

FT UCM 1979

UCM 1979



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5320654906

512.76/.77(0492)

U N I V E R S I D A D C O M P L U T E N S E

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Algebra y Fundamentos

"SOBRE LA ESTRUCTURA DE LAS SINGULARIDADES DE LAS
SUPERFICIES ALGEBROIDES SUMERGIDAS"



R.62093

Memoria presentada para optar al
Grado de Doctor en Ciencias Mate
máticas por IGNACIO LUENGO VE-
LASCO.

Madrid, Septiembre 1979

INDICE

INTRODUCCION	i
REFERENCIAS	xviii
TERMINOLOGIA	xx
 <u>CAPITULO I.- VARIEDADES ALGEBROIDES. EQUISINGULARIDAD</u>	
1. Preliminares y notaciones	1
2. c -Anillos. Equisingularidad	13
3. Superficies cuasiordinarias	27
 <u>CAPITULO II.- EL ARBOL DE UNA SUPERFICIE.</u>	
1. Arboles pesados. El árbol de una curva plana ...	39
2. Caracterización de la equisingularidad por árboles	50
3. Construcción del árbol total de una superficie .	61
 <u>CAPITULO III.- REDUCCION DEL ARBOL DE UNA SUPERFICIE.</u>	
1. Eliminación de subvariedades permitidas mediante transformaciones monoïdales	76
2. Obtención de una superficie cuasiordinaria	88
3. Finitud del árbol $A^*(S)$	96
 <u>CAPITULO IV.- ARBOLES Y EXPONENTES CARACTERISTICOS DE SUPERFICIES CUASIORDINARIAS IRREDUCIBLES.</u>	
1. Construcción de $A^*(S)$ a partir de los exponentes característicos de S	107
2. Obtención de los exponentes característicos de S a partir de $A^*(S)$	120
REFERENCIAS	141

INTRODUCCION

El objetivo de esta memoria es estudiar la cantidad de información sobre la singularidad de una superficie algebroide sumergida, contenida en el proceso de resolución puntual de dicha superficie.

Zariski probó en 1938 en su memoria [11], que para singularidades irreducibles de curvas planas sobre el cuerpo de los complejos el proceso de resolución equivale al conocimiento del tipo topológico y de los exponentes del desarrollo en serie de la singularidad. Más recientemente, Hironaka en un curso dado en Warwick en 1971, [2], sobre resolución de singularidades de espacios analíticos complejos mediante explosiones daba a entender que estas últimas eran útiles no sólo para resolver las singularidades sino también para tratar de comprender la estructura de estas. Indicaba:

"To a disciple of this blessed subject, the singularities are something that grow and foliate through the transformations and modifications of the mother nature and whit which we are gifted to cultivate with love and care. They will never eliminated and certainly not improved by repetition after repetition of savage and reckeless bombardment".

Dentro de esta línea los resultados que hemos obtenido para superficies algebroides sumergidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0 se pueden resumir en:

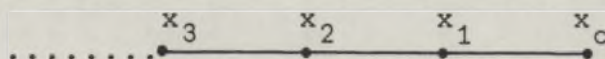
1) Obtención de un árbol que represente todos los procesos de resolución puntual de la superficie y determinación a partir de dicho árbol, de un subárbol finito que incluya todos los procesos significativos de resolución puntual de la superficie.

2) Comprobación de que dicho subárbol contiene suficiente información sobre la singularidad, demostrando que cuando existen exponentes característicos (superficies cuasiordinarias irreducibles) y por lo tanto en criterio "natural" de equisingularidad, el conocimiento de dichos exponentes equivale al del árbol.

Como hemos indicado al principio Zariski introdujo la equivalencia de los procesos de resolución, como criterio para la clasificación de las singularidades irreducibles de curvas planas. Para este tipo de singularidades, el problema de la clasificación (equisingularidad puntual), está totalmente resuelto, existiendo una serie de criterios que permiten determinar si dos curvas son equisingulares o no. Los principales son:

- a) Igualdad del semigrupo de valores
- b) Igualdad del tipo topológico
- c) Igualdad de los exponentes característicos del desarrollo de Puiseux
- d) Igualdad de los procesos de resolución por transformaciones cuadráticas

Siempre en este caso el proceso de resolución del punto singular se puede representar mediante un grafo lineal,



donde x_0 es el punto singular de la curva y x_1, x_2, \dots , son los puntos infinitamente próximos a x_0 . A cada vértice de este grafo se le asocia la multiplicidad del punto singular correspondiente. Lejeune y Teissier en [5] llaman a esta representación "bambú" de la singularidad. En nuestra terminología este grafo es el árbol de la singularidad. La igualdad de árboles resulta pues un criterio de equisingularidad equivalente a los anteriores. En el caso de singularidades reducibles, la estructura de la singularidad ha sido satisfactoriamente determinada como consecuencia de los trabajos más recientes de Zariski expuestos en [12]. Para este tipo de singularidades los árboles que representan el proceso de resolución no son lineales y su igualdad es una relación más débil que la equisingularidad. (Véase el ejemplo 1.18 del cap. II).

Zariski inició también el estudio de las singularidades en dimensión mayor que 1, introduciendo el concepto de equisin-

gularidad "a lo largo de". Una hipersuperficie algebroide V es equisingular a lo largo de una subvariedad permitida y de co dimensión 1 W , si existe una superficie lisa del espacio ambiente H , tal que $V \cap H$ es una curva que es equisingular a la curva sección genérica de V transversal a W . Cuando esto ocurre se dice que V es una singularidad del tipo dimensión 1. La estructura de estas singularidades esta completamente determinada por la sección genérica de V transversal a W . De hecho si el cuerpo \mathbb{C} , desde el punto de vista topológico V es localmente el producto de una sección plana por una variedad li sa). Esta teoría está desarrollada en [13], mediante la utili zación sistemática de discriminantes de proyecciones razón por la cual su extensión al caso de característica positiva es extraordinariamente compleja.

Centrandose en el caso de superficies, las singularidades de tipo dimensional 1, son el caso más sencillo de singularidad de superficies algebroides. El problema del estudio de la estructura y clasificación algebroide de singularidades más generales de superficie dista mucho aún de esta resuelto. Indicaremos la situación actual del problema respecto de los criterios que para curvas hemos enunciado antes:

a) Como el anillo de una superficie algebroide en su pun to es de dimensión 2, no tiene sentido utilizar el semigrupo de valores.

b) Para superficies sobre \mathbb{C} , la conexión entre la estructura de la singularidad y su tipo topológico no es tan estre cha. Ni siquiera se sabe si la igualdad del tipo topológico implica la igualdad de multiplicidades (Conjetura de Zariski. Véase a este respecto [15]).

c) Las singularidades de superficies no tienen en general desarrollo en serie. Este desarrollo existe para las superficies cuasiordinarias, que son aquellas que admiten una proyec ción finita sobre un plano cuyo discriminante (imagen del lugar de ramificación) es una curva lisa ó bien dos curvas lisas

transversales. Estas singularidades son en un cierto sentido el tipo más simple después de las singularidades de tipo dimensional 1. Han sido muy estudiadas no solo por su simplicidad, sino porque juegan un papel fundamental en la resolución de superficies sumergidas, (véase [7]). Lipman en su tesis ([6]) obtiene para singularidades cuasiordinarias irreducibles unos pares de exponentes del desarrollo en serie, que llama pares característicos, y demuestra que la igualdad de estos pares es un criterio satisfactorio de equivalencia de singularidades cuasiordinarias. De hecho obtiene un proceso canónico de resolución de la singularidad y demuestra que el conocimiento de este proceso es equivalente al de los pares característicos.

d) El estudio del proceso de resolución puntual de una superficie algebroide S consiste en analizar las sucesiones del tipo:

$$(1) \quad \dots \longrightarrow S_n \xrightarrow{T_n} S_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{T_1} S_0 = S$$

donde T_i es una transformación cuadrática formal ó una transformación monoïdal formal con centro una curva permitida de S_{i-1} , para cada $i \geq 1$.

Dentro de este estudio C.Romo demuestra en [9] que siempre existe una sucesión del tipo (1) tal que las T_i son transformaciones y $m(S_i) = 1$ para algún i . Lo hace para hipersuperficies sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cualquiera. T.Sánchez estudia en [10] la estructura de S en relación con las sucesiones de la forma (1) estacionarias, es decir que $m(S_i) = m(S)$ para todo i . Otro resultado en esta dirección es el ya indicado en (c) de Lipman. La resolución "canónica" a la que nos referimos en (c) es una sucesión del tipo (1) cuya estructura se determina a partir de los pares característicos de la singularidad cuasiordinaria. Por último indiquemos que R.Piedra en [8], obtiene un teorema de finitud del tipo del ya citado de C.Romo donde las T_i son transformaciones monoïdales ó cuadráticas con unas ciertas restricciones y la superficie de partida S está definida sobre un cuerpo de característica cualquiera y tiene una singularidad aislada.

Nuestro primer objetivo es el estudio simultáneo de todas las sucesiones del tipo (1), para ello hemos optado por representar todos los procesos de resolución en un árbol en el sentido de la teoría de grafos (véase [1], cap. 3), de tal forma que a cada sucesión del tipo (1) le corresponda una rama del árbol. De esta manera de la información que contienen estas sucesiones solo nos quedamos con la multiplicidad de las S_i . Como se observará es también de esta forma como se procede para construir el árbol de una curva. No obstante en el caso de superficies hay dos tipos de transformaciones a tener en cuenta, monoidales y cuadráticas y es preciso distinguir en el árbol entre ambas. Esto se consigue dando un peso a cada arista del árbol, lo cual da lugar al concepto de árbol pesado.

Otra diferencia fundamental con el caso de curvas, es que las superficies tienen infinitas transformadas cuadráticas, concretamente estas están en correspondencia biunívoca con los puntos cerrados del divisor excepcional de la superficie S , que es una curva proyectiva \mathbb{D} , entonces para construir un árbol con niveles finitos hay que quedarse solo con un número finito de dichas transformadas cuadráticas. Esto se consigue demostrando que en cada componente irreducible del divisor excepcional, todos los puntos salvo un número finito, dan lugar a singularidades de tipo dimensional 1, que tienen secciones genéricas equivalentes. Apoyándose en resultados de Zariski [13], se demuestra entonces que se puede representar el proceso de resolución de todas esas superficies mediante el de una sola, lo cual permite reducir a un número finito de elementos cada nivel del árbol. A partir de este hecho se construye el árbol de la superficie, y se obtienen los resultados ya citados al principio en 1 y 2. Posteriormente y basándonos en los árboles de superficies, hemos obtenido una clasificación satisfactoria de los puntos dobles de superficies algebroides, que completa la que da Kirby en [4]. Estos resultados no obstante no han sido incluidos en esta memoria.

Indiquemos por último que quedan pendientes muchos problemas sobre la relación de estos árboles con la estructura de

la singularidad.

Una cuestión cuya importancia se deduce del desarrollo de esta memoria, es el estudio completo de los árboles para singularidades cuasiordinarias reducibles. Concretamente se trataría de conocer que es necesario para determinar el árbol de una singularidad cuasiordinaria reducible, aparte de los pares característicos de las componentes irreducibles. Otra cuestión interesante es la siguiente. Sean S y S' superficies cuyos árboles son isomorfos, y tal que S es irreducible. ¿Es entonces S' irreducible?.

Una respuesta afirmativa a esta cuestión permitiría establecer a partir de los árboles de las superficies irreducibles una teoría de equisingularidad para superficies análoga a la de curvas. Persiste por último el problema de trasladar este estudio a característica positiva, porque según se puede observar en lo que sigue el útil algebraico esencial en el estudio es el discriminante de una proyección, y este es precisamente uno de los "puntos negros" de característica positiva.

Resumimos a continuación el contenido de cada uno de los cuatro capítulos en que está dividida la memoria.

El Capítulo I está dedicado a exponer los conceptos básicos y notaciones utilizados, así como a la obtención de una serie de resultados técnicos que se utilizarán en los capítulos posteriores.

En la sección primera se resumen las definiciones y resultados previos sobre geometría algebroide, transformaciones monoidales y cuadráticas formales y teoría de la equisingularidad en codimensión 1.

Dada una hipersuperficie algebroide V (es decir $V = \text{Spec}(\square)$ donde \square es un anillo local completo cuya dimensión de inmersión es $\dim(V) + 1$) otra hipersuperficie $V' = \text{Spec}(\square')$ se llama transformada monoidal formal de V con centro $p \in V$ si \square' se obtiene mediante localización y complección en un punto cerrado de

$\text{Bl}_{\mathfrak{p}}(\square) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1} \right)$. Si \mathfrak{p} es el ideal maximal de

\square , V' se llama una transformada cuadrática formal.

Como ya hemos indicado se demuestra en esta memoria (cap. II) que si S es una superficie algebroide sumergida para casi todo punto cerrado del divisor excepcional $\mathfrak{D} = \pi^{-1}(\mathfrak{m})$, ($\pi : \text{Bl}_{\mathfrak{m}}(\square) \longrightarrow S$, es el morfismo estructural), la transformada cuadrática formal de la superficie en dicho punto $S_{\mathfrak{p}}$ es una singularidad del tipo dimensional 1. Surje inmediatamente la cuestión de si $S_{\mathfrak{p}}$ y $S_{\mathfrak{p}'}$, con \mathfrak{p} y \mathfrak{p}' pertenecientes a la misma componente irreducible de \mathfrak{D} son equivalentes. Para verlo es necesario comparar las secciones genéricas de $S_{\mathfrak{p}}$ y $S_{\mathfrak{p}'}$, transversales al divisor excepcional. Ahora bien estas secciones no se pueden comparar directamente pero como proceden de $\text{Bl}_{\mathfrak{m}}(\square)$ via localización y complección se pueden comparar via este esquema.

Para ello se estudia en la sección segunda de este capítulo, el comportamiento de la sección genérica por localización y complección. Primeramente se introduce el concepto de c-anillo. Un c-anillo es un anillo local cuyo completado \mathfrak{m} -ádico $\widehat{\square}$ es el anillo local de una hipersuperficie algebroide en su punto cerrado. Para estos anillos se puede definir el concepto de equisingularidad a lo largo de un ideal permitido de codimensión 1, de una forma geométrica, es decir imponiendo que unas ciertas secciones sean equisingulares. De esta forma se extiende la definición de equisingularidad de Zariski al caso no completo. Se demuestra posteriormente que para un c-anillo \square se verifica que \square es equisingular a lo largo de \mathfrak{p} si y solo si $\widehat{\square}$ es equisingular a lo largo de $\widehat{\mathfrak{p}} \cdot \widehat{\square}$. A partir de aquí se obtiene una serie de resultados, el más importante es la proposición 3.2 que permite comparar en los términos antes descritos las secciones genéricas de $S_{\mathfrak{p}}$ y $S_{\mathfrak{p}'}$, obteniendose como consecuencia que ambas secciones son equisingulares (cap. II, Teor. 3.4).

En la sección tercera resumimos los resultados fundamentales de [6] relativos al comportamiento de las superficies cuasiordinarias irreducibles por transformaciones monoidales y cuadráticas y extendemos algunos de estos resultados al caso reducible.

Si S es una superficie cuasiordinaria irreducible, todas las transformadas monoidales y las transformadas cuadráticas en las direcciones tangentes a las curvas del discriminante son también superficies cuasiordinarias irreducibles cuyos pares característicos se obtienen a partir de los de S .

Para una superficie reducible S , que es cuasiordinaria respecto de un sistema transversal de parámetros, demostramos que las transformadas monoidales y las transformadas cuadráticas en las direcciones distinguidas son también superficies cuasiordinarias y estudiamos la variación del invariante numérico $\lambda(S)$ introducido por Zariski en [14].

Las fórmulas obtenidas para la variación de $\lambda(S)$ permiten demostrar en el capítulo III la finitud del árbol $A_k(S)$.

Estos resultados no se pueden extender a superficies reducibles que son cuasiordinarias respecto de un sistema de parámetros no transversales, ya que al hacer una transformación cuadrática pueden aparecer superficies no cuasiordinarias, como se ve en el siguiente ejemplo: Sea S una superficie de ecuación $(Z^5 + X Y^2) (Z^2 + X Y^3) = 0$, que es cuasiordinaria respecto de $\{x, y\}$ la transformada cuadrática formal de S en la dirección $(1, 0, 0)$ tiene por ecuación $(X_1^2 Z_1^5 + Y_1^2) (Z_1^2 + X_1^2 + Y_1^3) = 0$, que no es cuasiordinaria.

El capítulo II lo dedicamos esencialmente a la construcción del árbol de una superficie algebroide sumergida.

En la sección primera introducimos el concepto de árbol pesado. Definimos un árbol como una familia $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$ de conjuntos y aplicaciones tal que $I = \mathbb{N}$ ó $I = \{0, 1, \dots, n\}$,

y $X_0 = \{p\}$ los X_i son conjuntos finitos y $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Para cada $i \in I - \{0\}$ π_i es una aplicación de X_i en X_{i-1} .

Asociado a cada árbol tenemos un grafo $G(\mathcal{A}) = \{V(\mathcal{A}), L(\mathcal{A})\}$ donde el conjunto de vértices es $V(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i$ y aparece una arista entre $\pi_i(a_i)$ y a_i , con $a_i \in X_i$. Un árbol pesado es árbol \mathcal{A} junto con dos aplicaciones α y β de $V(\mathcal{A})$ y $L(\mathcal{A})$ en \mathbb{N} .

Se comprueba por medio de la construcción anterior que el concepto de árbol es equivalente al de grafo, conexo sin ciclos con una raíz y tal que los "niveles" del grafo son finitos. Inspirados en las correspondientes definiciones de la teoría de grafos se dan las definiciones de subgrafo pesado, isomorfismo de grafos, etc.

Como ejemplo de árbol pesado construimos a continuación el árbol de una curva algebroide plana C . Este árbol es siempre finito. Si C es una curva irreducible, el árbol $A_r(C)$ tiene asociado un grafo lineal, que es el "bambu" del que hablamos al principio.

Se demuestra a continuación que la equisingularidad de curvas implica la igualdad (isomorfismo) de sus árboles respectivos. La sección concluye con un ejemplo que demuestra que la equisingularidad es una relación más fuerte que el isomorfismo de árboles, naturalmente en el caso reducible.

La sección 2, se dedica a comparar, en una hipersuperficie algebroide V con una subvariedad permitida W , la sección genérica de V transversal a W que denotamos por C_W , con una sección de V por una superficie lisa del espacio ambiente. Obtenemos así un nuevo criterio de equisingularidad.

Sean $V = \text{Spec}(\square)$ una hipersuperficie de dimensión d y W una subvariedad permitida de codimensión 1, y $\mathcal{P} \in V$ el punto genérico de W . Por definición V es equisingular a lo

largo de W si existen $\{x_1, \dots, x_{d-1}\}$ parámetros W-transver sales de V (es decir que las imágenes de x_1, \dots, x_{d-1} en \square/\mathfrak{p} forman un sistema regular de parámetros) tal que

$V_{(x)} = \text{Spe}(\square/(x_1, \dots, x_{d-1}) \cdot \square)$ y C_W son equisingulares.

El resultado fundamental de esta sección es:

TEOREMA:

Si V es una hipersuperficie y W una subvariedad permitida y $\{x_1, \dots, x_{d-1}\}$ un sistema de parámetros W-transver sales de V se verifica que:

$$V_{(x)} \text{ es equisingular a } C_W \text{ si y solo si } A_r(V_{(x)}) \approx A_r(C_W)$$

Teniendo en cuenta la definición de equisingularidad en codimensión 1 el teorema anterior nos dá una condición más débil de equisingularidad.

El hecho de que en este caso coincidan ambas relaciones de equivalencia es debido a la semicontinuidad de la multiplicidad. Es decir que si $(C_W)_1, \dots, (C_W)_r$ y $(V_{(x)})_1, \dots, (V_{(x)})_r$ son las componentes irreducibles de C_W y $V_{(x)}$ se verifica en general que $m((V_{(x)})_i) \geq m((C_W)_i)$.

Con esta condición adicional se demuestra por inducción en la longitud del árbol $A_r(C_W)$ que la igualdad de los árboles $A_r(C_W)$ y $A_r(V_{(x)})$ implica la equisingularidad de C_W y $V_{(x)}$.

Si V es equisingular a lo largo de W , por ([13], §7) V se puede desingularizar mediante transformaciones monoidales con centro en subvariedades permitidas de codimensión 1. Se puede construir un árbol que represente este proceso de resolución de V por transformaciones monoidales y como consecuencia de los resultados de esta sección dicho árbol es isomorfo a $A_r(C_W)$.

Este hecho lo tendremos en cuenta para la construcción del árbol de una superficie.

La sección tercera de este capítulo está dedicada a la construcción del árbol de una superficie S . Comienza la sección con una serie de resultados que justifican la construcción del árbol. Los más importantes son los siguientes:

PROPOSICION:

Dada una superficie S definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0, existe un abierto \mathcal{U} del divisor excepcional de S, \mathcal{D} , tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{U}$ es un número finito de puntos y para cada $P \in \mathcal{D}$, $P \in \mathcal{U}$ si y sólo si S_P es lisa ó S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P (Curva determinada por \mathcal{D} en S_P).

Al abierto \mathcal{U} de la proposición anterior lo designamos por $\Sigma(S)$. Si $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$ son las componentes irreducibles del divisor excepcional se demuestra utilizando la proposición anterior y los resultados de la sección 2 del capítulo I, lo siguiente:

TEOREMA:

Si P y $P' \in \Sigma(S) \cap \mathcal{D}_i$ para algún i , S_P y $S_{P'}$ tienen singularidades equivalentes en el sentido de que ambas son lisas ó bien tienen secciones genéricas transversales al divisor excepcional equisingulares.

En virtud de este teorema para todo punto de $\Sigma(S) \cap \mathcal{D}_i$, S_P se puede resolver mediante una serie de transformaciones monoidales con centro en curvas permitidas y por lo que se vió en la sección anterior el árbol que describe esta resolución es isomorfo al árbol de la sección genérica en un punto cualquiera de $\Sigma(S) \cap \mathcal{D}_i$. A esta sección genérica la designaremos por C_i . Para hacer la construcción del árbol agrupamos todos los puntos de $\mathcal{D}_i \cap \Sigma(S)$ en uno de tal forma que al considerar

los siguientes a este punto se obtenga $A_r(C_i)$. Esto se con sigue incluyendo en el primer nivel del árbol todas las C_i , además de las transformadas cuadráticas en los puntos de $\mathcal{D} - \mathcal{U}$ y todas las transformadas monoidales formales de S . Concreta- mente, si $\mathcal{D} - \mathcal{U} = \{P_1, \dots, P_s\}$, W_1, \dots, W_n son las curvas per- mitidas de S y para cada i con $1 \leq i \leq h$, designamos al conjunto de transformadas monoidales de S con centro W_i por $T.M._{W_i}(S)$, definimos entonces $T(S) = \{C_1, \dots, C_r\} \cup$

$$\cup \{S_{P_1}, \dots, S_{P_s}\} \cup T.M._{W_1}(S) \cup \dots \cup T.M._{W_r}(S)$$

El árbol se construye tomando $X_0 = \{S\}$, $X_1 = T(S)$ y una vez construido X_{i-1} , si existe $H \in X_{i-1}$ tal que $m(H) > 1$,

$$\text{Definimos } X_i = \bigcup_{m(H) > 1, H \in X_{i-1}} T(H).$$

La unión de los $T(H)$ es disjunta y las aplicaciones π_i se definen de manera obvia, con lo que se tiene un árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$. La aplicación α está definida por $\alpha(H) = m(H)$ para todo $H \in V(\mathcal{A})$. El peso de las aristas se ob- tiene definiendo:

$$\beta(H, H') = 1, \text{ si } H \text{ y } H' \text{ son curvas}$$

$$\beta(H, H') = 1, \text{ si } H \text{ y } H' \text{ son superficies y la transfor- mación que pasa de } H' \text{ a } H \text{ es monoidal}$$

$$\beta(H, H') = 0, \text{ si } H \text{ es una superficie y la transforma- ción que produce la arista } (H, H') \text{ es cua- drática.}$$

El árbol pesado así obtenido $(\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ lo llamamos el árbol to tal de la superficie S y lo designamos por $A.T.(S)$. Este árbol depende en principio del punto elegido en $\Sigma(S) \cap \mathcal{D}_i$ para definir C_i , pero se demuestra que módulo isomorfismo de árboles pesados $A.T.(S)$ no depende de dicha elección. El ár- bol $A.T.(S)$ puede ser infinito, de hecho si S contiene una curva permitica C , tomando las transformadas cuadráticas su- cesivas en la dirección correspondiente a C la multiplicidad no disminuye y resulta por lo tanto una rama infinita de $A.T.(S)$.

El capítulo III, tiene por objetivo la obtención de un subárbol de A.T.(S) que contenga todos los procesos significativos de resolución de S y la demostración de que dicho subárbol es finito.

Para ello comenzamos por probar que es posible eliminar las subvariedades permitidas de codimensión 1 de una hipersuperficie mediante un número finito de transformaciones monoidales. Más precisamente si V es una hipersuperficie con subvariedades permitidas de codimensión 1, (necesariamente en número finito W_1, \dots, W_r), definimos

$$\delta(V) = \sum_{i=1}^r \delta(C_{W_i}), \quad \text{donde } \delta(C_{W_i})$$

es el número mínimo de transformaciones cuadráticas necesarias para que baje la multiplicidad de la curva C_{W_i} (sección genérica de V transversal a W_i). El resultado esencial de la sección 1 es:

TEOREMA: En toda sucesión $V_k \xrightarrow{T_k} V_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_0 = V$ donde las V_i son hipersuperficies y $T_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$ es una transformación monoidal con centro una subvariedad permitida de codimensión 1 de V_{i-1} , para $k \leq i \leq 1$, y $m(V_k) = \dots = m(V_1) = m(V)$, se verifica que:

V_k no tiene subvariedades permitidas de codimensión 1 si y sólo si $k = \delta(V)$.

El punto esencial del teorema es probar si $T : V' \rightarrow V$ es una transformación monoidal formal con centro una subvariedad permitida y de codimensión 1 de V, W y $m(V') = m(V)$ entonces $\delta(V') = \delta(V) - 1$.

Para ver esto último se hace previamente un estudio de la variación de la sección genérica transversal a W por la transformación T, obteniéndose:

a) Si $\delta(W) > 1$, el divisor excepcional de V' , $W' = T^{-1}(W)$ es una subvariedad permitida de V' y $\delta(C_{W'}) = \delta(C_W) - 1$.

b) Si $\delta(W) = 1$, el divisor excepcional no contiene subvariedades permitidas de codimensión 1.

Estos dos hechos junto con la birregularidad de la transformación T fuera de su centro nos permiten demostrar que siempre $\delta(V') = \delta(V) - 1$.

La sección 2 se dedica a demostrar un resultado que nos permite en la sección siguiente construir un subárbol finito de A.T.(S), eliminando las transformadas cuadráticas en direcciones tangentes a curvas permitidas:

PROPOSICION: Sea S una superficie algebroide sumergida, k un cuerpo de coeficientes de S y sea

$$\dots \longrightarrow S_i \xrightarrow{T_i} S_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{T_1} S$$

una sucesión de transformaciones monoidales y cuadráticas tal que para cada $i \geq 1$, $m(S_i) = m(S) > 1$. Entonces existe un n tal que S_n es estrictamente cuasiordinaria respecto de k .

Este resultado fue demostrado por Zariski en [14] en el caso en que todas las T_i son transformaciones cuadráticas.

Para que S sea estrictamente cuasiordinaria basta que exista un sistema de parámetros transversales de S , $\{x, y\}$ tal que el discriminante de S respecto de $\{x, y\}$, $\Delta_{\{x, y\}}$ tenga un punto doble ordinario en el origen. La demostración de la proposición se hace por inducción en el número $l^*(\Delta_{\{x, y\}})$ (número mínimo de transformaciones cuadráticas necesarias para que la transformada cuadrática total de la curva $\Delta_{\{x, y\}}$ tenga como singularidades puntos dobles ordinarios).

Posteriormente se hace una preparación de la ecuación de S , que permite controlar la variación de $l^*(\Delta_{\{x, y\}})$ por transformaciones monoidales y cuadráticas formales. Obtenemos así que si $T : S' \longrightarrow S$ es una transformación monoidal o cuadrática tal que $m(S') = m(S) > 1$ y $l^*(\Delta_{\{x, y\}}) > 0$ existe un sistema transversal de parámetros de S' , $\{x', y'\}$

tal que:

$$l^*(\Delta_{\{x',y'\}}) \leq l^*(\Delta_{\{x,y\}}) \quad \text{si } T \text{ es una transformación monoidal}$$

$$\text{y } l^*(\Delta_{\{x',y'\}}) < l^*(\Delta_{\{x,y\}}) \quad \text{si } T \text{ es una transformación cuadrática.}$$

La sección 3, se dedica a construir un subárbol finito de $A.T.(S)$. Como ya hemos indicado si S tiene una curva permitida tomando las transformaciones cuadráticas en las direcciones tangentes a dicha curva se obtiene una rama infinita de $A.T.(S)$; por lo tanto si se quiere obtener un subárbol finito hay que eliminar estas transformadas del árbol. No obstante no es necesario eliminar todas, basta hacerlo en las superficies de $A.T.(S)$ que sea estrictamente cuasiordinarias respecto de un cuerpo de coeficientes de S , k fijado. De esta manera se obtiene un subárbol pesado de $A.T.(S)$, que denotamos por $A_k(S)$, porque por construcción $A_k(S)$ depende del cuerpo de coeficientes elegido en S . Utilizando la proposición citada en la sección anterior y los cálculos de la sección 3, cap. I, obtenemos la finitud de $A_k(S)$.

TEOREMA: Para toda superficie algebroide S y todo cuerpo de coeficientes k de S , el árbol $A_k(S)$ es finito.

A continuación se procede de igual modo pero eliminando de $A.T.(S)$ todas las transformadas cuadráticas en direcciones tangentes a curvas permitidas. Se obtiene un subárbol de $A.T.(S)$, que denotamos por $A^*(S)$. Por construcción $A^*(S)$ es un subárbol de $A_k(S)$ para cualquier cuerpo de coeficientes de S , k . De el teorema anterior se sigue $A^*(S)$ es finito, con lo cual se obvia la dependencia del cuerpo de coeficientes que antes teníamos.

Se plantea inmediatamente la cuestión de si se pierde información al tomar $A^*(S)$ en vez $A.T.(S)$, cosa que estudiamos si S es cuasiordinaria. Lo ideal sería demostrar que para

S y S' cuasiordinarias, $A.T.(S) \approx A.T.(S')$ si y solo si $A^*(S) \approx A^*(S')$, se demuestra esta equivalencia en el capítulo IV si S y S' son irreducibles.

Se construye otro subárbol de $A.T.(S)$, $\bar{A}(S)$, tomando, en cada superficie de $A.T.(S)$ que tenga curvas permitidas, las transformadas monoidales unicamente. Veamos a continuación que con este subárbol se pierde información respecto de $A.T.(S)$ en el sentido de que existen superficies S y S' tales que $\bar{A}(S) \approx \bar{A}(S')$, $A^*(S) \neq A^*(S')$ y $A.T.(S) \neq A.T.(S')$. (Ejemplo 3.7).

El capítulo IV está dedicado a estudiar la relación entre $A^*(S)$ y los pares característicos normalizados de S , (def. 3.8, cap. I) para una superficie cuasiordinaria irreducible.

En la sección 1 se demuestra primeramente que si S es una superficie cuasiordinaria respecto a un cuerpo de coeficientes k , $A^*(S) = A_k(S)$.

El principal resultado de la sección es:

PROPOSICION: Si S es cuasiordinaria e irreducible el árbol $A^*(S)$ se puede construir a partir de los pares característicos normalizados de S' .

La demostración se hace observando que toda la información que aparece en $A^*(S)$, multiplicidad, número de componentes del divisor excepcional, número de curvas permitidas, etc., se puede obtener a partir de los pares característicos de S y de las sucesivas superficies cuasiordinarias que aparecen en $A^*(S)$. Los pares característicos de estas últimas se obtienen a partir de los de S mediante las fórmulas de Lipman (3.9, cap. I) con lo que de esta manera se demuestra la proposición.

Como los pares característicos no dependen del cuerpo de coeficientes la construcción dada en la proposición anterior se puede considerar como un proceso combinatorio que asocia a

cada familia de pares característicos $\mathcal{R} = \{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$
un árbol pesado de $A^*(\mathcal{R})$.

La sección 2 se dedica principalmente a demostrar el re
cíproco del resultado anterior, es decir que el árbol $A^*(S)$
determina los pares característicos normalizados de S . Concre
tamente se demuestra:

TEOREMA: Sean S una superficie cuasiordinaria irreducible y
 $\mathcal{R} = \{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de
 S , entonces \mathcal{R} es la única familia de pares característicos
que verifica que $A^*(\mathcal{R}) = A^*(S)$.

La unicidad se obtiene hallando unas fórmulas que nos
permiten obtener los pares característicos normalizados de S
a partir de los pares característicos normalizados de los ele
mentos del primer nivel del árbol $A^*(S)$ y haciendo una induc
ción en la longitud del árbol $A^*(S)$.

La demostración es pues un algoritmo que permite obte
ner los pares característicos normalizados de S a partir de
 $A^*(S)$. La demostración es larga pues hay que considerar varios
casos y ver que en cada caso la información utilizada para obte
ner las fórmulas a las que antes nos referíamos depende sólo de
la clase de isomorfía de $A^*(S)$.

Basándose en la equivalencia de árboles y pares caracte
rísticos para superficies cuasiordinarias irreducibles se obtie
nes el resultado al que hacíamos referencia en el capítulo ante
rior.

PROPOSICION: Si S y S' son superficies cuasiordinarias irre
ducibles se verifica que:

$$A^*(S) \approx A^*(S') \quad \text{si y solo si} \quad A.T.(S) \approx A.T.(S')$$

Con este resultado concluye la memoria.

REFERENCIAS

- [1] BERGE, C.: Graphes et Hipergrahes. Dunod. Paris. 1970.
- [2] HIRONAKA, H.: "Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces". Preprint. Warwick University. 1971.
- [3] HIRONAKA, H.: Introduction to the theory of infinitely near singular points. Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. nº 28. C.S.I.C. Madrid. 1974.
- [4] KIRBY, D.: "The structure of an isolated multiple point of a surface, II". Proc. London Math. Soc (3) 7 (1957) pp. 1-18.
- [5] LEJEUNE, M., TEISSIER, B.: "Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités". Ecole Polytechnique. Paris. 1972.
- [6] LIPMAN, J.: "Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces". Thesis. Harvard Univ. 1965.
- [7] LIPMAN, J.: "Introduction to resolution of singularities". Summer Institute of A.M.S. Arcata. 1974 Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 29. 1975. pp. 187-230.
- [8] PIEDRA, R.: "Estudio local de singularidades de superficies sobre cuerpos base de característica arbitraria". Tesis. Univ. de Sevilla. 1978.
- [9] ROMO, C.: "Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera". Tesis. Univ. Complutense. Madrid. 1976.
- [10] SANCHEZ GIRALDA, T.: "Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". Tesis. Univ. Complutense. Madrid. 1976.
- [11] ZARISKI, O.: "On the topology of algebroid singularities". Amer. J. Math. 54 (1932). pp. 453-465.
- [12] ZARISKI, O.: "Studies in equisingularity, I". Amer. J. Math. 87 (1965). pp. 507-536.

- [13] ZARISKI, O.: "Studies in equisingularity, II". Amer. J. Math. 87 (1965). pp. 972-1006.
- [14] ZARISKI, O.: "Exceptional singularities of an algebroid surface and their reduction". Atti Accad. Nat. Lincei Rend. Cl. Sci. Math. Nat. serie VIII 43 fasc. 3-4 (1967) pp. 135-146.
- [15] ZARISKI, O.: "Some open question in the theory of singularities". Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1971) pp. 481-491.

TERMINOLOGIA

Esta memoria está dividida en cuatro capítulos, cada capítulo a su vez está dividido en secciones. Cada teorema, proposición, etc., se identifica por dos números, el primero corresponde a la sección y el segundo al número de orden en la sección. Para referirnos a un resultado del mismo capítulo damos estos dos números. Para referirnos a un resultado de otro capítulo, damos los dos números que preceden al resultado seguidos del número del capítulo.

Todos los anillos considerados en la memoria son conmutativos, noetherianos y con unidad. Consideramos anillos locales con un cuerpo de coeficientes k , que supondremos siempre algebraicamente cerrado y de característica 0 , salvo que se diga explícitamente lo contrario.

Las superficies algebroides que aparecen en la memoria son siempre supergidas, (es decir hipersuperficies en una variedad tridimensional lisa) aunque por lo general no se diga explícitamente. De la misma forma siempre se consideran transformaciones monoidales y cuadráticas formales, pero por abreviar se suprime a veces el término formales.

CAPITULO I

Sección 1.-

En esta sección introducimos las notaciones y resultados preliminares de geometría algebroide que se utilizarán a lo largo de toda la memoria. Las fuentes utilizadas son esencialmente Zariski [21], Lipman [10] y Romo [14].

A lo largo de toda la memoria consideraremos hipersuperficies algebroides, es decir esquemas del tipo $V = \text{Spec}(\square)$ siendo \square un anillo local, completo, reducido y equidimensional, tal que si $r = \dim(\square)$ el ideal maximal \mathfrak{m} está generado por $r+1$ elementos. A una base de \mathfrak{m} de $r+1$ elementos se le llama un sistema de coordenadas locales de S (ó de \square). En lo que sigue consideraremos un cuerpo de coeficientes de \square , k fijo.

Nota. 1.1. Dado un sistema de coordenadas locales $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ en \square , por el teorema de estructura de Cohen ([11], 28.J.) existe un homomorfismo suprayectivo

$$\phi : k[[X_1, \dots, X_{r+1}]] \longrightarrow \square,$$

tal que $\phi(X_i) = x_i$; para $1 \leq i \leq r+1$.

