Documento de Trabajo
8 8 1 5

D I F U S O S

(Fuzzy Set Theory)

José Carlos Sobrino

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

D I F U S O S

(Fuzzy Set Theory)

Jose Carlos Sobrino
Profesor Asociado
Dpto.de Economía Cuantitativa
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE de Madrid

En la actualidad la ciencia ofrece potencialmente un tipo de técnica rigurosa capaz de desarraigar los dualismos, gracias principalmente a su carácter minuciosamente experimental y al instrumental refinado y complejo que le permite perseguir al dualismo hasta sus límites.

Ken Wilber

Cuando el universo intenta conocerse como totalidad por mediación de la mente humana, algunos aspectos de ese mismo universo deben seguir siendo desconocidos.Con el despertar del conocimiento simbólico parece plantearse una escisión en el universo entre el conocedor y lo conocido, el pensador y el pensamiento, el sujeto y el objeto; y nuestra conciencia más íntima, en tanto que conocedora e investigadora del mundo externo,escapa en última instancia de su propia comprensión y queda como lo Incógnito,lo Inmanifestado y lo Inasible, como la mano que puede asir numerosos objetos pero jamás puede asirse a sí misma o el ojo que puede ver el mundo pero no puede verse.

El intento de conocer el universo como objeto de conocimiento es,pues,profunda e inextricablemente contradictorio;y cuando más éxito parece tener,tanto más fracasa en realidad,tanto más "falso para sí mismo" se vuelve el universo.Y sin embargo,por extraño que parezca, este tipo de conocimiento dualista en que el universo queda seccionado en sujeto frente a objeto (así como en verdad frente a falsedad, bien frente a mal, etcétera) constituye la piedra angular de la filosofía,la teología y la ciencia de Occidente,ya que la filosofía occidental es,en términos generales,filosofía griega,y la filosofía griega es la filosofía de los dualismos.

Una de las principales razones de que este enfoque del "divide y vencerás" que es el dualismo haya sido tan pernicioso,es que el error del dualismo constituye la raiz de la intelección y,por consiguiente,es imposible desarraigarlo mediante la intelección.Detectar esto exige una metodología rigurosa, coherente y persistente,capaz de perseguir al dualismo hasta sus últimos límites para descubrir allí la contradicción.

La teoría clásica de conjuntos precisa en sus construcciones lógicas y en sus reglas deductivas no recoge aquellos fenómenos reales cuyas características son "imprecisas" o "difusas".

En la esfera de los predicados subjetivos, y por tanto imprecisos, la teoría de conjuntos se enfrenta a un obstáculo difícil de superar.

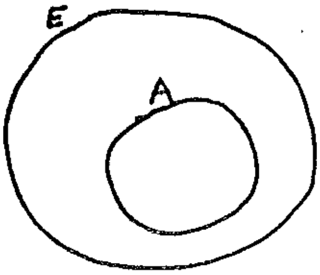
¿ Cómo podríamos definir el conjunto formado por las personas "altas" de una determinada reunión ?

¿ Desde qué altura se empieza a ser "alto" ?

La teoría de subconjuntos difusos pretende eliminar los obstáculos habituales para la teoría de conjuntos y reclama para sí un cuerpo de doctrina cuya incidencia en las diversas esferas de la ciencia es fundamental.

SUBCONJUNTO DEFINIDO POR SU FUNCION CARACTERISTICA

Sea E un conjunto referencial no vacío y sea A un subconjunto ordinario de E.



Conocer A es conocer una "ley" que nos permita distinguir sin ambigüedad cuando un elemento cualquiera de E pertenece ó no pertenece al subconjunto A.

Por consiguiente podemos definir para cada subconjunto A de E una función característica asociada a dicho subconjunto de la siguiente forma :

$$\mu_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$
$$\forall x \in E \Longrightarrow \begin{cases} \mu_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \\ \mu_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Con esto podríamos establecer una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de E y las funciones características asociadas a ellos puesto que $\forall A \subseteq E \quad \exists\, \mu_A : E \longrightarrow \{0,1\}$

$$y \quad \forall \mu_A \in \underbrace{\mathcal{F}(E, \{0,1\})}_{\text{conjuntos de todas las posibles aplicaciones de } E \text{ en } \{0,1\}} \Longrightarrow \exists\, A \subseteq E \;/\; A = \{x \in E / \mu_A(x) = 1$$

por consiguiente se establece una biyección natural :

$$\mathcal{P}(E) \longleftrightarrow \mathcal{F}(E; \{0,1\})$$

entre el conjunto de partes de E y el conjunto de aplicaciones de E en el par $\{0,1\}$.

NOTA :
Si definimos el grafo de la función característica como

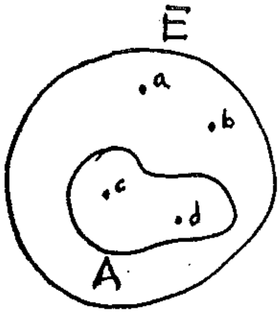
$$G(\mu_A) = \{(x, \mu_A(x)) \,/\, x \in E\}$$

y designásemos por $\mathcal{G}$ el conjunto de los grafos funcionales entre E y $\{0,1\}$ podríamos ampliar la cadena de biyecciones :

$$\mathcal{P}(E) \longleftrightarrow \mathcal{F}(E; \{0,1\}) \longleftrightarrow \mathcal{G}$$

por consigüiente podríamos identificar los CONCEPTOS de subconjunto, función característica y grafo funcional para referirnos indistintamente a ellos.

Ejemplo



$$\Longleftrightarrow$$

$$\mu_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$

$$a \longrightarrow \mu_A(a) = 0$$

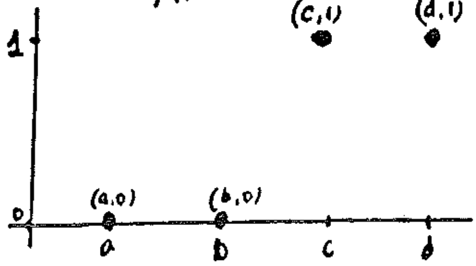
$$b \longrightarrow \mu_A(b) = 0$$

$$c \longrightarrow \mu_A(c) = 1$$

$$d \longrightarrow \mu_A(d) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$G_{\mu_A} = \{(a,0), (b,0), (c,1), (d,1)\}$$



NOTA FUNDAMENTAL

En la NECESIDAD de ASOCIAR a cada elemento de un conjunto los valores 0 ó 1 para poder definir con precisión a una parte de dicho conjunto está el germen que forma la lógica bivalente.

SUBCONJUNTOS DIFUSOS DE ZADEH : LOGICAS MULTIVALENTES

(Se considera a Zadeh como el padre de la teoría de los Subconjuntos difusos desarrollada en 1964 utilizando las lógicás múltivalentes descubiertas en 1920 por Lukasiewicz, Post y Tarski)

A Zadeh se le ocurrio la idea de "unir" todas las posibilidades que podían existir entre CERO y UNO, entre el NO y el SI, entre el blanco y el negro, entre el "no alto" y el "alto", y así decidió ampliar el concepto de FUNCION CARACTERISTICA de una parte de un conjunto al de FUNCION de PERTENENCIA a dicha parte del conjunto es decir definiría la función de PERTENCIA de un elemento $x \in E$ al conjunto $\underset{\sim}{A}$ como un número que estaría comprerdido entre el CERO y el UNO, y que por tanto como caso particular podría coincidir con sus extremos

es decir ahora $\mu_{\underset{\sim}{A}} : E \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow 0 \leq \mu_A(x) \leq 1$$

Ej: $\text{Si } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.3 \iff x \underset{0.3}{\in} \underset{\sim}{A}$. $\text{Si } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1 \iff x \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A} \iff x \in A$

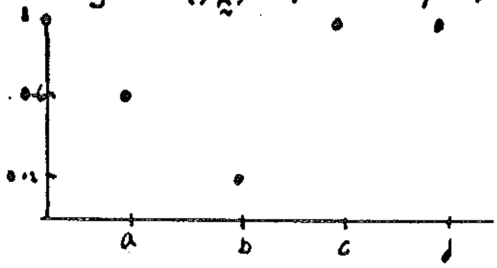
$\text{y si } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0 \iff x \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A} \iff x \notin A.$

y sería la función de pertenencia asociada a un subconjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ de E y el conjunto $\mathcal{F}(E ; [0,1])$ formado por todas las "relaciones funcionales" entre el conjunto E y el cerrado $[0,1]$ nos representaría a todos los Subconjuntos difusos de E.

