UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Proyecto de Innovación

Convocatoria 2019/2020

Nº de proyecto:72

Diseño de materiales virtuales y de *blended learning* para paliar el efecto de ajuste de presencialidad en los grados de la Facultad de Ciencias Matemáticas

Responsable del proyecto: Gema Rodríguez Velasco

Facultad de Ciencias Matemáticas

1. Objetivos propuestos

En el curso anterior a la petición de este proyecto, se había solicitado una modificación de los planes de estudio de los grados impartidos en la Facultad de Ciencias Matemáticas. Aunque el principal motivo fue adaptar el número de estudiantes de nuevo ingreso a la demanda actual de los grados e incluir a los estudiantes de dobles grados con otras titulaciones en caso de haberlos, se tuvo que ajustar también la presencialidad a los patrones oficiales de 40%, que no se cumplían en todos los casos.

El curso más afectado fue segundo, de gran carga en sí mismo, por la cantidad de asignaturas de contenidos totalmente nuevos para el estudiante. Se fue consciente de esta problemática intrínseca desde la puesta en marcha de los planes de estudio. Sin embargo, para mantener la estructura deseada de programa de grados en Matemáticas, con un tronco común de los dos primeros cursos, no se encontró la forma óptima de aligerar contenidos, al considerarse la formación básica y obligatoria para cualquiera de los grados parte del programa, y estar sometido a un máximo de 50% de contenidos comunes. Así, como ayuda se contemplaron unas horas adicionales, que se denominaron Seminarios, donde se buscaba proporcionar a los estudiantes un refuerzo y ayuda en su aprendizaje, sin aportar materia nueva al no ser obligatorios. La asistencia a clase era voluntaria, estimando en la memoria de verificación de los títulos que cada alumno asistiera al 30% de los mismos, aunque no se imponía límite a la asistencia.

Con la eliminación de esas clases para no sobrepasar la cota máxima de presencialidad, se hizo patente la necesidad de fomentar el aprendizaje autónomo del alumnado al prescindir de la tutela del profesor llevada a cabo en ellas.

Sin embargo, en segundo curso los alumnos aún no están lo suficientemente familiarizados con la consulta autónoma de bibliografía sobre nuevos conceptos matemáticos. El alumno medio no suele gozar de suficiente madurez matemática para afrontar de forma exitosa un aprendizaje por su cuenta. Además, al tratarse de un curso repleto de contenidos novedosos, cobra mayor importancia que el trabajo de los estudiantes sea tutelado directamente por el profesor.

Estos dos reparos vienen corroborados por la experiencia en el doble grado en Económicas, Matemáticas y Estadística, implantado el curso 2014-15, donde no se imparten los seminarios. Si bien el alumnado de esta titulación tiene un alto nivel académico y una fuerte motivación, los profesores advierten dificultades para asentar los conceptos con las horas de docencia asignadas.

Todo esto justificó el objetivo último de este proyecto: diseño de sesiones docentes ligadas a recursos accesibles, disponibles en el campus virtual, que dirijan su trabajo autónomo y vengan a paliar las clases de refuerzo que dejaban de impartirse. Se pretendía que estas sesiones combinasen elementos presenciales y no presenciales. Es decir, en ningún momento se quiso adaptar el modelo presencial a un formato web donde se acumulen recursos y en el que el profesor actúa sólo como facilitador o guía cuando se le requiere.

Se pensó más bien, como **objetivo principal del proyecto**, estudiar el desarrollo de una propuesta metodológica para el uso de actividades *b-learning* con herramientas metodológicas de la Clase Invertida (*flippled classroom*) en el contexto de las diferentes asignaturas impartidas en el segundo curso del programa de grados de la Facultad de Matemáticas, en el entorno principalmente de la plataforma Moodle, dentro del Campus Virtual.

Con este objetivo, se planteó la evaluación de los posibles beneficios, con el seguimiento de los resultados académicos, la comparación con los grupos de una misma asignatura que no hayan hecho uso de ellos y los resultados de las encuestas de opinión a alumnos y profesores propias de nuestra Facultad, que inciden en aspectos como adecuación de los recursos utilizados a la materia impartida, tiempo invertido y del grado de dificultad. También estaba previsto someter los materiales y metodologías a la evaluación del alumnado.

La consecución de este objetivo principal, puede desarrollarse en los siguientes objetivos parciales:

1. Diseño de una metodología *b-learning* en distintos grupos de las asignaturas de segundo curso del programa de grados de la Facultad de Matemáticas.

2. Desarrollo de materiales de autoaprendizaje y prácticas virtuales que sustituyan las actividades realizadas en la hora lectiva semanal de Seminarios, desaparecida por la reducción de la presencialidad y que mitiguen el efecto de tal supresión.

3. Implementación de la metodología desarrollada y evaluación de resultados.

4. Creación de un espacio de trabajo colaborativo entre profesores y generación de un “modelo de actividades *b-learning*” transferible a otras asignaturas y/o cursos impartidos en la Facultad.

2. Objetivos alcanzados

La primera parte del curso en que el proyecto estuvo vigente, el trabajo se desarrolló según lo previsto cubriendo los correspondientes objetivos inicialmente planteados.

Sin embargo, la suspensión de las clases presenciales a raíz del confinamiento, provocó que, si bien se siguieron desarrollando materiales docentes, su misión no era la prevista en el planteamiento del trabajo, que consideraba paliar el efecto de un cierto descenso del número de clases presenciales, y no su total supresión y desaparición de los entornos docentes habituales, con el consiguiente trabajo de adaptación a esta situación sobrevenida.

Este hecho, motivó también que la evaluación de resultados del segundo cuatrimestre no se llevara a cabo. Cualquier discrepancia en los resultados académicos, no podría atribuirse al efecto del proyecto, al no haberse mantenido constantes los restantes factores concurrentes: carácter diferente del desarrollo del curso; modificación de los criterios de evaluación iniciales (recogida en las adendas a las fichas docentes) discrepante de los criterios empleados en cursos previos; efectos de la situación sobrevenida, tanto en el estado de estudiantes y profesores, como en la disponibilidad de recursos …

Así, en concreto, en cuanto a los objetivos detallados:

1. En el primer cuatrimestre, se ha diseñado una metodología *b-learning* en las asignaturas de segundo curso del programa de grados de la Facultad de Matemáticas. Sin embargo, en el segundo cuatrimestre, puesto que la metodología pasó a ser

totalmente virtual, los recursos generados han venido a sustituir no sólo los seminarios sino también a otras actividades docentes.

2. Se han desarrollado materiales de autoaprendizaje y prácticas virtuales sustitutivas de las actividades realizadas en las horas lectivas de Seminarios (desaparecidos por la reducción de la presencialidad). A partir de marzo, esa finalidad se ha visto distorsionada al producirse la eliminación total de clases presenciales.

3. Se ha implementado la metodología desarrollada. La evaluación, en cuanto a análisis e impacto sobre los resultados académicos se refiere, se ha llevado a cabo para el primer cuatrimestre; siendo imposible hacerlo para el segundo, por los motivos expuestos anteriormente. En cuanto a la previsión de someter los materiales y metodologías a la evaluación del alumnado, esto se hizo por observación directa del desarrollo de las experiencias planteadas, durante el primer cuatrimestre. Se pusieron en común los resultados en distintas reuniones celebradas por el equipo del proyecto.

Sin embargo, no se hizo, como estaba previsto, una evaluación final en el mes de mayo con implicación de estudiantes colaboradores. En el caso del primer cuatrimestre, donde se desarrolló el proyecto de la forma prevista, no se recabó la opinión de los estudiantes al final de curso, para no someterles a un exceso de encuestas, optándose por priorizar las programadas por otras entidades. Se consideró que las encuestas desarrolladas, tanto por delegación de estudiantes, como Delegación Central y Decanato, proporcionaban información suficiente sobre la percepción del desarrollo de la docencia virtual y sobre la estimación de necesidades. En el caso de la docencia del segundo cuatrimestre, se constató la imposibilidad de definir qué parte de las metodologías desarrolladas paliaban el efecto de los extintos seminarios y cuáles la supresión del resto de clases presenciales.

4. Creación de un espacio de trabajo colaborativo entre profesores y generación de un "modelo de actividades *b-learning*" transferible a otras asignaturas y/o cursos impartidos en la Facultad. Este objetivo ha sido parcialmente conseguido como se detallará posteriormente en el apartado Desarrollo de Actividades.

3. Metodología

La metodología planteada inicialmente se articulaba en torno a siete fases, no necesariamente sucesivas. El desarrollo efectivo, durante el primer cuatrimestre, ha cubierto las seis primeras fases de acuerdo a lo planteado.

Por la situación de docencia totalmente virtual, derivada de la crisis sanitaria, la séptima fase no se ha desarrollado en su totalidad: por un lado, por el considerable incremento de tareas docentes para adaptar la docencia a las condiciones sobrevenidas, y por otro, por haberse desvirtuado el objetivo inicial de los recursos como apoyo a la docencia con una presencialidad contemplada de 40% que pasó a ser nula.