El núcleo de ϕ es un ideal que tiene todas sus componentes de igual dimensión, y como $k[[X_1, \dots, X_{r+1}]]$ es un dominio de factorización única, este ideal es principal. A un generador F de $\ker \phi$ se le llamará una ecuación de V respecto de el sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$; F está unívocamente

determinada por $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ salvo multiplicación por unidades y se tiene un isomorfismo

$$\bar{\phi} : k[[X_1, \dots, X_{r+1}]] / (F) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r+1}]] \cong \bar{\phi}$$

Como $\bar{\phi}$ es reducido, F no tiene factores múltiples, y si $F = F_1 \dots F_r$ es la descomposición de F en factores irreducibles y $V_i = \text{Spec}(\bar{\phi}^{-1}(F_i) \cdot \bar{\phi})$, $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ es la descomposición de V en componentes irreducibles, que son también hipersuperficies. Supondremos salvo mención en contra que una tal base de \mathfrak{m} , $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ es minimal, es decir que $\bar{\phi}$ no es regular y $m(S) > 1$.

DEFINICION 1.2. A un conjunto $\{x_1, \dots, x_r\}$ de elementos de \mathfrak{m} , se le llama un sistema de parámetros locales de $\bar{\phi}$, si existe $x_{r+1} \in \mathfrak{m}$, tal que $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ es un sistema de coordenadas de $\bar{\phi}$ y $(x_1 \dots x_r) \cdot \bar{\phi}$ es un ideal \mathfrak{m} -primario, si además la multiplicidad del ideal $(x_1, \dots, x_r) \cdot \bar{\phi}$ es igual a $m(\bar{\phi})$ el sistema de parámetros se llama transversal.

Nota. 1.3. Sean $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ un sistema de coordenadas de $\bar{\phi}$, y $F \in k[[X_1, \dots, X_r, X_{r+1}]]$ una ecuación de S respecto a dicho sistema. Entonces $\{x_1, \dots, x_r\}$ son parámetros de si y solo si

$$F(0, \dots, 0, 1) \neq 0, \text{ es decir que } F(0, \dots, 0, X_{r+1}) = \\ = X_{r+1}^s (a_{r+1} + \dots)$$

y F es regular en X_{r+1} de orden s siendo $s \geq v = 0(F)$ (orden de F).

Por el teorema de preparación de Weierstrass, existe una unidad u tal que

$$u \cdot F = X_{r+1}^s + \sum_{i=1}^s A_i(X_1, \dots, X_r) X_{r+1}^{s-i} \quad \text{es un polinomio de}$$

Weierstrass en X_{r+1} , con lo que si $\{x_1, \dots, x_r\}$ es un sistema de parámetros, podemos siempre tomar una ecuación de V respecto de él que sea un polinomio de Weierstrass. En esta situación la multiplicidad del ideal (x_1, \dots, x_r) ([19], pág. 293) es $s = 0(F(0, \dots, 0, X_{r+1}))$ y por lo tanto $0(F(0, \dots, 0, X_{r+1}))$ no depende de x_{r+1} .

Sea $v = 0(F)$, e $\text{in}(F) = F_v$. Por lo anterior $\{x_1, \dots, x_r\}$ son parámetros transversales si y solo si $s=v$ si y solo si $F_v(0, 0, \dots, 0, 1) \neq 0$.

DEFINICION 1.4. Sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\square)$, se dice que \mathfrak{p} es permi-
tido si \square/\mathfrak{p} es regular y $\text{Gr}_{\mathfrak{p}}(\square)$ es libre sobre \square/\mathfrak{p} .

Nota. 1.5. Si \square es el anillo local de una hipersuperficie algebroides por ([8], cap II, teor. 2), $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\square)$ es permitido si y solo si \square/\mathfrak{p} es regular y $m(\square/\mathfrak{p}) = m(\square)$.

Nota. 1.6. Si \mathfrak{p} es un ideal regular de codimensión 1 (dimensión de $\square/\mathfrak{p} = r-1$), existe un sistema de coordenadas de $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$, tal que $\{x_1, \dots, x_r\}$ son parámetros transversales de V y $(x_r, x_{r+1}) \cdot \square = \mathfrak{p}$. Sea $W = \text{Spec}(\square/\mathfrak{p})$. se dice que $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ es un sistema de coordenadas de V adaptado a W si cumple la condición anterior. Sea F la ecuación de V respecto de un sistema de coordenadas adaptado a W , entonces $F \in (X_r, X_{r+1}) k[[X_1, \dots, X_{r+1}]]$

En estas circunstancias \mathfrak{p} es permitido es decir $m(\square_{\mathfrak{p}}) = m(\square) = v$ si y solo si $F \in ((X_r, X_{r+1}) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r+1}]])^v$. Si esto ocurre, F se puede poner de la forma $F = F_v + F_{v+1} + \dots$, donde para cada $i \geq v$ F_i es una forma de grado i en X_r y X_{r+1} con coeficientes en $k[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$.

Dada una subvariedad W de V , se le puede hacer corresponder su punto general \mathfrak{p} , de tal forma que W es la imagen de $\text{Spec}(\square_{\mathfrak{p}})$ en el morfismo inducido por $\square \longrightarrow \square_{\mathfrak{p}}$. Por esta correspondencia natural al tratar propiedades de las subvariedades, nos referiremos indistintamente a estas o a sus ideales; así diremos que W es una subvariedad permitida de V ó que \mathfrak{p} es un ideal permitido de \square , que V es equisingular a lo largo de W ó que \square es equisingular a lo largo de \mathfrak{p} , etc.

Sean $\{x_1, \dots, x_r\}$ un sistema de parámetros de \square y $z \in \mathfrak{m}$ tal que $\{x_1, \dots, x_r, z\}$ son coordenadas locales de V . Consideremos la ecuación de V respecto a dicho sistema $F \in k[[X_1, \dots, X_r]] [Z]$, podemos suponer que F es un polinomio de Weierstras. Como F no tiene factores múltiples y $k[[X_1, \dots, X_r]]$ es un dominio de factorización única que contiene un cuerpo de característica 0, por ([17], § 5.7) el discriminante de F respecto de Z , $D_Z(F) = D(X_1, \dots, X_r) \in k[[X_1, \dots, X_r]]$ es no nulo. Sea $D = D_1^{\alpha_1} \dots D_r^{\alpha_r}$ la descomposición de D en factores irreducibles y sea $(D)_{\text{red}} = D_1 \dots D_r$, definimos entonces

DEFINICION 1.7. Se llama discriminante de V respecto de $\{x_1, \dots, x_r\}$ a la subvariedad de $\text{Spec}(k[[X_1, \dots, X_r]])$ de ecuación (D) red, lo notaremos por $\Delta_{\{x_1, \dots, x_r\}}$ ó $\Delta_{\{x\}}$.

Nota. 1.8. $\Delta_{\{x\}}$ depende solo de $\{x_1, \dots, x_r\}$ ya que $D_Z(F)$ no depende salvo unidades del $z \in \mathfrak{m}$ elegido ([21], §2).

$\Delta_{\{x\}}$ tiene la siguiente interpretación geométrica:

Como $\{x_1, \dots, x_r\}$ son parámetros locales, son analíticamente independientes y la aplicación

$$\alpha : k[[X_1, \dots, X_r]] \longrightarrow k[[x_1, \dots, x_r]] \subset \square \quad \text{es inyectiva}$$

y determina un morfismo suprayectivo

$$\alpha^* : V = \text{Spec}(\square) \longrightarrow \text{Spec}(k[[X_1, \dots, X_r]]) \quad \text{que}$$

es finito de grado s , siendo s la multiplicidad del ideal $(x_1, \dots, x_r) \subset \square$. $\Delta_{\{x\}}$ está formado por los $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(k[[X_1, \dots, X_r]])$ tal que $\#(\alpha^{*-1}(\mathfrak{q})) < s$.

Sean \square un anillo local, \mathfrak{m} su ideal maximal y $k = \square/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual. Consideremos $\mathfrak{p} \in V = \text{Spec}(\square)$, $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n$ tiene una estructura natural de \square -álgebra graduada con lo que $T = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n)$ es un V -esquema.

DEFINICION 1.9. Llamaremos transformado monoidal de V con centro \mathfrak{p} , al V -esquema T (Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, transformado cuadrático).

Nota. 1.10. Sea $\pi : T \longrightarrow V$ el morfismo estructural. La fibra $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ es isomorfa a $\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n / \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}^n)$ y es un k -esque-

ma proyectivo ([14], prop. 2.3.5).

$$\begin{aligned} \text{De la misma forma } \pi^{-1}(\mathfrak{p}) &\simeq \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1} \right) = \\ &= \text{Proj} (\text{Gr}_{\mathfrak{p}}(\square)). \end{aligned}$$

Sea $(x_1, \dots, x_n) \cdot \square = \mathfrak{p}$, entonces T está recubierto por los esquemas afines $T_{x_i} = \text{Spec}(\square \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right])$. $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ es un divisor cuya ecuación en T_{x_i} es x_i . Se llama divisor excepcional de T a $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$.

DEFINICION 1.11. Un anillo local \square' es un transformado monooidal formal de \square con centro \mathfrak{p} (ó transformado cuadrático formal si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$), si \square' es la compleción de el anillo local de T en un punto cerrado de $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Para un estudio de las propiedades generales de los transformados monooidales formales puede consultarse [2].

Si \square es el anillo local de una hipersuperficie algebroides, todo transformado monooidal formal de \square con centro permitido es también el anillo local de una hipersuperficie algebroides. En esta memoria consideraremos el caso en que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ ó bien \mathfrak{p} es un ideal permitido de codimensión 1. En esta situación se obtienen unas ecuaciones de \square' a partir de las de \square de la siguiente forma.

Nota. 1.12. Sean $V = \text{Spec}(\square)$ una hipersuperficie algebroides, $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ un sistema de coordenadas de \square y $F(x_1, \dots, x_{r+1})$ una ecuación de V respecto de dicho sistema. Entonces

$$\text{Gr}_{\mathfrak{m}}(\square) \simeq k[x_1, \dots, x_{r+1}] / (F_V)k[x_1, \dots, x_{r+1}]$$

donde $v = 0(F)$ y $F_v = \text{in}(F)$.

Por lo tanto los puntos del divisor excepcional $\mathcal{D} = \pi^{-1}(\mathcal{m})$

están en correspondencia biunívoca con las direcciones

(a_1, \dots, a_{r+1}) tangentes a V (i.e. tal que $F_v(a_1, \dots, a_{r+1}) = 0$)

Sea $P \in \mathcal{D}$ y sea (a_1, \dots, a_{r+1}) la dirección correspondiente

a P , $P \in T_{x_i}$ si y solo si $a_i \neq 0$.

Si \square_p es el transformado cuadrático formal de
en P , y $P \in T_{x_i}$, $\left\{ \frac{x_1}{x_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, x_i, \dots, \frac{x_{r+1}}{x_i} - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_i} \right\}$

es un sistema de coordenadas de $S_p = \text{Spec}(\square_p)$ y una ecuación de S_p respecto a dicho sistema de coordenadas es

$$F'(X'_1, \dots, X'_{r+1}) = \frac{1}{X'_i} \cdot F\left(X'_i \left(X'_1 + \frac{a_1}{a_i}\right), \dots, X'_i, \dots, X'_i \left(X'_{r+1} + \frac{a_{r+1}}{a_i}\right)\right)$$

([14], Nota 2.1.6).

Nota. 1.13. Sean V una hypersuperficie, W una subvariedad permitida de codimensión 1 de V y $p \in V$ el punto general de W . Consideremos un sistema de coordenadas de V adaptado a W , $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ y la ecuación de V respecto a dicho sistema $F \in k[[X_1, \dots, X_{r+1}]]$.

Si $v = m(V) > 1$, por 1.6. $\text{in}(F) = F_v(X_r, X_{r+1}) =$

$$= \prod_{i=1}^m (X_{r+1} - c_i X_r)^{\alpha_i} \quad \text{siendo } m \geq 1, c_i \in k \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = v.$$

$$\text{Sea } F'(X'_1, \dots, X'_r, X'_{r+1}) = \frac{1}{X'_r} F(X'_1, \dots, X'_r, X'_r \cdot X'_{r+1})$$

Se verifica que F' se descompone en $k[[X'_1, \dots, X'_r]] \cdot [X'_{r+1}]$ en m factores irreducibles distintos $F' = \prod_{i=1}^m F'_i$, siendo F'_i un polinomio en X'_{r+1} mónico de grado α_i , y $F'(0, \dots, 0) = (X'_{r+1} - c_i)^{\alpha_i}$. Por lo tanto V tiene exactamente m transformados monoidales formales con centro W . Llamemosles V_1^1, \dots, V_m^1 . Para cada i , con $1 \leq i \leq m$. V_i^1 tiene por ecuación $F'_i(X'_1, \dots, X'_r, X'_{r+1} + c_i)$ y $m(V_i^1) \leq \alpha_i$.

Notación 1.14. En la situación de 1.13 notaremos $T.M_W(V) = \{V_1^1, \dots, V_m^1\}$.

Si C es una curva algebroide plana, el cálculo anterior con $r=1$, demuestra que C tiene m transformados cuadráticos formales C_1^1, \dots, C_m^1 , notaremos $T(C) = \{C_1^1, \dots, C_m^1\}$.

El lema siguiente es útil, para determinar la variación del discriminante mediante transformaciones monoidales y cuadráticas.

LEMA 1.15. Sea $P(X_1, \dots, X_s, X_{s+1}, \dots, X_r, Z) \in k[[X_1, \dots, X_s, X_{s+1}, \dots, X_r]] [Z]$ ($r > s \geq 0$), tal que $\text{in}(P) = Z^v + \dots$ y sea

$$P'(X'_1, \dots, X'_r, Z') = \frac{1}{X'_r{}^v} P(X'_1, \dots, X'_s \cdot X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r, Z \cdot X'_r)$$

Si $D_Z(P)$ y $D_{Z'}(P')$ son los discriminantes de P y P' respecto de Z y Z' se verifica

$$D_Z(P)(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_{r-1} \cdot X'_r, X'_r) = X'_r{}^{v(v-1)} D_{Z'}(P')(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1}, \dots, X'_r)$$

Demostración.- Si R es un dominio de integridad, y $H(Z)$ es un polinomio en Z de grado v , se verifica:

$$D_Z(K \cdot H(Z)) = K^{2(v-1)} D_Z(H(Z))$$

$$\text{y } D_Z(H(K \cdot Z)) = K^{v(v-1)} D_Z(H(Z)), \quad \text{con } K \in R,$$

(c.f. [17], §5.7).

En las hipótesis del lema

$$P(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r, Z' \cdot X'_r) = X_r'^v P'(X'_1, \dots, X'_r, Z')$$

con lo que

$$D_Z(P(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r, Z' \cdot X'_r)) = (X_r'^v)^{2(v-1)} \cdot$$

$$\cdot D_{Z'}(P'(X'_1, \dots, X'_r, Z'))$$

$$\text{Ahora bien } D_Z(P(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r, Z' \cdot X'_r)) = X_r'^{v(v-1)} \cdot$$

$$\cdot D_Z(P(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r, Z' \cdot X'_r)) \quad \text{y por lo}$$

$$\text{tanto } X_r'^{v(v-1)} D_{Z'}(P')(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1}, \dots, X'_r) =$$

$$= D_Z(P)(X'_1, \dots, X'_s, X'_{s+1} \cdot X'_r, \dots, X'_r) \quad \text{c.q.d.}$$

Citaremos a continuación los resultados fundamentales sobre equisingularidad de curvas planas y equisingularidad en codimensión 1.

Sea C una curva algebroide plana y sea $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$

la descomposición de C en componentes irreducibles. A cada componente C_i la llamaremos una rama de C . Sea

$(C) = \{C_1, \dots, C_r\}$ el conjunto de ramas.

Consideremos ahora dos curvas algebroides planas C y D definidas sobre cuerpos k y k' no necesariamente iguales. Una biyección $\pi : (C) \longrightarrow (D)$ se llama tangencialmente estable si verifica que dadas C_i y $C_j \in (C)$, C_i y C_j tienen la misma tangente si y solo si $\pi(C_i)$ y $\pi(C_j)$ tienen la misma tangente. Si las ramas C_i y C_j tienen la misma tangente sus transformados cuadráticos $(C_i)^1$ y $(C_j)^1$ están en el mismo elemento de $T(C)$. Por lo tanto si π es una biyección tangencialmente estable se puede ordenar $T(D) = \{D_1^1, \dots, D_m^1\}$ de tal manera que para cada i , $1 \leq i \leq m$, π induce una biyección $\pi_i : (C_i^1) \longrightarrow (D_i^1)$. Definiremos ahora el concepto de (a)-equivalencia ([23], Def. 3.1.), por recurrencia en el número de transformadas cuadráticas necesarias para resolver la singularidad de C .

DEFINICION 1.16. Una biyección tangencialmente estable

$\pi : (C) \longrightarrow (D)$ se dice que es una (a)-equivalencia si para cada $C_j \in (C)$ $m(C_j) = m(\pi(C_j))$ y para cada i , $1 \leq i \leq m$, la biyección inducida por π , $\pi_i : (C_i^1) \longrightarrow (D_i^1)$ es una (a)-equivalencia. Si C es regular $\pi : (C) \longrightarrow (D)$ es una (a)-equivalencia si y solo si D es regular.

DEFINICION 1.17. Dos curvas algebroides planas C y D son equi-singulares si existe una (a)-equivalencia $\pi : (C) \longrightarrow (D)$.

Nota. 1.18. Dadas dos curvas algebroides C y C' , con el mismo origen, es decir sumergidas en el mismo plano $\text{Spec}(k[[X,Y]])$,

llamaremos (C, C') a la multiplicidad de intersección de C y C' en su origen. Se verifica el siguiente criterio de equisingularidad ([23], Prop. 4.5.).

"Dos curvas C y D son equisingulares, si existe una biyección $\pi : (C) \longrightarrow (D)$ tal que:

- i) $m(C_i) = m(\pi(C_i))$, para todo $C_i \in (C)$
- ii) $(C_i, C_j) = (\pi(C_i), \pi(C_j))$, para todo C_i y $C_j \in (C)$ "

Sean V una hipersuperficie algebroide, W una subvariedad regular de V y $\mathfrak{p} \in V$ el punto general de W .

DEFINICION 1.19. Un conjunto $\{x_1, \dots, x_{r-1}\} \subset \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$, se llama sistema de parámetros \mathfrak{p} -transversales (ó W -transversales) de \square (ó de V) si sus imágenes en $\square_{\mathfrak{p}}$, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1}$ son un sistema regular de parámetros del anillo local regular $\square_{\mathfrak{p}}$.

Notación 1.20. Sean $\{x_1, \dots, x_{r-1}\}$ parámetros \mathfrak{p} -transversales de \square . Consideraremos $\square_{(x)} = \square / (x_1, \dots, x_{r-1}) \cdot \square$ y $V_{(x)} = \text{Spec}(\square_{(x)})$. El ideal maximal de $\square_{(x)}$ tiene una base formada por dos elementos.

Si $\dim(\square_{(x)}) = 2$, $\square_{(x)}$ es un anillo local regular. Si $\dim(\square_{(x)}) = 1$ y $\square_{(x)}$ es reducido, $V_{(x)}$ es una curva algebroide plana.

Consideremos la sección genérica de V transversal a W (véase 2.2 y 2.5 de la sección siguiente) y la notaremos C_W . C_W es una curva algebroide definida sobre el cierre algebraico del cuerpo residual de \square . Se define entonces

DEFINICION 1.20. Se dice que V es equisingular a lo largo de W , si existen parámetros W -transversales de V , $\{x_1, \dots, x_{r-1}\}$ tal que $V_{(x)}$ es una curva algebroide plana, y $V_{(x)}$ es equisingular a C_W . Si esto ocurre se dice que V es una variedad de tipo dimensional 1.

Si V es equisingular a lo largo de W , W es una subvariedad permitida y $\text{Sing}(V) = \{q \in V \mid \square_q \text{ no es regular}\} = W$.

DEFINICION 1.21. Un sistema de parámetros transversales de V , $\{x_1, \dots, x_r\}$ se llama equisingular si el lugar discriminante $\Delta_{\{x\}}$ es una variedad lisa.

Nota. 1.22. La principal caracterización de la equisingularidad en codimensión 1 es:

Sea V una hipersuperficie algebroide, son equivalentes:

- i) V es una singularidad de tipo dimensional 1.
- ii) Existe un sistema equisingular de parámetros de V .
- iii) Todo sistema transversal de parámetros de V es equisingular.

Para una demostración, así como más detalles sobre la equisingularidad puede consultarse [21].

Sección 2

En esta sección introducimos el concepto de sección genérica, a la manera de Lipman, estudiándolo en el caso de hiper superficies algebroides y extendemos la definición de equisingularidad a una clase de anillos no completos.

DEFINICION 2.1. Sean A y B anillos locales, \mathfrak{m} el ideal maximal de A , y $\psi : A \longrightarrow B$ un homomorfismo local. Consideramos en B la estructura de A -álgebra determinada por ψ .

Se dice que B es un A -álgebra de Cohen si se cumple

- i) B es completa
- ii) B es un A -álgebra plana
- iii) $\mathfrak{m} \cdot B$ es el ideal maximal de B y $B/\mathfrak{m}B$ es una extensión separable del cuerpo A/\mathfrak{m} .

DEFINICION 2.2. Sea A un anillo local, P un ideal primo de A , se dice que un anillo local B , es una sección genérica de A transversal a P si B es un A_P -álgebra de Cohen cuyo cuerpo residual es el cierre algebraico del cuerpo residual de A_P .

Nota. 2.3. Dado un anillo local \square y una extensión separable K de su cuerpo residual k , la existencia y unicidad salvo isomorfismo de una \square -álgebra de Cohen que tenga como cuerpo residual K está demostrada en ([20], Th. 19.8.2). No obstante si $\text{cart}(k) = 0$, se puede hacer una construcción explícita de una tal \square -álgebra de Cohen que será útil en lo que sigue.

PROPOSICION 2.4. Sea \hat{A} anillo local, k su cuerpo residual, $\text{cart}(k) = 0$ y \hat{A} el completado \mathfrak{m} -ádico de \hat{A} ; k_1 un cuerpo de coeficientes de \hat{A} , y K una extensión de k , entonces $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ es una \hat{A} -álgebra de Cohen de cuerpo residual K .

Demostración.- Por ser $k_1 \subset \hat{A}$ cuerpo de coeficientes, $k_1 \approx \hat{A}/\mathfrak{m} \approx \hat{A}/\mathfrak{m} = k$ y $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ está definido respecto del homomorfismo $k_1 \approx k \subset K$. $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ es el completado \mathfrak{m} -ádico de B con $\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{m}} \cdot \hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K = (\mathfrak{m} \cdot \hat{A}) \cdot \hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K = \mathfrak{m} \cdot \hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ que es un ideal maximal. En efecto, la aplicación

$$\tau : K \longrightarrow B/\mathfrak{m}$$

con $\tau(c) = 1 \otimes c + \mathfrak{m} \in B/\mathfrak{m}$, es un homomorfismo de anillos y como $\tau(1) = 1 \otimes 1 + \mathfrak{m} \neq 0$, ya que $1 \otimes 1 \notin \mathfrak{m}$, τ es inyectiva, y como $k_1 \subset \hat{A}$, se comprueba inmediatamente que es sobre, luego \mathfrak{m} es maximal.

Por ([15], cor. 2.19) $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ es un anillo local cuyo ideal maximal es $\mathfrak{m} \cdot (\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K)$ al que llamaremos $\hat{\mathfrak{m}}$.

Sea ψ el homomorfismo de \hat{A} en $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$, composición de los tres:

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{A} \xrightarrow{h} \hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K \longrightarrow \hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K \quad (1)$$

con $h(a) = a \otimes 1$.

$\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ es una \hat{A} -álgebra de Cohen de morfismo estructural ψ , y cuerpo residual K .

En efecto; $\hat{A} \hat{\otimes}_{k_1} K$ es un anillo local completo.

Veamos cuál es la extensión de \mathfrak{m}

$$\mathfrak{m} \cdot \widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K} = \mathfrak{m} \cdot (\widehat{\square} \cdot (B \cdot (\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K}))), \quad \text{ahora bien}$$

$$i) \mathfrak{m} \cdot \widehat{\square} = \widehat{\mathfrak{m}}, \quad ii) \widehat{\mathfrak{m}} \cdot B = \mathfrak{a}, \quad \text{por definición, y}$$

$$\mathfrak{a} \cdot (\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K}) = \widehat{\mathfrak{a}}$$

luego $\mathfrak{m} \cdot \widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K} = \widehat{\mathfrak{a}}$, que es el ideal maximal de $\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K}$ así que ψ es local y además:

$$\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K} / \mathfrak{m} \cdot (\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K}) \approx \widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K} / \mathfrak{a} \approx B/\mathfrak{a} \approx K$$

Como por hipótesis $\text{cart}(k) = 0$, K es una extensión separable de k .

Por último ψ es un homomorfismo plano. En efecto como ψ es la composición de los tres homomorfismo de (1) basta ver que cada uno de ellos es plano. Los dos homomorfismos de los extremos son la inclusión de un anillo en un completado ádico, que es plana.

El homomorfismo $h : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{a}}_{k_1} K}$ es plano ya que $k_1 \longrightarrow K$ lo es, y aplicando el teorema del cambio de base ([11], (3.C)) lo es h .

c.q.d.

Observación 2.5. Como consecuencia de la proposición anterior podemos hallar la sección genérica de una hipersuperficie transversal a una subvariedad regular.

Sean $V = \text{Spec}(\square)$ y W la subvariedad regular de punto general \mathfrak{p} .

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un sistema de coordenadas de S , tal que $\mathfrak{p} = (x_1, \dots, x_r)\square$, $r \leq n-1$, y consideremos el isomor

fismo correspondiente

$$\square \approx k[[X_1, \dots, X_r, \dots, X_n]] /_{(F)} k[[X_1, \dots, X_n]]$$

Sean L el cuerpo de fracciones de $k[[X_{r+1}, \dots, X_n]] = k((X_{r+1}, \dots, X_n))$ y \bar{L} el cierre algebraico de L . Llamando \bar{F} a F considerado como elemento de $k[[X_{r+1}, \dots, X_n]] \cdot [[X_1, \dots, X_r]] \subset \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$ la sección genérica de \square transversal a \mathfrak{p} es:

$$\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] /_{(\bar{F})} \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$$

En efecto:

Si $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$ y $P = (X_1, \dots, X_r)R$, R_P es un anillo local regular, en el que $\{X_1, \dots, X_r\}$ es un sistema regular de parámetros, y cuerpo residual $(R_P) =$ cuerpo de fracciones $(R/P) = L$, con lo que es $R_P \approx L[[X_1, \dots, X_r]]$.

Por la proposición 2.4. $\widehat{R}_P \widehat{\otimes}_L \bar{L}$ es una R_P -álgebra de Cohen de cuerpo residual \bar{L} y

$$\widehat{R}_P \widehat{\otimes}_L \bar{L} \approx L[[X_1, \dots, X_r]] \widehat{\otimes}_L \bar{L}$$

Como \bar{L} es algebraico sobre L , $L[[X_1, \dots, X_r]] \widehat{\otimes}_L \bar{L} \approx \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$ por ([4], §3, Ex. 17).

Se comprueba inmediatamente que F se transforma en \bar{F} por la aplicación que pasa de R_P a $\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$. Como $\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$ es una R_P -álgebra de Cohen, $\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$ es R_P -plano con lo que

$$\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] \widehat{\otimes}_{R_P} ({}^{R_P}/_{(F)} R_P) \text{ es } {}^{R_P}/_{(F)} R_P\text{-plano}$$

Ahora bien

$$\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] \otimes_{R_P} (R_P / (F)R_P) \xrightarrow{(1)} \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] /$$

$$/((\bar{F})R_P). \quad \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] \approx \bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] / (\bar{F})\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$$

y como por construcción $(F)R \subset P$, es $R_P / (F)R_P \approx (R/(F))_P / (F)$

$= \mathbb{F}_p$, luego $\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]] / (\bar{F})\bar{L}[[X_1, \dots, X_r]]$, es una \mathbb{F}_p -álgebra de Cohen cuyo cuerpo residual es \bar{L} , es decir, es la sección de \mathbb{F}_p transversal a \mathfrak{p} .

Definimos a continuación una clase de anillos locales (c-anillos) que tienen la propiedad de que su completado es el anillo local de una hipersuperficie algebroide en su punto cerrado, y extendemos a ellos la definición de equisingularidad en codimensión 1 de Zariski.

DEFINICION 2.6. Un c-anillo es un anillo local, \mathbb{F}_p de característica cero que verifica las siguientes condiciones:

- i) \mathbb{F}_p es reducido y excelente
- ii) $\mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} B/I$, donde B es un anillo local regular, e I es un ideal principal de B .

Observación 2.7. Sea \mathbb{F}_p un c-anillo. Como $\mathbb{F}_p \approx B/I$, los completados \mathfrak{m} -ádicos cumplen: $\hat{\mathbb{F}}_p \approx \hat{B}/I\hat{B}$ y por ser B regular $\hat{B} \approx k[[X_1, \dots, X_r]]$, con $\text{cart}(k) = 0$.

Como \mathbb{F}_p es excelente, \mathbb{F}_p reducido implica ([7], Sch. 7.8.3) que $\hat{\mathbb{F}}_p$ es reducido, luego $\hat{\mathbb{F}}_p$ es un anillo local completo, reducido, que es el cociente de un anillo de series

por un ideal principal (\widehat{I}) es decir, que es el anillo local de una hipersuperficie algebroide.

Observación 2.8. Sea \square un c-anillo, \mathfrak{p} ideal de \square regular y de codimensión 1. Para extender la definición de equisingularidad necesitamos algunas consideraciones:

1) Consideremos el homomorfismo $\phi : B \longrightarrow B/I \xrightarrow{\sim} \square$, y sea $P \subset B$ la elevación del ideal \mathfrak{p} . Sea $H \in B$, tal que $I = (H) \cdot B$. Como $H \in P$, se tiene

$$\square_{\mathfrak{p}} \approx (B/I)_{\mathfrak{p}} \approx B_P / (H)B_P \quad (1)$$

Por ser $B_P \approx \square / \mathfrak{p}$, P es un ideal regular de B de codimensión 2, con lo que B_P es un anillo local regular de dimensión 2 y $\dim(\square_{\mathfrak{p}}) = \dim(B_P) - \text{alt}((H)B_P) = 2 - 1 = 1$.

Consideremos ahora la sección genérica de \square transversal a \mathfrak{p} , que es $\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})}$, siendo $K(\mathfrak{p})$ un cuerpo de coeficientes de $\widehat{\square}_{\mathfrak{p}}$ y $\overline{K(\mathfrak{p})}$ su cierre algebraico. Se tiene entonces:

$$\dim(\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})}) = \dim(\square_{\mathfrak{p}}) \quad ([10], \text{pág. 113})$$

Como \square es reducido, $\square_{\mathfrak{p}}$ es reducido, y al ser $\square_{\mathfrak{p}}$ excelente ([7], Sch. 7.8.3. (ii)), $\widehat{\square}_{\mathfrak{p}}$ es reducido, con lo que

$$\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})} \text{ es reducido } ([7], \text{ cor. 7.5.7})$$

Luego $C_g = \text{Spec}(\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \widehat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})})$ es una curva algebroide. De (1) se deduce fácilmente que la dimensión de inmersión de C_g es dos, con lo que es una curva algebroide plana.

2) Sea $\{x_1, \dots, x_d\}$ un sistema de parámetros \mathfrak{p} -transversales de \hat{A} , como $B/\mathfrak{p} \approx \hat{A}/\mathfrak{p}$ existe un sistema regular de parámetros de $B, \{X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, X_{d+2}\}$, tal que $X_{i+1} = x_i$, $1 \leq i \leq d$.

Utilizando la notación de 1.20:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{(x)} &= \hat{A}/(x_1, \dots, x_d)\hat{A} \approx B/(X_1, \dots, X_d, H)B \approx \\ &\approx B/(X_1, \dots, X_d)B/(H)B \end{aligned}$$

pero $B/(X_1, \dots, X_d)B$ es un anillo local regular de dimensión 2, y por la misma razón de antes $\hat{A}_{(x)}$ es un anillo local de dimensión 1 y dimensión de inmersión 2.

Si $\hat{A}_{(x)}$ es reducido, por ser excelente, $\widehat{\hat{A}}_{(x)}$ es reducido con lo que $\text{Spec}(\widehat{\hat{A}}_{(x)})$ es también una curva algebroide plana.

DEFINICION 2.9. Sea \hat{A} un c-anillo, \mathfrak{p} un ideal regular de de codimensión 1. Se dice que \hat{A} es equisingular a lo largo de \mathfrak{p} si existe un sistema de parámetros \mathfrak{p} -transversales de $\{x_1, \dots, x_d\}$ tal que $\hat{A}_{(x)}$ es reducido y las curvas algebroides planas $C_W = \text{Spec}(\hat{A}_{\mathfrak{p}} \hat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})})$ y $\text{Spec}(\widehat{\hat{A}}_{(x)})$ son equisingulares.

En la situación de la definición el ideal $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot \hat{A}$ de \hat{A} es también regular, pues $\hat{A}/\hat{\mathfrak{p}} \approx \hat{A}/\mathfrak{p}$, que es regular. Vamos a ver a continuación que \hat{A} es equisingular a lo largo de \mathfrak{p} si y solo si \hat{A} es equisingular a lo largo de $\hat{\mathfrak{p}}$. Para ello nos apoyaremos en dos lemas.

LEMA 2.10. Sea $C = \text{Spec}(\square)$ una curva algebroide plana, definida sobre un cuerpo $k \subset \square$ algebraicamente cerrado y de característica 0. Sea K cuerpo algebraicamente cerrado, con $k \subset K$. Entonces $C_K = \text{Spec}(\square \hat{\otimes}_k K)$ es una curva algebroide plana equisingular a C .

Demostración.- Por hipótesis $\square \xrightarrow{\sim} k[[X,Y]]/(F)k[[X,Y]]$ con $F \in k[[X,Y]]$ reducido. Luego

$$\begin{aligned} \square \otimes_k K &\xrightarrow{\sim} k[[X,Y]]/(F)k[[X,Y]] \otimes_k K \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} k[[X,Y]] \otimes_k K / (F \otimes 1).k[[X,Y]] \otimes_k K \end{aligned}$$

$$y \quad \square \hat{\otimes}_k K \xrightarrow{\sim} k[[X,Y]] \hat{\otimes}_k K / (F \otimes 1).k[[X,Y]] \hat{\otimes}_k K$$

Por la proposición 2.4, $k[[X,Y]] \hat{\otimes}_k K$ es una $k[[X,Y]]$ -álgebra de Cohen de cuerpo residual K . Por ([4], §3, Ex. 17) $K[[X,Y]]$ es también una $k[[X,Y]]$ -álgebra de Cohen de cuerpo residual K y por la unicidad ([6], Th. 19.8.2) existe un $k[[X,Y]]$ -isomorfismo

$$\phi : k[[X,Y]] \hat{\otimes}_k K \xrightarrow{\sim} K[[X,Y]]$$

$$\phi(F \otimes 1) = F, \text{ de donde } \square \hat{\otimes}_k K \approx K[[X,Y]]/(F)k[[X,Y]].$$

Luego $C_K = \text{Spec}(\square \hat{\otimes}_k K)$ tiene por ecuación $F \in k[[X,Y]] \subset K[[X,Y]]$. Veamos que como consecuencia de esto ambas curvas son equisingulares, es decir la equisingularidad no depende del cuerpo en que se defina la curva.

Se puede suponer que F es un polinomio de Weierstrass, $F \in k[[X]][Y]$.

La clase de equisingularidad de C depende de la descomposición (en factores lineales) de F en $k^*((X))[Y]$ (notación de [18]). Sean $(C) = \{C_1, \dots, C_r\}$ las ramas de C , $F = F_1 \dots F_r$ la descomposición de F en factores irreducibles, entonces

$$F_i = \prod_{k=1}^{n_i} (Y - \xi_{ik}), \quad n_i = v(F_i), \quad \text{y} \quad \xi_{i1} \dots \xi_{in_i}$$

raíces conjugadas, con lo que $F = \prod_{i=1}^r \left(\prod_{k=1}^{n_i} (Y - \xi_{ik}) \right)$, y de

los ξ_{ik} se deducen los exponentes característicos de C_i y las multiplicidades de intersección (C_i, C_j) , es decir se deduce la clase de equisingularidad de C .

Para C_K , como $F(X, Y)$ es una ecuación de C_K y,

$$F = \prod_{i=1}^r \left(\prod_{k=1}^{n_i} (Y - \xi_{ik}) \right) \text{ es una descomposición de}$$

F en factores lineales en $K^*((X))[Y]$, los ξ_{ik} son también los desarrollos en serie de C_K . Dadas dos raíces ξ, ξ' de F son conjugadas en K si y sólo si lo son en k al ser ambos algebraicamente cerrados. De esto se deduce que $F = F_1 \dots F_r$ es la descomposición de F en $K[[X, Y]]$, con lo que C y C_K tienen el mismo número de ramas. Por último como la clase de equisingularidad de C_K se deduce de los ξ_{ik} , ambas son equisingulares.

LEMA 2.10. Sea \square un c -anillo, \mathfrak{p} un ideal de \square regular, de codimensión 1. $K(\mathfrak{p})$ y $K(\widehat{\mathfrak{p}})$ cuerpos de coeficientes de $\widehat{\square}_{\mathfrak{p}}$ y $\widehat{\square}_{\widehat{\mathfrak{p}}}$ respectivamente.

Sean A y B las secciones genéricas de \square y $\widehat{\square}$ transversales a \mathfrak{p} y $\widehat{\mathfrak{p}}$ respectivamente entonces:

$$B \xrightarrow{\sim} A \hat{\otimes}_{\hat{K}(\hat{\rho})} \overline{K(\hat{\rho})},$$

y por lo tanto las curvas $\text{Spec}(A)$ y $\text{Spec}(B)$ son equisingulares.

