

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**



TESIS DOCTORAL

**Estudio en 1+1 dimensiones de algunas ecuaciones de  
campos relativistas**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Víctor Delgado Martínez**

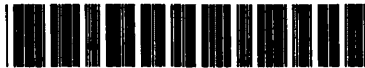
DIRECTOR:

**Mario Soler López**

Madrid, 2015

Victor Delgado Martínez

TP  
1980  
-----  
036



\* 5 3 0 9 8 5 3 0 1 7 \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x-53-031023-5

ESTUDIO EN 1+1 DIMENSIONES DE ALGUNAS ECUACIONES  
DE CAMPOS RELATIVISTAS

Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
1980



BIBLIOTECA

© Delgado Martínez, Víctor  
Edita e Imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1980  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-7253-1980

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
DE MADRID

ESTUDIO EN 1+1 DIMENSIONES DE ALGUNAS ECUACIONES  
DE CAMPOS RELATIVISTAS.

Tesis Doctoral  
presentada por  
D. VICTOR DELGADO MARTINEZ  
para optar al título de  
Doctor en Ciencias  
Sección de Físicas

### AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, debo agradecer al Dr. Mario Soler López la dirección de este trabajo; a la División de Fusión de la J.E.N. su hospitalidad, y al Instituto de Estudios Nucleares la ayuda financiera.

También, y muy especialmente, agradezco:

Al Profesor A. Galindo su estímulo para comenzar este trabajo, los comentarios hechos sobre el mismo y su gentileza al presentarlo.

Al Profesor I. Díaz algunos intercambios interesantes de ideas tenidos con él.

Y al Departamento de Física Médica el estímulo personal y la ayuda material prestada para la realización de este trabajo.

No puedo olvidar las frecuentes discusiones mantenidas con mis compañeros de la J.E.N. Antonio López Fraguas y Amador Alvarez Alonso, y con Antonio González Arroyo y Luis E. Ibáñez Santiago de la Universidad Autónoma de Madrid.

Por último hacer constar que el trabajo de mecanografía se lo debo a mi padre.

---

## I N D I C E

- Capítulo I : Introducción.
- Capítulo II : Estudio del problema de Cauchy para el campo de Dirac acoplado con otros campos y autoacoplado.
- II. 1.- Planteamiento del problema y notación.
  - II. 2.- Formulación matemática del problema y existencia local.
  - II. 3.- Cota a priori sobre la  $\|\Psi\|_{\infty}$ .
  - II. 4.- Existencia global.
  - II. 5.- Comentarios.
- Capítulo III : Estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell.
- III. 1.- Formulación matemática y planteamiento del problema.
  - III. 2.- Existencia local.
  - III. 3.- Cotas a priori.
  - III. 4.- Existencia global.
  - III. 5.- Comentarios.
- Capítulo IV : Estudio de soluciones estacionarias para las ecuaciones de Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell.
- IV. 1.- No existencia de soluciones estacionarias localizadas.
  - IV. 2.- Soluciones estacionarias no localizadas para las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa.
  - IV. 3.- Soluciones estacionarias para las ecuaciones de Maxwell-Dirac con masa.
  - IV. 4.- Comportamiento de las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Maxwell-Dirac con masa.
  - IV. 5.- Soluciones estacionarias para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell.
  - IV. 6.- Comentarios.

Capítulo V : Replanteamiento del problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell.

- V. 1.- Estudio de las ecuaciones en los espacios utilizados.
- V. 2.- Problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa.
- V. 3.- Replanteamiento del problema de Cauchy para Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell.
- V. 4.- Existencia local y global para el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac con carga total no nula y finita.
- V. 5.- Existencia y unicidad para el problema de Cauchy para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell con carga no nula y finita.
- V. 6.- Comentarios.

Capítulo VI : Conclusiones.

Apéndice I : Técnicas de mecánica analítica aplicadas al estudio de soluciones estacionarias de las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

- I. 1.- Teoría canónica de perturbaciones.
- I. 2.- Integrales del movimiento.

Apéndice II : Existencia local y global en el caso de datos iniciales no localizados.

- II.1.- Ecuaciones de Maxwell-Dirac.
- II.2.- Ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell.

Referencias.

---

CAPITULO I

INTRODUCCION

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

En la historia reciente de la Física ha habido un gran interés por el estudio de campos clásicos.

El primer campo clásico relativista que apareció fue el electromagnético (Ecuaciones de Maxwell) que encontró un marco totalmente adecuado para su descripción en la teoría de la relatividad especial.

A principios de siglo Einstein construyó la teoría de la relatividad general; y en esa época se hacen intentos de construir teorías unificadas de la gravitación y el electromagnetismo (Einstein, Klein, Kaluza, etc.).

De esta misma época son también los trabajos sobre electromagnetismo de Born-Infeld y de Mie, que proponen teorías no lineales, en las que los campos están exentos de singularidades, y en las que las partículas son regiones localizadas de campo más intenso.

El gran éxito predictivo de la ecuación de Schrödinger hizo que se buscaran ecuaciones de onda relativistas, como las correspondientes a spin 0 y spin  $\frac{1}{2}$  de Klein-Gordon y de Dirac, con las que se obtuvieron buenos resultados (por ejemplo, correcciones relativistas al átomo de hidrógeno); pero aparecieron dificultades de interpretación, debidas fundamentalmente a que en la ecuación de Klein-Gordon la componente temporal de la corriente de probabilidad no es definida positiva, y a que en la de Dirac la densidad de energía tampoco lo es.

Estas dificultades no sólo desaparecieron, sino que la interpretación fue clarísima al proponerse la existencia de antipartículas y aplicar a estas ecuaciones el mecanismo de segunda cuantificación.

Las antipartículas, como sabemos, fueron descubiertas poco más tarde.

En el estudio de la electrodinámica cuántica en la que las ecua-

ciones ya no son lineales (Ecuaciones de Maxwell-Dirac), se utiliza la teoría de perturbaciones, se hacen cálculos usando desarrollos en serie de potencias de la constante de acoplo (carga del electrón) y se obtienen resultados completamente de acuerdo con la experiencia. (Por ejemplo, para el momento magnético anómalo del electrón).

Durante una larga época, que va desde 1.930 a la década de los años 60, se desarrolló extraordinariamente la teoría cuántica de campos y se apagó un poco el interés por los campos sin cuantificar, quizá con la excepción de Wheeler (Geometrodinámica).

Más tarde renació el interés por los campos clásicos con los trabajos de Weil, Sciama, Kibble, Utiyama, etc., que vuelven a considerar el campo gravitatorio y lo interpretan como campos compensatorios asociados a las transformaciones de Lorentz cuando estas se hacen locales (es decir; dependientes de punto: el mismo método que se emplea para el campo electromagnético).

Una extensión geométrica de estos métodos consiste en el estudio de un espacio tiempo de una dimensión temporal y cinco dimensiones espaciales con una de ellas cerrada sobre sí misma. Con estos métodos se reconstruyen las teorías unificadas de la gravitación y electromagnetismo del tipo de Klein-Kaluza.

Más recientemente despiertan gran interés los campos gauge (Yang-Mills) no abelianos (Weimberg, Salam, t'Hoof...) que exhiben, como teorías clásicas, soluciones localizadas y, como teorías cuánticas de campos, tienen la propiedad de ser renormalizables y asintóticamente libres.

Presenta también interés el estudio de las soluciones clásicas de los modelos de teoría cuántica de campos, como la ecuación de Sine-Gordon o el modelo de Thirring.

Se han estudiado también modelos de partículas usando ecuaciones de Dirac no lineales (trabajos de Rañada, Soler, Vázquez ...) que exhiben soluciones localizadas. Estas soluciones localizadas muestran una gran estabilidad y un cierto comportamiento solitónico, tanto en tres dimensiones espaciales y una temporal como en

una dimensión espacial y una temporal.

El estudio de solitones y de ecuaciones de campos no lineales por el método de difusión inversa, despierta gran interés desde 1.967, y se aplica a ecuaciones como K. de V., Sine-Gordon, Schrödinger cúbica, modelo de Thirring, etc., que son ecuaciones en una dimensión espacial y una temporal. Se han utilizado como modelos de teoría cuántica de campos y también en física aplicada (plasmas, fluidos, óptica no lineal, etc.).

El tratamiento riguroso del problema de Cauchy (trabajos de Chadam, Glassey, Strauss, Reed ...), es un tema interesante dentro del estudio de estas ecuaciones de campos clásicos no lineales.

En estos trabajos se tratan las ecuaciones como ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, y se emplean técnicas del tipo Picard-Lipschitz para demostrar existencia, unicidad y prolongación de las soluciones. Es una tarea de rigorización que investiga menor número de modelos, y que avanza más lentamente.

Se suele plantear el problema de Cauchy sobre espacios escalados en energía (isomorfos a espacios de Sobolev), de tal forma que se asegura la finitud de la energía de los datos iniciales.

---

En este trabajo nos ocupamos de algunos modelos en una dimensión espacial y una temporal de interés en física: estudiando el problema de valor inicial para ellos y también las soluciones estacionarias de algunos.

En el capítulo segundo estudiamos el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac, Klein-Gordon-Dirac, dos ecuaciones de Dirac acopladas con un acoplo de Fermi, y el modelo de Thirring (exactamente resuelto por el método de difusión inversa).

Todos estos modelos presentan en común el poder obtenerse una cota a priori para la  $\| \cdot \|_{\infty}$  del campo de Dirac.

El capítulo tercero está dedicado al estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell. Aquí obtenemos cotas a priori basadas en la ley de conservación de la energía.

En el cuarto estudiamos las soluciones estacionarias para las ecuaciones de Maxwell-Dirac y las de Klein-Gordon-Maxwell.

En el capítulo quinto analizamos otra vez el problema de Cauchy para Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell. Vemos que, por las características de las ecuaciones de Maxwell, los espacios en que están planteados los problemas de Cauchy no son adecuados.

Resolvemos exactamente el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa (son exactamente solubles también como modelo de teoría cuántica de campos), y estudiamos qué espacios serían adecuados para plantear el problema de Cauchy.

Nos replanteamos el problema de Cauchy y demostramos existencia, unicidad y prolongación de soluciones para Maxwell-Dirac, y existencia y unicidad para Klein-Gordon-Maxwell.

En el último capítulo exponemos las conclusiones más relevantes a que hemos llegado.

Hay además dos apéndices: En el primero aplicamos al cálculo de las soluciones estacionarias de Maxwell-Dirac técnicas de mecánica analítica para el cálculo de una segunda integral primera y la teoría canónica de perturbaciones.

En el segundo demostramos existencia local y global para las ecuaciones de Maxwell-Dirac cuando los datos iniciales son no localizados.

---

C A P I T U L O   I I

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA EL CAMPO DE DIRAC ACOPLADO  
CON OTROS CAMPOS Y AUTOACOPLADO

CAPITULO II

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA EL CAMPO DE DIRAC ACO-  
PLADO CON OTROS CAMPOS Y AUTOACOPLADO

II. 1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y NOTACION

En este capítulo vamos a estudiar el problema de existencia local y global para las siguientes ecuaciones:

i) Ecuaciones de Maxwell-Dirac acopladas:

$$\begin{aligned}(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi &= -g v_\mu \gamma^\mu \Psi \\ \square v^\mu &= (\partial_0^2 - \partial_1^2) v^\mu = g \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \\ \partial_\mu v^\mu &= 0\end{aligned} \quad \text{II.1.1}$$

ii) Modelo de Thirring:

$$(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi = g \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \gamma_\mu \Psi \quad \text{II.1.2}$$

iii) Ecuaciones de Klein-Gordon-Dirac:

$$\begin{aligned}(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi &= g u \Psi \\ \square u + m^2 u &= g \bar{\Psi} \Psi\end{aligned} \quad \text{II.1.3}$$

iv) Modelo de Federbuch:

$$\begin{aligned}(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m_1) \Psi &= g (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \gamma_\mu \Psi \\ (-i \gamma^\mu \partial_\mu + m_2) \Psi &= g (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \gamma_\mu \Psi\end{aligned} \quad \text{II.1.4}$$

v) Modelo de Federbuch y modelo de Thirring acoplados con el campo electromagnético

Hemos escogido estas ecuaciones por su significado físico entre el conjunto de las que nos permiten obtener una cota "a priori" para la  $\| \cdot \|_{\infty}$  del campo de Dirac.

Chadam ha probado existencia global para las ecuaciones de Maxwell-Dirac en una dimensión espacial y una temporal, y ha extendido la prueba a Klein-Gordon-Dirac (Ref. 5).

Glassey ha estudiado el caso de dos ecuaciones de Dirac acopladas por medio de una interacción de Fermi o una interacción escalar (Ref. 6). Encuentra existencia global siempre que los valores iniciales o la constante de acoplo sean suficientemente pequeños.

Salusti y Tesei (Ref. 7) han probado existencia global para los modelos de Thirring y Federbuch.

En cuanto a la notación empleada, diremos que  $V^{\mu}$  son las componentes del campo electromagnético (vector real),  $\psi$  y  $\Psi$  son espinores de Dirac (en una dimensión el espacio de spin tiene dos componentes) y  $u$  es un campo escalar real.

Representaremos el producto escalar en el espacio de spin por  $\Psi^{\dagger} \Psi$ , donde  $\Psi^{\dagger}$  es el conjunto traspuesto de  $\Psi$ . El espinor adjunto lo representamos por  $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger} \gamma^0$ .

Las matrices  $\gamma^{\mu}$  son operadores en el espacio de spin que satisfacen:

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2 g^{\mu \nu} \quad (g^{00} = 1, g^{11} = -1, g^{i0} = g^{0i} = 0)$$

y

$$\gamma^0 \dagger = \gamma^0, \quad \gamma^i \dagger = -\gamma^i$$

Todas las representaciones de las  $\gamma^m$  son unitariamente equivalentes.

Hemos escrito las ecuaciones en forma covariante. Puesto que vamos a usar su forma vectorial, definimos las matrices  $\alpha$  y  $\beta$  de esta forma:

$$\alpha = -\gamma^0 \gamma^1, \quad \beta = -i \gamma^0$$

que satisfacen:

$$\alpha^* = \alpha, \quad \alpha' = I, \quad \beta^* = -\beta$$

$$\beta^2 = -I, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0$$

## II. 2.- FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA Y EXISTENCIA LOCAL

Vamos a introducir los siguientes espacios (Ref. 5):

Definición: Sea  $D$  el espacio de Hilbert de funciones de  $E^1$  con valores en el espacio de spin y de cuadrado integrable.

Sea  $A$  el operador diagonal  $(m'I - \Delta)^{1/2}$ . Definimos  $D_1$  como  $D(A) \subset D$  dotado de la norma:

$$\|\psi\|_{D_1} = \|A\psi\|_2$$

Definición: Sea  $M$  el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable  $(\forall)$  de  $E^1$  con valores en  $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ . Sea  $B$  el operador diagonal  $(-\Delta)^{1/2}$ . Definimos  $M^{1/2}$  como  $D(B) \oplus L^2$  dotado de la norma:

$$\|(\forall)\|_{M^{1/2}} = \left\{ \|B\forall\|_2^2 + \|\forall\|_2^2 + \|\dot{\forall}\|_2^2 \right\}^{1/2}$$

Usaremos  $D_1 \oplus M^{1/2}$  para Maxwell-Dirac,  $D_1$  para el modelo de Thirring,  $D_1 \oplus (D_1 \oplus L^2)$  para Klein-Gordon-Dirac y  $D_1 \oplus D_1$  para el modelo de Federbuch.  $D_1$  y  $M^{1/2}$  son equivalentes como espacios de Hilbert a una suma directa de espacios de Sobolev  $H^1$ .

La derivada fuerte en  $L^2$  de una función  $f$  la representaremos por  $D_1 f$ .

Estos espacios son espacios escalados en energía. En más dimensiones espaciales también se emplean espacios escalados en energía (Ref. 9):

Ya veremos en el capítulo quinto que en el caso en que intervengan las ecuaciones de Maxwell en una dimensión espacial, no son los espacios más adecuados para plantear el problema de Cauchy, aunque son los espacios idóneos para tratarlo en tres dimensiones espaciales.

Hemos escrito estas ecuaciones en forma covariante. Para tratar el problema de evolución temporal nos resulta más cómodo escribirlas como ecuaciones vectoriales, dejando explícitas las derivadas temporales y espaciales. En esta forma, las ecuaciones nos quedan:

i) Maxwell-Dirac:

$$\frac{d}{dt} \psi = (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m) \psi - g V \psi \quad \text{II.2,1}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{J} \end{pmatrix}$$

donde

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad V = i(v_0 - v_1 \alpha) \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} j_0 \\ j_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi^\dagger \psi \\ \psi^\dagger \alpha \psi \end{pmatrix}$$

ii) Modelo de Thirring:

$$\frac{d}{dt} \psi = (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m) \psi + g U \psi \quad \text{II.2,2}$$

donde  $U = i(\psi^\dagger \psi - \psi^\dagger \alpha \psi \alpha)$

iii) Klein-Gordon-Dirac:

$$\frac{d}{dt} \psi = (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m) \psi - g u \beta \psi \quad \text{II.2,3}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(m^2 - \Delta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ i \psi^\dagger \beta \psi \end{pmatrix}$$

iv) Modelo de Federbuch:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \beta m_1 & 0 \\ 0 & \beta m_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

donde  $U_1 = i(\psi^\dagger \psi - \psi^\dagger \alpha \psi \alpha)$ ,  $U_2 = i(\psi^\dagger \psi - \psi^\dagger \alpha \psi \alpha)$

A partir de la forma vectorial podemos escribirlas en forma integral.