Las fases planteadas fueron:

Fase 1: Selección de contenidos, materiales y actividades a ser implementados en el aula virtual en cada una de las asignaturas involucradas.

Fase 2: Recopilación de información y selección de recursos virtuales, compatibles con la plataforma Moodle: módulos de comunicación, de contenidos y de actividades.

Fase 3: Realización de seminario de formación, a cargo de la profesora María Vela Pérez (Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales) sobre la metodología empleada en la Clase Invertida y uso de vídeos didácticos.

Fase 4: Diseño y desarrollo de materiales específicos mediante las herramientas elegidas para las asignaturas participantes.

Fase 5: Experiencia piloto en la enseñanza.

Fase 6: Evaluación de los resultados. Esta evaluación se desarrolla en dos sentidos: incidencia de los materiales en el rendimiento académico y satisfacción de los colectivos (estudiantes y profesores), en particular, en cuanto a la facilitación de comunicación-interacción entre los participantes, trabajo autónomo de los estudiantes, aprendizaje activo y colaborativo, etc.

Para dar coherencia al proyecto y utilizar la experiencia de todos los participantes, el equipo solicitante ha celebrado varias reuniones periódicas para poner en común los recursos/resultados de cada profesor y su eficacia o no en el desarrollo del curso. Estaba previsto implicar en estas reuniones al final (mes de mayo) a estudiantes colaboradores, cosa que no se ha llegado a realizar por los motivos expuestos al principio.

Fase 7: En base a la experiencia, presentar un “modelo de actividades *b-learning*” para las asignaturas de segundo curso de la Facultad de Matemáticas y formular recomendaciones.

4. Recursos humanos

La composición del equipo solicitante ha sido la idónea para asegurar la viabilidad del proyecto, ya que han participado profesores de todos los departamentos que tienen asignada docencia de segundo curso de los grados impartidos en la Facultad (Análisis y Matemática Aplicada, Álgebra, Geometría y Topología, Estadística e Investigación Operativa y Unidad Departamental de Astronomía y Geodesia).

Todos ellos tienen amplia experiencia docente en general, y en particular en dicho curso. Además, se ha contado con profesorado que imparte docencia en el grupo del Doble Grado Económicas y Matemáticas y Estadística, que tiene desde sus inicios una presencialidad del 40%. Este hecho tiene particular interés, por poder aportar una valiosa experiencia sobre cómo adaptar los contenidos propuestos a las horas de clase disponibles tras la modificación descrita en la sección 1 de este informe.

También es partícipe el coordinador de Campus Virtual de la Facultad de Ciencias Matemáticas, con lo que se facilita la elección de recursos didácticos compatibles y fácilmente exportables a la plataforma Moodle o bien la obtención de herramientas necesarias para que lo sean.

Por otro lado, cuatro de los profesores del equipo, forman parte de la Comisión de Calidad de la Facultad incluida la Vicedecana de Calidad. Esto permite disponer de la visión de la Comisión tanto en el desarrollo de las herramientas objeto del proyecto, como, y aún de forma más significativa, en el diseño del sistema de seguimiento posterior para la valoración de su puesta en marcha, dado que esta Comisión es la que se encarga del estudio de indicadores, resultados académicos y encuestas de satisfacción y de su análisis.

Además del equipo solicitante, se ha contado con el apoyo expreso de profesores de segundo curso, que han mostrado su interés en el proyecto aunque no formaran parte del equipo, así como del Decano de la Facultad.

5. Desarrollo de Actividades

Las tres primeras fases del plan descrito en el apartado de Metodología, se realizaron de forma prácticamente simultánea: cada miembro del equipo realizó un ejercicio de reflexión de contenidos a implementar, así como una exploración previa de formas de llevarlo a cabo. Aparte, se realizó un seminario de formación del que se decidió se hiciese cargo la profesora María Vela Pérez (Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales) dada su contrastada experiencia con la metodología empleada en la Clase Invertida. También se exploraron herramientas de autoevaluación y de uso de videos didácticos. Además de las herramientas expuestas en este seminario, el grupo de trabajo se ha adentrado en el uso de otras similares (por ejemplo, uso de OBS Studio frente a Camtasia).

A partir de la información recopilada, se realizó un trabajo individual de cada profesor participante. El resultado de la experiencia de ese trabajo, se ha ido transmitiendo en reuniones del equipo, celebradas hasta diciembre de 2019, coincidente con el fin del periodo lectivo correspondiente al primer cuatrimestre.

Las actividades desarrolladas han ido en distintas líneas que separamos a continuación en dos grupos. Las actividades se pusieron en común con el equipo participante, tanto el diseño del recurso, como el resultado de la experiencia en el aula.

Actividades para introducción de nuevos contenidos:

Por un lado, se han diseñado materiales para que los estudiantes reflexionen, experimenten e indaguen de manera autónoma y para introducción de nuevos contenidos a los estudiantes, tanto teóricos como prácticos. Tras cada una de estas actividades, se realizaron puestas en común y debates, para valorar los resultados conjeturados o las conclusiones obtenidas. Para su creación se han utilizado distintas herramientas. Como ilustración, se muestra en Apéndice 1 algunas de estas actividades, realizadas con el *Live Editor* de Matlab, y en Apéndice 3 ejemplos de otras realizadas con el software eXeLearning (https://exelearning.net/), un editor de recursos educativos interactivo gratuito y de código abierto, de fácil manejo y que permite exportar dichos recursos como Paquetes de Contenidos (por ejemplo, SCORM): un único archivo (textos, formatos, recursos, imágenes, videos, etc.) estandarizado que puede ser integrado tanto en plataformas educativas (como Moodle) como en espacios web. Los contenidos abarcan desde video-tutoriales (ver Apéndice 3.1), apuntes, ejercicios resueltos todo ello guiado a través de podcasts. La facilidad para estructurar los contenidos permite presentarlos a los alumnos secuencialmente (ver Apéndices 3.2 y 3.3.). En el Apéndice 3.4. se muestra cómo queda integrado un paquete SCORM dentro del Campus Virtual.

Actividades para autoevaluación y control de conocimientos:

En la asignatura de Estructuras Algebraicas del Doble Grado en Economía-Matemáticas y Estadística, se probó a usar Kahoot en clase como una actividad de evaluación continua más relajada, que motivara una reflexión del alumnado, guiada por el profesor, sobre los conceptos que se habían introducido con anterioridad en la asignatura. Al ser una prueba, no se usó realmente la herramienta para la evaluación; de hecho, en una posterior reunión del equipo se manifestaron dudas sobre el entorno poco académico de la herramienta y se apuntó que hay otros, como por ejemplo el entorno de cuestionarios de Moodle, más adecuados para la evaluación continua online.

En el estudio posterior de la experiencia con todo el equipo, se destacó las posibilidades que ofrece la herramienta para generar reflexión y debate de una manera más distendida entre los estudiantes, sobre contenidos previamente vistos (bien de manera presencial en el aula, bien con la metodología de clase invertida), permitiendo variar la dinámica que conlleva una metodología clásica, en asignaturas de especial dificultad para los estudiantes como ésta.

En este caso concreto, les sirvió a los alumnos para la preparación de una prueba de evaluación continua de formato más clásico que se realizó al día siguiente. La experiencia sirvió también para calibrar las preguntas más adecuadas para este tipo de test, tanto con Kahoot como con otros cuestionarios, en una materia como el Álgebra, que tiene un nivel de abstracción elevado. Como muestra, adjuntamos varias capturas de pantalla con los enunciados y los resultados en el Apéndice 2.

Aparte, se han realizado experiencias de autoevaluación con las herramientas cuestionario de Moodle y *eXeLearning,* que también es una herramienta interesante para crear contenidos de evaluación y/o auto-evaluación. Así, por ejemplo, se han elaborado materiales para actividades complementarias con el fin de que los alumnos asentasen los conceptos y métodos introducidos y, a su vez, auto-evaluasen sus progresos. Por ejemplo (ver Apéndice 3. 4 a 3.8), se han elaborado ejercicios, cuestionarios, tareas para reforzar conceptos, prácticas auto-evaluables, etc.

Al integrarse los paquetes de contenidos SCORM en el Campus Virtual, como cualquier otro recurso, el profesor puede consultar los accesos de los alumnos a dicho recurso, las respuestas a los cuestionarios y seguir su evolución (ver Apéndice 3.8), proporcionando una interesante retroalimentación del proceso de aprendizaje, que guía para incidir en aspectos menos asentados o detectar necesidades específicas de estudiantes.

Tras la consolidación de actas, se procedió a un análisis de resultados académicos de las asignaturas del primer cuatrimestre, comparando los distintos grupos de asignaturas así como la evolución de los resultados en los cuatro últimos cursos académicos, el último de ellos sin impartición de seminarios.

Sería muy arriesgado atribuir cualquier diferencia a la desaparición de seminarios y/o material desarrollado en el marco del proyecto. Pero a la vista del análisis efectuado, podemos advertir que el Grado en Matemáticas y Estadística marca una conducta atípica con un mayor número de suspensos en todas las asignaturas. Del resto se concluye mayor facilidad de aprobar MN seguido de CD y menor en GL.

