.34 y 3.35.

$$W_{stop} = \frac{1}{2}(\vec{B}_{222}^2 \cdot \vec{u}^2) + \frac{1}{2}(\vec{B}_{242}^2 \cdot \vec{u}^2)(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \frac{2}{3}(\vec{B}_{242}^2 \cdot \vec{u}^2) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{222}^2 &= -2|C_{5/6}|e^{i2\xi_{5/6}} \\ |C_{5/6}| &= \sqrt{C_5^2 + C_6^2} \\ \xi_{5/6} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{C_6}{C_5}\right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{242}^2 &= -8|C_{12/13}|e^{i2\xi_{12/13}} \\ |C_{12/13}| &= \sqrt{C_{12}^2 + C_{13}^2} \\ \xi_{12/13} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{C_{13}}{C_{12}}\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para obtener la expresión de las aberraciones en términos de los coeficientes asociados al  $Q$ -polynomial, vamos a utilizar las relaciones de estos con los coeficientes de Zernike (ecuaciones 3.36 y 3.37).

$$\begin{pmatrix} C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = P_{5/6} \begin{pmatrix} a_0^2 \\ b_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{13} \end{pmatrix} = P_{12/13} \begin{pmatrix} a_0^2 \\ b_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

De este modo, las expresiones 3.34 y 3.35 se pueden reescribir como se muestra en las ecuaciones 3.38 y 3.39.

$$\begin{aligned} |C_{5/6}| &= \sqrt{(P_{5/6}a_0^2)^2 + (P_{5/6}b_0^2)^2} = P_{5/6}\sqrt{(a_0^2)^2 + (b_0^2)^2} \equiv P_{5/6}|C_0^2| \\ \xi_{5/6} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{P_{5/6}b_0^2}{P_{5/6}a_0^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_0^2}{a_0^2}\right) \equiv \xi_0^2 \\ \vec{B}_{222}^2 &= -2P_{5/6}|C_0^2|e^{i2\xi_0^2} \equiv 2P_{5/6}\vec{C}_0^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} |C_{12/13}| &= \sqrt{(P_{12/13}a_0^2)^2 + (P_{12/13}b_0^2)^2} = P_{12/13}\sqrt{(a_0^2)^2 + (b_0^2)^2} \equiv P_{12/13}|C_0^2| \\ \xi_{12/13} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{P_{12/13}b_0^2}{P_{12/13}a_0^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_0^2}{a_0^2}\right) = \xi_{5/6} \equiv \xi_0^2 \\ \vec{B}_{242}^2 &= -8P_{12/13}|C_0^2|e^{i2\xi_0^2} \equiv 8P_{12/13}\vec{C}_0^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

De este modo, las aberraciones en términos de los coeficientes  $a_0^2$  y  $b_0^2$  quedarían como se muestra en la ecuación 3.40

$$W_{Stop} = \underbrace{\left(P_{5/6} - \frac{16}{3}P_{12/13}\right)}_{W_{Stop}^{Ast}} \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 + \underbrace{4P_{12/13}(\vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2)}_{W_{Stop}^{2nd Ast}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (3.40)$$

donde el vector  $\vec{C}_0^2$  se define como

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_0^2 &\equiv -|C_0^2|e^{i2\xi_0^2} \\
 |C_0^2| &\equiv \sqrt{(a_0^2)^2 + (b_0^2)^2} \\
 \xi_0^2 &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_0^2}{a_0^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Una vez que tenemos las aberraciones cuando la superficie *freeforom* está situada en el stop, podemos aplicar NAT de manera directa [50], y obtener la dependencia que toman las aberraciones con el campo al desplazar la superficie del stop (ecuaciones 3.42 y 3.43).

$$W_{NoStop}^{Ast} = \left( P_{5/6} - \frac{16}{3} P_{12/13} \right) \left( \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 + 2\vec{C}_0^2 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u} + \vec{C}_0^2 \cdot \Delta \vec{h} \right) \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{2^\circ Ast} &= 4P_{12/13} \left[ \left( \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 3 \left( \vec{C}_0^2 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u} \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{C}_0^2 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^3 \right. \\
 &+ 3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \left( \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 \right) + 3 \left( \vec{C}_0^2 \cdot \Delta \vec{h}^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 \left( \vec{C}_0^2 \cdot \Delta \vec{h}^2 \right) (\Delta \vec{h} \cdot \vec{u}) \\
 &\left. + 2(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \left( \vec{C}_0^2 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u} \right) + (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \left( \vec{C}_0^2 \cdot \Delta \vec{h}^2 \right) \right] \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Si prescindimos de los términos de *tilt* y pistón, la expresión final para la dependencia de las aberraciones en el plano imagen con el campo se presenta en la ecuación 3.44.

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop} &= 4P_{12/13} \left( \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 12P_{12/13} \left( \vec{C}_0^2 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u} \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4P_{12/13} \vec{C}_0^2 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^3 \\
 &+ \left[ \left( P_{5/6} - \frac{16}{3} P_{12/13} \right) + 12P_{12/13} (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) \right] \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 + 12P_{12/13} \left( \vec{C}_0^2 \cdot \Delta \vec{h}^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u})
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

En esta expresión se muestran las aberraciones que genera en el polinomio  $Q_0^2(u^2)$  y su dependencia con el campo. Por orden de aparición en la ecuación, las aberraciones son astigmatismo secundario, coma, *trefoil*, astigmatismo y foco.

### 3.3.4. Polinomio $Q_0^3(u^2)$

Por último, se va a emplear la relación entre el polinomio  $Q_0^3(u^2)$  y los polinomios de Zernike para calcular las aberraciones en el plano imagen a través de la Teoría Nodal de Aberraciones.

Se va a contemplar el rango  $A < 0.25$  que permite aproximar el polinomio  $Q_0^3(u^2)$  mediante los polinomios de Zernike de *trefoil* y *trefoil* secundario con se hace en la expresión 3.45.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-Au^2}} u^3 Q_0^3(u) \begin{pmatrix} a_0^3 & b_0^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix} \simeq \\ & \simeq \begin{pmatrix} C_{10} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{10}(u, \theta) \\ Z_{11}(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{19} & C_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{19}(u, \theta) \\ Z_{20}(u, \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Considerando, como en los casos anteriores, que la superficie *freeform* se encuentra en el stop del sistema y aplicando la propiedad de la NAT para este caso obtenemos que las aberraciones expresadas en función de los coeficientes de Zernike vendrán dada por la ecuación 3.46 donde los vectores  $\vec{C}_{333}^3$  y  $\vec{C}_{353}^3$  se definen mediante las ecuaciones 3.47 y 3.48.

$$W_{Stop} = \frac{1}{4}(\vec{C}_{333}^3 \cdot \vec{u}^3) + \frac{1}{4}(\vec{C}_{353}^3 \cdot \vec{u}^3)(\vec{u} \cdot \vec{u}) - 5(\vec{C}_{353}^3 \cdot \vec{u}^3) \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_{333}^3 &= -4|C_{10/11}|e^{i3\xi_{10/11}} \\ |C_{10/11}| &= \sqrt{C_{10}^2 + C_{11}^2} \\ \xi_{10/11} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{C_{11}}{C_{10}}\right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_{353}^3 &= -\frac{4}{5}|C_{19/20}|e^{i3\xi_{19/20}} \\ |C_{19/20}| &= \sqrt{C_{19}^2 + C_{20}^2} \\ \xi_{19/20} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{C_{20}}{C_{19}}\right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para obtener la expresión de las aberraciones en términos de los coeficientes asociados al *Q-polynomial*, utilizamos las relaciones de estos con los coeficientes de Zernike (expresiones 3.49 y 3.50).

$$\begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{11} \end{pmatrix} = P_{10/11} \begin{pmatrix} a_0^3 \\ b_0^3 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$\begin{pmatrix} C_{19} \\ C_{20} \end{pmatrix} = P_{19/20} \begin{pmatrix} a_0^3 \\ b_0^3 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

De este modo, las expresiones 3.47 y 3.48 se pueden reescribir mediante las ecuaciones 3.51 y 3.52.

$$\begin{aligned} |C_{10/11}| &= \sqrt{(P_{10/11}a_0^3)^2 + (P_{10/11}b_0^3)^2} = P_{10/11}\sqrt{(a_0^3)^2 + (b_0^3)^2} \equiv P_{10/11}|C_0^3| \\ \xi_{10/11} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{P_{10/11}b_0^3}{P_{10/11}a_0^3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{b_0^3}{a_0^3}\right) \equiv \xi_0^3 \\ \vec{C}_{333}^3 &= -4P_{10/11}|C_0^3|e^{i3\xi_0^3} \equiv 4P_{10/11}\vec{C}_0^3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} |C_{19/20}| &= \sqrt{(P_{19/20}a_0^3)^2 + (P_{19/20}b_0^3)^2} = P_{19/20}\sqrt{(a_0^3)^2 + (b_0^3)^2} \equiv P_{19/20}|C_0^3| \\ \xi_{19/20} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{P_{19/20}b_0^3}{P_{19/20}a_0^3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{b_0^3}{a_0^3}\right) \equiv \xi_0^3 \\ \vec{C}_{353}^3 &= -\frac{4}{5}P_{19/20}|C_0^3|e^{i3\xi_0^3} \equiv \frac{4}{5}P_{19/20}\vec{C}_0^3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por lo tanto, las aberraciones expresadas en función de los coeficientes  $a_0^3$  y  $b_0^3$  quedan descritas mediante la ecuación 3.53 donde el vector  $\vec{C}_0^3$  se define mediante la ecuación 3.54.

$$W_{Stop} = \underbrace{(P_{10/11} - 4P_{19/20}) \vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3}_{W_{Stop}^{Trefoil}} + \frac{1}{5} \underbrace{P_{19/20}(\vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3)(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{W_{Stop}^{2\circ Trefoil}} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_0^3 &\equiv -|C_0^3|e^{i3\xi_0^3} \\
 |C_0^3| &\equiv \sqrt{(a_0^3)^2 + (b_0^3)^2} \\
 \xi_0^3 &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{b_0^3}{a_0^3}\right)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Una vez que ya tenemos las aberraciones cuando la superficie *freeform* está situada en el stop, podemos aplicar NAT de manera directa [50], y obtener la dependencia que toman las aberraciones con el campo al desplazar la superficie del stop (ecuaciones 3.55 y 3.56).

$$W_{NoStop}^{Trefoil} = (P_{10/11} - 4P_{19/20}) \left( \vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3 + 3\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u}^2 + 3\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^{*2} \cdot \vec{u} + \vec{C}_0^3 \cdot \Delta \vec{h}^3 \right) \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop}^{2^\circ Trefoil} &= \frac{1}{5} P_{19/20} [ (\vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4 (\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u}^2) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 6 (\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^{*2} \cdot \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 &+ \vec{C}_0^3 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^4 + 4(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3) + 6(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u}^2) + \\
 &+ 4 (\vec{C}_0^3 \cdot \Delta \vec{h}^3) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 (\vec{C}_0^3 \cdot \Delta \vec{h}^3) (\Delta \vec{h} \cdot \vec{u}) \\
 &+ 3(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) (\vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^{*2} \cdot \vec{u}) + (\vec{C}_0^3 \cdot \Delta \vec{h}^3) (\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) ]
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Para obtener la expresión 3.56, se han empleado las identidades vectoriales 3.57 y 3.58.

$$2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{A}^3 \cdot \vec{C}^3) = (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{A}^2 \vec{B} \cdot \vec{C}^3) + \vec{A}^4 \cdot \vec{B} \vec{C}^3 \tag{3.57}$$

$$2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{A}^2 \vec{B} \cdot \vec{C}^3) = (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{A} \vec{B}^2 \cdot \vec{C}^3) + (\vec{B} \cdot \vec{B})(\vec{A}^3 \cdot \vec{C}^3) \tag{3.58}$$

Procediendo igual que en los casos anteriores, si prescindimos de los términos de *tilt* y pistón, la expresión final para la dependencia de las aberraciones en el plano imagen con el campo se presenta en la ecuación 3.59.

$$\begin{aligned}
 W_{NoStop} = & \frac{1}{5}P_{19/20} \left( \vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \frac{4}{5}P_{19/20} \left( \vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u}^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \\
 & + \frac{6}{5}P_{19/20} \left( \vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^{*2} \cdot \vec{u} \right) (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{5}P_{19/20} \vec{C}_0^3 \Delta \vec{h} \cdot \vec{u}^4 + \\
 & + \left[ P_{10/11} + \left( \frac{4}{5}(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) - 4 \right) P_{19/20} \right] \left( \vec{C}_0^3 \cdot \vec{u}^3 \right) + \\
 & + \left[ 3P_{10/11} + \left( \frac{6}{5}(\Delta \vec{h} \cdot \Delta \vec{h}) - 12 \right) P_{19/20} \right] \left( \vec{C}_0^3 \Delta \vec{h}^* \cdot \vec{u}^2 \right) + \\
 & + \frac{4}{5}P_{19/20} \left( \vec{C}_0^3 \cdot \Delta \vec{h}^3 \right) (\vec{u} \cdot \vec{u})
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

En esta expresión se presentan las aberraciones que genera el polinomio  $Q_0^3(u^2)$  y su dependencia con el campo. Las aberraciones por orden de aparición en la ecuación son *trefoil* secundario, astigmatismo secundario, coma, *tetrafoil*, *trefoil*, astigmatismo y foco.

### 3.4. Discusión

Los resultados obtenidos para estas cuatro familias de  $Q$ -polynomials y el procedimiento seguido representan una extensión de NAT a sistemas ópticos con superficies *freeform* descritas en términos de los  $Q$ -polynomials y situadas en una posición no coincidente con el stop del sistema. Nótese que estos resultados se han obtenido mediante el ajuste de los  $Q$ -polynomials a los polinomios de Zernike que depende de las características de la superficie base ( $A, K$ ), es decir, es diferente para cada superficie concreta. Por ello, podría parecer que, para cada diseño óptico, es necesario realizar el ajuste de cambio de base. Sin embargo, a partir de los resultados presentados en este capítulo, el diseñador no necesita ajustar cada superficie para saber qué  $Q$ -polynomials requiere el sistema. Basta con conocer la distribución de aberraciones del diseño inicial y la distribución de aberraciones requerida en el plano imagen para seleccionar los coeficientes específicos que se deben introducir como variables en el proceso de optimización. De este modo, para el proceso de análisis de configuraciones para seleccionar el diseño inicial no es necesario realizar el ajuste, basta con emplear las ecuaciones obtenidas a lo largo de este capítulo. El ajuste se

puede emplear, una vez que se ha seleccionado la configuración y el diseño inicial está establecido, para obtener valores iniciales para cada coeficiente. Esto hace que el proceso de optimización sea más eficiente y se reduzca la posibilidad de encontrar un mínimo local en lugar de un mínimo global para la función de mérito.

Según lo anterior, se puede modificar el método de diseño de sistemas *freeform* que se ha mostrado en el capítulo anterior incluyendo los cambios que se muestran en la figura 3.8.

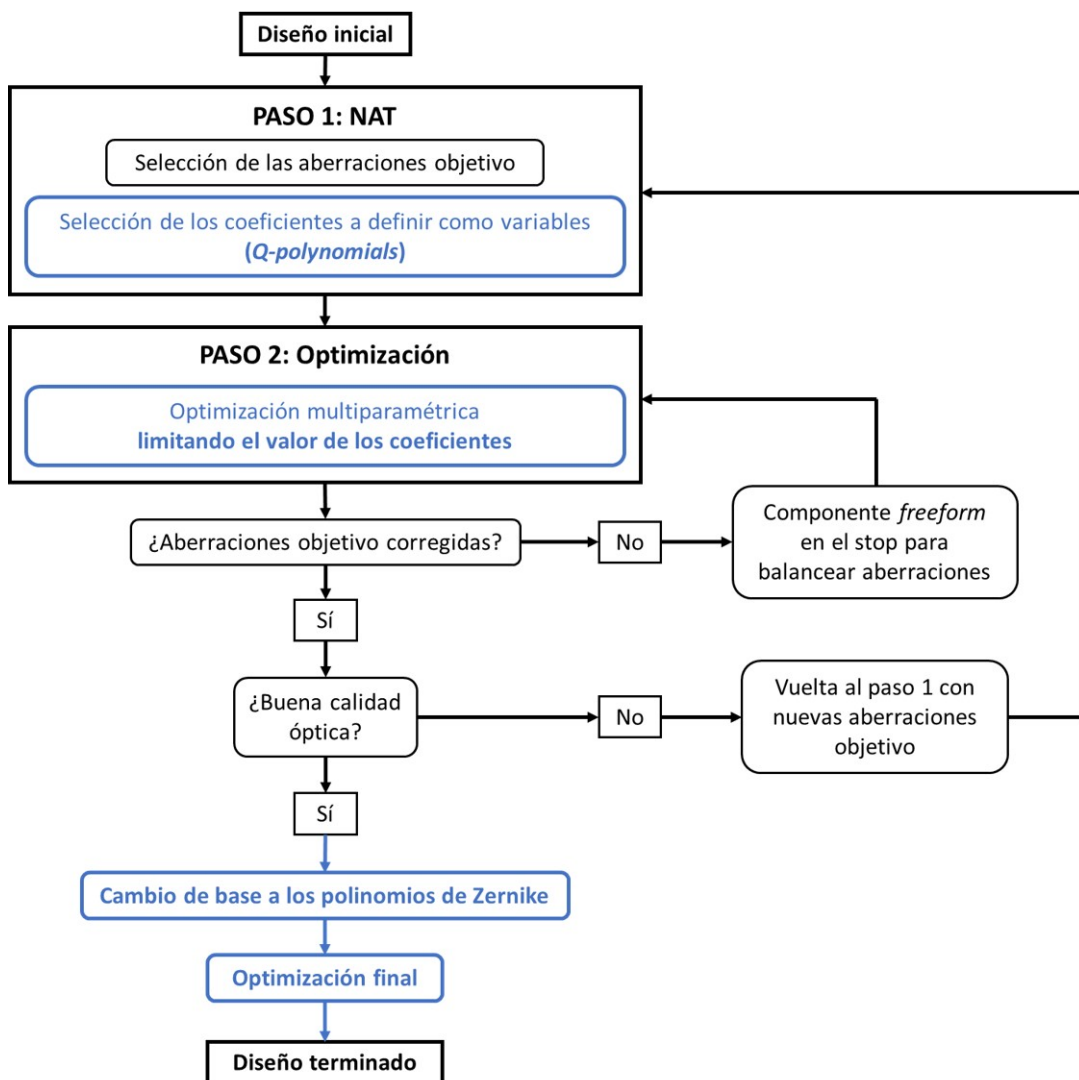


Figura 3.8: Método de diseño de sistemas ópticos *freeform* incluyendo en color azul las modificaciones debidas a los resultados obtenidos a lo largo del capítulo.

De este modo, los pasos a seguir para obtener un diseño *freeform* descrito mediante  $Q$ -polynomials serían los siguientes:

1. Se emplean las ecuaciones obtenidas en la sección 3.3 para llevar a cabo el análisis de configuraciones y establecer el diseño inicial.
2. Se analiza el diseño inicial para seleccionar las aberraciones objetivo, las más representativas y que se van a empezar por corregir.
3. Se seleccionan los  $Q$ -polynomials adecuados para describir la contribución *freeform* del sistema de acuerdo a la dependencia con el campo de las aberraciones del sistema inicial y de las aberraciones que genera cada  $Q$ -polynomial.
4. Se realiza el ajuste entre la base de  $Q$ -polynomials y de polinomios de Zernike para la superficie concreta del diseño. Con esto, se obtienen los valores de los coeficientes  $\vec{C}_n^m$  que se pueden emplear como valores iniciales en la optimización de modo que el proceso sea lo más eficiente posible y se evite alcanzar un mínimo local de la función de mérito.
5. Se optimiza el sistema con las restricciones pertinentes en los coeficientes para mantener las desviaciones de las pendientes locales a lo largo de la superficie lo mas pequeñas posibles. Para satisfacer esta restricción puede no ser suficiente con introducir el orden  $n = 0$ , puede ser necesario introducir mayores órdenes de  $n$  con el mismo valor de  $m$ . También podría ocurrir que, con la limitación de coeficientes, no se pudiera alcanzar la calidad óptica requerida con una única superficie *freeform*. En este caso, habría que contemplar introducir una segunda superficie *freeform* para separar la contribución entre ambas. También habría que evaluar si es preferible tener dos superficies *freeform* con menores contribuciones o una única superficie *freeform* con una mayor contribución.
6. Se evalúa si las aberraciones objetivo han quedado corregidas con esta primera optimización. De no ser así, se introduce una contribución *freeform* en el stop del sistema para balancear posibles desequilibrios entre términos de aberraciones.
7. Una vez que las aberraciones objetivo han quedado corregidas, se evalúa si la calidad óptica del sistema cumple requisitos. De no ser así, se seleccionan nuevas aberraciones objetivo y se repite el proceso para alcanzar su corrección.

8. Una vez alcanzada la calidad óptica requerida, es posible realizar un cambio a la base de Zernike en caso de que sea necesario para la interacción con el software optomecánico o con el fabricante. En caso de ser así, por ser el cambio de base mediante un ajuste, se realiza una última optimización y el diseño queda terminado.

Durante el proceso de diseño, el uso de los *Q-polynomials* permite introducir una restricción en el cambio local de la pendiente por lo que se puede llevar a cabo un diseño orientado a la fabricación. Sin embargo, la base de Zernike puede ser más apropiada en otras situaciones porque es la más extendida y porque proporciona un mayor entendimiento de los modos individuales, además de facilitar, por su universalidad, la exportación de los resultados a otras herramientas de diseño (opto-mecánico, de análisis térmico, de análisis de radiación difusa, etc.). Con las modificaciones que se han hecho en el método de diseño, se puede ver que cada base de polinomios se emplea en la tarea para la que está optimizada.

Para finalizar, señalar que el método propuesto se limita a campos moderados de modo que el desplazamiento  $\Delta\vec{h}$  se pueda aproximar a una dependencia lineal con el campo. Además, la interesante condición de ortogonalidad que presentan los *Q-polynomials* está limitada a aperturas circulares. Por último, a medida que el sistema requiere un ajuste con órdenes mayores de los polinomios de Zernike, aumenta considerablemente la complejidad del tratamiento matemático.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo, se ha llevado a cabo un análisis de la base de los *Q-polynomials* para conseguir una eficiente transformación a los polinomios de Zernike, en la cual aquellos polinomios de Zernike que resulten nulos en el ajuste nunca llegan a introducirse en el mismo. Los resultados muestran que cada *Q-polynomial* puede expresarse como una serie de polinomios de Zernike. El primer término es el polinomio de Zernike correspondiente al caso de tener una superficie base plana y le siguen los órdenes mayores de este mismo polinomio. Se ha mostrado que la transformación entre estas dos bases depende del parámetro  $A$ , un factor de forma de la superficie que toma valores entre 0 y 1 e indica como de fuerte es la curvatura de la superficie

base con respecto a su apertura. Esto a su vez está relacionado con el ángulo que forman los ejes de definición de ambas bases y determina el número de polinomios que se requieren para el ajuste.  $A = 0$  significa que la superficie base es plana, el ángulo entre ejes se anula y las dos bases coinciden. A medida que el valor de  $A$  se aproxima a 1, la curvatura se hace mayor, el ángulo entre ejes aumenta y se requiere un mayor número de polinomios de Zernike para obtener un buen ajuste. Este hecho constituye una información significativa para el diseñador porque permite buscar un valor de  $A$  tan cercano a cero como sea posible para reducir las complicaciones en el ajuste y con ello, en el uso de NAT para el diseño. Además, esta propiedad es importante en sistemas catóptricos como los que se usan típicamente en aplicaciones aeroespaciales en los que el valor de  $A$  suele ser bajo (grandes aperturas y curvaturas moderadas). En estos casos, se ha demostrado la validez del ajuste usando pocos términos.

Este cambio de base se ha empleado para extender NAT a sistemas en los que la contribución *freeform* está descrita mediante los *Q-polynomials*, resultado de gran utilidad para el diseñador ya que le permite realizar una optimización del diseño teniendo en cuenta la posterior fabricación y verificación de las superficies que lo componen debido a su peculiar condición de ortogonalidad.



# Capítulo 4

## Diseño óptico de sistemas *freeform*

En este capítulo se emplean los resultados obtenidos en el capítulo anterior para realizar el diseño de un telescopio *freeform* para embarcar en un pequeño satélite, en una misión espacial de observación de la Tierra. Se sigue la metodología para el diseño de sistemas ópticos *freeform* incorporando el uso de los *Q-polynomials*. Se comienza analizando las distintas configuraciones posibles y seleccionando la más adecuada, tanto para la aplicación específica como para la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. A continuación, se establece el diseño inicial y, sobre este diseño, se corrigen las aberraciones con una componente *freeform* descrita mediante la base de polinomios más adecuada para cada parte del proceso de diseño. Finalmente, se establece el diseño final considerando un equilibrio entre la calidad óptica alcanzada y la complejidad de la fabricación y verificación de los elementos que componen el sistema así como la integración y alineamiento óptico del mismo.

## 4.1. Introducción

En la industria óptica aeroespacial hay una fuerte tendencia, especialmente tras el surgimiento del estándar CubeSat [116, 117, 118], hacia sistemas con el menor número de elementos ópticos que conduzcan a su vez a sistemas de menor masa y de menor volumen y por tanto, de menor coste. El tamaño tan reducido de un CubeSat (combinación de unidades de 100x100x100 mm) genera dificultades importantes a la hora de alcanzar una alta calidad óptica ya que se genera una fuerte limitación del número de elementos que componen el sistema (Figura 4.1). Es este hecho precisamente el que convierte a la óptica *freeform* en una herramienta idónea para este tipo de aplicaciones, por su capacidad de generar sistemas más compactos. En este capítulo se mostrará el diseño de un telescopio sometido a estas restricciones y cuyo tamaño estará limitado al volumen de una unidad Cubesat.

El primer paso para realizar el diseño del telescopio es la elección de una configuración adecuada. Para esta elección, se deben tener en cuenta tanto los requisitos establecidos por la propia aplicación como la idoneidad de la configuración elegida para la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. Dado que el diseño tiene como objetivo una aplicación espacial se opta por un telescopio compuesto únicamente por superficies catóptricas que apenas se degradan con la radiación espacial y son acromáticas, no se ven influidas por el cambio de índice de refracción del medio con la longitud de onda. Además, teniendo en cuenta que se prevee un escenario de baja radiancia de entrada es preferible optimizar la apertura de entrada al valor máximo que nos permita la envuelta mecánica, de ahí que la solución de un espejo primario de máxima apertura sea también preferible. Con estas consideraciones se llevará a cabo un análisis de las distintas configuraciones posibles para ver cuál se adapta mejor a la corrección de aberraciones. Como se ha explicado anteriormente, esto es importante debido a que las superficies *freeform* no son una herramienta universal para la corrección de todas las aberraciones. Para cada tipo de contribución *freeform* en una superficie hay un conjunto de aberraciones que pueden corregirse [64].

Una vez seleccionada la configuración más adecuada, se establece el diseño inicial a partir del cuál se introduce la componente *freeform*. Esta componente *freeform*

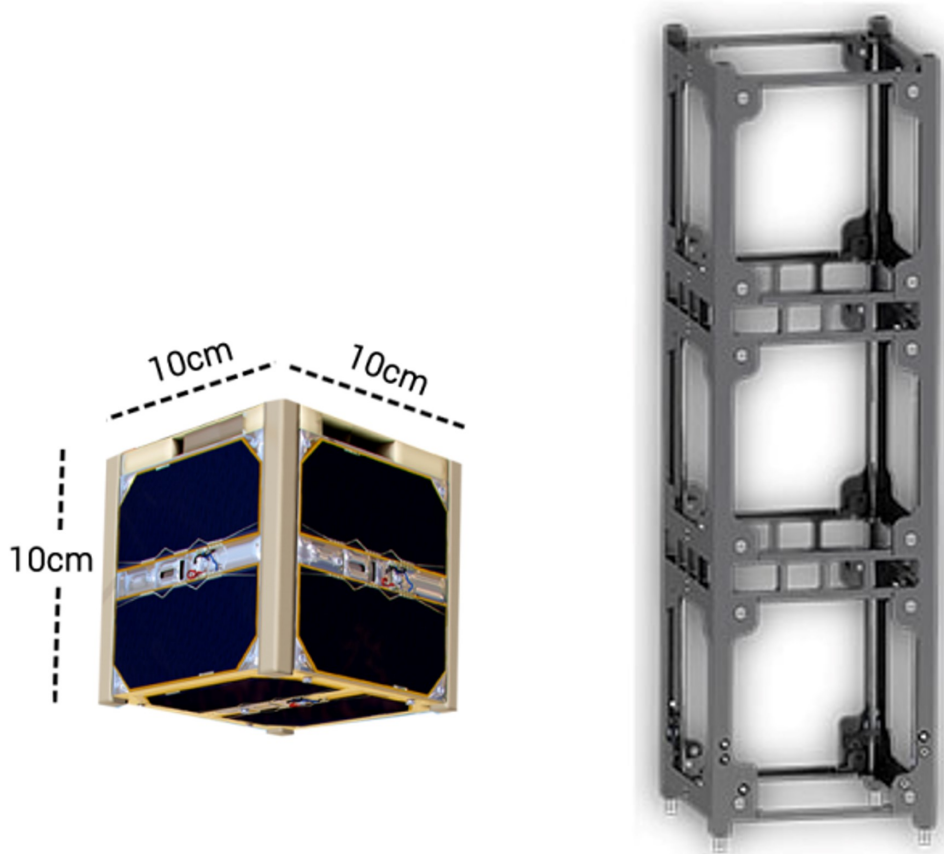


Figura 4.1: Unidad estructural básica de 1U del estándar CubeSat (izquierda) y ejemplo de configuración para 3U (derecha).

estará descrita mediante los  $Q$ -*polynomials* para poder limitar la desviación de la pendiente local a lo largo de toda la superficie y facilitar así la fabricación y verificación de los espejos que compongan el sistema. Inicialmente, se emplearán los resultados del capítulo anterior para elegir los polinomios a introducir en la descripción de la componente *freeform* y se hará un primer cálculo de los valores que deben tomar sus coeficientes. Estos valores calculados se introducirán en el modelo de Code V como valores iniciales para realizar una optimización. Una vez que el sistema se ha optimizado y se ha alcanzado una alta calidad óptica, se realiza un cambio de base

de la componente *freeform*, de *Q-polynomials* a polinomios de Zernike. Este paso se realiza para facilitar la posterior comunicación con el fabricante. Debido a que el cambio entre estas dos bases no es exacto, sino que es aproximado, se realizará una última optimización de Code V de la componente *freeform* descrita mediante los coeficientes de Zernike y se establece el diseño final para poder llevar a cabo el análisis de tolerancias. Con este proceso, se emplean los resultados obtenidos en el capítulo anterior para realizar el diseño de un telescopio *freeform* empleando la base de polinomios más adecuada en cada paso del diseño y limitando la desviación de la componente *freeform* respecto a la superficie base para facilitar la posterior verificación de los espejos.

El telescopio a diseñar será embarcado en un CubeSat dedicado a una misión de Observación de la Tierra que trabajará a una altura orbital de 450 Km. El campo de trabajo del telescopio viene determinado por la rendija de entrada de los elementos detectores que posteriormente se colocarán en su plano focal. Estos elementos serán dos micro espectrómetros comerciales (HAMAMATSU C12880MA) con un rango espectral de 340 nm a 850 nm, cuyo funcionamiento se muestra esquemáticamente en la figura 4.2(a). Cada uno de ellos cuenta con una rendija de entrada cuadrada de 50  $\mu\text{m}$  de lado y una red de difracción curva que focaliza las distintas longitudes de onda en un conjunto de detectores CMOS de muy alta sensibilidad. Su posición en el plano focal del telescopio selecciona los campos de trabajo del telescopio. En concreto, los micro espectrómetros se colocan lo más cerca uno del otro que permite su encapsulado, de forma simétrica con respecto al eje óptico y asegurando que las dos trazas sean adyacentes en distintos instantes de tiempo, lo que se conoce como configuración escalonada (*staggered configuration*). Esta disposición de los micro espectrómetros en el plano focal del telescopio se muestra en la figura 4.2(b). Para que esas 50  $\mu\text{m}$  generen un GSD (*Ground Sample Distance*) cuadrado de 80 m de lado en tierra, se selecciona para el telescopio una EFL (*Effective Focal Length*) de 281 mm. Las posiciones de campo de trabajo que está seleccionadas por los detectores son  $(-0.025, 6.5)$  mm y  $(0.025, -6.5)$  mm en el plano focal del telescopio. Si se pasan estos campos del plano imagen a ángulos en el espacio objeto se obtiene  $(-0.0052^\circ, 1.3552^\circ)$  y  $(0.0052^\circ, -1.3552^\circ)$ , respectivamente.

Dado que el telescopio se va a diseñar para ser embarcado en un CubeSat, la apertura vendrá limitada por el tamaño máximo de la propia estructura del Cube-

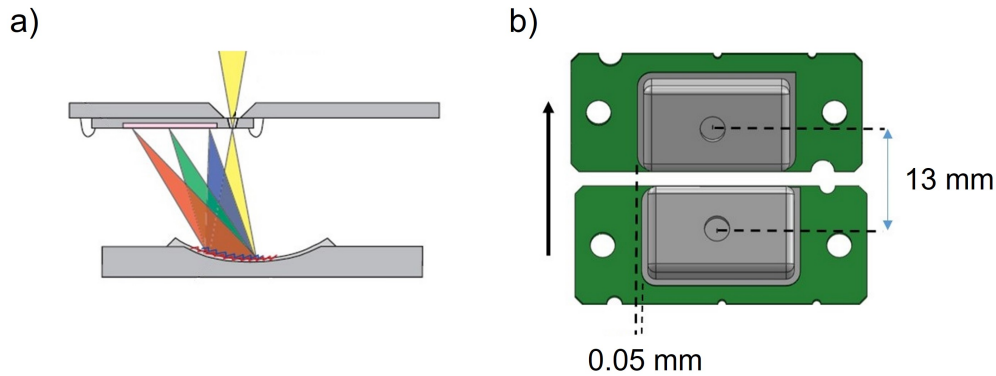


Figura 4.2: (a) Esquema del funcionamiento de los micro espectrómetros. (b) Disposición de los micro espectrómetros en el plano focal del telescopio.

Sat. La apertura disponible varía ligeramente en función de la posición dentro del CubeSat. En concreto, en las zonas centrales del CubeSat se puede alcanzar una apertura de hasta 90 mm. Sin embargo, en las zonas coincidentes con las caras externas del CubeSat, la apertura está limitada a 80 mm, que será el límite para el diseño. Además, precisamente porque la apertura está más limitada en las caras más externas del CubeSat, sería óptimo colocar la pupila en la primera cara de entrada, lo que impediría que el stop del sistema coincidiera con alguno de los espejos del telescopio y podría suponer una dificultad a la hora de alcanzar la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. Esto se debe a que, como se ha explicado en el capítulo 2, una superficie óptica coincidente con el stop del sistema ayuda al balance de aberraciones. Por ello, este será un factor a tener en cuenta en el análisis de configuraciones.

Adicionalmente, la longitud total del telescopio también estará limitada por el requerimiento de reservar espacio a la etapa detectora (recordemos que el conjunto del instrumento formado por el telescopio y la etapa detectora no puede ocupar más de 1U equivalente a 100x100x100 mm). Dependiendo de cada configuración y la posición que ocupe el plano focal, dicha longitud tendrá un límite de entre 80 mm y 90 mm. Teniendo en cuenta estas dimensiones tan reducidas, los campos de trabajo del telescopio están alejados del eje óptico de forma significativa, que es precisamente el motivo por el cual se requiere el uso de óptica *freeform*.

## 4.2. Análisis de configuraciones

Realizaremos en primer lugar un análisis de configuraciones para seleccionar la más adecuada. Por un lado, debemos considerar los requisitos establecidos por la aplicación y, por otro lado, la idoneidad de cada configuración para la corrección de aberraciones.

Los principales requisitos impuestos por la aplicación son la restricción de tamaño, la focal del telescopio y los campos de trabajo. Adicionalmente, hay algunas otras consideraciones importantes. En primer lugar, la misión se destinará al estudio de contaminación de aguas continentales que tienen una baja reflectividad en el rango espectral de trabajo (del orden del 2%) [119]. Esto, unido a la fuerte limitación en la apertura del telescopio, puede generar problemas de detección debido a la baja señal. Por lo tanto, como se mencionó anteriormente, sería deseable que el espejo primario tuviera la mayor apertura posible para maximizar su capacidad colectora. Otra consideración importante es la posición del plano focal del telescopio. Sería deseable que el plano focal fuera paralelo a alguna de las caras del CubeSat ya que facilitaría la posterior colocación de los detectores y su tarjeta de electrónica de proximidad asociada.

Con todas estas consideraciones, se han analizado posibles configuraciones con dos o tres espejos. Entre las configuraciones con dos espejos, se ha contemplado una opción con ambos espejos en eje, es decir, que el espejo secundario ( $M_2$ ) genera una obstrucción central. Además, se han contemplado dos opciones con espejos descentrados de modo que se evita dicha obstrucción. En la figura 4.3 se pueden ver los diseños de estas tres configuraciones y cómo se alojaría dentro del CubeSat, sin incluir aún ninguna componente *freeform*. La figura 4.3(a) muestra la configuración en eje, la figura 4.3(b) muestra una configuración descentrada que se conoce como configuración tipo 4 y la figura 4.3(c) muestra la otra configuración descentrada que se conoce como configuración tipo Z. Es importante destacar que en la configuración en eje (figura 4.3(a)) se ha situado el stop del sistema coincidente con la cara exterior del CubeSat por lo que no coincide con ninguno de los dos espejos. Esto se debe a que si se coloca el stop en alguno de los espejos, el tamaño del haz a la entrada del CubeSat es demasiado grande por lo que habría que reducir la apertura del

espejo primario ( $M_1$ ) y se perdería capacidad de colección. Al poner el stop a la entrada del CubeSat se maximiza el tamaño del espejo primario ya que se hace uso de la posibilidad de tener una apertura mayor en las zonas centrales del CubeSat y menor en las caras externas. Sin embargo, en las dos configuraciones descentradas (figuras 4.3(b,c)) se ha colocado el stop del sistema en el espejo primario. Esto es posible porque lo que reduce el tamaño del espejo primario no es la posición del stop, sino otros factores como la posición del plano focal y el volumen reservado a la etapa detectora. También hay que destacar que la posición del plano focal en las configuraciones (a) y (c) es mucho más conveniente por ser paralela a una de las cara del CubeSat, facilitando así la colocación de los detectores y su electrónica.

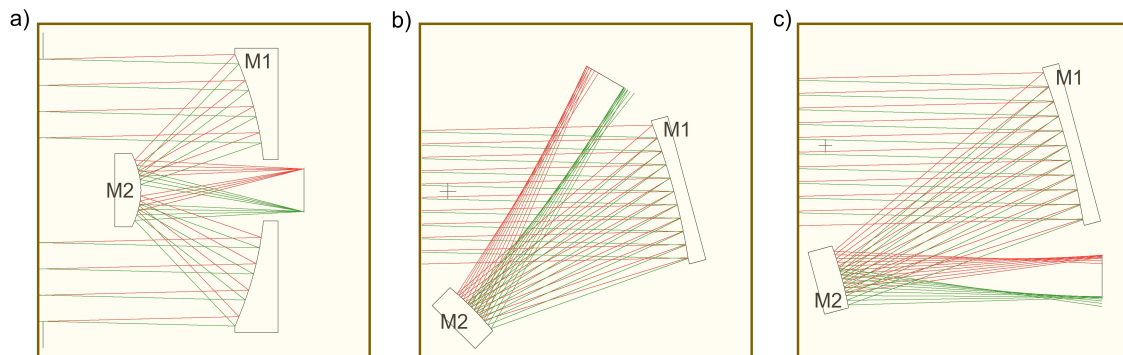


Figura 4.3: Diseño inicial de las tres configuraciones con dos espejos. (a) Configuración en eje. (b) Configuración tipo 4. (c) Configuración tipo Z.

Para estas tres configuraciones, debemos analizar la dependencia de las aberraciones con el campo y la capacidad de corregir dichas aberraciones mediante óptica *freeform*. Para ello, se van a analizar las aberraciones que dominan en cada caso y cómo se podrían corregir. En primer lugar, en la configuración en eje dominan las aberraciones de astigmatismo, coma y aberración esférica. En este caso, por tratarse de un diseño en eje, el astigmatismo y el coma presentan un nodo para el campo en eje y varían con el campo de forma cuadrática y lineal, respectivamente. Esto se puede ver en los FFDs de estas aberraciones que se muestran en la figura 4.4. En nuestro caso, teniendo en cuenta que el campo de trabajo son dos secciones separadas y alejadas del eje óptico y los conocimientos de NAT adquiridos en los capítulos anteriores, se podría introducir una contribución *freeform* descrita por los polinomios de astigmatismo (ya sean los polinomios de Zernike  $Z_5$  y  $Z_6$  o los *Q-polynomials*

de la familia  $m = 2$ ). De este modo, se obtendrían dos nodos de astigmatismo que se harían coincidir con las dos posiciones de campo quedando así corregido el astigmatismo. Para corregir el coma y la aberración esférica bastaría con introducir una contribución esférica y combinarla con las constantes cónicas de ambos espejos. Por lo tanto, en esta configuración sería suficiente introducir una contribución *freeform* descrita únicamente mediante polinomios de astigmatismo para alcanzar alta calidad óptica. En este caso, no tener ninguno de los espejos coincidente con el stop no supone un problema ya que la contribución *freeform* requerida es de astigmatismo, la única contribución que genera las mismas aberraciones en el plano imagen independientemente de si su posición coincide o no con la del stop.

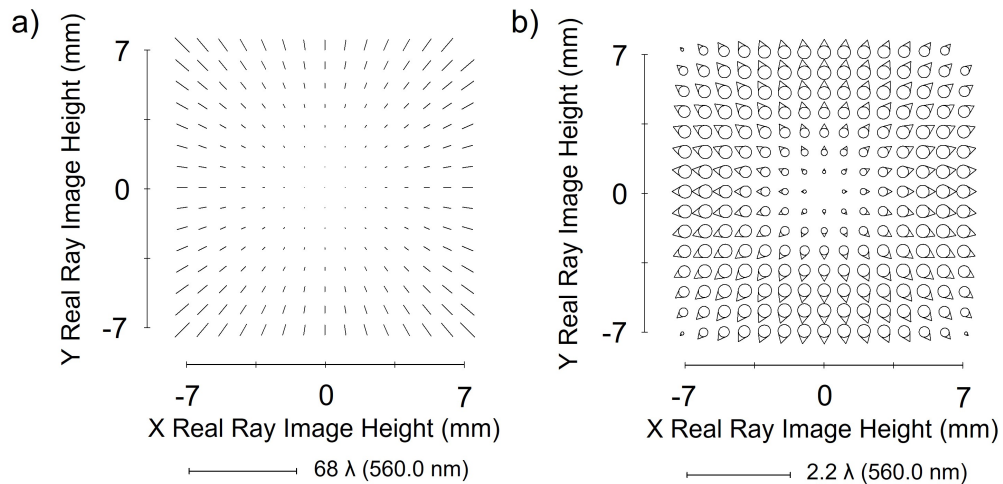


Figura 4.4: FFDs de (a) astigmatismo y (b) coma obtenidos en el diseño inicial del telescopio en eje.

