UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

Topología de las gráficas en espacios de funciones continuas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Feliciana Serrano Pascual

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

TOPOLOGIA DE LAS GRAFICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Feliciana Serrano Pascual

Madrid, 1988

Colección Tesis Doctorales. N.º 176/88

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 - 28015 Madrid
Madrid, 1988
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-5539-1988

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

TOPOLOGIA DE LAS GRAFICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Memoria que presenta Feliciana Serrano Pascual, para optar al Grado de Doctor. Dirigida por el Profesor D. Enrique Outerelo Domínguez.

Madrid, Noviembre, 1986

Deseo expresar aquí mi agradecimiento al profesor D. Enrique Outerelo, director de esta memoria, por sus consejos y la ayuda que en todo momento me ha prestado.

INDICE

INTRODUCCION

En los espacios de funciones diferenciales se han considerado diversas topologías. En 1961 Cerf introdujo la topología C^r en el espacio de las aplicaciones diferenciables de clase r y hace notar que en el caso $r = 0$ la topología se puede definir en el espacio de las funciones continuas entre dos espacios topológicos. En 1969 Mather considera otra topología en el espacio de las funciones diferenciables, que se llama de Whitney por aparecer esbozada en [W], y que en el caso de las continuas coincide con la de las gráficas. Esta última fue introducida por Naimpally para el espacio de funciones entre dos espacios topológicos en 1966, en [N].

La paracompacidad del espacio de funciones diferenciables entre dos variedades diferenciables con la topología de Whitney permite asegurar la existencia de conexiones y otros objetos de geometría diferencial que en su ausencia es necesario construir para cada caso particular. De ahí la importancia del estudio de esta topología.

En su artículo inicial Naimpally define la topología de las gráficas en Y^X y estudia las propiedades T_1 y T_2 así como la relación con la topología producto, la compacta abierta y la de la convergencia uniforme.

En 1970 en su artículo con Pareek continúa con el estudio de las propiedades y relaciones anteriores.

H. Poppe, en 1967 introduce una topología menos fina que la de las gráficas y estudia las relaciones entre ambas así como con la de la convergencia uniforme.

En 1976 D. Gauld estudia la relación entre la topología de las gráficas y mayorantes en el conjunto $C(X,Y)$ con Y métrico. Prueba que $Hom(X,X)$ es un grupo topológico cuando X es metrizable, pero que el resultado es falso si X no es metrizable. En la proposición 3.17, obtenemos el mismo resultado para X regular y paracompacto. Di Concilio y otros, en un artículo de 1982, consideran la relación entre la topología de las gráficas y otras. Prueban que con la primera de ellas si X es regular la función evaluación es continua y que si X es paracompacto e Y métrico $C(X,Y)$ es regular, resultado que se mejora en la proposición 2.5 en que sólo se impone que X sea metacompacto y T_1 e Y regular.

En 1984 N. Levine compara esta topología con otras y en particular obtiene el resultado de que si X es compacto, Y arbitrario y Z métrico la función composición $C^*(X,Y) \times C^{\#}(Y,Z) \to C(X,Z)$ es continua relativa a las topologías de las gráficas, siendo $C^*(X,Y)$ las funciones continuas abiertas supravectivas de X en Y, y $C^{\#}(Y,Z)$ las funciones continuas e inyectivas de Y en Z. La proposición 3.14 demuestra que la función composición $C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$ es continua (relativa a la topología de las gráficas) si X es numerablemente compacto, Y arbitrario y Z pseudometrizable.

McCoy estudia la relación entre T_{f_d} y las topologías finas en $C(X,Y)$ y obtiene resultados sobre metrizabilidad y numerabilidad. (T_{f_d} coincide con la topología de las gráficas cuando X es paracompacto y regular e Y es métrico).

Nosotros estudiaremos la topología de las gráficas en el espacio de las funciones continuas entre dos espacios topológicos.

En el primer capítulo se dan las definiciones de las diferentes topologías y se estudian las relaciones entre ellas. De gran utilidad es el lema 1.2 y el corolario 1.7 que asegura que en el caso de ser X paracompacto y regular las topologías de las gráficas y la engendrada por B** coinciden. Michor considera que las dos son distintas y prueba los mismos resultados para ambas, lo que, a la vista del corolario 1.7, es evidente.

En lo que se refiere a la metrizabilidad del espacio de las funciones continuas en un espacio metrizable el lema 1.14 permite obtener, en las proposiciones 1.15 y 1.18, para T_W (topología de las gráficas) resultados análogos a los de McCoy para T_{f_d}, y como consecuencia la proposición 1.21 que nos dice que las topologías T_W y T_{f_d} no coinciden en general. Por último, el corolario 1.24 demuestra que la topología T_{C° de Cerf es distinta de T_W, y el corolario 1.24 da condiciones para que ambas coincidan.

En el capítulo 2 se estudian los axiomas de separación. En los axiomas bajos, T_0, T_1 y T_2 se ha completado el estudio hecho por Naimpally.

Los resultados sobre regularidad son escasos. Sólo la proposición 2.5, ya mencionada, da condiciones suficientes para la regularidad. En lo que se refiere a la completa regularidad se tienen las proposiciones 2.9 y sobre todo la proposición 2.10.

Pero el resultado más importante es relativo a la normalidad, la proposición 2.11 y sus corolarios 2.12 y 2.13, y resuelve un problema largo tiempo abierto: $C_W(M,N)$, con M, N variedades metrizables de dimensión positiva, es normal si y sólo si M es compacta.

He de observar que ya acabado este trabajo, en Zbl. Math.

579:54010 y en M.R. 86i:58022, ha aparecido la recensión de un trabajo de I.I. Guran y M.M. Zarichnyji, en el que obtienen el mismo resultado para $C^r(M,N)$ con la topología de Whitney. Según la recensión del M.R. el método utilizado por ellos es indirecto, mientras que aquí se da una demostración constructiva.

En el capítulo 3 se estudia la continuidad de las varias composiciones, que para el caso de variedades diferenciables ya había sido estudiado, en parte, por Mather. La primera parte se dedica al estudio de las condiciones para que $\psi : C_W(X,X') \times C_W(X,X'') \to C_W(X,X' \times X'')$ $(\psi(f,g) = \langle f,g\rangle)$ sea un homeomorfismo, para lo cual se procede al estudio de la continuidad de f_* y de ψ.

Resultados a destacar son el corolario 3.5 y la proposición 3.6. El primero asegura que si A es un anillo topológico pseudometrizable $C_W(X,A)$ es un anillo topológico, cualquiera que sea X. La segunda afirma que en el caso de ser E un espacio vectorial real normado no trivial y X un espacio T_1, $C_W(X,E)$ es un espacio vectorial topológico si y sólo si X es numerablemente compacto. Aquí se plantea el problema de si es cierto el teorema de Banach-Stone para $C_W(X)$ con X numerablemente compacto.

En la segunda parte se estudia la continuidad de f^*. Las proposiciones 3.7 y 3.8, claves en lo que sigue, permiten probar el corolario 3.10, generalización de un resultado similar para variedades.

La tercera parte está dedicada al estudio de la continuidad de la composición. La proposición 3.11 es un resultado general que en su versión particular, corolario 3.13, era ya conocido pa ra el caso de variedades. La proposición 3.14, generalización de un resultado de N. Levine, prueba que si Y es numerablemente compacto, Z pseudometrizable y X arbitrario la composición es continua. El corolario 1.7 aquí es esencial. Resumen de todo lo anterior es la proposición 3.15 que da condiciones necesarias y suficientes para que la composición sea continua. Como aplicación se estudian condiciones para que $H_W(X,X)$ sea un grupo topológico, mejorando un resultado de D. Gauld, el cual ya había observado que no siempre lo es. El capítulo acaba con el estudio de la continuidad de p_1^* y p_2^* (resumido en las proposiciones 3.23, 3.24 y 3.25) previo al de la continuidad de la aplicación

$$\Psi : C_W(X,Y) \times C_W(X',Y') \to C_W(X \times X', Y \times Y')$$

($\Psi(f,g) = f \times g$) en las proposiciones 3.26 y 3.27. Este estudio está motivado por la proposición 3.10 de [G-G] pág. 49 en la que afirma, de manera errónea, la continuidad de Ψ para el caso de variedades.

En el capítulo 4 se estudia la ley exponencial y relacionada con ella la función evaluación. La continuidad de esta última, en el caso de X regular, ya había sido probada por Di Concilio y otros.

El capítulo está dividido en dos partes, en la primera se estudian condiciones para que Λ sea una biyección y en la segunda para que sea un homeomorfismo, y más general, para que Λ ó Λ^{-1} sean continuas.

En la primera parte se destacan las proposiciones 4.5 y 4.8. Y como consecuencia importante de ellas la proposición 4.9 que asegura que si X es I A.N., Y es regular y numerablemente compacto y $f : X \to X'$ es una identificación, entonces $f \times 1_Y$ es una identificación. El resultado es bien conocido en el caso de Y localmente compacto ó $X' \times Y$ un k-espacio. La proposición 4.11 merece también destacarse.

En la segunda parte las proposiciones 4.19 y 4.20 dan condiciones para la continuidad de Λ^{-1} y Λ respectivamente. La proposición 4.18 da condiciones necesarias y suficientes para que Λ sea isomorfismo. Resumen de todo el capítulo es la proposición 4.22 que permite probar, utilizando la proposición 4.11, que en el caso de ser X, Y y Z variedades metrizables con X y Z de dimensión positiva

$\Lambda : C_W(X \times Y, Z) \approx C_W(X, C_W(Y,Z))$ si y sólo si Y es compacta.

NOTACION Y TERMINOLOGIA

En lo que sigue se usará la siguiente notación: Dado un espacio topológico X y x un elemento de X, $U^x, V^x, \ldots$ denotará un entorno abierto de x en X. Si A es un subconjunto de X, $\mathring{A}$ denota el interior de A en X y $\bar{A}$ su adherencia.

Si X e Y son espacios topológicos por $X \times Y$ denotamos el producto cartesiano de X e Y con la topología producto. Y^X representa el conjunto de las funciones de X en Y y $C(X,Y)$ el subconjunto de las continuas. Si $y \in Y$ con c_y se denotará la función constante (su dominio será explícito en cada caso) con valor y.

Si f es una función de X en Y, Γ_f denota su grafo, es decir $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$. Si A es un subespacio de X, $f|_A$ denota la restricción de f a A.

$C_c(X,Y)$ denota el espacio $C(X,Y)$ con la topología compacta-abierta; T_c también se usará para indicar esta topología.

Dada una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de espacios topológicos $\prod_{i \in I} X_i$ denota el producto cartesiano de dicha familia con la topología producto y $C_p(X,Y)$ denota el subespacio $C(X,Y)$ de $\prod_{y \in Y} X_y$, con $X_y = X$ para todo y de Y. $\sum_{i \in I} X_i$ denota la suma topológica de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$.

$\mathbb{R}$ denota el espacio de los números reales con la topología usual. El subespacio $[0,1]$ a veces se notará por I. $\mathbb{Q}$ denota el subespacio de los números racionales y $\mathbb{N}$ el de los naturales. La topología $T_{I)}$ en $\mathbb{R}$ es la que tiene como base la familia de los intervalos $[a,b)$ con $a < b$.

Se usará la misma terminología que en "Topología" de

J. Margalef y otros, para los conceptos topológicos.

La terminología relativa a ordinales es la de "Set Theory" de K. Kunen.

Si μ es un ordinal, $C \subset \mu$ se dice cerrado si lo es en la topología del orden usual. Si la cofinalidad de μ es mayor que ω (en particular, la cofinalidad de $\Omega = \omega_1$ es $\Omega > \omega$), $X \subset \mu$ se dice estacionario si $X \cap C \neq \emptyset$ para todo cerrado no acotado C.

Enunciaremos a continuación un teorema que será utilizado y cuya demostración puede verse en K. Kunen

<u>Pressing Down Lema</u>:

"Sea K un ordinal regular mayor que ω, S un subconjunto estacionario de K y $f : S \to K$ una función tal que $\forall\gamma \in S$ $(f(\gamma) < \gamma)$; entonces para algún $\alpha < K$, $f^{-1}(\alpha)$ es estacionario".