Como conclusiones generales del estudio global, vemos que aumenta el número de aprobados pese a la supresión de seminarios en las asignaturas de Métodos Numéricos y Cálculo Diferencial, y se mantiene en Estructuras Algebraicas. Aumenta el número de no presentados en Geometría Lineal y Estructuras Algebraicas, y desciende en Métodos Numéricos y Probabilidad. Los suspensos, aumentan de forma acusada en Probabilidad, aunque esto puede estar condicionado por el mayor número de presentados. El número de suspensos desciende en el resto de asignaturas salvo en Geometría Lineal que aumenta pero muy ligeramente.

En general, hay un ligero aumento de notas medias frente a los cursos anteriores, pero hay que tener cautela en aventurar conclusiones al haber habido otros cambios (profesorado, horario, número de repetidores matriculados…) aparte de la introducción de esta metodología para paliar la supresión de los seminarios.

Durante el segundo cuatrimestre del curso en vigor del proyecto, se produjo de forma sobrevenida el confinamiento producto de la crisis sanitaria. Dada la extraordinaria carga de trabajo que supuso para los profesores con docencia en dicho periodo la habilitación repentina de un sistema que viniera a sustituir la docencia inicialmente planificada, los recursos del proyecto se emplearon en suplir la docencia sin distinguir si esta correspondía a seminarios o a clases convencionales. Como se ha explicado, no se realizó control sobre los resultados académicos en este segundo cuatrimestre frente a cursos donde sí se impartían seminarios, por no ser esta la única variable distinta en el desarrollo de la docencia.

El presupuesto asignado al proyecto se ha ejecutado, tal y como estaba previsto, adquiriendo equipamiento dirigido a captar en el aula la respuesta a la metodología empleada (cámara de vídeo), así como material precisado para la tutela de los estudiantes en el apoyo a su trabajo autónomo (tabletas apuntadoras, auriculares y webcam).

Apéndice 1: Ejemplo de Actividades para introducción de contenidos previo a confinamiento

Apéndice 1.1: Producto de matrices por una matriz diagonal

Este ejercicio pretende deducir qué le ocurre a una matriz cuando es multiplicada por una matriz diagonal. Para ello, consideremos un ejemplo concreto:

```
A=[1 2 3 4;5 6 7 8;9 0 1 2;3 4 5 6]
D=diag([2 3 4 5])
Iz=D*A
Der=A*D
```

¿Puedes sacar alguna conclusión sobre la relación de la matriz producto con la matriz A? Si es necesario, cambia la matriz A por otra de tamaño 4 y ejecuta el bloque anterior para seguir experimentando.

Enuncia el resultado de forma general y demuéstralo.

Apéndice 1.2: Producto de matrices triangulares superiores entre sí

Consideremos las matrices triangulares superiores

```
A =[16     2     3    13
     0    11    10     8
     0     0     6    12
     0     0     0     1];
B = [6     6     6     9
     0     7     2     3
     0     0     2     9
     0     0     0     3];
```

y consideremos su producto

```
C=A*B
```

La matriz producto es triangular superior.

Razonemos en el caso general. Sean A y B dos matrices triangulares superiores. Veamos cómo es la matriz producto $C = AB$. Si pensamos en la columna j-ésima de C, su elemento i-ésimo será el producto escalar de la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B.

Puesto que los elementos $j+1$ hasta n de la columna j-ésima de B son cero (por ser triangular superior), de los n sumandos de ese producto escalar, sólo pueden ser distintos de cero los j primeros.

Pero en la fila i-ésima de A son cero los elementos desde el primero hasta el $i-1$. Por tanto, si $i > j$ (o, equivalentemente, $j \leq i-1$) esos j primeros sumandos del producto escalar son también nulos.

Es decir, hemos visto que si $i > j$ entonces $c_{ij} = 0$, es decir, C es triangular superior.

Ejercicio:

Intenta formalizar el razonamiento anterior. ¿Cómo son los elementos de la diagonal de C?

Apéndice 1.3: Producto de matrices por bloques

Ejecuta el siguiente código para ver cómo se multiplican matrices por bloques. Lo que hago es crear los cuatro bloques de A y "pegarlos" para formar A. Hago lo mismo con B.

Multiplico A por B (sin poner el ; al final, para que se muestre el resultado). La última línea es la importante: muestra que la forma de hacer la multiplicación es análoga a cuando se tienen números en lugar de bloques. Se puede ver que M es lo mismo que A*B.

```
A11=[1 2;3 4];
A12=[1 2 3;4 5 6];
A21=[1 2;3 4;5 6];
A22=[1 2 3;4 5 6;7 8 9];
A=[A11 A12;A21 A22];
B11=[1 -1;2 -2];
B12=[1 0 -1;2 0 -2];
B21=[1 -1;2 -2;3 -3];
B22=[1 0 -1;2 0 -2;3 0 -3];
B=[B11 B12;B21 B22];
A*B
M=[A11*B11+A12*B21 A11*B12+A12*B22;A21*B11+A22*B21 A21*B12+A22*B22]
```

La fórmula general para una descomposición en $p \times p$ cajas de forma que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$$

y $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_j}$ sería

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

Apéndice 1.4: Normas matriciales y potencias de una matriz

Se considera la matriz simétrica B

```
B=[-0.2964    0.4107   -0.2494    0.1340
    0.4107    0.1248   -0.1798    0.3304
   -0.2494   -0.1798    0.2293    0.4387
    0.1340    0.3304    0.4387   -0.0576];
```

Se puede calcular la norma 1 de esta matriz escribiendo (puedes consultar la ayuda para el comando **sum**)

```
norm1=max(sum(abs(B)))
```

Si lo haces, comprobarás que es mayor que uno.

¿Cuánto vale la norma infinito de B? (Ten en cuenta que B es simétrica)

La norma Frobenius se puede calcular como

```
normF=sqrt(sum(sum(abs(B).^2)))
```

Como ves, esta norma también es mayor que uno.

Ejecuta el siguiente código que calcula B^{100}.

```
C=eye(4);
for i=1:100
    C=C*B;
end
disp(C)
```

¿Puedes sacar alguna conclusión?

Primera parte

Consideramos una matriz A a la que se le puede aplicar el método de Gauss sin necesidad de realizar permutaciones. De hecho, como iremos viendo, el elemento que nos va quedando en la diagonal en cada paso (lo que llamamos el *pivote*) es el de mayor tamaño de todos los que están, en la columna correspondiente, desde la diagonal hasta el final de la columna.

```
A=[8 4 2 0;4 6 1 1; 2 1 4.5 1;0 1 1 2.25]
```

```
A = 4x4
    8.0000    4.0000    2.0000         0
    4.0000    6.0000    1.0000    1.0000
    2.0000    1.0000    4.5000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
```

Vamos a aplicar el método de Gauss a la matriz A, eligiendo **siempre** la combinación lineal de filas en la que a cada fila se le resta la fila del pivote multiplicada por un número (que llamaremos *multiplicador*).

Guardamos la matriz inicial A en una matriz U en la que vamos a hacer las transformaciones.

```
U=A
```

```
U = 4x4
    8.0000    4.0000    2.0000         0
    4.0000    6.0000    1.0000    1.0000
    2.0000    1.0000    4.5000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
```

Para la primera columna, el pivote es 8. Por tanto, tendremos que restar a las filas 2ª, 3ª y 4ª la fila 1ª multiplicada, respectivamente, por $\frac{4}{8}=0.5$, $\frac{2}{8}=0.25$ y $\frac{0}{8}=0$. Estos números los vamos a ir guardando en una matriz que vamos a llamar L y que, al principio, es la matriz identidad. Los guardaremos en su **primera columna**, por ser los multiplicadores usados para hacer ceros en la **primera columna** de U. Guardamos el multiplicador usado para hacer un cero en la **segunda fila** de U (es decir, 0.5) en la **segunda fila** de L, el de la **tercera** (0.25) en la **tercera fila** de L y el de la **cuarta** (0) en la **cuarta fila** de L.

```
L=eye(4);  % Inicializo L como la identidad
L(2,1)=0.5; L(3,1)=0.25; L(4,1)=0;
L
```

```
L = 4x4
    1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
    0.2500         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

¿Cómo queda la matriz U tras haber hecho sobre ella estas combinaciones lineales de filas?

U=

Una vez conseguidos los ceros en la primera columna, el pivote de la segunda columna, es decir, el elemento U(2,2), debería quedarte 4.

Calcula los multiplicadores correspondientes a la segunda columna, guárdalos en L(3,2) y en L(4,2) y haz las trasformaciones en la matriz U. Haz luego lo mismo para la tercera columna.

Si todo ha ido bien, habrás llegado a tener las matrices

```
L=[1 0 0 0;0.5 1 0 0;0.25 0 1 0;0 0.25 0.25 1]
```

```
L = 4x4
    1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
    0.2500         0    1.0000         0
         0    0.2500    0.2500    1.0000
```

y

```
U=[8 4 2 0;0 4 0 1;0 0 4 1;0 0 0 1.75]
```

```
U = 4x4
     8.0000    4.0000    2.0000         0
          0    4.0000         0    1.0000
          0         0    4.0000    1.0000
          0         0         0    1.7500
```

Calcula L*U y relaciona este producto con la matriz A

Pregunta 1: Conjetura un resultado en el que se recoja lo descrito en esta primera parte.

Segunda parte

Vamos a aplicar ahora el método de Gauss a la matriz que se muestra a continuación. Como antes, elegimos siempre la combinación lineal de filas en la que a cada fila se le resta la fila del pivote multiplicada por el multiplicador, tomando como pivote el mayor posible.