En el caso de las configuraciones con los espejos descentrados, configuraciones (b) y (c) de la figura 4.3, las aberraciones se comportan de una forma distinta ya que, aunque no haya una contribución *freeform*, ya se ha roto con la simetría de revolución del sistema mediante el descentramiento de los espejos. Esto implica que los nodos de astigmatismo y coma que aparecían en el campo en eje ya no están presentes. La dependencia del astigmatismo y el coma con el campo en ambas configuraciones es muy similar, tal y como se muestra en las figuras 4.5(a,b) para la configuración tipo 4 y 4.6(a,b) para la configuración tipo Z.

En estos dos casos aparece una contribución de astigmatismo constante con

Configuración tipo 4

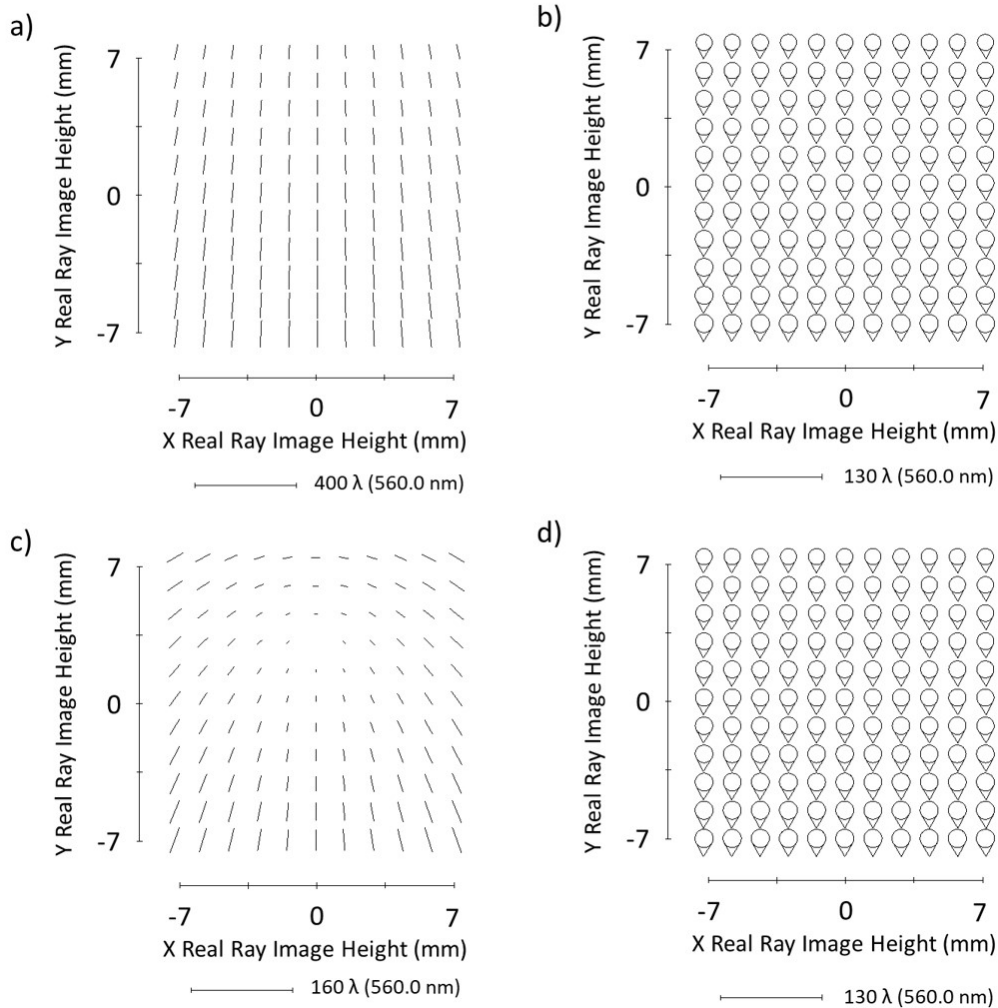


Figura 4.5: FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la configuración tipo 4 (a,b) y una vez corregido el astigmatismo constante con el campo (c,d).

el campo, la aberración más sencilla de corregir ya que una contribución *freeform* descrita mediante los polinomios de astigmatismo introduce únicamente aberración de astigmatismo constante con el campo en el plano focal. Si se introduce dicha contribución y se corrige el astigmatismo constante se obtiene la nueva dependencia del astigmatismo con el campo mientras el coma se mantiene inalterado. Esta nueva dependencia de las aberraciones con el campo se muestra en las figuras 4.5(c,d)

### Configuración tipo Z

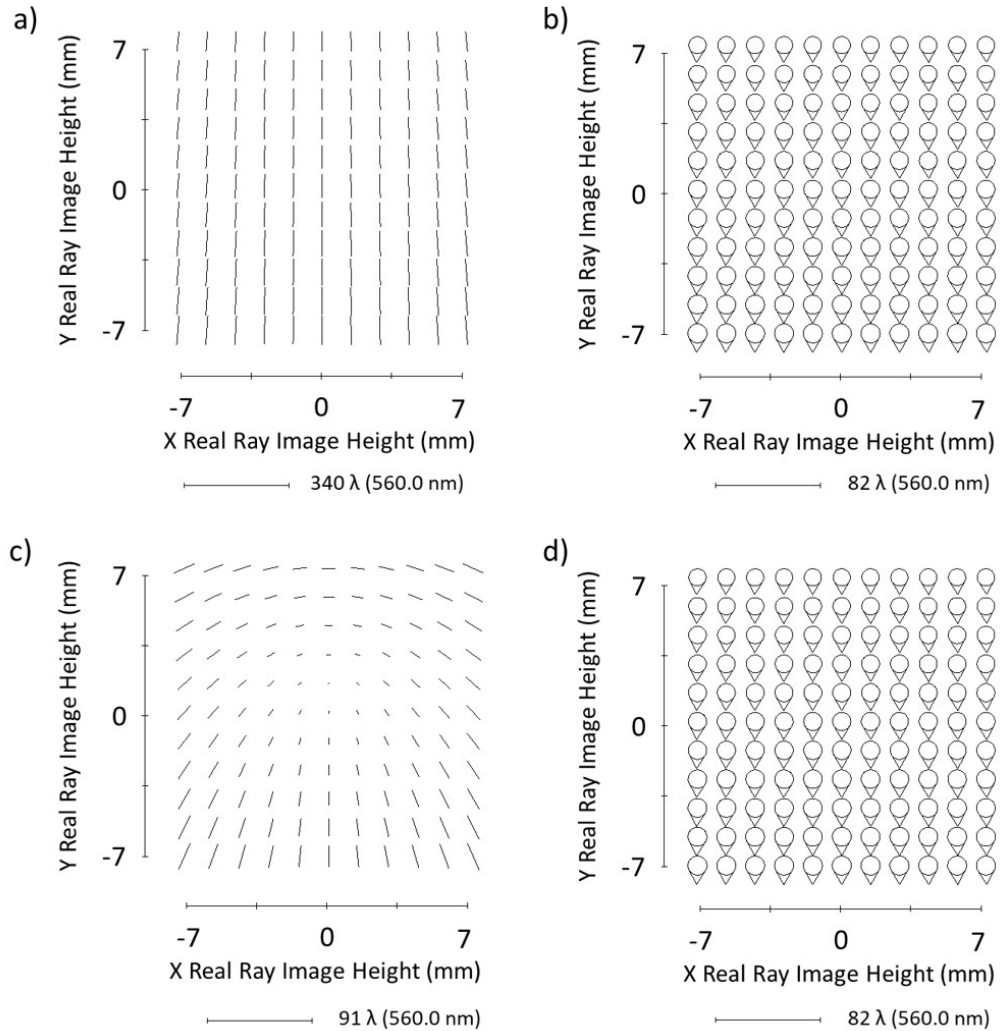


Figura 4.6: FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la configuración tipo Z (a,b) y una vez corregido el astigmatismo constante con el campo (c,d).

para la configuración tipo 4 y 4.6(c,d) para la configuración tipo Z. El resultado es que el astigmatismo está dominado por una contribución que se conoce como asimétrica y lineal con el campo mientras que el coma lo está por una contribución constante con el campo. Estas dos aberraciones, con esta dependencia con el campo, son precisamente las que introduce en el plano focal del sistema una contribución

*freeform* descrita mediante los polinomios de coma cuando se introduce en una superficie que no coincide con el stop del sistema. Sin embargo, como se explicó en capítulos anteriores, al introducir dicha componente *freeform* la relación entre estas dos aberraciones está fijada y no coincide con la aberración óptica que aparece, según los modelos, en el plano imagen del telescopio. Es por ello que, para corregir estas aberraciones, será necesario introducir una contribución de coma adicional en una superficie que sí coincida con la posición del stop. Por lo tanto, en estas configuraciones, se hace imprescindible que el stop coincida con alguno de los dos espejos, en este caso, el espejo primario. Además, las aberraciones de estos diseños tienen una magnitud considerablemente grande, por lo que es de esperar que se requieran componentes *freeform* adicionales y de altos órdenes para alcanzar una alta calidad óptica. Por ello, se puede concluir que, dentro de las opciones de telescopio con dos espejos, la configuración más adecuada es la configuración en eje. A pesar de que el espejo secundario genera una obstrucción central, el sistema óptico resultante es considerablemente más sencillo.

A continuación, podemos incrementar la complejidad y considerar telescopios con tres espejos. Hemos contemplado tres configuraciones típicas fuera de eje cuyos diseños iniciales sin componente *freeform* se muestran en la figura 4.7. En este caso, las vamos a denominar como Configuración 1 (figura 4.7(a)), Configuración 2 (figura 4.7(b)) y Configuración 3 (figura 4.7(c)). En los tres casos, el stop del sistema coincide con el espejo primario.

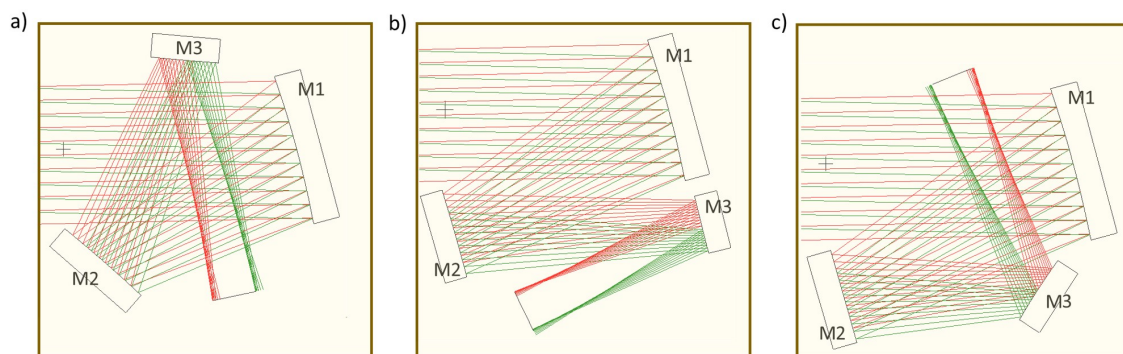


Figura 4.7: Diseño inicial de las tres configuraciones con tres espejos. (a) Configuración 1. (b) Configuración 2. (c) Configuración 3.

De forma similar al caso anterior de dos espejos, se van a analizar las aberra-

ciones que dominan en cada caso y la capacidad de corregir dichas aberraciones mediante una componente *freeform*. Las tres configuraciones presentan distribuciones de astigmatismo y coma muy similares que se muestran en los correspondientes FFDs de la figura 4.8.

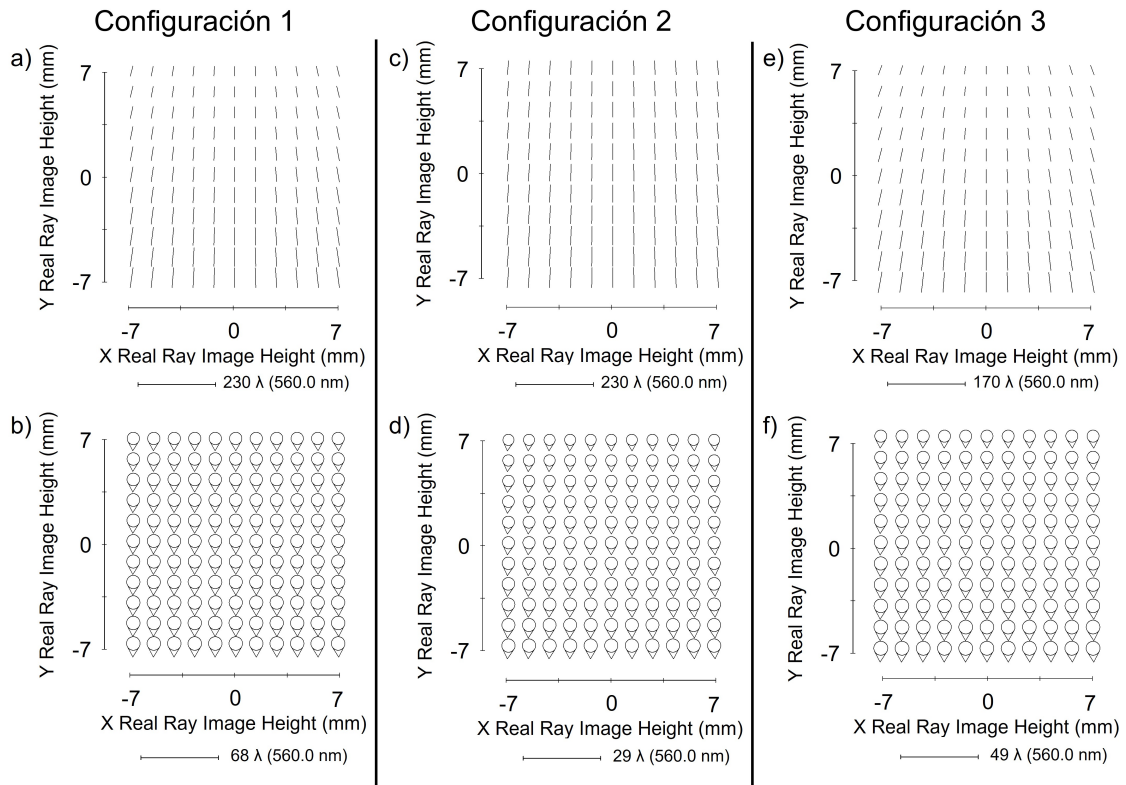


Figura 4.8: FFDs de astigmatismo y coma obtenidos para el diseño inicial de la Configuración 1 (a,b), la Configuración 2 (c,d) y la Configuración 3 (e,f).

De nuevo, aparece una contribución de astigmatismo constante con el campo que es la primera aberración que se corrige mediante una contribución *freeform* de astigmatismo en cualquiera de los espejos que componen el telescopio. Una vez que se introduce dicha contribución *freeform* se corrige el astigmatismo constante con el campo mientras que el coma no se ve alterado. Se obtienen los FFDs de astigmatismo y coma que se muestran en la figura 4.9.

Del mismo modo que ocurría en las configuraciones con dos espejos descentrados, las aberraciones que dominan son el astigmatismo asimétrico y lineal con el campo y el coma constante con el campo. Estas aberraciones se pueden corregir con una

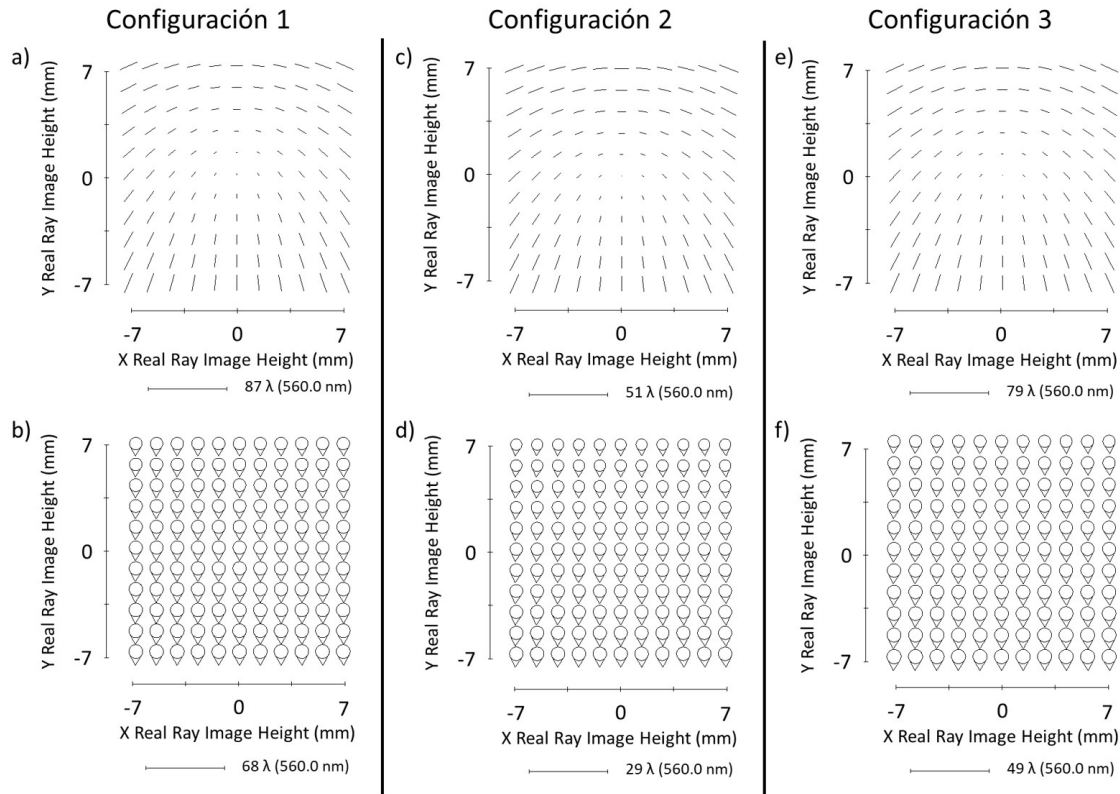


Figura 4.9: FFDs de astigmatismo y coma obtenidos tras corregir la contribución de astigmatismo constante con el campo de la Configuración 1 (a,b), la Configuración 2 (c,d) y la Configuración 3 (e,f).

contribución *freeform* de coma en uno de los espejos cuya posición no coincida con el stop del sistema. Para las tres configuraciones, la proporción relativa entre las contribuciones de coma y astigmatismo no coincide con la que aparece al introducir una contribución *freeform* de coma, por ello, vuelve a ser imprescindible introducir una contribución de coma adicional en el espejo situado en el stop del sistema para balancear la relación entre la contribución de astigmatismo y de coma. Este hecho impone dos condiciones: que al menos dos de los espejos que componen el sistema sean *freeform* y la necesidad de que uno de ellos coincida con el stop del sistema. Adicionalmente, observamos que la magnitud de ambas aberraciones es más pequeña para la Configuración 2 que para cualquiera de las otras. Esto implica que la contribución *freeform* para esta configuración será de menor magnitud que la que requieren las configuraciones 1 o 3. Además, es posible que las configuraciones 1

y 3 requieran contribuciones *freeform* de órdenes mayores que la Configuración 2 para alcanzar una alta calidad óptica. Por lo tanto, de las opciones analizadas con 3 espejos, la más adecuada es la Configuración 2.

Por lo tanto, para nuestra aplicación, debemos elegir entre la configuración en eje con dos espejos y la Configuración 2 de las opciones con 3 espejos. La configuración en eje presenta la desventaja de que el espejo secundario genera una obstrucción central. Sin embargo, el telescopio de dos espejos en eje resultante será mucho más sencillo, con una contribución *freeform* más pequeña y con la posibilidad de concentrar la contribución *freeform* únicamente en uno de los espejos. Todo esto, facilita tanto las tareas de verificación óptica de las superficies de los espejos como la integración del sistema, además de reducir los costes de fabricación de los elementos ópticos. Por todo ello, se selecciona la configuración de dos espejos en eje.

### 4.3. Diseño inicial

Una vez que se ha seleccionado la configuración más adecuada, se establece un diseño inicial que aún preserve la simetría de revolución. Este diseño inicial deberá cumplir con todos los requisitos que se muestran en la tabla 4.1, aunque no alcance una buena calidad óptica ya que, posteriormente, se llevará a cabo la corrección de aberraciones mediante el uso de la óptica *freeform*.

Parámetro	Valor
EFL ( <i>Effective Focal Length</i> )	281 mm
EPD ( <i>Entrance Pupil Diameter</i> )	80 mm
OAL ( <i>Overall Length</i> )	$\leq 80$ mm
FoV ( <i>Field of View</i> )	$(\mp 0.0052^\circ, \pm 1.3552^\circ)$

Tabla 4.1: Parámetros del diseño inicial del telescopio.

En nuestro caso, el punto de partida para el diseño será un telescopio Cassegrain con un espejo primario parabólico ( $K = -1$ ) y un espejo secundario hiperbólico ( $K < -1$ ). Es bien sabido que un telescopio Cassegrain no alcanza alta calidad óptica para campos grandes como los campos de interés que se han establecido para

este diseño. En concreto, si se lleva a cabo un diseño de telescopio Cassegrain que cumpla con los requisitos establecidos y se optimiza dejando libres los radios de curvatura de ambos espejos, la constante cónica del espejo secundario y la distancia entre ellos, se obtienen los parámetros que se muestran en la tabla 4.2.

Nombre	Tipo	Radio (mm)	Constante cónica	Espesor (mm)
Stop	Esfera	Infinito	-	68.0
$M_1$	Cónica	-93.4309	-1.0	-38.0
$M_2$	Cónica	-20.9029	-1.9836	50.0
Imagen	Esfera	Infinito	-	-

Tabla 4.2: Parámetros del diseño inicial del telescopio Cassegrain considerando el espejo primario  $M_1$  como una superficie parabólica ( $K = -1$ ).

El diagrama de impactos correspondiente a este diseño inicial se muestra en la figura 4.10(b). Se ha representado con un cuadrado negro la entrada de  $50 \mu\text{m}$  de lado de cada uno de los micro espectrómetros.

Se observa claramente que no se ha alcanzado la calidad óptica requerida (gran dispersión de rayos fuera de las áreas cuadradas colectoras). Como la calidad óptica está aún muy alejada del límite por difracción, renunciaremos al espejo primario parabólico del que habíamos partido (menos complejo para el alineamiento) e introduciremos la constante cónica de dicho espejo como una variable en el proceso de optimización. Ahora, los parámetros obtenidos en este proceso se muestran en la tabla 4.3, el diseño resultante en la figura 4.10(a) y la calidad óptica representada a través del diagrama de impacto en la figura 4.10(c).

Nombre	Tipo	Radio (mm)	Constante cónica	Espesor (mm)
Stop	Esfera	Infinito	-	68.0
$M_1$	Cónica	-93.4123	-1.0172	-38.0
$M_2$	Cónica	-20.8803	-2.1117	50.0
Imagen	Esfera	Infinito	-	-

Tabla 4.3: Parámetros del diseño inicial optimizado.

Se observa (figura 4.10(c)) que la calidad de este sistema optimizado ha mejorado

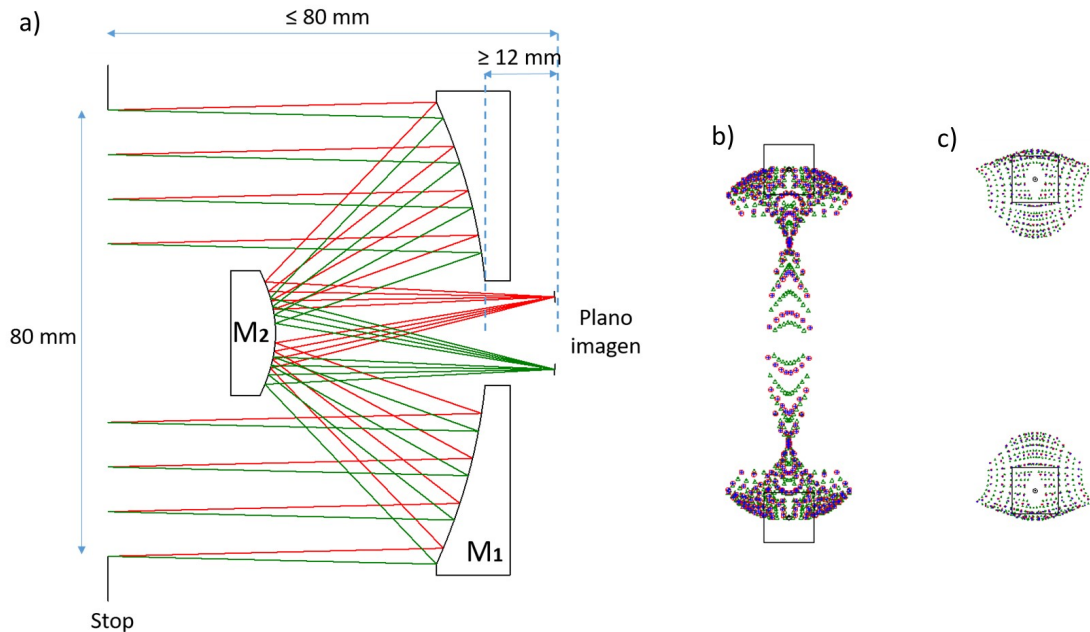


Figura 4.10: (a) *Layout* del diseño. Diagrama de impactos del (b) telescopio Cassegrain clásico y del (c) telescopio tipo Cassegrain con un espejo primario hiperbólico. En estos diagramas, se ha representado la rendija de entrada a los micro espectrómetros mediante dos cuadrados negros.

sustancialmente respecto al diseño anterior pero sigue estando alejada del límite por difracción y ni siquiera el diagrama de impacto muestra todos los rayos dentro de la región de  $50 \mu\text{m}$  de lado.

Como se ha explicado anteriormente, mientras se mantenga la simetría de revolución de las superficies ópticas no lograremos modificar la dependencia de las aberraciones con el campo en el plano imagen ni desplazar los nodos de aberraciones fuera del campo en eje. Para desplazar los nodos fuera del eje, es necesario romper la simetría de revolución mediante una contribución *freeform* en una de las superficies de los espejos. Por lo tanto, empleando este último diseño como diseño inicial, se va a introducir una contribución *freeform* para obtener una calidad óptica que alcance el límite por difracción.

Como se ha explicado en la sección 2.3 del capítulo 2, la metodología de diseño en óptica *freeform* no es similar a la seguida en un diseño con superficies esféricas en el que se van añadiendo órdenes progresivamente hasta alcanzar la calidad de-

seada. En el caso de un diseño *freeform*, se realiza una primera evaluación de las aberraciones del diseño inicial y su dependencia con el campo, después, empleado los conocimientos que proporciona NAT, se decide qué contribución *freeform* es necesaria para corregir las aberraciones. Una vez hecho esto, ya se puede realizar una optimización mediante métodos numéricos como se realiza, por ejemplo, en Code V.

Durante la primera evaluación, en la que se analizan las aberraciones del diseño inicial, se observa la dependencia con el campo mediante los FFDs (*Full Field Displays*). En nuestro caso, en la figura 4.11 se muestran los FFDs de las principales aberraciones mediante los correspondientes polinomios de Zernike.

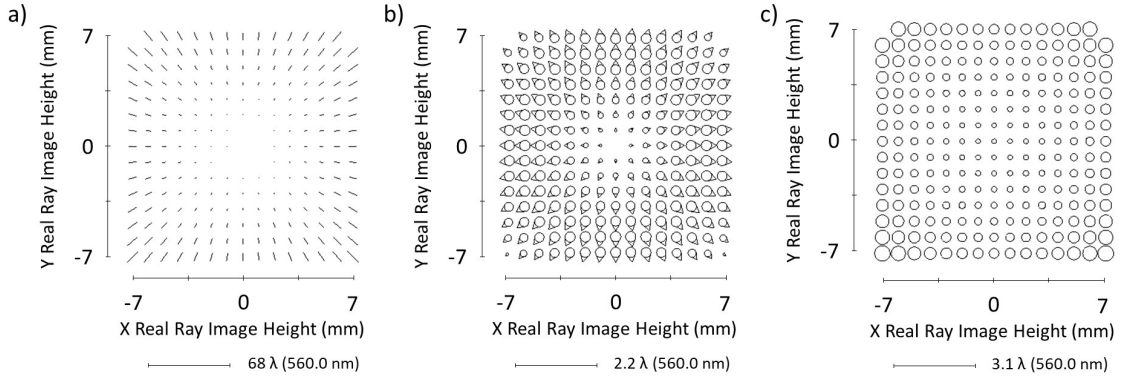


Figura 4.11: Mapas de campo del diseño inicial optimizado de los polinomios de Zernike de (a) astigmatismo ( $Z_5$  y  $Z_6$ ), (b) coma ( $Z_7$  y  $Z_8$ ) y (c) esférica ( $Z_9$ ).

La expresión de las aberraciones para el diseño inicial (SD, *Starting Design*) que mantiene la simetría de rotación son conocidas y fueron descritas por Hopkins [46] como se muestra en las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3.

$$W_{ast}^{SD} = \frac{1}{2} W_{222} \vec{H}^2 \cdot \vec{u}^2, \quad (4.1)$$

$$W_{coma}^{SD} = W_{131} \vec{H} \cdot \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{u}), \quad (4.2)$$

$$W_{sph}^{SD} = W_{040} (\vec{u} \cdot \vec{u})^2. \quad (4.3)$$

Es importante destacar que las expresiones que se muestran en las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3 pueden diferir de los FFDs ya que estos representan los coeficientes de los polinomios de Zernike mientras que las expresiones mencionadas describen

las aberraciones. Se puede ver claramente que mientras la aberración esférica es constante con el campo, el polinomio  $Z_9$  sí tiene una dependencia con el campo. Es importante remarcar esta distinción ya que serán los FFDs los que emplearemos para mostrar resultados visualmente pero las expresiones a minimizar serán las de las aberraciones.

La principal aberración que limita la calidad óptica en este diseño es el astigmatismo así que se comienza por la corrección de dicha aberración. Si, además, se quiere alcanzar el límite por difracción hay que corregir el coma y la aberración esférica.

#### 4.4. Diseño *freeform* descrito mediante la base de los *Q-polynomials*

Una vez establecido el sistema inicial y evaluadas las aberraciones, se procede con la corrección de las mismas. Empezaremos realizando el cálculo analítico de los coeficientes asociados a los *Q-polynomials* seleccionados para corregir las aberraciones de astigmatismo y esférica, que son las aberraciones que dominan en el diseño inicial. Tras los cálculos analíticos, se realiza la optimización final en Code V que minimizará tanto el astigmatismo y la aberración esférica como el coma y otras posibles aberraciones de mayor orden que pueden limitar la calidad.

Debido a la dependencia con el campo de las ecuaciones (4.1) y (4.3) y a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, para corregir el astigmatismo y la aberración esférica se van a introducir los polinomios  $Q_0^2(u^2)$  y  $Q_0(u^2)$  en la contribución *freeform*. Nótese que solo el término descrito mediante  $Q_0^2(u^2)$  constituye realmente una contribución *freeform*, el término descrito mediante  $Q_0(u^2)$  constituye una contribución esférica. Es importante clarificar que no se han elegido estos dos polinomios simplemente porque son los que se corresponden con las aberraciones limitantes, sino que han sido seleccionados por la dependencia con el campo que generan en las aberraciones en el plano imagen. En concreto, el polinomio  $Q_0^2(u^2)$  genera una contribución de astigmatismo constante que es de gran utilidad para obtener una distribución de astigmatismo binodal una vez que se suma a la contribución cuadrática

con el campo que ya está presente en el diseño inicial de partida. Del mismo modo, el polinomio  $Q_0(u^2)$  genera una contribución de aberración esférica que, sumada a la que ya estaba presente inicialmente genera un nodo circular de dicha aberración cuyo radio en el plano imagen lo hace coincidir con los campos de interés. Todo esto será ilustrado a continuación. Además, hay otros ejemplos de polinomios que generan otras dependencias de aberraciones con el campo en el plano imagen que podrán ser interesante en casos en los que se requiera otra distribución de nodos de estas aberraciones en el plano imagen. Por ejemplo, como se mostró en la sección 2.3 del capítulo 2, un caso típico es aquel que presenta cuatro nodos de astigmatismo en el plano imagen al introducir una deformación *freeform* descrita mediante los polinomios de *trefoil* ( $Z_{10}$  y  $Z_{11}$ ) en una superficie no coincidente con el stop del sistema [55, 56].

Para el diseño inicial del que hemos partido, el parámetro  $A = c^2 r_{max}^2$  toma el valor  $A = 0.1965$  para el espejo primario y  $A = 0.1934$  para el espejo secundario. Por lo tanto, atendiendo a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, se puede aproximar la contribución de estos *Q-polynomials* a las aberraciones de astigmatismo y esférica en el plano imagen del sistema mediante las ecuaciones 4.4 y 4.5.

$$W_{ast}^{FF} = 2a_0 \left[ 60P_{16} \left( \vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h} \right) + 6P_9 - 30P_{16} \right] \left( \Delta \vec{h}^2 \cdot \vec{u}^2 \right) + \left[ 12P_{12/13} \left( \vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h} \right) + P_{5/6} - \frac{16}{3}P_{12/13} \right] \left( \vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2 \right), \quad (4.4)$$

$$W_{sph}^{FF} = 2a_0 \left[ 90P_{16} \left( \vec{\Delta h} \cdot \vec{\Delta h} \right) + 3P_9 - 15P_{16} \right] (\vec{u} \cdot \vec{u})^2. \quad (4.5)$$

Usando la definición del desplazamiento del haz en la superficie para campos fuera de eje  $\vec{\Delta h} \equiv (\bar{y}/y)\vec{H}$ , la expresión final de las aberraciones, es decir, la suma de las aberraciones del sistema inicial más las aberraciones generadas por la contribución *freeform*, es la que se presenta en las ecuaciones 4.6 y 4.7.

$$\begin{aligned}
 W_{ast} = & \frac{1}{2}W_{222}\vec{H}^2 \cdot \vec{u}^2 + 2a_0 \left[ 60P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 (\vec{H} \cdot \vec{H}) + 6P_9 - 30P_{16} \right] \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 (\vec{H}^2 \cdot \vec{u}^2) \\
 & + \left[ 12P_{12/13} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 (\vec{H} \cdot \vec{H}) + P_{5/6} - \frac{16}{3}P_{12/13} \right] (\vec{C}_0^2 \cdot \vec{u}^2), \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

$$W_{sph} = W_{040} (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 + 2a_0 \left[ 90P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 (\vec{H} \cdot \vec{H}) + 3P_9 - 15P_{16} \right] (\vec{u} \cdot \vec{u})^2. \quad (4.7)$$

En la ecuación 4.6 se ha obtenido una expresión de astigmatismo con un primer término que depende del vector  $\vec{H}^2$  (los dos primeros sumandos de la ecuación) y un segundo término que no depende del vector de campo, sólo depende del módulo. Por ello, esta ecuación se hace cero para dos posiciones de campo en el plano imagen, es decir, se obtiene una distribución de astigmatismo binodal. En cambio, la ecuación 4.7 depende únicamente del módulo de vector de campo, por lo tanto, la expresión se anula para todos los campos que comparten módulo, es decir, se genera un nodo aberración esférica en forma de anillo.

A continuación, se va a obtener la expresión para los coeficientes  $a_0$  y  $\vec{C}_0^2$  que hacen cero las ecuaciones (4.6) y (4.7) para los campos de interés. Si llamamos a esos campos  $\vec{H}_1$  y  $\vec{H}_2$  y escribimos todos los vectores en su forma exponencial:  $\vec{H}_1 = H_1 e^{i\phi_1}$ ,  $\vec{H}_2 = -\vec{H}_1 = H_1 e^{i(\phi_1 + \pi)}$ , donde  $H_1 = 6.500048$  mm y  $\phi_1 = 90.22037^\circ$ , y  $\vec{C}_0^2 = C_0^2 e^{i2\xi_0^2}$ , hay que resolver las ecuaciones 4.8 y 4.9.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{1}{2}W_{222}H_1^2 e^{i2(\phi_1 + \alpha)} + 2a_0 \left[ 60P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 + 6P_9 - 30P_{16} \right] \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 e^{i2(\phi_1 + \alpha)} \right. \\
 \left. + \left[ 12P_{12/13} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 + P_{5/6} - \frac{16}{3}P_{12/13} \right] C_0^2 e^{i2\xi_0^2} \right\} \cdot \vec{u}^2 = 0, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

$$\left\{ W_{040} + 2a_0 \left[ 90P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 + 3P_9 - 15P_{16} \right] \right\} (\vec{u} \cdot \vec{u})^2 = 0. \quad (4.9)$$

En realidad, la ecuación (4.8) representa dos ecuaciones, una primera con  $\alpha = 0$  que se resuelve para  $\vec{H}_1$  y una segunda ecuación con  $\alpha = \pi$  que se resuelve para  $\vec{H}_2$ .

Empezando con la ecuación (4.9), la expresión para el coeficiente  $a_0$  resulta

$$a_0 = -\frac{1}{2} \frac{W_{040}}{\left[ 3P_9 - 15P_{16} + 90P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 \right]}. \quad (4.10)$$

Este resultado proporciona el valor de  $a_0$  que genera en el plano imagen del telescopio un nodo de aberración esférica con forma de anillo de radio  $H_1$ .

En el caso de la ecuación (4.8), igualando módulos y exponentes, el resultado es

$$\xi_0^2 = \phi_1 + \alpha, \quad \alpha = 0, \pi, \quad (4.11)$$

$$C_0^2 = -\frac{\left[ \frac{1}{2}W_{222} + 2a_0 \left[ 60P_{16} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 + 6P_9 - 30P_{16} \right] \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 \right]}{12P_{12/13} \left( \frac{\bar{y}}{y} \right)^2 H_1^2 + P_{5/6} + \frac{16}{3}P_{12/13}} H_1^2. \quad (4.12)$$

Este resultado muestra la forma que toma  $\vec{C}_0^2$  para generar dos nodos de astigmatismo en dos posiciones en el plano imagen que son simétricas respecto al eje. En concreto, en las posiciones de los campos de trabajo del telescopio. Cabe destacar que, aunque parezca que se han obtenido dos valores diferentes para  $\xi_0^2$ , realmente esto no es así. El polinomio  $Q_0^2(u^2)$  presenta una simetría que lo hace invariante a una rotación de  $\pi$  radianes como la que se muestra en la ecuación 4.11.

De esta forma, se habrían empleado los resultados del capítulo anterior para proponer los polinomios que corrigen las aberraciones de astigmatismo y aberración esférica en el plano focal del telescopio y comprobar que esos polinomios generan la dependencia con el campo adecuada para corregir dichas aberraciones en el plano focal. Igualmente, se habrían obtenido los coeficientes que se deben introducir como variables en el diseño en Code V en una primera optimización (posteriormente, el diseño podría requerir una optimización de órdenes más altos para que la calidad óptica alcance el límite por difracción). Sin embargo, se puede ir un poco más allá y emplear los resultados del capítulo anterior para incluso calcular valores iniciales para dichos coeficientes que faciliten el proceso de optimización.

Para esto último, comenzaremos considerando, por razones de coste y simplificación del proceso de verificación y alineamiento, que solo uno de los dos espejos tenga una contribución *freeform*, en concreto, el espejo secundario será *freeform* mientras que el espejo primario se mantendrá cónico. Se hace esta elección principalmente pensando en facilitar el posterior alineamiento del sistema. Al mantener el espejo primario la simetría de revolución, será más sencillo alinear su eje con una cavidad interferométrica y, una vez hecho esto, mantener fija su posición y realizar el alineamiento moviendo únicamente el espejo secundario. El espejo  $M_2$  tiene 9.1815 mm de apertura que, con el radio de curvatura que se presenta en la tabla 4.3 (20.8803 mm), implica que  $A = 0.1934$ . Con este valor de  $A$  y la constante cónica que también aparece en la tabla 4.3 ( $-2.1117$ ), los valores de las pendientes entre coeficientes para esta superficie se pueden calcular como se mostró en el capítulo anterior, y son  $P_{5/6} = 0.7495$ ,  $P_{12/13} = 0.0126$ ,  $P_9 = -0.1715$  y  $P_{16} = -0.0039$ . Los valores de  $W_{222} = -0.0187\lambda$  y  $W_{040} = 5.0077\lambda$  ( $\lambda = 560$  nm) se obtienen del análisis del diseño inicial en Code V. Por lo tanto, los valores de  $a_0$  y  $\vec{C}_0^2$  se pueden calcular analíticamente y se obtiene  $a_0 = 1.5819 \mu\text{m}$ ,  $C_0^2 = 4.636139 \mu\text{m}$  y  $\xi_0^2 = 90.2204^\circ$ . Nótese que  $C_0^2$  y  $\xi_0^2$  son el módulo y la fase respectivamente del vector  $\vec{C}_0^2$  con componentes cartesianas  $(a_0^2, b_0^2)$ . Los valores obtenidos para estas dos componentes, que son los que se introducen en el diseño en Code V, son  $a_0^2 = 4.636105 \mu\text{m}$  y  $b_0^2 = -0.017831 \mu\text{m}$ . Con estos valores, los FFDs se pueden obtener analíticamente para el astigmatismo y la aberración esférica y se muestran en las figuras 4.12(a,b). En estas figuras se ve claramente la aparición de nodos de aberraciones alejados del eje óptico en comparación con los FFDs obtenidos en Code V para el diseño inicial no *freeform* (Fig. 4.11(a,c)).