Demostración.- Sean $\square \longrightarrow \hat{\square}$ y $\hat{\rho} = \rho \cdot \hat{\square}$, se tiene que $\hat{\rho} \cap \square = \rho$ ([12], 17.9). Esto permite definir de manera natural un homomorfismo local $\phi : \square_{\rho} \longrightarrow \hat{\square}_{\hat{\rho}}$ que es plano ([11], 3.5.).

El homomorfismo inducido entre los completados

$$\bar{\phi} : \hat{\square}_{\rho} \longrightarrow \hat{\hat{\square}}_{\hat{\rho}}, \quad \text{es plano ([5], 10.2.3)}$$

y si \mathfrak{n} y $\hat{\mathfrak{n}}$ son los ideales maximales de $\hat{\square}_{\rho}$ y $\hat{\hat{\square}}_{\hat{\rho}}$, es $\bar{\phi}(\mathfrak{n}) \cdot \hat{\hat{\square}}_{\hat{\rho}} = \hat{\mathfrak{n}}$, luego $\bar{\phi}$ dota a $\hat{\hat{\square}}_{\hat{\rho}}$ de estructura de $\hat{\square}_{\rho}$ -álgebra de Cohen.

Sea B la sección genérica de $\hat{\square}$ transversal a $\hat{\rho}$, B es una $\hat{\square}_{\hat{\rho}}$ -álgebra de Cohen, y esto implica por ([6], 19.8.2) a que B es una $\hat{\hat{\square}}_{\hat{\rho}}$ -álgebra de Cohen. Por la transitividad, B es una $\hat{\square}_{\rho}$ -álgebra de Cohen cuyo cuerpo residual es isomorfo a $\overline{K(\hat{\rho})}$.

A es una \square_{ρ} -álgebra de Cohen, luego es una $\hat{\square}_{\rho}$ -álgebra de Cohen. Por la proposición 2.4, $A \hat{\otimes}_{\hat{K}(\hat{\rho})} \overline{K(\hat{\rho})}$ es un A -álgebra de Cohen, y por transitividad, $A \hat{\otimes}_{\hat{K}(\hat{\rho})} \overline{K(\hat{\rho})}$ es una \square_{ρ} -álgebra de Cohen, cuyo cuerpo residual es isomorfo a $\overline{K(\hat{\rho})}$.

De la unicidad de las \square_{ρ} -álgebras de Cohen con un cuerpo residual dado se deduce entonces que

$$B \longrightarrow A \hat{\otimes}_{\hat{K}(\hat{\rho})} \overline{K(\hat{\rho})}$$

Del lema 1.9 se deduce que $\text{Spec}(A)$ y $\text{Spec}(B)$ son curvas equisingsulares.

TEOREMA 1.11. Sea \square un c-anillo, \mathfrak{p} un ideal regular de \square de codimensión 1. Son equivalentes:

- i) \square es equisingular a lo largo de \mathfrak{p}
- ii) $\widehat{\square}$ es equisingular a lo largo de $\widehat{\mathfrak{p}}$

Demostración.-

i) implica ii) Empleando la misma notación que en el lema anterior, si C_g es la curva sección genérica de \square transversal a \mathfrak{p} , $C_g = \text{Spec}(A)$.

Por hipótesis, existe un sistema de parámetros \mathfrak{p} -transversales de \square , tal que $\text{Spec}(\widehat{\square}_{(x)})$ es equisingular a C_W .

Sean $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ las imágenes de $\{x_1, \dots, x_d\}$ por el homomorfismo $\square \longrightarrow \square/\mathfrak{p}$. $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ es un sistema regular de parámetros, de \square/\mathfrak{p} . Por ([12], 17.13), $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ es un sistema regular de parámetros de $\widehat{\square}/\widehat{\mathfrak{p}}$, luego $\{x_1, \dots, x_d\}$ es también un sistema de parámetros $\widehat{\mathfrak{p}}$ -transversales de $\widehat{\square}$. Además

$$\begin{aligned} (\widehat{\square})_{(x)} &= \widehat{\square}/(x_1, \dots, x_d)\widehat{\square} \xrightarrow{\sim} \left(\square/\mathfrak{p} / (x_1, \dots, x_d)\square \right)^{\widehat{}} \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \widehat{\square}_{(x)} \end{aligned}$$

Si \widehat{C}_g es la curva sección genérica de $\widehat{\square}$ transversal a $\widehat{\mathfrak{p}}$, \widehat{C}_g es equisingular a C_g , y C_g es equisingular a $\text{Spec}(\widehat{\square}_{(x)}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}((\widehat{\square})_{(x)})$, luego \widehat{C}_g y $\text{Spec}((\widehat{\square})_{(x)})$ son equisingulares, es decir $\widehat{\square}$ es equisingular a lo largo de $\widehat{\mathfrak{p}}$.

ii) implica i) Sea $\square = C/I$, con C anillo local regular. En C existe un sistema regular de parámetros

$\{X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, X_{d+2}\}$, tal que $(X_{d+1}, X_{d+2}) \cdot C = P$ (siendo P ideal regular de C correspondiente a \hat{P}), y si $x_i = X_i + I$ $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ es un sistema de parámetros transversales de $\hat{\square}$

En efecto, por ser P regular de codimensión 2, existe un sistema de parámetros regulares de C , $\{X_1^*, \dots, X_{d+2}^*\}$ tal que $(X_{d+1}^*, X_{d+2}^*) C = P$. Sea $F^*(X_1^*, \dots, X_{d+2}^*)$ la ecuación de $\hat{\square}$ asociada a $\{x_1^*, \dots, x_{d+2}^*\}$ ($x_i^* = X_i^* + I$). Sea $s = v(F^*) > 1$ $\text{in}(F^*) = F_s^*$. Por 1.3. $\{x_1^*, \dots, x_{d+1}^*\}$ es un sistema de parámetros transversales de $\hat{\square}$ si y solo si $F_s^*(0, \dots, 1) \neq 0$.

Si esto no ocurre como $F_s^*(X_1^*, \dots, X_{d+2}^*) \neq 0$, es

$F_s^*(x_1^*, \dots, x_{d+1}^*, 1) \neq 0$. Sea (a_1, \dots, a_{d+1}) tal que

$F_s^*(a_1, \dots, a_{d+1}, 1) \neq 0$.

Consideramos entonces:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^* - a_1 X_{d+2}^*, \dots, X_{d+1} = X_{d+1}^* - a_{d+1} X_{d+2}^*, X_{d+2} = \\ &= X_{d+2}^* \end{aligned}$$

$\{X_1, \dots, X_{d+2}\}$ es un sistema de parámetros regulares de C .

La ecuación de $\hat{\square}$ respecto de $\{x_1, \dots, x_{d+2}\}$ es

$$F(X_1, \dots, X_{d+2}) = F^*(X_1 + a_1 X_{d+2}, \dots, X_{d+1} + a_{d+1} X_{d+2}, X_{d+2})$$

con lo que $F_s(0, \dots, 0, 1) = F_s^*(a_1, \dots, a_{d+1}, 1) \neq 0$, luego

$\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ es un sistema de parámetros transversales de $\hat{\square}$

y $P = (X_{d+1}^*, X_{d+2}^*)C = (X_{d+1}^* - a_{d+1} X_{d+2}^*, X_{d+2}^*)C = (X_{d+1}, X_{d+2})C$.

En estas condiciones $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ es un sistema regular de parámetros de C/P , es decir $\{x_1, \dots, x_d\}$ son parámetros \hat{P} -transversales de \square y parámetros $\hat{\hat{P}}$ -transversales de $\hat{\square}$.

Como $\hat{\square}$ es equisingular a lo largo de $\hat{\hat{P}}$, y

$\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ son parámetros transversales de $\hat{\square}$, por 1.22

se sigue que $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ son parámetros equisingulares.

Entonces $\text{Spec}((\widehat{\square})_{(x)})$ y \widehat{C}_g son curvas equisingulares como aparece en la demostración del teorema 4.5(b) de [21].

Como $\{x_1, \dots, x_d\}$ son parámetros p -transversales de \square , es $(\widehat{\square})_{(x)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\square}_{(x)}$, (1), C_g y \widehat{C}_g son curvas equisingulares luego $\text{Spec}(\widehat{\square}_{(x)})$ y C_g son equisingulares y \square es equisingular a lo largo de p .

Una consecuencia de estos resultados es la siguiente proposición que es fundamental para la construcción del árbol de una superficie.

PROPOSICION 2.12. Sea A un anillo, p un ideal primo de A y sea \mathcal{K} el conjunto de los ideales maximales de A , m , tal que $p \subset m$, \widehat{A}_m es un c -anillo, y \widehat{A}_m es equisingular a lo largo de $p\widehat{A}_m$. Entonces si $m, m' \in \mathcal{K}$, \widehat{A}_m y $\widehat{A}_{m'}$ tienen secciones genéricas transversales a $p\widehat{A}_m$ y $p\widehat{A}_{m'}$ respectivamente, que son equisingulares.

Demostración.- Sea k =cuerpo de fracciones (A/p) , \bar{k} =cierre algebraico de k .

(1) Para todo ideal maximal $m \supset p$, es $A/p \xrightarrow{\sim} (A_m/p)_{pA_m}$ y si $m \in \mathcal{K}$, \widehat{A}_m es equisingular a lo largo de $p\widehat{A}_m$, esto implica en particular que $p\widehat{A}_m$ es regular y de codimensión 1, luego pA_m es regular. Como A_m es un c -anillo por el lema 2.10. la sección genérica de \widehat{A}_m transversal a $p\widehat{A}_m$ es equisingular a la sección genérica de A_m transversal a pA_m , que es un A/p -álgebra de Cohen de cuerpo residual \bar{k} por (1).

Si tomamos $m' \in \mathcal{K}$, y repetimos la construcción anterior resulta que la sección genérica de $\widehat{A}_{m'}$, transversal a $\widehat{pA}_{m'}$, es equisingular a la sección genérica de $A_{m'}$, transversal a $A_{m'}$, que es un $A_{\widehat{p}}$ -álgebra de Cohen, y ambas son equisingulares.

c.q.d.

Sección 3.

Dedicamos esta sección a las singularidades cuasiordinarias de superficies, sobre todo al estudio de su comportamiento por transformaciones monoidales y cuadráticas. El caso irreducible ha sido desarrollado por Lipman en su tesis [10]; nosotros extendemos el estudio al caso reducible, con una serie de resultados que se utilizarán para demostrar el teorema de finitud (capítulo III).

Sea $S = \text{Spec}(A)$ una superficie algebroide sumergida, y $k \subset A$ un cuerpo de coeficientes de A , que consideraremos fijo. Vamos a definir una propiedad de S en términos del discriminante respecto a un sistema de parámetros, como el discriminante depende del cuerpo $k \subset A$ elegido, esta propiedad depende de dicho cuerpo. Así definimos

DEFINICION 3.1. Diremos que S es una superficie cuasiordinaria si existe un sistema de parámetros de S , $\{x,y\}$, tal que el discriminante $\Delta_{\{x,y\}}$ es una curva lisa, ó una curva con un punto doble ordinario, es decir la unión de dos curvas lisas transversales. Si además $\{x,y\}$ es un sistema de parámetros transversales de S , diremos que S es estrictamente cuasiordinaria.

Nota 3.2. Si S es cuasiordinaria, mediante un cambio de parámetros de la forma $x' = h(x,y)$, $y' = g(x,y)$, se puede conseguir que el discriminante $\Delta_{\{x',y'\}}$ tenga por ecuación $X.Y$. Sean $\{x,y\}$ parámetros que cumplen la condición anterior, y

$z \in \mathcal{M}$, tal que $\{x, y, z\}$ es un sistema de coordenadas de S . Consideremos la ecuación de S respecto a dicho sistema;

$$P(X, Y, Z) = Z^s + \sum_{i=1}^s A_i(X, Y) Z^{s-i}, \quad (\text{polinomio de$$

Weierstrass) como $\Delta_{\{x, y\}}$ tiene por ecuación $X \cdot Y$ el discriminante $D_Z(P) = X^a Y^b \epsilon(X, Y, Z)$, con $\epsilon(0, 0, 0) \neq 0$.

Si $P = \prod_{i=1}^r P_i$, es la descomposición de F en factores irreducibles, cada P_i es también un polinomio de Weierstrass. Para cada i , $1 \leq i \leq r$, $D_Z(P_i)$ divide a $D_Z(P)$ con lo que $D_Z(P_i) = X^{a_i} Y^{b_i} \epsilon_i(X, Y, Z)$, con $a_i \leq a$, $b_i \leq b$ y $\epsilon_i(0, 0, 0) \neq 0$.

Ahora bien si S_1, \dots, S_r son las componentes irreducibles de S , cada S_i tiene por ecuación P_i , luego es cuasiordinaria.

Nota 3.3. Supongamos ahora que S es cuasiordinaria e irreducible y sea $P(X, Y, Z)$ una ecuación de S tal que

$D_Z(P) = X^a Y^b \epsilon(X, Y, Z)$. En esta situación $P(X, Y, Z)$ se descompone en factores lineales, $P(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^s (Z - H_i)$, don

de las H_i son series de exponentes fraccionarios, con un denominador fijo, es decir que existe un n tal que

$H_i \in k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ para todo i ([10], prop. 1.3). Como P es irreducible, las raíces H_i son conjugadas, es decir que fijada $H = H_1$, para cada j , se tiene

$$H_j(X^{1/n}, Y^{1/n}) = H(\omega_1 X^{1/n}, \omega_2 Y^{1/n}), \quad \text{con } \omega_1^n = 1, \omega_2^n = 1 \quad (1)$$

Como $D_Z(P) = \prod_{i \neq j} (H_i - H_j) = X^a Y^b \epsilon(X, Y, Z)$ y

$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ es k -isomorfo a $k[[X, Y]]$, para cada i, j con $i \neq j$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq i$, es $H_i - H_j = X^{a_{ij}} Y^{b_{ij}} \varepsilon_{ij}(X, Y, Z)$ con $\varepsilon_{ij}(0, 0, 0) \neq 0$, y a_{ij} , b_{ij} fracciones de denominador n .

Introducimos en el conjunto de pares (a, b) , $a, b \in \mathbb{Q}$ una relación de orden:

$(a, b) \leq (c, d)$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq d$ (escribiremos $(a, b) < (c, d)$ si $(a, b) \leq (c, d)$ y $(a, b) \neq (c, d)$).

Consideremos ahora el conjunto \mathcal{K} de los pares (a_{ij}, b_{ij}) antes obtenidos, se verifica que este conjunto está totalmente ordenado por la relación \leq es decir que $\mathcal{K} = \{(\lambda_1, \mu_1), \dots$

$\dots, (\lambda_r, \mu_r)\}$ con $(\lambda_1, \mu_1) < \dots < (\lambda_r, \mu_r)$ y para cada i $(\lambda_i, \mu_i) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. A los pares así obtenidos se les llama pares

característicos de $P(X, Y, Z)$, o bien pares característicos de S respecto de $\{x, y, z\}$. Estos pares característicos, aparecen como exponentes en algún monomio de H , y todo par (a, b) que aparece como exponente en H se puede poner como combinación lineal con coeficientes enteros de los (λ_i, μ_i) , módulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y se verifican unas relaciones similares a las de los exponentes característicos en el caso de curvas (véase [10], prop. 1.5).

Si consideramos H_0 , la suma de todos los monomios de H con exponentes enteros se tiene

$$H = H_1 = H_0 + X^{\lambda_1} Y^{\mu_1} \bar{H}_1(X^{1/n}, Y^{1/n}), \text{ con } \bar{H}_1(0, 0) \neq 0$$

y por (1), para $j \geq 2$.

$$H_j = H_0 + X^{\lambda_1} Y^{\mu_1} \bar{H}_j(X^{1/n}, Y^{1/n}), \text{ con } \bar{H}_j(0, 0) \neq 0$$

Si hacemos el cambio $z' = z - H_0(x, y)$ obtenemos una ecuación

$$P(X, Y, Z') = \prod_{i=1}^s (Z' - X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} \bar{H}_i(X^{1/n}, Y^{1/n})) \quad (2)$$

Si en esta situación $\mu_1 = 0$, y $\lambda_1 < 1$, S es cuasiordinaria respecto de $\{y, z\}$, y los pares característicos de S respecto de $\{y, z, x\}$ son

$$(\lambda'_i, \mu'_i) = (1/\lambda_1 (\lambda_i + 1 - \lambda_1), \mu_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq r \quad (3)$$

salvo quizás el primero $(\lambda'_1, \mu'_1) = (1/\lambda_1, 0)$ que puede ser entero (si $\lambda_1 = 1/m$, con $m \in \mathbb{N}$), en cuyo caso los pares característicos son $\{(\lambda'_2, \mu'_2), \dots, (\lambda'_r, \mu'_r)\}$.

DEFINICION 3.4. Llamaremos ecuación normalizada de S a una ecuación del tipo (2), donde $(\lambda_1, \mu_1) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y tal que si $\mu_1 = 0$ (resp. $\lambda_1 = 0$) es $\lambda_1 > 1$ (resp. $\mu_1 > 1$).

Nota 3.5. Se puede deducir la multiplicidad, el cono tangente y el lugar singular de S , de los pares característicos de una ecuación normalizada de S .

En efecto, en esta situación el grado de P , es el número de raíces conjugadas de H y existe una fórmula para deducir el número de raíces conjugadas s , de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ (c.f. [10], pág 82).

Por (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} m(S) &= s, & \text{si } \lambda_1 + \mu_1 &\geq 1 \\ m(S) &= s \cdot (\lambda_1 + \mu_1), & \text{si } \lambda_1 + \mu_1 &< 1 \end{aligned}$$

El cono tangente tiene por ecuación

$$Z^s, \quad \text{si} \quad \lambda_1 + \mu_1 > 1 \quad (1)$$

$$(Z^t + a X^{t\lambda_1} Y^{t\mu_1})^c \quad \text{con} \quad (Z^t + a X^{t\lambda_1} Y^{t\mu_1}) \text{ irreducible}$$

$$\text{si} \quad \lambda_1 + \mu_1 = 1 \quad ([10], \text{th.2.6})$$

$$\text{y} \quad X^{s\lambda_1} Y^{s\mu_1} \quad \text{si} \quad \lambda_1 + \mu_1 < 1.$$

De la misma forma se puede describir precisamente el lugar singular de S en función de los pares característicos. Nosotros solo indicaremos que las únicas curvas permitidas que pueden aparecer son las de ideales $(x,z) \cdot \square$ y $(y,z) \cdot \square$. De hecho, la curva de ideal $(x,z) \cdot \square$ (resp. $(y,z) \cdot \square$) es permitida si y solo si $\mu_1 \geq 1$ (resp. $\lambda_1 \geq 1$).

Notación 3.6. Si en la situación anterior intercambiamos x e y , obtenemos una ecuación normalizada de S , cuyos pares característicos son $\{(\mu_i, \lambda_i)\}_{1 \leq i \leq r}$.

Si queremos obtener unos pares característicos que representen unívocamente a S , se puede definir una relación de equivalencia:

$$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} \equiv \{(\alpha_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} \quad \text{si y solo si}$$

$$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} = \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r} \quad \delta$$

$$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} = \{(\beta_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Podemos tomar un representante canónico de la clase de equivalencia de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, tomando $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ tal que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \geq (\beta_1, \dots, \beta_r)$ en el orden lexicográfico. A este representante le denotaremos por

$$[(\lambda_i, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r}$$

DEFINICION 3.7. Sean $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, los pares característicos de una ecuación normalizada de S , llamaremos pares característicos normalizados de S a $[(\lambda_i, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r}$.

Nota 3.8. Los pares característicos normalizados de S , no dependen del sistema de parámetros, ni del cuerpo de coeficientes $k \subset \square$ elegido. Veamos ahora la variación de estos pares característicos, mediante transformaciones monoidales y cuadráticas.

Nota 3.9. Sean S superficie cuasiordinaria irreducible, $P(X, Y, Z)$ una ecuación normalizada de S y $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos de $P(X, Y, Z)$. Sea $\mathfrak{D} = \pi^{-1}(\mathfrak{K})$ el divisor excepcional de la transformación cuadrática de S .

Por 3.5 (1) los puntos P_1 y P_2 correspondientes a las direcciones $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ están en \mathfrak{D} . En el caso no transversal ($\lambda_1 + \mu_1 < 1$) el punto P_3 correspondiente a la dirección $(0, 0, 1)$ está también en \mathfrak{D} y se verifica ([10], §4).

i) Transformaciones monoidales

Si $\lambda_1 \geq 1$, y C_x es la curva permitida de ideal $(y, z) \square$, entonces $T.M.C_x(S) = \{S_1\}$, y S_1 es una superficie cuasiordinaria irreducible, cuyos pares característicos normalizados son:

$$[(\lambda_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r}$$

salvo que $\{(\lambda_1 - 1, \mu_1)\} \equiv \{(\alpha, 0)\}$ con $\alpha < 1$, en este caso los pares característicos normalizados se obtienen aplicando la transformación de 3.3 (3).

Para $\mu_1 \geq 1$ resulta lo mismo. Además, $m(S_1) = m(S)$ si y solo si $\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1$.

ii) Transformaciones cuadráticas. Caso transversal ($\lambda_1 + \mu_1 \leq 1$)

Sea S_P la transformada cuadrática en P , si $P \in \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}$ S_P es equisingular a lo largo del divisor excepcional. S_{P_1} y S_{P_2} son superficies cuasiordinarias irreducibles, cuyos pares característicos normalizados son respectivamente:

$$[(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r}$$

y

$$[(\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1)]_{1 \leq i \leq r}$$

salvo que se aplique la transformación de 3.3 (3).

Por otra parte, $m(S_{P_1}) = m(S)$ (resp. $m(S_{P_2}) = m(S)$) si y solo si $\lambda_1 + 2\mu_1 - 1 \geq 1$ (resp. $2\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1$).

iii) Transformaciones cuadráticas. Caso no transversal ($\lambda_1 + \mu_1 < 1$)

En este caso, para todo $P \in \mathcal{D} - \{P_1, P_2, P_3\}$, S_P es equisingular a lo largo del divisor excepcional, S_{P_1} , S_{P_2} y S_{P_3} son superficies cuasiordinarias irreducibles, cuyos pares característicos normales son respectivamente

$$[(\lambda_i + 1/\mu_1 (1 + \mu_i)(1 - \lambda_1) - 2, 1/\mu_1 (1 + \mu_i) - 1)]_{1 \leq i \leq r}$$

$$[(\mu_i + 1/\lambda_1 (1 + \lambda_i)(1 - \mu_1) - 2, 1/\lambda_1 (1 + \lambda_i) - 1)]_{1 \leq i \leq r}$$

$$[((\lambda_i(1 - \mu_1) + \mu_i \cdot \lambda_1) / 1 - \lambda_1 - \mu_1, (\lambda_i \mu_1 + \mu_i(1 - \lambda_1)) / 1 - \lambda_1 - \mu_1)]_{1 \leq i \leq r}$$

Salvo que en el primer par los dos términos sean enteros, en cuyo caso se suprime. En este caso, $m(S_{P_1})$, $m(S_{P_2})$ y $m(S_{P_3})$ son menores que $m(S)$.

DEFINICION 3.10. Sea S superficie cuasiordinaria, llamaremos género de S ($g(S)$) al número de pares característicos normalizados de S .

Observación 3.11. Por lo visto en 3.9 $g(S_{p_i})$ es $g(S)$ ó $g(S)-1$, y lo mismo para $g(S_1)$.

Nota 3.12. Sean S una superficie cuasiordinaria irreducible, y $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ sus pares característicos normalizados. Se demuestra facilmente por inducción, utilizando ([10], th. 7.4) y 3.10, que S es una singularidad de tipo dimensional 1 si y sólo si $\mu_i = 0$ para todo i .

Situación 3.13. Sea $S = \text{Spec}(\square)$ una superficie estrictamente cuasiordinaria y reducible, y sea $S = \bigcup_{i=1}^r S_i$ su descomposición en componentes irreducibles. Sean $\{x, y\}$ un sistema de parámetros transversales de S , respecto del cual S sea cuasiordinaria y $\Delta_{x,y}$ tiene por ecuación $X \cdot Y$, y $z \in \mathfrak{m}$ tal que $\{x, y, z\}$ es un sistema de coordenadas de S . Consideremos la ecuación de S respecto de $\{x, y, z\}$

$$Z^S + \sum_{i=1}^S A_i(X, Y) Z^{S-i}$$

Sustituyendo z por $z + \frac{A_1(x, y)}{s}$ la ecuación queda de la forma

$$P(X, Y, Z) = Z^S + \sum_{i=2}^S A_i(X, Y) Z^{S-i}$$

Se verifica entonces (c.f. [22], prop. 2.1 y 2.2)

$$P(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^S (Z - X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}))$$

donde para algún i , $H_i(0,0) \neq 0$, y si (λ_i, μ_i) es el primer par característico de S_i respecto de $\{x,y,z\}$

$$(\lambda, \mu) = \text{mínimo } \{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

En esta situación definimos siguiendo a Zariski $\lambda(S) = \lambda + \mu \geq 1$.

Consideremos los ideales de \square , $I_x = (y,z) \cdot \square$ e $I_y = (x,z) \cdot \square$, estos son los únicos ideales permitidos que puede contener \square , y I_x (resp. I_y) es permitido si y sólo si $\mu \geq 1$ (resp. $\lambda \geq 1$). En esta situación el comportamiento de S respecto a transformaciones monoidales y cuadráticas, es el siguiente

PROPOSICION 3.14. En la situación anterior, supongamos que $\mu \geq 1$ y sea C_x la curva permitida correspondiente a I_x . Se verifica entonces:

- 1) $T.M.C_x(S) = \{S_1\}$
- 2) S_1 es una superficie cuasiordinaria
- 3) $m(S_1) = m(S)$ si y solo si $\lambda(S) - 1 \geq 1$, y si esto ocurre S_1 es estrictamente cuasiordinaria y $\lambda(S_1) = \lambda(S) - 1$

El mismo enunciado es cierto cambiando λ por μ y C_y por C_x .

Demostración.- Como $\mu \geq 1$, $\lambda + \mu > 1$, ya que si $\lambda + \mu = 1$, ambos números serían enteros y esto no puede ser pues (λ, μ) es el primer par característico de algún S_i . Luego $\text{in}(P) = \mathbb{Z}^V$. Dado que $(y,z) \cdot \square$ es el ideal de C_x , $\{x,y,z\}$ es un sistema de coordenadas de S adaptado a C_x y $T.M.C_x(S) = \{S_1\}$ por 1.14.

Una ecuación de S_1 es

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = \frac{1}{Y_1^s} P(X_1, Y_1, Z_1 \cdot Y_1)$$

Como por hipótesis $D_Z(P) = X^a Y^b \varepsilon(X, Y)$, con $\varepsilon(0, 0) \neq 0$, por 1.15, cap. I.

$$D_{Z_1}(P_1) = X_1^a Y_1^{b-s(s-1)} \varepsilon(X_1, Y_1)$$

con lo que S_1 es cuasiordinaria.

Hemos visto antes que

$$P(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^s (Z - X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})),$$

luego

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^s (Z_1 - X_1^\lambda Y_1^{\mu-1} H_i(X_1^{1/n}, Y_1^{1/n})) \quad (1)$$

Es claro entonces que $m(S_1) = m(S)$ si y solo si $0(P_1) = s$ si y solo si $\lambda + \mu - 1 = \lambda(S) - 1 \geq 1$.

Si esto ocurre S es estrictamente cuasiordinaria y por (1)

$$\lambda(S_1) = \lambda(S) - 1. \quad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICION 3.15.- En la situación anterior, los puntos P_1 y P_2 , correspondientes a las direcciones $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ están en el divisor excepcional \mathcal{D} y se verifica:

- 1) Para todo $P \in \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}$, S_P es equisingular a lo largo del divisor excepcional.
- 2) S_{P_1} y S_{P_2} son superficies cuasiordinarias y
- 3) $m(S_{P_1}) = m(S)$ si y solo si $\lambda_1 + 2\mu_1 - 1 \geq 1$ y si se cumple esto, S_{P_1} es estrictamente cuasiordinaria y $\lambda(S_{P_1}) = \lambda(S) + \mu_1 - 1$, y lo mismo para S_{P_2} .

Demostración.- Consideraremos dos casos según que $\lambda(S)$ sea igual o mayor que 1:

$$a) \lambda(S) = \lambda + \mu > 1$$

En este caso $\text{in}(P) = Z^s$, con lo que P_1 y P_2 pertenecen a \mathcal{D} . Sea $D_Z(P) = X^a \cdot Y^b \varepsilon(X, Y)$. Si $P \in \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}$ la dirección correspondiente es $(\alpha, \beta, 0)$ con $\alpha \cdot \beta \neq 0$ con lo que (α, β) no anula a la forma inicial de $D_Z(P)$. En esta situación se sigue que S_P es equisingular a lo largo de el divisor excepcional de un resultado más general demostrado en 3.1, cap II, por lo que remitimos para la demostración a dicho resultado.

Una ecuación de S_{P_1} es

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = \frac{1}{X_1^s} P(X_1, X_1 \cdot Y_1, X_1 \cdot Z_1)$$

$$X_1^{s(s-1)} D_{Z_1}(P_1) = X_1^a (X_1 \cdot Y_1)^b \varepsilon(X_1, X_1 \cdot Y_1)$$

luego por 1.15,

$$D_{Z_1}(P_1) = X_1^{a+b-s(s-1)} Y_1^b \varepsilon(X_1, X_1 \cdot Y_1), \text{ con } \varepsilon(0,0) \neq 0$$

y por lo tanto S_P es cuasiordinaria.

Por otro lado

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^s (Z_1 - X_1^{\lambda+\mu-1} Y_1^\mu H_i(X_1^{1/n}, X_1^{1/n}, Y_1^{1/n})) \quad (1)$$

Como existe un i , tal que $H_i(0,0) \neq 0$, es claro que

$$m(S_{P_1}) = m(S) = s \text{ si y solo si } \lambda + \mu - 1 + \mu \geq 1.$$

Si $m(S_{P_1}) = s$, $\{x_1, y_1\}$ es un sistema de parámetros transversales de S_{P_1} y S_{P_1} es estrictamente cuasiordinaria.

Además $(\lambda+\mu-1, \mu) \notin Z \times Z$, ya que $(\lambda, \mu) \notin Z \times Z$, con lo que (1) es una ecuación que cumple las condiciones de 3.13. y entonces $\lambda(S_{P_1}) = \lambda+2\mu-1 = \lambda(S)+\mu-1$.

Para S_{P_2} , la demostración es la misma.

$$b) \lambda(S) = \lambda + \mu = 1.$$

Puesto que λ y μ no pueden ser enteros a la vez,

$0 < \lambda < 1$, y $0 < \mu < 1$. Ordenamos los H_i de tal forma que $H_i(0,0) \neq 0$ si $1 \leq i \leq k$ y $H_i(0,0) = 0$ si $k+1 \leq i \leq s$.

Entonces la forma inicial de p es

$$\text{in}(p) = \prod_{i=1}^k (Z - X^\lambda Y^\mu H_i(0,0)) \cdot Z^{s-k} \quad (2)$$

Luego $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ anula $\text{in}(P)$ y P_1 y P_2 pertenecen a \mathcal{D} . Sea $P \in \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}$, si (α, β, γ) es la dirección correspondiente a P entonces $\alpha \cdot \beta \neq 0$, y por la misma razón que en a) S_P es equisingular a lo largo del divisor excepcional. Se demuestra de la misma forma que en a) que S_{P_1} y S_{P_2} son superficies cuasiordinarias.

Una ecuación de S_P es

$$\begin{aligned} P_1(X_1, Y_1, Z_1) &= \frac{1}{X_1^s} P(X_1, X_1 Y_1, X_1 Z_1) = \\ &= \prod_{i=1}^s (Z_1 - Y_1^\mu \cdot H_i(X_1^{1/n}, X_1^{1/n} \cdot Y_1^{1/n})) \end{aligned}$$

Por (2), $0(P_1) = s - k + k\mu < s$, y por tanto $m(S_{P_1}) < m(S_P)$.

En este caso $\lambda(S)+\mu-1 = \lambda+\mu+\mu-1 = \mu < 1$.

Para S_{P_2} , resulta $m(S_{P_2}) = s - k + k\lambda$

c.q.d.

CAPITULO II

Sección 1.

Esta sección está dedicada a introducir el concepto de árbol pesado, concepto esencial en la memoria. La idea es considerar un sistema de conjuntos y aplicaciones, y su expresión gráfica equivalente, que es un grafo, conexo y sin ciclos y con un generador. Estos grafos aparecen al considerar el proceso de resolución de una curva mediante transformaciones cuadráticas. En el caso de superficies se puede efectuar transformaciones monoidales o cuadráticas, para distinguir unas de otras hay que dotar de pesos a las flechas del árbol, lo cual da origen al concepto de grafo pesado.

DEFINICION 1.1.- Llamaremos árbol a toda familia de conjuntos y aplicaciones $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, $I = \mathbb{N}$ ó $I = \{0, 1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

- i) X_0 es un conjunto con un solo elemento.
- ii) Para cada $i \in I$, X_i es finito, y si $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$
- iii) Para cada $i \in I - \{0\}$, π_i es una aplicación de X_i en X_{i-1} .

Nota 1.2.- Dado un árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, le asociaremos un grafo $G = G(\mathcal{A})$ construido de la siguiente forma:

$G(\mathcal{A}) = (V(\mathcal{A}), L(\mathcal{A}))$ es un grafo de conjunto de vértices $V(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i$, y el de lados o aristas

$$L(\mathcal{A}) = \{(\pi_i(p_i), p_i) / i \in I - \{0\}, p_i \in X_i\} \subset V(\mathcal{A}) \times V(\mathcal{A})$$

Se comprueba fácilmente que $G(\mathcal{A})$ es un grafo conexo y sin ciclos. Además $X_0 = \{P_0\}$, para todo $P \in V(\mathcal{A}) - \{P_0\}$ existe un único camino que va de P_0 a P . (P_0 es una raíz de $G(\mathcal{A})$ en la terminología de Berge, [3], cap. 3).

Para proceder a la construcción inversa, consideremos un grafo conexo y sin ciclos y que admite una raíz a . Entonces para cada vértice b de G , $b \neq a$, existe un único camino que va de " a " a " b ". y sea $l(b)$ la longitud de este camino. Para cada $n \geq 1$, consideramos el nivel $N_n = \{b \text{ vértice de } G / l(b) = n\}$ y $N_0 = \{a\}$.

Si $b \in N_n$, existe un único camino que une a con b , definimos $\pi_n(b) = b'$, siendo (b', b) la arista de este camino cuyo extremo es b . Se tiene obviamente que

$$\pi_n : N_n \longrightarrow N_{n-1}$$

Sea $I = \{i \in \mathbb{N} / N_i \neq \emptyset\}$ y supongamos que los niveles N_i son finitos, entonces $\mathcal{A} = \{N_i, \pi_i\}_{i \in I}$, es un árbol cuyo grafo asociado es G .

Existe pues una correspondencia biunívoca entre árboles, y grafos conexos, sin ciclos, con una raíz y tal que los niveles N_i son finitos.

Utilizando esta correspondencia el concepto de isomorfismo de grafos se traduce al lenguaje de árboles de la siguiente forma:

DEFINICION 1.3.- Un isomorfismo ψ entre dos árboles

$\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{A}' = \{Y_i, \tau_i\}_{i \in I}$, con el mismo conjunto de índices, es una familia $\underline{\psi} = (\psi_i)_{i \in I}$, de aplicaciones biyectivas,

$\psi_i : X_i \longrightarrow Y_i$, de modo que para cada $i \in I - \{0\}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\pi_i} & X_{i-1} \\ \psi_i \downarrow & & \downarrow \psi_{i-1} \\ Y_i & \xrightarrow{\tau_i} & Y_{i-1} \end{array}$$

es conmutativo.

DEFINICION 1.4.- Sean \mathcal{A} y \mathcal{A}^* árboles, se dice que \mathcal{A}^* es un sub-árbol de \mathcal{A} si y solo si $G(\mathcal{A}^*)$ es un subgrafo de $G(\mathcal{A})$, es decir $V(\mathcal{A}^*) \subset V(\mathcal{A})$ y $L(\mathcal{A}^*) = \{(P, P') \in L(\mathcal{A}) / P, P' \in V(\mathcal{A}^*)\}$.

Notación 1.5.- Sea $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, un árbol de $P \in V(\mathcal{A})$ si $P \in X_{i_0}$, consideremos $K = \{k \in \mathbb{N} / k+i_0 \in I\}$, $Y_0 = \{P_{i_0}\}$, $Y_1 = \pi_{i_0+1}^{-1}(Y_0)$, si $2 \in K$, definimos $Y_2 = \pi_{i_0+2}^{-1}(Y_1)$, por recurrencia definimos Y_k para todo $k \in K$ $Y_k = \pi_{i_0+k}^{-1}(Y_{k-1})$. Consideremos entonces $J = \{k \in K / Y_k \neq \emptyset\}$.

Es claro entonces que $\{Y_k, \pi_{i_0+k} / Y_k\}_{k \in J}$ es un subárbol de \mathcal{A} , que notaremos por $\underline{\mathcal{A}}(P)$. Corresponde a considerar todos los vértices siguientes a P en el grafo $G(\mathcal{A})$.

DEFINICION 1.6.- Si $I = \{0, 1, \dots, n\}$, diremos que el árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$ es finito y de longitud n , si $I = \mathbb{N}$, diremos que \mathcal{A} es infinito.

Dado un árbol \mathcal{A} , una sucesión finita o infinita

$\{P_{i_0}, P_{i_0+1}, \dots\}$ tal que $\pi_k(P_k) = P_{k-1}$, $i_0+1 \leq k$ se denomina rama de \mathcal{A} de origen P_{i_0} . Si $\#\{P_{i_0}, \dots, P_k, \dots\} = n+1$

la rama se dice finita y de longitud n .