Si llamamos a los datos iniciales en  $t = t_0$   $\psi_0, \dot{\psi}_0, u_0, \dot{u}_0$ , etc. obtenemos estas ecuaciones:

i) Maxwell-Dirac:

$$\psi(t) = D(t-t_0) \psi_0 - g \int_{t_0}^t D(t-s) V(s) \psi(s) ds$$

II.2,5

$$\begin{pmatrix} V(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = M(t-t_0) \begin{pmatrix} V_0 \\ \dot{V}_0 \end{pmatrix} + g \int_{t_0}^t M(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ J(s) \end{pmatrix} ds$$

donde

$$D(t) = \exp \left\{ \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m \right) t \right\}$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t B & B^{-1} \sin t B \\ -B \sin t B & \cos t B \end{pmatrix}$$

son los propagadores de Dirac y Maxwell respectivamente.

ii) Modelo de Thirring:

$$\psi(t) = D(t-t_0) \psi_0 + g \int_{t_0}^t D(t-s) U(s) \psi(s) ds$$

II.2,6

con  $D(t) = \exp \left\{ \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m \right) t \right\}$

iii) Klein-Gordon-Dirac:

$$\psi(t) = D(t-t_0) \psi_0 + g \int_{t_0}^t D(t-s) u(s) \beta \psi(s) ds$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = K(t-t_0) \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} - g \int_{t_0}^t K(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ i \psi^\dagger \beta \psi \end{pmatrix} ds$$

II.2,7

donde

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t A & A^{-1} \sin t A \\ -A \sin t A & \cos t A \end{pmatrix}$$

es el propagador de Klein-Gordon.

iv) Modelo de Federbuch:

$$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = G(t-t_0) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} - g \int_{t_0}^t G(t-s) \begin{pmatrix} U_2(s) & 0 \\ 0 & U_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} ds$$

donde

$$G(t) = \exp \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \beta m_1 & 0 \\ 0 & \beta m_2 \end{pmatrix} \right] t \right\}$$

La existencia local de soluciones para la forma integral de las ecuaciones de Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Dirac se obtiene en la referencia 5 usando un teorema de Segal (Ref. 4 th. 1).

De una forma muy parecida podemos probar existencia local para los modelos de Thirring y Federbuch, ya que  $D(t)$  y  $G(t)$  son grupos uniparamétricos unitarios y fuertemente continuos en  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_1$ . Los términos no lineales son cúbicos, y si usamos la desigualdad de Sobolev  $\|f\|_{\infty} \leq \kappa \|f\|_2^{1/2} \|b\|_2^{1/2}$  podemos probar que son localmente lipschicianos.

### II. 3.- COTA A PRIORI SOBRE LA $\|\psi\|_{\infty}$

Para probar la existencia global de soluciones, según el teorema de Segal, nos basta con probar que la norma de la solución permanece finita para todo  $t$  finito y mayor que  $t_0$ .

Para demostrar esto, vamos a empezar obteniendo una cota a priori sobre la  $\|\psi\|_{\infty}$ .

Veamos como la obtenemos para las ecuaciones de Maxwell-Dirac y para el modelo de Thirring.

Sea  $\psi$  una solución de las ecuaciones de Maxwell-Dirac o del modelo de Thirring. Vamos a demostrar que  $\|\psi\|_{\infty} < f$ , siendo  $f$  una función tal que  $f(t) < \infty \forall t < \infty$ .

Si  $\psi$  es una solución de Maxwell-Dirac o del modelo de Thirring, satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} j^0 + \frac{\partial}{\partial x} j^1 = 0 \quad \text{II.3.1}$$

donde  $j^0 = \psi^\dagger \psi$  y  $j^1 = -\psi^\dagger \kappa \psi$

que es simplemente la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la carga.

Calculemos ahora  $\frac{\partial}{\partial t} j^1 + \frac{\partial}{\partial x} j^0$ . Obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} j^1 + \frac{\partial}{\partial x} j^0 = z m j^5 \quad \text{II.3,2}$$

donde  $j^5 = -\psi^\dagger \alpha \beta \psi$

Es de notar que podemos obtener este último resultado gracias a la estructura algebraica del término no lineal. Si se tratara por ejemplo de un autoacoplo pseudoescalar, este resultado no sería cierto.

La ley de conservación de la carga nos dice que  $\|\psi\|_2 = \text{cte.}$

Las ecuaciones anteriores podemos escribirlas como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} j^0 \\ j^1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} j^0 \\ j^1 \end{pmatrix} = z m \begin{pmatrix} 0 \\ j^5 \end{pmatrix} \quad \text{II.3,3}$$

con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos diagonalizar  $A$  con la matriz unitaria  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Si integramos por características el sistema diagonalizado, obtenemos:

$$j^0(x,t) = \frac{1}{2} \{ j^0(x-t) + j^1(x-t) + j^0(x+t) + j^1(x+t) \} + m \int_{t_0}^t \{ j^5(x-t+s, s) - j^5(x+t-s, s) \} ds \quad \text{II.3,4}$$

$$j^1(x,t) = \frac{1}{2} \{ j^0(x-t) + j^1(x-t) - j^0(x+t) - j^1(x+t) \} + m \int_{t_0}^t \{ j^5(x-t+s, s) + j^5(x+t-s, s) \} ds$$

Si aplicamos  $\|\cdot\|_\infty$  a ambos términos de la ecuación, como  $\|j^5\|_\infty \leq \|j^0\|_\infty \vee \|j^1\|_\infty \leq \|j^0\|_\infty$  y usando el lema de Gronwall, obtenemos:

$$\left\| \begin{pmatrix} j^0 \\ j^1 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \kappa_1 \cdot e^{\kappa_2 t}$$

Con esto, como  $j^0$  es cuadrático en el campo  $\Psi$  tenemos que  $\|\Psi\|_\infty < f(t)$  siendo  $f$  tal que  $f(t) < \infty \forall t < \infty$  y  $\Psi$  una solución de Maxwell-Dirac o del modelo de Thirring.

En el caso del modelo de Federbuch, las ecuaciones que corresponden a las anteriores son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \frac{\partial}{\partial x} j^1 &= 0 & \text{donde } j^0 &= \Psi^+ \Psi, \quad j^1 = -\Psi^+ \alpha \Psi \\ \frac{\partial}{\partial t} k^0 + \frac{\partial}{\partial x} k^1 &= 0 & \text{donde } k^0 &= \Psi^+ \Psi, \quad k^1 = -\Psi^+ \alpha \Psi \\ \frac{\partial}{\partial t} j^1 + \frac{\partial}{\partial x} j^0 &= 2m, \quad j^5 & \text{donde } j^5 &= -\Psi^+ \alpha \beta \Psi \\ \frac{\partial}{\partial t} k^1 + \frac{\partial}{\partial x} k^0 &= 2m, \quad k^5 & \text{donde } k^5 &= -\Psi^+ \alpha \beta \Psi \end{aligned} \quad \text{II.3,5}$$

De la misma forma que antes, podemos obtener una cota para  $\|(\Psi)\|$

En el caso de Klein-Gordon-Dirac, la ecuación correspondiente a la "inversa" de la ley de conservación de la carga es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\Psi^+ \alpha \Psi) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi^+ \Psi = -2(m - g u) \Psi^+ \alpha \beta \Psi$$

Si poseyéramos una cota para  $\|u\|_\infty$  podríamos obtener de forma similar una cota para la  $\|\Psi\|_\infty$ ; pero se sabe (Ref. 5) que  $u$  admite la representación:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \{u^0(x-t) + u^0(x+t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} J_0(-M \sqrt{(x-\xi)^2 - t^2}) \dot{u}(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} g \int_{x-t-z}^{x+t-z} J_0(-M \sqrt{(x-\xi)^2 - (t-z)^2}) \bar{\Psi} \Psi(\xi, z) d\xi dz \end{aligned} \quad \text{II.3,6}$$

Tomando  $\| \cdot \|_\infty$  y usando el que las funciones de Bessel están uniformemente acotadas, podemos obtener una cota para  $\|u\|_\infty$   $\|u\|_\infty < cte(1+t)$  (Ref. 5, lema 3.2).

Teniendo esto en cuenta podemos deducir que  $\|\Psi\|_\infty < \infty \forall t < \infty$  también en este caso.

Si los valores iniciales del problema de Cauchy tienen sufi-

cientemente derivadas en  $L^2$  las soluciones de la ecuación integral son soluciones de la ecuación diferencial, y la cota obtenida se extiende también a este caso.

#### II. 4.- EXISTENCIA GLOBAL

Una vez obtenida esta cota a priori para la  $\|\psi\|_\infty$  vamos a probar la existencia global de soluciones para las ecuaciones que escribimos al principio.

Haremos la prueba en detalle para Maxwell-Dirac y para el modelo de Thirring. La prueba para Klein-Gordon-Dirac podemos hacerla siguiendo paso a paso la de Maxwell-Dirac, y la del modelo de Federbuch siguiendo la del modelo de Thirring.

Para probar existencia global de soluciones para las ecuaciones de Maxwell-Dirac, tenemos únicamente que probar que  $\|(\psi, \dot{\psi})\|_{M_{1/2}}$  permanece finita  $\forall t$  finito.

De las ecuaciones de Maxwell-Dirac en forma integral, ecuaciones II.2,5, tomando  $\| \cdot \|_{M_{1/2}}$  en la parte correspondiente a Maxwell, obtenemos:

$$\begin{aligned} \| \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} &\leq \| \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} + |g| \int_{t_0}^t \| M(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ J(s) \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} ds \leq \\ &\leq \| \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} + |g| \int_{t_0}^t \| \begin{pmatrix} 0 \\ J(s) \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} ds \leq \\ &\leq \| \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} \|_{M_{1/2}} + |g| \int_{t_0}^t c_t \|\psi\|_\infty \|\psi\|_2 ds \end{aligned} \quad \text{II.4.1}$$

y esto implica que  $\|(\psi, \dot{\psi})\|_{M_{1/2}}$  es finita para todo  $t$  finito. Hemos hecho uso de que el propagador  $M(t)$  es ortogonal, y de las cotas de  $\|\psi\|_\infty, \|\psi\|_2$ .

El que  $\|(\psi, \dot{\psi})\|_{M_{1/2}}$  sea finito  $\forall t < \infty$  implica que  $\|\psi\|_2, \|D\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2$  son finitos  $\forall t$  finito.

Si aplicamos ahora la desigualdad de Sobolev  $\|\psi\|_\infty \leq K \|\psi\|_2^{1/2} \|D\psi\|_2^{1/2}$  obtenemos que  $\|\psi(t)\|_\infty$  es finita  $\forall t$  finito.

Calculemos ahora  $\|\Psi\|_{D_1}$ . De la parte de la ecuación integral que corresponde al campo de Dirac, ecuación II.2,5, tomando  $\|\cdot\|_{D_1}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{D_1} &\leq \|\Psi_0\|_{D_1} + |q| \int_{t_0}^t \|D(t-s) V(s) \Psi(s)\|_{D_1} ds \leq \\ &\leq \|\Psi_0\|_{D_1} + |q| \int_{t_0}^t \|V(s) \Psi(s)\|_{D_1} ds \end{aligned} \quad \text{II.4,2}$$

ya que el propagador de Dirac es unitario en  $D_1$ .

El integrando lo podemos acotar y obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{D_1} &\leq ct_0 + |q| \int_{t_0}^t \{ \|V(s) \Psi(s)\|_2 + \|D(V(s) \Psi(s))\|_2 \} ds \leq \\ &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \{ \|V(s)\|_\infty \|\Psi(s)\|_2 + \|D(V(s))\|_2 \|\Psi(s)\|_\infty + \\ &\quad + \|V(s)\|_\infty \|D\Psi(s)\|_2 \} ds \leq \\ &\leq a + b \int_{t_0}^t \{ \|V(s)\|_\infty \|\Psi(s)\|_2 + \|D(V(s))\|_2 \|\Psi(s)\|_\infty + \|V(s)\|_\infty \|\Psi(s)\|_{D_1} \} ds \end{aligned} \quad \text{II.4,3}$$

Hemos usado  $\|Df\|_2 \leq \|f\|_{D_1} \leq c\{\|f\|_2 + \|Df\|_2\}$

Ahora, con la ayuda de las cotas que tenemos para  $\|\Psi\|_\infty, \|V\|_\infty, \|D\|_2$  y para  $\|D\Psi\|_2, \|\Psi\|_2$ , y usando el lema de Gronwall, obtenemos:

$$\|\Psi(t)\|_{D_1} \leq f(t), \quad f(t) < \infty \quad \forall t < \infty$$

es decir, existencia global

Veamos ahora la prueba para el modelo de Thirring. De las ecuaciones en forma integral, tomando  $\|\cdot\|_{D_1}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\Psi(t)\|_{D_1} &\leq \|\Psi_0\|_{D_1} + |q| \int_{t_0}^t \|D(t-s) U(s) \Psi(s)\|_{D_1} ds \leq \\ &\leq \|\Psi_0\|_{D_1} + |q| \int_{t_0}^t \|U(s) \Psi(s)\|_{D_1} ds \end{aligned} \quad \text{II.4,4}$$

ya que el propagador de Dirac es unitario en  $D_1$ .

Si ahora usamos que  $\|D\|_2 \leq \|f\|_2 \leq c(\|f\|_2 + \|Df\|_2)$  podemos acotar el integrando y obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_{b_1} &\leq \|\psi_0\|_{b_1} + ct \int_0^t \left\{ \|U(s)\psi(s)\|_2 + \|D(U(s)\psi(s))\|_2 \right\} ds \leq \\ &\leq a + b \int_0^t \left\{ \|U(s)\|_\infty \|\psi(s)\|_2 + \|U(s)\|_\infty \|D\psi(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_\infty \|DU(s)\|_2 \right\} ds \leq \\ &\leq a + c \int_0^t \left\{ \|\psi(s)\|_\infty^2 \|\psi(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_\infty^2 \|D\psi(s)\|_2 + d \|\psi(s)\|_\infty^2 \|D\psi(s)\|_2 \right\} ds \leq \\ &\leq a + e \int_0^t \|\psi(s)\|_\infty^2 \|\psi(s)\|_{b_1} ds \end{aligned} \quad \text{II.4,5}$$

donde hemos usado también que  $U(s)$  es cuadrático en los campos  $\psi$ .

Aplicando ahora la cota para la  $\|\psi\|_\infty$  y el lema de Gronwall, obtenemos:

$$\|\psi(t)\|_{b_1} \leq f(t), \quad f(t) < \infty \quad \forall t < \infty$$

y con ello demostramos existencia global para el modelo de Thirring

La prueba de existencia global para las ecuaciones de Klein-Gordon-Dirac es similar a la de Maxwell-Dirac. Si queremos probar existencia global para el modelo de Federbuch, podemos seguir paso a paso la prueba que hemos desarrollado para el modelo de Thirring.

En el caso en que tengamos el modelo de Thirring o el modelo de Federbuch acoplados con el campo electromagnético, la prueba de existencia global se deduce con facilidad siguiendo las realizadas

En este caso las ecuaciones son:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = -\delta_1 \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \delta_2 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \gamma^5 \psi$$

$$\square V^\mu = \delta_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial^\mu V_\mu = 0$$

II.4,6

para el modelo de Thirring acoplado con el campo electromagnético;

y análogas para el modelo de Federbuch acoplado con el campo electromagnético.

## II. 5.- COMENTARIOS

a) La forma de obtener la cota a priori es específica de una dimensión espacial y una temporal.

b) Este tipo de cota a priori se puede extender a cualquier acoplo del tipo  $\int_{\mu} \delta^{\mu} \psi$  siendo  $\int_{\mu}$  un vector Lorentz.

c) En los casos estudiados no se necesita ninguna restricción sobre el tamaño de los datos iniciales, al contrario de lo que ocurre en la Ref. 6 en que sí es necesaria la restricción para las ecuaciones del modelo de Federbusch.

d) La cota a priori sobre la  $\|\psi\|_{\infty}$  permite demostraciones más cortas y más sencillas que las de la Ref. 5 para las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

---

C A P I T U L O   I I I

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE

KLEIN-GORDON-MAXWELL

CAPITULO III

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE  
KLEIN-GORDON-MAXWELL

III. 1.-FORMULACION MATEMATICA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo vamos a estudiar el problema de existencia local y global del soluciones para las ecuaciones de Klein-Gordon y Maxwell acopladas.

En una dimensión espacial las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell son:

$$D^\mu D_\mu \phi = -m^2 \phi, \quad D_\mu = \partial_\mu + i g V_\mu$$

III.1.1

$$\square V^\mu \equiv (\partial_0^2 - \partial_i^2) V^\mu = \{ j^\mu \equiv g (i \phi^* D^\mu \phi - c.c.)$$

$$\partial^\mu V_\mu = 0$$

Análogamente a como hicimos en el capítulo anterior, nos plantearemos el problema de Cauchy en los espacios  $(D_1 \otimes L^2) \oplus M_{1/2}$  que ya habíamos definido.

En forma vectorial las ecuaciones quedan:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(m^2 - \Delta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ i V_\mu D^\mu \phi \end{pmatrix}$$

III.1.2

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ i (\phi^* D_\mu \phi - c.c.) \end{pmatrix}$$

$$V \equiv \begin{pmatrix} V_0 \\ V_i \end{pmatrix} \equiv V_\mu$$

y su forma integral es:

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} = K(t-t_0) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t K(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ i v_\mu \partial^\mu \phi \end{pmatrix} ds$$

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = M(t-t_0) \begin{pmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{pmatrix} - \int_{t_0}^t M(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ i (\phi^\nu \partial_\nu \phi - c.c.) \end{pmatrix} ds \quad \text{III.1,3}$$

donde  $K$  y  $M$  son los mismos propagadores del capítulo anterior.