Una vez obtenidos estos valores iniciales para los coeficientes se puede mejorar la optimización del sistema en Code V empleando una función de mérito que contenga todas las aberraciones. En este caso, los valores de los coeficientes resultantes son  $a_0 = 1.5473 \mu\text{m}$ ,  $a_0^2 = 4.4898 \mu\text{m}$  y  $b_0^2 = -0.0346 \mu\text{m}$  y los FFDs obtenidos en Code V se muestran en las figuras 4.12(c,d) para el astigmatismo y la aberración esférica. Las diferencias en los valores de  $a_0$ ,  $a_0^2$  y  $b_0^2$  y en los FFDs de Code V respecto a los obtenidos analíticamente, se asocian a la función de mérito que se emplea en Code V. La solución analítica es una aproximación que únicamente minimiza las aberraciones de astigmatismo y esférica que son las aberraciones dominantes mientras que Code

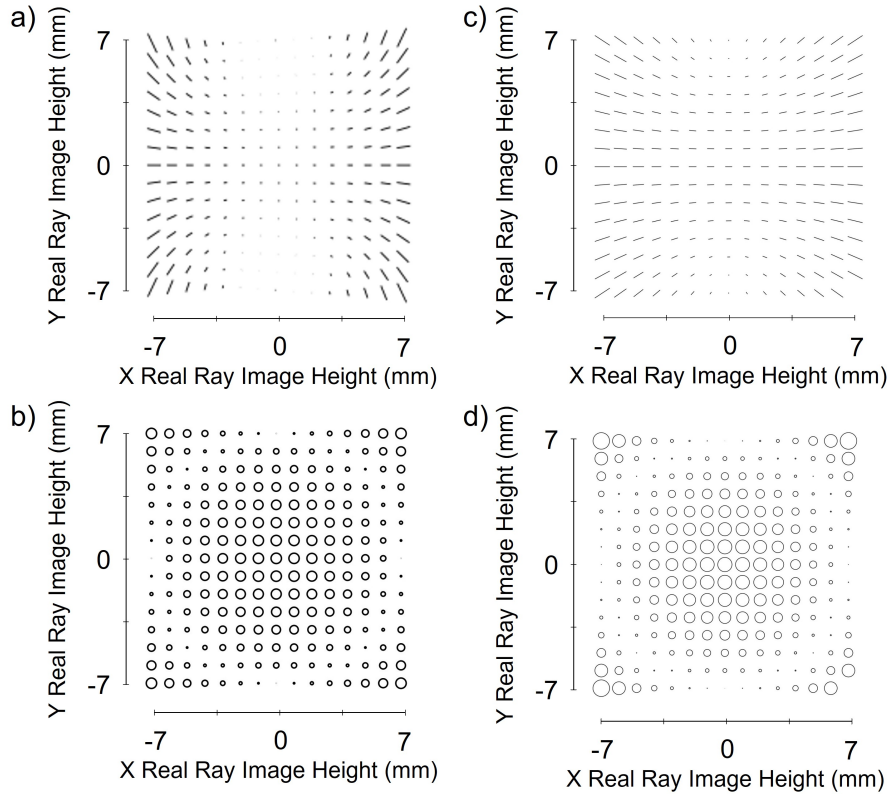


Figura 4.12: FFDs de astigmatismo ( $Z_5$  y  $Z_6$ ) y esférica ( $Z_9$ ) obtenidos analíticamente (a,b) y obtenidos mediante la optimización del diseño en Code V (c,d).

V minimiza más aberraciones como por ejemplo el coma. Para evaluar la calidad óptica del sistema resultante, se muestra el diagrama de impacto en la figura 4.13(a).

En el diagrama de impacto se puede ver claramente que la calidad óptica ha mejorado respecto al sistema inicial, está dentro de la región de  $50 \mu\text{m}$  y muy próxima al límite por difracción (*strehl ratio* de 0.7280). Esta calidad óptica ya estaría dentro de los requisitos establecidos por la aplicación concreta a la que se va a destinar el telescopio. Sin embargo, se va a mostrar la capacidad de la óptica *freeform* para seguir mejorando la calidad hasta alcanzar el límite por difracción. Por ello, se va a continuar con la optimización introduciendo otros términos en la contribución *freeform*. El primer paso en este proceso de mejora de la optimización será introducir una contribución *freeform* también en el espejo primario  $M_1$  descrita mediante los mismos polinomios que  $M_2$ . Esto se hace para permitir que la contribución de un espejo pueda balancear las aberraciones que genera el otro, repartir la contribución

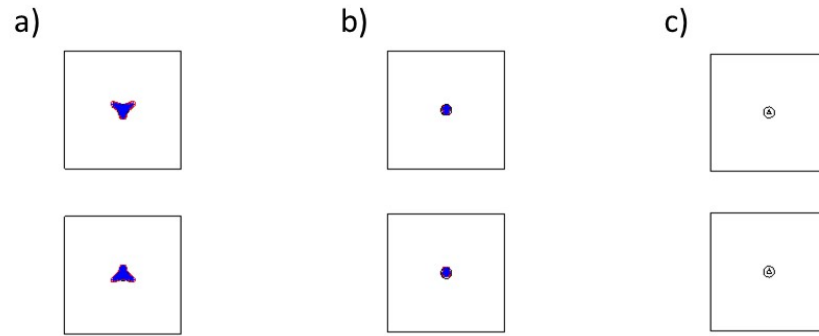


Figura 4.13: Diagrama de impactos del telescopio (a) con  $M_2$  *freeform* (b) con  $M_1$  y  $M_2$  *freeform* y (c) añadiendo el polinomio  $Q_1^2(u^2)$  en la contribución *freeform* de ambos espejos. El cuadrado negro indica la rendija de entrada de los micro espectralómetros.

entre los dos espejos y conseguir que la magnitud de dicha contribución sea más baja en cada espejo. Además, para tratar de alcanzar la mejor calidad posible, también se han dejado como variables los radios de curvatura y las constantes cónicas de ambos espejos. Los parámetros que describen los dos espejos resultantes de este proceso de optimización se presentan en la tabla 4.4. En esta optimización, se ha introducido una limitación en los coeficientes, especialmente en el valor  $a_0^2$  del espejo  $M_1$ , para establecer un balance entre alcanzar una alta calidad óptica y que la pendiente local de la deformación *freeform* fuera lo menor posible para facilitar la posterior fabricación y verificación del espejo.

	Radio (mm)	Constante cónica	$a_0$ ( $\mu\text{m}$ )	$a_0^2$ ( $\mu\text{m}$ )	$b_0^2$ ( $\mu\text{m}$ )
$M_1$	-93.3729	-1.0166	-0.171	-2.949	-0.022
$M_2$	-20.8307	-2.1105	-1.048	0.447	0.004

Tabla 4.4: Parámetros de ambos espejos *freeform*.

En la figura 4.13(b) se puede ver, en el diagrama de impactos, que la calidad óptica ha mejorado. Además, para tener otra medida de la calidad del sistema, el *Strehl ratio* toma un valor de 0.898 que ya ha alcanzado el límite por difracción ( $> 0.8$ ), por lo que la calidad óptica ya es la deseada. Sin embargo, si se quisiera seguir optimizando, se debería introducir un nuevo polinomio en la contribución *freeform* para corregir las aberraciones de órdenes superiores. Asumiendo este supuesto, se va

a introducir el siguiente orden azimutal del polinomio  $Q_0^2(u^2)$ , es decir, el polinomio  $Q_1^2(u^2)$ , para corregir la aberración del siguiente orden de astigmatismo. Se introduce este polinomio directamente en ambos espejos ya que, a medida que aumenta el orden de los polinomios el balance de aberraciones mencionado anteriormente se vuelve más crítico porque, al aumentar el orden aumenta el número de las diferentes aberraciones que se generan en el plano focal con una relación específica entre ellas. En la tabla 4.5 se recogen los parámetros resultantes de este nuevo proceso de optimización en el que se incluyen como variables todos los coeficientes *freeform*, el radio de curvatura y la constante cónica de ambos espejos. De nuevo, se ha introducido una restricción en los coeficientes para limitar la desviación de la pendiente local a lo largo de toda la superficie.

	Radio (mm)	Cte. cónica	$a_0$ ( $\mu\text{m}$ )	$a_0^2$ ( $\mu\text{m}$ )	$b_0^2$ ( $\mu\text{m}$ )	$a_1^2$ ( $\mu\text{m}$ )	$b_1^2$ ( $\mu\text{m}$ )
$M_1$	-93.4172	-1.0143	-1.161	-2.936	-0.023	0.096	0.001
$M_2$	-20.8858	-2.1065	-1.585	0.487	0.004	0.088	0.001

Tabla 4.5: Parámetros de ambos espejos *freeform* incluyendo el polinomio  $Q_1^2(u^2)$ .

La calidad óptica se puede ver en la figura 4.13(c) mediante el diagrama de impactos y el *Strehl ratio* toma un valor de 0.999. Se observa una mejora muy significativa de la calidad óptica. En la figura 4.14 se puede ver una representación de la contribución *freeform* resultante para cada uno de los espejos. En esta figura se puede ver claramente la forma astigmática que presentan los dos espejos sumada a una contribución esférica. Cabe destacar que la magnitud de esta contribución *freeform*, de unas pocas micras en el caso de  $M_1$  e inferior a la micra en  $M_2$ , a la sagita de las superficies está varios órdenes de magnitud por debajo de la contribución de la superficie base.

De este modo, se ha llevado a cabo un diseño *freeform* que alcanza el límite por difracción aunando los conocimientos que proporciona NAT y las herramientas de optimización numéricas que proporciona una herramienta de diseño óptico como Code V. Se ha usado NAT para seleccionar los polinomios que debían describir la contribución *freeform* para corregir el sistema de aberraciones e incluso se han calculado valores iniciales para los coeficientes de los órdenes más bajos de dichos polinomios. Una vez hecho esto se pasa a realizar la optimización en Code V y

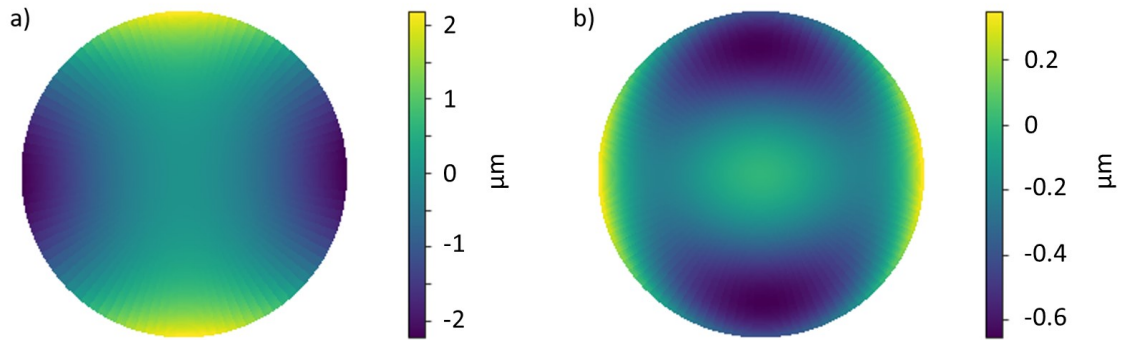


Figura 4.14: Contribución *freeform* resultante del (a) espejo primario  $M_1$  y del (b) espejo secundario  $M_2$ .

solo se introducen como variables en dicho proceso de optimización los coeficientes que ya se sabe con antelación que van a tener una contribución en la corrección de aberraciones. Únicamente con los polinomios predichos por NAT introducidos como contribución *freeform* en el espejo secundario se ha obtenido la calidad óptica deseada. Sin embargo, se ha mostrado cómo se puede seguir optimizando el diseño para continuar con la corrección de aberraciones.

## 4.5. Diseño descrito mediante los polinomios de Zernike

Hasta aquí hemos visto cómo realizar el diseño empleando los *Q-polynomials*. Sin embargo, es muy interesante conocer esta deformación *freeform* de la superficie óptica expresada igualmente en polinomios de Zernike. Por dos razones. En primer lugar, porque es la base más extendida que está disponible en todas las herramientas de simulación óptica (los *Q-polynomials*, por ejemplo, solamente han estado disponibles en CodeV recientemente), y segundo porque es el estándar más habitual para intercambiar información con los fabricantes ópticos. Para expresar la componente *freeform* en términos de polinomios de Zernike necesitamos realizar un cambio de base. Como vimos anteriormente, la transformación entre bases no es exacta, es necesario realizar un ajuste. El proceso ideal sería realizar la optimización empleando los *Q-polynomials* de modo que se conserve el control sobre la desviación de las

pendientes locales a lo largo de la superficie y se evite la degeneración que tienen los polinomios de Zernike de foco y pistón con la curvatura de la superficie y el espesor entre dicha superficie y la siguiente. Una vez realizada esta optimización, ya se puede llevar a cabo un cambio de base a polinomios de Zernike y, a partir de entonces, trabajar en esta base. Este sería el procedimiento óptimo para trabajar, pues se estaría empleando cada base para aquella tarea para la que está optimizada. En el futuro, si se llega a un uso más extendido y generalizado de la base de *Q-polynomials*, lo ideal será trabajar únicamente con esta base y aprovechar todas las ventajas que ofrece.

En este caso, para llevar a cabo el cambio de base debemos hacerlo en ambos espejos y del modo que se explicó en el capítulo 3. A partir del valor que tome el parámetro  $A$  podremos conocer el número de polinomios de Zernike que serán necesarios en el ajuste. Para el espejo primario  $M_1$ ,  $A = 0.1965$  y para el espejo secundario  $M_2$ ,  $A = 0.1934$ . En el capítulo anterior se mostró que los polinomios empleados en este diseño, teniendo en cuenta el valor de  $A$  para ambos espejos, pueden alcanzar una buena aproximación a la base de polinomios de Zernike como se muestra en las ecuaciones 4.13 y 4.14 para los dos *Q-polynomials* considerados.

$$\frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} a_0 u^2 (1 - u^2) \simeq C_1 Z_1(u) + C_4 Z_4(u) + C_9 Z_9(u) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - KA u^2}}{\sqrt{1 - (1 + K)A u^2}} Q_n^2(u^2) \begin{pmatrix} a_n^2 & b_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \cos 2\theta \\ u^2 \sin 2\theta \end{pmatrix} \\ & \simeq \begin{pmatrix} C_5 & C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_5(u, \theta) \\ Z_6(u, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12}(u, \theta) \\ Z_{13}(u, \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la superficie de cada uno de los espejos se aproximará a la base de polinomios de Zernike como se muestra en la ecuación 4.15. En caso de que la aproximación no sea lo suficientemente buena como para reproducir el diseño con una calidad óptica por encima del límite de difracción, se introducirán órdenes mayores en el ajuste hasta alcanzar dicho límite.

$$\begin{aligned}
 Z \simeq C_1 Z_1(u) + C_4 Z_4(u) + \begin{pmatrix} C_5 & C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_5(u, \theta) \\ Z_6(u, \theta) \end{pmatrix} + C_9 Z_9(u) \\
 + \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12}(u, \theta) \\ Z_{13}(u, \theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Una vez realizado el cambio de base de la contribución *freeform* de ambos espejos, se obtienen los coeficientes de Zernike que se presentan en la tabla 4.6. El RMS del residuo de estos ajustes es  $0.216 \mu\text{m}$  para el espejo  $M_1$  y  $0.245 \mu\text{m}$  para el espejo  $M_2$ .

	$C_1 (\mu\text{m})$	$C_4 (\mu\text{m})$	$C_5 (\mu\text{m})$	$C_6 (\mu\text{m})$	$C_9 (\mu\text{m})$	$C_{12} (\mu\text{m})$	$C_{13} (\mu\text{m})$
$M_1$	-0.203	-0.005	-2.173	-0.017	0.200	-0.080	-0.001
$M_2$	-0.275	-0.005	0.410	0.003	0.273	-0.023	0.000

Tabla 4.6: Coeficientes de Zernike resultantes del cambio de base.

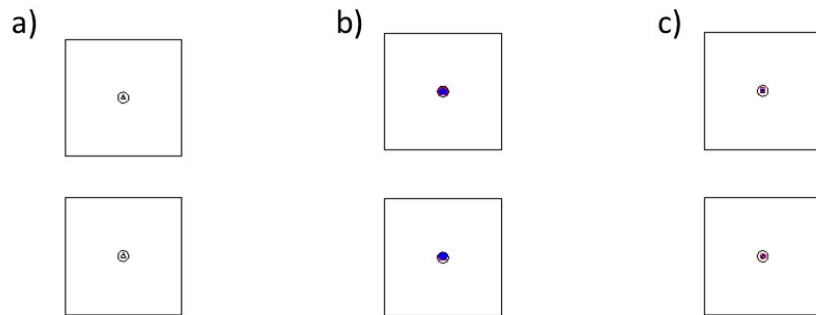


Figura 4.15: Diagrama de impacto del telescopio con la contribución *freeform* descrita mediante (a) los *Q-polynomials* (b) los polinomios de Zernike en primera aproximación en el cambio de base (c) los polinomios de Zernike llegando a un orden mayor en el cambio de base.

A continuación se introducen estos coeficientes en el diseño y se analiza la calidad óptica del mismo. En la figura 4.15(b) se pueden ver los diagramas de impacto resultantes y comparados con aquellos obtenidos mediante los *Q-polynomials* (figura 4.15(a)). Con los coeficientes de Zernike se alcanza un *Strehl ratio* de 0.958, es un valor alto pero inferior al obtenido con los *Q-polynomials* (0.999). Se puede apreciar

que se ha conseguido una buena reproducción del diseño pero el residuo es apreciable ya que el tamaño del diagrama de impactos y el *Strehl ratio* han aumentado.

Por lo tanto, para reducir el residuo resultante del cambio de base se van a introducir órdenes mayores de los polinomios de Zernike. En concreto, se va a incluir el siguiente orden de aberración esférica ( $Z_{16}$ ) y el siguiente orden de astigmatismo ( $Z_{21}$  y  $Z_{22}$ ). Los coeficientes resultantes tras introducirlos en el diseño se muestran en la tabla 4.7 y el diagrama de impactos se presenta en la figura 4.15(c). En este caso, el *Strehl ratio* toma un valor de 0.998.

	$C_1$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_4$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_5$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_6$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_9$ ( $\mu\text{m}$ )
$M_1$	-0.203	-0.006	-2,174	-0.017	0.203
$M_2$	-0.275	-0.006	0.410	0.003	0.276

	$C_{12}$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_{13}$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_{16}$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_{21}$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_{22}$ ( $\mu\text{m}$ )
$M_1$	-0.080	-0.001	0.005	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$M_2$	-0.023	$-1 \cdot 10^{-4}$	0.0061	-0.001	$1.23 \cdot 10^{-5}$

Tabla 4.7: Coeficientes de Zernike resultantes del cambio de base.

Se puede apreciar, tanto por el diagrama de impactos como por el *Strehl ratio* que se ha conseguido un cambio de base muy preciso.

Una vez que se ha optimizado el diseño en la base de *Q-polynomials*, la más adecuada para el fin que se persigue, y realizado el cambio a la base de polinomios de Zernike, se trabajará a partir de este momento con la componente *freeform* expresada en esta base siendo los coeficientes para ambos espejos los que se muestran en la tabla 4.7.

Los parámetros finales del telescopio se muestran a su vez en la tabla 4.8.

Nombre	Tipo	Radio (mm)	Constante cónica	Espesor (mm)
Stop	Esfera	Infinito	-	68.0
$M_1$	Fringe Zernike	-93.4172	-1.0143	-38.0
$M_2$	Fringe Zernike	-20.8858	-2.1065	50.0
Imagen	Esfera	Infinito	-	-

Tabla 4.8: Parámetros del diseño *freeform* final descrito mediante polinomios de Zernike.

## 4.6. CINCLUS, un espectrómetro para una misión de Observación de la Tierra

Como se ha mencionado anteriormente, se ha realizado el diseño de un telescopio mostrando la capacidad en la corrección de aberraciones de la óptica *freeform*. Sin embargo, para establecer el diseño final sobre el que se va a realizar el análisis de tolerancias y posteriormente la fabricación, no es necesario alcanzar un *Strehl ratio* de 0.999. El umbral de calidad óptica es alcanzar el límite por difracción, es decir, un valor para el *Strehl ratio* igual o superior a 0.8. Además de cumplir con el requisito de calidad óptica, es importante tener en cuenta otros parámetros como pueden ser el coste de fabricación de los espejos, la complejidad en su verificación o las dificultades que puedan aparecer durante el alineamiento del telescopio. Por ello, se ha decidido mantener toda la componente *freeform* solamente en uno de los espejos para reducir los costes de fabricación, ya que los espejos *freeform* son más caros de fabricar que los espejos cónicos. Además, al tener un único espejo *freeform*, el proceso de verificación es más sencillo ya que verificar superficies cónicas es igualmente más sencillo que verificar superficies *freeform*. En particular, se ha decidido mantener el espejo primario cónico e introducir la componente *freeform* en el espejo secundario. Esta circunstancia también facilitará el alineamiento de los dos espejos. Un espejo primario cónico, es decir, que mantiene la simetría de revolución, permitirá realizar su verificación y alineamiento con una cavidad interferométrica más sencilla que si fuera un espejo *freeform*. Por lo tanto, se puede alinear el espejo primario con la cavidad y mantener su posición invariable mientras se realiza el montaje y alineamiento del espejo secundario en la estructura mecánica del telescopio. Por último,

se intentará, dentro de lo posible, limitar el número de polinomios que describen la componente *freeform* para facilitar tanto la fabricación como la verificación.

#### 4.6.1. Diseño final

El diseño final del telescopio para el instrumento CINCLUS resultante de todas las consideraciones previamente mencionadas se muestra en la figura 4.16.

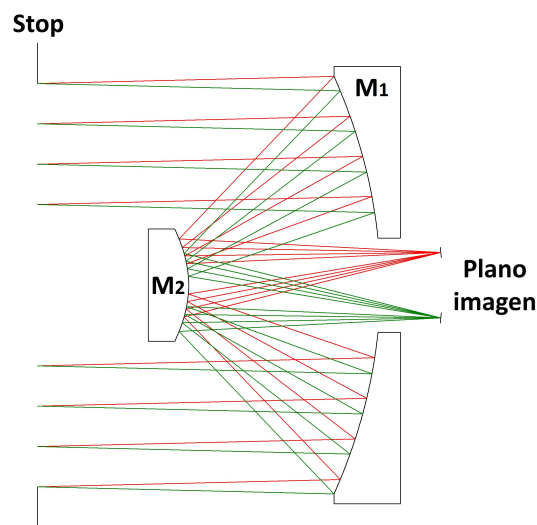


Figura 4.16: Diseño final del telescopio para el instrumento CINCLUS.

Esta solución de diseño, como la mostrada inicialmente, presenta un espejo primario hiperbólico y un espejo secundario con una superficie base hiperbólica, una componente esférica y una componente *freeform* descrita mediante el *Q-polynomial* de orden  $m = 2$ , que posteriormente se cambia a la base de polinomios de Zernike. Una vez realizado el cambio de base, el espejo secundario resultante tiene la superficie base hiperbólica, una componente esférica descrita mediante el polinomio de Zernike  $Z_9$  y una componente *freeform* descrita mediante el polinomio de Zernike  $Z_5$ . En la tabla 4.9 se muestran estos parámetros que describen la superficie de los espejos. Sobre este diseño se realizará el análisis de tolerancias.

La calidad óptica de este diseño se muestra mediante el diagrama de impactos de la figura 4.17(a). Además, se ha alcanzado un *Strehl ratio* de 0.852. En las figuras 4.17(b-e) se muestran las topografías de las superficies de los espejos. En la figura

Nombre	Radio (mm)	Constante cónica	$C_9$ ( $\mu\text{m}$ )	$C_5$ ( $\mu\text{m}$ )
$M_1$	-93.4123	-1.0172	-	-
$M_2$	-20.8955	-2.1118	0.2445	3.3422

Tabla 4.9: Parámetros que definen las superficies de los espejos del diseño de CIN-CLUS.

4.17(b) se muestra la superficie del espejo primario, en la figura 4.17(c) se muestra la superficie del espejo secundario, en la figura 4.17(d) se muestra solo la componente esférica del espejo secundario y en la figura 4.17(e) se muestra solo la componente *freeform* del espejo secundario.

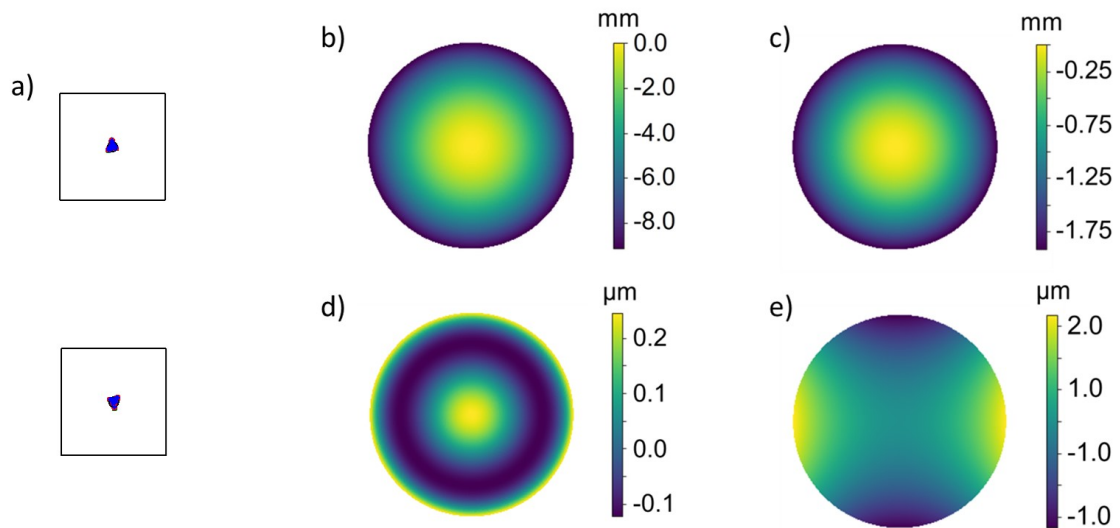


Figura 4.17: (a) Diagrama de impactos del diseño final. (b) Superficie del espejo primario. (d) Superficie del espejo secundario. (c) Componente esférica del espejo secundario. (e) Componente *freeform* del espejo secundario.

#### 4.6.2. Análisis de tolerancias

Una vez finalizado el diseño definitivo es necesario llevar a cabo el análisis de tolerancias. El análisis de tolerancias proporciona información sobre la sensibilidad del sistema óptico a errores de fabricación o de montaje. Permite establecer los valores máximos que pueden tomar estos errores para que el sistema mantenga la calidad

deseada. Para ello, el diseñador óptico debe seleccionar la función de mérito más adecuada y los compensadores que se van a emplear para recuperar, si fuera necesario, la calidad óptica. La figura de mérito debe ser aquella que, al ser minimizada, asegure que el sistema cumple con los requisitos impuestos. Los compensadores son los parámetros que podrán ajustarse durante el proceso de alineamiento.

La herramienta de diseño Code V ofrece distintos métodos para realizar el análisis de tolerancias. La opción principal es la denominada opción TOR, que es un análisis de tolerancias rápido basado en el trazado de rayos. Proporciona una forma muy eficiente de calcular cambios en la MTF (*Modulation Transfer Function*) o en el RMS (*Root Mean Square*) del error del frente de ondas. Una segunda opción, más elaborada, consiste en realizar el análisis de tolerancias mediante un análisis de Monte Carlo. El análisis de Monte Carlo predice el comportamiento del sistema variando aleatoriamente los distintos parámetros dentro del rango de tolerancias establecido por el diseñador. El proceso se repite muchas veces para obtener resultados significativos estadísticamente. Este proceso de Monte Carlo no ofrece datos de sensibilidad a tolerancias individuales y en ocasiones se vuelve un proceso lento. Durante el análisis de Monte Carlo las tolerancias se definen del mismo modo que con la opción TOR mientras que los compensadores se definen como variables.

Code V proporciona un conjunto completo de tolerancias por defecto. En este caso, se definen las siguientes:

- DLF (*delta fringes/test plate fit*): Es la potencia de la superficie ajustada al *test plate*. Esta tolerancia se mide normal a la superficie.
- IRR (*irregularity*): La tolerancia de irregularidad se introduce como una componente cilíndrica añadida a la superficie, es decir, el radio de curvatura en una dirección es diferente al radio en la dirección perpendicular. CYN introduce una componente cilíndrica en la dirección normal, es decir, en la dirección Y local. CYD introduce una componente cilíndrica en la dirección diagonal, es decir, afecta tanto al eje X como al eje Y. Esta tolerancias se mide normal a la superficie.
- DLT (*delta thickness*): Tolerancia en el espesor, es decir, en el espaciado a la siguiente superficie, ya sea en aire o en un medio. Con esta tolerancia, todas las superficies siguientes se desplazan según esta magnitud en el eje z local de

la superficie. Para mover la superficie axialmente, sin ningún efecto en el resto de superficies, hay que usar DLZ (desplazamiento axial).

- DEC (*decenter tolerance*): Las tolerancias DLX y DLY desplazan la superficie a lo largo de cada uno de los dos ejes cartesianos.
- TIL (*tilt tolerance*): Las tolerancias DLA y DLB son rotaciones en torno a los ejes X (equivalente a ADE) e Y (equivalente a BDE).
- DAK (*delta conic constant*): Tolerancia en la constante cónica de la superficie.
- ZFR (*Fringe Zernike Coefficient Surface Deformation*): Tolerancia en la sagita de superficies *freeform* descrita mediante polinomios de zernike en su ordenamiento Fringe.

En este caso, se va a realizar un análisis de Monte Carlo pues permite mayor flexibilidad a la hora de elegir la función de mérito. Como en el plano focal del telescopio se va a colocar un espectrómetro, la función de mérito que se va a emplear es la energía colectada (*Encircled o Ensquared Energy*) por la rendija de entrada de cada uno de los micro espectrómetros situados en el plano imagen. El inconveniente principal del método de Monte Carlo es que no admite todas tolerancias que se requiere introducir en este diseño. Por ejemplo, en el caso de Code V no soporta introducir tolerancias del tipo ZFR. Es por ello que se va a realizar un primer análisis usando la herramienta TOR definiendo como función de mérito la MTF a la frecuencia de Nyquist e incluyendo todas las tolerancias y compensadores. Posteriormente, se realizará un análisis de Monte Carlo que excluirá las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen la componente *freeform* de  $M_2$  y que usará como función de mérito la energía colectada por las rendijas.

En resumen, se han establecido las tolerancias que se muestran en la tabla 4.10 y se han seleccionado como compensadores el desplazamiento axial del plano focal (DLZ del plano focal), el desplazamiento axial de  $M_2$  (DLZ de  $M_2$ ) y el tilt de  $M_2$  (DLA y DLB de  $M_2$ ).

Con estas tolerancias, se ha realizado el análisis mediante la opción TOR evaluando la MTF del sistema a la frecuencia de Nyquist (10 cy/mm). En la tabla 4.11 se muestra un resumen de prestaciones que incluye el valor nominal de la MTF y el nuevo valor de MTF al incluir el efecto de las tolerancias ( $2\sigma$ ). Los campos de

Tolerancia	Superficie	Valor
DLF	$M_1$	2.0 franjas
	$M_2$	2.0 franjas
CYN	$M_1$	0.5 franjas
	$M_2$	0.5 franjas
CYD	$M_1$	0.5 franjas
	$M_2$	0.5 franjas
DLT	Stop	0.5 mm
	$M_1$	25 $\mu\text{m}$
DLX	$M_2$	15 $\mu\text{m}$
DLY	$M_2$	15 $\mu\text{m}$
DAK	$M_1$	0.0011
	$M_2$	0.0095
ZRF 5	$M_2$	$0.0587\lambda$ ( $\lambda = 546.1\text{nm}$ )
ZRF 9	$M_2$	$0.17\lambda$ ( $\lambda = 546.1\text{nm}$ )

Tabla 4.10: Resumen de tolerancias.

trabajo toman posiciones simétricas respecto al eje obteniendo los mismos valores para ambos. En la tabla 4.12 se muestra el rango obtenido para cada uno de los compensadores.

MTF nominal	MTF nominal + TOL
0.9686	0.9562

Tabla 4.11: Resumen de prestaciones.

Ahora sí, una vez evaluado el efecto de las tolerancias en la MTF, se realiza un análisis de Monte Carlo para evaluar el efecto sobre la energía encirclada. El objetivo es lograr que un alto porcentaje de esta energía se mantenga dentro de la

Compensador	Superficie	Rango (+/-)
DLZ	Plano imagen	0.6 mm
DLZ	$M_2$	0.034 mm
DLA	$M_2$	0.002 rad
DLB	$M_2$	0.002 rad

Tabla 4.12: Rango de compensadores.

región de  $50 \mu\text{m}$  que representa la rendija de entrada de los micro espectrómetros. En concreto, se va a evaluar el valor del diámetro que contiene el 95 % de la energía. Las tolerancias empleadas en este caso son las mismas que se muestran en la tabla 4.10 y los compensadores se definen como variables. El valor nominal y el cambio sobre el valor nominal obtenido mediante el análisis de Monte Carlo se muestra en la tabla 4.13. De nuevo, se obtienen los mismos valores para ambos campos.

95 % diámetro energía encirclada	cambio en 95 % diámetro (99 %)
0.02 mm	0.004 mm

Tabla 4.13: Resumen de prestaciones.

De este modo, se puede ver que la energía encirclada tiene un valor nominal de  $20 \mu\text{m}$  y, en el análisis de Monte Carlo, se ha obtenido un cambio sobre ese valor nominal de  $4 \mu\text{m}$ . De este modo, el diámetro podrá alcanzar un valor de  $24 \mu\text{m}$  que se mantiene por debajo de las  $50 \mu\text{m}$  de la rendija de entrada del micro espectrómetro.

Una vez finalizado el diseño óptico del telescopio con su análisis de tolerancias, se debe llevar a cabo el diseño opto-mecánico. A continuación, se realizan análisis térmico y de radiación difusa para asegurar el funcionamiento del sistema en las condiciones de trabajo. Un vez que todos estos análisis se han completado, se deben generar los planos de cada elemento óptico para enviar al fabricante. Un vez que todos los elementos están fabricados, se hace la recepción de los mismos y se puede comenzar con la etapa de integración. En el Anexo A, se pueden ver los planos de

cada uno de los espejos que componen el telescopio. Adicionalmente, en el Anexo B, se muestran los informes que proporciona el fabricante junto con los espejos para justificar que han quedado dentro del rango de tolerancias.

## 4.7. Conclusiones

En este capítulo se ha realizado el diseño de un telescopio *freeform* siguiendo la metodología establecida para el diseño de óptica *freeform* e incorporando los resultados del capítulo anterior para emplear la base de polinomios más adecuada para describir la componente *freeform* en cada parte del proceso de diseño y realizar una optimización eficiente y orientada a facilitar la fabricación y verificación de los espejos.

En primer lugar, se ha realizado un análisis de las distintas configuraciones posibles para seleccionar la que más se adapte tanto a los requisitos establecidos por la futura aplicación del sistema óptico como a la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. Una vez seleccionada la configuración más adecuada, se ha establecido el diseño inicial que sirve como punto de partida. A continuación, se ha introducido una componente *freeform* para corregir las aberraciones del diseño inicial en los campos de trabajo del telescopio. En este punto del diseño se ha introducido la componente *freeform* descrita mediante los *Q-polynomials* para limitar la desviación de la pendiente de la componente *freeform* directamente a través de los valores de los coeficientes. La elección de los coeficientes concretos que se han introducido en la optimización se ha realizado empleando los resultados del capítulo anterior en el cual se extendió la teoría nodal de aberraciones a sistemas descritos mediante los *Q-polynomials*. Además, los resultados del capítulo anterior también han permitido calcular analíticamente los valores iniciales para los coeficientes que han demostrado estar muy cercanos a los valores finales obtenidos en Code V. Como consecuencia, el proceso de optimización ha sido muy eficiente, obteniendo de este modo un diseño con una componente *freeform* descrita mediante muy pocos polinomios cuya calidad óptica ha alcanzado el límite por difracción. A pesar de superar este límite, se ha mostrado la capacidad de la óptica *freeform* para corregir aberraciones introduciendo órdenes más altos de polinomios y alcanzando un *Strehl ratio* de 0.999.

Una vez finalizado el diseño se ha realizado el cambio de base de la componente *freeform* de los *Q-polynomials* a los coeficientes de Zernike. Por último, se ha configurado el diseño final a fabricar. Para esta elección, no solo deben tenerse en cuenta los criterios de calidad óptica, sino también el coste de fabricación de los espejos y la complejidad en la verificación y en el alineamiento del sistema.

## Parte II

# Verificación y alineamiento de sistemas ópticos con superficies *freeform*



# Capítulo 5

## Verificación de superficies *freeform*

Este capítulo está dedicado a la verificación de superficies *freeform*. Tras una introducción donde se describen las técnicas más habituales de verificación de superficies o elementos ópticos no esféricos, se mostrará cómo se ha llevado a cabo la verificación de los espejos que componen el telescopio descrito en capítulos anteriores. La verificación de estos espejos tiene una especial complejidad debido a varios factores. En primer lugar ambos espejos tienen una fuerte curvatura y una apertura relativamente pequeña. Adicionalmente, ambos espejos tienen constantes cónicas características de superficies hiperbólicas y el espejo secundario tiene una componente esférica y otra componente *freeform*. Se mostrarán y analizarán los montajes específicos desarrollados para verificar la superficie de ambos espejos. Se realizará un montaje genérico de verificación de superficies *freeform* que permita la medida de un amplio rango de superficies, desarrollando así la capacidad de verificar este tipo de elementos.

## 5.1. Introducción

La fuerte demanda que ha introducido el estándar CubeSat sobre la necesidad de disponer de sistemas ópticos cada vez más compactos, con un volumen y una masa reducidos, ha generado un importante interés por desarrollar las capacidades necesarias para diseñar, fabricar e integrar sistemas ópticos que incluyan superficies no-esféricas como pueden ser las superficies esféricas y *freeform*, así como de verificar sus prestaciones tras la fabricación. Esta búsqueda de sistemas con un volumen cada vez menor lleva a intentar reducir el número de elementos que los componen utilizando superficies cada vez más complejas. En concreto, es muy típico encontrar superficies con una fuerte curvatura respecto a su apertura, especialmente en los espejos que forman los grandes telescopios para aplicaciones espaciales que buscan maximizar la capacidad de coleccionar luz mientras se minimiza su tamaño longitudinal. Adicionalmente, es muy común encontrar superficies esféricas, e incluso *freeform*, empleadas para alcanzar la máxima corrección de aberraciones sin necesidad de incluir elementos ópticos adicionales. Estas superficies, especialmente las superficies *freeform*, como ya se ha expuesto en capítulos anteriores, suponen una herramienta muy potente para el diseñador, pero su inserción en sistemas ópticos está limitada por los desarrollos en fabricación y verificación, dos campos totalmente interconectados, ya que el proceso de fabricación de cualquier superficie óptica requiere realizar verificaciones intermedias que realimentan el pulido. Además, cualquier superficie óptica debe ser verificada antes de su integración en el sistema del que forme parte para asegurar el alineamiento del sistema corregido de aberraciones. Por todo esto, es de suma importancia desarrollar las capacidades adecuadas para la verificación de las superficies que típicamente componen estos sistemas.

En la verificación de superficies ópticas, la técnica más extendida es la interferometría, fundamentalmente por su capacidad de proporcionar medidas sin contacto de toda la superficie y con una precisión en escala nanométrica. Sin embargo, esta técnica está limitada por la pendiente local del error del frente de onda (WFE) que es capaz de resolver. En el caso de una única superficie a verificar, este WFE está directamente relacionado con su topografía superficial. Si una superficie tiene alguna zona en la que la pendiente es demasiado grande, se generará un interferograma con una densidad de franjas demasiado alta en esa zona y el interferómetro

no será capaz de resolver el frente de ondas generado por la superficie completa. Esto implica que, en el caso de las superficies previamente descritas, el primer paso necesario sea introducir elementos adicionales para compensar la contribución de la fuerte curvatura que presentan.

Adicionalmente, la presencia de una contribución esférica o *freeform* en una superficie óptica introduce una dificultad añadida en la medida. En caso de que la pendiente que introducen estas contribuciones sea pequeña y el interferómetro pueda resolver el frente de ondas completo, se puede llevar a cabo lo que se conoce como una medida interferométrica no nula [89]. Esto significa que se mide directamente el frente de ondas aberrado por estas contribuciones en lugar de medir un frente de ondas plano. En este tipo de medida es muy importante modelizar el diseño previo del montaje y obtener el frente de ondas que se genera en la pupila de salida del sistema que sirva como referencia con la que posteriormente comparar el frente de ondas medido. También es importante realizar un análisis de tolerancias que permita discernir si, con el frente de ondas medido, la superficie a verificar está dentro de las tolerancias de fabricación previamente especificadas durante la fase de diseño.

En caso de que alguna de estas contribuciones genere pendientes locales muy pronunciadas, se hace necesario compensar también esta contribución para poder llevar a cabo la medida interferométrica. Históricamente, se ha empleado lo que se denominan CGHs (*Computer-Generated Holograms*), hologramas que llevan grabado el error de frente de ondas que se desea compensar y que proporcionan una alta precisión [90, 91, 92]. Sin embargo, se trata de elementos estáticos, costosos y específicos para la verificación de una única superficie o sistema por lo que no proporcionan ningún tipo de flexibilidad en la medida ni pueden ser usados para otra configuración o superficie distinta. Para obtener esta flexibilidad se introducen elementos de óptica adaptativa como espejos deformables (DMs) [93, 94, 95] y moduladores espaciales (SLMs) [98, 99]. Los espejos deformables tienen una precisión y un rango dinámico limitado por el número y el recorrido de los actuadores. En cambio, los moduladores espaciales tienen mayor precisión y rango dinámico por su capacidad de modular la fase por encima de  $2\pi$  radianes, lo que los hace más apropiados para la compensación de componentes *freeform* [102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109].

En este capítulo se mostrará la verificación de dos espejos no esféricos con una

fuerte curvatura en relación a su pequeña apertura. El primer espejo tiene una superficie hiperbólica mientras que el segundo tiene una superficie base también hiperbólica a la que se añade una contribución esférica y una contribución *freeform*. Se comenzará presentando la instrumentación utilizada para esta actividad. A continuación se mostrarán la metodología y el resultado de la verificación del primer espejo. Después se mostrará un método específico de verificación del espejo *freeform* y los resultados obtenidos. Por último, se presentará una metodología que se ha denominado adaptativa para la verificación de superficies *freeform* y los resultados obtenidos en la verificación del espejo *freeform* con dicho método.

## 5.2. Instrumentación

En esta sección, se presentan los distintos instrumentos que se van a emplear para la verificación de los espejos que componen el telescopio diseñado y para el alineamiento del mismo. Por lo tanto, se trata de la instrumentación que se va a emplear a lo largo de los capítulos 5 y 6 de esta tesis.

### 5.2.1. Interferómetro ZYGO *Phase Shifting* GPI-XP

Para realizar las medidas interferométricas, se emplea un interferómetro de tipo Fizeau, en concreto, el modelo ZYGO®Phase Shifting GPI-XP (figura 5.1(a)) trabajando en modo de doble paso con un software Dynafiz®. La fuente de luz es un láser Helio-Neon de baja potencia, por lo que la longitud de onda de trabajo del instrumento es 632.8 nm. El interferómetro está equipado con una lámina planoparalela con reflectividad baja para su empleo como elemento de transmisión con alta calidad óptica que genera un haz colimado de 4 pulgadas de diámetro (figura 5.1(b)). La parte del haz que se refleja en esta lámina compone el haz de referencia mientras que la parte que se transmite constituye el haz de medida que atraviesa el elemento a verificar. Ambos haces se combinan de nuevo en el interferómetro para generar un patrón de franjas.

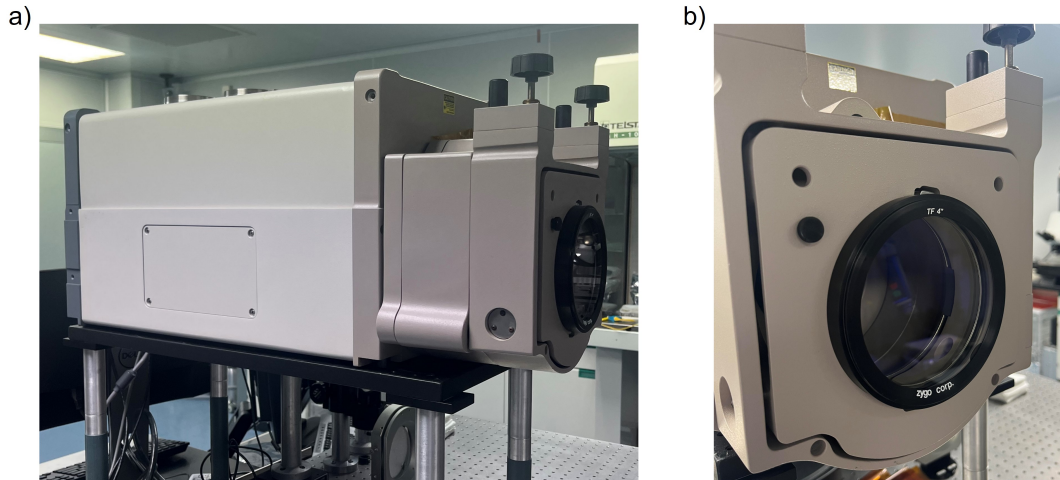


Figura 5.1: (a) Interferómetro ZYGO Phase Shifting GPI-XP. (b) Espejo plano de transmisión.