Como admitiremos el Axioma de elección Ω es regular.

CAPITULO 1. PROPIEDADES GENERALES

Dados X e Y espacios topológicos, en el conjunto $C(X,Y)$ de las funciones continuas de X en Y vamos a considerar una topología, distinta en general de la topología producto y de la compacta-abierta, que se conoce con el nombre de topología de Whitney ó topología "del grafo".

Definición 1.1.- Sean X e Y espacios topológicos. Para cada abierto W en $X \times Y$, y para cada $f \in C(X,Y)$, tal que $\Gamma_f \subset W$, se define

$$N(f,W) = \{g \in C(X,Y) \mid \Gamma_g \subset W\}.$$

Se observa que $N(f,W)$ así definido nunca es vacío y que si $g \in N(f,W)$, entonces $N(g,W) = N(f,W)$.

Se podía haber definido, para cada abierto W en $X \times Y$, $N(W) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset W\}$. Este conjunto puede ser vacío; ahora bien, si $f \in N(W)$ entonces

$$N(W) = N(f,W).$$

Lema 1.1.- La familia

$$\mathcal{B} = \{N(f,W) \mid f \in C(X,Y),\ W \text{ abierto de } X \times Y,\ \Gamma_f \subset W\}$$

constituye una base para una topología en $C(X,Y)$.

Demostración:

B_1) Ciertamente, si $f \in C(X,Y)$, $f \in N(f, X \times Y)$.

B_2) Si $g \in N(f_1,W_1) \cap N(f_2,W_2)$ entonces $\Gamma_g \subset W_1 \cap W_2$ y $g \in N(g, W_1 \cap W_2)$, y es claro que $N(g,W_1 \cap W_2) \subset N(f_1,W_1) \cap N(f_2,W_2)$. #

La topología T_W engendrada por la base $\mathcal{B}$ es la topología de Whitney. $C_W(X,Y)$ será una abreviatura para $(C(X,Y),T_W)$.

Esta topología admite una caracterización que es útil en el caso de que X sea un espacio paracompacto y regular.

<u>Definición 1.2</u>. Sean X e Y espacios topológicos, $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una familia localmente finita de cerrados en X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos, con el mismo conjunto de índices, en $X \times Y$.

Definimos $N(\mathcal{C},\mathcal{U}) = \{f \in C(X,Y) \mid \forall i \in I,\ \Gamma_{f|C_i} \subset U_i\}$.

<u>Lema 1.2</u>. La familia

$$\mathcal{B}^* = \{N(\mathcal{C},\mathcal{U}) \mid \mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I} \text{ familia localmente finita de cerrados en } X,\ \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} \text{ familia de abiertos en } X \times Y\}$$

es una base de $C_W(X,Y)$. De hecho $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$.

<u>Demostración</u>: Dados $f \in C(X,Y)$ y W abierto, tal que $\Gamma_f \subset W$ tenemos que $N(f,W) = N(\{X\},\{W\})$, luego $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$.

Recíprocamente, sean $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ familia localmente finita de cerrados en X, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ familia de abiertos en $X \times Y$ y $f \in N(\mathcal{C},\mathcal{U})$.

Los conjuntos $W_i = U_i \cup [(X-C_i)\times Y]$ son abiertos de $X \times Y$, para todo $i \in I$, y claramente contienen a Γ_f.

Puesto que $(X \times Y) - W_i = (C_i \times Y) - U_i$, para todo $i \in I$, la familia $\{(X \times Y) - W_i\}_{i\in I}$ es localmente finita, por serlo $\{C_i\}_{i\in I}$, por tanto $\{C_i \times Y\}_{i\in I}$, y con más razón $\{(C_i \times Y) - U_i\}_{i\in I}$.

Luego $\bigcup\limits_{i \in I} ((X \times Y) - W_i)$ es cerrado y $\bigcap\limits_{i \in I} W_i = W$ es abierto en $X \times Y$. Además, como cada $W_i \supset \Gamma_f$, $W \supset \Gamma_f$.

Unicamente queda por ver que $N(C,\mathcal{U}) = N(f,W)$. En efecto: a) Si $g \in N(C,\mathcal{U})$ se tiene que $\Gamma_{g|C_i} \subset U_i$, para todo $i \in I$, con lo que $\Gamma_g \subset U_i \cup [(X - C_i) \times Y] = W_i$ para todo $i \in I$; luego $\Gamma_g \subset W$ y $g \in N(f,W)$. b) Si $g \in N(f,W)$, tenemos que $\Gamma_g \subset W$, y por lo tanto

$\Gamma_g \subset W_i$, para todo $i \in I$; es decir $\Gamma_{g|C_i} \subset U_i$, para todo $i \in I$, luego $g \in N(C,\mathcal{U})$.

Finalmente observemos que si para algún $i \in I$, $C_i \not\subset p_1(U_i)$, $N(C,\mathcal{U}) = \emptyset$. ($p_1 : X \times Y \to X$, $p_1(x,y) = x$).

Por tanto $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$. Así la igualdad queda probada. #

<u>Definición 1.3</u>.- Sean X e Y espacios topológicos, $C = \{C_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita de cerrados en X, y $A = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos en Y.

Definimos $\langle C,A \rangle = \{f \in C(X,Y) \mid f(C_i) \subset A_i, \ \forall i \in I\}$.

<u>Corolario 1.3</u>.- Con la notación de la definición anterior, $\langle C,A \rangle$ es abierto en $C_W(X,Y)$.

<u>Demostración</u>: Dada $f \in C(X,Y)$, el que $f(C_i) \subset A_i$ es equivalente a que
$$\Gamma_{f|C_i} \subset (C_i \times A_i) \cup [(X - C_i) \times Y] = (X \times A_i) \cup [(X - C_i) \times Y] = U_i$$

Como para cada $i \in I$, U_i es abierto en $X \times Y$, la conclusión es inmediata. #

<u>Corolario 1.4</u>.-

I - Si X es T_2 e Y arbitrario, $T_c \subset T_W$.

II - Si X es T_1 e Y arbitrario, $T_p \subset T_W$.

(Ver Teoremas 4.1 y 4.2 de Naimpally).

Demostración:

I - La familia $\Sigma_c = \{<K,G> \mid K$ compacto en X, G abierto en $Y\}$ es una subbase de T_c.

Si X es T_2, todo compacto es cerrado y $\Sigma_c \subset T_W$.

II - La familia $\Sigma_p = \{<\{x\},G> \mid x \in X$, G abierto en $Y\}$ es una subbase de T_p. Si X es T_1 y $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado y $\Sigma_p \subset T_W$. #

Si un espacio topológico X es regular también se verifica que, para cualquier espacio topológico Y, la topología producto en $C(X,Y)$ es menos fina que la de Whitney.

Lema 1.5.- Sean X e Y espacios topológicos con X regular. Entonces, en $C(X,Y)$, $T_p \subset T_W$.

Demostración: Dados $x \in X$, V un abierto en Y, y $f \in C(X,Y)$ tal que $f \in <\{x\}, V>$, existen V^x y U^x de modo que $\overline{U^x} \subset V^x$ y $f(V^x) \subset V$.

El conjunto $W = (V^x \times V) \cup [(X - \overline{U}^x) \times Y] \subset X \times Y$ es un abierto que contiene al grafo de f; y si $g \in N(f,W)$, entonces $g(x) \in V$, luego $g \in <\{x\}, V>$.

Por tanto $f \in N(f,W) \subset <\{x\}, V>$ y $T_p \subset T_W$. #

Si X no es T_1 (T_2) las relaciones de contenido que nos da el corolario 1.4 pueden no ser ciertas.

Ejemplo 1.6.- Sean $X = Y = (R,T)$, donde T es la engendrada por los intervalos $(t,\to)$. Consideremos el abierto

$<\{1\}, (0,\to)>$ de T_P, que claramente es distinto del espacio $C(X,Y)$. La función 1_X pertenece a dicho abierto; sin embargo, el único abierto de $X \times Y$ que contiene al grafo de 1_X es el mismo $X \times Y$, y por tanto el más pequeño abierto de T_W que la contiene es $C(X,Y)$; luego $<\{1\}, (0,\to)> \notin T_W$.

<u>Corolario 1.7</u>.- Sean X un espacio paracompacto y regular, e Y un espacio topológico arbitrario.

Entonces, $\mathcal{B}^{**} = \{<C,A> \mid C = \{C_i\}_{i\in I}$ familia localmente finita de cerrados en X, $A = \{A_i\}_{i\in I}$ familia de abiertos en $Y\}$ es base de $C_W(X,Y)$.

<u>Demostración</u>: Por el corolario 1.3 se tiene que $\mathcal{B}^{**} \subset T_W$.

Sea $f \in C(X,Y)$, $U \subset X \times Y$ abierto, tal que $\Gamma_f \subset U$.

Veamos que existe un elemento de $\mathcal{B}^{**}$ que contiene a f y está contenido en $N(f,U)$, con lo que quedaría probado que $\mathcal{B}^{**}$ es base de T_W.

Para cada $x \in X$ existen V^x y $V^{f(x)}$, tales que

$$V^x \times V^{f(x)} \subset U \qquad \text{y} \qquad f(V^x) \subset V^{f(x)}$$

Como X es paracompacto y regular existe $C = \{C_i\}_{i\in I}$ refinamiento cerrado, localmente finito, del recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V^x \mid x \in X\}$ de X.

Para cada $i \in I$ elegimos $x_i \in X$, de modo que $C_i \subset V^{x_i}$, y si $A = \{V^{f(x_i)}\}_{i\in I}$, se verifica $f \in <C,A>$.

Por otro lado, si $g \in <C,A>$:

para todo $x \in X$, existe $i \in I$, tal que $x \in C_i \subset V^{x_i}$, luego $g(x) \in V^{f(x_i)}$, y $(x,g(x)) \in V^{x_i} \times V^{f(x_i)} \subset U$. Es decir, $\Gamma_g \subset U$ y $g \in N(f,U)$. Así hemos visto que $f \in <C,A> \subset N(f,U)$. #

Observación. Puesto que los abiertos $V^{f(x)}$ se pueden tomar de una base de Y, lo que en realidad se ha probado es que, en las hipótesis del corolario 1.7,

$B_1^{**} = \{<C,A> \mid C = \{C_i\}_{i\in I}$ recubrimiento cerrado, localmente finito de X, $A = \{A_i\}_{i\in I}$ familia de abiertos de una base de la topología de Y$\}$ es una base de T_W.

Como consecuencia se tiene el interesante

Corolario 1.8. Si X es un espacio topológico compacto y T_2, e Y un espacio topológico cualquiera, se verifica $C_c(X,Y) = C_W(X,Y)$, pues por el corolario 1.4, $T_c \subset T_W$, y por el corolario 1.7, $T_W \subset T_c$. ♦

En la siguiente proposición se prueba una especie de recíproco del corolario 1.8, que si X no es compacto "casi" siempre la topología T_c es estrictamente menos fina que T_W.

Proposición 1.9.- Sea X un espacio topológico tal que $C(X,R)$ distingue puntos (en particular, X, T_{3a}) e Y un espacio T_1 que contiene un arco. Entonces, $C_W(X,Y) = C_c(X,Y)$ si y solamente si X es compacto. (Compárese con la proposición 1.2 de McCoy).

Demostración: Si X es compacto y $C(X,R)$ distingue puntos es T_2. Entonces, por el corolario anterior $C_c(X,Y) = C_W(X,Y)$.

Supongamos que X no es compacto. Sea $\alpha : [0,1] \to Y$ un arco en Y, $y = \alpha(0)$ y $z = \alpha(1)$. Se considera la función f, constante a y, de X en Y, y el abierto $U = X \times (Y - \{z\})$ de $X \times Y$ (Y es T_1). Es claro que $\Gamma_f \subset U$.

Veamos que $N(f,U)$ no es entorno de f en $C_c(X,Y)$.

Supongamos $K_1,\ldots,K_n$ compactos en X y $G_1,\ldots,G_n$ abiertos en Y, tal que $f \in W = \langle K_1,G_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n,G_n\rangle$. Como $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ es compacto y X no lo es, existe $x \in X - K$.

