

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada



\* 5 3 0 9 5 4 4 2 0 9 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

**EDPs no lineales originadas en  
plasmas de fusión  
y  
filtración en medios porosos**

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas  
**Juan Francisco Padiá Molina**  
Mayo 1995.

*A la memoria de mi hermano Jose*

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todos cuantos con su ayuda, comprensión, paciencia y entusiasmo han contribuido a que esta tesis fuese realidad.

En primer lugar, dar las gracias al Profesor J. Ildefonso Díaz, por haberme sugerido trabajar en este tipo de problemas y por su inestimable ayuda en la realización de los mismos.

Deseo también expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor J.M. Rakotoson por su ayuda y orientación en el estudio del primer modelo.

También dar mi agradecimiento a G. Galiano por las fructíferas discusiones que sobre los temas presentados hemos tenido.

Es ya bastante tiempo el que llevo en el Departamento de Matemática Aplicada. Tiempo suficiente para consolidar unas relaciones que considero satisfactorias. Quiero por ello dar las gracias a todos los miembros del Departamento por su grata acogida. Las gracias por las aportaciones que en lo que a "ciencia" se refiere he sido obsequiado. Especialmente, mi agradecimiento a todos los Becarios del departamento.

Es poco el tiempo que llevo formando parte del Departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S. de Arquitectura, sin embargo quiero dar las gracias a sus miembros y en especial al Profesor Alfonso Casal por su acogida.

Por último, y donde la matemática no es lo principal, me siento gozoso y enteramente agradecido a mis padres, hermanos y Carmen que con su cariño y comprensión, han sabido compartir conmigo la elaboración de este trabajo.

# Indice

Introducción.	i
<b>I Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.</b>	<b>3</b>
1 Introducción. Descripción del problema. . . . .	3
1.1 Plasmas de fusión con simetría axial: Tokamaks. . . . .	6
1.2 Formulación del problema bidimensional en el caso de Stellarators.	9
1.2.1 Coordenadas de flujo en el vacío. Coordenadas Boozer.	9
1.2.2 Promedios y órdenes de magnitud. . . . .	10
1.3 Un modelo con condición de corriente no nula para Stellarator: el problema $(P)$ . . . . .	15
2 Resultados técnicos preliminares. . . . .	19
2.1 Definición y propiedades del reordenamiento decreciente y rela- tivo. . . . .	20
2.2 Propiedades principales. . . . .	24
3 Una formulación equivalente como un problema no local: el problema $(P_*)$ . . . . .	29
4 Existencia de soluciones de los problemas $(P_*)$ y $(P)$ . . . . .	33
4.1 Un problema aproximado $(P_{*\epsilon})$ . . . . .	33
4.1.1 Método de Galerkin. Existencia de solución del prob- lema finito dimensional $(P_{*\epsilon,m})$ . . . . .	34
4.1.2 Estimaciones a priori de las soluciones de $(P_{*\epsilon,m})$ . . . . .	39
4.2 Paso al límite. Existencia de soluciones del problema $(P_{*\epsilon})$ . . . . .	39
4.3 Existencia de solución de $(P_*)$ y $(P)$ . . . . .	41
5 Propiedades cualitativas de la región ocupada por el plasma. . . . .	46
6 “Unicidad parcial” de soluciones. . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>
<b>II Soluciones BV de un problema de difusión no lineal.</b>	<b>65</b>
1 Introducción. . . . .	65
1.1 Formulación y modelos: motivaciones físicas. . . . .	66
1.2 Noción de soluciones BV. . . . .	69
2 Resultados Técnicos Preliminares. . . . .	71

---

2.1	Primeros resultados sobre medidas. . . . .	71
2.2	Los espacios $BV_t(Q)$ y $BV(0, T; L^1(\Omega))$ . . . . .	73
2.3	Algunas propiedades del espacio $BV_t(Q)$ . . . . .	78
3	Resultados de comparación y dependencia continua . . . . .	89
4	Existencia de soluciones BV. . . . .	102

**Bibliografía****123**

# Introducción.

En esta memoria abordamos dos problemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales originados en la teoría de plasmas de fusión termonuclear controlada mediante confinamiento magnético y en la teoría de la filtración en medios porosos. Se abordan, principalmente, la existencia de soluciones para el primer modelo y la unicidad para el segundo. En ambos casos se requieren técnicas propias de EDPs no lineales y resultados de teoría de la medida tales como los relacionados con el reordenamiento decreciente y relativo y con la teoría de funciones de variación acotada.

El desarrollo de ambos temas obedece a unas etapas similares. Comenzamos con una introducción en la cual se describe el modelo, su motivación física, se plantea el problema matemático y se presentan los resultados principales, contrastándolos con otros trabajos ya publicados. En segundo lugar se presentan algunos resultados ya clásicos en la literatura adaptándolos a nuestra situación particular. No obstante, algunos de los resultados que se muestran en las secciones sobre “resultados técnicos preliminares”, han sido motivados por el problema concreto que se pretende estudiar, siendo alguno de ellos de carácter general. La última de las etapas consiste en desarrollar y obtener los objetivos propuestos para cada problema. Cada capítulo se cierra con una bibliografía.

La primera parte de esta memoria se dedica a un modelo originado en la física de plasmas de fusión nuclear. Se mencionan las posibles configuraciones de máquinas utilizadas para la fusión termonuclear controlada mediante confinamiento magnético. Un primer tipo se refiere a las máquinas Tokamaks, para la cual es abundante la bibliografía que se ocupa de su estudio tanto desde un punto de vista físico (Miyamoto [Mi87]), como matemático (Temam [T78], Mossino [M82], Blum [Bl89]), etc. El segundo tipo de configuración lo determina las máquinas de tipo Stellarators, de estudio reciente (véase Díaz [D92], Padial [P92], Díaz-Rakotoson [DR93, DR94], sin olvidar la clásica referencia de Hender y Carreras [HC84]). El objeto de este primer capítulo, es el estudio de la existencia de soluciones del problema inducido por una configuración de tipo Stellarator con condición de corriente no nula en el interior de la región que encierra cada superficie magnética. Tras obtener unas propiedades cualitativas de las soluciones del problema planteado, se pasa a estudiar la unicidad de soluciones, esta vez para el caso de corriente nula. Planteamos el problema que se aborda en este primer

capítulo:

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de frontera regular en  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $F_v > 0$ ,  $a, b \in L^1(\Omega)$  siendo  $a > 0$ ,  $b > 0$  en  $\Omega$ , se trata de encontrar dos funciones,  $u$  definida de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  y  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tales que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u = aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) & \text{en } \Omega \\ u - \gamma \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + bp'(u)]dx = j(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}) & \text{c.p.t } t \in [\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u] \end{cases}$$

siendo habitual tomar  $p(t) := \frac{\lambda}{2}(t_+)^2$ , con  $\lambda > 0$ ; para la presión y  $j \in \mathcal{C}^1$  representando la corriente que circula en la región que envuelve cada superficie magnética (cantidad que viene dada por la integral que aparece arriba). Llamando  $V(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^\infty(\Omega), v|_{\partial\Omega} \leq 0\}$  obtenemos el siguiente resultado de existencia.

**Teorema 1.1.** *Sea  $\inf |a| > 0$  y  $\gamma \leq 0$ . Entonces existe  $\Lambda > 0$  tal que si  $\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \eta < \Lambda$ , existe  $(u, F)$  con  $u \in V(\Omega)$  y  $F \in W^{1,\infty}([\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u])$  solución de  $(\mathcal{P})$ . Además  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$  y  $F$  queda unívocamente determinada por  $u$ .*

Inspirados en [D92, DR93, DR94], gracias a la noción de reordenamiento relativo y la condición dada por la familia de integrales que aparece en la definición de  $(\mathcal{P})$ , se formula un nuevo problema  $(\mathcal{P}_*)$  de naturaleza no local donde se elimina la incógnita  $F$ , al quedar determinada por  $u$  (siempre bajo condiciones adicionales). El nuevo problema  $(\mathcal{P}_*)$  es el de encontrar  $u$ , tal que

$$(\mathcal{P}_*) \begin{cases} -\Delta u = aF_u(x) + p'(u(x))[b(x) - b_{*u}(|u > u(x)|)] \\ \quad + j'_t(u_{*+}(x), u_{*+}(0))u'_{*+}(|u > u(x)|) & \text{en } \Omega \\ u - \gamma \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

siendo

$$F_u(x) := \left[ F_v^2 - 2 \int_{|u>0}^{|u>u_+(x)|} [p(u_*(s))]'_b b_{*u}(s) ds + 2 \int_{|u>0}^{|u>u_+(x)|} j'_t(u_{*+}(s), u_{*+}(0))(u'_{*+}(s))^2 ds \right]_+^{1/2}$$

con  $u_*$  reordenamiento decreciente de  $u$ ,  $b_{*u}$  reordenamiento relativo de  $b$  con respecto de  $u$  y  $j'_t := \frac{\partial j}{\partial t}$ . Antes de abordar el teorema de existencia de soluciones de  $(\mathcal{P}_*)$  se dan condiciones para que toda solución  $u$  de  $(\mathcal{P}_*)$  genere una solución  $(u, F)$  de  $(\mathcal{P})$ . A continuación se resuelve  $(\mathcal{P}_*)$ . La dificultad que aparece al estudiar este problema, radica en que, en un principio, no se puede controlar la derivada de  $u_{*+}$  respecto de  $s$ . Para evitar esta dificultad, para cada  $\epsilon > 0$  fijo, se eligen las funciones de truncatura  $h_\epsilon(t) = \frac{t^2}{1+\epsilon|t|^2}$ ,  $\xi_\epsilon(t) = \frac{t}{1+\epsilon|t|}$ . Se considera el nuevo problema

$$(\mathcal{P}_{*\epsilon}) \begin{cases} -\Delta u^\epsilon = aF_\epsilon(x, u^\epsilon, b_{*u^\epsilon}) + p'(u^\epsilon(x))[b(x) - b_{*u^\epsilon}(|u^\epsilon > u^\epsilon(x)|)] \\ \quad + j'_t(u_{*+}^\epsilon(x), u_{*+}^\epsilon(0))\xi_\epsilon(u_{*+}^\epsilon)'(|u^\epsilon > u^\epsilon(x)|) & \text{en } \Omega \\ u^\epsilon - \gamma \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

con

$$F_\epsilon(x, v, b_{**}) := \left[ F_v^2 - 2 \int_{|v|>0}^{|v>v_+(x)|} [p(v_*(s))] b_{**}(|v|>s) ds \right. \\ \left. + 2 \int_{|v|>0}^{|v>v_+(x)|} j'_t(v_{**}(s), v_{**}(0)) h_\epsilon(v'_{**}(s)) ds \right]_+^{\frac{1}{2}}$$

Por último, se encuentra solución a los problemas  $(P_{**\epsilon})$  mediante un método de tipo Galerkin. Las estimaciones a priori y los resultados que garantizan las buenas convergencias para las sucesiones  $(u_{**\epsilon}^c)$ ,  $(u_{**\epsilon}^c)'$  y  $(b_{**\epsilon}^c)$  nos permiten obtener una solución de  $(P_{**})$ , y por la equivalencia entre  $(P)$  y  $(P_{**})$  (bajo adecuadas condiciones), se obtiene la existencia de solución de  $(P)$ .

Tras mostrar algunas propiedades cualitativas de la región ocupada por el plasma, tratamos la unicidad de soluciones para el problema  $(P)$  en el supuesto  $j = 0$ . Utilizando una técnica empleada ya por Puel en [Pu77], se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 6.1.** *Sea  $(u, F)$  una solución de  $(P)$  con  $j = 0$  y  $f := F$ . Supongamos  $f f'$  Lipschitz sobre  $\mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$  tal que*

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega)} < C \frac{F_v}{\sqrt{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}}$$

para alguna constante  $C$  positiva y  $\lambda < \lambda_2$  siendo  $\lambda_2$  el segundo autovalor del problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda c(x)w & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y  $c(x) = \tilde{C} \|b\|_{L^\infty(\Omega)} a(x) + b(x) + \frac{K}{\lambda}$  con  $\tilde{C} = \frac{\hat{M}}{f(\hat{M})}$ ,  $\hat{M} = \tilde{C} \|a\|_{L^2(\Omega)}$  y  $\tilde{C}$  constante sólo dependiente de  $F_v, \lambda, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$  y la constante de Poincaré de  $\Omega$ . Entonces,  $u$  es la única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a f(u) + f(u) f'(u) + p'(u) b & \text{en } \Omega \\ u - \gamma \in H_0^1 \cap W^{2,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < +\infty \end{cases}$$

con  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ .

Una lectura detenida del teorema anterior, muestra que si  $(u, F)$  y  $(v, F)$  son dos soluciones de  $(P)$ , entonces  $u = v$ . Por otra parte, al probar la equivalencia entre  $(P)$  y  $(P_{**})$  se obtiene que si  $(u, F)$  y  $(u, \hat{F})$  son dos soluciones de  $(P)$ , entonces  $F = \hat{F}$ . Sin embargo queda abierto el problema de si existen o no  $(u, F), (v, \hat{F})$  con  $u \neq v$  y  $F \neq \hat{F}$  soluciones de  $(P)$ , de ahí el hablar de unicidad parcial.

A tenor del trabajo realizado, se abren nuevas líneas de trabajo tales como la implementación numérica del método de Galerkin utilizado, la unicidad parcial si  $j \neq 0$  e incluso la unicidad entendida en su sentido más general.

La segunda parte de esta memoria estudia el problema de Cauchy - Dirichlet asociado a la ecuación parabólica cuasilineal

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} - \text{div}\{|\nabla u - k(b(u))e|^{p-2}(\nabla u - k(b(u))e)\} + g(x, u) = f(t, x)$$

obtenida inicialmente a partir de la ecuación de continuidad (conservación de la masa) y ley de Darcy no lineal de un fluido incompresible que fluye en un medio poroso.

El resultado principal concierne a la comparación de soluciones cuando la derivada temporal de  $b(u)$  es meramente una medida de Radon acotada. También se muestra, mediante un proceso de regularización parabólica, la existencia de soluciones verificando tal propiedad.

El problema queda definido en los siguientes términos:

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera regular  $\partial\Omega$  y  $T \in \mathbb{R}^+$ . Por  $Q$  denotamos el dominio parabólico  $]0, T[ \times \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$  y por  $\Sigma := ]0, T[ \times \partial\Omega$ .

Consideramos el problema

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} \frac{\partial b(u)}{\partial t} - \operatorname{div} \phi(\nabla u - k(b(u))e)g(x, u) = f(t, x) & \text{en } Q \\ u(t, x) = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

donde  $\phi(\xi) := |\xi|^{p-2}\xi \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $e \in \mathbb{R}^N$  vector unitario,  $b$  es continua no decreciente y  $k, g, f$  y  $u_0$  verifican hipótesis adicionales.

La primera cuestión que nos planteamos es la de estudiar la unicidad de soluciones de este problema con el especial interés en el caso  $p \neq 2$ . Díaz y de Thelin prueban en [DT94], para este mismo problema, un resultado de comparación y dependencia continua de la solución respecto de los datos, con la hipótesis fundamental  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^1(Q)$ . Inspirados en Vol'pert y Hudjaev [V67, VHu69] y más recientemente en los trabajos de Jingxue [J89] - [J92b] nuestro objetivo es relajar la hipótesis  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^1(\Omega)$ . En esta memoria,  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  será una medida de Radon acotada en  $Q$ , clase de funciones que denotaremos por  $BV_t(Q)$  ( $:= \{w \in BV_t(Q) \text{ si } w \in L^1_{loc}(Q) \text{ y la derivada temporal en sentido de distribuciones es una medida de Radon acotada sobre } Q\}$ ). Con tan solo esta regularidad y la hipótesis adicional de que el conjunto de puntos donde  $u$  deja de ser aproximadamente continua tiene medida de Hausdorff  $N$ -dimensional cero, obtenemos el resultado de comparación donde la hipótesis fundamental ahora es

$$b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

siendo  $b_1^{-1}$  y  $b_2$  localmente lipschitcianas satisfaciendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  hipótesis adicionales. Nótese que  $\lambda_1 = 0$  fue tratado en [DT94] y que el caso de intrés actual es pues  $\lambda_1 \neq 0$ . La función  $k$  es continua, tal que  $k \cdot b$  es Holder continua de exponente  $\gamma \geq \frac{1}{p}$  si  $1 < p \leq 2$  y  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  si  $p > 2$ . Sobre  $g$  se supone la condición de monotonía o Lipschitcicidad de  $g \cdot b^{-1}$   $g(s_1) - g(s_2) \geq -C^*(b(s_1) - b(s_2))$  para alguna constante  $C^*$  positiva.

Se introduce primero la noción de solución débil del problema siguiendo [AL83] (Definición 1.1 del Capítulo II) para a continuación dar la noción de solución BV: *Se dirá que  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$  es una solución BV del problema  $(\mathcal{E})$  si es solución débil de  $(\mathcal{E})$  y además  $b(u) \in BV_t(Q)$  (Definición 1.2). Con esta noción de*

solución BV, se tiene

**Teorema 3.1** *Supongamos  $k$  y  $g$  verificando las condiciones anteriormente citadas,  $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$  con  $b_1^{-1}$  y  $b_2$  Lipschitz continuas en  $[-M, M]$  con constantes de Lipschitz  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente, y  $u_1$  y  $u_2$  soluciones BV de  $(\mathcal{E})$  para datos  $(u_{01}, f_1)$  y  $(u_{02}, f_2)$  y tomando valores en  $[-M, M]$ . Supongamos también que el conjunto de puntos de discontinuidad aproximada de  $u_1$  y  $u_2$  tiene medida de Hausdorff  $N$ -dimensional cero. Entonces, para cada  $t \in ]0, T[$  se tiene que*

$$\int_{\Omega} [b(u_1(t, x)) - b(u_2(t, x))]_+ dx \leq e^{C^*t} \left\{ \int_{\Omega} [b(u_{01}(t, x)) - b(u_{02}(t, x))]_+ dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{C^*s} [f_1(s, x) - f_2(s, x)]_+ dx ds \right\}.$$

A partir de este resultado se obtiene la dependencia continua y la unicidad de la solución. Utilizando el mismo tipo de técnicas, Gagneux y Madaune-Tort [GM92a, GM92b], Benilan y Gariepy [BG93a] estudian la unicidad de soluciones en la clase  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ , aunque siempre para el operador de Laplace. Recientemente, mediante técnicas relacionadas con soluciones de tipo Kruskov (diferentes a las aquí desarrolladas), inspiradas en Carrillo [C86], Gagneux y Madaune-Tort prueban la unicidad en [GM94] exigiendo menos regularidad a la función  $k \circ b$ : en [GM94] se pide  $b$  Hölder continua con  $b^{-1}$  continuamente derivable y  $k \circ b$  sólo necesita ser una función continua. No obstante la aplicabilidad de esta técnica para el caso  $p \neq 2$  (i.e., para el operador  $p$ -Laplaciano) no es clara y por otra parte la regularidad obtenida en esta memoria es de interés en sí misma.

Una vez concluido el estudio de la unicidad mediante un proceso de regularización parabólica se obtiene la existencia de soluciones BV del problema  $(\mathcal{E})$

**Teorema 4.1** *Sean  $b$ ,  $k$ ,  $g$ ,  $f$ , y  $u_0$  como antes. Supongamos además que  $f \in L^\infty(Q) \cap BV_t(Q)$  y  $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\phi(\nabla u_0 - k(b(u_0))e) \in (BV(\Omega))^N$ . Entonces existe una función  $u$  solución BV de  $(\mathcal{E})$ . Además  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ .*

Inspirados en Jingxue [J92a] y en Díaz, de Thelin [DT94], mostramos la existencia de una solución BV de  $(\mathcal{E})$ , ya que para aplicar el Teorema de comparación, necesitamos verificar que el conjunto de puntos de discontinuidad aproximada de  $u$  tiene medida Hausdorff  $N$ -dimensional nula. Para conseguir ésto, se necesitan hipótesis más restrictivas sobre  $k \circ b$ : la Lipschitz continuidad si  $1 < p < 2$  y el carácter afín si  $p > 2$ .

El estudio aquí realizado nos da un criterio para tener unicidad del problema  $(\mathcal{E})$  que modeliza la filtración de un fluido en un medio poroso. Sin embargo, como ejemplo, se muestra la aplicación de este resultado a otros modelos tales como el de obstáculo.

Como en el capítulo anterior, se sigue la misma estructura en el desarrollo del tema. Primero una introducción donde se define el modelo y sus motivaciones físicas. En segundo lugar, se dedica una sección a presentar los resultados técnicos que posteriormente se utilizarán. Por último en sucesivas secciones se exponen los resultados principales, en este caso el de la unicidad y existencia de soluciones.

Señalaremos, como una última observación, que en el caso de  $N = 1$ , es posible mostrar que toda solución BV de  $(\mathcal{E})$  verifica que el conjunto de puntos de discontinuidad aproximada mide cero respecto a la medida de Hausdorff 1-dimensional. Para ello se utiliza el Teorema de Sard y la caracterización de estos conjuntos de discontinuidades para funciones de variación acotada.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

.....

# Capítulo I

## Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

En este capítulo se presenta un estudio del problema elíptico

$$\begin{aligned} -\Delta u &= aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) && \text{en } \Omega \\ u - \gamma &\in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + bp'(u)] dx &= j(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}) && \text{c.p.t. } t \in [\inf_\Omega u, \sup_\Omega u] \end{aligned}$$

Este problema, surge del modelo de plasmas de fusión en Stellarators con condición de corriente no nula. La ecuación se obtiene a partir de las ecuaciones de la (MHD) mediante un determinado cambio de coordenadas (coordenadas Boozer) y promediando en una determinada variable.

Previa presentación de algunos resultados técnicos, se establece el resultado principal de este capítulo concerniente a la existencia de soluciones, para lo cual se utiliza un método de tipo Galerkin aplicado a un nuevo problema de carácter no local que involucra el reordenamiento decreciente de  $u$  y relativo de  $b$  respecto de  $u$ . La existencia de dicho problema no local implica la existencia de solución del problema de partida bajo determinadas hipótesis. Finalizamos con un resultado referente a la unicidad de soluciones.

### 1 Introducción. Descripción del problema.

Uno de los problemas más importantes en fusión termonuclear controlada, es la detección de las condiciones bajo las cuales un plasma puede ser confinado mediante un campo magnético sin que éste toque las paredes del reactor o cámara de fusión. Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio de un plasma (supuesto un fluido ideal a escala macroscópica) en presencia de un campo magnético son, de un lado las ecuaciones de Maxwell (MHD) y de otro la ecuación de equilibrio para el plasma entendido como un fluido ideal.

Las ecuaciones de Maxwell se expresan en la forma

#### 4I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x) \in \mathbb{R}^3$  es el campo magnético,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x) \in \mathbb{R}^3$  es la densidad de corriente eléctrica y  $\mu_0$  es el coeficiente de permeabilidad magnética que supondremos constante ( $\mu_0 = 1$ ).

La ecuación de equilibrio para el plasma se obtiene cuando las fuerzas debidas a la presión son iguales a las fuerzas magnéticas, es decir,

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

donde  $p = p(x) \in \mathbb{R}$  es la presión del plasma en el punto  $x$ ,  $\nabla p$  representa la densidad de fuerza debida a la presión y  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  la densidad de fuerza electromagnética. Las anteriores ecuaciones tienen lugar sobre la región  $\Omega_p \subset \mathbb{R}^3$  ocupada por el plasma.

De la ecuación (1.3), podemos deducir que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0. \quad (1.5)$$

Por tanto, en un plasma en equilibrio confinado magnéticamente, las líneas de campo y las líneas de corriente, descansan sobre *superficies isobaras* (de igual valor de presiones, i.e.,  $p = \text{constante}$ ). Estas superficies generadas por las líneas de campo, son llamadas *superficies magnéticas*. Supondremos, tal y como es usual, que esta familia de superficies permanecen anidadas en superficies toroidales y que quedan vendrán determinadas por la condición (1.4) (véase Kruskal - Kulsrud [KK158]).

Para llegar a una formulación adecuada, necesitamos dar unas condiciones de contorno. Al sistema (1.1) (1.2) (1.3) se le pueden asociar dos tipos de condiciones: una, suponiendo que la región ocupada por el plasma  $\Omega_p$  es conocida y que  $\partial\Omega_p$  es un conductor perfecto ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$  en  $\partial\Omega_p$ , con  $\mathbf{n}$  normal exterior a  $\partial\Omega_p$ ). Otra, más realista, supone el plasma aislado de las paredes perfectamente conductoras por una cámara de vacío. Aparece así  $\partial\Omega_p$  como una nueva incógnita del problema, quedando el sistema planteado en términos de un problema de frontera libre. Por definición, la superficie  $\partial\Omega_p$  es una superficie de presión constante, por lo que ha de verificarse

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_p. \quad (1.6)$$

(Se justifica gracias a (1.3) y por ser  $\nabla p$  normal a  $\partial\Omega_p$ ). Para nuestro estudio consideramos la segunda posibilidad que es el caso más realista (véase [D92]).

Al no conocer la frontera  $\partial\Omega_p$  debemos dar información complementaria que nos permita formular el problema de manera consistente. Para ello distinguimos una región regular abierta  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  con paredes perfectamente conductoras  $\partial\Omega$  (por ejemplo la

llamada “cámara de vacío”) y una región interior ocupada por el plasma  $\Omega_p \subset \Omega$  (desconocida) con frontera  $\partial\Omega_p$  que no toca las paredes  $\partial\Omega$ . Existirá también una región de vacío  $\Omega_v = \Omega - \overline{\Omega_p}$  que aísla el plasma (zona de vacío). El problema es hallar una  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B, J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y una región  $\Omega_p \subset \Omega$  de borde  $\partial\Omega_p$  tales que verifiquen (1.1), (1.2), (1.3) en  $\omega_p$ . Para ello contamos con que (1.1) y (1.2) se cumplen en  $\Omega_v$  para  $J = 0$  (la densidad de corriente es nula en la región de vacío) lo que nos permite plantear el problema en los siguientes términos:

Hallar  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B, J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\nabla p = J \times B \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (1.9)$$

en  $\Omega$  siendo

$$\Omega_v = \{x \in \Omega : J(x) = 0\}. \quad (1.10)$$

De la primera ecuación

$$\nabla p = 0 \quad \text{en } \Omega_v. \quad (1.11)$$

Por tanto,  $p$  es constante en la región de vacío  $\Omega_v$  y la función “presión” está definida salvo una constante. Eligiendo dicha constante de forma que sobre el borde de la zona ocupada por el plasma  $p$  se anule, tendríamos así definida la frontera libre  $\partial\Omega_p$ . Como hipótesis de contorno, se pide

$$n \cdot B = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (1.12)$$

Sin embargo, aún es necesaria una condición más, que va a expresar la cantidad total de corriente que circula en el plasma. Esta es una condición integral (como ya veremos) que depende del tipo de “máquina” en cuestión:

Para Tokamaks la cantidad de corriente es una constante positiva; y en el caso de Stellarators la corriente que circula en el interior que envuelve cada superficie magnética es nula.

Avanzando en el estudio de la modelización, es necesario considerar la “geometría” que el campo magnético genera. Cuando el campo magnético posee algún tipo de simetría, es posible obtener con mayor facilidad las superficies magnéticas. Aquí mostraremos dos posibles comportamientos (para más información, véase Miyamoto [Mi87]). El primero se refiere a cuando el campo magnético es invariante bajo rotaciones en torno a algún eje de simetría. Se dice entonces que el campo presenta una *simetría axial*: es el caso del Tokamak. El segundo caso, es cuando las líneas de campo se envuelven “casi” helicoidalmente en torno a una línea que denominaremos *eje magnético*. Con

## 6I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

la palabra “casi” queremos expresar que el radio de la hipotética hélice, no permanece constante. Este es el caso de los Stellarators.

En ambos casos el objetivo será llegar a un tipo de ecuación denominada de *Grad-Shafranov* (1960). En el primero, la simetría axial permite reducirnos a un problema bidimensional con facilidad, lo que favorece su estudio. Sin embargo la complejidad de forma del Stellarator impide llegar a este tipo de ecuación de manera directa. Se necesitará de un nuevo sistema de referencia (coordenadas Boozer) y admitir ciertos órdenes de magnitud de las componentes de la métrica para poder transformar el problema tridimensional de partida en un problema bidimensional, promediando en una determinada dirección. Además de la dificultad propia de la geometría del problema, una vez planteada en ambos casos la ecuación de tipo *Grad-Shafranov* se introduce un hecho propio de cada caso: en máquinas Tokamak, la corriente total que circula por el plasma es un dato conocido  $I > 0$ ; mientras que en el caso de máquinas Stellarators, en un marco ideal, se tiene que la cantidad de corriente que circula por el interior que encierra cada superficie magnética es nula. Sin embargo, motivado principalmente por los estudios sobre estabilidad de la configuración de equilibrio (véase [C91]), es de interés analizar el caso de Stellarators con una corriente no nula circulando en la región que envuelve cada superficie magnética. En particular, dicha corriente es conocida a priori y es una función  $j$  dependiente de cada nivel. En todos los casos, la condición requerida sobre la corriente que circula por el plasma se impone mediante una condición integral (véase (1.19) para Tokamak, (1.42) y (1.43) para Stellarator).

En los apartados de esta sección, nos proponemos mostrar brevemente el modelo y algunos resultados matemáticos para el

caso de plasmas de fusión con simetría axial: Tokamak (Subsección 1.1). Con más detalle, desarrollaremos como se obtiene la formulación del problema bidimensional para el caso de Stellarators, tanto con condición de corriente nula, propia de un marco ideal, o supuesto que aparecen corrientes conocidas circulando en el interior que cada superficie magnética limita, Subsección 1.2. Por último, estableceremos el problema objeto de estudio en esta memoria, Subsección 1.3, así como el plan de trabajo que hemos desarrollado en las secciones siguientes, adelantando también los resultados más relevantes.

### 1.1 Plasmas de fusión con simetría axial: Tokamaks.

En el sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \varphi, z)$  la hipótesis de simetría axial se traduce en suponer que el campo  $\mathbf{B}$  es independiente del ángulo toroidal  $\varphi$ . Si denotamos por  $\psi$  la superficie magnética, entonces se satisface la ecuación

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 \tag{1.13}$$

(las líneas de campo se envuelven en las superficies magnéticas dadas por  $\psi = \text{cte}$ ). Si expresamos  $\mathbf{B}$  en su forma covariante para el nuevo sistema de coordenadas y suponemos

que el sistema es independiente de  $\varphi$ , entonces las ecuaciones (1.8) y (1.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} B_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + B_z \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente podemos tomar

$$r B_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad r B_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.14)$$

La relación  $\nabla p \cdot \mathbf{B} = 0$  deducida de la ecuación de equilibrio (1.7) puede ser expresada con ayuda de (1.14) mediante

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

De acuerdo con esto,  $p$  es una función sólo de  $\psi$  (e.d.  $p = p(\psi)$ ).

Procediendo de igual modo para  $\nabla p \cdot \mathbf{J} = 0$  y  $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ , podemos escribir

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} = 0;$$

y así,  $r B_\varphi$  es función de  $\psi$  (e.d.  $r B_\varphi = f(\psi)$ ).

Introduciendo estos cálculos en (1.7) con  $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$ , obtenemos

$$\nabla p = \left[ \frac{1}{r} L \psi - \frac{1}{2\mu_0 r^2} \frac{\partial f^2}{\partial \psi} \right] \nabla \psi$$

o equivalentemente

$$L \psi = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{2\mu_0 r} \frac{\partial f^2}{\partial \psi} \quad (1.15)$$

en la región ocupada por el plasma siendo  $L$  un operador lineal dado por

$$L \psi = - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (1.16)$$

Este operador es uniformemente elíptico cuando el coeficiente de conductividad es positivo ( $\mu_0 > 0$ ). Conviene señalar que el término de la derecha de (1.15) es la componente toroidal de la densidad de corriente que circula en el plasma.

A la ecuación (1.15) se le llama *ecuación de Grad-Shafranov*. Esta ecuación tiene lugar para todo  $(r, z) \in \Omega_p$  con  $\Omega_p = \Omega_p \cap \Omega$  y  $\Omega$  sección poloidal de  $\Omega$ . Hemos reducido de esta forma el problema tridimensional a un problema bidimensional.

Sobre las condiciones de contorno, exigimos que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$  (1.12) que junto a (1.15) nos lleva a que

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} n_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} n_z = 0 \quad \text{en } \partial \Omega$$

## 8I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

con  $\mathbf{n} = (n_r, n_z)$  normal exterior a  $\partial\Omega$ . Lo anterior es equivalente a pedir que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

con  $\frac{\partial}{\partial\tau}$  derivada en la dirección tangente a  $\partial\Omega$ . Por tanto la condición de contorno será

$$\psi = \gamma \quad \text{en } \partial\Omega \quad (1.17)$$

y  $\gamma$  constante desconocida "a priori".

Justificamos anteriormente que  $p$  y  $f$  son funciones arbitrarias de  $\psi$ , además sucede que no pueden ser determinadas a partir de las ecuaciones de la MHD. Sin embargo, en la región ocupada por el plasma  $\Omega_p$  se ha comprobado experimentalmente una "ley constitutiva" o "ley de estado". Para la presión  $p$  es usual tomar

$$p(\psi) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\psi^2 & \text{si } \psi > 0 \\ 0 & \text{si } \psi \leq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

con  $\lambda > 0$  (véase [T78]).

En este modelo, desarrollado para máquinas Tokamak, la corriente total  $I_p$  que circula en el plasma es conocida y puede ser expresada mediante la integral

$$\int_{\Omega} \left\{ \lambda\psi_+ + \frac{1}{2\mu_0 r^2} \frac{\partial f^2}{\partial\psi} \right\} r dr d\theta = I_p. \quad (1.19)$$

El problema que se plantea es; por tanto, el de encontrar una función  $\psi$  (flujo poloidal) solución del problema elíptico (1.15), con condición de contorno (1.17) y verificando (1.19). En principio la ecuación (1.15) sólo es válida en la región ocupada por el plasma. Sin embargo, pedimos que (1.15) se verifique en todo  $\Omega$ . Esto es fácilmente implicado si  $p = 0 = f$  en  $\Omega_v$  (:= región de vacío) situación que se tiene gracias a las hipótesis sobre  $p$  y  $f$  y el hecho de  $\mathbf{J} = 0$  en  $\Omega_v$  o equivalentemente  $\psi \leq 0$  en  $\Omega_v$ . Problemas similares a éste han sido estudiados por varios autores, por ejemplo Temam en [T78] y Mossino en [M82] y también [MT]. Requiere especial mención la labor realizada por Blum en [Bl89], donde ha desarrollado un estudio detallado del problema, presentando resultados de existencia y regularidad así como códigos numéricos.

En particular, en [T77, T78], [M82] y [MT], se expresa el problema (1.15), (1.17) y (1.19) en coordenadas cartesianas además hacer la simplificación  $\mathcal{L} := \Delta$  (operador de Laplace) y  $f \equiv 0$  obteniéndose el problema elíptico no lineal de frontera libre

$$-\Delta\psi + \lambda G(\psi) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.20)$$

$$\psi = \gamma \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (1.21)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\ell = I_p > 0 \quad (1.22)$$

con  $\Gamma = \partial\Omega$ , frontera de  $\Omega$ ;  $\gamma$  constante desconocida "a priori",  $\psi \in H_c^1(\Omega)$  denotando por  $H_c^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = \text{constante sobre } \Gamma\}$ . La última ecuación se justifica integrando la primera y considerando el hecho de que  $I_p = \lambda \int_{\Omega} \psi_+ dV$ .

En [T77] se supone  $G(\sigma) = \sigma_+ := \max\{0, \sigma\}$  y se obtiene la existencia de soluciones del problema (1.20), (1.21) y (1.22) como punto crítico del funcional de energía

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx - I_p \psi(\Gamma) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (\psi_+)^2 dx \quad (1.23)$$

que minimizar  $E$  sobre el cerrado

$$K = \left\{ v \in H_c^1(\Omega) : \int_{\Omega} \psi_+ dx = \frac{I_p}{\lambda} \right\}.$$

Utilizando técnicas de reordenamiento, en [M82] se obtienen algunas estimaciones a priori y propiedades cualitativas sobre la región ocupada por el plasma. Otros supuestos sobre la función  $G$  pueden encontrarse en [T78, M82].

## 1.2 Formulación del problema bidimensional en el caso de Stellarators.

Se estudia aquí el caso de Stellarators, cuya geometría carece de simetría axial. En este caso, para obtener la ecuación de equilibrio tipo *Grad-Shafranov*, se desarrolla una nueva técnica. Primero se sigue un proceso mediante el cual se consigue una reducción de las ecuaciones de equilibrio de la magnetohidrodinámica (MHD) (1.7), (1.8) y (1.9) a ecuaciones que expresan el equilibrio para las cantidades promediadas y rápidamente oscilantes en el sentido toroidal. Para facilitar esto se introducen órdenes de magnitud para las distintas variables, sujetas a consideraciones físicas. De esta forma será obtenida una ecuación tipo *Grad-Shafranov*. Conseguimos así que el problema pase a depender únicamente de dos variables  $\rho$  y  $\theta$  y de cantidades promediadas. Sin embargo, todo este procedimiento requiere la elección de un apropiado sistema de coordenadas: las coordenadas de flujo en el vacío (coordenadas Boozer).

### 1.2.1 Coordenadas de flujo en el vacío. Coordenadas Boozer.

Con el fin de determinar las componentes de  $\mathbf{B}$  conviene sustituir el sistema estándar de coordenadas cilíndricas ("buenas" cuando existía simetría axial) por otro más apropiado a la geometría Stellarator: las coordenadas de flujo en el vacío (Boozer [B80, B82]).

Se parte del campo magnético  $\mathbf{B}_v$  creado en el vacío en ausencia de plasma. Las ecuaciones de partida son de nuevo las del sistema MHD (1.7), (1.8) y (1.9), pero con  $\mathbf{J}_v \equiv 0$ . Observamos que en general, de (1.7) se deduce que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  son ortogonales a  $\nabla p$  (ver (1.4) y (1.5)) y por tanto las líneas de campo y de corriente están sumergidas en superficies isobaras. Añadimos que en ausencia de plasma, las líneas de campo  $\mathbf{B}_v$  permanecen anidadas en superficies toroidales [KK158] a las que denotaremos por  $\rho = \text{cte}$ . Son las llamadas *superficies magnéticas* o *superficies de flujo* y vienen dadas por la ecuación

$$\mathbf{B}_v \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.24)$$

## 10I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

La superficie correspondiente a  $\rho = 0$  representa el *eje magnético* ( $\rho$  hace el papel de  $\psi$  en el caso de que hubiese simetría axial -ver la ecuación (1.13)-).

Con estas hipótesis (las ecuaciones de equilibrio MHD y la topología toroidal del campo magnético (1.24)) existe un sistema de coordenadas bajo el cual el campo magnético en el vacío puede ser representado en su forma contravariante como

$$\mathbf{B}_v = B_0 \rho \nabla \rho \times \nabla(\theta - \iota\theta) \quad (1.25)$$

y en su forma covariante como

$$\mathbf{B}_v = F_v \nabla \phi \quad (1.26)$$

donde  $\iota(\rho)$  es la llamada *transformada rotacional en el vacío* y  $F_v$  es una constante positiva. La función  $\rho$  puede ser entendida como una *coordenada radial*,  $\phi$  como una *coordenada toroidal* que cada  $2\pi$  se envuelve en un toro para una apropiada elección de  $F_v$ . Finalmente,  $\theta$  se generaliza como un *ángulo poloidal* que cada  $2\pi$  se cierra en sentido poloidal. Esto genera un sistema de coordenadas "toroidal" ( $\rho, (\rho\theta), \phi$ ) cuyo Jacobiano es

$$D = [\nabla \rho \times \nabla(\rho\theta)] \cdot \nabla \phi = \frac{|\mathbf{B}_v|^2}{B_0 F_v}. \quad (1.27)$$

Con esta elección del sistema de coordenadas evitamos posibles singularidades en el tensor de la métrica  $g$  del cambio de coordenadas. Al mismo tiempo, mantenemos la propiedad de que las líneas de campo de  $\mathbf{B}_v$  en su forma contravariante (1.25) vienen dadas por rectas en el plano  $(\theta, \phi)$  (i.e.  $\rho = \text{cte.}$  y  $\theta = \iota\phi + \text{cte.}$ ) y en su forma covariante (1.26) se mantiene lo anterior además de darse la misma propiedad para las perpendiculares a las líneas de campo sobre las superficies magnéticas (i.e. las líneas de  $\nabla \rho \times \mathbf{B}$  son dadas por  $\rho = \text{cte.}$  y  $\phi = -\frac{1}{C}\theta + \text{cte.}$ ). Este tipo de coordenadas deducidas a partir del campo en el vacío, son también conocidas como *coordenadas Boozer* [B80, B82]. Un desarrollo más amplio puede encontrarse en [S91, D92].

El siguiente paso consiste en tomar promedios respecto de la componente  $\phi$  (rápidamente oscilante) en las ecuaciones (1.7), (1.8), (1.9) y considerar los órdenes de magnitud de los elementos de la métrica y determinar así las ecuaciones de equilibrio, obteniendo de esta forma un problema bidimensional.

### 1.2.2 Promedios y órdenes de magnitud.

Debido a la geometría peculiar de los Stellarators, una gran parte de las funciones que aparecen en las secciones anteriores son funciones periódicas en  $\phi$  (por la estructura toroidal) así como de  $M\phi$  donde  $M$  es el número de simetrías parciales (fields periods). Parece razonable reescribir las cantidades anteriores en términos de su parte promediada (a la que notaremos por  $\langle \cdot \rangle$ ) y rápidamente oscilantes en  $\phi$  (la notaremos por  $\tilde{\cdot}$ ); es decir, si  $A$  es una función de  $\rho, \theta$  y  $\phi$ , se puede escribir como

$$A = \langle A \rangle + \tilde{A}$$

donde

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A d\phi$$

En general,  $A$  es una función periódica de  $M\phi_v$  con  $M$  suficientemente grande.

En virtud de la descomposición del campo magnético en el vacío  $B_v$  en su forma contravariante (1.25) y covariante (1.26) y la expresión del jacobiano  $D$  (dada en (1.27)) se tiene que

$$\begin{aligned} B_v^\rho &= 0 \\ B_v^\theta &= B_0 \rho \iota D \quad y \\ B_v^\phi &= B_0 D. \end{aligned}$$

Examinando estas ecuaciones, parece natural que la descomposición del campo magnético sea

$$\frac{B^i}{D} = \left\langle \frac{B^i}{D} \right\rangle + \left( \frac{\widetilde{B^i}}{D} \right)$$

donde  $i = \rho, \theta, \phi$  y  $B$  es el campo magnético en presencia de plasma. Las hipótesis de órdenes de magnitud son (leyes constitutivas)

$$\left\langle \frac{B^\theta}{D} \right\rangle \sim \varepsilon, \quad \left\langle \frac{B^\phi}{D} \right\rangle \sim 1, \quad \left\langle \frac{B^\rho}{D} \right\rangle \sim \beta \sim \varepsilon$$

donde se ha supuesto que  $\beta \sim \varepsilon$ .

Para las componentes "rápidamente oscilantes" sucede que en el sistema de coordenadas de flujo en el vacío, los órdenes de magnitud de las componentes  $\left( \frac{\widetilde{B^i}}{D} \right)$  son introducidos por los órdenes de los elementos de la métrica. Asumimos que

$$\left( \widetilde{g^{\rho\rho}} \right) \sim \left( \widetilde{g^{\theta\theta}} \right) \sim \left( \widetilde{g^{\rho\theta}} \right) \sim \left( \widetilde{g^{\phi\phi}} \right) \sim \delta \quad (1.28)$$

donde se asume la relación  $\varepsilon \sim \delta^2$  y que el número de períodos  $M \sim \varepsilon^{-1}$ . Estos órdenes, junto con las hipótesis de que el desplazamiento toroidal es dominante sobre el poloidal (véase [HC84]) permiten deducir otras propiedades como que

$$\left( \frac{\widetilde{B^\rho}}{D} \right) \sim \left( \frac{\widetilde{B^\theta}}{D} \right) \sim \varepsilon \delta.$$

Otras consideraciones físicas justifican estos resultados (véase [HC84]). Hay que destacar que estos órdenes son básicamente los dados por Greene-Johnson [GrJ61], sin embargo el trabajar con el sistema de coordenadas de flujo en el vacío tiene importantes ventajas frente al sistema de coordenadas fijas dado por Greene-Johnson.

Una vez estudiados estos órdenes de magnitud, ya es posible obtener una ecuación tipo *Grad-Shafranov* al promediar las ecuaciones de equilibrio. Aquí mostraremos esencialmente algunos resultados que por su interés son necesarios para caracterizar algunas de los componentes de la ecuación obtenida (para más detalles véase [HC84, D92]):

## 12I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

1. Las componentes en  $\theta$  y  $\phi$  de la relación (1.7) en su término relevante al tomar promedios conducen a

$$\left\langle \frac{B^\theta}{D} \right\rangle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle B_\phi \rangle}{\partial \theta} + \left\langle \frac{B^\rho}{D} \right\rangle \frac{\partial \langle B_\phi \rangle}{\partial \rho} = 0. \quad (1.29)$$

De (1.8), despreciando los términos oscilantes en  $\phi$  se obtiene que  $\langle \nabla \cdot \mathbf{B} \rangle = 0$  y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \left\langle \frac{B^\rho}{D} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left\langle \frac{B^\theta}{D} \right\rangle \right) = 0$$

lo que gracias a la caracterización de campos conservativos garantiza la existencia de una función  $u$  (que sólo depende de  $\rho$  y  $\theta$ ) a la que llamamos *flujo poloidal promediado*, definida por

$$\left\langle \frac{B^\rho}{D} \right\rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{B^\theta}{D} \right\rangle = -\frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad (1.30)$$

Las ecuaciones (1.29) y (1.30) muestran que  $\langle B_\phi \rangle$  es sólo función de  $u$  es decir

$$\langle B_\phi \rangle \equiv F(u)$$

con  $F$  desconocida “a priori”.