El siguiente lema elemental es útil para determinar cuando un árbol es finito.

LEMA 1.7.- Un árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$ es finito si y solo si toda rama de \mathcal{A} es de longitud finita.

Demostración.- Es evidente que si \mathcal{A} es finito toda rama de es finita. Veamos que la inversa también se cumple.

Supongamos que \mathcal{A} es infinito, i.e. $I = \mathbb{N}$.

Si para cada $P \in X_1$, $\mathcal{A}(P)$ es finito, entonces $\text{long}(\mathcal{A}) = \max \{\text{long} \mathcal{A}(P) \mid P \in X_1\} + 1$, luego si $I = \mathbb{N}$, existe un elemento de X_1 , P_1 , tal que $\mathcal{A}(P_1)$ es infinito.

Por la misma razón existe $P_2 \in \pi_2^{-1}(P_1)$, tal que $\mathcal{A}(P_2)$ es infinito. Se puede construir de esta forma una rama $\{P_0, P_1, \dots, \}$ tal que $\mathcal{A}(P_i)$ es infinito, para cada i , con lo que la rama es infinita, y se llega a contradicción.

Dado un árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, necesitaremos distinguir unos vértices de otros y también entre los lados; esto se consigue dando un peso a cada vértice y a cada lado.

DEFINICION 1.8.- Un árbol pesado es un triple $(\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ formado por un árbol $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$ y dos aplicaciones

$$\alpha : V(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \beta : L(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{N}$$

De forma natural definiremos un isomorfismo de árboles pesados como un isomorfismo de árboles que conserva los pesos,

es decir:

DEFINICION 1.9.- Un isomorfismo entre dos árboles pesados

$(\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ y $(\mathcal{A}', \alpha', \beta')$ es un isomorfismo $\underline{\psi} = (\psi_i)_{i \in I}$, entre \mathcal{A} y \mathcal{A}' tal que

$$\alpha = \alpha' \cdot \psi_i \quad \text{para cada } i \in I - \{0\} \quad \text{y}$$

$$\beta(P_{i-1}, P_i) = \beta'(\psi_{i-1}(P_{i-1}), \psi_i(P_i))$$

DEFINICION 1.10.- Un árbol pesado $(\mathcal{A}^*, \alpha^*, \beta^*)$ es un subárbol pesado de $(\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ si \mathcal{A}^* es un subárbol de \mathcal{A} , y

$$\alpha^* = \alpha|_{V(\mathcal{A}^*)} \quad \text{y} \quad \beta^* = \beta|_{L(\mathcal{A}^*)}$$

Como ejemplo de árbol pesado vamos a describir el árbol de una curva algebroide plana, que corresponde a lo que clásicamente se llama la configuración de puntos infinitamente próximos.

Sea C una curva algebroide plana, si $m(C) = 1$ tomamos $X_0 = \{C\}$ y $\mathcal{A} = \{X_0\}$ es el árbol de C .

Si $m(C) > 1$, definimos $X_0 = \{C\}$ y $X_1 = T(C) = \{C_1^1, \dots, C_\alpha^1\}$. Si existe $C_k^1 \in X_1$ con $m(C_k^1) > 1$, ponemos

$$X_2 = \bigcup_{C_k^1 \in X_1, m(C_k^1) > 1} T(C_k^1)$$

Dado X_{i-1} , si existe $C^{i-1} \in X_{i-1}$ tal que $m(C^{i-1}) > 1$, definimos $X_i = \bigcup_{C^{i-1} \in X_{i-1}, m(C^{i-1}) > 1} T(C^{i-1})$.

Se obtiene de esta forma una sucesión X_0, X_1, \dots , de conjuntos

finitos. Si existe n_0 tal que para todo $C^{n_0} \in X_{n_0}$ es $m(C^{n_0}) = 1$, es entonces $I = \{0, \dots, n_0\}$ y el árbol será finito y de longitud n_0 ; si esto no ocurre $I = \mathbb{N}$ y el árbol es infinito.

Nota 1.11.- Sea $T(C) = \{C_1^1, \dots, C_d^1\}$, si $i \neq j$ $C_i^1 \neq C_j^1$ como objetos, es decir como elementos de $T(C)$, aunque eventualmente como curvas (esquemas) sean isomorfos. Por la misma razón si C, C' son curvas distintas $T(C)$ y $T(C')$ son conjuntos disjuntos.

Definiremos las aplicaciones $\pi_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$

$$\pi_1 : X_1 \longrightarrow X_0 \quad \text{es} \quad \pi_1(C_i^1) = C$$

Sea $X_2 = \bigcup_{m(C_k^1) > 1} T(C_k^1)$, en virtud de la nota 1.11. los

$T(C_k^1)$ son disjuntos luego para cada $C^2 \in X_2$, existe un único $C^1 \in X_1$ tal que $C^2 \in T(C^1)$, se define $\pi_2(C^2) = C^1$. De la misma forma se define $\pi_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$, para cada $i \in I - \{0\}$.

Sea $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, los X_i son finitos y por construcción si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$. Luego \mathcal{A} es un árbol. Dotaremos de pesos a este árbol:

$$\alpha : v(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \text{está definida por:}$$

$$\alpha(C') = m(C'), \quad \text{con } C' \in v(\mathcal{A})$$

En este caso no se necesita diferenciar entre las distintas aristas de \mathcal{A} , así que definimos β como una aplicación constante.

Por ejemplo:

$$\beta((C^{i-1}, C^i)) = 1, \quad \text{con} \quad (C^{i-1}, C^i) \in L(\mathcal{A}).$$

DEFINICION 1.12.- Al árbol pesado así construido lo llamaremos árbol de la curva C, y lo denotaremos por $A_r(C) = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$.

Nota 1.13.- Sea C' un vértice de $A_r(C)$. Si consideramos $\mathcal{A}(C')$ es claro que $(\mathcal{A}(C'), \alpha|_{V(\mathcal{A}(C'))}, \beta|_{L(\mathcal{A}(C'))})$ es $A_r(C')$.

Dada una rama de \mathcal{A} , $\{C^0, C^1, C^2, \dots, C^i\}$ de longitud i tal que $m(C^i) = 1$, esta rama no es ampliable. Por lo tanto el teorema clásico que dice que en toda sucesión

$$\text{-----} \rightarrow C^i \rightarrow C^{i-1} \rightarrow \text{-----} \rightarrow C^0 = C, \text{ de transformaciones cuadráticas, existe un } k \text{ tal que } m(C^k) = 1, \text{ nos permite afirmar:}$$

LEMA 1.14.- Sea C una curva algebroide plana entonces $A_r(C) = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ es finito.

Demostración.- En efecto toda rama de \mathcal{A} es de longitud finita, y por 1.7, \mathcal{A} es finito.

DEFINICION 1.15.- Dada una curva algebroide plana C , llamaremos $l(C)$ a la longitud de \mathcal{A} , siendo $A_r(C) = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$.

Veamos que la equisingularidad de curvas algebroides planas implica la igualdad de sus árboles.

PROPOSICION 1.16.- Sean C y D curvas algebroides planas equisingsulares entonces $A_r(C)$ y $A_r(D)$ son isomorfos.

Demostración.- Como C y D son equisingulares:

$l(C) = 0$ si y solo si $l(D) = 0$, ya que C es regular si y solo si D es regular. Basándose en esto, se comprueba inmediatamente que si C y D son equisingulares $l(C) = l(D)$.

Demostraremos la proposición por inducción en $l(C)$.

Sean C y D tal que $l(C) = l(D) = 1$.

Sean $(C) = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ y $(D) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ las ramas de C y D , y supongamos las γ_i , ordenadas de tal forma que la (a)-equivalencia, $\rho : (C) \longrightarrow (D)$, sea $\rho(\delta_i) = \gamma_i$. Como $l(C) = 1$, $\#(C) = \#T(C)$, pues si $T(C)$ contuviera menos de r curvas, existiría $C^1 \in T(C)$ con al menos dos ramas con lo que $m(C^1) > 1$, y $l(C) > 1$.

Así pues $X_1 = T(C) = \{\delta_1^1, \dots, \delta_r^1\}$, con $m(\delta_i^1) = 1$

y $Y_1 = T(D) = \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_r^1\}$ con $m(\gamma_i^1) = 1$

Definiendo entonces $\psi : X_0 \longrightarrow Y_0$, por $\psi_0(C) = D$ y

$\psi_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, por $\psi_1(\delta_i^1) = \gamma_i^1$, es claro que

$\underline{\psi} = (\psi_0, \psi_1)$ es un isomorfismo de $A_r(C)$ en $A_r(D)$.

Supongamos cierto el enunciado para $i-1$, y sean C y D equisingulares, tal que $l(C) = l(D) = i$. Sean

$T(C) = \{C_1^1, \dots, C_d^1\}$ y $T(D) = \{D_1^1, \dots, D_d^1\}$ y $\rho : (C) \longrightarrow (D)$

una (a)-equivalencia. Supongamos que los D_k^1 , están ordenados de tal forma que para $1 \leq k \leq d$

$\rho_k^1 : (C_k^1) \longrightarrow (D_k^1)$ es la (a)-equivalencia inducida

por ρ , y así C_k^1 y D_k^1 son equisingulares. Como

$l(C_k^1) \leq l(C) - 1 = i-1$, por hipótesis de inducción, existe un

isomorfismo $\underline{\psi}^k$ entre $A_r(C_k^1)$ y $A_r(D_k^1)$.

Por la nota 1.13, $A_r(C_k^1) = (\mathcal{A}(C_k^1), \alpha|_{V(\mathcal{A}(C_k^1))}, \beta|_{L(\mathcal{A}(C_k^1))})$. Luego si $A_r(C) = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$, con $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$

es $\mathcal{A}(C_k^1) = \{H_j^k, \pi_j | H_j^k\}_{0 \leq j \leq l(C_k^1)}$ con $H_0^k = \{C_k^1\}$

y $H_j^k = \pi_{j+1}^{-1}(H_{j-1}^k)$, con $1 \leq j \leq l(C_k^1) - 1$.

(1) Además si $i \in I - \{0\}$, $X_i = \bigcup_{l(C_k^1) \leq i-1} H_{i-1}^k$, y esta

unión es disjunta.

De la misma forma si $A_r(D) = (\mathcal{A}^*, \alpha^*, \beta^*)$, con $\mathcal{A}^* = \{Y_i, \tau_i\}_{i \in I}$

(2) es $Y_i = \bigcup_{l(D_k^1) \leq i-1} L_{i-1}^j$ siendo

$\{L_i^k, \tau_i | L_i^k\}_{0 \leq i \leq l(D_k^1)}$ el árbol de D_k^1 .

Así para $1 \leq k \leq d$, $0 \leq j \leq l(C_k^1)$, $\psi_j^k : H_j^k \longrightarrow L_j^k$

es biyectiva, y por (1) y (2), los $\{\psi_i^k\}_{1 \leq k \leq d}$ inducen una biyección ψ_i entre X_i y Y_i , y se comprueba inmediatamente que para cada i , el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{\psi_i} & Y_i \\
 \pi_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\
 X_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & Y_{i-1}
 \end{array}
 \quad \text{es conmutativo.}$$

Como al construir $A_r(C_k^1)$ se utilizan las restricciones de α y β y las ψ_i^k conservan estas, entonces la ψ_i conservan α y β .

c.q.d.

Nota 1.17.- Si $\gamma \in (C)$ es una rama de C , existe un i único tal que $\gamma^i \in X_i$, con $m(\gamma^i) = 1$, y para cada $C' \in X_i$ tal que $m(C') = 1$, C' tiene una sola rama. De aquí se deduce que: n° de ramas de $C = \#(C) = \#\{C' \in V(\mathcal{A}) \mid m(C') = 1\}$.

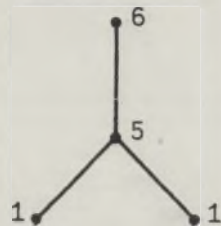
Ejemplo 1.18.- La equisingularidad de curvas implica la igualdad de árboles como hemos visto, pero la inversa no es cierta como se ve en el ejemplo siguiente:

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0, y sean

$$\square = k[[X, Y]] / ((Y^3 + X^5) \cdot (Y^3 + X^7)) \cdot k[[X, Y]],$$

$$\square^* = k[[X, Y]] / (Y^2 + X^5)(Y^4 + X^7) \cdot k[[X, Y]]$$

Sean $C = \text{Spec}(\square)$ y $D = \text{Spec}(\square^*)$. Los árboles C y D son isomorfos. Concretamente el grafo correspondiente a ambos es de la forma:



Ambas curvas tienen dos ramas. Las de C son:

$$\gamma_1 = \text{Spec}(k[[X, Y]] / (Y^3 + X^5) \cdot k[[X, Y]]) \quad \text{y}$$

$$\gamma_2 = \text{Spec}(k[[X, Y]] / (Y^3 + X^7) \cdot k[[X, Y]])$$

de multiplicidades, $m(\gamma_1) = 3$ y $m(\gamma_2) = 3$.

Las de δ_1 y δ_2 tienen multiplicidades, $m(\delta_1) = 2$ y $m(\delta_2) = 4$. Luego no puede existir una (a)-equivalencia entre $(C) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ y $(D) = \{\delta_1, \delta_2\}$. Es decir C y D no son equisingulares.

Observación 1.19.- Zariski prueba en ([20], sec. 2), que la equisingularidad entre $C = \text{Spec}(A)$ y $D = \text{Spec}(A^*)$, depende sólo de A y A^* , y no del cuerpo de coeficientes k , elegido, más precisamente se tiene:

"Si $A \approx A^*$, entonces C y D son equisingulares, sobre cualquier cuerpo de coeficientes algebraicamente cerrado y de característica 0 que se elija en A y A^* ".

Por la proposición 1.16 esta observación vale también para la definición de $A_r(C)$.

Sección 2.

Acabamos de ver que la igualdad de árboles es una relación más débil que la equisingularidad en curvas. El propósito de esta sección, es ver que cuando se trata de comparar la sección genérica de una hipersuperficie V transversal a una subvariedad permitida W de codimensión 1 con una sección de V transversal a W , ambas relaciones coinciden. Es decir, debido a la genericidad se eliminan problemas como los del ejemplo.

Situación 2.1.- Sea $V = \text{Spec}(\square)$ una hipersuperficie algebraica de dimensión d , W una subvariedad permitida de dimensión $d-1$. Si \mathfrak{p} es el punto general de W , como V es una hipersuperficie W es permitida si y sólo si $m(\square) = m(\square_{\mathfrak{p}})$.

Sean $\{x_2, \dots, x_d\}$ parámetros W -transversales de V , existen $z, x_1 \in \mathfrak{m}$, tal que $\{x_1, \dots, x_d\}$ son parámetros transversales de V y $(z, x_1, x_2, \dots, x_d) \square = \mathfrak{m}$, (por ser W permitida).

Sea $F(Z, X_1, X_2, \dots, X_d) \in k[[Z, X_1, \dots, X_d]]$, la ecuación de V respecto de este sistema de coordenadas y sea $v = m(V) = m(F)$. Las imágenes de z y x_1 por el homomorfismo natural de \square en $\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \hat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})}$ son un sistema de coordenadas de la sección genérica de V transversal a W , $C_W = \text{Spec}(\widehat{\square}_{\mathfrak{p}} \hat{\otimes}_{K(\mathfrak{p})} \overline{K(\mathfrak{p})})$ (2.5, cap. I) respecto del cual una ecuación de C_W es:

$$F(Z, X_1, X_2, \dots, X_d) \in k[[X_2, \dots, X_d]] [[Z, X_1]]$$

Como W es permitida, la multiplicidad de F en Z, X_1 es v ,

es decir $F = F_v + F_{v+1} + \dots$, con F_i forma de grado i en Z, X_1 con coeficientes en $k[[X_2, \dots, X_d]]$, para $i \geq v$ y $F_v \neq 0$.

Nota 2.2.- Sean $\{x_2, \dots, x_d\}$ parámetros W -transversales de V , y sea

$$V_{(x)} = \text{Spec} \left((k[[Z, X_1]] / (x_2 \dots x_d))_{\text{red}} \right)$$

$$\text{Si } \underline{m(V_{(x)}) = m(V) = v}, \text{ como } k[[Z, X_1]] / (x_2, \dots, x_d) \approx \\ \approx k[[Z, X_1]] / (F_0(Z, X_1))$$

siendo $F_0(Z, X_1) = F(Z, X_1, 0, \dots, 0) = Z^v + \dots$, (por ser $\{x_2, \dots, x_d\}$ parámetros transversales), y $v = m(V_{(x)}) = m((F_0)_{\text{red}})$, se sigue que $(F_0)_{\text{red}} = F_0$ es decir que $F_0(Z, X_1)$ es una ecuación de $V_{(x)}$.

A los transformados cuadráticos de $V_{(x)}$ los denotaremos por $(V_{(x)})_i^1$ es decir $T(V_{(x)}) = \{(V_{(x)})_1^1, \dots, (V_{(x)})_r^1\}$.

PROPOSICION 2.3.- En las condiciones de 2.1, supongamos además que $m(V_{(x)}) = m(C_W)$ y $r = \#T(V_{(x)}) = \#T(C_W)$, se cumple que:

$$\text{i) } \#T.M._W(V) = r, \text{ es decir } T.M._W(V) = \{V_1^1, \dots, V_r^1\}.$$

ii) Si $1 \leq i \leq r$ y $\pi_i : V_i^1 \longrightarrow V$ es la transformación monoidal, $\mathfrak{p}_i = \pi_i^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal regular de V_i^1 y existen parámetros \mathfrak{p}_i -transversales de V_i^1 , $\{x^i\}$ tales que

$$V_{i(x^i)}^1 \approx (V_{(x)})_i^1.$$

Demostración.- Como $m(V_{(x)}) = m(C_W) = m(V) = v$, por 2.2 $F_0(Z, X_1)$ es la ecuación de $V_{(x)}$, y si $r = \#T(V_{(x)})$ es

$$\text{in}(F_0) = \prod_{i=1}^v (Z - C_i X_1)^{\alpha_i}, \quad \text{con } C_i \neq C_j \text{ si } i \neq j \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = v$$

luego $\text{in}(F) = \text{in}(F_0) = \prod_{i=1}^r (Z - C_i X_1)^{\alpha_i}$ y por 1.13, cap. I, $\#T.M.W(V) = r$.

Los V_i^1 , $1 \leq i \leq r$ se obtienen explícitamente de la siguiente forma:

Sea $F'(Z', X_1, \dots, X_d) = X_1^{-v} F(Z', X_1, X_1, X_2, \dots, X_d)$
 entonces $F'(Z', \dots, X_d) = \prod_{i=1}^r F'_i(Z', \dots, X_d)$ con

(1) $F'_i(Z', 0, \dots, 0) = (Z - C_i)^{\alpha_i}$ y V_i^1 es la variedad algebroide centrada en $(C_i, 0, \dots, 0)$ de ecuación F'_i .

Consideremos ahora la descomposición de F en elementos irreducibles en $k[[Z, X_1, X_2, \dots, X_d]]$, $F = \prod_{j=1}^k F_j$

(2) Como $F = F_{v_1} + F_{v_1+1} + \dots$, es $F_j = F_{v_j} + F_{v_j+1} + \dots$,

con $v_j = m(F_j)$ y F_h una forma de grado h en Z, X_1 con coeficientes en $k[[X_2, \dots, X_d]]$.

En estas condiciones la forma inicial de F_j como elemento de $k[[Z, X_1, \dots, X_d]]$ es potencia de una forma lineal en Z y X_1 .

En efecto, sea V_j la componente irreducible de V correspondiente a F_j . Por (2) W es una subvariedad permitida de V_j .

Si \square_j es el anillo local de V_j en su punto cerrado, \square_j es un dominio de integridad, excelente, luego por ([7],

7.8.3) su cierre integro $\overline{\square}_j$ es un anillo local. Es decir en términos geométricos la normalización de V_j tiene un solo punto cerrado. Como W es permitida, por ([21], pro. 6.1) la normalización de V_j domina a la transformación monoidal de V_j con centro W , luego $\#T.M._W(V_j) = 1$. Esto quiere decir que $\text{in}(F_j)$ es potencia de una forma lineal en Z, X_1 .

Como $\text{in}(F) = \prod_{i=1}^r (Z - C_i X_1)^{\alpha_i}$, para cada j , $1 \leq j \leq k$ existe un i , $1 \leq i \leq r$, tal que $\text{in}(F_j) = (Z - C_i X_1)^{\beta_i}$, con $\beta_i \leq \alpha_i$.

Para cada i , $1 \leq i \leq r$ considero $F_i = \prod_{j \in H(i)} F_{V_j}$, siendo $H(i) = \{j \in \{1, \dots, k\} \mid \text{tal que } \text{in}(F_j) = (Z - C_i X_1)^{\beta_i}\}$.

Por construcción F_i es una forma de grado α_i en $k[[X_2, \dots, X_d]] [Z, X_1]$. Si $i \neq i'$ F_i y $F_{i'}$ no tienen ningún factor en común, puesto que $F_i(Z, X_1, 0, \dots, 0) = (Z - C_i X_1)^{\alpha_i}$ y $F_{i'}(Z, X_1, 0, \dots, 0) = (Z - C_{i'} X_1)^{\alpha_{i'}}$, y $C_i \neq C_{i'}$.

(3) Luego si $i \neq i'$ los ceros de F_i y $F_{i'}$ en $\overline{k((X_2, \dots, X_d))}$ son distintos.

Como F es una ecuación de C_W sobre $\overline{k((X_2, \dots, X_d))}$ $\#T(C_W)$ es precisamente el número de ceros de

$F_V = \prod_{i=1}^r F_i$ en $\overline{k((X_2, \dots, X_d))}$. Por hipótesis $\#T(C_W) = r$, luego F_V tiene r raíces y por (3) cada F_i es potencia de una forma lineal es decir

$$F_i = (Z - W_i X_1)^{\alpha_i}, \text{ donde } W_i \in \overline{k((X_2, \dots, X_d))}.$$

Pero $F_i = Z^{\alpha_i} + A(X_2, \dots, X_d) X_1 Z^{\alpha_i - 1} + \dots \in k[[X_2, \dots, X_d]][X_1, Z]$

luego $W_i = -\frac{1}{\alpha_i} A(X_2, \dots, X_d) \in k[[X_2, \dots, X_d]]$.

Y es claro que $W_i(0, \dots, 0) = C_i$.

Para hallar las ecuaciones de $(C_W)_i^1$, consideramos

$F'(Z', X_1, \dots, X_d)$ como en (1), y sea $Z^* = Z' - W_i(X_2, \dots, X_d)$. En

tonces

$$F^*(Z^*, X_1, \dots, X_d) = F'(Z^* + W_{i_0}(X_2, \dots, X_d), X_1, X_2, \dots, X_d)$$

Pero por (1) $F^*(Z^*, X_1, \dots, X_d) = \left(\prod_{i=1}^r F_i^*(Z^* + W_{i_0}(X_2, \dots, X_d), X_1, \dots, X_d) \right)$

como $W_{i_0}(0) = C_{i_0}$, si $i \neq i_0$ $F_i(0, \dots, 0) = (C_i - C_{i_0})^{\alpha_i} \neq 0$

luego es una unidad es decir que

(4) $F_{i_0}(Z^* + W_{i_0}(X_2, \dots, X_d), X_1, \dots, X_d)$ es una ecuación de

$(C_W)_{i_0}^1$.

Consideremos ahora en $V_{i_0}^1$ el sistema de coordenadas

$$\{z^*, x_1^{i_0}, x_2^{i_0}, \dots, x_d^{i_0}\} = \{z/x_1 - W_{i_0}(x_2, \dots, x_d), x_1, x_2, \dots, x_d\},$$

La ecuación de $V_{i_0}^1$ respecto de él es

$$F'(Z^* + W_{i_0}(X_2, \dots, X_d), X_1, \dots, X_d) = u \cdot F_{i_0}(Z^* + W_{i_0}(X_1, \dots, X_d), X_1, \dots, X_d)$$

con u unidad.

En este sistema las ecuaciones del divisor excepcional son

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ F_{i_0}(Z^*, 0, \dots, 0) = Z^{*\alpha_i} \end{cases} \quad \text{con lo que el ideal}$$

correspondiente $\pi_{i_0}^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{i_0} = (x_1, z^*) \square \quad \text{es regular}$

Es claro que $\{x_2^{i_0}, \dots, x_d^{i_0}\}$ son parámetros \mathfrak{p}_{i_0} -transversales

de $V_{i_0}^1$ y que una ecuación de $(V_{i_0}^1)_{(i_0)}$ es:

$$(5) \quad F_{i_0}(Z^* + W_{i_0}(0 \dots 0), X_1, 0, \dots, 0) = u^{-1} \frac{1}{x_1^V} F(Z^* + C_{i_0}, X_1, 0 \dots 0)$$

Esta última serie es la ecuación de una transformada cuadrática de $V_{(x)}$, ya que $F(Z, X_1, 0, \dots, 0)$ es una ecuación de $V_{(x)}$. Luego $(V_{(x)})_{i_0}^1$ y $(V_{i_0}^1)_{(x^{i_0})}$ tienen ecuaciones que difieren en una unidad, es decir:

$$(V_{(x)})_{i_0}^1 \xrightarrow{\sim} (V_{i_0}^1)_{(x^{i_0})} \quad \text{c.q.d.}$$

TEOREMA 2.5.- Sea V una hipersuperficie algebroide, W una subvariedad permitida de V de codimensión 1 y sean $\{x_2, \dots, x_d\}$ parámetros W -transversales de V . Son equivalentes:

- i) $V_{(x)}$ es equisingular a C_W .
- ii) $A_r(V_{(x)}) \xrightarrow{\sim} A_r(C_W)$

Demostración.- De 1.16 se sigue que i) implica ii). Veamos el recíproco:

Lo haremos por inducción en $l(V_{(x)})$.

Si $l(V_{(x)}) = 1$, y empleando las mismas notaciones que en la proposición anterior.

$$F_0(Z, X_1, 0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^r F_{oi}, \quad \text{con los } F_{oi} \text{ irreducibles.}$$

Como $l(V_{(x)}) = 1$, $r = \#T(V_{(x)})$ y $\text{in}(F_{oi})$ es potencia de una forma lineal.

Sea $F = \prod_{j=1}^s F_j$, con F_j irreducible. De la demostración de la proposición anterior se deduce que $s \leq \#T(C_W) = \#T(V_{(x)}) = r$.

Como $m(V_{(x)}) = m(C_W) = m(V)$, F_0 es reducida por 2.2, luego $s \geq r$, con lo que $s=r$. Es claro entonces que se pueden ordenar los F_i , $1 \leq i \leq r$, de tal modo que:

$$F_i(Z, X_1, 0, \dots, 0) = F_{oi}$$

Luego $m(F_i) \leq m(F_{oi})$. Como $m(F) = \sum_{i=1}^r m(F_i) = m(F_0) = \sum_{i=1}^r m(F_{oi})$ se da la igualdad. Es decir que $m(F_i) = m(F_{oi})$, para $1 \leq i \leq r$.

Si $(V_{(x)}) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$, y $(C_W) = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$, siendo γ_i (resp. δ_i) la rama de $V_{(x)}$ (resp. C_W) de ecuación F_{oi} (resp. F_i). La aplicación $\rho : (V_{(x)}) \longrightarrow (C_W)$, $\rho(\gamma_i) = \delta_i$, es una (a)-equivalencia y C_W y $V_{(x)}$ son equisingulares.

Supongamos el resultado cierto para toda hipersuperficie tal que $l(V_{(x)}) = k-1$, y sea V tal que $A_r(V_{(x)}) \xrightarrow{\sim} A_r(C_W)$ y $l(V_{(x)}) = k$.

Sean $I = \{0, 1, \dots, k\}$ y $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, y $\mathcal{A}^* = \{Y_i, \pi_i\}_{i \in I}$ los árboles de $V_{(x)}$ y C_W respectivamente. Sea $\underline{\psi} = (\psi_i)_{i \in I}$ el isomorfismo dado.

$$\text{Sean } X_1 = T(V_{(x)}) = \{(V_{(x)})_1^1, \dots, (V_{(x)})_r^1\}$$

$$\text{y } Y_1 = T(C_W) = \{(C_W)_1^1, \dots, (C_W)_r^1\}$$

Se puede aplicar la proposición anterior, y suponiendo que X_1 e Y_1 están ordenados de tal manera que si $T.M._W(V) = \{V_1^1, \dots, V_r^1\}$ es

$$(V_{(x)})_i^1 \xrightarrow{\sim} (V_i^1)_{(x^i)}, \quad 1 \leq i \leq r \quad (2)$$

Sea W_i la subvariedad permitida de V_i^1 definida por F_i , y sea C_{W_i} la sección de V_i^1 transversal a W_i . De (4) de la proposición anterior se deduce que:

$$(C_W)_i^1 \xrightarrow{\sim} C_{W_i} \quad (3)$$

Veamos también que unas ecuaciones de V_i^1 y $(V_i^1)_{(x^i)}$ son, $F_i(Z^*, W_i(X_2, \dots, X_d), X_1, \dots, X_d)$ y $F_i(Z^* + C_i, X_1, 0, \dots, 0)$ con lo que $m((V_i^1)_{(x^i)}) \geq m(V_i^1)$.

Como se cumple que $m(C_{W_i}) \leq m(V_i^1)$, obtenemos

$$m((V_{(x)})_i^1) = m((V_i^1)_{(x^i)}) \geq m(V_i^1) \geq m(C_{W_i}) = m((C_W)_i^1)$$

Por otra parte si $\phi_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ es la biyección que transforma $(V_{(x)})_i^1$ en $(C_W)_i^1$ es:

$$\alpha(\phi_1((V_{(x)})_i^1)) = m((C_W)_i^1) \leq m((V_{(x)})_i^1) = \alpha((V_{(x)})_i^1)$$

ϕ_1 no es en general la biyección ψ_1 antes definida. No obstante la igualdad de multiplicidades se verifica, ya que:

(4) "Si A y B son conjuntos finitos, α y β aplicaciones de A y B en \mathbb{N} respectivamente, y $\phi, \psi : A \longrightarrow B$ biyecciones tales que: i) $\alpha = \alpha' \cdot \psi$ } entonces $\alpha = \alpha' \cdot \phi$ "
 ii) $\alpha \geq \alpha' \cdot \phi$ }

Con lo que $m((C_W)_i^1) = m((V_{(x)})_i^1)$.

ϕ_1 es el punto de partida de un isomorfismo $\underline{\phi} = (\phi_i)_{i \in I}$ que intentamos construir, de tal manera que $\underline{\phi}$ transforme $A_r((C_W)_i^1)$ en $A_r((V_{(x)})_i^1)$.

Veamos como se construye ϕ_2

$$X_2 = \bigcup_{m((V(x))_i^1) > 1} T((V(x))_i^1) = \bigcup_{\substack{m((V_i^1)_{(x^i)}) > 1 \\ (x^i)}} T((V_i^1)_{(x^i)})$$

$$Y_2 = \bigcup_{m((C_W)_i^1) > 1} T((C_W)_i^1) = \bigcup_{m(C_W)_i > 1} T(C_W)_i$$

Estas uniones son disjuntas. Las segundas desigualdades se obtienen considerando los isomorfismo (2) y (3).

De la demostración de la proposición anterior se sigue que en general $\#T(C_W)_i \geq \#T((V_i^1)_{(x^i)})$.

En este caso $\#X_2 = \#Y_2$ por hipótesis, luego para cada i , $1 \leq i \leq r$, es

$$\#T(C_W)_i = \#T((V_i^1)_{(x^i)})$$

Con esto nos aseguramos que se puede aplicar la proposición 2.4, y por el mismo razonamiento anterior construir para cada i una biyección ϕ_2^i tal que $\alpha \cdot \phi_2^i \geq \alpha'$.

Como X_2 e Y_2 son unión disjunta, los ϕ_2^i determinan una biyección $\phi_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$, tal que $\alpha \cdot \phi_2 \geq \alpha'$. Por (4) se obtiene que $\alpha \cdot \phi_2 = \alpha'$. Es decir ϕ_2 conserva las multiplicidades.

Este proceso se puede continuar de igual forma hasta definir un isomorfismo $\underline{\phi} = (\phi_i)_{i \in I}$, de $A_r(V(x))$ en $A_r(C_W)$.

Por construcción, $\underline{\phi}$ restringido a $A_r((V(x))_i^1)$ es un isomorfismo en $A_r((C_W)_i^1)$.

Sea $F = \prod_{i=1}^n F_i$, con F_i irreducible en $k[[Z, X_1, X_2, \dots, X_d]]$.

Como $A_r(C_W) \approx A_r(V_{(x)})$, por 1.17 n° de ramas de $C_W = n^\circ$ de ramas de $V_{(x)} = n^\circ$ de factores irreducibles de F_0 .

Entonces $F_{0i} = F_i(Z, X_1, 0, \dots, 0)$ es irreducible, para cada i , ya que si no lo fuera al ser F_0 reducido (es decir no tener factores múltiples), sería

$$h = n^\circ \text{ de factores de } F \rightarrow n^\circ \text{ de factores de } F_0 = \\ = \#(V_{(x)}) = \#(C_W) \geq n^\circ \text{ de ramas de } V = h, \text{ contradicción.}$$

Sean δ_i (resp. γ_i) las ramas de $V_{(x)}$ (resp. C_W) definidas por F_{0i} (resp. F_i) para $1 \leq i \leq h$. Sea

$\rho : (V_{(x)}) \longrightarrow (C_W)$ la biyección definida por $\rho(\delta_i) = \gamma_i$.

Entonces ρ es una (a)-equivalencia. En efecto:

Como $F_{0i} = F_i(Z, X_1, 0, \dots, 0)$ es claro que ρ es tangencialmente estable. Por otra parte la biyección ρ_j inducida entre $((V_{(x)})_j^1)$ y $((C_W)_j^1) \approx (C_{W_j})$ es de la misma naturaleza. Como hemos visto antes $A_r((V_{(x)})_j^1) \approx A_r(C_{W_j})$ y por hipótesis de inducción ρ_j es una (a)-equivalencia. Es claro además que $m(\gamma_i) = m(\delta_i)$, es decir que efectivamente ρ es una (a)-equivalencia y $V_{(x)}$ y C_W son equisingulares.

c.q.d.

COROLARIO 2.5.- Sea V una hipersuperficie algebroide, W una subvariedad permitida de V de codimensión 1. Entonces, V es equisingular a lo largo de W si y sólo si existe un sistema de parámetros W -transversales de V , $\{x_2, \dots, x_d\}$ tal que

$$A_r(V_{(x)}) \xrightarrow{\sim} A_r(C_W).$$

Demostración.- Por definición, V es equisingular a lo largo de W si y solo si existe $\{x_2, \dots, x_d\}$ sistema de parámetros W -transversales de V tal que C_W es equisingular a $V_{(x)}$, y esto es equivalente por 2.4 a $A_r(V_{(x)}) \xrightarrow{\sim} A_r(C_W)$.

Observación 2.6.- Si V es equisingular a lo largo de W , el teorema 7.4 de [21], asegura que se puede desingularizar V mediante una sucesión de transformaciones monoidales centradas en curvas permitidas. En este caso se puede por lo tanto construir un árbol que refleje este proceso, haciendo $Y_0 = \{V\}$

$$Y_1 = T.M_W(V), \quad Y_2 = \bigcup_{m(V_i) > 1} T.M_{W_i}(V_i), \dots$$

Si $A(V)$ es este árbol, utilizando los cálculos de 2.3 y 2.4 se obtiene que $A(V) \approx A_r(C_W)$. Es decir que el árbol de C_W describe el proceso de desingularización de V mediante transformaciones monoidales, siempre que V sea equisingular a lo largo de W .

Sección 3.

Sea $S = \text{Spec}(\square)$ una superficie algebroide sumergida. Consideremos el transformado cuadrático de S , $\text{Bl}_m(\square)$ y el divisor excepcional $\mathcal{D} \hookrightarrow \text{Bl}_m(\square)$. Si P es un punto cerrado de \mathcal{D} , llamaremos S_P al transformado cuadrático formal de S con centro S_P y \mathcal{D}_P a la subvariedad determinada por \mathcal{D} en S_P . El propósito de esta sección es demostrar que S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P , salvo para un número finito de puntos de \mathcal{D} , y basándonos en este resultado construir un árbol asociado a S , A.T.(S).

Si $m = (x,y,z)\square$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $P \in \text{Spec}(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right])$ y entonces

$$S_P = \text{Spec}(\left(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right]_P \right)^\wedge)$$

$$\text{y } \mathcal{D}_P = \text{Spec}(\left(\left(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right]_P \right)^\wedge / (x) \right)_{\text{red}}),$$

luego \mathcal{D}_P es un divisor de S_P .

PROPOSICION 3.1.- En las condiciones de partida existe un abierto \mathcal{U} de \mathcal{D} , denso y tal que para todo punto cerrado P de \mathcal{D} se tiene $P \in \mathcal{U}$ si y solo si, S_P es regular ó S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P .

Demostración.- Sea $\{x,y,z\}$ un sistema de coordenadas de S , tal que $\{x,y\}$ son parámetros transversales. Sea $P(Z,X,Y) = Z^v + \sum_{i=1}^v A_i(X,Y) Z^{v-i}$ la ecuación de S respecto de $\{x,y,z\}$.

Sea $D(X,Y)$ el discriminante de S respecto de $\{x,y\}$.

$$D(X,Y) = (D_Z(P(X,Y,Z))) \text{ red}$$

$$\text{y sea } D(X,Y) = D_k(X,Y) + D_{k+1}(X,Y) + \dots$$

con $D_i(X,Y) \in k[X,Y]$, homogéneo de grado i y $D_k(X,Y) \neq 0$.

Se verifica entonces que:

"Si $P \in \mathcal{D}$, es tal que la dirección correspondiente (α, β, γ) verifica que $D_k(\alpha, \beta) \neq 0$, entonces S_P es regular ó S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P ".