```
B =[0 1 1 2.25;4 6 1 1;8 4 2 0;2 1 4.5 1]
```

Al igual que en la primera parte, guardamos la matriz original en una matriz U en la que vamos a hacer la transformaciones

```
U=B;
```

Para comenzar, primero tenemos que intercambiar la primera fila con la tercera obteniendo

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    4.0000    6.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    2.0000    1.0000    4.5000    1.0000]
```

A continuación, guardamos en la primera columna de L los multiplicadores y hacemos las correspondientes combinaciones lineales de filas en U

```
L =[1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
    0.2500         0         0    1.0000]

U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
         0    4.0000         0    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
         0         0    4.0000    1.0000]
```

Fijándonos en la segunda columna de U (los 3 elementos de la diagonal hacia abajo), ya tenemos en la diagonal el mayor de ellos, por lo que no tenemos que hacer ninguna permutación. A continuación, guardamos los dos multiplicadores en la segunda columna de L y hacemos las combinaciones lineales en U, obteniendo

```
L =[1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
         0    0.2500    1.0000         0
    0.2500         0         0    1.0000]

U = [8      4      2      0
     0      4      0      1
     0      0      1      2

      0      0      4      1]
```

Vayamos con la tercera columna. Intercambiamos en U las filas tercera y cuarta para poner en la diagonal el elemento mayor. La matriz U queda

```
U = [8      4      2      0
     0      4      0      1
     0      0      4      1
     0      0      1      2]
```

Para acabar, nos queda guardar en L el multiplicador y sustituir la cuarta fila de U por el resultado de ella menos el multiplicador por la tercera fila de U, obteniendo

```
L =[1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
         0    0.2500    1.0000         0
    0.2500         0    0.2500    1.0000]

U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
         0    4.0000         0    1.0000
         0         0    4.0000    1.0000
         0         0         0    1.7500]
```

Calcula L*U y compáralo con B

Pregunta 2 : ¿Te induce esto a cambiar lo que has conjeturado en la pregunta 1? Explica el cambio si lo ha habido.

Observación

Teniendo en cuenta que para conseguir cada cero de la parte triangular inferior usamos un multiplicador (es decir, hay tantos multiplicadores como ceros) vamos a repetir ahora las cuentas de la primera parte con la matriz A, pero guardando los multiplicadores en el lugar que ocuparían los ceros. De esta forma, en la parte triangular inferior de U tendremos la parte triangular inferior de L:

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000
         0    0.2500    0.2500    1.7500];
```

El producto anterior L*U puede realizarse en matlab mediante (puedes comprobar que sale lo mismo)

```
L=eye(4)+tril(U,-1); % Extraemos la parte triangular inferior estricta
                     % y sumamos 1 en la diagonal.
U=triu(U);
L*U
```

Tercera parte

Vamos a repetir lo realizado con la matriz B en la segunda parte, guardando ahora los multiplicadores en U, como en la observación. Insistimos en que elegimos siempre la combinación lineal de filas en la que a cada fila se le resta la fila del pivote multiplicada por el multiplicador, tomando como pivote el mayor posible.

Al igual que antes, guardamos la matriz original B en una matriz U en la que hacemos las transformaciones

```
U =[     0    1.0000    1.0000    2.2500
    4.0000    6.0000    1.0000    1.0000
    8.0000    4.0000    2.0000         0
    2.0000    1.0000    4.5000    1.0000]
```

Para comenzar, intercambiamos la primera fila de U con la tercera, y así,

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    4.0000    6.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    2.0000    1.0000    4.5000    1.0000]
```

Guardamos, como se ha dicho en la observación, en la primera columna de U los multiplicadores:

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    6.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    0.2500    1.0000    4.5000    1.0000]
```

y hacemos las combiaciones lineales de filas en U (solo de la segunda columna hasta el final, claro, para no estropear los multiplicadores), llegando a

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    0.2500         0    4.0000    1.0000]
```

De nuevo, fijando la atención en la segunda columna (los 3 elementos de la diagonal hacia abajo), observamos que ya tenemos en la diagonal el mayor de ellos, por lo que no necesitamos realizar ninguna permutación. A continuación, guardamos los dos multiplicadores en la segunda columna de U (en donde irían los ceros) y hacemos las combinaciones lineales, obteniendo

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
         0    0.2500    1.0000    2.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000]
```

Para la tercera etapa, intercambiamos en U las filas tercera y cuarta con el fin de poner en la diagonal el elemento mayor del correspondiente trozo de la tercera columna. La matriz U queda

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000
         0    0.2500    1.0000    2.0000]
```

Es **muy importante** resaltar que **hemos intercambiado las filas completas** (incluyendo los multiplicadores).

Guardamos en U el multiplicador y hacemos la combinación lineal de filas en U, con lo que llegamos a:

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000
         0    0.2500    0.2500    1.7500]
```

Si ahora, como antes, extraemos en L la parte triangular inferior de U (con unos en la diagonal), dejamos en U su parte triangular superior y las multiplicamos ¿Cuánto vale el producto L*U y qué relación tiene con B?

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    6.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    0.2500    1.0000    4.5000    1.0000]
```

y hacemos las combiaciones lineales de filas en U (solo de la segunda columna hasta el final, claro, para no estropear los multiplicadores), llegando a

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
         0    1.0000    1.0000    2.2500
    0.2500         0    4.0000    1.0000]
```

De nuevo, fijando la atención en la segunda columna (los 3 elementos de la diagonal hacia abajo), observamos que ya tenemos en la diagonal el mayor de ellos, por lo que no necesitamos realizar ninguna permutación. A continuación, guardamos los dos multiplicadores en la segunda columna de U (en donde irían los ceros) y hacemos las combinaciones lineales, obteniendo

```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
         0    0.2500    1.0000    2.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000]
```

Para la tercera etapa, intercambiamos en U las filas tercera y cuarta con el fin de poner en la diagonal el elemento mayor del correspondiente trozo de la tercera columna. La matriz U queda

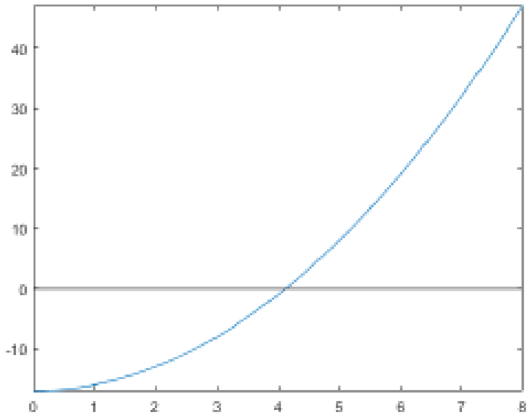
```
U =[8.0000    4.0000    2.0000         0
    0.5000    4.0000         0    1.0000
    0.2500         0    4.0000    1.0000
         0    0.2500    1.0000    2.0000]
```


Pregunta 3: ¿Puedes sacar alguna conclusión al respecto?

Apéndice 1.6. Método de Newton para resolución de ecuaciones

Consideramos la función $F(x) = x^2 - 17$ y la dibujamos en el intervalo $[0, 8]$

```
F=@(x) x.^2-17;
fplot(F,[0 8])
hold on
fplot(@(x) 0*x,[0 8],'k')
hold off
```



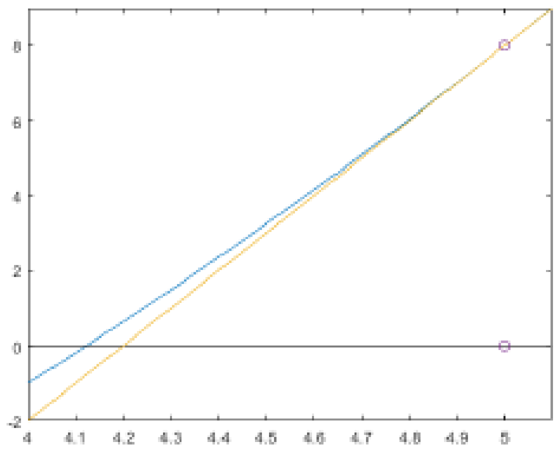
A continuación calculamos la recta tangente a esta función en el punto $x_0 = 5$. Su ecuación será

$$y - F(5) = F'(5)(x - 5)$$

es decir

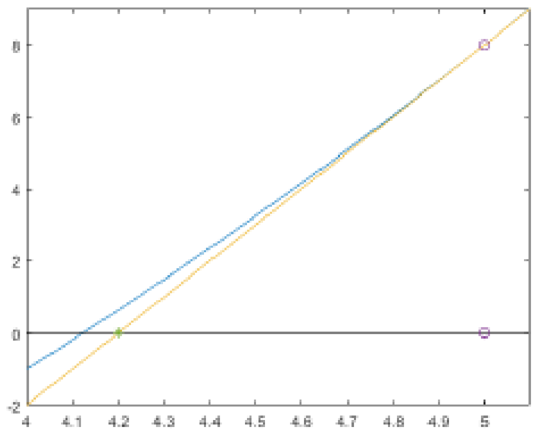
$$y = 10x - 42.$$

```
fplot(F,[4 5.1])
hold on
fplot(@(x) 0*x,[4 5.1],'k')
fplot(@(x) 10*x-42,[4 5.1])
plot([5 5],[0 F(5)],'o')
```



Esta recta corta al eje de abscisas (la recta $y = 0$) en el punto solución de la ecuación $0 = 10x - 42$, es decir, en $x_1 = 42/10 = 4.2$.