2. Por (1.7) es  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ ; al tomar promedios en la componente toroidal, y usar adecuadamente los órdenes de magnitud, también  $\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \langle p \rangle = 0$  y por tanto  $\langle p \rangle$  es función sólo de  $u$ , es decir,

$$\langle p \rangle = p(u).$$

Con lo obtenido en los puntos 1 y 2, la caracterización de las componentes de la métrica y otras ecuaciones que aquí no mostramos (véase [D92], [HC84]) llegamos a la ecuación tipo Grad-Shafranov

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \langle g^{\rho\rho} \rangle \frac{\partial u}{\partial \rho} + \langle g^{\rho\theta} \rangle \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \langle g^{\rho\theta} \rangle \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\langle g^{\theta\theta} \rangle}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \\ & = -\frac{B_0}{F_v} F(u) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \iota \langle g^{\rho\rho} \rangle \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho \iota \langle g^{\rho\theta} \rangle \right) \right] - \\ & - \frac{F_v}{B_0} \left\langle \frac{1}{D} \right\rangle \frac{dp}{du}(u) - F(\psi) \frac{dF}{d\psi}(\psi). \end{aligned} \quad (1.31)$$

La ecuación (1.31) se ha obtenido promediando las ecuaciones (1.7) y (1.9) que se verifican en la región ocupada por el plasma. Como  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}_v$  difieren “poco” sobre  $\Omega_v$ ,

podemos suponer que la región del plasma  $\Omega_p$  está contenida en la región limitada por una superficie magnética del campo  $B_v$ ,  $\rho = R_p$ , siendo  $R_p > 0$ . Tomamos ahora

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) \ 0 \leq \rho < R\}$$

con  $R > R_p$ . Por tanto

$$\Omega_v = \{(\rho, \theta, \phi) \ R_p < \rho < R\}$$

En el proceso de promedios, esos conjuntos se transforman en los dominios bidimensionales

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\rho, \theta) \ 0 \leq \rho < R\} \\ \Omega_p &= \{(\rho, \theta) \ 0 < \rho < R_p\} \\ \Omega_v &= \{(\rho, \theta) \ R_p < \rho < R\} \end{aligned}$$

Si denominamos por  $\mathcal{L}$  el operador

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (a_{\rho\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{\partial}{\partial \rho} (a_{\rho\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_{\theta\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}) \right\} \quad (1.32)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{\rho\rho}(\rho, \theta) &= \rho \langle g^{\rho\rho} \rangle(\rho, \theta) \\ a_{\rho\theta}(\rho, \theta) &= \langle g^{\rho\theta} \rangle(\rho, \theta) \\ a_{\theta\rho}(\rho, \theta) &= \langle g^{\theta\rho} \rangle(\rho, \theta) \\ a_{\theta\theta}(\rho, \theta) &= \langle g^{\theta\theta} \rangle(\rho, \theta) / \rho \end{aligned} \quad (1.33)$$

y consideramos que la ecuación (1.31) se verifica sobre la región  $\Omega_p$ , y que también se tiene el sistema de ecuaciones (1.7), (1.8), (1.9) sobre la región de vacío  $\Omega_v$  con tan solo tomar  $p \equiv 0$  y  $\mathbf{J} \equiv 0$ , llegamos al sistema

$$-\mathcal{L}u = a(\rho, \theta)F(u) + F(u) \frac{dF}{du}(u) + b(\rho, \theta) \frac{dp}{du}(u) \quad \text{en } \Omega_p \quad (1.34)$$

$$-\mathcal{L}u = a(\rho, \theta)F_v \quad \text{en } \Omega_v \quad (1.35)$$

dado que en la región de vacío  $\langle B_\phi \rangle \equiv F_v = F(u(\rho, \theta))$ , una constante conocida. En las anteriores fórmulas se ha utilizado la siguiente notación:

$$a(\rho, \theta) := \frac{B_0}{\rho F_v} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \iota \langle g^{\rho\rho} \rangle) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \iota \langle g^{\rho\theta} \rangle \langle g^{\theta\rho} \rangle) \right] \quad (1.36)$$

$$b(\rho, \theta) := \frac{F_v}{B_0} \langle \frac{1}{D} \rangle(\rho, \theta) \quad (1.37)$$

Para el desarrollo posterior necesitamos suponer la condición de signo

$$a(\rho, \theta) > 0 \quad \text{si } \rho > 0 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.38)$$

## 14I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

mientras que

$$b(\rho, \theta) > 0 \quad \text{si } \rho > 0 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.39)$$

se deduce directamente de (1.37) y de la expresión (1.27) para el jacobiano  $D$ :

$$\begin{aligned} b(\rho, \theta) &= \frac{F_v}{B_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{D} d\phi = \\ &= \frac{F_v}{B_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_0 F_v}{|B_v|^2} d\phi = \\ &= F_v^2 \left\langle \frac{1}{|B_v|^2} \right\rangle > 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones junto a los ordenes de magnitud supuestos para las componentes de la métrica, nos permiten probar que el operador  $\mathcal{L}$  es un operador uniformemente elíptico (en [D92] y [P92] se dan dos demostraciones diferentes de este hecho).

En cuanto a la condición de contorno, como se hizo en el caso del Tokamak, se debe exigir (1.12), lo que al tomar promedios y considerar (1.4) conduce a

$$\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

con  $\mathbf{n} = (n_\rho, n_\theta)$  vector normal unitario exterior a  $\partial\Omega$ . De la definición de  $u$  en (1.30) concluimos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} n_\rho - \frac{\partial u}{\partial \rho} n_\theta = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

y por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

lo que se justifica gracias a la identidad  $\frac{\partial u}{\partial(\rho\theta)}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ . En la igualdad anterior,  $\tau$  representa el vector unitario tangente a  $\partial\Omega$ . Concluimos de este modo que  $u$  es constante en  $\partial\Omega$ . Además, por (1.6) se tiene (de forma análoga) que  $u$  es también constante sobre  $\partial\Omega_p$ .

Como  $u$  está definida módulo una constante aditiva, podemos suponer

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_p \quad (1.40)$$

y

$$u = \gamma \text{ const.} \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (1.41)$$

Ahora se puede suponer conocida (véase [DR94]).

Como sucedía en el caso de campos con simetría axial, las funciones  $p(u)$  y  $F(u)$  no pueden ser determinadas con sólo las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Aquí volvemos a elegir  $p$  según la ley constitutiva (1.18). Con respecto a la función  $F(u)$ , también desconocida en un principio, varios argumentos conducen a determinarla de manera unívoca. Una condición adicional que resulta útil es el hecho de que en Stellarators la corriente total a lo largo de cada superficie de flujo, en un marco ideal, debe

ser nula como consecuencia de la disposición de las bobinas exteriores. Dado que la densidad de corriente viene dada por

$$-F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) - b(\rho, \theta)\frac{dp}{du}(u)$$

la condición anterior se expresa mediante la familia de integrales

$$\int_{\{(\rho, \theta): u(\rho, \theta) \geq c\}} \left\{ F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) + b(\rho, \theta)\frac{dp}{du}(u) \right\} \rho d\rho d\theta = 0 \quad (1.42)$$

para todo valor  $c \in [\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u]$ .

No obstante otro modelo, más realista, consiste en admitir que en la región interior a las superficies magnéticas la corriente que por ella circula es una función del nivel, es decir, se verifica la igualdad

$$\int_{\{(\rho, \theta): u(\rho, \theta) \geq c\}} \left\{ F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) + b(\rho, \theta)\frac{dp}{du}(u) \right\} \rho d\rho d\theta = j(c, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad (1.43)$$

para una función  $j$  conocida [C91].

Términamos esta sección introductoria con el siguiente párrafo, donde se establece el problema objeto de estudio en este capítulo así el anuncio de los principales resultados.

### 1.3 Un modelo con condición de corriente no nula para Stellarator: el problema ( $\mathcal{P}$ ).

Como ya hemos visto, el confinamiento magnético de un plasma en un Stellarator puede ser modelado a partir de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Mediante el cambio de coordenadas Boozer y con la ayuda del método de promedios se llega a una ecuación bidimensional de tipo Grad-Shafranov que relaciona la función de flujo poloidal promediado  $u$  y la coordenada covariante del campo magnético  $F$ . Recogiendo de los apartados anteriores, las principales características que nos definen el modelo presentado, podemos establecer el problema en su formulación en términos de frontera libre:

Sea  $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < R, \theta \in (0, 2\pi)\}$ . Se define  $\partial\Omega = \Gamma_R \cup \Gamma_p \cup \Gamma_0$  siendo  $\Gamma_R = \{(\rho, \theta) : \theta \in (0, 2\pi)\}$ ,  $\Gamma_p = \{(\rho, 0) \text{ or } (\rho, 2\pi) : \rho \in (0, R)\}$  y  $\Gamma_0 = \{(0, \theta) : \theta \in (0, 2\pi)\}$ . Dados  $F_v > 0$  (viene de (1.26)),  $a, b \in L^\infty(\Omega)$  con  $\inf_{\Omega} |a| > 0$ ,  $b > 0$  (véase (1.38) y (1.39)) y  $\gamma \in \mathbb{R}^-$ , se trata de encontrar

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tal que  $u \in W_\rho^{1,\infty}(\Omega) \cap W_\rho^{2,p}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$  (por  $W_\rho^{1,\infty}(\Omega)$  y  $W_\rho^{2,p}(\Omega)$  se designan los correspondientes espacios de Sobolev con peso, véase [DR94]) y  $F \in W^{1,\infty}[\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u]$ ,

$F(s) = F_v$  para todo  $s \leq 0$  y  $(u, F)$  verificando

16I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

$$-\mathcal{L}u = a(\rho, \theta)F(u) + F(u)F'(u) + b(\rho, \theta)p'(u) \text{ en } \Omega \quad (1.44)$$

$$u|_{\Gamma_R} = \gamma; \quad u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi) \text{ para } \rho \in (0, R). \quad (1.45)$$

siendo  $-\mathcal{L}$  el operador elíptico de segundo orden dado por la ecuación (1.32). Es habitual tomar  $p(s) = \frac{\lambda}{2}(s_+)^2$  donde  $s_+ = \max\{s, 0\}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$ . Además, a las condiciones (1.44) y (1.45), en un marco ideal típico de Stellarator, es necesario añadir la condición que expresa que la corriente que circula en la región interior limitada por cada superficie magnética es nula. Dicha condición viene explicitada por la familia de condiciones integrales (1.42), es decir,

$$\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + b(\rho, \theta)p'(\rho, \theta)]\rho d\rho d\theta = 0 \quad \forall t \in [\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u] \quad (1.46)$$

El problema (1.44), (1.45), (1.46) ya ha sido tratado por Díaz-Rakotoson. Primero en [DR93], donde consideran la simplificación  $\mathcal{L} = \Delta$  (el operador de Laplace) y como dominio, un abierto acotado y de frontera regular de  $\mathbb{R}^2$ . Por último en [DR94], se estudia directamente el problema (1.44), (1.45) y (1.46) en su formulación original, es decir, manteniendo el operador elíptico  $\mathcal{L}$  y en las componentes  $(\rho, \theta)$ . Esto requiere trabajar en el marco funcional de los espacios de Sobolev con peso.

Respecto a la condición (1.46), en la práctica, no es en general satisfecha. Algunas corrientes (de fácil medida) aparecen en el interior de las regiones limitadas por las superficies magnéticas  $\{(\rho, \theta) \in \Omega : u(\rho, \theta) = t\}$ . Algunos estudios sobre la estabilidad del equilibrio, para el caso de una configuración en cuya formulación se ha fijado la frontera libre, han considerado ya este hecho. En particular, Cooper et al en [C91] introducen una corriente dada mediante la expresión

$$J(s) = J(1)(4s^2 - 3s^4) \quad (1.47)$$

donde  $2\pi J(1)$  es la corriente total encerrada por la superficie magnética correspondiente al parámetro  $s$  (i.e.,  $\{(\rho, \theta) \in \Omega : u(\rho, \theta) = s\}$ ). En [C91], también se asumió la siguiente ley constitutiva para la presión:

$$P(s) = P(0)(1 - 3s^2 + 2s^3). \quad (1.48)$$

Conviene señalar que en esta formulación el eje magnético corresponde al valor de  $s = 0$  y para  $s = 1$  se obtiene la frontera libre. Como objetivo inmediato nos planteamos el reemplazar la familia de igualdades (1.46) por la nueva condición que expresa la existencia de corrientes en las regiones limitadas por las superficies magnéticas, describiendo de esta forma una configuración para el confinamiento magnético de plasmas en Stellarators conocida en la literatura como "current carrying Stellarators". Para reemplazar (1.46) por la nueva condición, necesitamos "traducir" las hipótesis (1.47) y (1.48) en términos de la formulación aquí utilizada, donde la frontera de la región del plasma se supuso correspondía al nivel  $u = 0$  y el eje magnético al nivel  $\max u = \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}$  (que

se supone que se alcanza sólo en un punto). Así, introducimos el siguiente cambio de variable que relaciona  $\|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}$ , con  $u$  verificando (1.44) y (1.45),

$$s := \left(1 - \frac{t_+}{\|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}}\right) \quad \forall t \in \left[\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u\right]. \quad (1.49)$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned} \{s = 0\} &\equiv \{u_+ = \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}\} \quad (\equiv \text{el eje magnético}) \\ \{s = 1\} &\equiv \partial\{u_+ = 0\} \quad (\equiv \text{la frontera libre}). \end{aligned}$$

Además, si fijamos una función de corriente  $J(s)$  (como por ejemplo (1.47)), mediante el cambio de variable dado en (1.49), obtenemos una nueva expresión para la función de corriente

$$J(s) = j(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)})$$

en términos de la nueva variable  $t \in \left[\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u\right]$  y  $\|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Análogamente, se tiene que  $P(s) = p(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)})$ . En todo lo que sigue, supondremos que las funciones  $j$  y  $p$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} j &\in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), j(\sigma, \sigma) = 0 \text{ para todo } \sigma \geq 0 \\ j'_t &\in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \eta := \sup \{j'_t(t, \sigma) : (t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\} < +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Aquí, y en lo sucesivo adoptaremos la siguiente notación:  $j'_t$  denota la derivada de  $j$  con respecto de la primera componente (i.e.,  $j'_t := \frac{\partial j}{\partial t}$ ). Sobre la función  $p$ , supondremos que  $p(t, \sigma) \equiv p(t)$  siendo  $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  tal que

$$p(0) = 0, 0 \leq p'(t) \leq \lambda t_+, \text{ y } |p'(t) - p'(s)| \leq L|t - s|^\alpha \quad (1.51)$$

para algún  $\lambda > 0$ ,  $L > 0$  y  $\alpha \in ]0, 1]$ . En particular, nótese que  $p(t) = \frac{\lambda}{2}(t_+)^2$  satisface todas las condiciones pedidas. Por último, la nueva condición para el modelo con condición de corriente no nula, viene dada por la siguiente familia de igualdades

$$\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + p'(u)b(\rho, \theta)] \rho d\rho d\theta = j(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad \text{c.p.t. } t \in \left[\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u\right]. \quad (1.52)$$

El objetivo que ahora nos proponemos es el de encontrar un par  $(u, F)$  solución del problema (1.44), (1.45) y (1.52). No obstante, supondremos por simplicidad que  $\mathcal{L} = \Delta$  y que  $\Omega$  es un abierto acotado de frontera regular de  $\mathbb{R}^2$ , donde se considera el sistema de coordenadas cartesiano. Tales hipótesis no conllevan una pérdida de interés por el estudio del problema resultante, ya que la dificultad intrínseca al problema de partida se hereda en el nuevo supuesto y a su vez favorece la claridad en la exposición, dejando entrever las técnicas empleadas. La técnica de los espacios con peso utilizada en [DR94], es un buen camino a seguir para la resolución del problema (1.44), (1.45) y

## 18I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

(1.52) en su formulación original. Nuestro principal objetivo es probar la existencia de un par  $(u, F)$  solución del siguiente problema, al que nos referiremos por  $(\mathcal{P})$ , quedando definido por las relaciones

$$-\Delta u = aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) \quad \text{en } \Omega \quad (1.53)$$

$$u - \gamma \in H_0^1(\Omega) \quad (1.54)$$

$$\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + bp'(u)] dx = j(t, \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad \text{c.p.t. } t \in [\inf_\Omega u, \sup_\Omega u] \quad (1.55)$$

Antes de exponer los resultados principales, introducimos el siguiente cono convexo,

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^\infty(\Omega), v|_{\partial\Omega} \leq 0\}$$

**Teorema 1.1** *Supongamos que  $\inf_\Omega |a| > 0$  y  $\gamma \leq 0$ . Entonces existe  $\Lambda > 0$  tal que si*

$$\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \eta < \Lambda$$

*existe un par  $(u, F)$ ,  $u \in V(\Omega)$  y  $F \in W^{1,\infty}([\inf_\Omega u, \sup_\Omega u])$  solución de (1.53), (1.54) y (1.55) verificando que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$  y que  $F$  está unívocamente determinada por  $u$ .*

Este resultado también muestra la existencia de soluciones para el caso de Stellarator ideales, es decir, cuando  $j \equiv 0$ . Basta cambiar la condición (1.55) por

$$\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + bp'(u)] dx = 0 \quad \text{c.p.t. } t \in [\inf_\Omega u, \sup_\Omega u]. \quad (1.56)$$

Inspirados en [DR93] y [DR94] se reformulará el problema  $(\mathcal{P})$  en términos de un nuevo problema  $(\mathcal{P}_*)$  de naturaleza no local, donde se elimina la incógnita  $F$ , la cual viene dada a partir de una expresión que relaciona la función  $u$ , su reordenamiento decreciente y el relativo de  $b$  con respecto a  $u$ . Sin embargo, la no regularidad de la derivada del reordenamiento decreciente dificulta la resolución del problema  $(\mathcal{P}_*)$ . Para evitar esta dificultad se introduce una familia de problemas  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ . Mediante un método de tipo Galerkin (de interés para la implementación numérica) encontraremos una solución para el problema  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ . Por último, gracias a los resultados de regularidad sobre la derivada del reordenamiento decreciente (véase el Lema 2.9) obtendremos una solución de  $(\mathcal{P}_*)$  mediante paso al límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . No obstante, de esta forma sólo obtendríamos existencia de soluciones del problema  $(\mathcal{P}_*)$ , y no del problema  $(\mathcal{P})$  de partida. Por ello, se mostrará en la Sección 3, que bajo condiciones adicionales toda solución del problema  $(\mathcal{P}_*)$  es a su vez solución de  $(\mathcal{P})$  y viceversa (Teorema 3.1). Lo siguiente será obtener algunas propiedades cualitativas de una solución de  $(\mathcal{P})$ . Por

último, basándonos en una técnica desarrollada por Puel en [Pu77], se obtiene un resultado al que denominamos de *unicidad parcial de soluciones de*  $(\mathcal{P})$  en el caso particular de que  $j \equiv 0$ . No abordamos la unicidad de soluciones de  $(\mathcal{P})$  en el sentido más general:  $(u, F)$  y  $(\tilde{u}, \tilde{F})$  son dos soluciones de  $(\mathcal{P})$ , entonces necesariamente  $F = \tilde{F}$  y  $u = \tilde{u}$ . En nuestro caso mostramos que si  $(u, F)$  y  $(v, F)$  son dos soluciones de  $(\mathcal{P})$ , entonces necesariamente  $u = v$ .

## 2 Resultados técnicos preliminares.

En esta sección se recuerdan algunas nociones y resultados ya clásicos en la literatura: la Fórmula de coárea de Federer, la Fórmula de Fleming–Rishel, las nociones de reordenamiento decreciente y relativo, así como algunas de sus propiedades necesarias para el desarrollo posterior. No obstante, el último párrafo de esta sección (la Subsección 2.2) está reservado a establecer las propiedades más relevantes. Aunque en general muchas de ellas tienen un marcado matiz puramente técnico, son sin embargo motivados por las necesidades propias del problema que se trata. En particular requieren especial mención los lemas 2.9, 2.14 y 2.17.

En esta sección supondremos que  $\Omega$  es un subconjunto medible y acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Para cada subconjunto medible  $E$  de  $\Omega$ , denotamos por  $|E|$  su medida de Lebesgue. Dada una función medible  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada valor  $t \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $\{u = t\}$ ,  $\{u > t\}$  y  $\{u \geq t\}$  los conjuntos  $\{x \in \Omega : u(x) = t\}$ ,  $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$  y  $\{x \in \Omega : u(x) \geq t\}$  respectivamente.

Diremos que la función  $u$  tiene una *región plana de valor*  $t$  si  $|u = t|$  es estrictamente positiva. Por  $P_u(t)$  denotamos el conjunto de puntos de  $\Omega$  para los  $u$  toma el valor  $t$  (región plana de valor  $t$ ), i.e.,  $P_u(t) := \{u = t\}$ . Es conocido que existe una familia numerable de regiones planas  $P_u(t_i) = \{u = t_i\}$  con  $t_i \in [\text{essinf}_\Omega u, \text{essup}_\Omega u]$ . Denotamos por  $P_u = \cup_{i \in D} P_u(t_i)$  la unión de todas las regiones planas de  $u$ .

Por las múltiples aplicaciones que de la fórmula de coárea de Federer haremos en este capítulo, presentamos a continuación el teorema de coárea, cuya demostración puede encontrarse en [F69, Teorema 3.2.12, página 249].

**Lema 2.1** (*Fórmula de coárea*) Sea  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitziana y  $f \in L^1(\Omega)$ . Si  $N > 1$ , entonces

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\{u=s\}} f(x) dH^{N-1}(x) \quad (2.1)$$

donde  $H^{N-1}$  es la medida  $(N-1)$ -dimensional de Hausdorff. Si  $N = 1$ , entonces

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{x \in \{u=s\}} f(x) \right\} ds.$$

## 20I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Observación 2.1** Si  $a \leq u \leq b$  en  $\Omega$ , entonces  $\{u = t\} = \emptyset$  para todo  $t \notin [a, b]$  y (2.1) es equivalente a

$$\int_{\Omega} f(x)|\nabla u(x)|dx = \int_a^{+\infty} ds \int_{\{u=s\}} f(x)dH^{N-1}(x) \quad (2.2)$$

$$= \int_a^b ds \int_{\{u=s\}} f(x)dH^{N-1}(x) \quad (2.3)$$

**Observación 2.2** La fórmula de coárea (2.1) tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, si  $f \equiv 1$ , y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  acotado, se obtiene la fórmula de Fleming–Rishel [FIR60] (véase también [PRT93, página 34 fórmula (3.28)])

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\{u=s\}} dH^{N-1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Omega}(\{u > s\})ds \quad (2.4)$$

donde  $P_{\Omega}$  es el perímetro en sentido de De Giorgi ( $P_{\Omega}(A) = \|\chi_A\|_{BV(\Omega)} \forall A \subset \mathbb{R}^N$  véase [Ma85, Definición 6.1.1, página 296 ], Gi84, [DeG]).

### 2.1 Definición y propiedades del reordenamiento decreciente y relativo.

**Definición 2.1** Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible Lebesgue. Entonces la función de distribución de  $u$  se define como

$$m_u(t) = |u > t| \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} .$$

A la inversa generalizada de  $m_u$  se le llama reordenamiento decreciente de  $u$ , la cual denotamos por  $u_*$ . Además, esta función está definida de  $[0, |\Omega|]$  sobre  $\overline{\mathbb{R}}$  tal que  $u_*(s) = \inf\{t \in \mathbb{R} : |u > t| < s\}$ ,  $u_*(0) = \text{esssup}_{\Omega} u$  y  $u_*(|\Omega|) = \text{essinf}_{\Omega} u$ .

**Lema 2.2** Sean  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}, v \in L^p(\Omega)$  tales que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla v(x) = 0\} = 0$  y  $v_n \rightarrow v$  fuertemente en  $L^p(\Omega)$ . Entonces

$$|v_n > v_{n+}(x)| \rightarrow |v > v_+(x)| \quad \text{en casi todo } x \in \Omega .$$

**Demostración.** En general se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} |v > v_+(x)| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |v_n > v_{n+}(x)| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |v_n > v_{n+}(x)| \\ &\leq |v \geq v_+(x)| \quad \text{para casi todo } x \in \Omega . \end{aligned}$$

Ahora, puesto que  $v$  no tiene regiones planas ( $|P_v| = 0$ ), se verifica que  $|v = v(x)| = 0$  para casi todo  $x \in \Omega$  y por la anterior cadena de desigualdades se obtiene el resultado.

■

Denotamos por  $\Omega_*$  el intervalo  $]0, |\Omega|[$ . Más tarde necesitaremos algunas propiedades del reordenamiento decreciente. En particular utilizaremos las propiedades recogidas en el siguiente lema. Dichas propiedades pueden encontrar en las referencias señaladas.

**Lema 2.3** [R88, R89, RT90, PRT93] Sean  $u$  y  $v$  dos funciones medibles en  $\Omega$ . Entonces

1. Para cada  $s \in \bar{\Omega}_*$ , se tiene que  $m_u(u_*(s)) \leq s$ .
2. Si  $u$  no tiene regiones planas (i.e.,  $|P_u| = 0$ ), entonces tanto  $m_u$  como  $u_*$  son funciones continuas siendo además  $m_u(u_*(s)) = s \ \forall s \in \Omega_*$  y  $u_*(m_u(t)) = t \ \forall t \in [\text{essinf}_\Omega u, \text{esssup}_\Omega u]$ .
3.  $u$  y  $u_*$  son funciones equimedibles, i.e.,  $|u_* > t| = |u > t| \ \forall t \in \mathbb{R}$ .
4. Consideremos una función de Borel  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$ , entonces

$$\int_{\Omega} \varphi(u(x)) dx = \int_{\Omega_*} \varphi(u_*(s)) ds .$$

5. Si  $u \leq v$  en casi todo punto de  $\Omega$ , entonces  $u_*(s) \leq v_*(s) \ \forall s \in \Omega_*$ .
6. Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función no decreciente, entonces  $\varphi(u_*(s)) = \varphi(u)_*(s)$  en casi todo  $s \in \Omega_*$ .
7. La aplicación que a cada función medible  $u$  le hace corresponder la función  $u_*$ , aplica  $L^p(\Omega)$  en  $L^p(\Omega_*)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  y dicha aplicación es una contracción, de  $L^p(\Omega)$  en  $L^p(\Omega_*)$ , i.e.,

$$\|u_* - v_*\|_{L^p(\Omega_*)} \leq \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^p(\Omega) \quad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Además,  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u_*\|_{L^p(\Omega_*)}$ .  $\square$

También necesitaremos algunos resultados que establecen la regularidad de la primera derivada de  $u_*$ . Más concretamente

**Lema 2.4** [R89] Sea  $\Omega$  un conjunto abierto, acotado conexo de  $\mathbb{R}^N$  y de frontera regular. Si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  para algún  $1 \leq p \leq +\infty$ , entonces:

i)  $u_* \in W_{loc}^{1,p}(\Omega_*)$ .

ii) Si definimos  $k(s) \ \forall s \in \Omega_*$  por  $k(s) = \frac{1}{Q} \min\{s^{1-\frac{1}{N}}, (|\Omega| - s)^{1-\frac{1}{N}}\}$  con  $Q = Q(\Omega)$  constante sólo dependiente de  $\Omega$ , entonces se tiene que

$$\left\| k \frac{du_*}{ds} \right\|_{L^p(\Omega_*)} \leq Q \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq +\infty .$$

iii) Por último, si  $N < p \leq +\infty$ , entonces  $u_* \in W^{1,q}(\Omega_*)$  con  $1 \leq q < \frac{Np}{(N-1)p+N}$  y

$$\left\| \frac{du_*}{ds} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ con } C = C(N, p, q, \Omega). \quad \square$$

## 22I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

Haciendo  $p \rightarrow +\infty$  en **iii)** del Lema 2.4, se obtiene

**Corolario 2.1** *Sea  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , entonces  $u_* \in W^{1,q}(\Omega_*)$  para cada  $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$  y  $u_* \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_*)$ . ■*

Recordemos la noción de reordenamiento relativo de  $v$  con respecto a  $u$ . Sea  $u$  una función medible en  $\Omega$  y  $v \in L^1(\Omega)$ . Definimos la función  $w$  sobre  $\bar{\Omega}_*$  mediante la expresión:

$$w(s) = \begin{cases} \int_{\{u > u_*(s)\}} v(x) dx & \text{si } |u = u_*(s)| = 0 \\ \int_{\{u > u_*(s)\}} v(x) dx + \int_0^{s - |u > u_*(s)|} (v|_{P_u(u_*(s))})_*(\sigma) d\sigma & \text{si } |u = u_*(s)| \neq 0. \end{cases}$$

Por  $v|_{P_u(u_*(s))}$  denotamos la restricción de la función  $v$  sobre el conjunto  $P_u(u_*(s))$  y por  $(v|_{P_u(u_*(s))})_*$  su reordenamiento decreciente. El siguiente lema puede encontrarse en [MR82, PRT93].

**Lema 2.5** *Sea  $u$  una función medible definida en  $\Omega$ ,  $v \in L^p(\Omega)$  para algún  $1 \leq p \leq +\infty$ . Entonces  $w \in W^{1,p}(\Omega_*)$  y  $\left\| \frac{dw}{ds} \right\|_{L^p(\Omega_*)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}$ . □*

**Definición 2.2** *El reordenamiento relativo de  $v$  con respecto de  $u$  es la función  $\frac{dw}{ds}$  definida de  $\Omega_*$  en  $\mathbb{R}$  y a la que denotamos por  $v_{*u}$ , es decir*

$$v_{*u} = \frac{dw}{ds}.$$

Mostramos algunas propiedades del reordenamiento relativo (véase, por ejemplo, [Si94, MT81, PRT93]):

**Lema 2.6** *Sean  $u, v_1, v_2$  tres elementos de  $L^1(\Omega)$ . Entonces:*

1. *Si  $v_1 \leq v_2$  para casi todo punto de  $\Omega$ , entonces  $v_{1*u} \leq v_{2*u}$  para todo punto de  $\Omega_*$ .*
2. *Si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Borel tal que  $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$ , entonces  $(v_1 + \varphi(u))_{*u} = v_{1*u} + \varphi(u_*)$ . En particular, si tomamos  $\varphi \equiv k$  constante, entonces  $(v_1 + k)_{*u} = v_{1*u} + k$ .*
3. *La aplicación que a cada  $v$  le asocia  $v_{*u}$ , aplica  $L^p(\Omega)$  en  $L^p(\Omega_*)$  para cada  $1 \leq p \leq +\infty$  y es una contracción, i.e.*

$$\|v_{*u} - w_{*u}\|_{L^p(\Omega_*)} \leq \|v - w\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v, w \in L^p(\Omega).$$

Además se tiene que

$$\|v_{*u}\|_{L^p(\Omega_*)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}. \quad \square$$

**Proposición 2.1** *Sea  $v \in L^p(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty]$ ,  $v > 0$  en casi todo punto de  $\Omega$  y sea  $u \in L^1(\Omega)$  con  $|P_u| = 0$ . Entonces  $v_{*u}$  es estrictamente positiva en casi todo punto de  $\Omega_*$ .*

**Demostración.** Definimos

$$w(s) = \int_{\{u > u_*(s)\}} v(x) dx \quad s \in \Omega_* .$$

Dado que hemos supuesto  $|P_u| = 0$ , se tiene entonces que  $\text{med}\{x \in \Omega : u(x) = u_*(s)\} = 0$  para cada  $s \in \Omega_*$  y por tanto  $\frac{dw}{ds}(s) = v_{*u}(s) \in L^p(\Omega_*)$  (véase la Definición 2.1 y el Teorema 2.1 de [PRT93] o también [R88]) siendo  $w \in W^{1,p}(\Omega_*) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}_*)$ . Se toma ahora  $0 < s_1 < s_2 < |\Omega|$ . Entonces  $u_*(s_1) > u_*(s_2)$  pues  $u_*$  es no creciente y  $|P_u| = 0$  (por la Proposición 1.3 página 10 de [PRT93], si  $u_*(s_1) = u_*(s_2)$ , se tendría que  $s_1 = s_2$ ) siendo además

$$|\{x \in \Omega : u(x) > u_*(s_1)\}| = m_u(u_*(s_1)) < m_u(u_*(s_2)) = |\{x \in \Omega : u(x) > u_*(s_2)\}|$$

Considerando la anterior relación, la definición de  $w$  y el hecho de que  $v$  es estrictamente positiva en  $\Omega$ , se obtiene que

$$w(s_1) < w(s_2) \quad \forall s_1, s_2 \in \Omega_* \text{ con } s_1 < s_2 .$$

Por tanto,  $w$  es una función de  $W^{1,p}(\Omega_*) \cap \mathcal{C}(\Omega_*)$  estrictamente creciente en  $\Omega_*$ , de donde  $\frac{dw}{ds}(s)$  es estrictamente positiva en casi todo  $s \in \Omega_*$  y por ello  $v_{*u}(s) > 0$  casi para todo  $s \in \Omega_*$ . ■

**Corolario 2.2** *Sea  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $v > 0$  en  $\Omega$  y  $u \in L^\infty(\Omega)$  tal que  $|P_u| = 0$ . Entonces  $v_{*u}(|u > t|) > 0$  para casi todo  $t \in [\hat{m}, M]$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 2.1 la medida unidimensional del conjunto  $E_* := \{s \in \Omega_* : v_{*u}(s) \leq 0\}$  es nula y por tanto también  $u_*(E_*) = \{t \in [\hat{m}, M] : \exists s \in E_*, u_*(s) = t\}$  es un conjunto de medida nula. Si  $t \in [\hat{m}, M]$  tal que  $v_{*u}(|u > t|) \leq 0$ , entonces  $|u > t| \in E_*$  y de esta forma  $t \in u_*(E_*)$  (puesto que  $|P_u| = 0$ , será  $|u > (u_*(s))| = s$  y  $u_*(|u > t|) = t$  [PRT93, Proposición 1.3, página 10]). Finalmente se tiene que

$$\{t \in [\hat{m}, M] : v_{*u}(|u > t|) \leq 0\} \subset u_*(E_*)$$

de donde se deduce la conclusión del corolario por ser  $u_*(E_*)$  un conjunto de medida cero. ■

Finalmente, siguiendo [MT81] introducimos la siguiente

## 24I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Definición 2.3** (“Second class of mean value operators”). Sean  $u, v \in L^1(\Omega)$ , y  $g \in L^1(\Omega_*)$ . Se define  $\mathcal{M}_{u,v}(g)$  como la función

$$\mathcal{M}_{u,v}(g)(x) = \begin{cases} g(m_u(u(x))) & \text{si } x \in \Omega - P_u \\ \frac{1}{|v_i = v_i(x)|} \int_{|v_i > v_i(x)|}^{v_i \geq v_i(x)} g(\sigma + |u > t_i|) & \text{si } x \in P_u(t_i) \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

donde  $v_i := v|_{P_u(t_i)}$  es la restricción de  $v$  al conjunto  $P_u(t_i)$ .

En particular necesitaremos del siguiente lema (véase [MT81, PRT93]).

**Lema 2.7** El operador  $\mathcal{M}_{u,v}(g)$  está bien definido y además se tiene que:

i) Si  $g \in L^1(\Omega_*)$ , entonces  $\mathcal{M}_{u,v}(g) \in L^1(\Omega)$ , siendo

$$\int_{\Omega_*} g(s) ds = \int_{\Omega} \mathcal{M}_{u,v}(g)(x) dx .$$

ii)  $\mathcal{M}_{u,v}$  es un operador lineal, continuo y de norma uno de  $L^p(\Omega_*)$  en  $L^p(\Omega)$  para cada  $1 \leq p \leq +\infty$ .  $\square$

También necesitaremos del siguiente resultado que relaciona el reordenamiento relativo y con el operador  $\mathcal{M}_{u,v}$ :

**Lema 2.8** Sea  $u \in L^1(\Omega)$  y  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Para cada  $g \in L^{p'}(\Omega_*)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , se tiene que

$$\int_{\Omega_*} v_{**}(s)g(s) ds = \int_{\Omega} \mathcal{M}_{u,v}(g)(x)v(x) dx.$$

Si  $|P_u| = 0$ , la última igualdad se reduce a que

$$\int_{\Omega_*} v_{**}(s)g(s) ds = \int_{\Omega} g(m_u(u(x)))v(x) dx. \quad \square$$

## 2.2 Propiedades principales.

Recordamos la definición de  $V(\Omega)$ :

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^\infty(\Omega), v|_{\partial\Omega} \leq 0\} .$$

Comenzamos con el siguiente resultado que muestra mayor regularidad de las funciones  $\frac{dw_+}{ds}$  cuando  $u \in V(\Omega)$  y  $N=2$ .

**Lema 2.9** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces, para todo  $w \in V(\Omega)$  se tiene que

$$i) \left\| \frac{dw_{+*}}{ds} \right\|_{L^\infty(\Omega_*)} \leq \frac{\|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi}$$

$$ii) \|w_+\|_{L^\infty(\Omega_*)} \leq \frac{|\Omega|}{4\pi} \|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$iii) \left| \frac{d^+}{ds} w_{+*}(|w_+ > w_+(x)|) \right| \leq \frac{\|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \text{ para casi todo } x \in \Omega.$$

**Demostración.** Sea  $w \in V(\Omega)$ . Entonces

$$\int_{\Omega} \Delta w (w_+ - t)_+ dx = \int_{\{w_+ > t\}} \Delta w (w_+ - t) dx \quad \text{para todo } t > 0. \quad (2.5)$$

Puesto que  $(w_+ - t)_+ \in H_0^1(\Omega)$ , integrando por partes,

$$\int_{\Omega} \Delta w (w_+ - t)_+ dx = - \int_{\{w_+ > t\}} |\nabla w_+|^2 dx. \quad (2.6)$$

Mediante argumentos clásicos (ver por ejemplo [M82]), se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Delta w (w_+ - t)_+ dx = - \int_{\{w_+ > t\}} \Delta w dx. \quad (2.7)$$

Combinando (2.5), (2.6) y (2.7), se llega a que

$$- \frac{d}{dt} \int_{\{w_+ > t\}} |\nabla w_+|^2 dx = - \int_{\{w_+ > t\}} \Delta w dx \leq \|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)} |w_+ > t|. \quad (2.8)$$

Procediendo como en Talenti [Ta76] y utilizando la desigualdad isoperimétrica de De Giorgi, obtenemos de (2.8) la siguiente desigualdad para casi todo  $t \in (\inf_{\Omega} w_+, \sup_{\Omega} w_+)$

$$\begin{aligned} 4\pi |w_+ > t| &\leq \left( -\frac{d}{dt} |w_+ > t| \right) \left( -\frac{d}{dt} \int_{\{w_+ > t\}} |\nabla w_+|^2 dx \right) \\ &\leq \left( -\frac{d}{dt} |w_+ > t| \right) |w_+ > t| \|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por tanto,  $4\pi \leq \left( -\frac{d}{dt} |w_+ > t| \right) \|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Ahora, mediante argumentos standard (véase [Ta76, M82]) obtenemos **i)**, i.e.,

$$- \frac{d}{ds} w_{+*}(s) \leq \frac{\|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \quad \text{en casi todo punto de } \Omega_*. \quad (2.10)$$

Puesto que ya sabemos por el Lema 2.4 que  $w_{+*} \in H_{loc}^1(\Omega_*)$ , la desigualdad (2.10) implica que  $w_{+*} \in W^{1,\infty}(\Omega_*)$  y mediante integración se llega a que  $\|w_+\|_{L^\infty(\Omega)} = w_{+*}(0) \leq \frac{|\Omega|}{4\pi} \|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}$  (puesto que  $w_{+*}(|\Omega|) = 0$ ), i.e., **ii)**. Veamos que se satisface **iii)**. Puesto que  $w_+$  y  $w_{+*}$  son equimedibles, obtenemos la identidad

$$\left[ \int_{\Omega \setminus P(w_+)} \left| \frac{dw_{+*}}{ds} (|w_+ > w_+(x)|) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[ \int_{\Omega_* \setminus P(w_{+*})} \left| \frac{d}{ds} w_{+*}(s) \right|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

para todo  $p \in [1, +\infty[$ . Por tanto, de (2.10), deducimos haciendo  $p \rightarrow +\infty$  que

$$- \frac{d^+ w_{+*}}{ds} (|w_+ > w_+(x)|) \leq \frac{\|\Delta w\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \quad \text{en casi todo } x \in \Omega \setminus P(w_+).$$

## 26I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

Además, como  $w_{+*}$  es una función continua por la derecha

$$-\frac{d^+ w_{+*}}{ds}(|w_+ > w_+(x)|) = 0 \quad \text{si } x \in P(w_+)$$

y *iii*) es satisfecho. ■

Para pasar al límite en el método iterativo que posteriormente utilizaremos, necesitamos la convergencia fuerte de las primeras derivadas  $\frac{d}{ds}u_{n*}$ . Para dar un resultado en este sentido, introduciremos la noción de función de coárea regular (véase [AL89, DR93, DR94]):

**Definición 2.4** Sea  $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos la función  $m_{u,0}(t) = |\{x \in \Omega : u(x) > t; \nabla u(x) = 0\}|$  y la función  $m_{u,1}(t) = m_u(t) - m_{u,0}(t)$ . Se dice que  $u$  es una función coárea regular si la medida de Radon  $(m_{u,0})'$  es singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$ .

Damos dos condiciones suficientes para que una función sea coárea regular:

**Lema 2.10** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$  para algún  $p > 1$ . Entonces  $u$  es una función coárea regular. □

Más en general, si  $\Omega$  es un abierto arbitrario de  $\mathbb{R}^N$ , se tiene el siguiente resultado:

**Lema 2.11** Sea  $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ . Si  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ , entonces  $u$  es una función coárea regular. □

La relación entre la noción de función coárea regular y la convergencia de las primeras derivadas de una sucesión  $u_{n*}$  se obtiene a partir de un importante resultado debido a Almgren y Lieb [AL89]:

**Lema 2.12** Sea  $u$  una función de coárea tal que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  y sea  $\Omega$  un abierto regular acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $u_n$  es una sucesión de funciones uniformemente acotada en  $W^{1,p}(\Omega)$  tal que  $u_n$  converge a  $u$  en  $W^{1,1}(\Omega)$ , entonces  $\frac{d}{ds}u_{n*}$  converge a  $\frac{d}{ds}u_*$  en casi todo punto de  $\Omega_*$ . Además, si  $p > N$ , entonces  $\frac{d}{ds}u_{n*}$  converge a  $\frac{d}{ds}u_*$  fuertemente en  $L^q(\Omega_*)$  para cada  $1 \leq q < \bar{q} := \frac{1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{N}}$ . □

De nuevo, el método iterativo que utilizaremos más tarde, requiere conocer la convergencia del reordenamiento relativo de una función fija  $b$  respecto de una sucesión de funciones  $u_n$  convergiendo fuertemente en  $L^1(\Omega)$ . En este sentido, los siguientes lemas dan respuesta satisfactoria a esta cuestión:

**Lema 2.13** [DR94] Sea  $u_n, u$  una sucesión de funciones de  $L^1(\Omega)$  y asumamos que  $u_n$  converge a  $u$  en  $L^1(\Omega)$ . Entonces, para todo  $v \in L^p(\Omega)$  (para algún  $p$  dado, con  $1 < p \leq +\infty$ ) se tiene que

$$(v\chi_{\Omega \setminus P_{u_n}})_{*u_n} \rightharpoonup (v\chi_{\Omega \setminus P_u})_{*u}$$

débilmente en  $L^p(\Omega_*)$  si  $p < +\infty$  y débilmente\* en  $L^\infty(\Omega_*)$  si  $p = +\infty$  (por  $\chi_E$  denotamos la función característica del conjunto  $E$ ).  $\square$

Bajo algunas hipótesis adicionales de regularidad es posible mejorar el resultado anterior:

**Lema 2.14** [R95b] Sea  $v \in L^p(\Omega)$  con  $1 \leq p < +\infty$  y  $u, u_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = \text{med}\{x \in \Omega : \nabla u_n(x) = 0\} = 0$ . Si  $u_n$  converge a  $u$  en  $W^{1,q}(\Omega)$  para algún  $q > N$ , entonces  $v_{*u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_{*u}$  fuertemente en  $L^p(\Omega_*)$ . Además,  $v_{*u_n}(|u_n > u_n(\cdot)|)$  converge a  $v_{*u}(|u > u(\cdot)|)$  fuertemente en  $L^p(\Omega)$ .  $\square$

Consecuencia directa del lema anterior es el

**Lema 2.15** [R95b] Sea  $v \in L^p(\Omega)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$  y sea  $(\lambda_k, \varphi_k)_{k=1}^{+\infty}$  la sucesión de autovalores y autofunciones asociados al operador  $-\Delta$  (operador de Laplace) sobre  $\Omega$  con condiciones Dirichlet, i.e.,  $-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ ,  $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ . Consideremos la familia de espacios vectoriales de dimensión finita  $V_m = \text{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  (el espacio vectorial generado por los vectores  $(\varphi_k)_{k=1}^m$ ). Entonces, la aplicación

$$u \in V_m \setminus \{0\} \rightarrow v_{*u} \in L^p(\Omega_*) \quad 1 \leq p < +\infty$$

y

$$u \in V_m \setminus \{0\} \rightarrow v_{*u}(|u > u(\cdot)|) \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p < +\infty$$

son continuas para la topología fuerte, i.e., fuertemente continuas en  $L^p(\Omega_*)$  y  $L^p(\Omega)$  respectivamente).  $\square$

Como complemento al Lema 2.12, mostramos el siguiente resultado:

**Lema 2.16** Sea  $u_n, u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  tal que

$$\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u_n(x) = 0\} = 0 = \text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}. \quad (2.12)$$

Entonces, si  $u_n$  converge a  $u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$  para algún  $p > N$ ;

$$u'_{n*}(|u > u(\cdot)|) \text{ converge débilmente a } u'_{*}(|u > u(\cdot)|) \text{ en } L^q(\Omega)$$

para cada  $1 \leq q < \bar{q} := \frac{1}{1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{N}}$ .