Dado que $C(X,\mathbb{R})$ distingue puntos existe una aplicación continua h de X en $[0,1]$ tal que $h(K) = \{0\}$ y $h(x) = 1$. Es claro que la función contínua $\alpha \circ h : X \to Y$ verifica $\alpha \circ h \in W$ y sin embargo $\alpha \circ h \notin N(f,U)$. #

Dados X espacio topológico, e (Y,d) espacio pseudométrico se puede definir en $C(X,Y)$ una topología que depende de la pseudométrica d y de las funciones reales positivas de X. Por tanto sólo será interesante cuando X tenga "suficientes" funciones reales.

En general es menos fina que la de Whitney pero cuando X es paracompacto y regular ambas coinciden.

Definición 1.4.- Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio pseudométrico. Para cada

$f \in C(X,Y)$ y cada $\varepsilon \in C(X,R^+)$ se define

$$B_d(f,\varepsilon) = \{g \in C(X,Y) \mid d(g(x),f(x)) < \varepsilon(x), \ \forall x \in X\}.$$

Lema 1.10.- Sean X, Y y d como en la definición anterior. La familia $\mathcal{B}_2 = \{B_d(f,\varepsilon) \mid f \in C(X,Y),\ \varepsilon \in C(X,R^+)\}$ constituyen una base para una topología en $C(X,Y)$.

Demostración:

B_1) Dado $f \in C(X,Y)$, si tomamos $\varepsilon = c_1$, $f \in B_d(f,c_1)$.

B_2) Sea $h \in B_d(f,\varepsilon) \cap B_d(g,\delta)$.

La función $\beta : X \to R^+$ dada por

$\beta(x) = \min\{\varepsilon(x)-d(f(x),h(x)),\ \delta(x)-d(g(x),h(x))\}$, para todo $x \in X$, es continua. Si $k \in B_d(h,\beta)$ se tiene para cada $x \in X$:

$d(k(x),f(x)) \leq d(k(x),h(x)) + d(h(x),f(x)) < \varepsilon(x)$, y

$d(k(x),g(x)) \leq d(k(x),h(x)) + d(h(x),g(x)) < \delta(x)$; es decir

$$B_d(h,\beta) \subset B_d(f,\varepsilon) \cap B_d(g,\delta).$$

#

A la topología engendrada por $\mathcal{B}_2$ se le llama la topología fina con respecto a d [Munkres, p. 285], y se designa por T_{f_d}. El espacio topológico $(C(X,Y),T_{f_d})$ se abreviará por $C_{f_d}(X,Y)$.

<u>Proposición 1.11</u>.- Sea X un espacio topológico e (Y,d) un espacio pseudométrico. Entonces, $\mathcal{B}_2 \subset T_W$, y por tanto $T_{f_d} \subset T_W$. Si además X es paracompacto y regular, la familia $\mathcal{B}_2$ es una base de $C_W(X,Y)$, y $T_{f_d} = T_W$. (Ver Hirsch, p. 59).

<u>Demostración</u>:

La relación $\mathcal{B}_2 \subset T_W$ es inmediata.

En efecto: dados $f \in C(X,Y)$ y $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$, el conjunto $U = \{(x,y) \in X \times Y \mid d(f(x),y) < \varepsilon(x)\}$ es abierto en $X \times Y$ $(U = h^{-1}((0,\rightarrow))$, con $h(x,y) = \varepsilon(x) - d(f(x),y))$, y $\Gamma_f \subset U$. Claramente $B_d(f,\varepsilon) = N(f,U)$.

Recíprocamente, sean $f \in C(X,Y)$ y $U \subset X \times Y$ abierto tal que $\Gamma_f \subset U$. Para cada $x \in X$ existen U^x y $n_x \in \mathbb{N}$, con

$U^x \times B_d(f(x),1/n_x) \subset U$ y $f(U^x) \subset B_d(f(x),1/2n_x)$.

Por ser X paracompacto existe $\{U_i\}_{i\in I}$ refinamiento abierto, localmente finito del recubrimiento abierto $\{U^x\}_{x\in X}$ de X. Para cada $i \in I$ sea $x_i \in X$, tal que $U_i \subset U^{x_i}$.

Por ser X paracompacto y regular existe una función continua $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ de modo que $\varepsilon(x) < 1/2n_{x_i}$ para todo $x \in U_i$, y todo $i \in I$. Basta ver que $B_d(f,\varepsilon) \subset N(f,U)$: sea $g \in B_d(f,\varepsilon)$; entonces, dado $x \in X$ existe $i \in I$, tal que $x \in U_i \subset U^{x_i}$, con lo que $d(f(x),g(x)) < 1/2n_{x_i}$, y $(x,g(x)) \in U^{x_i} \times B_d(f(x_i),1/n_{x_i}) \subset U$. Luego $\Gamma_g \subset U$ y $g \in N(f,U)$. #

Como resultado de la proposición anterior podemos obtener una base de T_{f_d} cuando X es paracompacto y regular.

Definición 1.5.- Dados $C = \{C_i\}_{i\in I}$ familia localmente finita de cerrados de un espacio topológico X, una familia $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de números reales positivos, un espacio pseudométrico (Y,d) y una función contínua f de X en Y, definimos
$V^f <C,\{\varepsilon_i\}_{i\in I}> = \{g \in C(X,Y) \mid d(f(x),g(x)) < \varepsilon_i, \ \forall x \in C_i, \forall i \in I\}$.

Proposición 1.12.- Con la notación de la definición anterior, si X es paracompacto y regular la familia

$$B = \{V^f<C,\{\varepsilon_i\}_{i\in I}> \mid C = \{C_i\}_{i\in I} \text{ es una familia localmente finita de cerrados en } X \text{ y } \varepsilon_i > 0 \text{ para todo } i \in I\}$$

es una base de entornos abiertos del sistema de entornos de f en $C_W(X,Y)$.

Demostración: Basta observar que por la proposición anterior $T_W = T_{f_d}$, que para $\{C_i\}_{i\in I}$ familia localmente finita de cerrados y $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$, con $\varepsilon_i > 0$ para todo $i \in I$ existe una función continua $\varepsilon : X \to R^+$, tal que $\varepsilon(x) < \varepsilon_i$, para todo $x \in C_i$ y todo $i \in I$, y que para cada función continua $\varepsilon : X \to R^+$ existen una familia localmente finita de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ en X y una familia $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de números reales positivos, tales que $\varepsilon(x) > \varepsilon_i$ para todo $x \in C_i$ y todo $i \in I$. #

Aunque Y sea un espacio pseudometrizable, $C_W(X,Y)$ en general no lo es. Ahora bien, si X es numerablemente compacto la pseudométrica del "supremo" describe T_W y por tanto $C_W(X,Y)$ es pseudometrizable. Esto es lo que afirma la Proposición 1.15. Antes veamos unos lemas.

<u>Lema 1.13</u>.- Sean X e Y espacios topológicos y B un subespacio de Y. Si $j : B \to Y$ es la inclusión, la función

$$\begin{aligned} j_* : C_W(X,B) &\longrightarrow C_W(X,Y) \quad \text{es un homeomorfismo} \\ f &\longrightarrow j\circ f \end{aligned}$$

de $C_W(X,B)$ sobre la imagen $j*(C(X,B))$.

Es decir, $C_W(X,B)$ puede ser considerado como un subespacio de $C_W(X,Y)$. Además, es abierto si B es abierto, y si X es T_1, es cerrado si B es cerrado.

<u>Demostración</u>:

a) j_* es claramente inyectiva.

b) j_* es continua. En efecto, sea $f \in C(X,B)$ y U un abierto en $X \times Y$, tal que $\Gamma_{j\circ f} \subset U$.

El conjunto $V = U \cap (X \times B)$ es un abierto en $X \times B$, $\Gamma_f \subset V$, y si $g \in C(X,B)$ es tal que $\Gamma_g \subset V$, la función $j\circ g$ verifica $\Gamma_{j\circ g} \subset V \subset U$.

c) Por último veamos que si $f \in C(X,B)$ y V es un abierto en $X \times B$ tal que $\Gamma_f \subset V$, entonces,

$$j_*(N(f,V)) = N(j\circ f,U) \cap j_*(C(X,B)),$$

donde U es un abierto en $X \times Y$, tal que $V = U \cap (X \times B)$.

La relación $\subset$ ha quedado probada en b).

Si $h \in C(X,Y)$, es tal que $\Gamma_h \subset U$ (lo cual equivale a que $h \in N(j\circ f,U)$), y es de la forma $j\circ g$, donde $g \in C(X,B)$ (equivalente a que $h \in j_*(C(X,B))$), entonces $\Gamma_{j\circ g} = \Gamma_h \subset U \cap (X \times B) = V$, luego $\Gamma_g \subset V$; es decir $g \in N(f,V)$ y $j\circ g = h \in j_*(N(f,V))$, lo que prueba la relación $\supset$.

a), b) y c) prueban que j_* es un homeomorfismo sobre la imagen.

Como $j_*(C(X,B)) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset X \times B\}$, si B es abierto en Y, $X \times B$ es abierto en $X \times Y$ y por tanto $j_*(C(X,B)) = N(c_b, X \times B)$, donde b es un punto cualquiera de B, que es un abierto básico en $C_W(X,Y)$.

Supongamos ahora que X es T_1. Sea B cerrado y $f \in C(X,Y)$, tal que $f \notin j_*(C(X,B))$. Por tanto $\Gamma_f \not\subset X \times B$, es decir, existe un $x \in X$, tal que $f(x) \notin B$. Sea $U^{f(x)}$, que verifica $U^{f(x)} \cap B = \emptyset$. El abierto $<\{x\}, U^{f(x)}>$ contiene a f y ciertamente no corta a $j_*(C(X,B))$. #

<u>Lema 1.14</u>.- Sean X espacio topológico, Y espacio pseudometrizable (con pseudométrica d), y $A \subset X$ numerablemente compacto. Sean $f \in C(X,Y)$ y U abierto en $X \times Y$ de modo que $\Gamma_f \subset U$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{(x,y) \in A \times Y \mid d(f(x),y) < 1/n_0\} \subset U.$$

<u>Demostración</u>: Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in A$ de modo que $\{x\} \times B_d(f(x),1/n) \not\subset U$.

Para $n_1 = 1$, existe $x_1 \in A$, con $\{x_1\} \times B_d(f(x_1),1) \not\subset U$. Como U es abierto y $(x_1,f(x_1)) \in U$ existe $n_2 > n_1$, tal que $\{x_1\} \times \overline{B}_d(f(x_1),1/n_2) \subset U$. Así, existe $x_2 \in A$, $x_2 \neq x_1$ verificando $\{x_2\} \times B_d(f(x_2),1/n_2) \not\subset U$.

Por inducción obtenemos $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$, infinito, de modo que, para todo $r \in \mathbb{N}$, $\{x_r\} \times B_d(f(x_r),1/n_r) \not\subset U$.

Como A es numerablemente compacto existe $x \in A$, punto de aglomeración en A (y por tanto en X) de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por hipótesis $\Gamma_f \subset U$; como $(x,f(x)) \in \Gamma_f$ existe $n_o \in \mathbb{N}$, y existe U^x, tal que $U^x \times B_d(f(x),\ 1/n_o) \subset U$ y $f(U^x) \subset B_d(f(x),\ 1/2n_o)$.

Todos los elementos de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ que pertenecen a U^x constituyen una subsucesión que tiene x como punto de aglomeración, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B \subset U^x$.

Si $m \in \mathbb{N}$ e $y \in B_d(f(x_m),\ 1/n_m)$ se tiene:

$$d(y,f(x)) \leq d(y,f(x_m)) + d(f(x_m),f(x)) < \frac{1}{n_m} + \frac{1}{2n_o}$$

Para m suficientemente grande $1/n_m < 1/2n_o$ y para dicho m se verifica que $d(y,f(x)) < 1/n_o$, lo que indica que

$$\{x_m\} \times B_d(f(x_m),\ 1/n_m) \subset U^x \times B_d(f(x),\ 1/n_o) \subset U$$

en contradicción con el hecho de que para todo $r \in \mathbb{N}$, $\{x_r\} \times B_d(f(x_r),\ 1/n_r) \not\subset U$. #

<u>Proposición 1.15</u>.- Sean X un espacio numerablemente compacto e Y un espacio pseudometrizable (metrizable). Entonces $C_W(X,Y)$ es pseudometrizable (metrizable).