### 5.2.2. Hexápodo PI M-850

Para realizar el alineamiento de uno de los espejos se coloca sobre una montura que a su vez se fija a la base de un hexápodo, modelo PI M-850 (figura 5.2(a)) que proporciona capacidad de ajuste del elemento a verificar. Se trata de un instrumento de posicionamiento micrométrico con gran capacidad de carga y alta precisión de movimiento y resolución en 6 ejes independientes. En la tabla 5.1 se muestran algunas de sus especificaciones más relevantes. Cuenta con un controlador y un software con el que se controla su posicionamiento de forma sencilla. Además, ofrece la opción de definir el centro de rotación (*Pivot Point*) en cualquier posición del espacio con un simple comando de software.

Eje	Rango de movimiento	Incremento mínimo	Repetibilidad
X, Y	$\pm 50$ mm	$0,3 \mu\text{m}$	$0,5 \mu\text{m}$
Z	$\pm 25$ mm	$0,2 \mu\text{m}$	$0,2 \mu\text{m}$
$\theta X, \theta Y$	$\pm 15^\circ$	$3 \mu\text{rad}$	$3 \mu\text{rad}$
$\theta Z$	$\pm 30^\circ$	$5 \mu\text{rad}$	$9 \mu\text{rad}$

Tabla 5.1: Especificaciones del hexápodo PI M-850

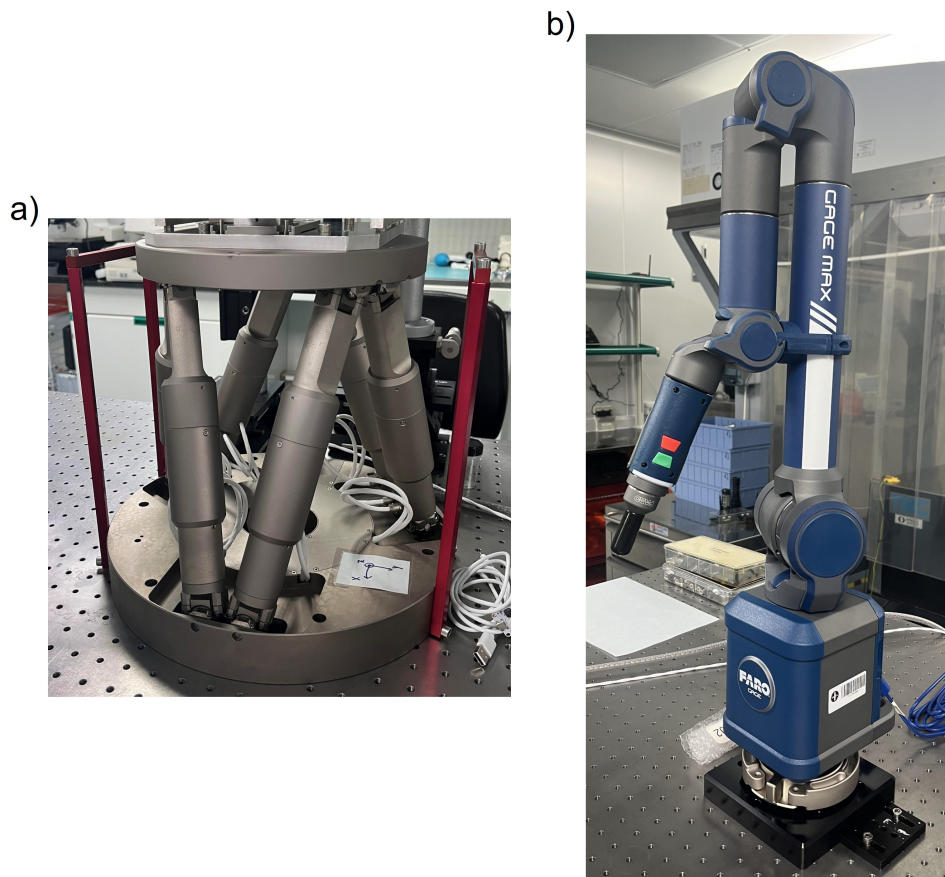


Figura 5.2: (a) Hexápodo PI M-850. (b) FARO Gage Max.

### 5.2.3. Máquina de medición por coordenadas (CMM, *Control Metrology Machine*) FARO Gage Max

Para asistir el alineamiento y conocer el posicionamiento de los elementos en la cavidad interferométrica, se ha empleado un brazo articulado con un palpador para medir elementos mecánicos. En concreto, se ha empleado el modelo Gage Max de FARO (figura 5.2(b)) que puede medir superficies mecánicas con una precisión de  $22 \mu\text{m}$  con una repetibilidad en punto de  $12 \mu\text{m}$ .

#### 5.2.4. Modulador espacial de fase Hamamatsu X8267

El modulador espacial que se va a emplear es un modulador de fase basado en cristales líquidos (LCoS-SLM, *Liquid-Crystal-on-Silicon Spatial Light Modulator*) que trabaja en reflexión. Se trata del modelo X8267 de Hamamatsu (figura 5.3) que tiene 1024x768 píxeles y un área efectiva de 20x20 mm. Para cambiar la fase en el modulador se emplea un software propio desarrollado en Matlab que genera la fase a partir de los coeficientes de Zernike definidos por el usuario, lo traduce a niveles de gris y lo trasmite al modulador. Adicionalmente, el modulador ha sido calibrado a la longitud de onda de trabajo, 632.8 nm, correspondiente a la longitud de onda de la fuente láser del interferómetro [120].

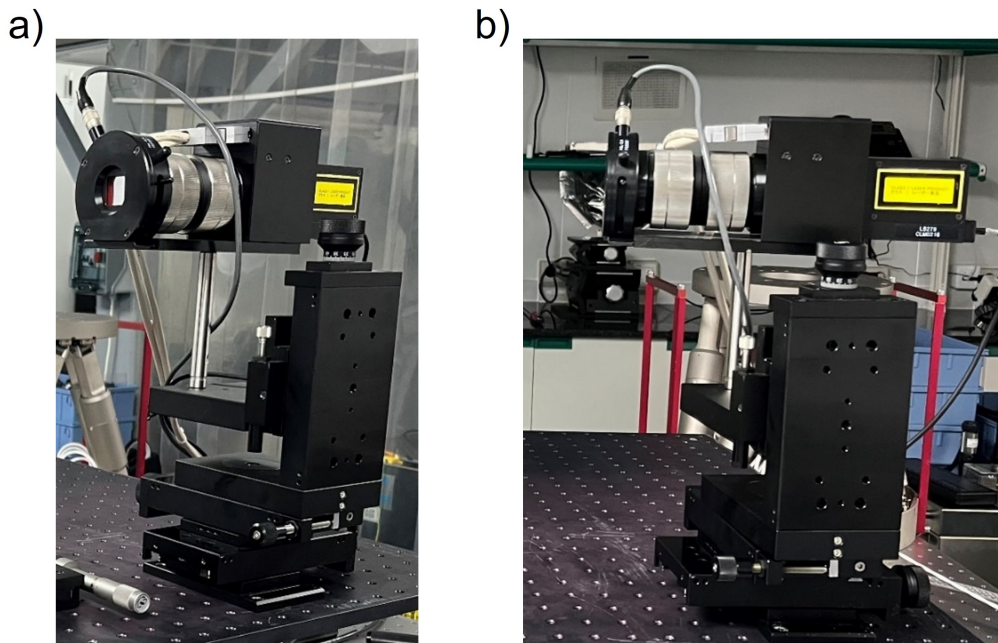


Figura 5.3: LCoS-SLM X8267 de Hamamatsu.

Finalmente, indicar que todas las medidas que se muestran en este capítulo se realizaron en una sala limpia de nivel de limpieza ISO 7 (figura 5.4) perteneciente a las instalaciones del Departamento de Óptica Espacial del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA).

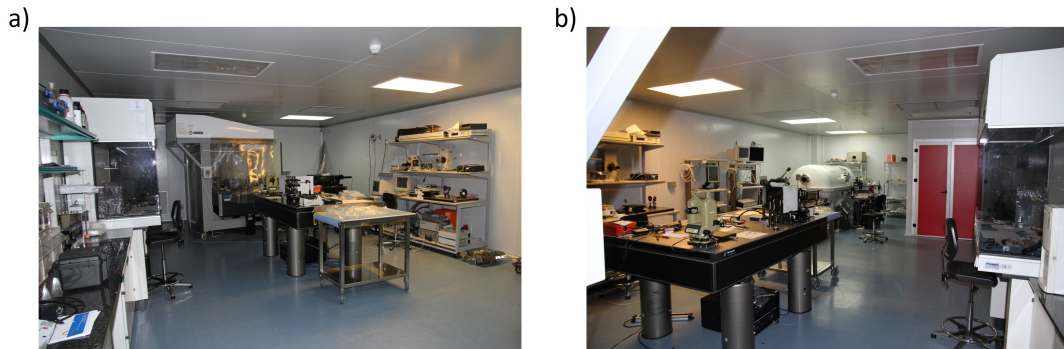


Figura 5.4: Sala limpia ISO 7 del Departamento de Óptica Espacial del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA).

### 5.3. Verificación $M_1$

En primer lugar, se lleva a cabo la verificación del espejo primario  $M_1$  del telescopio, que se muestra ya pegado en su montura en la figura 5.5.

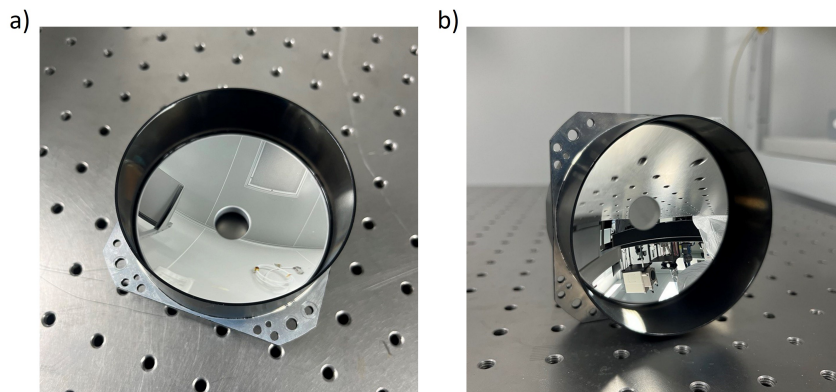


Figura 5.5: Espejo primario  $M_1$  pegado en su montura.

Se trata de un espejo cóncavo cuya superficie nominal de diseño está descrita mediante la ecuación 5.1 con un radio de curvatura  $R = -93.4123$  mm y una constante cónica  $K = -1.0172$ . Se puede observar que el valor de esta constante se encuentra muy próximo al de un paraboloide  $K = -1.0$ , dato del que se hará uso más adelante.

$$Z(r, \theta) = \frac{(1/R) r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K) (1/R)^2 r^2}} \quad (5.1)$$

La apertura del espejo es de 82.86 mm de diámetro y tiene un agujero central de 16.7 mm de diámetro requerido por la configuración tipo Cassegrain del telescopio del que forma parte.

La verificación de este espejo se realizará mediante interferometría. Al ser un único elemento lo que se desea verificar, el rango dinámico de medida está limitado por la desviación local de la pendiente a lo largo de la superficie. Esto implica que en caso de que esta desviación sea elevada y el interferómetro no resuelva el mapa de franjas, se deben introducir elementos ópticos que compensen desviaciones grandes. Idealmente, se busca obtener lo que se denomina un nulo, esto es un frente de ondas plano a la salida y medida nula de aberraciones.

Al tener una curvatura tan fuerte, cualquier elemento óptico que se necesite introducir para compensar dicha curvatura, debe tener un número  $f$  pequeño. Esto tiene la ventaja de que los montajes que se generan suelen tener una cavidad de longitud reducida por lo que el efecto de las turbulencias se reduce considerablemente. Sin embargo, los elementos con un número  $f$  muy pequeño, además de poseer mayores aberraciones, especialmente aberración esférica, son más difíciles de encontrar como elementos comerciales.

La constante cónica del espejo es característica de una superficie hiperbólica lo que dificulta la geometría para la verificación del espejo mediante una medida interferométrica nula. Sin embargo, en este caso se puede aprovechar la ventaja de que es una constante cónica muy cercana a  $-1$ , la constante cónica característica de una superficie parabólica. Esto permite medir la desviación de la superficie del espejo respecto a un paraboloide cuya geometría facilita considerablemente el montaje de verificación. Siendo por definición el paraboloide conjugado de un plano y un punto, sabemos que al incidir sobre él con un haz colimado los rayos se enfocan en un punto, sin aberraciones. Por lo tanto, para la verificación del espejo  $M_1$  se va a hacer uso de esta propiedad pero, en lugar de obtener un frente de ondas sin aberraciones, se obtendrá un frente de ondas representativo de la desviación del espejo respecto al paraboloide.

La apertura del espejo es inferior a la apertura del interferómetro, 4 pulgadas, o equivalentemente 100 mm. Esto evita la necesidad de adaptar el tamaño del haz generando cavidades de gran longitud y con gran influencia de turbulencias con elementos adicionales que pueden introducir aberraciones.

Este método para la verificación del espejo permite generar un montaje muy sencillo, con un número muy reducido de elementos. Esto, sumado a que la fuerte curvatura del espejo permite generar una cavidad corta, reduce las posibles fuentes de error de la medida. Sin embargo, presenta la dificultad de constituir lo que se conoce como una medida interferométrica no nula, es decir, que no se mide un frente de ondas plano sino un frente de ondas con unas aberraciones determinadas. Al tratarse de una medida no nula es necesario disponer de un modelo óptico del montaje que permita conocer el frente de ondas esperado. Esto servirá para asegurar que dicho frente de ondas tiene valores de pendientes locales a lo largo de toda la superficie que no superan el rango dinámico del instrumento. Además, servirá de referencia con la que comparar la medida obtenida. De este modo, tener bien caracterizado el frente de ondas nominal de diseño, incluyendo el análisis de tolerancias, es primordial para asegurar la posterior verificación del espejo.

### 5.3.1. Metodología

El diseño del montaje de verificación se muestra en la figura 5.6(a). Se trata de una cavidad en doble paso en la que el haz colimado del interferómetro que viene de la izquierda se refleja en el espejo primario. La cavidad interferométrica se cierra con una retrobola<sup>1</sup> de 10 mm de diámetro situada en su foco, de modo que el haz vuelve al espejo  $M_1$  y se refleja de vuelta al interferómetro. El posicionamiento de esta retrobola debe realizarse con mucha precaución asegurando que el centro de la esfera o retrobola coincida con la posición ideal del punto donde deben converger los rayos asegurando de esta manera que estos vuelven tras la reflexión por la misma dirección que han incidido. Si por error el foco o centro de convergencia de los rayos se situara en la superficie de la retrobola (*cat's eye*) cada rayo no volvería por

---

<sup>1</sup>Nótese que, lo que se denomina retrobola es una bola de rodamiento metálica de muy alta precisión en el radio y en su acabado superficial (Grado G3). Se utiliza con frecuencia en montajes doble-paso para haces convergentes.

el mismo camino por el que llegó y el montaje no sería válido. El diámetro de la retrobola es menor que el del agujero central del espejo por lo que no se modifica la obstrucción central original.

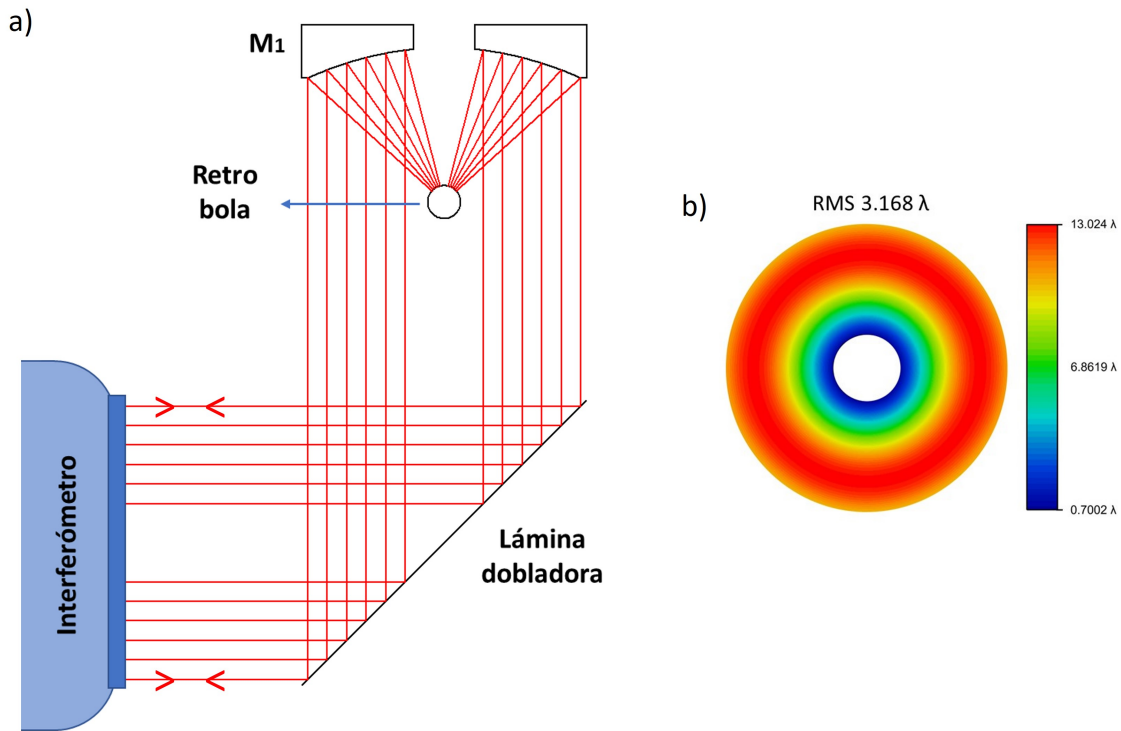


Figura 5.6: (a) Diseño de la cavidad en doble paso para la verificación del espejo primario. (b) Frente de ondas a la salida del montaje simulado en Code V ( $\lambda = 632.8\text{nm}$ ).

Adicionalmente, se incluye una lámina dobladora en una posición fija con una reflectancia del 4% para reducir la intensidad del haz que pasa por el montaje respecto al haz de referencia del interferómetro. Esto es necesario porque el montaje está compuesto solo por espejos con una alta reflectancia, mientras que el espejo que genera el haz de referencia del interferómetro solo tiene una reflectancia del 5%. Por ello, la diferencia de intensidad entre estos haces es alta y se generan franjas con bajo contraste en el interferómetro. Al introducir la lámina dobladora se reduce la intensidad del haz que pasa por el montaje por lo que se aumenta el contraste de las franjas en el interferómetro. La lámina dobladora tiene un diámetro de 4 pulgadas y una calidad óptica mejor de  $\lambda/14$  de RMS, por lo que su contribución a

las aberraciones del sistema resulta despreciable.

En caso de que la superficie del espejo fuera parabólica, el frente de ondas recogido por el interferómetro tras pasar por la cavidad, sería plano. Sin embargo, al tratarse de una superficie hiperbólica, el frente de ondas se corresponde con la diferencia entre la superficie parabólica y la superficie del espejo. En la figura 5.6(b) se muestra el frente de ondas que se obtiene a la salida del montaje cuando se simula en Code V. Este frente de ondas tiene un RMS de  $3.168\lambda$  ( $\lambda = 632.8$  nm) que, si se descompone en la base de polinomios de Zernike, queda descrito mediante los coeficientes  $C_4 = 4.305\lambda$ ,  $C_9 = -5.024\lambda$  y  $C_{16} = 0.947\lambda$ , los cuales se corresponden con los polinomios de desenfoque, aberración esférica y aberración esférica de segundo orden, respectivamente. Este frente de ondas es el que se espera reproducir en el montaje experimental.

Ahora bien, se deben tener en cuenta las tolerancias del espejo y las tolerancias de alineamiento del montaje, de modo que, al realizar la medida del frente de ondas en el laboratorio, se verifique que está dentro del rango de tolerancias. Para la comparación entre el frente ondas modelizado y el real se puede proceder de dos maneras. Una primera sería realizar un análisis de tolerancias del diseño del montaje de modo que las tolerancias del espejo y los desalineamientos del montaje se trasladan al frente de ondas que se obtiene a la salida del mismo. De este modo, se obtendrían valores de tolerancias para el frente de ondas en la pupila de salida del sistema dentro de las cuales debería encontrarse el frente de ondas medido en el laboratorio. Una segunda manera sería, una vez que se ha realizado la medida en el laboratorio, introducir el frente de ondas medido en la pupila de salida del diseño en Code V y obtener los valores de radio de curvatura y constante cónica del espejo que generan dicho frente de ondas para comprobar que estén dentro de las tolerancias del espejo. En este caso, se toma la primera manera de proceder ya que permite tener en cuenta las contribuciones del espejo y de los desalineamientos por separado.

Las tolerancias que se definen corresponden al valor del radio de curvatura, la constante cónica y los desalineamientos. Para estos últimos solamente incluiremos los desplazamientos lateral, vertical y a lo largo del eje óptico de la retrobola. Además, se introducen como compensadores las inclinaciones angulares (*tip&tilt*) y despla-

zamientos del espejo  $M_1$ . Posteriormente, se realiza un análisis de Monte Carlo<sup>2</sup> para evaluar las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje usando la macro *tolzernike* de Code V. Esta macro, permite evaluar los coeficientes de Zernike en la pupila de salida de un sistema óptico teniendo en cuenta las tolerancias y los compensadores al realizar un análisis de Monte Carlo. De este modo, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.2.

Polinomio	Coefficiente	Valor ( $\lambda$ )
Desenfoque	$C_4$	$3.99 \pm 0.02$
Esférica	$C_9$	$-3.37 \pm 0.07$
Esférica 2 <sup>o</sup> orden	$C_{16}$	$-0.61 \pm 0.04$

Tabla 5.2: Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje de verificación  $M_1$  con sus correspondientes tolerancias ( $\lambda = 632.8$  nm).

De este modo, la verificación del espejo consiste en realizar una medida en el laboratorio del modo que se ha descrito y obtener un frente de ondas que, al descomponer en términos de polinomios de Zernike, se obtengan valores que se encuentren dentro de dichas tolerancias.

### 5.3.2. Resultados

En el laboratorio, se sitúa el espejo  $M_1$  frente a la salida del interferómetro que genera un haz colimado de 100 mm de diámetro, superior a la apertura del espejo de 82.86 mm de diámetro. El espejo queda soportado sobre hexápodo, instrumento que permite mover el espejo en 6 ejes con precisión micrométrica. Además, se emplea

<sup>2</sup>El método de Monte Carlo permite evaluar el comportamiento de un sistema variando de forma aleatoria todos los parámetros dentro del rango de tolerancias e introduciendo los compensadores como variables. Después de un elevado número de ciclos (1000-10000) los resultados se analizan estadísticamente.

un brazo mecánico articulado (FARO) para medir la posición del centro del espejo utilizando distintas superficies de referencia en la montura del espejo que fueron especificadas al fabricante para que se pulieran con alta precisión. De este modo, se introduce en el controlador del hexápodo la información del centro del espejo lo que permite que, tanto traslaciones como rotaciones del espejo se realicen en torno a su centro, lo que facilita considerablemente el alineamiento. La retrobola se coloca sobre una mesa lineal que incluye los tres desplazamientos espaciales y al final de un mástil metálico que introducirá una pequeña obstrucción en la pupila del espejo. Al tratarse de una esfera, esta retrobola no requiere ajustes angulares. En la figura 5.7(a) se puede ver una imagen del espejo y la retrobola colocados sobre el hexápodo.

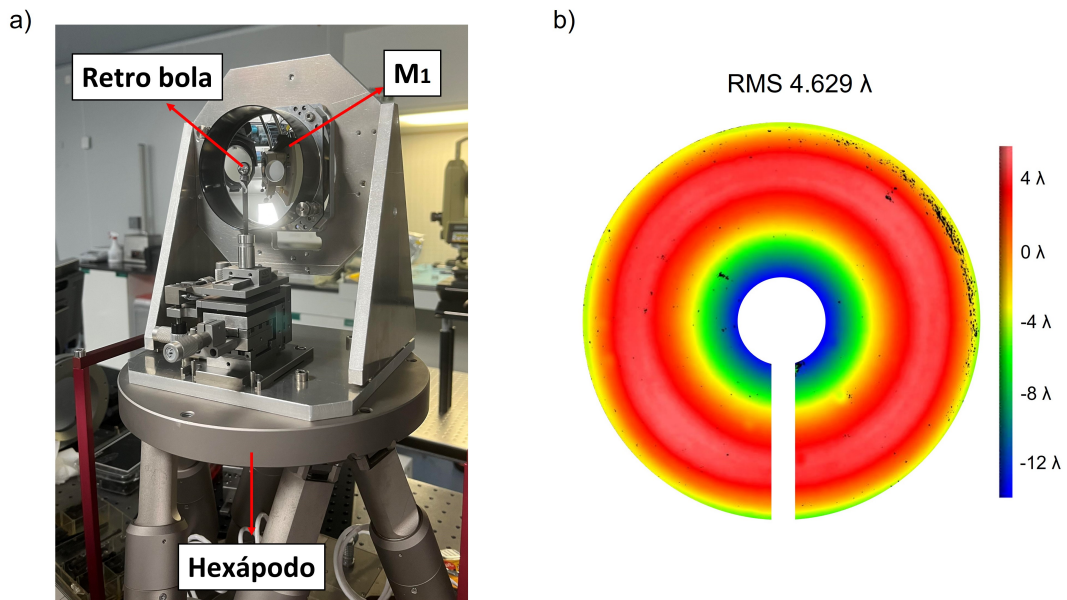


Figura 5.7: (a) Montaje de laboratorio para la verificación del espejo primario. (b) Frente de ondas medido ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

Para conseguir el alineamiento del espejo con el haz del interferómetro, lo primero es centrar tanto el espejo como la retrobola con el haz lo mejor posible de forma visual. Acto seguido, se mantiene la retrobola en una posición fija y se mueve el espejo tanto en desplazamiento en los tres ejes como en rotación (*tip&tilt*) hasta obtener en el interferómetro franjas concéntricas. Una vez obtenidas, el espejo ya está alineado con el haz por lo que solo queda terminar de ajustar la posición del espejo en foco para afinar su distancia con la retrobola. En lugar de buscar anular

el coeficiente de foco en la medida, para afinar la distancia entre la retrobola y el espejo, se va a ajustar el desplazamiento del espejo en eje hasta alcanzar un valor de foco lo más cercano posible al que predice Code V. De este modo, se usa el coeficiente de foco  $C_4$  del frente de ondas para ajustar la posición del espejo en eje respecto a la retrobola. En la figura 5.7(b) se puede observar el frente de ondas medido. Se toman varias medidas y se calcula la desviación estándar de las mismas para obtener el error en el valor de la medida. Los resultados de las medidas en comparación con los valores obtenidos en la simulación en Code V se muestran en la tabla 5.3.

Coeficiente	Code V ( $\lambda$ )	Medida ( $\lambda$ )
$C_4$	$3.99 \pm 0.02$	$4.3 \pm 0.2$
$C_9$	$-3.37 \pm 0.07$	$-5.0 \pm 0.1$
$C_{16}$	$-0.61 \pm 0.04$	$1.0 \pm 0.1$

Tabla 5.3: Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje de verificación de  $M_1$  comparando los valores de la simulación en Code V con los valores medidos en el laboratorio ( $\lambda = 632.8$  nm).

Se observa en la tabla anterior que los valores de los coeficientes obtenidos en el laboratorio no están dentro de las tolerancias del diseño. Esto implica que la superficie del espejo no se encuentra dentro de las tolerancias de fabricación. Este error en la superficie del espejo no es atribuible a un error de pulido pues el informe de fabricación proporcionado por el proveedor del mismo muestra que se encuentra dentro de los valores especificados. La deformación del mismo ha debido producirse durante el proceso de pegado del espejo en su montura.

Ante esta situación y dada la imposibilidad de conseguir un segundo espejo o despegarlo de su montura sin dañarlo, se decide llevar a cabo un análisis en Code V para obtener los coeficientes que describen el espejo real, lo que permitirá introducir esos valores en el diseño del telescopio para cuantificar los efectos que tiene en la calidad óptica del mismo. La diferencia del frente de ondas medido respecto al nominal se va a trasladar a la superficie del espejo para proporcionar una descripción de la superficie. Para hacer esto, se introduce el frente de ondas medido con el signo cambiado en la pupila de salida del diseño del montaje y se optimiza la superficie

de  $M_1$  hasta obtener el espejo primario que compensa el frente de ondas medido. Se adopta esta forma de proceder para facilitar el proceso de optimización buscando un mínimo en el error del frente de ondas. Se procede manteniendo fijos el radio de curvatura y la constante cónica nominales y optimizando los coeficientes de Zernike  $C_4^{FF}$ ,  $C_9^{FF}$  y  $C_{16}^{FF}$  que definen la topografía de la superficie del espejo respecto a la cónica de referencia, describiéndolo así como una superficie *freeform*. Se emplea el superíndice *FF* para hacer referencia a que son coeficientes de Zernike que describen la topografía de la superficie como si se tratara de una superficie *freeform*, aunque en este caso se trate de una esférica. Esto se va a hacer así a lo largo de este capítulo y el siguiente para diferenciar los coeficientes de la topografía *freeform* (superíndice *FF*) de los coeficientes que describen el error de un frente de ondas (superíndice *wfe*). De este modo, la nueva superficie del espejo  $M_1$  queda descrita mediante la ecuación 5.2. Los valores obtenidos son los que figuran en la tabla 5.4.

$$\begin{aligned}
 Z(r, \theta) = & \frac{(1/R) r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K) (1/R)^2 r^2}} + C_4^{FF} \left[ 2 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^2 - 1 \right] \\
 & + C_9^{FF} \left[ 6 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^4 - 6 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^2 + 1 \right] \\
 & + C_{16}^{FF} \left[ 20 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^6 - 30 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^4 + 12 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^2 - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Coficiente	Valor real ( $\mu\text{m}$ )
$C_4^{FF}$	-0.325
$C_9^{FF}$	0.460
$C_{16}^{FF}$	-0.184

Tabla 5.4: Coeficientes de Zernike que describen la topografía del espejo  $M_1$  que difiere de la cónica base.

De esta forma, se ha obtenido una descripción del espejo  $M_1$  real que posteriormente se deberá introducir en el diseño del telescopio para analizar los efectos que tiene y decidir cómo proceder.

En la figura 5.8 se muestra una comparación entre la superficie de diseño del espejo y la superficie medida en el laboratorio. La figura 5.8(a) muestra la superficie de diseño, la figura 5.8(b) muestra la superficie medida y la figura 5.8(c) muestra la diferencia entre ellas.

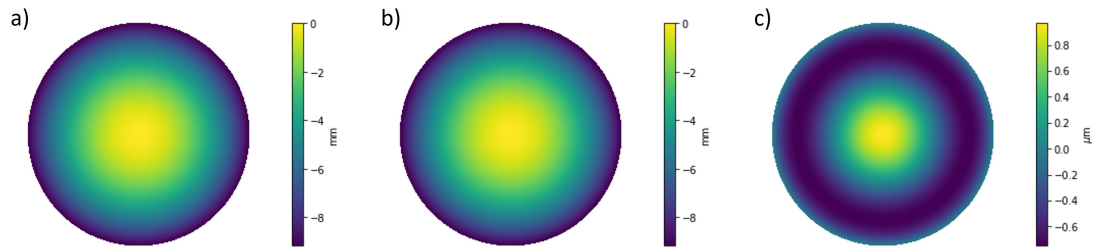


Figura 5.8: (a) Superficie del espejo  $M_1$  nominal de diseño. (b) Superficie del espejo  $M_1$  medida. (c) Diferencia entre la superficie nominal de diseño y la superficie medida.

## 5.4. Verificación $M_2$

El siguiente paso será la verificación del espejo secundario  $M_2$  que se muestra ya pegado en su montura en la figura 5.9.

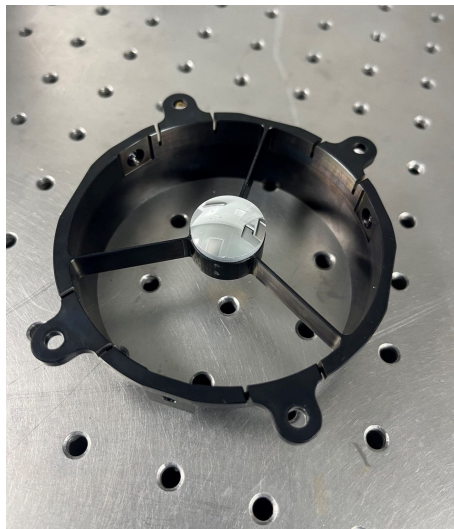


Figura 5.9: Espejo secundario  $M_2$  pegado en su montura.

Se trata de un espejo convexo cuya sagita está descrita por la ecuación 5.3, con una superficie base cónica descrita mediante un radio de curvatura  $R = -20.8955$  mm y una constante cónica  $K = -2.1118$ . Adicionalmente, contiene una contribución esférica descrita mediante el polinomio de Zernike de aberración esférica  $Z_9$  con su coeficiente asociado  $C_9^{FF} = 0.2445$   $\mu\text{m}$  y una contribución *freeform* descrita mediante el polinomio de Zernike  $Z_5$  con su coeficiente asociado  $C_5^{FF} = 3.3422$   $\mu\text{m}$ . La apertura útil del espejo es de 18.4 mm de diámetro.

$$Z(r, \theta) = \frac{(1/R)r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)(1/R)^2 r^2}} + C_5^{FF} \left[ \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^2 \cos 2\theta \right] + C_9^{FF} \left[ 6 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^4 - 6 \left( \frac{r}{r_{norm}} \right)^2 + 1 \right] \quad (5.3)$$

La medida se realizará igualmente mediante interferometría, por lo que también será necesario compensar la superficie base para limitar la desviación de la pendiente. Las principales dificultades para conseguir dicha compensación son su fuerte curvatura y el hecho de que sea un espejo convexo.

Al igual que en el caso del espejo primario, la fuerte curvatura del espejo secundario puede implicar mayor complejidad de los elementos ópticos adicionales que se introduzcan en el montaje para conseguir el nulo de aberraciones. Si a esto se añade que se trata de un espejo convexo, la complejidad aumenta pues no es posible encontrar elementos comerciales y es necesario diseñar y fabricar elementos ópticos adicionales que permitan crear un montaje en doble paso que incluya el espejo a verificar y que genere un frente de ondas plano.

Además de la curvatura y la convexidad, este espejo presenta una contribución esférica y una contribución *freeform*, ambas descritas mediante polinomios de Zernike, lo que representa una dificultad adicional. Para la verificación interferométrica de estas dos últimas contribuciones hay principalmente dos opciones.

1. Se puede intentar realizar una verificación directa mediante una medida no nula de dicha componente, es decir, el interferómetro medirá directamente el frente de ondas generado por dichas contribuciones. Para que esto sea posible es necesario que las pendientes locales que estas contribuciones generan a lo

largo de toda la superficie sean lo suficientemente pequeñas para que no se genere una densidad de franjas demasiado alta que el interferómetro no sea capaz de resolver. En este caso, solo se requiere óptica auxiliar si es necesario por la curvatura o conicidad de la superficie, pero no se requiere óptica auxiliar que compense la componente *freeform*.

2. Se pueden introducir elementos ópticos adicionales para compensar algunas de las fuertes desviaciones al frente de ondas que introducen los parámetros *freeform* del espejo de modo que se genere un frente de ondas plano o casi plano a la salida del sistema óptico que se evalúa en el interferómetro.

En este caso, en esta sección, se va a optar por medir interferométricamente las componentes esférica y *freeform* del espejo mediante la primera opción. Se realizará un montaje que anule la contribución de la superficie base del espejo y que permita realizar una medida directa del frente de ondas aberrado por las contribuciones esférica y *freeform* del espejo. Esto permite un montaje pequeño y sencillo ya que requiere un reducido número de elementos extra evitando fuentes de error adicionales. Sin embargo, introduce la dificultad de tratarse, de nuevo, de una medida de un frente de ondas no nulo por lo que será necesario un análisis exhaustivo previo del frente de ondas generado en la pupila de salida del diseño del montaje.

### 5.4.1. Metodología

El diseño del montaje se puede ver en la figura 5.10(a).

De nuevo, se emplea el haz colimado del interferómetro y dos elementos ópticos adicionales para compensar la curvatura del espejo y una parte importante de aberración esférica generada tanto por su constante cónica como por su componente esférica. Estos dos elementos son una lente esférica comercial con la apertura numérica apropiada (49104 Edmund Scientific) y un espejo esférico que se tuvo que diseñar y fabricar específicamente para este montaje (el plano de fabricación de este espejo se puede ver en el Anexo C). La lente esférica tiene un diámetro de 25 mm y una apertura numérica de 0.33. El espejo esférico tiene un diámetro de 106 mm y un radio de curvatura de 65 mm. La lente esférica enfoca los rayos colimados que le llegan del interferómetro que posteriormente se reflejan en el espejo  $M_2$ , de forma

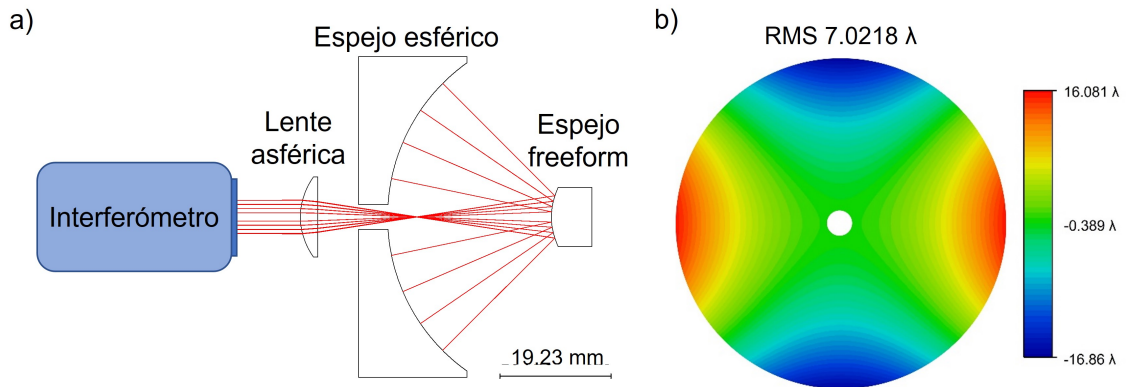


Figura 5.10: (a) Diseño del montaje para la verificación del espejo secundario. Interferómetro no a escala. (b) Frente de ondas a la salida del montaje simulado en Code V y su valor de RMS ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

que el haz que llega a  $M_2$  ya es un haz divergente. Una vez que los rayos se reflejan en  $M_2$  llegan al espejo esférico que cierra la cavidad para que el haz vuelva a pasar por  $M_2$ , la lente asférica y llegar de nuevo al interferómetro donde se evalúan las aberraciones de dicho haz. Cabe destacar que, como se puede ver en la figura 5.10(a), el espejo esférico tiene un agujero que genera una pequeña obstrucción central sin datos. El frente de ondas a la salida del montaje simulado en Code V se muestra en la figura 5.10(b). Si se descompone dicho frente de ondas en polinomios de Zernike, queda descrito mediante los coeficientes de Zernike que se presentan en la tabla 5.5. En este caso, además del valor del RMS, tomaremos como referencia los coeficientes de Zernike para comparar la medida de laboratorio con esta simulación.

Coefficiente	Valor ( $\lambda$ )
$C_5^{wfe}$	-17.465
$C_9^{wfe}$	-0.404
$C_{12}^{wfe}$	0.521

Tabla 5.5: Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas obtenido en la simulación del montaje en Code V ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

Una vez descrito el diseño nominal, es importante tener en cuenta las tolerancias, tanto de la fabricación del espejo como del montaje, y trasladar dichas tolerancias

al frente de ondas en la pupila de salida. Para ello, se va a llevar a cabo un análisis de Monte Carlo en Code V. Las tolerancias que se van a introducir se muestran en la tabla 5.6. Cabe destacar que las tolerancias de fabricación del espejo esférico son las que se especificaron al fabricante en el plano (Anexo C) y las de la lente asférica son las que facilita el proveedor.

Elemento	Tolerancia	Valor
Lente asférica	Desplazamiento (DIS: DSX, DSY)	0.02 mm
	Tilt (BTI: BTX, BTY)	0.001 rad
	Espesor central (DLT)	0.1 mm
	Sagitta de ambas superficies (DLS)	0.0075 mm
Espejo esférico	Desplazamiento (DEC: DLX, DLY)	0.02 mm
	Desplazamiento en foco (DLZ)	0.02 mm
	Radio (DLR)	0.2 mm
Espejo secundario $M_2$	Tilt (TIL: DLA, DLB)	0.001 rad
	Radio (DLR)	5.657 $\mu\text{m}$
	Constante cónica (DAK)	0.0095

Tabla 5.6: Tolerancias del montaje de verificación de  $M_2$ .

Además, se introducen como variables el desplazamiento en foco de  $M_2$  (DLZ), es decir, la distancia entre los espejos, el desplazamiento en foco de la lente (DSZ), el *tilt* del espejo esférico (TIL: DLA, DLB) y el descentramiento de  $M_2$  (DEC: DLX, DLY), todos ellos parámetros que se podrán modificar y/o ajustar en el montaje.

Con estas tolerancias y compensadores, se realiza un análisis de Monte Carlo evaluando los coeficientes de Zernike del error del frente de ondas en la pupila de salida. Con este fin usaremos la macro de Code V llamada *tolzernike*. Es importante destacar que el análisis de Monte Carlo en Code V no admite las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen la superficie del espejo, es decir, en los coeficientes que describen la componente asférica y *freeform* del espejo, por lo que de momento no se introducen en el análisis. Efectuado el análisis, los coeficientes de

Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje teniendo en cuenta estas tolerancias se muestran en la tabla 5.7.

Coefficiente	Valor ( $\lambda$ )
$C_5^{wfe}$	$-17.5 \pm 0.2$
$C_9^{wfe}$	$-0.40 \pm 0.09$
$C_{12}^{wfe}$	$0.52 \pm 0.03$

Tabla 5.7: Tolerancias del montaje de verificación de  $M_2$  trasladadas a los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida sin incluir las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen la superficie del espejo ( $\lambda = 632.8$  nm). Se trata de los mismos valores presentados en la tabla 5.5 incluyendo dichas tolerancias.