28I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Demostración.** Sea  $\varphi \in L^q(\Omega)$ . Por el Lema 2.8 y la hipótesis (2.12), se tiene

$$\int_{\Omega} u'_{n*}(|u_n > u_n(x)|)\varphi(x)dx = \int_{\Omega_*} u'_{n*}(s)\varphi_{*u_n}(s)ds .$$

Aplicando el Lema 2.12 y Lema 2.13 (o el Lema 2.14), la última integral converge a

$$\int_{\Omega_*} u'_*(s)\varphi_{*u}(s)ds = \int_{\Omega} u'_*(|u > u(x)|)\varphi(x)dx$$

(usando de nuevo el Lema 2.8). Por tanto, hemos obtenido que  $u'_{n*}(|u_n > u_n(\cdot)|)$  converge débilmente a  $u'_*(|u > u(\cdot)|)$  en  $L^q(\Omega)$  para cada  $1 \leq q < \bar{q}$ . ■

Por último mostramos la siguiente propiedad del reordenamiento relativo

**Lema 2.17** *Sea  $u \in L^1(\Omega)$  tal que  $|P_u| = 0$ . Sea  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Borel tal que  $G(u) \in L^p(\Omega)$  para algún  $1 \leq p \leq +\infty$ . Supongamos que  $b \in L^{p'}(\Omega)$  con  $1/p + 1/p' = 1$  si  $p \neq 1$  y  $p \neq +\infty$ , siendo  $p' = +\infty$  cuando  $p = 1$  y  $p' = 1$  en el caso de ser  $p = +\infty$ . Entonces  $(G(u)b)_{*u}(s) = G(u_*(s))b_{*u}(s)$  para casi todo  $s \in \Omega_*$ .*

**Demostración.** Aplicamos sucesivas veces el Lema 2.8 a  $u, G(u)b(x) \in L^1(\Omega)$  y  $g \in L^\infty(\Omega_*)$ , obteniendo que

$$\int_{\Omega_*} (G(u)b)_{*u}(s)g(s)ds = \int_{\Omega} g(m_u(u(x)))G(u(x))b(x)dx . \quad (2.13)$$

Puesto que suponemos que  $u$  no tiene regiones planas ( $|P_u| = 0$ ), se tiene que  $m_u(u_*(s)) = s$  para cada  $s \in \Omega_*$  (Lema 2.3 o también [PRT93, Proposición 1.3, página 10]) siendo en particular  $u_*(m_u(u(x))) = u(x)$  para cada casi todo  $x \in \Omega$  y por tanto,  $G(u(x)) = G(u_*(m_u(u(x))))$  para casi todo  $x \in \Omega$ . Considerando esta relación en la igualdad (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*} (G(u)b)_{*u}(s)g(s)ds &= \int_{\Omega} g(m_u(u(x)))G(u_*(m_u(u(x))))b(x)dx \\ &= \int_{\Omega} (gG(u_*))(m_u(u(x)))b(x)dx . \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el Lema 2.8, la última integral es igual a

$$\int_{\Omega_*} g(s)G(u_*(s))b_{*u}(s)ds$$

y por tanto

$$\int_{\Omega_*} g(s)(G(u)b)_{*u}(s)ds = \int_{\Omega_*} g(s)G(u_*(s))b_{*u}(s)ds \quad g \in L^\infty(\Omega_*)$$

de donde se deduce la conclusión del lema, ya que por dualidad  $(G(u)b)_*$  es igual a  $G(u_*)b_{*u}$  en  $L^1(\Omega_*)$ . ■

### 3 Una formulación equivalente como un problema no local: el problema $(P_*)$ .

El principal objetivo de esta sección es mostrar que si  $u$  satisface la familia de condiciones (1.55), i.e.,

$$\int_{\{u>t\}} \{F(u)F'(u) + p'(u)b\} dx = j(t_+, u_{+*}(0)) \quad \forall t \in [\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u] \quad (3.1)$$

entonces es posible expresar  $F$  en términos de  $u$ . Esto nos permite reformular el problema (1.53), (1.54) y (1.55) como un problema no local donde hemos eliminado la incógnita  $F$ . En este sentido, reduciremos el problema original de encontrar un par  $(u, F)$  solución de  $(\mathcal{P})$  en el problema simplificado  $(\mathcal{P}_*)$

$$-\Delta u(x) = a(x)F_u(x) + p'(u(x))[b(x) - b_{*u}(|u > u(x)|)] + j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|) \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

$$u - \gamma \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \quad (3.3)$$

donde ahora solamente la función  $u$  es la incógnita del problema y la función  $F_u$  está definida como sigue:

$$F_u(x) := \left[ F_u^2 - 2 \int_{|u>0|}^{|u>u_+(x)|} [p(u_*(s))] b_{*u}(s) ds + 2 \int_{|u>0|}^{|u>u_+(x)|} j'_t(u_{+*}(s), u_{+*}(0))(u'_{+*}(s))^2 ds \right]_+^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Probaremos la equivalencia entre los problemas  $(\mathcal{P})$  y  $(\mathcal{P}_*)$ .

En toda la sección denotamos por  $\hat{m} := \inf_{\Omega} u$  y  $M := \sup_{\Omega} u$  lo cual está justificado puesto que  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Dado  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , definimos la función  $\mathcal{F}$  en términos de  $u$  por

$$\mathcal{F}(t) = \left[ F_u^2 - 2 \int_0^{t_+} p'(s)b_{*u}(|u > s|)ds + 2 \int_0^{t_+} j'_t(s, u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > s|)ds \right]_+^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

para todo  $t \in [\hat{m}, M]$ .

**Lema 3.1** *Dado  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Entonces  $F_u(x) = \mathcal{F}(u(x))$  para casi todo  $x \in \bar{\Omega}$ .*

**Demostración.** Dada en la Proposición 1 de [DR94]. ■

**Lema 3.2** *Sea  $u \in V(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Entonces*

$$-\frac{d^+ u_{+*}}{ds}(|u > t|) \leq \frac{\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \quad \text{para casi todo } t \quad (3.6)$$

### 30I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Demostración.** Es suficiente mostrar (3.6) para  $t \in ]\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u[$ . Sea  $p \in [1, +\infty[$ . Tomando el cambio de variables  $t = u_*(s)$  tenemos que

$$\int_{\inf_{\Omega} u}^{\sup_{\Omega} u} |u'_{+*}(|u > t|)|^p dt = \int_0^{|\Omega|} |u'_{+*}(s)|^{p+1} ds .$$

Del Lema 2.9, se tiene entonces que para todo  $p \in [1, +\infty[$

$$\left( \int_{\inf_{\Omega} u}^{\sup_{\Omega} u} |u'_{+*}(|u > t|)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\|\Delta u\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{1+\frac{1}{p}}}{(4\pi)^{1+\frac{1}{p}}}$$

Haciendo  $p \rightarrow +\infty$  se obtiene (3.6). ■

**Lema 3.3** *Supongamos  $u \in V(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$  y  $\min\{\mathcal{F}(t) : t \in [\hat{m}, M]\} > 0$ ,  $\hat{m} := \inf_{\Omega} u$ ,  $M := \sup_{\Omega} u$ . Entonces **i)**  $\mathcal{F} \in W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$  y **ii)** para casi todo  $t \in [\hat{m}, M]$  se verifica la identidad*

$$\mathcal{F}(t)\mathcal{F}'(t) + p'(t)b_{*u}(|u > t|) = j'_t(t_+, u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > t|)$$

**Demostración.** Puesto que  $b_{*u} \in L^{\infty}(\Omega)$ ,  $p \in C^1(\mathbb{R})$ , entonces, la aplicación  $t \rightarrow \int_0^{t_+} p'(\sigma)b_{*u}(|u > \sigma|)d\sigma$  está en  $W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$ . Gracias a las hipótesis de  $j'_t$  y Lema 3.2, podemos deducir que la aplicación  $t \rightarrow \int_0^{t_+} j'_t(\sigma_+, u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > \sigma|)d\sigma$  pertenece a  $W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$ . Por último, procediendo como en [DR94, Lema 12], obtenemos la conclusión. ■

**Lema 3.4** *Sea  $u \in V(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$  y sea  $\mathcal{F}$  dada por la relación (3.5). Supongamos que  $\min\{\mathcal{F}(t), t \in [\hat{m}, M]\} > 0$ . Entonces, para todo  $t \in [\hat{m}, M]$  se tiene que*

$$\int_{\{u>t\}} \{\mathcal{F}(u)\mathcal{F}'(u) + p'(u)b\}dx = j(t_+, u_{+*}(0)) .$$

**Demostración.** Por el Lema 3.3, si definimos  $N := \{t \in [\hat{m}, M] : \mathcal{F}(t)\mathcal{F}'(t) + p'(t)b_{*u}(|u > t|) \neq j'_t(t_+, u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > t|)\}$ , es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  de medida nula. Entonces  $\{x \in \bar{\Omega} : u(x) \in N\}$  y  $\{s \in \bar{\Omega}_* : u_*(s) \in N\}$  tienen también medida cero (se utiliza la propiedad de ser  $u$  y  $u_*$  equimedibles, que  $\{s \in \bar{\Omega}_* : u_*(s) \in N\} \subset m_u(N)$  y que  $m_u$  es absolutamente continua). Por tanto,

$$\mathcal{F}(u(x))\mathcal{F}'(u(x)) + p'(u(x))b_{*u}(|u > u(x)|) = j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)$$

para casi todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Integrando sobre el conjunto  $\{u > t\}$ , se obtiene

$$\int_{\{u>t\}} \{\mathcal{F}(u(x))\mathcal{F}'(u(x)) + p'(u(x))b_{*u}(|u > u(x)|)\}dx = \int_{\{u>t\}} j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)dx . \quad (3.7)$$

Y por la propiedad de equimesurabilidad,

$$\int_{\{u>t\}} j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)dx = \int_{\{u_*>t\}} j'_t(u_{+*}(s), u_{+*}(0))u'_{+*}(s)ds$$

Si  $t \geq 0$ , para casi todo  $s \in \{u_* > t\}$ , se tiene  $u'_{+*}(s) = u'(s)$ , puesto que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$  y  $u \in V(\Omega)$ . Mediante el cambio de variable  $\theta = u_*(s)$

$$\begin{aligned} \int_0^{u_*>t} j'_t(u_{+*}(s), u_{+*}(0))u'_{+*}(s)ds &= - \int_t^{\sup u_*} j'_t(\theta, u_{+*}(0))d\theta \\ &= -j(u_{+*}(0), u_{+*}(0)) + j(t, u_{+*}(0)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

pero se tiene que  $j(u_{+*}(0), u_{+*}(0)) = 0$  por la hipótesis (1.50). Por tanto, de (3.7) y (3.8), para todo  $t \geq 0$  se verifica

$$\int_{\{u>t\}} [\mathcal{F}(u)\mathcal{F}'(u) + p'(u)b_{*u}(|u > u(x)|)]dx = j(t_+, u_{+*}(0)) .$$

Tomemos ahora  $t < 0$ . De la relación (3.7)

$$\begin{aligned} &\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + p'(u)b_{*u}(|u > u(x)|)]dx \\ &= \int_{\{u \geq 0\}} j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)dx \\ &\quad + \int_{\{t < u < 0\}} j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

(nótese que la última integral es cero). Utilizando de nuevo el cambio de variable anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\{u \geq 0\}} j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))u'_{+*}(|u > u(x)|)dx &= - \int_0^{\sup_{\Omega} u_*} j'_t(\theta, u_{+*}(0))d\theta \\ &= j(0, u_{+*}(0)) - j(u_{+*}(0), u_{+*}(0)) \\ &= j(0, u_{+*}(0)) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10), se llega a obtener que

$$\int_{\{u>t\}} [\mathcal{F}(u)\mathcal{F}'(u) + p'(u)b_{*u}(|u > u(x)|)]dx = j(0, u_{+*}(0)) = j(t_+, u_{+*}(0))$$

para  $t < 0$ , lo que finaliza la demostración. ■

El Lema 3.4 muestra que toda función  $\mathcal{F}$  definida por (3.5) satisface la condición original de los Stellarators (1.55), i.e., (3.1). Probamos un resultado en cierto modo recíproco del anterior:

## 32I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Lema 3.5** *Sea  $u \in V(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Si  $F \in W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$  es una función verificando  $F : [\hat{m}, M] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $F(t) = F_v$  para todo  $t \leq 0$  y para todo  $t \in [\hat{m}, M]$  la condición (3.1) es satisfecha, entonces, necesariamente*

$$F(t) = \left[ F_v^2 - 2 \int_0^{t+} p'(s) b_{*u}(|u > s|) ds + 2 \int_0^{t+} j'_t(u_{+*}(s), u_{+*}(0)) u'_{+*}(|u > s|) ds \right]_+^{\frac{1}{2}}$$

para todo  $t \in [\hat{m}, M]$ .

**Demostración.** Seguimos el mismo tipo de argumento que en [DR94]. De la relación (3.1) deducimos que  $j(u_{+*}(s), u_{+*}(0)) = w(s) := \int_{\{u > u_*(s)\}} \{F(u)F'(u) + p'(u)b\} dx$  para todo  $s \in \bar{\Omega}_*$ . Por tanto, derivando con respecto a  $s$  esta identidad y utilizando el Lema 2.17, para todo  $s \in \Omega_*$ , obtenemos que

$$j'_t(u_{+*}(s), u_{+*}(0)) u'_{+*}(s) = F(u_*(s)) F'(u_*(s)) + p'(u_*(s)) b_{*u}(s)$$

(puesto que  $s = |u > u_*(s)|$  ya que  $|P_u| = 0$ ). El resto de la demostración se sigue como en [DR94, Lemma 15]. ■

De los lemas anteriores obtenemos el resultado principal de esta sección:

**Teorema 3.1** *Sea  $u \in V(\Omega)$  tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Supongamos que  $\hat{m} = \inf_{\bar{\Omega}} u \leq 0$  y  $F_u(x) > 0$  para casi todo  $x \in \Omega$ . Entonces, si  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$  tal que  $F : [\hat{m}, M] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $F \in W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$  y  $F(t) = F_v$  for all  $t \leq 0$ . Entonces, la función  $u$  también es solución de  $(\mathcal{P}_*)$  y además*

$$F(t) = \left[ F_v^2 - 2 \int_0^{t+} p'(\tau) b_{*u}(|u > \tau|) d\tau + 2 \int_0^{t+} j'_t(\tau, u_{+*}(0)) u'_{+*}(|u > \tau|) d\tau \right]_+^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Recíprocamente, si  $u$  es una solución de  $(\mathcal{P}_*)$  y  $\mathcal{F}$  es la función definida en términos de  $u$  según (3.11), entonces,  $(u, \mathcal{F})$  satisface el problema  $(\mathcal{P})$  y además  $\mathcal{F} \in W^{1,\infty}([\hat{m}, M])$ .

**Demostración.** Si  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$ , gracias al Lema 3.5 se tiene que  $F \equiv \mathcal{F}$ , es decir (3.11). Así, por el Lema 3.1,  $F_u(x) = \mathcal{F}(u(x)) = F(u(x))$ . La hipótesis  $F_u(x) > 0$  y el hecho de ser  $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , permiten aplicar el Lema 3.4 y asegurar que  $\min\{F(t) : t \in [\hat{m}, M]\} > 0$ . Entonces, las condiciones del Lema 3.3 son satisfechas y así

$$F(t)F'(t) + p'(t)b_{*u}(|u > t|) = j'_t(t_+, u_{+*}(0)) u'_{+*}(|u > t|)$$

para casi todo  $t \in [\hat{m}, M]$ . En particular, deducimos que  $u$  satisface (3.2) siendo por tanto solución de  $(\mathcal{P}_*)$ . Recíprocamente, si  $u$  satisface  $(\mathcal{P}_*)$  con  $\mathcal{F}$  dada según (3.11), entonces  $\mathcal{F}(u(x)) = F_u(x) > 0$  para  $x \in \bar{\Omega}$  por el Lema 3.1 y el Lema 3.4 puede ser aplicado para obtener que  $(u, \mathcal{F})$  verifican la relación (3.1) de  $(\mathcal{P})$ . La ecuación (1.53) es verificada por  $(u, \mathcal{F})$  gracias al Lema 3.3. ■

## 4 Existencia de soluciones de los problemas $(P_*)$ y $(P)$ .

En esta sección se obtiene la existencia de soluciones del problema equivalente  $(P_*)$  mediante un método de tipo Galerkin, supuestas algunas condiciones adicionales sobre los datos. Puesto que en principio no podemos garantizar que  $\frac{dv_*}{ds}$  posea un buen comportamiento (en consecuencia los términos de la ecuación (3.2) donde aparece esta función) con la sólo hipótesis de regularidad pedida para  $u$  solución de  $(P_*)$ :  $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ ; introduciremos la familia de problemas  $(P_{*\epsilon})$  donde  $\frac{dv_*}{ds}$  se ha truncado de manera adecuada (véase la definición de las funciones de truncatura (4.7)). Establecida esta nueva familia de problemas, utilizamos un método de tipo Galerkin para resolverlos. En una primera etapa, para cada  $\epsilon > 0$ , construimos una familia de problemas finito dimensionales  $(P_{*\epsilon,m})$ . Mediante una técnica de Punto Fijo de Brouwer obtenemos la existencia de soluciones para la familia finito dimensional de problemas  $(P_{*\epsilon,m})$ . Adecuadas estimaciones a priori nos permitirán mediante paso al límite obtener una solución del problema  $(P_{*\epsilon})$ , y ésto para cada  $\epsilon > 0$ . Obtenemos de esta manera una nueva familia de funciones  $u^\epsilon$  soluciones de  $(P_{*\epsilon})$ . De nuevo, adecuadas estimaciones a priori nos permitirán obtener mediante paso al límite una solución de  $(P_*)$ .

### 4.1 Un problema aproximado $(P_{*\epsilon})$ .

Aquí y en lo que sigue, utilizaremos la siguiente notación:

$$I(v(x), \sigma) := \chi_{\{|v > v_+(x)|, |v > 0|\}}(\sigma) \quad \sigma \in \Omega_* \quad (4.1)$$

(función característica de  $\{|v > v_+(x)|, |v > 0|\}$ )

$$F_1(x, v, b_{*v}) := - \int_{\Omega_*} I(v(x), s) [p(v_*)]'(s) b_{*v}(s) ds \quad (4.2)$$

$$F_{\epsilon,2}(x, v) := - \int_{\Omega_*} I(v(x), s) h_\epsilon(v'_{+*}(s)) j'_t(v_{+*}(s), v_{+*}(0)) ds \quad (4.3)$$

$$F_\epsilon(x, v, b_{*v}) = \left[ F_v^2 - 2F_1(x, v, b_{*v}) + 2F_{\epsilon,2}(x, v) \right]_+^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

$$H(v(x), b_{*v}) := p'(v(x)) [b(x) - b_{*v}(|v > v(x)|)] \quad (4.5)$$

$$J_\epsilon(v(x)) := \xi_\epsilon(v'_{+*}(|v > v_+(x)|)) j'_t(v_+(x), v_{+*}(0)) \quad (4.6)$$

para casi todo  $x \in \Omega$  y toda función  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Además, utilizaremos las funciones de truncatura

$$h_\epsilon(t) := \frac{t^2}{1 + \epsilon t^2}, \quad \xi_\epsilon(t) := \frac{t}{1 + \epsilon |t|} \quad (4.7)$$

Por último, adoptaremos la notación  $F_2 := F_{0,2}$ ,  $F := F_0$  y  $J := J_0$  (para  $\epsilon = 0$ ). Ahora, para cada  $\epsilon > 0$  fijo, consideremos el siguiente problema  $(P_{*\epsilon})$ : encontrar una función  $u^\epsilon$  tal que

$$-\Delta u^\epsilon = a F_\epsilon(x, u^\epsilon, b_{*u^\epsilon}) + H(u^\epsilon, b_{*u^\epsilon}) + J_\epsilon(u^\epsilon) \quad \text{en } \Omega \quad (4.8)$$

$$u^\epsilon - \gamma \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega); \quad \forall p \geq 1 \quad (4.9)$$

### 34I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

Para simplificar la condición de contorno, definimos  $w^\epsilon = u^\epsilon - \gamma$ . Para obtener existencia de solución de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ , primero, encontraremos una solución  $w_m^\epsilon$  de algunos problemas auxiliares  $(\mathcal{P}_{*\epsilon, m})$ . Buscaremos  $w_m^\epsilon \in V_m$ , espacio vectorial de dimensión finita, tal que  $V_m \subset V_{m+1} \subset H_0^1(\Omega)$ . Más tarde, adecuadas estimaciones sobre las soluciones  $w_m^\epsilon$  de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon, m})$ , nos permitirán pasar al límite cuando  $m$  tiende a infinito y así encontrar un función  $w^\epsilon$  tal que  $w^\epsilon + \gamma$  es solución de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ .

#### 4.1.1 Método de Galerkin. Existencia de solución del problema finito dimensional $(\mathcal{P}_{*\epsilon, m})$ .

Sean  $(\lambda_k, \varphi_k)_{k \geq 1}$  los autovalores y autofunciones asociados al problema  $-\Delta$  sobre  $\Omega$  con condiciones de contorno Dirichlet, i.e.,  $-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ ,  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Sea  $V_m = \text{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  (espacio lineal generado por los vectores  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ). Sobre  $V_m$  definimos el producto escalar  $[v, w] = \sum_{k=1}^m v^k w^k$  donde  $v = \sum_{k=1}^m v^k \varphi_k$  y  $w = \sum_{k=1}^m w^k \varphi_k$ . Sea  $\|v\|_{V_m} = [v, v]^{\frac{1}{2}}$  la norma asociada.

Ahora, para  $\gamma \leq 0$  fijo, definimos el operador  $T_m^\epsilon : V_m \rightarrow V_m$  mediante la familia de igualdades

$$[T_m^\epsilon v, \varphi] = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} a F_\epsilon(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) \varphi dx - \int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) \varphi dx - \int_{\Omega} J_\epsilon(v + \gamma) \varphi dx \quad \forall v \in V_m, \varphi \in V_m. \quad (4.10)$$

Probaremos que este operador tiene un cero en alguna función  $w_m^\epsilon \in V_m \setminus \{0\}$  (nótese que  $T_m^\epsilon 0 \neq 0$ ). Es claro que si  $w_m^\epsilon$  satisface  $T_m^\epsilon w_m^\epsilon = 0$  en  $V_m$ , entonces  $w_m^\epsilon$  satisface el problema finito dimensional  $(\mathcal{P}_{*\epsilon, m})$  dado por la ecuación

$$-\Delta(w_m^\epsilon + \gamma) = P_m \left\{ a F_\epsilon(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}) + H(w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}) + J_\epsilon(w_m^\epsilon + \gamma) \right\}$$

en  $\Omega$  y  $w_m^\epsilon \in V_m$ , donde  $P_m$  es el operador proyección ortogonal de  $L^2(\Omega)$  sobre  $V_m$ . Para probar que  $T_m^\epsilon$  tiene un cero en  $V_m \setminus \{0\}$  utilizaremos el Lema 4.3 de [L69]. Para ello necesitamos comprobar que  $T_m^\epsilon$  es un operador continuo y coercitivo.

**Proposición 4.1** Si

$$\lambda_1 - \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b > 0 \quad (4.11)$$

entonces

$$[T_m^\epsilon v, v] \xrightarrow{\|v\|_{V_m} \rightarrow \infty} +\infty$$

En particular,  $T_m^\epsilon$  es un operador coercitivo.

**Demostración.** Estimaremos

$$[T_m^\epsilon v, v] = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} a F_\epsilon(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) v dx - \int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) v dx - \int_{\Omega} J_\epsilon(v + \gamma) v dx \quad \forall v \in V_m \quad (4.12)$$

término por término. Comenzamos con  $\int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)})v dx$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)})v dx \right| &= \left| \int_{\Omega} p'((v + \gamma))[b(x) - b_{*(v+\gamma)}(|v + \gamma > (v + \gamma)(x)|)]v dx \right| \\ &\leq \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b \int_{\Omega} v^2 dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde hemos utilizado la hipótesis  $0 \leq p'(s) \leq \lambda s_+$ ,  $\lambda > 0$  (véase (1.51)) y que  $\gamma \leq 0$ . Es también claro que

$$\left| \int_{\Omega} J_{\epsilon}(v + \gamma)v dx \right| \leq \frac{\eta}{\epsilon} \int_{\Omega} |v| dx \quad (4.15)$$

gracias a (1.50) y que la función  $\xi_{\epsilon}$  está acotada por  $1/\epsilon$ .

Estimamos el término  $\int_{\Omega} aF_{\epsilon}(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)})v dx$ . Mayorando los términos no positivos por cero y argumentando como se hizo anteriormente, se tiene que

$$\int_{\Omega} aF_{\epsilon}(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)})v dx \leq \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left[ F_v^2 + \frac{2\eta}{\epsilon} |\Omega| \right]^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |v| dx, \quad (4.16)$$

puesto que  $|h_{\epsilon}| \leq 1/\epsilon$ .

Utilizando las acotaciones anteriores, llegamos a que

$$[T_m^{\epsilon} v, v] \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - C_{\epsilon} \int_{\Omega} |v| dx - \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b \int_{\Omega} v^2 dx \quad (4.17)$$

con  $C_{\epsilon} = \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left[ F_v^2 + \frac{2\eta}{\epsilon} |\Omega| \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\eta}{\epsilon}$ . Aplicando la desigualdad de Young a  $\int_{\Omega} |v| dx$ , se tiene que

$$\int_{\Omega} |v| dx \leq \frac{K^2}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{|\Omega|}{2K^2} \quad \forall K > 0.$$

Eligiendo  $K^2 = \frac{2\delta}{C_{\epsilon}}$  y  $C_{\epsilon\delta} = \frac{C_{\epsilon}^2 |\Omega|}{4\delta}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} [T_m^{\epsilon} v, v] &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 dx - \delta \int_{\Omega} v^2 dx - C_{\epsilon\delta} - \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b \int_{\Omega} v^2 dx \\ &= (\lambda_1 - \delta - \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b) \int_{\Omega} v^2 dx - C_{\epsilon\delta}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Gracias la hipótesis (4.11) obtenemos de (4.18) la coercitividad del operador  $T_m^{\epsilon}$  eligiendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño. ■

**Proposición 4.2**  $T_m^{\epsilon}$  es un operador continuo.

**Demostración.** Puesto que  $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$  es una base ortogonal de  $(V_m, [\cdot, \cdot])$ ,  $T_m^{\epsilon} v$  puede ser expresado de la siguiente manera

$$T_m^{\epsilon} v = \sum_{k=1}^m [T_m^{\epsilon} v, \varphi_k] \varphi_k. \quad (4.19)$$

### 36I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

Así, la continuidad del  $T_m^c$  sobre  $V_m$  es equivalente a que la aplicación

$$V_m \ni v \rightarrow [T_m^c v, \varphi]$$

sea continua, siendo  $\varphi \in V_m$  una función arbitraria. Probaremos la continuidad de las diferentes funciones que aparecen en la definición (4.10) de  $T_m^c$  cuando se fija  $\varphi$ . En lo que sigue, tomaremos una sucesión de funciones  $v_n \in V_m \setminus \{0\}$  y  $v \in V_m$  tal que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{en } V_m .$$

Necesitamos el siguiente lema

**Lema 4.1** *Sea  $(v_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de  $V_m \setminus \{0\}$  y  $v$  en  $V_m \setminus \{0\}$ , tal que*

$$v_n \rightarrow v \quad \text{en } V_m . \quad (4.20)$$

*Entonces se tiene que*

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \quad \text{fuertemente en } C^k(\bar{\Omega}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.21)$$

$$v_{n*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_* \quad \text{fuertemente en } C(\bar{\Omega}_*) \quad (4.22)$$

$$v'_{n+*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v'_{+*} \quad \text{fuertemente en } L^q(\Omega_*) \quad (4.23)$$

$$\forall 1 \leq q < +\infty$$

$$v'_{n+*}(|v > v(\cdot)|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v'_{+*}(|v > v(\cdot)|) \quad \text{fuertemente en } L^q(\Omega) \quad \forall 1 \leq q < 2 . \quad (4.24)$$

**Demostración.** Sobre  $V_m$  todas las normas son equivalentes, por ser un espacio vectorial de dimensión finita, y puesto que  $V_m \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ , se tiene la convergencia (4.21). Como  $\Omega$  es conexo y  $v_n, v \in C^0(\bar{\Omega})$ , entonces  $v_{n*}$  y  $v_*$  son funciones continuas en  $\bar{\Omega}_*$ . Por la propiedad de contracción (Lema 2.3) y (4.21) se obtiene (4.22). Por otra parte, puesto que todo elemento de  $V_m \setminus \{0\}$  es una función córea regular (son funciones analíticas en  $\Omega$ ), se tiene, por el Lema 2.12,

$$\frac{dv_{n*}}{ds} \rightarrow \frac{dv_*}{ds} \quad \text{en } L^q(\Omega_*), \quad \forall q \in [1, 2[ . \quad (4.25)$$

De esta forma,

$$\frac{dv_{n+*}}{ds} \rightarrow \frac{dv_{+*}}{ds} \quad \text{en } L^q(\Omega_*), \quad \forall q \in [1, 2[ . \quad (4.26)$$

Además, puesto que  $V_m \subset V(\Omega)$ , por (4.21)  $v$  es también un elemento de  $V(\Omega)$ . En particular  $|\Delta(v_n - v)|_{C(\bar{\Omega})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Por tanto, del Lema 2.9, se tiene que

$$\left\| \frac{dv_{n+*}}{ds} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\|\Delta v_n\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \leq \text{constante independiente de } n . \quad (4.27)$$

Con esta estimación y (4.26) es fácil probar que

$$\frac{dv_{n+*}}{ds} \rightarrow \frac{dv_{+*}}{ds} \quad \text{en } L^p(\Omega_*), \quad \forall p \in [1, +\infty[.$$

Finalmente, el ultimo aserto del lema, se obtiene de la propiedad de ser equimedibles toda función con su reordenamiento relativo y de la convexidad uniforme de los espacios  $L^p(\Omega)$  for  $p \in ]1, +\infty[$ . ■

**Continuación de la demostración de la Proposición 4.2.** *Continuidad de la aplicación*

$$V_m \ni v \rightarrow \int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)})\varphi dx. \quad (4.28)$$

Equivale a probar que se satiface la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) p'((v_n + \gamma)(x)) [b(x) - b_{*(v_n + \gamma)}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(x)|)] dx = \\ \int_{\Omega} \varphi(x) p'((v + \gamma)(x)) [b(x) - b_{*(v + \gamma)}(|v + \gamma > (v + \gamma)(x)|)] dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

para todo  $\varphi \in V_m$ . Distinguiamos el caso  $v \not\equiv 0$  del caso  $v \equiv 0$ . Puesto que todo elemento de  $V_m \setminus \{0\}$  es una función analítica (recuérdese que  $\varphi_k$  son funciones analíticas), entonces  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla v(x) = 0\} = 0 = \text{med}\{x \in \Omega : \nabla v_n(x) = 0\}$  y por el Lema 2.14, se obtiene

$$b_{(v_n + \gamma)}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(\cdot)|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b_{*(v + \gamma)}(|v + \gamma > (v + \gamma)(\cdot)|) \text{ fuertemente en } L^q(\Omega) \quad (4.30)$$

para todo  $q \geq 1$  ya que  $b$  está en  $L^\infty(\Omega)$ . Gracias a la hipótesis (1.51) podemos obtener del Lema 4.1 la siguiente convergencia

$$p'(v_n + \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p'(v + \gamma) \quad \text{fuertemente en } L^r(\Omega) \quad (4.31)$$

para todo  $r \geq 1$ . Ahora, las convergencias dadas en (4.30) y (4.31) nos permiten obtener (4.29) cuando  $v \not\equiv 0$ . Por último, si  $v \equiv 0$ , la convergencia fuerte en  $L^r(\Omega)$  de  $p'(v_n + \gamma)$  a 0, las estimaciones uniformes en  $L^\infty(\Omega)$  de  $b_{*(v_n + \gamma)}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(\cdot)|)$  y la convergencia débil en  $L^p(\Omega)$  de  $b_{*(v_n + \gamma)}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(\cdot)|)$  a  $b_{*(v + \gamma)}(|v + \gamma > (v + \gamma)(\cdot)|)$  (véase el Lema 2.13) implican (4.29). Por tanto, la aplicación definida por (4.28) es continua.

*Continuidad de la aplicación*

$$V_m \ni v \rightarrow \int_{\Omega} J_\epsilon(v + \gamma)\varphi dx. \quad (4.32)$$

Siguiendo los pasos anteriores, verificamos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_\epsilon((v_n + \gamma)'_{+*}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(x)|)) j'_t((v_n + \gamma)_+(x), (v_n + \gamma)_{+*}(0)) \varphi(x) dx = \\ \int_{\Omega} \xi_\epsilon((v + \gamma)'_{+*}(|v + \gamma > (v + \gamma)(x)|)) j'_t((v + \gamma)_+(x), (v + \gamma)_{+*}(0)) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

### 38I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

para todo  $\varphi \in V_m$ . Puesto que por el Lema 4.1

$$v_n + \gamma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v + \gamma \quad \text{fuertemente en } L^\infty(\Omega),$$

deducimos que

$$(v_n + \gamma)_+(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (v + \gamma)_+(x) \quad \text{casi para todo } x \in \Omega$$

y

$$(v_n + \gamma)_{+*}(0) = \|(v_n + \gamma)_+\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|(v + \gamma)_+\|_{L^\infty(\Omega)} = (v + \gamma)_{+*}(0).$$

La continuidad de  $j'_t$  (1.50) y las anteriores convergencias, implican

$$j'_t((v_n + \gamma)_+(x), (v_n + \gamma)_{+*}(0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} j'_t((v + \gamma)_+(x), (v + \gamma)_{+*}(0)) \quad \forall x \in \Omega.$$

Aplicando de nuevo el Lema 4.1 y la Lipschitz continuidad de la función  $\xi_\epsilon$ , se tiene que

$$\xi_\epsilon((v_n + \gamma)'_{+*}(|v_n + \gamma > (v_n + \gamma)(\cdot)|)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_\epsilon((v + \gamma)'_{+*}(|v + \gamma > (v + \gamma)(\cdot)|))$$

fuertemente en  $L^q(\Omega)$  con  $1 \leq q < \bar{q}$ . Las dos convergencias y la hipótesis (1.50) nos permiten obtener la conclusión.

*Continuidad de la aplicación*

$$V_m \ni v \rightarrow \int_{\Omega} a F_\epsilon(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) \varphi dx. \quad (4.33)$$

Como antes, la primera integral que aparece en la definición de  $F_\epsilon$  (véase (4.4)) converge

$$2 \int_{|v+\gamma>0|}^{|v+\gamma>(v+\gamma)_+(x)|} [p((v + \gamma)_{*})]'(s) b_{*(v+\gamma)}(s) ds$$

gracias a las convergencias fuertes del Lema 4.1, los lemas 2.2 y 2.14 y la hipótesis (1.51). Por último, de manera análoga y utilizando la continuidad de  $j'_t$ , se obtiene que la segunda integral que aparece en la definición de  $F_\epsilon$  converge a

$$2 \int_{|v+\gamma>0|}^{|v+\gamma>(v+\gamma)_+(x)|} j'_t((v + \gamma)_{+*}(s), (v + \gamma)_{+*}(0)) h_\epsilon((v + \gamma)'_{+*}(s)) ds.$$

Las anteriores etapas muestran la continuidad de la aplicación  $T_m^\epsilon$ . ■

**Teorema 4.1** *Supongamos que se satisface (4.11). Entonces existe al menos una función  $w_m^\epsilon \in V_m$  solución del problema  $(\mathcal{P}_{*\epsilon, m})$ , i.e., satisfaciendo*

$$\begin{aligned} [T_m^\epsilon w_m^\epsilon, \varphi] &= \int_{\Omega} \nabla w_m^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} a F_\epsilon(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}) \varphi dx \\ &\quad - \int_{\Omega} H(w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}) \varphi dx - \int_{\Omega} J_\epsilon(w_m^\epsilon + \gamma) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

**Demostración.** Gracias a la coercitividad y continuidad de  $T_m^\epsilon$ , propiedades probadas en las Proposiciones 4.1 y 4.2 respectivamente, es posible aplicar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer (véase [L69, Lema 4.3, p. 55]). ■

### 4.1.2 Estimaciones a priori de las soluciones de $(P_{*\epsilon, m})$ .

En este apartado, supondremos que  $w_m^\epsilon$  es una solución de  $(P_{*\epsilon, m})$ . Tomando en particular  $\varphi = w_m^\epsilon$ , se tiene de (4.34) que

$$\begin{aligned} 0 = [T_m^\epsilon w_m^\epsilon, w_m^\epsilon] &\geq \int_{\Omega} |\nabla w_m^\epsilon|^2 dx - C_\epsilon \int_{\Omega} |w_m^\epsilon| dx + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b \int_{\Omega} |\nabla w_m^\epsilon|^2 dx \\ &\geq (\lambda_1 - \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b - \delta) \int_{\Omega} |w_m^\epsilon|^2 dx - C_{\epsilon\delta} \end{aligned}$$

(veáanse las desigualdades (4.17) y (4.18) en la demostración de la Proposición 4.1) Por tanto, eligiendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, se llega a que

$$\|w_m^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\epsilon \quad (4.35)$$

y

$$\int_{\Omega} |\nabla w_m^\epsilon|^2 dx \leq C_\epsilon \quad (4.36)$$

para alguna constante positiva  $C_\epsilon$  sólo dependiente de  $\epsilon$ . Por último, gracias a la estimación (4.35) y utilizando los mismos argumentos que fueron empleados en la obtención de las estimaciones (4.14), (4.15) y (4.16), se prueba que

$$\begin{aligned} \|\Delta w_m^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|aF_\epsilon(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)})\|_{L^2(\Omega)} + \|H(w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|J_\epsilon(w_m^\epsilon + \gamma)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left[ F_v^2 + \frac{2\eta}{\epsilon} |\Omega| \right]^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b \|w_m^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}} \eta}{\epsilon} \\ &\leq C_\epsilon \end{aligned}$$

donde  $C_\epsilon$  también denota una constante positiva sólo dependiente de  $\epsilon$ . Por tanto, hemos obtenido que  $\{w_m^\epsilon\}$  es una sucesión uniformemente acotada, independientemente de  $m$ , en el espacio de Sobolev  $H^2(\Omega)$ .

## 4.2 Paso al límite. Existencia de soluciones del problema $(P_{*\epsilon})$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  fijo, por la acotación uniforme de  $\{w_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$  en  $H^2(\Omega)$  obtenida en la etapa anterior, y por la reflexividad del espacio de Sobolev  $H^2(\Omega)$ , se tiene que existe una subsucesión de  $\{w_m^\epsilon\}$  (a la cual seguiremos denotando por  $\{w_m^\epsilon\}$ ) y una función  $w^\epsilon \in H^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} w_m^\epsilon &\rightharpoonup w^\epsilon && \text{débil en } H^2(\Omega), \text{ y así,} \\ w_m^\epsilon &\rightarrow w^\epsilon && \text{fuertemente en } W^{1,p}(\Omega) \quad \forall p \geq 1 \end{aligned}$$

gracias a las inclusiones de Sobolev (recuérdese que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). Nuestro proximo objetivo es verificar que  $T_m^\epsilon w_m^\epsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^\epsilon w^\epsilon$ . Aquí,  $T^\epsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  es el operador definido

40I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

por

$$[T^\epsilon v, \varphi] = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} a F_\epsilon(x, v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) \varphi dx - \int_{\Omega} H(v + \gamma, b_{*(v+\gamma)}) \varphi dx - \int_{\Omega} J_\epsilon(v + \gamma) \varphi dx \quad \text{si } v, \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.37)$$

Debido a las estimaciones (4.35) y (4.36) tenemos que

$$\|a F_\epsilon(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\epsilon \quad \forall m \quad (4.38)$$

(véase también (4.16)).

Veamos que

$$F_1(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} F_1(x, w^\epsilon + \gamma, \hat{b}^\epsilon) \quad \text{para casi todo punto,}$$

siendo  $\hat{b}^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$  y tal que

$$b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty}^* \hat{b}^\epsilon \quad \text{débil* en } L^\infty(\Omega_*)$$

para alguna subsucesión gracias a la estimación uniforme  $\|b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}\|_{L^\infty(\Omega_*)} \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Como en [DR94], se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I(w_m^\epsilon(x) + \gamma, \sigma) [p((w_m^\epsilon + \gamma)_*)]'(\sigma) = I(w^\epsilon(x) + \gamma, \sigma) [p((w^\epsilon + \gamma)_*)]'(\sigma) \text{ c.p.t. } \sigma \in \Omega_*.$$

Por tanto, por la convergencia fuerte de  $[p((w_m^\epsilon + \gamma)_*)]'$  a  $[p((w^\epsilon + \gamma)_*)]'$  en  $L^1(\Omega_*)$ , deducimos que

$$I(w_m^\epsilon(x) + \gamma, \cdot) [p((w_m^\epsilon + \gamma)_*)]'(\cdot) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} I(w^\epsilon(x) + \gamma, \cdot) [p((w^\epsilon + \gamma)_*)]'(\cdot)$$

fuertemente en  $L^1(\Omega_*)$  y puesto que  $b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty}^* \hat{b}^\epsilon$ , obtenemos la siguiente convergencia en casi todo punto  $x \in \Omega$

$$F_1(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} F_1(x, w^\epsilon + \gamma, \hat{b}^\epsilon).$$

Los mismos argumentos aplicados ahora a  $F_{\epsilon,2}(x, w_m^\epsilon)$ , observando que, primero,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I(w_m^\epsilon(x) + \gamma, \cdot) h_\epsilon((w_m^\epsilon + \gamma)'_*(\cdot)) = I(w^\epsilon(x) + \gamma, \cdot) h_\epsilon((w^\epsilon + \gamma)'_*(\cdot))$$

en casi todo punto de  $\Omega_*$  y después tenemos la convergencia fuerte en  $L^1(\Omega_*)$ , obtenemos que

$$F_{\epsilon,2}(x, w_m^\epsilon + \gamma) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} F_{\epsilon,2}(x, w^\epsilon + \gamma) \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega.$$

Por tanto, tenemos (para alguna subsucesión) que

$$F_\epsilon(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty}^* F_\epsilon(x, w^\epsilon + \gamma, \hat{b}^\epsilon) \quad \text{débil* en } L^\infty(\Omega). \quad (4.39)$$

Análogamente, se tiene que  $\|b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}(|w_m^\epsilon + \gamma > (w_m^\epsilon + \gamma)(\cdot)|)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$  y por tanto, para alguna subsucesión, existe una función  $\tilde{b}^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$  tal que

$$b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}(|w_m^\epsilon + \gamma > (w_m^\epsilon + \gamma)(\cdot)|) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{b}^\epsilon \quad \text{débil* in } L^\infty(\Omega).$$

Como se hizo anteriormente,  $p'((w_m^\epsilon + \gamma)(\cdot))$  converge a  $p'((w^\epsilon + \gamma)(\cdot))$  fuertemente en  $L^1(\Omega)$  y por ello

$$H(x, w_m^\epsilon + \gamma, b_{*(w_m^\epsilon + \gamma)}(|w_m^\epsilon + \gamma > (w_m^\epsilon + \gamma)(x)|)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} H(x, w^\epsilon + \gamma, \tilde{b}^\epsilon(x)) \quad \text{débil* en } L^\infty(\Omega).$$

Por último, puesto que  $w_{m^*}^\epsilon$  converge en  $L^1(\Omega_*)$  a  $w_*^\epsilon$  (ver el Lema 4.1) tenemos que

$$J_\epsilon(w_m^\epsilon + \gamma) \rightarrow J_\epsilon(w^\epsilon + \gamma) \quad \text{fuertemente en } L^1(\Omega).$$

Entonces,  $w^\epsilon$  verifica el siguiente problema

$$-\Delta w^\epsilon = aF_\epsilon(x, w^\epsilon + \gamma, \hat{b}^\epsilon) + p'(w^\epsilon + \gamma)[b - \tilde{b}_\epsilon] + J_\epsilon(w^\epsilon + \gamma) \quad \text{en } \Omega \quad (4.40)$$

$$w^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (4.41)$$

para cada  $\epsilon > 0$ . Para obtener una solución de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ , sólo resta por identificar  $F_\epsilon(x, w^\epsilon + \gamma, \hat{b}^\epsilon)$  con  $F_\epsilon(x, w^\epsilon + \gamma, b_{*(w^\epsilon + \gamma)})$  y  $\tilde{b}^\epsilon$  con  $b_{*(w^\epsilon + \gamma)}(|w^\epsilon + \gamma > (w^\epsilon + \gamma)(x)|)$ . En este sentido se tiene

**Proposición 4.3** *Si  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla w^\epsilon(x) = 0\} = 0$ , entonces  $\hat{b}^\epsilon = b_{*(w^\epsilon + \gamma)}$  en  $\Omega_*$  y  $\tilde{b}^\epsilon = b_{*(w^\epsilon + \gamma)}(|w^\epsilon + \gamma > (w^\epsilon + \gamma)(x)|)$ . En particular,  $w^\epsilon$  es una solución de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$ .*

**Demostración.** Basta utilizar la analiticidad de  $w_m^\epsilon$  y el Lema 2.14. ■

Una vez dada la Proposición 4.3 que nos garantiza que la función  $w^\epsilon$  (punto de acumulación de la sucesión  $\{w_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$  con la topología débil en  $H^2(\Omega)$ ) es una solución de  $(\mathcal{P}_{*\epsilon})$  cuando se verifica  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla w^\epsilon(x) = 0\} = 0$ ; es natural preguntarse que condiciones adicionales sobre los datos serían las adecuadas para que  $w^\epsilon$  verificase dicha hipótesis. Está cuestión la resolvemos en el siguiente apartado así como la obtención de una solución de  $(\mathcal{P}_*)$  haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , y luego la existencia de soluciones de  $(\mathcal{P})$ .

### 4.3 Existencia de solución de $(\mathcal{P}_*)$ y $(\mathcal{P})$ .

Por lo anterior, sabemos que existe  $w^\epsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  verificando (4.40) y (4.41) para un valor  $\gamma \leq 0$  prefijado. Entonces, si denotamos  $u^\epsilon := w^\epsilon + \gamma$ , la función  $u^\epsilon$  verifica

$$-\Delta u^\epsilon = a[F_v^2 - 2F_1(x, u^\epsilon, \hat{b}^\epsilon) + F_{\epsilon,2}(x, u^\epsilon)]_+^{\frac{1}{2}} + H(u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon) + J_\epsilon(u^\epsilon) \quad \text{en } \Omega \quad (4.42)$$

$$u^\epsilon - \gamma \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (4.43)$$

Recordamos que  $F_1, F_{\epsilon,2}, H$  y  $J_\epsilon$  fueron definidas en (4.2), (4.3), (4.5) y (4.6) y las funciones de truncatura  $h_\epsilon$  y  $\xi_\epsilon$  en (4.7). Comenzamos dando una condición sobre los datos para que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Necesitarémos el siguiente resultado:

42I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Lema 4.2** Supongamos  $\{u^\epsilon\}$  funciones verificando (4.42) y tales que  $u^\epsilon - \gamma \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Si

$$\nu := \left[ 2\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \eta^{\frac{1}{2}} + \lambda \operatorname{osc}_\Omega b \frac{|\Omega|}{4\pi} + \frac{|\Omega|}{4\pi} \eta \right] < 1 \quad (4.44)$$

entonces

$$\|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu}{1 - \nu}.$$

En particular

$$\|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu |\Omega|}{4\pi(1 - \nu)} := S$$

uniformemente en  $\epsilon$ .

