Apuntes de tratamiento de datos
Laboratorio de Física I *

J.L. Contreras

1. Origen y enfoque

Estos apuntes se han desarrollado para la asignatura *Laboratorio de Física I (LFI)* , que forma parte del grado en Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid. Se imparte en el segundo cuatrimestre del primer curso. En el cuatrimestre anterior es obligatorio cursar la asignatura *Laboratorio de Computación* y en paralelo se cursan dos asignaturas de *Fundamentos de Física*. Esta estructura permite a la asignatura de LFI centrarse en el trabajo de laboratorio, los aspectos esenciales del tratamiento de datos y la comunicación de los resultados obtenidos.

Por otra parte en nuestro grado existen asignaturas específicas constituidas esencialmente por prácticas de laboratorio en los tres primeros cursos. La parte básica de tratamiento de datos aplicada al laboratorio se imparte en la asignatura del primer curso, completándose minimamente en los dos siguientes. Existe una asignatura de introducción al análisis de datos en tercer curso, pero al no ser obligatoria no la cursan todos los estudiantes. Sin embargo, LFI cuenta con pocas horas de docencia teórica, distribuidas a lo largo del curso. Por ello optamos por presentar rápidamente todo el material necesario para comenzar a trabajar en el laboratorio y luego a lo largo del curso justificar en la medida del tiempo disponible las bases estadísticas que lo sustentan. Estas notas cubren sólo el primero de estos dos objetivos.

A lo largo de los años hemos comprobado que el mismo enfoque que hemos usado puede ser válido para muchas otras especialidades en las que se realizan prácticas de laboratorio. En ellas se necesita una introducción corta y práctica que guie el trabajo de laboratorio. Con este enfoque en las siguientes secciones nos dirigimos directamente al estudiante que pueda encontrar útil este material, sea cual sea su proveniencia.

2. Introducción

Estas notas resumen lo esencial que necesitas saber para tratar los datos que tomes en el Laboratorio de Física. La parte principal trata sobre cómo estimar las incertidumbres de medidas, pero también repasamos lo esencial de otras cosas útiles: unidades, interpolación, presentación

*Versión del 31/01/2018

de resultados, etc. No pretendemos ser rigurosos, sino claros y prácticos. Muchas veces las reglas de estimación, y sobre todo las de presentación de resultados son arbitrarias, damos las que nos parecen más útiles y hemso consensuado en la facultad. Procuraremos avisar cada vez que se presente una situación ambigua, pero puede que alguna se nos pase por alto. En esto, como en todo lo relacionado con el laboratorio, recurre siempre al sentido común.

3. Medidas

Medir una magnitud no es sólo dar un número, sino también sus unidades e incertidumbre y presentarlo correctamente. En cada resultado que demos tenemos que estar seguros de que esos cuatro aspectos quedan claros para el que lo vaya a leer. En la figura 1 se representan los cuatro aspectos.