En efecto:

Sea (α, β, γ) la dirección correspondiente a P . Como $P_\nu(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ y $P_\nu = Z^\nu + \dots$, ($\nu = m(S)$) es $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Supongamos que es $\alpha \neq 0$ (en el otro caso se hace igual).

(1) En estas condiciones, $P \in \text{Spec}(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right])$ y $\{x, \frac{y}{x} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{z}{x} - \frac{\gamma}{\alpha}\}$ es un sistema de coordenadas de S_P .

(2) Consideremos en \mathfrak{m} , $x' = x$, $y' = y - \frac{\beta}{\alpha}x$, $z' = z - \frac{\gamma}{\alpha}x$. $\{x', y', z'\}$ es una base de \mathfrak{m} . La ecuación de S respecto de esta base es:

$$(3) \quad \tilde{P}(X', Y', Z') = P(X', Y' + \frac{\beta}{\alpha}X', Z' + \frac{\gamma}{\alpha}X').$$

Como P tiene un término en Z^ν ($\nu = m(S)$), \tilde{P} tendrá también un término en Z'^ν , es decir que $\{x', y'\}$ es un sistema de parámetros transversales de S . El discriminante de S respecto de este sistema es

$$\tilde{D}(X', Y') = D(X', Y' + \frac{\beta}{\alpha} X')$$

Luego $m(\tilde{D}) = m(D) = k$, con lo que $\tilde{D}_k(X', Y') = D_k(X', Y' + \frac{\beta}{\alpha} X')$

Entonces:

$$\tilde{D}_k(1, 0) = D_k(1, \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha^k} D_k(\alpha, \beta) \neq 0 \quad (3)$$

Por (1) y (2), $\{x', \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}\}$ es un sistema de coordenadas de S_p . Llamemos $x_1 = x'$, $y_1 = \frac{y'}{x'}$, $z_1 = \frac{z'}{x'}$.

Una ecuación de S_p respecto de $\{x_1, y_1, z_1\}$ es

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = \frac{1}{X_1^v} \tilde{P}(X_1, X_1 Y_1, X_1 Z_1) \quad (4)$$

Como \tilde{P} contiene un término en Z_1^v , P_1 contiene también un término en Z_1^v , es decir que $\{x_1, y_1\}$ es un sistema de parámetros de S_p (no necesariamente transversales ya que $m(P_1) \leq m(P)$).

Si $m(P_1) = 1$, S_p es regular y el enunciado es cierto.

Sea P tal que $m(P_1) \geq 2$.

Sea $D_{Z_1}(P_1)(X_1, Y_1)$ el discriminante de P_1 respecto de Z_1 , teniendo en cuenta (4), y 1.15, cap. I,

$$X_1^{v(v-1)} D_{Z_1}(P_1)(X_1, Y_1) = D_{Z_1}(P)(X_1, X_1 Y_1)$$

Con lo que el discriminante de S_p respecto de $\{x_1, y_1\}$ es

$$D(X_1, Y_1) = (D_{Z_1}(P_1)(X_1, Y_1))_{\text{red}} = (X_1^{-v(v-1)} D_{Z_1}(P)(X_1, X_1 Y_1))_{\text{red}}$$

Como $D(X_1, X_1 Y_1) = X_1^k (D_k(1, Y_1) + X_1 D_{k+1}(1, Y_1) + \dots)$

$$D_{Z_1}(P)(X_1, X_1 Y_1) = X_1^a (D_k(1, Y_1) + X_1 D_{k+1}(1, Y_1) + \dots)$$

con $a \geq k$.

$$D(X_1, Y_1) = (X_1^{-v(v-1)} \cdot X_1^a (D_k(1, Y) + X_1 D_{k+1}(1, Y) + \dots))_{\text{red}}$$

$$= X_1 \cdot (D_k(1, Y) + X_1 D_{k+1}(1, Y) + \dots) = X_1 \cdot u(X_1, Y_1)$$

donde $u(X_1, Y_1) = D_k(1, Y) + X_1 D_{k+1}(1, Y) + \dots$, es una unidad. ($u(0, 0) = D_k(1, 0) \neq 0$ por (3)).

Como $D(X_1, Y_1) = X_1 u(X_1, Y_1)$, $\{x_1, y_1\}$ son parámetros equisingulares.

Por ser $\{x_1, y_1\}$ parámetros la inclusión

$k[[X_1, Y_1]] \longrightarrow k[[x_1, y_1]] \subset \square_P$, determina un morfismo suprayectivo

$$S_P = \text{Spec}(\square_P) \longrightarrow \text{Spec}(k[[X_1, Y_1]])$$

Sea Δ el cerrado de $\text{Spec}(k[[X_1, Y_1]])$ determinado por el ideal $(D) \cdot k[[X_1, Y_1]]$. Al ser $\{x_1, y_1\}$ parámetros equisingulares se verifica que $W = \theta^{-1}(\Delta)$ es una subvariedad permitida de codimensión 1 de S_P , $\theta|_W : W \longrightarrow \Delta$ es un isomorfismo, y S_P es equisingular a lo largo de W . ([21], Th. 4.5.).

Como $D(X_1, Y_1) = X_1 \cdot u(X_1, Y_1)$ con $u(0, 0) \neq 0$, $(D) k[[X_1, Y_1]] = (X_1) k[[X_1, Y_1]]$ y es claro entonces de la definición de θ que $\theta^{-1}(\Delta) = W$, es la subvariedad de S_P cuyo punto genérico es $(x_1) \cdot \square_P$. Este último es precisamente el ideal de \mathfrak{D}_P , con lo que $\mathfrak{D}_P = W$, y el resultado se sigue, es decir

(5) "Si $P \in \mathfrak{D}$, es tal que su dirección correspondiente (α, β, γ) cumple $D(\alpha, \beta) \neq 0$, entonces S_P es regular ó S_P es equisingular a lo largo de \mathfrak{D}_P ".

Sea C la curva de $\mathbb{P}_2(k)$ de ecuación $P_V(X,Y,Z) = 0$ y H la curva de ecuación $D_k(X,Y) = 0$. Los puntos de \mathcal{D} no considerados en (5) corresponden a $C \cap H$.

H es un conjunto de rectas que pasa por $(0,0,1)$ y $(0,0,1) \notin C$ luego $C \cap H = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ es un número finito de puntos. Para cada i , $1 \leq i \leq s$, sea P_i el punto de \mathcal{D} correspondiente a la dirección α_i . Consideremos

$$\mathcal{U} = \{P \in \mathcal{D} \mid \text{la dirección correspondiente a } P \text{ está en } C-H\} \cup \{P_i \in \mathcal{D} \mid S_{P_i} \text{ es regular, ó } S_{P_i} \text{ es equisingular a lo largo de } \mathcal{D}_{P_i}\}$$

Es claro por construcción que $P \in \mathcal{U}$ si y solo si S_P es regular ó S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P .

Por último \mathcal{U} es \mathcal{D} menos un número finito de puntos cerrados, luego es un abierto denso de \mathcal{D} .

c.q.d.

Nota 3.2.- La condición " S_P equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P " sólo depende del anillo local de S_P y del ideal de \mathcal{D}_P , no del sistema de parámetros elegido. Para encontrar el abierto

\mathcal{U} , hemos utilizado un sistema de parámetros, en virtud de que la equisingularidad es intrínseca, \mathcal{U} no depende de dicho sistema.

Dada una superficie algebroide S , al abierto \mathcal{U} de obtenido en la proposición anterior lo designaremos por $\Sigma(S)$

Observación 3.3.- Dada una superficie algebroide S , puede haber puntos $P \in \mathcal{D}$ tales que $P \notin \Sigma(S)$ y sin embargo, ser S_P equi

singular a lo largo de W , con $W \neq \mathcal{D}_P$. Esto ocurre en el siguiente ejemplo:

Sea $S = \text{Spec}(\square)$,

$$\square = k[[X, Y, Z]] / (Z^3 + XY^2 + X^2Y^2) \cdot k[[X, Y, Z]]$$

Sea P el punto correspondiente a la dirección $(1, 0, 0)$. Una ecuación de S_P , F_1 se obtiene por:

$$\begin{aligned} F_1(X_1, Y_1, Z_1) &= \frac{1}{X_1^3} ((Z_1 \cdot X_1)^3 + X_1 (X_1 \cdot Y_1)^2 + X_1^2 (X_1 \cdot Y_1)^2) = \\ &= Z_1^3 + Y_1^2 + X_1 Y_1^2 \end{aligned}$$

El anillo local del divisor excepcional \mathcal{D}_P es pues isomorfo a $k[[Y_1, Z_1]] / (Z_1^3 + Y_1^2) \cdot k[[Y_1, Z_1]]$, luego \mathcal{D}_P no es una curva lisa, y S_P no puede ser equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P . Si consideramos el discriminante de S_P respecto a $\{x_1, y_1\}$ es:

$D(X_1, Y_1) = Y_1^2 + X_1 Y_1^2 = Y_1^2(1 + X_1)$ y S_P es equisingular a lo largo de la subvariedad lisa W cuyo punto genérico es $(y_1) \square_P$. En este caso en los puntos Q de la componente de $\Sigma(S)$ que contiene a P_1 , es S_Q lisa, y este hecho es general bajo las hipótesis de partida.

Dadas dos superficies S y S' , diremos que tienen singularidades equivalentes si ambas son lisas, ó si ambas son equisingulares a lo largo de una curva lisa y las secciones genéricas respectivas C_W , y $C_{W'}$ son equisingulares.

TEOREMA 3.4. - Sea S una superficie algebroide sumergida,

$$\mathcal{D} = \bigsqcup_{i=1}^r \mathcal{D}_i \quad \text{la descomposición del lugar excepcional en componentes}$$

tes irreducibles y sea $\Sigma_i = \Sigma(S) \cap \mathcal{D}_i$, $1 \leq i \leq r$ entonces para cada $P, P' \in \Sigma_i$, S_P y $S_{P'}$ tienen singularidades equivalentes.

Demostración. - Sea i , $1 \leq i \leq r$. Si en Σ_i existe algún punto P tal que S_P es lisa fijamos ese P , sino tomamos como P un punto cualquiera de Σ_i . Es claro que el teorema se reduce a demostrar que: "Para cada $P' \in \Sigma_i$, S_P y $S_{P'}$ tienen singularidades equivalentes". Veamoslo.

Existe una base de \mathfrak{m}_P , $\{x, y, z\}$ tal que si $\text{Bl}_{\mathfrak{m}_P}(\square) = B_x \cup B_y \cup B_z$ es el recubrimiento afín correspondiente a dicha base se cumple que

$$P \in B_x \text{ y } P' \in B_x \quad (B_x = \text{Spec}(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right])) \quad (1)$$

Los anillos locales de S_P y $S_{P'}$ son respectivamente

$$\left(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right]_P \right)^\wedge \quad \text{y} \quad \left(\square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right]_{P'} \right)^\wedge$$

Sea $\mathcal{D} = G_x^- \cup G_y^- \cup G_z^-$ el recubrimiento afín de \mathcal{D} , asociado a este sistema de coordenadas, si $A = \square \left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right]$ es

$$G_x^- \cong \text{Spec} (A / (x).A)$$

Como G_x^- es un abierto afín de \mathcal{D} , y P y P' están en G_x^- por (1), $G_x^- \cap \mathcal{D}_i$ es una componente irreducible de G_x^- . Sea \mathfrak{p}_i el ideal de A correspondiente a $G_x^- \cap \mathcal{D}_i$; es un ideal primo y $(x).A \subset \mathfrak{p}_i$ y $P \supset \mathfrak{p}_i$, $P' \supset \mathfrak{p}_i$, por (1).

Si en el P fijado al principio S_P es lisa, es A_P regular luego $A_{P'}$ también. Consideremos P' . Pueden ocurrir

dos cosas:

i) Que $\mathcal{D}_{P'}$, no sea regular. Como $P' \in \Sigma(S)$, por la construcción de Σ , es $\widehat{A}_{P'}$, regular.

ii) Que $\mathcal{D}_{P'}$, sea regular en P' . En particular esto quiere decir que por P' solo pasa una componente de \mathcal{D} . Como $P' \supset \mathcal{P}_i$, es \mathcal{D}_i esta componente con lo que $\mathcal{P}_i \cdot \widehat{A}_{P'}$, es el ideal de $\mathcal{D}_{P'}$.

Luego $\mathcal{P}_i \widehat{A}_{P'}$, es un ideal regular y $\mathcal{P}_i \cdot A_{P'}$, también.

Por otra parte $(A_{P'})_{\mathcal{P}_i} \cong A_{\mathcal{P}_i} \longrightarrow (A_P)_{\mathcal{P}_i}$ es regular y es claro que si $A_{P'}$, es equisingular a lo largo de $\mathcal{P}_i \cdot A_{P'}$, y $(A_{P'})_{\mathcal{P}_i}$ es regular, $A_{P'}$ es regular y $S_{P'}$ es lisa.

Llegamos pues, a que si en Σ_i hay un punto con S_P lisa, todas las $S_{P'}$, con $P' \in \Sigma_i$ son lisas.

Si el $P \in \Sigma_i$ de partida es tal que S_P no es lisa, entonces S_P es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_P , luego \mathcal{D}_P es regular. Como $P \in \mathcal{D}_i$, \mathcal{D}_i es la única componente de que pasa por P es decir que $(x)_{A_P} = \mathcal{P}_i \cdot A_P$.

Haciendo lo mismo para P' obtenemos que:

$$P, P' \in \Sigma_i = \{ \mathcal{Q} \in \text{Spec}(A) \mid \mathcal{Q} \text{ es maximal y } \widehat{A}_{\mathcal{Q}} \text{ es equisingular a lo largo de } \mathcal{P}_i \widehat{A}_{\mathcal{Q}} \}$$

Aplicando la proposición 2.12, cap. I se sigue que $S_P = \text{Spec}(\widehat{A}_P)$ y $S_{P'} = \text{Spec}(\widehat{A}_{P'})$ tienen singularidades equivalentes.

Nota 3.5. - Sean $P, P' \in \Sigma_i$, y sean $C_W, C_{W'}$, las secciones genéricas de S_P y $S_{P'}$, transversales a su curva permitida.

Acabamos de ver que C_W y $C_{W'}$ son equisingulares, luego por 1.16 es $A_r(C_W) \approx A_r(C_{W'})$. Según la observación 2.6. S_P y $S_{P'}$ tienen el mismo proceso de desingularización por transformaciones monoidales. Tenemos en cuenta este hecho para la definición de árbol que se da a continuación.

Para una superficie algebroide S , vamos a construir un árbol asociado a S , que refleje de la mejor manera posible todos los procesos puntuales de reducción de la singularidad de S mediante transformaciones monoidales y cuadráticas.

Por la nota anterior podemos agrupar todos los puntos de Σ_i en un paquete, ya que el árbol de la sección genérica representa el proceso de reducción de la singularidad de S_P , mediante transformaciones monoidales para cada $P \in \Sigma_i$.

Notación 3.6.- Sea $\mathcal{D} = \bigsqcup_{i=1}^r \mathcal{D}_i$. Para cada i , $1 \leq i \leq r$ fijemos un punto $P^i \in \Sigma_i$. A la sección genérica de S_{P^i} transversal a \mathcal{D}_{P^i} la llamaremos C_i . C_i depende del punto elegido, pero módulo equisingularidad de curvas, sólo depende de Σ_i . Construiremos el árbol de S de forma que $C_i \in X_1$, y que al considerar el árbol formado por los siguientes a C_i , nos de $A_r(C_i)$.

DEFINICION 3.7.- Dada S , llamaremos $T(S) = \{C_1, \dots, C_r\} \cup \{S_{P_1}, \dots, S_{P_n}\} \cup T.M._{W_1}(S) \cup \dots \cup T.M._{W_k}(S)$.

Donde W_1, \dots, W_k son las curvas permitidas de S , $\mathcal{D} - \Sigma(S) = \{P_1, \dots, P_n\}$ y C_i , $1 \leq i \leq r$ son los definidas antes.

Construyamos el árbol de S :

Si $m(S) = 1$, S es lisa y $X_0 = \{S\}$ es el árbol de S .

Si $m(S) > 1$, definimos $X_0 = \{S\}$ y $X_1 = T(S)$.

Dado X_{i-1} , $i \geq 1$, construimos X_i por: $X_i = \bigcup_{H \in X_{i-1}, m(H) > 1} T(H)$

Si existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que para cada $H \in X_n$, es $m(H) = 1$, el conjunto de índices I es $\{0, \dots, n\}$ y el árbol es finito. Si no existe tal n , $I = \mathbb{N}$.

Nota 3.8. - En cada X_i , hay dos tipos de objetos, los C_i que son curvas, y superficies. Si H es una curva $T(H)$ es la definida en 1.16. cap I. Si H es una superficie $T(H)$ está definida en 3.7.

X_i es además unión disjunta de los $T(H)$. Sea $i \in I - \{0\}$, para cada $H \in X_i$, existe un único $H' \in X_{i-1}$, tal que $H \in T(H')$. Se define $\pi_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$, por $\pi_i(H) = H'$.

Cada X_i es finito y si $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$, luego $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$ es un árbol. Vamos a dotarle de pesos definiendo las aplicaciones α y β

$$\alpha : V(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

Si $H \in V(\mathcal{A})$, $\alpha(H) = m(H)$.

Dado un lado $(H_{i-1}, H_i) \in L(\mathcal{A})$, $\beta(H_{i-1}, H_i) \in \mathbb{N}$ nos servirá para distinguir el tipo de morfismo que pasa de H_i a H_{i-1} .

Hay tres tipos de morfismos, y definimos:

i) $\beta(H_{i-1}, H_i) = 1$, si H_i y H_{i-1} son superficies y existe una curva permitida W en H_{i-1} , tal que $H_i \in T.M._W(H_{i-1})$.

ii) $\beta(H_{i-1}, H_i) = 0$, si H_{i-1} es una superficie, la transformación que permite obtener H_i es cuadrática. Es decir que $H_i = (H_{i-1})_P$, para algún $P \in \Sigma(H_{i-1})$ ó bien $H_i = C_j$ donde C_j es la sección genérica en un punto de Σ_j .

iii) $\beta(H_{i-1}, H_i) = 1$, si H_{i-1} y H_i son curvas. Es decir que H_i es una transformada cuadrática de H_{i-1} . Como que remos reflejar el proceso de resolución de S , y hemos visto en 2.6. que una transformación cuadrática en la sección genérica equivale a una monoidal en la superficie, hacemos $\beta(H_{i-1}, H_i) = 1$, con lo que consideramos que esta definición es coherente con las de i) y ii).

DEFINICION 3.9.- Dada una superficie algebroide S , el árbol pesado $(\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ lo llamaremos árbol total de S y lo denotaremos por $A.T.(S) = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$.

Observación 3.10.- En principio $A.T.(S)$ no es único, pues como hemos indicado C_i depende de la elección de P en Σ_i . Si $H \in V(\mathcal{A})$ es una superficie, es claro que $A.T.(H) = (\mathcal{A}(H), \beta|V(\mathcal{A}(H)), \beta|L(\mathcal{A}(H)))$.

De la misma forma si $H \in V(\mathcal{A})$ es una curva, $A_r(H) =$
 $= (\mathcal{A}(H), \alpha|_{V(\mathcal{A}(H))}, \beta|_{L(\mathcal{A}(H))})$.

Luego si considero $P \in \Sigma_i$, la clase de isomorfía de $A_r(C_i)$ no depende de P , y por lo anterior la clase de isomorfía de $A.T.(S)$ tampoco. En adelante llamaremos árbol total de S a cualquier representante de la clase de isomorfía de $A.T.(S)$.

Nota 3.11.- Sea $H \in V(\mathcal{A})$ si $m(H) = 1$ y $\beta(\pi_i(H), H) = 0$, entonces H corresponde a un punto de \mathfrak{D} que es regular, luego corresponde a la sección genérica en un punto de \mathfrak{D} y es una curva. Si $\beta(\pi_i(H), H) = 1$, entonces H es una curva ó superficie según lo sea $\pi_i(H)$.

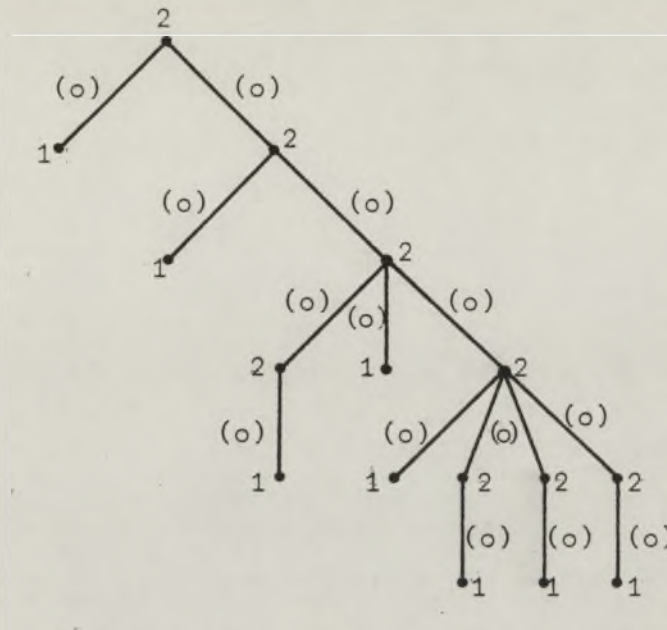
Si $m(H) > 1$, entonces H es una curva si y sólo si para cada arista (H, H') que empieza en H es $\beta(H, H') = 1$, ya que si H es una superficie por la construcción de $T(H)$ siempre hay una arista de peso cero.

Ejemplo 3.12.- Veamos un ejemplo de como funciona la construcción anterior.

$$\text{Sea } \square = k[[X, Y, Z]] / (Z^2 + X^3 + Y^5) \cdot k[[X, Y, Z]] \text{ y}$$

$$S = \text{Spec}(\square)$$

El árbol total de S , $A.T.(S)$ es finito y de longitud 5. Su grafo pesado es el siguiente:



Los números que aparecen en los vértices son las multiplicidades. Los números que aparecen entre paréntesis sobre los lados son los pesos de las aristas. En este caso son todos cero debido a que no se hacen transformaciones monoidales, por no aparecer curvas permitidas en ninguna etapa del proceso. Según la caracterización de 3.11 todos los puntos de multiplicidad 1, corresponden a curvas, es decir a las secciones genéricas. Solo aparece uno en cada caso, porque como se comprueba, el divisor excepcional es siempre irreducible.

Nota 3.13.- A.T.(S) puede ser infinito, de hecho si S contiene una curva permitida la transformada cuadrática en la dirección tangente a la curva, tiene siempre la misma multiplicidad de S ([16], teor. 3.1.10) y se comprueba (c.f. cap III, Lema 3.6.) que esta dirección no está en $\Sigma(S)$, con lo que el árbol resulta infinito.

Existen además superficies sin curvas permitidas, cuyo árbol es infinito, ya que pueden aparecer curvas permitidas en

alguna etapa posterior del proceso, veamos un caso:

$$\text{Sea } \square = k[[X, Y, Z]] / (Z^3 + X^8 + Y^6) \cdot k[[X, Y, Z]] \text{ y } S = \text{Spec}(\square)$$

$\mathfrak{m} \in S$ es el único punto singular luego no hay curvas permitidas. Si consideramos la transformada cuadrática formal en el punto P correspondiente a la dirección $(1, 0, 0)$, ($P \notin \Sigma(S)$) se obtiene:

$$S_P \approx \text{Spec}(k[[X, Y, Z]] / (Z^3 + X^5 + X^3 Y^6) \cdot k[[X, Y, Z]])$$

que tiene una curva permitida, luego su árbol es infinito y por lo tanto el de S también.

CAPITULO III

Dada una superficie algebroide sumergida, el árbol pesado $A.T.(S)$ asociado a S es en general infinito. El proceso de comparación de árboles infinitos es difícil, debido a la ausencia de periodicidades en la construcción del árbol. Por otra parte los árboles finitos, se pueden comparar por un proceso de inducción en la longitud del árbol.

Estos dos hechos nos prueban la conveniencia de sustituir el árbol total de la superficie por un subárbol finito, de tal forma que este subárbol contenga suficiente información acerca de la singularidad. Lo ideal sería probar posteriormente que la igualdad de los árboles "reducidos" equivale a la igualdad de los árboles totales.

El problema de reducir el árbol se resuelve suprimiendo a partir de un determinado lugar las transformadas cuadráticas de S en direcciones tangentes a curvas permitidas. El lugar a partir del cual se suprimen estas superficies depende del cuerpo de coeficientes k elegido, con lo que el árbol obtenido $A_k(S)$ depende de k . La finitud se obtiene demostrando en primer lugar que en una superficie solo se pueden efectuar un número finito de transformaciones monoidales sin que decrezca la multiplicidad (sección 1). A continuación se prueba (sección 2) que en una sucesión infinita de transformadas monoidales y cuadráticas de S , con la misma multiplicidad existe una que es estrictamente cuasiordinaria respecto de k . Con estos resultados se demuestra en la sección 3 la finitud de $A_k(S)$. Por último se construye un árbol $A^*(S)$ que es también finito e independiente de k .

Sección 1.

LEMA 1.1.- Sean V una hipersuperficie algebroide singular ($m(V) > 1$) y W una subvariedad permitida de V de codimensión

1. Si existe $V_1 \in T.M._W(V)$ tal que $m(V_1) = m(V)$ entonces $T.M._W(V) = \{V_1\}$.

Demostración.- Sean $V = \text{Spec}(\square)$, $r = \dim(V)$ y $v = m(V) = m(V_1)$.

Sea $\{x_1, \dots, x_r, z\}$ un sistema de coordenadas de V adaptado a W (i.e. $(x_r, z) \cdot \square$ es el ideal de W), tal que $\{x_1, \dots, x_r\}$ son parámetros transversales de V .

La ecuación de V en este sistema de coordenadas, $F(X_1, \dots, X_r, Z)$, verifica que, $\text{in}(F) = Z + \sum_{i=1}^v a_i X_r^i Z^{v-i} = \prod_{j=1}^S (Z - C_j X_r)^{\alpha_j}$ con $S \geq 1$, $\sum_{j=1}^S \alpha_j = v$.

Entonces $T.M._W = \{V_1, \dots, V_S\}$, siendo V_j el transformado monoidal formal en la dirección $(0, \dots, 0, 1, C_j)$, y $m(V) \leq \alpha_j$, (por 1.13, Cap. I).

Si existe un elemento de $T.M._W(V)$, supongamos que es V_1 , tal que $m(V_1) = v$, se tiene

$$v = m(V_1) \leq \alpha_1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^S \alpha_i = v, \quad \text{con lo que} \quad \alpha_1 = v$$

Luego $S=1$ y $T.M._W(V) = \{V_1\}$.

c.q.d.

Notación 1.2.- Sea C una curva algebroide plana, llamaremos $\delta(C)$, a la parte entera del exponente de contacto de C con la curva de contacto maximal, que es igual al número mínimo de

transformaciones cuadráticas necesarias para que decrezca la multiplicidad de C (c.f. [1], §2).

PROPOSICION 1.3.- En las hipótesis del lema anterior, si

$T.M._W(V) = \{V_1\}$, con $m(V) = m(V_1)$, $\pi : V_1 \longrightarrow V$ es el morfismo canónico, y $\delta(C_W) > 1$ se verifica:

i) El divisor excepcional de π , $\pi^{-1}(W) = W_1$, es una subvariedad permitida de codimensión 1 de V_1 .

ii) C_{W_1} es isomorfa a la transformada cuadrática de C_W .

Demostración.- Como estamos en la situación del lema anterior, manteniendo las notaciones, $\text{in}(F) = (Z - C_1 X_r)^V$.

Llamando $z' = z - c_1 x_r \in \mathfrak{m}$, es claro que $\{x_1, \dots, x_r, z'\}$ es un sistema de coordenadas de V . Si $F'(x_1, \dots, x_r, z')$ es la ecuación de V respecto de dicho sistema,

$$(1) \quad F' = F'_V + F'_{V+1} + \dots$$

donde F_i es una forma de grado i , con coeficientes en $k[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$.

En esta situación F' considerado como elemento de $k((X_1, \dots, X_{r-1}))[[X_r, Z]]$ es la ecuación de C_W respecto de unos ciertos parámetros. Como $\delta(C_W) > 1$ por una transformación cuadrática no decrece la multiplicidad de C_W . Luego $\#T(C_W) = 1$ y C_W tiene una sola tangente. La forma inicial de F' como elemento de $k((X_1, \dots, X_{r-1}))[[X_r, Z']]$. F'_V es por lo tanto potencia de una forma lineal. Es decir

$$(2) \quad F'_V = (Z' - X_r H)^V \in k[[X_1, \dots, X_{r-1}]] [[X_r, Z']]$$

con lo que $H \in k[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$.

Consideremos ahora V_1 y su anillo local \square_1 . Como $\text{in}(F') = Z'^v$, $z_1 = \frac{z'}{x_r} \in \mathfrak{M}_1$ (ideal maximal de \square_1) y $\{x_1, \dots, x_r, z_1\}$ es un sistema de coordenadas de V_1 . Respecto de este sistema la ecuación de V_1 es:

$$F_1(X_1, \dots, X_r, Z_1) = \frac{1}{X_r^v} (F'(X_1, \dots, X_r, Z_1 \cdot X_r))$$

Por (1) se tiene

$$F'(X_1, \dots, X_r, Z_1 \cdot X_r) = X_r^v F'_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) + \\ + X_r^{v+1} F'_{v+1}(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) + \dots$$

con lo que

$$(3) \quad F_1(X_1, \dots, X_r, Z_1) = F'_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) + \\ + X_r F'_{v+1}(X_1, \dots, 1, Z_1) + X_r^2 F'_{v+2}(\dots) + \dots$$

$$y \quad \square_1 \xrightarrow{\sim} k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]] /_{(F_1)} k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]]$$

Ahora bien el divisor excepcional de V_1 , $W_1 = \pi^{-1}(W)$, está determinado por el ideal $(x_r) \cdot \square_1$. En este caso es

$$\square_1 /_{(x_r)} \square_1 \xrightarrow{\sim} k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]] /_{(x_r, F_1)} k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]] \cong \\ \cong k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] /_{(F_1(X_1, X_{r-1}, 0, Z_1))} k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$$

$$\text{Por (3) y (2), } F_1(X_1, \dots, X_{r-1}, 0, Z_1) = F'_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) = \\ = (Z_1 - H)^v.$$

El anillo local de W_1 en su punto cerrado es

$$(\square_1 /_{(x_1)} \square_1)_{\text{red}} \quad \text{y por lo anterior se tiene que}$$

$$\begin{aligned} \left(\square_1 / (x_1) \square_1 \right)_{\text{red}} &\simeq \left(k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] / ((Z_1 - H)^v) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] \right)_{\text{red}} \xrightarrow{\sim} \\ &\simeq k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] / (Z_1 - H)k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]], \text{ que es regular} \end{aligned}$$

luego W_1 es regular de dimensión $r-1$.

Prueba de ii)

Es claro por lo anterior que el ideal de W_1 es $(x_r, z_1 - H(x_1, \dots, x_{r-1})) \square_1$. Si ponemos $z_1^* = z_1 - H(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathfrak{m}_1$; dicho ideal es $(x_r, z_1^*) \square_1$, luego $\{x_1, \dots, x_r, z_1^*\}$ es un sistema de coordenadas de V_1 adaptado a W_1 .

La ecuación de V_1 respecto de dicho sistema es:

$$F^*(X_1, \dots, X_r, Z_1^*) = F_1(X_1, \dots, X_r, Z_1 + H(X_1, \dots, X_{r-1})),$$

con lo que $F^* \in k((X_1, \dots, X_{r-1}))[[X_r, Z_1^*]]$ es una ecuación de C_{W_1} . Sea $T.C.(C_W) = \{(C_W)^1\}$. Vamos a hallar una ecuación de $(C_W)^1$. Si \mathcal{O} es el anillo local de C_W , $\{z', x_r\} \subset \mathcal{O}$ es un sistema de coordenadas de C_W , y por (1) la ecuación de C_W respecto de dicho sistema es:

$$F'(X_1, \dots, X_r, Z') \in k((X_1, \dots, X_{r-1}))[[X_r, Z']]$$

Sea \mathcal{O}_1 el anillo local de $(C_W)^1$, por (2)

$z^* = z'_1 / x_r - H(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathcal{O}_1$ y $\{x_r, z^*\}$ es un sistema de coordenadas de $(C_W)^1$ respecto del cual la ecuación de $(C_W)^1$ es:

$$\begin{aligned} \bar{F}(X_r, Z^*) &= \frac{1}{x_r^v} F'(X_1, \dots, X_{r-1}, x_r, x_r(Z^* + H(X_1, \dots, X_{r-1}))) = \\ &= F_1(X_1, \dots, X_r, Z^* + H(X_1, \dots, X_{r-1})) = F^*(X_1, \dots, X_r, Z^*) \end{aligned}$$

Es decir que las ecuaciones de C_{W_1} y $(C_W)^1$ en unos ciertos sistemas de coordenadas coinciden, luego $C_{W_1} \approx (C_W)^1$.

En particular $\delta(C_{W_1}) = \delta((C_W)^1) = \delta(C_W) - 1 > 0$, y $m(C_{W_1}) = m((C_W)^1) = m(C_W) = m(V) = m(V_1)$ y en consecuencia W_1 es una subvariedad permitida.

c.q.d.

PROPOSICION 1.4.- En las condiciones del lema 1.1, si $T.M._W(V) = \{V_1\}$, con $m(V_1) = m(V)$ y $\delta(C_W) = 1$, entonces el divisor excepcional W no contiene subvariedades permitidas de codimensión 1.

Demostración.- Consideraremos dos casos, según que C_W tenga una sola tangente o varias.

i) C_W tiene una sola tangente.

En este caso $T.C.(C_W) = \{(C_W)^1\}$ y la demostración de la proposición anterior prueba que $W_1 = \pi^{-1}(W)$ es regular y,

$$C_{W_1} \approx (C_W)^1$$

Como $\delta(C_W) = 1$, al hacer una transformación cuadrática en C_W decrece la multiplicidad, es decir,

$$m(C_{W_1}) = m((C_W)^1) < m(C_W) = m(V) = m(V_1)$$

Con lo que W_1 es regular, pero no permitida.

ii) C_W tiene varias tangentes.

Con las notaciones de la proposición anterior, sea $\{x_1, \dots, x_r, z\}$ un sistema de coordenadas de V adaptado a W ,

y sea $F \in k[[X_1, \dots, X_r, Z]]$ la ecuación de V respecto a dicho sistema.

Consideremos la descomposición de F en componentes homogéneas en X_r, Z , $F = F_\nu + F_{\nu+1} + \dots$

Como C_W tiene más de una tangente, F_ν no es potencia de una forma lineal en $\overline{k((X_1, \dots, X_{r-1}))} [X_r, Z]$ (1)

Como $T.M._W(V) = \{V_1\}$ y $m(V_1) = m(V)$ se cumplen las condiciones de la proposición anterior, y siguiendo el mismo proceso llegaríamos a que el anillo local \mathcal{O} del divisor excepcional W_1 es

$$\mathcal{O} \cong \left(\square_1 / (x_r) \square_1 \right)_{\text{red}} \cong \left(k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z]] / F_\nu(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) \right)_{\text{red}}$$

donde \square_1 es el anillo local de V_1 .

Supongamos que existe una subvariedad permitida de codimensión 1 de V , \bar{W}_1 contenida en W_1 . Sea \mathfrak{p} el ideal de \bar{W}_1 , por (2) es $(x_r) \square_1 \subset \mathfrak{p}$.

En estas condiciones se verifica:

(3) "Existe $\xi \in \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_1^2$ en \square_1 , tal que $(x_r, \xi) \square_1 = \mathfrak{p}$ y $\xi^{\nu-1} \notin (x_1) \square_1$ y $\xi^\nu \in (x_r) \square_1$ ".

Sea $\bar{\xi}$ la clase de ξ en $\square_1 / (x_1) \square_1$ y \bar{E} el elemento correspondiente en $k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z]] / (F_\nu(X_1, \dots, 1, Z))$.

$\cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z]]$

por el isomorfismo canónico.

Es claro que $\bar{E}^v = 0$, $\bar{E}^{v-1} \neq 0$, y $\bar{E} \in \bar{M} - \bar{M}^2$, siendo M el ideal maximal de $k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z]]$, y \bar{M} el ideal maximal de $k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] / (F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]])$

Sea $E \in k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z]]$, tal que

$$\bar{E} = E + (F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1)) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$$

se tiene que $E^v \in (F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1)) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$ y que v es el mínimo número con esta propiedad. Por otra parte $E \in M - M^2$ es decir que $m(E) = 1$, con lo que E es irreducible.

Luego $E^v = G \cdot F(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1)$, y como

$$E^{v-1} \notin (F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1)) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] \quad y$$

$k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$ es un dominio de factorización única, G es una unidad. Con lo que $F_v = E^v \cdot G^{-1}$.

Por ser G^{-1} es una unidad, existe H , tal que $G^{-1} = H^v$, y se tiene $F_v = E^v \cdot G^{-1} = E^v \cdot H^v = (E \cdot H)^v$.

Pero $m(E \cdot H) = 1$, $F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, 1, Z_1) = (E \cdot H)^v = (Z_1 + L)^v$, con lo que $L \in k[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$ y

$$F_v(X_1, \dots, X_{r-1}, Z) = (Z + X_r L)^v \quad \text{lo que contradice (1)}$$

Sólo nos queda demostrar que se verifica (3).

Sea $\mathfrak{p} \supset (x_r) \square_1$, un ideal permitido y de dimensión $r-1$. Entonces existe un sistema de coordenadas de V ,

$\{x_1^*, \dots, x_r^*, z^*\}$ tal que $\{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ son parámetros transversales de V , $x_r^* = x_r$ y $(x_r^*, z^*) \square_1 = \cdot$.