<u>Demostración</u>: Sea d una pseudométrica en Y que describe su topología.

Para cada $f,g \in C(X,Y)$ definimos

$$\delta(f,g) = \sup\ \{d(f(x),g(x) \mid x \in X\}.$$

Puesto que la función

$$\begin{array}{rcl} \alpha : X & \longrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & d(f(x),g(x)) \end{array}$$ es continua, y X es numerablemente compacto, $\alpha(X)$ es compacto; por tanto α es acotada, y $\delta(f,g)$ es siempre un número real.

Es inmediato que

a) $\delta(f,g) \geq 0$

b) $\delta(f,f) = 0$

c) $\delta(f,g) = \delta(g,f)$.

d) $\delta(f,g) + \delta(g,h) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\} + \sup\{d(g(x),h(x)) \mid x \in X\} \geq \sup\{d(f(x),h(x)) \mid x \in X\} = \delta(f,h)$

Es decir, δ es una pseudométrica en $C(X,Y)$. Y es una métrica si y sólo si d lo es. En efecto: supongamos que d es una métrica. Entonces, $\delta(f,g) = 0$ significa que $d(f(x),g(x))=0$ para todo $x \in X$, por tanto $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ y $f = g$.

Recíprocamente, supongamos que δ es una métrica y sean $x,y \in X$, tal que $d(x,y) = 0$. Las funciones c_x, c_y son tales que $\delta(c_x,c_y) = 0$, luego $c_x = c_y$ y entonces $x = y$.

(En la definición de δ es esencial que la función α sea acotada, lo cual se consigue si X es pseudocompacto, lo que es más débil que ser numerablemente compacto.

Claramente si X es pseudocompacto δ es una métrica).

Veamos que $T_\delta = T_W$

a) Sean $f \in C(X,Y)$ y U un abierto en $X \times Y$ con $\Gamma_f \subset U$.

Como X es numerablemente compacto, por el Lema 1.14, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\{(x,y) \in X \times Y \mid d(f(x),y) < \varepsilon\} \subset U$. Entonces $B_\delta(f,\varepsilon) \subset N(f,U)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} h \in B_\delta(f,\varepsilon) &\Rightarrow \forall x \in X,\ d(f(x),h(x)) < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \in X,\ (x,h(x)) \in U \Rightarrow \Gamma_h \subset U \Rightarrow \\ &\Rightarrow h \in N(f,U) \end{aligned}$$

Luego $T_W \subset T_\delta$.

b) Dados $f \in C(X,Y)$ y $\varepsilon > 0$, sea

$$U = \{(x,y) \in X \times Y \mid d(y,f(x)) < \varepsilon/2\}$$

Como $\beta : X \times Y \longrightarrow R$

$$(x,y) \longrightarrow d(f(x),y) = (d \circ (f \times 1_Y))(x,y)$$

es continua, $U = \beta^{-1}(\leftarrow,\varepsilon/2)$ es abierto en $X \times Y$.

Es claro que $\Gamma_f \subset U$ y si $g \in N(f,U)$, se tiene $\Gamma_g \subset U$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \forall x \in X,\ (x,g(x)) \in U &\Rightarrow \forall x \in X,\ d(f(x),g(x)) < \varepsilon/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta(f,g) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow g \in B_\delta(f,\varepsilon). \end{aligned}$$

Es decir $N(f,U) \subset B_\delta(f,\varepsilon)$ y $T_\delta \subset T_W$. #

Si se imponen algunas condiciones a X e Y se puede probar una especie de recíproco del resultado anterior.

Proposición 1.16.- Sea X un espacio topológico T_{3a}. Entonces, $C_W(X,R)$ es metrizable si y sólo si X es numerablemente compacto. (Ver Proposition 3.3. de R.A. McCoy).

Demostración: Si X es numerablemente compacto, por la Proposición 1.15, $C_W(X,R)$ es metrizable.

Recíprocamente, supongamos que X no es numerablemente compacto. Entonces, X contiene un conjunto infinito cerrado discreto $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de abiertos en $X \times \mathbb{R}$ de modo que $\Gamma_{c_o} \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Todo se reduce a probar que $\{N(c_o,U_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es base del sistema de entornos de c_o en $C_W(X,\mathbb{R})$, pues este espacio no verificaría el I A.N. y por tanto no sería metrizable.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n,0) \in U_n$ y por tanto existen $\varepsilon_n > 0$, y V^{x_n}, tales que $V^{x_n} \times [-\varepsilon_n,\varepsilon_n] \subset U_n$, y $V^{x_n} \cap C = \{x_n\}$. El conjunto $V = \left[\bigcup_{n\in N} (\{x_n\} \times (-\varepsilon_n,\varepsilon_n))\right] \cup [(X-C) \times R]$ es abierto en $X \times R$ y claramente $\Gamma_{c_o} \subset V$. Veamos que $N(c_o,U_n) \not\subset N(c_o,V)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijemos un $n \in N$. Como X es T_{3a}, existe una función continua $f : X \to [0,\varepsilon_n]$, con $f(x_n) = \varepsilon_n$ y $f(X-V^{x_n}) = \{0\}$.

Puesto que $f(x_n) = \varepsilon_n$, f no pertenece a $N(c_o,V)$.

Por otro lado, si $x \in V^{x_n}$, $(x,f(x)) \in V^{x_n} \times [-\varepsilon_n,\varepsilon_n] \subset U_n$ y si $x \notin V^{x_n}$, $(x,f(x)) = (x,0) \in U_n$, es decir $f \in N(c_o,U_n)$. #

La proposición anterior es válida si sustituimos R por $[0,1]$ ó un espacio homeomorfo a él.

<u>Corolario 1.17</u>.- Sean X un espacio topológico T_{3a} y Z un espacio pseudometrizable (metrizable) que contiene un arco. Entonces $C_W(X,Z)$ es pseudometrizable (metrizable) si y solamente si X es numerablemente compacto.

Demostración: Si X es numerablemente compacto, $C_W(X,Z)$ es pseudometrizable (metrizable) por Proposición 1.15.

Si $C_W(X,Z)$ es pseudometrizable y A es un arco en Z, $C_W(X,A)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_W(X,Z)$ por el Lema 1.13, y por tanto pseudometrizable (metrizable). Por la Proposición 1.16 X es numerablemente compacto. #

En realidad las demostraciones anteriores prueban el siguiente resultado:

Proposición 1.18.- Sean X espacio topológico T_{3a} y Z un espacio pseudometrizable que contiene un arco. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $C_W(X,Z)$ es pseudometrizable

b) $C_W(X,Z)$ cumple el I A.N.

c) X es numerablemente compacto

y lo mismo para metrizable. #

Los resultados de la proposición anterior nos van a servir para probar que la relación $T_{f_d} \subset T_W$ de la proposición 1.11 es en general de contenido estricto. La proposición 1.20 que sigue, es la proposición 4.1 de McCoy.

Proposición 1.19.- Sean X un espacio topológico pseudocompacto e (Y,d) un espacio pseudométrico (métrico). Entonces $C_{f_d}(X,Y)$ es pseudometrizable (metrizable). (Ver Proposición 2.1 de McCoy).

Demostración: Para cada $f,g \in C(X,Y)$ definimos

$$\delta(f,g) = \sup \{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}.$$

Puesto que la función $\alpha : X \longrightarrow R$, $x \longrightarrow d(f(x),g(x))$ es continua y X es pseudocompacto, α está acotada. Luego $\delta(f,g)$ es siempre un número real.

Como en la proposición 1.15, se tiene que δ es una pseudométrica en $C(X,Y)$, y es una métrica si y sólo si d lo es.

Veamos que $T_{f_d} = T_\delta$.

a) Sea $f \in B_d(f,\varepsilon)$. Por ser X pseudocompacto la función contínua $1/\varepsilon : X \to R^+$ está acotada, luego existe $M > 0$ tal que $1/\varepsilon(x) < M$ para todo $x \in X$.

Es claro que $f \in B_\delta(f,1/M) \subset B_d(f,\varepsilon)$. Por tanto $T_{f_d} \subset T_\delta$.

b) La inclusión $T_\delta \subset T_{f_d}$ es evidente. #

<u>Proposición 1.20</u>.- Sea X un espacio topológico T_1. Entonces $C_{f_d}(X,R)$ es metrizable si y sólo si X es pseudocompacto. #

<u>Proposición 1.21</u>.- Sea X un espacio topológico T_{3a}, pseudocompacto y no numerablemente compacto. Entonces $C_{f_d}(X,R) \neq C_W(X,R)$.

<u>Demostración</u>: Por la proposición 1.19, $C_{f_d}(X,R)$ es metrizable, y sin embargo, por la proposición 1.16, $C_W(X,R)$ no es metrizable. #

<u>Observación</u>: El subespacio $([0,\omega] \times [0,\Omega]) - \{(\omega,\Omega)\}$ de $([0,\omega], T_\leq) \times ([0,\Omega], T_\leq)$, es T_{3a}, pseudocompacto y no numerablemente compacto.

Por las proposiciones 1.15 y 1.19 se tiene que si X es numerablemente compacto e (Y,d) es pseudométrico entonces $C_{f_d}(X,Y) = C_W(X,Y) = C_\delta(X,Y)$.

Recordemos que un espacio topológico Y se dice divisible si los entornos de la diagonal en $Y \times Y$ constituyen una uniformidad. Un espacio paracompacto y regular es divisible.

En CERF (pág. 271) se considera la topología T_{C° en $C(X,Y)$ definida del siguiente modo:

"Dado un espacio topológico X y un espacio divisible Y, para cada $f \in C(X,Y)$ y cada W, entorno de la diagonal Δ en $Y \times Y$, se considera $W(f) = \{g \in C(X,Y) \mid (g(x),f(x)) \in W, \forall x \in X\}$. Entonces, existe una única topología T_{C° en $C(X,Y)$ tal que para todo $f \in C(X,Y)$, $\mathcal{V}(f) = \{W(f)) \mid W$ es entorno de Δ en $Y \times Y\}$ es base de entornos de f en $(C(X,Y),T_{C^\circ})$".

La relación que existe entre T_{C° y T_W es la de contenido.

<u>Proposición 1.22</u>.- Sean X un espacio topológico e Y un espacio divisible. Entonces $T_{C^\circ} \subset T_W$. Además, si Y es T_2, $T_c \subset T_{C^\circ}$.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in C(X,Y)$ y $G \in T_{C^\circ}$ tal que $f \in G$. Entonces existe un abierto W en $Y \times Y$ con $\Delta \subset W$ y $f \in W(f) \subset G$.

Para todo $x \in X$, $(f(x),f(x)) \in \Delta \subset W$ y por tanto existen V^x y $V^{f(x)}$ tales que $V^{f(x)} \times V^{f(x)} \subset W$ y $f(V^x) \subset V^{f(x)}$. El abierto $U = \bigcup_{x \in X} (V^x \times V^{f(x)})$ en $X \times Y$ verifica $\Gamma_f \subset U$.

Sea $g \in N(f,U)$. Para todo $z \in X$ existe $x \in X$ tal que $(z,g(z)) \in V^x \times V^{f(x)}$. Como $f(z) \in V^{f(x)}$ se tiene que $(f(z),g(z)) \in V^{f(x)} \times V^{f(x)} \subset W$; luego $g \in W(f)$ y $N(f,U) \subset \subset W(f) \subset G$; así $G \in T_W$.

Supongamos ahora que Y es T_2. Tomemos $\langle K,G \rangle$ un elemen to de la subbase de T_c, donde K es un compacto en X y G es un abierto en Y. Sea $f \in \langle K,G\rangle$.