A continuación, para evaluar el efecto de las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen la superficie de  $M_2$ , se seleccionan los peores casos del análisis anterior y se evalúan los valores extremos de dichas tolerancias. La tolerancia en el coeficiente de Zernike que describe la componente esférica del espejo (ZFR  $C_9^{FF}$ ) es  $0.17\lambda$  mientras que la tolerancia en el coeficiente de Zernike que describe la componente *freeform* del espejo (ZFR  $C_5^{FF}$ ) es  $0.0587\lambda$  en ambos casos para  $\lambda = 632.8$  nm. De este modo, las tolerancias finales de los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida del montaje en la simulación en Code V al añadir las tolerancias en los coeficientes que definen la superficie *freeform* son los que se recogen en la tabla 5.8.

Coefficiente	Valor ( $\lambda$ )
$C_5^{wfe}$	$-17.5 \pm 0.8$
$C_9^{wfe}$	$-0.4 \pm 0.1$
$C_{12}^{wfe}$	$0.52 \pm 0.06$

Tabla 5.8: Tolerancias del montaje de verificación de  $M_2$  trasladadas a los coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en la pupila de salida ( $\lambda = 632.8$  nm).

Comparando las dos tablas anteriores se pueden ver varias cosas interesantes.

- La primera es que el coeficiente de aberración esférica  $C_9^{wfe}$  en este montaje es más sensible a los desalineamientos del montaje que a las tolerancias del propio espejo (su rango de tolerancia apenas se modifica cuando se incorporan las tolerancias de fabricación, pasa de 0.09 a 0.1). En concreto, se ha podido ver que este coeficiente es muy sensible a los desplazamientos de los espejos o la lente a lo largo del eje óptico. Esto hace que no sea el coeficiente más adecuado para asegurar la verificación de  $M_2$ . Esto es lógico ya que el espejo esférico se diseñó precisamente para compensar gran parte de la componente esférica del espejo  $M_2$  por lo que el valor de  $C_9^{wfe}$  es muy sensible a pequeñas variaciones en la distancia entre espejos.
- Por el contrario, se puede observar que los coeficientes de astigmatismo y astigmatismo secundario,  $C_5^{wfe}$  y  $C_{12}^{wfe}$ , especialmente el primero, son más sensibles a las tolerancias en la superficie del espejo que a los desalineamientos, por lo que estos coeficientes son más adecuados para llevar a cabo la verificación del espejo usando este montaje. Aquí hay algo que es muy importante destacar. Podría parecer que, por lo que acabamos de ver, el montaje es adecuado para verificar la componente *freeform* del espejo pero no para verificar la componente esférica. Sin embargo, esto no es así ya que los valores medidos de  $C_5^{wfe}$  y  $C_{12}^{wfe}$  se ven afectados tanto por la componente *freeform* como por la componente esférica e incluso por la superficie base del espejo, es decir, por el radio de curvatura y la constante cónica. Por lo tanto, si se miden valores de  $C_5^{wfe}$  y  $C_{12}^{wfe}$  que estén dentro de las tolerancias, podremos decir que se ha verificado la superficie del espejo.

### 5.4.2. Resultados

Una vez descrita la metodología de trabajo, se pasa al montaje de laboratorio. En la figura 5.11(a) se muestra una imagen de la lente esférica en su montura y en la figura 5.11(b) se muestra una imagen del espejo esférico.

En la figura 5.12 se muestra una foto del montaje final alineado incluyendo todos sus componentes. Además, de la lente esférica, el espejo esférico y el espejo  $M_2$ , se ha incluido un diafragma para ajustar la apertura del haz del interferómetro y un filtro de densidad óptica para reducir la intensidad del haz láser y evitar la saturación del

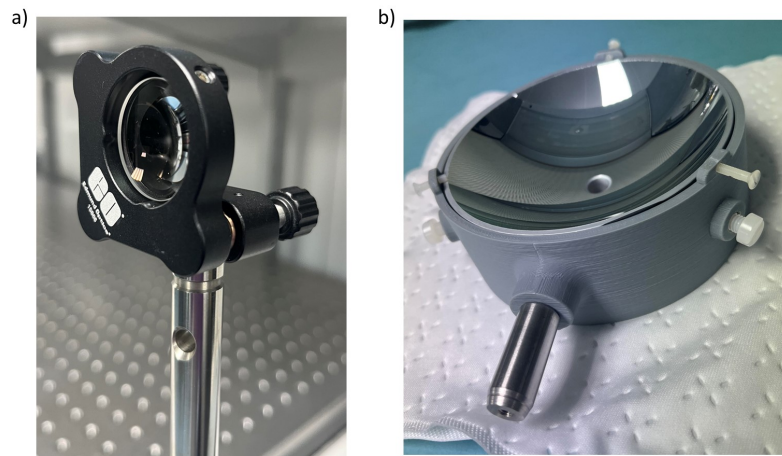


Figura 5.11: (a) Lente esférica y (b) espejo esférico en sus monturas.

interferograma. Este filtro tiene una apertura mayor que el tamaño del haz y una calidad óptica mejor de  $\lambda/14$ .

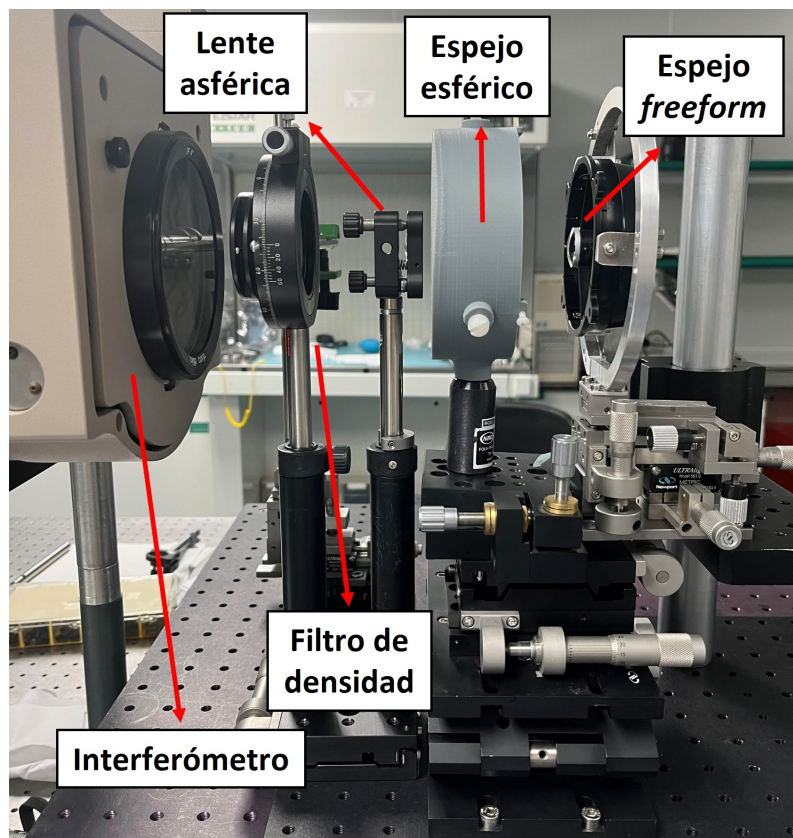


Figura 5.12: Montaje de laboratorio para la medida de  $M_2$ .

Para conseguir el correcto alineamiento del montaje se han alineado los distintos elementos de uno en uno. En primer lugar, la lente asférica con el haz del interferómetro, colocando una retrobola en el plano focal de la lente para cerrar la cavidad (figura 5.13(a)). Después, se ha colocado el espejo esférico y, en el lugar del espejo  $M_2$ , se ha empleado un espejo plano que había sido previamente alineado con el interferómetro (figura 5.13(b)). Este elemento permite corregir la posición en desplazamiento y en tilt del espejo esférico, quedando todavía sin ajustar su distancia con la lente, que posteriormente se terminará de afinar desplazando la lente a lo largo del eje óptico. Una vez conseguido este alineamiento, se retira este espejo plano y se introduce en su lugar  $M_2$  para obtener ya el montaje cuyo diseño se mostró en la figura 5.10(a). El alineamiento fino final se logra con el apoyo de simulaciones en Code V.

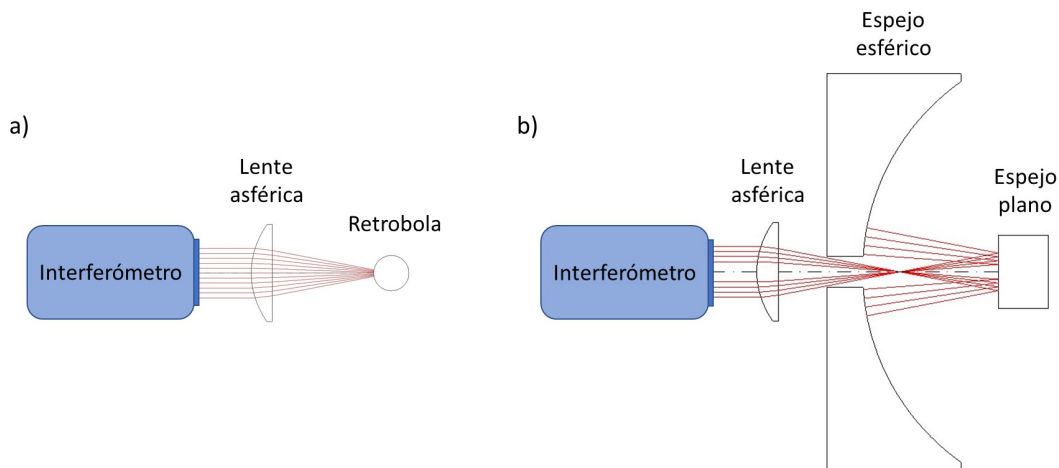


Figura 5.13: (a) Diseño del alineamiento de la lente asférica cerrando la cavidad con una retrobola. (b) Diseño del alineamiento del espejo esférico cerrando la cavidad con un espejo plano de alta calidad. Simulaciones en Code V muestran que este procedimiento es óptimo para lograr el ajuste en *tip&tilt* y desplazamiento transversal del espejo esférico. En ambos casos, el interferómetro no está a escala.

Completado el alineamiento se toma un interferograma del cual se obtiene el frente de ondas que se muestra en la figura 5.14(b) en comparación con el frente de ondas obtenido en la simulación en Code V (figura 5.14(a)).

La tabla 5.9 muestra una comparativa entre los valores para los coeficientes de Zernike del error del frente de ondas simulado en Code V para este montaje

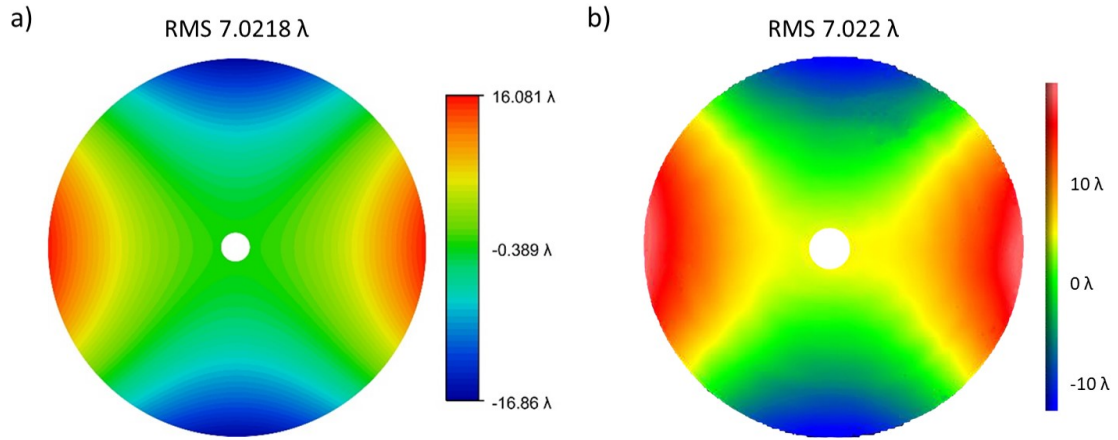


Figura 5.14: (a) Frente de ondas simulado en Code V. (b) Frente de ondas medido ( $\lambda = 632.8$  nm).

y su tolerancia asociada (segunda columna) con los valores reales medidos para los mismos coeficientes y su error estimado (tercera columna). Todos los valores medidos se encuentran dentro de las tolerancias estimadas por CodeV. El valor real de  $C_9^{wfe}$  difiere algo más respecto al teórico debido a su gran sensibilidad a los posibles desalineamientos del montaje, pero los valores de  $C_5^{wfe}$  y  $C_{12}^{wfe}$  medidos por el interferómetro se encuentran dentro de las tolerancias por lo que se puede confirmar que la fabricación del espejo secundario quedó dentro de las tolerancias especificadas quedando por tanto verificado.

Coeficiente	Code V ( $\lambda$ )	Medida ( $\lambda$ )
$C_5^{wfe}$	$-17.5 \pm 0.8$	$-17.15 \pm 0.01$
$C_9^{wfe}$	$-0.4 \pm 0.1$	$-0.50 \pm 0.01$
$C_{12}^{wfe}$	$0.52 \pm 0.06$	$0.50 \pm 0.01$

Tabla 5.9: Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas medido en comparación con los valores obtenidos en Code V ( $\lambda = 632.8$  nm).

## 5.5. Método para la verificación de superficies *freeform*

Pese a que en el apartado anterior se ha podido verificar el espejo *freeform*, hay ocasiones en las que estos elementos no se pueden diseñar de modo que la componente *freeform* de sus superficies tenga una desviación de la pendiente lo suficientemente pequeña como para ser medida directamente en un montaje interferométrico de doble paso. Esto ocurre en aquellos sistemas ópticos sometidos a demasiadas restricciones de diseño donde no se puede atender a todos los requisitos sin comprometer una calidad óptica adecuada. En estos casos, se puede recurrir a introducir una componente *freeform* con una desviación mayor, lo que permite cumplir con todos los requisitos y alcanzar alta calidad óptica. Sin embargo, esto complica considerablemente la verificación de la superficie ya que la densidad de franjas que se genera en el interferómetro es demasiado alta y no se puede resolver el frente de ondas. Esto hace que sea necesario recurrir a elementos compensadores de la componente *freeform*. Lo ideal es que estos elementos sean configurables para que no se trate de componentes específicos para verificar una superficie concreta, sino que se adapten a la verificación de diversas superficies, obteniendo así un método de verificación de superficies *freeform* más genérico ya que se ajustaría a la verificación de un amplio rango de superficies ópticas. En esta sección, se presenta una segunda técnica para la verificación del espejo  $M_2$  que emplea un modulador de fase para compensar la componente *freeform* del espejo y generar un nulo de aberraciones que posteriormente es evaluado por el interferómetro. Ya se sabe que este procedimiento no es necesario para la verificación de este espejo concreto porque su componente *freeform* no tiene pendientes tan pronunciadas, pero resulta de gran utilidad desarrollar la capacidad de verificar un amplio rango de superficies *freeform* con pequeñas modificaciones de un mismo montaje.

### 5.5.1. Metodología

El montaje se basa en el concepto que se muestra en la figura 5.15(a) [106]. Básicamente se emplea el haz colimado procedente del interferómetro que se refleja

en el modulador de fase que se encuentra rotado un pequeño ángulo respecto a la dirección de incidencia para dirigir el haz hacia la superficie a verificar, la cual cierra además la cavidad en doble paso. El modulador ya proporciona por sí mismo un aumento en las desviaciones de pendiente que el interferómetro es capaz de medir pero además, esta disposición aumenta incluso el rango dinámico del modulador ya que el haz se refleja dos veces en él mientras que lo hace una sola vez en la superficie a verificar. Es importante que el ángulo de rotación del modulador respecto al haz de incidencia sea inferior a  $10^\circ$  [121]. En caso de que la superficie a verificar tuviera una base plana, el montaje sería tan sencillo como se muestra en la figura 5.15(a) (a excepción de que se puedan requerir elementos adicionales para adaptar la apertura del haz al elemento *freeform*). Sin embargo, si la superficie a verificar tiene una superficie base esférica o cónica, habría que introducir elementos para compensar estas contribuciones, demasiado elevadas en muchos casos para ser compensadas exclusivamente por el modulador. En el caso del espejo  $M_2$ , se van a emplear los elementos que ya se usaron con este propósito en la sección anterior, es decir, la lente esférica y el espejo esférico. Cabe destacar que, en este caso, no se aprovecha la ventaja recién mencionada de que el haz se refleja dos veces en el modulador y una sola vez en el espejo *freeform*. Esto se debe a que este espejo es convexo y requiere un elemento adicional para cerrar la cavidad. El diseño final del montaje se puede ver en la figura 5.15(b). El haz del interferómetro se refleja en el modulador que está ligeramente inclinado y dirige la luz hacia lente esférica, se refleja después en  $M_2$  hacia el espejo esférico que cierra la cavidad en doble paso para devolver el haz hasta el interferómetro.

El proceso de ejecución para esta opción de verificación comienza con un trabajo de diseño que incluye los siguientes pasos:

- Primero, se diseña en Code V un montaje donde se sustituye el modulador por un espejo plano.
- A continuación, se sustituye el espejo plano por un espejo *freeform* descrito mediante polinomios de Zernike en su base Fringe.
- Se optimiza su superficie hasta obtener una frente de ondas plano en la pupila de salida del sistema.

De este modo, la superficie que resulta de la optimización es la que se introducirá

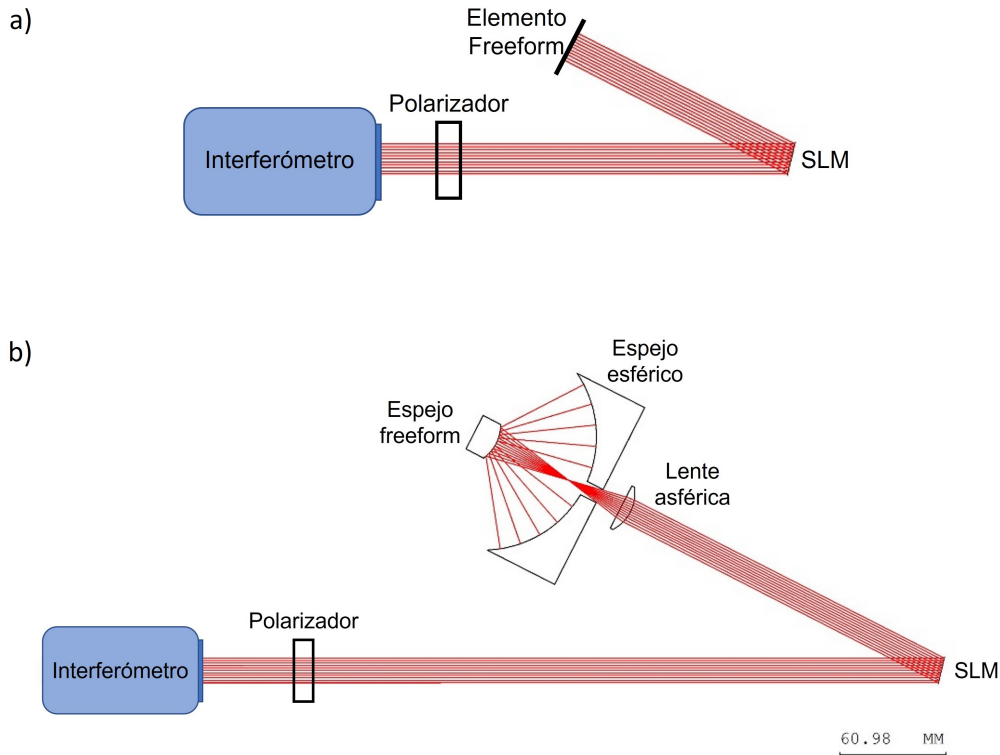


Figura 5.15: (a) Concepto general del montaje. (b) Diseño del montaje final para la verificación de  $M_2$ . Interferómetro no a escala.

posteriormente en el laboratorio en el modulador para compensar la componente *freeform* de  $M_2$  y generar un frente de ondas plano. Las deformaciones residuales de dicho frente de ondas serán las que determinen si el resultado se encuentra dentro del rango de tolerancias. En la figura 5.16(a) se muestra la fase que se ha obtenido al optimizar el modulador, es decir, la fase que habrá que introducir en el modulador para corregir las aberraciones del sistema. Esa fase se describe mediante coeficientes de Zernike que se emplearán también para comunicarse con el modulador en el laboratorio. Estos coeficientes de Zernike son  $C_5^{SLM} = 2.897 \mu\text{m}$  y  $C_9^{SLM} = 0.372 \mu\text{m}$ . En este caso, se emplea el superíndice *SLM* para hacer referencia a que son los coeficientes de Zernike que describen la fase que se introduce en el modulador. Introduciendo esta fase en el modulador, el frente de ondas que se obtiene en la pupila de salida del sistema simulado en Code V se muestra en la figura 5.16(b) y tiene un RMS de  $0.0372\lambda$  ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). Se podría haber continuado con la optimización hasta obtener un frente de ondas plano con un RMS mucho menor,

pero se decidió parar en este punto porque en el laboratorio no se iba a poder medir un RMS más bajo y así, la fase del modulador se mantiene sencilla ya queda descrita mediante pocos polinomios de Zernike de bajo orden.

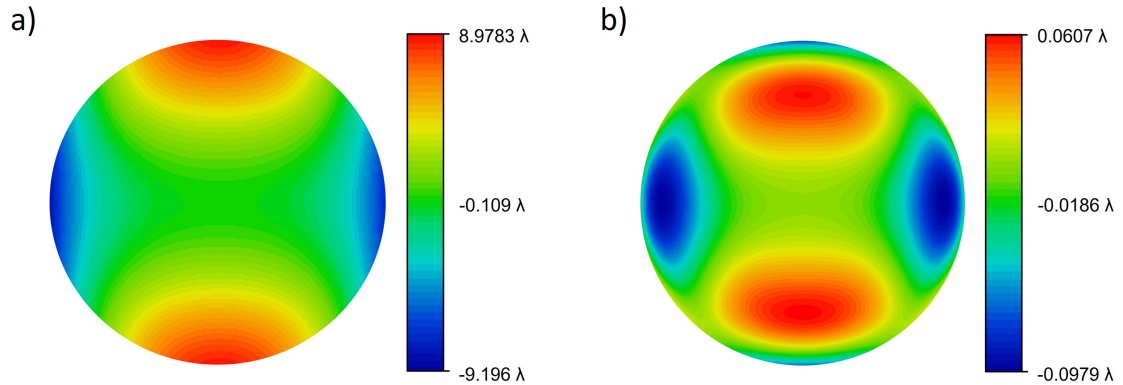


Figura 5.16: (a) Fase optimizada en el modulador para compensar las aberraciones generadas por la componente *freeform* del espejo  $M_2$ . (b) Frente de onda resultante en la pupila de salida del montaje simulado en Code V ( $\lambda = 632.8$  nm).

Una vez logrado el diseño nominal del montaje, se realiza el análisis de tolerancias del mismo. En este caso, al tratarse de un diseño de buena calidad en la pupila de salida se va a emplear la opción TOR de Code V para evaluar cómo afectan las tolerancias al RMS del frente de ondas en la pupila de salida. A diferencia de la opción de verificación anterior, esta opción de análisis sí admite introducir las tolerancias en los coeficientes de Zernike que describen una superficie. Por lo tanto, las tolerancias a considerar en este caso son las mismas que se usaron en la sección anterior pero añadiendo las tolerancias en los coeficientes que describen la componente *freeform* del espejo  $M_2$  (tabla 5.10). También es importante añadir tolerancias en el posicionamiento del modulador ya que esto afecta directamente a la fase efectiva que el modulador introduce en el camino óptico. Por lo tanto, hay que introducir tolerancias tanto en el ángulo rotado como en los desplazamientos del modulador que afectan a su centrado con el haz. Además, las variables del análisis de Monte Carlo de la sección anterior, pasan a ser compensadores para realizar el análisis con la opción TOR. En concreto, se introducen como compensadores el desplazamiento en foco de  $M_2$  (DLZ), es decir, la distancia entre los espejos, el desplazamiento en foco de la lente (DSZ), el *tilt* del espejo esférico (TIL: DLA, DLB)

y el descentramiento de  $M_2$  (DEC: DLX, DLY).

Elemento	Tolerancia	Valor
Lente esférica	Desplazamiento (DIS: DSX, DSY)	0.02 mm
	Tilt (BTI: BTX, BTY)	0.001 rad
	Espesor central (DLT)	0.1 mm
	Sagitta de ambas superficies (DLS)	0.0075 mm
Espejo esférico	Desplazamiento (DEC: DLX, DLY)	0.02 mm
	Desplazamiento en foco (DLZ)	0.02 mm
	Radio (DLR)	0.2 mm
Espejo secundario $M_2$	Tilt (TIL: DLA, DLB)	0.001 rad
	Radio (DLR)	5.657 $\mu\text{m}$
	Constante cónica (DAK)	0.0095
	Polinomios de Zernike $Z_5$ (ZFR C5)	0.0587 $\lambda$
	Polinomios de Zernike $Z_9$ (ZFR C9)	0.17 $\lambda$
Modulador	Tilt (TIL: DLA, DLB)	0.001 rad
	Desplazamiento (DEC: DLX, DLY)	0.02 mm

Tabla 5.10: Tolerancias del montaje de verificación de  $M_2$  ( $\lambda = 632.8$  nm).

Con este análisis de tolerancias se obtiene que el RMS del frente de ondas en la pupila de salida del sistema del diseño nominal ( $0.0372\lambda$ ) aumenta hasta  $0.2892\lambda$  con una probabilidad del 97.7%. Se puede apreciar un importante aumento del RMS al realizar el análisis de tolerancias. Esto se debe principalmente a las tolerancias asociadas al modulador, es decir, a las tolerancias que modifican directamente la fase efectiva que el modulador introduce en el camino óptico. Este es un punto crítico en este montaje ya que hay muchas variables que afectan a esta fase. Las tolerancias de posicionamiento del modulador tienen un efecto importante pero también lo tienen los errores que se cometen al trasladar la fase nominal al modulador en el laboratorio y que posteriormente deberán tenerse en cuenta para cuantificar el error de la medida. En cualquier caso, merece la pena señalar que el RMS que se

obtendría en este montaje si se colocara un espejo plano en la posición del modulador sería  $7.9552\lambda$ . Por lo tanto, el modulador proporciona una importante capacidad de corrección, a pesar de los resultados del análisis de tolerancias.

### 5.5.2. Resultados

Una vez concluido el diseño con su análisis de tolerancias correspondiente, se puede llevar a cabo el montaje en el laboratorio como se muestra en la figura 5.17. Para alinear este montaje se comienza colocando un polarizador lineal para seleccionar la polarización de trabajo del modulador. Primero se coloca el modulador alineado con el haz del interferómetro para poder llevar a cabo su calibración y, a continuación, se rota el ángulo requerido por el diseño y se cierra la cavidad interferométrica con un espejo plano de alta calidad para obtener una primera medida de referencia de la cavidad. Después, se coloca la lente esférica y una retrobola en su plano focal para cerrar la cavidad interferométrica. Esta configuración constituye la referencia de la cavidad al tener en cuenta las aberraciones introducidas por el polarizador, el modulador cuando está inactivo y la lente esférica. La medida de referencia obtenida en esta configuración se muestra en la figura 5.18(a). Posteriormente, esta medida se sustraerá de la medida final para eliminar aberraciones introducidas por estos elementos. Finalmente, una vez tomada la referencia, se introduce el espejo  $M_2$  y se cierra la cavidad con el espejo esférico.

Siguiendo la metodología descrita previamente, todo el alineamiento se lleva a cabo manteniendo el modulador inactivo y posteriormente se introduce la fase obtenida en la optimización en Code V (figura 5.16(a)). Una vez hecho esto, se realiza una medida con el interferómetro para evaluar el nulo de aberraciones que se ha generado.

La medida obtenida se muestra en la figura 5.18(b) y tiene un RMS de  $0.27 \pm 0.09 \lambda$ . Al sustraer la referencia de la cavidad, el RMS resultante es de  $0.13 \pm 0.09 \lambda$  que está por debajo del valor obtenido en el análisis de tolerancias como se muestra en la tabla 5.11.

Es interesante destacar que, si se descompone el frente de ondas final medido en sus polinomios de Zernike, el astigmatismo, la aberración esférica y el astigmatismo

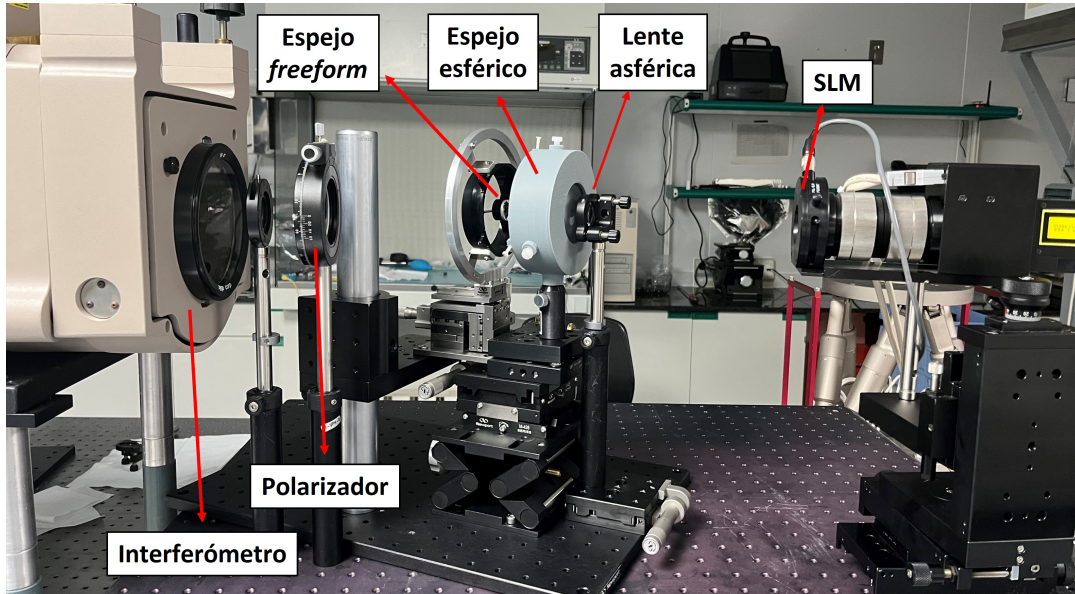


Figura 5.17: Montaje de laboratorio.

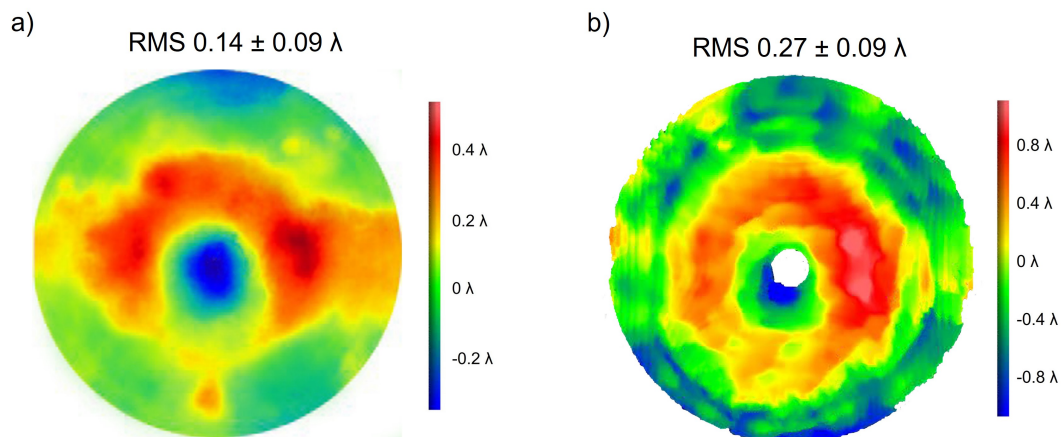


Figura 5.18: (a) Frente de ondas medido en la configuración de referencia. (b) Frente de ondas medido en la configuración del montaje final ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

de segundo orden están bien corregidos. Esto es importante ya que son precisamente los que introduce el espejo  $M_2$ , los que se pretenden corregir con el modulador. Los polinomios de Zernike que destacan en esta medida final son el coma y la esférica de alto orden que son consecuencia de pequeños desalineamientos residuales.

Por lo tanto, se puede concluir que el espejo ha quedado verificado dentro del rango de tolerancias de este montaje.

Code V ( $\lambda$ )	Medida ( $\lambda$ )
0.2892	$0.13 \pm 0.09$

Tabla 5.11: Comparación del valor máximo de RMS alcanzado en Code V al tener en cuenta las tolerancias del sistema con el valor de RMS medido en el laboratorio ( $\lambda = 632.8$  nm).

## 5.6. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo la verificación de dos espejos, un primer espejo hiperbólico y un segundo espejo *freeform*, que constituyen el espejo primario y secundario de un telescopio.

El espejo primario se ha podido verificar con un montaje sencillo aprovechando que su constante cónica ( $K = -1.0172$ ) es muy cercana a la de una parábola ( $K = -1.0$ ), lo que ha permitido obtener una medida interferométrica no nula de la diferencia de su superficie respecto a la parábola. Al tratarse de una medida no nula, es decir, de un frente de ondas aberrado, es necesario crear un modelo previo que permita obtener el frente de ondas en la pupila de salida del sistema que servirá como referencia para las medidas. Además, es necesario realizar un análisis de tolerancias que proporcione la información necesaria para saber si el espejo se encuentra dentro de las tolerancias de fabricación a partir del frente de ondas medido. Se ha comprobado que la superficie del espejo difiere de la geometría esperada hallándose ligeramente fuera de las tolerancias especificadas. Asumiendo que esta diferencia es pequeña y que probablemente se ha producido durante el pegado del espejo en su montura, se han empleado los datos obtenidos en la medida para obtener una descripción matemática del espejo medido, que posteriormente se podrá emplear para trasladar los efectos que este cambio en la superficie del espejo primario genera en el telescopio.

Por su parte, para realizar la verificación del espejo secundario, se ha aprovechado que la desviación de la pendiente generada por la contribución *freeform* se limitó durante la fase de diseño utilizando los *Q-polynomials* para su definición, de modo que la densidad de franjas que genera en el interferómetro no es demasiado alta y se

puede resolver el frente de ondas completo. Al tratarse de un espejo convexo y tener una curvatura elevada, se han tenido que emplear elementos ópticos adicionales para compensar dicha curvatura. Alguno de estos elementos son suministros disponibles comercialmente pero se ha requerido diseñar y fabricar un espejo esférico específico para este montaje. Una vez compensada la curvatura del espejo *freeform*, ha sido posible realizar una medida interferométrica no nula del frente de ondas generado por la contribución *freeform*. De nuevo, por tratarse de una medida no nula, es necesario realizar un análisis previo del frente de ondas en la pupila de salida del sistema y el correspondiente análisis de tolerancias. Esta metodología para verificar el espejo *freeform* tiene la gran ventaja de no requerir un gran número de elementos adicionales que puedan constituir nuevas fuentes de error. Además, permite generar una cavidad interferométrica con un tamaño reducido, de modo que el efecto de las turbulencias es muy limitado.

Con todo esto, la mayor aportación del capítulo ha sido el desarrollado de un método genérico de verificación de superficies *freeform* mediante interferometría adaptativa al introducir un modulador de fase en el camino óptico. De este modo, se ha desarrollado la capacidad de verificar un amplio rango de superficies *freeform*. Esto constituye una ventaja importante respecto al método anterior, ya que no siempre es posible obtener una solución de diseño que permite una verificación directa de la componente *freeform* mediante interferometría. Sin embargo, al introducir un nuevo elemento en la cavidad, el modulador de fase, aparecen nuevas fuentes de error. Una de ellas es consecuencia de aumentar la longitud de la cavidad interferométrica que introduce mayor contribución en el error de medida de las turbulencias atmosféricas.

Sin embargo, se ha demostrado la validez del método al converger con los resultados simulados en Code V para esta configuración y obtener en el laboratorio valores de calidad del frente de ondas dentro del rango de tolerancias establecido por Code V. Además, el método es flexible y puede extenderse a superficies *freeform* de distinta naturaleza y mayor diferencia respecto a una base cónica o esférica. La limitación al rango de superficies *freeform* estaría determinada exclusivamente por el rango dinámico del modulador de fase.



## Capítulo 6

# Alineamiento de un telescopio *freeform* con astigmatismo binodal en el plano imagen

En este capítulo, se va a mostrar el proceso de alineamiento del telescopio *freeform* de dos espejos que se ha descrito en capítulos anteriores. Con este alineamiento se pretende comprobar la aparición de los dos nodos de astigmatismo en el plano focal del telescopio por la componente *freeform* del espejo secundario, tal y como predice la Teoría Nodal de Aberraciones. Además, se va a realizar una inspección del plano imagen completo para comprobar que la dependencia de las aberraciones de astigmatismo, coma y esférica coinciden con las predicciones obtenidas al analizar el diseño en Code V. Este capítulo, también constituye el desarrollo de una metodología específica para el alineamiento de sistemas *freeform* que presentan la dificultad añadida de no alcanzar buena calidad óptica en el campo en eje.

## 6.1. Introducción

El alineamiento de sistemas ópticos es el campo en el que se unen el diseño óptico con su correspondiente análisis de tolerancias, el diseño optomecánico completo del instrumento, la fabricación de elementos tanto ópticos como mecánicos y las técnicas de verificación de las prestaciones del sistema. Típicamente, tras el análisis de tolerancias y la finalización del diseño optomecánico, se procede a la fabricación y al montaje de los distintos elementos de acuerdo con el mencionado análisis de tolerancias. Una vez hecho esto, es necesario realizar medidas de la calidad óptica resultante para comprobar que se corresponde con lo esperado o para, en caso de que fuera necesario, hacer uso de los compensadores previamente definidos. Esta medida de la calidad óptica resultante se puede realizar mediante diversas técnicas, en función de las características del propio sistema. Es habitual emplear técnicas de medida del error de frente de ondas como pueden ser la interferometría o el uso de sensores Shack-Hartmann [122].

En el alineamiento de sistemas *freeform* aparece la dificultad añadida de que los nodos de aberraciones pueden encontrarse en puntos del plano imagen que no coinciden con el eje. De hecho, puede darse el caso de que la calidad óptica del campo en eje sea muy baja y, por lo tanto, ese campo no sirva de referencia para asegurar el buen alineamiento del sistema. En estos casos, es necesario evaluar la calidad del sistema en las posiciones de los campos de trabajo que, normalmente, coincidirán con los nodos de aberraciones. Adicionalmente, es conveniente acceder a distintas posiciones de campo a lo largo de todo el plano imagen para medir la dependencia de las aberraciones con el campo. Se ha llevado a cabo el alineamiento de sistemas ópticos *freeform*, aplicando en cada caso una metodología específica ya que no existe un método universal para el alineamiento de estos sistemas ópticos [123].

El conocimiento de los fundamentos de NAT es importante durante el alineamiento del sistema ya que puede ayudar a que el proceso sea más eficiente. El acceso a diversas posiciones de campo a lo largo del plano imagen junto con los conocimientos que NAT proporciona en relación a la dependencia de las aberraciones con el campo, constituye una herramienta muy útil que sirve de guía durante el proceso. La dependencia que tengan las aberraciones con el campo indica cuáles son los

desalineamientos presentes en el sistema. Esto es posible gracias a que NAT permite diferenciar entre el efecto sobre las aberraciones de un desalineamiento y de una componente *freeform*. Se han llevado a cabo investigaciones experimentales de la dependencia de las distintas aberraciones con el campo del sistema óptico confirmando la predicciones de NAT [124, 125, 126]. Adicionalmente, ya se ha empleado NAT para asistir el alineamiento de sistemas ópticos [127, 128, 129, 130, 131].

A continuación, se va a mostrar el proceso de alineamiento del telescopio *freeform* que se presentó en capítulos anteriores. Para ello, se va a mostrar cómo se ha obtenido el acceso a las distintas posiciones de campo y cómo se ha alcanzado el correcto alineamiento del sistema. Igualmente, se mostrarán los resultados obtenidos mediante la evaluación de la calidad óptica en los campos de trabajo y se compararán con la calidad óptica obtenida en las simulaciones en Code V. Finalmente, se mostrarán las medidas obtenidas de la dependencia de las aberraciones con el campo y su comparación con las simulaciones en Code V.

## 6.2. Diseño de referencia

Como se mostró en el capítulo anterior, el espejo primario del telescopio no está dentro de las tolerancias de fabricación, por lo que es necesario evaluar los efectos que esto tiene en el diseño del telescopio completo. En el capítulo anterior se obtuvo, a partir de la medida interferométrica del espejo  $M_1$ , una nueva descripción matemática de la superficie del espejo. En concreto, quedaba descrito por la superficie base cónica con un radio de curvatura  $R = -93.4123$  mm y una constante cónica  $K = -1.0172$ . Adicionalmente, presenta una contribución esférica descrita mediante los coeficientes de Zernike de foco  $C_4^{FF} = -0.3247$   $\mu\text{m}$ , de aberración esférica  $C_9^{FF} = 0.4604$   $\mu\text{m}$  y de aberración esférica de segundo orden  $C_{16}^{FF} = -0.1836$   $\mu\text{m}$ . Esta nueva descripción del espejo primario será la que se introduzca en el diseño del telescopio para ver sus efectos. La superficie del espejo secundario  $M_2$  se mantiene nominal ( $R = -20.8955$  mm,  $K = -2.1118$ ,  $C_5^{FF} = 3.3422$   $\mu\text{m}$  y  $C_9^{FF} = 0.2445$   $\mu\text{m}$ ), ya que se ha verificado que está dentro del rango de tolerancias, y los campos de trabajo también se mantienen ( $F_1 = (-0.0052^\circ, 1.3552^\circ)$ ,  $F_2 = (0.0052^\circ, -1.3552^\circ)$ ) pues son los que coinciden con las posiciones de las rendijas de entrada a los micro

espectrómetros. Sin embargo, se permitirá que cambie la distancia entre espejos y la distancia al plano focal, solo si es necesario, para compensar algunas aberraciones, como puede ser el desenfoque.

Con los conocimientos que se tienen de la Teoría Nodal de Aberraciones, ya se puede adelantar que esta componente esférica adicional que aparece en el espejo primario, no va a afectar a la distribución de nodos de astigmatismo que aparecen en el plano imagen. Mientras que no aparezca una contribución que rompa la simetría de revolución en el espejo  $M_1$ , la posición de los nodos de astigmatismo en el plano imagen quedará determinada por la componente *freeform* del espejo secundario, por lo que no se verá afectada por la nueva descripción del espejo primario.

Sin embargo, la distribución de coma y aberración esférica en el plano imagen del telescopio sí que se va a ver alterada. Esto se debe a que la distribución nominal de estas aberraciones en el plano imagen del telescopio se obtuvo mediante un balance de la curvatura y la cónica de ambos espejos con la componente esférica del espejo secundario. Al añadir una componente esférica adicional en el espejo primario, se introducen nuevas componentes de estas aberraciones que modifican la distribución de las mismas.