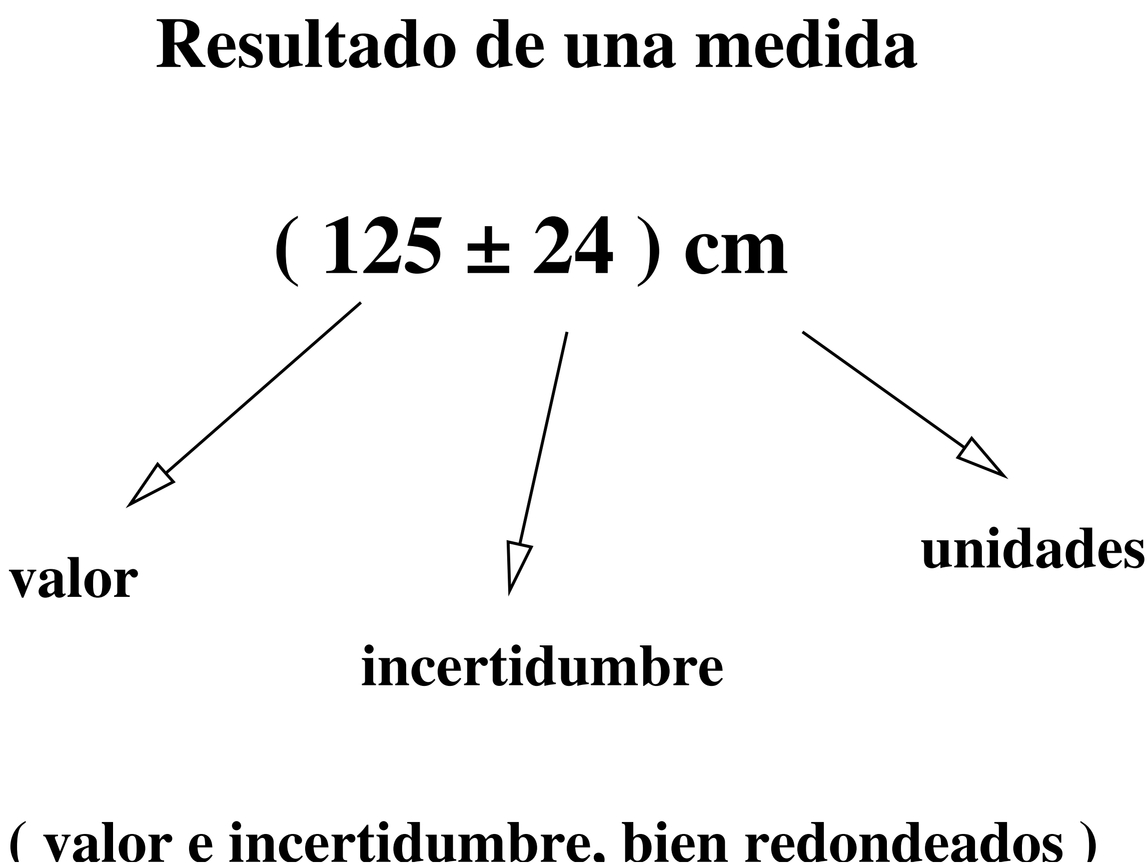

Figura 1: *Cómo se expresan las medidas.*

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de Corriente	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de Sustancia	mol	mol

Cuadro 1: Unidades básicas del Sistema Internacional

4. Unidades

Todas nuestras medidas deben ir expresadas en unidades correctas, normalmente utilizaremos las que componen el sistema internacional (S.I.) de unidades. Las unidades básicas del S.I. están recogidas en la tabla 1.

Dentro del S.I. existen muchas unidades derivadas, como el Newton para la fuerza o el julio para la energía. Es fácil deducir su expresión en función de las unidades fundamentales usando la ecuación de dimensiones de la magnitud en cuestión. Por ejemplo para la unidad de energía, el julio, tenemos:

$$\mathrm{E} <> \mathrm{F} \cdot \mathrm{L} <> \mathrm{M} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{L} <> \mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{L} <> \mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} \cdot \mathrm{L} <> \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$

$$1 \text{ julio} \rightarrow 1 \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Normalmente dos unidades de medida de una misma magnitud como energía, fuerza, etc, de dos sistemas distintos, difieren en un factor multiplicativo. En este caso una regla simple para cambiar de unidades consiste en:

1. Expresar la medida en función de las unidades básicas del sistema de partida.
2. *Multiplicar por uno*, expresado como un cociente de unidades basicas de los dos sistemas elevado a la potencia conveniente.
3. Simplificar el resultado.

Por ejemplo, para hallar la equivalencia de 1 julio en ergios haríamos:

$$1 \text{ julio} = \frac{1 \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1000 \ \mathrm{g}}{1 \ \mathrm{kg}} \cdot \left(\frac{100 \ \mathrm{cm}}{1 \ \mathrm{m}}\right)^2 = 10^7 \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2} = 10^7 \text{ergios.}$$

Hay sin embargo casos en que la diferencia entre dos tipos de unidades no es multiplicativa. Un ejemplo es la relación entre la temperatura en kelvins y en grados Celsius, dada por:

$$\mathrm{T_C} = \mathrm{T_K} - 273,15$$

En este caso tendríamos que, mientras que para transformar las temperaturas hay que sumar o restar una constante, los intervalos de temperatura no cambian y por tanto magnitudes como la capacidad calorífica no varían.

$$\mathrm{c_{H_2O}}(20°\mathrm{C}) = 4182\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\ °\mathrm{C}} = 4182\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$$

5. Error e incertidumbre

Practicamente ningún experimento en el que se mida una cierta magnitud es absolutamente preciso. El resultado de la medida casi nunca coincide exactamente con el valor real de la magnitud. Si queremos utilizar el resultado del experimento para comprobar una teoría, caracterizar un producto que va a ser comercializado, o compararlo con otros resultados experimentales, es necesario estimar la posible desviación del valor medido con respecto al valor real. La teoría de errores estudia cómo estimar esta desviación. En estas notas se explica someramente qué es la incertidumbre de una medida, cómo se calcula y cómo deben expresarse los resultados de las medidas.

En el laboratorio es necesario calcular, en todas las prácticas, la incertidumbre de las medidas y expresar correctamente los resultados. Toda práctica debe incluir las incertidumbres de las medidas y expresar los resultados tal y como se explica en estas notas.

En un procedimiento experimental que nos proporcione el valor de una magnitud X, si el resultado no coincide exactamente con el valor real de dicha magnitud, la diferencia entre el valor real y el valor medido se llama **error de la medida**:

$$\mathrm{Error} = X_{med} - X_{real} \tag{1}$$

El error es siempre desconocido, pero suelen poder estimarse cotas para su valor (positivo o negativo). Estas cotas las denominaremos **incertidumbres de la medida**. Las denotaremos por $\Delta_{+,-}X$. De la definición de error y de incertidumbre deducimos que el valor real de la medida se encuentra en el intervalo:

$$X_{real} \in [X_{med} - \Delta_{-}X, X_{med} + \Delta_{+}X] \tag{2}$$

Muy a menudo ambas cotas son iguales y hablaremos de una única incertidumbre de la medida, ΔX. Gráficamente podemos representar esta situación de la siguiente forma:

X_{med} estaría en el centro del intervalo. Por ello, el resultado de una medida se suele escribir en la forma:

$$X = X_{med} \pm \Delta X \tag{3}$$

A veces es útil comparar el error de una medida con el valor de la misma. Se define para ello la **incertidumbre relativa** de una medida como el cociente:

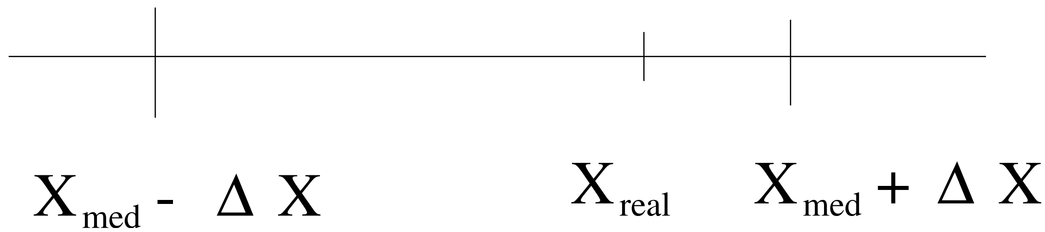

Figura 2: *Valor medido, valor real e incertidumbre*

$$\delta_X = E_r = \frac{\Delta X}{X_{med}} \tag{4}$$

Para distinguirla de la incertidumbre relativa, la incertidumbre ΔX se denomina incertidumbre absoluta. La incertidumbre relativa es útil para comparar la calidad de dos medidas (por ejemplo en los comentarios de las prácticas). Sin embargo, para expresar el resultado de una medida hay que utilizar siempre las incertidumbres absolutas. Obsérvese que la incertidumbre relativa es adimensional (puede también expresarse en tanto por ciento) mientras que la absoluta tiene las mismas unidades que la magnitud medida.

Hemos visto la diferencia entre los conceptos error e incertidumbre. Distinguirlos facilita la comprensión de la teoría de errores. Sin embargo, por comodidad, es muy frecuente utilizar la palabra error para referirse a la incertidumbre de una medida.

6. Cálculo de incertidumbres

La incertidumbre se calcula de forma diferente dependiendo de si el valor de la magnitud se observa directamente en un instrumento de medida (medida directa) o si se obtiene manipulando matemáticamente una o varias medidas directas (medida indirecta).

En una práctica calcularemos primero la incertidumbre de las medidas directas y luego la de las indirectas, que dependen de aquellas.

6.1. Cálculo de la incertidumbre de una medida directa

Recordemos que el error es la discrepancia entre el valor real de una magnitud y el valor medido. En una medida directa esta discrepancia puede deberse a varios tipos de causas:

- Factores ambientales aleatorios cómo pequeñas variaciones de la temperatura, vibraciones u otras $\rightarrow$ **incertidumbre estadística**.
- Precisión del aparato y otros factores no aleatorios que afectan a la precisión de la medida $\rightarrow$ **incertidumbre sistemática de precisión**.

- Causas distintas de las anteriores que degradan la medida → **incertidumbre sistemática** en general . Entre ellas una de las más comunes es el *error de cero*, debido a una incertidumbre en el punto inicial de las escalas.

Daremos reglas generales para estimar las incertidumbres estadísticas y (más discutibles) para la sistemática de precisión; las incertidumbres sistemáticas de otro tipo se estiman normalmente con procedimientos específicos distintos para cada caso.

La incertidumbre debida a la precisión finita del instrumento de medida, incertidumbre sistemática de precisión, normalmente se toma igual a la mitad de la división mínima de su escala, en ocasiones una división completa, (en el caso de balanzas, la pesa de menor valor), y la denotamos por E_s, recordando que proviene de efectos sistemáticos.

Hay casos en donde el procedimiento de medida aumenta la incertidumbre E_s y ésta no puede tomarse igual a la graduación de la escala. Por ejemplo, si se utiliza una regla muy precisa pero el observador es incapaz de distinguir las divisiones más pequeñas de su escala. En este caso, E_s dependería de la división más pequeña que seamos capaces de observar claramente. De este ejemplo comprobamos que hay que entender bien el procedimiento experimental para encontrar el valor correcto de E_s y que no existe ninguna *receta* que nos dé ese valor en todos los casos posibles.

Veamos ahora cómo se puede estimar la incertidumbre debida a factores ambientales aleatorios. Para esta estimación es necesario repetir la medida varias veces en las mismas condiciones. En cada una de estas repeticiones de la medida los factores aleatorios afectarán de forma diferente lo que permite obtener información acerca de su magnitud.

Si repetimos n veces la medida de una magnitud X y denotamos los resultados de la n medidas por $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, entonces la mejor estimación de valor real es la **media aritmética**, es decir:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5}$$

Y la incertidumbre debida a factores aleatorios, que llamaremos E_a por provenir de efectos o fatores aleatorios, viene dada por la siguiente expresión:

$$E_a = t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{6}$$

en donde t_{n-1} es una función denominada t de Student con $n-1$ grados de libertad, y s es la **desviación típica** insesgada de las medidas. Muchas veces s se escribe como σ_{n-1}. Los valores de la t de Student para $n = 3, 5, 10, 15$ y un número muy grande de medidas, bajo ciertas condiciones (nivel de confianza del 95 % en intervalo simétrico) son:

t_2	t_4	t_9	t_{14}	t_∞
4,30	2,78	2,26	2,14	1,96

En la tabla que se adjunta al final de estas notas pueden encontrarse los valores correspondientes a otras situaciones distintas.