El conjunto $W = (G \times G) \cup [(Y-f(K)) \times (Y-f(K))] \subset Y \times Y$ es un abierto, por ser $f(K)$ cerrado, que contiene a la diagonal Δ pues $f(K) \subset G$.

Si $g \in W(f)$ y $x \in K$ tenemos $(f(x),g(x)) \in W$.

Como $f(x) \in f(K)$ entonces $(f(x),g(x)) \notin (Y-f(K))\times(Y-f(K))$, luego $(f(x),g(x)) \in G \times G$, es decir $g(x) \in G$.

Por tanto $W(f) \subset \langle K,G\rangle$ y $T_c \subset T_{C^\circ}$. #

Proposición 1.23.- Sean X un espacio topológico T_1 y no numerablemente compacto e Y un espacio topológico T_1, con un punto y, no aislado, que posee una base de entornos $\{V_n^y \mid n\in N\}$ numerable. Suponemos además que Y es divisible:

Entonces, en $C(X,Y)$, $T_{C^\circ} \neq T_W$.

Demostración: Puesto que X es T_1 y no es numerablemente compacto posee un subconjunto infinito $C = \{x_n \mid n \in N\}$, cerrado y discreto. Sea $f = c_y$, función constante de X en Y con valor y.

$U = [\bigcup_{n\in N} (\{x_n\} \times V_n^y)] \cup [(X-C) \times Y] \subset X \times Y$ es un abierto y contiene a Γ_f.

Podemos suponer que $V_{n+1}^y \subsetneq V_n^y$, para todo $n \in N$.

Si $W \subset Y \times Y$ es un entorno arbitrario de la diagonal Δ, como $(y,y) \in \Delta$ existe $n_o \in N$, tal que $V_{n_o}^y \times V_{n_o}^y \subset W$.

Sea $n \in N$ con $n \geq n_o$, y sea $y_n \in V_n^y - V_{n+1}^y$.

La función $g = c_{y_n}$ pertenece a $W(f)$, pues para todo $x \in X$, $(f(x),g(x)) = (y,y_n) \in V_{n_o}^y \times V_{n_o}^y \subset W$. Sin embargo,

$g \notin N(f,U)$ ya que $(x_{n+1}, g(x_{n+1})) = (x_{n+1}, y_n) \notin U$, luego $\Gamma_g \not\subset U$. Así hemos probado que $N(f,U) \notin T_{C^\circ}$. #

OBSERVACION: Para la demostración del lema anterior realmente no es necesario que el punto y posea en Y una base de entornos con las propiedades indicadas. Basta que exista un subespacio B de Y al que y pertenezca, y en el que posea una base de entornos con dichas propiedades.

Corolario 1.24.- Sean X un espacio paracompacto y T_2, e Y un espacio divisible, T_1 y que contiene un arco.

Entonces $C_{C^\circ}(X,Y) = C_W(X,Y)$ si y sólo si X es compacto.

En este caso $C_c(X,Y) = C_{C^\circ}(X,Y) = C_W(X,Y)$.

Demostración: Si se verifica la igualdad de las topologías, por la observación anterior, X es numerablemente compacto. Como X es paracompacto, entonces es compacto.

Recíprocamente si X es compacto, como es T_2, $C_W(X,Y) = C_c(X,Y)$ y la conclusión se sigue de la proposición 1.21, ya que si Y es divisible y T_1 es T_2. #

Para terminar este capítulo quisiera observar algo relativo a la convergencia.

El lema 2.2. de Spring demuestra que "dados X un espacio T_2, localmente compacto y Lindelöf e Y un espacio pseudométrico, si una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in N}$ de $C(X,Y)$ tiene un punto de aglomeración en $C_W(X,Y)$, entonces existe una subsucesión y un compacto fuera del cual las funciones de la subsucesión coinciden con la función de aglomeración".

Si el espacio X es unicamente paracompacto y T_2, la afirmación no es cierta, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.25.- Sean $X = Q$ e $Y = R$

$$f_n \in C(Q,R) \text{ viene dada por } f_n(x) = \begin{cases} 0 & , |x| \geq 1/n \\ -|x| + 1/n, & |x| \leq 1/n \end{cases}$$

La sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ converge en $C_W(X,Y)$ a la función $f = c_o$, pues dado un abierto $U \subset Q \times R$, tal que $\Gamma_f \subset U$, existe $n_o \in N$ tal que $[(-1/n_o, 1/n_o) \cap Q] \times (-1/n_o, 1/n_o) \subset U$, y por tanto $\Gamma_{f_m} \subset U$ para $m > n_o$.

Sin embargo, puesto que los compactos de Q no contienen intervalos, dado un compacto K y $n \in N$ existen $m > n$ y $x \notin K$ tal que $f_m(x) = -|x| + 1/m \neq 0$.

No obstante, esta afirmación es hecha en [P.W. Michor].

CAPITULO 2. AXIOMAS DE SEPARACION

Vamos a estudiar en este capítulo 2 la relación entre los axiomas de separación de $C_W(X,Y)$ y los de X e Y.

El resultado más importante asegura que si X es una variedad paracompacta y T_2, no compacta, con un arco, e Y contiene un arco, $C_W(X,Y)$ no es normal.

En lo que se refiere a los axiomas "bajos" de separación, es decir, T_i, $i=0,1,2$, se tienen los siguientes resultados:

Lema 2.1.- Sean X e Y espacios topológicos, $y,z \in Y$, tal que $y \neq z$, pero $y \in \overline{\{z\}}$. Entonces, $c_y \in \overline{\{c_z\}}$.

Demostración: Sea $U \subset X \times Y$ abierto que contiene a Γ_{c_y}. Para todo $x \in X$, $U[x] = \{t \in Y \mid (x,t) \in U\}$ es un abierto en Y que contiene a y, por tanto $(x,z) \in U$ para todo $x \in X$, es decir $\Gamma_{c_z} \subset U$. #

Corolario 2.2.- Sean X e Y espacios topológicos. Si $C_W(X,Y)$ es T_i, entonces Y es T_i, para $i=0,1$.

Demostración:

I - Si Y no es T_0 existen $y,z \in Y$, tales que $y \neq z$ pero $y \in \overline{\{z\}}$ y $z \in \overline{\{y\}}$; $c_y \neq c_z$ pero por el lema anterior $c_y \in \overline{\{c_z\}}$ y $c_z \in \overline{\{c_y\}}$ lo que significa que $C_W(X,Y)$ no es T_0.

II - Si Y no es T_1 existen $y,z \in Y$ tales que $y \neq z$ pero $y \in \overline{\{z\}}$; por tanto $c_y \neq c_z$ y $c_y \in \overline{\{c_z\}}$. Luego $C_W(X,Y)$ no es T_1. #

Para los restantes axiomas de separación el corolario 2.2 no es válido, como se ve en el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo 2.3</u>.- Sean $X = R$ e $Y = (N, T_{CF})$.

(T_{CF} es la topología de los complementos finitos).

$C(X,Y)$ se reduce a las constantes y puesto que para todo $n \in N$ el conjunto

$$U_n = \Big[\bigcup_{r \in N} (\{r\} \times V_r^n)\Big] \cup [(R - N) \times N]$$

(donde $V_r^n = \{s \in N \mid s > r\} \cup \{n\}$)

es un abierto en $X \times Y$ que no contiene más "horizontal" que $R \times \{n\}$, T_W es la topología discreta.

Así $C_W(X,Y)$ verifica todos los axiomas de separación y, sin embargo, (N, T_{CF}) al ser T_1, pero no T_2, ya no verifica ningún otro.

<u>Proposición 2.4</u>.- Sean X e Y espacios topológicos. Si Y es T_i entonces $C_W(X,Y)$ es T_i, para $i=1,2$.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in C(X,Y)$. Dados $x \in X$ y un abierto $U^{f(x)}$, se tiene $f^{-1}f(x) \subset f^{-1}(U^{f(x)})$ y, puesto que $f^{-1}f(x)$ es cerrado, $x \in \{\bar{x}\} \subset f^{-1}f(x) \subset f^{-1}(U^{f(x)})$. Entonces

$$U = [f^{-1}(U^{f(x)}) \times U^{f(x)}] \cup [(X - \{\bar{x}\}) \times Y]$$

es un abierto en $X \times Y$ que contiene a Γ_f.

Si $g \in N(f,U)$ entonces $g(x) \in U^{f(x)}$.

Lo que acabamos de probar es que si Y es T_1 entonces $T_p \subset T_W$. Por tanto si Y es T_i, $i=1,2$, entonces $C_p(X,Y)$ es T_i y lo mismo $C_W(X,Y)$. #

Si el espacio X es T_1 sabemos que $T_p \subset T_W$. Luego si X es T_1 e Y es T_i, $i=0,1,2$, entonces $C_W(X,Y)$ es T_i.

Si Y es T_o puede ocurrir que $C_W(X,Y)$ no sea T_o.

Por ejemplo, si $X = \{0,1\}$ y $T = \{\{0,1\}, \{0\}, \{\emptyset\}\}$ el único abierto en $X \times X$ que contiene al grafo de c_1 es $X \times X$ y lo mismo ocurre con 1_X. Por tanto $C_W(X,X)$ no es T_0 aunque X si lo es.

Ya hemos visto en el ejemplo 2.3 que dados dos espacios topológicos X e Y, el espacio $C_W(X,Y)$ puede ser completamente regular aunque Y no sea regular. Esta situación contrasta con lo que ocurre en $C_c(X,Y)$ y ello se explica en parte porque así como la función $Y \to C_c(X,Y)$ que a cada $y \in Y$ le hace corresponder c_y es una inmersión, en el caso de $C_W(X,Y)$ no es en general continua.

Se trata de estudiar en qué condiciones $C_W(X,Y)$ es regular.

Proposición 2.5.- Sean X un espacio topológico metacompacto y T_1 e Y un espacio topológico regular. Entonces $C_W(X,Y)$ es regular.

Demostración: Sea $f \in C(X,Y)$ y $U \subset X \times Y$ abierto tal que $\Gamma_f \subset U$. Para cada $x \in X$ existen U^x y $U^{f(x)}$, de modo que $U^x \times \overline{U^{f(x)}} \subset U$ y $f(U^x) \subset U^{f(x)}$.

Por la metacompacidad de X existe $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ refinamiento abierto, punto-finito del recubrimiento abierto $\{U^x \mid x \in X\}$ de X.

Para cada $i \in I$ elegimos $x_i \in X$, tal que $U_i \subset U^{x_i}$.

El conjunto $V = \bigcup\{U_i \times U^{f(x_i)} \mid i \in I\} \subset X \times Y$ es un abierto que verifica:

a) $\Gamma_f \subset V$

b) $\overline{N(f,V)} \subset N(f,U)$: En efecto, sea $g \in C(X,Y)$ tal que $g \notin N(f,U)$. Entonces $\Gamma_g \not\subset U$, es decir existe $x \in X$, tal que $(x,g(x)) \notin U$.

Puesto que $\mathcal{U}$ es punto-finito x pertenece sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Sean $i_1,\ldots,i_n$ de modo que

$x \in U_{i_j}$, $j=1,\dots,n$. Luego $g(x) \notin \overline{U^{f(x_{i_j})}}$, $j=1,\dots,n$.
Sea $U^{g(x)}$ tal que $U^{g(x)} \cap (\bigcup_{j=1}^{n} \overline{U^{f(x_{i_j})}}) = \emptyset$.

$<\{x\}, U^{g(x)}>$ es un entorno abierto de g que no corta a $N(f,V)$. Por tanto $g \notin \overline{N(f,V)}$.

Así $C_W(X,Y)$ es regular. #

La condición impuesta a X en la Proposición 2.5 no es necesaria, pues, si $X = (R,T_{CN})$ e $Y = R$, $C(X,Y)$ se reduce a las constantes y $C_W(X,Y)$ es discreto (pues N es cerrado discreto e Y verifica el I.A.N.). Sin embargo X no es metacompacto.

Pero si X no es metacompacto puede $C_W(X,Y)$ no ser regular, aunque Y lo sea.

Ejemplo 2.6.- Para cada irracional $x \in R$ elegimos una sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ de racionales que converja a x en la topología usual. Consideremos en R una topología T en que cada racional es abierto, y una base de entornos de cada punto irracional x es la familia $\{U_r(x) \cup \{x\} \mid r \in N\}$, donde $U_r(x) = \{x_n \mid n \geq r\}$.