Si se introduce en el diseño del telescopio en Code V la nueva descripción del espejo primario, se puede evaluar la calidad obtenida en los puntos de campo de trabajo del telescopio y la nueva dependencia de las aberraciones con el campo. En los campos de trabajo del telescopio se evalúa la calidad óptica a través del error del frente de ondas en la pupila de salida como se muestra en la figura 6.1.

En la tabla 6.1 se pueden ver los coeficientes de Zernike que describen ambos frentes de onda.

Tanto en la figura 6.1 como en la tabla 6.1 se puede ver que se trata de dos frentes de onda claramente simétricos. El astigmatismo ha quedado bien corregido, la contribución de coma es únicamente vertical y simétrica, es decir, tiene el mismo valor para ambos pero orientación opuesta, y ambos tienen la misma contribución de aberración esférica. Además, el RMS toma un valor de  $0.357\lambda$  para ambos campos.

La nueva dependencia de las aberraciones con el campo se evalúa mediante los FFDs de las aberraciones de astigmatismo, coma y esférica como se puede ver en la

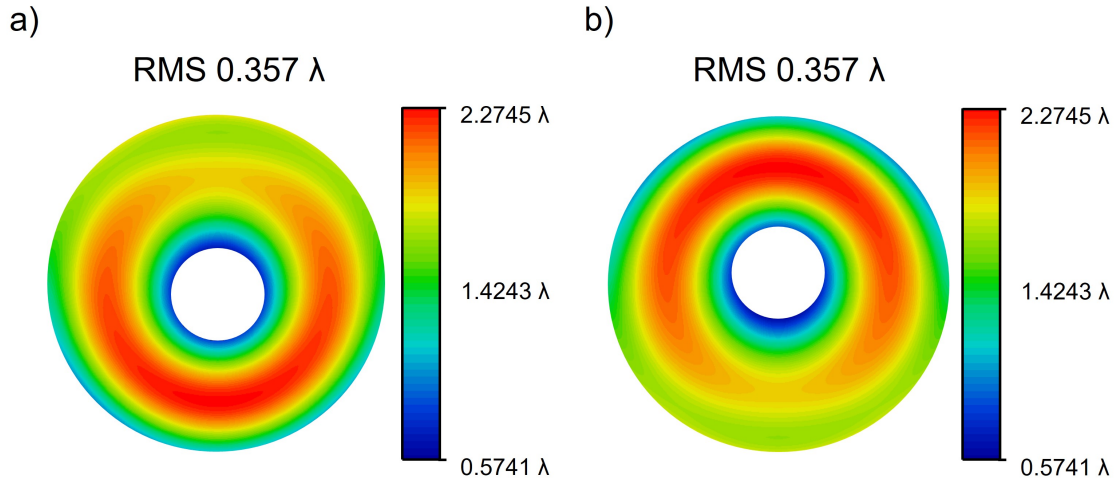


Figura 6.1: Error de frente de ondas con su valor de RMS obtenido en Code V para ambos campos de trabajo del telescopio ( $F_1$ ,  $F_2$ ) para  $\lambda = 632.8$  nm.

Coeficiente	$F_1$ ( $\lambda$ )	$F_2$ ( $\lambda$ )
$C_5^{wfe}$ Astigmatismo H-V	0.026	0.026
$C_6^{wfe}$ Astigmatismo $45^\circ - 135^\circ$	0.0	0.0
$C_7^{wfe}$ Coma V	0.0	0.0
$C_8^{wfe}$ Coma H	0.462	-0.462
$C_9^{wfe}$ Esférica	-0.830	-0.830

Tabla 6.1: Coeficientes de Zernike que describen el frente de ondas en los campos de trabajo del diseño del telescopio ( $\lambda = 632.8$  nm).

figura 6.2.

Como se esperaba, se puede observar que los dos nodos de astigmatismo se mantienen en las posiciones de los campos de trabajo. El coma ha perdido su distribución con un nodo circular cuyo radio coincidía con los dos campos de trabajo del telescopio. En su lugar, ha recuperado el nodo en eje y, como ya se ha mencionado, en los dos campos de trabajo del telescopio el coma es simétrico. Por último, la aberración esférica también ha perdido su distribución de nodo circular y toma un valor aproximadamente constante a lo largo del plano imagen. La aparición de una nueva

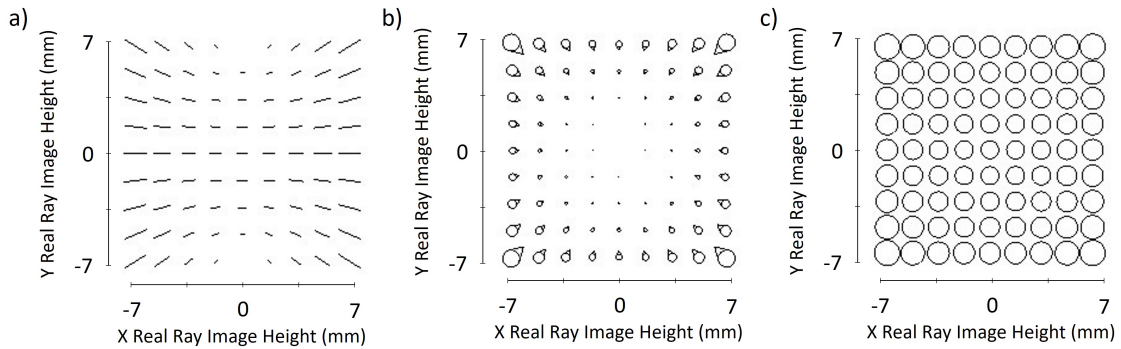


Figura 6.2: FFDs de (a) astigmatismo, (b) coma y (c) aberración esférica obtenidos en Code V para el diseño que servirá de referencia para el alineamiento.

distribución de aberraciones para coma y esférica no altera el objetivo del estudio, que es demostrar experimentalmente la presencia de los nodos de astigmatismo del telescopio *freeform*. Sin embargo, es necesario evaluar el efecto que tiene la aparición de estas aberraciones en las figuras de mérito establecidas para el telescopio. Esto permitirá decidir si el telescopio sigue siendo válido para la aplicación concreta para la que se diseñó.

Con este objetivo, se evalúa la calidad óptica del telescopio a través del diagrama de impactos (figura 6.3). En la figura 6.3(a) se muestra el diagrama de impactos para distintas posiciones de campo a lo largo de todo el plano focal. Se puede ver que los campos de trabajo coinciden con los puntos de mejor calidad óptica del sistema y también con los nodos de astigmatismo, aunque ahora, estas posiciones de campo presentan aberraciones de coma y esférica, como ya se ha visto anteriormente mediante los frentes de onda correspondientes. En la figura 6.3(b) se muestran los diagramas de impacto correspondientes a los campos de trabajo del telescopio.

En esta última figura, se puede ver cómo, a pesar de tener un espejo primario con su superficie ligeramente fuera del rango de tolerancias especificadas, el diagrama de impactos permanece dentro del área colectora de entrada de los micro espectrómetros (representada mediante los cuadrados en color negro). Además, se ha evaluado la *energía encirclada* para ambos casos con el fin de asegurar que efectivamente, la energía entrará en el micro espectrómetro sin pérdidas debidas al error del espejo primario. Se había obtenido que el 95 % de la energía está contenida dentro de un círculo de 30  $\mu\text{m}$  de diámetro para el diseño nominal. Si con este diseño, se

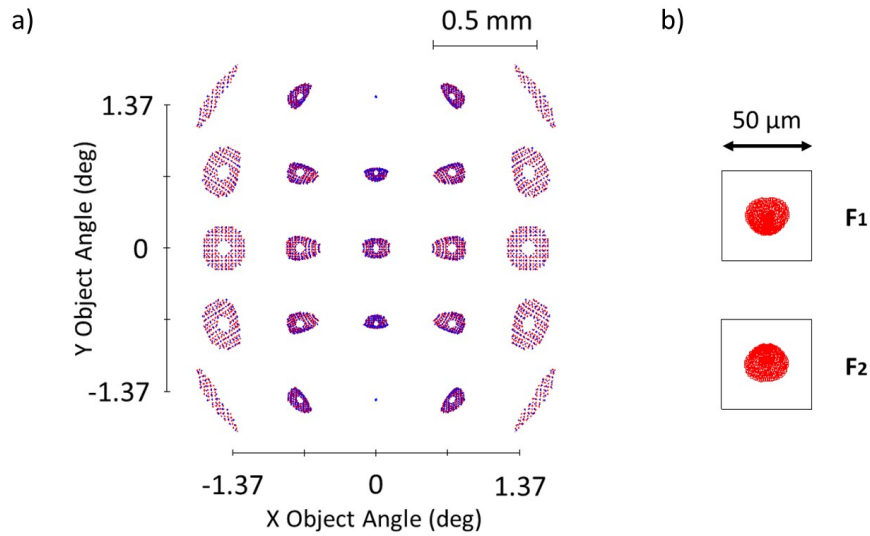


Figura 6.3: (a) Diagrama de impacto para un grid de campos a lo largo del plano focal del telescopio. (b) Diagrama de impactos para los campos de trabajo del telescopio.

repite el análisis de tolerancias mediante un análisis de Monte Carlo con las mismas tolerancias y compensadores que se mostraron en el capítulo 5, se obtiene que el cambio en el diámetro respecto al nominal que ocupa 95 % de la energía encircada es de  $11 \mu\text{m}$ . Por lo tanto, con el espejo primario medido y teniendo en cuenta las tolerancias del sistema, se puede alcanzar un diámetro máximo de  $41 \mu\text{m}$  para el 95 % de la energía encircada. De este modo, se puede afirmar que, a pesar de la discrepancia que se ha encontrado en la verificación del espejo primario, dicho espejo es válido para esta aplicación específica ya que la energía encircada se mantiene dentro de la rendija de entrada del micro espectrómetro ( $50 \mu\text{m}$ ).

Los efectos en el telescopio como conjunto no son únicamente los cambios en la calidad óptica, sino que también aparecen cambios en las distancias entre elementos que componen el telescopio. La distancia entre los espejos ha pasado de 38 mm a 37.968 mm y la de  $M_2$  al plano focal ha pasado de 50 mm a 50.808 mm. Esto implica que la longitud total del telescopio ha pasado de 80 mm a 80.808 mm (longitud desde el stop hasta el plano focal). A efectos del alineamiento del telescopio y de la verificación de su calidad óptica, estos cambios no son relevantes. Sin embargo, es importante cuantificarlos para obtener los valores de las nuevas distancias nominales que se deben implementar en el alineamiento.

Adicionalmente, es importante cuantificar estos cambios en las distancias entre elementos porque afectan directamente al diseño optomecánico del instrumento y a su integración final en el satélite. Aunque no es materia de esta tesis, cabe mencionar las consideraciones que se hicieron, por ser estas de gran importancia para el desarrollo de la misión. Los elementos mecánicos son diseñados para el diseño óptico nominal cumpliendo con las tolerancias especificadas y permitiendo el rango de movimiento descrito por los compensadores. Por lo tanto, dichos elementos mecánicos podrían no alcanzar las nuevas distancias entre elementos ópticos. Afortunadamente, en este caso, el cambio en la distancia entre espejos no es problemático porque se trata de un cambio muy pequeño dentro del margen ya considerado en el diseño mecánico. En el caso de la distancia al plano focal, la magnitud del cambio es considerablemente mayor y sí que afecta al diseño mecánico. De nuevo, afortunadamente, el cambio de posición del plano focal no es “hacia dentro del sistema”, sino “hacia fuera”. Esto permite adaptar de forma sencilla la mecánica introduciendo galgas que rectifiquen la posición del plano focal. Finalmente, se evaluó que el aumento de la longitud del sistema no fuera problemático en su integración dentro del satélite ya que dicha longitud se limitó inicialmente a un máximo de  $80mm$  con el fin de reservar espacio para la etapa detectora.

### 6.3. Procedimiento

El alineamiento del telescopio se realizará monitorizando el error del frente de ondas con un interferómetro. Esta es una técnica habitual que permite, en tiempo real, conocer el efecto sobre la calidad de imagen, de un movimiento o inclinación, de alguno de los elementos que componen el sistema óptico. En este caso, el sistema lo componen únicamente  $M_1$  y  $M_2$ . Durante este proceso, será necesario acceder a la medida de la calidad óptica en las posiciones de campo de trabajo del telescopio. La medida de la calidad en eje no es válida para asegurar el alineamiento por ser baja y presentar altas aberraciones. Adicionalmente, tener acceso a distintas posiciones de campo a lo largo de todo el plano focal permite medir la dependencia de las aberraciones con el campo y puede ser de gran ayuda durante el proceso de alineamiento.

A continuación, se muestra la metodología que se ha empleado para acceder a las distintas posiciones de campo y para alcanzar el adecuado alineamiento del sistema óptico.

### 6.3.1. Acceso a las distintas posiciones de campo

Para realizar el alineamiento del telescopio, se empleará un interferómetro cuyo haz de salida tiene un diámetro de 100 mm, lo que se ajusta perfectamente a los 80 mm de apertura del telescopio. Se pretende realizar medidas para diferentes posiciones de campo modificando la orientación del haz de entrada procedente del interferómetro respecto a la pupila de entrada del telescopio. Debido al reducido tamaño y masa del sistema óptico, el interferómetro tendrá una posición fija y será el telescopio completo el que se coloque sobre un hexápodo para cambiar su posición angular y modificar el campo angular según sea necesario. La figura 6.4 muestra esquemáticamente una vista lateral del montaje con el interferómetro en una posición fija y el telescopio completo en el hexápodo.

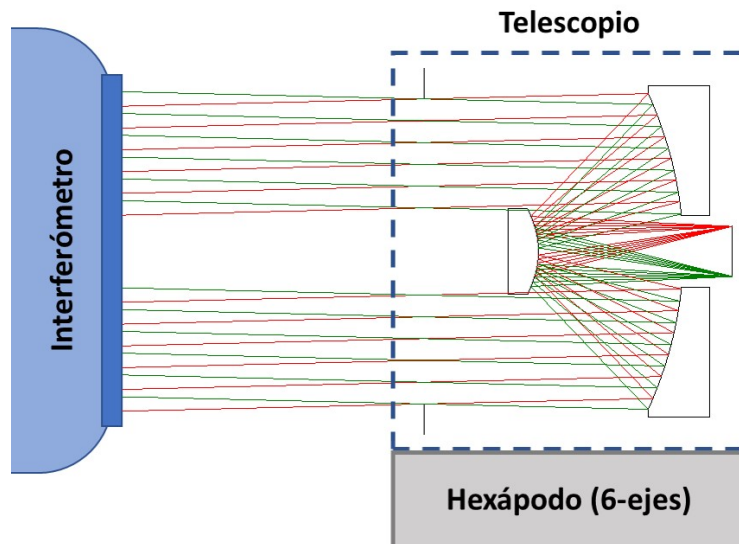


Figura 6.4: Esquema de la vista lateral del montaje en la que se ve cómo el telescopio completo queda sobre la superficie del hexápodo. Los tamaños del interferómetro y el hexápodo no están a escala.

Para mover el telescopio angularmente y modificar la dirección del campo angu-

lar a la posición que se requiera en cada momento, es necesario obtener dos medidas previas. Por un lado, aquella que sirva como campo de referencia a partir de la cual, simplemente modificando el conjunto de coordenadas que definen una posición del hexápodo (6 en total, tres lineales y tres angulares), se pueda acceder a cualquier campo. Por otro lado, aquella otra que define el centro de la pupila de entrada del sistema, pues es este plano con respecto al cual se define el campo angular de un sistema óptico. En este caso, la pupila de entrada coincide con el stop. Toda esta información se introduce en el software de control del hexápodo para que este punto, el centro del stop, sirva como punto de pivote en torno al cual realizar los movimientos angulares para alcanzar los campos que se van a analizar.

Para realizar las medidas del campo de referencia y de la posición del stop, se puede proceder de distintas maneras. Se puede obtener primero la posición del campo de referencia y después medir la posición del stop. Esto implicaría realizar una posterior translación del origen de las coordenadas del hexápodo que determinan la posición del campo de referencia para emplear la posición del stop como origen. Otra opción sería medir primero la posición del stop y usar dicha posición como pivote del hexápodo para encontrar la posición del campo de referencia con el origen trasladado al centro del stop. Ambos procedimientos serían igualmente válidos. Una vez que se han obtenido estos datos, se puede alcanzar cualquier posición de campo partiendo del campo de referencia y realizando movimientos angulares en torno a la posición del stop.

### **Medida de la posición del stop**

En este caso, se ha decidido comenzar por la medida de la posición del stop del sistema. Esto se ha hecho así por la forma en que se va a realizar posteriormente la medida de la posición del campo de referencia. Sin embargo, no se va a emplear la posición del stop como punto de pivote durante la medida del campo de referencia porque se ha considerado más útil emplear un punto de pivote diferente. Es decir, se realiza primero la medida del stop, pero este dato no se usará hasta que ya se haya encontrado la posición del campo de referencia. Por ello, a pesar de haber medido primero la posición del stop, habrá que realizar la translación de las coordenadas del campo de referencia como se mencionó anteriormente. La motivación para proceder

de este modo se explica a continuación.

Como campo de referencia se va a emplear el campo en eje. Esto se va a conseguir colocando  $M_1$  en su montura sobre el hexápodo y alineando solamente este espejo con el interferómetro, tal y como se hizo para su verificación. Es importante que, una vez que  $M_1$  quede alineado, no se modifique su posición sobre el hexápodo ya que se perdería el campo de referencia. Durante el proceso de alineamiento de  $M_1$  con el interferómetro, se emplea como punto de pivote el centro del espejo. Esto permite desplazar o tiltear el espejo de forma independiente para facilitar el alineamiento. Para ello, una vez que  $M_1$  está colocado sobre la base del hexápodo, se emplea un equipo de metrología dimensional (brazo metrológico FARO) para definir el sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro del espejo respecto al sistema de referencias del hexápodo (situado en el centro de la base circular del mismo). Esta información se introduce en el software de control del hexápodo para que use el centro del espejo como punto de pivote.

A partir del sistema de referencias con origen en el centro del espejo se puede obtener directamente la posición del stop con una simple translación a lo largo del eje óptico. Por el diseño, se sabe que el stop se encuentra 68 mm por delante del espejo  $M_1$ . De este modo, se han obtenido los datos necesarios para orientar de forma precisa el telescopio en torno al stop y acceder a cualquier posición de campo angular con un conocimiento de unos pocos segundos de arco.

Para materializar el procedimiento descrito, el primer paso es colocar el espejo primario en su montura sobre el hexápodo. A continuación, se emplean las superficies de referencia del hexápodo y de la montura de  $M_1$  para medir con FARO la posición del centro del espejo respecto al sistema de referencias del hexápodo. El sistema de coordenadas que se va a emplear es el que está definido para el hexápodo. En este sistema de coordenadas, el eje  $X$  coincide con el eje óptico con el sentido positivo de  $M_1$  hacia el interferómetro, el eje  $Z$  es el eje vertical con sentido positivo hacia arriba y el eje  $Y$  es el tercer eje. De este modo, la posición medida del centro de  $M_1$  respecto al origen del hexápodo viene dada en la tabla 6.2

Una vez obtenida esta medida, la posición del stop respecto al origen del hexápodo se obtiene desplazando la posición del centro de  $M_1$  68 mm a lo largo del eje óptico, ya que esa es la distancia que hay entre el stop del sistema y el espejo  $M_1$

Coordenadas	Valor (mm)
$X_{M_1}$	-4.639
$Y_{M_1}$	0.424
$Z_{M_1}$	157.764

Tabla 6.2: Coordenadas del hexápodo para el centro del espejo primario.

por diseño. De este modo, se obtiene la posición del stop (tabla 6.3).

Coordenadas	Valor (mm)
$X_{Stop}$	63.329
$Y_{Stop}$	0.424
$Z_{Stop}$	157.764

Tabla 6.3: Coordenadas del hexápodo para el centro del stop del sistema.

Con estas coordenadas, el cambio de pivote en el hexápodo se realiza mediante un sencillo cambio en el software. Con esto, se han obtenido las coordenadas de los dos puntos de pivote que se usarán posteriormente. El centro de  $M_1$  para su alineamiento con el eje del interferómetro y el centro del stop para el acceso a distintas posiciones a lo largo del campo.

### Coordenadas del campo de referencia

Como ya se ha mencionado, para obtener las coordenadas del campo de referencia, el campo en eje, se debe alinear el espejo primario sobre el hexápodo con el interferómetro. Para ello, se emplea el mismo montaje que se usó para la verificación de este espejo. Como ya se explicó en el capítulo anterior, se hace uso de que la superficie hiperbólica de  $M_1$  ( $K = -1.0172$ ) está muy cercana a una parábola ( $K = -1$ ) por lo que se puede medir en el interferómetro la desviación de la superficie del espejo respecto a una superficie parabólica. Si se tratase de una superficie parabólica, al incidir sobre  $M_1$  el haz colimado del interferómetro, se enfocaría en un punto sin aberraciones. En este punto se coloca una retrobola para cerrar la cavidad

en doble paso de modo que el haz vuelve a pasar por  $M_1$  y regresa colimado al interferómetro. Si se tratase de una parábola, se obtendría en el interferómetro un frente de ondas plano una vez que  $M_1$  esté perfectamente alineado con el interferómetro. En el caso de  $M_1$ , cuando quede alineado con el interferómetro, la diferencia en la geometría con respecto a una parábola, generará un patrón de franjas concéntricas. Por lo tanto, para asegurar el alineamiento de  $M_1$  con el haz del interferómetro y tener localizada la posición del campo en eje, es necesario obtener franjas concéntricas de modo que las aberraciones de coma y astigmatismo queden corregidas en el frente de ondas. Para ello, se deja fija la posición de la retrobola y se va ajustando la posición tanto angular como en desplazamiento vertical y horizontal del espejo gracias a los ajustes que proporciona el hexápodo.

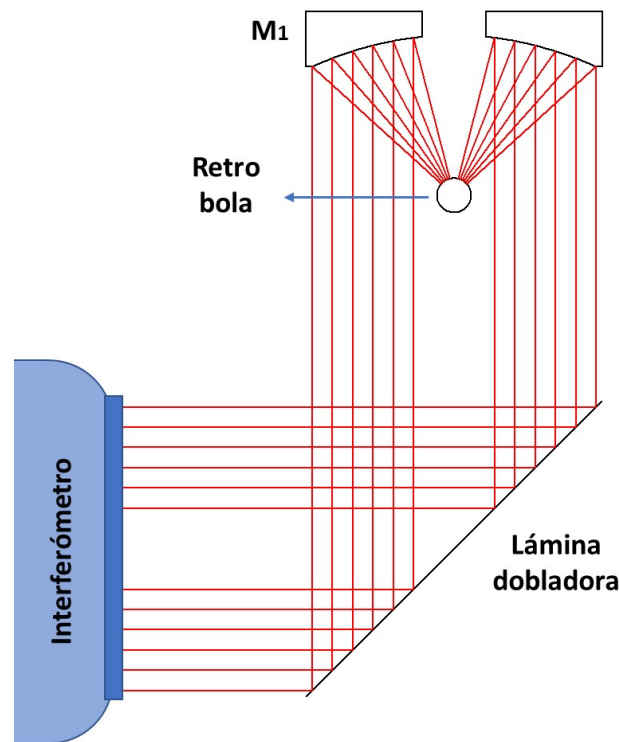


Figura 6.5: Esquema del montaje de alineamiento de  $M_1$  con el haz del interferómetro visto desde arriba.

Como se explicó en el capítulo anterior, se incluye una lámina dobladora con una reflectancia del 4% para reducir la intensidad del haz que pasa por el montaje respecto al haz de referencia del interferómetro y mejorar el contraste de las franjas

en el interferómetro. Esta lámina tiene un diámetro de 4 pulgadas y una calidad óptica mejor de  $\lambda/14$  de RMS. En la figura 6.5 se puede ver un esquema de planta del montaje incluida la lámina dobladora. En la figura 6.6 se puede ver el frente de ondas simulado en Code V cuando el espejo está alineado con el interferómetro.

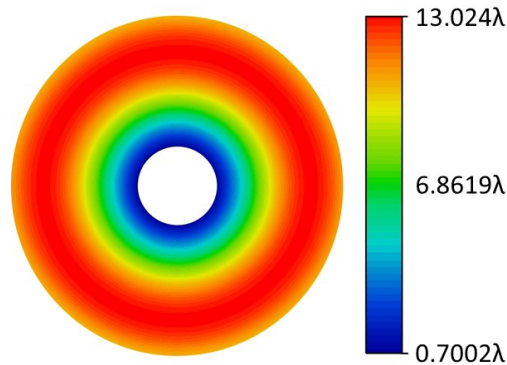


Figura 6.6: Frente de ondas obtenido en Code V al simular el montaje de  $M_1$  cerrando la cavidad interferométrica con una retrobola ( $\lambda = 632.8$  nm).

Una vez obtenido el interferograma con franjas concéntricas y el error de frente de ondas que se muestra en la figura 6.6, la posición en la que haya quedado el hexápodo definirá la posición del campo en eje. Como para este alineamiento se ha empleado como punto de pivote el centro del espejo, hay que hacer una traslación del pivote al centro del stop. Esa traslación del punto de pivote también se debe aplicar a las coordenadas de la posición del campo en eje.

De este modo, al determinar las coordenadas del campo en eje y haber coseguido que el pivote de rotación sea coincidente con el stop del sistema, ya se puede acceder a cualquier posición de campo del telescopio simplemente cambiando las coordenadas del hexápodo.

Para ejecutar el procedimiento, se coloca una retrobola cerrando la cavidad en doble paso y se mueve  $M_1$  con el hexápodo pivotando en torno al centro del espejo hasta obtener franjas concéntricas en el interferómetro. En la figura 6.7(a) se observa el montaje de laboratorio con  $M_1$  y la retrobola. En la figura 6.7(b) se muestra el frente de ondas obtenido una vez que el espejo ha quedado alineado. Se observa que tanto el coma como el astigmatismo están bien corregidos y que el error de frente de ondas está claramente dominado por aberraciones con simetría de revolución

(desenfoque y aberración esférica de distintos órdenes).

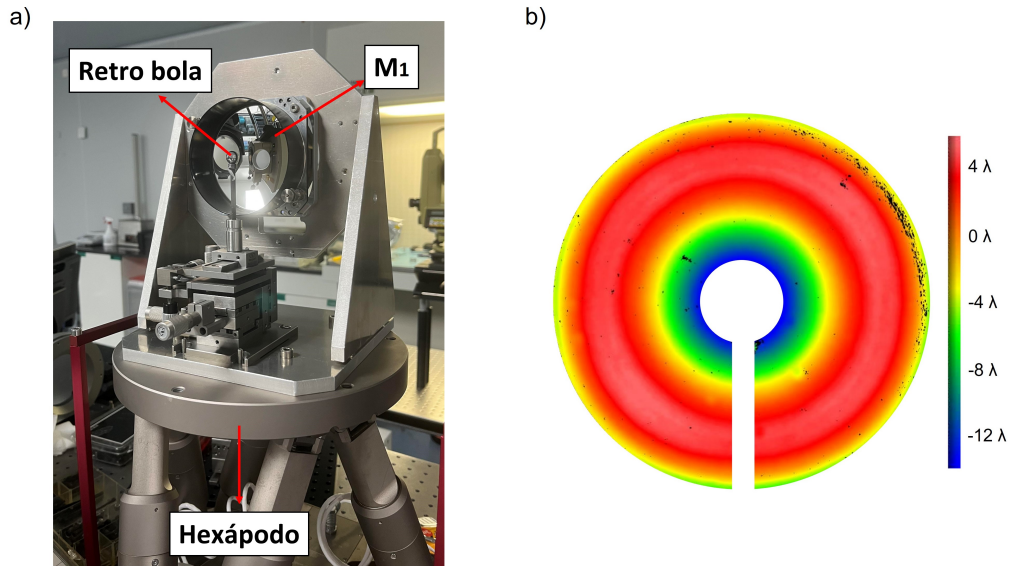


Figura 6.7: (a) Montaje de laboratorio para el alineamiento de  $M_1$  con el haz del interferómetro. (b) Frente de ondas medido una vez que  $M_1$  ha quedado alineado ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

Una vez que  $M_1$  está alineado con el interferómetro, la posición actual del hexápodo define la posición del campo en eje. Esta posición, empleando ya el stop como punto de pivote, queda descrita mediante el conjunto de coordenadas del hexápodo (de un total de 6) mostrado en la tabla 6.4. Las coordenadas que no aparecen en la tabla son el desplazamiento a lo largo del eje óptico y la rotación en torno a dicho eje. No se muestran en la tabla porque se han mantenido en la posición inicial, no ha sido necesario modificarlas.

Coordenadas	Valor
$Y_0$	-8.464 mm
$Z_0$	10.477 mm
$V_0$	-0.1894°
$W_0$	3.0884°

Tabla 6.4: Coordenadas del hexápodo para campo en eje.

### 6.3.2. Alineamiento del telescopio

Cuando  $M_1$  ha quedado alineado, se puede incluir el espejo  $M_2$  en el montaje. Mantenido fija la posición de  $M_1$ , se coloca  $M_2$  en una mesa de 5 ejes para poder ajustar su posición con estos grados de libertad respecto a  $M_1$ . A su vez, la mesa de 5 ejes de ajuste de  $M_2$  también se encuentra colocada sobre la base del hexápodo. De este modo, el hexápodo mueve el telescopio completo para cambiar la posición del campo y la montura sobre la que se encuentra  $M_2$  modifica únicamente la posición de  $M_2$  respecto a  $M_1$  hasta alcanzar el alineamiento.

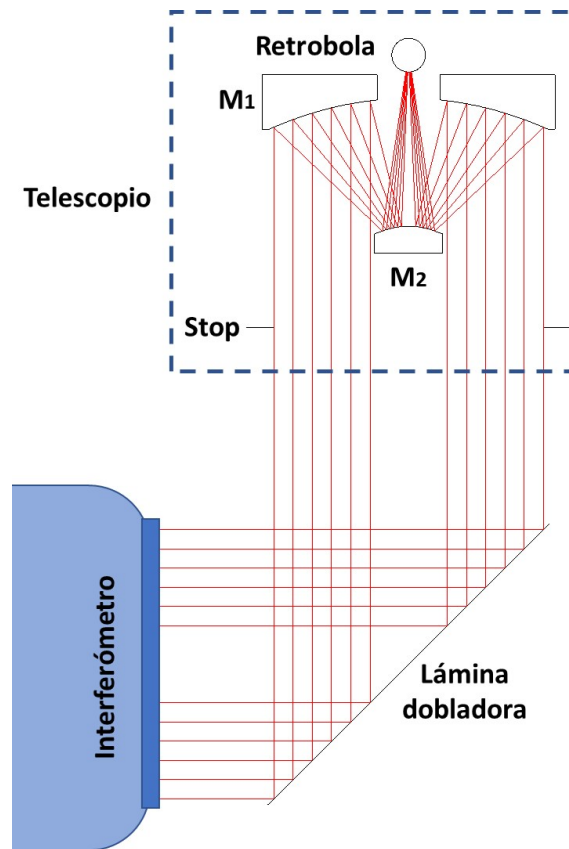


Figura 6.8: Esquema del montaje de alineamiento del telescopio visto desde arriba.

El haz colimado del interferómetro se refleja en  $M_1$  hacia  $M_2$ , donde se vuelve a reflejar para alcanzar el plano imagen del telescopio. La cavidad interferométrica en doble paso se cierra con una retrobola colocada en el plano focal del telescopio y cuya posición se ajusta en función del campo que se quiera explorar. De este modo, el haz se refleja en la retrobola, vuelve hacia  $M_2$ ,  $M_1$  y llega de nuevo al interferómetro. En

la figura 6.8 se muestra un esquema del montaje completo visto desde arriba. Cabe destacar que los dos campo nominales de trabajo se separan del eje únicamente en dirección vertical por lo que, en la figura 6.8, al tratarse de una vista de planta, ambos campos aparecen superpuestos y en eje.

De este modo, se va modificando la posición del campo mediante el hexápodo, moviendo de forma sucesiva y repetida de un campo de trabajo a otro, de  $F_2$  a  $F_1$  y de  $F_1$  a  $F_2$ , ajustando en consecuencia la posición de la retrobola y la posición de  $M_2$  hasta alcanzar frentes de onda simétricos y sin astigmatismo, en ambos campos. Una vez que se ha obtenido un frente de ondas libre de astigmatismo y simétrico en ambos campos de trabajo, se realiza un barrido de todo el campo para obtener medidas de los mapas de aberraciones a lo largo de todo el plano focal. De este modo, se puede comprobar, no solo que se ha alcanzado la calidad esperada en los dos campos de trabajo del telescopio, sino que la dependencia de las aberraciones con el campo también es la adecuada. Para ello, se define una malla rectangular de 9x9 posiciones de campo que se van introduciendo en el hexápodo y se coloca la retrobola en la posición del plano imagen que se requiera para cerrar la cavidad. De este modo, para cada posición de campo se mide el frente de ondas, que posteriormente se descompone en polinomios de Zernike y así obtener los mapas de aberraciones, los FFDs de astigmatismo, coma y aberración esférica.

En la práctica, los valores de campo nominales de trabajo del telescopio se obtienen a partir de los valores angulares de los campos en el espacio objeto del diseño óptico que son ( $\mp 0.0052^\circ$ ,  $\pm 1.3733^\circ$ ). Por ello, las coordenadas del hexápodo que proporcionan acceso a estos campos, a partir del campo en eje, son las que se muestran en la tabla 6.5. Por lo tanto, es posible cambiar de un campo a otro y analizar su calidad óptica en el interferómetro moviendo el hexápodo y ajustando la posición de la retrobola en consecuencia.

En estas condiciones, el espejo  $M_2$  se puede introducir en el montaje colocado sobre una mesa de ajuste de 5 ejes que también está colocada sobre el hexápodo y que permitirá mover  $M_2$  de forma independiente respecto a  $M_1$ . De este modo, la mesa de 5 ejes permite cambiar la posición de un espejo respecto a otro mientras que el hexápodo permite mover el telescopio completo para cambiar el campo. Así, la mesa de 5 ejes se usa para ajustar la posición de  $M_2$  hasta que se obtienen dos frentes

Campo	Coordenadas	Valor (°)
$F_1$	$W_1$	3.0832
	$V_1$	1.1839
$F_2$	$W_2$	3.0936
	$V_2$	1.1839

Tabla 6.5: Coordenadas del hexápodo para los campos  $F_1$  y  $F_2$ .

de onda simétricos y corregidos de astigmatismo para los dos campos de trabajo del telescopio. Como ya se ha mencionado, la cavidad interferométrica en doble paso se cierra con una retrobola colocada en el plano focal del telescopio. En la figura 6.9(a) se puede ver el montaje de laboratorio con  $M_1$  y  $M_2$  sobre el hexápodo. En la figura 6.9(b) se puede incluso ver la retrobola a través del agujero de  $M_1$ .

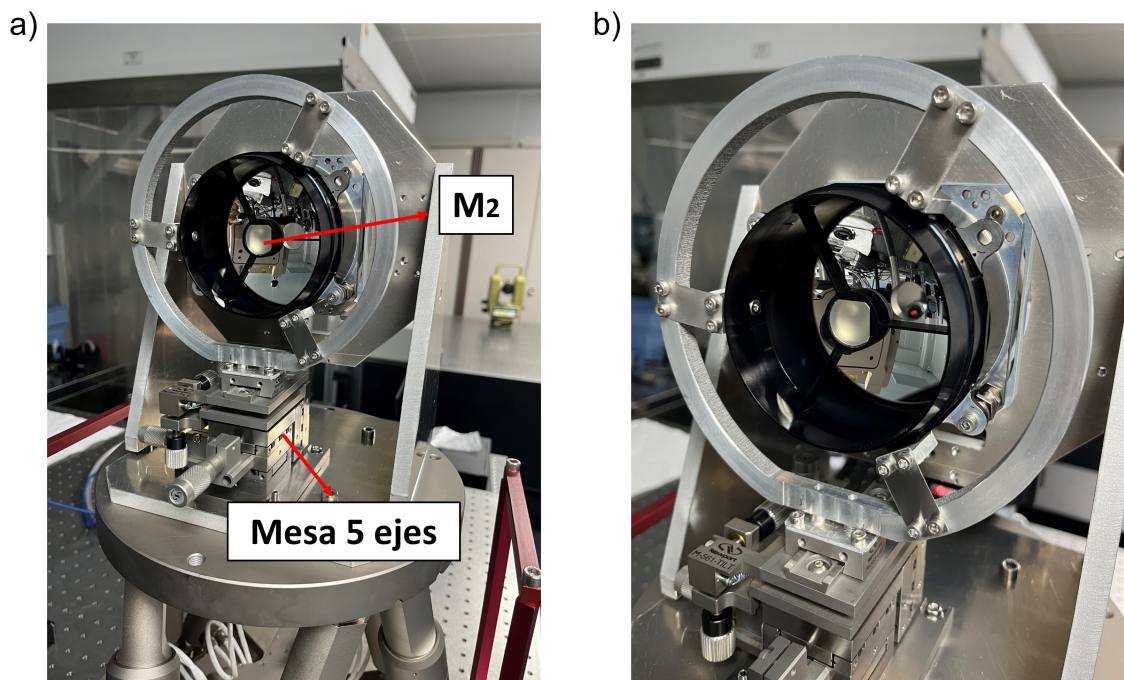


Figura 6.9: Montaje de laboratorio para el alineamiento de  $M_1$ - $M_2$ .

Como paso final, se reemplaza la retrobola por una pequeña cámara CCD y se repite el barrido de campo con el objeto de obtener la PSF a lo largo de todo el plano focal y comparar así esta medida con el modelo en Code V. El plano focal

del telescopio se encuentra muy próximo a la cara trasera del espejo  $M_1$  por lo que no se puede acceder a él con una cámara de gran tamaño. Por ello, se emplea una pequeña cámara CCD con calidad suficiente para medir la distribución energética en el plano focal.

## 6.4. Resultados y comparación con las simulaciones

Un vez que el telescopio ha quedado alineado, se toman medidas del error de frente de ondas en los dos campos nominales de trabajo del telescopio. En la figura 6.10 se presentan los dos frentes de onda medidos (a, b) en comparación con los que se obtienen del diseño mediante la opción *Pupil Map* de Code V (c, d).

En primer lugar, se puede ver que las medidas se corresponden con las simulaciones tanto en la forma del error de frente de ondas como en el valor del RMS del mismo. En el campo 1 se ha obtenido un  $\text{RMS} = 0.365\lambda$  que difiere en un 0.02% ( $0.008\lambda$ ) del RMS obtenido en Code V ( $0.357\lambda$ ). En el campo 2, se ha obtenido un  $\text{RMS} = 0.359\lambda$  que difiere en un 0.005% ( $0.002\lambda$ ) del RMS obtenido en Code V ( $0.357\lambda$ ). Además, si se descomponen ambos frentes de onda en polinomios de Zernike, se pueden obtener las contribuciones al RMS que le corresponde a las distintas aberraciones. En la tabla 6.6 se muestran los coeficientes de Zernike obtenidos en las medidas comparados con lo que se ha obtenido en las simulaciones en Code V.

En concreto, se puede ver que el astigmatismo está bien corregido en ambos campos, tomando los coeficientes de Zernike de astigmatismo valores de  $C_5^{wfe} = -0.041\lambda$  y  $C_6^{wfe} = -0.054\lambda$  para el campo 1 y  $C_5^{wfe} = 0.078\lambda$  y  $C_6^{wfe} = -0.074\lambda$  para el campo 2. Este astigmatismo residual que se ha obtenido en el laboratorio denota la presencia de pequeños desalineamientos, pero siempre dentro del rango de tolerancias establecido. El coma tiene una contribución claramente vertical que toma valores de  $C_8^{wfe} = 0.445\lambda$  y  $C_8^{wfe} = -0.471\lambda$  para cada campo respectivamente en comparación con los valores  $C_8^{wfe} = \pm 0.462\lambda$  que se obtienen en Code V. Se han obtenido valores claramente simétricos y muy cercanos al valor obtenido en Code V. Estas pequeñas diferencias ( $0.017\lambda$  y  $0.009\lambda$ ) se deben a desalineamientos

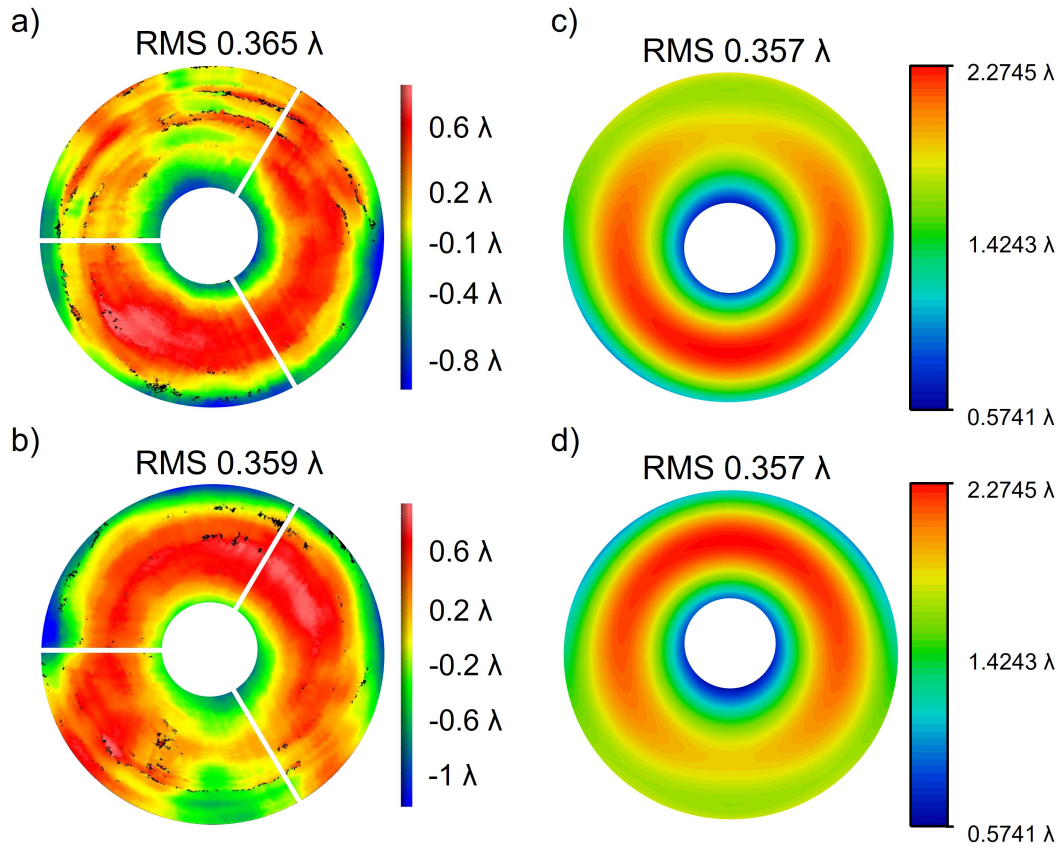


Figura 6.10: Comparación entre los errores de frente de ondas medidos (a,b) y simulados en Code V (c,d) en  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente ( $\lambda = 632.8$  nm).

residuales que alejan el valor del coma respecto al valor nominal. Por último, la aberración esférica toma un valor  $C_9^{wfe} = -0.899\lambda$  y  $C_9^{wfe} = -0.903\lambda$  para cada campo respectivamente, mientras que en Code V se obtiene  $C_9^{wfe} = -0.830\lambda$  para ambos campos. Las diferencias respecto al valor obtenido en Code V son de  $0.069\lambda$  y  $0.073\lambda$  respectivamente. De nuevo, estas diferencias pueden deberse a un pequeño desalineamiento residual, ya que la aberración esférica es muy sensible a la distancia entre  $M_1$  y  $M_2$ . En concreto, en Code V se ha llevado a cabo un análisis de la sensibilidad de la aberración esférica con la distancia entre los espejos. En dicho análisis se ha obtenido que una variación de  $6 \mu\text{m}$  en la distancia entre los espejo genera un cambio del orden de  $\simeq 0.1\lambda$  en la aberración esférica en el plano focal del telescopio. Por lo tanto, las diferencias obtenidas en el coeficiente  $C_9^{wfe}$  se pueden explicar mediante pequeños desalineamientos que se encuentran dentro del rango de

Coef.	Medida F <sub>1</sub> (λ)	Code V F <sub>1</sub> (λ)	Medida F <sub>2</sub> (λ)	Code V F <sub>2</sub> (λ)
RMS	0.365	0.357	0.359	0.357
$C_5^{wfe}$	-0.041	0.026	0.078	0.026
$C_6^{wfe}$	-0.054	0.0	-0.074	0.0
$C_7^{wfe}$	0.044	0.0	-0.053	0.0
$C_8^{wfe}$	0.445	-0.462	-0.471	-0.462
$C_9^{wfe}$	-0.889	-0.830	-0.903	-0.830

Tabla 6.6: Comparación entre el RMS y los coeficiente de Zernike que describen el error de frente de ondas medido y el obtenido en las simulaciones en Code V ( $\lambda = 632.8$  nm).

tolerancias.