```
x1=42/10;
plot(x1,0,'*')
hold off
```



Calcula ahora la recta tangente a la función F en el punto $x_1 = 4.2$. Su ecuación será

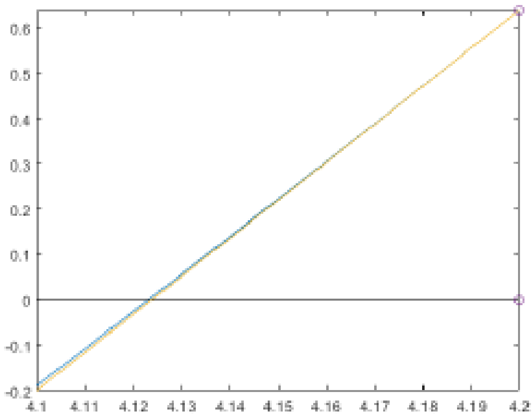
$$y - F(x_1) = F'(x_1)(x - x_1)$$

es decir, la recta

$$y = ax + b$$

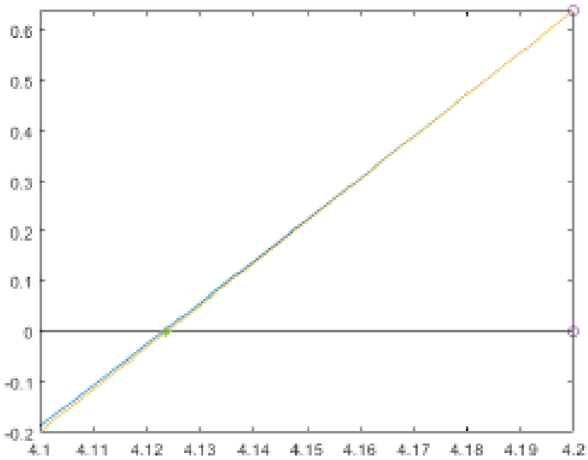
siendo $a = 2x_1$ y $b = F(x_1) - ax_1$.

```
a=2*x1;
b=F(x1)-a*x1;
fplot(F,[4.1 x1])
hold on
fplot(@(x) 0*x,[4.1 x1],'k')
fplot(@(x) a*x+b,[4.1 x1])
plot([x1 x1],[0 F(x1)],'o')
```



Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $x_2 = -b/a = 4.1238$