### III. 2.- EXISTENCIA LOCAL

Para ver que hay existencia local, puesto que los propagadores  $K$  y  $M$  son lineales y continuos en los espacios de definición, tenemos que comprobar que los términos no lineales son lipschicianos. Para lo que usaremos la desigualdad de Sobolev  $\|f\|_\infty \leq k \|f\|_2^{1/2} \|f\|_4^{1/2}$ .

Como los términos de interacción son a lo máximo cúbicos y entran en ellos únicamente  $v_\mu$  y  $\partial_\mu \phi$ ,  $(\partial_\mu \phi)^*$ , no presenta dificultad el demostrarlo.

Veamos el término  $v_\mu \partial^\mu \phi = v_\mu (\partial^\mu \phi + i g v^\mu \phi)$ .

Tenemos:

$$\begin{aligned} & \|v_\mu \partial^\mu \phi - \tilde{v}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi}\|_2 \leq \| (v_\mu - \tilde{v}_\mu) \partial^\mu \phi \|_2 + \| \tilde{v}_\mu (\partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi}) \|_2 \leq \\ & \leq \|v_\mu\|_\infty \|(\partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi})\|_2 + \| \tilde{v}_\mu \partial^\mu \phi \|_2 \|v_\mu - \tilde{v}_\mu\|_\infty \leq \\ & \leq \|v_\mu\|_\infty \left\{ \| \partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi} \|_2 + \| i g v^\mu \phi - i g \tilde{v}^\mu \tilde{\phi} \|_2 \right\} + \| \partial^\mu \phi \|_2 \|v_\mu - \tilde{v}_\mu\|_\infty^{1/2} \|v_\mu - \tilde{v}_\mu\|_2^{1/2} \leq \quad \text{III.2,1} \\ & \leq \|v_\mu\|_\infty \| \partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi} \|_2 + \| i g v^\mu \phi - i g \tilde{v}^\mu \tilde{\phi} \|_2 + \| \partial^\mu \phi \|_2 \|v_\mu - \tilde{v}_\mu\|_\infty^{1/2} \|v_\mu - \tilde{v}_\mu\|_2^{1/2} + \\ & + k \| \partial^\mu \phi \|_2 \left\{ \| \partial(v_\mu - \tilde{v}_\mu) \|_2 + \| v_\mu - \tilde{v}_\mu \|_2 \right\} \end{aligned}$$

De una forma totalmente análoga podemos probar que el otro término de acoplo  $i (\phi^\nu \partial_\nu \phi - c.c.)$  es lipschiciano.

III. 3.- COTAS A PRIORI

De acuerdo con el teorema de Sagal tenemos que probar que las normas  $\|(\psi)\|_{M_{\frac{1}{2}}}, \|(\phi)\|_{D, \Theta, L'}$  están acotadas para todo  $t < \infty$ .

Para ello vamos a obtener una ley de conservación que nos dará muy fácilmente esta acotación. Esta ley de conservación va a ser la ley de conservación de la energía-momento. La vamos a obtener directamente de las ecuaciones en una forma en que queda explícito que la densidad de energía es una suma de términos positivos.

Para ello vamos a operar directamente con las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell.

Definimos:

$$\xi = t + x, \quad \eta = t - x$$

$$D_{\xi} = D_0 + D_1, \quad D_{\eta} = D_0 - D_1$$

La ecuación de Klein-Gordon se puede escribir como

$$\frac{D_{\xi} D_{\eta} - D_{\eta} D_{\xi}}{2} \phi = -m^2 \phi \tag{III.3,1}$$

y también de estas dos formas equivalentes:

$$(D_{\xi} D_{\eta} + i \int E) \phi = -m^2 \phi \tag{III.3,2}$$

$$(D_{\eta} D_{\xi} - i \int E) \phi = -m^2 \phi \tag{III.3,3}$$

donde  $E = (\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0)$

ya que

$$D_{\xi} D_{\eta} = D_{\eta} D_{\xi} - i \int (\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0) = D_{\eta} D_{\xi} - i \int E \tag{III.3,4}$$

Las ecuaciones de Maxwell podemos escribirlas como

$$\partial_x E = g j_0 \tag{III.3,5}$$

$$\partial_t E = g j_1$$

De la ecuación III.3,2

$$D_3 D_h \phi = -m^2 \phi - i g E$$

haciendo  $u = \frac{i}{m} D_h \phi$

podemos pasar a

$$D_3 u = -i m \left( 1 + \frac{i g}{m^2} E \right) \phi$$

$$D_h \phi = -i m u$$

III.3,6

Y de la ecuación III.3,3

haciendo  $v = \frac{i}{m} D_3 \phi$

podemos pasar a

$$D_h v = -i m \left( 1 - \frac{i g}{m^2} E \right) \phi$$

$$D_3 \phi = -i m v$$

III.3,7

que son, salvo los términos en  $E$ , similares a las ecuaciones de Dirac con campo electromagnético.

Del primer par de ecuaciones se obtiene:

$$\partial_t (\phi \phi^* + u u^*) + \partial_x (\phi \dot{\phi}^* + u \dot{u}^*) = \frac{g}{m} E (\phi u^* + \dot{\phi}^* u) \quad \text{III.3,8}$$

Y del segundo obtenemos:

$$\partial_t (\phi \dot{\phi}^* + v v^*) + \partial_x (\phi \phi^* - v v^*) = -\frac{g}{m} E (\dot{\phi} v^* + v \dot{\phi}^*) \quad \text{III.3,9}$$

Estas ecuaciones son, excepto los términos en  $E$ , similares a la ley de conservación de la carga de las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

Sumando, tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \partial_t (\epsilon \phi \phi^* + u u^* + v v^*) + \partial_x (u u^* - v v^*) = \\
 & = i \frac{\partial}{\partial t} E (\phi^* \partial_x \phi - \phi \partial_x \phi^* - c.c.) = - \frac{\partial}{\partial t} E = \\
 & = - \frac{\partial}{\partial t} E \quad \text{III.3,10}
 \end{aligned}$$

Al restar se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \partial_t (u u^* - v v^*) + \partial_x (-\gamma \phi \phi^* + u u^* + v v^*) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} E \downarrow_0 = \frac{\partial}{\partial x} (E') \quad \text{III.3,11}
 \end{aligned}$$

Así pues, podemos escribir las leyes de conservación:

$$\partial_t (\gamma \phi \phi^* + u u^* + v v^* + \frac{\epsilon}{m^2} E') + \partial_x (\mu u u^* - v v^*) = 0 \quad \text{III.3,12}$$

y

$$\partial_t (u u^* - v v^*) + \partial_x (-\gamma \phi \phi^* + u u^* + v v^* - \frac{\epsilon}{m^2} E') = 0 \quad \text{III.3,13}$$

que corresponden a las leyes de conservación de la energía y del momento.

La integración en  $x$  de la primera ley de conservación III.3,12 permite afirmar que:

$$\|\phi\|_2, \|u\|_2, \|v\|_2, \|E\|_2 < cte \quad \forall t < \infty$$

### III. 4.- EXISTENCIA GLOBAL

Las acotaciones que hemos obtenido nos van a permitir demostrar la existencia global de soluciones.

Tomando  $\|\cdot\|_{D_1 \oplus L_2}$ ,  $\|\cdot\|_{M_{1/2}}$  en la forma integral de las ecuaciones (ec. III.1,3), teniendo en cuenta la desigualdad de Sobolev

$$\|\cdot\|_{C^0} \leq K \|\cdot\|_2^{1/2} \|\cdot\|_2^{1/2}$$

y que los propagadores son ortogonales en  $D_1 \oplus L_2$  y en  $M_{1/2}$ , podemos

escribir

$$\begin{aligned}
 k \|\phi\|_{\infty} &\leq \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\|_{D_1 \oplus L_2} \leq \left\| \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{pmatrix} \right\|_{D_1 \oplus L_2} + |q| \int_{t_0}^t \|i v_{\mu} D^{\mu} \phi\|_2 ds \leq \\
 &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|v_{\mu}\|_{\infty} \|D^{\mu} \phi\|_2 ds
 \end{aligned}
 \tag{III.4.1}$$

$$\begin{aligned}
 k' \|v\|_{\infty} &\leq \left\| \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix} \right\|_{M_{1/2}} \leq \left\| \begin{pmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{pmatrix} \right\|_{M_{1/2}} + |q| \int_{t_0}^t \|i(\phi^x D^{\mu} \phi - c.c.)\|_2 ds \leq \\
 &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|\phi\|_{\infty} \|D^{\mu} \phi\|_2 ds
 \end{aligned}
 \tag{III.4.2}$$

Como  $\|u\|$ ,  $\|v\|$ , están acotadas  $\|D_{\mu} \phi\|$ , está acotada.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
 \|\phi\|_{\infty} &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|v_{\mu}\|_{\infty} ds \\
 \|v\|_{\infty} &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|\phi\|_{\infty} ds
 \end{aligned}
 \tag{III.4.3}$$

La aplicación del lema de Gronwall nos permite afirmar que

$\|\phi\|_{\infty}, \|v\|_{\infty}$  son finitos  $\forall t$  finito.

Tenemos, a partir de III.4.1

$$\begin{aligned}
 \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\|_{D_1 \oplus L_2} &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|v_{\mu}\|_{\infty} \|D^{\mu} \phi\|_2 ds \leq \\
 &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|v_{\mu}\|_{\infty} \cdot ct_0 ds \leq \\
 &\leq ct_0 + ct_0 \int_{t_0}^t \|v_{\mu}\|_{\infty}
 \end{aligned}
 \tag{III.4.4}$$

y la aplicación del lema de Gronwall nos lleva a que

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\|_{D_1 \oplus L_2} < \infty \quad \forall t < \infty$$

En el caso del campo electromagnético podemos escribir III.4,2

$$\|(\vec{v})\|_{M_{1/2}} \leq \int_{t_0}^t dt \int_{\Sigma} \|\phi\|_{\infty} \|\Delta^{\mu} \phi\|_2 ds$$

y de una forma totalmente análoga obtenemos que

$$\|(\vec{v})\|_{M_{1/2}} < \infty \quad \forall t < \infty$$

Con esto hemos acabado la demostración de existencia global.

### III. 5.- COMENTARIOS

a) El que la densidad de energía sea definida positiva, hace posible la demostración de existencia global.

b) Esta demostración de existencia global se desarrolla en dos pasos:

En el primero se demuestra la acotación de la  $\|\phi\|_{\infty}$ ,  $\|v\|_{\infty}$ , y en el segundo, la existencia global.

c) La demostración es únicamente válida cuando la carga total del campo de Klein-Gordon es cero.

Solamente en este caso puede ser finita la  $\|E\|_2$  y podemos usar el espacio  $M_{1/2}$  para el campo electromagnético, como veremos con más detalle en el capítulo quinto.

C A P I T U L O   I V

ESTUDIO DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL-DIRAC Y KLEIN-GORDON-MAXWELL

CAPITULO IV

ESTUDIO DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL-DIRAC Y KLEIN-GORDON-MAXWELL

IV. 1.- NO-EXISTENCIA DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS LOCALIZADAS

Vamos a estudiar las soluciones clásicas estacionarias de las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

Está probado en la referencia (8) que las ecuaciones de Maxwell-Dirac, cuando buscamos soluciones en los espacios  $H^1 \otimes (H^1 \otimes L^2)$ , no tienen, ni una teoría de difusión, ni soluciones estacionarias. La prueba es suficientemente corta para repetirla aquí.

Sean  $V$  y  $\Psi$  una solución al problema de Cauchy para Maxwell-Dirac con datos iniciales localizados  $\psi_0, v_0, \dot{v}_0, \psi_0 \neq 0$ . Veremos que:

$$V^0(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \forall x$$

En efecto: Tenemos la representación para  $V^0$

$$V^0(x, t) = \frac{1}{2} (v_0^0(x-t) + v_0^0(x+t)) + \frac{1}{2} \int_0^t v_0^0(\gamma) d\gamma + \frac{g}{2} \int_0^t \int_{x-(t-z)}^{x+(t-z)} \bar{\Psi} \delta^0 \Psi(\gamma, z) d\gamma dz \quad \text{IV.1,1}$$

Tomando  $\lim_{t \rightarrow \infty}$ , tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_0^0(\gamma) d\gamma + \frac{g}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{x,t} \bar{\Psi} \delta^0 \Psi(\gamma, z) d\gamma dz$$

donde  $\chi_{x,t}$  es la función característica del cono de luz de vértice  $(x, t)$

Entonces sucede que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^0(x, t) = ct + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi} \gamma^0 \psi \, d\gamma \, dz \quad \text{IV.1,3}$$

y como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi} \gamma^0 \psi \, d\gamma = ct > 0$$

esto implica que

$$v^0(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \forall x$$

Como las soluciones libres de las ecuaciones de Maxwell están acotadas para todo  $t$  si los datos iniciales son localizados, el que  $v^0(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \forall x$  implica que no existen soluciones libres a las cuales tienda la solución cuando  $t$  tiende a infinito y por lo tantotanto, no hay teoría de difusión.

Esta demostración de que  $v^0(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \forall x$ , no sería válida si los datos iniciales no fueran localizados.

Vamos a ver ahora que no existen soluciones estacionarias, que al ser análogas a estados ligados, son completamente opuestas a soluciones que tiendan a soluciones libres.

Tenemos que  $v^0(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \forall x$

Integrando la ecuación de la condición de gauge de Lorentz ,  $\partial_0 v^0 + \partial_i v^i = 0$  se obtiene:

$$v_0(x, t) = v_0(x, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} (v_i(x, z)) \, dz \quad \text{IV.1,4}$$

Si buscamos una solución estacionaria, tendremos que:

$$j^0(x, t) = j^0(x, 0)$$

y como  $\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0$ , esto nos dice que  $j_i(x, t) = 0$ , pues

$$\partial_i j^i = 0 \quad \gamma \quad j^i(+\infty) = j^i(-\infty) = 0$$

Entonces,  $V_1(x, t)$  satisface la ecuación de ondas libre.  
Sustituyéndolo en la expresión para  $V_0$ , obtenemos:

$$V_1(x, t) = V_0(x, 0) - \frac{1}{2} \{ V_1(x-t, 0) - V_1(x+t, 0) \} - \frac{1}{2} \int_0^t \{ \dot{V}_1(x-z, 0) - \dot{V}_1(x+z, 0) \} dz \quad \text{IV.1,5}$$

que está acotado cuando  $t \rightarrow \infty$ , en contradicción con el resultado  $V_0(x, t) \rightarrow \infty \forall x$ . La única forma de eliminar esta contradicción es hacer  $\Psi(x, 0) \equiv 0$ , y así eliminar completamente la interacción. Así pues, tampoco existen soluciones estacionarias localizadas.

#### IV. 2.- SOLUCIONES ESTACIONARIAS NO LOCALIZADAS PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC SIN MASA.

<sup>que</sup> Ya no existen soluciones estacionarias localizadas. Vamos a buscar soluciones estacionarias no localizadas.

Comenzaremos estudiando el caso en el que la masa del campo de Dirac es cero.

Para buscar soluciones estacionarias, en las que la densidad de carga no depende del tiempo, tomaremos las siguientes dependencias:

$j_0$  depende sólo de  $x$

Por la ecuación de continuidad  $\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0$  ha de ser  $j_i = 0$ .

Si buscamos soluciones en reposo, tiene que ser  $j_i = 0$ .

En estas condiciones podemos elegir un gauge en el cual

$$V_i = 0$$

$V_0$  depende sólo de  $x$

Para que  $j_0$  dependa sólo de  $x$ , tomamos la dependencia temporal en los espinores  $\psi = e^{-i\Lambda t} \tilde{\psi}$ ; mediante un cambio de gauge, podemos tomar siempre  $\Lambda = 0$ .

Si hacemos

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$-i b_x = V_0 a$$

$$i a_x = -V_0 b$$

IV.2.1

$$-V_0 x x = a a^* + b b^*$$

Consideremos el tensor energía-momento para las ecuaciones de Maxwell-Dirac acopladas:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = & F^{\lambda\alpha} F^{\beta\lambda} + \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\alpha \partial^\beta \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\beta \partial^\alpha \Psi - (\partial^\alpha \bar{\Psi}) \gamma^\beta \Psi - \\ & - (\partial^\beta \bar{\Psi}) \gamma^\alpha \Psi) - \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi v^\beta + \bar{\Psi} \gamma^\beta \Psi v^\alpha) \\ & - g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g v_\mu) \Psi - ((\partial_\mu + i g v_\mu) \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi) \right. \\ & \left. - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad \text{IV.2.2}$$

donde  $m = 0$  en el caso en que son sin masa.

Vamos a ver qué información nos dan las leyes de conservación de energía-momento  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  en el caso en que estemos buscando soluciones estacionarias.

Puesto que al ser la solución estacionaria, la densidad de energía no depende del tiempo, tenemos:  $\partial_t T^{00} = 0$

De la ley de conservación de la energía tenemos:

$$\partial_t T^{00} = -\partial_x T^{01}$$

y como

$$\partial_t T^{00} = 0$$

esto implica que

$$\partial_x T^{01} = 0$$

o sea,  $T^{01} = ct_1$ , que es una integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si la solución está en reposo, será:

$$T^{01} = 0$$

Como la ley de conservación del momento nos dice:

$$\partial_t T^{01} = -\partial_x T^{11}$$

esto indica que

$$\partial_x T^{11} = 0 \Rightarrow T^{11} = ct_1.$$

Esto es también una integral primera del sistema de ecuaciones ordinarias.

Para buscar soluciones localizadas (si las hubiere) tomaríamos como valor de esta integral primera  $T^{11} = 0$ .

Para que  $T^{01}$  sea igual a cero, tomamos  $a = v$  real,  $b$  imaginario puro,  $b = iu$ ,  $u$  real (también podríamos tomar al revés:  $a$  imaginario puro,  $b$  real, y sería equivalente).