### 6.4.1. *Full Field Displays* (FFDs)

Una vez medido el frente de ondas para ambos campos de trabajo, se hace un barrido de todo el plano focal del telescopio. Esto se realiza modificando la posición angular del hexápodo para seleccionar cada campo y ajustando la posición de la retrobola en consecuencia. Para ello, se define una malla de posiciones que cubra el plano imagen completo y esos serán los ángulos que se irán introduciendo en el hexápodo. Una vez realizado el barrido, se descompone cada frente de ondas en polinomios de Zernike y se representa cada una de las aberraciones en función del campo. De este modo, se obtienen los mapas de campo que se muestran en la figura 6.11(a, b, c) en comparación con los mapas obtenidos mediante Code V (figura 6.11(d, e, f)). Es importante mencionar que en las 4 esquinas de los mapas medidos hay tres posiciones de campo inaccesibles para las que no es posible obtener medidas y por tanto, para las que no hay datos. En esas posiciones de campo, la posición de la retrobola en el plano focal del telescopio interfiere con la cara trasera de  $M_1$  e impide cerrar la cavidad doble paso impidiendo a su vez la medida en el interferómetro.

En la figura 6.11(a) se presentan los mapas de astigmatismo obtenidos experi-

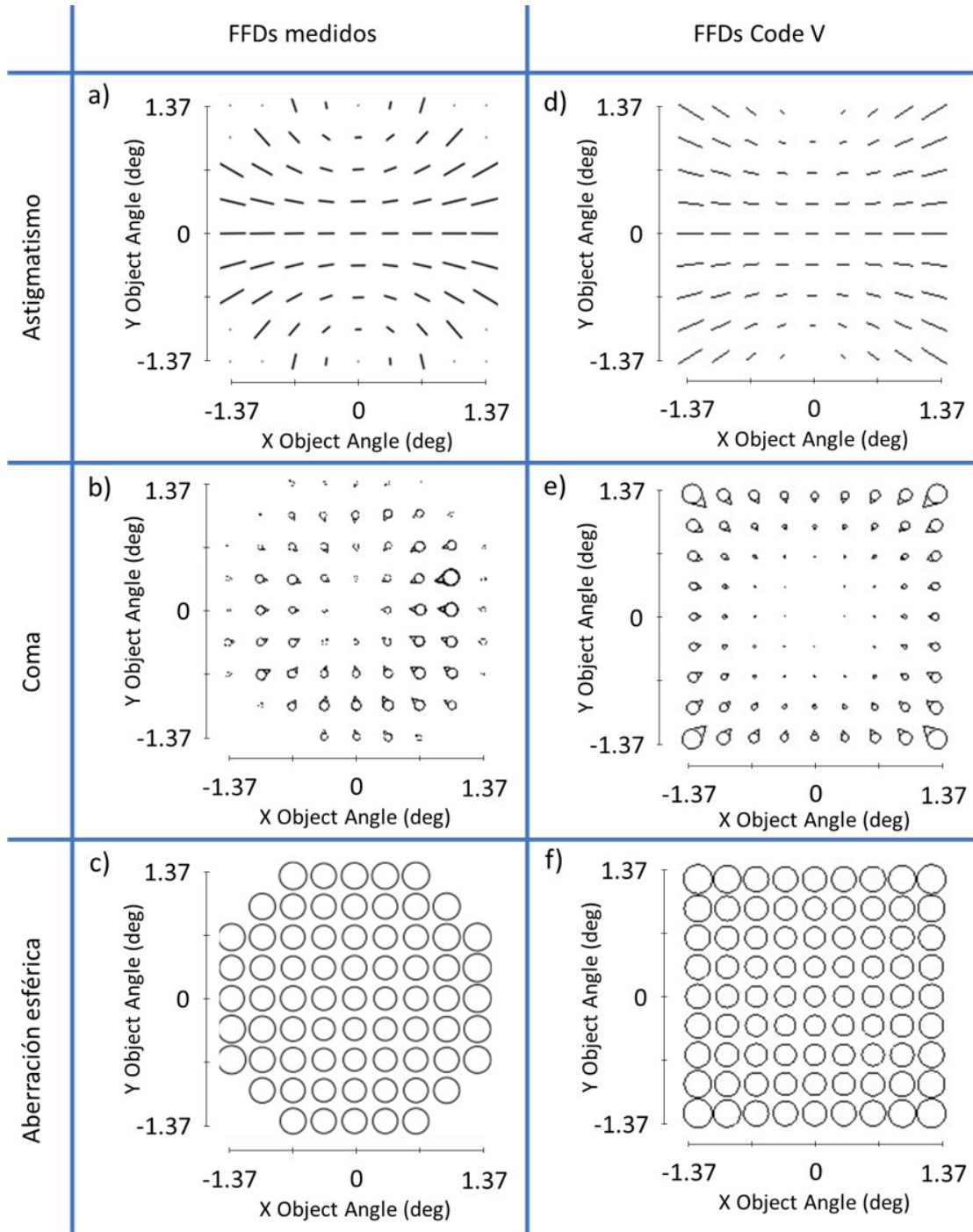


Figura 6.11: Comparación entre los FFDs medidos en el laboratorio una vez que el telescopio ha quedado alineado (a-c) y los FFDs obtenidos en la simulación en Code V (d-f).

mentalmente frente a los obtenidos en Code V (6.11(b)). Se puede observar la aparición de los dos nodos de astigmatismo en las posiciones de los campos nominales de trabajo del telescopio. Además, se puede comparar la dependencia del astigmatismo con el campo a lo largo de todo el plano focal y ver cómo se corresponde con la dependencia preestablecida por Code V. Por ejemplo, observamos claramente que a lo largo de los ejes horizontal y vertical que pasan por el centro del plano focal, el astigmatismo es horizontal, es decir, que la componente  $Z_6$  de astigmatismo se anula y solo aparece contribución de la componente  $Z_5$ . Aparte de las grandes similitudes, se pueden apreciar pequeñas diferencias. En concreto, los puntos de campo más alejados del eje en dirección vertical presentan diferencias en la inclinación. Cabe destacar, que en estos puntos de campo la magnitud de todas las aberraciones es muy elevada por lo que la densidad de franjas en el interferómetro es muy alta. Esto, sumado a otras fuentes de error como pueden ser las turbulencias, hace que las medidas en estas posiciones de campo sean las más ruidosas del conjunto de medidas.

En cuanto a los mapas de coma (figuras 6.11(b, e)), se puede observar que presentan claras similitudes. En concreto, en ambos mapas se identifica un nodo de coma en eje y una aberración creciente a medida que nos alejamos del mismo. Las principales diferencias en los mapas de coma aparecen para las medidas más alejadas del eje. También se observa que se trata de medidas que no siguen la tendencia que sigue el coma en posiciones más cercanas al campo. La causa más probable de este fenómeno es que estas posiciones de campo tan alejadas del eje presentan altas aberraciones y las medidas obtenidas son muy ruidosas.

Por último, los mapas de aberración esférica (figuras 6.11(c, f)) presentan grandes similitudes. En ambos mapas la aberración esférica toma un valor aproximadamente constante a lo largo de todo el plano focal.

Finalmente, como ya se mencionó anteriormente, se ha sustituido la retrobola por una pequeña cámara CCD que se ha colocado en el plano focal del telescopio para tomar imágenes de la PSF. De nuevo, se ha hecho un barrido de todo el plano focal del telescopio.

En la figura 6.12(a) se muestra la PSF obtenida para todo el plano focal en comparación con el diagrama de impacto obtenido en Code V mediante la marco

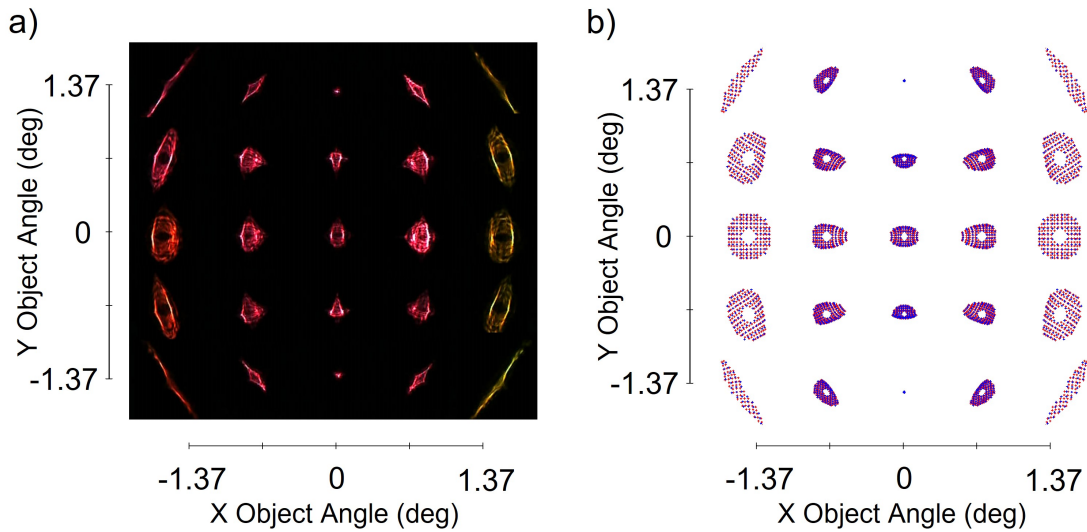


Figura 6.12: Comparación del diagrama de impacto (a) medido y (b) simulado en Code V a lo largo de todo el plano focal del telescopio.

spot2d.seq (figura 6.12(b)). En esta figura, se puede observar una clara correspondencia entre las imágenes medidas en el laboratorio y las que se han obtenido en Code V. Observamos, que no solo se ha obtenido una correspondencia en la posición de los nodos de astigmatismo sino que también en el resto de aberraciones a lo largo de todo el plano focal. Cabe destacar que, en el caso de la PSF, especialmente cuando está aberrada, es difícil seleccionar la mejor posición del detector en el plano focal ya que no se aprecia fácilmente la posición en la que se ha minimizado el desenfoque. Esto puede ser la principal causa de las diferencias que se observan en la figura 6.12, que en cualquier caso son prácticamente despreciables.

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se recoge cómo se ha realizado el alineamiento de un telescopio de dos espejos cuyo espejo secundario tiene una contribución *freeform* descrita mediante el polinomio de Zernike de astigmatismo  $Z_5$  para obtener una distribución de astigmatismo binodal en el plano focal del telescopio. Esto es, se ha alineado un telescopio *freeform* utilizando las técnicas habituales de montaje y alineamiento de sistema ópticos basadas en el uso de un interferómetro Fizeau. Esto se ha hecho

mediante la creación de una cavidad de doble paso y el soporte de un modelo óptico que permite establecer medidas comparadas, verificar la bondad de los resultados finales y determinar la validez del procedimiento. La principal dificultad del método presentado procede de la baja calidad óptica y la gran contribución de astigmatismo que presenta el telescopio para el campo en eje. Esta posición de campo es la que generalmente se utiliza para montar y alinear sistemas ópticos formados por elementos que presentan simetría de revolución, pues el preposicionamiento mecánico y el alineamiento es más sencillo. Conseguido el alineamiento en eje es habitual moverse a diferentes posiciones de campo en busca de simetrías en la aberraciones que garanticen y aseguren el alineamiento en eje. En nuestro caso este procedimiento no es válido pues carecemos de esa buena referencia inicial del campo en eje, no presenta calidad. Hemos de proceder, por tanto, accediendo a las posiciones de campo de trabajo del telescopio que se sabe coinciden con las posiciones de los dos nodos de astigmatismo en el plano imagen. También, se ha explorado el comportamiento del sistema para otras posiciones de campo con el doble objetivo de validar el alineamiento para los dos campos de trabajo y verificar que su comportamiento es acorde a lo establecido por el modelo óptico.

Paralelamente al procedimiento de alineamiento se ha realizado una comparación continua, que ha realimentado a su vez el propio proceso de alineamiento, de las medidas realizadas con las simulaciones en Code V. Estos resultados comparados muestran una alta correlación y validan plenamente el correcto alineamiento del sistema y la metodología propuesta.

En las medidas del error de frente de ondas para los campos de trabajo  $F_1$  y  $F_2$  se han obtenido valores de RMS que difieren del modelo en  $0.08\lambda$  y  $0.02\lambda$  respectivamente, lo que representa un error inferior al 0.1% en ambos casos. Estos valores se encuentran dentro de errores de medida como las turbulencias generadas por la longitud de la cavidad interferométrica que, en ocasiones, generaban medidas ruidosas y con alta variabilidad. También se ha encontrado una buena correlación entre los coeficientes de Zernike que describen estos errores del frente de ondas, concretamente, se ha obtenido que ambos estaban bien corregidos de astigmatismo. También se han realizado medidas a lo largo de todo el plano focal del telescopio, lo que ha confirmado la distribución de astigmatismo binodal y que la posición de los nodos coincide con los campos de trabajo del telescopio.

Es importante destacar que, estos resultados obtenidos en el alineamiento del telescopio constituyen a su vez, una verificación de la componente *freeform* del espejo  $M_2$ . Según NAT, sólo una componente *freeform* de astigmatismo como la que se ha descrito para  $M_2$  sería capaz de generar la distribución de astigmatismo que se ha obtenido en el plano imagen del telescopio.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este último capítulo, se va a presentar un resumen del trabajo realizado y los resultados obtenidos a lo largo de toda la tesis acompañados de las conclusiones más relevantes. Además, se presentan las posibles líneas de trabajo futuro que pueden surgir a partir de esta tesis. Por último, se presentan los productos científicos que se han generado a partir del trabajo realizado.

## 7.1. Sumario del trabajo realizado

El objetivo principal de la tesis estaba orientado al desarrollo de sistemas ópticos *freeform* para su aplicación en sistemas espaciales. Esto ha implicado abordar el desarrollo de un sistema óptico *freeform* a través de nuevas metodologías de trabajo en las áreas de diseño óptico, verificación de superficies ópticas y alineamiento de sistemas *freeform*. A continuación, se presenta un sumario del trabajo que se ha realizado para alcanzar el cumplimiento de los objetivos previamente establecidos.

1. Se ha realizado una revisión exhaustiva del estado del arte de la óptica *freeform* en distintos campos de aplicación.
  - a) Se han analizado las distintas formas disponibles para la representación matemática de las superficies *freeform*, especialmente, las bases ortogonales en el círculo de radio de unidad por ser las de mayor aplicación en los sistemas de óptica espacial. Las bases de los polinomios de Zernike y los *Q-polynomials* son las dos bases más relevantes. Los polinomios de Zernike tienen la ventaja de ser los más extendidos y conocidos en el campo de la óptica por tener una relación directa con la representación de aberraciones. Sin embargo, los *Q-polynomials* tienen ventajas en la representación de superficies *freeform* ya que fueron introducidos precisamente con ese cometido. La principal diferencia entre estas bases es que los polinomios de Zernike se definen a lo largo del eje óptico mientras que los *Q-polynomials* se definen a lo largo de la dirección normal a la superficie base a lo largo de toda la superficie. Esto implica que los polinomios de Zernike son ortogonales en la sagita mientras que los *Q-polynomials* son ortogonales en el gradiente. Esta condición de ortogonalidad supone una conexión directa entre los coeficientes asociados a los *Q-polynomials* y la pendiente local de la componente *freeform* a lo largo de toda la superficie. Esto supone una gran ventaja ya que permite realizar una optimización del diseño orientada a facilitar la posterior verificación de la superficie al permitir la limitación de la desviación de la pendiente simplemente limitando el valor de los coeficientes. Por lo tanto, la base de *Q-polynomials* es la más adecuada para la representación de superficies *freeform*, aunque

aun no está lo suficientemente extendida. Adicionalmente, a lo largo del tiempo de realización de la tesis, se ha ido extendiendo el uso de los  $Q$ -*polynomials* ya que se ha introducido en los típicos programas de diseño óptico, mientras que antes había que introducirlos como una superficie definida por el usuario (*User Defined Surface*).

- b) Se ha realizado una revisión de la Teoría Nodal de Aberraciones (NAT) y sus principales conclusiones. Al introducir una componente *freeform* en un sistema óptico, no se generan nuevos tipos de aberraciones, sino que aparece una nueva dependencia de las aberraciones con el campo. En concreto, pueden aparecer nodos de aberraciones que se han desplazado del eje óptico. Además, la teoría permite diferenciar los efectos sobre las aberraciones generados por los desalineamientos o por la componente *freeform*. Por esto, los conocimientos que aporta NAT son muy útiles durante el proceso de alineamiento de cualquier sistema óptico, ya sea o no un sistema *freeform*. En la literatura, ya se había aplicado NAT a superficies *freeform* descritas mediante los polinomios de Zernike, es decir, se habían obtenido las aberraciones y su dependencia con el campo que generaba cada uno de los elementos de la base de polinomios de Zernike. Esto facilita enormemente el uso de esta base ya que permite seleccionar los coeficientes que hay que introducir como variables durante la optimización del diseño. Además, permite incluso hacer cálculos para dar valores iniciales a estos coeficientes que estén próximos a los valores finales de modo que la optimización sea más eficiente. Sin embargo, este trabajo no estaba hecho para la base de  $Q$ -*polynomials*, lo que también supone un freno para que pudiera extenderse su uso.
- c) Se ha analizado el principal método de diseño disponible para este tipo de sistemas ópticos. Este método combina la optimización multiparamétrica con los conocimientos de NAT para seleccionar los coeficientes que deben ser introducidos como variables. Es importante entender que cada componente *freeform* genera siempre el mismo conjunto de aberraciones, con la misma dependencia con el campo y con la misma proporción entre ellas. Por esto, es importante realizar un análisis de las posibles configuraciones y seleccionar la que mejor se preste a la corrección de aberraciones

mediante óptica *freeform*. Una elección adecuada de la configuración permite corregir las aberraciones con una componente *freeform* de menor magnitud y con menor número de polinomios. Además, si es posible, es conveniente tener una superficie óptica física coincidente con el stop del sistema porque esto permite balancear la proporción de las aberraciones.

- d) Se han estudiado los distintos métodos disponibles tanto para la fabricación como la verificación de superficies *freeform*. En el caso de la verificación, no existe un método universal que sea válido para la medida de cualquier superficie, por lo que es importante seleccionar en cada caso el método más adecuado.
2. En el capítulo 3, se ha extendido la Teoría Nodal de Aberraciones a sistemas en los que la componente *freeform* está descrita mediante la base de *Q-polynomials* a través del cambio de base a los polinomios de Zernike.
    - a) El cambio de base entre los polinomios de Zernike y los *Q-polynomials* no es exacto, debe hacerse mediante un ajuste. Sin embargo, se ha obtenido una expresión analítica para el cambio que depende del parámetro de forma de la superficie  $A$ . Se ha descrito cada componente de la base de *Q-polynomials* como una serie de polinomios de Zernike y el número de elementos que es necesario que compongan dicha serie depende del valor que tome el parámetro  $A$  para la superficie concreta.
    - b) A través de la expresión analítica obtenida para el cambio de base, se han obtenido, en primer lugar, las aberraciones que genera cada uno de los *Q-polynomials* en una superficie *freeform* que coincide con el stop del sistema. A partir de estas expresiones, se han obtenido las aberraciones que genera dicha superficie cuando se aleja de la posición del stop del sistema óptico.
    - c) Con los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo, se ha establecido un método de diseño de sistemas ópticos *freeform* que permite emplear la base de *Q-polynomials* durante el proceso de optimización.
  3. A lo largo del capítulo 4, se ha llevado a cabo el diseño de un telescopio *freeform* para ser embarcado en un CubeSat que formará parte de una misión de

Observación de la Tierra. Para realizar este diseño se ha empleado la metodología desarrollada en el capítulo anterior que permite utilizar cada base de polinomios en la parte más adecuada del proceso de diseño.

- a) Se ha comenzado con el análisis de las posibles configuraciones para el telescopio. Para cada una de ellas, se han estudiado las aberraciones y su dependencia con el campo. Empleando los conocimientos de la Teoría Nodal de Aberraciones, se ha seleccionado la configuración que cumplía con los requisitos de la misión y, a su vez, mejor se prestaba a la corrección de aberraciones mediante óptica *freeform*. Una vez seleccionada la configuración, se ha establecido el diseño inicial que, preserva la simetría de rotación y, por tanto, tiene baja calidad óptica para los campos de trabajo.
  - b) A continuación, se ha realizado la corrección de aberraciones mediante una componente *freeform* descrita por la base de *Q-polynomials*. Se ha mostrado la capacidad de la óptica *freeform* en la corrección de aberraciones, introduciendo poco a poco polinomios de órdenes mayores y mejorando la calidad óptica por encima del límite por difracción. En todo momento, se ha mantenido limitada la desviación de las pendientes locales de la componente *freeform* a lo largo de toda la superficies pensando en la posterior verificación de la misma.
  - c) Una vez alcanzada la corrección de aberraciones se ha realizado el cambio de base a los polinomios de Zernike y se ha cerrado el diseño. Este cambio de base facilitó el análisis de tolerancias ya que la base de *Q-polynomials* aun no se había introducido en las típicas herramientas de diseño óptico. Además, facilitó la comunicación con el fabricante y con los *softwares* de diseño optomecánico y de análisis de luz difusa.
4. En el capítulo 5, se han verificado los espejos que componen el telescopio diseñado previamente. El espejo secundario  $M_2$  es un espejo *freeform* por lo que se ha tenido que aplicar una metodología específica para su verificación. Adicionalmente, se ha explorado un método de verificación que proporcione mayor flexibilidad y que se pueda adaptar a la medida de un amplio rango de superficies ópticas *freeform*.

- a) En primer lugar, se ha verificado la superficie del espejo primario  $M_1$ . Se trata de una superficie hiperbólica con una constante cónica cercana a  $-1$ , valor propio de una superficie parabólica. Esto permite medir la diferencia entre  $M_1$  y una parábola mediante una medida interferométrica no nula. Este tipo de medidas presentan importantes dificultades en la interpretación de resultados. Con este fin, se ha empleado un modelo del montaje con el que se han comparado las medidas y que ha permitido llevar a cabo la verificación. Los resultados han mostrado que la superficie del espejo no se encontraba dentro del rango de tolerancias establecido durante el diseño. Esto se debe a deformaciones producidas durante el proceso de pegado del espejo en su montura. Con las medidas obtenidas en el laboratorio y la ayuda del modelo en Code V, se ha obtenido la expresión matemática de la superficie real del espejo. Esta expresión matemática deberá ser empleada posteriormente para analizar el efecto que esto tiene en el desempeño del telescopio.
- b) En el caso del espejo secundario  $M_2$ , el método empleado para el diseño del telescopio y el uso de la base de  $Q$ -*polynomials* durante la optimización ha permitido que su componente *freeform* se pueda verificar directamente mediante interferometría. Para ello, se han introducido en el camino óptico elementos adicionales para compensar la superficie base y aislar la componente *freeform*. De nuevo, se trata de una medida interferométrica no nula, por lo que se ha empleado una simulación con la que comparar los resultados obtenidos. De este modo, se ha comprobado que el error de frente de ondas medido está dentro de las tolerancias del frente de ondas obtenido en la simulación en Code V, lo que implica que la componente *freeform* del espejo está dentro de las tolerancias de fabricación.
- c) Adicionalmente, se ha desarrollado un método adaptativo para la verificación de superficies *freeform* que permite medir un amplio rango de superficies *freeform* diferentes. Se ha introducido un modulador de fase (SLM) basado en cristales líquidos para compensar la componente *freeform* y generar un nulo de aberraciones en el interferómetro, es decir, en este caso sí que se espera obtener un frente de ondas plano. En este caso, también es necesario llevar a cabo una simulación del montaje para poder

optimizar la fase que se debe introducir en el SLM para obtener el nulo de aberraciones. De nuevo, hay que hacer un análisis de tolerancias para poder asegurar que el espejo ha quedado fabricado dentro de tolerancias.

5. En el capítulo 6, se ha mostrado el proceso de alineamiento del telescopio y se ha verificado la dependencia de las aberraciones con el campo en el plano imagen del sistema. Para la verificación de la calidad del telescopio se ha empleado una cavidad interferométrica en doble paso. La principal dificultad en el alineamiento de este sistema radica en que la calidad óptica en el campo en eje es muy baja. Por ello, esta posición no es válida para asegurar el alineamiento del telescopio. Se ha mostrado el modo empleado para obtener acceso a las distintas posiciones de campo, en concreto, a los campos nominales de trabajo del telescopio.
  - a) La calidad óptica resultante, se ha mostrado mediante el error de frente de ondas en los dos campos de trabajo del telescopio. Estos resultados se han comparado con el diseño en Code V y se ha obtenido una buena correlación.
  - b) Adicionalmente, se ha medido el error de frente de ondas en un *grid* de 9x9 posiciones de campo a lo largo de todo el plano imagen. De este modo, se ha obtenido la dependencia de las distintas aberraciones con el campo. De nuevo, se ha obtenido una buena correlación en la comparación de los resultados con el diseño.

## 7.2. Conclusiones

A continuación, se presentan las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado a lo largo de toda la tesis.

1. Se ha demostrado que la base de *Q-polynomials* es la más adecuada para describir la componente *freeform* de una superficie óptica, aunque aun no esté lo suficientemente extendida. Por ello, la combinación de esta base con los polinomios de Zernike supone una potente herramienta para emplear durante el diseño de sistemas *freeform*. El cambio de base entre *Q-polynomials* y po-

linomios de Zernike obtenido en el capítulo 3, proporciona la posibilidad de emplear cada una de estas bases para el cometido para el que es más adecuada durante la fase de diseño. Durante la optimización, es más adecuado emplear los *Q-polynomials* para poder limitar la desviación de la pendiente local a lo largo de la superficie y facilitar la posterior verificación de la misma. Sin embargo, a la hora de comunicarse con el fabricante o con el ingeniero mecánico que realizará el diseño optomecánico del sistema, la base de polinomios de Zernike es más conocida, está más extendida y está implementada los típicos *softwares* que se emplean en estos campos.

2. Se ha llevado a cabo la extensión de la Teoría Nodal de Aberraciones a sistemas cuya componente *freeform* se describe mediante la base de *Q-polynomials*. Esto permite emplear esta base durante el proceso de optimización del diseño en base a la predicción de la teoría en cuanto a las aberraciones resultantes. Esto es, permite seleccionar los polinomios a introducir en el proceso de optimización del diseño para alcanzar una buena corrección de aberraciones. Permite aplicar los conocimientos de NAT para realizar el análisis de configuraciones y alcanzar un diseño con una optimización más eficiente y cuya componente *freeform* está descrita mediante un menor número de polinomios.
3. Se ha desarrollado y validado un método novedoso de diseño de sistemas ópticos *freeform* que marca la hoja de ruta a seguir en cualquier diseño. Este nuevo método modificado permite emplear ambas bases, polinomios de Zernike y *Q-polynomials*. Además, al introducir el uso de los *Q-polynomials*, las superficies ópticas resultantes de la optimización pueden tener una componente *freeform* de menor magnitud que se pueda verificar interferométricamente sin necesidad de elementos ópticos adicionales. Por lo tanto, se ha obtenido un método más eficiente y orientado a facilitar la posterior verificación de las superficies ópticas.
4. Se ha validado con éxito la metodología anterior aplicándola al diseño de un telescopio *freeform* de dos espejos para embarcar en un CubeSat que formará parte de una misión de Observación de la Tierra.
5. Se ha desarrollado una metodología para realizar medidas interferométricas no nulas y alcanzar una buena interpretación de los resultados. Se ha demostrado

la conveniencia de disponer de modelos ópticos de los diferentes montajes y configuraciones de ensayo que se llevan a cabo en el laboratorio, y de la necesidad de realizar análisis de tolerancias de los mismos que sirvan para establecer criterios de éxito de los ensayos a realizar. Esta metodología de medida es válida para la verificación de superficies tanto esféricas como *freeform*.

6. Se ha desarrollado una metodología innovadora para realizar la verificación de superficies *freeform* mediante técnicas interferométricas y el uso de moduladores espaciales de luz que permiten compensar la componente *freeform* de la superficie y generar un nulo de aberraciones en el interferómetro. El uso del modulador de fase basado en cristales líquidos proporciona una flexibilidad en la compensación de la componente *freeform* que permite una fácil adaptación a la verificación de un amplio rango de superficies diferentes.
7. Se ha demostrado, a través de las prestaciones finales de un telescopio *freeform*, que toda la metodología desarrollada en esta tesis es válida, desde la implementación de técnicas de diseño basadas en elementos ópticos *freeform* y la teoría NAT hasta los procedimientos y métodos desarrollados para verificar las prestaciones de los elementos *freeform*. En el alineamiento del telescopio *freeform* se ha validado tanto el diseño como las medidas obtenidas de las superficies de los espejos. Se ha obtenido la calidad óptica que el modelo en Code V había predicho. Se ha obtenido que tanto la posición de los nodos de aberraciones como la dependencia de las principales aberraciones con el campo coinciden con lo que predice la teoría.

El trabajo realizado a lo largo de toda la tesis aporta las herramientas necesarias para trabajar con sistemas ópticos *freeform*. Permite realizar diseños orientados a facilitar la fabricación y la verificación de los elementos *freeform* y proporciona métodos de trabajo para la verificación de superficies y el alineamiento de estos sistemas.

### 7.3. Perspectivas futuras

Esta tesis se ha orientado a la selección de un elemento *freeform* para obtener un plano imagen libre de aberraciones en dos puntos alejados simétricamente del

eje óptico. Sin embargo, el potencial de la óptica *freeform* es mucho mayor y permite configurar sistemas con mapas de aberraciones en el plano imagen totalmente arbitrarios, con mayor número de superficies y mayor complejidad en su geometría dependiendo de esa arbitrariedad. Una propuesta muy interesante es explorar cómo conseguir mediante óptica *freeform* sistemas ópticos que generen anillos de aberraciones nulas en torno al eje óptico que permitan la ubicación de pequeños sensores de imagen. Ésta sería una aplicación muy demandada en el campo de observación de la Tierra de pequeños satélites que precisan de pequeños componentes, pequeños sensores de imagen, de baja masa y consumo frente los grandes planos focales más propios de misiones de mayor envergadura.

En relación al método presentado en el capítulo 5 para la verificación de superficies *freeform* mediante el uso de un modulador de fase, cabe mencionar algunas cosas. Por un lado, este método no es exclusivo para superficies *freeform*, por lo que también se puede emplear para la verificación de superficies esféricas que tampoco son sencillas de medir y cada vez son más habituales. Por otro lado, para llevar a cabo la verificación se podría emplear un algoritmo de optimización para obtener la fase en el modulador que generará un nulo de aberraciones en el interferómetro. Este desarrollo sería de gran utilidad, especialmente para la medida de superficies cuya componente esférica o *freeform* es desconocida.

También en relación a este montaje, sería interesante explorar el modo en que el interferómetro y el modulador quedaran acoplados en un montaje fijo. De este modo, se obtendría un interferómetro en el que el modulador se podría activar o no en función de si es necesario para la superficie concreta a verificar. Incluso se podría plantear un interferómetro comercial con un modulador de fase integrado en el que el control del modulador esté en el propio *software* de control del interferómetro. De este modo, cuando el modulador esté activado, el interferómetro proporciona la medida del error de frente de ondas obtenido y la fase que se ha introducido en el modulador para obtener dicha medida.

En cuanto al alineamiento de sistemas *freeform*, sería interesante trabajar en dirección a encontrar una metodología universal que se pueda aplicar al alineamiento de múltiples sistemas ópticos distintos. En función del número de elementos que compongan el sistema, su apertura o el campo, cada sistema tendrá requerimien-

tos diferentes durante la fase de alineamiento. Sin embargo, se podrían encontrar procesos comunes a todos ellos que se puedan sistematizar.

## 7.4. Productos científicos relacionados con la tesis

### 7.4.1. Artículos científicos

Andrea García-Moreno, Tomás Belenguer-Dávila and Luis M. González-Fernández, “Freeform mirror validation by interferometric techniques using a spatial light modulator”, *OSA Continuum* 2, 1605-1615 (2023).

Andrea García-Moreno, René Restrepo, Tomás Belenguer-Dávila, and Luis M. González-Fernández, “Field aberrations in terms of the Q-polynomial basis and its relationship to the Zernike basis”, *OSA Continuum* 4, 542-555 (2021).

Andrea García-Moreno, Tomás Belenguer-Dávila, and Luis M. González-Fernández, “Freeform optics adapted to the design of spatial instrumentation for Earth observation”, *Óptica Pura y Aplicada* 52(2) 51006:1-11 (2019).

### 7.4.2. Comunicaciones a congresos

Andrea García Moreno, Rafael García López, David Escribano Lahera, Carmen Vázquez Pérez, Marianela Fernández Rodríguez, Luis Miguel González Fernández y Tomás Belenguer Dávila, “*Optical design of a two-mirror freeform telescope inside INTA SmallSat constellation program*”. Contribución en forma de póster al *Spanish Optical Design Meeting* (2024).

Andrea García Moreno y Luis Miguel González Fernández, “*Alignment of a freeform telescope with binodal astigmatism at the image plane*”. Contribución en forma de charla al *Optical Design and Fabrication Congress*, OSA (2023).

Andrea García Moreno, Rafael García López, David Escribano Lahera, Marianela Fernández Rodríguez, Carmen Vázquez Pérez y Luis Miguel González Fernández, “CINCLUS, un espectrómetro para la misión ANSER”. Contribución en forma de charla al IV Congreso de Ingeniería Espacial (2022).

Andrea García Moreno, Tomás Belenguer Dávila y Luis Miguel González Fernández, “*CINCLUS, freeform optics on board an Earth Observation mission*”. Contribución en forma de charla al *Workshop on Innovative Technologies for Space Optics*, ESA (2019).

Andrea García Moreno, Tomás Belenguer Dávila y Luis Miguel González Fernández, “La óptica de forma libre (freeform optics): una nueva tecnología para el diseño de óptica espacial”. Contribución en forma de charla al Encuentro RIA-SpaceTec: nuevas perspectivas en el desarrollo de instrumentación astronómica en España (2018).

Andrea García Moreno, Tomás Belenguer Dávila y Luis Miguel González Fernández, “*Freeform optics adapted to the design of spatial instrumentation for Earth observation*”. Contribución en forma de póster a la Reunión Nacional de Óptica (2018).

# Parte III

## Anexos



## Anexo A

# Planos de fabricación de los espejos

Una vez que se ha cerrado el diseño y se ha completado el análisis de tolerancias, se deben generar los planos de fabricación de los espejos para contactar con el fabricante. Lo primero que hubo que hacer al contactar con el fabricante, fue transformar las tolerancias de las superficies de los espejos (curvatura, componente esférica y componente *freeform*) en tolerancias en la sagita. Estas tolerancias en la sagita de ambos espejos se incluyeron en los planos de fabricación que se puede ver en las figuras A.1 y A.2.

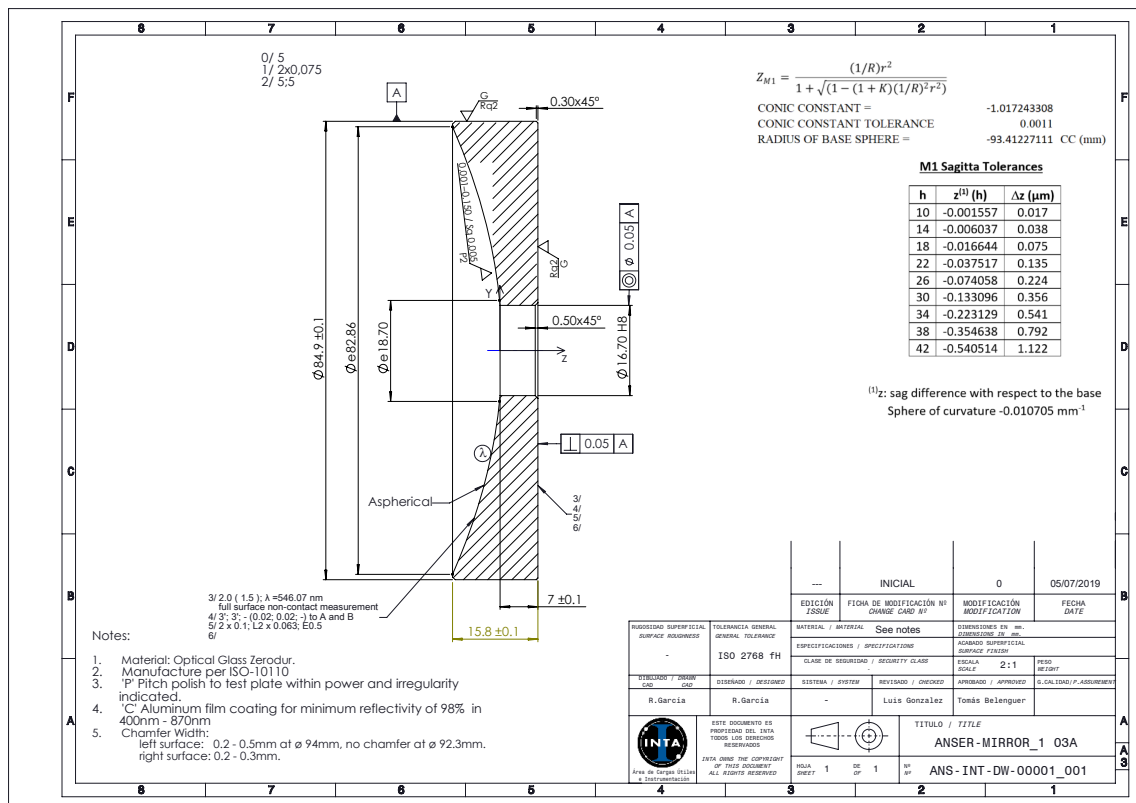


Figura A.1: Plano de fabricación del espejo primario M<sub>1</sub>.

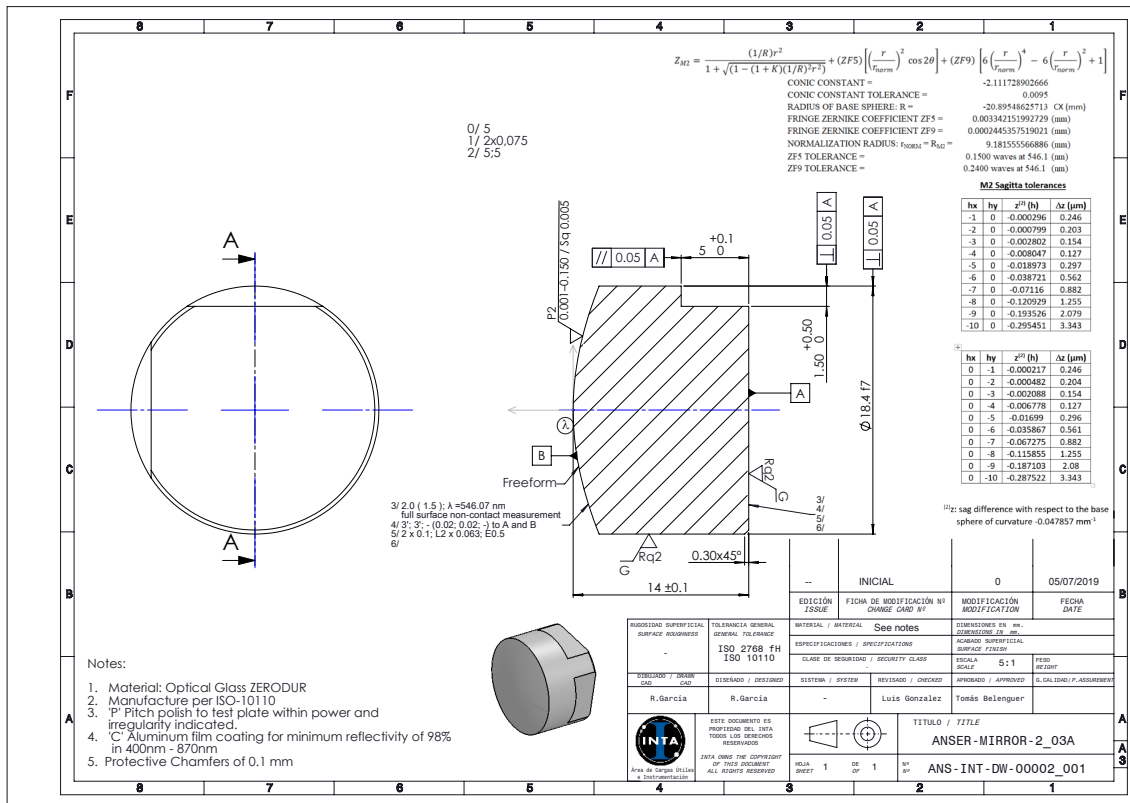


Figura A.2: Plano de fabricación del espejo secundario  $M_2$ .



## Anexo B

### Informes de pulido de los espejos

Una vez que los espejos han sido fabricados se realiza la recepción de los mismos junto con los informe que proporciona el fabricante para justificar que han sido fabricados correctamente, es decir, que cumplen con las tolerancias especificadas. En este caso, el pulido de los espejos lo realizó la empresa alemana Asphericon y los informes que proporcionaron junto con los espejos se muestran en las figuras B.1 y B.2. En ellos se pueden ver las medidas finales que realizaron de las superficie de los espejos y que ambos cumplen con las tolerancias de RMS superficial. Es interesante que, en las medidas que proporcionan, se ven claramente los errores de pulido de frecuencia media que, como se mencionó en el capítulo 2, son inherentes al proceso de fabricación y pulido. En cualquier caso, estos errores de pulido de frecuencia media se mantienen dentro del rango de tolerancias.