El espacio $(R,T) = X$ es T_{3a} y localmente compacto. Un subconjunto compacto no puede contener más que un número finito de irracionales. Consideremos su compactificación de Alexandroff $\hat{X}$ y la inmersión $\beta : X \to \hat{X}$.

Sea $U = X \times \beta(X) \subset X \times \hat{X}$ abierto. Se tiene $\Gamma_\beta \subset U$.

Sea $V \subset X \times \hat{X}$ un abierto tal que $\overline{V} \subset U$ y $\Gamma_\beta \subset V$.

Para cada $x \in X$ existe U^x tal que $U^x \times \beta(U^x) \subset V$; si x es racional podemos tomar como $U^x = \{x\}$, y si es irracional será un $U_{r(x)}(x)$. Puesto que $R - Q$ es no numerable debe exis tir un racional q de modo que $q \in U_{r(x)}(x)$ para un conjunto infinito B de irracionales. Si $\hat{X}-\beta(X) = \{\infty\}$, el punto $(q,\infty) \in \overline{V}$, pues el conjunto $\{q\} \times \beta(B) \subset V$ y $\beta(B)$ no es compacto.

La función $f : X \to \hat{X}$ tal que $f(x) = \beta(x)$ si $x \neq q$ y $f(q) = \infty$, es continua, pues $\{q\}$ es abierto y cerrado.

Sea $W \subset X \times \hat{X}$ un abierto que contenga a Γ_f. Entonces existe $b \in B$, tal que $(q,\beta(b)) \in W$. La función $h : X \to \hat{X}$ tal que $h(x) = \beta(x)$ si $x \neq q$, y $h(q) = \beta(b)$ es continua y $\Gamma_h \subset V \cap W$. Es decir $\overline{N(f,V)} \not\subset N(f,U)$ y por tanto $C_W(X,\hat{X})$ no regular a pesar de que $\hat{X}$ es compacto y T_2.

Proposición 2.7.- Sean X un espacio paracompacto y regular e Y un espacio pseudometrizable. Entonces $C_W(X,Y)$ es completamente regular (Ver Hirsch, p. 64).

Demostración: Sea d una pseudométrica en Y que describe su topología.

Para cada $\varepsilon \in C(X,R^+)$ definimos una pseudométrica d_ε en $C(X,Y)$: para cada $f,g \in C(X,Y)$

$d_\varepsilon(f,g) = \min\{1, \sup\{d(f(x),g(x))/\varepsilon(x) \mid x \in X\}\}$. Se tiene:

a) $d_\varepsilon(f,g) \geq 0$ por definición

b) $d_\varepsilon(f,f) = 0$

c) $d_\varepsilon(f,g) = d_\varepsilon(g,f)$

d) $d_\varepsilon(f,g) + d_\varepsilon(g,h) = \min\{1, \sup\{d(f(x),g(x)) / \varepsilon(x) \mid x \in X\}\} + \min\{1, \sup\{d(g(x),h(x))/\varepsilon(x) \mid x \in X\}\} \geq$
$\geq \min\{1, \sup\{d(f(x),g(x))/\varepsilon(x) \mid x \in X\} +$

$+ \sup\{d(g(x),h(x))/\varepsilon(x) \mid x \in X\}\} \geq$

$\geq \min\{1, \sup\{(d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x)))/\varepsilon(x) \mid x \in X\}\} \geq$

$\geq \min\{1, \sup\{d(f(x),h(x))/\varepsilon(x) \mid x \in X\}\} = d_\varepsilon(f,h)$

luego d_ε es una pseudométrica.

La topología inducida en $C(X,Y)$ por la familia de pseudo métricas $\{d_\varepsilon \mid \varepsilon \in C(X,R^+)\}$ coincide con T_W.

En efecto: Sabemos que T_W tiene como base la familia $\{B_d(f,\varepsilon) \mid f \in C(X,Y),\ \varepsilon \in C(X, R^+)\}$.

Es claro que $B_{d_\varepsilon}(f,1/2) \subset B_d(f,\varepsilon)$. Recíprocamente, dados $\varepsilon \in C(X,R^+)$ y $r \in R^+$, tomamos $n \in N$ de modo que $1/n, r/n < 1/2$ y la función $\delta = \varepsilon$.

Entonces $B_d(f, r/n\ \delta) \subset B_{d_\varepsilon}(f,r)$.

Como la topología inducida por una familia de pseudométricas es siempre completamente regular, la conclusión es inmediata. ≠

La condición impuesta a X de ser paracompacto no es necesaria, pues sabemos por la Proposición 1.15 que si X es numerablemente compacto e Y pseudometrizable, entonces $C_W(X,Y)$ es pseudometrizable y por tanto completamente regular.

Antes de ver otra condición suficiente para que $C_W(X,Y)$ sea completamente regular veamos un lema.

<u>Lema 2.8</u>.- Sean X e Y espacios topológicos, con X (ó Y) T_1 ó regular. Sea $C \subset X \times Y$ un cerrado. Entonces $N(C) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset C\}$ es un cerrado en $C_W(X,Y)$.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in C(X,Y)$ tal que $\Gamma_f \not\subset C$. Entonces, existe $x \in X$, tal que $(x,f(x)) \notin C$. Como C es cerrado existen U^x y

$U^{f(x)}$ tal que $(U^x \times U^{f(x)}) \cap C = \emptyset$. Por el corolario 1.4, lema 1.5, y proposición 2.4 $T_p \subset T_W$, luego $<\{x\}, U^{f(x)}>$ es un entorno de f que verifica $<\{x\}, U^{f(x)}> \cap N(C) = \emptyset$. #

<u>Proposición 2.9</u>.- Sean X un espacio topológico T_1 ó regular, e Y un espacio topológico T_2, de modo que $X \times Y$ es normal. Entonces $C_W(X,Y)$ es completamente regular.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in C(X,Y)$ y $U \subset X \times Y$ abierto, tal que $\Gamma_f \subset U$. Por ser Y separado Γ_f es cerrado en $X \times Y$, y por ser $X \times Y$ normal existe una función continua $g : X \times Y \to I$ tal que $g(\Gamma_f) = \{0\}$ y $g((X \times Y)-U) = \{1\}$.

Definimos
$$\begin{aligned} \phi : C_W(X,Y) &\longrightarrow [0,1] \\ h &\longrightarrow \sup\{g(x,h(x)) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

ϕ está bien definida pues $g(x, h(x)) \in [0,1]$ para todo $x \in X$. Puesto que, para todo $x \in X$, se verifica $g(x,f(x)) = 0$, se tiene que $\phi(f) = 0$.

Si $h \in C(X,Y)$ es tal que $\Gamma_h \not\subset U$, existe $x \in X$ con $(x,h(x)) \notin U$. Luego $g(x,h(x)) = 1$ y $\phi(h) = 1$.

Falta por ver que ϕ es continua.

En efecto:

$$\phi^{-1}((a,b) \cap [0,1]) = (C(X,Y)-\{h \in C(X,Y) \mid \Gamma_h \subset g^{-1}((\leftarrow,a])\})$$
$$\cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{h \in C(X,Y) \mid \Gamma_h \subset g^{-1}((\leftarrow,b-1/n))\})$$

Por el lema 2.8, $\{h \in C(X,Y) \mid \Gamma_h \subset g^{-1}((\leftarrow,a])\}$ es cerrado, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{h \in C(X,Y) \mid \Gamma_h \subset g^{-1}((\leftarrow,b-1/n))\}$ es abierto, al ser $g^{-1}((\leftarrow,b-1/n))$ abierto; luego $\phi^{-1}((a,b) \cap [0,1])$ es abierto y ϕ es continua. #

El último resultado relativo a la completa regularidad de

$C_W(X,Y)$ es el siguiente:

Proposición 2.10.- Sean X un espacio topológico y G un grupo topológico pseudometrizable. Entonces, $C_W(X,G)$ es completamente regular.

Demostración: Según un resultado del capítulo 3 (Nota al Corolario 3.5) $C_W(X,G)$ es un grupo topológico. Sabido es que todo grupo topológico es uniformizable y por tanto completamente regular. #

Como caso particular $C_W(X,R)$ lo es, para todo X.

La última parte de este capítulo está dedicada al estudio de la normalidad. El resultado obtenido es la siguiente

Proposición 2.11.- Sea X un espacio topológico T_2, que posee una familia discreta de abiertos no vacíos $\{V_r\}_{r\in N}$, tal que $\bar{V}_r$ es compacto y metrizable para todo $r \in N$, y V_1 posee un punto x_1 no aislado.

Entonces $C_W(X,I)$ no es normal.

($I = [0,1]$ y en el consideramos la métrica usual $|\ \ |$).

Consecuencia inmediata son los corolarios siguientes:

Corolario 2.12. Sean X una variedad paracompacta y T_2, de dimensión finita que posee un punto x en el que $\dim_x X \geq 1$, e Y un espacio metrizable que contiene un arco. Entonces $C_W(X,Y)$ es normal si y sólo si X es compacta.

Por tanto queda contestada en forma negativa la pregunta hecha en el ejercicio 12 de Hirsch, p. 65, de si $C_W(R,R)$ es paracompacto ó normal.

Demostración del corolario: Si X es compacta, entonces $C_W(X,Y) = C_c(X,Y) = C_{f_d}(X,Y)$, si d es una métrica que describe la topología de Y, y por tanto es metrizable.

Si X no es compacto, por ser metrizable, no es numerablemente compacto. Por tanto posee un subconjunto $C = \{x_r \mid r \in N\}$ infinito, cerrado y discreto, y, por ser X completamente colectivamente normal, se puede separar por una familia discreta de abiertos, es decir existe $\{V_r\}_{r\in N}$ familia discreta de abiertos tal que $x_r \in V_r$, para todo $r \in N$. Por ser X una variedad se pueden tomar de modo que $\overline{V}_r$ sea compacto, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Está claro que puede tomarse x como x_1, y como $\dim_x X \geq 1$, x_1 no es aislado. Por otro lado, sea $\omega : I \to Y$ un arco tal que $\omega(0) = y$. Sea $A = \omega(I)$.

Por la proposición anterior $C_W(X,A)$ no es normal. Por el lema 1.13, $C_W(X,A)$ "es" un subespacio cerrado de $C_W(X,Y)$ que por tanto no es normal. #

Corolario 2.13.- Sean X una variedad paracompacta y T_2, pero no compacta, de dimensión finita ó modelada sobre el cubo de Hilbert, que posee un punto x en el que $\dim_x X \geq 1$, e Y un espacio topológico T_2 que contiene un arco. Entonces $C_W(X,Y)$ no es normal.

Demostración: Es la misma que la segunda parte del corolario anterior. #

Antes de empezar la demostración de la proposición veamos una definición y un lema.

Definición.- Con la notación de la proposición, para cada $f \in C(X,I) = Z$ y cada $r \in \mathbb{N}$ definimos:

$$S_r(f) = \{g \in Z \mid g(x) = f(x),\ \forall x \in X - \bigcup_{i=1}^{r} V_i\}$$

$$S(f) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} S_r(f).$$

Lema 2.13.- $S(f)$ es cerrado en (Z,T_W).

Demostración: Supongamos que g es una función de Z que no pertenece a $S(f)$. Esto equivale a que $g \notin S_r(f)$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y por tanto ó bien

$$\exists\, x_o \in X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n, \quad \exists\, \varepsilon \in R^+ \text{ tal que } |f(x_o)-g(x_o)| = \varepsilon$$

ó bien

$\exists\, \{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sucesión estrictamente creciente de naturales,

$\exists\, \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sucesión de reales positivos

$\exists\, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sucesión en X

tal que

$x_k \in V_{r_k}$, para todo $k \in N$

$|f(x_k)-g(x_k)| = \varepsilon_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

En el primer caso $V^g\langle\{\{x_o\}\},\{\varepsilon\}\rangle \cap S(f) = \emptyset$.
(ver Definición 1.5 y Proposición 1.12).