La desviación típica viene dada por la fórmula (ver en la sección 8.1 cómo puede obtenerse fácilmente con una calculadora de bolsillo):

$$s = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \tag{7}$$

Intuitivamente vemos que s mide la dispersión de las medidas. Además t_{n-1} toma en cuenta que queremos un nivel de confianza del 95 % y la estadística limitada. El factor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ proviene de que las fluctuaciones de la media son menores que los de las medidas individuales.

Una vez obtenida la incertidumbre E_s, debida a efectos sistemáticos, y E_a, debida a factores aleatorios o ambientales, calculamos la incertidumbre total de la medida con la siguiente fórmula:

$$\Delta X = \sqrt{E_s^2 + E_a^2} \tag{8}$$

Finalmente, la medida directa debe expresarse en la forma (con los redondeos que se explican en la sección siguiente):

$$X = \bar{X} \pm \Delta X \tag{9}$$

En la mayoría de las prácticas del laboratorio se repiten varias veces las medidas para calcular la incertidumbre debida a factores ambientales aleatorios. Sin embargo, hay ocasiones en que no se pueden realizar dichas repeticiones debido a la falta de tiempo o debido a que los aparatos de medida no son suficientemente precisos como para detectar las variaciones debidas a factores ambientales aleatorios. En este último caso, al repetir la medida, siempre se obtendría el mismo resultado y, por tanto, la dispersión sería nula. En cualquiera de los dos casos tomaremos $E_a = 0$ y, por tanto, la incertidumbre ΔX será igual a la precisión E_s del aparato de medida.

6.2. Cálculo de la incertidumbre de una medida indirecta

Una vez obtenida la incertidumbre de las medidas directas, calculamos las de las medidas indirectas. Supongamos una medida indirecta Y que se obtiene a partir de varias medidas directas **independientes** $X_1, X_2, ...$ mediante la expresión matemática:

$$Y = f(X_1, X_2, ...), \tag{10}$$

donde f es una función de varias variables. La incertidumbre de Y viene dada por:

$$(\Delta Y)^2 = \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, ...)}{\partial X_1}\Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, ...)}{\partial X_2}\Delta X_2\right)^2 + \ldots, \tag{11}$$

donde ΔX_1 y $\Delta X_2 \ldots$ son las incertidumbres totales de las medidas directas y la expresion $\frac{\partial f}{\partial X}$ significa *la derivada parcial de la función f respecto a la variable X.*

Casos particulares sencillos

Cambio de escala	$Y = cX$	$\Delta Y = \|c\|\, \Delta X$
Potencias	$Y = cX^k$	$\Delta Y = \left\|\frac{kY}{X}\right\| \Delta X$
Suma	$Y = X_1 + X_2$	$(\Delta Y)^2 = (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2$
Diferencia	$Y = X_1 - X_2$	$(\Delta Y)^2 = (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2$
Producto	$Y = X_1 X_2$	$(\Delta Y)^2 = Y^2 \left(\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2\right)$

7. Otros tipos de medidas

Hay otras formas de obtener el valor de una magnitud a partir de medidas directas:

7.1. Media ponderada

Imaginemos un experimento en el que se realizan n medidas independientes de la misma cantidad en condiciones diferentes y las incertidumbres que dominan son de tipo aleatorio. Si el resultado de cada medida es $Y_i \pm \Delta Y_i$, puede demostrarse que el resultado final y su incertidumbre vienen dados por la fórmula:

$$\bar{Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{(\Delta Y_i)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\Delta Y_i)^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\Delta Y_i)^2}}} \tag{12}$$

Obsérvese que la incertidumbre es la que se obtendría aplicando la fórmula de las derivadas parciales a la expresión de la media.

Es conveniente comprobar siempre que el resultado sea realmente una media (tiene que ser un valor intermedio entre los datos de partida) y que su incertidumbre sea menor que cualquiera de las iniciales (no podemos perder información).

Para poder aplicar esta fórmula es necesario que las medidas sean compatibles entre sí: o sea que sus valores no disten entre sí mucho más de lo que indican sus incertidumbres. De otra forma ambas medidas no pueden ser correctas a la vez.

De forma estricta, la media ponderada sólo puede aplicarse a incertidumbres de origen aleatorio.

7.2. Regresión lineal.

Éste es un caso más complejo pero de gran utilidad en ciencias experimentales. Utilizamos regresiones lineales cuando sabemos, o sospechamos, que la relación entre dos magnitudes X e

Y es lineal, es decir:

$$Y = mX + c, \tag{13}$$

donde m se denomina *pendiente* y c ordenada en el origen. Cuando dos magnitudes se relacionan linealmente, la gráfica de los puntos (X_i,Y_i) es una recta de pendiente m que corta el eje vertical en el punto $(0,c)$. Si obtenemos mediante medidas (directas o indirectas) n pares de valores (X_i,Y_i), con $i = 1, 2, ..., n$, y representamos estos pares de valores en el plano, los puntos no estarán perfectamente alineados (ver figura 2), debido a los errores experimentales.