Kunden-Nr./Customer No: Espejo M1 - Fabricación, 14.10.2019  
 Linsen-Nr./Lens No: 190080-001-01C/000004  
 Messung/Measurement: 2a - 1st - Lupos260-1 2D, Date: 2019-11-27



## Messdatenprotokoll / Record of measurement

ISO Formabweichung / Deviations ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ )				Filtereinstellungen / Filter settings			
A	0,1 fr	RMSt	0.039 $\mu\text{m}$	none			
B	1,1 fr	RMSi	0.038 $\mu\text{m}$				
C	0.061 $\mu\text{m}$	RMSa	0.037 $\mu\text{m}$				
PV	0.287 $\mu\text{m}$						

Oberflächenformabw. / Surface form dev.		Abweichungsprofil / Deviation profile			
	90°	pv: 119.0 nm	rms: 20.2 nm		
	0°	pv: 174.1 nm	rms: 22.9 nm		

3D-Formabweichung / 3D form deviation		Zeichnungstoleranzen / Drawing tolerances			
	182 nm	A	0,1 fr	$\leq 2,0 \text{ fr}$	✓
	-105 nm	B	1,1 fr	$\leq 1,5 \text{ fr}$	✓

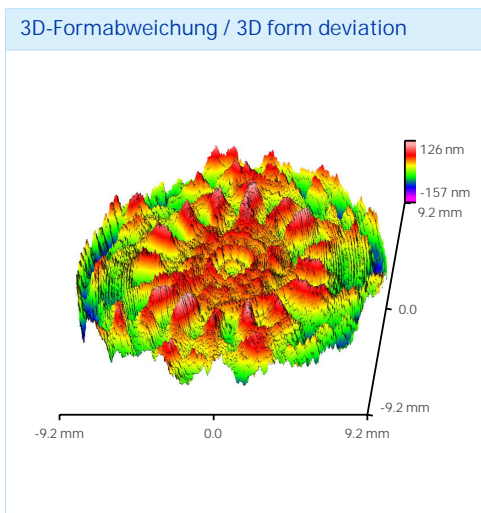
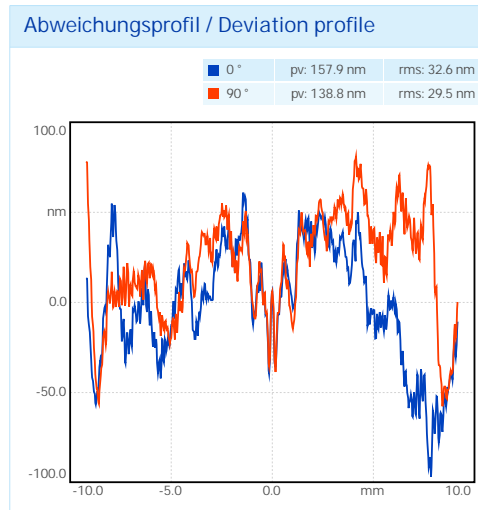
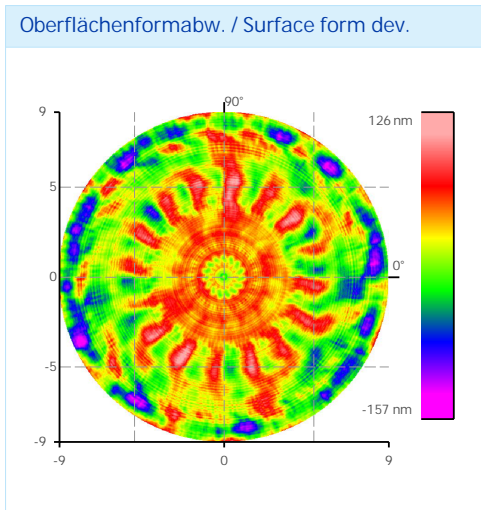
Figura B.1: Informe de fabricación del espejo primario  $M_1$ .

Kunden-Nr./Customer No: Espejo M2 - Fabricación, 14.10.2019  
 Linsen-Nr./Lens No: 190080-004-01C/000003  
 Messung/Measurement: 5 - 1st - Lupos260-1 2D, Date: 2020-01-24



## Messdatenprotokoll / Record of measurement

ISO Formabweichung / Deviations ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ )				Filtereinstellungen / Filter settings			
A	0,3 fr	RMSt	0.041 $\mu\text{m}$	none			
B	1,0 fr	RMSi	0.035 $\mu\text{m}$				
C	0.073 $\mu\text{m}$	RMSa	0.033 $\mu\text{m}$				
PV	0.283 $\mu\text{m}$						



Zeichnungstoleranzen / Drawing tolerances

A	0,3 fr	$\leq 2,0 \text{ fr}$	✓
B	1,0 fr	$\leq 1,5 \text{ fr}$	✓

Figura B.2: Informe de fabricación del espejo secundario  $M_2$ .



## Anexo C

# Plano de fabricación del espejo esférico auxiliar para la verificación de $M_2$

Una vez cerrado el diseño del montaje que se va a emplear para la verificación del espejo  $M_2$ , se generan los planos de fabricación de los elementos ópticos que se han diseñado específicamente para este cometido. En concreto, se genera el plano de fabricación del espejo esférico que formará parte del montaje y que se muestra en la figura C.1.

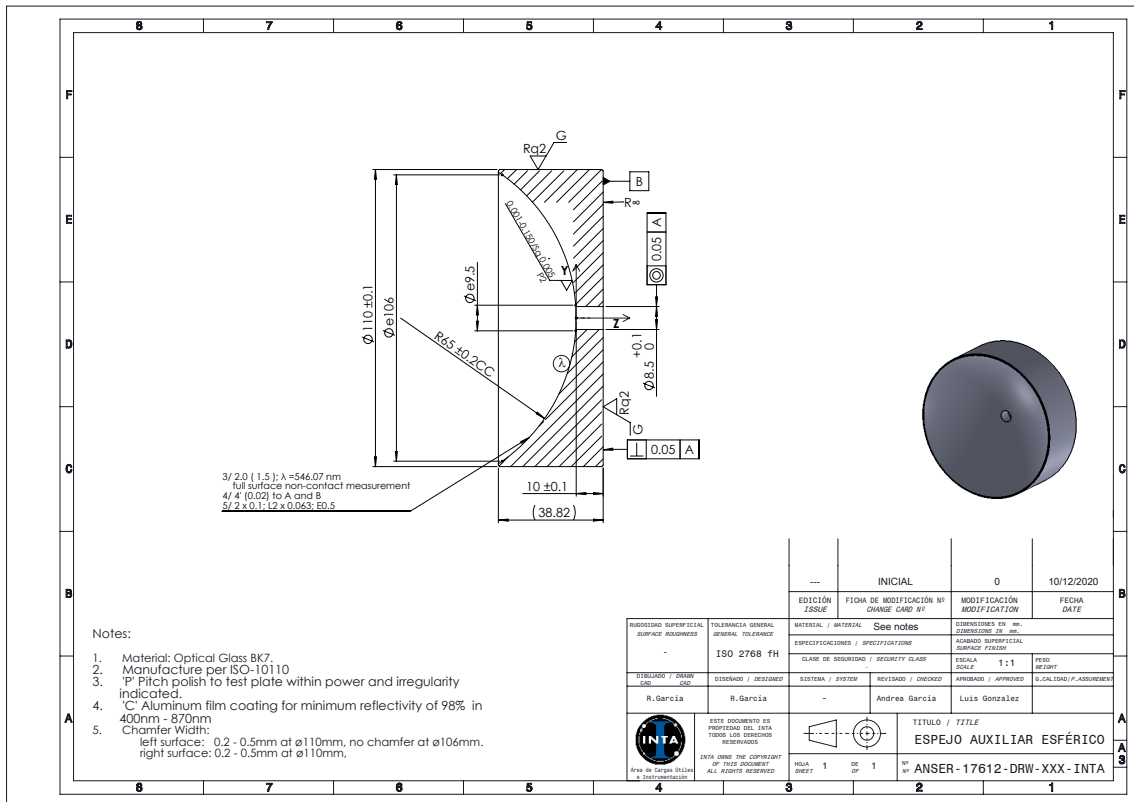


Figura C.1: Plano de fabricación del espejo esférico auxiliar para la verificación de  $M_2$ .

## Anexo D

### Misión ANSER

La investigación realizada en esta tesis se encuadra en el marco del programa de nanosatélites del INTA. El Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (Esteban Terradas), más conocido por su acrónimo INTA, es un Organismo Público de Investigación (OPI) adscrito a la Secretaría de Estado del Ministerio de Defensa especializado en la investigación y el desarrollo tecnológico en aeronáutica, espacio, hidrodinámica, seguridad y defensa. Además de realizar actividades de investigación científica y de desarrollo de sistemas y prototipos, presta servicios tecnológicos a empresas, universidades e instituciones.

El conocimiento y experiencia adquiridos en el estándar CubeSat ha impulsado al INTA a embarcarse en una misión pionera en el espacio, la misión ANSER (*Advanced Nanosatellite Systems for Earth observation Research*), una misión de Observación de la Tierra (EO, por sus siglas en inglés) para el estudio y monitorización de la Calidad de Aguas Continentales (embalses y pantanos situados en la Península Ibérica), que constituye la primera misión del Programa de Constelaciones de Pequeños Satélites del INTA, un programa a largo plazo para poder implementar misiones espaciales basadas en constelaciones de nanosatélites. ANSER se trata de una misión piloto que tiene como objetivo principal el desarrollo y la calificación de la tecnología clave que permita abordar futuras misiones de Observación de la Tierra mediante el uso de nuevos conceptos de sistemas colaborativos fraccionados, constelaciones de pequeños satélites volando en formación y tecnologías ópticas miniaturizadas. La misión se compone de un clúster de tres nanosatélites basados en

la tecnología Cubesat de bajo coste, de tal forma que cada satélite estará formado por tres unidades de CubeSat con un peso aproximado de 3 Kg.

Los satélites ANSER tienen funcionalidad diferenciada y operarán de forma nominal siguiendo una estructura jerárquica, en la que existen dos roles:

- **Satélite Líder:** Cubesat encargado de controlar y coordinar la operación del clúster, además transporta una pequeña cámara pancromática de baja resolución denominada APIS, cuyas imágenes ayudarán a interpretar la información generada por los satélites *Followers*.
- **Satélite *Follower*:** Cubesat encargado de transportar un pequeño espectrómetro (carga útil CINCLUS fraccionada en la que se incluye el telescopio con óptica *freeform*) y se comunica con el satélite Líder, que es quien comanda su operación durante la fase de explotación científica, mediante un sistema de comunicaciones ISL.

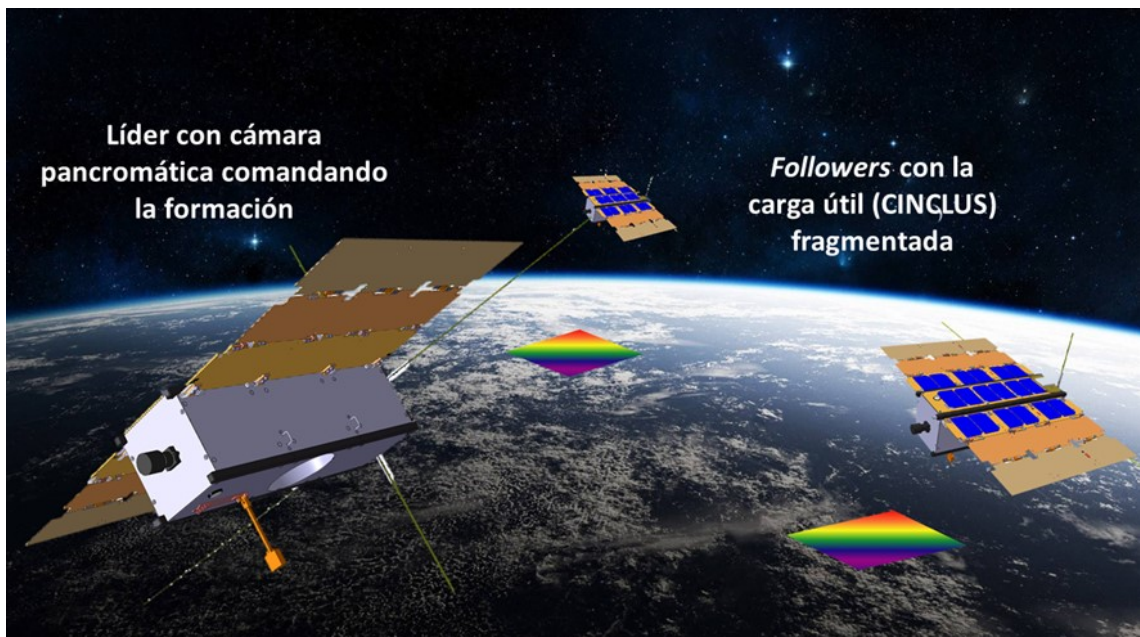


Figura D.1: Vuelo en formación del líder y los dos *Followers* que componen la misión ANSER.

La misión ANSER se compone de un Líder y dos *Followers* (Figura D.1).

ANSER es el pionero de un sistema avanzado para futuras misiones EO, operando en órbitas por debajo de los 500 km para aprovechar las leves fuerzas aero-

dinámicas atmosféricas y poder implementar un control del vuelo en formación (la separación entre los satélites del clúster está limitada para desarrollar el concepto de misión fraccionada). Esto implica que, sin ninguna capacidad de propulsión a bordo, la vida operativa del conjunto de nanosatélites estará limitada como máximo a dos o tres años. Sin embargo, el concepto tecnológico que sustenta este proyecto convierte esa aparente desventaja en la principal fortaleza: respaldado por la tecnología low-cost de los Cubesat y numerosas oportunidades de lanzamiento, la constelación ANSER se actualizará periódicamente con nuevos satélites y, como consecuencia, se nutrirá de la rápida evolución tecnológica en cualquier momento.

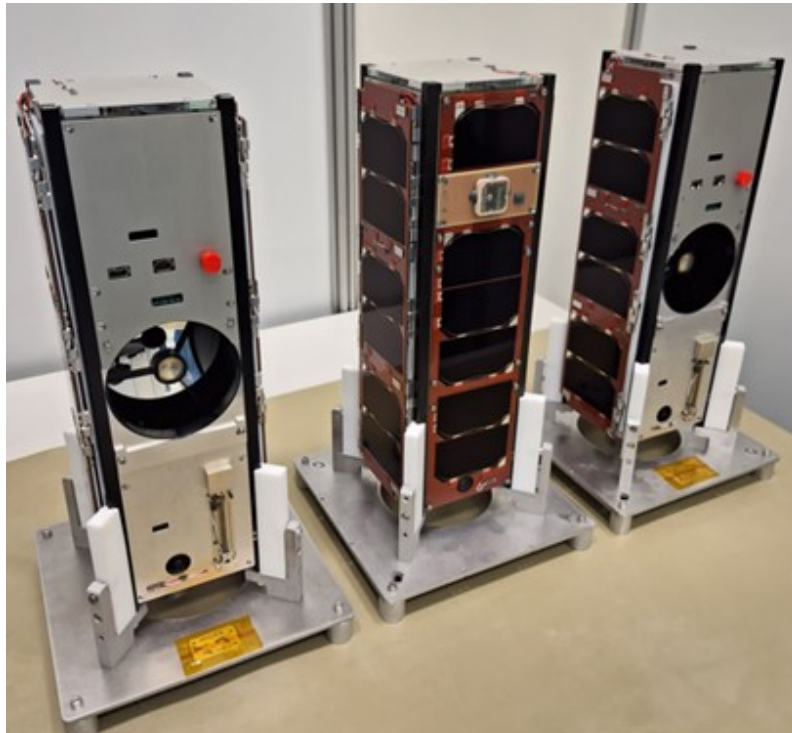


Figura D.2: Los tres satélites que componen la misión ANSER.

Además, dado el carácter científico de la misión, permitirá el estudio y monitorización de la calidad de las aguas de algunos embalses y pantanos de la península ibérica, permitiendo un estudio de los diferentes contaminantes. El estudio de la calidad del agua mediante el empleo de sensores espaciales se basa en la cuantificación de aquellos compuestos disueltos y partículas suspendidas que modifican las propiedades ópticas del cuerpo de agua. Los constituyentes de mayor interés en aguas interiores son aquellos que proporcionan información sobre el estado ecológico, sus

niveles de contaminación o la posible presencia de microorganismos tóxicos, lo que incluye pigmentos fotosintéticos como Clorofila-A y Ficocianina o materia orgánica disuelta.

CINCLUS permitirá producir estimaciones de estos componentes en lagos y embalses de tamaño mediano en España y en paralelo, APIS proporcionará imágenes pancromáticas para evaluar la cobertura de nubes, la extensión del agua y el estado de la cobertura terrestre alrededor del cuerpo de agua en el momento de cada paso de CINCLUS.

La misión ANSER se inició en 2017 y tras completar el desarrollo de sus tres Cubestras fue puesta en órbita por la compañía Arianespace mediante el cohete Vega VV23 el 9 de octubre de 2023 desde su base de lanzamiento en Korou (Guayana Francesa). Un fallo del lanzador durante el despliegue de los Cubesat impidió poner en órbita el Líder pero sí logró poner con éxito los dos *Followers* que transportan la carga útil CINCLUS. En el momento del cierre de esta tesis la misión se encuentra en fase de *Commissionig*, a la espera del inminente encendido de la carga útil.

# Bibliografía

- [1] K. P. Thompson, T. Schmid, P. F. Kao, and J. P. Rolland. Recent discoveries from nodal aberration theory. In *International Optical Design Conference*, page IThB2. Optica Publishing Group, 2010.
- [2] R. A. Buchroeder. *Tilted component optical systems*. PhD thesis, University of Arizona, 1976.
- [3] R. A. Hicks. Controlling a ray bundle with a free-form reflector. *Optics letters*, 33(15):1672–1674, 2008.
- [4] T. Ma, J. Yu, P. Liang, and C. Wang. Design of a freeform varifocal panoramic optical system with specified annular center of field of view. *Optics express*, 19(5):3843–3853, 2011.
- [5] F. Muñoz, P. Benítez, and J. C. Miñano. High-order aspherics: the sms nonimaging design method applied to imaging optics. In *Novel Optical Systems Design and Optimization XI*, volume 7061, page 70610G. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [6] D. Cheng, Y. Wang, C. Xu, W. Song, and G. Jin. Design of an ultra-thin near-eye display with geometrical waveguide and freeform optics. *Optics express*, 22(17):20705–20719, 2014.
- [7] K. Takahashi. Development of ultrawide-angle compact camera using free-form optics. *Optical Review*, 18(1):55–59, 2011.
- [8] P. Zamora, A. Cvetkovic, M. Buljan, M. Hernández, P. Benítez, J. C. Miñano, O. Dross, R. Alvarez, and A. Santamaría. Advanced pv concentrators. In *2009*

- 34th IEEE Photovoltaic Specialists Conference (PVSC)*, pages 000929–000932. IEEE, 2009.
- [9] F. Fournier and J. P. Rolland. Design methodology for high brightness projectors. *Journal of Display Technology*, 4(1):86–91, 2008.
- [10] K. Wang, D. Wu, F. Chen, Z. Liu, X. Luo, and S. Liu. Angular color uniformity enhancement of white light-emitting diodes integrated with freeform lenses. *Optics letters*, 35(11):1860–1862, 2010.
- [11] V. Olikier. Optical design of freeform two-mirror beam-shaping systems. *JOSA A*, 24(12):3741–3752, 2007.
- [12] J. P. Rolland, M. A. Davies, T. J. Suleski, C. Evans, A. Bauer, J. C. Lambropoulos, and K. Falaggis. Freeform optics for imaging. *Optica*, 8(2):161–176, 2021.
- [13] J. Ye, L. Chen, X. Li, Q. Yuan, and Z. Gao. Review of optical freeform surface representation technique and its application. *Optical Engineering*, 56(11):110901, 2017.
- [14] H. Gross, A. Brömel, M. Beier, R. Steinkopf, J. Hartung, Y. Zhong, M. Oleszko, and D. Ochse. Overview on surface representations for freeform surfaces. In *Optical Systems Design 2015: Optical Design and Engineering VI*, volume 9626, pages 195–208. SPIE, 2015.
- [15] A. Broemel, U. Lippmann, and H. Gross. Freeform surface descriptions. part i: mathematical representations. *Advanced Optical Technologies*, 6(5):327–336, 2017.
- [16] Ilhan Kaya, Kevin P Thompson, and Jannick P Rolland. Comparative assessment of freeform polynomials as optical surface descriptions. *Optics express*, 20(20):22683–22691, 2012.
- [17] W. T. Plummer, J. G. Baker, and J. Van Tassell. Photographic optical systems with nonrotational aspheric surfaces. *Applied optics*, 38(16):3572–3592, 1999.
- [18] G. M. Phillips. *Interpolation and approximation by polynomials*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2003.

- [19] M. Paluszny, H. Prautzsch, and W. Boehm. *Métodos de Bézier y B-splines*. 2005.
- [20] P. Jester, C. Menke, and K. Urb. B-spline representation of optical surfaces and its accuracy in a ray trace algorithm. *Applied optics*, 50(6):822–828, 2011.
- [21] M. Unser. Splines: A perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal processing magazine*, 16(6):22–38, 1999.
- [22] J. Lowther and C. K. Shene. Teaching b-splines is not difficult! *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(1):381–385, 2003.
- [23] J. Fisher, J. Lowther, and C. K. Shene. If you know b-splines well, you also know nurbs! *ACM Sigcse Bulletin*, 36(1):343–347, 2004.
- [24] M. Chrisp. Method of and system for optimizing nurbs surfaces for an imaging system, October 8 2019. US Patent 10,437,943.
- [25] O. Cakmakci, B. Moore, H. Foroosh, and J. P. Rolland. Optimal local shape description for rotationally non-symmetric optical surface design and analysis. *Optics express*, 16(3):1583–1589, 2008.
- [26] Q. Hao, X. Chang, Y. Hu, X. Tao, J. Lv, Y. Ning, and X. Cheng. Description method with automatically configurable gaussian radial basis function for complex freeform surface. *Optics Express*, 29(11):16804–16819, 2021.
- [27] K. Tong, Y. Zheng, Z. Zhang, X. Zhao, B. Zhang, L. Song, L. Wang, C. Wang, and P. Wu. Model of radial basis functions based on surface slope for optical freeform surfaces. *Optics express*, 26(11):14010–14023, 2018.
- [28] N. Takaki, J. C. Papa, A. Bauer, and J. P. Rolland. Off-axis conics as base surfaces for freeform optics enable null testability. *Optics Express*, 28(8):10859–10872, 2020.
- [29] V. Lakshminarayanan and A. Fleck. Zernike polynomials: a guide. *Journal of Modern Optics*, 58(7):545–561, 2011.
- [30] G. W. Forbes. Characterizing the shape of freeform optics. *Optics express*, 20(3):2483–2499, 2012.

- [31] G. W. Forbes. Fitting freeform shapes with orthogonal bases. *Optics express*, 21(16):19061–19081, 2013.
- [32] Y. Mejía Barbosa. El frente de onda y su representación con polinomios de zernike. *Ciencia y Tecnología para la Salud Visual y Ocular*, 9(2):145–166, 2011.
- [33] K. Niu and C. Tian. Zernike polynomials and their applications. *Journal of Optics*, 2022.
- [34] B. H. Shakibaei and R. Paramesran. Recursive formula to compute zernike radial polynomials. *Optics letters*, 38(14):2487–2489, 2013.
- [35] G. W. Forbes. Shape specification for axially symmetric optical surfaces. *Optics express*, 15(8):5218–5226, 2007.
- [36] G. W. Forbes. Manufacturability estimates for optical aspheres. *Optics express*, 19(10):9923–9942, 2011.
- [37] G. W. Forbes. Robust, efficient computational methods for axially symmetric optical aspheres. *Optics express*, 18(19):19700–19712, 2010.
- [38] B. Ma, L. Li, K. P. Thompson, and J. P. Rolland. Applying slope constrained q-type aspheres to develop higher performance lenses. *Optics express*, 19(22):21174–21179, 2011.
- [39] N. Takaki, A. Bauer, and J. P. Rolland. On-the-fly surface manufacturability constraints for freeform optical design enabled by orthogonal polynomials. *Optics express*, 27(5):6129–6146, 2019.
- [40] M. Aftab, J. H. Burge, G. A. Smith, L. Graves, C. Oh, and D. W. Kim. Chebyshev gradient polynomials for high resolution surface and wavefront reconstruction. In *Optical Manufacturing and Testing XII*, volume 10742, page 1074211. International Society for Optics and Photonics, 2018.
- [41] J. Ye, Z. Gao, S. Wang, J. Cheng, W. Wang, and W. Sun. Comparative assessment of orthogonal polynomials for wavefront reconstruction over the square aperture. *JOSA A*, 31(10):2304–2311, 2014.

- 
- [42] R. Navarro, J. L. López, J. A. Díaz, and E. P. Sinusía. Generalization of zernike polynomials for regular portions of circles and ellipses. *Optics express*, 22(18):21263–21279, 2014.
- [43] V. N. Mahajan. Zernike annular polynomials and optical aberrations of systems with annular pupils. *Applied optics*, 33(34):8125–8127, 1994.
- [44] V. N. Mahajan and G. Dai. Orthonormal polynomials for hexagonal pupils. *Optics letters*, 31(16):2462–2464, 2006.
- [45] I. Kaya and J. P. Rolland. Hybrid rbf and local  $\phi$ -polynomial freeform surfaces. *Advanced Optical Technologies*, 2(1):81–88, 2013.
- [46] H. H. Hopkins. *Wave theory of aberrations*. Clarendon Press, 1950.
- [47] K. P. Thompson. Description of the third-order optical aberrations of near-circular pupil optical systems without symmetry. *JOSA A*, 22(7):1389–1401, 2005.
- [48] K. P. Thompson. *Aberration fields in tilted and decentered optical systems*. PhD thesis, The University of Arizona, 1980.
- [49] K. Fuerschbach, J. P. Rolland, and K. P. Thompson. A new family of optical systems employing  $\varphi$ -polynomial surfaces. *Optics express*, 19(22):21919–21928, 2011.
- [50] K. Fuerschbach, J. P. Rolland, and K. P. Thompson. Theory of aberration fields for general optical systems with freeform surfaces. *Optics express*, 22(22):26585–26606, 2014.
- [51] K. P. Thompson. A graphic approach to the analysis of perturbed optical systems. In *1980 International Lens Design Conference*, volume 237, pages 127–134. International Society for Optics and Photonics, 1980.
- [52] K. P. Thompson. Beyond optical design interaction between the lens designer and the real world. In *1985 International Lens Design Conference*, volume 554, pages 426–438. International Society for Optics and Photonics, 1986.
- [53] T. Schmid, K. P. Thompson, and J. P. Rolland. A unique astigmatic nodal property in misaligned ritchey-chrétien telescopes with misalignment coma removed. *Optics express*, 18(5):5282–5288, 2010.

- [54] T. Schmid, J P. Rolland, A. Rakich, and K. P. Thompson. Separation of the effects of astigmatic figure error from misalignments using nodal aberration theory (nat). *Optics express*, 18(16):17433–17447, 2010.
- [55] K. Fuerschbach. *Freeform,  $\varphi$ -polynomial optical surfaces: optical design, fabrication and assembly*. PhD thesis, University of Rochester, 2014.
- [56] K. Fuerschbach, J. P. Rolland, and K. P. Thompson. Aberration behavior of a classical two-mirror telescope in the presence of mount error using nodal aberration theory. In *Frontiers in Optics*, pages FTu5F–2. Optica Publishing Group, 2012.
- [57] A. Bauer and J. P. Rolland. Design of a freeform electronic viewfinder coupled to aberration fields of freeform optics. *Optics express*, 23(22):28141–28153, 2015.
- [58] H. Shi, H. Jiang, X. Zhang, C. Wang, and T. Liu. Analysis of nodal aberration properties in off-axis freeform system design. *Applied Optics*, 55(24):6782–6790, 2016.
- [59] Y. Zhong and H. Gross. Initial system design method for non-rotationally symmetric systems based on gaussian brackets and nodal aberration theory. *Optics express*, 25(9):10016–10030, 2017.
- [60] J. C. Papa, J. M. Howard, and J. P. Rolland. Starting point designs for freeform four-mirror systems. *Optical Engineering*, 57(10):101705–101705, 2018.
- [61] S. Kumar, Z. Tong, and X. Jiang. Advances in the design and manufacturing of novel freeform optics. *International Journal of Extreme Manufacturing*, 4(3):032004, 2022.
- [62] J. R. Rogers. Design techniques for systems containing tilted components. In *Design and Engineering of Optical Systems II*, volume 3737, pages 286–300. SPIE, 1999.
- [63] J. R. Rogers. Using nodal aberration theory for optical design. *Robert Shannon and Roland Shack: Legends in Applied Optics*, 148:50, 2005.
- [64] A. Bauer, E. M. Schiesser, and J. P. Rolland. Starting geometry creation and design method for freeform optics. *Nature communications*, 9(1):1–11, 2018.

- 
- [65] H. Ries and J. Muschaweck. Tailored freeform optical surfaces. *JOSA A*, 19(3):590–595, 2002.
- [66] F. Duerr and H. Thienpont. Freeform imaging systems: Fermat’s principle unlocks “first time right” design. *Light: Science & Applications*, 10(1):95, 2021.
- [67] W. A. Parkyn. Design of illumination lenses via extrinsic differential geometry. In *Illumination and Source Engineering*, volume 3428, pages 154–162. International Society for Optics and Photonics, 1998.
- [68] T. Yang, G. F. Jin, and J. Zhu. Automated design of freeform imaging systems. *Light: Science & Applications*, 6(10):e17081–e17081, 2017.
- [69] P. Benitez, R. M. Arroyo, and J. C. Minano. Design in 3d geometry with the simultaneous multiple surface design method of nonimaging optics. In *Nonimaging Optics: Maximum Efficiency Light Transfer V*, volume 3781, pages 12–21. International Society for Optics and Photonics, 1999.
- [70] T. Blalock, K. Medicus, and J. D. Nelson. Fabrication of freeform optics. In *Optical Manufacturing and Testing XI*, volume 9575, page 95750H. International Society for Optics and Photonics, 2015.
- [71] D. J. Nicholas and J. E. Boon. The generation of high precision aspherical surfaces in glass by cnc machining. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 14(4):593, 1981.
- [72] D. D. Walker, A. T. H. Beaucamp, D. Brooks, R. Freeman, A. King, G. McCavana, R. Morton, D. Riley, and John J. Simms. Novel cnc polishing process for control of form and texture on aspheric surfaces. In *Current Developments in Lens Design and Optical Engineering III*, volume 4767, pages 99–105. SPIE, 2002.
- [73] S. R. Patterson and E. B. Magrab. Design and testing of a fast tool servo for diamond turning. *Precision Engineering*, 7(3):123–128, 1985.
- [74] L. Zhu, Z. Li, F. Fang, S. Huang, and X. Zhang. Review on fast tool servo machining of optical freeform surfaces. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 95(5):2071–2092, 2018.

- [75] D. C. Harris. History of magnetorheological finishing. In *Window and dome technologies and materials XII*, volume 8016, page 80160N. International Society for Optics and Photonics, 2011.
- [76] K. Saraswathamma. Magnetorheological finishing: a review. *International Journal of Current Engineering and Technology, Special Issue-2*, 2014.
- [77] P.R. Dumas, J. Fleig, G. W. Forbes, D. Golini, W. Kordonski, P. Murphy, A. Shorey, and M. Tricard. Flexible polishing and metrology solutions for free-form optics. In *ASPE Free-Form Optics, 2004 Winter Topical Meeting, Chapel Hill, NC*, pages 4–5. Citeseer, 2004.
- [78] M. Kumar, A. Kumar, A. Alok, and M. Das. Magnetorheological method applied to optics polishing: A review. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 804, page 012012. IOP Publishing, 2020.
- [79] C. Supranowitz and A. Jones. Magnetorheological finishing of freeform optics using a spiral toolpath. In *Optifab 2021*, volume 11889, pages 209–216. SPIE, 2021.
- [80] M. Pohl, O. Kukso, R. Boerret, and R. Rascher. Mid-spatial frequency error generation mechanisms and prevention strategies for the grinding process. *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications*, 16(1):1–11, 2020.
- [81] H. Aryan, G. D. Boreman, and T. J. Suleski. Simple methods for estimating the performance and specification of optical components with anisotropic mid-spatial frequency surface errors. *Optics express*, 27(22):32709–32721, 2019.
- [82] S. Chen, S. Xue, D. Zhai, and G. Tie. Measurement of freeform optical surfaces: trade-off between accuracy and dynamic range. *Laser & Photonics Reviews*, 14(5):1900365, 2020.
- [83]
- [84] G. Rajamohan, M. S. Shunmugam, and G. L. Samuel. Practical measurement strategies for verification of freeform surfaces using coordinate measuring machines. *Metrology and Measurement Systems*, 18(2):209–222, 2011.

- 
- [85] G. He, Y. Sang, H. Wang, and G. Sun. A profile error evaluation method for freeform surface measured by sweep scanning on cmm. *Precision Engineering*, 56:280–292, 2019.
- [86] T. Guo, L. Wang, J. Chen, X. Fu, and X. Hu. Development of a large-range atomic force microscope measuring system for optical free form surface characterization. *Measurement Science and Technology*, 23(11):115401, 2012.
- [87] Y. L. Chen, W. L. Zhu, S. Yang, B. F. Ju, and Y. Ge. Large-area profile measurement of sinusoidal freeform surfaces using a new prototype scanning tunneling microscopy. *Precision Engineering*, 38(2):414–420, 2014.
- [88] F. Z. Fang, X. D. Zhang, A. Weckenmann, G. X. Zhang, and C. Evans. Manufacturing and measurement of freeform optics. *CIRP Annals*, 62(2):823–846, 2013.
- [89] Q. Hao, Wang S, Y. Hu, H. Cheng, M. Chen, and T. Li. Virtual interferometer calibration method of a non-null interferometer for freeform surface measurements. *Applied optics*, 55(35):9992–10001, 2016.
- [90] A. J. MacGovern and J. C. Wyant. Computer generated holograms for testing optical elements. *Applied optics*, 10(3):619–624, 1971.
- [91] K. Creath and J. C. Wyant. Use of computer-generated holograms in optical testing. *Handbook of Optics*, 2:14–1, 1995.
- [92] M. Beier, D. Stumpf, U. D. Zeitner, A. Gebhardt, J. Hartung, S. Risse, R. Eberhardt, H. Gross, and A. Tünnermann. Measuring position and figure deviation of freeform mirrors with computer generated holograms. In *Freeform Optics*, pages FT3B–2. Optical Society of America, 2015.
- [93] K. Fuerschbach, K. P. Thompson, and J. P. Rolland. Interferometric measurement of a concave,  $\varphi$ -polynomial, zernike mirror. *Optics letters*, 39(1):18–21, 2014.
- [94] L. Zhang, S. Zhou, D. Li, Y. Liu, T. He, B. Yu, and J. Li. Pure adaptive interferometer for free form surfaces metrology. *Optics express*, 26(7):7888–7898, 2018.

- [95] Y. He, L. Huang, X. Hou, W. Fan, and R. Liang. Modeling near-null testing method of a freeform surface with a deformable mirror compensator. *Applied Optics*, 56(33):9132–9138, 2017.
- [96] A. R. Jewel, V. Akondi, and B. Vohnsen. A direct comparison between a mems deformable mirror and a liquid crystal spatial light modulator in signal-based wavefront sensing. *Journal of the European Optical Society-Rapid publications*, 8, 2013.
- [97] J. W. Goodby, P. J. Collings, T. Kato, C. Tschierske, H. Gleeson, P. Raynes, and V. Vill. *Handbook of liquid crystals, 8 volume set*, volume 1. John Wiley & Sons, 2014.
- [98] U. Efron. *Spatial light modulator technology: materials, devices, and applications*, volume 47. CRC press, 1994.
- [99] G. Lazarev, A. Hermerschmidt, S. Krüger, and S. Osten. Lcos spatial light modulators: trends and applications. *Optical Imaging and Metrology: Advanced Technologies*, pages 1–29, 2012.
- [100] P. M. Prieto, E. J. Fernández, S. Manzanera, and P. Artal. Adaptive optics with a programmable phase modulator: applications in the human eye. *Optics express*, 12(17):4059–4071, 2004.
- [101] C. Rickenstorff, J. A. Rodrigo, and T. Alieva. Programmable simulator for beam propagation in turbulent atmosphere. *Optics Express*, 24(9):10000–10012, 2016.
- [102] S. Xue, S. Chen, Z. Fan, and D. Zhai. Adaptive wavefront interferometry for unknown free-form surfaces. *Optics Express*, 26(17):21910–21928, 2018.
- [103] S. Xue, S. Chen, G. Tie, and Y. Tian. Adaptive null interferometric test using spatial light modulator for free-form surfaces. *Optics Express*, 27(6):8414–8428, 2019.
- [104] S. Xue, S. Chen, G. Tie, Y. Tian, H. Hu, F. Shi, X. Peng, and X. Xiao. Flexible interferometric null testing for concave free-form surfaces using a hybrid refractive and diffractive variable null. *Optics Letters*, 44(9):2294–2297, 2019.

- 
- [105] S. Xue, W. Deng, and S. Chen. Intelligence enhancement of the adaptive wavefront interferometer. *Optics Express*, 27(8):11084–11102, 2019.
- [106] R. Chaudhuri, J. Papa, and J. P. Rolland. System design of a single-shot reconfigurable null test using a spatial light modulator for freeform metrology. *Optics letters*, 44(8):2000–2003, 2019.
- [107] L. Zhang, C. Li, X. Huang, Y. Zhang, S. Zhou, J. Li, and B. Yu. Compact adaptive interferometer for unknown freeform surfaces with large departure. *Optics Express*, 28(2):1897–1913, 2020.
- [108] Q. Hao, Y. Ning, Y. Hu, Y. Zhang, X. Tao, and X. Chang. Simultaneous phase-shifting interferometer with a monitored spatial light modulator flexible reference mirror. *Applied optics*, 60(6):1550–1557, 2021.
- [109] R. Chaudhuri, A. Wansha, R. Porras-Aguilar, and J. P. Rolland. Implementation of a null test for freeform optics using a high-definition spatial light modulator. *Optics Express*, 30(24):43938–43960, 2022.
- [110] K. K. Pant, D. R. Burada, M. Bichra, M. P. Singh, A. Ghosh, G. S. Khan, S. Sinzinger, and C. Shakher. Subaperture stitching for measurement of freeform wavefront. *Applied optics*, 54(34):10022–10028, 2015.
- [111] L. L. Deck. High precision interferometer for measuring mid-spatial frequency departure in free form optics. In *Optifab 2007: Technical Digest*, volume 10316, page 103160N. International Society for Optics and Photonics, 2007.
- [112] M. C. Knauer, J. Kaminski, and G. Hausler. Phase measuring deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces. In *Optical Metrology in Production Engineering*, volume 5457, pages 366–376. International Society for Optics and Photonics, 2004.
- [113] I. Fortmeier, M. Stavridis, A. Wiegmann, M. Schulz, W. Osten, and C. Elster. Evaluation of absolute form measurements using a tilted-wave interferometer. *Optics express*, 24(4):3393–3404, 2016.
- [114] D. R. Burada, K. K. Pant, V. Mishra, M. Bichra, G. S. Khan, S. Sinzinger, and C. Shakher. Development of metrology for freeform optics in reflection

- mode. In *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection X*, volume 10329, pages 403–410. SPIE, 2017.
- [115] D. R. Burada, K. K. Pant, M. Bichra, G. S. Khan, S. Sinzinger, and C. Shakher. Experimental investigations on characterization of freeform wavefront using shack–hartmann sensor. *Optical Engineering*, 56(8):084107–084107, 2017.
- [116] E. Buchen. Small satellite market observations. 2015.
- [117] A. Poghosyan and A. Golkar. Cubesat evolution: Analyzing cubesat capabilities for conducting science missions. *Progress in Aerospace Sciences*, 88:59–83, 2017.
- [118] B. Yost, S. Weston, G. Benavides, F. Krage, J. Hines, S. Mauro, S. Etchey, K. O’Neill, and B. Braun. State-of-the-art small spacecraft technology. 2021.
- [119] D. R. Mishra, I. Ogashawara, and A. A. Gitelson. *Bio-optical modeling and remote sensing of inland waters*. Elsevier, 2017.
- [120] Manue M. Silva-López, N. Uribe-Patarroyo, and A. Álvarez-Herrero. Advanced iterative algorithm for phase calibration of spatial light modulators integrated in optical instrumentation in a vibration environment. *Applied Optics*, 59(22):6760–6764, 2020.
- [121] A. Lizana, N. Martín, M. Estapé, E. Fernández, I. Moreno, A. Márquez, C. Iemmi, J. Campos, and M. J. Yzuel. Influence of the incident angle in the performance of liquid crystal on silicon displays. *Optics Express*, 17(10):8491–8505, 2009.
- [122] R. E. Parks. Alignment of optical systems. In *International Optical Design Conference*, page MB4. Optica Publishing Group, 2006.
- [123] K. Fuerschbach, G. E. Davis, K. P. Thompson, and J. P. Rolland. Assembly of a freeform off-axis optical system employing three  $\varphi$ -polynomial zernike mirrors. *Optics Letters*, 39(10):2896–2899, 2014.
- [124] N. Zhao, J. C. Papa, K. Fuerschbach, Y. Qiao, K. P. Thompson, and J. P. Rolland. Experimental investigation in nodal aberration theory (nat) with a customized ritchey-chrétien system: third-order coma. *Optics Express*, 26(7):8729–8743, 2018.

- [125] O. Karci, E. Arpa, M. Ekinici, and J. P. Rolland. Experimental investigation of binodal astigmatism in nodal aberration theory (nat) with a cassegrain telescope system. *Optics Express*, 29(13):19427–19440, 2021.
- [126] O. Karci, M. Yeşiltepe, E. Arpa, Y. Wu, M. Ekinici, and J. P. Rolland. Experimental investigation in nodal aberration theory (nat): Separation of astigmatic figure error from misalignments in a cassegrain telescope. *Optics Express*, 30(7):11150–11164, 2022.
- [127] Z. Gu, C. Yan, and Y. Wang. Alignment of a three-mirror anastigmatic telescope using nodal aberration theory. *Optics express*, 23(19):25182–25201, 2015.
- [128] X. Zhang, D. Zhang, S. Xu, and H. Ma. Active optical alignment of off-axis telescopes based on nodal aberration theory. *Optics Express*, 24(23):26392–26413, 2016.
- [129] X. Zhang, S. Xu, H. Ma, and N. Liu. Optical compensation for the perturbed three mirror anastigmatic telescope based on nodal aberration theory. *Optics Express*, 25(11):12867–12883, 2017.
- [130] M. Wen, C. Han, and H. Ma. Active compensation for optimal rms wavefront error in perturbed off-axis optical telescopes using nodal aberration theory. *Applied Optics*, 60(6):1790–1800, 2021.
- [131] M. Wen, H. Ma, and C. Han. Active alignment of complex perturbed pupil-offset off-axis telescopes using the extension of nodal aberration theory. *Applied Optics*, 60(13):3874–3887, 2021.