En el segundo $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es cerrado, discreto en X y $V^g\langle\{\{x_k\}\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle \cap S(f) = \emptyset$. #

Si V es un abierto no vacío de X, g es una función de Z y ε es una función real positiva definida en X, que en V toma el valor a y el valor b fuera de él, entonces tenemos definido el entorno abierto de g, $V^g\langle\{\overline{V},X-V\}, \{a,b\}\rangle$ que en lo que sigue notaremos abreviadamente $B(g,\varepsilon)$.

<u>Demostración de la Proposición 2.11</u>.- En lo que sigue $f = c_o$.
Si $g \in S_r(f)$, $\overline{g}$ denota su restricción a $\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i$.

Para cada $r \in \mathbb{N}$ sea $\varepsilon_r = c_{1/2^r} \in C(\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i, R^+)$ y consideremos $B_{||}(\overline{g},\varepsilon_r)$ entorno abierto de $\overline{g}$ en $C_W(\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i, I) = Y_r$.

Por ser $\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i$ compacto, $Y_r = C_c(\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i, I)$.
($B_{||}(\overline{g},\varepsilon_r)$ se abreviará por $B(\overline{g},\varepsilon_r)$).

Puesto que $\bigcup_{i=1}^{r} \overline{V}_i$ es compacto y II A.N., e I es II A.N. Y_r es II A.N., por lo tanto existe una familia numerable $\{g_n^r|_{n\in\mathbb{N}}\}$ de funciones en $S_r(f)$, de modo que

$$\bigcup \{B(\overline{g},\varepsilon_r)|g \in S_r(f)\} = \bigcup \{B(\overline{g}_n^r,\varepsilon_r) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

La función $\delta_n^r : X \longrightarrow R^+$ dada por

$$\delta_n^r(x) = \begin{cases} \varepsilon_r(x) = 1/2^r, & x \in \bigcup_{i=1}^{r} V_i \\ 1/2^{n+r-1} & , \text{en el resto} \end{cases}$$

determina, para cada r y n, el entorno abierto $B(g_n^r,\delta_n^r)$ de g_n^r.

Claramente

$$\bigcup \{B(g_n^r,\delta_n^r) \mid n \in \mathbb{N}\} \supset S_r(f)$$

y

$$U = \bigcup \{B(g_n^r,\delta_n^r) \mid r,n \in \mathbb{N}\} \supset S(f)$$

Se trata de probar que dado un abierto V, de modo que $S(f) \subset V \subset U$, se verifica $\overline{V} \not\subset U$, con lo que quedará probado que Z no es normal.

En efecto:

$f \in V \Longrightarrow \exists W_2 \subset X \times I$ abierto, $\exists t_2^n > 0$, $n \geq 2$, tal que $\Gamma_f \subset W_2$, $N(f,W_2) \subset V$ y $\overline{V}_n \times [0,t_2^n] \subset W_2$, $n \geq 2$, esto por ser $\overline{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, compacto.

Tomemos $x_2 \in V_2$ y sea $\lambda_2 : \overline{V}_2 \longrightarrow [0,t_2^2]$ una función continua tal que

$$\lambda_2(x_2) = t_2^2$$
$$\lambda_2(x) = 0, \quad x \in \overline{V}_2 - V_2.$$

λ_2 existe porque $\overline{V}_2$ es compacto y T_2, y por tanto normal.

Si $\overline{V}_2 = V_2$ se tomaría λ_2 constante con valor t_2^2.

La función

$$h_2' : X \longrightarrow I, \quad h_2'|_{\overline{V}_2} = \lambda_2$$
$$h_2'(x) = 0, \quad x \in X - V_2$$

es continua y $h_2' \in N(f,W_2) \subset V$.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el primer número natural que verifica

$$t_2^2 = |h_2'(x_2) - g_n^1(x_2)| \geq \delta_n^1(x_2), \quad \forall n \geq n_1$$

y asociado a n_1 consideremos los subconjuntos de $\mathbb{N}$

$$A_1 = \{n < n_1 \mid h_2' \notin B(g_n^1,\delta_n^1)\}$$
$$B_1 = \{n < n_1 \mid n \notin A_1\}$$

(Si $n \geq n_1$ $h_2' \notin B(g_n^1,\delta_n^1)$).

n_1 existe puesto que $\begin{cases} g_n^1(x_2) = 0 & y \ \{\delta_n^1(x_2)\}_{n\in N} = \{1/2^n\}_{n\in N} \\ h_2'(x_2) = t_2^2 > 0 \end{cases}$

es estrictamente decreciente.

Para cada $n \in A_1$, $\exists\, x_{1n} \in V_1$, $|h_2'(x_{1n})-g_n^1(x_{1n})| \geq \varepsilon_1(x_{1n})$ puesto que

$$h_2' \notin B(g_n^1,\delta_n^1) \Longrightarrow \exists\, x \in X, \quad |h_2'(x) - g_n^1(x)| \geq \delta_n^1(x);$$

pero $\forall x \notin V_1 \cup V_2$, $|h_2'(x) - g_n^1(x)| = 0 < \delta_n^1(x)$ y
$\forall x \in V_2$, $|h_2'(x) - g_n^1(x)| = |h_2'(x)| \leq h_2'(x_2) < \delta_n^1(x_2) = \delta_n^1(x)$.
Por tanto $x \in V_1$ y $\delta_n^1(x) = \varepsilon_1(x)$. Este x es el x_{1n}.

Si $n \in B_1$, $\exists\, y_2 \in V_1$, $\exists\, U_2$ abierto, $y_2 \in U_2 \subset \overline{U}_2 \subset$ $\subset V_1-(\{x_{1n} \mid n \in A_1\} \cup \{x_1\})$. y_2 existe porque x_1 no es aislado y por tanto V_1 es infinito, mientras A_1 es finito. U_2 existe porque $\overline{V}_1$ es compacto y por tanto regular.

Como hemos supuesto que $\overline{V}_1$ es metrizable si ρ_1 es una métrica asociada con él, podemos elegir y_2 y s_2 de modo que

$\rho_1(y_2,x_1) < 1/2^2$ y $U_2 = B_{\rho_1}(y_2,s_2)$ con

$0 < s_2 < 1/2\ \rho_1(y_2,x_1) < 1/4 \min \{\rho_1(x_1,x_{1n})\ n \in A_1,\ x_1 \neq x_{1n}\}$.

El subespacio $\overline{U}_2$ es normal, luego existe una función continua

$$\beta_2 : \overline{U}_2 \longrightarrow [0,1] = [0,2\varepsilon_1]$$

tal que $\beta_2(y_2) = 1$

$$\beta_2(x) = 0 \quad , \ x \in \overline{U}_2 - U_2.$$

(Si $\overline{U}_2 = U_2$ se toma $\beta_2 = c_1$
Si $B_1 = \emptyset$, $\beta_2 = c_o$)

La función continua $h_2 : X \longrightarrow I$, $h_2|\overline{U}_2 = \beta_2$
$h_2|X-U_2 = h_2'$

verifica:

i) $h_2 \in S_2(f)$ ya que $h_2(x) = 0$ para $x \notin V_2 \cup U_2$.

Las desigualdades siguientes:

$|h_2(x_2)-g_n^1(x_2)| \geq \delta_n^1(x_2)$, si $n \geq n_1$.

$|h_2(x_{1n}) - g_n^1(x_{1n})| \geq \delta_n^1(x_{1n})$, si $n \in A_1$.

$|h_2(y_2)-g_n^1(y_2)| \geq |h_2(y_2)| - |g_n^1(y_2)| > 2\varepsilon_1(y_2) - \varepsilon_1(y_2) =$
$= \varepsilon_1(y_2) = \delta_2^1(y_2)$, si $n \in B_1$

pues entonces $|g_n^1(y_2)| = |h_2'(y_2)-g_n^1(y_2)| < \delta_2^1(y_2) = \varepsilon_1(y_2)$, indican que

ii) $h_2 \notin \bigcup \{B(g_n^1,\delta_n^1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Esta construcción es el primer paso de un proceso por inducción.

Supongamos construidas para todos los naturales i, $2 \leq i < r$

a) números reales $t_i^n > 0$, $n \geq i$, tales que $t_i^n < t_{i-1}^n$ y abiertos $W_i \subset X \times I$, $\Gamma_{h_{i-1}} \subset W_i$, $N(h_{i-1}, W_i) \subset V$ y $\overline{V}_n \times [0, t_i^n] \subset W_i$, $n \geq i$. $(h_1 = f)$.

b) puntos $x_i \in V_i$ y funciones continuas

$$\lambda_i : \overline{V}_i \longrightarrow [0, t_i^i], \quad \lambda_i(x_i) = t_i^i$$
$$\lambda_i(x) = 0, \quad x \in \overline{V}_i - V_i$$

(Si fuera $\overline{V}_i = V_i$, $\lambda_i = c_{t_i^i}$).

c) funciones continuas $h_i' : X \to I$, $h_i'|\overline{V}_i = \lambda_i$

$$h_i'|X - V_i = h_{i-1}|X - V_i$$

d) números naturales n_{i-1}, primero que verifica

$$t_i^i = |h_i'(x_i) - g_n^{i-1}(x_i)| \geq \delta_n^{i-1}(x_i) \quad \text{si } n \geq n_{i-1}$$

e) Subconjuntos de $\mathbb{N}$, A_{i-1}, B_{i-1}

$$A_{i-1} = \{n < n_{i-1} \mid h_i' \notin B(g_n^{i-1}, \delta_n^{i-1})\}$$

$$B_{i-1} = \{n < n_{i-1} \mid n \notin A_{i-1}\}.$$

f) Subconjuntos de X, $\{x_{i-1,n} \mid n \in A_{i-1}\} \subset \bigcup\{V_j \mid j \leq i-1\}$ de modo que

$$|h_i'(x_{i-1,n}) - g_n^{i-1}(x_{i-1,n})| \geq \varepsilon_{i-1}(x_{i-1,n}), \quad \text{si } n \in A_{i-1}.$$

g) y_i, puntos de X, s_i reales positivos y abiertos U_i tales que

$$y_i \in U_i \subset \overline{U}_i \subset$$
$$\subset (V_1 - \bigcup\{\overline{U}_j \mid 2 \leq j \leq i-1\}) - (\{x_{jn} \mid j < i,\ n \in A_j\} \cup \{x_1\})$$

con $U_i = B_{\rho_1}(y_i, s_i)$, $s_i < \frac{1}{2}\rho_1(y_i, x_1) < 1/8\ \rho_1(y_{i-1}, x_1)$ y

$\rho_1(y_i,x_1) < 1/2 \min\{\rho_1(x_1,x_{jn}) \mid j < i,\ \ n \in A_j,\ \ x_{jn} \in V_1-\{x_1\}\}$.

h) funciones continuas $\beta_i : \overline{U}_i \longrightarrow [0,2\varepsilon_{i-1}]$,

$$\beta_i(y_i) = 2\varepsilon_{i-1}$$

$$\beta_i(x) = 0, \qquad x \in \overline{U}_i-U_i$$

(Si $\overline{U}_i=U_i$, $\beta_i = c_{2\varepsilon_{i-1}}$ y si $B_{i-1} = \emptyset$, $\beta_i = c_o$).

j) funciones continuas $h_i : X \to I$, tal que

$$h_i|\overline{U}_i = \beta_i$$

$$h_i|X-U_i = h_i^{\prime}|X-U_i$$

$$h_i \in S_i(f) \ \text{ y } \ h_i(x) = 0 \ \text{ si } \ x \notin \bigcup\{V_j \cup U_j \mid 2 \leq j \leq i\}$$

$$|h_i(x_i)-g_n^{i-1}(x_i)| \geq \delta_n^{i-1}(x_i), \quad n \geq n_{i-1}$$

$$|h_i(x_{i-1,n})-g_n^{i-1}(x_{i-1,n})| \geq \varepsilon_{i-1}(x_{i-1,n}), \quad n \in A_{i-1}$$

$$|h_i(y_i) - g_n^{i-1}(y_i)| \geq \varepsilon_{i-1}(y_i), \qquad n \in B_{i-1}.$$

Veamos el siguiente paso de la inducción:

a) Por (j) $h_{r-1} \in S_{r-1}(f) \subset V$, luego $\exists\, W_r \subset X \times I$, abierto tal que $\Gamma_{h_{r-1}} \subset W_r$ y $h_{r-1} \in N(h_{r-1},W_r) \subset V$.