En este caso el grafo asociado a un Subconjunto difuso de E estaría constituído por parejas formadas por un elemento $x \in E$ y un valor de pertenencia al subconjunto $\underset{\sim}{A}$ dado por $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$

es decir $G(\mu_{\underset{\sim}{A}}) = \{(x, \mu_A(x)) \,/\, x \in E \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]\}$

Ej: $G(\mu_{\underset{\sim}{A}}) = \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 1), (d, 1)\}$.



NOTA

Los subconjuntos ORDINARIOS son un caso particular de Subconjuntos DIFUSOS pues $\{0,1\} \subset [0,1]$

Def.:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : \begin{array}{l} E \longrightarrow [0,1] \\ x \longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \end{array}$$

se llama FUNCION DE PERTENENCIA AL SUBCONJUNTO $\underset{\sim}{A} \subset E$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ se llama Grado de PERTENENCIA del elemento x de E al subconjunto $\underset{\sim}{A}$ de E

NOTA

Tanto al propio conjunto E como al conjunto vacío los podríamos considerar también como difusos, pues bastaría con definir así sus funciones de pertenencia : $\mu_E(x) = 1 \quad \forall x \in E$

$$\mu_\phi(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

por consiguiente todo conjunto ordinario puede considerarse Subconjunto difuso de sí mismo y por esto es por lo que la teoría de Zadeh es llamada Subconjuntos difusos y no de conjuntos difusos.

OPERACIONES (con subconjuntos difusos)

1-IGUALDAD

Dos subconjuntos difusos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ de E decimos que son IGUALES cuando todo elemento de E tiene el mismo grado de pertenencia con respecto a ellos.

Es decir $$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad \forall x \in E.$$

siendo $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ las funciones de pertenencia que definen ambos difusos.

2-CONTENIDO

Sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos difusos de E. Decimos que $\underset{\sim}{A}$ está contenido en $\underset{\sim}{B}$ (en sentido amplio) cuando el grado de pertenencia de cualquier elemento del conjunto E al conjunto $\underset{\sim}{A}$ es MENOR (ó igual) que el grado de pertenencia de dicho elemento al conjunto $\underset{\sim}{B}$.

Es decir $$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \underset{def}{\Longleftrightarrow} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad \forall x \in E.$$

3-UNION

Sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos difusos de E: $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(E;[0,1$ definimos la UNION de ambos como el difuso cuya función de pertenencia se define por $\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x) = max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$ esta expresión considerada en el contexto de las funciones característica recupera la unión ordinaria de conjuntos. Pues en ese caso

si $$x \in A \cup B \Longrightarrow \begin{matrix} x \in A \\ \vee \\ x \in B \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1 \\ \vee \\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 \end{matrix} \Longrightarrow max\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right] = 1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x) = 1$$

y por otro lado si $x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{matrix} x \notin A \\ \wedge \\ x \notin B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0 \\ \wedge \\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=0 \end{matrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right]=0 \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=0.$$

4-<u>INTERSECCION</u> Sean $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(E,[0,1])$ definimos la INTERSECCION de ambos difusos como el difuso cuya función de pertenencia viene definida por $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x) = \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} \quad \forall x \in E.$

y como caso particular si A y B son ordinarios y por consiguiente μ_A y μ_B sus funciones características tendremos que

$$\forall x \in A\cap B \Rightarrow \begin{matrix} x \in A \\ \wedge \\ x \in B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu_A(x)=1 \\ \wedge \\ \mu_B(x)=1 \end{matrix} \Rightarrow \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]=1 \Rightarrow \mu_{A\cap B}(x)=1$$

y $$\forall x \notin A\cap B \Rightarrow \begin{matrix} x \notin A \\ \vee \\ x \notin B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu_A(x)=0 \\ \vee \\ \mu_B(x)=0 \end{matrix} \Rightarrow \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]=0 \Rightarrow \mu_{A\cap B}(x)=0$$

5-<u>COMPLEMENTACION</u> Si $\underset{\sim}{A}$ es un subconjunto difuso de E se define como COMPLEMENTARIO de $\underset{\sim}{A}$ al difuso $\underset{\sim}{A}'$ cuya función de pertenencia viene definida por $\mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) = 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \quad \forall x \in E.$

y bajo el supuesto de que A fuese ordinario y por consiguiente μ_A su función característica tendríamos que $\mu_{A'}=1-\mu_A$ sería la función característica de su complementario

pues

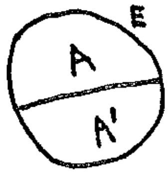
$$\text{Si } x \in A' \Rightarrow x \notin A \Rightarrow \mu_A(x)=0 \Rightarrow \mu_{A'}(x)=1$$

$$\text{y si } x \notin A' \Rightarrow x \in A \Rightarrow \mu_A(x)=1 \Rightarrow \mu_{A'}(x)=0.$$

E

DIFERENCIA FUNDAMENTAL entre el significado de COMPLEMENTACION para el caso de subconjuntos ordinarios y difusos de E

CASO ORDINARIO



$$A \cup A' = E$$
$$A \cap A' = \phi$$

por consiguiente en el caso ORDINARIO NO se admite el que un elemento pueda pertenecer a la vez a un conjunto y a su complementario. Una cosa al mismo tiempo NO PUEDE SER y NO SER en la lógica bivalente y por consiguiente con la teoría de conjuntos ORDINARIOS se puede aplicar como método de razonamiento la REDUCCION al absurdo, diciendo que si partimos de la hipótesis de que $x \in A$ y llegasemos mediante un razonamiento coherente a que $x \in A'$ esto sería una CONTRADICCION, y como NO podemos admitir esta contradicción concluiríamos diciendo que el supuesto inicial del que partíamos cuando decíamos que $x \in A$ era falso.

Ahora bien, nada de esto sucede con las lógicas multivalentes utilizadas en la construcción de subconjuntos difusos. En efecto: supongamos un subconjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ de E y supongamos que un cierto elemento x de E perteneciese a $\underset{\sim}{A}$ con un grado de pertenencia igual a 0'7 ; es decir $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.7$. En este caso $\mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) = 0.3$ pues $\mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ y por tanto ese mismo elemento tendría un grado de pertenencia al complementario del conjunto $\underset{\sim}{A}$ de 0.3 . Mas aún puede darse el caso de que existan elementos en E con igual grado de pertenencia a un subconjunto $\underset{\sim}{A}$ de E y a su complementario $\underset{\sim}{A}'$, pues bastaría con que fuese $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.5$ para que $\mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) = 0.5$.

Por tanto esta nueva logia multivalente funciona de forma más "flexible" que la antigua logia ordinaria bivalente en la cual solo se admitían DOS posibilidades con "exclusión" de cualquier otra intermedia.

La logia ordinaria bivalente es profundamente tajante: ó SI ó NO. O blanco ó negro. O me amas ó no me amas. O te vas ó te quedas. O me "gustas" ó "no me gustas"... Y así el dominio formado por esa logia bipolar extendería sus tentáculos abarcando todo el campo mental del hombre a traves de su "forma bipolar de pensar", todo su aspecto psicológico haciéndole sentir (como consecuencia de su forma de pensar) "bipolarmente" y todas sus acciones físicas haciéndole actuar (como consecuencia de su forma de sentir) "bipolarmente".

Nada de esto tiene porqué suceder en la nueva logia multivalente que aquí estamos presentando, pues en ella todo es más flexible, más sutil, más ductil, más moldeable. Una cosa puede al mismo tiempo SER y NO SER. Te quiero y a su vez no te quiero. Estoy y a su vez no estoy. Me gusta y a su vez no me gusta...