Llamando  $k = -v_0$ , nos queda el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$u_x = -k v$$

$$v_x = k u$$

$$k_{xx} = u^2 + v^2$$

que tiene la integral primera  $T'' = cte$  que se traduce en

$$k(u^2 + v^2) - \frac{1}{2} k_x^2 = cte \quad \text{IV.2,4}$$

Si buscáramos soluciones estacionarias localizadas (que no las hay) tomaríamos el valor cero para esta integral primera.

Tenemos también otra integral primera, que es,

$$u^2 + v^2 = cte$$

con lo cual

$$k = \frac{1}{2} a x^2 + d x + b$$

Las funciones  $u$  y  $v$  satisfacen entonces un sistema lineal para el cual las soluciones fundamentales son senos y cosenos de una primitiva de  $k$ .

Una solución en la cual las funciones son de paridad bien definida y además  $T'' = 0$ , es:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} a x^2 \\ u &= a^{1/4} \cos\left(\frac{1}{2} c x^2\right) \\ v &= c^{1/2} \sin\left(\frac{1}{2} c x^2\right) \end{aligned} \quad \text{IV.2,5}$$

Como vemos, aunque  $T'' = 0$ , son soluciones no localizadas. La densidad de carga es constante en todo el espacio y la densidad de energía  $T^{00} = \frac{1}{2} k_x^2$  es una parábola.

#### IV. 3.- SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC CON MASA.

Vamos a analizar ahora las soluciones estacionarias para el caso en que la masa del campo de Dirac no es nula.

Como en el caso sin masa, tomaremos las mismas dependencias temporales y una componente del espinor real y otra imaginaria pura. Con esto hacemos que  $j^i \gamma T^{0i}$  sean cero.

En la dependencia temporal de los espinores,  $\psi = e^{-i\Lambda t} \tilde{\psi}$  también podemos tomar  $\Lambda = 0$  por un cambio de gauge.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que obtenemos en este caso es:

$$\begin{aligned} u_x &= (1-k)v \\ v_x &= (1+k)u \\ k_{xx} &= u^2 + v^2 \end{aligned} \quad \text{IV.3,1}$$

Hemos rescalado la masa y la constante de acoplo a 1

La integral primera que se obtiene de  $\partial_x T'' = 0$  es en este caso

$$k(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2) - \frac{1}{2} k_x^2 = \text{cte.} \quad \text{IV.3,2}$$

Las soluciones estacionarias localizadas (si las hubiere), corresponderían a  $T'' = 0$ .

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional asociado al lagrangiano

$$\mathcal{L} = k(u^2 + v^2) + \frac{1}{2} k_x^2 + (u^2 - v^2) + v u_x - u v_x$$

y

$$k(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2) - \frac{1}{2} k_x^2 \quad \text{es el Hamiltoniano}$$

Como hay invariancia por traslaciones, el Hamiltoniano es constante.

El poder asociar estas ecuaciones a un problema variacional es consecuencia directa de que las ecuaciones de Maxwell-Dirac vienen también de un lagrangiano.

Los teoremas usuales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias nos permiten asegurar que existe solución única para el sistema

$$\begin{aligned} u_x &= (1-k)v \\ v_x &= (1+k)u \\ k_{xx} &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

y que estas soluciones son prolongables hasta  $x = \pm \infty$

Más aún: si la solución no es idénticamente nula para  $u$  y  $v$  tenemos que  $k_{xx} > 0 \forall x$  y  $k_{xx} \neq 0$ ; entonces,  $k$  es una función convexa, y es tal que  $\exists a, c |k| > a + c |x| \forall x$ .

Para grandes  $x$ , tendremos que  $l$  va a ser mucho menor que  $k$ , y entonces las ecuaciones para  $u$  y  $v$  admitirán aproximadamente la integral primera  $u^2 + v^2 \approx ct$  y asintóticamente  $k$  se comportará como  $ct \cdot x^2$ . Parece, pues, que el comportamiento asintótico de estas soluciones va a ser el mismo que el de las soluciones del caso sin masa. Todo esto lo vamos a precisar más en el párrafo siguiente.

#### IV. 4.- COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC CON MASA

##### a) Comportamiento en el origen

Vamos a estudiar soluciones de paridad bien definida.

Analizaremos el comportamiento de la densidad de carga  $u^2 + v^2$ .

Tenemos dos tipos de soluciones:

- |     |           |     |           |
|-----|-----------|-----|-----------|
| 1º) | $u$ par   | 2º) | $u$ impar |
|     | $v$ impar |     | $v$ par   |
|     | $k$ par   |     | $k$ par   |

Del sistema de ecuaciones diferenciales para  $u, v$  y  $k$  obtenemos fácilmente

$$(u^2 + v^2)_x = 4uv$$

$$(u^2 - v^2)_x = -4kuv$$

IV.4.1

$$(uv)_x = (u^2 + v^2) + k(u^2 - v^2)$$

y de aquí las derivadas sucesivas en el origen de la densidad de carga

$$(u^2 + v^2)_{xx} = 4 \{ u^2 + v^2 + k(u^2 - v^2) \}$$

$$(u^2 + v^2)_{xxx} = 4 \{ 4uv - 4k^2 uv + k_x(u^2 - v^2) \}$$

IV.4,2

$$(u^2 + v^2)_{xxxx} = 4 \{ 4(uv)_x - 4k^2(uv)_x - 8kk_x uv - 4kk_x uv + (u^2 + v^2)(u^2 - v^2) \}$$

Estudiaremos el primer tipo de soluciones  $u(0) \neq 0, v(0) = 0$  por la simetría de las ecuaciones para  $u, v$  y  $k$  nos basta estudiar  $u(0) > 0$ . Siempre es  $(u^2 + v^2)_x = 0$ . Según los valores de  $k(0)$ , tenemos tres posibilidades para el comportamiento de  $u^2 + v^2$  en el origen:

1°)  $k < -1 \Rightarrow (u^2 + v^2)_{xx} < 0$

2°)  $k = -1 \Rightarrow \begin{cases} (u^2 + v^2)_{xx} = 0 \\ (u^2 + v^2)_{xxx} > 0 \end{cases}$

IV.4,3

3°)  $k > -1 \Rightarrow (u^2 + v^2)_{xx} > 0$

En el caso en que sea  $v(0) \neq 0$  y  $u(0) = 0$ , tenemos, según los valores de  $k(0)$ , tres casos para el comportamiento de  $u^2 + v^2$  en el origen:

1°)  $k > 1 \Rightarrow (u^2 + v^2)_{xx} < 0$

2°)  $k = 1 \Rightarrow \begin{cases} (u^2 + v^2)_{xx} = 0 \\ (u^2 + v^2)_{xxx} < 0 \end{cases}$

IV.4,4

3°)  $k < 1 \Rightarrow (u^2 + v^2)_{xx} > 0$

Veamos que en los casos en que  $T'' = 0$ , que son  $k = -1$  y  $k = 1$  la derivada segunda en el origen de la densidad de

carga es cero

b) Comportamiento asintótico para grandes X

Vamos a analizar ahora el comportamiento asintótico de las soluciones para  $|x| \rightarrow \infty$

El sistema de ecuaciones diferenciales para  $u, v, k$  lo podemos escribir en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{IV.4,5}$$

$$k_{xx} = u^2 + v^2$$

Tenemos que si  $u, v$  no son idénticamente nulas  $\exists \epsilon$  tal que

$$k \geq \epsilon |x| + a$$

Si consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_x &= (1-x)v \\ v_x &= (1+x)u \end{aligned}$$

el cambio de variable  $x^2 + x = t$  y la aplicación del teorema 8.1 (y problemas 16, 17 y 18) de la referencia (12) nos permite asegurar que una matriz fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales es tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{con } \varphi = \int \sqrt{x^2 - 1}$$

Puesto que  $k \geq \epsilon |x| + a$ , podemos asegurar que los comportamientos asintóticos de  $u, v$  serán como senos y cosenos de  $\int (k^2 - 1)^{1/2}$  y asintóticamente  $u^2 + v^2$  se comporta como una constante y  $k$  como  $\epsilon t \cdot x^2$ . Así pues, para  $|x| \rightarrow \infty$  las soluciones en el caso con masa se comportan como las del caso sin masa.

Vamos ahora a precisar más estos comportamientos. Para ello, digamos realicemos el sistema. Hacemos  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Como los autovalores de la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1-k \\ 1+k & 0 \end{pmatrix}$  son  $\pm \sqrt{k^2-1}$ , si tomamos  $S$  así:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{k+1} & -\sqrt{k-1} \\ \sqrt{k+1} & \sqrt{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{IV.4,6}$$

nos queda para  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_x = \left\{ S \begin{pmatrix} 0 & 1-k \\ 1+k & 0 \end{pmatrix} S^{-1} + S_x S^{-1} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{IV.4,7}$$

y para  $k$  la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} k_x^2 = \sqrt{k^2-1} (a^2 + b^2) + ct$$

Vamos a estudiar el caso en que la  $ct = 0$ , que corresponde a  $T'' = 0$ . El análisis sería muy similar en el caso en que la  $ct$  fuera distinta de cero. Como la interpretación física del  $T''$  es el tensor de esfuerzos, una condición muy primaria para estabilidad de soluciones estacionarias es que  $T'' \neq 0$ , además, cuando existen soluciones localizadas, éstas corresponden a  $T'' = 0$ . Por estas razones centramos nuestro estudio en el caso de  $T'' = 0$ . Lo mismo haremos para las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell.

Sustituyendo  $S$  por su valor, el sistema queda:

$$a_x = -\sqrt{k^2-1} b + \frac{1}{4} \left\{ \ln \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \right\}_x b$$

$$b_x = \sqrt{k^2-1} a + \frac{1}{4} \left\{ \ln \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \right\}_x a$$

IV.4,8

$$\frac{1}{2} k_x^2 = \sqrt{k^2-1} (a^2 + b^2)$$

De estas ecuaciones obtenemos,

$$\frac{1}{2} (a^2 + b^2)_x = \frac{1}{4} \left\{ \ln \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \right\}_x \geq ab \quad \text{IV.4,9}$$

Como  $-(a^2 + b^2) \leq 2ab \leq (a^2 + b^2)$  llevándolo a la ecuación anterior, nos queda

$$\frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2)_x}{(a^2 + b^2)} \leq \frac{1}{4} \left\{ \ln \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \right\}_x \quad \text{IV.4,10}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2)_x}{(a^2 + b^2)} \geq \frac{1}{4} \left\{ \ln \left( \frac{k-1}{k+1} \right) \right\}_x$$

de ambas obtenemos la acotación para  $a^2 + b^2$

$$c' \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \leq a^2 + b^2 \leq c' \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad \text{IV.4,11}$$

Siendo  $c'$  la constante a la que tiende  $a^2 + b^2$  en  $x \rightarrow \pm \infty$

Llevando estas cotas a la ecuación  $\frac{1}{2} k_x^2 = \sqrt{k^2 - 1} (a^2 + b^2)$  tenemos:

$$\frac{k_x}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{2c'} \Rightarrow k \leq \frac{c'}{2} x^2 + k_0 + \sqrt{2c'(k_0+1)} x \quad \text{IV.4,12}$$

$$\frac{k_x}{\sqrt{k-1}} \geq \sqrt{2c'} \Rightarrow k \geq \frac{c'}{2} x^2 + k_0 + \sqrt{2c'(k_0-1)} x$$

Siendo  $k_0$  el valor de  $k$  en cero.

Tenemos que asintóticamente  $k$  está acotado entre dos parábolas, y como

$$c' \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \leq a^2 + b^2 \leq c' \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

entonces, para  $x \rightarrow \pm \infty$ , la diferencia entre  $a^2 + b^2$  y la

constante  $c$  estará acotada (en valor absoluto) por una función de la forma  $\frac{c}{x^2}$  con  $\alpha$  constante.

Como

$$u^2 + v^2 = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} (a^2 + b^2) - \frac{2ab}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

venmos que  $u^2 + v^2 \rightarrow c$  cuando  $x \rightarrow \pm \infty$  y la diferencia entre  $u^2 + v^2$  y  $c$  está acotada en módulo por una función de la forma  $\frac{c}{x^2}$ . Más aún, como tenemos que  $(u^2 + v^2)_x = -2uv$  y  $u$  y  $v$  se comportan como seno y cos. de  $\int \sqrt{k^2 - 1}$ , o sea, asintóticamente, como  $\text{sen.}(\alpha x^2)$ ,  $\text{cos.}(\alpha x^2)$ ,  $\alpha = \frac{c}{2}$ .

Asintóticamente la diferencia entre  $u^2 + v^2$  y una constante estará acotada en módulo por  $\frac{c}{x^2}$ , y oscilará como  $\text{sen.}(\frac{c}{2} x^2)$ .

En estas condiciones, la función

$$(u^2 + v^2) - c$$

será una función cuya  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  será finita.

Como  $(k_x)_x = u^2 + v^2$ , la diferencia entre  $k_x$  y una recta estará acotada por  $\frac{c}{x}$  y oscilará como  $\text{sen.}(\frac{c}{2} x^2)$ .

Si consideramos la densidad de energía, que es  $\frac{1}{2} k_x^2$  tendremos que la diferencia entre  $k_x^2$  y una parábola estará acotada por una constante y oscilará como  $\text{sen.}(\frac{c}{2} x^2)$  y será una cantidad integrable.

Como ejemplo del aspecto de estas funciones incluimos a continuación dos gráficas de la densidad de carga  $u^2 + v^2$  correspondientes a  $k(\theta) = 1$  y  $k(\theta) = -1$  y con valor de  $T'' = 0$ .

Debido al mal comportamiento numérico por las oscilaciones con  $x^2$ , para el cálculo numérico hemos empleado otro sistema de ecuaciones equivalente a éste y que obtendremos en el apéndice I al aplicar la teoría canónica de perturbaciones de la mecánica clásica al Hamiltoniano  $-\frac{1}{2} k_x^2 + k(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2)$  tratando el término  $u^2 - v^2$  como una perturbación.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

-40-

20+02

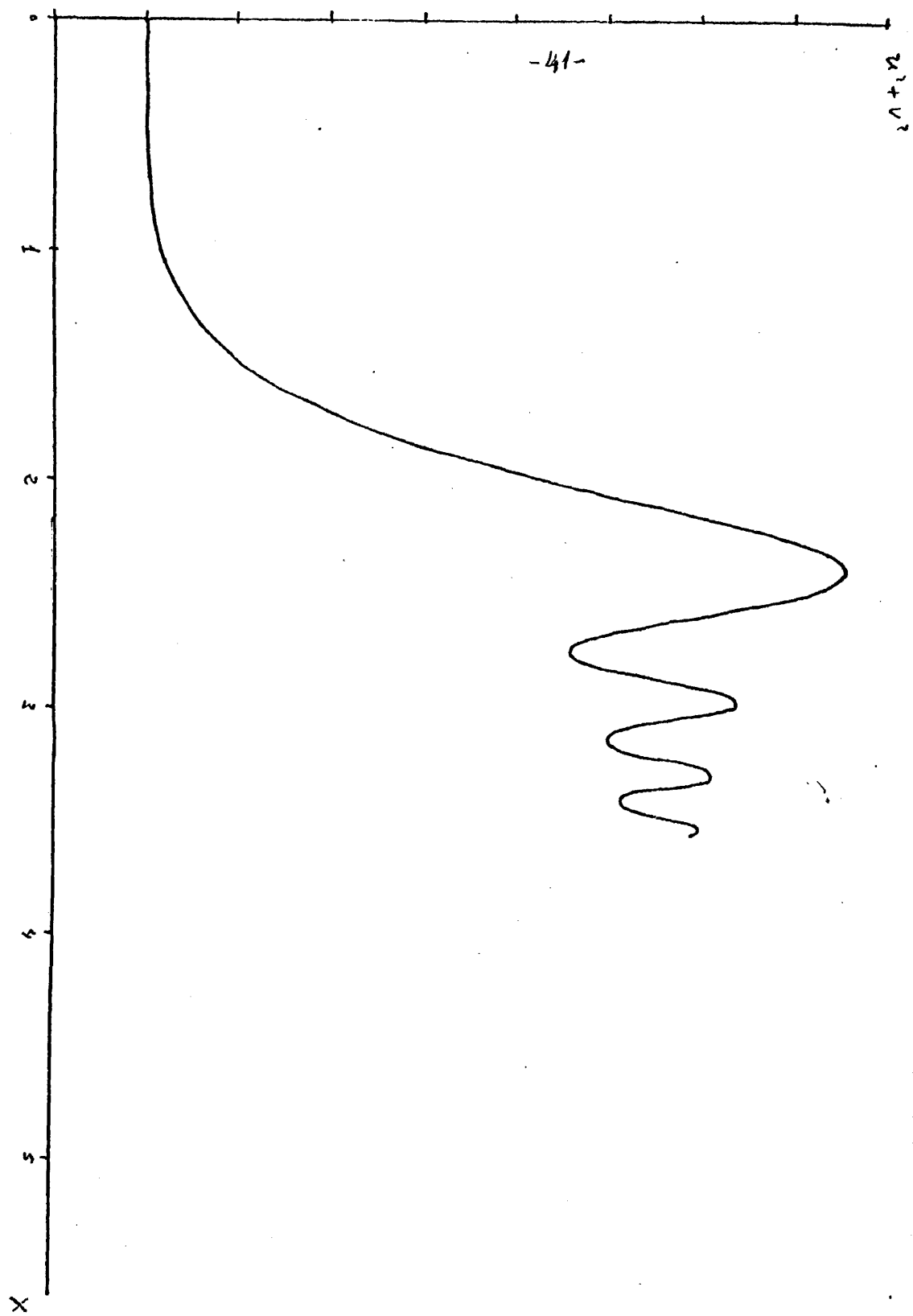
1

2

3

4

5



IV. 5.- SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA LAS ECUACIONES DE KLEIN-GORDON-MAXWELL.

En este apartado vamos a estudiar las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell, tanto para  $m=0$  como para  $m \neq 0$ .