La regresión lineal, obtenida por el método de mínimos cuadrados, nos permite obtener la recta que más se aproxima a dichos puntos. La pendiente y la ordenada en el origen de dicha recta vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$m = \frac{E}{D} \qquad\qquad c = \bar{Y} - m\bar{X} \tag{14}$$

en donde

$$E = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - n\bar{X}\bar{Y} \qquad\qquad D = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\bar{X}^2 \tag{15}$$

siendo

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{16}$$

De igual forma que hablamos de *regresión lineal* podemos considerar otros tipos de regresión en los que las variables X e Y estén relacionados de formas más complejas. En cualquier regresión es necesario realizar la gráfica con los puntos experimentales y la función ajustada. De este modo es fácil comprobar si la regresión está bien hecha, ya que la función ajustada debe pasar *cerca* de los puntos experimentales.

Para deducir las fórmulas anteriores hemos hecho dos suposiciones: que las incertidumbres en las coordenadas X_i son despreciables y que las de las coordenadas Y_i son todas iguales. En estas condiciones las incertidumbres de m y c dependen de la de los Y_i . Si no la conocemos *a priori* podemos estimar la incertidumbre en los Y_i a partir de su dispersión con respecto a la recta s_{res}, de forma análoga a como calculamos la incertidumbre aleatoria en una cantidad mediante su dispersión con respecto a la media. La recta juega aquí el papel de la media:

$$s_{res}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - mX_i - c)^2 \tag{17}$$

Las dispersiones de m y c vienen entonces dadas por:

$$s_m^2 = \frac{s_{res}^2}{D} \qquad\qquad s_c^2 = s_{res}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{D}\right) \tag{18}$$

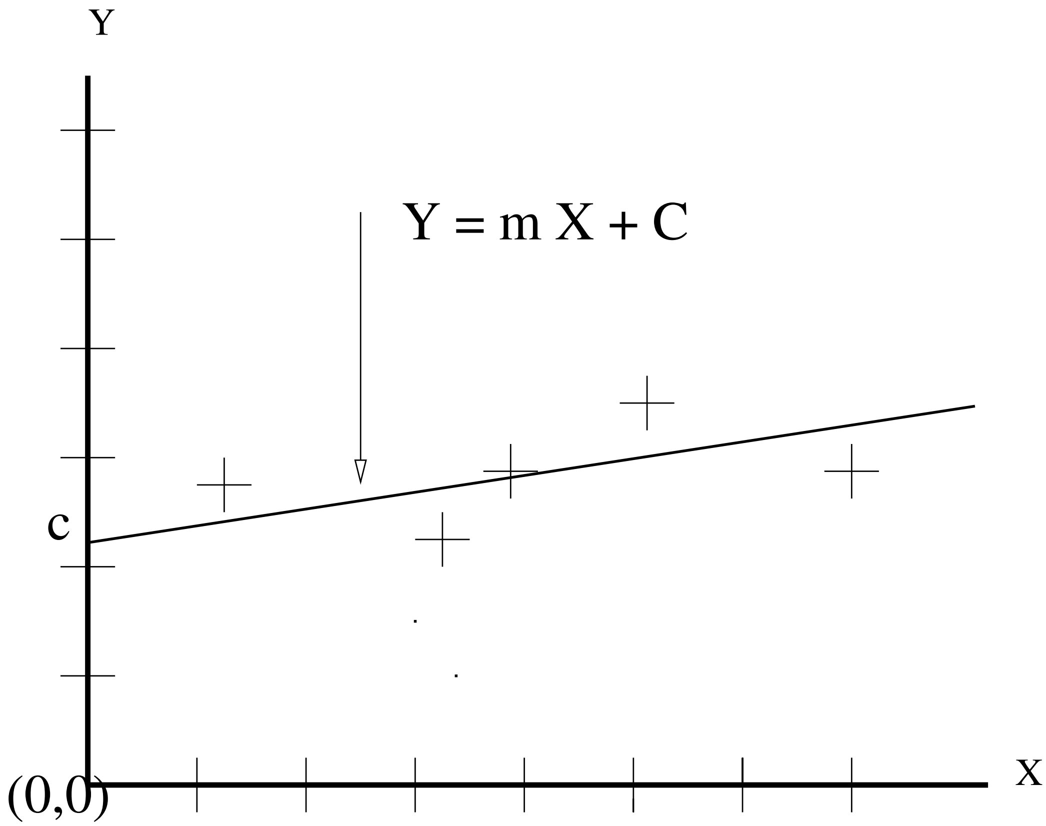

Figura 3: *Representación esquemática de un ajuste lineal*

Para calcular la incertidumbre en la pendiente m y ordenada en el origen, c, hay que tener en cuenta también el factor corrector de la distribución de Student, que proporciona el tamaño del intervalo de confianza deseado. Su interpretación es parecida al caso de la media, pero el número de grados de libertad es ahora *n-2*, proveniente de que ajustamos n puntos a una expresión con 2 parámetros libres: m y c.

$$\Delta m = t_{n-2} \cdot s_m \qquad\qquad \Delta c = t_{n-2} \cdot s_c \tag{19}$$

Las expresiones anteriores se pueden generalizar al caso en que conocemos las incertidumbres de los Y_i y son diferentes entre sí, y al caso general en que consideramos las incertidumbres de ambas coordenadas. Hay que tener en cuenta también que las incertidumbres de la pendiente m y de la ordenada en el origen c no son independientes, por lo que no se pueden usar dentro de la misma expresión con las fórmulas de propagación de incertidumbres que hemos visto.