Asi pues una de las principales características que diferencia a ambas logias es que en el caso de la logia bivalente o bipolar se acepta el rechazo a una tercera posibilidad o lo que es lo mismo se acepta el principio del "TERCIO EXCLUSO", en cambio en la teoría de los subconjuntos difusos no se acepta el principio del "tercio excluso" pues puede existir terceras posibilidades entre las dos que forman los casos extremos.

Para que pueda el ser humano "ordinario", es decir, dominado por la logia bivalente, darse cuenta de la tremenda estrechez en que vive la consciencia que está atrapada en el campo bipolar es por lo que ha sido conveniente dar una visión panorámica de lo que realmente se podría conseguir.

Asi pues en el caso de los subconjuntos difusos en lugar de hablar de complementación entendida en el sentido ordinario convendría hablar de pseudo complementación o complementación a la *unidad*. [pues $\mu_{\underset{\sim}{A'}}(x) = 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$]

ESPACIOS PROBABILISTICOS CONSIDERADOS COMO DIFUSOS

Como lo único que necesitamos para obtener subconjuntos difusos $\underset{\sim}{A}$ de un conjunto E es conocer el grado de pertenencia dado por: $\mu_{\underset{\sim}{A}}: E \longrightarrow [0,1]$ y como esta función tiene como rango el $[0,1]$, si suponemos que E es el espacio muestral dado por todos los casos posibles que pueden darse en un determinado experimento aleatorio y $\underset{\sim}{A_i}$ la familia de subconjuntos de E ó familia formada por los diversos resultados de este fenómeno, a cada $\underset{\sim}{A_i}$ le podemos asignar una función de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{A_i}}$ / $\mu_{\underset{\sim}{A_i}}: E \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A_i}}(x) = P_i = \text{Prob. de que } x \in \underset{\sim}{A_i}$$

aprovechando esta conexión entre difusos y probabilidad sería conveniente definir como unión e intersección de difusos la suma y producto probabilístico a fin de no perder la sintonía.

Por tanto definimos
$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$
$$\mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(x).$$

y los llamaremos PRODUCTO y SUMA PROBABILISTICA DE DIFUSOS.

NOTA

También podríamos definir entre los difusos la unión e intersección ACOTADAS del siguiente modo

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \dot{\cup} \underset{\sim}{B}}(x) = \min\left[1, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right]$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \dot{\cap} \underset{\sim}{B}}(x) = \max\left[0, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - 1\right]$$

pero si lo hiciésemos asi volveríamos a entrar en la política del TERCIO EXCLUSO pues como

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{\underset{\sim}{A} \dot{\cup} \underset{\sim}{A}'}(x) = \min[1, 1] = 1 \quad \forall x \in E \Rightarrow \underset{\sim}{A} \dot{\cup} \underset{\sim}{A}' = E \\ \mu_{\underset{\sim}{A} \dot{\cap} \underset{\sim}{A}'}(x) = \max[0, 0] = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow \underset{\sim}{A} \dot{\cap} \underset{\sim}{A}' = \phi \end{array}\right\} \text{TERCIO EXCLUSO}$$

sin embargo esto no sucedería si utilizásemos las definiciones probabilísticas

pues como $\mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

tendríamos que $\mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A}'}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot [1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)] \neq 0 \quad si \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in (0,1)$

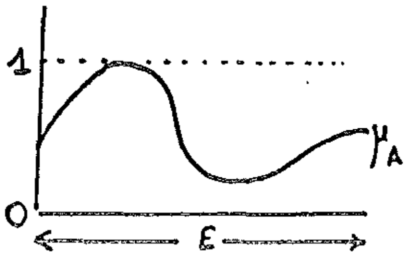
y $\mu_{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}'}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A}'}(x) - \mu_{A \cdot A'}(x) \neq 1 \quad si \ \mu_A(x) \in (0,1)$

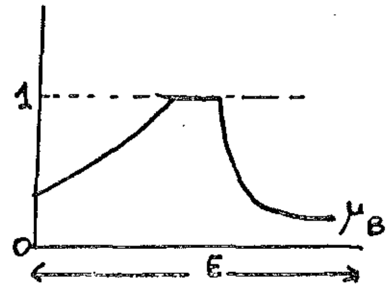
Por esto queda probado que utilizando las definiciones probabilísticas $\nexists$ complementación sino pseudo-complementación es decir RECHAZAMOS la hipótesis del Tercio excluso ó bien ACEPTAMOS el que pueda existir terceras VALORACIONES entre dos supuestamente contrarias pues la contrariedad era aparente ya que en realidad eran pseudocontrarios.

MEDIDAS de DIFUSION

¿Como podrían compararse los "grados de difusión" de dos subconjuntos difusos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ del mismo conjunto E ? Es decir ¿Como podríamos saber cual de los dos subconjuntos es más difuso?

Supongamos pués dos subconjuntos difusos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dados por sus respectivas funciones de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ y $\mu_{\underset{\sim}{B}}$ .Estas como sabemos son "aplicaciones valoración" que asocian a cada elemento de E un VALOR de pertenencia a dicho conjunto y por tanto pueden tener como representación geométrica una curva (ó una nube de puntos) cuya abcisas recorran E y cuyas ordenadas pertenezcan al intervalo $[0,1]$.



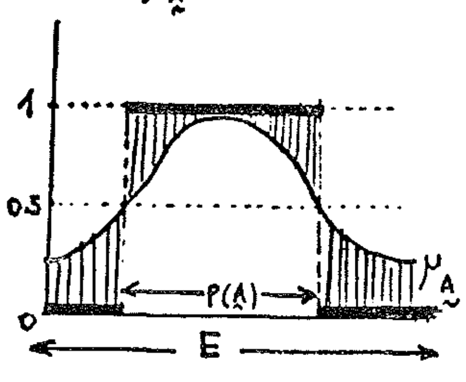


Si consideramos como ORDINARIO a los puntos 0 y 1 y como DIFUSO a todos los puntos que están entre ellos; vamos a llamar PROXIMIDAD ORDINARIA de un punto $x \,/\, 0 < x < 1$ al entero más próximo a él y en el caso límite de que $x = 0.5$ diremos que su proximidad ordinaria es CERO

es decir $\forall\, x \in (0,1) \Longrightarrow \underset{\substack{\text{Proximidad} \\ \text{ordinaria de } x}}{P(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0.5 \\ 1 & \text{si } x > 0.5. \end{cases}$

A partir de esta definición podemos definir la PROXIMIDAD ORDINARIA de un DIFUSO como un conjunto ORDINARIO cuya función característica sería $\mu_{P(\underset{\sim}{A})}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq 0.5 \\ 1 & \text{si } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5. \end{cases}$

siendo $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ la función de pertenencia del difuso $\underset{\sim}{A}$



Así pués $P(\underset{\sim}{A}) = \{ x \in E \,/\, \mu_{P(\underset{\sim}{A})}(x) = 1 \}$ es decir estaría formada solo por aquellos puntos de E cuya función de pertenencia al difuso $\underset{\sim}{A}$ fuese superior a 0.5 .

DEF.: Llamaremos grado de difusión del difuso $\underset{\sim}{A}$ a la expresión

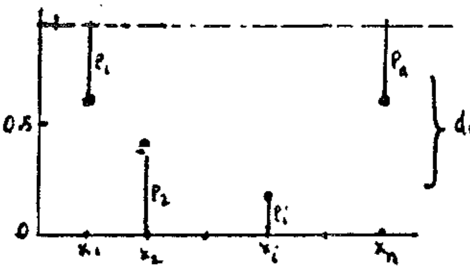
GRADO DE DIFUSION DEL DIFUSO $\underset{\sim}{A}$

$g_d(\underset{\sim}{A}) = \int_E |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{P(\underset{\sim}{A})}(x)|\, dx$ que correspondería al área rayada es decir a la distancia entre el difuso $\underset{\sim}{A}$ y su proximidad ordinaria $P(\underset{\sim}{A})$ y corresponderá a la distancia mínima entre el difuso $\underset{\sim}{A}$ y cualquier subconjunto ordinario de E.