En efecto, como $(x_r) \square_1 \subset \mathfrak{p}$, determina un ideal regular $\bar{\mathfrak{p}}$ en $\square_1 / (x_r) \square_1$. Teniendo en cuenta los isomorfismos de (4) proposición 1.3, $\bar{\mathfrak{p}}$ se eleva a un ideal P de $k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$.

Como es $\square_1 / \mathfrak{p} \cong \left(\square_1 / (x_r) \square_1 \right) / \bar{\mathfrak{p}} \cong k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]] / P$

P es un ideal regular y de dimensión $r-1$ en $k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$ y por ([19], Th. 26, p.303) existe $H \in k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$, tal que

$$P = (H) \cdot k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]], \text{ y } H \text{ forma parte de un}$$

sistema regular de parámetros, i.e. $H \in M - M^2$.

Luego $H = a_1 X_1 + \dots + a_{r-1} X_{r-1} + a Z_1 + H'$, con $(a_1, \dots, a_{r-1}, a) \neq (0, \dots, 0)$ y $H' \in M^2$.

Si $a \neq 0$, entonces $\{X_1, \dots, X_r, H\}$ es un sistema regular de parámetros de $k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]]$, luego sus imágenes en \square_1 por el homomorfismo canónico, $\{x_1^*, \dots, x_r^*, z^*\}$ son un sistema de coordenadas de V_1 . Como $x_i^* = x_i$, $\{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ es un sistema de parámetros transversales de V_1 .

Como $P = (H) k[[X_1, \dots, X_{r-1}, Z_1]]$, es

$$\bar{\mathfrak{p}} = (z^*) \square_1 / (x_r) \square_1 \text{ y } \mathfrak{p} = (x_r^*, z^*) \square_1. \text{ En caso de que}$$

sea $a=0$, $a_i \neq 0$ para un cierto i , supongamos que $i=1$.

Consideremos entonces, $Z^* = H = a_1 X_1 + \dots + a_{r-1} X_{r-1} + H'$

$$X_1^* = b X_1 + Z, \quad X_2^* = X_2, \dots, X_r^* = X_r.$$

La matriz que relaciona las formas iniciales de las X^* con las X es

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & & a_2 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & a_{r-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es a_1 , que es distinto de cero, luego $\{X_1^*, \dots, X_r^*, Z_1^*\}$ forman un sistema de parámetros regular de $k[[X_1, \dots, X_r, Z_1]]$, y sus imágenes en $\square_1, \{x_1^*, \dots, x_r^*, z^*\}$ son un sistema de coordenadas de V_1 .

Además se puede elegir $b \in k$, tal que $\{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ sean parámetros transversales de V_1 . Es claro además que $\mathfrak{p} = (x_r^*, z^*) \square_1$. Así, tanto si $a \neq 0$ como si $a=0$ encontramos un sistema de coordenadas que cumple las condiciones pedidas, el ξ de (3) va a ser z^* .

Asociado al sistema de coordenadas de $V_1, \{x_1^*, \dots, x_r^*, z^*\}$ tenemos un isomorfismo

$$\square_1 \cong k[[X_1^*, \dots, X_r^*, Z_1^*]] / (F^*)k[[X_1^*, \dots, X_r^*, Z^*]]$$

Ahora bien como $\{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ son parámetros transversales de V_1 y $\mathfrak{p} = (x_r^*, z^*) \square_1$ es un ideal permitido es

$$F^*(X_1^*, \dots, X_r^*, Z^*) = Z^{*v} + \sum_{i=1}^v A_i(X_1^*, \dots, X_r^*) \cdot X_r^{*i} \cdot Z^{*v-i}$$

Luego $Z^{*v} = -(\sum A_i(X_1^*, \dots, X_r^*) \cdot X_r^{*i} \cdot Z^{*v-i}) + F^*(X_1^*, \dots, X_r^*, Z^*)$

Tomando clases módulo F^* , tendríamos en \square_1

$$z^{*v} = -(\sum A_i(x_1^*, \dots, x_r^*) x_r^{*i} z^{*v-i}) \in (x_r^*) \square_1 = (x_r) \square_1$$

Por último $z^{*v-i} \notin (x_r^*) \cdot \square_1$, ya que de otro modo pasando a $k[[X_1^*, \dots, X_r^*, Z^*]]$ sería

$$Z^{*v-1} = X_r^* B + F^* \cdot H$$

Haciendo $X_r^* = 0$ en esta igualdad de series y teniendo en cuenta que $F^*(X_1^*, \dots, X_{r-1}^*, 0, Z^*) = Z^{*v} + \dots$ resultaría

$$Z^{*v-1} = H(X_1^*, \dots, X_{r-1}^*, 0, Z_1^*) \cdot (X^{*v} + \dots), \text{ absurdo.}$$

c.q.d.

Observación 1.5.- En la situación de la proposición 1.3 y en el caso i) de 1.4. $\pi : W_1 = \pi^{-1}(W) \longrightarrow W$ es un isomorfismo. Se puede comprobar basándose en los cálculos de 1.4. que en el caso ii) π no es isomorfismo, aunque W_1 sea regular.

Nota 1.6.- Si V es una hipersuperficie de dimensión r , $\text{Sing}(V)$ es un cerrado propio, y no contiene ninguna componente de dimensión r . Si \mathfrak{q} es el ideal de $\text{Sing}(V)$, todo ideal regular \mathfrak{p} de dimensión $r-1$ que contenga a \mathfrak{q} es minimal en \mathfrak{q} , luego \mathfrak{q} contiene solo un número finito de ideales regulares de dimensión $r-1$. En particular V contiene sólo un número finito de subvariedades permitidas de codimensión 1.

DEFINICION 1.7.- Sea V una hipersuperficie algebroide de dimensión $s \geq 2$ y sean W_1, \dots, W_r las subvariedades permitidas de codimensión 1 de V , llamaremos $\delta(V) = \sum_{i=1}^r \delta(C_{W_i})$ y

$\delta(V) = 0$ si $r=0$.

TEOREMA 1.8.- En toda sucesión

$$V_k \xrightarrow{T_k} V_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_0 = V$$

donde V_i es una hipersuperficie algebroide, y T_i una transformación monoidal con centro una subvariedad permitida de codimensión 1 de V_{i-1} , $1 \leq i \leq k$, y $m(V_k) = \dots = m(V_1) = m(V) > 1$ se verifica:

V_k no contiene subvariedades permitidas de codimensión 1 si y sólo si $\delta(V) = k$.

Demostración: Sea $T : V' \longrightarrow V$ una transformación monoidal con centro una subvariedad permitida de codimensión 1 de V , W_1 tal que $m(V') = m(V)$ entonces

$$\delta(V') = \delta(V) - 1$$

En efecto: Sean W_1, \dots, W_r ($r \geq 1$) las subvariedades permitidas de V y $p_1, \dots, p_r \in V = \text{Spec}(\square)$ los puntos genéricos correspondientes. T es birreglar en $V - W_1$ ([21], §6) luego $T^{-1}(p_i) = \{p_i\}$ si $i \geq 2$ y $\square_{p_i} \simeq \square'_{p_i}$. Este isomorfismo se extiende a otro

$$\square_{p_i} \hat{\otimes}_k(p_i) \overline{k(p_i)} \simeq \square'_{p_i} \hat{\otimes}_k(p_i) \overline{k(p_i)}$$

Por definición estos son los anillos locales de C_{W_i} y $C_{\overline{W}_i}$, siendo \overline{W}_i la subvariedad de V' correspondiente a $\overline{p_i}$ que es por lo tanto permitida. Es decir que T induce una biyección entre las subvariedades permitidas de $V - W_1$ y las de $V' - T^{-1}(W_1)$ tal que $C_{W_i} \simeq C_{\overline{W}_i}$ si $2 \leq i \leq r$.

Para calcular $\delta(V')$ consideramos dos casos:

Si $\delta(C_{W_1}) = 1$, por la proposición 1.4 $T^{-1}(W_1)$ no contiene subvariedades permitidas, y

$$\begin{aligned}\delta(V') &= \sum_{i=2}^r \delta(C_{\bar{W}_i}) = \sum_{i=2}^r \delta(C_{W_i}) = \sum_{i=1}^r \delta(C_{W_i}) - 1 \\ &= \delta(V) - 1\end{aligned}$$

Si $\delta(C_{W_1}) > 1$, por 1.3, $\bar{W}_1 = T^{-1}(W_1)$ es una subvariedad permitida y $\delta(C_{\bar{W}_1}) = \delta(C_{W_1}) - 1$, con lo que

$$\begin{aligned}\delta(V') &= \sum_{i=1}^r \delta(C_{\bar{W}_i}) = \delta(C_{\bar{W}_1}) + \sum_{i=2}^r \delta(C_{\bar{W}_i}) = \\ &= \delta(C_{W_1}) - 1 + \sum_{i=2}^r \delta(C_{W_i}) = \delta(V) - 1\end{aligned}$$

Luego en ambos casos $\delta(V') = \delta(V) - 1$.

En las condiciones del teorema, para cada $i \geq 1$ es pues $\delta(V_i) = \delta(V) - i$, con lo que V_k no tiene subvariedades permitidas si y solo si $\delta(V_k) = 0$, es decir si y sólo si $\delta(V) = k$.

c.q.d.

Sección 2.

En esta sección demostraremos un resultado fundamental para la construcción de un subárbol finito de A.T.(S) (prop_osición 2.4). Consideraremos solamente superficies sumergidas con un cuerpo de coeficientes k fijo.

PROPOSICION 2.1.- Sea $S = \text{Spec}(\square)$ una superficie algebroide sumergida, C una curva permitida de S y $\{x,y\}$ un sistema de parámetros transversales de S . Existe un sistema de coordenadas de S $\{x',y',z'\}$ adaptado a C (i.e. $\mathfrak{p} = (y',z')\square$ es el ideal de C) y tal que $\Delta_{\{x',y'\}} \approx \Delta_{\{x,y\}}$.

Demostración.- Sea $z \in \mathfrak{m}$, tal que $\{x,y,z\}$ es un sistema de coordenadas de S , y sea ϕ el homomorfismo asociado a dicho sistema

$$\phi : k[[X,Y,Z]] \longrightarrow k[[X,Y,Z]] / (F)k[[X,Y,Z]] \approx$$

Sea $P = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, como ϕ es sobre,

$k[[X,Y,Z]] / P \approx \square / \mathfrak{p}$, que es un anillo regular, completo y de dimensión 1, ya que $C \approx \text{Spec}(\square / \mathfrak{p})$.

Luego existe un isomorfismo $\psi : k[[X,Y,Z]] / P \approx k[[T]]$ con T indeterminada.

$$\text{Sea } H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = H(X,Y,Z) + P.$$

Como ψ es isomorfismo $(\psi(\bar{x}), \psi(\bar{y}), \psi(\bar{z}))k[[T]] = (T)k[[T]]$, y por lo tanto alguna de las tres series $\psi(\bar{x})$, $\psi(\bar{y})$, y $\psi(\bar{z})$ tiene orden uno. Supongamos que sea

$\psi(\bar{x})$. Entonces existe un isomorfismo $h : k[[T]] \longrightarrow k[[T']]$ tal que $h(\psi(\bar{x})) = T'$. Sea $\bar{\psi} = h \cdot \psi$, y $\bar{\psi}(\bar{y}) = p(T') \in k[[T']]$, $\bar{\psi}(\bar{z}) = q(T') \in k[[T']]$.

Se tiene:

$$Y - p(X) \in P \quad \text{y} \quad Z - q(X) \in P$$

pues $\bar{\psi}(\bar{y} - p(\bar{x})) = \bar{\psi}(\bar{y}) - \bar{\psi}(p(\bar{x})) = p(T') - p(T') = 0$, y ϕ es un isomorfismo.

Ahora bien, es claro que $Y - p(X)$, $Z - q(X)$ forman parte de un sistema regular de parámetros de $k[[X, Y, Z]]$, luego por ([19], p. 303), el ideal $(Y - p(X), Z - q(X))k[[X, Y, Z]]$, es regular y de dimensión 1. Como $(Y - p(X), Z - q(X))k[[X, Y, Z]] \subset P$, se da la igualdad.

En las hipótesis de la proposición ($\{x, y\}$ parámetros transversales) $\psi(\bar{x})$ ó $\psi(\bar{y})$ tienen orden 1.

En efecto si fuera $v(\psi(\bar{x})) > 1$, $v(\psi(\bar{y})) > 1$ y $v(\psi(\bar{z})) = 1$, repitiendo la construcción anterior tendríamos:

$$P = (X - p(Z), Y - q(Z))k[[X, Y, Z]],$$

con $v(p(Z)) = v(\psi(\bar{x})) > 1$, y $v(q(Z)) = v(\psi(\bar{x})) > 1$

Pero $F(X, Y, Z) \in P$, o sea

$$F(X, Y, Z) = (X - p(Z))A + (Y - q(Z))B$$

y $\text{in}(F) = Z^v + \dots$, $\text{in}(X - p(Z)) = X$, $\text{in}(Y - q(Z)) = Y$ con lo que $Z^v + \dots = X A' + Y B'$, que es una contradicción.

Luego es $v(\psi(\bar{x})) = 1$ ó $v(\psi(\bar{y})) = 1$. Si $v(\psi(\bar{x})) = 1$, (en el otro caso se hace igual), tenemos que:

$$(Y - p(X), Z - q(X))k[[X, Y, Z]]$$

Sea $X' = X$, $Y' = Y - p(X)$, $Z' = Z - q(X)$. Así $\{X', Y', Z'\}$ es un sistema de parámetros regulares de $k[[X, Y, Z]]$, con lo que si $x' = \phi(X') = X$, $y' = \phi(Y')$, $z' = \phi(Z')$, $\{x', y', z'\}$ es un sistema de coordenadas de \square y $\mathfrak{p} = (y', z')\square$.

La ecuación de S respecto a este sistema F' es

$$F'(X', Y', Z') = F(X', Y' + p(X'), Z' + q(X'))$$

$$F'(0, 0, Z') = F(0, 0, Z') = Z'^v + \dots \quad \text{y} \quad \{x', y'\}$$

son parámetros transversales de S .

Solo resta pues, comprobar que $\Delta_{\{x', y'\}} \approx \Delta_{\{x, y\}}$ esta determinado, por el discriminante de F respecto de Z , $D_Z(F(X, Y, Z))$, y $\Delta_{\{x', y'\}}$ por $D_{Z'}(F'(X', Y', Z'))$. De (1) se deduce $D_{Z'}(F'(X', Y', Z')) = D_{Z'}(F'(X, Y' + p(X'), Z' + q(X'))) = D_{Z'}(F'(X', Y' + p(X'), Z'))$.

Como $D_Z(F)$ es un polinomio en los coeficientes de F , es claro que si $D_Z(F(X, Y, Z)) = H(X, Y)$ entonces $D_{Z'}(F'(X', Y' + p(X'), Z')) = H(X', Y' + p(X'))$.

Luego $\Delta_{\{x', y'\}}$ se obtiene a partir de $\Delta_{\{x, y\}}$ por el cambio de coordenadas $x' = x$, $y' = y - p(x)$, y ambos son isomorfos.

c.q.d.

Nota 2.2. - Dada una curva algebroide plana C , sea $T(C) = \{C_1^1, \dots, C_r^1\}$. La transformada cuadrática propia de es $\bigcup_{i=1}^r C_2^1$. Llamando $C_i^{1*} = C_i^1 \cup E^1$, donde E^1 es el di

visor excepcional, la transformada cuadrática total de C

$$\text{es } C^{1*} = \bigcup_{i=1}^r C_i^{1*}.$$

Con esta notación el teorema de resolución de curvas algebroides planas, se puede expresar así (c.f. [23], Sec. 4)

"Existe un n_0 , tal que para todo $n \geq n_0$ C^{n*} contiene únicamente puntos dobles ordinarios".

Sea $l^*(C) = \text{mínimo } \{ n_0 \mid n_0 \text{ cumple la condición anterior} \}$.

Es $l(C) \leq l^*(C)$ y si C y \bar{C} son dos curvas planas tales que $C \subset \bar{C}$ entonces $l^*(C) \leq l^*(\bar{C})$.

PROPOSICION 2.3.- Sean S y S' superficies algebroides su mergidas, $T: S' \rightarrow S$, una transformación cuadrática o monoidal con centro permitido, tal que $m(S') = m(S) > 1$. Sean $\{x, y\}$ parámetros transversales de S , tal que $l^*(\Delta_{\{x, y\}}) > 0$. Entonces existen parámetros transversales de S' , $\{x', y'\}$ tal que:

$$l^*(\Delta_{\{x', y'\}}) \leq l^*(\Delta_{\{x, y\}}), \quad \text{si } T \text{ es una transformación monoidal}$$

$$\text{y } l^*(\Delta_{\{x', y'\}}) < l^*(\Delta_{\{x, y\}}) \quad \text{si } T \text{ es una transformación cuadrática.}$$

Demostración.- Sean $S = \text{Spec}(\square)$, $S' = \text{Spec}(\square')$ y supon_{gamos} que T es una transformación monoidal de S con centro una curva permitida C . Sea $\{x_1, y_1, z_1\}$ un sistema de coor denadas cumpliendo las condiciones de la proposición 2.1.

(i.e. $\Delta_{\{x_1, y_1\}} \simeq \Delta_{\{x, y\}}$ y $\mathcal{P} = (x_1, z_1)\square$ es el ideal de

C). En esta situación los cálculos de la proposición 1.3. de muestran que existe un único $c \in K$ tal que

$z' = \frac{z_1}{x_1} - c \in \mathfrak{m}'$ (ideal maximal de \square'), y $\{x', y', z'\}$ es un sistema de coordenadas de S' ($x' = x_1, y' = y_1$).

Si F_1 es la ecuación de S respecto de $\{x_1, y_1, z_1\}$, la de S' respecto de $\{x', y', z'\}$ es

$$F'(X', Y', Z') = \frac{1}{X_1^v} F_1(X', Y', X'(Z' - c))$$

Si $v = m(S) = m(S')$, como $\text{in}(F_1) = Z_1^v + \dots$, es $\text{in}(F') = Z'^v + \dots$ con lo que $\{x', y'\}$ son parámetros transversales de S' .

Ahora bien por 1.15, cap. I

$$\begin{aligned} (1) \quad D_{Z_1}(F_1(X_1, Y_1, Z_1)) &= D_{Z_1}(F_1(X_1, Y_1, Z_1 - c)) = \\ &= X'^{v(v-1)} (D_{Z'}(F'(X', Y', X'(Z' - c))) = \\ &= X'^{v(v-1)} D_{Z'}(F'(X', Y', Z')) \end{aligned}$$

Como $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$ y $\Delta_{\{x', y'\}}$ están definidos respectivamente por $(D_{Z_1}(F_1(X_1, Y_1, Z_1)))_{\text{red}}$ y $(D_{Z'}(F'(X', Y', Z')))_{\text{red}}$, hay dos posibilidades:

Si $D_{Z'}(F')$ contiene a X' como factor, entonces por (1) $\Delta_{\{x_1, y_1\}} \approx \Delta_{\{x', y'\}} \cup E$, siendo E la curva de ecuación $X'=0$. Y por la nota 2.2 $l^*(\Delta_{\{x', y'\}}) \leq l^*(\Delta_{\{x_1, y_1\}}) = l^*(\Delta_{\{x, y\}})$.

Si $D_{Z'}(F')$ no contiene a X' como factor entonces $\Delta_{\{x', y'\}} \approx \Delta_{\{x_1, y_1\}}$ y $l^*(\Delta_{\{x', y'\}}) = l^*(\Delta_{\{x_1, y_1\}}) = l^*(\Delta_{\{x, y\}})$. Luego en general es $l^*(\Delta_{\{x', y'\}}) \leq l^*(\Delta_{\{x, y\}})$.

Supongamos ahora que T es una transformación cuadrática es decir que $S' = S_P$, para algún $P \in \mathcal{D}$ (divisor excepcional de S). Como vimos en la demostración de 3.1, cap. II existe un sistema de coordenadas $\{x_1, y_1, z_1\}$ tal que, $\{x_1, y_1\}$ son parámetros transversales de $\Delta_{\{x_1, y_1\}} \approx \Delta_{\{x, y\}}$ y la dirección correspondiente a P en este sistema de coordenadas es $(1, 0, 0)$. En estas circunstancias una ecuación de $S' = S_P$ respecto de $\{x', y', z'\}$, $(x' = x, y' = \frac{y_1}{x_1}, z' = \frac{z_1}{x_1})$ es:

$$F'(X', Y', Z') = \frac{1}{X_1^v} F_1(X', X'.Y', X'.Z')$$

donde F_1 es la ecuación de S respecto de $\{x_1, y_1, z_1\}$.

Como $\text{in}(F_1) = Z_1^v + \dots$, $\text{in}(F') = Z'^v + \dots$, y $m(S') = m(S)$, $\{x', y'\}$ son parámetros transversales de S' .

Este sistema cumple la condición $1^*(\Delta_{\{x', y'\}}) < 1^*(\Delta_{\{x, y\}})$.

En efecto por 1.15 cap. II

$$D_{Z_1}(F_1)(X', X'.Y') = X'^{v(v-1)} D_{Z'}(F')(X', Y') \quad (2)$$

Sea $(D_{Z_1}(F_1)(X_1, Y_1))_{\text{red}} = H(X_1, Y_1)$ la ecuación de $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$

Pueden darse dos casos:

Que $(1, 0)$ no pertenezca al cono tangente de $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$, en este caso como vimos en 3.1, cap. II, $\Delta_{\{x', y'\}}$ es lisa y $1^*(\Delta_{\{x', y'\}}) = 0 < 1^*(\Delta_{\{x, y\}})$.

Que $(1, 0)$ pertenece al cono tangente de $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$ Entonces $H(X', X'.Y')$ es la ecuación de la transformada cuadrática total de $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$ en la dirección $(1, 0)$ (del plano). Por (2), $(D_{Z'}(F'))_{\text{red}}$ es $H(X', X'.Y')$ salvo eventualmente

el factor x' , luego $\Delta_{\{x',y'\}} \subset \bar{C}$, donde $\bar{C} \in (\Delta_{\{x_1,y_1\}})^{1*}$.

Con lo que

$$1^*(\Delta_{\{x',y'\}}) \leq 1^*(\bar{C}) \leq 1^*(\Delta_{\{x_1,y_1\}}) - 1 = 1^*(\Delta_{\{x,y\}}) - 1 < 1^*(\Delta_{\{x,y\}})$$

c.q.d.

PROPOSICION 2.4.- Sea $S = \text{Spec}(\square)$ una superficie algebroi de sumergica, $k \subset \square$ un cuerpo de coeficientes de S fijo, y $\cdots \longrightarrow S_{i+1} \xrightarrow{T_{i+1}} S_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{T_1} S_0 = S$

donde T_i es una transformación monoidal con centro permitido ó cuadrática, para cada $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que para cada i , $m(S_i) = m(S)$. Entonces existe un n_0 , tal que S_{n_0} es cuasi ordinaria, respecto de k y de un sistema transversal de parámetros $\{x^{n_0}, y^{n_0}\}$ de S_{n_0} .

Demostración.- Sea $\{x,y\}$ un sistema transversal de parámetros de S . Si $1^*(\Delta_{\{x,y\}}) = 0$, $n_0=0$. Si $1^*(\Delta_{\{x,y\}}) > 0$, por la proposición anterior existe un sistema transversal de parámetros de S $\{x^1,y^1\}$, tal que $1^*(\Delta_{\{x^1,y^1\}}) \leq 1^*(\Delta_{\{x,y\}})$ si T_1 es una transformación monoidal y $1^*(\Delta_{\{x^1,y^1\}}) < 1^*(\Delta_{\{x,y\}})$ si T_1 es una transformación cuadrática. Construimos por inducción una sucesión $\{x^i,y^i\}$ de sistemas transversales de parámetros de S_i , tal que si

$$1^*(\Delta_{\{x^{i-1},y^{i-1}\}}) > 0, \quad 1^*(\Delta_{\{x^i,y^i\}}) \text{ verifica las de}$$

sigualdades anteriores.

Esta sucesión de sistemas de parámetros verifica que:

Para cada i , con $l^*(\Delta_{\{x^i, y^i\}}) > 0$, existe un $i' > i$ tal que $l^*(\Delta_{\{x^{i'}, y^{i'}\}}) < l^*(\Delta_{\{x^i, y^i\}})$.

En efecto: Sea $\delta(S_i)$, y supongamos que existe i' , $i < i' \leq i + \delta(S_i)$, tal que $T_{i'} : S_{i'} \longrightarrow S_{i'-1}$ es una transformación cuadrática es

$$l^*(\Delta_{\{x^{i'}, y^{i'}\}}) < l^*(\Delta_{\{x^{i'-1}, y^{i'-1}\}}) \leq \dots \leq l^*(\Delta_{\{x^i, y^i\}})$$

Si por el contrario para cada i' , $i \leq i' \leq i + \delta(S_i)$, $T_{i'}$ es una transformación monoidal la sucesión

$$S_{i+\delta(S_i)} \xrightarrow{T_{i+\delta(S_i)}} \dots \longrightarrow S_{i+1} \xrightarrow{T_{i+1}} S_i$$

es de longitud $\delta(S_i)$ y por el teorema 1.8, $S_{i+\delta(S_i)}$ no contiene curvas permitidas, luego $T_{i+\delta(S_i)+1}$ es una transformación cuadrática e $i' = i + \delta(S_i) + 1$.

Como $\leq l^*(\Delta_{\{x^i, y^i\}}) \leq \dots \leq l^*(\Delta_{\{x, y\}})$ es claro por lo anterior que existe un n_0 tal que $l^*(\Delta_{\{x^{n_0}, y^{n_0}\}}) = 0$

c.q.d.

Nota 2.5.- Como consecuencia de la finitud del árbol $A_k(S)$, (sección 3) se tiene que n_0 depende sólo de S y de k y no de las T_i .

Nota 2.6.- Si en la proposición 2.4. las T_i son siempre transformaciones cuadráticas se obtiene una propiedad demostrada por Zariski en ([22], prop. 1.2).

Sección 3.-

En esta sección, fijado un cuerpo de coeficientes k , definimos de manera canónica un subárbol $A_k(S)$ de $A.T.(S)$ y demostramos que es finito.

Situación 3.1.- Sea $S = \text{Spec}(\square)$ una superficie algebroide sumergida, $k \subset \square$ un cuerpo de coeficientes de S . Si $S' \in T(S)$ es una superficie, k es de manera natural un cuerpo de coeficientes de S' , así que podemos tomar k como cuerpo de coeficientes de todas las superficies de $A.T.(S)$.

Si S es estrictamente cuasiordinaria respecto de k , tiene a lo más dos curvas permitidas C_1 y C_2 . Si $P_i \in \mathcal{D}$ es el punto del divisor excepcional correspondiente a la dirección tangente a C_i , $P_i \notin \Sigma(S)$. Entonces

DEFINICION 2.2.- Definimos $T_k(S)$ como:

$T(S)$ si S no es estrictamente cuasiordinaria, ó si S es estrictamente cuasiordinaria y no tiene curvas permitidas.

$T(S) - \{S_p\}$ si S es estrictamente cuasiordinaria, tiene una curva permitida C y $P \in \mathcal{D}$ es el punto correspondiente a C .

$T(S) - \{S_{P_1}, S_{P_2}\}$ si S es estrictamente cuasiordinaria, tiene dos curvas permitidas C_1 y C_2 , y $P_i \in \mathcal{D}$ es el punto correspondiente a C_i , $i=1,2$,

Dado este, T_k , se construye un árbol de manera análoga como se hizo para $A.T.(S)$, es decir

$X_0^k = S$, $X_1^k = T_k(S)$, y construido X_{i-1}^k , si existe $H \in X_{i-1}^k$ tal que $m(H) > 1$ ponemos $X_i^k = \bigcup_{H \in X_{i-1}^k, m(H) > 1} T_k(H)$

$\bar{\pi}_i : X_i^k \longrightarrow X_{i-1}^k$, se define de la forma usual. Si

$\mathcal{A}_k = \{X_i^k, \bar{\pi}_i\}_{i \in J}$ y $\mathcal{A} = \{X_i, \pi_i\}_{i \in I}$, $J \subset I$, y $X_i^k \subset X_i$, si $i \in J$.

\mathcal{A}_k es por lo tanto un subárbol de \mathcal{A} . Los pesos los definimos como restricción de α , y β a $V(\mathcal{A}_k)$ y $L(\mathcal{A}_k)$ respectivamente. Como no hay confusión posible notaremos a las aplicaciones π_i , α y β y a sus restricciones a \mathcal{A}_k de la misma forma.

Nota 3.3.- El árbol pesado así construido $A_k(S) = (\mathcal{A}_k, \alpha, \beta)$ es un subárbol de $A.T.(S)$, que depende de k , ya que dada una superficie S , el que S sea estrictamente depende en principio de k . Veamos que $A_k(S)$ es finito.

TEOREMA 3.4.- Dada una superficie algebroide sumergida S , y $k \subset \square$ cuerpo de coeficientes de S , el árbol pesado $A_k(S)$ es finito.

Demostración.- Por 1.7., cap. II, basta ver que toda rama de $A_k(S)$ tiene longitud finita. Supondremos que existe en $A_k(S)$ una rama infinita y llegaremos a una contradicción.

En efecto, sea $\{S_0, S_1, \dots, S_i, \dots\}_{i \in \mathbb{N}}$ una rama infinita de $A_k(S)$, es decir, $S_i \in X_i$, y $\pi_i(S_i) = S_{i-1}$. Entonces $\alpha(S_i) = m(S_i) > 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$, ya que si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ con $\alpha(S_{i_0}) = 1$, por construcción $\pi_{i_0+1}^{-1}(S_{i_0}) = \emptyset$.

Como la multiplicidad no aumenta, es decir si $i \in I - \{0\}$ $m(S_i) \leq m(S_{i-1})$, la sucesión de multiplicidades es estacionaria y existe un $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $i \geq i_0$ $m(S_i) = m(S_{i_0}) > 1$.

(1) Consideremos entonces $\{S_{i_0}, S_{i_0+1}, \dots, S_i, \dots\}_{i \geq i_0}$.

Como $S_i \in X_i^k \subset X_i$, por 3.8., cap. II, las S_i pueden ser ó bien curvas ó bien superficies. En este caso las S_i son superficies, pues si existiera $j \geq i_0$ tal que $S_j = C_W$, fuera una curva, $A_k(S_j) = A_r(C_W)$, que es finito y no puede tener una rama infinita. La sucesión (1) corresponde pues a una sucesión de aristas de $A_k(S)$.

$$(S_{i_0}, S_{i_0+1}), (S_{i_0+1}, S_{i_0+2}), \dots, (S_i, S_{i+1}), \dots$$

Cada arista (S_i, S_{i+1}) proviene de una transformación $T_{i+1}: S_{i+1} \longrightarrow S_i$ entre superficies, que es una transformación cuadrática o monoidal con centro una curva permitida.

Así pues llegamos a una sucesión

$$\dots \longrightarrow S_{i+1} \xrightarrow{T_{i+1}} S_i \longrightarrow \dots \xrightarrow{T_{i_0+1}} S_{i_0},$$

infinita y tal que $m(S_i) = m(S_0) > 1$, para todo $i \geq i_0$. Estamos en las hipótesis de la proposición 2.4 y por lo tanto existe un $i \geq i_0$ tal que S_i es cuasiordinaria respecto de un sistema transversal de parámetros. Entonces sea $i_1 = \min \{i \geq i_0 \mid S_i \text{ es estrictamente cuasiordinaria}\}$ y con

sideremos S_{i_1} y $\lambda(S_{i_1})$. Pueden darse tres casos.

i) S_{i_1} tiene dos curvas permitidas, C_1 y C_2 . Sean P_1, P_2 los puntos de \mathcal{D} correspondientes a C_1 y C_2 respectivamente.

$$\Sigma(S_{i_1}) = \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}, \quad \text{con lo que}$$

$$T(S_{i_1}) = \{S_{P_1}, S_{P_2}\} \cup T.M_{C_1}(S) \cup T.M_{C_2}(S) \cup \{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_r\}$$

siendo $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_i$, \bar{C}_i la sección genérica en \mathcal{D}_i .

$$\text{Luego } T_k(S_{i_1}) = T(S_{i_1}) - \{S_{P_1}, S_{P_2}\} = T.M_{C_1}(S) \cup T.M_{C_2}(S) \cup \{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_r\}.$$

Como $S_{i_1+1} \in T_k(S_{i_1})$ es una superficie, $S_{i_1+1} \in T.M_{C_1}(S_{i_1})$ y $T_{i_1+1} : S_{i_1+1} \longrightarrow S_{i_1}$ es una transformación monoidal, como además $m(S_{i_1+1}) = m(S_{i_1})$ por 3.14, cap. I, S_{i_1+1} es estrictamente cuasiordinaria y $\lambda(S_{i_1+1}) = \lambda(S_{i_1}) - 1$.

ii) S_{i_1} contiene solo una curva permitida C . Tomamos un sistema de coordenadas normalizado, de tal forma que la dirección P_1 , tangente a C sea $(1,0,0)$ y la otra dirección distinguida P_2 sea $(0,1,0)$. Si (λ_1, μ_1) es el primer par característico, entonces $\lambda_1 < 1$, $\mu_1 \geq 1$ y $T_k(S_{i_1}) = T(S_{i_1}) - \{S_{P_1}\}$.

Luego como S_{i_1+1} es una superficie, es claro que $S_{i_1+1} \in T.M_C(S_{i_1})$ ó $S_{i_1+1} = (S_{i_1})_{P_2}$ (P_2 puede eventualmente pertenecer a $\Sigma(S_{i_1})$, con lo que necesariamente sería $S_{i_1+1} \in T.M_C(S_{i_1})$).

Por 3.14 y 3.15, cap. I, S_{i_1+1} es en ambos casos estrictamente cuasiordinaria, y se tiene, respectivamente,

$$\lambda(S_{i_1+1}) = \lambda(S_{i_1}) - 1$$

y

$$\lambda(S_{i_1+1}) = \lambda(S_{i_1}) - 1 + \lambda_1 < \lambda(S_{i_1})$$

iii) S_{i_1} no contiene curvas permitidas. Sea (λ_1, μ_1) el primer par característico de S , $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \mu_1 < 1$.

Si $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$ son las direcciones distinguidas, por 3.15

cap. I, $\mathcal{D} - \Sigma(S) \subset \{(S_{i_1})_{P_1}, (S_{i_1})_{P_2}\}$, luego

$$S_{i_1+1} = (S_{i_1})_{P_1} \quad \text{ó} \quad S_{i_1+1} = (S_{i_1})_{P_2}.$$

Como $m(S_{i_1+1}) = m(S_{i_1})$, por 3.15, Cap. I) S_{i_1+1} es estrictamente cuasiordinaria y

$$\lambda(S_{i_1+1}) = \lambda(S_{i_1}) - 1 + \mu_1 \quad \text{ó}$$

$$\lambda(S_{i_1+1}) = \lambda(S_{i_1}) - 1 + \lambda_1$$

En todos los casos llegamos a que S_{i_1+1} es estrictamente cuasiordinaria y que $\lambda(S_{i_1+1})$ toma uno de los valores

$\{\lambda(S_{i_1}) - 1, \lambda(S_{i_1}) + 1 - \lambda_1, \lambda(S_{i_1}) + 1 - \mu_1\}$ siendo en

cualquier caso menor que $\lambda(S_{i_1})$. Como S_{i_1} es cuasiordinaria las raíces de una cierta ecuación de S_{i_1} son elementos

de $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$, y (λ_1, μ_1) que es el exponente de un

término de ellas será $(\lambda_1, \mu_1) = (\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$. Si $\lambda_1 < 1$,

$1 - \lambda_1 = \frac{n-a}{n} \geq \frac{1}{n}$, y de la misma forma $1 - \mu_1 \geq \frac{1}{n}$, con lo

que

$$\lambda(S_{i_1+1}) \leq \lambda(S_{i_1}) - \frac{1}{n}$$

Se puede repetir el mismo razonamiento para S_{i_1+2} , y teniendo en cuenta que por ser $m(S_{i_1}) = m(S_{i_1+1})$, el primer par característico de S_{i_1+1} tiene los mismos denominadores que el de S_{i_1} se deduce

$$S_{i_1+2} \leq S_{i_1+1} - \frac{1}{n} \leq S_{i_1} - \frac{2}{n}$$

Es claro que este proceso se puede continuar, hasta una S_i cuasiordinaria ($i > i_1$) tal que $\lambda(S_i) < 1$, y por 3.14 y 3.15 Cap I es $m(S_i) < m(S_{i_1}) = m(S_{i_0})$, lo que es contradicción.

c.q.d.

Nota 3.5.- Construido $A_k(S)$ y comprobado que es finito, resta saber si se pierde información tomando $A_k(S)$ en lugar de $A.T.(S)$, para lo cual hay que ver que relación existe entre $A_k(S)$ y $A.T.(S)$ cuando S es cuasiordinaria. Concretamente la situación ideal sería demostrar que:

"Si S y S' son superficies cuasiordinarias se verifica que $A.T.(S) \approx A.T.(S')$ si y sólo si $A_k(S) \approx A_k(S')$ ".

En el siguiente capítulo veremos que este resultado es cierto si S y S' son irreducibles.

LEMA 3.6.- Si $S = \text{Spec}(\square)$ es una superficie algebroide sumergida, C una curva permitida de S , y $P \in \mathcal{D}$ el punto del divisor excepcional correspondiente a la tangente a C , entonces $P \notin \Sigma(S)$.

Demostración.- Sea $\{x,y,z\}$ un sistema de coordenadas de S adaptado a C , tal que $\{x,y\}$ son parámetros transversales de S . La ecuación de S respecto de dicho sistema F es pues de la forma

$$F(X,Y,Z) = Z^v + \sum_{i=1}^v A_i(X,Y) X^i Z^{v-i}$$

Entonces $D_Z(F(X,Y,Z)) = X^a H(X,Y)$ con $a \geq v(v-1)$.