```
x2=-b/a;
plot(x2,0,'*')
hold off
```

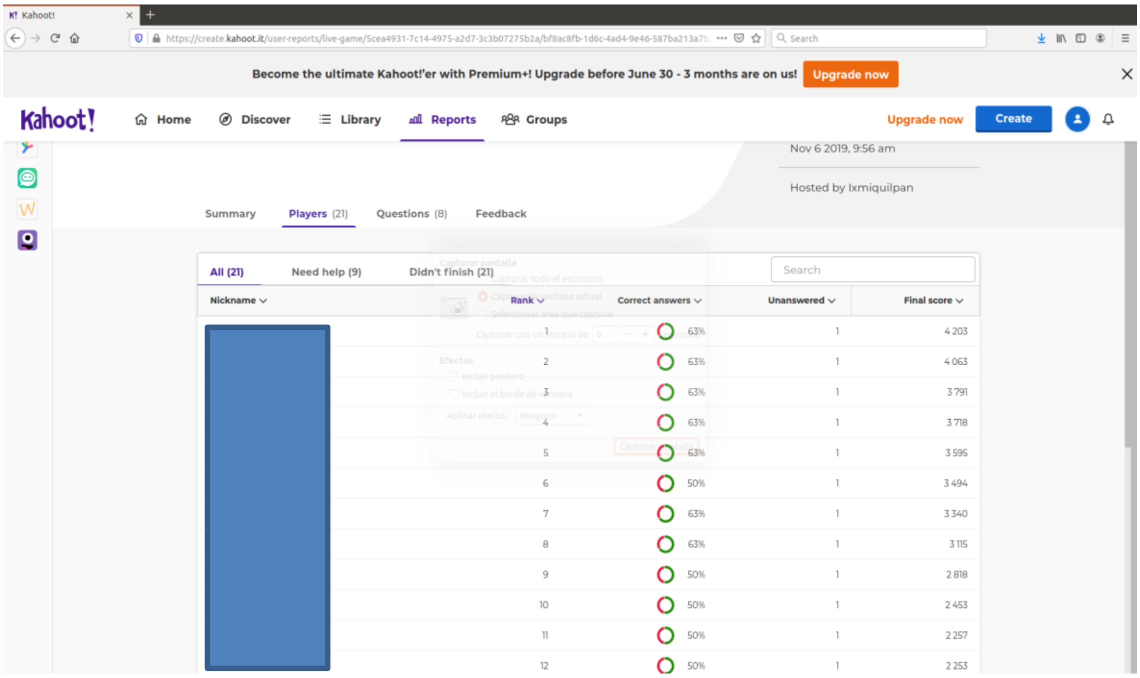


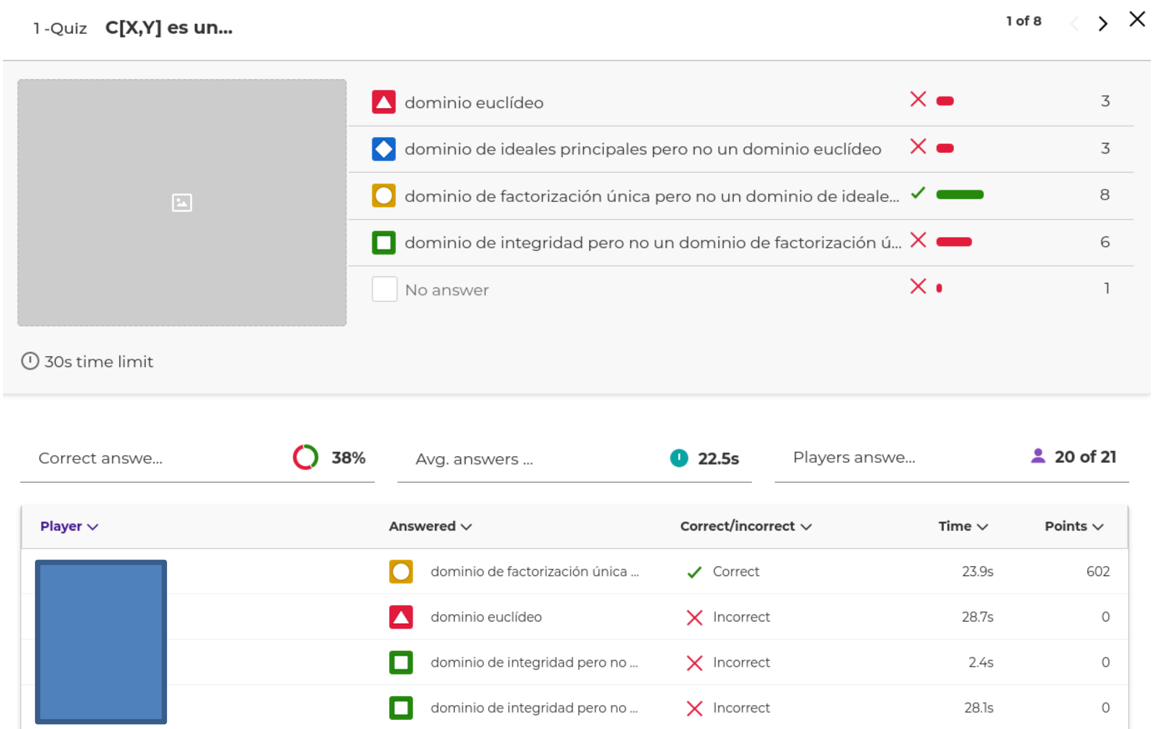
¿Puedes decir cómo continuar este procedimiento y cuál puede ser su utilidad?

Encuentra una expresión general de x_{n+1} en función de x_n para una función cualquiera F.

Apéndice 2: Ejemplo de Actividades para autoevaluación de contenidos previo a confinamiento

Apéndice 1.1: Autoevaluación con Kahoot





2 -Quiz **La ecuación 24X+33Y=4**

2 of 8

no tiene soluciones enteras	✓	8
tiene una única solución entera	✗	4
tiene infinitas soluciones enteras	✗	3
tiene infinitas soluciones racionales	✓	5
No answer	✗	1

20s time limit

Correct answe... 62% | Avg. answers ... 16.4s | Players answe... 20 of 21

Player	Answered	Correct/incorrect	Time	Points
	tiene una única solución entera	Incorrect	15.8s	0
	tiene infinitas soluciones enteras	Incorrect	18.2s	0
	tiene una única solución entera	Incorrect	5.1s	0
	tiene una única solución entera	Incorrect	18.1s	0

7 -True or false **El polinomio X^3+X+1 de $Z_5[X]$ es irreducible.**