Estas ecuaciones son:

$$D^\mu D_\mu \phi = -m^2 \phi \quad , \quad D_\mu = \partial_\mu + i g V_\mu \quad \text{IV.5,1}$$

$$(\partial_{00} - \partial_{11}) V_\mu = g i (\phi^* D_\mu \phi - c.c.)$$

Buscando soluciones estacionarias, que estén en reposo y con densidad de corriente nula,  $V_i = 0$  y una dependencia temporal para  $\phi$  de la forma  $e^{-i A t}$ , de una forma totalmente análoga a como hacíamos para Maxwell-Dirac, obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$\phi'' = -A^2 \phi + \phi \quad \text{IV.5,2}$$

$$A'' = \phi^2 A$$

Donde  $A = V_0$  y  $\phi$  son funciones reales.

He reescalado las funciones y las variables  $x$  y  $t$ , de tal forma que  $m = 1$ ,  $g = 1$ :

En el caso sin masa, las ecuaciones me quedan

$$\begin{aligned} \phi'' &= -A^2 \phi \\ A'' &= \phi^2 A \end{aligned} \quad \text{IV.5,3}$$

Tenemos las leyes de conservación de energía-momento (III.3,12-13)

A partir de  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\nu T^{\mu\mu}$  obtenemos la integral primera:

$$\phi'^2 - A'^2 + A^2 \phi^2 - \phi^2 = cte \quad \text{IV.5,4}$$

para el caso con masa, v,  $\phi'^2 - A'^2 + A^2 \phi^2 = cte$ . en el caso

en que la masa es cero.

Como hicimos en Maxwell-Dirac, estudiaremos primero el caso sin masa, y después el caso con masa.

La existencia y prolongación de soluciones viene asegurada por los teoremas usuales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lo mismo que en el caso de Maxwell, estas ecuaciones vienen de problemas variacionales, siendo el Hamiltoniano precisamente  $T''$ , que, por la invariancia por traslaciones, es constante.

Estudicmos el caso sin masa.

Las ecuaciones son: (IV.5,3)

$$\phi'' = -A^2 \phi$$

$$A'' = \phi^2 A$$

con la integral primera  $A'^2 - \phi'^2 = \phi^2 A^2$

Como hicimos con Maxwell-Dirac, nos centraremos en el estudio del caso en el que  $T'' = 0$ .

Vamos a estudiar comportamientos asintóticos pues, a diferencia de Maxwell-Dirac, aquí no existen (o al menos no se han encontrado) soluciones elementales no triviales en ninguno de los dos casos.

Como  $A_x^2 = \phi_x^2 + A^2 \phi'^2 \geq 0$ , si  $\phi$  y  $A$  son ambas no idénticamente nulas, podemos asegurar que  $A$  es una función creciente.

Si nos fijamos en la ecuación

$$\phi'' = -A^2 \phi$$

veamos que  $\phi$  va a ser una función oscilante.

La aproximación W.K.B. (Ref. 15) nos dice que una solución aproximada de esta ecuación es:  $\phi = A^{-1/2} \cos(\mathcal{A})$

donde  $\mathcal{A}$  es una primitiva de  $A$ .

Sustituyendo en la ecuación para  $A''$ , tenemos  $A'' = \phi^2 A^2$

Como  $A$  es una función creciente, su primitiva también lo será; además, como mínimo, como  $|\phi| \leq 1$ , pues si  $A$  es crecien-

te, como mínimo, tenderá a una  $cte$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Para obtener el comportamiento asintótico de  $A$ , podemos sustituir el  $\cos^2$  por su valor medio  $\frac{1}{2}$ .

Nos queda

$$A'' = \frac{1}{2} c^2$$

multiplicando por  $A'$  e integrando obtenemos:

$$A'^2 = c^2 A + d$$

y  $A$  será

$$A = \frac{c^2}{4} x^2 + c^2 \sqrt{c^2 e + d} x + e$$

Lo que hemos hecho hasta ahora nos determina el comportamiento de las soluciones.

Vamos a comprobar que estos comportamientos asintóticos son buenos.

Determinemos primero qué valores debemos dar a las constantes arbitrarias para que se cumpla que la integral sea cero asintóticamente.

Tenemos:

$$\phi' = -c \left\{ A^{1/2} \sin(ct) + \frac{1}{2} A' A^{-3/2} \cos(ct) \right\}$$

$$-\phi'^2 = -c^2 \left\{ A \sin^2(ct) + \frac{1}{4} A'^2 A^{-3} \cos^2(ct) + \frac{1}{2} \sin(2ct) \right\}$$

como  $\phi^2 A^2 = c^2 A \cos^2(ct)$

tenemos que:

$$A'^2 - \phi'^2 - \phi^2 A^2 = \frac{1}{4} A'^2 A^{-3} \cos^2(ct) + \frac{1}{2} A' A^{-1} \sin(2ct) + d$$

Si queremos que asintóticamente valga cero, ha de ser  $d = 0$  entonces tenemos:

$$\mathcal{A} \approx \frac{1}{12} c^2 \{x+e\}^3 + f$$

$$\phi \approx c A^{1/2} \cos(\mathcal{A}) = \frac{2}{x+e} \cos\left(\frac{c^1}{12} \{x+e\}^3 + f\right)$$

IV.5,5

$$A \approx \frac{1}{4} c^2 (x+e)^2$$

Veamos qué valor obtenemos para  $\phi''$  y vamos a compararlo con  $-\phi A^2$ . Tomando  $\phi = A^{-1/2} \cos(\mathcal{A})$  nos da:

$$\phi'' + \phi A^2 = \cos(\mathcal{A}) \left\{ \frac{1}{2} A'' A^{-3/2} - \frac{3}{4} A'^2 A^{-5/2} \right\}$$

Para ver cómo es el comportamiento de  $A$  acudimos a la integral primera, tomando  $A'^2 = c^2 A$ . Entonces tenemos que:

$$A'^2 - \phi'^2 - \phi^2 A^2 = \frac{1}{4} A'^2 A^{-2} \cos^2(\mathcal{A}) + \frac{1}{2} A' A^{-1} \sin(2\mathcal{A})$$

Vemos que las diferencias entre los valores de las derivadas de las funciones asintóticas que hemos obtenido y los segundos miembros de las ecuaciones que nos determinan  $\phi''$  y  $A'^2$  tienden a cero cuando  $|x| \rightarrow \pm \infty$ .

Además, en el peor de los casos, que es en  $A'^2$ , se comporta como  $\frac{\cos(x^3)}{x}$  que es algo integrable entre  $x_0 > 0$  y  $+\infty$ .

Hemos visto, gracias a las soluciones aproximadas que hemos obtenido, que el potencial eléctrico  $A = V_0$  se comporta asintóticamente como una parábola.

Pasemos ahora a estudiar el comportamiento asintótico para grandes  $x$  de las soluciones en el caso con masa no nula.

En este caso, tenemos las ecuaciones: (IV.5,2)

$$\phi'' = (1 - A^2) \phi$$

$$A'' = \phi^2 A$$

y la integral primera

$$A'^2 - \phi'^2 = \phi^2 (A^2 - 1)$$

Usando la aproximación W. K. B. en la ecuación  $\phi'' = (1-A^2)\phi$  tenemos la solución aproximada:

$$\phi = (A^2-1)^{-\frac{1}{4}} \cos(\mathcal{U})$$

donde  $\mathcal{U}$  es una primitiva de  $(A^2-1)^{\frac{1}{2}}$ .

Sustituyendo en la ecuación para  $A''$ , tenemos:

$$A'' = c^2 A (A^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cos^2(\mathcal{U})$$

Sustituyendo, como antes,  $\cos^2(\mathcal{U})$  por su valor medio  $\frac{1}{2}$  nos queda:

$$A'' = c^2 \frac{A}{\sqrt{A^2-1}}$$

Multiplicando por  $A'$  e integrando, obtenemos

$$A'^2 = c^2 (A^2-1)^{\frac{1}{2}} + d$$

Vamos a ver ahora qué valores hemos de dar a las constantes arbitrarias para que se nos cumpla que la integral primera sea cero asintóticamente.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \phi' &= -c \left\{ (A^2-1)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen}(\mathcal{U}) + \frac{1}{2} A A' (A^2-1)^{-\frac{5}{4}} \cos(\mathcal{U}) \right\} \\ -\phi'' &= -c^2 \left\{ (A^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}^2(\mathcal{U}) + \frac{1}{4} A^2 A'^2 (A^2-1)^{-\frac{5}{2}} \cos^2(\mathcal{U}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} A A' (A^2-1)^{-1} \operatorname{sen}(2\mathcal{U}) \right\} \end{aligned}$$

Como

$$\phi^2 (A^2-1) = c^2 (A^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos^2(\mathcal{U})$$

tenemos que

$$A'^2 - \phi'^2 - \phi^2 (A^2-1) = \frac{1}{4} A^2 A'^2 (A^2-1)^{-\frac{5}{2}} \cos^2(\mathcal{U}) + \frac{1}{2} A A' (A^2-1)^{-1} \operatorname{sen}(2\mathcal{U}) + d$$

Si queremos que asintóticamente valga cero, ha de ser  $d = 0$ .  
Entonces tenemos:

$$A'^2 = c^2 (A^2 - 1)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'}{(A^2 - 1)^{1/2}} = c (x + e)'$$

La integral de  $A'(A^2 - 1)^{-1/2}$  no es elemental; pero como sólo nos interesa el comportamiento para grandes  $x$ , éste sí lo podemos calcular explícitamente.

Para grandes  $x$ ,

$$A \approx \frac{c^2}{4} (x + e)^2 \left( 1 + \frac{8}{3 c^4 (x + e)^4} + \dots \right)$$

y tendremos que

$$\mathcal{A} = \frac{c^2}{12} (x + e)^3 \left( 1 + \frac{16}{c^4 (x + e)^4} + \dots \right) \quad \text{IV.5,6}$$

Tenemos pues, resumiendo

$$\phi \approx c (A^2 - 1)^{-1/2} \cos(\mathcal{A})$$

IV.5,7

$$A \approx \frac{c^2}{4} (x + e)^2 \left( 1 + \frac{8}{3 c^4 (x + e)^4} + \dots \right)$$

Si calculamos la diferencia entre  $\phi''$  y  $(-A^2 + 1)\phi$  obtenemos

$$\phi'' - (-A^2 + 1)\phi = \cos(\mathcal{A}) \left\{ \frac{1}{2} ((A^2 - 1)^{1/2})'' \cdot (A^2 - 1)^{-3/2} - \frac{3}{4} ((A^2 - 1)^{1/2})' (A^2 - 1)^{-5/2} \right\}$$

Vemos que, como en el caso sin masa, la diferencia entre los valores de las funciones asintóticas que hemos obtenido y los segundos miembros de las ecuaciones para  $\phi''$  y  $A'^2$  tienden a cero cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ . También aquí el peor comportamiento se da en  $A'^2$  y es también como  $\frac{\cos(\pi x^2)}{x}$

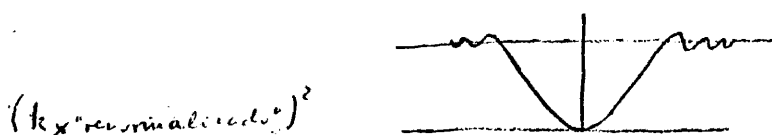
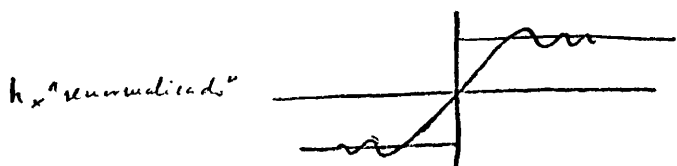
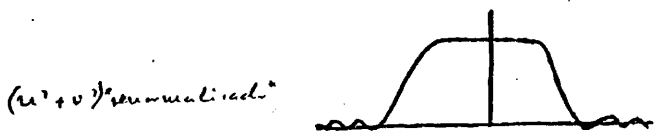
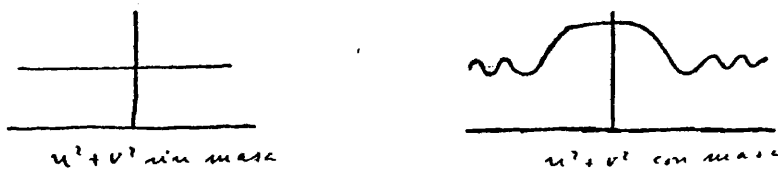
#### IV. 6.- COMENTARIOS

En las soluciones estacionarias de Maxwell-Dirac, en el caso sin masa, la densidad de carga es constante en todo el espacio; mientras que en el caso con masa la densidad de carga tiende a constante cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ . Esto nos sugiere el poder definir una carga "renormalizada" restando esa constante a la que tiende en infinito.

Esta definición es buena, pues hemos demostrado que la diferencia entre la densidad de carga y una constante, está acotada cuando  $x \rightarrow \pm \infty$  por  $\frac{ct}{x^2}$ ; entonces esta diferencia es integrable y esta carga "renormalizada" es finita. Tenemos, además, cargas "renormalizadas" positivas y negativas.

También podríamos definir una densidad de energía "renormalizada", pues la diferencia entre  $k_x^2$  y una parábola está acotada por  $\frac{ct}{x}$  y oscila con  $x^2$  y por lo tanto es integrable.

Esquemáticamente e informalmente, el proceso sería:



Esta función difiere de una constante en algo que oscila como  $\cos(ite x^2)$  y está acotado por  $\frac{1}{x}$ .  
 $k_x^2$  con masa difiere de una parábola en algo que está acotado por  $\frac{1}{x}$  y oscila como  $\cos(ite x^2)$ . Esto nos permitiría definir una energía renormalizada.

Vemos que, clásicamente, la presencia de masa nos permite definir cargas y energías finitas con respecto a las cargas y energías de los estados estacionarios, que son infinitas, tanto en el caso con masa como en el caso sin masa.

Esto nos indica que la constante en la que se han de realizar perturbaciones en electrodinámica en  $l+1$  dimensiones es en la masa (ver ref. 17) en la cual se hace cuánticamente "mass perturbation theory", y no en la constante de acoplo, pues las soluciones estacionarias con constante de acoplo difieren cualitativamente de las soluciones libres para las ecuaciones de Dirac y las de Maxwell. La causa última de esto está en que la función de Green para la laplaciana en  $l$  dimensión (o sea para la derivada segunda) es  $|x|$  que crece cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ . También hemos visto al principio de este capítulo que la evolución temporal de datos iniciales para las ecuaciones acopladas no puede tender a soluciones de las ecuaciones libres.

En el caso de Klein-Gordon-Maxwell, al no disponer de soluciones elementales para ninguno de los dos casos ( $m=0$ ,  $m \neq 0$ ), el análisis es más difícil.

La masa actúa como perturbación, pues tenemos:

$$\phi'' = A^2 \phi \quad \text{en el caso sin masa}$$

$$\phi'' = (A^2 - 1) \phi \quad \text{en el caso con masa}$$

y  $A$  en ambos casos se comporta como una parábola.

Vamos a analizar los comportamientos asintóticos del potencial eléctrico  $A$  en ambos casos, tomando que la constante  $q$  sea la misma para ambos.

En el caso sin masa, el potencial viene dado asintóticamente

por:

$$A \approx \frac{1}{4} d^2 (x + e_1)^2$$

y en el caso sin masa por

$$A \approx \frac{1}{4} d^2 (x + e_1)^2 \left\{ 1 + \frac{8}{3 d^2 (x + e_1)} + \dots \right\}$$

La diferencia entre los potenciales en el caso con masa y en el caso sin masa, se comporta asintóticamente como una recta , lo cual nos quiere decir que la diferencia entre las cargas, en ambos casos, es una función integrable.

---

C A P I T U L O V

REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC Y KLEIN-GORDON-MAXWELL  
=====

## CAPITULO V

### REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC Y KLEIN-GORDON-MAXWELL

En este capítulo vamos a replantearnos el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell, aunque, en esencia, lo que decimos es aplicable a cualquier situación en que tengamos las ecuaciones de Maxwell con fuentes en  $1+1$  dimensiones.

Veremos que los espacios que se han usado permiten únicamente la existencia de la solución idénticamente nula y la existencia para datos iniciales con carga total nula en el caso de Klein-Gordon-Dirac.

#### V. 1.- ESTUDIO DE LAS ECUACIONES EN LOS ESPACIOS UTILIZADOS

En las ecuaciones de Maxwell-Dirac, teníamos las ecuaciones de Maxwell que nos decían:

$$(\partial_0 - \partial_{11}) v^\mu = \square v^\mu = g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{V.1,1}$$

$$\partial_\mu v^\mu = 0$$

que las podemos escribir como:

$$\partial_x (\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0) = g \bar{\psi} \gamma_0 \psi \Leftrightarrow \partial_x E = g j_0 \quad \text{V.1,2}$$

$$\partial_0 (\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0) = g \bar{\psi} \gamma_1 \psi \Leftrightarrow \partial_t E = g j_1$$

En el capítulo II habíamos empleado los espacios  $D_1$  para el campo de Dirac y  $M_{1/2}$  para el campo electromagnético.

Recordemos que la norma en  $M_{1/2}$  estaba definida así:

$$\| \left( \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \psi \end{array} \right) \|_{M_{1/2}} = \left\{ \| B \mathbf{v} \|_2^2 + \| \mathbf{v} \|_2^2 + \| \psi \|_2^2 \right\}^{1/2}$$

siendo  $B = (-\Delta)^{1/2}$ .