Evidentemente que ahora podremos comparar grados de difusión de distintos difusos; y además la cota de difusión máxima que puede tener un punto en un difuso sería 0.5, que sería el caso del punto x del difuso $\underset{\sim}{A}$ cuya función de pertenencia fuese $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.5$. Así pués ningún punto puede ser más difuso que 0.5.

CASOS PARTICULARES

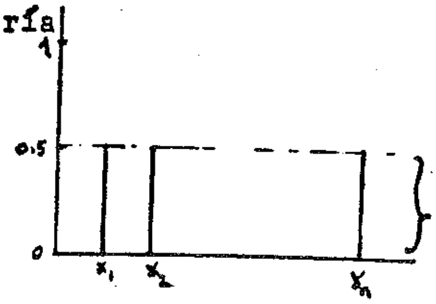
1- $E = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$



difuso $\underset{\sim}{A} \Rightarrow g_d(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} P_i \leq 0.5 \cdot n$

por consiguiente $\frac{2}{n} g_d(\underset{\sim}{A}) \leq 1$ y con ello nos daría un índice de difusión pues $g_d^*(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{n} g_d(\underset{\sim}{A}) \in [0,1]$.

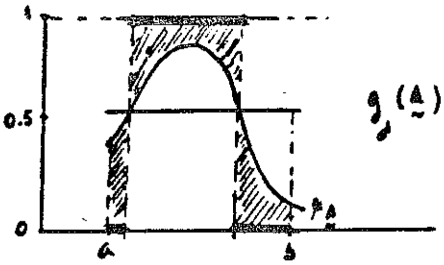
el más difuso sería



$\underset{\sim}{A}^* \Longrightarrow g_d(\underset{\sim}{A}^*) = n \cdot 0.5$

$\therefore\ g_d^*(\underset{\sim}{A}^*) = 1$

2- $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$.



$$g_d(\underset{\sim}{A}) = \int_a^b |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{P(\underset{\sim}{A})}(x)|\, dx \le 0.5\,(b-a)$$

$$\therefore \quad 0 \le \frac{2\, g_d(\underset{\sim}{A})}{b-a} = g_d^*(\underset{\sim}{A}) \le 1$$

y con ello hemos conseguido también en este caso definir con $g_d^*(\underset{\sim}{A})$ un índice de difusión de $\underset{\sim}{A}$

SUBCONJUNTOS ORDINARIOS DE NIVEL α

Sea $\underset{\sim}{A}$ un subconjunto difuso de E y sea $\alpha \in [0,1]$ llamaremos subconjunto ordinario del difuso $\underset{\sim}{A}$ correspondiente al nivel α y denotaremos por A_α al conjunto formado por aquellos elementos de E cuyo grado o nivel de pertenencia al conjunto $\underset{\sim}{A}$ es mayor o igual que α.

Es decir $A_\alpha = \{ x \in E \,/\, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \ge \alpha \}$

Ejemplo 1: Si $E = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

definimos $\underset{\sim}{A}$:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.1	0.7	0.3	0.5	0.2	1

entonces $A_{0.4}$:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1	0	1

$= \{x_1, x_3, x_5\}$

$A_{0.7}$:

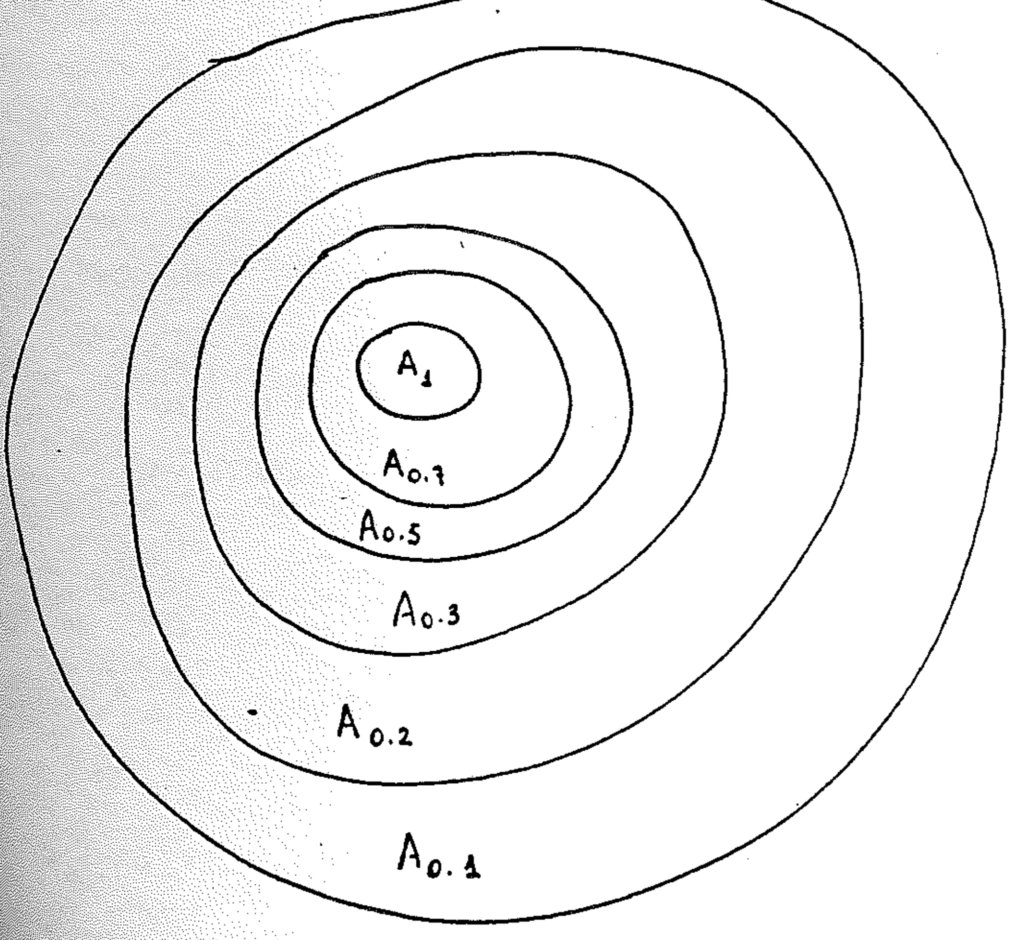
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	0	0	1

$= \{x_1, x_5\}$

Como propiedad importante a destacar tendríamos que

si $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$

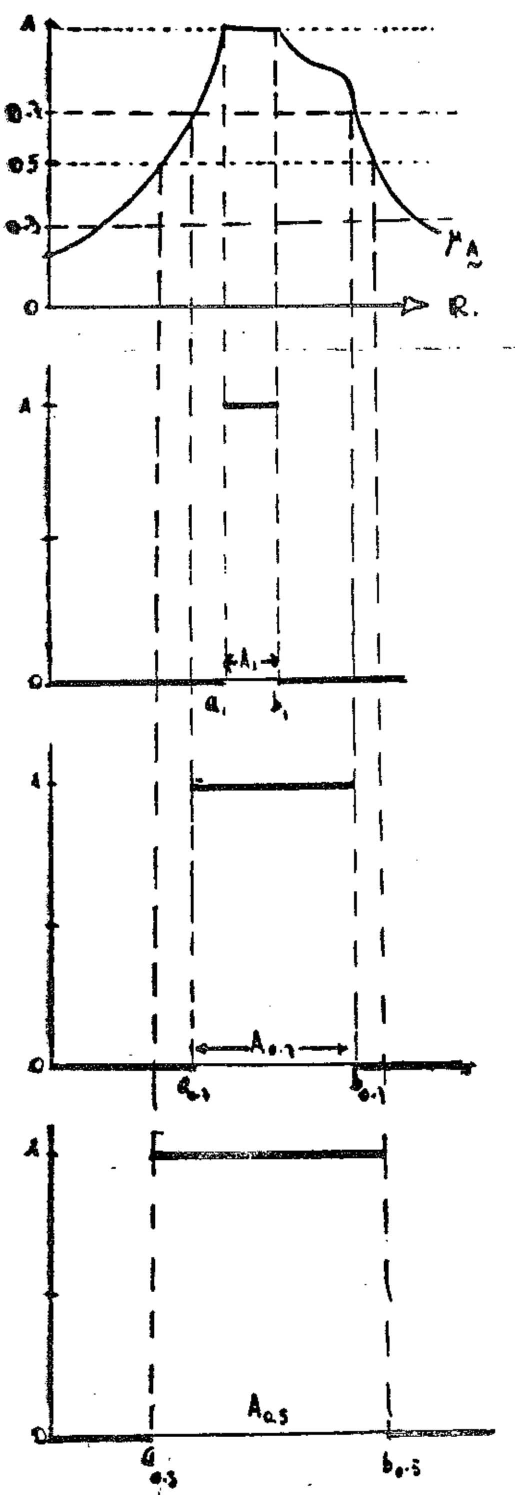
gráficamente esta idea la podemos representar así