7 of 8

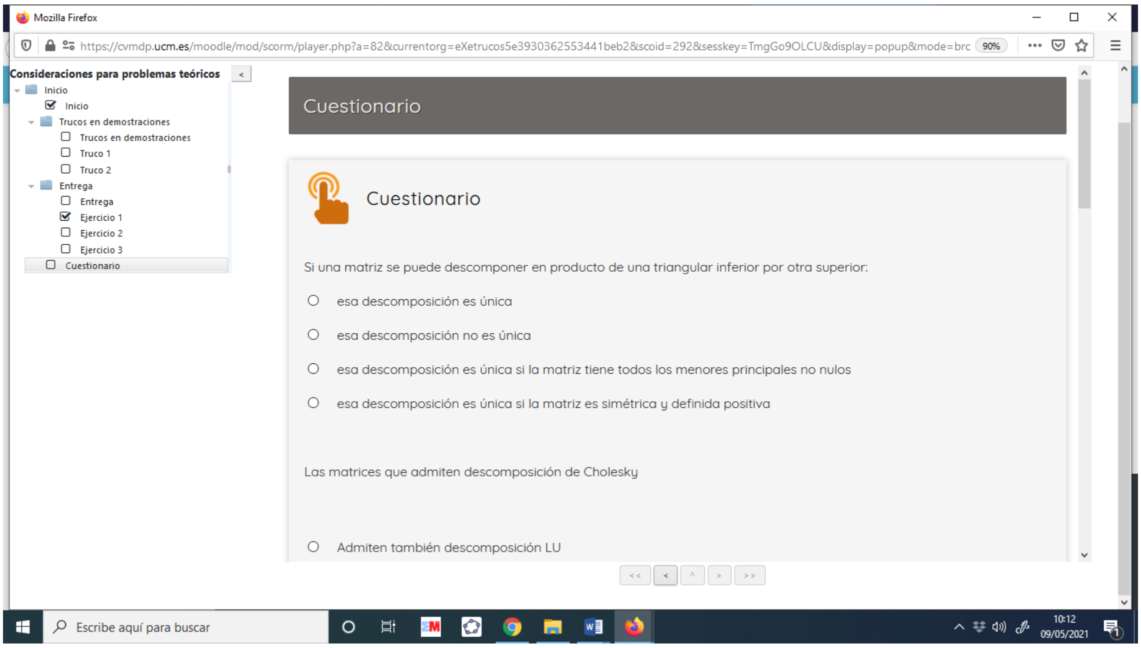
False	✗	5
True	✓	15
No answer	✗	1

20s time limit

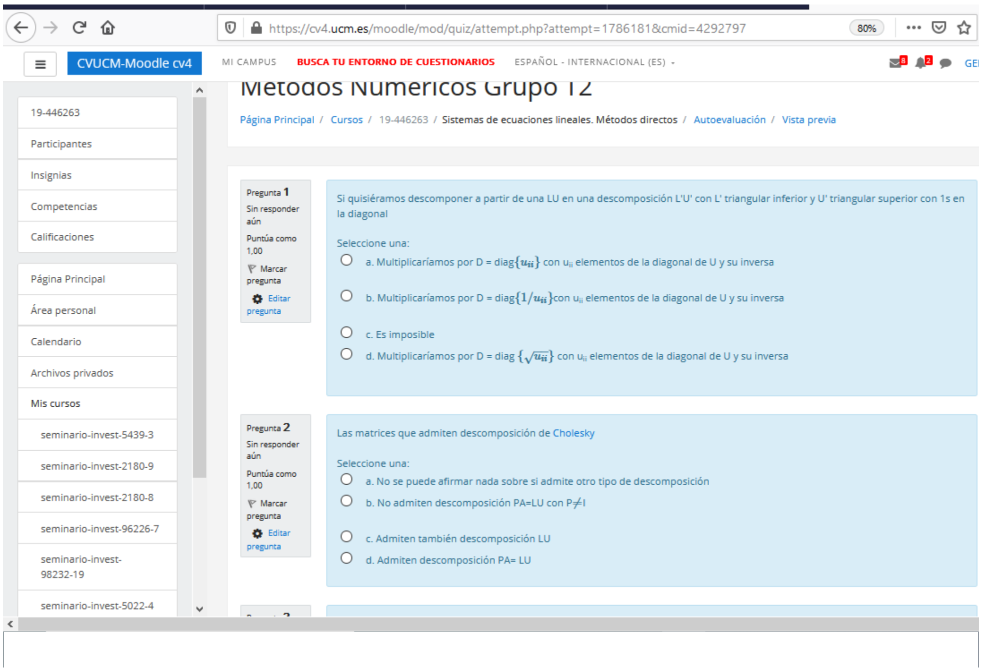
Correct answe... 71% | Avg. answers ... 13.93s | Players answe... 20 of 21

Player	Answered	Correct/incorrect	Time	Points
	True	Correct	8.2s	795
	True	Correct	18.2s	545
	True	Correct	15.2s	620
	True	Correct	18.4s	540
	True	Correct	19.1s	523

Apéndice 2.2. Autoevaluación con paquete Scorm integrado en campus virtual



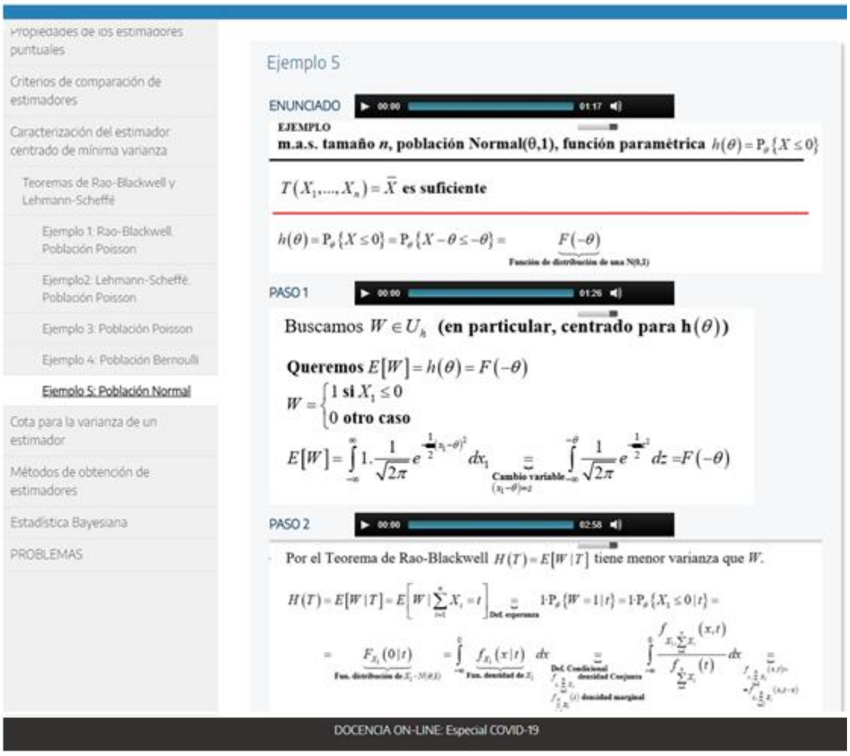
Apéndice 2.3. Autoevaluación con cuestionario Moodle



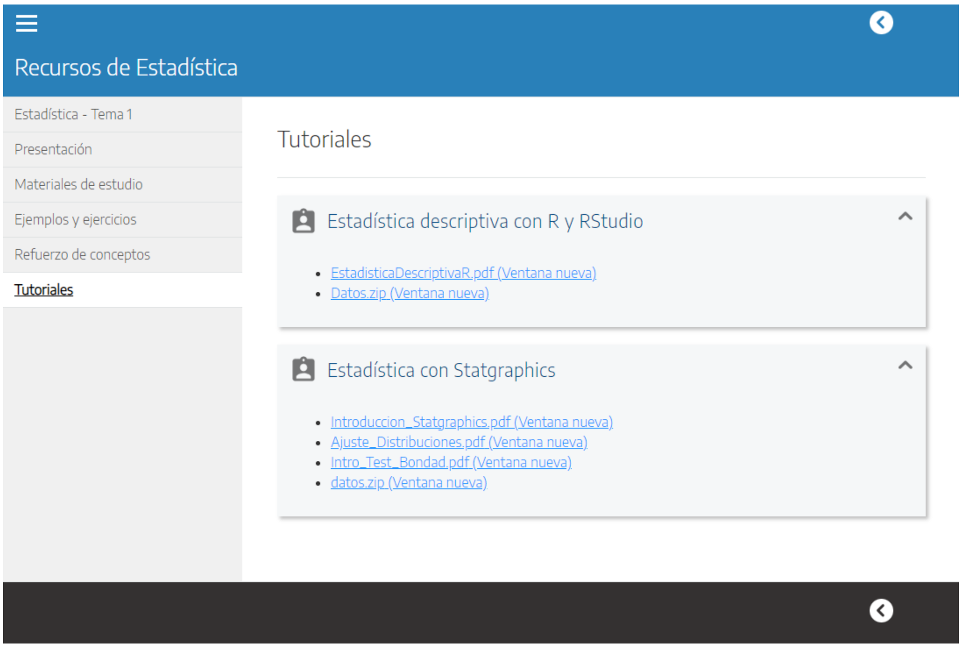
Apéndice 3: Ejemplo de Actividades durante el confinamiento

Apéndice 3.1: Ventana de Docencia on-line de la asignatura Estadística (especial COVID-19). Recurso: video-tutoriales.

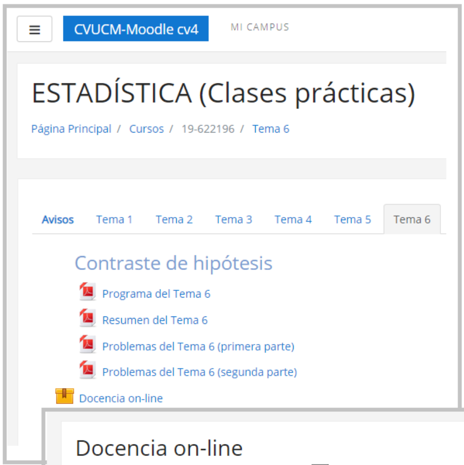
Apéndice 3.2: Ventana de Docencia on-line de la asignatura Estadística (especial COVID-19). Recurso: Docencia guiada a través de apuntes y audios explicativos.

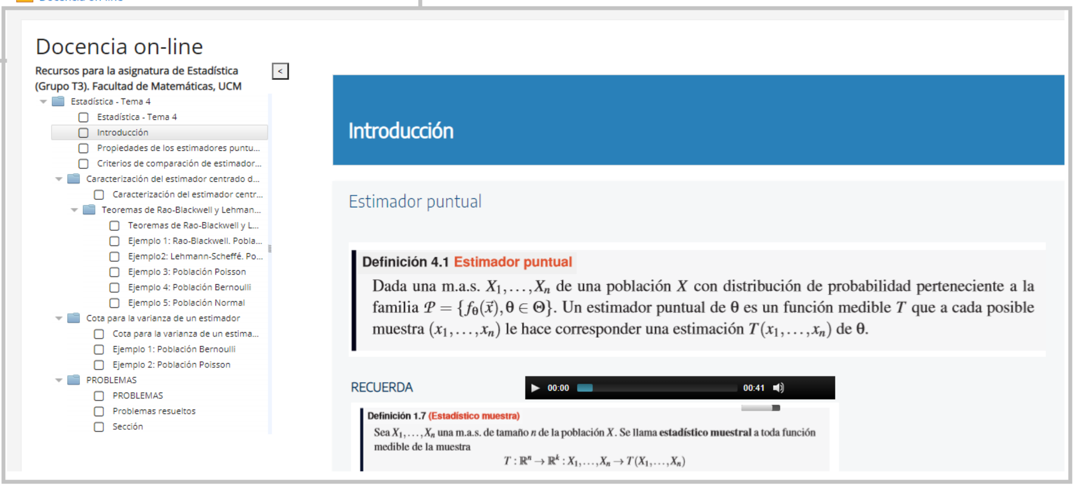