En la discusión anterior no nos hemos planteado la cuestión crucial de si en verdad los puntos experimentales siguen la recta de regresión o no. Una medida de la bondad del ajuste viene dada por el coeficiente de correlación r, definido como:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}} \tag{20}$$

Valores de r cercanos a 1 indican datos muy correlacionados, que, en general, siguen muy bien la suposición de una relación lineal, mientras que valores de r próximos a cero indican datos para los que la hipótesis no se cumple. Si se quiere ser más preciso se puede usar:

$$b = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{21}$$

Para datos no correlacionados linealmente b vale 0, mientras que valores de b grandes indicarán buenas correlaciones. Tomaremos como prueba de buena correlación que $b > t_{n-2}$, que corresponde a una probabilidad del 95 % de que exista correlación. Para un tratamiento más extenso y detallado de estos temas te remitimos a la asignatura de *Estadística*.

Por último un detalle sobre cómo expresar r. Dado que es normal, dentro de las prácticas del laboratorio, obtener valores de r muy cercanos a 1, procuraremos dar el valor de r hasta la *primera cifra significativa distinta de 9*. Así por ejemplo $r = 0,99723$ se expresará como $r = 0,997$ y $r = 0,9265$ como $r = 0,93$.

8. Interpolación lineal

En muchas ocasiones tendremos que trabajar con información en forma de tablas de valores. Normalmente representarán los valores de algunas variables dependientes dados los de una variable independiente. Se pueden ver como muestras de una función continua.

En estos casos es habitual que necesitemos los valores de la variable dependiente y, para un valor de la variable independiente x, que aunque esté comprendido entre los de la tabla, no coincide exactamente con ninguno de ellos. La forma más sencilla de hacerlo es realizar una interpolación lineal, en la que aproximamos la función $y(x)$ entre dos puntos consecutivos por una recta. La situación se representa en la figura 4.

Si tenemos así por ejemplo que los pares de puntos consecutivos son: (x_n,y_n) y (x_{n+1},y_{n+1}), y buscamos unirlos por una recta

$$(y - y_0) = a \cdot (x - x_0) \tag{22}$$

Podemos aplicar la función a los dos puntos consecutivos y despejando el valor de a tenemos:

$$a = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \tag{23}$$

ésta es la expresión de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos. Entonces, para un punto intermedio x_{int}, entre x_n y x_{n+1}

$$y_{int} = y_n + a \cdot (x_{int} - x_n) \qquad \Delta y_{int} = |a| \cdot \Delta x_{int} \tag{24}$$

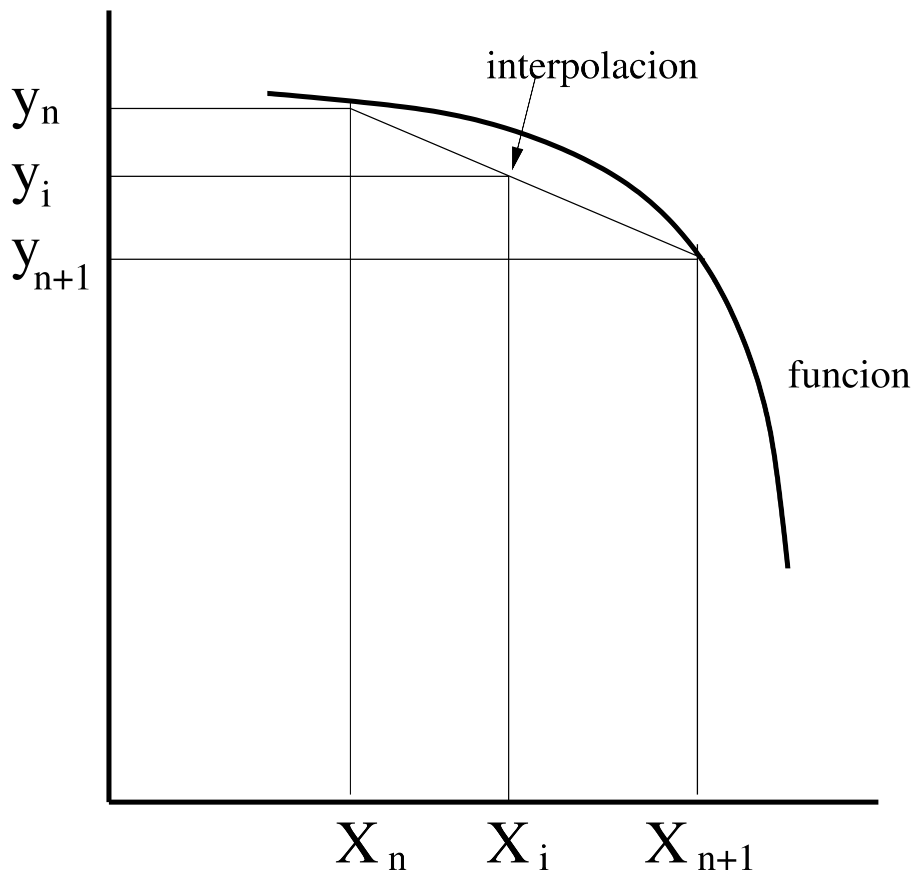

Figura 4: *Interpolación lineal.*

para calcular Δy_{int} hemos despreciado la incertidumbre en los coeficientes de la tabla, lo que no siempre es válido.