NOTA

Podríamos pués decir que A_1 es el NUCLEO (o alma) del Difuso $\underset{\sim}{A}$ pero si admitiésemos esta definición tendríamos también que admitir que hay difusos "desalmados" es decir carentes de núcleo.

Ejemplo 2: Supongamos que el conjunto referencial E es ahora un determinado intervalo finito de la recta $\mathbb{R}$



$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a_1, b_1) \\ 0 & x \notin (a_1, b_1) \end{cases}$$

$$\mu_{A_{0.7}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a_{0.7}, b_{0.7}) \\ 0 & \text{si } x \notin (a_{0.7}, b_{0.7}) \end{cases}$$

$$\mu_{A_{0.5}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a_{0.5}, b_{0.5}) \\ 0 & \text{si } x \notin (a_{0.5}, b_{0.5}) \end{cases}$$

TEOREMA DE DESCOMPOSICION

Todo subconjunto difuso puede descomponerse como $\underset{\sim}{\cup}$ de productos de subconjuntos ordinarios por los coeficientes de difusión.

Es decir $\underset{\sim}{A} = \alpha_1 \cdot A_{\alpha_1} \underset{\sim}{\cup} \alpha_2 \cdot A_{\alpha_2} \underset{\sim}{\cup} \cdots \underset{\sim}{\cup} \alpha_n \cdot A_{\alpha_n} = \max_i \{ \alpha_i A_{\alpha_i} \}$

En efecto

Ejemplo 1:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.3} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0.6} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0.8} \\ \hline \end{array} =$$

$$0.3 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \underset{\sim}{\cup}$$

$$0 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \underset{\sim}{\cup}$$

$$0.6 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \underset{\sim}{\cup}$$

$$1 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \underset{\sim}{\cup}$$

$$0.8 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo 2: Para un caso de variable contínua sea por ejemplo el conjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ dado por la función de pertenencia :

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in R^+ - \{0\}$$

Por consiguiente si $x > 0 \Longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0$

y si $x \rightarrow \infty \Longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < 1$

Por tanto $0 < \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < 1$. Ahora bién si queremos calcular el subconjunto ordinario A_α tendremos que buscar al

$$\{x \in E \;/\; \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\} = \{x \in E/ \; 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq \alpha\} =$$

$$= \{x \in E/ \; 1-\alpha \geq \frac{1}{1+x^2}\} = \{x \in E/ \; 1+x^2 \geq \frac{1}{1-\alpha}\} =$$

$$= \{x \in E/ \; x^2 \geq \frac{1}{1-\alpha} - 1\} = \{x \in E/ \; x^2 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha}\} = \{x \in E/ \; x \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\} = A_\alpha .$$

Por consiguiente $\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ 0 & \text{si} \quad x < \sqrt{\alpha/_{1-\alpha}} \end{cases}$

y como esto es cierto $\forall \alpha \in (0,1)$ podremos conseguir la descomposición del difuso en uniones (difusas) de productos de ordinarios por ciertos coeficientes α que medirían su grado de difusión.

GRAFOS DIFUSOS Y RELACIONES DIFUSAS

Las nociones de grafo, de correspondencia y de relación juegan un papel fundamental en todas las aplicaciones de la matemática. Lo que se pretende ahora es la generalización de estas relaciones a traves de la utilización de subconjuntos difusos. Difusionando grafos, correspondencias y relaciones, descubriremos unas propiedades muy interesantes que nos permitirán una nueva y mas grande amplitud de mira. Por ejemplo la noción ordinaria de "clase de queivalencia" se verá reemplazada por la noción de "similitud" (ó ser parecido) que por ser menos fuerte que la anterior nos permitirá el poder representar situaciones que se presentan frecuentemente en la realidad en que vivimos y que antes con el concepto ordinario de "clasificación" no podíamos hacerlo porque a un elemento dado del conjunto le estaba absolutamente prohibido pertenecer a más de una clase. Las clases NO podían tocarse. NO podían tener ningún elemento en común. Si una relación cumplía el ser reflexiva simétrica y transitiva inmediatamente encerraba a cada elemento en la "jaula" formada por todos aquellos SEMEJANTES a él, y nadie podía pasarse con esa relación a otra "jaula" distinta de la suya. Un ingeniero tiene que ser igual a todos los ingenieros pero le está vedado ser músico, poeta, electricista, panadero, jardinero etc. etc.

Así pués difusionando los viejos conceptos ordinarios de relaciones conseguiremos flexibilizar las estructuras existentes haciéndolas más elásticas y con ello más reales.

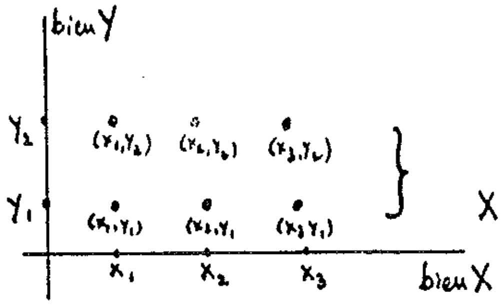
GRAFO DIFUSO

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos ordinarios. Un subconjunto difuso ~~de~~ $\underset{\sim}{G}$ de $E_1 \times E_2$ vendrá definido por su grafo o función de pertenencia definida en la forma usual :

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{\mu_{\underset{\sim}{G}}} [0,1]$$
$$(x, y) \longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{G}}(x,y) \in [0,1]$$

Ejemplo :

Supongamos un consumidor que le dan a elegir entre dos bienes X e Y los cuales pueden llegar a consumir en unas cantidades dadas por x_1, x_2, x_3 para el bien X e Y_1, Y_2 para el bien Y. El producto cartesiano de $X \times Y$ nos daría todas las posibilidades del consumo de ambos bienes.



$X \times Y$ = Posibilidades de consumo

Nuestro consumidor no está obligado a elegir todas las posibilidades consumo. Sino solamente aquellas que REALMENTE desee.

Si suponemos que actúa de forma ordinaria es decir en la Logia dada por un SI ó un NO diría que el desea de todas esas combinaciones que le dan a elegir las formadas por el subconjunto ORDINARIO $G = \{(x_1\ Y_2),\ (x_2, Y_1),\ (x_3, Y_1)\}$

Con esto nos hace saber que de las demás posibles combinaciones no quiere saber nada, es decir las rechaza categóricamente y lo que ha elegido lo ha elegido con "absoluta certeza" es decir no le cabe la menor duda con respecto a ello. Esta sería la actuación del consumidor obligado por el uso de la Logia ordinaria bivalente.