**Demostración.** Necesitamos algunas estimaciones a priori. Sea  $\epsilon > 0$  y  $u^\epsilon$  una solución de (4.40) y (4.41). Entonces la función

$$F_\epsilon(x, u^\epsilon, b_{*u^\epsilon}) = \left[ F_\nu^2 - 2F_1 + F_{\epsilon,2} \right]_+^{\frac{1}{2}}$$

con  $F_1$  y  $F_{\epsilon,2}$  dadas por (4.2) y (4.3) respectivamente, está acotada en  $\Omega$  puesto que la integral  $F_1$  es no positiva y  $F_{\epsilon,2}$  es acotada gracias a que  $|\xi_\epsilon| \leq 1/\epsilon$  y  $|j'_i| \leq \eta$  (véase (1.50)). Análogamente, se tiene que el término  $J_\epsilon(u^\epsilon)$ , definido por (4.6), está acotado en  $\Omega$ . Por último  $H(u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon)$ , dado por (4.5) está mayorado por  $\lambda \|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \operatorname{osc}_\Omega b$ . Así,  $\Delta u^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$  para cada  $\epsilon > 0$ . Ahora, aplicando el Lema 2.9, deducimos que

$$0 \leq -u_{*+}^\epsilon{}'(s) \leq \frac{\|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi}. \quad (4.45)$$

Integrando,

$$\|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{|\Omega|}{4\pi} \|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.46)$$

Nuestro siguiente paso es probar que  $\Delta u^\epsilon$  está uniformemente acotada en  $L^\infty(\Omega)$  independientemente del parámetro  $\epsilon$ . Como antes, y utilizando (4.46), tenemos las siguientes estimaciones:

$$0 \leq F_1(x, u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon) \leq \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.47)$$

$$F_{\epsilon,2}(x, u^\epsilon) \leq 2\eta \frac{\|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{(4\pi)^2} |\Omega| \leq \frac{2\eta}{|\Omega|} \|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \quad (4.48)$$

$$|H(u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon)| \leq \lambda \operatorname{osc}_\Omega b \|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.49)$$

$$|J_\epsilon(u^\epsilon)| \leq \frac{\eta}{|\Omega|} \|u_+^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (4.50)$$

Entonces

$$\|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu + \left[ \frac{2\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \eta^{\frac{1}{2}} + \lambda \operatorname{osc}_\Omega b + \frac{\eta}{|\Omega|} \right] \frac{|\Omega|}{4\pi} \|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.51)$$

y de aquí y de la hipótesis (4.44) se obtiene el resultado. ■

Para probar que una  $u^\epsilon$  es solución de  $(P_{*\epsilon})$ , necesitamos verificar la hipótesis  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u^\epsilon(x) = 0\} = 0$ . Así, por la Proposición 4.3 sería

$$\hat{b}^\epsilon = b_{*u^\epsilon} \quad \text{en } L^1(\Omega_*)$$

y

$$\tilde{b}^\epsilon(x) = b_{*u^\epsilon}(|u^\epsilon > u^\epsilon(x)|) \quad \text{en } L^q(\Omega)$$

para algún  $1 < q < 2$  y de esta forma  $u^\epsilon$  verifica el problema  $(P_{*\epsilon})$ . El siguiente teorema da una condición suficiente para que se tenga esta propiedad

**Teorema 4.2** *Sea  $\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$  y  $\eta$  suficientemente pequeño para que*

$$0 < \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} S + \frac{\eta}{|\Omega|} S < \inf_{\Omega} |a| \left[ F_v^2 - \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} S - \frac{2\eta S^2}{|\Omega|} \right]_+^{\frac{1}{2}} \quad (4.52)$$

entonces

$$\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u^\epsilon(x) = 0\} = 0.$$

En particular,  $u^\epsilon$  satisface el problema  $(P_{*\epsilon})$ .

**Demostración.** Lo probamos por contradicción. Supongamos que

$$\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u^\epsilon(x) = 0\} \neq 0. \quad (4.53)$$

Entonces

$$0 = a[F_v^2 + F_1(u^\epsilon, \hat{b}^\epsilon) + F_{\epsilon,2}(u^\epsilon)]_+^{\frac{1}{2}} + H(u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon) + J_\epsilon(u^\epsilon) \quad \text{c.p.t.p. } \{x \in \Omega : \nabla u^\epsilon(x) = 0\}.$$

Utilizando las estimaciones (4.47), (4.48), (4.49) and (4.50), se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda \text{osc}_{\Omega} b S &\geq |H(u^\epsilon, \tilde{b}^\epsilon)| \geq \inf_{\Omega} |a| [F_v^2 - 2F_1(u^\epsilon, \hat{b}^\epsilon) + F_{\epsilon,2}(u^\epsilon)]_+^{\frac{1}{2}} - J_\epsilon(u^\epsilon) \\ \lambda \text{osc}_{\Omega} b S + \frac{\eta}{|\Omega|} S &\geq \inf_{\Omega} |a| \left[ F_v^2 - \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} S - \frac{2\eta S^2}{|\Omega|} \right]_+^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y ésto contradice la hipótesis (4.52), lo que prueba el lema. ■

**Observación 4.1** La condición (4.52) requiere  $\left[ F_v^2 - \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} S - \frac{2\eta S^2}{|\Omega|} \right]_+^{\frac{1}{2}} > 0$  lo que se tiene para  $\lambda$  y  $\eta$  suficientemente pequeños.

Ahora se tiene

44I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Teorema 4.3** *Supongamos que  $\inf_{\Omega} |a| > 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}^-$ . Entonces existe un  $\Lambda > 0$  tal que si  $\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \eta < \Lambda$ , existe  $u$  solución de  $(\mathcal{P}_*)$ . Además  $u \in V(\Omega)$ .*

**Demostración.** Nuestro objetivo es hacer  $\epsilon \rightarrow 0$ . Por la estimación uniforme de  $\|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$  dada por el Lema 4.2, existe una subsucesión de  $(u^\epsilon)$  (la cual seguiremos llamando  $u^\epsilon$ ) y una función  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  tal que

$$\Delta u^\epsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{débil}^* \text{ in } L^\infty(\Omega) .$$

Mediante argumentos standar de regularidad,  $u^\epsilon$  está en un conjunto acotado de  $W^{2,p}(\Omega)$ , para todo  $p \in [1, +\infty[$ . Entonces, tenemos que (para alguna subsucesión)

$$\begin{aligned} u^\epsilon &\rightharpoonup u && \text{débil en } W^{2,p}(\Omega), \\ u^\epsilon &\longrightarrow u && \text{fuertemente en } C^1(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

En particular,  $\alpha = \Delta u$ ,  $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ ,  $u \in V(\Omega)$  y las estimaciones (4.51) y (4.46) del Lemma 4.2 son también ciertas reemplazando  $u^\epsilon$  por  $u$ . Entonces,

$$\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu}{1 - \nu} \tag{4.54}$$

$$\|u_+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu |\Omega|}{4\pi(1 - \nu)} := S . \tag{4.55}$$

Ahora, por el Lema 2.6, se tiene

$$\|\hat{b}^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega_*)} \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|\tilde{b}^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Por tanto  $\hat{b}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{b}$  débil\* in  $L^\infty(\Omega_*)$  y  $\tilde{b}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{b}$  débil\* en  $L^\infty(\Omega)$ . Además

$$u_{+*}^{\epsilon'} \longrightarrow u_{+*}' \quad \text{en } L^p(\Omega_*) \quad \forall p \in [1, +\infty[ . \tag{4.56}$$

De las anteriores convergencias, se deduce que

$$h_\epsilon(u_{+*}^{\epsilon'}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (u_{+*}')^2 \quad \text{en } L^q(\Omega_*) \quad \forall q \in [1, +\infty[ .$$

En consecuencia,

$$I(u^\epsilon(x), \cdot) h_\epsilon(u_{+*}^\epsilon(\cdot)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +\infty} I(u(x), \cdot) u_{+*}'^2$$

en  $L^q(\Omega_*)$  para todo  $q \in [1, +\infty[$  y en casi todo  $x \in \Omega$ . Lo anterior nos lleva a obtener la siguiente convergencia

$$F_{\epsilon,2}(x, u^\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} F_2(x, u) = \int_{|u|>0}^{|u|>u_+(x)} [u_{+*}'(\sigma)]^2 j_t'(u_{+*}(\sigma), u_{+*}(0)) d\sigma$$

para casi todo  $x \in \Omega$  ( $j'_t$  es continua sobre  $\mathbb{R}^+$ ). Puesto que  $|F_{c,2}(x, u^c)| \leq \eta \|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |\Omega|$ , por el Teorema de Lebesgue

$$F_{c,2}(\cdot, u^c) \xrightarrow{c \rightarrow 0} F_2(\cdot, u) \quad \text{en } L^p(\Omega) \text{ para todo } p < +\infty.$$

Mintras que para  $J_c(u^c)$ , primero se obtiene del Lema 2.9 y del Lema 4.2

$$|u_{+*}^c \cdot (|u_+^c > u_+^c(x)|)| \leq \frac{\|\Delta u^c\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \leq \frac{S}{|\Omega|}.$$

Basandonos de nuevo en las estimaciones del Lema 4.2 y puesto que  $|\xi^c(u_{+*}^c \cdot (|u_+^c > u_+^c(x)|)) j'_t(u_+^c(x), u_{+*}^c(0))| \leq \eta \frac{\|\Delta u^c\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \leq \frac{S}{|\Omega|}$  gracias a (1.50), entonces podemos admitir que

$$\xi^c(u_{+*}^c \cdot (|u_+^c > u_+^c(x)|)) j'_t(u_+^c(x), u_{+*}^c(0)) \xrightarrow{c \rightarrow 0} \ell_u \quad \text{d\u00e9bil* en } L^\infty(\Omega).$$

Por tanto  $u$  es una soluci\u00f3n de

$$-\Delta u = a \left[ F_v^2 - 2F_1(x, u, \hat{b}) + 2F_2(x, u) \right]_+^{\frac{1}{2}} + p'(u)[b - \tilde{b}] + \ell_u \quad (4.57)$$

con  $\|\ell_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\eta}{|\Omega|} S$  y  $|p'(u)[b - \tilde{b}]| \leq \lambda \operatorname{osc}_\Omega b \|u_+\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Argumentando como en el Teorema 4.2, pero utilizando la ecuaci\u00f3n (4.57), y puesto que la funci\u00f3n  $u$  obtenida como l\u00edmite de alguna subsucesi\u00f3n de  $(u^c)$  tambi\u00e9n satisface las estimaciones del Lema 4.2, entonces si

$$\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} S + \frac{\eta}{|\Omega|} S < \inf |a| \left[ F_v^2 - \frac{2\eta}{|\Omega|} S^2 \right]_+^{\frac{1}{2}}$$

obtenemos que  $\operatorname{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ . Por tanto deducimos que  $\xi^c(u_{+*}^c \cdot (|u_+^c > u_+^c(x)|)) \xrightarrow{c \rightarrow 0} u_{+*}'(|u > u_+(x)|)$  en casi todo  $x \in \Omega$  (v\u00e9ase el Lemma 2.2). Entonces  $\ell(\cdot) = u_{+*}'(|u > u_+(\cdot)|)$  en casi todo punto de  $\Omega$  probando de esta manera que

$$\xi^c(u_{+*}^c \cdot (|u_+^c > u_+^c(\cdot)|)) j'_t(u_+^c(\cdot), u_{+*}^c(0)) \xrightarrow{c \rightarrow 0} u_{+*}'(|u > u_+(\cdot)|) \text{ fuerte en } L^p(\Omega), \forall p \in [1, +\infty[.$$

Por \u00faltimo, en el supuesto del Lema 4.2 y del Teorema 4.2, es posible aplicar sucesivas veces la Proposition 4.3 primero para identificar  $\tilde{b}^c(x) = b_{*u^c}(|u^c > u^c(x)|)$  en  $\Omega$  y  $\hat{b}^c(s) = b_{*u^c}(s)$  en  $\Omega_*$ , y despu\u00e9s  $\tilde{b}(x) = b_{*u}(|u > u(x)|)$  en  $\Omega$  y  $\hat{b}(s) = b_{*u}(s)$  en  $\Omega_*$ , obteniendo as\u00ed, que  $u$  es una soluci\u00f3n de  $(P_*)$ . ■

El principal resultado, presentado en la secci\u00f3n de introducci\u00f3n, es ahora consecuencia del teorema anterior y del Teorema 3.1. En efecto,

**Demostraci\u00f3n del Teorema 1.1.** En el supuesto de que  $\Lambda > 0$  sea tal que son ciertas (4.11), (4.44) y (4.52), entonces el Teorema 4.3 garantiza la existencia de una soluci\u00f3n  $u$  del problema  $(P_*)$  y tal que  $u \in V(\Omega)$ . As\u00ed, las hip\u00f3tesis del Teorema 3.1 son satisfechas por esta funci\u00f3n  $u$ , en particular la condici\u00f3n  $\operatorname{med}\{x \in \Omega : \nabla(x) = 0\} = 0$ , lo que implica que el par  $(u, \mathcal{F})$  es soluci\u00f3n de  $(P)$ . ■

## 5 Propiedades cualitativas de la región ocupada por el plasma.

En esta sección obtendremos algunos resultados cualitativos referentes a la medida de la región encerrada por las curvas de nivel de una solución del problema (1.53), (1.54) y (1.55); es decir, se estudiará la medida del conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$ . Por tanto, si tenemos en cuenta que la región que ocupa el plasma viene dada por el conjunto de  $x \in \Omega$  tales que  $u(x) > 0$  (recordar que  $\{u(x) = 0\}$  es la frontera libre y que  $u$  es una función negativa en la zona de vacío); habremos obtenido una estimación sobre la medida de la región ocupada por el plasma. Este tipo de cuestiones ya han sido abordadas para modelos relativos a máquinas Tokamak. Así por ejemplo, Mossino y Temam consideran en [M82, MT] el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda g(\delta(u)) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = \gamma \text{ (constante desconocida)} & \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I \end{cases}$$

donde  $\Omega$  es un abierto regular de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ),  $\delta(u)(x) = \text{med}\{y \in \Omega : u(x) < u(y) < 0\}$ ,  $I$  (representa la corriente total que circula por el plasma) y  $\lambda$  son constantes positivas y  $g$  es una función continua sobre  $[0, |\Omega|]$  que se anula en cero y es positiva en  $]0, |\Omega|]$ . En dicha situación la región ocupada por el plasma viene dada por  $\{u < 0\}$  y el conjunto  $\{u \geq 0\}$  es la región de vacío. Para este problema encuentran que

$$0 < G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) = |u < 0| < |\Omega|$$

siendo  $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ .

La técnica que aquí desarrollaremos para la obtención de estimaciones sobre  $|u > t|$  se basa en la obtención de estimaciones sobre  $\frac{d}{dt} \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 dx$  y en la utilización de desigualdades isoperimétricas para el perímetro de De Giorgi (véase [PRT93, página 33], [Ma85, página 296], [Gi84, Definición 1.6, página 5], [FIR60]). Comenzaremos esta sección probando que todo par  $(u, F)$  solución de  $(\mathcal{P})$  verifica la propiedad  $\inf_{\Omega} u = u|_{\partial\Omega} = \gamma$ . Por último, encontraremos algunas estimaciones de interés referentes a toda solución de  $(\mathcal{P})$ .

En la obtención de varios de los resultados que en esta sección se muestran, necesitaremos del siguiente resultado clásico:

**Lema 5.1** Si  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$ , entonces para cada  $t \in [\inf_{\Omega} u, \sup_{\Omega} u]$

$$\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 dx = - \int_t^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} \Delta u dx \quad \square \quad (5.1)$$

Consideramos el problema auxiliar de encontrar  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para algún  $p \geq 1$

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= G(x) && \text{en } \Omega \\ u &= \gamma && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

siendo  $\gamma \leq 0$  y  $G$  una función de  $L^p(\Omega)$  y  $p > N$ . Entonces la solución  $u$  de (5.2) verifica la propiedad dada por el siguiente teorema:

**Teorema 5.1** *Sea  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para algún  $p > N$  solución de (5.2). Entonces si  $\int_{\Omega} G(x) \neq 0$ , necesariamente*

$$\inf_{\Omega} u = u|_{\partial\Omega} = \gamma.$$

Además, si  $\inf_{\Omega} u \neq \gamma$ , entonces  $\int_{\Omega} G(x) = 0$ .

**Demostración.** Del teorema de Rellich-Kondrachov [Br84, Teorema IX.16, página 169] se obtiene que  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Por tanto, existe  $\inf_{\Omega} u$ . Si  $u$  es solución de (1.53), (1.54) y (1.55), entonces  $u|_{\partial\Omega} \equiv \gamma$ . Calcularemos la integral sobre  $\Omega$  de  $-u\Delta u$  argumentando de dos formas diferentes. En primer lugar, se tiene que

$$\int_{\Omega} -u\Delta u dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dl + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (5.3)$$

por el teorema de Green y de igual manera

$$\int_{\Omega} -\Delta u dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl. \quad (5.4)$$

Puesto que  $u$  es solución de (5.2), se tendrá entonces que

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl = \int_{\Omega} G(x) dx \quad (5.5)$$

según (5.4) y (5.2). Por consiguiente, se obtiene la igualdad

$$\int_{\Omega} -u\Delta u dx = \gamma \int_{\Omega} G(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (5.6)$$

de (5.3), (5.4), (5.5) y ser  $u|_{\partial\Omega} = \gamma$ .

Para obtener otra expresión de  $\int_{\Omega} -u\Delta u dx$ , necesitamos el siguiente lema:

**Lema 5.2** *Consideremos las funciones  $u \in L^{\infty}(\Omega)$  y  $v \in L^1(\Omega)$ . Entonces se verifica que*

$$\int_{\Omega} uv dx = m \int_{\Omega} v dx + \int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} v dx \quad (5.7)$$

siendo  $m = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} u$ .

48I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Demostración del Lema 5.2.** En las hipótesis del lema, se tiene que

$$\int_{\Omega} u v dx = m \int_{\Omega} v dx + \int_{\Omega} (u - m) v dx . \quad (5.8)$$

Por el teorema de Fubini, la última integral es igual a  $\int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} v dx$ . En efecto,

$$\int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} v dx = \int_m^{+\infty} ds \int_{\Omega} \chi_{\{y \in \Omega : u(y) > s\}} v dx = \int_m^{+\infty} ds \int_{\Omega} \chi_{\{t \in \mathbb{R} : u(x) > t\}} v dx .$$

Aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} v dx &= \int_{\Omega} v \int_m^{+\infty} \chi_{\{t \in \mathbb{R} : u(x) > t\}} ds dx \\ &= \int_{\Omega} v \int_m^{u(x)} ds dx = \int_{\Omega} (u - m) v dx . \end{aligned}$$

El resultado del lema se obtiene inmediatamente de este hecho y de (5.8). ■

**Continuación demostración del Teorema 5.1.** Aplicando el lema con  $v(x) := G(x)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -u \Delta u dx &= m \int_{\Omega} G(x) dx + \int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} G(x) dx \\ &= m \int_{\Omega} G(x) dx + \int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} -\Delta u dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde la última identidad es consecuencia del hecho de que  $u$  es solución de (5.2) (se integra la ecuación que verifica  $u$  en  $\{u > s\}$ ). Ahora, por el Lemma 5.1,

$$\int_m^{+\infty} ds \int_{\{u>s\}} -\Delta u dx = \int_{\{u>m\}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx . \quad (5.10)$$

(la última igualdad viene de ser  $|\nabla u|(x) = 0$  en casi todo  $x \in \{y \in \Omega : u(y) = m\}$ ). Finalmente, por (5.10) y (5.9) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} -u \Delta u dx = m \int_{\Omega} G(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx . \quad (5.11)$$

Para obtener el resultado del teorema, basta restar (5.6) y (5.11), llegando de esta forma a que

$$(\gamma - m) \int_{\Omega} G(x) dx = 0 ,$$

siendo entonces  $m = \gamma$  si  $\int_{\Omega} G(x) dx \neq 0$  y  $\int_{\Omega} G(x) dx = 0$  si  $m \neq \gamma$ . ■

**Observación 5.1** Si  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  y  $G \in L^2(\Omega)$ , es conocido que

$$\min\{\inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} G\} \leq u(x) \leq \max\{\sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} G\}$$

para  $x \in \Omega$  (principio del máximo). El teorema anterior nos asegura que  $\gamma = u|_{\partial\Omega} \leq u(x) \quad \forall x$ .

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene que toda solución  $(u, F)$  de  $(\mathcal{P})$  es tal que  $\inf_{\Omega} u = u|_{\partial\Omega} = \gamma$ . En efecto: una vez que  $(u, F)$  es solución del problema, definimos  $G := aF(u) + F(u)F'(u) + p'(u)b$ ,  $x \in \Omega$ , siendo  $G \in L^p(\Omega)$  para cada  $p \geq 1$  por verificarse (1.53) y estar  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$ . Por otra parte, gracias a que se satisface (1.55),

$$\int_{\Omega} G dx = \int_{\Omega} aF(u) dx + j(0, u_{+*}(0)). \quad (5.12)$$

Puesto que  $aF(u) \geq 0$  en  $\Omega$  y en particular estrictamente positiva donde  $u$  es una función negativa ( $aF(u) = aF_v$ , en estos puntos), se tiene que  $\int_{\Omega} aF(u) dx \neq 0$ . Por último  $j(0, u_{+*}(0)) \geq 0$  por hipótesis (véase (1.50)). Con ésto y (5.12) se obtiene que la integral de  $G$  sobre  $\Omega$  es distinta de cero, en consecuencia, gracias al Teorema 5.1 hemos probado la siguiente propiedad:

**Corolario 5.1** Sea  $(u, F)$  una solución de  $(\mathcal{P})$ . Entonces,  $\min_{\Omega} u = u|_{\partial\Omega} = \gamma$ . ■

A continuación, daremos una condición suficiente para la existencia de frontera libre y algunas propiedades cualitativas sobre la medida de la región ocupada por el plasma así como una estimación en la norma  $L^1$  de  $u_+$ .

Sea  $\varphi_1$  la autofunción normalizada asociada al primer autovalor  $\lambda_1$ , para el operador  $-\Delta$  con condición de Dirichlet, ésto es,  $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$  y  $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$  sobre  $\Omega$ . Además, podemos renormalizarla de manera que  $\lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 dx = 1$ .

**Teorema 5.2** Supongamos que

$$-\gamma < F_v \int_{\Omega} a(x)\varphi_1(x) dx := \gamma_0,$$

entonces, toda solución de  $(\mathcal{P}_*)$  satisface  $u_+ \neq 0$ .

**Demostración.** Se procede como en [DR94, Teorema 8]. La demostración se basa en la identidad siguiente:

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u\varphi_1 dx - \gamma = \int_{\Omega} aG(u)\varphi_1 dx + \int_{\Omega} H(u, b_{*u})\varphi_1 dx + \int_{\Omega} J(u)\varphi_1 dx \quad (5.13)$$

50I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

donde  $G(u) = [F_v^2 - 2F_1(x, u, b_{*u}) + 2F_2(x, u)]_+^{\frac{1}{2}}$  (nótese que  $u$  satisface la ecuación (3.2), i.e.,  $-\Delta u = aG(u) + H(u, b_{*u}) + J(u)$ ). Entonces

$$\int_{\Omega} \nabla(u - \gamma) \nabla v dx = \int_{\Omega} aG(u)v dx + \int_{\Omega} H(u, b_{*u})v dx + \int_{\Omega} J(u)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Eligiendo  $v = \varphi_1$  y considerando que  $\int_{\Omega} \nabla(u - \gamma) \nabla \varphi_1 dx = \int_{\Omega} (u - \gamma)(-\Delta \varphi_1) dx$  y que  $-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$  sobre  $\Omega$ , se obtiene (5.13). Para finalizar la demostración del Teorema 5.2, argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que  $u_+ \equiv 0$ . Por tanto, la relación (5.13) se reduce a

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx = \gamma + F_v \int_{\Omega} a \varphi_1 dx \quad (5.14)$$

puesto que  $F_1(x, u, b_{*u}) = F_2(x, u) = H(u, b_{*u}) = J(u) = 0$  si  $u_+ \equiv 0$  (véase la definición de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $H$  y  $J$ ). En este caso, la primera integral de (5.14) es no positiva, y por tanto la relación (5.14) implica  $-\gamma \geq F_v \int_{\Omega} a \varphi_1 dx$ . Esta relación contradice la elección de  $\gamma$ , lo que prueba el teorema. ■

Estimemos el valor

$$|u > 0| = \int_{\{u > 0\}} dx.$$

Esta cantidad puede ser estimada en términos de  $\int_{\Omega} u_+ dx$  si consideramos que

$$\int_{\Omega} u_+ dx \leq |u > 0| \max_{\Omega} u_+.$$

Sin embargo, ya disponemos de la estimación  $\max_{\Omega} u_+ \leq S$  (véase el Lema 4.2). Así, gracias a la última desigualdad, tenemos que

$$|u > 0| \geq \frac{1}{S} \int_{\Omega} u_+ dx.$$

Estimaremos la norma  $L^1$  de  $u_+$ . Para ello, utilizamos la identidad (5.13). Si expresamos  $u$  como  $u = u_+ - u_-$  y agrupamos adecuadamente, de (5.13) se obtiene que

$$\int_{\Omega} (aG + \lambda_1 u_-) \varphi_1 dx + \gamma = \int_{\Omega} u_+ \varphi_1 [\lambda_1 - \lambda(b - b_{*u}(|u > u(x)|))] dx - \int_{\Omega} J(u) \varphi_1 dx \quad (5.15)$$

donde hemos utilizado la definición  $H$ . Por (5.15), la estimación (4.50) y las estimaciones dadas en Lemma 4.2, deducimos que

$$\begin{aligned} & \gamma + F_v \int_{\Omega} a \varphi_1 dx + \int_{\Omega} a |j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))|^{\frac{1}{2}} dx \\ & + \int_{\Omega} a [G - F_v - |j'_t(u_+(x), u_{+*}(0))|^{\frac{1}{2}}] \varphi_1 dx \\ & \leq [\lambda_1 + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b] \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} u_+ dx + \eta S \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mayorando por 0 la segunda integral de (5.16), tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma + F_\nu \int_{\Omega} a\varphi_1 dx &\leq [\lambda_1 + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b] \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} u_+ dx + \eta M_+ \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|a\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} [F_\nu + |j'(u_+(x), u_{+\star}(0))|^{\frac{1}{2}} - G] \varphi_1 dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ahora, podemos estimar la última integral como sigue:

$$\begin{aligned} G &= [F_\nu^2 - 2F_1(x, u, b_{\star u}) + 2F_2(x, u)]_+^{\frac{1}{2}} \leq [F_\nu^2 + F_2x, (u)]_+^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} F_\nu + 2 \left\| \int_{|u|>0}^{|u|>u_+(x)} j'_i(u_{+\star}(s), u_{+\star}(0)) (u'_{+\star}(s))^2 ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} F_\nu + 2\eta^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u'_{+\star}\|_{L^\infty(\Omega_\star)} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} F_\nu + 2\eta^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \frac{\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\pi} \quad (\text{por el Lema 2.9}) \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} F_\nu \left[ 1 + \frac{2\eta^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{1-\nu} \right] := \nu_0 \quad (\text{por el Lema 4.2}) \end{aligned}$$

habiendonos basado en la propiedad  $\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu}{1-\nu}$  de la solución  $u$  de  $(\mathcal{P}_\star)$  obtenida mediante el proceso aproximativo desarrollado la Sección 4.1. Combinando esta estimación con la desigualdad (5.17), obtenemos

$$\frac{\gamma - \gamma_0 - \eta S \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} - \nu_0}{(\lambda_1 + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b) \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq \int_{\Omega} u_+(x) dx. \quad (5.18)$$

En consecuencia, hemos probado el siguiente resultado:

**Corolario 5.2** *Supongamos se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1 y 5.2. Sea  $(u, F)$  una solución de  $(\mathcal{P})$  obtenida como en el Teorema 1.1. Entonces*

$$|u > 0| \geq \frac{\gamma - \gamma_0 - \eta S \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} - \nu_0}{(\lambda_1 + \lambda \operatorname{osc}_{\Omega} b) \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}}. \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado nos da una estimación sobre las cantidades  $|u > t|$  cuando  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$  con  $j \equiv 0$  (i.e.,  $u, F$  verifican (1.56)) y cuando aun siendo  $j \not\equiv 0$  (i.e.,  $u, F$  verifican (1.55)), el resultado es válido si  $(u, F)$  son una solución según el Teorema 1.1 satisfaciendo (4.54) y (4.55). Antes de dar el enunciado y su demostración, conviene recordar que si  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$  con  $j \equiv 0$ , entonces

$$\|aF(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_\nu.$$

Si es una solución de  $(\mathcal{P})$  según el Teorema 1.1, entonces, por el Lema 2.9

$$\|aF(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left[ F_\nu^2 + \frac{2\eta S^2}{|\Omega|} \right]_+^{\frac{1}{2}}.$$

## 52I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

**Proposición 5.1** Si  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$  con  $j \equiv 0$ , definimos  $K := \|a\|_{L^\infty(\Omega)} F_v$ . Y si  $(u, F)$  es solución de  $(\mathcal{P})$  con  $j \not\equiv 0$ , dada por el Teorema 1.1 y además suponemos  $j \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , definimos  $K := \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left[ F_v^2 + \frac{2\eta S^2}{|\Omega|} \right]_+^{\frac{1}{2}} + \|j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)}$ . Entonces, se tiene que

$$|u > t| \leq |\Omega| e^{-\frac{4\pi}{K}(t-\gamma)}$$

para cada  $t \in [\inf_\Omega u, \sup_\Omega u]$ . En particular se tiene la siguiente estimación sobre la medida de la región ocupada por el plasma:

$$|u > 0| \leq |\Omega| e^{\frac{4\pi}{K\gamma}}.$$

**Demostración.** Como se hizo en la demostración del Lema 2.9, se obtiene

$$4\pi |u > t| \leq \left( -\frac{d}{dt} |u > t| \right) \left( -\int_{\{u>t\}} \Delta u dx \right).$$

Puesto que  $u, F$  verifican (1.53), la anterior desigualdad nos da

$$4\pi |u > t| \leq \left( -\frac{d}{dt} |u > t| \right) \left( \int_{\{u>t\}} aF(u) dx + j(t_+, u_{+\star}(0)) \right).$$

Mayorando por  $K$  (distinguiendo si  $j \equiv 0$  o  $j \not\equiv 0$ ), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{4\pi}{K} \leq \frac{-\frac{d}{dt} |u > t|}{|u > t|}.$$

Puesto que  $|P_u| = 0$  es posible integrar entre  $t_0$  y  $t > t_0$  en  $]\inf_\Omega u, \sup_\Omega u[$  la anterior ecuación diferencial obteniendo la primera conclusión. La demostración finaliza al tomar  $t_0 = \inf_\Omega u$ ,  $t = 0$  y por el Corolario 5.1 ser  $\gamma = \min_\Omega u$ . ■

## 6 “Unicidad parcial” de soluciones.

En esta Sección se dará un resultado de *unicidad parcial* de soluciones para el problema de encontrar  $(u, F)$  verificando (1.53) y (1.54) donde se supone, además, la condición de corriente nula en el interior de las regiones limitadas por las superficies magnéticas, modelizada matemáticamente por la familia de igualdades (1.56) donde  $t$  representa una parametrización de dichas superficies magnéticas. Tal condición se supone satisfecha en el marco ideal debido a la estructura y disposición de las bobinas exteriores en las máquinas Stellarators. Un resultado de unicidad global atañe, por tanto, a la no multiplicidad de ambas funciones  $u$  y  $F$  verificando  $(\mathcal{P})$ , lo que parece presentar una gran dificultad.

Una primera aproximación en el estudio de la unicidad de soluciones  $(u, F)$  de  $(\mathcal{P})$ , es la que aquí se desarrolla.

**Definición 6.1** Diremos que el problema  $(\mathcal{P})$  tiene *unicidad parcial en  $u$*  si dados  $(u, F)$  y  $(v, F)$  soluciones de  $(\mathcal{P})$ , entonces  $u = v$ .

Con esta noción de unicidad parcial, se pasa de estudiar el problema de partida con dos componentes  $(u, F)$  a otro cuya única componente es la función  $u$  (supuesta fijada la función  $F$ ). Esto simplifica el problema. Sin embargo, al no conocer la monotonía del término  $F(u)F'(u)$ , la unicidad parcial en  $u$  presenta un gran interés. Por otra parte, si  $(u, F)$  es una solución de  $(\mathcal{P})$ , gracias al Lema 3.5, la función  $F$  queda unívocamente determinada por  $u$  como  $F = \mathcal{F}$ , siendo  $\mathcal{F}$  dada por la ecuación (3.5) con  $j \equiv 0$ . La técnica utilizada se basa en [Pu77] por lo cual necesitaremos referirnos a la solución  $w$  del siguiente problema lineal de autovalores

$$\left. \begin{aligned} -\Delta w &= \lambda c(x)w & \text{en } \Omega \\ w &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

donde  $c$  es una función que identificaremos más tarde.

**Teorema 6.1** Sea  $(u, F)$  una solución de  $(\mathcal{P})$  y llamemos  $f := F$ . Supongamos que la función  $ff'$  es lipschitziana sobre  $\mathbb{R}$ , es decir,

$$|ff'(t) - ff'(\hat{t})| \leq K|t - \hat{t}| \quad \forall t, \hat{t} \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

para alguna constante  $K$  positiva. Supongamos  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño de manera que se verifiquen las condiciones

$$\|a\|_{L^2(\Omega)} < C \frac{F_v}{\sqrt{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}} \quad (6.3)$$

para cierta constante positiva  $C$ , y

$$\lambda < \lambda_2 \quad (6.4)$$

siendo  $\lambda_2$  el segundo autovalor del problema (6.1) para

$$c(x) = \tilde{C} \|b\|_{L^\infty(\Omega)} a(x) + b(x) + \frac{K}{\lambda}, \quad \tilde{C} = \frac{\hat{M}}{f(\hat{M})}, \quad \hat{M} = \hat{C} \|a\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.5)$$

para cierta constante positiva  $\hat{C}$  dependiendo de  $F_v$ ,  $\lambda$ ,  $\|b\|_{L^\infty(\Omega)}$  y la constante de Poincaré de  $\Omega$ . Entonces,  $u$  es la única solución del problema

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta u &= af(u) + f(u)f'(u) + p'(u)b & \text{en } \Omega \\ u - \gamma &\in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) & 1 \leq p < +\infty \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

con  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ .

En la demostración del teorema necesitaremos de varias propiedades y estimaciones de toda solución de (1.53), (1.54) y (1.56), es decir, solución de  $(\mathcal{P})$  supuesto  $j \equiv 0$ .

**Lema 6.1** Si

$$\operatorname{esssup}_{\Omega} u(x) < \frac{F_v}{\sqrt{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}} \quad (6.7)$$

entonces la función  $f$  es estrictamente decreciente sobre el intervalo  $[0, \operatorname{esssup}_{\Omega} u]$  y estrictamente positiva y Lipschitziana en  $[\operatorname{essinf}_{\Omega} u, \operatorname{esssup}_{\Omega} u]$ . Más concretamente, se tiene que

$$|f(t) - f(\hat{t})| \leq \frac{\lambda u_{+*}(0) \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}{f(u_{+*}(0))} |t - \hat{t}| \quad \forall t, \hat{t} \in [\operatorname{essinf}_{\Omega} u, \operatorname{esssup}_{\Omega} u]. \quad (6.8)$$

Por último,  $f$  es estrictamente decreciente sobre el intervalo  $[0, \operatorname{esssup}_{\Omega} u]$ .

En lo que sigue denotamos  $\hat{m} := \operatorname{essinf}_{\Omega} u$  y  $M := \operatorname{esssup}_{\Omega} u$ , lo que está justificado al ser  $u$  una función de  $L^\infty(\Omega)$ .

**Demostración.** Para cada  $t$  definimos la función

$$G(t) = F_v^2 - 2 \int_0^{t_+} p'(\tau) b_{*u}(|u > \tau|) d\tau.$$

Dado que  $b > 0$  en casi todo punto de  $\Omega$ , también es  $b_{*u}(|u > t|) > 0$  para casi todo  $t \in [\hat{m}, M]$  (véase el Corolario 2.2), al igual que la función  $p'$  en  $\mathbb{R}_+$  (hipótesis (1.51)). Por consiguiente el integrando que aparece en la definición de  $G$  es estrictamente positivo para casi todo  $\tau \in [0, M]$ , implicando que  $G$  es una función estrictamente decreciente y por tanto  $f = \sqrt{G}$  también lo es.

Utilizando la estimación  $\|b_{*u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$ , se llega a que

$$\begin{aligned} G(t) &\geq F_v^2 - 2\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{t_+} p'(\tau) d\tau \\ &\geq F_v^2 - \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} t_+^2 \quad t \in [\hat{m}, M] \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la hipótesis (1.51) sobre  $p$ . En particular,

$$G(t) \geq F_v^2 - \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} (M)^2 \quad \forall t \in [\hat{m}, M]$$

obteniendo que  $G(t) > 0$  con  $t \in [\hat{m}, M]$  gracias a la hipótesis (6.7) del lema. En consecuencia  $f = \sqrt{G}$  es positiva en  $[\hat{m}, M]$ .

Si ahora tomamos  $t, \hat{t} \in [\hat{m}, M]$ , con  $\hat{t} \geq t$ ,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(\hat{t})| &= \frac{|f^2(t) - f^2(\hat{t})|}{f(t) + f(\hat{t})} = \frac{|G(t) - G(\hat{t})|}{f(t) + f(\hat{t})} = \frac{2 \int_t^{\hat{t}} p'(\tau) b_{*u}(|u > \tau|) d\tau}{f(t) + f(\hat{t})} \\ &\leq \frac{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} (\hat{t}_+^2 - t_+^2)}{2 \inf_{s \in [\hat{m}, M]} f(s)} = \frac{\lambda (\hat{t}_+ + t_+) \|b\|_{L^\infty(\Omega)} (\hat{t} - t)}{2 \inf_{s \in [\hat{m}, M]} f(s)} \\ &\leq \frac{\lambda u_{+*}(0) \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}{f(u_{+*}(0))} |\hat{t} - t| \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de  $0 \leq \hat{t}_+, t_+ \leq M = u_{+*}(0)$  y de la monotonía de  $f$ . ■

El siguiente resultado muestra una estimación de  $\text{esssup}_\Omega u_+$ . Se recuerda que la solución obtenida mediante el método de Galerkin verifica  $\|u_{+*}\| \leq \frac{2^{1/2}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}F_v|\Omega|}{4\pi(1-\nu)}$

**Lema 6.2** *Existe una constante positiva  $\hat{C}$  dependiente sólo de  $F_v, \lambda, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$  y la constante de Poincaré de  $\Omega$ , tal que toda posible solución  $(u, F)$  de  $(\mathcal{P})$  con  $u - \gamma \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$   $1 \leq p < +\infty$ , verifica:*

$$u_{+*}(0) \leq \hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Demostración.** Supondremos que  $u_+ \neq 0$  pues en otro caso el resultado se verifica de manera obvia. Sea  $t \in [\hat{m}, M]$ , entonces la función  $(u - t)_+$  es un elemento de  $H_0^1(\Omega)$  según se deduce del Teorema de Stampacchia. Multiplicando la ecuación (1.53) que verifica  $(u, F)$  por  $(u - t)_+$  e integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\{u>t\}} |\nabla(u - t)|^2 dx &= \int_{\{u>t\}} [aF(u) + F(u)F'(u) + p'(u)b](u - t) dx \\ &= \int_{\{u>t\}} aF(u)(u - t) dx + \int_\Omega v(x)(u(x) - t)_+ dx \end{aligned}$$

donde  $v(x) := F(u(x))F'(u(x)) + p'(u(x))b(x)$ . Aplicando el Lema 5.2 a la última integral,

$$\int_\Omega v(x)(u(x) - t)_+ dx = \int_0^{+\infty} ds \int_{\{(u(x)-t)_+>s\}} v(x) dx.$$

Por otro lado,  $\{x \in \Omega : (u(x) - t)_+ > s\} = \{x \in \Omega : u(x) > t + s\}$  si  $s \in (0, +\infty)$ . Aplicando la condición de corriente nula (1.56), de la igualdad anterior se deduce que

$$\int_\Omega v(x)(u(x) - t)_+ dx = 0 \quad \forall t \in [\hat{m}, M].$$

Tomando en particular  $t = \gamma$  y utilizando que  $\{x \in \Omega : u(x) \geq \gamma\} = \Omega$  (véase el Teorema 5.1), se tiene entonces que

$$\int_\Omega |\nabla(u - \gamma)|^2 dx = \int_\Omega aF(u)(u - \gamma) dx. \quad (6.9)$$

Mediante la desigualdad de Poincaré (véase [Br84, Corolario IX.19, página 174]) y de Hölder, se llega a que

$$\int_\Omega |u - \gamma|^2 dx \leq P^2(\Omega) \int_\Omega |\nabla(u - \gamma)|^2 dx \leq P^2(\Omega) \left[ \int_\Omega (aF(u))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_\Omega |u - \gamma|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde se ha convenido en denotar por  $P(\Omega)$  la constante de Poincaré de  $\Omega$ . La anterior desigualdad implica

$$\|u - \gamma\|_{L^2(\Omega)} \leq P^2(\Omega) F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.10)$$

56L. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

puesto que  $0 \leq F'(u) \leq F_v$ . Aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder en la segunda integral de (6.9)

$$\|\nabla(u - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} \|u - \gamma\|_{L^2(\Omega)}$$

y por (6.10)

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla(u - \gamma)\|_{L^2(\Omega)} \leq P(\Omega) F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} .$$

Tomando  $t = 0$  y razonando de manera análoga, se obtiene que

$$\|u_+\|_{L^2(\Omega)} \leq P^2(\{x \in \Omega : u \geq 0\}) F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} \leq P^2(\Omega) F_v \|a\|_{L^2(\Omega)}$$

y

$$\|\nabla u_+\|_{L^2(\Omega)} \leq P(\Omega) F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} .$$

Basandonos en el hecho de que toda solución  $(u, F)$  es tal que  $\text{med}\{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = 0$ , implica que  $u$  verifica la ecuación en derivadas parciales del problema en su formulación no local (3.2) según se muestra en el Teorema 3.1 (siendo además  $F \equiv \mathcal{F}$  expresada en términos de  $u$ ); elevando al cuadrado e integrando dicha ecuación, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &= \int_{\Omega} a^2 F^2(u) dx + \int_{\Omega} p'(u)^2 [b - b_{*u}(|u > u_+(x)|)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} a F(u) p'(u) [b - b_{*u}(|u > u_+(x)|)] dx \\ &\leq F_v^2 \|a\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\lambda^2 \|b\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u_+\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} F_v \|a\|_{L^2(\Omega)} \|u_+\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|a\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

siendo  $C = F_v^2 + 2\lambda^2 \|b\|_{L^\infty(\Omega)}^2 P^4(\Omega) F_v^2 + 4\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)} P^2(\Omega) F_v^2$ . Por tanto

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C} \|a\|_{L^2(\Omega)} .$$

Finalmente, aplicando las inclusiones de Sobolev y el hecho de ser  $\gamma \leq 0$ , deducimos que

$$\begin{aligned} u_{+*}(0) &\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u - \gamma\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C' \|u - \gamma\|_{W^{2,2}(\Omega)} \\ &\leq C' [\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u - \gamma\|_{L^2(\Omega)}] \\ &\leq C' [\sqrt{C} + P(\Omega) F_v + P^2(\Omega) F_v] \|a\|_{L^2(\Omega)} . \blacksquare \end{aligned}$$

Como consecuencia de los dos lemas anteriores, se tiene el siguiente

**Corolario 6.1** *Supongamos que la función positiva  $a$  es tal que su norma en  $L^2(\Omega)$  es suficientemente pequeña para que*

$$\hat{C} \|a\|_{L^2(\Omega)} < \frac{F_v}{\sqrt{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}} \tag{6.11}$$

con  $\hat{C} = \hat{C}(F_v, \lambda, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}, P(\Omega))$  la constante del Lema 6.2. Si  $(u, F)$  es una solución de (1.53), (1.54) y (1.56), entonces  $F$  es positiva en  $[\hat{m}, M] \subset ]-\infty, \hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}$  y Lipschitziana en  $[\hat{m}, M]$  con constante de Lipschitz independiente de  $u$ . Más concretamente

$$|F(t) - F(\hat{t})| \leq \frac{\lambda \hat{C} \|a\|_{L^2(\Omega)} \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}{F(\hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)})} |t - \hat{t}| \quad \forall t, \hat{t} \in [\hat{m}, M]. \quad (6.12)$$

**Demostración.** El Lema 3.5 muestra que  $F$  está unívocamente determinada por  $u$  mediante la ecuación (3.5), es decir  $F = \mathcal{F}$ . Puesto que por el Lema 6.2 se tiene que  $u_{+*}(0) \leq \hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}$  y de la hipótesis (6.11) del corolario se deduce que la relación (6.7) del Lema 6.1 es satisfecha, obteniéndose de éste que  $F$  es estrictamente positiva y Lipschitz sobre  $[\hat{m}, M]$  con

$$\begin{aligned} |F(t) - F(\hat{t})| &\leq \frac{\lambda u_{+*}(0) \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}{F(u_{+*}(0))} |t - \hat{t}| \\ &\leq \frac{\lambda \hat{C} \|a\|_{L^2(\Omega)} \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}{F(\hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)})} |t - \hat{t}| \quad \forall t, \hat{t} \in [\hat{m}, M] \end{aligned}$$

donde la última desigualdad viene del Lema 6.2 ya que  $u_{+*}(0) \leq \hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}$  y del hecho de ser

$$F(\hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}) > F\left(\frac{F_v}{\sqrt{\lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}}}\right) = 0$$

por la monotonía estricta de  $F$  (véase el Lema 6.1). ■

**Demostración del Teorema 6.1.** Supongamos que  $\hat{u}$  es otra solución con valores en  $(-\infty, \hat{M}]$ . Sea  $U = u - \hat{u}$ . Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(\hat{u}(x))}{u(x) - \hat{u}(x)} & \text{si } u(x) \neq \hat{u}(x) \\ 0 & \text{si } u(x) = \hat{u}(x) \end{cases} \\ g_2(x) &= \begin{cases} \frac{ff'(u(x)) - ff'(\hat{u}(x))}{u(x) - \hat{u}(x)} & \text{si } u(x) \neq \hat{u}(x) \\ 0 & \text{si } u(x) = \hat{u}(x) \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} \frac{p'(u(x)) - p'(\hat{u}(x))}{u(x) - \hat{u}(x)} & \text{si } u(x) \neq \hat{u}(x) \\ 0 & \text{si } u(x) = \hat{u}(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones satisfechas por  $u$  y  $\hat{u}$ , se obtiene que  $U$  satisface

$$\begin{cases} -\Delta U = [a(x)g_1(x) + g_2(x) + b(x)h(x)]U(x) & \text{en } \Omega \\ U = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.13)$$

Inspirados por [Pu77], probaremos que la función diferencia  $U = u - \hat{u}$  no cambia de signo en  $\Omega$ . Argumentaremos por contradicción. Supongamos que  $U$  cambia de signo en  $\Omega$ . Por tanto, tenemos definidos los subconjuntos de  $\Omega$

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : U(x) > 0\} \text{ y } \Omega_- = \{x \in \Omega : U(x) < 0\}$$

58I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

con  $|\Omega_+| > 0$  y  $|\Omega_-| > 0$  (si  $|\Omega_+| = 0$  o  $|\Omega_-| = 0$ , entonces  $U$  no cambia de signo y si  $|\Omega_+| = 0$  ó  $|\Omega_-| = 0$ ,  $u = \hat{u}$  en casi todo punto de  $\Omega$ ). Definimos a continuación la función

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} U(x) & \text{si } x \in \Omega_+ \\ \alpha U(x) & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases}$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva elegida de tal forma que  $\tilde{U}$  sea ortogonal en  $L^2(\Omega)$  a la primera autofunción  $w_1$  del problema de autovalores (6.1) con  $c(x)$  dada por (6.5), es decir,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 = \int_{\Omega} \tilde{U}(x)w_1(x)dx = \int_{\Omega_+} \tilde{U}(x)w_1(x)dx + \alpha \int_{\Omega_-} U(x)w_1(x)dx$$

de donde

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega_+} U(x)w_1(x)dx}{\int_{\Omega_-} (-U(x))w_1(x)dx}$$

y  $\alpha > 0$  ya que  $\int_{\Omega_+} U(x)w_1(x)dx$  y  $\int_{\Omega_-} (-U(x))w_1(x)dx$  son estrictamente positivas (si alguna de las anteriores integrales fuese cero, la positividad de la primera autofunción  $w_1$  del problema (6.1) y el signo constante de  $U$  en  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$  implicaría que  $|\Omega_+| = 0$  ó  $|\Omega_-| = 0$  si la primera o segunda integral, respectivamente, fuese nula). Sea  $\lambda_2$  el segundo autovalor de (6.1) siendo  $\lambda_2 - \lambda > 0$  según (6.4). La generación de los autovalores mediante el método de Rayleigh (véase [CoHi53, página 175] o [RaTh82]) nos lleva a

$$\lambda_2 = \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} c(x)|v(x)|^2 dx} : v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} v(x)w_1(x)dx = 0 \right\},$$

y por tanto que

$$\lambda_2 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \tilde{U}(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} c(x)|\tilde{U}(x)|^2 dx}.$$

Agrupando adecuadamente, obtenemos la siguiente minoración de  $\int_{\Omega} |\nabla \tilde{U}(x)|^2 dx$ :

$$\int_{\Omega} \lambda_2 c(x)|\tilde{U}(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \tilde{U}(x)|^2 dx. \quad (6.14)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (6.13) por  $U_+$  e integrando por partes se tiene que

$$\int_{\Omega_+} |\nabla U|^2 dx = \int_{\Omega_+} [a(x)g_1(x) + g_2(x) + b(x)h(x)]U^2(x)dx \quad (6.15)$$

ya que  $\nabla U_+ = 0$  en casi todo punto del conjunto  $\{x \in \Omega : U(x) \leq 0\}$ . De forma análoga, se obtiene que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla U|^2 dx = \int_{\Omega_-} [a(x)g_1(x) + g_2(x) + b(x)h(x)]U^2(x)dx.$$

Multiplicando los dos miembros de la última desigualdad por  $\alpha^2$  y sumando con la identidad (6.15) se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{U}|^2 dx &= \int_{\Omega_+} |\nabla U|^2 dx + \alpha^2 \int_{\Omega_-} |\nabla U|^2 dx = \\ &= \int_{\Omega} [a(x)g_1(x) + g_2(x) + b(x)h(x)]\tilde{U}^2(x)dx. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Considerando ahora la desigualdad (6.14) y la definición (6.5) de la función  $c(x)$ , de la identidad (6.16) se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} [\lambda_2 c(x) - a(x)g_1(x) - g_2(x) - b(x)h(x)]\tilde{U}^2(x)dx = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ [\lambda_2 \tilde{C}\|b\|_{L^\infty\Omega} - g_1(x)]a(x) + [\lambda_2 - h(x)]b(x) + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda}K - g_2(x)\right] \right\} \tilde{U}^2(x)dx \end{aligned} \quad (6.17)$$

Por el Corolario 6.1 y la definición (6.5), se tiene que

$$\lambda_2 \tilde{C}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} - g_1(x) \geq \frac{\lambda_2 \hat{M}}{f(\hat{M})}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} - \frac{\lambda \hat{M}}{f(\hat{M})}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} = [\lambda_2 - \lambda] \frac{\hat{M}}{f(\hat{M})}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0$$

donde la última desigualdad es debida a la hipótesis (6.4). Gracias a (1.51) y la definición de  $h$ , se tiene que  $\lambda_2 - h(x) \geq \lambda_2 - \lambda$  para casi todo  $x \in \Omega$ , y por (6.4),  $\lambda_2 - h(x) > 0$  para casi todo  $x \in \Omega$ . Finalmente, por la definición de  $g_2$  y la hipótesis (6.2) y (6.4), se llega a que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda}K - g_2(x) \geq \frac{\lambda_2}{\lambda}K - \frac{|ff'(u(x)) - ff'(\hat{u}(x))|}{|u(x) - \hat{u}(x)|} \geq \frac{\lambda_2}{\lambda}K - K = K\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} - 1\right) > 0.$$

En consecuencia,

$$0 < \left\{ [\lambda_2 - \tilde{c}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} - g_1(x)]a(x) + [\lambda_2 - h(x)]b(x) + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda}K - g_2(x)\right] \right\} \tilde{U}^2(x)$$

para casi todo  $x \in \Omega$ , llegando a una contradicción con la desigualdad (6.17). Por tanto  $U$  no cambia de signo en  $\Omega$ .