En efecto, si $\bar{F}(X,Y,Z) = Z^v + \sum_{i=1}^v A_i(X,Y) Z^{v-i}$ entonces

$$F(X,Y,X.Z) = X^v \bar{F}(X,Y,Z)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} D_Z(F(X,Y,X.Z)) &= X^{v(v-1)} D_Z(F(X,Y,Z)) = \\ &= D(X^v \bar{F}(X,Y,Z)) = (X^v)^{2(v-1)} D_Z(\bar{F}(X,Y,Z)) \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_Z(F(X,Y,Z)) &= X^{2v(v-1)-v(v-1)} D_Z(\bar{F}(X,Y,Z)) = \\ &= X^{v(v-1)} D_Z(\bar{F}(X,Y,Z)) \end{aligned}$$

y $D_Z(F(X,Y,Z)) = X^a H(X,Y)$, donde $a \geq v(v-1)$ y H no contiene a X como factor. Pueden ocurrir casos:

Que sea $H(0,0) \neq 0$, con lo que S es equisingular a lo largo de C , y ya vimos en 3.8. cap I, que S_P no es equisingular.

Que $H(X,Y)$ no sea una unidad, i.e. $m(H) = \alpha \geq 1$. En tonces como la dirección correspondiente a P es $(0,1,0)$ una ecuación de S_P es

$$F_1(X_1, Y_1, Z_1) = \frac{1}{Y_1^v} F(X_1, Y_1, Y_1, Z_1 \cdot Y_1)$$

Por 1.15, cap. I, se tiene

$$Y_1^{v(v-1)} D_{Z_1}(F_1) = D_Z(F)(X_1 \cdot Y_1, X_1) = (X_1 \cdot Y_1) \cdot H(X_1 \cdot Y_1, Y_1)$$

y
$$D_{Z_1}(F_1) = X_1^a \cdot Y_1^{a-v(v-1)} \cdot Y_1^\alpha \bar{H}(X_1, Y_1)$$

Por ser $a - v(v-1) + \alpha > 0$, $\Delta_{\{x_1, y_1\}}$ tiene al menos dos componentes y como $\{x_1, y_1\}$ son parámetros transversales, S_p no es equisingular, por 1.22., cap. I. Luego de cualquier modo $P \notin \Sigma(S)$.

Nota 3.7.- Dada una superficie S , se puede obtener un subárbol pesado $A^*(S)$ de $A.T.(S)$, suprimiendo de $A.T.(S)$ los puntos correspondientes a las direcciones tangentes a las curvas permitidas de S . Este árbol es finito e independiente del cuerpo de coeficientes de S .

Con más precisión definimos $T^*(S)$ como

$T(S)$, si S no tiene curvas permitidas.

$T(S) - \{S_{P_1}, \dots, S_{P_r}\}$, si S tiene curvas permitidas

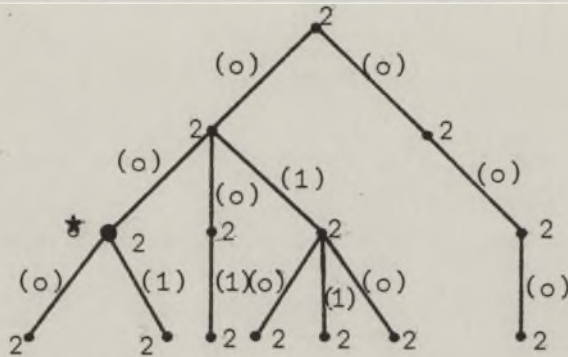
C_1, \dots, C_r y $P_i \in \mathcal{D}$ es el punto correspondiente a C_i , $1 \leq i \leq r$.

Procediendo como en 3.3, con $T^*(S)$ en lugar de $T_k(S)$, nos da un subárbol $A^*(S)$ de $A.T.(S)$. Es claro que dada una superficie S , $T^*(S) \subset T_k(S)$, con lo que $A^*(S)$ es un subárbol de $A_k(S)$. Por el teorema 3.4. $A^*(S)$ es finito.

Nota 3.8.- Se puede considerar otro subárbol $\bar{A}(S)$ de $A_k(S)$ de la siguiente manera. Si S tiene curvas permitidas, se con

Veamos que no puede existir un isomorfismo

$\underline{\psi} : A^*(S_1) \longrightarrow A^*(S_2)$. En efecto. El grafo pesado correspondiente a los cuatro primeros niveles de $A^*(S_1)$ y $A^*(S_2)$ es

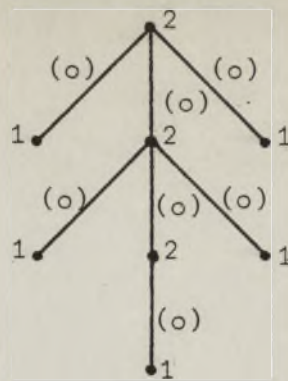
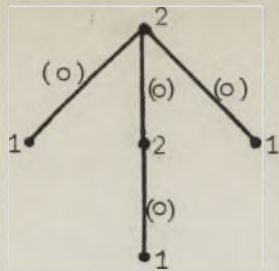


Las ecuaciones de las superficies S_1^1 , S_2^1 de $\bar{A}(S_1)$ y $\bar{A}(S_2)$ correspondientes al vértice (*) son respectivamente

$$Z^2 + X^7(X + Y^2) \quad \text{y} \quad Z^2 + X^7(X + Y^3)$$

Si existiera un isomorfismo $\underline{\psi}$, teniendo en cuenta que conserva los pesos sería $\psi_3(S_1^1) = S_2^1$, y $\underline{\psi}$ induciría un isomorfismo entre los árboles de $\bar{A}(S_1^1)$ y $\bar{A}(S_2^1)$.

Ahora bien S_1^1 (resp. S_2^1), tiene una sola curva permitida C_1 (resp. C_2) y la transformación monoidal con centro C_1 (resp. C_2) produce un único punto S_1^2 (resp. S_2^2) cuya ecuación es $Z^2 + X^5(X + Y^2)$ (resp. $Z^2 + X^5(X + Y^3)$). Es claro entonces que necesariamente $\psi_4(S_1^2) = S_2^2$. Repitiendo el razonamiento, encontramos dos superficies S_1^3 y S_2^3 de ecuaciones $Z^2 + X^3(X + Y^2)$ y $Z^2 + X^3(X + Y^3)$ respectivamente, tal que $\psi_5(S_1^3) = S_2^3$. De la misma forma existen S_1^4 y S_2^4 de ecuaciones $Z^2 + X(X + Y^2)$ y $Z^2 + X(X + Y^3)$ tal que $\psi_6(S_1^4) = S_2^4$. Por último los grafos pesados correspondientes a $\bar{A}(S_1^4)$ y $\bar{A}(S_2^4)$ son



que no son isomorfos. Esto prueba que no puede existir el isomorfismo ψ .

Para puntos de multiplicidad 2 de superficies algebraicas, hay una caracterización muy sencilla de cuando la superficie es estrictamente cuasiordinaria. Teniendo en cuenta esta caracterización se puede comprobar de la misma forma que antes que $A_k(S_1) \neq A_k(S_2)$.

La caracterización es la siguiente:

"Sea S una superficie con $m(S) = 2$, y sea $\{x, y, z\}$ un sistema de coordenadas de S , tal que la ecuación de S respecto de $\{x, y, z\}$ es $F = Z^2 + A_1(X, Y)Z + A_2(X, Y)$ entonces S es estrictamente cuasiordinario si y solo si $(D_Z(F))_{\text{red}} = 0$ es una curva lisa, ó dos curvas lisas que se cortan transversalmente".

Este hecho es una consecuencia directa del Teorema 2 de [9].

CAPITULO IV

Sección 1.

Este capítulo está dedicado a estudiar la relación entre los pares característicos normalizados de una superficie cuasiordinaria irreducible S , y el árbol $A^*(S)$. En esta sección demostramos (proposición 1.3) que los pares característicos determinan $A^*(S)$.

Situación 1.1.- Sea S una superficie irreducible cuasiordinaria, respecto de un cuerpo de coeficientes k . Sean $r=g(S)$ y $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S (def. 3.7, cap I). En esta situación se verifica que S tiene alguna curva permitida si y solo si $\lambda_1 \geq 1$. Si S tiene curvas permitidas, $\lambda_1 + \mu_1 > 1$ y S es estrictamente cuasiordinaria con lo que $T^*(S) = T_k(S)$.

De 3.9, cap. I, se deduce que para toda superficie S' de A.T.(S), $T^*(S') = T_k(S)$ con lo que se tiene que $A^*(S) = A_k(S)$.

Veremos a continuación que los pares característicos normalizados de S respecto de un cuerpo de coeficientes k , determinan y son determinados por $A^*(S)$, con lo que los pares característicos son independientes de dicho cuerpo. La demostración la haremos por inducción en la longitud del árbol $A^*(S)$, que notaremos $l(S)$ ($l(S) = 0$ si y solo si S es lisa).

En todo lo que sigue supondremos la ecuación de S , nor

malizada como en la Sección 3, cap. I y emplearemos las mismas notaciones que allí.

Veamos primeramente cuando $l(S) = 1$.

LEMA 1.2.- Sea S una superficie cuasiordinaria irreducible, se verifica entonces:

$l(S) = 1$ si y solo si $g(S) = 1$ y el par característico normalizado de S , (λ_1, μ_1) es uno de los siguientes:

$$\left(\frac{m+1}{m}, 0\right) \text{ con } m \geq 2, (1/2, 1/2) \text{ y } (1/3, 1/3)$$

Demostración.- Supongamos que $l(S) = 1$.

Si S tiene alguna curva permitida C , sea $T.M._C(S) = \{S_1\}$, como $l(S) = 1$, S_1 es lisa y $g(S_1) = 0$. En 3.10, cap. I, teníamos que $g(S_1)$ es $g(S)$ ó $g(S) - 1$, luego $g(S_1) = g(S) - 1$ y $g(S) = 1$. Si S no contiene curvas permitidas, sea $P_1 \in \mathbb{D}$ el punto correspondiente a la dirección $(1, 0, 0)$. S_{P_1} es lisa y entonces $g(S_{P_1}) = g(S) - 1$ y $g(S) = 1$. Luego en ambos casos $g(S)$ es 1. Sea (λ_1, μ_1) el par característico de S . Distinguiremos tres casos:

a) S tiene curvas permitidas.

Sea C la curva permitida de ideal $(x, z) \square (\lambda_1 \geq 1)$, y sea $T.M._C(S) = \{S_1\}$. El par característico de S_1 es $(\lambda_1 - 1, \mu_1)$ salvo que se aplique 3.3 (3), cap. I y resulte un par de enteros. Como S_1 es lisa, $g(S_1) = 0$ y $\{(\lambda_1 - 1, \mu_1)\} \equiv \{(\alpha, 0)\}$, siendo $1/\alpha = m \in \mathbb{N}$ y $m \geq 2$.

Es decir que $(\lambda_1 - 1, \mu_1) = (\alpha, 0)$ ó $(\lambda_1 - 1, \mu_1) = (0, \alpha)$.

Si $(\lambda_1 - 1, \mu_1) = (0, \alpha)$, $(\lambda_1, \mu_1) = (1, 1/m)$. S tiene una sola curva permitida, y la dirección $(1, 0, 0)$ no es tangente a dicha curva. Consideremos el punto $P_1 \in \mathcal{D}$ correspondiente a $(1, 0, 0)$. El par característico de S_{P_1} es por 3.9., cap. I, $(\lambda'_1, \mu'_1) = (\lambda_1 + \mu_1 - 1) = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$, $m \geq 2$.

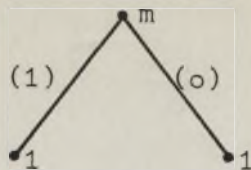
De 3.12, cap. I, se deduce que S_{P_1} no es una singularidad de tipo dimensional 1, y por lo tanto $S_{P_1} \in T^*(S)$. Al ser $m \geq 2$, $g(S_{P_1}) = 1$, y S_{P_1} no es lisa, luego en este caso $l(S) > 1$.

Si $(\lambda_1 - 1, \mu_1) = (1/m, 0)$, entonces $(\lambda_1, \mu_1) = (1 + \frac{1}{m}, 0)$ es el primer par característico de S . Es claro que la curva C de ideal $(x, z) \square$ es la única curva permitida. En este caso, el par característico de S_{P_1} es $(1/m, 0)$, y aplicando 3.3 (3), cap. I, resulta $(m, 0)$ que son enteros luego $g(S_{P_1}) = 0$ y S_{P_1} es lisa. Como $\lambda_1 + \mu_1 > 1$, el divisor excepcional es irreducible, y al ser S_{P_1} lisa, la sección genérica lo largo del divisor excepcional C_g es lisa. El punto P_2 , corresponde a $(0, 1, 0)$ que es tangente a C , luego $S_{P_2} \notin T^*(S)$. Todo lo anterior nos dice que

$$T^*(S) = \{C_g\} \cup T.M.C(S) = \{C_g, S_1\},$$

y $l(S)$ es efectivamente 1.

En este caso al ser $\lambda_1 + \mu_1 \geq 1$, $m(S) =$ número de raíces conjugadas de la ecuación de S . El único monomio característico es $X^{\frac{m+1}{m}}$, con lo que el número de raíces conjugadas es m . Luego $(\lambda_1, \mu_1) = (\frac{m+1}{m}, 0)$ determina el árbol $A^*(S)$, cuyo grafo pesado es:



b) S no tiene curvas permitidas, y el divisor excepcional es irreducible. Entonces $\lambda_1 + \mu_1 \geq 1$ y $\lambda_1 < 1, \mu_1 < 1$, con lo que $0 < \lambda_1 < 1$ y $0 < \mu_1 < 1$. Consideremos S_{p_1} ; el par característico de S_{p_1} es

$$(\lambda'_1, \mu'_1) = (\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1), \quad \text{como } S_{p_1} \text{ es lisa,}$$

$g(S_{p_1}) = 0$ es decir que se aplica 3.3 (3), cap. I, y

$$\{(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1)\} \equiv \{(\alpha, 0)\}, \quad \text{con } \alpha = 1/p, \quad p \geq 2$$

Dado que $\mu_1 \neq 0$, es $(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1) = (0, \alpha)$, con lo que $\lambda_1 + \mu_1 = 1$ y $\mu_1 = 1/p$.

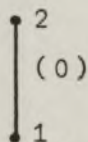
Haciendo lo mismo para S_{p_2} , obtenemos:

$$(\lambda_1, \lambda_1 + \mu_1 - 1) = (1/q, 0) \quad \text{con } q \geq 2$$

luego $\lambda_1 = 1/q$, y $\lambda_1 + \mu_1 = 1/q + 1/p = 1$, con $p \geq 2$ y $q \geq 2$, es decir que $p=2, q=2$ y $(\lambda_1, \mu_1) = (1/2, 1/2)$.

Como S_{p_1} es regular, la sección genérica en el divisor excepcional C_g es lisa y $T^*(S) = \{C_g\}$.

En este caso el monomio característico de una raíz S , es $x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ que tiene dos conjugados, luego $m(S) = 2$. El grafo pesado correspondiente a $A^*(S)$ es por lo tanto



c) S no tiene curvas permitidas, y el divisor excepcional de S es reducible.

En este caso, $\lambda_1 + \mu_1 < 1$, y por lo tanto $0 < \lambda_1$, $0 < \mu_1$. De las fórmulas de 3.9 (iii), cap. I, se deduce que el par característico de S_{P_1} es $(\lambda'_1, \mu'_1) =$

$$= \left(\frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\mu_1}, 1/\mu_1 \right). \quad \text{Para } S_{P_2} \text{ resulta, } (\lambda'_1, \mu'_1) =$$

$$= \left(1/\lambda_1, \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} \right).$$

Si $P_3 \in \mathcal{D}$, es el punto correspondiente a $(0,0,1)$, el par característico de S_{P_3} es $\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 - \mu_1}, \frac{\mu_1}{1 - \lambda_1 - \mu_1} \right)$.

$$\text{Como } l(S) = 1, \quad g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) = g(S_{P_3}) = 0.$$

En esta situación siempre es $\lambda'_1 = \mu'_1 > 1$, luego por la observación 3.11, cap. I, en los tres casos $(\lambda'_1, \mu'_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\text{Luego } \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1} = -\frac{\lambda_1}{\mu_1} - 1 \in \mathbb{Z},$$

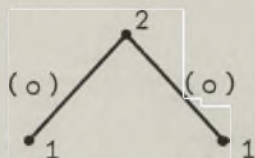
$$\text{y } \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} = -1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \in \mathbb{Z}, \quad \text{con lo que } \lambda_1 = \mu_1.$$

$$\text{Por otro lado } \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} = \frac{1 - 2\lambda_1}{\lambda_1} \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda_1}{1 - 2\lambda_1} \in \mathbb{N}, \quad \text{y}$$

$$\lambda_1 = 1 - 2\lambda_1, \quad \text{con lo que } 3\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad (\lambda_1, \mu_1) = (1/3, 1/3).$$

Por último si $(1/3, 1/3)$ es el par característico de S , el divisor excepcional tiene dos componentes irreducibles. Si C_g y C'_g son las secciones genéricas en cada una de las componentes, entonces como S_{P_1} y S_{P_2} son lisas, y cada componente de \mathcal{D} pasa por uno de los puntos P_1 y P_2 , $m(C_g) = 1$ y $m(C'_g) = 1$. Por lo tanto $T^*(S) = \{C_g, C'_g\}$ y $l(S) = 1$.

En este caso el único monomio característico que aparece es $X^{1/3} \cdot Y^{1/3}$, con lo que el número de raíces conjugadas es 3 y $m(S) = 3(\lambda_1 + \mu_1) = 3 \cdot (\frac{2}{3}) = 2$. El grafo pesado correspondiente a $A^*(S)$ es por lo tanto



c.q.d.

PROPOSICION 1.3.- Sea S una superficie cuasiordinaria irreducible, se puede determinar $A^*(S)$ a partir de los pares característicos normalizados.

Demostración.- Haremos la demostración por inducción en $l(S)$. Si $l(S) = 1$ hemos visto en el lema 1.2 que en los tres casos posibles, se determina el árbol conociendo el par característico normalizado de S .

Supongamos el enunciado cierto para toda superficie S con $l(S) \leq n-1$ y sea S una superficie tal que $l(S) = n$. Sean $r = g(S)$ y $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S . Consideremos cinco casos según que sean:

- i) $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq 1$
- ii) $\lambda_1 \geq 1, \quad \mu_1 < 1$
- iii) $\lambda_1 < 1, \quad \mu_1 < 1 \quad \text{y} \quad \lambda_1 + \mu_1 > 1$
- iv) $\lambda_1 + \mu_1 = 1$
- v) $\lambda_1 + \mu_1 < 1$

Veamos que en todos los casos se puede construir el árbol a partir de los pares característicos.

i) Sea S tal que $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq 1$.

S tiene pues dos curvas permitidas, C_1 y C_2 . El divisor excepcional es irreducible. Sea C_g la sección genérica en un punto $P \in \Sigma(S)$. En este caso $\Sigma(S) = \mathcal{D} - \{P_1, P_2\}$, y como P_1 y P_2 corresponden a las direcciones tangentes a C_1 y C_2 , es

$$T^*(S) = T.M._{C_1}(S) \cup T.M._{C_2}(S) \cup \{C_g\} = \{S_1, S_2, C_g\}$$

Se tiene que $l(S_1) \leq n-1$ y $l(S_2) \leq n-1$, y por la hipótesis de inducción, $A^*(S_1)$ y $A^*(S_2)$ se pueden calcular a partir de los pares característicos normalizados de S_1 y S_2 respectivamente; estos pares a su vez se calculan a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ por las fórmulas de 3.9. (i), cap. I, luego $A^*(S_1)$ y $A^*(S_2)$ se determinan a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Veamos que pasa con la sección genérica C_g .

$$\text{Si } P(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^t (Z - X^{\lambda_i} \cdot Y^{\mu_i} \cdot H_i(X^{1/m}, Y^{1/m})) \text{ es una}$$

ecuación normalizada de S , una ecuación normalizada de S_{P_1}

$$\text{es } \bar{P}(X_1, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^t (Z_1 - X_1^{\lambda_i + \mu_i - 1} Y_1^{\mu_i} H_i(X_1^{1/m}, X_1^{1/m} \cdot Y_1^{1/m}))$$

En este caso $\lambda_i + \mu_i - 1 > 0$, con lo que $\bar{P}(0, Y_1, Z_1) = Z_1^t$,

y el divisor excepcional en S_{P_1} , P_1 tiene $(x_1, z_1) \cdot \square_{P_1}$,

que es primo de 2.12, cap. I, se deduce que C_g es isomor

fa a la sección genérica de S_{P_1} transversal a \mathcal{D}_{P_1} . Por

([10], th. 6.2) la clase de equisingularidad de la sección ge

nérica de S_{P_1} transversal a la curva de ideal $(x_1, z_1) \cdot \square_{P_1}$

se puede obtener de los pares característicos de S_{P_1} , y por

lo tanto de los pares característicos de S , con lo que estos

pares característicos determinan $A_r(C_g)$.

Al ser $X_1^* = T^*(S) = \{S_1, S_2, C_g\}$, el árbol $A^*(S)$ se obtiene uniendo los árboles $A^*(S_1)$, $A^*(S_2)$ y $A_r(C_g)$. En $A^*(S)$ solo se introduce un nuevo vértice, S y tres nuevas aristas (S, S_1) , (S, S_2) y (S, C_g) . Los pesos en las aristas son $\beta(S, S_1) = 1$, $\beta(S, S_2) = 1$ y $\beta(S, C_g) = 0$. Por último $\alpha(S) = m(S) = t$, donde t es el número de raíces conjugadas de $X^{\lambda_1} \cdot Y^{\mu_1} \cdot H_1(X^{1/m}, Y^{1/m})$ que se puede obtener a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, por 3.6, cap. I.

ii) Sea S , tal que $\lambda_1 \geq 1$ y $\mu_1 < 1$.

S tiene entonces una curva permitida C_1 , el punto P_2 corresponde a la dirección tangente a $C_1(\lambda_1 \geq 1)$ con lo que $S_{P_2} \notin T^*(S)$. El divisor excepcional es irreducible. Sean C_g la sección genérica en \mathcal{D} y $T.M._{C_1}(S) = \{S_1\}$ entonces

$$T^*(S) = \{S_1, S_{P_1}, C_g\} \quad \text{ó} \quad T^*(S) = \{S_1, C_g\} \quad (2)$$

según que $P_1 \notin \Sigma(S)$ ó $P_1 \in \Sigma(S)$.

Ahora bien, como $\{(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son los pares característicos de S_{P_1} y $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 0$, por 3.12, cap. I, S_{P_1} es una singularidad de tipo dimensional 1 si y solo si $\mu_i = 0$, para todo i . Si esto ocurre como \mathcal{D}_{P_1} tiene por ideal $(x_1, z_1) \square_1$, como en el caso i), S_{P_1} es equisingular a lo largo de \mathcal{D}_{P_1} y $P_1 \in \Sigma(S)$. Por lo tanto se puede determinar en que caso de (2) estamos a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$.

Al ser $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 0$, todo lo hecho en i) para determinar $A_r(C_g)$ vale también en este caso, con lo que $A^*(S_1)$, $A^*(S_{P_1})$ y $A_r(C_g)$ se determinan a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. $A^*(S)$ se obtiene uniendo los tres árboles anteriores. Por cons

trucción $\beta(S, S_1) = 1$, $\beta(S, S_{P_1}) = 0$ y $\beta(S, C_g) = 0$. El peso de S , $m(S)$ es el número de raíces conjugadas de una raíz de $P(X, Y, Z)$ que se determina a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, con lo que tenemos construido el árbol $A^*(S)$ a partir de los pares característicos de S .

iii) Sea S tal que $\lambda_1 < 1$, $\mu_1 < 1$ y $\lambda_1 + \mu_1 > 1$.

El divisor excepcional de S es irreducible, y S no tiene curvas permitidas. El primer par característico de S_{P_1} , $(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1)$, verifica que $0 < \lambda_1 + \mu_1 - 1$ y $0 < \mu_1$ con lo que S_{P_1} no es una singularidad de tipo dimensional 1 y $P_1 \notin \Sigma(S)$. Para S_{P_2} , se verifica lo mismo, con lo que

$$T^*(S) = \{S_{P_1}, S_{P_2}, C_g\}$$

Por la hipótesis de inducción $A^*(S_{P_1})$ y $A^*(S_{P_2})$, dependen de los pares característicos de S_{P_1} y S_{P_2} y por lo tanto de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Como $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 0$, $A_r(C_g)$ se obtiene de la misma forma que en i) y la construcción de $A^*(S)$ se completa como en los dos casos anteriores.

iv) Sea S tal que $\lambda_1 + \mu_1 = 1$

En este caso S no tiene curvas permitidas, y el divisor excepcional de S , es irreducible, luego $T^*(S) = \{S_{P_1}, S_{P_2}, C_g\}$ salvo que P_1 ó P_2 estén en $\Sigma(S)$, en cuyo caso no aparecen en $T^*(S)$.

En estas condiciones $P_1 \in \Sigma(S)$ si y solo si S_{P_1} es regular si y solo si $r = g(S) = 1$ y $\mu_1 = 1/p$, con p entero.

En efecto. Sea $P(X, Y, Z)$ una ecuación normalizada de

S, en este caso al ser $\lambda_1 + \mu_1 - 1$, resulta que

$$\bar{P}(X_1, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^t (Z_1 - Y_1^{\mu_1} H_i(X_1^{1/m}, Y_1^{1/m} \cdot X_1^{1/m})) \quad (3)$$

y $\{(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son unos pares característicos de S_{P_1} .

Si S_{P_1} es equisingular, $\lambda_i + \mu_i - 1 = 0$ para todo i , ahora bien si $r \geq 2$, $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1 = 1$, luego $r=1$, y $(0, \mu_1)$ es el par característico de S_{P_1} , con lo que S_{P_1} es equisingular a lo largo de la curva C de ideal $(z_1, y_1) \square_1$ ($S_{P_1} = \text{Spec}(\square_1)$).

Como

$$0 = X_1 = \bar{P}(0, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^t (Z_1 - Y_1^{\mu_1} H_i(0, 0)) = Z_1^t + \dots + a Y_1^{t \cdot \mu_1}$$

es una ecuación del divisor excepcional \mathcal{D}_{P_1} , este no coincide con la curva C . Así pues $P_1 \in \Sigma(S)$ si y solo si S_{P_1} es regular y esto ocurre si y solo si $v(\bar{P}) = t \cdot \mu_1 = 1$, es decir $\mu_1 = \frac{1}{t}$. Para P_2 se verifica lo mismo, con lo que se puede determinar $T^*(S)$ a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$.

$A^*(S_{P_1})$ y $A^*(S_{P_2})$ se pueden construir por la hipótesis de inducción. Veamos como se determina $A_r(C_g)$. En este caso el primer par característico de \bar{P} , es por (3) $(0, \mu_1)$, con $\mu_1 < 1$. Si consideramos $\{x_1, z_1\}$ como parámetros obtenemos una ecuación cuyo primer par es $(0, 1/\mu_1)$ (3.3 (3), cap. I), con lo que $(y_1, z_1) \square_1$ es permitido.

Consideremos $T.M.C(S_{P_1}) = \{\bar{S}_1\}$.

Se puede entonces por una serie de transformaciones monoidales y aplicaciones de 3.3 (3), cap. I, obtener una superficie \bar{S}_h tal que el primer par $(0, \bar{\mu}_1)$ sea entero. Como \mathcal{D}_{P_1}

tiene por ecuación $X_1=0$, el ideal de \mathcal{D}_{P_1} no está contenido en el centro de las sucesivas transformaciones monoidales. Por la birregularidad de estas transformaciones fuera de su centro, se comprueba que C_g es isomorfa a la sección genérica de \bar{S}_h transversal a la curva de ideal $(x_1, z_1) \square_h$ (para verlo se consideran las sucesivas ecuaciones del tipo (3) que aparecen). Pueden ocurrir dos cosas:

Si $r=g(S)=1$, entonces \bar{S}_h es regular y C_g también.

Si $r=g(S)>1$, entonces $A_r(C_g)$ se puede calcular a partir de los pares característicos de \bar{S}_h como en el caso i), ahora bien \bar{S}_h esta en el árbol $A^*(S_{P_1})$ y la sucesión de transformados monoidales se puede determinar a partir de μ_1 , luego los pares característicos de \bar{S}_h se pueden por lo tanto deducir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$.

Así pues $A_r(C_g)$ se determina a partir de los pares característicos de S , y la construcción de $A^*(S)$ se completa como en los casos anteriores.

v) Sea S tal que $\lambda_1 + \mu_1 < 1$.

El divisor excepcional de S , tiene dos componentes irreducibles \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 . Sea C_g^1 (resp. C_g^2) la sección genérica en un punto de $\mathcal{D}_1 \cap \Sigma(S)$ (resp. $\mathcal{D}_2 \cap \Sigma(S)$). Como S no tiene curvas permitidas, $T^*(S) = \{C_g^1, C_g^2\} \cup \{S_{P_i} \mid P_i \notin \Sigma(S), 1 \leq i \leq 3\}$.

Veamos que se puede determinar si $P_i \in \Sigma(S)$ a partir de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Se verifica que $P_1 \in \Sigma(S)$ si y solo si S_{P_1} es regular si y solo si $g(S) = r = 1$ y

$(\frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\mu_1}, 1/\mu_1) \in N \times N$. En efecto. El primer par característico de S_{P_1} cumple que $\lambda'_1 = \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\mu_1} > 0$ y $\mu'_1 = \frac{1}{\mu_1} > 0$, con lo que S_{P_1} no puede ser una singularidad del tipo 1. Así pues, $P_1 \in \Sigma(S)$ si y solo si S_{P_1} es regular, y es claro que esto ocurre si $g(S) = 1$ y (λ'_1, μ'_1) son ambos enteros. Para P_2 y P_3 se obtiene la misma caracterización.

En este caso como $\lambda_1 + \mu_1 < 1$, una ecuación de S_{P_1} es

$$\bar{P}(X_1, Y_1, Z_1) = \prod_{i=1}^t (Z_1 X_1^{1-\lambda_1-\mu_1} - Y_1^{\mu_1} H_i(X_1^{1/m}, X_1^{1/m} \cdot Y_1^{1/m}))$$

con lo que $\bar{P}(0, Y_1, Z_1) = a \cdot Y_1^{t \cdot \mu_1}$, y entonces $(x_1, y_1) \square_1$ es el ideal de \mathfrak{D}_1 . Ahora bien, en esta situación $\{x_1, z_1\}$ son parámetros transversales de S_{P_1} , y los pares característicos de S_{P_1} respecto de $\{x_1, z_1, y_1\}$ son los que aparecen en la fórmula de 3.9. (iii), cap. I. Así que $A_r(C_g^1)$ se deduce de los pares característicos de S_{P_1} aplicando ([10], th. 6.2) y por lo tanto solo depende de $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Para $A_r(C_g^2)$ se procede igual con S_{P_2} . En esta situación, $A^*(S)$ se completa como en los otros casos. Como $\lambda_1 + \mu_1 < 1$, entonces por 3.6, cap. II, $\alpha(S) = m(S) = t(\lambda_1 + \mu_1)$, siendo t el número de raíces conjugadas de $X^{\lambda_1} \cdot Y^{\mu_1} H_1(X^{1/m}, Y^{1/m})$.

c.q.d.

Observación 1.4.- El cuerpo k no interviene para nada en las consideraciones hechas en la proposición anterior, así mismo en ([10], th. 6.2) se halla la clase de equisingularidad de la sec

ción genérica mediante un algoritmo que no depende del cuerpo base. Por lo tanto el proceso anterior se puede considerar como una operación que asocia a cada familia de pares característicos $\mathcal{B} = \{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ un árbol pesado $A^*(S)$, siendo S cualquier superficie, tal que \mathcal{B} es el sistema de pares característicos normalizados de S .

Escribiremos entonces $A^*(\mathcal{B}) = A^*(S)$.

Recordemos por último que existe una condición necesaria y suficiente para que una familia \mathcal{B} sea la familia de pares característicos de una superficie cuasiordinaria (c.f. [10], prop. 1.5).

Sección 2.

En esta sección demostramos que $A^*(S)$ determina los pares característicos normalizados de S , y como consecuencia de ello obtenemos que para superficies cuasiordinarias irreducibles la igualdad de los árboles reducidos ($A^*(S)$) es equivalente a la igualdad de los árboles totales.

TEOREMA 2.1.- Sea S una superficie cuasiordinaria irreducible, y sean $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, ($r=g(S)$) los pares característicos normalizados de S , entonces $\mathcal{B} = \{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ es la única familia de pares característicos que verifica $A^*(\mathcal{B}) = A^*(S)$.

Demostración.- La unicidad la obtenemos dando un método explícito para calcular los pares característicos normalizados de S a partir de los pares de los elementos de $X_1^* = T^*(S)$, con lo que se tiene el teorema por inducción en $l(S)$. La demostración es de hecho un algoritmo para obtener los pares característicos normalizados de S a partir de $A^*(S)$.

Al igual que en 1.3. consideraremos varios casos, con la diferencia que ahora se conoce $A^*(S)$, y hay que demostrar en cada caso que toda la información utilizada para obtener los pares característicos depende sólo de $A^*(S)$.

Sea S superficie cuasiordinaria irreducible, y sea (λ_1, μ_1) el primer par característicos normalizado de S . Veamos primeramente que se determina cual de las cinco condiciones

de 1.3. cumple S , a partir de $A^*(S)$.

En efecto:

(λ_1, μ_1) verifica i) si y sólo si S tiene dos curvas permitidas y esto ocurre si y sólo si existen superficies $S^*, S^{**} \in X_1^* = T^*(S)$ tal que $\beta(S, S^*) = 1$ y $\beta(S, S^{**}) = 1$.

(λ_1, μ_1) verifica ii) si y sólo si S tiene una sola curva permitida, es decir, que existe una única superficie $S^* \in X_1^*$, tal que $\beta(S, S^*) = 1$.

Si S es tal que $\lambda_1 + \mu_1 \geq 1$, $\lambda_1 < 1$, $\mu_1 < 1$, y S_{P_1} y S_{P_2} las transformadas cuadráticas de S en las direcciones distinguidas, se comprueba utilizando los cálculos de 3.9., cap. I, que $m(S_{P_1}) + m(S_{P_2}) \geq (\lambda_1 + \mu_1) m(S) > m(S)$ si $\lambda_1 + \mu_1 > 1$ y $m(S_{P_1}) + m(S_{P_2}) = m(S)$ si $\lambda_1 + \mu_1 = 1$.

Se sigue entonces que:

(λ_1, μ_1) verifica iii) si y solo si el divisor excepcional de S es irreducible, S no tiene curvas permitidas, y existen superficies $S^*, S^{**} \in X_1^* = T^*(S)$ tales que $m(S^*) + m(S^{**}) > m(S)$. (λ_1, μ_1) verifica iv) si y solo si el divisor excepcional de S es irreducible, S no tiene curvas permitidas, y no existen superficies $S^*, S^{**} \in X_1^*$ tales que $m(S^*) + m(S^{**}) > m(S)$.

Por último (λ_1, μ_1) cumple v) si y sólo si el divisor excepcional es irreducible y esto ocurre si y solo si existen dos curvas C_1, C_2 en $T^*(S) = X_1^*$.

Es claro por lo que hemos visto en 1.2 que si $l(S) = 1$, $A^*(S)$ determina el par característico de S . Supongamos el enunciado del teorema cierto para toda superficie cuasiordina-

ria tal que $l(S) \leq k-1$, y sea S tal que $l(S) = k$. Consideremos varios casos.

i) S tiene dos curvas permitidas.

Hemos visto en 1.3, que en esta situación $T^*(S)$ contiene dos superficies, S^* y S^{**} y que $g(S^*) = g(S^{**}) = g(S) = r$. Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ y $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^* y S^{**} que por la hipótesis de inducción son únicos y se obtienen a partir de $A^*(S^*)$ y $A^*(S^{**})$, es decir a partir de $A^*(S)$.

Con las notaciones de 1.3, $T^*(S) = \{S_1, S_2, C_g\}$ y los pares característicos normalizados de S_1 y S_2 son respectivamente (véase 3.10, cap. I).

$$[(\lambda_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r} \quad \text{y} \quad [(\lambda_i, \mu_i - 1)]_{1 \leq i \leq r}$$

Necesariamente $\{S_1, S_2\} = \{S^*, S^{**}\}$ es decir que

$$S_1 = S^* \quad \text{y} \quad S_2 = S^{**} \quad \delta \quad S_1 = S^{**} \quad \text{y} \quad S_2 = S^*$$

Como $l(S^*) \leq k-1$ y $l(S^{**}) \leq k-1$ por la unicidad de los pares característicos normalizados se tiene:

$$[(\lambda_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r} \quad \text{y} \quad (1)$$

$$[(\lambda_i, \mu_i - 1)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

ó bien

$$[(\lambda_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r} \quad \text{y} \quad (2)$$

$$[(\lambda_i, \mu_i - 1)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Para simplificar notaremos $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, y

$(\lambda) - (1) = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_r - 1)$, etc. Escribiremos $(\lambda) \geq (\mu)$ cuando $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ es mayor o igual que (μ_1, \dots, μ_r) en el orden lexicográfico.