Apéndice 3.3. Ventana de Docencia on-line de la asignatura Estadística (especial COVID-19). Recurso: Tutoriales.

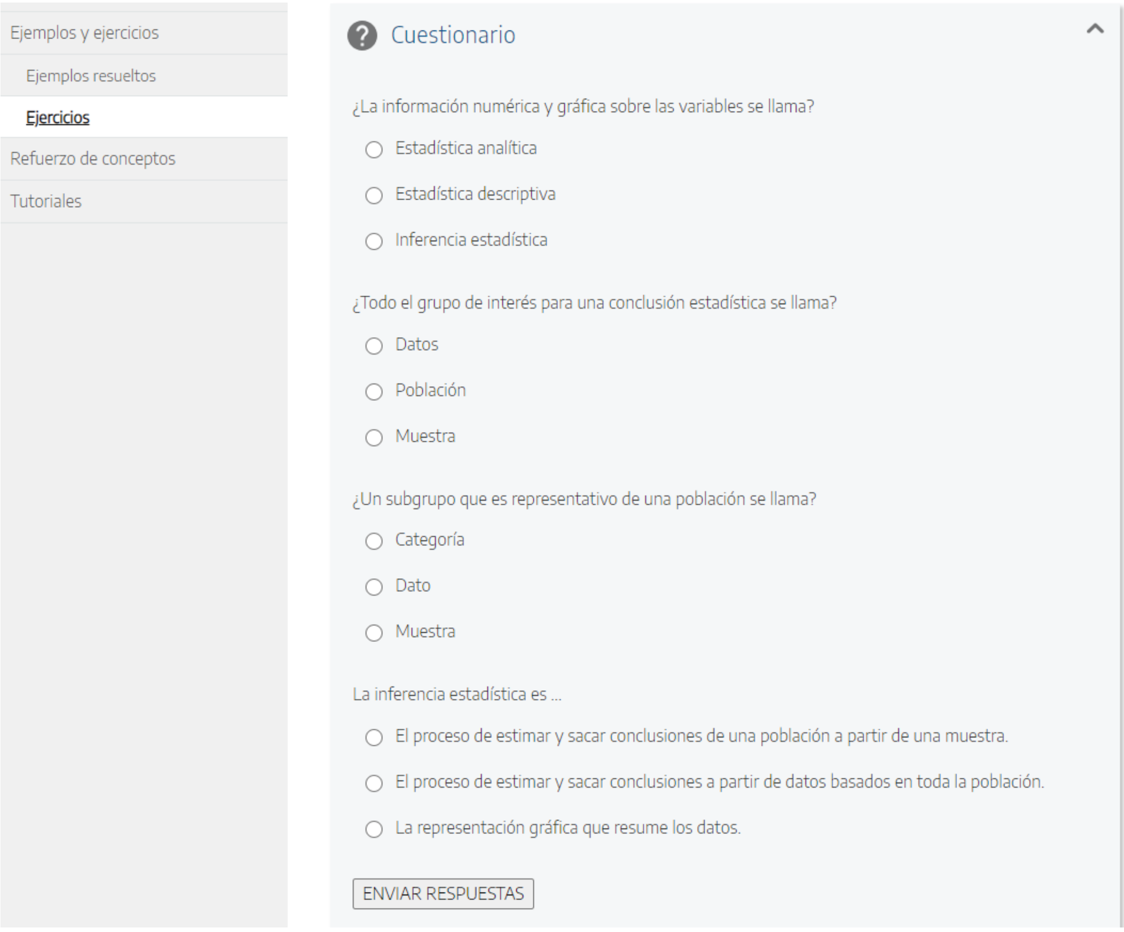


Apéndice 3.4. (Arriba) Vista de usuario del Campus Virtual de un paquete SCORM. (Abajo) Vista del paquete desplegado.

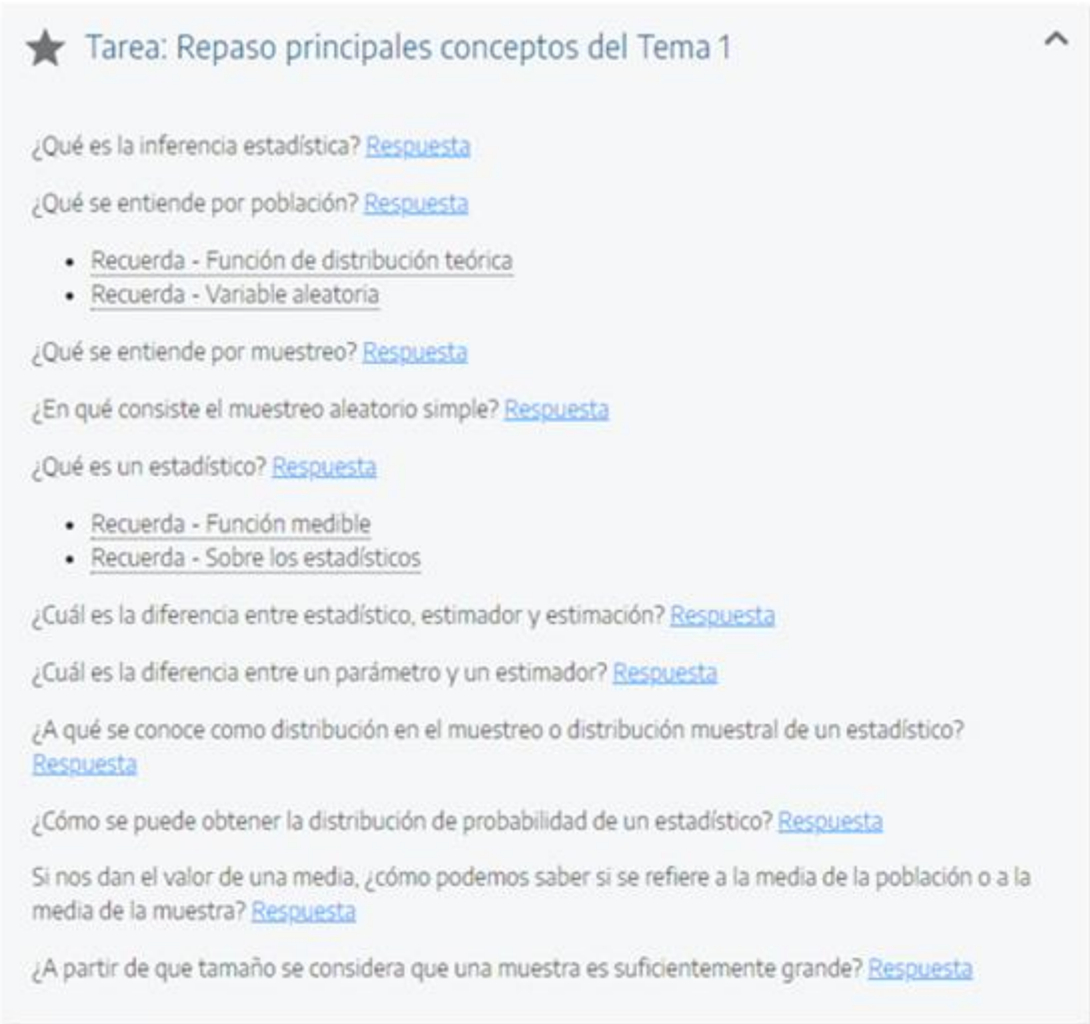


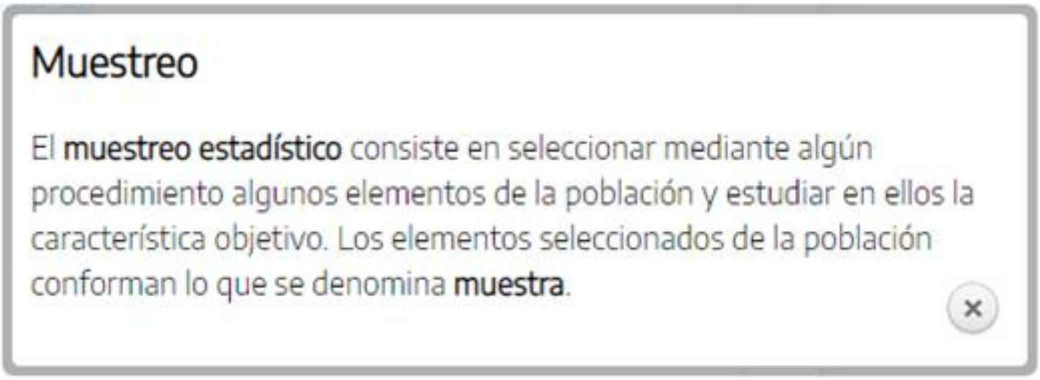


Apéndice 3.5. Ventana de Actividades Complementarias en "Recursos de Estadística": Cuestionario auto-evaluable.

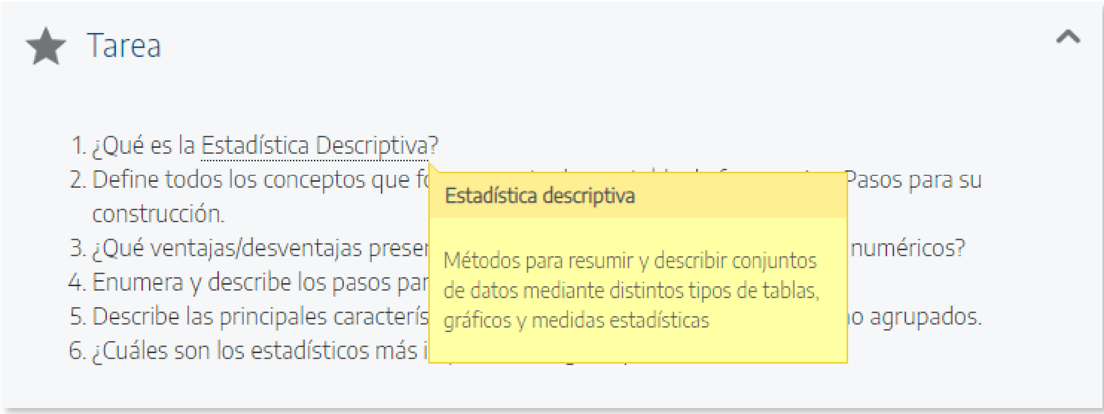


Apéndice 3.6. Ventana de Actividades Complementarias en "Recursos de Estadística": (Arriba) Repaso de conceptos. (Abajo) Ejemplo de ventana emergente en Respuestas.

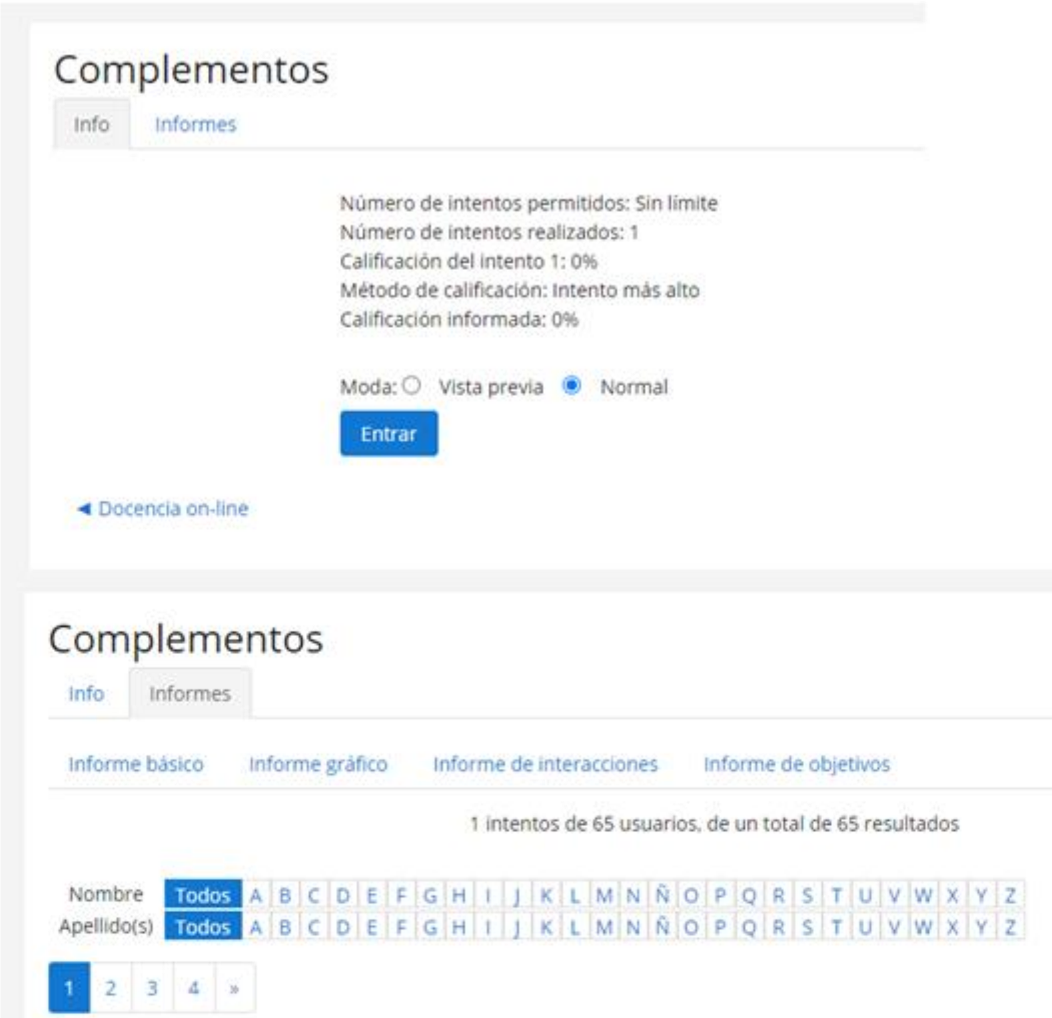




Apéndice 3.7. Ventana de Actividades Complementarias en “Recursos de Estadística”: Tarea.



Apéndice 3.8: Ventana de seguimiento de estudiantes (accesos, consultas, resultados cuestionarios, etc.) de paquetes SCORM integrados en el Campus Virtual.



Apéndice 4: Extracto de análisis de resultados académicos (globales de los grados)