Dado que  $U$  no cambia de signo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $U \geq 0$  en  $\Omega$ , esto es,  $u \geq \hat{u}$  en  $\Omega$ . Sea  $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) - \hat{u}(x) > 0\}$ . Puesto que

60I. Un problema elíptico de frontera libre originado en plasmas de fusión.

$u \geq \hat{u}$  en  $\Omega$ , se verifica la identidad  $u(x) = \hat{u}(x)$  en  $\Omega \setminus \Omega_+$ . Si  $|\Omega_+| = 0$ , entonces  $u = \hat{u}$  en  $\Omega$ . Supongamos  $|\Omega_+| > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} af(u)dx &= \int_{\Omega \setminus \Omega_+} af(u)dx + \int_{\Omega_+} af(u)dx \\ &= \int_{\Omega \setminus \Omega_+} af(\hat{u})dx + \int_{\Omega_+} af(u)dx \\ &< \int_{\Omega \setminus \Omega_+} af(\hat{u})dx + \int_{\Omega_+} af(\hat{u})dx = \int_{\Omega} af(\hat{u}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

gracias a la monotonía estricta de  $f$  sobre  $[0, \hat{C}\|a\|_{L^2(\Omega)}]$  (Corolario 6.1) y el hecho de ser  $a > 0$  en  $\Omega$ . Integrando las ecuaciones (1.53) que verifican  $u$  y  $\hat{u}$  se obtiene de (6.18) la desigualdad

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dl = -\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} af(u)dx < \int_{\Omega} af(\hat{u})dx = \int_{\Omega} \Delta \hat{u} dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} dl$$

al considerar la condición de corriente nula dada por la ecuación (1.56). Finalmente,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dl > \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} dl. \quad (6.19)$$

Sin embargo, necesariamente  $\frac{\partial u}{\partial n} \leq \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$  en  $\partial\Omega$  por ser  $u = \hat{u}$  en  $\partial\Omega$  y  $u \geq \hat{u}$  en  $\Omega$ ; llegando de esta forma a una contradicción con la relación (6.19). En consecuencia  $|\Omega_+| = 0$  y por tanto  $u = \hat{u}$  en casi todo punto de  $\Omega$ .

Por último, si  $u_+ = \hat{u}_+ = 0$  entonces  $u$  y  $\hat{u}$  verifican el problema

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= aF_v \quad \text{en } \Omega \\ \phi - \gamma &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

fijado  $\gamma < 0$ , y la unicidad de este problema es bien conocido. ■

# Bibliografía

- [A89] ARIS, R., *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, INC. New York 1989.
- [AL89] ALMAGREN F.J., LIEB E., Symetric decreasing rearrangement is sometimes continuous. *J. Am. Math. Soc.* 2(4), 1989.
- [Bl89] BLUM, J., *Numerical simulation and optimal control in Plasma Physics*. Wiley/Gauthier-Vilars, París 1989.
- [B80] BOOZER, A.H., Guiding Center Drift Equations. *Phys. Fluids*, Vol 23, nº 5, May 1980.
- [B82] BOOZER, A.H., Establishment of Magnetic Coordinates for a given Magnetic Field. *Phys. Fluids*, Vol 25, nº 3, March 1982.
- [Br84] BREZIS, H., *Análisis funcional*, Alianza Editorial (1983) .
- [C91] COOPER, W.A., Global external ideal magnetohydrodynamic instabilities in three-dimensional plasmas. *Theory of Fusion Plasmas* (Proc. of the Joint Varenna-Laussane, Workshop 1990), Edit. Compositori, Bologna.
- [CoHi53] COURANT, R. and HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I Interscience Publishers, Inc. New York. 1953
- [DeG] DE GIORGI, E. Su una teoria generale della misura  $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad  $r$  dimensional. *Annali di Matematica*, 36, 1954, pp. 191-213.
- [D91] DÍAZ, J.I., *Modelos bidimensionales de equilibrio magnetohidrodinámico para Stellarators*. Informe # 1, CIEMAT (1991).
- [D92] DÍAZ, J.I., *Modelos bidimensionales de equilibrio magnetohidrodinámico para Stellarators*. Informe # 2, CIEMAT (1992).
- [DR93] DÍAZ, J.I., RAKOTOSON, J.M., On a two-dimensional stationary free boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, Série I 1993, pp. 353-358.

- [DR94] DÍAZ, J.I., RAKOTOSON, J.M., *On a nonlocal stationary free boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator geometry*. To appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis.
- [F69] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1969.
- [FIR60] FLEMING, W.H., RISHEL, R. An Integral Formula for Total Gradient Variation. *Ach. Math.* Vol. XI, 1960, pp. 218-222.
- [G88] GARCÍA ET AL., *Equilibrium and Stability Studies for Low Aspect Ratio Stellarator Configurations*, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna 12-19 October 1988.
- [GCD] GARCÍA, L., CARRERAS and DOMÍNGUEZ, *Averaged equilibrium and stability in Low-Aspect-Ratio Stellarators.*, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna 12-19 October 1988.
- [Gi84] GIUSTI, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhauser, 1984.
- [GrJ61] GREENE, J.M., JOHNSON, J.L., Determination of Hydromagnetic Equilibria. *Phys. Fluids*, Vol.4 n° 7, July 1961.
- [HC84] HENDER, T.C., CARRERAS, B.A., Equilibrium calculations for helical axis stellarators. *Phys. Fluids* 27, 2101 (1984).
- [H91] HIRSHMAN S.P., Curvilinear Coordinates for Magnetic Confinement Geometries Stellarator Theory. Memo #5. 1991.
- [KK158] KRUSKAL, M.D., KULSRUD, R.M., Equilibrium of Magnetically Confined Plasma in a Toroid. *Physics of Fluids* Vol.1, n° 4 (1958), 265-274.
- [L69] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [Ma85] MAZ'JA, V. *Sobolev Spaces* Springer-Verlag. 1985.
- [Mi87] MIYAMOTO K., *Plasma Physic for Nuclear Fusion*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.
- [MT] MOSSINO, J., TEMAM, R., *Free boundary problems in plasma physics, review of results and new developments*. En Free Boundary Problems: Theory and Applications, Pitman, 1981.
- [M82] MOSSINO, J., A Priori Estimates for a Model of Grad Mercier Type in Plasma Confinement. *Applicable Analysis*, 1982, Vol. 13, pp. 185-207.

- [MR82] MOSSINO, J., RAKOTOSON, J.M., Isoperimetric inequalities in parabolic equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Série IV, Vol. XIII, n° 1 1986, pp. 51-73.
- [MT81] MOSSINO, J., TEMAM, R., Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in Plasma Physics. *Duke Math. J.*, 48, 1981, pp. 475-495.
- [PRT93] PADIAL, J.F., RAKOTOSON, J.M., TELLO, L. *Introduction to the monotone and relative rearrangements and applications*. Département de Mathématiques. Univ. de Poitiers, report No. 81, 1993, 36 pp.
- [P92] PADIAL, J.F., *Modelos matemáticos en la física de plasmas*. Trabajo de investigación. Dpto. de Matemática Aplicada. 1992, 50 pgs.
- [Pu77] PUEL, P., Sur un problème de valeur propre non linéaire et de frontière libre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 284 1977, pp. 861-863.
- [R88] RAKOTOSON, J.M., Some properties of the relative rearrangement, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 1988, pp. 475-495.
- [R89] RAKOTOSON, J.M., Differentiability of the relative rearrangement. *Diff. and Int. Equation*, 2, 1989, pp. 363-377
- [R95a] RAKOTOSON, J.M., Relative rearrangement for highly non linear equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and Appl.*, Vol. 24, No. 4, pp. 493-507, 1995.
- [R95b] RAKOTOSON, J.M., Strong continuity of the relative rearrangement maps and application to a Galerkin approach for nonlocal problems. *To appear* 1995.
- [RT90] RAKOTOSON, J.M., TEMAM, R., A co-area formula with applications to monotone rearrangement and to regularity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 109, No. 3, 1990, pp. 231-238.
- [RaTh82] RAVIAT, P.A., THOMAS, J.M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [S91] SALAS A., *Coordinate system for 3-D plasmas*. Conferencia en la Real Academia de Ciencias de Madrid 1991.
- [Si94] SIMON, B., *Réarrangement relatif sur un espace mesuré et applications*, Thèse, Univ. de Poitiers, April 1994.
- [Ta76] TALENTI G., Elliptic equations and rearrangements, *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*, série IV, Vol. 4, 1967, pp. 697-718.
- [T71] TEMAM, R. *Analyse Numerique*. (1971)

- [T77] TEMAM R., Remarks on a Free Boundary Value Problem Arising in Plasma Physics. *Comm. in Partial Differential Equations*, Vol.2, n° 6 (1977) p. 563-585
- [T78] TEMAM R., *Monotone Rearrangement of a Function and the Grad-Mercier Equation of Plasma Physics*, Université de Paris-Sud 1978.

## Capítulo II

# Soluciones BV de un problema de difusión no lineal.

En este capítulo se presenta un estudio analítico del problema de Cauchy-Dirichlet asociado a la ecuación parabólica cuasilineal

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} - \operatorname{div}\{|\nabla u - k(b(u))e|^{p-2}(\nabla u - k(b(u))e)\} + g(x, u) = f(t, x)$$

obtenida inicialmente a partir de la ecuación de continuidad (conservación de la masa) y de la ley de Darcy no lineal de un fluido incompresible que fluye en un medio poroso.

Previa presentación de algunos resultados técnicos se establece el resultado principal de este capítulo concerniente a la comparación (y por tanto unicidad) de soluciones tales que la derivada temporal de  $b(u)$  es una medida de Radon acotada (i.e.  $b(u) \in BV_t(Q)$ ). Mediante un proceso de regularización parabólica y ciertas estimaciones a priori, se obtiene la existencia de soluciones poseyendo tal regularidad.

### 1 Introducción.

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) con frontera regular  $\partial\Omega$  y sea  $T$  un número real positivo. Denotamos por  $Q$  al cilindro  $]0, T[ \times \Omega$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$  y por  $\Sigma$  su frontera parabólica  $]0, T[ \times \partial\Omega$ . Consideramos el siguiente problema

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} - \operatorname{div} \phi(\nabla u - k(b(u))e) + g(x, u) = f(t, x) \quad \text{en } Q, \quad (1.1)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (1.2)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.3)$$

donde, por comodidad, denotamos por  $\phi$  la función vectorial

$$\phi(\xi) \doteq |\xi|^{p-2}\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (1.4)$$

y donde  $b$  es una función continua no decreciente. Las funciones  $k$  y  $g(x, \cdot)$  se suponen continuas satisfaciendo hipótesis adicionales que detallaremos más tarde. Por  $e$  denotamos un vector unitario de  $\mathbb{R}^N$ . Las condiciones estructurales de la ecuación (1.1) vienen dadas por la elipticidad del operador de difusión (notese que  $\phi$  es una función monótona de  $\mathbb{R}^N$  en  $\mathbb{R}^N$ ) y la monotonía de  $b$ .

### 1.1 Formulación y modelos: motivaciones físicas.

Problemas como el presentado anteriormente (a veces en versiones particulares) aparecen en la modelización de numerosos fenómenos físicos relacionados entre otras situaciones, con la descripción de la saturación de un fluido en un sólido poroso, modelos de conducción del calor con coeficientes dependientes de la temperatura, etc. Consideraremos aquí dos de ellos con algo más de detalle a modo de ilustración.

Modelo 1. *Flujo de un fluido incompresible en régimen turbulento a través de un medio poroso.*

El estudio de la filtración de un fluido incompresible a través de un medio poroso viene descrito (para velocidades pequeñas del flujo) por la ley de Darcy

$$\mathbf{v} = -K(\theta) \operatorname{grad} \Phi(\theta) \quad (1.5)$$

y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.6)$$

Aquí  $\mathbf{v}$  representa la velocidad de filtración del fluido,  $\theta(t, x)$  es el contenido volumétrico de humedad,  $k(\theta)$  la conductividad hidrostática y  $\Phi$  el potencial total, el cual puede ser expresado como suma del potencial hidrostático  $\psi(\theta)$  y un potencial gravitacional  $z$

$$\Phi = \psi(\theta) + z$$

(véase [Be72]). Sin embargo, es bien conocido que la relación (1.5) no es adecuada en la descripción del flujo en regímenes turbulentos. Para situaciones de este estilo, la ley de Darcy ha de sustituirse por una relación no lineal entre  $\mathbf{v}$  y  $K(\theta)\nabla\Phi$  del tipo

$$|\mathbf{v}|^{q-2} \mathbf{v} = -K(\theta) \operatorname{grad} \Phi(\theta) \quad \text{para algún } q > 2 \quad (1.7)$$

(véase [AS69], [HB82] y [Vo69]). Si  $e$  denota el vector unitario en la dirección gravitacional y si definimos

$$\varphi(\theta) = \int_0^\theta K(s) \Phi'(s) ds, \quad p = \frac{q}{q-1}$$

(notese que  $1 < p < 2$ ), entonces de (1.6) y (1.7) obtenemos la relación

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (|\nabla \varphi(\theta) - K(\theta)e|^{p-2} (\nabla \varphi(\theta) - K(\theta)e)) = 0. \quad (1.8)$$

Las funciones  $\varphi$  y  $K$  son dadas experimentalmente y es común que sean crecientes. En particular si el medio no está saturado, el perfil de  $\varphi$  es el de una función estrictamente creciente. En este caso la función  $u = \varphi(\theta)$  satisface la ecuación (1.1) con  $b = \varphi^{-1}$  y  $g = f = 0$  ( $k = K$ ). El efecto de absorción de las raíces de las plantas puede provocar la aparición del término no lineal  $g(x, u)$  en la ecuación anterior (véase [G83] para más detalles). En particular, si  $p = 2$  y  $N = 1$ , la ecuación (1.8) es conocida en la literatura como la ecuación de Fokker-Plank no lineal y ha sido tratada por varios autores (véase [K87], [DK87], [G89] y sus referencias).

Otro ejemplo donde aparece la ecuación (1.1), en el caso unidimensional, corresponde al estudio del flujo de un fluido compresible en régimen turbulento en un medio poroso. Según Leibenson [Le45] se llega a (1.1) con  $K = g = f = 0$  (ver también [EV86]) y se ha de tomar

$$b(s) = s^{1/m} \text{ y } m > 1 .$$

En este caso, si llamamos  $v = b(u)$ ,  $v$  representa la densidad. Los valores típicos de  $p$  son  $p = 2$  para flujo laminar (no turbulento) y  $3/2$  para flujo turbulento. Señalamos que en el caso laminar  $p = 2$  se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

que para  $m > 1$  es conocida popularmente como la *ecuación de los medios porosos* (véase [EV88] y sus referencias). La ecuación (1.9) se obtiene en otras muchas situaciones. Describe, por ejemplo, el calor radiado en un plasma ionizado [ZR66, capítulo 10]. Si  $0 < m < 1$ , (1.9) es conocida como la *ecuación de difusión rápida*. Es también de notar que si  $m = 1$  y  $p = 2$ , resulta la *ecuación lineal del calor*.

**Modelo 2.** *Flujos turbulentos en conductos largos.* Sean  $\rho$ ,  $P$ ,  $v$  y  $T$  la densidad, presión, velocidad y temperatura de un gas perfecto que fluye a través de un conducto largo. Suponemos que estas funciones dependen del escalar  $x$  (la distancia a lo largo del tubo) y el tiempo  $t$ . De las leyes de conservación de la masa y del momento lineal se obtiene el sistema

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2} \rho |v|v \quad (1.11)$$

tras haber considerado la ley constitutiva  $P/\rho = T$ . El término  $\frac{\lambda}{2} \rho |v|v$  representa las fuerzas de fricción con las paredes, donde  $\lambda$  es la constante conocida como coeficiente de Darcy-Weissbach. Mediante métodos asintóticos, Díaz y Liñan muestran en [DL89, páginas 95-119] que si la longitud  $L$  del conducto es adecuadamente mayor que el diámetro  $D$  de una sección transversal del conducto, para valores de tiempo grandes, es posible despreciar los términos  $\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x}$  frente a los otros valores de la ecuación (1.11) obteniendo así la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2} \rho |v|v . \quad (1.12)$$

Si definimos ahora  $u = |P|P$ , entonces  $u$  satisface la ecuación (1.1) con  $b(u) = u^{1/2}\text{sgn}u$ ,  $k = g = f = 0$  y  $p = \frac{3}{2}$ . Por último señalemos también que la presencia del término  $g(x, u)$  está motivada por el estudio del comportamiento de soluciones cerca del tiempo de extinción [DL89, Teorema 3].

El problema (1.1), (1.2) y (1.3) ha sido estudiado recientemente por Díaz y de Thelin en [DT94]. En este trabajo se presenta un estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del problema (1.1), (1.2) y (1.3), así como un resultado de comparación, y por tanto, de unicidad de soluciones débiles acotadas de (1.1) bajo la hipótesis  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^1(Q)$ . El principal objetivo de este capítulo, es obtener un resultado de comparación (Teorema 3.1) bajo una hipótesis más general:  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  es supuesta una medida de Radon acotada en  $Q$ , es decir,  $b(u) \in BV_t(Q)$ , junto con una hipótesis adicional sobre la medida nula del conjunto de puntos de discontinuidad aproximada de  $u$ .

Las soluciones débiles (acotadas) de (1.1), (1.2) y (1.3) que verifican  $b(u) \in BV_t(Q)$  las denominamos *soluciones BV* (BV-solutions) introduciendo esta noción en la Subsección 1.2.

Esta regularidad fue ya introducida en el estudio de otras ecuaciones por A.I. Vol'pert y S.I. Hudjaev en [V67, VHu69, VHu85] y recientemente por Y. Jingxue [J89, J90a, J90b, J92a, J92b]. Tales autores trabajan en el espacio de funciones cuya derivada generalizada es una medida de Radon acotada en  $Q$  (o localmente acotada si  $Q = ]0, T[ \times \mathbb{R}^N$ ), espacio al que usualmente se le conoce como el de *funciones de variación acotada BV* (*bounded variation functions*). Paralelamente, en los últimos años (véase referencias en secciones posteriores) G. Gagneux, M. Madaune-Tort, Ph. Benilan, R. Gariepy, H. Touré, J.B. Betbeder y G. Vallet entre otros autores, trabajan con la clase de soluciones  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ , aunque siempre suponen  $p = 2$ . Recientemente en [GM94] los autores prueban un resultado de unicidad para soluciones débiles mediante el estudio de soluciones de tipo Kruskhov (soluciones que satisfacen cierta condición de entropía) cuando el operador elíptico es el laplaciano ( $p = 2$ ),  $b$  es Hölder continua,  $b^{-1}$  es continuamente derivable y sobre la función  $k \circ b$  sólo se requiere que sea una función continua (nótese que sin embargo en esta memoria supondremos que  $k \circ b$  es Hölder continua (1.16)). La obtención de dicho resultado se inspira en la técnica previamente desarrollada por Carrillo en [C86]. Señalemos que no es claro que esta técnica se aplique al caso  $p \neq 2$ . En la Sección 2, después de presentar algunos resultados sobre medidas, mostraremos que las dos clases de funciones  $BV_t(Q)$  y  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  coinciden. Finalmente, en la Sección 4, se da un resultado de existencia de soluciones débiles verificando  $b(u) \in BV_t(Q)$  bajo la hipótesis (1.15) sobre  $b$ , que engloba el caso particular  $b^{-1}$  localmente Lipschitz. Al final de la Sección 3 y Sección 4, se muestra una aplicación de las técnicas desarrolladas a un problema multívoco.

## 1.2 Noción de soluciones BV.

Comenzamos intruduciendo el **marco funcional** en el que trabajaremos:

Dado un espacio de Banach  $B$  y si llamamos  $B'$  a su dual topológico, denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B, B'}$  el producto de dualidad entre  $B'$  y  $B$ . Consideraremos el espacio de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$  y  $W^{-1,p'}(\Omega)$  su dual, donde  $p > 1$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Llamando  $X = L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$ , se tiene que  $X' = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  y la dualidad  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$  debe ser entendida como

$$\langle h, v \rangle_{X, X'} = \int_0^T \left\{ \langle h_{-1}, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega h_1 v dx \right\} dt \quad \forall h \in X, v \in X'$$

donde  $h = h_{-1} + h_1$  con  $h_{-1} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$  y  $h_1 \in L^1(Q)$ .

Se define el espacio de funciones de variación acotada respecto a  $t$  como

$$BV_t(Q) = \left\{ u \in L^1(Q) : \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{M}_b(Q) \right\}$$

donde  $\mathcal{M}_b(Q)$  es el conjunto de medidas de Radon acotadas sobre  $Q$  (véase más detalles en la Sección 2).

### Hipótesis sobre los datos.

En todo este capítulo supondremos las siguientes propiedades sobre las distintas funciones que aparecen en la formulación del problema (1.1), (1.2) y (1.3):

$$\phi(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad p > 1; \quad (1.13)$$

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{continua, estrictamente creciente y } b(0) = 0; \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} b &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \quad \text{con } b_1, b_2 \text{ continuas estrictamente crecientes} \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0, \quad \text{y } b_1^{-1}, b_2 \text{ localmente Lipschitz} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} k &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{continua, } k(b(\cdot)) \text{ Hölder continua de exponente } \gamma \\ |k(b(s_1)) - k(b(s_2))| &\leq \hat{C} |s_1 - s_2|^\gamma \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ \gamma &\geq \frac{1}{p} \text{ si } 1 < p \leq 2, \quad \gamma \geq \frac{1}{2} \text{ si } p > 2; \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} g &: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ función de Caratheodory, } |g(x, s)| \leq \omega(|s|)(1+d(x)) \\ \text{con } d &\in L^1(\Omega), \quad \omega \text{ continua y creciente;} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} g(x, s_1) - g(x, s_2) &\geq -C^*(b(s_1) - b(s_2)) \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad s_1 > s_2 \\ \text{con } C^* &> 0 \text{ independiente de } s_1, s_2; \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

$$f \in L^1(Q); \quad (1.19)$$

$$u_0 \in L^\infty(\Omega). \quad (1.20)$$

**Observación 1.1** La hipótesis (1.15) sobre la función  $b$  engloba el caso  $b^{-1}$  localmete Lipschitz ( $\lambda_2 = 0$ ) y el caso  $b$  localmente Lipschitz ( $\lambda_1 = 0$ ).

A continuación damos la formulación variacional del problema (1.1), (1.2) y (1.3). Esta es una variante de la introducida por Alt y Luckhaus en [AL83] y posteriormente utilizada por Díaz y de Thelin en [DT94].

**Definición 1.1** Diremos que una función  $u$  definida sobre  $Q$  es una **solución débil acotada** del problema (1.1), (1.2) y (1.3), si

$$u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q) \quad (1.22)$$

y se satisfacen las identidades

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_0^T \int_\Omega (b(u) - b(u_0)) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1.23)$$

para todo  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ , con  $v(T, \cdot) = 0$  y

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_0^T \int_\Omega \phi(\nabla u - k(b(u))e) \cdot \nabla v dx + \int_0^T \int_\Omega g(\cdot, u) v dx = \int_0^T \int_\Omega f v dx \quad (1.24)$$

para todo  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ .

Si además pedimos que la función  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  sea una medida de Radon acotada sobre  $Q$  se tiene la siguiente definición:

**Definición 1.2** Sea  $u$  una solución débil acotada del problema (1.1), (1.2) y (1.3). Diremos que  $u$  es una **solución BV** de (1.1), (1.2) y (1.3) si además de verificarse (1.21), (1.22), (1.23) y (1.24) se tiene que

$$b(u) \in BV_i(Q) . \quad (1.25)$$

**Observación 1.2** Nótese que por (1.17),  $g(x, u) \in L^1(Q)$  y que  $b(u) \in L^\infty(Q)$  (respectivamente  $b(u_0) \in L^\infty(Q)$ ) dado que  $u \in L^\infty(Q)$  (respectivamente  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ). Nótese que se podía haber supuesto más general que  $f \in X$ .

Señalamos el hecho de que si  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  es una medida de Radon acotada sobre  $Q$ , entoces la dualidad entre los espacios  $X$  y  $X'$  queda también representada mediante la siguiente integral (respecto de la medida  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$ )

$$\int_Q \frac{\partial b(u)}{\partial t} v = \left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'}$$

siempre que  $v$  sea una función de  $X'$  medible Borel. Por ello, en todo este capítulo, siempre que nos refiramos a este producto de dualidad y el elemento de  $X$  sea además una medida de Radon acotada sobre  $Q$  adoptaremos la equivalencia integral antes mencionada.

## 2 Resultados Técnicos Preliminares.

El objetivo principal de esta sección es presentar algunos resultados técnicos sobre las funciones integrables en  $Q$  y cuya derivada temporal en sentido de las distribuciones es una medida de Radon acotada, clase de funciones a la que hemos denotado por  $BV_t(Q)$  según la notación utilizada por Jingxue en los trabajos [J89, J90a, J90b, J92a]. Comenzaremos recordando la definición de tales medidas siguiendo los trabajos de Vol'pert [V67, VHu85] y Federer [F69] entre otros, así como la noción de funciones de  $BV(S)$  con  $S$  subconjunto abierto de un espacio topológico abstracto  $V$ . Un punto de vista complementario es el presentado en Brezis [Br73]: considera la clase de funciones de variación acotada de una variable real con valores en un espacio normado  $X$ , a la que denotaremos por  $BV(0, T; X)$ . En particular si el espacio  $X$  es  $L^1(\Omega)$ , se obtiene el cuadro funcional de los trabajos de Benilan y Gariépy [BG93a], Benilan y Touré [BT94a, BT94b], Gagneux y Madaune-Tort [GM92a, GM92b] y por último Betbeder y Vallet [BV93a] entre otros autores. Sin embargo, mostraremos que los espacios  $BV_t(Q)$  y  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  son en realidad el mismo, consiguiendo así unificar criterios y englobar bajo el mismo marco funcional tanto los métodos desarrollados por Vol'pert como los seguidos por Benilan o Gagneux. No obstante, las propiedades requeridas para la demostración del Teorema 3.1 serán probadas desde el primer punto de vista (en [GM92a] se plantean cuestiones similares en el marco funcional de funciones de  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ ).

### 2.1 Primeros resultados sobre medidas.

Comenzamos recordando las nociones de medida regular y medida de Radon (ambas signadas) como funciones aditivas de conjuntos definidas sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de un espacio topológico  $V$  con valores en  $\mathbb{R}$  verificando adecuadas hipótesis adicionales que detallaremos a continuación (véase por ejemplo [VHu85, Capítulo 2], [R, Capítulo 1 y 2], [F69, 2.1 y 2.2], [Mu71, página 65], [M86, 1.4, 1.5 y 1.6]). Debido a la naturaleza de nuestro problema, nos limitaremos a considerar  $V$  como  $\mathbb{R}^{N+1}$ .

Por  $S$  denotaremos un subconjunto abierto dado de  $\mathbb{R}^{N+1}$  que supondremos acotado (más tarde  $S$  será el cilindro  $]0, T[ \times \Omega$ ). Si  $\mu$  es una medida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de  $S$ , diremos que el subconjunto  $E \subset S$  es  $\mu$ -medible si  $E \in \mathcal{A}$ .

**Definición 2.1** ([VHu85, página 69])

1. Sea  $\mu$  una medida (signada) definida sobre una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos  $\mathcal{A}$  de  $S$  con valores en  $\mathbb{R}$ . La **variación total** de la medida  $\mu$  es la función  $\nu(\mu, E)$  definida por

$$\nu(\mu, E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} \text{ disjuntos dos a dos y tales que } E_i \subset E \right\}.$$

2. Se dice que  $\mu$  es una **medida localmente finita** si  $\nu(\mu, E) < \infty$  para todo conjunto acotado  $E \subset S$ .
3. Una medida  $\mu$  se dice de **variación acotada** (o simplemente **acotada**) sobre  $S$ , si  $\nu(\mu, S) < \infty$ . En ese caso se denota por  $\|\mu\|$  al valor de  $\nu(\mu, S)$ .

Siguiendo la notación de Vol'pert y Hudajaev, denotamos por  $CA$  el conjunto de todas las medidas de variación acotada definidas sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Dotándolo de las operaciones suma de medidas y producto por un escalar, el conjunto  $CA$  es un espacio vectorial. Para toda  $\mu \in CA$  la aplicación  $\|\mu\| = \nu(\mu, S)$  define una norma en  $CA$ . Además, dicho espacio es completo para esta norma [VHu85, Capítulo 2 §1.4].

**Definición 2.2** ([VHu85, página 76]) *Sea  $\mu$  una medida sobre  $S$ , se dice que  $\mu$  es una medida regular si*

1. Todo conjunto abierto de  $S$  es  $\mu$ -medible.
2. Para todo conjunto  $\mu$  medible  $E$  y todo  $\varepsilon > 0$  existe un abierto  $G$  y un cerrado  $F$  tal que

$$F \subset E \subset G, \quad \nu(\mu, G - F) < \varepsilon.$$

En vista de la definición anterior, el dominio de una medida regular lo constituye la "menor"  $\sigma$ -álgebra que contiene a los subconjuntos abiertos de  $S$ . A esta  $\sigma$ -álgebra se la conoce como la  **$\sigma$ -álgebra de Borel** de  $S$  y a cada conjunto de esta álgebra se le llama **conjunto de Borel**. Diremos que la medida  $\mu$  es una **medida de Borel** si todo conjunto de Borel es  $\mu$  medible. En particular según el punto 1 de la Definición 2.2, **toda medida regular es una medida de Borel**.

**Definición 2.3** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $S$ , se dice que  $\mu$  es una **medida de Radon** si  $\mu$  es una medida de Borel regular y  $\nu(\mu, K)$  es finito para cada conjunto compacto  $K$  de  $S$ .*

En consecuencia, toda medida de Radon, será una medida regular mientras que el recíproco en general no es cierto. Sin embargo, una medida de Borel regular localmente finita es también una medida de Radon (esto en general no es cierto si los cerrados y acotados no son siempre compactos, véase [M86, Corolario 1.6 página 9]).

**Observación 2.1** *Según las definiciones y propiedades anteriores, toda medida (signada) regular acotada sobre  $S \subset \mathbb{R}^{N+1}$  es una medida de Radon acotada sobre  $S$ .*

Otra caracterización de las medidas regulares (signadas) acotadas es la dada desde el punto de vista funcional. Sea  $\mathcal{M}_b(S) \subset CA(S)$  el conjunto de medidas regulares acotadas sobre  $S$  con la norma definida por  $\|\mu\| = \nu(\mu, S)$ . Se tiene entonces que para

todo funcional lineal  $T$  sobre el espacio  $C(\bar{S})$  con la norma del supremo, existe una única medida  $\mu \in \mathcal{M}_b(S)$  que lo define en la forma

$$T(h) = \int_S h d\mu \quad (2.1)$$

para cada función  $h \in C(\bar{S})$ , via el Teorema de Representación de Riesz (véase [E92, página 49], [F69, 2.5.13. página 106], [R, página 46], [VHu85, página 118]). Es decir,  $\mathcal{M}_b(S)$  es el dual de  $C(\bar{S})$ .

## 2.2 Los espacios $BV_t(Q)$ y $BV(0, T; L^1(\Omega))$ .

Dedicaremos esta subsección a la presentación de los espacios  $BV_t(Q)$  y  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ . Mostraremos la equivalencia entre ambos espacios. Introduciremos las nociones de continuidad aproximada, representante boreliano de una función integrable (mean value, [V67, §4 páginas 240–245], [VHu85, §5.6 páginas 181–185]) y la composición promedio (averaged superposition, [VHu69, páginas 246–247]) así como algunas de las propiedades más relevantes que utilizaremos posteriormente.

Sea  $u$  una función integrable sobre un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$  abierto y acotado. Supongamos además que existe una medida de Radon (signada) acotada  $\mu_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) tal que para toda función arbitraria  $\varphi$  de soporte compacto y continuamente diferenciable en  $S$  (diremos que  $\varphi \in C_c^1(S)$ ) se satisface la siguiente igualdad:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = - \int_S \varphi d\mu_i \quad (x = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}). \quad (2.2)$$

Entonces decimos que la **derivada generalizada de la función  $u$  con respecto a la variable  $x_i$  es la medida regular  $\mu_i$  sobre  $S$** . En ese caso adoptamos la notación

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, h \right\rangle = \int_S h \frac{\partial u}{\partial x_i} := \int_S h d\mu_i = \langle \mu_i, h \rangle$$

para toda función  $h$  medible e integrable con respecto a  $\mu_i$ .

El tratamiento de las derivadas generalizadas como medidas nos permite considerarlas como aplicaciones lineales. En efecto, el segundo miembro de (2.2) define sobre  $C_c^1(S)$  una aplicación lineal con valores en  $\mathbb{R}$  que es continua si la medida  $\mu_i$  es acotada en  $S$ . Además dicho funcional tiene por norma  $\|\mu_i\|$ . Como consecuencia del Teorema de Hahn–Banach y del Teorema de Representación de Riesz, se tiene que si  $u$  es una función definida e integrable en  $S$ , **una condición necesaria y suficiente para que la derivada generalizada  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  sea una medida de Radon acotada en  $S$  es que para cada  $\varphi \in C_c^1(S)$  se tenga la siguiente estimación**

$$\left| \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \right| \leq K \|\varphi\|_{L^\infty(S)} \quad (2.3)$$

donde  $K$  es una constante positiva independiente de  $\varphi$  (la demostración de esta caracterización puede encontrarse en [VHu85, página 150]).

**Notación:**

- Denotamos por  $\int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|$  el infimo de las constantes  $K$  verificando (2.3) para toda  $\varphi$  de  $C_c^1(S)$ , si  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  es una medida de Radon acotada. Destacamos el hecho de que este valor es precisamente el valor de  $\|\mu_i\|$ .

- Si  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  es una medida y  $\varphi$  es una función de Borel, por  $\int_S \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i}$  se entienda la integral de  $\varphi$  en  $S$  respecto de dicha medida. Sólo en el caso de que  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  sea una función de  $L^1$ , escribiremos  $\int_S \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx dt$

**Definición 2.4** ([VHu85, página 158]) *El conjunto de funciones definidas e integrables sobre el abierto  $S$ , tales que sus derivadas generalizadas son medidas (signadas) regulares acotadas sobre  $S$  (i.e. medidas de Radon acotadas) constituyen el conjunto de funciones que denotamos por  $BV(S)$ .*

Se tiene que el conjunto de funciones de  $BV(S)$  es un espacio vectorial para las operaciones suma de funciones y producto por escalares. Además dotado de la norma  $\|u\| = \|u\|_{L^1(S)} + \sum_{i=0}^N \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|$  es un espacio de Banach [VHu85, páginas 159, 160]. Por tanto un criterio para caracterizar los elementos  $u$  de  $BV(S)$ , es la verificación de la estimación (2.3) para toda  $\varphi \in C_c^1(S)$ , que al expresar (2.3) en términos de  $\text{div} \varphi$  con  $\varphi \in C_c^1(S; \mathbb{R}^{N+1})$  obtenemos el criterio que Giusti a elegido en [Gi84, Definición 1.3, página 4] para definir el espacio  $BV$ .

Si en particular tomamos como  $S$  el abierto  $Q \equiv ]0, T[ \times \Omega$  y denotamos la componente  $x_0$  de  $x = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in Q$  por  $t$ , se tiene la siguiente definición:

**Definición 2.5** *Diremos que una función  $u$  definida e integrable en  $Q$  es una **función de variación acotada respecto a  $t$**  si la derivada generalizada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una medida (signada) de Radon acotada sobre  $Q$ . Al espacio de tales funciones lo denotamos por  $BV_t(Q)$ .*

Se ha introducido el espacio  $BV$  como un espacio de funciones cuyas derivadas generalizadas son medidas. Sin embargo, existen otras posibilidades de definirlo. En particular, en el caso de funciones  $u$  de  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  (con  $a < b$  números reales) se suele definir el espacio de funciones de **variación acotada** como el espacio de funciones tales que la **variación de  $u$  sobre  $[a, b]$**  definida por

$$V_a^b u = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |u(t_i) - u(t_{i-1})| : m \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\} \quad (2.4)$$

es finita. Sin embargo en algunas situaciones, esta definición tiene algunas desventajas. Mientras que la integral no sufre cambios cuando alteramos una función sobre conjuntos de medida cero, la variación puede ser afectada incluso al variar el valor de la función en un punto. Para evitar este inconveniente, se trabaja con funciones integrables en  $]a, b[$  y se define la **variación esencial de  $u$  sobre  $]a, b[$**  a la que denotamos por  $\text{ess}V_a^b u$  y su definición depende del concepto de **continuidad aproximada**. Definimos la noción de punto de continuidad aproximada en un caso más general:

**Definición 2.6** *Sea un espacio métrico  $(X, d_X)$  y sea  $\mu$  una medida sobre  $X$  con valores en otro espacio métrico  $(Y, d_Y)$ . Se dice que una función  $u$  definida sobre  $X$  tomando valores en  $Y$  es  **$\mu$ -aproximadamente continua** en  $x_0 \in X$  si y solo si  $u$  está definida en  $x_0$  y para cada  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $E = X \setminus u^{-1}\{y \in Y : d_Y(y, u(x_0)) > \varepsilon\}$  tiene densidad 0 en  $x_0$ , donde la **densidad** de un conjunto  $E$  en un punto  $x_0$  con respecto a  $\mu$  es definida como el valor del*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E \cap B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, r))}$$

y  $B(x_0, r) = \{x \in X : d_X(x, x_0) < r\}$ .

Decir que  $u$  es aproximadamente continua en  $x_0$  es equivalente a decir que el **límite aproximado** de  $u$  en  $x_0$  es  $u(x_0)$ , véase [F69, 2.9.12] y [VHu85, páginas 162–169] en el caso particular  $X = \mathbb{R}^M$ ,  $\mu$  la medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^M$  e  $Y = \mathbb{R}$ . En estas referencias puede encontrarse la definición de límite aproximado.

**Observación 2.2** De la definición anterior se deduce que la continuidad aproximada en un punto, queda inalterada ante cambios de la función sobre conjuntos de  $\mu$ -medida cero.

**Observación 2.3** La medida del conjunto de puntos de continuidad aproximada es planteada en el Teorema 2.9.13 de [F69] que asegura que  $u$  es  $\mu$ -medible si y solo si  $u$  es aproximadamente continua en  $\mu$ -casi todo punto de  $X$  (véase también [E92] Teorema 1, página 47). Sin embargo esta regularidad aún no es suficiente para probar el resultado principal de este capítulo (Teorema 3.1).

Volviendo a considerar el caso de funciones reales, se define la **variación esencial de  $u$  en  $]a, b[$**  como

$$\text{ess}V_a^b u = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |u(t_i) - u(t_{i-1})| : m \in \mathbb{N}, a < t_0 < t_1 < \dots < t_m < b \right. \\ \left. \text{cada } t_i \text{ con } t_i \text{ punto de continuidad aproximada} \right\}. \quad (2.5)$$

se tiene que si  $u \in L^1(a, b)$ , entonces

$$\int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = \sup \left\{ \int_a^b u \varphi' dt : \varphi \in C_c^1(a, b), \|\varphi\|_{L^\infty(a, b)} \leq 1 \right\} = \text{ess}V_a^b u. \quad (2.6)$$

**Notación:** No confundir (2.6) con  $\int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dt$  que se refiere al caso en que  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1$

Por tanto  $u \in BV(a, b)$  si y solo si  $\text{ess}V_a^b u$  es finita [E92, Teorema 1 página 217].

Es posible extender los conceptos de variación total y de variación esencial a funciones integrables en un intervalo con valores en un espacio de Banach  $Y$  [F69, 2.5.16 y 4.5.10]). Particularizando para  $Y = L^1(\Omega)$  se tiene que la variación de una función  $u$  definida sobre  $[0, T]$  con valores en  $L^1(\Omega)$  viene dada por

$$\text{Var}(u, [0, T]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_{L^1(\Omega)} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T \right\} \quad (2.7)$$

(véase [Br73, Definición 2.A] y [F69, 2.5.16]). La clasificación de las funciones de  $L^1(Q)$  atendiendo a que la variación esté o no acotada, nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 2.7** Sea  $u \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$ . Si  $\text{Var}(u, [0, T]) < \infty$  se dice que  $u$  es una **función de variación acotada de  $[0, T]$  con valores en  $L^1(\Omega)$**  y el espacio de tales funciones se designa por  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ .

Esta es la noción del espacio  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  utilizada por Gagneaux, Madaune-Tort; Betbeder, Vallet y Benilan, Gariépy y Touré en las referencias mencionadas. Sin embargo, como ya hemos comentado anteriormente, la variación total podría variar según el representante elegido de la clase de funciones que son  $\mathcal{L}^{N+1}$ -casi todo punto iguales a  $u$ . Por tanto convendría dar una definición de la variación válida para todos los elementos de dicha clase de equivalencia. Se define así la variación esencial como se ha hecho para la variación total en (2.7) pero eligiendo los puntos  $t_0, t_1, \dots, t_m$  de  $\mathcal{L}^1$ -continuidad aproximada de  $u$  y con  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < T$  [F69, 4.5.10]. No obstante, la Proposición A.5  $i) \Rightarrow iii)$  de [Br73] permite concluir que

$$\left| \int_Q u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \right| \leq K \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \quad (2.8)$$

donde  $K$  es una constante positiva independiente de  $\varphi$ . Tomando el infimo de estas constantes  $K$  verificando (2.8) se obtiene la  $\text{Var}(u, [0, T])$  [BG93a, Lema 2.1 y Definición 2.1], que coincide con  $\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|$  según la notación introducida en la página 74. En este sentido, según el Teorema 4.2.2 de [VHu85] página 150, la derivada generalizada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  define una medida regular acotada sobre  $Q$  y por consiguiente se tiene la inclusión de  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  en  $BV_t(Q)$ . La implicación  $iii) \Rightarrow i)$  de la Proposición A.5 de [Br73] junto con el anterior Teorema de [VHu85], prueba la inclusión contraria y por tanto la igualdad  $BV(0, T; L^1(\Omega)) = BV_t(Q)$ . Este hecho nos permite entender las funciones de  $L^1(Q)$  cuya derivada generalizada es una medida regular acotada como funciones de  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  y viceversa.

Dado que trabajaremos con la clase de funciones  $u \in BV_t(Q) (\equiv BV(0, T; L^1(\Omega)))$  para las cuales  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una medida de Radon acotada en  $Q$  y nos veremos en la necesidad de integrar respecto a esta medida funciones  $v \in L^\infty(Q)$ , necesitaremos que dicha

función  $v$  sea medible respecto de la medida de Borel  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Para ello hemos de asegurar que  $v$  es una función de Borel sobre  $Q$ . Sin embargo, esto en general no sucede para funciones cualesquiera de  $L^\infty(Q)$ . Para subsanar este problema, siguiendo a Federer [F69], es posible definir para toda  $v$  en  $L^1(Q)$  (y por consiguiente de  $L^\infty(Q)$ ) dos funciones borelianas  $\lambda_v$  y  $\mu_v$  con valores en  $\mathbb{R}$  definidas respectivamente como los límites  $\mathcal{L}^{N+1}$ -aproximados inferior y superior de la función  $v$  en el siguiente sentido (la definición de  $\lambda_v$  y  $\mu_v$  puede encontrarse en [V67], [F69] y también en [E92, §5.9 página 209]: en el Teorema 4.5.9. punto (2) de [F69] y en el Lema 1 página 210 de [E92] se prueba que son funciones borelianas):

$$\mu_v(t, x) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^{N+1}(B((t, x), r) \cap \{(s, y) \in Q : v(s, y) > \sigma\})}{r^{N+1}} = 0 \right\}$$

y

$$\lambda_v(t, x) = \sup \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^{N+1}(B((t, x), r) \cap \{(s, y) \in Q : v(s, y) < \sigma\})}{r^{N+1}} = 0 \right\}.$$

De esta definición, se deduce que en aquellos puntos  $(t, x) \in Q$  donde sean finitos los valores de  $\lambda_v(t, x)$  y  $\mu_v(t, x)$ , se tendrá que  $\lambda(t, x) \leq \mu_v(t, x)$ . Además, la desigualdad será una igualdad en los puntos de continuidad aproximada.

Definiendo ahora  $\bar{v} := \frac{1}{2}(\mu_v + \lambda_v)$ , se tiene que  $\bar{v}$  es una función boreliana, y por consiguiente medible con respecto a  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . En general, el conjunto de puntos de  $Q$  para los que existen  $\lambda_v$  y  $\mu_v$  tiene  $\mathcal{L}^{N+1}$ -medida total en  $Q$ . A estos puntos, se les llama **regulares**. Sin embargo, solo si  $v \in BV(Q)$  se puede garantizar que el conjunto de puntos no regulares tenga medida  $\mathcal{H}^N$ -dimensional cero [VHu85, página 178] ( $\mathcal{H}^N$  denota la medida de Hausdorff  $N$ -dimensional).

Dado un punto regular de  $v$  puede suceder que  $\lambda_v = \mu_v$ , denominándose a dicho punto, punto de continuidad aproximada (véase [VHu85, Definición 2 página 169] y también la Definición 2.6 de esta Memoria), o bien que sean distintos, constituyendo un **punto de salto** de  $v$ . En general, para cualquier  $v \in L^1(Q)$ ,  $v$  es  $\mathcal{L}^{N+1}$ -aproximadamente continua [E92, Teorema 3, página 47], siendo por tanto  $\bar{v} = v$  para  $\mathcal{L}^{N+1}$ -casi todo punto de  $Q$  [F69, Teorema 2.9.8]. Además se verifica que  $\mu_v = \mu_{\bar{v}}$  y  $\lambda_v = \lambda_{\bar{v}}$  en todo punto regular (véase la página 209 de [E92]). Al conjunto de saltos de  $v$  lo denotamos por  $\Gamma_v$ , quedando definido como

$$\Gamma_v = \{(t, x) \in Q : (t, x) \text{ es un punto regular y } \lambda_v(t, x) < \mu_v(t, x)\}. \quad (2.9)$$

Si además  $v \in BV(Q)$ , para  $\mathcal{H}^N$ -casi todo  $(t, x) \in Q$  se tiene que  $-\infty < \lambda_v \leq \mu_v < \infty$  y si  $v \in L^\infty(Q)$ , para todo  $(t, x) \in Q$  se verifica que

$$-\|v\|_{L^\infty(Q)} \leq \lambda_v(t, x) \leq \mu_v(t, x) \leq \|v\|_{L^\infty(Q)} \quad (2.10)$$

deduciéndose la estimación  $|\bar{v}(t, x)| \leq \|v\|_{L^\infty(Q)}$  para  $\mathcal{H}^N$ -casi todo punto de  $Q$  (por el Lema 2.4 del próximo apartado obtendremos la  $\frac{\partial u}{\partial t}$ -integrabilidad de  $\bar{v}$  cuando  $v \in L^\infty(Q)$  [F69, Teorema 4.5.9. (3)] y [E92, Teorema 2 página 211]).

El siguiente aspecto que consideraremos atañe a la composición de funciones. Sea  $h$  una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y  $u \in L^1(Q)$ . Para cada punto regular  $(t, x)$  de  $u$ ,

se define la composición promedio (averaged superposition [VHu85, Capítulo 4 §6.2])  $\hat{h}(u)$  en  $(t, x)$  como

$$\hat{h}(u(t, x)) = \int_0^1 h(\mu_u(t, x)s + \lambda_u(t, x)(1 - s)) ds. \quad (2.11)$$

Consecuentemente, si  $(t, x)$  es un punto de continuidad aproximada de  $u$ , se tiene que  $\mu_u(t, x) = \lambda_u(t, x)$  y por tanto que  $\hat{h}(u(t, x)) = h(u(t, x))$ . Puesto que  $u$  es  $\mathcal{L}^{N+1}$ -aproximadamente continua, se verifica que  $\hat{h}(u(t, x)) = h(u(t, x))$   $\mathcal{L}^{N+1}$ -casi todo punto de  $Q$ . En particular si  $u \in BV(Q)$ , la composición promedio  $\hat{h}(u)$  esta definida  $\mathcal{H}^N$ -casi todo punto de  $Q$  y si  $u$  es  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua, se tiene que  $\hat{h}(u(t, x)) = h(u(t, x))$   $\mathcal{H}^N$ -casi todo  $(t, x) \in Q$ .

### 2.3 Algunas propiedades del espacio $BV_t(Q)$ .

Se presentan a continuación algunas propiedades de las funciones de  $BV_t(Q)$  que serán de utilidad en la demostración del Teorema 3.1. Los resultados que aquí se persiguen (Proposiciones 2.2 y 2.4) ya han sido obtenidos por Gagneux y Madaune-Tort en [GM92a] en el marco funcional de funciones de  $BV(0, T; L^1(\Omega))$ . No obstante, daremos aquí otra demostración de estos resultados a partir de la definición de  $BV_t(Q)$  (recuérdese que en la sección anterior se mostró que ambos espacios coinciden).

Introducimos la siguiente notación: Dada  $u : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y fijado  $x \in \Omega$ , se define la función de  $t$ ,  $u^{(x)}(t) = u(t, x)$ . Por ess  $V_0^T u^{(x)}$  denotaremos la variación esencial de  $u^{(x)}$  como función de  $t$ .

**Lema 2.1** *Sea  $u \in L^1(Q)$ . Entonces la función que a cada  $x \in \Omega$  le hace corresponder ess  $V_0^T u^{(x)}$  es  $\mathcal{L}^N$ -medible.*

**Demostración.** Definimos la función  $f(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & (t, x) \in Q \\ 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus Q \end{cases}$  y aplicamos el Lema 1 página 219 de [E92]. ■

Una de las propiedades más importantes de las funciones  $BV$  es la semicontinuidad (véase el Teorema 1.9 de [Gi84]) que es también cierta para funciones de  $BV_t(Q)$ :

**Lema 2.2** *Sea  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  una sucesión de funciones en  $BV_t(Q)$  que converge en  $L^1(Q)$  a una función  $u$ . Entonces  $u \in BV_t(Q)$  y además*

$$\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_Q \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|. \quad (2.12)$$

**Demostración.** Sea  $\varphi \in C_c^1(Q)$  tal que  $\|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$ . Entonces

$$\int_Q u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q u_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_Q \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right| \varphi dx dt.$$

Se obtiene (2.12) al tomar el supremo en  $\varphi$ . ■

El siguiente paso es aproximar en algún sentido, una función de  $BV_t(Q)$  por funciones regulares. Puesto que el cierre de las funciones  $C^\infty(Q)$  con norma  $||| \cdot |||$  (véase la página 74 para recordar su definición) es  $W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$  y dado que no toda función de  $BV_t(Q)$  es de  $W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ , en general, si  $u \in BV_t(Q)$  no tiene porqué existir una sucesión  $\{u_j\} \subset C^\infty(Q)$  tal que  $u_j$  converja a  $u$  en  $L^1(Q)$  y tal que  $\int_Q \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ . Sin embargo, se tiene la siguiente propiedad:

**Proposición 2.1** *Sea  $u \in BV_t(Q)$ . Entonces existe una sucesión de funciones  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  en  $C_c^\infty(Q)$  tal que*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q |u_j - u| dx dt = 0$$

y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right| = \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|.$$

**Demostración.** Una adaptación de la demostración del Teorema 1.17 del libro de Giusti [Gi84] nos permite probar la Proposición anterior (tomese el operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  en lugar de  $div$ ). ■

**Proposición 2.2** *Sea  $u \in L^1(Q)$ . Entonces  $u \in BV_t(Q)$  si y sólo si existe una constante  $M > 0$  tal que  $\int_K \text{ess} V_a^b u^{(x)} dx \leq M$  para todo compacto  $K \subset \Omega$  y todo  $0 < a < b < T$ .*

*La uniformidad de la estimación anterior es equivalente a  $\int_\Omega \text{ess} V_0^T u^{(x)} dx \leq M$ .*

**Demostración.** Supongamos en primer lugar que  $u \in BV_t(Q)$ . Sea  $0 < a < b < T$  y  $K \subset \Omega$  un compacto. Sea  $u_j$  como en la Proposición 2.1. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b \int_K |u_j - u| dx dt = 0 \quad (2.13)$$

y

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_a^b \int_K \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right| \leq M \quad (2.14)$$

con  $M$  constante positiva independiente de  $K$  por ser  $\frac{\partial u}{\partial t}$  una medida de Radon acotada. Por tanto, para  $\mathcal{L}^N$ -casi todo  $x \in K$ ,

$$u_j^{(x)} \rightarrow u^{(x)} \text{ en } L^1(a, b).$$

La propiedad de semicontinuidad inferior de las funciones  $BV$  (Lema 2.2) aplicada a la sucesión  $u_j^{(x)}$  y (2.6) nos permite obtener que

$$\text{ess} V_a^b u^{(x)} = \int_a^b \left| \frac{du^{(x)}}{dt} \right| dt \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \frac{du_j^{(x)}}{dt} \right| dt = \liminf_{j \rightarrow \infty} \text{ess} V_a^b u_j^{(x)}$$

para  $\mathcal{L}^N$ -casi todo  $x \in K$ . Integrando en  $K$  y utilizando el Lema de Fatou, se tiene la desigualdad

$$\int_K \operatorname{ess} V_a^b u^{(x)} dx \leq \int_K \liminf_{j \rightarrow \infty} \operatorname{ess} V_a^b u_j^{(x)} dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_K \operatorname{ess} V_a^b u_j^{(x)} dx. \quad (2.15)$$

Aplicando el Teorema de Fubini en (2.15) se tiene que

$$\int_K \operatorname{ess} V_a^b u^{(x)} dx \leq \liminf \int_a^b \int_K \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|(t, x) dx dt \leq M$$

donde la estimación dada es consecuencia de (2.14) obteniendo de esta fórmula la integrabilidad de  $\operatorname{ess} V_a^b u^{(x)}$  sobre  $K$ . Además la estimación anterior es independiente del compacto  $K$  de  $\Omega$  elegido así como de  $a, b$  números reales entre 0 y  $T$ . Dado que existe una sucesión de compactos  $K_n \subset \Omega$  tales que  $K_n \subset K_{n+1}$  para cada  $n$  natural y  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  y dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  con  $0 < a_n < b_n < T$  convergiendo a 0 y a  $T$  respectivamente, es igualmente cierta la estimación  $\int_{\Omega} \operatorname{ess} V_0^T u^{(x)} dx \leq M$ , gracias a la positividad de la variación esencial, y la uniformidad de la cota  $M$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que  $u \in L^1(Q)$  y  $\int_K \operatorname{ess} V_a^b u^{(x)} dx \leq M$  con  $K \subset \Omega$  compacto,  $0 < a < b < T$  y  $M \geq 0$  independiente de  $K$ ,  $a$  y  $b$  (esta condición es verificada si suponemos que  $\int_{\Omega} \operatorname{ess} V_0^T u^{(x)} dx$  es finita, gracias a la monotonía de la variación esencial y el hecho de ser positiva para casi todo  $x \in \Omega$ ).

Sea  $\varphi \in C_c^1(Q) \cap \{\varphi : \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq 1\}$  tal que  $\operatorname{sop} \varphi \subset ]a, b[ \times K$ , con  $0 < a < b < T$ . El Teorema 1, página 217 de [E92] (véase la ecuación (2.6) de esta Memoria) nos permite obtener la desigualdad

$$\int_K \int_a^b u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \leq \int_K \operatorname{ess} V_a^b u^{(x)} dx \leq M.$$

La uniformidad de la constante  $M$  con respecto a  $K, a$  y  $b$  implica que el

$$\sup \left\{ \int_Q u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt : \varphi \in C_c^1(Q) \quad \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq 1 \right\} < \infty$$

y por tanto que  $u \in BV_t(Q)$ . ■

**Corolario 2.1** *Sea  $u$  una función de  $BV_t(Q)$ . Entonces, existe un subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  tal que  $\mathcal{L}^N(\Omega - \tilde{\Omega}) = 0$  y*

$$\operatorname{ess} V_0^T u^{(x)} < \infty \quad \text{para todo } x \in \tilde{\Omega}.$$

*Es decir,  $u^{(x)} \in BV(0, T)$  para casi todo  $x$  de  $\Omega$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 2.2, se tiene que  $\operatorname{ess} V_0^T u^{(x)} \in L^1(\Omega)$ . Consecuencia de esto es que la función  $\operatorname{ess} V_0^T u^{(x)}$  es finita para casi todo  $x \in \Omega$  con respecto a la medida de Lebesgue  $N$ -dimensional. ■

**Lema 2.3** Si  $u \in BV_t(Q)$ , entonces para toda función boreliana  $\varphi$  y acotada sobre  $Q$  se tiene que

$$\int_Q \varphi \frac{\partial u}{\partial t} = \int_\Omega \left( \int_0^T \varphi \frac{du^{(x)}}{dt} \right) dx .$$

**Demostración.** Puesto que  $u \in BV_t(Q)$ , para cada  $\varphi \in C_c^1(Q)$  se tiene la igualdad

$$\int_Q \varphi \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_\Omega \int_0^T u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx$$

ya que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una medida. Además para  $\mathcal{L}^N$ -casi todo  $x \in \Omega$ ,

$$\left| \int_0^T u^{(x)}(t) \frac{d\varphi^{(x)}}{dt} \right| = \left| \int_0^T u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right| .$$

Aplicando la propiedad 2.9.24 de [F69], obtenemos que

$$\int_0^T u^{(x)}(t) \frac{d\varphi^{(x)}}{dt} = - \int_0^T \varphi^{(x)}(t) \frac{du^{(x)}}{dt}$$

ya que  $\varphi^{(x)} \in C_c^1(0, T)$  y por el Corolario 2.1  $\text{ess}V_0^T u^{(x)}$  es finita para  $\mathcal{L}^N$ -casi todo  $x \in \Omega$ . Integrando en  $\Omega$  la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_Q \varphi \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_\Omega \int_0^T u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx = \int_\Omega \left( \int_0^T \varphi \frac{du^{(x)}}{dt} \right) dx \quad (2.16)$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(Q)$ . Puesto que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una medida de Borel, el resultado del Lema es consecuencia del hecho de que toda función de Borel en un espacio métrico con valores en  $\mathbb{R}$ , es una función de Baire [F69, 2.2.15] (las funciones de Baire son la mínima clase de funciones que contiene a las funciones continuas y es cerrada para el límite puntual). Por tanto, cualquier función de Borel  $\varphi$  acotada en  $Q$  puede ser obtenida como límite puntual de funciones continuas y estas a su vez como límite de funciones de  $C_c^1(Q)$  que verifican la ecuación (2.16). La acotación de  $\varphi$  nos permite obtener el aserto del Lema gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue aplicado a la medida  $\frac{\partial u}{\partial t}$  y la igualdad (2.16) para funciones de  $C_c^1(Q)$ . ■

Por definición, si  $u \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ , entonces la derivada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una función de  $L^1(Q)$  y por ello define una medida regular finita sobre  $Q$ , que además es  $\mathcal{L}^{N+1}$ -absolutamente continua. Sin embargo, cuando  $u$  es una función de  $BV_t(Q)$  esto en general no es cierto. La medida  $\frac{\partial u}{\partial t}$  se descompone (de acuerdo con el Teorema de Descomposición de Lebesgue) como suma de una medida absolutamente continua respecto a la medida  $\mathcal{L}^{N+1}$  que denotamos por  $[\frac{\partial u}{\partial t}]_{ac}$  y otra singular  $[\frac{\partial u}{\partial t}]_s$ , [E92, Teorema 3 página 42 y página 169]. De hecho, si la parte singular fuese cero, entonces  $u$  sería una función de  $W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$  ([E92] páginas 169–171). El siguiente resultado concierne a la continuidad absoluta de  $\frac{\partial u}{\partial t}$  respecto a la medida de Hausdorff  $N$ -dimensional (que aquí denotaremos por  $\mathcal{H}^N$ ).

**Lema 2.4** Sea  $u \in BV_t(Q)$ . Entonces la medida  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es  $\mathcal{H}^N$ -absolutamente continua. Además si  $E$  es un subconjunto de  $Q$  tal que el conjunto  $E_\Omega = \{x \in \Omega : (t, x) \in E \text{ para algún } t \in ]0, T[ \}$  tiene medida  $N$ -dimensional cero, también  $\frac{\partial u}{\partial t}(E) = 0$ .

**Demostración.** Sea  $E$  un subconjunto boreliano de  $Q$ . Por  $E_\Omega$  hemos denotado la proyección de  $E$  sobre el hiperplano  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : t = 0\}$ . Si  $\mathcal{H}^N(E) = 0$ , entonces  $\mathcal{L}^N(E_\Omega) = 0$  [V67, páginas 235-236]. Además, puesto que  $\text{ess}V_0^T u^{(x)}$  es  $\mathcal{L}^N$ -integrable en  $\Omega$  (Proposición 2.2) se tiene que

$$\int_{E_\Omega} \text{ess}V_0^T u^{(x)} dx = 0 .$$

Aplicando el Lema 2.3 con  $\varphi = \chi_{]0, T[ \times E_\Omega}$ , la igualdad

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| (]0, T[ \times E_\Omega) = \int_{E_\Omega} \text{ess}V_0^T u^{(x)} dx = 0$$

es satisfecha y por tanto  $0 = \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| (]0, T[ \times E_\Omega) \geq \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| (E) \geq 0$ , lo que prueba el Lema.

■

Para la demostración de las siguientes proposiciones necesitaremos el siguiente Lema

**Lema 2.5** Supongamos  $u \in L^1(Q)$ . Si existe una constante  $K$  positiva, tal que para cada  $\varphi \in C_c^1(Q)$  se tiene la estimación

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left| \int_Q \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} \varphi(t, x) dx dt \right| \leq K \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} ,$$

entonces  $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{M}_b(Q)$ , es decir, la derivada con respecto a  $t$  en sentido de distribuciones es una medida de Radon acotada sobre  $Q$ .

**Demostración.** Sea  $T_h(t, x) = \frac{1}{h}[u(t+h, x) - u(t, x)]$ . Entonces el límite en sentido de distribuciones cuando  $h$  tiende a cero de  $T_h$  es precisamente la distribución  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . En efecto, para cada  $\varphi \in C_c^1(Q)$  se tiene que

$$\begin{aligned} (T_h, \varphi) &= \int_Q T_h(t, x) \varphi(t, x) dx dt \\ &= \int_Q u(t+h, x) \frac{\varphi(t, x) - \varphi(t+h, x)}{h} dx dt \\ &\quad + \int_Q u(t+h, x) \frac{\varphi(t+h, x)}{h} dx dt \\ &\quad - \int_Q u(t, x) \frac{\varphi(t, x)}{h} dx dt . \end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable  $t+h = s$  y eligiendo  $0 < h < h_0$  tal que  $\text{sop} \varphi \subset [h_0, T - h_0]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_Q u(t+h, x) \frac{\varphi(t+h, x)}{h} dx dt &= \int_\Omega \int_h^{T+h} u(s, x) \frac{\varphi(s, x)}{h} ds dx \\ &= \int_Q u(t, x) \frac{\varphi(t, x)}{h} dx dt . \end{aligned}$$

Haciendo ahora tender  $h$  a 0 se llega a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle T_h, \varphi \rangle = - \int_Q u(t, x) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} dx dt$$

y por tanto que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$$

en sentido de distribuciones. Además, por la hipótesis del Lema se tiene la estimación

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_Q \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} \varphi(t, x) dx dt \right| \leq K \|\varphi\|_{L^\infty(Q)}$$

para todo  $\varphi \in C_c^1(Q)$ . El Teorema del Capítulo 4 §2 de [VHu85] (puede verse este resultado en la página 73 de esta Memoria) asegura que entonces  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es una medida de Radon acotada, finalizando la demostración del Lema. ■

**Proposición 2.3** *Supongamos  $u \in L^\infty(Q)$  y  $b$  verificando (1.15). Si además suponemos*

$$b(u) \in BV_t(Q) \quad (2.17)$$

y

$$\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2 > 0 \quad (2.18)$$

donde  $L_1, L_2$  son respectivamente las constantes de Lipschitz de  $b_1^{-1}$  y  $b_2$  en el intervalo  $[-\|u\|_{L^\infty(Q)}, \|u\|_{L^\infty(Q)}]$ , entonces

$$u \in BV_t(Q). \quad (2.19)$$

**Demostración.** Veremos que la derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en sentido de distribuciones, es una medida de Radon acotada sobre  $Q$ . Para ello utilizaremos el Lema 2.5.

Para cada número real  $h$  y  $\varphi \in C_c^1(Q)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi \right\rangle \right| &= \left| \int_Q \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \varphi dx dt \right| \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \int_Q \left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right| dx dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left| \frac{b(u(t+h)) - b(u(t))}{h} \right| &= \left| \lambda_1 \frac{b_1(u(t+h)) - b_1(u(t))}{h} + \lambda_2 \frac{b_2(u(t+h)) - b_2(u(t))}{h} \right| \\ &\geq \lambda_1 \left| \frac{b_1(u(t+h)) - b_1(u(t))}{h} \right| - \lambda_2 \left| \frac{b_2(u(t+h)) - b_2(u(t))}{h} \right| \\ &\geq \frac{1}{|h|} \left( \frac{\lambda_1}{L_1} |u(t+h) - u(t)| - \lambda_2 L_2 |u(t+h) - u(t)| \right) \\ &= \left[ \frac{\lambda_1}{L_1} - \lambda_2 L_2 \right] \frac{|u(t+h) - u(t)|}{|h|} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (1.15). Por tanto

$$\frac{|u(t+h) - u(t)|}{|h|} \leq \frac{L_1}{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2} \frac{|b(u(t+h)) - b(u(t))|}{|h|}. \quad (2.21)$$

De donde por (2.20) y (2.21), se tiene que

$$\left| \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi \right\rangle \right| \leq \frac{L_1 \|\varphi\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2} \int_Q \frac{|b(u(t+h)) - b(u(t))|}{|h|} dx dt$$

Finalmente, puesto que  $b(u) \in BV_t(Q)$ , entonces para casi todo punto  $x$  en  $\Omega$ , la función  $b(u(\cdot, x))$  es de variación acotada (Corolario 2.1), verificandose la desigualdad

$$\frac{1}{|h|} |b(u)^{(x)}(t+h) - b(u)^{(x)}(t)| \leq \frac{1}{|h|} |\text{ess}V_0^{t+h} b(u)^{(x)} - \text{ess}V_0^t b(u)^{(x)}|$$

según la definición de  $\text{ess}V_0^s$  con  $s \in [0, T]$  [Apos88, página 158 y 159]. Lo que nos permite asegurar que

$$\left| \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi \right\rangle \right| \leq \frac{L_1 \|\varphi\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2} \int_Q \frac{|\text{ess}V_0^{t+h} b(u)^{(x)} - \text{ess}V_0^t b(u)^{(x)}|}{|h|} dx dt \quad (2.22)$$

Por otra parte, para casi todo  $x \in \Omega$  se tiene que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \frac{1}{|h|} |\text{ess}V_0^{t+h} b(u)^{(x)} - \text{ess}V_0^t b(u)^{(x)}| dt \leq \text{ess}V_0^T b(u)^{(x)}$$

por el Teorema 2.9.19 de [F69], lo que junto a la desigualdad (2.22) nos lleva a que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left| \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi \right\rangle \right| \leq \frac{L_1 \|\varphi\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2} \int_Q \int_\Omega \text{ess}V_0^T b(u)^{(x)} dx$$

Por último, el Lema 2.5 y la anterior estimación prueban la Proposición. ■

**Proposición 2.4** *Sea  $u$  una función de  $BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$ , y  $\eta$  una función boreliana localmente acotada en  $\mathbb{R}$ . Consideramos la función  $H$  absolutamente continua, definida por*

$$H(r) = \int_0^r \eta(s) ds,$$

para cada  $r \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $H(u)$  es un elemento de  $BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$ .
2. Si además,  $u$  es  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua, entonces

$$\int_{Q_t} \varphi \frac{\partial H(u)}{\partial s} = \int_{Q_t} \varphi \eta(u) \frac{\partial u}{\partial s} \quad (2.23)$$

donde  $Q_t = ]0, t[ \times \Omega$  y  $\varphi$  es una función boreliana acotada arbitraria sobre  $Q$ . Por tanto

$$\frac{\partial H(u)}{\partial t} = \eta(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

en sentido de las medidas (regla de la cadena).

3. Sea también  $v$  una función de  $BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$   $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua, entonces

$$\int_{Q_t} H(u) \frac{\partial v}{\partial s} = \int_{\Omega} H(u)(t, x) v(t, x) dx - \int_{\Omega} H(u)(0, x) v(0, x) dx - \int_{Q_t} \eta(u) \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (2.24)$$

**Demostración.** 1.- En primer lugar se tiene que  $H(u) \in L^\infty(Q)$  ya que  $u \in L^\infty(Q)$  y  $\eta$  es localmente acotada. Veamos que  $\frac{\partial H(u)}{\partial t}$  es una medida de Radon acotada. Para ello probamos que  $H(u)$  verifica la acotación del Lema 2.5.

Para cada  $h$  no nulo, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q \frac{H(u)(t+h, x) - H(u)(t, x)}{h} \varphi(t, x) dx dt \right| = \\ & = \left| \int_Q \frac{1}{h} \left( \int_{u(t, x)}^{u(t+h, x)} \eta(\sigma) d\sigma \right) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \int_Q \frac{|u(t+h, x) - u(t, x)|}{|h|} |\varphi(t, x)| dx dt \\ & \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \int_Q \frac{|u(t+h, x) - u(t, x)|}{|h|} dx dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

con  $I = [-\|u\|_{L^\infty(Q)}, \|u\|_{L^\infty(Q)}]$ . Puesto que existe un subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  de medida total en  $\Omega$  tal que para cada  $x \in \tilde{\Omega}$ ,  $u(\cdot, x)$  es una función real de variación acotada en  $[0, T]$  (Corolario 2.1) se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|h|} |u^{(x)}(t+h) - u^{(x)}(t)| \leq \frac{1}{|h|} |\text{ess}V_0^{t+h} u^{(x)} - \text{ess}V_0^t u^{(x)}| \quad (2.26)$$

según la definición de  $\text{ess}V_0^s$  con  $s \in [0, T]$  [Apos88, páginas 158 y 159]. Gracias al Teorema 2.9.19 de [F69] la desigualdad

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \frac{1}{|h|} |\text{ess}V_0^{t+h} u^{(x)} - \text{ess}V_0^t u^{(x)}| dt \leq \text{ess}V_0^T u^{(x)}$$

es satisfecha ya que  $u^{(x)} \in BV(0, T)$  cuando  $x \in \tilde{\Omega}$ . Integrando sobre  $\Omega$  la anterior estimación, de (2.25) y (2.26) se tiene que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left| \int_Q \frac{H(u)(t+h, x) - H(u)(t, x)}{h} \varphi(t, x) dx dt \right| \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \int_{\tilde{\Omega}} \text{ess}V_0^T u^{(x)} dx.$$

Puesto que  $u \in BV_t(Q)$ , la última integral está acotada (Proposición 2.2) lo que por el Lema 2.5 implica que  $\frac{\partial H(u)}{\partial t}$  es una medida de Radon acotada sobre  $Q$ .

3.- Puesto que  $u \in BV_t(Q)$ , por el apartado 1, también  $H(u) \in BV_t(Q)$ . Así, la primera integral de la igualdad (2.23) está bien definida para cualquier  $\varphi$  función boreliana y acotada en  $Q$ . El Lema 2.3 permite escribir

$$\int_{Q_t} \varphi \frac{\partial H(u)}{\partial s} = \int_{\Omega} \int_0^t \varphi \frac{dH(u)^{(x)}}{ds} dx . \quad (2.27)$$

De otra parte, existe un  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  con  $\mathcal{L}^N(\Omega - \tilde{\Omega}) = 0$  tal que para todo  $x \in \tilde{\Omega}$  las funciones  $u^{(x)}$  y  $H(u^{(x)})$  son de variación acotada en  $[0, t]$  (Corolario 2.1). Supongamos, en una primera aproximación al problema planteado, que  $\eta$  es una función continua. Por tanto es posible aplicar la fórmula de diferenciación de la composición 1-dimensional [V67, Teorema 13.2 página 248] y de (2.27) llegar a que

$$\int_0^t \varphi^{(x)} \frac{dH(u^{(x)})}{ds} = \int_0^t \varphi^{(x)} \hat{\eta}(u^{(x)}) \frac{du^{(x)}}{ds} , \quad \forall x \in \tilde{\Omega} . \quad (2.28)$$

Dado que  $u$  es una función  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua también lo es  $\eta(u)$  por ser  $\eta$  una función real continua [VHu85, Teorema 2, página 164]. El comentario de la página 78, muestra que entonces

$$\hat{\eta}(u(t, x)) = \eta(\bar{u}(t, x)) = \eta(u(t, x)) \quad \mathcal{H}^N\text{-casi todo } (t, x) \in Q . \quad (2.29)$$

Además, se sigue del Teorema 4.5.9 (29) (II)  $\Rightarrow$  (III) página 458 de [F69] que existe  $\tilde{\Omega}_1 \subset \Omega$  tal que  $\mathcal{L}^N(\Omega - \tilde{\Omega}_1) = 0$  y para cada  $x \in \tilde{\Omega}_1$  la función  $u^{(x)}$  es continua en  $t$  (sin pérdida de generalidad, llamaremos igualmente  $\tilde{\Omega}$  a  $\tilde{\Omega}_1 \cap \tilde{\Omega}$ ). Por consiguiente se verifica la igualdad

$$\hat{\eta}(u^{(x)})(s) = \eta(u^{(x)})(s) \quad \forall s \in ]0, T[ \text{ y } \forall x \in \tilde{\Omega} \quad (2.30)$$

(véase página 78). Por tanto, de (2.28) y (2.30) se tiene que

$$\int_0^t \varphi^{(x)} \frac{dH(u^{(x)})}{ds} = \int_0^t \varphi^{(x)} \eta(u^{(x)}) \frac{du^{(x)}}{ds} \quad \forall x \in \tilde{\Omega} .$$

Al integrar sobre  $\Omega$  y tener  $\Omega - \tilde{\Omega}$  medida nula, se obtiene la siguiente identidad

$$\int_{\Omega} \int_0^t \varphi^{(x)} \frac{dH(u^{(x)})}{ds} = \int_{\Omega} \int_0^t \varphi^{(x)} \eta(u^{(x)}) \frac{du^{(x)}}{ds} dx . \quad (2.31)$$

Dado que  $u \in L^\infty(Q)$ , es claro que  $u$  y  $\eta(\bar{u})$  están también en  $L^\infty(Q)$ . Se tiene entonces la  $\frac{\partial u}{\partial s}$ -integrabilidad sobre  $Q_t$  de la función  $\varphi \eta(\bar{u})$  por ser boreliana y acotada en  $Q$  (página 78, ecuación (2.10)). El Lema 2.4, la  $\frac{\partial u}{\partial s}$ -integrabilidad de  $\varphi \eta(\bar{u})$  y la identidad

(2.29), implican que  $\varphi\eta(u)$  es integrable sobre  $Q_t$  respecto a la medida  $\frac{\partial u}{\partial s}$  y además se verifica la igualdad

$$\int_{Q_t} \varphi\eta(u) \frac{\partial u}{\partial s} = \int_{Q_t} \varphi\eta(\bar{u}) \frac{\partial u}{\partial s}.$$

El Lema 2.3 nos lleva a que

$$\int_{\Omega} \int_0^t \varphi^{(x)} \eta(u^{(x)}) \frac{du^{(x)}}{ds} dx = \int_{Q_t} \varphi\eta(u) \frac{\partial u}{\partial s}.$$

La obtención de (2.23), bajo la hipótesis  $\eta$  continua, se consigue gracias a la identidad anterior y las identidades (2.27) y (2.31). Para obtener el mismo resultado pero para funciones  $\eta$  borelianas localmente acotadas, basta observar que las funciones de Borel son una clase de Baire (cerrada para la convergencia en todo punto), lo que nos permite obtener la función  $\eta$  como límite puntual de funciones continuas  $\eta_n$ . Por tanto, para cada  $\varphi \in C_c^1(Q)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} \varphi \eta_n(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{Q_t} \varphi \eta(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} \varphi \frac{\partial H_n(u)}{\partial t} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} H_n(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \\ &= - \int_{Q_t} H(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \\ &= \int_{Q_t} \varphi \frac{\partial H(u)}{\partial t} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la definición de la actuación de una medida de Radon acotada en  $Q$  ( $\frac{\partial H(u)}{\partial t} \in \mathcal{M}_b(Q)$ ) sobre funciones continuamente diferenciables (véase (2.2)). Por tanto, de los límites anteriores, se tiene que

$$\int_{Q_t} \varphi \frac{\partial H(u)}{\partial t} = \int_{Q_t} \eta(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{para cada } \varphi \in C_c^1(Q). \quad (2.32)$$

Finalmente, toda función de Borel  $\varphi$  se puede obtener como límite puntual de una sucesión de funciones  $\varphi_n \in C_c^1(Q)$ , verificandose para éstas, la identidad (2.32). La convergencia en todo punto de  $Q$  de  $\varphi_n$  a  $\varphi$  y el hecho de que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  y  $\frac{\partial H(u)}{\partial t}$  son medidas de Radon acotadas, del Teorema de la Convergencia Dominada, se obtiene que para una  $\varphi$  boreliana localmente acotada, también se verifica (2.23) y consecuentemente  $\frac{\partial H(u)}{\partial t} = \eta(u) \frac{\partial u}{\partial t}$  en sentido de las medidas.

3.- Por último probamos (2.24). La integrabilidad de las funciones  $H(u)$  respecto de la medida  $\frac{\partial v}{\partial t}$  y  $v\eta(u)$  respecto a la medida  $\frac{\partial v}{\partial s}$  sobre  $Q_t$  es consecuencia de ser  $H(u)$  y  $v\eta(u)$   $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continuas y ser funciones de  $L^\infty(Q)$ . Gracias al Corolario 2.1

y el Teorema 4.5.9 (29) (II)  $\Rightarrow$  (III) de [F69], existe  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  de medida total, tal que  $\text{ess}V_0^t H(u^{(x)}) < \infty$  y  $\text{ess}V_0^t u^{(x)} < \infty$ . Además las funciones  $H(u^{(x)})$  y  $v^{(x)}$  son continuas en  $]0, T[$  para todo  $x \in \tilde{\Omega}$ . Aplicando a las funciones  $H(u^{(x)})$  y  $v^{(x)}$  la fórmula de integración por partes para funciones de BV dada por Vol'pert y Hudjaev en [VHu85] página 204 ecuación (7.1), se tiene que

$$\int_{E_*} H(u^{(x)})(s) \frac{dv^{(x)}}{ds} = - \int_{E_*} v^{(x)} \frac{dH(u^{(x)})}{ds} + \int_{\partial_* E} H(u^{(x)})^+ v^{(x)+} \nu d\mathcal{H}^0 \quad (2.33)$$

donde siguiendo la notación de éstos autores, por  $E$  denotamos al intervalo  $]0, t[$ . El conjunto de puntos de densidad de  $E$  es precisamente  $E_* = ]0, t[$  y la frontera esencial de  $E$  es  $\partial_* E = \{0, t\}$  [VHu85, §5.1 página 170]. El valor de  $H(u^{(x)})^+$  y de  $v^{(x)+}$  es la traza interior de las funciones  $H(u^{(x)})$  y  $v^{(x)}$  sobre  $\partial_* E$ , que en particular en el punto 0 es el límite por la derecha y en  $t$  el límite por la izquierda de dichas funciones. Por último  $\nu$  es el vector unitario normal exterior a  $\partial_* E$ :  $\nu(0) = -1$  y  $\nu(t) = 1$  [VHu85, §5.2 páginas 170, 171]. Sustituyendo en (2.33), se obtiene que

$$\int_0^t H(u^{(x)})(s) \frac{dv^{(x)}}{ds} = - \int_0^t v^{(x)} \frac{dH(u^{(x)})}{ds} + H(u^{(x)})(t^-) v^{(x)}(t^-) - H(u^{(x)})(0^+) v^{(x)}(0^+)$$

para todo  $x \in \tilde{\Omega}$ . Como además las funciones  $H(u^{(x)})$  y  $v^{(x)}$  son continuas en  $]0, T[$ , podemos tomar  $H(u^{(x)})(t)$ ,  $v^{(x)}(t)$ ,  $H(u^{(x)})(0)$  y  $v^{(x)}(0)$  en lugar de sus respectivos límites laterales. Integrando la igualdad obtenida sobre  $\Omega$ , llegamos a que

$$\int_{Q_t} H(u) \frac{\partial u}{\partial s} = - \int_{Q_t} v \frac{\partial H(u)}{\partial s} + \int_{\Omega} H(u(t, x)) v(t, x) dx - \int_{\Omega} H(u(0, x)) v(0, x) dx \quad (2.34)$$

ya que el conjunto  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  tiene medida nula. Por último, la primera integral del segundo miembro de (2.34) es igual a  $\int_{Q_t} v \eta(u) \frac{\partial u}{\partial s}$  según (2.23). Sustituyendo dicha integral en (2.34), obtenemos el resultado deseado. ■

**Corolario 2.2** Si  $u \in BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$  y  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable, entonces  $H(u) \in BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$ .

**Demostración.** La derivabilidad en  $\mathbb{R}$  de la función  $H$ , implica que  $H$  es absolutamente continua con módulo de continuidad  $H'$  función boreliana, localmente acotada en  $\mathbb{R}$ . Aplicando la proposición anterior con  $H(r) = \int_0^r H'(\sigma) d\sigma$ , del punto 1 se obtiene el resultado del corolario. ■

Finalizamos esta Sección con el siguiente lema referente a la continuidad aproximada de funciones del espacio de Sobolev  $W^{1,1}(Q)$

**Lema 2.6** Sea  $u \in W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ . Entonces  $u$  es  $\mathcal{H}^N$ -casi para todo punto aproximadamente continua sobre  $Q$  respecto de la medida  $\mathcal{L}^{N+1}$ .

**Demostración:** Si  $u \in W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  entonces  $u \in BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ . Por tanto existe  $\Lambda \subset Q$ , tal que  $\mathcal{H}^N(\Lambda) = 0$  y  $Q - \Lambda = \{(t, x) \in Q : \text{puntos regulares}\}$ , y para todo  $(t, x) \in \Gamma_u - \Lambda$ , existe  $\nu = (\nu_t, \nu_x)$  vector normal exterior a  $\Gamma_u - \Lambda$  [V67, 14.2 páginas 250 y 251] y [VHu85, §5.2 páginas 170, 171] y también existen  $u_\nu(t, x)$ ,  $u_{-\nu}(t, x)$  límites aproximados de  $u$  con respecto a los hiperplanos  $\pi_\nu(t, x)$  y  $\pi_{-\nu}(t, x)$  respectivamente (puede verse en las referencias anteriores de Vol'pert y Hudjaev que dichos límites coinciden con  $\mu_u$  y  $\lambda_u$  respectivamente). Sea  $S$  un subconjunto de Borel de  $\Gamma_u - \Lambda$ , entonces  $\mathcal{L}^{N+1}(S) = 0$  (ver página 75). De este hecho, y por ser  $u$  una función de  $W^{1,1}(Q)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \int_Q \chi_S \frac{\partial u}{\partial x_i} dx dt = 0, & (i = 1, 2, 3, \dots, N) \\ \int_S \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_Q \chi_S \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = 0 \end{aligned}$$

y por las Fórmulas de Green

$$0 = \int_S (u_\nu - u_{-\nu}) \nu_x d\mathcal{H}^N = \int_S (u_\nu - u_{-\nu}) \nu_t d\mathcal{H}^N$$

([V67, página 252] y [VHu85, Teorema 2 página 203]) y por tanto  $\mathcal{H}^N(S) = 0$ . La arbitrariedad de  $S$  nos lleva a que  $\mathcal{H}^N(\Gamma_u) = 0$ , lo que prueba el Lema. ■

### 3 Resultados de comparación y dependencia continua

En esta sección, damos varios resultados concernientes a la comparación (y por tanto de unicidad) y dependencia continua de soluciones del problema (1.1), (1.2) y (1.3). Jugarán un papel esencial en la prueba del Teorema 3.1 las propiedades de las funciones de variación acotada, en particular la Proposición 2.4 de la sección anterior y la hipótesis (3.3) sobre las soluciones BV.

Necesitaremos la siguiente desigualdad conocida como desigualdad de Tartar

$$|\phi(\eta) - \phi(\hat{\eta})|^{p'} \leq C \{[\phi(\eta) - \phi(\hat{\eta})] \cdot [\eta - \hat{\eta}]\}^{\beta/2} \{|\eta|^p + |\hat{\eta}|^p\}^{1-\frac{\beta}{2}} \quad \forall \eta, \hat{\eta} \in \mathbb{R}^N \quad (3.1)$$

donde  $\beta = 2$  si  $1 < p \leq 2$ ,  $\beta = p'$  si  $p \geq 2$  y  $C$  es una constante positiva independiente de  $\eta$  y  $\hat{\eta}$ .

**Teorema 3.1** *Supongamos que  $b$ ,  $k$  y  $g$  verifican las hipótesis (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) y (1.18). Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones BV asociadas respectivamente a los datos  $(f_1, u_{0_1})$  y  $(f_2, u_{0_2})$  que satisfacen las hipótesis (1.19) y (1.20) y toman valores en*

$[-M, M]$ . Supongamos además que las constantes de Lipschitz de  $b_1^{-1}$  y  $b_2$  en el intervalo  $[-M, M]$  son respectivamente  $L_1$  y  $L_2$  verificando la desigualdad

$$\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2 > 0 \quad (3.2)$$

y además la siguiente condición sobre la medida Hausdorff del conjunto de puntos de discontinuidad es satisfecha

$$\mathcal{H}^N(\Gamma_{u_1}) = \mathcal{H}^N(\Gamma_{u_2}) = 0. \quad (3.3)$$

Entonces para cada  $t \in ]0, T[$  se tiene que

$$\int_{\Omega} [b(u_1(t, x)) - b(u_2(t, x))]_+ dx \leq e^{C^* t} \left\{ \int_{\Omega} [b(u_{0_1}(x)) - b(u_{0_2}(x))]_+ dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{C^* s} [f_1(s, x) - f_2(s, x)]_+ dx ds \right\}.$$

**Observación 3.1** La condición (3.2) se necesita para probar que si  $b(u) \in BV_t(Q)$ , entonces, bajo las hipótesis (1.15) sobre  $b$ ,  $u$  también es una función de  $BV_t(Q)$  (Proposición 2.3), regularidad requerida para la función  $u$  en la demostración del Teorema 3.1.

**Observación 3.2** Si  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q)$  no se necesita pedir (3.2), pues directamente se tiene que  $u \in BV_t(Q)$ . Además, si  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q)$ , entonces  $u \in W^{1,1}(Q)$  dado que  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ . Por el Lema 2.6, se tiene que  $u$  es  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua y por tanto la condición (3.3) es automáticamente satisfecha.

Del Teorema anterior se obtienen de forma directa los tres resultados siguientes, concernientes a la comparación de soluciones, a la dependencia continua de los datos y a la unicidad de soluciones BV.

**Corolario 3.1** Bajo las condiciones del Teorema 3.1 se tiene que si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV de respectivos datos  $(f_1, u_{0_1})$  y  $(f_2, u_{0_2})$  verificando que  $f_1 \geq f_2$  y  $u_{0_1} \geq u_{0_2}$  entonces  $u_1 \geq u_2$  en  $Q$ .