Si la  $\|(\psi)\|_{M_{1/2}}$  es finita, tenemos que son finitas las  $\| \cdot \|_2$  de  $V_\mu$ ,  $\partial_t V_\mu$  y  $\partial_x V_\mu$ , entonces tenemos que  $E = \partial_0 V_1 - \partial_1 V_0$  tiene su  $\| \cdot \|_2$  finita; y, por lo tanto, tiende a cero cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Tenemos que  $j_0 = \bar{\psi} \gamma_0 \psi$  es siempre  $\geq 0$  y solo es cero si  $\psi \equiv 0$ . Si planteamos un problema de valor inicial con un dato inicial para  $\psi$  que no sea idénticamente nulo, como ha de cumplirse que  $\partial_x E = g j_0 \Rightarrow E(+\infty) - E(-\infty) = g \int_{-\infty}^{+\infty} j_0 \neq 0$  y como,  $E = (\partial_0 V_1 - \partial_1 V_0) \Rightarrow$  que los datos iniciales para  $V$  no pueden pertenecer a  $M_{1/2}$ .

Vemos pues, que el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac planteado en  $D_1 \oplus M_{1/2}$  sólo tiene sentido sentido cuando  $\psi$  es idénticamente nulo, y por lo tanto, el campo electromagnético es libre.

En el caso de Klein-Gordon-Maxwell, la situación es distinta. Como la densidad de carga no es definida positiva, puede, sin ser el campo de Klein-Gordon idénticamente nulo, ser la carga total igual a cero.

Sólo en este caso, en el que la carga total es igual a cero, podemos plantear el problema de Cauchy para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell en los espacios  $(D_1 \oplus L^2) \oplus M_{1/2}$  que usamos en el capítulo III.

## V. 2.- PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC SIN MASA.

Vamos a ver que, en el caso sin masa, se puede resolver exactamente el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

Las ecuaciones son:

$$-i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = -g \gamma_2 \gamma^4 \psi$$

$$\partial_1 (\partial_0 V_1 - \partial_1 V_0) = \partial_x E = g \bar{\psi} \gamma_0 \psi = g j_0$$

V. 2.1

$$\partial_0 (\partial_0 V_1 - \partial_1 V_0) = \partial_t E = g \bar{\psi} \gamma_1 \psi = g j_1$$

Lo mismo que hacíamos en el capítulo II, podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 = 0$$

$$\partial_0 j^1 + \partial_1 j^0 = 0$$

V.2,2

Si tengo un dato inicial para  $\psi$ , éste nos da unos datos iniciales para  $j^0$  y  $j^1$ . Sean éstos  $\tilde{j}^0$  y  $\tilde{j}^1$ .

A partir de las ecuaciones escritas anteriormente puedo obtener explícitamente  $j^0$  y  $j^1$  para todo  $t$ .

Integrando por características, tenemos:

$$j^0(x, t) = \frac{1}{2} \{ \tilde{j}^0(x+t) + \tilde{j}^0(x-t) - \tilde{j}^1(x+t) + \tilde{j}^1(x-t) \}$$

$$j^1(x, t) = \frac{1}{2} \{ -\tilde{j}^0(x+t) + \tilde{j}^0(x-t) + \tilde{j}^1(x+t) + \tilde{j}^1(x-t) \}$$

V.2,3

Las ecuaciones para  $E$  nos dicen:

$$\partial_1 E = g j_0(x, t) = g \{ (\tilde{j}_0 - \tilde{j}_1)(x-t) + (\tilde{j}_0 + \tilde{j}_1)(x+t) \} = f(x-t) + s(x+t)$$

$$\partial_0 E = g j_1(x, t) = g \{ (-\tilde{j}_0 + \tilde{j}_1)(x-t) + (\tilde{j}_0 + \tilde{j}_1)(x+t) \} = -f(x-t) + s(x+t)$$

V.2,4

Sumando y restando se obtiene:

$$(\partial_0 + \partial_1) E = 2g(x+t)$$

$$(\partial_1 - \partial_0) E = 2f(x-t)$$

V.2,5

Si representamos por  $F$  y  $G$  a primitivas de  $f$  y  $g$ , que son funciones de una variable y que vienen de los datos iniciales para  $j^0$  y  $j^1$  tenemos que

$$E(x, t) = F(x-t) + G(x+t)$$

V.2,6

Vemos que, debido a la ecuación  $\partial_1 E = j_0$  dados los datos iniciales para  $\psi$ , tenemos determinados los datos iniciales para  $E$ .

Una vez determinado  $E$  para todo  $x$  y para todo  $t$ , vamos a ver como se determinarían  $V_0$  y  $V_1$ .

Tenemos la ecuación de definición de  $E$  y la condición de Gauge que nos dicen:

$$\partial_t V_0 + \partial_x V_1 = 0$$

$$\partial_0 V_1 + \partial_1 V_0 = E(x, t)$$

Son ecuaciones lineales con coeficientes constantes y con fuentes conocidas para todo  $x$  y todo  $t$ . Podemos calcular explícitamente  $V_0$  y  $V_1$ , para todo  $x$  y todo  $t$  dados los valores en  $t=0$  de  $V_0$  y  $V_1$ .

Veamos ahora como, conociendo  $V_0$  y  $V_1$  podemos calcular el campo de Dirac en todo  $x$  y en todo  $t$ .

Si para escribir las ecuaciones de Dirac usamos las matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y llamamos al spinor  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , las ecuaciones

$$-i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g V_\mu) \psi = 0$$

nos quedan

$$u_t + u_x = -i g (V_0 + V_1)$$

$$v_t - v_x = i g (V_0 - V_1)$$

V.2,7

o equivalentemente

$$(\partial_t + \partial_x) (lu u) = -i g (V_0 + V_1)$$

$$(\partial_t - \partial_x) (lu v) = i g (V_0 - V_1)$$

V.2,8



que son ecuaciones lineales para  $lu u$  y  $lu v$ , con coeficientes constantes y fuentes conocidas. Dados los datos inicia-

les en  $t = 0$ , podemos determinar explícitamente  $u$  y  $v$  para todo  $t$ .

Como hemos visto, se puede resolver explícitamente el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa gracias a que  $j_0$  y  $j_1$  cumplen las ecuaciones

$$\partial_0 j_0 - \partial_1 j_1 = 0$$

$$\partial_0 j_1 - \partial_1 j_0 = 0$$

Dadas las condiciones iniciales para  $\Psi$  tenemos las condiciones iniciales para  $j_0$  y  $j_1$  y podemos calcular explícitamente éstos para todo  $t$ .

Con  $j_0$  y  $j_1$  y las condiciones iniciales para  $V_0$  y  $V_1$ , podemos calcular  $v_0$  y  $v_1$   $\forall t$ , y con  $V_0$  y  $V_1$ , y los datos iniciales para  $\Psi$ , calcular explícitamente  $\Psi$  para todo  $t$ .

### V. 3.- REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA MAXWELL-DIRAC Y KLEIN-GORDON-MAXWELL.

Hemos visto que el problema de Cauchy, en el caso en que intervengan las ecuaciones de Maxwell y la carga total sea distinta de cero, no se puede plantear en los espacios que usamos en los capítulos II y III.

La causa de esto son las ecuaciones de Maxwell en  $1 + 1$  dimensiones, que nos dicen:

$$\partial_x E = j_0$$

$$\partial_t E = j_1$$

V.3,1

$$E = \partial_0 V_1 - \partial_1 V_0$$

y a las que debemos añadir una condición de gauge para determinar los potenciales  $V_0$  y  $V_1$ .

La condición de gauge más cómoda para poder plantear el problema de Cauchy, es hacer  $V_0 \equiv 0$ .

Debido a la invariancia gauge de las ecuaciones, las magnitud-

des físicas son independientes de la elección del gauge, y una vez resuelto el problema de valor inicial en un gauge dado, podemos pasar a otro cualquiera por un cambio de gauge.

Por todo esto, trataremos estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_t E &= g j_1 \\ \partial_x E &= g j_0 \\ \partial_t V_1 &= E \end{aligned} \quad \text{V.3,2}$$

Si las ponemos en forma integral, nos quedan:

$$E(x, t) = g \int_a^x j_0(\gamma, 0) d\gamma + g \int_0^t j_1(x, s) ds \quad \text{V.3,3}$$

y equivalentemente

$$E(x, t) = g \int_a^x j_0(\gamma, t) d\gamma + g \int_0^t j_1(x, s) ds \quad \text{V.3,4}$$

En el caso en que  $j_0$  y  $j_1$ , tiendan a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  estas ecuaciones se nos simplifican, quedando así:

$$E(x, t) = g \int_{-\infty}^x j_0(\gamma, 0) d\gamma + g \int_0^t j_1(x, s) ds \quad \text{V.3,5}$$

y equivalentemente

$$E(x, t) = g \int_{-\infty}^x j_0(\gamma, t) d\gamma \quad \text{V.3,6}$$

La forma integral para  $V_1$  es:

$$V_1(x, t) = V_1(x, 0) + \int_0^t E(x, s) ds \quad \text{V.3,7}$$

Vamos a analizar ahora en qué espacios podemos definir nuestro problema de evolución temporal.

Comencemos con las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

Si tomamos  $\psi$  perteneciente a  $D_1$ , como hicimos en el capítulo II, vamos a ver qué espacios podemos usar para  $E$  y  $V_1$  en el caso en que la carga total no sea nula.

Tenemos que

$$\partial_x E = \gamma j_0$$

Como tenemos que  $\psi \in D_1 \Rightarrow \|\psi\|_2$  y  $\|\partial_x \psi\|_2$  están acotados, entonces, como  $\|f\|_\infty \leq k \|f\|_2^{1/2} \|\partial_x f\|_2^{1/2} \leq$   
 $\leq d \{ \|f\|_2 + \|\partial_x f\|_2 \} \leq \|f\|_{D_1}$ , y  $j^0$  es cuadrático en  $\psi$ , la norma infinito de  $\partial_x E$  está acotada.

Por otra parte, tenemos (V.3,6)

$$E = \int_{-\infty}^x j_0(\tau, t) d\tau$$

entonces

$$\|E\|_\infty \leq \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(\tau, t) d\tau = \text{carga total} < \infty \quad \text{V.3,8}$$

Tenemos también que la norma infinito de  $E$  es finita.

Parece natural emplear para  $E$  el espacio de Sobolev  $W^{1,\infty}$ , con la norma definida así

$$\|f\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|f\|_\infty, \|\partial_x f\|_\infty \}$$

Al ser

$$\partial_t V_1 = E$$

y definir  $E$  dentro de  $W^{1,\infty}$ , el espacio natural para definir  $V_1$  es también el  $W^{1,\infty}$ .

Así pues, plantearemos el problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell-Dirac con carga total no nula en los espacios:

$$\psi \in D,$$

$$E \in W^{1,\infty}$$

$$V_i \in W^{1,\infty}$$

Analicemos ahora los espacios a usar para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell en el caso en que la carga total no sea nula.

Tomaremos  $\phi \in D$ ,  $\dot{\phi} \in L^2$  como hicimos en el capítulo III.

Tenemos la ecuación

$$\partial_x E = \int j_0 = \int i(\phi^* \partial_t \phi - c.c.) \quad \text{V.3,9}$$

Como  $\partial_t \phi$  simplemente pertenece a  $L^2$ , no podemos asegurar que, en general,  $\partial_x E$  pertenezca a  $L^\infty$ .

$E$  lo tenemos definido como: (V.3,6)

$$E = \int_{-\infty}^x \int i(\phi^* \dot{\phi}_t - c.c.)(\gamma, t) d\gamma \quad \text{V.3,10}$$

Como, tanto  $\phi$ , como  $\dot{\phi}_t \in L^2$ , podemos asegurar que  $E$  pertenece a  $L^\infty$ .

Al estar definido  $V_i$  así

$$\partial_t V_i = E$$

el espacio natural para definir  $V_i$ , si  $E \in L^\infty$ , es también  $L^\infty$ .

Así pues, nos plantearemos el problema de Cauchy para las ecuaciones de Klein-Gordon-Dirac con carga total no nula en los espacios:

$$\begin{array}{ll} \phi \in D, & E \in L^\infty \\ \dot{\phi} \in L^2 & V_i \in L^\infty \end{array}$$

Físicamente el usar los espacios  $D_1$  para  $\psi$  y  $D_1 \otimes L^2$  para  $(\phi, \dot{\phi})$  corresponde a buscar soluciones en las cuales los campos fuente del campo electromagnético están localizados.

#### V. 4.- EXISTENCIA LOCAL Y GLOBAL PARA EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC CON CARGA TOTAL NO NULA Y FINITA

Acudiendo al capítulo II, recordamos que las ecuaciones con las que hemos de tratar son: (II.1,1)

$$(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = -g V_\mu \gamma^\mu \psi$$

$$\partial_t E = g j_0 = g \bar{\psi} \gamma_0 \psi \quad ; \quad \partial_x E = g j_1 = g \bar{\psi} \gamma_1 \psi \quad \text{v.4,1}$$

$$\partial_t V_1 = E$$

que en forma integral son

$$\psi(t) = D(t-t_0) \psi(x, 0) - g \int_{t_0}^t D(t-s) V(s) \psi(s) ds$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^x j_0(x, 0) + g \int_{t_0}^t j_1(s) ds$$

$$V_1(t) = V_1(x, 0) + \int_{t_0}^t E(x, s) ds$$

v.4,2

donde

$$D(t) = \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta m\right)$$

$$V = i (V_0 - V_1, \alpha)$$

De acuerdo con el párrafo anterior V. 3 plantearemos el problema de Cauchy en los espacios:

$$\psi \in D_1$$

$$E \in W^{1, \infty}$$

$$V_1 \in W^{1, \infty}$$

##### a) Demostremos existencia local.

Veamos primero que los términos no lineales son localmente

lipschicianos.

Comencemos con el término  $V_{\mu} \gamma^{\mu}$ .

Tenemos :

$$\begin{aligned}
 & \| v_{\mu} \gamma^{\mu} \psi - \tilde{v}_{\mu} \gamma^{\mu} \tilde{\psi} \|_{D_1} = \| v_{\mu} \gamma^{\mu} \psi - \tilde{v}_{\mu} \gamma^{\mu} \tilde{\psi} \|_{D_1} \leq \\
 & \leq \{ \| v_{\mu} (\gamma^{\mu} \psi - \gamma^{\mu} \tilde{\psi}) \|_{D_1} + \| \gamma^{\mu} \tilde{\psi} (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_{D_1} \} \leq \\
 & \leq \| v_{\mu} (\gamma^{\mu} \psi - \gamma^{\mu} \tilde{\psi}) \|_2 + \| \partial_x v_{\mu} \gamma^{\mu} (\psi - \tilde{\psi}) \|_2 + \\
 & + \| v_{\mu} \gamma^{\mu} \partial_x (\psi - \tilde{\psi}) \|_2 + \| \tilde{\psi} \gamma^{\mu} (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_2 + \\
 & + \| \partial_x (\gamma^{\mu} \psi) (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_2 + \| \gamma^{\mu} \tilde{\psi} \partial_x (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_2 \} \cdot dt \leq \\
 & \leq \{ \| v_{\mu} \|_{\infty} \| \psi - \tilde{\psi} \|_2 + \| \partial_x v_{\mu} \|_{\infty} \| \psi - \tilde{\psi} \|_2 + \\
 & + \| v_{\mu} \|_{\infty} \| \partial_x (\psi - \tilde{\psi}) \|_2 + \| \psi \|_2 \| v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu} \|_{\infty} + \\
 & + \| \partial_x \psi \|_2 \| v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu} \|_{\infty} + \| \tilde{\psi} \|_2 \| \partial_x (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_{\infty} \} \cdot dt \leq
 \end{aligned}$$

V.4,3

Vemos que el término  $V_{\mu} \gamma^{\mu} \psi$  es localmente lipschiciano en los espacios utilizados, ya que

$$\| \{ \|_{D_1} \leq dt \{ \| \{ \|_2 + \| \partial_x \{ \|_2 \} \} \} \} \} \leq dt \| \{ \|_{D_1}, \| \partial_x \{ \|_2 \leq dt \| \{ \|_{D_1}$$

Veamos ahora la parte correspondiente a

$$E \gamma v_i$$

Para E tenemos:

$$\begin{aligned}
 \| j_i - \tilde{j}_i \|_{\infty} & \leq k \| j_i - \tilde{j}_i \|_1^{1/2} \| \partial_x (j_i - \tilde{j}_i) \|_2^{1/2} \leq \\
 & \leq k \{ \| j_i - \tilde{j}_i \|_2 + \| \partial_x (j_i - \tilde{j}_i) \|_2 \}
 \end{aligned}$$

V.4,4

Como  $j_i$  es cuadrático en los campos  $\psi$ , este término es lipschiciano. En  $\| \partial_x (j_i - \tilde{j}_i) \|_{\infty}$  no podemos demostrar una condición de

Lipschitz, pues no conocemos nada sobre  $\|\partial_x \psi\|_\infty$ .

Podemos ver también la existencia local de  $E$  de otra forma. Tenemos la representación integral para  $E$ : (V.3,6)

$$E(x,t) = \int_{-\infty}^x j_0(\tau, t) d\tau$$

En vez de comprobar que  $j_0$  cumple una condición de Lipschitz nos basta con ver que esta integral tiene sentido cuando  $\psi \in \mathcal{D}_1$ . Esto es cierto, pues  $\psi \in \mathcal{D}_1 \Rightarrow \|\psi\|_2$  es finita y tiene sentido la  $\int_{-\infty}^x j_0$  pues  $j_0$  es cuadrático en  $\psi$ .