Si nuestro consumidor actuase desde una logia multivalente o difusa todo sería diferente pués ahora entre la absoluta negación y la absoluta afirmación entrarían infinitas nuevas posibilidades;ahora se podría permitir el lujo de no tener que ser obligatoriamente certero y poder tener un cierto "grado de seguridad". Asi nuestro consumidor podría contestar difusamente diciendo que él eligiría el subconjunto difuso dado por

$$\underset{\sim}{G} = \{((x_1,y_1)\,|\,0.2),\ ((x_1,y_2)\,|\,0.8),\ ((x_2,y_1)\,|\,1),\ ((x_2,y_2)\,|\,0),\ ((x_3,y_1)\,|\,0.5),\ ((x_3,y_2)\,|\,0.3)\}.$$

Veamos su diferencia a traveş de una representación matricial :

ELECCION ORDINARIA

	y_1	y_2
x_1	0	1
x_2	1	0
x_3	1	0

MATRIZ

BOOLEANA

ELECCION DIFUSA

	y_1	y_2
x_1	0.2	0.8
x_2	1	0
x_3	0.5	0.3

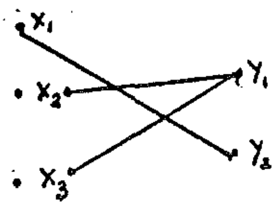
MATRIZ

DIFUSA

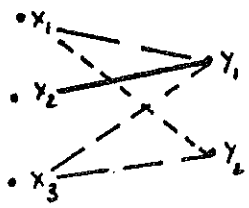
Asi pués vemos que $\underset{\sim}{G}$ recoge las decisiones de absoluta certeza que tenía nuestro consumidor pués para él la combinación (x_2,y_1) la eligiría con pleno deseo, con absoluta certeza y la combinación (x_2,y_2) la mantendría rechazando sin ninguna duda.Pero en el resto de sus decisiones aquí sería más real que antes ya que de alguna forma habría conseguido afinar más su deseo expresando el grado de aceptación ó de apetencia en su decisión.

Otra posible representación que nos permita vivenciar su profunda diferencia podría ser la siguiente :

ELECCION ORDINARIA



ELECCION DIFUSA



GENERALIZACION para el caso de n-tuplas

Dado los conjuntos $E_1, E_2, \ldots E_n$ si $x_i \in E_i \quad \forall i=1 \cdots n$ y por lo tanto $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ podemos definir la función de pertenencia del subconjunto difuso $\underset{\sim}{G}$ como la aplicación

$$\mu_{\underset{\sim}{G}} : \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow [0,1] \\ (x_1, x_2, \cdots x_n) \longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{G}}(x_1 \cdots x_n) \in [0,1] . \end{array}$$

RELACION DIFUSA

Una relación n-aria difusa vendría dada por las n-tuplas elementales y sus funciones de pertenencia.

Ejemplo : Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$. y $\underset{\sim}{G} =$

$$\begin{array}{c|c|c|} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & .2 & .8 \\ \hline x_2 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & .5 & .3 \\ \hline \end{array}$$

definimos : $x_i \underset{\underset{\alpha}{\sim}}{\mathcal{R}} y_j \Longleftrightarrow_{\alpha_{ij}} (x_i, y_j) \underset{\alpha}{\in} \underset{\sim}{G}$

Así pues : $(x_1, y_1) \underset{.2}{\in} \underset{\sim}{G} \Longrightarrow x_1 \underset{\underset{.2}{\sim}}{\mathcal{R}} y_1$

$(x_1, y_2) \underset{.8}{\in} \underset{\sim}{G} \Longrightarrow x_1 \underset{\underset{.8}{\sim}}{\mathcal{R}} y_2$

casos ordinarios

$$\left\{\begin{array}{l}(x_2,y_1)\in G \iff (x_2,y_1) \underset{1}{\in} \underset{\sim}{G} \Rightarrow x_2 \underset{1}{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} y_1 \iff x_2 \mathcal{R} y_1 \\[2ex] (x_2,y_2)\notin G \iff (x_2,y_2) \underset{0}{\in} \underset{\sim}{G} \Rightarrow x_2 \underset{0}{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} y_2 \iff x_2 \not\mathcal{R}\, y_2\end{array}\right.$$

$$(x_3,y_1) \underset{.5}{\in} \underset{\sim}{G} \Rightarrow x_3 \underset{.5}{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} y_1$$

$$(x_3,y_2) \underset{.3}{\in} \underset{\sim}{G} \Rightarrow x_3 \underset{.3}{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} y_2 .$$

PROYECCIONES DE UNA RELACION DIFUSA

Proyección primera : $\mu^{(1)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x) = \max\limits_{y} \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x,y)$

Proyección segunda : $\mu^{(2)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y) = \max\limits_{x} \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x,y)$

Proyección global : $\mu^{(G)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = \max\limits_{x} \left[\max\limits_{y} \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x,y)\right] = \max\limits_{y} \left[\max\limits_{x} \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x,y)\right]$.

<u>Def.</u> $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es relación difusa NORMAL $\underset{\text{Def}}{\iff} \mu^{(G)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = 1$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es relación difusa SubNORMAL $\underset{\text{Def}}{\iff} \mu^{(G)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} < 1$

<u>Ejemplo</u> :

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	$\mu^{(1)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$
x_1	0.2	0.8	0.8
x_2	1	0	1
x_3	0.5	0.3	0.5
$\mu^{(2)}_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$	1	0.8	1

por consiguiente $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es normal

SOPORTE DE UNA RELACION DIFUSA

Dada la relación difusa $\underset{\sim}{R}$ se denomina soporte de $\underset{\sim}{R}$ y lo representamos por $S(\underset{\sim}{R})$ al conjunto formado por aquellas parejas con función de pertenencia no nula.

Es decir $S(\underset{\sim}{R}) = \{(x,y) \,/\, \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0\}$

En nuestro ejemplo anterior : $S(\underset{\sim}{R}) = \{ (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_1),$

$$(x_3,y_1), (x_3,y_2)\} = X \times Y - \{(x_2,y_2)\}.$$

CONTINENTE Y CONTENIDO de una RELACION DIFUSA

Sean $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ dos relaciones difusas de X en Y

Si $\forall\, (x,y) \in X \times Y \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y) \leq \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(x,y)$ entonces se dice que la relación difusa $\underset{\sim}{R_2}$ es CONTINENTE de la $\underset{\sim}{R_1}$ o que $\underset{\sim}{R_1}$ está CONTENIDA en $\underset{\sim}{R_2}$ y escribiremos : $\underset{\sim}{R_1} \subset \underset{\sim}{R_2}$

Ejemplo :

Sean $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ dos relaciones difusas dadas por las siguientes matrices.

$\underset{\sim}{R_1}$	y_1	y_2
x_1	0.3	0.5
x_2	0.1	0.2
x_3	1	0

$\underset{\sim}{R_2}$	y_1	y_2
x_1	0.6	0.5
x_2	0.3	0.4
x_3	1	0.2

entonces $\underset{\sim}{R_1} \subset \underset{\sim}{R_2}$

UNION DE RELACIONES DIFUSAS

Si $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ son dos relaciones difusas, definimos la unión de ámbas $\underset{\sim}{R_1} \cup \underset{\sim}{R_2}$ como aquella relación cuya función de pertenencia es :

$$\mu_{\underset{\sim}{R_1} \cup \underset{\sim}{R_2}}(x,y) = \max\left[\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y),\ \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(x,y)\right].$$

Ejemplo :

$$\begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_1} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.3 & 0.5 \\ x_2 & 0.2 & 0.4 \\ x_3 & 0.1 & 1 \end{array} \;\cup\; \begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_2} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.2 & 0.4 \\ x_2 & 0.3 & 0.3 \\ x_3 & 0.5 & 0.8 \end{array} \;=\; \begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_1} \cup \underset{\sim}{R_2} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.3 & 0.5 \\ x_2 & 0.3 & 0.4 \\ x_3 & 0.5 & 1 \end{array}$$

Evidentemente si $\underset{\sim}{R_1} \subset \underset{\sim}{R_2} \Longrightarrow \underset{\sim}{R_1} \cup \underset{\sim}{R_2} = \underset{\sim}{R_2}$

Sería inmediato comprobar que esta unión de relaciones difusas verifica las propiedades de la unión conjuntista ordinaria es decir las propiedades ASOCIATIVA, CONMUTATIVA e IDEMPOTENTE.