9. Presentación de resultados

Cuando calculamos la incertidumbre de una medida, a menudo obtenemos un número con muchas cifras. Por ejemplo: $\Delta X = 0,32675$. Si el valor de la medida es $X_{med} = 5,43636$, escribiríamos:

$$X = 5,43636 \pm 0,32675 \qquad \text{(\textbf{INCORRECTA})}$$

Esta forma de escribir el resultado de la medida es incorrecta por dos razones. Por una parte la precisión con la que estimamos la incertidumbre depende del número de medidas n, y no suele ser buena, de modo que generalmente sólo la primera o dos primeras cifras de la incertidumbre son fiables. Por otra, no conocemos el valor de la medida con tanta precisión como estamos dando a entender, ya que las últimas cifras tampoco son fiables, al representar una variación mucho menor que la incertidumbre. Por eso, a fin de no confundir al que lea los resultados, ni escribir números de muchas cifras innecesarias, redondearemos siempre los resultados finales.

Para explicar los criterios de redondeo de los resultados finales y las incertidumbres necesitamos definir lo que son las cifras significativas. Llamamos cifras significativas a las que ofrecen información sobre el valor real de una medida, podríamos decir que sobre su precisión. De forma práctica, en un número cualquiera, consideramos cifras significativas todas, salvo los ceros de la izquierda del número, los que se colocan para posicionar la coma decimal. Cuando los ceros están a la derecha del número, sí se consideran cifras significativas. Veamos algunos ejemplos:

$1,45$	3 cifras, 3 significativas	$1,4$	2 cifras, 2 significativas
$14,5$	3 cifras, 3 significativas	$1,450$	4 cifras, 4 significativas
$0,0145$	5 cifras, 3 significativas	$0,1450$	5 cifras, 4 significativas

9.1. Criterios de redondeo

Para decidir como redondear el resultado de una medida y su incertidumbre aplicaremos el siguiente convenio:

1. Si la incertidumbre de que se parte contiene una sola cifra significativa, se dejará tal y como se obtenga, con una sola cifra significativa.

2. Las incertidumbres con dos o más cifras significativas se redondean hasta dejar sólo 2 cifra significativas

3. El resultado se redondea hasta dejar el mismo número de cifras **decimales** que tenga la incertidumbre.

El primer caso es frecuente en medidas directas cuya incertidumbre deriva unicamente de problemas de precisión.

Tenemos que comentar que pueden existir casos particulares que aconsejen cambiar estos criterios, si se te presenta uno coméntalo con tu profesor y/o discútelo adecuadamente en tu trabajo escrito. En cualquier caso es extremadamente raro que sea necesario escribir una incertidumbre con más de dos cifra significativas.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} X = 5,43636 \pm 0,32675 & \rightarrow & X = 5,44 \pm 0,33 \\ X = 5,99 \pm 0,68 & \rightarrow & X = 5,99 \pm 0,68 \\ X = 0,05134 \pm 0,00999 & \rightarrow & X = (5,1 \pm 1,0)10^{-2} \end{array}$$

9.2. Reglas para expresar los resultados de las medidas

Los criterios anteriores se completan con unas reglas prácticas para decidir la presentación final de los resultados:

1. Se recomienda utilizar potencias de diez para evitar que haya cifras no significativas (ceros en la parte entera de las cantidades), como en el ejemplo:

$$X = 8347567 \pm 78895 \quad \rightarrow \quad X = (8,348 \pm 0,079)10^6$$

2. Si se utilizan potencias de diez, la misma potencia debe afectar al valor y a su incertidumbre. El valor y la incertidumbre se encierran entre paréntesis y se multiplican por la correspondiente potencia de diez.

3. Hay que recordar que puede haber cifras significativas iguales a cero. Así, en la presentación de un resultado experimental no es lo mismo $1{,}46 \pm 0{,}08$ que $1{,}460 \pm 0{,}080$, ya que en el último caso los ceros del resultado y de la incertidumbre son cifras significativas. En el segundo caso nuestra medida es más precisa que en el primero. Podemos resumirlo recordando que *los ceros a la derecha cuentan*

4. Se utilizarán incertidumbres absolutas para expresar los resultados finales del experimento e incertidumbres relativas, si son necesarias, para los comentarios.

5. Para las incertidumbres relativas tomaremos, por convenio siempre dos cifras significativas.

Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} X = 45060 \pm 345,6 & \rightarrow & X = (45,06 \pm 0,35)10^3 \\ X = 0,34573 \pm 0,00137 & \rightarrow & X = 0,3457 \pm 0,0014 \quad X = (3,457 \pm 0,014)10^{-1}. \end{array}$$

Precauciones

Las reglas anteriores se aplican a los resultados finales, si las aplicáramos indiscriminadamente a todos los resultados intermedios de un experimento, la acumulación de redondeos podría degradar la precisión del valor final. Para evitar este efecto existen dos soluciones: guardar más decimales en los resultados intermedios (normalmente basta con guardar una o a lo sumo dos cifras significativas más de las que darían las reglas de redondeo), o intentar expresar siempre el resultado final en función de las medidas directas evitando los resultados intermedios. Recomendamos utilizar el segundo procedimiento siempre que sea posible.