Vemos que  $E$  está bien definido. Además, como  $\partial_x E = j_0 \Rightarrow \|\partial_x E\| = \|j_0\|_\infty$  y si  $\psi \in \mathcal{D}_1 \Rightarrow j_0 \in L^\infty$

Hemos visto que, a partir de la ecuación  $\partial_x E = j_0$  podemos demostrar existencia local para  $E$  dentro de  $W^{1,\infty}$  siempre que  $\psi$  pertenezca a  $\mathcal{D}_1$  sin necesidad de demostrar la condición de Lipschitz para  $j_0, \tilde{j}_0$  en  $W^{1,\infty}$ .

Veamos ahora qué sucede en la ecuación

$$\partial_t V_1 = E$$

Tenemos  $\|E - \tilde{E}\|_\infty$  que ya es lipschiciano.

$$\|\partial_x E - \partial_x \tilde{E}\|_\infty = \|j_0 - \tilde{j}_0\| \leq c \{ \|j_0 - \tilde{j}_0\|_2 + \|\partial_x(j_0 - \tilde{j}_0)\|_2$$

que, como en el caso anterior, también es lipschiciano por ser  $j_0$  cuadrático en  $\psi$ .

Como en las ecuaciones de evolución para  $E$  y  $V_1$  no interviene ninguna derivada espacial, el grupo de evolución temporal es simplemente la identidad, que es trivial.

El grupo  $D(t) = \exp\{\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \omega\}t$  es unitario en  $\mathcal{D}_1$  y por lo tanto fuertemente continuo.

Tenemos pues, por el teorema de Segal (Ref. 4) existencia y unicidad local.

#### b) Existencia global.

Si queremos ver existencia global, hemos de comprobar que las normas de los campos permanecen finitas para todo  $t$  finito.

Esto no va a resultar difícil gracias a la cota a priori que dedujimos en el capítulo II párrafo II. 3 sobre la  $\|\Psi\|_\infty$

Como tenemos que (V.3,6)

$$E = \int_{-\infty}^x j_0(x;t) dt \Rightarrow \|E\|_\infty = \|\Psi\|_2 = ct \forall t$$

ya que  $j_0 = \bar{\Psi} \delta \Psi$  es siempre  $\geq 0$ .

Por otra parte  $\|\partial_x E\|_\infty = \|j_0\|_\infty$

que es finito por la cota a priori del capítulo II sobre la  $\|j_0\|_\infty$ .

Así pues,

$$\|E\|_{W^{1,\infty}} < \infty \quad \forall t < \infty$$

Para  $V_1$  tenemos: (V.3,7)

$$V_1(x,t) = V_1(x,0) + \int_0^t E(x,s) ds \Rightarrow \|V_1\|_\infty \leq ct + t \|\Psi\|_2$$

$$\text{Como } \partial_t(\partial_x V_1) = j_0 \Rightarrow \partial_x V_1(x,t) = (\partial_x V_1)(x,0) + \int_0^t j_0(x,s) ds$$

y de aquí se deduce:

$$\|\partial_x V_1\|_\infty \leq ct + \sup_{s \in (0,t)} \|j_0(s)\|_\infty$$

que es finito para todo  $t$  finito, por la cota a priori que teníamos sobre la  $\|j_0\|_\infty$ .

Así pues:

$$\|V_1\|_{W^{1,\infty}} < \infty \quad \forall t < \infty$$

Veamos por fin la finitud  $\forall t$  de la  $\|\Psi\|_{D_1}$ .

Tomando  $\|\cdot\|_{D_1}$  en la expresión integral para  $\Psi$  que tenemos al principio de este párrafo, y como  $D(t)$  es ortogonal en  $D_1$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\|_{D_1} &\leq a + b \int_0^t \|v_1(s) \psi(s)\|_{D_1} ds \leq \\
&\leq a + c \int_0^t \left\{ \|v_1(s) \psi(s)\|_2 + \|\partial_x(v_1(s) \psi(s))\|_2 \right\} ds \leq \text{v.4,5} \\
&\leq a + d \int_0^t \left\{ \|v_1(s)\|_\infty \|\psi(s)\|_2 + \|v_1(s)\|_\infty \|\partial_x \psi(s)\|_2 + \right. \\
&\quad \left. + \|\partial_x v_1(s)\|_\infty \|\psi(s)\|_2 \right\} ds
\end{aligned}$$

como tenemos que  $\|\psi\|_2 \leq ct \|\psi\|_{D_1}$ ,  $\|\partial_x \psi\|_2 \leq ct \|\psi\|_{D_1}$  y las cotas para  $\|v_1(s)\|_\infty$  y  $\|\partial_x v_1(s)\|_\infty$ , aplicando el lema de Gronwall, deducimos que

$$\|\psi(t)\|_{D_1} < \infty \quad \forall t < \infty$$

Como hemos probado que

$$\|v_1\|_{W^{1,\infty}} < \infty \quad \forall t < \infty$$

$$\|E\|_{W^{1,\infty}} < \infty \quad \forall t < \infty$$

$$\|\psi\|_{D_1} < \infty \quad \forall t < \infty$$

hemos probado existencia global para las ecuaciones de Maxwell-Dirac con carga finita y no nula en el gauge en que  $V_0 = 0$ .

#### V. 5.- EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES DE KLEIN-GORDON-MAXWELL CON CARGA NO NULA Y FINITA.

En el párrafo III. 1 teníamos las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell. En el gauge en el que  $V_0 = 0$ , se escriben así:

$$(\partial_\mu + i g v_\mu)(\partial^\mu + i g v^\mu) \phi = -m^2 \phi \quad \text{v.5,1}$$

$$\partial_t E = g j_1 = g i (\phi^* (\partial_t + i g V_1) \phi - c.c.)$$

$$\partial_x E = g j_0 = g i (\phi^* (\partial_x + i g V_1) \phi - c.c.) \quad \text{V.5,1}$$

$$\partial_t V_1 = E, \quad V_0 = 0$$

En forma integral estas ecuaciones nos quedan:

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} = K(t-t_0) \begin{pmatrix} \phi(x,0) \\ \dot{\phi}(x,0) \end{pmatrix} + g \int_{t_0}^t K(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ i V_1 (\partial_x + i g V_1) \phi \end{pmatrix} ds$$

$$E(x,t) = g \int_{-\infty}^x j_0(t,0) d\gamma + g \int_{t_0}^t j_0(x,s) ds \quad \text{V.5,2}$$

$$V_1(x,t) = V_1(x,0) + \int_{t_0}^t j_0(x,s) ds$$

Donde

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos tA & A^{-1} \sin tA \\ -A \sin tA & \cos tA \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el párrafo V. 3 nos plantearemos el problema de Cauchy para estas ecuaciones en los espacios

$$\phi \in D,$$

$$\dot{\phi} \in L^2$$

$$E \in L^\infty$$

$$V_1 \in L^\infty$$

Tomaremos datos iniciales de tal forma que la carga total sea finita y no nula.

Vamos a demostrar existencia local.

El propagador  $K(t)$  es fuertemente continuo en  $D$ , y la identidad, que es el operador que corresponde a las ecuaciones para

$E$  y  $V_1$ , también lo es. Para probar existencia local hemos de ver que los términos no lineales son localmente lipschitzianos.

Tenemos que los términos de interacción son cúbicos en ellos

intervienen  $V_\mu$ ;  $\partial_\mu \phi = (\partial_\mu + i g V_\mu) \phi$ .

Veamos cómo se comprueba el carácter lipschiciano.

Tomemos el término  $V^\mu \partial_\mu \phi = V^\mu (\partial_\mu \phi + i g V_\mu \phi)$ .

Tenemos:

$$\begin{aligned}
 \| V_\mu \partial^\mu \phi - \tilde{V}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} \|_2 &\leq \| (V_\mu - \tilde{V}_\mu) \partial^\mu \phi \|_2 + \| \tilde{V}_\mu (\partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi}) \|_2 \leq \\
 &\leq \| V_\mu \|_\infty \| (\partial^\mu + i g V^\mu) \phi - (\partial^\mu + i g \tilde{V}^\mu) \tilde{\phi} \|_2 + \| \partial^\mu \phi \|_2 \| V_\mu - \tilde{V}_\mu \|_\infty \leq \\
 &\leq \| V_\mu \|_\infty \{ \| \partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi} \|_2 + \| i g V^\mu \phi - i g \tilde{V}^\mu \tilde{\phi} \|_2 + \quad \text{V.5,3} \\
 &+ \{ \| \partial_\mu \phi \|_2 + c_1 \| V_\mu \|_\infty^{1/2} (\| \phi \|_2 + \| \partial_\mu \phi \|_2) + \| V_\mu \|_\infty \| \phi \|_2 \} \| V_\mu - \tilde{V}_\mu \|_\infty \leq \\
 &\leq \| V_\mu \|_\infty \| \partial^\mu \phi - \partial^\mu \tilde{\phi} \|_2 + |g| \| V_\mu \|_\infty \{ \| \phi \|_2 \| V_\mu - \tilde{V}_\mu \|_\infty + \| V_\mu \|_\infty \| \phi - \tilde{\phi} \|_2 \} + \\
 &+ \{ \| \partial_\mu \phi \|_2 + \| V_\mu \|_\infty^{1/2} (\| \phi \|_2 + \| \partial_\mu \phi \|_2) + \| V_\mu \|_\infty \| \phi \|_2 \} \| V_\mu - \tilde{V}_\mu \|_\infty
 \end{aligned}$$

que es localmente lipschiciano ya que

$$\| f \|_2 \leq c_1 \| \phi \|_{b_1}, \quad \| \partial_x f \|_2 \leq c_2 \| \phi \|_{b_1}$$

Así pues, el término no lineal de la ecuación para  $\phi \text{ y } \dot{\phi}$  es localmente lipschiciano

Analicemos ahora la ecuación

$$\partial_t E = S j_1$$

Si intentamos ver que el término

$$j_1 = i (f^* (\partial_t + i g V_t) \phi - c.c.)$$

es lipschiciano, tendríamos que calcular

$$\| j_1' - \tilde{j}_1' \|_\infty$$

Como de  $\partial_t \phi$  sólo sabemos que  $\in L^2$ , no podemos definir su norma infinito y no podemos demostrar que ese término es lipschiciano.

Sin embargo podemos demostrar existencia local para  $E$  usando la ecuación

$$\partial_x E = s j_0$$

En forma integral nos dice que

$$E = s \int_{-\infty}^x i (\phi^* \partial_t \phi - c.c.) (\gamma, t) d\gamma$$

Siempre que  $\phi \text{ y } \dot{\phi} \in a D_1 \text{ y } L^2$ ,  $\phi \text{ y } \dot{\phi}$  pertenece a  $L^2$  y entonces  $E \in L^\infty$ , ya que

$$\|E\|_\infty \leq s \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi^* \dot{\phi} + \dot{\phi}^* \phi) d\gamma$$

Veamos, por último, la ecuación para  $V_1$ .

Tenemos

$$\partial_t V_1 = E$$

Tomando  $\| \cdot \|_\infty$ , del término no lineal, nos queda

$$\|E - \tilde{E}\|_\infty$$

que ya es lipschitziano.

Así pues, tenemos probada existencia y unicidad locales para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell en el caso en que los datos iniciales tienen carga finita y no nula.

Veamos qué sucede cuando intentamos demostrar existencia global.

Vamos a ver que no podemos extender la estimación a priori que obtuvimos en el capítulo III, párrafo III.3, a partir de la ley de conservación de la energía.

Teníamos (III.3,12)

$$\partial_t (u u^* + v v^* + \frac{1}{4\pi} E^2 + 2\phi \phi^*) + \partial_x (u u^* - v v^*) = 0$$

Puesto que ahora la carga total no es cero, tenemos que  $E$

no pertenece a  $L^2$ , al integrar entre  $-\infty$  y  $+\infty$  la ley de conservación no obtenemos ninguna cota sobre la  $\|u\|_2, \|v\|_2, \|\phi\|_2$  como las que obteníamos en el apartado III.3 en que sí podíamos, por ser la carga total cero, integrar entre  $-\infty$  y  $+\infty$  la ecuación de continuidad de la energía-momento.

Al carecer de estimaciones sobre  $\|\phi\|_2, \|D_0\phi\|_2, \|D_0\phi\|_2$ , la aplicación del lema de Gronwall a las estimaciones directas obtenidas de las representaciones integrales para  $\phi, \dot{\phi}$  y para  $E, V_1$  nos da exponentes de un grado suficientemente alto para que el lema de Gronwall no nos dé una acotación para todo  $t$ .

#### V.6.- COMENTARIOS:

a) La demostración dada en el capítulo II para las ecuaciones de Maxwell-Dirac, que hemos visto que sólo es válida para  $\Psi \equiv 0$ , es perfectamente válida en general para las ecuaciones

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = -g V_\mu \gamma^\mu \Psi$$

V.6,1

$$(\partial_{00} - \partial_{ii})V^\mu = g \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

Sin ninguna condición de gauge, pero estas no son las ecuaciones de Maxwell-Dirac.

b) En el caso de que la masa sea cero en las ecuaciones de Maxwell-Dirac, en cuanto a las densidades de carga y de corriente, el campo de Dirac se comporta como si estuviera libre. Es al introducir la masa cuando estas cantidades dejan de comportarse como libres. Esto justifica también el uso de "mass perturbation theory" (Ref. 17).

c) Las ecuaciones de Maxwell-Dirac (o Klein-Gordon-Maxwell) no son un puro problema de Cauchy debido a las dos ecuaciones para  $E$

$$\partial_t E = g j_i$$

$$\partial_x E = g j_0$$

Una consecuencia de esto es que aunque no se pueda demostrar

el carácter lipschitziano de la fuente  $j_0$  para  $E$ , podemos demostrar existencia local viendo que la representación integral

$$E = \int_{-\infty}^x j_0(x, t) dt$$

tiene sentido debido a los espacios en los que hemos definido los campos que son fuente del campo electromagnético.

Este hecho lo hemos empleado tanto en Maxwell-Dirac para comprobar que  $\| \partial_x E \|_{\infty}$  era finita mientras lo fuera  $\| \psi \|_{D_1}$ , como en Klein-Gordon-Maxwell para comprobar que  $\| E \|_{\infty}$  era finitamentras lo fueran  $\| \phi \|_{D_1}$  y  $\| \dot{\phi} \|_{D_2}$ .

d) Puede tener sentido preguntarse por la existencia local y global para datos iniciales no localizados, ya que este tipo de funciones eran las que obteníamos al buscar soluciones estacionarias; y ya tenemos, con estas soluciones estacionarias, un ejemplo de existencia global.

El espacio donde hay que plantearse el problema de Cauchy es en  $L^{\infty}$  para los campos fuente. Como, con datos iniciales no localizados, el campo  $E$  no va a pertenecer a  $L^{\infty}$  y va a tener, a lo más, un crecimiento lineal en  $x$ ,  $E \propto |x| \cdot \| j_0 \|_{\infty}$  se emplearía para  $E$  la norma  $\| \cdot \|_{\omega, \mu} = \| e^{-\mu|x|} \cdot \cdot \|_{\infty}$  y esa misma para  $V_1$ .

Al comprobar la condición de Lipschitz en los términos de interacción correspondientes a la ecuación de los campos fuente, debido a la no acotación en  $x$  de  $V_1$ , si usamos  $\| \cdot \|_{\infty}$  para los campos fuente, no se obtiene una condición de Lipschitz.

Para poder obtenerla, hemos de tomar también la norma  $\| \cdot \|_{\omega, \mu}$  para los campos fuente  $\psi$  ó  $\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi$ .

Los operadores  $D(t)$  y  $K(t)$  son fuertemente continuos en  $L^{\omega, \mu}$  (Ref. 11) y tenemos existencia local para Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell.

La existencia global para Maxwell-Dirac nos la da trivialmente la cota a priori sobre la  $\| j_0 \|_{\infty}$ .

C A P I T U L O VI

C O N C L U S I O N E S

CAPITULO VI

C O N C L U S I O N E S .

Los resultados más interesantes de este trabajo en el que estudiamos en 1+1 dimensiones algunas ecuaciones de interés en física, podríamos resumirlos quizás en estas conclusiones y comentarios finales.

a) Desarrollamos un método de obtener cotas a priori en la  $\|\psi\|_{\infty}$  siendo  $\psi$  un espinor, siempre que la estructura algebraica de los acoplos sea de la forma  $\int \mu \gamma^\mu \psi$ . Esta cota "a priori" permiten obtener con facilidad resultados de existencia global. Obtenemos existencia global para varias ecuaciones con significado físico. En varios casos obtenemos demostraciones más cortas y sencillas o sin restricciones sobre el tamaño de los datos iniciales.

b) Demostramos existencia global para las ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell con carga total nula. La pieza clave de la demostración es el poder obtener una cota a priori basada en la conservación de la energía.

c) Al estudiar soluciones estacionarias para Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell encontramos soluciones estacionarias no localizadas. Pero si comparamos las soluciones correspondientes a masa nula y a masa no nula, vemos que la masa actúa como perturbación produciendo variaciones integrables en la carga total. Esto nos sugiere la definición de una carga "renormalizada" y puede justificar el estudio de desarrollos en series de potencias de la masa.

Estas cargas renormalizadas, en el caso de Maxwell-Dirac, las tenemos tanto positivas como negativas.

d) Nos encontramos con dos hechos:

1º.- Las soluciones en interacción no tienden en absoluto a

soluciones libres cuando  $t \rightarrow \infty$ .

2º.- En el caso de las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa, que es exactamente soluble, la carga y corriente del campo de Dirac se comportan como libres, mientras que el campo electromagnético es el asociado a esas fuente externas.

Al introducir la masa, la carga y corriente ya no son libres e interacciona el campo electromagnético con ellas. Las fuentes del campo electromagnético ya no son ni "libres" ni "externas".

Esto reafirma más la viabilidad de desarrollos en potencias de la masa y no en potencias de la constante de acoplo (carga).

e) Se comprueba que los espacios escalados en energía usados hasta ahora para el estudio del problema de valor inicial para las ecuaciones de Maxwell-Dirac (o Klein-Gordon-Maxwell) permiten únicamente la existencia de soluciones con carga total nula.