INTERSECCION DE RELACIONES DIFUSAS

Definimos $\mu_{\underset{\sim}{R_1} \cap \underset{\sim}{R_2}}(x,y) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y), \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(x,y)\right]$

Ejemplo :

$$\begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_1} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.3 & 0.5 \\ x_2 & 0.2 & 0.4 \\ x_3 & 0.1 & 1 \end{array} \;\cap\; \begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_2} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.2 & 0.4 \\ x_2 & 0.3 & 0.3 \\ x_3 & 0.5 & 0.8 \end{array} \;=\; \begin{array}{c|cc} \underset{\sim}{R_1} \cap \underset{\sim}{R_2} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.2 & 0.4 \\ x_2 & 0.2 & 0.3 \\ x_3 & 0.1 & 0.8 \end{array}$$

y por tanto en el caso de que $\underset{\sim}{R_1} \subset \underset{\sim}{R_2}$ se tendría que $\underset{\sim}{R_1} \cap \underset{\sim}{R_2} = \underset{\sim}{R_1}$

También en este caso es facil observar la verificación de las propiedades propias de la $\cap$ conjuntista : asociativa, conmutativa e idempotente.

PRODUCTO ALGEBRAICO DE DOS RELACIONES

Se define el producto algebraico de las relaciones $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ y se denota por $\underset{\sim}{R_1} \cdot \underset{\sim}{R_2}$ como aquella relación difusa cuya función de pertenencia es :

$$\mu_{\underset{\sim}{R_1} \cdot \underset{\sim}{R_2}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(x,y) .$$

Ejemplo :

$\underset{\sim}{R_1}$	y_1	y_2
x_1	0.3	0.2
x_2	0.5	0.4
x_3	1	0

$\cdot$

$\underset{\sim}{R_2}$	y_1	y_2
x_1	0.2	0.4
x_2	0.7	0.1
x_3	0.3	0.5

$\underset{\sim}{R_1} \cdot \underset{\sim}{R_2}$	y_1	y_2
x_1	0.06	0.08
x_2	0.35	0.04
x_3	0.3	0

SUMA ALGEBREICA DE DOS RELACIONES

Se define la suma algebraica de dos relaciones difusas $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ y lo denotamos por $\underset{\sim}{R_1} + \underset{\sim}{R_2}$ como aquella relación cuya función de pertenencia es :

$$\mu_{\underset{\sim}{R_1} + \underset{\sim}{R_2}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y) + \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(x,y) - \mu_{\underset{\sim}{R_1} \cdot \underset{\sim}{R_2}}(x,y)$$

Ejemplo :

$\underset{\sim}{R_1}$	y_1	y_2
x_1	0.1	0.3
x_2	0.5	0
x_3	1	0'5

$+$

$\underset{\sim}{R_2}$	y_1	y_2
x_1	0.7	1
x_2	0.3	0.2
x_3	0'5	0

$\underset{\sim}{R_1} + \underset{\sim}{R_2}$	y_1	y_2
x_1	0.73	1
x_2	0.65	0.2
x_3	1	0.5

Esta suma algebraica así definida gozaría de las propiedades distributivas tanto respecto a la unión como a la intersección de relaciones difusas.

Es decir si llamásemos $\tilde{\mathcal{R}}$ al conjunto formado por todas las relaciones difusas que pueden establecerse entre dos conjuntos X e Y se tiene que

$$\forall\ \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3 \in \tilde{\mathcal{R}} \Longrightarrow (1)\ \tilde{R}_1 + (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_3)$$

$$\Longrightarrow (2)\ \tilde{R}_1 + (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_3)$$

En efecto :

(1) $\forall\ \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3 \in \tilde{\mathcal{R}} \Rightarrow \mu_{\tilde{R}_1 + (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3)}(x,y) = \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3}(x,y) - \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3}(x,y) =$

$$= \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \max\left[\mu_{\tilde{R}_2}(x,y), \mu_{\tilde{R}_3}(x,y)\right] - \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \max\left[\mu_{\tilde{R}_2}(x,y), \mu_{\tilde{R}_3}(x,y)\right] =$$

$$= \max\left[\left(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_2}(x,y) - \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right), \left(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_3}(x,y) - \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\tilde{R}_3}(x,y)\right)\right] =$$

$$= \max\left[\mu_{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2}(x,y), \mu_{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_3}(x,y)\right] = \mu_{(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_3)}(x,y)$$

$\forall (x,y) \in X$

(2) "Ejusdem fúrfuris" cambiando MAX por MIN.

COMPLEMENTO DE UNA RELACION

Se define la relación complementaria de $\tilde{R}$ y se denota por $\bar{\tilde{R}}$ como aquella cuya función de pertenencia es :

$$\mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Ejemplo :

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.3 & 0.5 \\ x_2 & 0.1 & 0 \end{array} \Rightarrow \bar{\underset{\sim}{R}} = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.7 & 0.5 \\ x_2 & 0.9 & 1 \end{array}$$

Que puede asociarse a la idea de relaciónes que indiquen "no mucha proximidad" o "bastante diferencia".

LA RELACION ORDINARIA (O VULGAR) MAS PROXIMA DE UNA RELACION DIFUSA

Dada $\underset{\sim}{R}$ definida a partir de su $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ definimos su relación ordinaria más próxima a ella y la denotamos por $\underset{\approx}{R}$ como aquella cuya función característica es

$$\mu_{\underset{\approx}{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \leq 0.5 \\ 1 & \text{si } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0.5 \end{cases}$$

Ejemplo :

$$\text{Si} \quad \underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.5 \\ x_2 & 0.1 & 0.6 \end{array} \Rightarrow \underset{\approx}{R} = \begin{array}{|cc|} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

COMPOSICION "MAX-MIN" de DOS RELACIONES DIFUSAS

Sean $\underset{\sim}{R_1}$ y $\underset{\sim}{R_2}$ dos relaciones difusas tales que :

$$\underset{\sim}{R_1} \subset X \times Y$$

$$\underset{\sim}{R_2} \subset Y \times Z$$

Se define la composición "max-min" de ellas y la denotamos por :

$$\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}(x,z) = \underset{y}{Max}\left[Min\left(\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x,y), \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(y,z)\right)\right]$$

donde $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$

Ejemplo :

$\underset{\sim}{R_1}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0	1	0.7
x_2	0.3	0.5	0	0.2	1
x_3	0.8	0	1	0.4	0.3

o

$\underset{\sim}{R_2}$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.3	0.4
y_2	0.2	1	0.8	0
y_3	0.8	0	0.7	1
y_4	0.4	0.3	0.3	0
y_5	0	1	0	0.8

=

$\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.4	0.7	0.3	0.7
x_2	0.3	1	0.5	0.8
x_3	0.8	0.3	0.7	1

Como caso particular si $\underset{\sim}{R} \subset E \times E$ definimos $\underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$ y en virtud de la asociatividad que goza esta operacion :

$$\underset{\sim}{R}^k = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \circ \overset{(k}{\cdots} \circ \underset{\sim}{R} .$$

SUBCONJUNTO ORDINARIO DE NIVEL α EN UNA RELCION DIFUSA

$\forall \alpha \in [0,1]$ se define el subconjunto ordinario de nivel α correspondiente a la relación difusa $\underset{\sim}{R} \subset X \times Y$, se denota por G_α al conjunto:

$$G_\alpha = \{ (x,y) \in X \times Y \ / \ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq \alpha \} .$$

Ejemplos:

1) Sea

$\underset{\sim}{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0.2	0.7	1
x_2	0	0.5	0.9	0.4
x_3	0.3	0.6	0.7	0.8

$$G_{0.5} = \{ (x_1,y_3), (x_2,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_2), (x_3,y_3), (x_3,y_4) \} .$$