Finalmente, hay que resaltar que las reglas enunciadas anteriormente son solamente un convenio, existen otros con reglas ligeramente distintas. En todos ellos siempre pueden presentarse casos conflictivos en los que habrá que recurrir al sentido común. Un caso particular que puede resultar confuso y se presenta con cierta frecuencia es el de obtener resultados con menos decimales que la incertidumbre. Por ejemplo

$$X = 8 \pm 0{,}0653 \quad \rightarrow \quad X = 8{,}000 \pm 0{,}065$$

Se cumplen las reglas del redondeo, pero hemos tenido que *inventarnos* cifras al añadir ceros significativos que no estaban en el número original. La respuesta en estos casos suele ser que se ha cometido un error en los cálculos, es prácticamente imposible que se nos presente un caso así. El problema suele proceder de haber redondeado el resultado antes que la incertidumbre, es siempre aconsejable proceder a la inversa: redondear primero la incertidumbre y luego el resultado.

10. Recomendaciones prácticas

Las siguientes recomendaciones ayudarán a ahorrar mucho tiempo y operaciones en el cálculo de incertidumbres:

1. Estimar las cifras significativas de cada magnitud y realizar y escribir las operaciones sólo con dos cifras más.

2. Comparar siempre los cálculos de promedios y errores con estimaciones hechas *a ojo* . Por ejemplo, el valor medio de { 5,5 7,2 6,5 5,8 } tiene que estar en torno a 6 y, en cualquier caso, no puede ser nunca menor que 5,5 ni mayor que 7,2. Para estimar las incertidumbres es útil saber que $\sqrt{X^2+Y^2}$ es siempre menor que $\|X\|+\|Y\|$ y mayor que el máximo de $\|X\|$ e $\|Y\|$. Cuando X es mucho mayor que Y, la raíz es igual al valor absoluto de X. Por tanto, si tenemos una magnitud Z que es suma de otras dos con incertidumbres $0,001$ y $0,1$, la incertidumbre de Z ($\sqrt{0,001^2+0,1^2}$) será aproximadamente $0,1$

3. En el caso de productos y cocientes, estimar la incertidumbre de magnitudes indirectas utilizando errores relativos. La fórmula para cocientes y productos se puede escribir (si $Y = X_1X_2$) en términos de los errores relativos de Y, X_1 y X_2:

$$\delta_Y^2 = \delta_{X_1}^2 + \delta_{X_2}^2 \tag{25}$$

   Podemos entonces aplicar las indicaciones del punto 2. Por ejemplo, si Y=X_1X_2, con $X_1 = 20,0$, $X_2 = 200,0$ y $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0,1$, entonces δ_{X_1} es 10 veces mayor que δ_{X_2} . Por tanto, el error dominante será el de X_1 y δ_Y será igual a δ_{X_1} , es decir $\delta_Y = 0,05$ y, por tanto, $Y \simeq (4,000 \pm 0,020)10^3$.

10.1. Utilización del modo estadístico de las calculadoras

La mayor parte de las calculadoras de bolsillo científicas incluyen funciones estadísticas elementales que son muy útiles para el cálculo de incertidumbres y de regresiones lineales. Para utilizar estas funciones es necesario seleccionar el modo estadístico, que se suele llamar SD. Una vez seleccionado, se introduce una serie de datos X_i tecleando cada número y pulsando después la tecla DATA. Puede entonces calcularse su media , su dispersión s_{n-1} y el sumatorio de los cuadrados . La notación en las calculadoras suele ser la misma que la utilizada en estas notas. Estas funciones suelen estar en las teclas de los dígitos y se obtienen pulsando una tecla Shift, Alt, u otra similar.

Todas estas indicaciones dependen del modelo de calculadora, aunque la mayoría de ellas utilizan la misma notación para el modo estadístico y para las funciones mencionadas.

Valores de t_m

En la siguiente tabla encontrarás algunos valores más del factor t_m para distintos valores del número de grados de libertad, m , y diferentes porcentajes (niveles de confianza) del intervalo de confianza. Por ejemplo, los valores de la segunda columna corresponden a un intervalo de confianza del 95 %.

	Nivel de confianza		
m	90 %	95 %	99 %
1	6,3138	12,706	63,657
2	2,9200	4,3027	9,9248
3	2,3534	3,1825	5,8409
4	2,1318	2,7764	4,6041
5	2,0150	2,5706	4,0321
6	1,9432	2,4469	3,7074
7	1,8946	2,3646	3,4995
8	1,8595	2,3060	3,3554
9	1,8331	2,2622	3,2498
10	1,8125	2,2281	3,1693
11	1,7959	2,2010	3,1058
12	1,7823	2,1788	3,0545
13	1,7709	2,1604	3,0123
14	1,7613	2,1448	2,9768
15	1,7530	2,1315	2,9467
20	1,7247	2,0860	2,8453
40	1,6839	2,0211	2,7045
60	1,6707	2,0003	2,6603
∞	1,6449	1,9600	2,5788

Cuadro 2: Algunos valores del factor t_n

Referencias

[1] C. Sánchez del Río, Análisis de Errores. Eudema, Madrid 1989.

[2] G. L. Squires, Practical Physics. Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[3] Barry N. Taylor and Chris E. Kuyatt, Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results. NIST Technical Note 1297 (1994 edition). (NIST: National Institute of Standards and Technology). http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines/

[4] Apuntes de Estadística de la asignatura.