En el caso de Klein-Gordon-Maxwell, estas soluciones tienen sentido; pues la densidad de carga no es definida positiva.

En el caso de Maxwell-Dirac, debido a ser definida positiva la densidad de carga, la única solución de este tipo es la trivial, idénticamente nula para el campo de Dirac, y libre para el campo electromagnético.

f) Debido a las ecuaciones

$$\partial_t E = s j_1$$

$$\partial_x E = s j_0$$

los problemas en los que aparecen ecuaciones de Maxwell, no son problemas puros de Cauchy, ya que los datos iniciales para  $E$  están determinados por los de los campos fuente.

Este hecho nos resulta de utilidad, primero para ver en qué espacios podemos definir el problema de Cauchy para datos iniciales con carga finita no nula, y después para demostrar existencia local en Maxwell-Dirac y Klein-Gordon-Maxwell.

g) Definimos espacios adecuados para tratar el problema de Cauchy con datos iniciales de carga total finita y no nula.

En el caso de Maxwell-Dirac, demostramos existencia local y

global de soluciones.

En el caso de Klein-Gordon-Maxwell, sólo podemos demostrar existencia local.

Hacemos también un comentario sobre el caso de datos iniciales no localizados (como las soluciones estacionarias que hemos obtenido). En Maxwell-Dirac, seguimos conservando existencia local y global.

---

APENDICES

APENDICE I

TECNICAS DE MECANICA ANALITICA APLICADAS AL ESTUDIO DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC.

A.I. 1.- TEORIA CANONICA DE PERTURBACIONES

En este apéndice vamos a estudiar las ecuaciones diferenciales que nos dan soluciones estacionarias para Maxwell-Dirac.

(Ec. IV.3,1)

$$\begin{aligned}
 u_x &= (1-k) v \\
 v_x &= (1+k) u \\
 k_{xx} &= u^2 + v^2
 \end{aligned}$$

A.I.1,1

con la integral primera

$$\frac{1}{2} k_x^2 = k(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2) + cte$$

Podemos hacer el cambio de variable sugerido por los comportamientos asintóticos de  $u$  y  $v$

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{a} \cos\left(\frac{h}{2}\right) \\
 v &= \sqrt{a} \sin\left(\frac{h}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones A.I.1,1 nos quedan:

$$\begin{aligned}
 h_x &= 2(k + \cosh h) \\
 a_x &= 2a \operatorname{sen} h \\
 k_{xx} &= a
 \end{aligned}$$

A.I.1,2

Y la integral primera, así:

$$-\frac{1}{2} k_x^2 + a(k + \cosh h) = cte$$

Estas ecuaciones proceden del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} k_x^2 + a k - \frac{a}{2} h_x + a \cdot \cosh h$$

El hamiltoniano correspondiente es:

$$H = \frac{1}{2} P_k^2 + 2 P_k k + 2 P_h \cosh h \quad \text{A.I.1,3}$$

donde  $P_k \equiv k_x$  y  $P_h \equiv -\frac{q}{c}$  son los momentos conjugados de  $k$  y  $h$  respectivamente.

El hamiltoniano  $H$  (A.I.1,3) es adecuado para aplicar la teoría canónica de perturbaciones, tal como aparece en el Courant and Hilbert, vol. 2, pág. 130. (Ref. 13).

Podemos descomponer  $H$  en suma de dos términos:

$$H = H_1 + H_2$$

con

$$H_1 = \frac{1}{2} P_k^2 + 2 P_k k$$

$$H_2 = 2 P_h \cosh h$$

y tratar  $H_2$  como perturbación; ya que el hamiltoniano  $H_1$  es exactamente soluble. Además, las soluciones de  $H_1$  son exactamente las soluciones estacionarias para las ecuaciones de Maxwell-Dirac sin masa.

Planteando la ecuación de Hamilton-Jacobi para  $H_1$ , se puede obtener una solución completa de ésta por separación de variables y, por lo tanto, resolver exactamente las ecuaciones de Hamilton asociadas a  $H_1$ .

Las ecuaciones de Hamilton asociadas a  $H_1$  son:

$$\dot{h} = 2 k$$

$$\dot{P}_k = 0$$

$$\dot{k} = P_k$$

$$\dot{P}_k = -2 P_k$$

A.I.1,4

Tenemos que el hamiltoniano es constante

$$H_1 = \frac{1}{2} P_k^2 + 2 P_k k = E, \text{ etc.}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi reducida para  $H_1$  es:

$$\frac{1}{2} \phi_k^2 + 2 \phi_h k = E$$

A.I.1,5

donde  $\phi$  es la acción reducida y  $\phi_h$  y  $\phi_k$  representan las derivadas parciales de  $\phi$  respecto a  $h$  y a  $k$  respectivamente.

Una solución completa para la ecuación de Hamilton-Jacobi reducida es:

$$\phi = a \cdot h - \frac{\sqrt{2}}{3a} (E - 2ak)^{3/2} + ct$$

y la correspondiente acción  $S'$

$$S' = a \cdot h - \frac{\sqrt{2}}{3a} (E - 2ak)^{3/2} - Ex + ct$$

A.I.1,6

donde  $E$  es el valor constante del hamiltoniano  $H_1$ , y  $a$  es una constante.

Al tener una solución completa para la ecuación de Hamilton-Jacobi, podemos asegurar que

$$\frac{\partial S'}{\partial a} = \beta_a$$

sin constante

$$\frac{\partial S'}{\partial E} = \beta_E$$

Calculando explícitamente  $\frac{\partial S'}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial S'}{\partial E}$ , obtenemos un par de ecuaciones algebraicas, de las cuales, a su vez, se obtienen  $k$  y  $h$  en función de las constantes  $E, a, \beta_E, \beta_a$  y de la variable  $x$ . El resultado es:

$$k = -ax^2 - 2\beta_E ax + \frac{E}{2a} - a\beta_E^2$$

A.I.1,7

$$h = -2a \frac{x^3}{3} - 2\beta_E ax^2 + 2\left(\frac{E}{2a} - a\beta_E^2\right)x + \frac{\beta_E E}{a} - \frac{2}{3}a\beta_E^3 + \beta_a$$

Y usando que  $P_k = \frac{\partial S'}{\partial k}$ ,  $P_h = \frac{\partial S'}{\partial h}$  obtenemos:

$$P_h = a$$

$$P_k = -2ax - 2\beta_E a$$

En el hamiltoniano total  $H = H_1 + H_2$ , hacemos la transformación de contacto generada por  $S'$ .

Si el hamiltoniano fuera simplemente  $H_1$ , esta transformación de contacto nos pasaría a variables canónicas  $E, a, \beta_E, \beta_a$  y como ecuaciones de Hamilton para ellas,  $\dot{E} = 0, \dot{a} = 0, \dot{\beta}_E = 0, \dot{\beta}_a = 0$ ; es decir, que son constantes del movimiento.

Al tomar  $H_1 + H_2$  y hacer esta transformación canónica,  $E, a, \beta_E$  y  $\beta_a$  ya no son constantes, sino que obtenemos el hamiltoniano.

$$H_{\text{nuevo}} = H_1 + H_2 + \frac{\partial S'}{\partial t} = H_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_{\text{nuevo}} = 2 p_h \cos(h) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_{\text{nuevo}} = 2a \cos \left\{ -2a \frac{x^2}{2} - 2a \beta_E x^2 + (-2a \beta_E^2 + \frac{E}{a'}) x + \beta_E - 2a \frac{\beta_E^2}{2} + \frac{E \beta_E}{a'} \right\}$$

Las ecuaciones de Hamilton para  $a, E, \beta_E, \beta_E$  quedan:

$$\dot{\beta}_a = 2 \cos(h) - 2a \sin(h) \left[ -2 \frac{x^2}{2} - 2 \beta_E x^2 - (2 \beta_E^2 + \frac{E}{a'}) x - 2 \frac{\beta_E^2}{2} - \frac{\beta_E \cdot E}{a'} \right]$$

$$\dot{a} = 2a \sin(h)$$

$$\dot{\beta}_E = -2 \sin(h) [x + \beta_E]$$

$$\dot{E} = 2a \sin(h) \left[ -2ax^2 - 4a \beta_E x - 2a \beta_E^2 + \frac{E}{a'} \right]$$

Y tenemos la integral primera:

$$E + 2a \cos h = \text{cte}$$

Estas ecuaciones corresponden a la variación canónica de las constantes  $E, a, \beta_E$  y  $\beta_a$  cuando añadimos el hamiltoniano

$$H_2 = 2a \cos(h)$$

Para tratarla a máquina es conveniente hacer el cambio  $x^2 \rightarrow y = t$  pues siguen teniendo oscilaciones con  $x^2$ .

Estas ecuaciones son las que hemos empleado para el cálculo numérico de las figuras presentadas en el capítulo IV.

#### A.I. 2.- INTEGRALES DEL MOVIMIENTO

Tenemos el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} p_h^2 + k p_h + 2 \cos h p_h$$

A.I.2,1

que al no depender explícitamente de  $x$  es constante

Si se calcula una segunda integral primera, al ser un sistema de 2 grados de libertad, el sistema queda completamente resuelto. (Ver ref. 14, pág. 332).

Sean:

$$H(h, k, p_h, p_h) = E$$

Integral primera de la energía

y  $\phi(h, k, P_h, P_k) = C$

otra integral primera.

De  $H = E$  y  $\phi = C$ , podemos despejar

$$P_h = P_h(h, k, E, C)$$

$$P_k = P_k(h, k, E, C)$$

Entonces  $P_h dh + P_k dk$  es una diferencial exacta,  $d\phi$  y tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial C} = \text{cte}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial E} = \text{cte} + x$$

Son las otras dos integrales primeras que completan la resolución del sistema.

Para calcular otra integral primera, aplicamos los métodos de integración por series del capítulo XVI de la referencia 14.

A la integral primera obtenida de esta forma se la conoce con el nombre de integral adélfica.

Desarrollando en serie el  $\cosh h$ , podemos escribir:

$$H = \frac{1}{2} P_h^2 + 2k P_h + 2 P_k \left( 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \dots \right)$$

o sea

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n + \dots$$

con

$$H_1 = 2 P_h$$

$$H_2 = 2k P_h + \frac{1}{2} P_h^2$$

$$H_3 = 2 P_k \left( -\frac{h^2}{2!} \right)$$

$$\vdots$$

$$H_{2n} = 0$$

$$H_{2n+1} = 2 P_k (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

Para calcular una integral primera hemos de encontrar  $\phi$  tal que

$$(\phi, H) \equiv \left( \frac{\partial \phi}{\partial P_h} \cdot \frac{\partial H}{\partial k} + \frac{\partial \phi}{\partial P_k} \frac{\partial H}{\partial h} - \frac{\partial \phi}{\partial k} \frac{\partial H}{\partial P_h} - \frac{\partial \phi}{\partial h} \frac{\partial H}{\partial P_k} \right) = 0$$

Desarrollando en serie de potencias y agrupando todos los términos de igual grado en la variable canónica, tenemos:

$$(\phi, H) = (\phi_1, H_1) + \{(\phi_1, H_2) + (\phi_2, H_1)\} + \{(\phi_1, H_3) + (\phi_2, H_2) + (\phi_3, H_1)\} + \dots$$

Y haciendo cero cada uno de los sumandos, podemos ir obteniendo recursivamente  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$

$$(\phi_1, H_1) = 0 \Rightarrow \phi_1 = p_h$$

$$\begin{cases} (\phi_2, H_2) = 0 \\ (\phi_2, H_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_2 = 0$$

$$\begin{cases} (\phi_3, H_3) = 2 p_h (-1)^2 \frac{h^2}{2!} \\ (\phi_3, H_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (\phi_3, H_1) = -2 p_h h \Rightarrow \phi_3 = p_h \cdot \frac{h^2}{2}$$

Análogamente obtendríamos

$$\phi_4 = k \cdot p_h \frac{h^2}{2}$$

$$\phi_5 = -p_h \frac{h^3}{2} \left[ -\frac{h^2}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{p_k p_h}{4} + k^2 \right]$$

Esta sería la forma de obtener una segunda integral primera; pero en nuestro caso no nos resulta útil.

APENDICE II

EXISTENCIA LOCAL Y GLOBAL EN EL CASO DE DATOS INICIALES NO LOCALIZADOS

A.II. 1.- ECUACIONES DE MAXWELL-DIRAC

Como hemos dicho en el apartado d) del párrafo V. 6 tiene sentido plantearse el problema de Cauchy con datos iniciales no localizados.

La única dificultad se presenta en la comprobación de la condición Lipschitz.

El término de acoplo en M-D. (V,4,1) es:  $g v_{\mu} \gamma^{\mu} \psi$

Para comprobar la condición de Lipschitz, calculamos:

$$\begin{aligned} & \| v^{\mu} \gamma_{\mu} \psi - \tilde{v}^{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{\psi} \|_{\infty, \mu} = \| v_{\mu} \gamma^{\mu} \psi - \tilde{v}_{\mu} \gamma^{\mu} \tilde{\psi} \|_{\infty, \mu} \leq \\ & \leq \| v_{\mu} (\gamma^{\mu} \psi - \gamma^{\mu} \tilde{\psi}) \|_{\infty, \mu} + \| \gamma^{\mu} \tilde{\psi} (v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu}) \|_{\infty, \mu} \leq \\ & \leq \| v_{\mu} \|_{\infty, \mu} \| \psi - \tilde{\psi} \|_{\infty, \mu} + \| \tilde{\psi} \|_{\infty, \mu} \| v_{\mu} - \tilde{v}_{\mu} \|_{\infty, \mu} \end{aligned}$$

donde  $\| f \|_{\infty, \mu} = \| f \cdot e^{-\mu |x^1|} \|_{\infty}$

que es lipschiciano.

Si hubiéramos empleado la  $\| \cdot \|_{\infty}$  para  $\psi$ , no podríamos demostrar que el término  $v_{\mu} \gamma^{\mu} \psi$  era lipschiciano; ya que  $v_{\mu}$  no pertenece a  $L^{\infty}$ .

Lo mismo que obteníamos en el párrafo II. 3 una cota a priori sobre la  $\| \psi \|_{\infty}$ , podemos obtener una cota a priori sobre la  $\| \psi \|_{\infty, \mu}$ , y entonces, la demostración de existencia global es trivial.

A.II. 2.- ECUACIONES DE KLEIN-GORDON-MAXWELL

En este caso vamos a tener simplemente existencia local.

El término de interacción

$$v_\mu (\partial^\mu + i g v^\mu) \phi$$

es localmente lipschitziano cuando

$$v_i \in L^{\infty, \mu} \quad \partial_i \phi \in L^{\infty, \mu} \quad \partial_0 \phi \in L^{\infty, \mu}$$

y el término

$$j_1 = i (\phi^\dagger (\partial_i + i g v_i) \phi - c.c.)$$

también lo es; ya que ambos términos son, a lo sumo, cúbicos en las funciones  $v_i, \partial_i \phi, \partial_0 \phi$

La existencia global, en este caso, no podemos demostrarla.

---

REFERENCIAS

## REFERENCIAS

Como referencias de interés general para los capítulos II, III, V que tratan problemas abstractos de evolución temporal, podemos citar:

- 1.- M. Reed. Abstract non-linear wave equations. Springer-Verlag Lecture notes in Mathematics. Springer-Verlag 1976.
- 2.- Ecuaciones de onda no lineales: Técnicas matemáticas. Memoria presentada a la J.E.N. por el departamento de Física Teórica de la Facultad de Ciencias de la U.C.M.
- 3.- J.M. Chadam. Notas del curso dado en la Facultad de Ciencias Físicas de la U.C.M. Diciembre 1976.

Y todas las demás citadas en estos trabajos; en particular, Reed and Simon. Methods in modern Mathematical Physics Vol. 2. Acad. Press. New York 1975.

Referencias más particulares para los capítulos II, III y V son:

- 4.- I.E. Segal. Non linear Semigroups. Ann. of Math. (2) 78 (1963)
- 5.- J.M. Chadam. The Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension. Journal of Functional Analysis, 13 (1973).
- 6.- R.T. Glassey. On one dimensional coupled equations. Alexander von Humboldt Institute. D8 Munchen Thereseintra. 39 (Preprint).
- 7.- A. Salusti and A. Tesei. On a semigroup approach to quantum field theory. Nuovo Cimento A2 (1971).
- 8.- R.T. Glassey and J.M. Chadam. Properties of the solutions of the Cauchy Problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension. Proc. Am. Math. Soc. 43 (1974).
- 9.- J.M. Chadam. On the Cauchy problem for the coupled Maxwell-Dirac equations. J. Math. Phys. 43 (1972).

10.- V. Delgado. Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac and other non linear Dirac equations in one space dimension. Proc. Am. Math. Soc. 69 (1978).

11.- I. Díaz. Comunicación privada.

Referencias de interés para el Capítulo IV y para el Apéndice I son:

12.- Coddington and Levinson. Ordinary Differential Equations.

13.- Courant and Hilbert. Methods of Mathematical Physics.

14.- Whittaker and Watson. Analytical Dynamics.

15.- Eugen Merzbacher. Quantum Mechanics.

Para las cuestiones de "mass perturbation theory" a las que hacemos referencia en los capítulos IV y V podemos citar:

16.- J.H. Lovenstein and J.A. Swieca. Q.E.D. in two dimensions.

Annals of Physics 68 1 (1971).

17.- S. Coleman, R. Jackiw and L. Susskin. Charge confinement in the massive Schwinger model. Annals of Physics 93 (1975).

El modelo de Thirring viene resuelto por el método de difusión inversa en:

18.- A.V. Mijailov. J.E.P.T. Letters 23 (1976) pag. 320.