**Demostración:** Dado que  $f_1 = f_2$  y  $u_{0_1} = u_{0_2}$  entonces  $[f_1 - f_2]_+ = 0$  y  $[u_{0_1} - u_{0_2}]_+ = 0$  respectivamente. Aplicando el teorema anterior, se tiene que

$$\int_{\Omega} [b(u_1(t, x)) - b(u_2(t, x))]_+ dx \leq 0$$

concluyendo que  $u_1 \geq u_2$  gracias a la monotonía de la función  $b$ . ■

**Corolario 3.2** Si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV como en el Teorema 3.1, entonces se verifica la desigualdad

$$\|b(u_1(t, \cdot)) - b(u_2(t, \cdot))\|_{L^1(\Omega)} \leq e^{C^*t} \left\{ \|b(u_{01}) - b(u_{02})\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t e^{C^*s} \|f_1 - f_2\|_{L^1(\Omega)} ds \right\}$$

para todo  $t \in ]0, T[$ .

**Demostración.** Basta observar que  $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)} = |(\cdot)_+|_{L^1(\Omega)} + |(\cdot)_-|_{L^1(\Omega)}$  y aplicar el Teorema 3.1 indistintamente a  $u_1, u_2$  y en orden contrario  $u_2, u_1$  (nótese que dado  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s_- = \max\{0, -s\} = (-s)_+$  siendo entonces  $|s| = s_+ + s_- = s_+ + (-s)_+$ ). ■

Finalmente se obtiene la unicidad:

**Corolario 3.3** A lo más existe una única solución BV al problema dado por (1.1), (1.2) y (1.3) tomando valores en  $[-M, M]$  bajo las hipótesis (1.14), (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) y (3.3).

**Demostración.** Tómesese  $f_1 = f_2$  y  $u_{01} = u_{02}$  en el Corolario 3.2. ■

Si además suponemos  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  y  $f \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ , entonces existe  $M > 0$  tal que toda solución de (1.1), (1.2) y (1.3), toma valores en  $[-M, M]$ , es decir,

**Lema 3.1** Si  $u$  es solución débil de (1.1), (1.2) y (1.3), bajo las hipótesis (1.14), (1.16), (1.17), (1.18),  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  y  $f \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ , entonces

$$\|b(u)\|_{L^\infty(Q)} \leq e^{C^*T} \left\{ \|b(u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T e^{C^*s} \|f(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right\}.$$

Por tanto existe  $M > 0$  constante positiva tal que

$$\|b(u)\|_{L^\infty(Q)} \leq b(M)$$

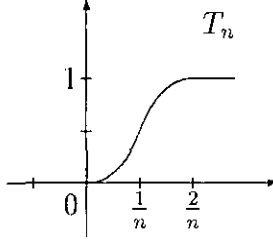
y por tanto

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq M.$$

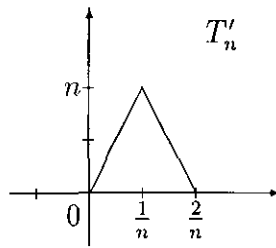
**Demostración.** Véase p.e. Benilan [B81]. ■ Por el lema, y el Corolario 3.3 implican

**Corolario 3.4** Supongamos  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  y  $f \in L^1(\Omega)L^\infty(\Omega)$ . Entonces bajo las hipótesis (1.14), (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) y (3.3), existe a lo más una única solución BV al problema dado por (1.1), (1.2) y (1.3). ■

**Demostración del Teorema 3.1.** Comenzamos definiendo para cada  $n \in \mathbb{N}$  la función  $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$T_n(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ \frac{n^2 s^2}{2} & 0 < s \leq \frac{1}{n} \\ 2ns - \frac{n^2 s^2}{2} - 1 & \frac{1}{n} < s \leq \frac{2}{n} \\ 1 & s > \frac{2}{n} \end{cases}$$


para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Es fácil ver que la sucesión de funciones  $\{T_n\}$  pertenece a  $C^1(\mathbb{R})$  y su derivada es

$$T'_n(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ n^2 s & 0 < s \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 s & \frac{1}{n} < s \leq \frac{2}{n} \\ 0 & s > \frac{2}{n} \end{cases}$$


Además las siguientes propiedades son ciertas para esta sucesión de funciones

$$\left. \begin{aligned} &|T_n(s)| \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(s) = \text{sgn}_+(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} sT_n(s) = s_+ = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ s & s > 0. \end{cases}, \\ &0 \leq T'_n(s) \leq n, \quad 0 \leq sT'_n(s) \leq 1, \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} sT'_n(s) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Las propiedades anteriores constituyen a  $\{T_n\}$  como una aproximación regular de la función  $\text{sgn}^0_+$  ( $\text{sgn}^0(s) = 1$  si  $s > 0$ ,  $0$  si  $s \leq 0$ ).

**Notación.** Para simplificar la notación, en lo sucesivo, se considera la función  $z = b(u_1) - b(u_2)$ .

Puesto que  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV, la regularidad de  $T_n$  nos permite asegurar

que  $T_n(u_1 - u_2) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ . Por tanto, es posible tomar dicha función como función prueba en la ecuación variacional (1.24) que cada solución verifica, obteniendo la siguiente igualdad para la función  $z$

$$\begin{aligned} - \int_{Q_t} T_n(u_1 - u_2) \frac{\partial z}{\partial t} &= \int_{Q_t} [\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot \nabla T_n(u_1 - u_2) dx dt \\ &+ \int_{Q_t} (g(x, u_1) - g(x, u_2)) T_n(u_1 - u_2) dx dt \\ &- \int_{Q_t} (f_1(t, x) - f_2(t, x)) T_n(u_1 - u_2) dx dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

al restar las ecuaciones obtenidas para  $u_1$  y  $u_2$  con  $Q_t = ]0, t[ \times \Omega$  (se observa que  $\chi_{]0, t[}(s) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ ).

Lo siguiente es hacer tender  $n$  a  $\infty$ , lo que nos permitirá obtener la desigualdad esencial en la demostración del Teorema (véase la ecuación (3.18)). Para ello necesitamos los siguientes Lemas.

**Lema 3.2** *Si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3) como las descritas en el Teorema 3.1, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} T_n(u_1 - u_2) \frac{\partial(b(u_1) - b(u_2))}{\partial t} = \int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx - \int_{\Omega} [b(u_{01}) - b(u_{02})]_+ dx$$

para cada  $t \in ]0, T[$ .

**Demostración del Lema 3.2.** Dado que  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3), se tiene que tanto  $b(u_1)$  como  $b(u_2)$  son funciones de  $BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$  y también  $u_1, u_2 \in BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$  según la Proposición 2.3. Por otra parte, puesto que para cada  $n$  natural  $T_n$  tiene por módulo de continuidad  $T'_n$  función acotada de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , el Corolario 2.2 nos permite asegurar que  $T_n(u_1 - u_2) \in BV_t(Q) \cap L^\infty(Q)$ . Además  $T_n(u_1 - u_2)$  es  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continua por serlo  $u_1 - u_2$  (hipótesis (3.3)) y ser  $T_n$  continua (véase [VHu85, Teorema 2, página 164]). Por tanto

$$T_n(u_1 - u_2) \text{ converge a } \text{sgn}^0_+(u_1 - u_2) \text{ } \mathcal{H}^N\text{-casi todo punto de } Q \quad (3.6)$$

La monotonía estricta de  $b$  (hipótesis (1.14)) implica

$$\text{sgn}^0_+(b(u_1) - b(u_2)) = \text{sgn}^0_+(u_1 - u_2) \text{ } \mathcal{H}^N\text{-casi todo punto de } Q \quad (3.7)$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada a la medida  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , primero con la sucesión  $T_n(u_1 - u_2)$  y luego con la sucesión  $T_n(z)$  ( $\leq 1$  según (3.4)), se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(u_1 - u_2) \frac{\partial z}{\partial s} &= \int_{Q_t} \text{sgn}^0_+(u_1 - u_2) \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \int_{Q_t} \text{sgn}^0_+(z) \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(z) \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

gracias a que se verifica (3.6), (3.7) y  $\frac{\partial z}{\partial s}$  es  $\mathcal{H}^N$ -absolutamente continua según se muestra en el Lema 2.4. Conviene hacer notar que  $T_n(z) \in BV_t(Q)$  por la Proposición 2.4 apartado 1.

Ahora, para cada  $n$  natural, se tiene que

$$\int_{Q_t} T_n(z) \frac{\partial z}{\partial s} = \int_{\Omega} T_n(z)(t)z(t)dx - \int_{\Omega} T_n(z)(0)z(0)dx - \int_{Q_t} zT'_n(z) \frac{\partial z}{\partial s}$$

por la Proposición 2.4. Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , las propiedades de  $T_n$  (3.4), las igualdades (3.6) y (3.7) en  $\mathcal{H}^N$ -casi todo punto, nos permiten obtener que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(z) \frac{\partial z}{\partial s} = \int_{\Omega} \text{sgn}^0_+(z(t))z(t)dx - \int_{\Omega} \text{sgn}^0_+(z(0))z(0)dx \quad (3.9)$$

por el Teorema de la Convergencia Dominada. El aserto del Lema se tiene como consecuencia de (3.8) y (3.9) y ser  $z(0, x) = b(u_{0_1}) - b(u_{0_2})$  en  $\Omega$ . ■

**Lema 3.3** Si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3) se satisface la siguiente desigualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2]dx \geq 0 \quad (3.10)$$

donde  $\xi_1 = \nabla u_1 - k(b(u_1))e$ ,  $\xi_2 = \nabla u_2 - k(b(u_2))e$  para casi todo  $t \in ]0, T[$ . Por tanto, para todo  $t \in ]0, T[$  se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2]dxdt \geq 0 \quad (3.11)$$

con  $Q_t = ]0, t[ \times \Omega$ . En consecuencia el operador difusión es  $T$ -acretivo en  $L^1(\Omega)$  (véase definición en Benilan [B81]).

**Demostración del Lema 3.3.** En primer lugar, señalemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] \in L^1(Q)$  ya que  $\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2) \in (L^{p'}(Q))^N$  y  $[\nabla u_1 - \nabla u_2] \in (L^p(Q))^N$ . Por tanto existe un subconjunto  $I_n \subset ]0, T[$  tal que

$$T'_n(u_1 - u_2)(t)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2](t) \in L^1(\Omega) \quad \forall t \in I_n.$$

Por otra parte, si  $A, B \subset I \subset \mathbb{R}$  son tales que  $\mathcal{L}^1(I - A) = 0 = \mathcal{L}^1(I - B)$ , se tiene que  $I - (A \cap B) = (I - A) \cup (I - B)$ , y por tanto

$$\mathcal{L}^1(I - (A \cap B)) = \mathcal{L}^1((I - A) \cup (I - B)) \leq \mathcal{L}^1(I - A) + \mathcal{L}^1(I - B) = 0.$$

Basandose en este hecho, construimos la sucesión de conjuntos

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= I_1, & \mathcal{L}^1(]0, T[-\tilde{I}_1) &= 0 \\ \tilde{I}_2 &= \tilde{I}_1 \cap I_2, & \mathcal{L}^1(]0, T[-\tilde{I}_2) &= 0 \\ &\vdots & & \\ \tilde{I}_n &= \tilde{I}_{n-1} \cap I_n, & \mathcal{L}^1(]0, T[-\tilde{I}_n) &= 0 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

siendo  $\tilde{I}_{n+1} \subset \tilde{I}_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\tilde{I} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{I}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n$ . Por tanto  $\mathcal{L}^1(\{0, T[-\tilde{I}]) = 0$ , encontrando de esta forma un subconjunto  $\tilde{I} \subset ]0, T[$  con medida total, tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] \in L^1(\Omega)$  para todo  $t \in \tilde{I}$ .

Justificada la existencia de la integral que aparece en (3.10), pasamos a estimar el límite en  $n$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la integral de (3.10) puede escribirse como suma de las integrales

$$I_1(n) = \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\xi_1 - \xi_2] dx$$

y

$$I_2(n) = \int_{\Omega} T'_n[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot e(k(b(u_1)) - k(b(u_2))) dx.$$

En vista de la definición (1.13) de la función vectorial  $\phi$  y la hipótesis (1.16) sobre  $k$ , necesitamos distinguir dos casos dependiendo de si  $1 < p \leq 2$  o  $p > 2$ .

• **Caso  $1 < p \leq 2$ :** Considerando la desigualdad de Young con exponentes  $p$  y  $p'$ , obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} |I_2(n)| &\leq \int_{\Omega} |T'_n(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)]| |k(b(u_1)) - k(b(u_2))| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^{p'}}{p'} \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2) |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'} dx \\ &\quad + \frac{1}{p\varepsilon^p} \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2) |k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

para cada  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Al aplicar la desigualdad (3.1) al primer sumando, se tiene que

$$\int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2) |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'} dx \leq C \int_{\Omega} T'_n[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\xi_1 - \xi_2] dx = C I_1(n).$$

Considerando la hipótesis (1.16) de  $k$  y las propiedades de  $T'_n$  dadas en (3.4), el segundo sumando de (3.12) se puede acotar como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2) |k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p dx &\leq \hat{C} \int_{\Omega} T'_n(u_1 - u_2) |u_1 - u_2|^{\gamma p} dx \\ &= \hat{C} \int_{\Omega} |u_1 - u_2| T'_n(u_1 - u_2) |u_1 - u_2|^{\gamma p - 1} dx \\ &\leq \hat{C} \int_{\Omega \cap \{x: 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n}\}} \frac{2}{n} |u_1 - u_2|^{\gamma p - 1} dx \\ &\leq 2\hat{C} \left(\frac{2}{n}\right)^{\gamma p - 1} \int_{\Omega \cap \{x: 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n}\}} dx \\ &= 2\hat{C} \left(\frac{2}{n}\right)^{\gamma p - 1} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sustituyendo en (3.12), obtenemos la desigualdad

$$|I_2(n)| \leq \frac{\varepsilon^{p'} C}{p'} I_1(n) + \frac{2\hat{C}}{\varepsilon^p p} \left(\frac{2}{n}\right)^{\gamma p - 1} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right).$$

Si tomamos  $\varepsilon^{p'} = \frac{p'}{C}$ , se tiene que

$$-\frac{2\hat{C}C^{p-1}}{pp^{p-1}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\gamma p - 1} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right) \leq I_1(n) + I_2(n).$$

Ahora, puesto que  $\gamma p - 1 \geq 0$  por (1.16) y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right) = 0$$

(véase [Hl74, Teorema E, página 38] y [Mu71, Corolario 10.3.1, página 35]), se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) + I_2(n) \geq 0$$

y por tanto (3.10).

• **Caso  $p > 2$ :** Mediante la desigualdad de Hölder con exponentes  $p$  y  $p'$  obtenemos que

$$|I_2(n)| \leq \left\{ \int_{\Omega} T'_n |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\Omega} T'_n |k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (3.14)$$

Aplicando la desigualdad (3.1) con  $\beta = p'$  y  $\eta_1 = \xi_1$ ,  $\eta_2 = \xi_2$ , el primer factor de (3.14) se puede acotar por

$$C^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\Omega} \left\{ T'_n [|\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|(\xi_1 - \xi_2)] \right\}^{\frac{p'}{2}} \left\{ T'_n (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p) \right\}^{1 - \frac{p'}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder con exponentes  $\frac{2}{p'}$  y  $\frac{2-p'}{2-p'}$  y las propiedades de  $T'_n$  se llega a obtener la estimación

$$\left\{ \int_{\Omega} T'_n (u_1 - u_2) |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \mathcal{A}(n) I_1^{\frac{1}{2}}(n) n^{\frac{2-p'}{2p'}} \quad (3.15)$$

donde

$$\mathcal{A}(n) = C^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\Omega} |\xi_1|^p + |\xi_2|^p dx \right\}^{\frac{2-p'}{2p'}}.$$

Para el segundo factor de (3.14), tenemos la estimación

$$\left\{ \int_{\Omega} T'_n |k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p dx \right\}^{1/p} \leq 2^\gamma n^{\frac{1-\gamma p}{p}} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right)^{1/p} \quad (3.16)$$

de la hipótesis (1.16) sobre  $k$  y (3.4). Combinando las dos últimas desigualdades (3.15) y (3.16), obtenemos que

$$|I_2(n)| \leq 2^\gamma \mathcal{A}(n) n^{\frac{2-p'}{2p'} + \frac{1-p\gamma}{p}} I_1^{\frac{1}{2}}(n) \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right)^{1/p}. \quad (3.17)$$

Veamos que el exponente de  $n$  es menor o igual que cero. En efecto:

$$\begin{aligned} & \frac{2-p'}{2p'} + \frac{1-p\gamma}{p} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & p'p - 2p + 2p'p\gamma - 2p' \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{p^2}{p-1} - 2p + \frac{2p^2}{p-1}\gamma - 2\frac{p}{p-1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & p^2 - 2p(p-1) + 2p^2\gamma - 2p \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -p^2 + 2p^2\gamma \geq 0, \end{aligned}$$

lo que es cierto por ser  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  según la hipótesis (1.16) cuando  $p > 2$ . Hemos probado que

$$|I_2(n)| \leq \hat{\mathcal{A}}(n) I_1^{\frac{1}{2}}(n)$$

con

$$\hat{\mathcal{A}}(n) = 2^\gamma n^{\frac{2-p'}{2p'} + \frac{1-p\gamma}{p}} \mathcal{A}(n) \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right)^{1/p}.$$

Puesto que no sólo las cantidades  $2^\gamma \mathcal{A}(n) \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right)^{1/p}$  están uniformemente acotadas para todo  $n \in \mathbb{N}$  (por ser  $u$  un elemento de  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  y  $k$  verificar (1.16)) sino que además tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  (por el Teorema E página 38 de [H174] el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^N \left( \left\{ x : 0 < u_1 - u_2 < \frac{2}{n} \right\} \right)^{1/p} = 0$ ), la no positividad del exponente  $\frac{2-p'}{2p'} + \frac{1-p\gamma}{p}$  nos permite asegurar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_1(n) + I_2(n)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1(n) - \hat{\mathcal{A}}(n) I_1^{\frac{1}{2}}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1^{\frac{1}{2}}(n) (I_1^{\frac{1}{2}}(n) - \hat{\mathcal{A}}(n)) \geq 0$$

lo que finaliza la demostración de la estimación (3.10) para todo  $t \in \tilde{I}$  y por tanto para  $\mathcal{L}^1$ -casi todo punto de  $]0, T[$  ya que  $\mathcal{L}^1(]0, T[-\tilde{I}) = 0$ . La estimación (3.11) es consecuencia de (3.10) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. El Lema 3.3 queda por tanto demostrado. ■

**Continuación de la Demostración de Teorema 3.1.** Si ahora hacemos tender  $n$  a  $\infty$  en la ecuación (3.5), obtenemos que la primera integral del primer miembro tiende a

$$\int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx - \int_{\Omega} [b(u_{01}) - b(u_{02})]_+ dx$$

según el Lema 3.2. Por otro lado, la hipótesis (1.17) de  $g$  y (1.19) de  $f$  junto con las propiedades de la sucesión  $T_n$  dadas en (3.4) nos permiten obtener de (3.5) la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx &= \int_{\Omega} [b(u_{0_1}) - b(u_{0_2})]_+ dx \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T'_n(u_1 - u_2) [\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] dx dt \\ &\quad - \int_{Q_t} (g(x, u_1) - g(x, u_2)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_t} (f_1(t, x) - f_2(t, x)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.3, el límite que aparece en la igualdad anterior es positivo. Mayorando por cero, se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx &\leq \int_{\Omega} [b(u_{0_1}) - b(u_{0_2})]_+ dx \\ &\quad - \int_{Q_t} (g(x, u_1) - g(x, u_2)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_t} (f_1(t, x) - f_2(t, x)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Para establecer el resultado del Teorema necesitamos distinguir dos casos dependiendo de si la constante  $C^*$  de (1.18) es o no cero:

*i)* Supongamos en primer lugar que la constante dada en (1.18) es  $C^* = 0$ . En esta situación se tiene que

$$(g(x, u_1) - g(x, u_2))(u_1 - u_2) \geq 0$$

y la conclusión del Teorema se obtiene directamente de este hecho y de la desigualdad (3.18) al mayorar

$$- \int_{Q_t} (g(x, u_1) - g(x, u_2)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt$$

por cero y

$$\int_{Q_t} (f_1(t, x) - f_2(t, x)) \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx dt$$

por

$$\int_{Q_t} [f_1(t, x) - f_2(t, x)]_+ dx dt.$$

*ii)* Si  $C^* > 0$ , definimos  $v_j(t, x) = e^{-C^*t} b(u_j(t, x))$  con  $j = 1, 2$ . De la fórmula de derivación del producto de funciones de BV aplicada al caso 1-dimensional [VHu85, Fórmula (4.1), página 189] se tiene que

$$\int_{Q_t} \varphi \frac{\partial v_j}{\partial s} = \int_{\Omega} \int_0^t \varphi^{(x)}(s) \frac{dv_j^{(x)}}{ds} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \int_0^t \varphi^{(x)}(s) \left( v_j^{(x)} \frac{de^{-C^*s}}{ds} + e^{-C^*s} \frac{db(u_j^{(x)})}{ds} \right) dx \\
&= \int_{Q_t} \varphi \left( v_j \frac{\partial e^{-C^*s}}{\partial s} + e^{-C^*s} \frac{\partial b(u_j)}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

para cada  $\varphi \in C_c^1(Q)$ . Por tanto

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = v_j \frac{\partial e^{-C^*t}}{\partial t} + e^{-C^*t} \frac{\partial b(u_j)}{\partial t}$$

en el sentido de las medidas, siendo además acotada ya que  $b(u_j) \in BV_t(Q)$  y  $e^{-C^*t}$  está acotada en  $[0, T]$ . Por tanto también  $v_1$  y  $v_2$  pertenecen a  $BV_t(Q)$ . Además se tiene que el

$$\operatorname{sgn}^0_+(v_1 - v_2) = \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2). \quad (3.19)$$

Denotamos por  $\tilde{v}(t, x)$  la función  $v_1(t, x) - v_2(t, x)$ , Entonces

$$\int_{Q_t} T_n(\tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} = \int_{Q_t} -C^* \tilde{v} T_n(\tilde{v}) dx ds + \int_{Q_t} T_n(\tilde{v}) e^{-C^*s} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Haciendo tender  $n$  a infinito se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(\tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} = -C^* \int_{Q_t} \tilde{v} \operatorname{sgn}^0_+(\tilde{v}) dx ds + \int_{Q_t} \operatorname{sgn}^0_+(\tilde{v}) e^{-C^*s} \frac{\partial z}{\partial s}$$

gracias al Teorema de la Convergencia Dominada, la  $\mathcal{H}^N$ -continuidad absoluta de la medida  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$  y la convergencia de  $T_n(\tilde{v})$  a  $\operatorname{sgn}^0_+(\tilde{v})$  en  $\mathcal{H}^N$ -casi todo punto. Considerando (3.19), del límite anterior se obtiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(\tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} &= -C^* \int_{Q_t} \tilde{v}_+ dx dt + \int_{Q_t} \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) e^{-C^*s} \frac{\partial z}{\partial s} \\
&= -C^* \int_{Q_t} \tilde{v}_+ dx ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} e^{-C^*s} T_n(u_1 - u_2) \frac{\partial z}{\partial s} \\
&= -C^* \int_{Q_t} \tilde{v}_+ dx ds \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} e^{-C^*s} T'_n(u_1 - u_2) [\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] dx ds \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} (g(x, u_1) - g(x, u_2)) T_n(u_1 - u_2) e^{-C^*s} dx ds \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} (f_1(s, x) - f_2(s, x)) T_n(u_1 - u_2) e^{-C^*s} dx ds \quad (3.20)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que  $T_n(u_1 - u_2)u_1$  y  $T_n(u_1 - u_2)u_2$  son funciones prueba admisibles en la formulación variacional (1.24) satisfecha por  $u_1$  y  $u_2$ .

Aplicando la Proposición 2.4 a  $T_n(\tilde{v})$  y  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ , obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} T_n(\tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} = \int_{\Omega} \tilde{v}_+(t) dx - \int_{\Omega} \tilde{v}_+(0) dx. \quad (3.21)$$

De (3.10), se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_t} e^{-C^*s} T'_n(u_1 - u_2) [\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] dx ds \geq 0. \quad (3.22)$$

Considerando (3.21) y (3.22) en (3.20), se obtiene la siguiente desigualdad al agrupar y mayorar por cero adecuadamente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [v_1(t) - v_2(t)]_+ dx &\leq \int_{\Omega} [v_{10} - v_{20}]_+ dx - C^* \int_{Q_t} [v_1 - v_2]_+ dx ds \\ &\quad - \int_{Q_t} [g(x, u_1) - g(x, u_2)] e^{-C^*s} \operatorname{sgn}^0_+(\tilde{v}) dx ds \\ &\quad + \int_{Q_t} [f_1(s, x) - f_2(s, x)] e^{-C^*s} \operatorname{sgn}^0_+(\tilde{v}) dx ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por la hipótesis (1.18), se satisface la desigualdad

$$-[g(x, u_1) - g(x, u_2)] e^{-C^*t} \leq C^*(b(u_1) - b(u_2)) e^{-C^*t} = C^* \tilde{v},$$

que al considerarla en la estimación (3.23) y aplicar la desigualdad de Gronwall, conduce a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [b(u_1(t)) - b(u_2(t))]_+ dx &\leq e^{C^*t} \left\{ \int_{\Omega} [b(u_{01}) - b(u_{02})]_+ dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_t} e^{-C^*s} [f_1(s, x) - f_2(s, x)] \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) dx ds \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto la conclusión del Teorema es ahora obvia pues  $[f_1 - f_2] \operatorname{sgn}^0_+(u_1 - u_2) \leq [f_1 - f_2]_+$  para  $\mathcal{L}^{N+1}$ -casi todo punto de  $Q$ . ■

Finalizamos esta sección considerando el siguiente problema multívoco:

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} - |\nabla u - k(b(u))e|^{p-2} (\nabla u - k(b(u))e) + \beta(u) \ni f(t, x) \quad \text{en } Q, \quad (3.24)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (3.25)$$

$$u(0, x) = u_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.26)$$

donde  $\beta$  es el grafo maximal monótono de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$\beta(u) = \{0\} \quad \text{si } u > 0, \quad \beta(0) = ]-\infty, 0] \quad \text{y } \beta(u) = \emptyset \quad (\text{el vacío}) \quad \text{si } u < 0. \quad (3.27)$$

Este tipo de ecuaciones propias del problema de obstáculo, también aparecen, por ejemplo, en la modelización de ciertos problemas de Glaciología (véase Díaz-Fowler-Schiavi [DFS95]). El hecho de que  $\beta$  sea un grafo maximal monótono, nos permite obtener un resultado de comparación (y por tanto de unicidad) análogo al dado en el Teorema 3.1. En primer lugar introducimos la noción de solución BV para el problema (3.24), (3.25) y (3.26).

**Definición 3.1** Diremos que una función  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  es una solución BV de (3.24), (3.25) y (3.26), si  $b(u) \in BV_t(Q)$ , y existe una función  $\alpha(t, x) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  medible e integrable en  $Q$ , tal que  $\alpha(t, x) \in \beta(u)(t, x) \forall (x, t) \in Q$  y se satisface

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_0^T \int_\Omega (b(u) - b(u_0)) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3.28)$$

para todo  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ , con  $v(T, \cdot) = 0$  y

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_0^T \int_\Omega \phi(\nabla u - k(b(u))e) \cdot \nabla v dx dt + \int_0^T \int_\Omega \alpha v dx dt = \int_0^T \int_\Omega f v dx dt \quad (3.29)$$

para todo  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ .

Con esta noción de solución BV para el problema multívoco, se tiene el siguiente resultado:

**Corolario 3.5** Supongamos  $b, k, (f_1, u_{01}), (f_2, u_{02})$  como en el Teorema 3.1 y sea  $\beta$  un grafo máximo monótono de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones BV de (3.24), (3.25) y (3.26) asociadas respectivamente a los datos  $(f_1, u_{01})$  y  $(f_2, u_{02})$  y satisfaciendo (3.28) y (3.29) para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  funciones de  $L^1(Q)$  con  $\alpha_1(t, x) \in \beta(u_1)(t, x)$  y  $\alpha_2(t, x) \in \beta(u_2)(t, x) \forall (x, t) \in Q$  respectivamente. Si además se verifica

$$\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2 > 0$$

con  $L_1$  y  $L_2$  como en el Teorema 3.1 y

$$\mathcal{H}^N(\Gamma_{u_1}) = \mathcal{H}^N(\Gamma_{u_2}) = 0,$$

entonces, para cada  $t \in ]0, T[$  se tiene que

$$\int_\Omega [b(u_1(t, x)) - b(u_2(t, x))]_+ dx \leq \left\{ \int_\Omega [b(u_{01}(x)) - b(u_{02}(x))]_+ dx + \int_0^t \int_\Omega [f_1(s, x) - f_2(s, x)]_+ dx ds \right\}.$$

**Demostración.** Es análoga de la demostración del Teorema 3.1 cambiando

$$g(x, u_1) - g(x, u_2)$$

por

$$\alpha_1(t, x) - \alpha_2(t, x).$$

La monotonía de  $\beta$  nos permite asegurar que

$$(\alpha_1(t, x) - \alpha_2(t, x)) T_n(u_1 - u_2) \geq 0$$

para casi todo  $(t, x) \in Q$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por tanto en el límite será

$$(\alpha_1(t, x) - \alpha_2(t, x)) \operatorname{sgn}_+^0(u_1 - u_2) \geq 0.$$

Esto nos permite mayorar por cero la integral

$$- \int_{Q_t} (\alpha_1(t, x) - \alpha_2(t, x)) \operatorname{sgn}_+^0(u_1 - u_2)$$

que aparecería en la inecuación análoga a (3.18). La demostración del corolario se sigue como se hizo en el caso *i*) del Teorema 3.1 (véase la página 98). ■

## 4 Existencia de soluciones BV.

En esta Sección se estudia la existencia de soluciones BV asociadas al problema (1.1), (1.2) y (1.3). Obtendremos una condición suficiente para que tales soluciones sean  $\mathcal{H}^N$ -aproximadamente continuas en  $Q$  (propiedad utilizada en el Teorema 3.1). Para obtener soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3) necesitamos asumir algunas condiciones sobre  $k$ ,  $g$ ,  $f$  y  $u_0$  además de las ya dadas en la el apartado 1.2.

Admitamos que

$$f \in L^\infty(Q) \cap BV_i(Q), \quad (4.1)$$

y

$$u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \text{ tal que } \phi(\nabla u_0 - k(b(u_0))e) \in (BV(\Omega))^N. \quad (4.2)$$

**Observación 4.1** Para la obtención de soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3), necesitamos además una condición adicional a las ya dadas (1.14) y (1.15) sobre la función  $b$ . Para dar esta condición consideraremos el Lema 3.1 y  $M$  la constante positiva de dicho lema.

Si llamamos  $L_1$  y  $L_2$  las constantes de Lipschitz en el intervalo  $[-M, M]$  de las funciones  $b_1^{-1}$  y  $b_2$  respectivamente. Asumiremos que  $b$  es tal que estas constantes verifican

$$\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2 > 0. \quad (4.3)$$

Nuestro resultado de existencia es el siguiente:

**Teorema 4.1** Sean  $b$ ,  $k$ ,  $g$ ,  $f$  y  $u_0$  funciones que satisfacen (1.14), (4.3), (1.16), (1.17), (1.18), (4.1) y (4.2). Entonces existe una solución BV  $u$  de (1.1), (1.2) y (1.3). Además  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ .

**Observación 4.2** Aunque la existencia de soluciones débiles (sin más requerimientos) se puede mostrar sólo con la condición  $g(x, s) \operatorname{sgn}(s) \geq -C^*$  (condición menos restrictiva que la dada en (1.18)), para la existencia de soluciones BV necesitamos suponer más información sobre la función  $g$ .

**Demostración.** Para obtener la existencia de soluciones BV de (1.1), (1.2) y (1.3), consideraremos una sucesión de problemas regulares uniformemente parabólicos los cuales tienen una única solución según la teoría clásica [LSU68]. Obtendremos unas estimaciones a priori adecuadas y finalmente, mediante paso al límite encontraremos una solución BV. De acuerdo con las hipótesis estructurales, necesitamos distinguir dos casos, dependiendo de si  $1 < p < 2$  o  $2 \leq p$ . Comenzamos estudiando el primer caso.

**Existencia de soluciones BV. Caso  $1 < p < 2$ .**

*Primera Etapa: Regularización.* Definimos una sucesión de problemas uniformemente parabólicos cuyos coeficientes y términos independientes son funciones regulares acotadas. Introducimos la siguiente ecuación regularizada de (1.1)

$$\frac{\partial b_m(u)}{\partial t} - \operatorname{div} \phi_r(\nabla u - k_s(b_m(u))e) + g_n(x, u) = f_1(t, x) \quad \text{en } Q \quad (4.4)$$

donde para cada  $r \in \mathbb{N}$  se define la función vectorial  $\phi_r$  por

$$\phi_r(\xi) = \begin{cases} (|\xi|^2 + \frac{1}{r})^{\frac{p-2}{2}} \xi & |\xi| < \frac{1}{r}, \\ |\xi|^{p-2} \xi & |\xi| \geq \frac{2}{r}, \\ \phi_r(\xi) & \frac{1}{r} \leq |\xi| < \frac{2}{r} \end{cases}$$

con  $\phi_r$  tal que  $\phi_r \in C^1(\mathbb{R}^N)$  y verifica las desigualdades

$$0 \leq \phi_r(\xi) \cdot \xi \leq |\xi|^p, \quad |\phi_r(\xi)| \leq |\xi|^{p-1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (4.5)$$

y

$$\phi_r(\xi) \cdot \xi \geq \frac{\alpha |\xi|^2}{(1 + |\xi|)^{2-p}} \quad (4.6)$$

para cada  $\xi$  en  $\mathbb{R}^N$  y  $\alpha$  constante positiva ( $\alpha := 2^{\frac{p-2}{2}}$ . Véase [BPT93, Lema 2 del Apéndice, página 32]). Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos

$$b_m(\eta) = \frac{1}{m} \eta + \bar{b}_m(\eta)$$

siendo  $\bar{b}_m$  la aproximación Yosida de  $b$  (véase p.e. [Br73]). Es bien conocido [Br73, B81] que  $b_m$  converge uniformemente sobre compactos a  $b$  ( $\bar{b}_m$  es una función Lipschitz no decreciente tal que  $|\bar{b}_m| \leq |b_m|$ . Por tanto  $b_m$  y  $b_m^{-1}$  son también funciones Lipschitz no decrecientes)

Sea  $\{k_s\}_{s=1}^\infty$  una sucesión de funciones de  $C^\infty(\mathbb{R})$  tal que verifican (1.16) y  $k_s$  converge a  $k$  uniformemente sobre compactos de  $\mathbb{R}$ .

Para cada natural  $n$ , consideramos la función  $g_n \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$  satisfaciendo las hipótesis (1.17) y (1.18). Además  $g_n(x, \eta)$  converge a  $g_n(x, \eta)$  en  $L^1(\Omega)$  para todo  $\eta \in \mathbb{R}$  fijo y

en  $\mathbb{R}$  para casi todo punto  $x \in \Omega$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Tomemos  $f_l \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$  tal que  $\|f_l\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|f\|_{L^\infty(Q)}$  con  $\|f_l\|_{W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))} \leq C\|f\|_{BV}$ , para todo  $l \in \mathbb{N}$  y  $f_l$  converge a  $f$  en  $L^1(Q)$ .

Por último consideramos  $u_{0,q} \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_{0,q} \xrightarrow{*} u_0$  en  $L^\infty(\Omega)$  y  $\|\phi_r(\nabla u_{0,q} - k_s(b_m(u_{0,q}))e)\|_{(BV(\Omega))^N} \leq \|\phi_r(\nabla u_0 - k(b(u_0))e)\|_{(BV(\Omega))^N}$ .

La ecuación (4.4) es ahora uniformemente parabólica. Así, por un resultado clásico par ecuaciones parabólicas (véase [LSU68, Capítulo V]) existe una única solución clásica  $\hat{u} = u_{m,r,s,n,l,q}$  de (4.4) satisfaciendo además

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) &= 0 && \text{en } \Sigma, \\ b_m(\hat{u}(0, x)) &= b_m(u_{0,q}(x)) && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

(En el resto de la demostración denotaremos por  $\hat{u}$  la función  $u_{m,r,s,n,l,q}$ . Por tanto  $\{\hat{u}\}$  será la sucesión de funciones  $\{u_{m,r,s,n,l,q}\}$  dependiente de los parámetros  $m, r, s, n, l$  y  $q$ ).

Para estudiar la convergencia de la sucesión  $\hat{u}$  en apropiados espacios, necesitaremos unas estimaciones a priori que presentamos en el siguiente apartado.

*Segunda Etapa: Estimaciones a priori.* Por el Principio del Máximo

$$|\hat{u}(t, x)| \leq M_1 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (4.7)$$

donde  $M_1$  es una constante positiva independiente de  $m, r, s, l$  y  $q$  según se desprende de las hipótesis sobre las funciones que aparecen en la formulación del problema regularizado.

La siguiente estimación que obtendremos atañe a la derivada temporal de  $b_m(\hat{u})$ . La técnica utilizada se basa en la derivación de la ecuación (4.4) respecto de  $t$  (vease [J92a]). Denotamos por  $\hat{v} := \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}$ . Derivando la ecuación (4.4) con respecto a  $t$ , se tiene que

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ \left( \frac{\partial \phi_r^j}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [ (b_m(\hat{u}))\hat{v}] - k'_s(b_m(\hat{u}))e_i\hat{v} \right) \right)_{j=1,\dots,N} \right\} - g'_n(x, \hat{u})(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v} + \frac{\partial f_l}{\partial t}.$$

Para cada  $\eta > 0$  se define la función  $\mathbf{H}_\eta$  de modo que la familia de funciones  $\{\mathbf{H}_\eta\}$  es una aproximación regular del valor absoluto. Comenzamos definiendo

$$h_\eta(\sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\eta} \left(1 - \frac{|\sigma|}{\eta}\right) & |\sigma| < \eta \\ 0 & |\sigma| \geq \eta, \end{cases}$$

$$H_\eta(\sigma) = \int_0^\sigma h_\eta(\tau) d\tau$$

y finalmente

$$\mathbf{H}_\eta(\sigma) = \int_0^\sigma H_\eta(\tau) d\tau .$$

Se comprueba sin mayor dificultad, que

$$h_\eta(\sigma) \geq 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \sigma h_\eta(\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R},$$

$$|H_\eta(\sigma)| \leq 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} H_\eta(\sigma) = \operatorname{sgn}^0(\sigma) = \begin{cases} -1 & \sigma < 0 \\ 0 & \sigma = 0 \\ 1 & \sigma > 0 \end{cases} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

y

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{H}_\eta(\sigma) = |\sigma| .$$

Multiplicando la ecuación (4.4) por  $H_\eta(\hat{v})$ , e integrando la ecuación obtenida con respecto a  $(t, x)$  en  $Q_t = ]0, t[ \times \Omega$ , se llega a que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{H}_\eta(\hat{v}(t, x)) dx - \int_{\Omega} \mathbf{H}_\eta(\hat{v}(0, x)) dx &\leq - \int_{Q_t} (b_m^{-1})''(b_m(\hat{u})) \hat{v} h_\eta(\hat{v}) \frac{\partial \phi_\tau^j}{\partial \xi_i} \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx ds \\ &+ \int_{Q_t} \hat{v} h_\eta(\hat{v}) k'_s(b_m(\hat{u})) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi_\tau^j e_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx ds \\ &- \int_{Q_t} g'_n(x, \hat{u}) (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) \hat{v} H_\eta(\hat{v}) dx ds \\ &+ \int_{Q_t} \frac{\partial f_l}{\partial t} H_\eta(\hat{v}) dx ds , \end{aligned}$$

puesto que  $\hat{u}(s, x) = 0$  sobre  $[0, T] \times \partial\Omega$ , y por tanto  $\hat{v}(s, x) = 0$  sobre  $[0, T] \times \partial\Omega$ . Tomando el límite cuando  $\eta \rightarrow 0$  obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\hat{v}(t, x)| dx &\leq \int_{\Omega} |\hat{v}(0, x)| dx + \int_{Q_t} \frac{\partial f_l}{\partial t}(s, x) \operatorname{sgn}^0(\hat{v}) dx ds \\ &- \int_{Q_t} g'_n(x, \hat{u}) (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) |\hat{v}| dx ds \end{aligned} \quad (4.8)$$

por las propiedades de las funciones  $h, H$  y  $\mathbf{H}$  y la monotonía de la función vectorial  $\phi_\tau$ . Ahora, por (1.18), se tiene que

$$- \int_{Q_t} g'_n(x, \hat{u}) (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) |\hat{v}| dx ds \leq C^* \int_{Q_t} |\hat{v}| b'_m(\hat{u}) (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) dx ds .$$

Dado que  $(b_m^{-1})'(b_m(s)) = 1/b'_m(s)$  siempre que  $b'_m(s) \neq 0$ , se deduce que la última integral es igual a  $\int_{Q_t \setminus \{(s, x): b'_m(\hat{u}(s, x)) = 0\}} |\hat{v}|$ . Por lo tanto obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{\Omega} |\hat{v}(t, x)| dx \leq \int_{\Omega} |\hat{v}(0, x)| dx + \int_{Q_t} \frac{\partial f_l}{\partial t}(s, x) \operatorname{sgn}^0(\hat{v}) dx ds + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}| dx ds .$$

Considerando la ecuación elíptica que verifica  $\frac{\partial}{\partial t} b_m(\hat{u}(0, x))$  se justifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\hat{v}(t, x)| dx &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} b_m(\hat{u}(0, x)) \right| dx + \int_{Q_t} \left| \frac{\partial f_l}{\partial t} \right| dx ds + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}(s, x)| dx ds \\ &\leq \int_{\Omega} |\operatorname{div} \phi(\nabla u_{0,q} - k_s(b_m(u_{0,q}))e)| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |g_n(x, u_{0,q})| dx + \int_{\Omega} |f_l(0, x)| dx + \int_{Q_t} \left| \frac{\partial f_l}{\partial t} \right| dx ds + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}(s, x)| dx ds \\ &\leq C_1 + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}(s, x)| dx ds \end{aligned}$$

gracias a las hipótesis sobre las sucesiones  $g_n$ ,  $f_l$  y  $u_{0,q}$ . Aplicando el Lema de Gronwall a la función  $\alpha(t) = \int_0^t \int_{\Omega} |\hat{v}(s, x)| dx ds$ , se llega a que

$$\int_{\Omega} |\hat{v}| dx \leq C_1 e^{C^* t} \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

y por tanto

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial b_m(\hat{u}(t, x))}{\partial t} \right| dx \leq M_2 \quad \text{para todo } t \in [0, T] \quad (4.9)$$

con  $M_2 = C_1 e^{C^* T}$ . Gracias a (4.9), se sigue de (4.7) y (1.15) (como en la Proposición 2.3), la estimación

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, x) \right| dx \leq M_3 \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (4.10)$$

$$(M_3 = M_2 \frac{L_1}{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2}).$$

Ahora mostraremos que existe una constante  $M_4$  positiva tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}(t, x)|^p dx \leq M_4 \quad (4.11)$$

uniformemente en  $t \in [0, T]$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $l$  y  $q$ . Primero mostraremos que existe una constante positiva uniforme  $M'$  tal que

$$\int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq M' \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.12)$$

siendo  $\hat{\xi} := \nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))e$ . Para ello, multiplicamos ambos miembros de la igualdad (4.4) por  $\hat{u}$  e integrando la ecuación obtenida respecto de  $x$  en  $\Omega$  se tiene que

$$\int_{\Omega} \hat{u} \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \nabla \hat{u} dx + \int_{\Omega} g_n(x, \hat{u}) \hat{u} dx = \int_{\Omega} f_l \hat{u} dx.$$

Despejando la segunda integral del primer miembro

$$\int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \nabla \hat{u} dx = \int_{\Omega} f_l \hat{u} - \int_{\Omega} g_n(x, \hat{u}) \hat{u} dx - \int_{\Omega} \hat{u} \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} dx \quad (4.13)$$

siendo también cierta la igualdad

$$\int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \nabla \hat{u} dx = \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx + \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) k_s(b_m(\hat{u})) e dx \quad (4.14)$$

según se deduce de la definición de la función vectorial  $\hat{\xi}$ .

En los cálculos que siguen, aparezcan varias constantes positivas  $C_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, 7$  las cuales son independientes de  $t$  y los parámetros  $m$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $l$  y  $q$  gracias a las estimaciones (4.7), (4.9) y (4.10). Sin embargo dependerán de  $p$ ,  $T$ , la medida de  $\Omega$  y algunas de ellas serán funciones de parámetros positivos  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Aquí solamente indicaremos la dependencia de tales constantes respecto los parámetros  $\varepsilon$  y  $\delta$ .

Combinando las identidades (4.13) y (4.14) se obtiene la desigualdad

$$\left| \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} + \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) k_s(b_m(\hat{u})) e \right| \leq \left| \int_{\Omega} f_l \hat{u} \right| + \left| \int_{\Omega} g_n(x, \hat{u}) \hat{u} \right| + \left| \int_{\Omega} \hat{u} \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \right|. \quad (4.15)$$

Por las estimaciones (4.7) y (4.9), la hipótesis (1.17) sobre  $g$  y las propiedades de  $g_n$ , existe una constante positiva  $C_2$  (uniforme en  $t$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $l$  y  $q$ ) tal que

$$\int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx + \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) k_s(b_m(\hat{u})) e dx \leq C_2.$$

Aplicando la desigualdad de Young

$$\int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx \leq C_2 + \frac{\varepsilon^{p'}}{p'} \int_{\Omega} |\phi_r(\hat{\xi})|^{p'} dx + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\Omega} |k_s(b_m(\hat{u})) e|^p dx$$

donde  $\varepsilon$  es un número real positivo. La última integral está uniformemente acotada gracias a (4.7) y las hipótesis sobre las sucesiones  $\{k_s\}$  y  $\{b_m\}$ . Por las propiedades (4.5) de  $\phi_r$ , la primera integral del miembro derecho de la desigualdad anterior está acotada por  $\int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx$  para todo  $t$  en  $[0, T]$  mientras que la segunda está acotada gracias a (1.16) y (4.7). Por consiguiente, para alguna constante positiva  $C_3$  se tiene que

$$\int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx \leq C_3(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^{p'}}{p'} \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx. \quad (4.16)$$

Además, por la propiedad (4.6) de  $\phi_r$ , se llega a que

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{|\hat{\xi}|^2}{(1 + |\hat{\xi}|)^{2-p}} dx \leq \int_{\Omega} \phi_r(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx. \quad (4.17)$$

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Young a  $\int_{\Omega} \frac{|\hat{\xi}|^p}{(1+|\hat{\xi}|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (1+|\hat{\xi}|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx$  con exponentes  $\frac{2}{p}$  y  $\frac{2}{2-p}$  la siguiente desigualdad es satisfecha

$$\int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq \frac{p}{2\delta^{2/p}} \int_{\Omega} \frac{|\hat{\xi}|^2}{(1+|\hat{\xi}|)^{2-p}} dx + \delta^{2/(2-p)} \frac{2-p}{2} \int_{\Omega} (1+|\hat{\xi}|)^p dx .$$

Aplicando a  $(1+|\hat{\xi}|)^p$  la desigualdad  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$  cierta para  $a, b > 0$  y  $1 < p$  [BPT93, Lema 1 del Apéndice, página 31], se tiene que

$$(1 - C_4\delta^{2/(2-p)}) \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq C_5(\delta) + \frac{p}{2\delta^{2/p}} \int_{\Omega} \frac{|\hat{\xi}|^2}{(1+|\hat{\xi}|)^{2-p}} dx \quad (4.18)$$

tras agrupar adecuadamente los distintos términos. Tomando las estimaciones (4.16) y (4.17) en (4.18), obtenemos la desigualdad

$$\alpha(1 - C_4\delta^{2/(2-p)}) \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq C_5 + \frac{p}{2\delta^{2/p}} \left\{ C_3 + \frac{\varepsilon^{p'}}{p'} \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \right\},$$

la cual implica

$$\alpha \left( 1 - C_4\delta^{2/(2-p)} - C_6 \frac{\varepsilon^{p'}}{\delta^{2/p}} \right) \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq C_7(\varepsilon, \delta)$$

para alguna constante positiva dependiente de  $\varepsilon, \delta$ . La estimación (4.12) se consigue eligiendo  $0 < \delta \ll 1$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  tal que  $\varepsilon^{p'} \ll \delta^{2/p}$  y tales que  $1 - C_4\delta^{2/(2-p)} - C_6 \frac{\varepsilon^{p'}}{\delta^{2/p}} > 0$ . Ahora (4.12) implica (4.11) gracias a las estimaciones uniformes de  $\int_{\Omega} |k_s(b_m(\hat{u}))|^p dx$ .