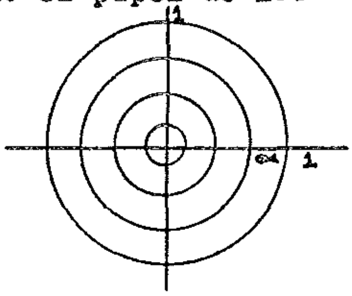
$$G_{0.8} = \{ (x_2,y_3), (x_3,y_4) \} \subset G_{0.5}$$

2) Supongamos la relación difusa definida en $[0,1] \times [0,1]$ por la función de pertenencia : $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

En este caso los subconjuntos ordinarios de nivel α vendrían definidos por :

$$G_\alpha = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ / \ \sqrt{x^2+y^2} \geq \alpha\}$$

$\therefore$ su representación visual o geométrica correspondería a la de una familia de circunferencias centradas en el origen de coordenadas y con radios haciendo el papel de los α y creciendo de cero a uno



PROPIEDADES IMPORTANTES que podemos descubrir a travez de ambos ejemplos es que si :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 \geq \alpha_2 & \Longrightarrow & G_{\alpha_1} & \subset & G_{\alpha_2} & \Longleftrightarrow & \underset{\sim}{R}_{\alpha_1} \subset \underset{\sim}{R}_{\alpha_2} \\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ & & R_{\alpha_1} & & R_{\alpha_2} & & \end{array}$$

TEOREMA DE DESCOMPOSICION

Toda relación difusa $\underset{\sim}{R}$ puede ser descompuesta tomando en consideración el máximo de los productos de los coeficientes de difusión α por las relaciones ordinarias de nivel α : R_α

Es decir $\underset{\sim}{R} = \underset{\alpha}{\mathrm{Max}} \, [\alpha \cdot R_\alpha]$. , $0 < \alpha \leq 1$

Estando R_α definida por su función característica

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq \alpha \\ 0 & \text{cuando } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) < \alpha . \end{cases}$$

Ejemplo :

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} = \mathrm{Max}\left[0.1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 0.2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 0.3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.7 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

observese que si vamos expresando los coeficientes de la matriz difusa en orden creciente las correspondientes matrices booleanas que acompañan a estos coeficientes van teniendo cada vez más ceros

OBSERVACION INTERESANTE

Hemos visto que cada relación difusa $\underset{\sim}{R}$ tiene su $\underset{\approx}{R}$; una "sombra" ó relación ordinaria más próxima. Conviene observar ahora que a composición de relaciones difusas corresponde la composición de sus "sombras".

Es decir si a $\underset{\sim}{R_1}$ le corresponde $\underset{\approx}{R_1}$ como "sombra"

y a $\underset{\sim}{R_2}$ le corresponde $\underset{\approx}{R_2}$ como "sombra"

Entonces a $\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2} \longrightarrow \underset{\approx}{R_1} \circ \underset{\approx}{R_2}$

Representando como operador composición la relación MAX-MIN antes estudiada. Veamos esto con un

Ejemplo :

$\underset{\sim}{R_1}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.4	0.7	0.2
x_2	0.1	0	1
x_3	1	0.8	0.3
x_4	0.9	0.4	0.5

o

$\underset{\sim}{R_2}$	z_1	z_2
y_1	0.2	0.7
y_2	0.1	0.4
y_3	0.5	0.9

=

$\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}$	z_1	z_2
x_1	0.2	0.4
x_2	0.5	0.9
x_3	0.3	0.7
x_4	0.5	0.7

$\downarrow$

$\underset{\approx}{R_1}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	1	1	0
x_4	1	0	0

o

$\underset{\approx}{R_2}$	z_1	z_2
y_1	0	1
y_2	0	0
y_3	0	1

=

$\underset{\approx}{R_1} \circ \underset{\approx}{R_2}$	z_1	z_2
x_1	0	0
x_2	0	1
x_3	0	1
x_4	0	1

Así pués a todo encaje difuso corresponde un encaje del mismo tipo en sus ordinarios correspondientes.

Nótese que en el caso de proyectar el difuso $\underset{\sim}{R}$ a su ordinario más próximo obtenemos de forma unívoca la sombra ordinaria $\underset{\approx}{R}$; pero en cambio si partiésemos de una "sombra ordinaria" no encontraríamos uno sino infinitos difusos que tuviesen como ordinario más próximo esa sombra.

Nota: obsérvese que en las "sombras" la composición Max-Min se transforma en composición ordinaria

SUBCONJUNTO DIFUSO INDUCIDO POR UNA RELACION

Sean X e Y dos conjuntos ordinarios entre los cuales hay establecida una determinada relación .Si a partir de esta situa-

~~tua~~ción apareciese un subconjunto difuso en uno de los conjuntos ordinarios, inmediatamente este hecho induciría a que el otro conjunto ordinario se viese poseído por un subconjunto difuso dentro de él.¿Cuál sería el grado de pertenencia inducido? evidentemente el máximo de los "originales" recibidos.

Ejemplo :

Sean $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

y Sea la relación $\mathcal{R}$ /

$$x_1 \longrightarrow y_1 \ , \ y_3$$
$$x_2 \longrightarrow y_2 \ , \ y_3 \ , \ y_4$$
$$x_3 \longrightarrow y_1$$

Supongamos que ahora aparece en X el difuso

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

¿Qué efecto recibirá Y ?
cada componente de Y habrá recibido uno o varios "impactos" procedentes del"mensaje difuso" que le envió X

Así y_1 recibirá un doble impacto.Uno procedente de x_1 y con una intensidad de 0.3 y otro procedente de x_3 y con una intensidad de 0.7. ∴ este último mensaje fué el que más le impactó y por tanto se gravó en él por inducción.

y_2 solo recibe el impacto de x_2 con un grado de certeza de 0.5 y como no tiene otra alternativa éste será para él su grado de certeza heredado por la inducción.

y_3 vuelve a recibir un doble impacto.Uno procedente de x_1 con una intensidad de 0.3 y otro procedente de x_2 con una intensidad de 0.5 y por tanto este es el que realmente le marca el impacto.

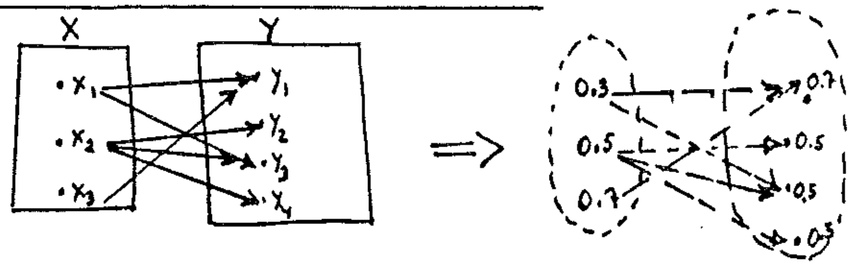
Y_4 solo es impactado por x_2 con una intensidad de 0.5

Así pués gracias a la relación ordinaria $\mathcal{R}$ que había establecido entre ambos conjuntos el hecho de que apareciese el difuso $\underset{\sim}{A}$ en el conjunto X dió lugar, inducido por la relación, a que apareciese en el conjunto ordinario Y el subconjunto difuso $\mathcal{R}(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{|c|l}\hline 0.3 & x_1 \\ \hline 0.5 & x_2 \\ \hline 0.7 & x_3 \\ \hline\end{array}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{array}{|c|l}\hline 0.7 & Y_1 \\ \hline 0.5 & Y_2 \\ \hline 0.5 & Y_3 \\ \hline 0.5 & Y_4 \\ \hline\end{array}$$

VISION GRAFICA de esta PROPIEDAD



Nótese que $\mathcal{R}^{-1}(\underset{\sim}{B}) = \begin{array}{|c|}\hline 0.7 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.7 \\ \hline\end{array} \neq \underset{\sim}{A}$ y en general si $\mathcal{R}(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A} \subset \mathcal{R}^{-1}(\underset{\sim}{B})$$

¿Qué parte de sus relaciones ordinarias gozarán de esa relación difusa que se ha creado entre ellos? Todo dependerá del grado que haya alcanzado la difusión ya que cuando el grado de difusión no supere a 0.5 su correspondiente ordinario no entrará a formar parte de la relación.