Teniendo en cuenta como se define la igualdad de pares característicos, (1) y (2) implican que

$$\{(\lambda) - (1), (\mu), (\lambda), (\mu) - (1)\} = \{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)\}$$

Como $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son los pares normalizados de S , $(\lambda) \geq (\mu)$, con lo que

$$(\lambda) = \text{máx}\{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)\} = \text{máx}\{(\alpha), (\gamma)\}$$

Una vez conocido (λ) se puede hallar (μ) . En efecto, si $(\lambda) = \text{máx}\{(\alpha), (\gamma)\} = (\gamma)$ se verifica entonces (2) con lo que $[(\lambda_i, \mu_i - 1)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, es decir

$$\{(\lambda), (\mu) - (1)\} = \{(\gamma), (\delta)\} \quad \text{y} \quad (\mu) = (\delta) + (1)$$

Si $\text{máx}\{(\alpha), (\gamma)\} = (\alpha)$, entonces $(\mu) = (\beta) + (1)$

Estas fórmulas permiten obtener (λ) , y (μ) a partir de los pares característicos normalizados de S^* y S^{**} que son únicos por la hipótesis de inducción; luego los pares característicos normalizados de S son únicos.

ii) S tiene una sola curva permitida.

Sea $S^* \in T^*(S)$, tal que $\beta(S, S^*) = 1$, y sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos de S^* , conocidos por la inducción. Pueden ocurrir tres cosas:

a) $m(S^*) = m(S)$,

b) $m(S^*) < m(S)$ y el divisor excepcional de S^* es reducible.

c) $m(S^*) < m(S)$ y el divisor excepcional de S^* , es irreducible.

Si $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, son los pares característicos de S , vimos en 3.15, cap. I, que $m(S^*) = m(S)$, si y solo si $\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1$.

a) En este caso $\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1$, con lo que $\{(\lambda_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son los pares característicos de S_1 (es decir no es necesario aplicar 3.3 (3), cap. I) y $r' = g(S_1) = g(S^*) = g(S) = r$.

Consideremos S_{P_1} , los pares característicos de S_{P_1} son por la misma razón de antes $\{(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$.

Si existe $S^{**} \in T^*(S)$ por lo visto en 1.3, necesariamente, $S^{**} = S_{P_1}$. Sean entonces $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^{**} , únicos por hipótesis.

De la unicidad se deduce que

$$[(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Como $\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1 > \mu_1$,

$$(\lambda) + (\mu) - (1) = (\gamma) \quad \text{y} \quad (\mu) = (\delta)$$

Despejando

$$(\lambda) = (\gamma) - (\delta) + (1)$$

Si no existe S^{**} en $T^*(S)$, quiere decir que $P_1 \in \Sigma(S)$ con lo que S_{P_1} es equisingular (S_{P_1} no puede ser regular, pues en este caso $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 1$), luego por 3.12, cap. I, $\lambda_i = 0$,

para $1 \leq i \leq r$.

Como $S_1 = S^*$, por la unicidad, $\{(\lambda) - (1), (\mu)\} =$
 $= \{(\alpha), (\beta)\}$ y al ser en este caso $\mu_1 = 0$,

$$(\mu) = (\beta) \quad \text{y} \quad (\lambda) = (\alpha) + (1)$$

b) Supongamos que $m(S^*) < m(S)$ y el divisor excepcional de S^* es reducible. Entonces $\lambda_1 + \mu_1 - 1 < 1$, en $(\lambda_1 - 1, \mu_1)$ son ambos números distintos de 0, pues sino se aplicaría 3.3 (3), cap. I, y el divisor excepcional de S^* sería irreducible. Así pues $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 0$ y $\mu_1 > 0$ con lo que $(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1)$ es el primer par característico de Sp_1 , y aparece en $T^*(S)$ otra superficie S^{**} . Sean $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos de S^{**} . Como necesariamente $S^{**} = Sp_1$, por la unicidad de los pares característicos normalizados de S^{**} es

$$[(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)]_{1 \leq i \leq r} = \{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Hemos visto que $\lambda_1 - 1 > 0$, entonces $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > \mu_1$, con lo que $(\lambda) + (\mu) - (1) = (\gamma)$ y, $(\mu) = (\delta)$ y $(\lambda) = (\gamma) - (\delta) + (1)$.

c) Supongamos que $m(S^*) < m(S)$ y el divisor excepcional de S^* es irreducible.

Si esto ocurre, ya hemos indicado en b) que se aplica 3.3 (3), cap. I, a $S^* = S_1$, es decir que

$$\{(\lambda_1 - 1, \mu_1)\} \equiv \{(c, 0)\}, \quad \text{con} \quad c < 1$$

Si $1/c$ no es entero, $(1/c, 0)$ es el primer par característico de S^* y $g(S^*) = g(S)$. Si $1/c$ es entero, $g(S^*) = g(S) - 1$.

Ahora bien, de 3.15, cap. I se deduce que en este caso

$$m(S^*) = m(S_1) = (\lambda_1 + \mu_1 - 1)m(S) = c.m(S), \text{ es decir}$$

$$\text{que } 1/c = \frac{m(S)}{m(S^*)}.$$

Si $\frac{m(S)}{m(S^*)}$ no es entero, entonces $(1/c, 0)$ es el primer par característico normalizado de S . Hay que determinar si $\lambda_1 - 1 = 0$ ó $\mu_1 = 0$.

Si $\lambda_1 - 1 = 0$, $\mu_1 \neq 0$, y entonces el primer par característico de S_{P_1} es $(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1) = (\mu_1, \mu_1)$ con lo que $P_1 \notin \Sigma(S)$ y $S_{P_1} = S^{**} \in T^*(S)$. Si $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son los pares característicos normalizados de S^{**} , $\gamma_1 = \delta_1 = \mu_1 \neq 0$.

Esta última condición es también necesaria para que $\lambda_1 - 1 = 0$, pues si $\lambda_1 - 1 > 0$ y $\mu_1 = 0$, entonces $(\lambda_1 - 1, 0)$ es el primer par característico de S_{P_1} , con lo que ó bien $P_1 \in \Sigma(S)$ ó bien $P_1 \notin \Sigma(S)$ y el primer par característico de $S^{**} = S_{P_1} \in T^*(S)$ verifica que $\delta_1 = \mu_1 = 0$.

Así pues el que $\lambda_1 - 1 = 0$ ó $\mu_1 = 0$ se determina a partir de $A^*(S)$.

Si $\lambda_1 - 1 = c > 0$, $(\lambda_1, \mu_1) = (1+c, 0)$. Si $r \geq 2$ entonces,

$$\{(\lambda_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} = \{(c, 0)\} \cup \{(\lambda_i - 1, \mu_i)\}_{2 \leq i \leq r}$$

y los pares característicos normalizados de $S^* = S_1$ se obtienen aplicando 3.3 (3), cap. I, es decir

$$\{(1/c, 0)\} \cup \{((\lambda_i - c).1/c, \mu_i)\}_{2 \leq i \leq r}$$

Llamemos en este caso $(\lambda) = (\lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $(\alpha) = (\alpha_2, \dots, \alpha_r)$, etc.

Por la unicidad de los pares característicos normalizados de S^* se tiene

$$\frac{1}{c} (\lambda) - (1) = (\alpha), \quad \text{y} \quad (\mu) = (\beta), \quad \text{luego}$$

$$(\lambda) = \frac{m(S^*)}{m(S)} ((\alpha) + (1))$$

Si $\mu_1 = c \neq 0$, $(\lambda_1, \mu_1) = (1, c)$, y si $r \geq 2$

$\{(\lambda_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} = \{(0, c)\} \cup \{(\lambda_i - 1, \mu_i)\}_{2 \leq i \leq r}$ y los pares característicos de S^* son entonces

$$\{(1/c, 0)\} \cup \{(\lambda_i - 1 + c) \cdot \frac{1}{c}, \lambda_i - 1\}_{2 \leq i \leq r}$$

Por la unicidad

$$\frac{1}{c} ((\mu) - (1) + (c)) = (\alpha) \quad \text{y} \quad (\lambda) - (1) = (\beta)$$

Por lo tanto

$$(\lambda) = (\beta) + (1) \quad \text{y} \quad (\mu) = \frac{m(S^*)}{m(S)} ((\alpha) + (1)) - \left(\frac{m(S^*)}{m(S)}\right)$$

Si $\frac{m(S)}{m(S^*)} = \frac{1}{c}$ es entero, entonces $g(S^*) = g(S) - 1$.

En este caso se determina si $\lambda_1 - 1 = c$ ó $\mu_1 = c$, a partir del árbol de S , en los mismos términos que en el caso anterior. El resto se hace igual, es decir, si

$\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r-1}$ con los pares característicos normalizados de S^* y $(\lambda) = (\lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $(\mu_2, \dots, \mu_r) = (\mu)$ entonces

$(\lambda) = c((\alpha) + (1))$, $(\mu) = (\beta)$, cuando $(\lambda_1, \mu_1) = (1+c, 0)$ y $(\mu) = c(\alpha) + (1) - (c)$, $(\lambda) = (\beta) + (1)$, cuando $(\lambda_1, \mu_1) = (1, c)$. Con esto se termina la demostración en el caso ii).

iii) Sea S una superficie sin curvas permitidas, con el divisor excepcional irreducible, y tal que existen superficies $S^*, S^{**} \in T^*(S)$ con $m(S^*) + m(S^{**}) > m(S)$.

En este caso, $\lambda_1 + \mu_1 - 1 > 1$ y $0 < \lambda_1 < 1$ y $0 < \mu_1 < 1$.

Vimos en 1.3 que $T^*(S) = \{S_{P_1}, S_{P_2}, C_g\}$ y que $g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) = g(S)$. Entonces $\{S_{P_1}, S_{P_2}\} = \{S^*, S^{**}\}$.

Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$, y $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos de S^* y S^{**} , únicos por la hipótesis de inducción.

Como $\lambda_1 > \lambda_1 + \mu_1 - 1$ y $\mu_1 > \lambda_1 + \mu_1 - 1$, los pares característicos normalizados de S_{P_1} y S_{P_2} son respectivamente

$$\{(\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1)\}_{1 \leq i \leq r} \quad \text{y} \quad \{(\mu_i, \lambda_i + \mu_i - 1)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Ahora bien, $S^* = S_{P_1}$ y $S^{**} = S_{P_2}$, ó $S^* = S_{P_2}$ y $S^{**} = S_{P_1}$.

Por la unicidad de los pares característicos normalizados es

$$(\lambda) = (\alpha) \quad \text{y} \quad (\mu) = (\gamma) \quad \text{ó bien} \quad (\lambda) = (\gamma) \quad \text{y} \\ (\mu) = (\delta)$$

Es decir que $\{(\lambda), (\mu)\} = \{(\alpha), (\gamma)\}$ con lo que

$$(\lambda) = \max \{(\alpha), (\gamma)\} \quad \text{y} \quad (\mu) = \min \{(\alpha), (\gamma)\}$$

iv) Sea S una superficie sin curvas permitidas, con divisor excepcional irreducible, y tal que no existen superficies $S^*, S^{**} \in T^*(S)$ con $m(S^*) + m(S^{**}) > m(S)$.

En este caso es $\lambda_1 + \mu_1 = 1$, $0 < \lambda_1 < 1$ y $0 < \mu_1 < 1$.

En 1.3 (iv) vimos que $P_i \in \Sigma(S)$ si y solo si S_{P_i} es regular ($i=1,2$). Además de la ecuación (3) de 1.3 se deduce que

$$m(S_{P_1}) = \mu_1 \cdot m(S) \quad \text{y} \quad m(S_{P_2}) = \lambda_1 \cdot m(S)$$

Sean $S^*, S^{**} \in T^*(S)$ superficies (si $T^*(S)$ no contiene dos superficies tomamos la sección genérica que es entonces regular).

Si $m(S^*) = m(S^{**})$ es, $m(S_{P_1}) = m(S_{P_2})$ es decir que $\lambda_1 = \mu_1$ y por lo tanto $(\lambda_1, \mu_1) = (1/2, 1/2)$.

Si $m(S^*)$ y $m(S^{**})$ son distintas, supongamos que $m(S^*) > m(S^{**})$ entonces $S_{P_1} = S^{**}$ y $S_{P_2} = S^*$ y entonces

$$(\lambda_1, \mu_1) = \left(\frac{m(S^*)}{m(S)}, \frac{m(S^{**})}{m(S)} \right)$$

Una vez conocido λ_1 y μ_1 distinguiremos tres casos:

a) $1/\lambda_1$ no es entero.

$$\text{Entonces } g(S_{P_2}) = g(S^*) = g(S).$$

Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^* . Como $\lambda_1 + \mu_1 - 1 = 0$, los pares característicos de S_{P_2} son

$$\{(\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Se obtienen los pares característicos normalizados aplicando

$$3.3 (3), \text{ cap. I, es decir } \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_i - 1 + \lambda_1), \lambda_i + \mu_i - 1 \right) \right\}_{1 \leq i \leq r}.$$

Por la unicidad $\frac{1}{\lambda_1} ((\lambda) - (1) + \lambda_1(1)) = (\alpha)$ y

$$(\lambda) + (\mu) - (1) = (\beta). \text{ Despejando se obtiene}$$

$$(\lambda) = \lambda_1((\alpha) + (1)) - (1), \quad (\mu) = (\beta) + (2) - \lambda_1((\alpha) + (1))$$

b) $1/\lambda_1$ es entero y $1/\mu_1$ no es entero.

$$\text{Entonces } g(S_{P_1}) = g(S^{**}) = g(S), \text{ y si}$$

$\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ son los pares característicos normalizados de

S^{**} , se deduce como antes que

$$(\lambda) = \mu_1((\gamma) + (1)) - (1), \quad (\mu) = (\delta) + (2) - \mu_1((\gamma) + (1))$$

c) $1/\lambda_1$ y $1/\mu_1$ son ambos enteros.

Entonces $\lambda_1 = 1/a$, $\mu_1 = 1/b$, $1/a + 1/b = 1$, luego $a = b = 2$ y

$$(\lambda_1, \mu_1) = (1/2, 1/2)$$

En este caso es claro que $g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) = g(S) - 1$. Como suponemos que $l(S) = k > 1$, entonces $g(S) \geq 2$, $g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) \geq 1$, con lo que S_{P_1} y S_{P_2} están en $T^*(S)$. Por lo tanto $\{S_{P_1}, S_{P_2}\} = \{S^*, S^{**}\}$.

Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r-1}$, $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^* y S^{**} respectivamente.

Los pares característicos de S_{P_1} son

$$\{(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r} = \{(0, 1/2)\} \cup \{(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i)\}_{2 \leq i \leq r}$$

Aplicando 3.3 (3), cap. I, resulta:

$$\{(0, 2)\} \cup \{(\lambda_i + \mu_i - 1, 2\mu_i + 1)\}_{2 \leq i \leq r}$$

con lo que los pares característicos normalizados de S_{P_1} son

$$[(\lambda_i + \mu_i - 1, 2\mu_i + 1)]_{2 \leq i \leq r}$$

De la misma forma, se obtiene para S_{P_2} ,

$$[(\lambda_i + \mu_i - 1, 2\lambda_i + 1)]_{2 \leq i \leq r}$$

Si notamos $(\lambda) = (\lambda_2, \dots, \lambda_r)$ y $(\mu) = (\mu_2, \dots, \mu_r)$, de

$\{S_{P_2}, S_{P_2}\} = \{S^*, S^{**}\}$ y de la unicidad de los pares característicos normalizados se deduce que

$$\begin{aligned} \{(\lambda) + (\mu) - (1), 2(\lambda) + (1), 2(\mu) + (1)\} = \\ = \{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)\} \end{aligned}$$

Como $(\lambda) \geq (\mu)$, es

$$2(\lambda) + (1) = \text{máx} \{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)\} = \text{máx} \{(\alpha), (\gamma)\}$$

Supongamos que $\text{máx} \{(\alpha), (\gamma)\} = (\alpha)$, entonces

$$(\lambda) = \frac{1}{2}((\alpha) - (1))$$

Por lo tanto $S_{P_2} = S^*$ y $(\lambda) + (\mu) - (1) = (\beta)$ luego

$$(\mu) = (\beta) + (1) - \frac{1}{2}((\alpha) - (1))$$

En el caso en que $\text{máx} \{(\alpha), (\gamma)\} = (\gamma)$, entonces

$$(\lambda) = \frac{1}{2}((\gamma) - (1)) \quad \text{y} \quad (\mu) = (\delta) + (1) - \frac{1}{2}((\gamma) + (1))$$

v) Sea S una superficie sin curvas permitidas, y tal que el divisor excepcional \mathfrak{D} , es reducible. Si (λ_1, μ_1) es el primer par característico normalizado de S , $\lambda_1 + \mu_1 < 1$. Sean $S_{P_1}, S_{P_2}, S_{P_3}$ como siempre. Hemos visto en 1.3 que $P_i \in \Sigma(S)$ si y solo si $m(S_{P_i}) = 1$. Como suponemos que $l(S) = k > 1$, de los cálculos de 1.2 se deduce que $P_i \notin \Sigma(S)$ para algún $i=1,2,3$. En $T^*(S)$, hay por lo tanto tres elementos al menos. Podemos tomar, $S^*, S^{**}, S^{***} \in T^*(S)$ correspondientes a $S_{P_1}, S_{P_2}, S_{P_3}$. Si algún i , $P_i \in \Sigma(S)$, $S_{P_i} \notin T^*(S)$, pero correspondiente a S_{P_i} aparece la curva sección genérica que es en este caso regular y tiene por lo tanto la misma multiplicidad de S_{P_i} . Con esta salvedad estos tres elementos verifican que

$$\{S^*, S^{**}, S^{***}\} = \{S_{P_1}, S_{P_2}, S_{P_3}\}$$

Para determinar que igualdades se dan entre estas superficies recordemos que si $m(S) = p \cdot (\lambda_1 + \mu_1)$ entonces $m(S_{P_1}) = p \cdot \lambda_1$ y $m(S_{P_2}) = p \cdot \mu_1$, con lo que

$$m(S_{P_1}) + m(S_{P_2}) = m(S)$$

Distinguiremos entonces tres casos, según que entre los números

$$m(S^*) + m(S^{**}), \quad m(S^*) + m(S^{***}), \quad m(S^{**}) + m(S^{***}) \quad (3)$$

haya uno, dos ó tres iguales a $m(S)$.

Todos los números de (3) son iguales a $m(S)$, cuando $m(S^*) = m(S^{**}) = m(S^{***})$ y se deduce fácilmente de los cálculos de 1.2 (iii), que esto último ocurre si y solo si

$$(\lambda_1, \mu_1) = (1/3, 1/3) \quad \text{si y solo si} \quad (4)$$

$$g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) = g(S_{P_3}) = g(S) - 1$$

a) Sea S tal que solo uno de los números de (3) es igual a $m(S)$ y supongamos que es $m(S^*) + m(S^{**})$, entonces

$$\{S^*, S^{**}\} = \{S_{P_1}, S_{P_2}\}$$

Se sigue de 1.2 que $\max \{g(S^*), g(S^{**})\} = g(S) - 1$ si y solo

si los pares $(1/\lambda_1, \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1})$, $(1/\mu_1, \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\mu_1})$ son enteros, lo cual ocurre si y solo si $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{n}$.

Consideremos entonces tres casos:

a) S verifica que $\max \{g(S^*), g(S^{**})\} = g(S)$ y $m(S^*) \neq m(S^{**})$. Supongamos que $m(S^*) > m(S^{**})$, como

$$m(S_{P_1}) = k \cdot \mu_1 \quad \text{y} \quad m(S_{P_2}) = k \cdot \lambda_1, \quad \text{necesariamente} \quad S^* = S_{P_2}.$$

En el primer par característico de S_{P_2} ,

$(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1})$ no pueden ser ambos números enteros, ya que si $1/\lambda_1$ es entero, entonces $\frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} = a - \frac{\mu_1}{\lambda_1}$, con a entero y $0 < \frac{\mu_1}{\lambda_1} < 1$. Por lo tanto $g(S^*) = g(S_{P_2}) = g(S)$.

Sean $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normales de S . Al ser $\frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{\lambda_1} < \frac{1}{\lambda_1}$, los pares característicos normalizados de S_{P_2} resultan aplicando 3.9 (iii), cap. I:

$$\{(\frac{1}{\lambda_1} (1 + \lambda_i) - 1, \mu_i + (1 + \lambda_i) \cdot \frac{1}{\lambda_1} - 2)\}_{1 \leq i \leq r}$$

Por la unicidad de los pares característicos normalizados se verifica entonces:

$$(\alpha) = \frac{1}{\lambda_1} ((1) + (\lambda)) - (1), \quad (\beta) = (\mu) + \frac{1 - \mu_1}{\lambda_1} ((1) + (\lambda)) - (2)$$

Por lo tanto $\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ y despejando en estas igualdades obtenemos:

$$(\lambda) = \frac{1}{\alpha_1} ((\alpha) + (1)) - (1)$$

$$(\mu) = (\beta) + (2) - \frac{1 + \beta_1}{\alpha_1} ((\alpha) + (1))$$

$a_2)$ S verifica que $g(S) = \max \{g(S^*), g(S^{**})\}$, y $m(S^*) = m(S^{**})$. En este caso $\lambda_1 = \mu_1 = c$ y $1/\lambda_1$ no es entero, con lo que $g(S_{P_1}) = g(S_{P_2}) = g(S)$.

Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ y $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^* y S^{**} respectivamente.

Los pares característicos normalizados de S_{P_1} y S_{P_2} se obtienen utilizando las fórmulas de 3.9 (iii), cap. I. El resultado es respectivamente

$$(\lambda_i + \frac{1-c}{c} (1+\mu_i)) - 2, \quad \frac{1}{c} (1+\mu_i) - 1)$$

$$\text{y } (\mu_i + \frac{1-c}{c} (1+\lambda_i)) - 2, \quad \frac{1}{c} (1+\lambda_i) - 1)$$

Como $(\lambda) \geq (\mu)$ y $c < \frac{1}{2}$, se obtienen las siguientes desigualdades

$$\frac{1}{c} ((1)+(\lambda)) - (1) > (\mu) + \frac{1-c}{c} ((1)+(\lambda)) - (2)$$

$$(\mu) + \frac{1-c}{c} ((1)+(\lambda)) - (2) \geq (\lambda) + \frac{1-c}{c} ((1)+(\mu)) - (2)$$

$$\frac{1}{c} ((1)+(\lambda)) - (1) \geq \frac{1}{c} ((1)+(\mu)) - (1)$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades y la unicidad de los pares característicos para S^* y S^{**} resulta:

$$\frac{1}{c} ((1)+(\lambda)) - (1) = \text{máx } \{(\alpha), (\gamma)\}$$

Si $(\alpha) \neq (\gamma)$, por ejemplo $(\alpha) > (\gamma)$, necesariamente $S_{P_2} = S^*$ con lo que (λ) y (μ) se calculan mediante las fórmulas de a_1 .

Si $(\alpha) = (\gamma)$, es claro de las desigualdades anteriores que necesariamente $(\lambda) = (\mu)$ con lo que $\{(\alpha), (\beta)\} = \{(\gamma), (\delta)\}$ y son ciertas también las fórmulas de a_1 .

$$a_3) \text{ S verifica que } \text{máx } \{g(S^*), g(S^{**})\} = g(S) - 1.$$

En este caso $\lambda_1 = \mu_1 = 1/n$. Como $g(S) = \text{máx } \{g(S^*), g(S^{**}), g(S^{***})\}$ por (4), $(S^{***}) = g(S)$ y n es mayor que 3.

Sean $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ los pares característicos normalizados de S^{***} .

El primer par característico de S_{P_3} es $(1/n-2, 1/n-2)$.

Por ser $S^{***} = S_{P_3}$, $\gamma_1 = \frac{1}{n-2}$ con lo que $n = \frac{1}{\gamma_1} + 2$.

Las fórmulas de 3.9 (iii), cap. I, aplicadas a este caso nos dan los pares característicos de S_{P_1} que son:

$$\left\{ \left(\frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \lambda_i + \frac{1}{n} \mu_i \right), \frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \mu_i + \frac{1}{n} \cdot \lambda_i \right) \right) \right\}_{1 \leq i \leq r}$$

Por la hipótesis de inducción se tiene entonces que

$$\{(\gamma), (\delta)\} = \left\{ \frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} (\lambda) + \frac{1}{n} (\mu) \right), \frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} (\mu) + \frac{1}{n} (\lambda) \right) \right\}$$

Como $(\lambda) \geq (\mu)$ y $n > 3$ se verifica que:

$$\frac{n-1}{n} (\lambda) + \frac{1}{n} (\mu) \geq \frac{n-1}{n} (\mu) + \frac{1}{n} (\lambda)$$

Con lo que:

$$(\gamma) = \frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} (\lambda) + \frac{1}{n} (\mu) \right)$$

$$(\delta) = \frac{n-2}{n} \left(\frac{n-1}{n} (\mu) + \frac{1}{n} (\lambda) \right)$$

Despejando (λ) y (μ) obtenemos

$$(\lambda) = \frac{n^2}{(n-2)((n-1)^2-1)} \cdot ((n-1)(\gamma) - (\delta))$$

$$(\mu) = \frac{n^2}{(n-2)((n-1)^2-1)} \cdot ((n-1)(\delta) - (\gamma))$$

b) Sea S una superficie tal que solo dos de los números de (3) son iguales a $m(S)$. Supongamos que $m(S) \neq m(S^{**}) + m(S^{***})$ es decir que $m(S^*) \neq m(S^{**}) = m(S^{***})$. Consideramos dos casos:

b_1) Se verifica que $m(S^*) > m(S^{**}) = m(S^{***})$.

Como $m(S_{P_2}) \geq m(S_{P_1})$, necesariamente $S^* = S_{P_2}$.

En este caso se comprueba de la misma forma que en a_1 que $g(S^*) = g(S)$. Los pares característicos normalizados de S se obtienen entonces a partir de los de S^* por las fórmulas deducidas en el caso a_1 .

b_2) Se verifica que $m(S^*) < m(S^{**}) = m(S^{***})$.

Luego $S^* = S_{P_1}$ y $\{S^{**}, S^{***}\} = \{S_{P_2}, S_{P_3}\}$.

En este caso $m(S_{P_2}) = p \cdot \lambda_1$ y $m(S_{P_3}) = p(1 - \lambda_1 - \mu_1)$

con lo que $\lambda_1 = 1 - \lambda_1 - \mu_1$. En estas condiciones $\frac{1}{\lambda_1}$ no es en tero, ya que si $\frac{1}{\lambda_1} = n$, entonces $\mu_1 = \frac{n-2}{n}$ y como necesaria mente $n > 3$, μ_1 sería mayor que λ_1 .

El primer par característico de S_{P_2} es entonces $(\frac{1}{\lambda_1}, 1)$ y el de S_{P_2} , $(1, \frac{\mu_1}{\lambda_1})$, con lo que $g(S_{P_2}) = g(S_{P_3}) = g(S)$.

Sea (α_1, β_1) el primer par característico de S^{**} y (γ_1, δ_1) el de S^{***} , entonces sólo uno de los números β_1 y δ_1 es igual a 1, con lo que se determina si $S^{**} = S_{P_2}$ ó bien $S^{***} = S_{P_2}$. Una vez determinado esto, los pares característicos de S se obtienen mediante las fórmulas del caso a_1 .

c) Sea S una superficie tal que los tres números de (3) son iguales a $m(S)$. Por (4) se verifica entonces que $g(S^*) = g(S^{**}) = g(S^{***}) = g(S) - 1$ y $(\lambda_1, \mu_1) = (1/3, 1/3)$, y $g(S) \geq 2$. En este caso se deduce de las fórmulas de 3.9. (iii), cap. I, que los pares característicos normalizados de S_{P_1} , S_{P_2} y S_{P_3} son respectivamente

$$\begin{aligned} & [(3\mu_i + 2, 2\mu_i + \lambda_i)]_{2 \leq i \leq r}, \\ & [(2\lambda_i + \mu_i, 3\lambda_i + 2)]_{2 \leq i \leq r}, \quad \text{y} \\ & [(2\lambda_i + \mu_i, 2\mu_i + \lambda_i)]_{2 \leq i \leq r} \end{aligned}$$

Sean $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq r-1}$, $\{(\gamma_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq r-1}$, $\{(\eta_i, \rho_i)\}_{1 \leq i \leq r-1}$ los pares característicos normalizados de S^* , S^{**} y S^{***} respectivamente, que son conocidos a partir de $A^*(S)$. Como $\{S^*, S^{**}, S^{***}\} = \{S_{P_1}, S_{P_2}, S_{P_3}\}$, por la hipótesis de inducción se verifica, si ponemos $(\lambda) = (\lambda_2, \dots, \lambda_r)$, y $(\mu) = (\mu_2, \dots, \mu_r)$ que

$$\{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\eta), (\rho)\} = \{2(\lambda) + (\mu), 3(\lambda) + (2), 3(\mu) + (2), \\ , 2(\mu) + (\lambda), 2(\lambda) + (\mu)\}$$

Sea $(m) = \text{máx}\{(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\eta), (\rho)\}$. Como $(\lambda) \geq (\mu)$ se verifican las siguientes desigualdades

$$3(\lambda) + (2) > 2(\lambda) + (\mu), \quad 3(\lambda) + (2) > (\lambda) + 2(\mu) \quad \text{y} \\ 3(\lambda) + (2) \geq 3(\mu) + (2) \quad (5)$$

Por lo tanto $(m) = 3(\lambda) + (2)$ y

$$(\lambda) = \frac{1}{3} ((m) - (2))$$

Si el máximo (m) es alcanzado por uno solo de los vectores (α) , (γ) , (η) , supongamos que (γ) , entonces necesariamente $S_{p_2} = S^{**}$ y por lo tanto

$$2(\lambda) + (\mu) = (\delta), \quad \text{y} \quad (\mu) = (\delta) - 2(\gamma)$$

Si (m) es igual a dos vectores de (α) , (β) y (γ) entonces $(m) = \text{máx}\{(\lambda) + 2(\mu), 2(\lambda) + (\mu), 3(\mu) + (2)\}$ y como en (5) solo hay una desigualdad no estricta necesariamente

$$3(\lambda) + (2) = 3(\mu) + (2) = (m), \quad \text{y}$$

$$(\mu) = (\lambda) = \frac{1}{3} ((m) - (2))$$

c.q.d.

Nota 2.2.- Es claro de 1.3 y de 2.1 que dadas dos superficies cuasiordinarias irreducibles, S y S' se verifica que:

$A^*(S) \approx A^*(S')$ si y sólo si S y S' tienen los mismos pares característicos normalizados.

Veamos ahora como consecuencia de este resultado que para superficies cuasiordinarias irreducibles, el conocimiento de $A^*(S)$ equivale al conocimiento de $A.T.(S)$, es decir se verifica la siguiente proposición:

PROPOSICION 2.3.- Sean S y S' superficies cuasiordinarias irreducibles, entonces $A^*(S) \approx A^*(S')$ si y sólo si $A.T.(S) = A.T.(S')$.

Demostración.- Si $A^*(S) = A^*(S')$. por 2.2 los pares característicos normalizados de S y S' coinciden. Ahora bien, se puede demostrar de la misma forma que en 1.3 que dada una superficie \bar{S} el conjunto $X_1 = T(\bar{S})$ y los pares característicos normalizados de las superficies de $T(\bar{S})$ (que son cuasiordinarias irreducibles), dependen sólo de los pares característicos normalizados de \bar{S} . Por inducción se demuestra que para todo i , con $1 \leq i \leq$ longitud de $A.T.(\bar{S})$, se verifica lo mismo para X_i (la longitud de $A.T.(\bar{S})$ puede ser infinita).

Se tiene entonces que $A.T.(S)$ y $A.T.(S')$ solo dependen de los pares característicos normalizados de S y S' que coinciden y por lo tanto $A.T.(S) \approx A.T.(S')$.

Veamos ahora que dada una superficie cuasiordinaria irreducible \bar{S} , $A^*(\bar{S})$ se puede determinar a partir de $A.T.(\bar{S})$. En efecto. Supongamos conocido $A.T.(\bar{S})$. Pueden darse tres casos:

i) Existen superficies $S^*, S^{**} \in X_1 = T(\bar{S})$ tal que $\beta(\bar{S}, S^*) = \beta(\bar{S}, S^{**}) = 1$. Entonces \bar{S} tiene dos curvas permiti

das, y según vimos en 1.3, i), $T(\bar{S})$ contiene cuatro superficies, dos de las cuales S^{***} , S^{****} verifican que $\beta(\bar{S}, S^{***}) = \beta(\bar{S}, S^{****}) = 0$. Estas superficies corresponden a las transformadas cuadráticas formales de \bar{S} en las direcciones tangentes a las curvas permitidas y por lo tanto $X_1^* = T^*(\bar{S}) = T(S) - \{S^{***}, S^{****}\}$.

ii) Existe una única superficie $S^* \in T(S)$ tal que $\beta(\bar{S}, S^*) = 1$. En este caso \bar{S} tiene una sola curva permitida. Si (λ_1, μ_1) es el primer par característico normalizado de \bar{S} , se tiene que $\lambda_1 \geq 1 < \mu_1$. El primer par característico de \bar{S}_{P_1} es $(\lambda_1 + \mu_1 - 1, \mu_1)$ y el de \bar{S}_{P_2} , $(\lambda_1, \lambda_1 + \mu_1 - 1)$. Según 3.15, cap. I, $m(\bar{S}_{P_1}) = m(\bar{S})$ si y solo si $\lambda_1 + \mu_1 - 1 + \mu_1 < 1$. Consideramos entonces dos casos:

a) En $T(\bar{S})$ existe una única superficie S^{**} tal que $\beta(\bar{S}, S^{**}) = 0$ y $m(S^{**}) = m(\bar{S})$. Entonces es $S^{**} = \bar{S}_{P_2}$ y por lo tanto corresponde a la dirección tangente a la curva permitida y $T^*(\bar{S}) = T(\bar{S}) - \{S^{**}\}$.

b) En $T(\bar{S})$, existen dos superficies S^{**} y S^{****} tales que $\beta(\bar{S}, S^{**}) = \beta(\bar{S}, S^{****}) = 0$ y $m(S^{**}) = m(S^{****}) = m(S)$. Entonces $\lambda_1 + 2\mu_1 - 1 \geq 1$. Si además $\lambda_1 + \mu_1 - 1 \geq 1$ entonces \bar{S}_{P_2} tiene dos curvas permitidas y \bar{S}_{P_1} tiene una curva permitida. Si $\lambda_1 + \mu_1 - 1 < 1$, entonces \bar{S}_{P_2} tiene una sola curva permitida y \bar{S}_{P_1} no tiene curvas permitidas. Es claro entonces que observando el número de curvas permitidas se puede determinar si $S^{**} = \bar{S}_{P_2}$ ó $S^{****} = \bar{S}_{P_2}$, y una vez hecho esto, $T^*(\bar{S}) = T(\bar{S}) - \{\bar{S}_{P_2}\}$.

iii) No existen superficies $X^* \in T(\bar{S})$ tal que $\beta(\bar{S}, S^*) = 1$.

En este caso \bar{S} no tiene curvas permitidas y

$X_1^* = T^*(\bar{S}) = T(\bar{S})$. Iterando el proceso anterior, se determina X_i^* para cada i , con $1 \leq i \leq l(\bar{S})$, a partir de $A.T.(\bar{S})$ y por lo tanto $A^*(\bar{S})$.

Como consecuencia de lo anterior si $A.T.(S) = A.T.(S')$

entonces $A^*(S) = A^*(S')$.

c.q.d.

REFERENCIAS

- [1]] AROCA, J.M., HIRONAKA, H., VICENTE, J.L.: The theory of the maximal contact. Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juan", nº 29. C.S.I.C. Madrid. 1975.
- [2]] BENNETT, B.M.: "On the characteristic functions of a local ring". Ann. of Math. 90 (1970) pp. 25-87.
- [3]] BERGE, C.: Graphes et Hypergraphes. Dunod. Paris. 1970.
- [4]] BOURBAKI, N.: Algèbre Commutative. Chap. 3. Act. Sci. et Ind. 1293. Hermann. Paris. 1961.
- [5]] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNE, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. III. Pub. Math. I.H.E.S. nº 11. París. 1961.
- [6]] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNE, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. IV. Pub. Math. I.H.E.S. nº 20. París. 1964.
- [7]] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNE, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. IV. Pub. Math. I.H.E.S. nº 24, París. 1965.
- [8]] HIRONAKA, H.: "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I-II". Ann. of Math. 79 (1964) pp. 109-326.
- [9]] KIRBY, D.: "The structure of an isolated multiple point of a surface, I". Proc. London Math. Soc. (3), 6 (1956). pp. 597-609.
- [10]] LIPMAN, J.: "Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces". Ph. D. Thesis. Harvard Univ. 1965.
- [11]] MATSUMURA, H.: Commutative Algebra. Benjamin. New York. 1970

- [112] NAGATA, M.: Local Rings. Interscience. New York. 1962.
- [113] PIEDRA, R.: "Estudio local de singularidades de superficies sobre cuerpos base de característica arbitraria". Tesis. Univ. de Sevilla. 1978.
- [114] ROMO, C.: "Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera". Tesis. Univ. Complutense. Madrid. 1976.
- [115] SALMON, P., GRECO, S.: Topics in \mathbb{M} -adic topologies Ergebnisse der Math. 58. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1971.
- [116] SANCHEZ GIRALDA, T.: "Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". Tesis Univ. Complutense. Madrid. 1976.
- [117] VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebra. Vol. I. Traducción inglesa. F. Ungar. New York. 1949.
- [118] WALKER, R.J.: Algebraic Curves. Dover. New York. 1962.
- [119] ZARISKI, O., SAMUEL, P.: Commutative Algebra. Vol. II. Van Nostrand. Princeton. 1960.
- [200] ZARISKI, O.: "Studies in equisingularity, I". Amer. J. Math. 87 (1965) pp. 507-536.
- [221] ZARISKI, O.: "Studies in equisingularity, II". Amer. J. Math. 87 (1965) pp. 972-1006.
- [222] ZARISKI, O.: "Exceptional singularities of an algebroid surface and their reduction". Atti Accad. Nal. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Serie VIII. 43 fasc. 3-4 (1967) pp. 135-146.
- [223] ZARISKI, O.: "Contributions to the problem of equisingularity". Questions on Algebraic Varieties. C.I.M.E. Varenna. Settembre 1969. Edizioni Cremonese. Roma. 1970. pp. 261-243.