Finalmente, multiplicando (4.4) por  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  e integrando sobre  $Q$  se obtiene mediante la desigualdad de Hölder la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \int_Q v \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} dx dt \right| &\leq \left[ \int_Q |\phi_r(\hat{\xi})|^{p'} dx dt \right]^{1/p'} \left[ \int_Q |\nabla v|^p dx dt \right]^{1/p} \\ &\quad + \|v\|_{L^\infty(Q)} \int_Q |g_n(x, \hat{u})| dx dt \\ &\quad + \left[ \int_Q |f_l|^{p'} dx dt \right]^{1/p'} \left[ \int_Q |v|^p dx dt \right]^{1/p} . \end{aligned}$$

La propiedad (4.5) de  $\phi_r$ , las hipótesis (1.17) de  $g$  y (4.1) de  $f$ , junto con las estimaciones (4.7) y (4.12) así como la elección de las sucesiones  $g_n$  y  $f_l$ , nos permiten asegurar que existe una constante  $M_5$  positiva independiente de  $m, r, s, n, l$  y  $q$  tal que

$$\left| \int_Q v \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} dx dt \right| \leq M_5 \|v\|_{L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)} .$$

Por consiguiente se obtiene la siguiente estimación uniforme en  $L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)) + L^1(Q)$

$$\left\| \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \right\|_{L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)) + L^\infty(Q)} \leq M_5. \quad (4.19)$$

*Tercera Etapa: Paso al límite.* Las estimaciones (4.7), (4.9), (4.10), (4.11) y (4.19) nos permitirán encontrar una función  $u$  solución BV del problema (1.1), (1.2) y (1.3) como límite de alguna subsucesión de  $\{\hat{u}\} := \{u_{m, r, s, n, l, q}\}$  (la cual seguiremos denotando por  $\{\hat{u}\}$ ). A modo de resumen mostramos a continuación las estimaciones obtenidas en la etapa anterior y algunas otras obtenidas como consecuencia de ellas (llamamos  $C$  a una constante positiva, cota uniforme en  $m, r, s, n, l, q$ ):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\hat{u}\|_{L^\infty(Q)} \leq C & (4.7) \\ \int_\Omega \left| \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \right| dx \leq C \quad \forall t \in [0, T] & (4.9) \\ \int_\Omega \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right| dx \leq C \quad \forall t \in [0, T] & (4.10) \\ \|\hat{u}\|_{L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))} \leq C & (4.7)+(4.11) \\ \|\hat{u}\|_{L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))} \leq C & (4.7)+(4.11) \\ \|\hat{u}\|_{W^{1, 1}(Q)} \leq C & (4.7)+(4.10)+(4.11) \\ \|b_m(\hat{u})\|_{L^\infty(Q)} \leq C & \text{continuidad de } b + (4.7) \\ \left\| \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \right\|_{L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)) + L^1(Q)} \leq C & (4.19) \end{array} \right.$$

El último aserto del Teorema referente a la regularidad de una solución ( $u$  debe de pertenecer a  $C([0, T], L^1(\Omega))$ ) se obtiene por las estimaciones (4.7), (4.10) y (4.11) y el Corolario 4 página 85 de Simon [S87] que asegura que existe una subsucesión de  $\{\hat{u}\}$  (a la que seguiremos llamando  $\{\hat{u}\}$ ) y una función  $u \in C([0, T], L^1(\Omega))$  tal que  $\hat{u} \rightarrow u$  en  $C([0, T], L^1(\Omega))$ . En particular,

$$\hat{u} \rightarrow u \quad \text{en } L^1(Q)$$

y

$$\hat{u} \rightarrow u \quad \text{para casi todo punto de } Q$$

(excepto para una subsucesión). Debido a la estimación (4.7) y la convergencia en casi todo punto de  $Q$ , se tiene que

$$\hat{u} \xrightarrow{*} u \quad \text{en } L^\infty(Q)$$

y en virtud de (4.11)

$$\hat{u} \rightarrow u \quad \text{en } L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)).$$

Por consiguiente  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ .

De (4.7) y las hipótesis sobre  $b_m$  se deduce la convergencia débil\*  $b_m(\hat{u}) \overset{*}{\rightharpoonup} \beta$  en  $L^\infty(Q)$ . La convergencia de  $\hat{u}$  a  $u$  en casi todo punto de  $Q$ , la convergencia uniforme sobre el compacto  $[-C, C]$  de  $b_m$  a  $b$  y la continuidad de  $b$  implican que  $b_m(\hat{u}) \rightarrow b(u)$  en casi todo punto de  $Q$ . El Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue nos permite obtener la convergencia fuerte de  $b_m(\hat{u})$  a  $b(u)$  en  $L^\sigma(Q)$  ( $1 \leq \sigma < \infty$ ). Análogamente,  $b_m(u_{0,q})$  converge fuerte a  $b(u_0)$  en  $L^\sigma(\Omega)$  ( $1 \leq \sigma < \infty$ ). Ahora, por la estimación (4.9) y puesto que  $b_m(\hat{u}) \rightarrow b(u)$  en  $L^1(Q)$ , se tiene que  $b(u) \in BV_l(Q)$ . Finalmente, por la convergencia en sentido de las distribuciones de  $\frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial b(u)}{\partial t}$  ( $b_m(\hat{u}) \rightarrow b(u)$  c. t. p. de  $Q$ ) y la estimación (4.19), se tiene que  $\frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}$  converge débil en  $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$  a  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  y por tanto  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$ .

En lo que sigue se probará que la función hallada  $u$  verifica las igualdades (1.23) y (1.24) lo que junto con las propiedades  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ ,  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$  y  $b(u) \in BV_l(Q)$  hacen de  $u$  una solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3).

Mediante argumentos bien conocidos obtenemos que  $g_n(x, \hat{u})$  converge a  $g(x, u)$  en  $L^1(Q)$ .

Puesto que  $\hat{u}$  está uniformemente acotada en  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  entonces  $\phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))e)$  está también uniformemente acotada en  $L^\infty(0, T; (L^{p'}(\Omega))^N)$ . Así, existe una subsucesión denotada de nuevo por  $\{\hat{u}\}$ , tal que  $\phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))e)$  converge débil\* en  $L^\infty(0, T; (L^{p'}(\Omega))^N)$  a un elemento  $Y$  de  $L^\infty(0, T; (L^{p'}(\Omega))^N)$ .

Multiplicando la ecuación (4.4) por una función prueba  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  e integrando en  $Q$  se tiene que

$$\int_Q v \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} + \int_Q \phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))e) \cdot \nabla v + \int_Q g_n(x, \hat{u})v = \int_Q f_l v. \quad (4.20)$$

Para probar que la función límite  $u$  verifica la ecuación variacional (1.24), para ello tomamos el límite en  $m, r, s, n, l$  y  $q \rightarrow \infty$  en la ecuación (4.20) y nos basamos en las convergencias ya mencionadas. Obtenemos de esta forma la siguiente ecuación

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_Q Y \cdot \nabla v dx dt + \int_Q g(x, u)v dx dt = \int_Q f v dx dt. \quad (4.21)$$

para cada  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ . Sin embargo, debido al carácter no lineal del operador, no es obvio identificar  $Y$  con  $\phi(\nabla u - k(b(u))e)$  en casi todo punto de  $Q$ . A continuación mostraremos esta identidad utilizando una variante del argumento de

Minty utilizada por Díaz y de Thelin en [DT94]. Veamos pues, que

$$Y = \phi(\nabla u - k(b(u))\mathbf{e}) \quad \text{en casi todo punto de } Q. \quad (4.22)$$

Sucede, que si es cierta la desigualdad

$$\int_{\Omega} [Y - \phi(\nabla \chi - k(b(u))\mathbf{e})] \cdot [\nabla u - \nabla \chi] dx \geq 0, \quad \text{para todo } \chi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.23)$$

entonces se obtiene (4.22) tomando para cada elemento  $\xi$  de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la función  $\chi = u - \lambda \xi$  con  $\lambda > 0$  (o  $\lambda < 0$ ) y haciendo  $\lambda \rightarrow \infty$ . La demostración de (4.22) se reduce por tanto a la demostración de (4.23) que se realiza de la siguiente manera.

Tomamos  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(0, T)$ . Para cada  $\chi \in W_0^{1,p}(\Omega)$  introducimos la descomposición

$$\int_Q [\phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) - \phi(\nabla \chi - k(b(u))\mathbf{e})] \cdot \nabla(u - \chi)\varphi(t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (4.24)$$

donde

$$I_1 = \int_Q \phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) \cdot \nabla(u - \hat{u})\varphi(t) dx dt$$

$$I_2 = \int_Q [\phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) - \phi_r(\nabla \chi - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e})] \cdot \nabla(\hat{u} - \chi)\varphi(t) dx dt$$

$$I_3 = \int_Q \phi_r(\nabla \chi - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) \cdot \nabla(\hat{u} - u)\varphi(t) dx dt$$

y

$$I_4 = \int_Q [\phi_r(\nabla \chi - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) - \phi(\nabla \chi - k(b(u))\mathbf{e})] \cdot \nabla(u - \chi)\varphi(t) dx dt.$$

Nuestro objetivo es probar que el límite en  $m, r, s, n, l, q$  de las anteriores integrales es no negativo. Así (4.24) es no negativo para cada  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(0, T)$  y por tanto se tiene (4.23).

Debido a la monotonía de  $\phi_r$  la integral  $I_2$  es no negativa. Por otra parte Las propiedades de las funciones  $\phi_r, k_s, b_m, \hat{u}$  nos permiten probar que

$$\lim \int_Q |\phi_r(\nabla \chi - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) - \phi(\nabla \chi - k(b(u))\mathbf{e})|^p dx dt = 0 \quad (4.25)$$

y por tanto que el límite de  $I_3$  e  $I_4$  es cero por estar  $\hat{u}$  uniformemente acotada en  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  y converger  $\hat{u}$  a  $u$  débil en  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ .

Finalmente, probaremos que el límite de  $I_1$  es también cero. En primer lugar, puesto que  $u\varphi(t), \hat{u}\varphi(t) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ , multiplicando la ecuación (4.4) por cada una de estas funciones, integrando en  $Q$  y restando las ecuaciones obtenidas, se tiene que

$$I_1 = \int_Q \phi_r(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))\mathbf{e}) \cdot \nabla(u - \hat{u})\varphi(t) dx dt$$

$$= - \int_Q \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} u \varphi(t) dx dt \quad (4.26)$$

$$+ \int_Q \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \hat{u} \varphi(t) dx dt \quad (4.27)$$

$$- \int_Q g_n(x, \hat{u})(u - \hat{u}) \varphi(t) dx dt \quad (4.28)$$

$$+ \int_Q f_l(u - \hat{u}) \varphi(t) . \quad (4.29)$$

Las integrales (4.28) y (4.29) tienden a cero cuando  $m, r, s, n, l, q \rightarrow \infty$  (por la convergencia débil\* de  $\hat{u}$  a  $u$  en  $L^\infty(Q)$ , y las propiedades de  $g_n$  y  $f_l$ ). La convergencia débil en  $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$  de  $\frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}$  a  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  y el hecho de que  $u\varphi(t) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ , implican que la integral (4.26) ( $= -\langle \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}, u\varphi(t) \rangle_{X, X'}$ ) tiende a

$$- \langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, u\varphi(t) \rangle_{X, X'} . \quad (4.30)$$

Veamos que también (4.27) tiende a (4.30). Para ello seguimos la técnica empleada por Díaz y de Thelin en [DT94] basada en la definición de las funciones reales

$$B_m(\eta) = \int_0^\eta (b_m(\eta) - b_m(s)) ds \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

y

$$z_{\hat{u}}(t) = \int_\Omega B_m(\hat{u}(t, x)) dx .$$

Como  $B_m(\hat{u})$  está acotada (de hecho uniformemente acotada en  $m, r, s, n, l, q$ ) gracias a las hipótesis de  $b_m$  y la acotación (4.7) de  $\hat{u}$ . Por tanto se tiene que

$$z_{\hat{u}}(t) \in L^1(0, T) \quad \text{con norma uniformemente acotada.}$$

Una variante del Lema 2 de Bamberger [B77] implica que

$$\int_\Omega \hat{u}(t) \frac{\partial b_m(\hat{u})(t)}{\partial t} dx = \langle \frac{\partial b_m(\hat{u})(t)}{\partial t}, \hat{u}(t) \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)} = \frac{dz_{\hat{u}}}{dt}(t)$$

para casi todo  $t \in ]0, T[$ , en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Ahora, gracias a la convergencia de  $\hat{u}$  y  $b_m(\hat{u})$  y a la acotación uniforme de  $z_{\hat{u}}$  en  $L^1(0, T)$  se tiene que

$$z_{\hat{u}} \rightarrow z_u \quad \text{en } L^1(0, T) \text{ y en casi todo punto de } ]0, T[ . \quad (4.31)$$

Puesto que  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  y  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$ , se verifican de nuevo las hipótesis del Lema 2 de Bamberger para las funciones  $u$  y  $z_u(t)$ , obteniendo como consecuencia que

$$\langle \frac{\partial b(u)(t)}{\partial t}, u(t) \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)} = \frac{dz_u}{dt}(t) \quad (4.32)$$

para casi todo  $t \in ]0, T[$ , en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

Por lo que acabamos de ver, se obtiene la siguiente identidad para la integral de (4.27)

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \hat{u} \varphi(t) dx dt &= \int_0^T \varphi(t) \left( \int_\Omega \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \hat{u} dx \right) dt \\ &= \langle \varphi(t) \frac{dz_{\hat{u}}}{dt}(t) \rangle \quad (\text{en sentido } \mathcal{D}'(0, T)) \\ &= - \int_0^T z_{\hat{u}}(t) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt. \end{aligned}$$

Tomando el límite, se tiene que

$$\lim \int_Q \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \hat{u} \varphi(t) dx dt = - \int_0^T z_u(t) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt$$

por (4.31) y ser  $\varphi$  un elemento de  $C_c^1(0, T)$ . Considerando el anterior límite y la igualdad (4.32), se concluye que

$$\begin{aligned} \lim \int_Q \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \hat{u} \varphi(t) dx dt &= - \int_0^T z_u(t) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, u \varphi(t) \right\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega) + L^\infty(\Omega)} dt \\ &= \left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, u \varphi(t) \right\rangle_{X, X'} \end{aligned}$$

y por tanto que  $\lim I_1 = 0$ .

Si recapitulamos lo hasta ahora probado, tenemos que la desigualdad (4.23) es satisfecha (obtenida a partir de la identidad (4.24) y que el límite de las integrales  $I_1, I_2, I_3, I_4$  es no negativo) lo que implica (4.22) (variante del argumento de Minty introducido en [Li9]). Esto nos permite justificar que el límite de (4.21) es precisamente

$$\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'} + \int_Q \phi(\nabla u - k(b(u))e) \cdot \nabla v dx dt + \int_Q g(\cdot, u) v dx dt = \int_Q f v dx dt$$

para cada  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  y por tanto  $u$  verifica la ecuación variacional (1.24). Para mostrar que en efecto  $u$  es una solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3), falta por probar que  $u$  verifica la condición inicial (1.23) para cada  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$  con  $v(T, \cdot) = 0$ . Puesto que obviamente  $\hat{u}$  verifica (1.23) y  $b_m(u_{0,q}) \xrightarrow{*} b(u_0)$  en  $L^\infty(\Omega)$ , la convergencia de  $\left\langle \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'}$  a  $\left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial t}, v \right\rangle_{X, X'}$  si  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  nos lleva a verificar la igualdad (1.23) para la función  $u$ , siendo por tanto solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3).

**Existencia de soluciones BV. Caso  $p \geq 2$ .** Se procederá de manera similar a la técnica empleada para encontrar una solución BV cuando  $1 < p < 2$ . Comenzamos

en la primera etapa construyendo una familia de problemas regulares uniformemente parabólicos, cuya diferencia esencial con los construidos para el caso  $1 < p < 2$ , radica en que la función  $\phi$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^N$  por ser  $p > 2$ ; lo que no hace necesaria su aproximación por funciones regulares  $\phi_r$ . A cambio, se añade un nuevo término ( $\epsilon\Delta u$ ) que garantiza la no degeneración de los nuevos problemas. La siguiente etapa concierne a la obtención de estimaciones a priori que nos permitirán encontrar, mediante paso al límite (tercera etapa) una función  $u$  solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3). Por la similitud de la técnica empleada en este caso con el caso anterior, sólo mencionaremos las diferencias más sobresalientes.

*Primera etapa: Regularización.* Se construye una sucesión de problemas regulares uniformemente parabólicos. En esta ocasión basta con considerar los problemas

$$\frac{\partial b_m(u)}{\partial t} - \epsilon\Delta u - \operatorname{div} \phi(\nabla u - k_s(b_m(u))\mathbf{e}) + g_n(x, u) = f_l(t, x) \quad \text{en } Q, \quad (4.33)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{en } \Sigma, \quad (4.34)$$

$$b_m(u(0, x)) = b(u_{0,q}(x)) \quad \text{en } \Omega \quad (4.35)$$

con  $b_m, k_s, g_n, f_l$  y  $u_{0,q}$  como en el caso  $1 < p < 2$  y  $\epsilon > 0$ . Por un resultado clásico para ecuaciones parabólicas (véase [LSU68, Capítulo V]) existe una única solución clásica  $\hat{u} = u_{m,s,n,l,q,\epsilon}$  de (4.33), (4.34) y (4.35).

*Segunda Etapa: Estimaciones a priori.* Por el principio del máximo se obtiene que

$$|\hat{u}(t, x)| \leq M_1 \quad \text{para todo } (t, x) \in Q \quad (4.36)$$

uniformemente en  $m, s, n, l, q, \epsilon$ .

Denotamos por  $\hat{v} = \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}$ . Diferenciando (4.33) con respecto a  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} &= \epsilon\Delta[(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v}] \\ &+ \operatorname{div} \left\{ \left( \frac{\partial \phi^j}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [(b_m(\hat{u}))\hat{v}] - k'_s(b_m(\hat{u}))e_i\hat{v}] \right) \right)_{j=1,\dots,N} \right\} \\ &- g'_n(x, \hat{u})(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v} + \frac{\partial f_l}{\partial t}(t, x). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para cada  $\eta > 0$  definimos  $h_\eta, H_\eta, \mathbf{H}_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como en la página 105. Multiplicando ambos miembros de (4.37) por  $H_\eta(\hat{v})$  e integrando la relación resultante con respecto a  $(t, x)$  sobre  $Q_t = ]0, t[ \times \Omega$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} H_\eta(\hat{v}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dx dt &= \int_{Q_t} \frac{d}{dt} \mathbf{H}_\eta(\hat{v}) dx dt = \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}_\eta(\hat{v}(t, x)) dx &- \int_{\Omega} \mathbf{H}_\eta(\hat{v}(0, x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon \int_{Q_t} \Delta[(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v}] H_\eta(\hat{v}) dx dt \\
&+ \int_{Q_t} \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v}] - k'_s(b_m(\hat{u}))e_i \hat{v} \right) \right\} H_\eta(\hat{v}) dx dt \\
&- \int_{Q_t} g'_n(x, \hat{u})(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v} H_\eta(\hat{v}) dx dt + \\
&+ \int_{Q_t} \frac{\partial f_1}{\partial t} H_\eta(\hat{v}) dx dt. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Puesto que  $\hat{u}(t, x) = 0$  en  $\Sigma$ , se tiene que  $\hat{v}(t, x) = 0$  en dicho conjunto. La integración por partes de la primera y segunda integral del segundo miembro de la igualdad (4.38) nos lleva a las siguientes desigualdades para cada sumando:

$$\begin{aligned}
&\epsilon \int_{Q_t} \Delta[(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v}] H_\eta(\hat{v}) dx dt = \\
&= -\epsilon \int_{Q_t} (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) h_\eta(\hat{v}) |\nabla \hat{v}|^2 dx dt \\
&\quad - \epsilon \int_{Q_t} (b_m^{-1})''(b_m(\hat{u})) \hat{v} h_\eta(\hat{v}) \nabla \hat{v} \cdot \nabla b_m(\hat{u}) dx dt \\
&\leq -\epsilon \int_{Q_t} (b_m^{-1})''(b_m(\hat{u})) \hat{v} h_\eta(\hat{v}) \nabla \hat{v} \nabla b_m(\hat{u}) dx dt \\
&\int_{Q_t} \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u}))\hat{v}] - k'_s(b_m(\hat{u}))e_i \hat{v} \right) \right\} H_\eta(\hat{v}) dx dt = \\
&= - \int_{Q_t} (b_m^{-1})''(b_m(\hat{u})) \hat{v} h_\eta(\hat{v}) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx dt \\
&\quad - \int_{Q_t} (b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) h_\eta(\hat{v}) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx dt \\
&\quad + \int_{Q_t} \hat{v} h_\eta(\hat{v}) k'_s(b_m(\hat{u})) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j e_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx dt \\
&\leq - \int_{Q_t} (b_m^{-1})''(b_m(\hat{u})) \hat{v} h_\eta(\hat{v}) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx dt \\
&\quad + \int_{Q_t} \hat{v} h_\eta(\hat{v}) k'_s(b_m(\hat{u})) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi^j e_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

Si consideramos estas desigualdades y las propiedades de las funciones  $H_\eta$  y  $h_\eta$  al tomar el límite cuando  $\eta \rightarrow 0$  en (4.38) y agrupando adecuadamente, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\hat{v}(t, x)| dx &\leq \int_{\Omega} |\hat{v}(0, x)| dx + \int_{Q_t} \frac{\partial f_1}{\partial t}(s, x) \operatorname{sgn}^0(\hat{v}) dx ds \\
&\quad - \int_{Q_t} g'_n(x, \hat{u})(b_m^{-1})'(b_m(\hat{u})) |\hat{v}| dx ds \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Obteniendo de esta forma la desigualdad (4.8) del caso  $1 < p < 2$ . Procediendo como se hizo entonces, y considerando la ecuación elíptica que verifica  $\frac{\partial}{\partial t} b_m(\hat{u}(0, x))$  se tiene

que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\hat{v}(t, x)| dx &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} b_m(\hat{u})(0, x) \right| dx + \int_{Q_t} \left| \frac{\partial f_l}{\partial t} \right| dx ds + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}(s, x)| dx ds \\
 &\leq \epsilon \int_{\Omega} |\Delta u_{0,q}| dx + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \phi(\nabla u_{0,q} - k_s(b_m(u_{0,q}))e)| dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} |g_n(x, u_{0,q})| dx + \int_{\Omega} |f_l(0, x)| dx \\
 &\quad + \int_{Q_t} \left| \frac{\partial f_l}{\partial t} \right| dx ds + C^* \int_{Q_t} |\hat{v}(s, x)| dx ds \\
 &\leq C_1 + C^* \int_Q |\hat{v}(s, x)|
 \end{aligned}$$

para alguna constante positiva  $C_1$  independiente de  $\epsilon, m, s, n, l$  y  $q$  gracias a las hipótesis de los datos. Mediante el Lema de Gronwall se llega a que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} \right| dx \leq M_2 \quad \text{para todo } t \in [0, T] \quad (4.40)$$

y por tanto

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, x) \right| dx \leq M_3 \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (4.41)$$

Para obtener una cota uniforme del gradiente de  $\hat{u}$  en  $L^p(\Omega)$  para cada  $t$ , multiplicamos la ecuación (4.33) por  $\hat{u}$  e integramos en  $\Omega$ , obteniendo de esta forma

$$\int_{\Omega} \phi(\hat{\xi}) \cdot \nabla \hat{u} dx = -\epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f_l \hat{u} dx - \int_{\Omega} g_n(x, \hat{u}) \hat{u} dx - \int_{\Omega} \hat{u} \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t} dx \quad (4.42)$$

siendo  $\hat{\xi} = \nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))$ . La no positividad del primer sumando del miembro de la derecha y el mismo trabajo realizado para la obtención de (4.16), nos permite obtener de nuevo la desigualdad

$$\int_{\Omega} \phi(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} dx \leq C_3(\epsilon) + \frac{\epsilon^{p'}}{p'} \int_{\Omega} |\hat{\xi}|^{p'} dx \quad (4.43)$$

para alguna constante  $C_3 > 0$  dependiente del parámetro  $\epsilon > 0$ . Sin embargo, el hecho de que

$$\phi(\hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} = |\hat{\xi}|^p,$$

nos permite obtener directamente de (4.43) la estimación

$$\int_{\Omega} |\hat{\xi}|^p dx \leq M' \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.44)$$

y por tanto que

$$\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^p dx \leq M_4 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.45)$$

uniformemente en  $m, s, n, l, q, \epsilon$ .

A partir de este punto, para obtener las restantes estimaciones necesarias para el paso al límite, se sigue lo ya hecho para el caso  $1 < p < 2$ .

*Tercera Etapa: Paso al límite.* Una vez obtenidas las estimaciones sobre la sucesión  $\{\hat{u}\}$ , en el proceso de paso al límite se sigue los pasos dados en el caso de que  $1 < p < 2$ . Sin embargo, conviene hacer las siguientes observaciones:

- El límite se toma haciendo tender  $m, s, n, l, q$  a  $\infty$  y  $\epsilon$  a 0.
- La estimación (4.45) y el hecho de que  $p > 2$  nos permiten asegurar que

$$\epsilon \int_Q \nabla \hat{u} \cdot \nabla v dx dt \xrightarrow[m, s, n, l, q \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

El resto de la demostración sigue como en el caso  $1 < p < 2$ . ■

**Corolario 4.1** *En las mismas hipótesis del Teorema 4.1, si además suponemos que*

$$a) \quad kb \text{ es localmente Lipschitz si } 1 < p \leq 2 \quad (4.46)$$

o

$$b) \quad kb(\sigma) = \lambda\sigma + \nu \text{ para constantes } \lambda, \nu \in \mathbb{R} \text{ si } p > 2, \quad (4.47)$$

entonces existe una función  $u$ , solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3), tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q). \quad (4.48)$$

**Demostración.** Sólo mostraremos las estimaciones que, adicionalmente a las dadas en el teorema de existencia, necesitaremos para probar que la solución obtenida como límite de problemas regulares es tal que verifica (4.48). Es claro que lo obtenido será para una subsucesión adecuada.

a) Multiplicando la ecuación (4.4) por  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$  e integrando sobre  $Q$ , se tiene

$$\int_Q b_m(\hat{u})_t \hat{u}_t dx dt = \int_Q f_l \hat{u}_t dx dt - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} G_n(x, \hat{u}) dx dt + \int_Q \operatorname{div} \phi(\hat{\xi}) \hat{u}_t dx dt$$

donde se ha convenido denotar por  $b_m(\hat{u})_t$  y  $\hat{u}_t$  las derivadas parciales respecto de  $t$  de las funciones  $b_m(\hat{u})$  y  $\hat{u}$  respectivamente y  $G_n(x, \cdot)$  es una primitiva de  $g_n(x, \cdot)$ . Llamando  $\Phi_r$  a una primitiva de  $\phi_r$  e integrando por partes, obtenemos

$$\int_Q b_m(\hat{u})_t \hat{u}_t dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} f_l(T, x) \hat{u}(T, x) dx - \int_{\Omega} f_l(0, x) \hat{u}(0, x) dx - \int_Q \frac{\partial f}{\partial t} \hat{u} dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega} G_n(x, \hat{u}(T, x)) dx + \int_{\Omega} G(x, \hat{u}(0, x)) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \Phi_{\tau}(\nabla \hat{u}(0, x) - k_s(b_m(\hat{u}(0, x)))e) dx - \int_{\Omega} \Phi_{\tau}(\nabla \hat{u}(T, x) - k_s(b_m(\hat{u}(T, x)))e) \\
&\quad - \int_Q e \cdot \phi_{\tau}(\hat{\xi}) \frac{\partial}{\partial t} [k_{s \circ} b_m(\hat{u})] dx dt .
\end{aligned}$$

Por las estimaciones (4.7), (4.2) y (4.1) y puesto que  $\Phi_{\tau}$  es no negativa, se tiene que

$$\int_Q b_m(\hat{u})_t \hat{u}_t dx dt \leq C_1 + \int_Q |e \cdot \phi_{\tau}(\hat{\xi})| \left| \frac{\partial}{\partial t} [k_{s \circ} b_m(\hat{u})] \right| dx dt ,$$

donde  $C_1$  es una constante positiva independiente de los parámetros  $m, r, s, n, l, q$ . Aplicando la desigualdad de Young se llega a que

$$\int_Q b_m(\hat{u})_t \hat{u}_t dx dt \leq C_1 + \frac{1}{\varepsilon^{p'p'}} \int_Q |\phi_{\tau}(\hat{\xi})|^{p'} dx dt + \frac{\varepsilon^p}{p} \int_Q \left| \frac{\partial}{\partial t} [k_{s \circ} b_m(\hat{u})] \right|^p dx dt , \quad (4.49)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $\hat{u}$  verifica (4.7) y por hipótesis se satisface (4.46), entonces existe una constante positiva  $L_{kob}$  tal que  $L_{kob} \geq \text{lip}(k_{s \circ} b_m, [-M_1, M_1])$  para todo  $s, m \in \mathcal{N}$  (dada  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmete Lipschitz, por  $\text{lip}(F, [a, b])$  denotamos la constante de Lipschitz de  $F$  sobre el intervalo  $[a, b]$ ). Por tanto, se tiene que

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial t} [k_{s \circ} b_m(\hat{u})] \right| dx dt \leq L_{kob} \int_Q \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right| dx dt .$$

Por otra parte, puesto que  $b$  además de (1.15) satisface (4.3), procediendo como en la Proposición 2.3, obtenemos una desigualdad para  $b_m(\hat{u})$  y  $\hat{u}$  como la mostrada en (2.21) lo que nos permite obtener la siguiente desigualdad

$$\frac{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2}{L_1} \int_Q |\hat{u}_t|^2 dx dt \leq \int_Q b(\hat{u})_t \hat{u}_t dx dt .$$

Considerando las anteriores estimaciones y (4.11) en la desigualdad (4.49), obtenemos que

$$\frac{\lambda_1 - L_1 L_2 \lambda_2}{L_1} \int_Q |\hat{u}_t|^2 dx dt \leq C_1 + L_{kob}^p \frac{\varepsilon}{p} \int_Q |\hat{u}_t|^p dx dt$$

para alguna constante  $C_2$  positiva. Finalmente, dado que  $1 < p < 2$  y la medida de  $Q$  ( $\mathcal{L}^{N+1}$ ) es finita, podemos aplicar la desigualdad de Hölder a la última integral con exponentes  $2/p, (2/p)'$ . Eligiendo adecuadamente  $\varepsilon$  concluimos que

$$\int_Q \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq C_3 \quad (4.50)$$

con  $C_3$  constante positiva independiente de  $m, r, s, n, l, q$ . La reflexividad del espacio  $L^2(Q)$  nos lleva a que para alguna subsucesión y  $v \in L^2(Q)$ ,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \rightharpoonup v \text{ débil en } L^2(Q).$$

La convergencia de  $\hat{u}$  a  $u$  en  $L^1(Q)$  implica la convergencia de  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$  a  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en sentido de distribuciones, lo que nos permite identificar  $v$  con  $\frac{\partial u}{\partial t}$  y por tanto probar (4.48).

b) En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que el vector  $e = e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ . Multiplicando la ecuación (4.33) por  $\hat{u}_t e^{-\lambda x_1}$  y sustituyendo  $(k_s b)(\sigma)$  por  $\lambda \sigma + \nu$ , obtenemos siguiendo los pasos dados en el caso anterior, que

$$\begin{aligned} \int_Q |\hat{u}_t|^2 e^{-\lambda x_1} dx dt &\leq \int_Q b_m(\hat{u})_t u_t e^{-\lambda x_1} dx dt \\ &\leq C_1 + \left| \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\nabla \hat{u} - k_s(b_m(\hat{u}))e_1) e^{-\lambda x_1} dx dt \right| \end{aligned}$$

con  $\Phi(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$  y alguna constante  $C_1$  positiva independiente de  $m, s, n, l, q, \epsilon$  gracias a las estimaciones sobre  $\hat{u}$  y  $|\nabla \hat{u}|$ . Por último la hipótesis sobre  $k_s b$  (4.46), el hecho de que  $\Omega$  es un acotado de  $\mathbb{R}^N$  y la anterior desigualdad nos llevan a encontrar una constante positiva  $C_2$  tal que

$$\int_Q \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq C_2.$$

Procediendo como en el caso anterior se prueba que existe  $u$  solución BV de (1.1), (1.2) y (1.3) verificando (4.48). ■

**Observación 4.3** Nótese que para la unicidad de soluciones BV aún se requiere comprobar la hipótesis (3.3) sobre la medida del conjunto de puntos de discontinuidad. El Lema 2.6 y el Corolario 4.1, muestran, junto con el Corolario 3.3, que existe una única solución BV obtenida mediante el proceso de regularización parabólica desarrollado en la demostración del Teorema 4.1.

Presentamos aquí una consecuencia directa de un resultado debido a Benilan y Garipey [BG93a, Teorema 1.1], de modo que bajo condiciones más regulares de  $b$ , nos permite obtener más regularidad sobre  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$ .

**Corolario 4.2** Si  $u$  es una solución BV,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q)$  y además  $b$  es absolutamente continua, con módulo de continuidad localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^1(Q).$$

**Demostración.** Se verifican entonces las hipótesis del Teorema 1.1 de [BG93a]. ■

Conviene hacer notar, que en tales condiciones,  $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in L^1(Q)$ , siendo esta la hipótesis fundamental para el teorema de comparación dado por Díaz y Thelin en [DT94, Teorema 3].

Por último, se tiene el siguiente resultado de existencia de soluciones BV para el problema multívoco (3.24), (3.25) y (3.26).

**Corolario 4.3** *Supongamos las mismas hipótesis sobre  $b, k, f$  y  $u_0$  dadas en el Teorema 4.1. Sea  $\beta$  el grafo maximal monótono de  $\mathbb{R}^2$  dado por (3.27). Entonces existe una solución BV del problema (3.24), (3.25) y (3.26). Además  $u \in C([0, T], L^1(\Omega))$ .*

**Demostración.** Se procede como en el Teorema 4.1. Se distingue entre el caso  $1 < p < 2$ , y el caso  $p \geq 2$ . Se construye una sucesión de problemas regularizados asociados al problema de partida (3.24), (3.25) y (3.26), donde en este caso, las funciones  $g_n$  del Teorema 4.1 son sustituidas por funciones  $\beta_n$ , funciones regularizantes del grafo  $\beta$ . Se toman  $\beta_n$  suficientemente regulares para obtener la existencia de soluciones clásicas de los problemas regulares. Se eligen además monótonas crecientes, lo que nos permite obtener las estimaciones apropiadas sobre  $\hat{u}, b_m(\hat{u}), \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, \frac{\partial b_m(\hat{u})}{\partial t}, k_s(b_m(\hat{u}))$ . Nótese que la monotonía de  $\beta$  juega un papel esencial en la obtención de una estimación sobre  $|\nabla \hat{u}|$  en  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  (estimación análoga a (4.11)) al poder acotar por cero la integral

$$- \int_{\Omega} \beta_n(\hat{u}) \hat{u}$$

que aparecería en la identidad análoga a (4.13) (véase la página 107).

Las estimaciones obtenidas sobre las soluciones  $\hat{u}$  de sus respectivos problemas, nos permiten obtener una función  $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  tal que  $b(u) \in BV_t(Q)$  y además  $u \in C([0, T], L^1(\Omega))$ . Para probar que  $u$  verifica las identidades (3.28) y (3.29) se procede como en el Teorema 4.1 salvo que ahora el paso

$$\beta_n(\hat{u}) \text{ converge a } \alpha(t, x) \in \beta(u) \quad \text{en } L^1$$

es de una naturaleza más técnica aunque es bien conocido en la literatura (véase p.e. Friedman [Fr82, página 25], Barbu [Ba84, página 137] o Neittaanmaki-Tiba [NTi, página 67]). ■

**Observación 4.4** Para el problema multívoco, también se obtienen los resultados análogos al Corolario 4.1 y Corolario 4.2 obtenidos para el problema (1.1), (1.2) y (1.3).

# Bibliografía

- [AS69] AHMED, N., SUNADA, D.K., Nonlinear flow in porous media, *J. Hydraulics Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, 95, 1969, pp. 1847-1857.
- [AL83] ALT, H.W., LUCKHAUS, S., Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations, *Math. Z.* 183 1983, pp. 311-341.
- [Apos88] APOSTOL, T.M., *Análisis Matemático*. Edit. Reverté, Segunda edición 1988.
- [A69] ARONSON, D.G., Regularity properties of flows through porous media. *SIAM J. Appl. Math.* 17 (1969), pp. 461-467.
- [B77] BAMBERGER, A., Etude d'une équation doublement non linéaire, *J. Funct. Anal.* 24, (1977), pp. 148-155.
- [B81] BENILAN, PH., Evolution equations and accretive operators. Lecture Notes, Univ. of Kentucky, 1981.
- [BG93a] BENILAN, PH., GARIEPY, R., Strong solutions in  $L^1$  of degenerate parabolic equations. Aparecerá en *J. Diff. Equ.*
- [BT94a] BENILAN, PH., TOURÉ, H. Sur l'équation generale  $u_t = a(\cdot, u, \varphi(\cdot, u)_x)_x + v$  dans  $L^1$ : I. Etude du problème stationnaire. Aparecerá en *Evolution Equation*, G. Ferreyra eds, (1994).
- [Ba84] BARBU, V. *Optimal control of variational inequalities*, Pitman 1984.
- [Be72] BEAR, J, *Dynamics of fluids in porous media*, Elsevier, New York, 1972.
- [BDS84] BERMUDEZ, A., DURANY, J., SAGUEZ, C., An existence theorem for an implicit nonlinear evolution equation, *Collectanea Mathematica*, Vol. 35, 1984, pp. 19-34.
- [BT94b] BENILAN, PH., TOURÉ, H. Sur l'équation generale  $u_t = a(\cdot, u, \varphi(\cdot, u)_x)_x + v$  dans  $L^1$ : II. Le problème d'évolution. Aparecerá en *Evolution Equation*, G. Ferreyra eds, (1994).

- [BV93a] BETBEDER, J.B., VALLET, G., La question de l'unicité pour une classe de problèmes d'évolution non linéaires intégré-différentiels. *C.R. Acad. Paris*, t. 317, Série I, p. 319–322, 1993.
- [BPT93] BOCCARDO, L.; PADIAL, J.F. y TELLO, L. *Ecuaciones elípticas para el  $p$ -Laplaciano en  $L^1$  o en el espacio de medidas acotadas*. Publicaciones del Dpto. Matemática Aplicada, U.C.M. Marzo
- [Br73] BREZIS, H., *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Mathematics Studies 5. North-Holland/American Elsevier 1973.
- [C86] CARRILLO, J. Unicité des solutions du type Kruskov pour des problèmes elliptiques avec des termes de transport non linéaires. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 303, Série I, No. 5, (1986) pp. 189–192.
- [D95] DÍAZ, J.I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*. Volume I. Elliptic equations. Pitman Research Notes 106. London 1985.
- [DFS95] DÍAZ, J.I., FOWLER, A Y SHIAMI, E. Trabajo en elaboración.
- [DK87] DÍAZ, J.I., KERSNER, R., On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation, *J. Diff. Eqs.* **69** (1987), pp. 368–403.
- [DL89] DÍAZ, J.I. y LIÑÁN, A., Tiempo de descarga en oleoductos o gaseoductos largos: Modelización y estudio de una ecuación parabólica doblemente no lineal. *Actas de la Reunión Matemática en Honor a A. Dou*. Edts. J.I. Díaz y J.M. Vegas, Univ. Complutense (1989), pp. 95–120.
- [DP93] DÍAZ, J.I. y PADIAL, J.F., Soluciones en el espacio BV de un problema parabólico no lineal asociado a flujos turbulentos. Aparecerá en *Actas del XIII C.E.D.Y.A.*
- [DT94] DÍAZ, J.I., DE THELIN, F. On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows. *SIAM J. of Math. Anal.* Vol. 25, No. 4, pp. 1085–1111, July 1994.
- [EV86] ESTEBAN, J.R., VÁZQUEZ, J.L, On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media. *Nonlinear Anal. T. M. and A.* **10** (1986), pp. 1303–1325.
- [EV88] ESTEBAN, J.R., VÁZQUEZ, J.L, Homogeneous Diffusion in  $\mathbb{R}$  with Power-Like Nonlinear Diffusivity, *Arch. Rat. Anal.* **103** (1988), pp. 39–80.
- [E92] EVANS, L.C., GARIEPY, R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Inc. 1992.

- [F69] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1969.
- [Fo92] FOWLER, A.C. Modelling ices sheet dynamics. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, Vol. 63, pp. 29-65, 1992.
- [Fr82] FRIEDMAN, A. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*. John Wiley and Sons, 1982.
- [GM92a] GAGNEUX, G., MADAUNE-TORT, M., Sur la dimension de Hausdorff de l'onde de choc pour des modèles non linéaires de la diffusion-convection. *Publications de l'URA No. 1204, Analyse Num.*, sept. 1992.
- [GM92b] GAGNEUX, G., MADAUNE-TORT, M., Sur la question de l'unicité pour des inéquations des milieux poreux. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 314, Série I, p. 605-608, 1992.
- [GM94] GAGNEUX, G., MADAUNE-TORT, M., Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion-convection. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t318, Série I, p. 919-924, 1994.
- [G83] GILDING, B.H., The soil-moisture zone in a physically-based hydrologic model, *Avances in Water Resources* (1983), **6**, pp. 36-43.
- [G89] GILDING, B.H., Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, CL. Sc. **14** (1989) pp. 165-224.
- [Gi84] GIUSTI, E., *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, 1984.
- [HB82] HANNOURA, A.A., BARENDIS, F.B.J., Non Darcy flow: a state of the art. *In flow and transport in porous media*, A verruijt, F.B.J. Barendis eds. 1982, pp. 37-51.
- [H174] HALMOS, P.R., *Measure Theory*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1974.
- [J89] JINGXUE, Y., Some properties of functions in  $BV_x$  and their applications to the uniqueness of solutions for degenerate quasilinear parabolic equations. *Northeastern Math. J.* **5** (4) 1989, pp. 395-422.
- [J90a] JINGXUE, Y., On a class of quasilinear parabolic equations of second order with double-degeneracy. *J. Partial Diff. Equ.* Vol 3, No. 4 (1990), pp. 49-64.
- [J90b] JINGXUE, Y., On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equations. *Commun. in Part. Diff. Equ.*, 15(12), 1990, pp. 1671-1683.

- [J92a] JINGXUE, Y., Solutions with compact support for nonlinear diffusion equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* Vol. **19**, No. 4, 1992, pp. 309-321.
- [J92b] JINGXUE, Y., A note on the uniqueness for double degenerate nonlinear parabolic equations. *J. Partial Differential Equations* Vol **5**, No. 2 (1992), pp. 94-96.
- [K87] KALASHNIKOV, A.S., Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations. *Math. Surveys*, **42**, 2 (1987), pp. 169-222.
- [LP85] LANGLAIS, M., PHILLIPS, D., Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations, *Nonlinear Analysis T.M.A.* **9** (1985), pp. 321-333.
- [LSU68] LADYZENSKAJA, O.A., SOLONNIKOV, V.A., URALCEVA, N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Translations of the American Mathematical Society, 1968.
- [Le45] LEIBENSON, L.S., General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium, em *Izv. Akad. Navk., SSSR, Geography and Geophysics* **9** (1945), pp. 7-10 (version en ruso).
- [Li9] LIONS, J.L., *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, París (1969).
- [M86] MATTILA, P. *Lecture Notes on Geometric Measure Theory*, Matemáticas, Universidad de Extremadura. 1986.
- [Mu71] MUNROE, M.E., *Measure and Integration*, Addison-Wesley Publishing Company, *Second Edition* 1971.
- [NTi] NEITTAAMAKI, P., TIBA, D. *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems*. Marcel Dekker 1994.
- [R] RUDIN, W., *Análisis Real y Complejo*, traducción de la obra *Real and Complex Analysis*. Tercera Edición, ed. MacGraw-Hill Tercera Edición 1987.
- [S87] SIMON, S., Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Annali Mat. Pura et Appl.* **CXLVI**, 65-96, 1987.
- [V67] VOL'PERT, A. I., The spaces BV and quasilinear equations. *Mat. Sbornik*, Tom. 73(115) (1967), No. 2.
- [VHu69] VOL'PERT, A.I. and HUDJAEV, S.I., Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations. *Mat Sbornik* Tom. 78 (120) (1969), No. 3.

- [VHu85] VOL'PERT, A.I. and HUDJAEV, S.I., *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*. Martinus Nijhoff Publishers 1985.
- [Vo69] VOLKER, R.E., Nonlinear flow in porous media by finite elements, *J. Hydraulics Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Eng.*, 95, 1969, pp. 2093-2114.
- [ZR66] ZELDOVICH, Y.B., RAIZER, Y. P., *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena*, Academic Press, 1966.