Igualmente $h_{r-1}(\overline{V}_n) = 0$ si $n \geq r$. Por ser $\overline{V}_n$ compacto y $\Gamma_{h_{r-1}} \subset W_r$ $\exists\, t_r^n > 0$, $n \geq r$, tal que $t_r^n < t_{r-1}^n$ y $\overline{V}_n \times [0,t_r^n] \subset W_r$.

b) Elijamos un punto $x_r \in V_r$ y por ser $\overline{V}_r$ métrico existe una función continua $\lambda_r : \overline{V}_r \longrightarrow [0,t_r^r]$, tal que

$$\lambda_r(x_r) = t_r^r$$

$$\lambda_r(x) = 0, \qquad x \in \overline{V}_r-V_r$$

(Si $\overline{V}_r = V_r$, $\lambda_r = c_{t_r^r}$).

c) La función $h'_r : X \to I$, $h'_r|\bar{V}_r = \lambda_r$

$h'_r|X-V_r = h_{r-1}|X-V_r$

está bien definida pues, por (j), $h_{r-1}(x) = 0 = \lambda_r(x)$, si $x \in \bar{V}_r - V_r$. (Si $\bar{V}_r = V_r$, h'_r está definida en dos partes disjuntas, cerradas y abiertas, y es continua).

d) La sucesión $\{\delta_n^{r-1}(x_r)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1/2^{n+r-2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (pues $x_r \in V_r$) es estrictamente decreciente, luego existe un primer natural n_{r-1} que verifica

$$t_r^r = |h'_r(x_r) - g_n^{r-1}(x_r)| = |h'_r(x_r)| \geq \delta_n^{r-1}(x_r), \quad n \geq n_{r-1}.$$

e) Sea $A_{r-1} = \{n < n_{r-1} \mid h'_r \notin B(g_n^{r-1}, \delta_n^{r-1})\} \subset \mathbb{N}$.

y $B_{r-1} = \{n < n_{r-1} \mid n \notin A_{r-1}\}$.

f) Si $n \in A_{r-1}$, $h'_r \notin B(g_n^{r-1}, \delta_n^{r-1}) \Longrightarrow \exists\, x_{r-1,n}$, tal que

$$|h'_r(x_{r-1,n}) - g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| \geq \delta_n^{r-1}(x_{r-1,n}).$$

Dado que $h'_r(x) = g_n^{r-1}(x) = 0$ para $x \notin \bigcup_{j=1}^{r} V_j$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, y

si $x \in V_r$, $\begin{cases} h'_r(x) = \lambda_r(x) \leq \lambda_r(x_r) < \delta_n^{r-1}(x_r), & \text{para } n \in A_{r-1} \\ g_n^{r-1}(x) = 0, & \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

se tiene que $x_{r-1,n} \in \bigcup_{j=1}^{r-1} V_j$, y en este punto

$$\delta_n^{r-1}(x_{r-1,n}) = \varepsilon_{r-1}(x_{r-1,n}),$$

con lo que

$$|h'_r(x_{r-1,n}) - g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| \geq \varepsilon_{r-1}(x_{r-1,n}).$$

g) El conjunto

$$[V_1 - \bigcup_{j=2}^{r-1} \bar{U}_j] - [\{x_{jn} \mid j < r,\ n \in A_j\} \cup \{x_1\}] = G$$

es no vacío, ya que $G \cup \{x_1\}$ es un abierto que contiene a x_1 y éste no es aislado. Por tanto existe $y_r \in G$, y existe un número real positivo s_r de modo que

$$y_r \in U_r \subset \bar{U}_r \subset G$$

siendo $U_r = B_{\rho_1}(y_r, s_r)$, $s_i < \frac{1}{2} \rho_1(y_r, x_1) < 1/8\ \rho_1(y_{r-1}, x_1)$ y $\rho_1(y_r, x_1) < 1/2 \min\{\rho_1(x_1, x_{j_n}) \mid j < r,\ n \in A_j,\ x_{jn} \in V_1 - \{x_1\}\}$.

h) Puesto que $\bar{U}_r \subset V_1$ es metrizable existe una función continua

$$\beta_r : \bar{U}_r \longrightarrow [0, 2\varepsilon_{r-1}]$$

$$\beta_r(y_r) = 2\varepsilon_{r-1}$$

$$\beta_r(x) = 0, \qquad x \in \bar{U}_r - U_r$$

(Si $\bar{U}_r = U_r$ tomamos $\beta_r = c_{2\varepsilon_{r-1}}$ y si $B_{r-1} = \emptyset$, $\beta_r = c_0$).

j) La función $h_r : X \to I$ dada por $h_r|_{\bar{U}_r} = \beta_r$

$$h_r|_{X-U_r} = h'_r|_{X-U_r}$$

está bien definida, porque

$h'_r|_{X-V_r} = h_{r-1}|_{X-V_r}$ y por tanto h'_r se anula fuera de $\bigcup_{j=2}^{r} V_j \cup \bigcup_{j=2}^{r-1} U_j$ consecuentemente en $\bar{U}_r - U_r$, y es claramente continua.

De la construcción de h_r se ve inmediatamente que

$h_r(x) = 0$ si $x \notin \bigcup\{V_j \cup U_j \mid 2 \leq j \leq r\}$, luego

$h_r \in S_r(f)$.

Por último

$$|h_r(x_r) - g_n^{r-1}(x_r)| = |h'_r(x_r) - g_n^{r-1}(x_r)| \geq \delta_n^{r-1}(x_r), \quad n \geq n_{r-1}.$$

$$|h_r(x_{r-1,n})-g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| = |h_r'(x_{r-1,n})-g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| \geq$$
$$\geq \varepsilon_{r-1}(x_{r-1,n}), \qquad n \in A_{r-1} .$$

$$|h_r(y_r)-g_n^{r-1}(y_r)| \geq 2\varepsilon_{r-1}(y_r)-\varepsilon_{r-1}(y_r) = \varepsilon_{r-1}(y_r), \quad n \in B_{r-1},$$

pues $h_{r-1}'(y_r) = 0$ y $|h_{r-1}'(y_r)-g_n^{r-1}(y_r)| < \varepsilon_{r-1}(y_r)$ al verificarse $h_{r-1}' \in B(g_n^{r-1},\delta_n^{r-1})$ para $n \in B_{r-1}$, lo que implica $|h_{r-1}'(x)-g_n^{r-1}(x)| < \varepsilon_{r-1}(x)$ xi $x \in \bigcup\{V_j \mid 1 \leq j \leq r-1\}$.

Hemos acabado la inducción.

Vamos a construir una función h tal que $h \in \overline{V}$ pero $h \notin U$.

La función $h : X \longrightarrow I$ tal que

$$h|_{\overline{V}_r \cup \overline{U}_r} = h_r|_{\overline{V}_r \cup \overline{U}_r}, \qquad r \geq 2$$

$$h|_{X-(\bigcup\{V_r \cup U_r \mid r \geq 2\})} = c_o$$

— Está bien definida, porque en

$$F_r(\bigcup\{V_r \cup U_r \mid r \geq 2\}) = (\bigcup\{F_r\ V_r \cup F_r\ U_r \mid r \geq 2\}) \cup \{x_1\}$$

todas las funciones h_r son nulas.

— Para probar que h es continua basta ver que lo es en el punto x_1:

En $B_{\rho_1}(x_1,s)$ de radio suficientemente pequeño para que $B_{\rho_1}(x_1,s) \cap U_i = \emptyset$ si $i \leq r-1$, la función h está acotada por $h_r(y_r) = 2\varepsilon_{r-1}(y_r) = 1/2^r$ y $h(x_1) = 0$.

— $h \notin U$

$$|h(x_r)-g_n^{r-1}(x_r)| = |h_r(x_r)-g_n^{r-1}(x_r)| \geq \delta_n^{r-1}(x_r),$$
$$n \geq n_{r-1}, \quad r \geq 2$$

$$|h(x_{r-1,n})-g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| = |h_r(x_{r-1,n})-g_n^{r-1}(x_{r-1,n})| \geq$$

$$\geq \varepsilon_{r-1}(x_{r-1,n}) = \delta_n^{r-1}(x_{r-1,n}), \quad n \in A_{r-1}, \quad r \geq 2$$

pues $h(x_{r-1,n}) = h_r(x_{r-1,n}) = h_r'(x_{r-1,n})$.

$$|h(y_r)-g_n^{r-1}(y_r)| \geq \varepsilon_{r-1}(y_r) = \delta_n^{r-1}(y_r), \quad n \in B_{r-1}, \quad r \geq 2$$

pues $h(y_r) = h_r(y_r)$.

Todo lo cual indica que $h \notin B(g_n^{r-1},\delta_n^{r-1})$ $r \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $h \notin U$.

— $h \in \bar{V}$

Sea $W \subset X \times I$ abierto, tal que $\Gamma_h \subset W$; Veamos que $N(h,W) \cap V \neq \emptyset$.

Como $h(x_1) = 0$, $x_1 \in V_1$ y $\bar{V}_1$ es compacto, existe un entorno C de x_1, y un número real $t > 0$, tal que $C \subset V_1$, $\bar{C} \times [0,t] \subset W$,

y existe un índice r_o de modo que $1/2^{r_o-2} < t$, $U_r \subset C$ para $r \geq r_o \geq 2$, y

$U_r \cap C = \emptyset$, $r < r_o$

La función $g : X \longrightarrow I$

$$g|_{X-D} = h|_{X-D}$$

$$g|_{\bar{D}} = c_o$$

con $D = \bigcup \{U_r \mid r \geq r_o\}$, está bien definida, pues en $F_r(\bigcup\{U_r \mid r \geq r_o\}) = (\bigcup \{F_r U_r \mid r \geq r_o\}) \cup \{x_1\}$ h se anula, y es continua.

Puesto que $\Gamma_h \subset W$, $(x,g(x)) = (x,h(x)) \in W$ si $x \in X-D$, y $(x,g(x)) = (x,0) \in \bar{C} \times [0,t] \subset W$, si $x \in \bar{D}$; es decir

$\Gamma_g \subset W$ y $g \in N(h,W)$.

Finalmente $g \in V$, pues

$$g(x) = \begin{cases} h(x) = h_r(x) \leq t_r^r \leq t_{r_o}^r, & x \in V_r,\ 2 \leq r_o \leq r \\ h_{r_o-1}(x) & , \text{ en el resto.} \end{cases}$$

Como $\overline{V}_r \times [0,t_r^r] \subset \overline{V}_r \times [0,t_{r_o}^r] \subset W_{r_o}$, $2 \leq r_o \leq r$ tenemos $(x,g(x)) \in W_{r_o}$, $\forall x \in X$, y por tanto

$$g \in N(h_{r_o-1}, W_{r_o}) \subset V. \quad \#$$

CAPITULO 3. CONTINUIDAD DE LA APLICACION COMPOSICION

Empezamos este capítulo estudiando la continuidad de f_* y algunos resultados con ella relacionados.

(Ver Hirsch, pag. 65).

<u>Proposición 3.1</u>.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, y $f : Y \to Z$ una función continua.

Entonces, la función
$$f_* : C_W(X,Y) \longrightarrow C_W(X,Z)$$
$$g \longrightarrow f \circ g$$
es continua.

<u>Demostración</u>: Sea $g_0 \in C(X,Y)$ y U un abierto de $X \times Z$ tal que $\Gamma_{f\circ g_0} \subset U$. Entonces, $V = (1_X \times f)^{-1}(U)$ es un abierto de $X \times Y$. y, puesto que $\forall x \in X$, $(x, fg_0(x)) = (1_X \times f)(x, g_0(x)) \in U$, se tiene que $\forall x \in X$, $(x, g_0(x)) \in V$, es decir $\Gamma_{g_0} \subset V$.

Además, si $g \in C(X,Y)$ es tal que $\Gamma_g \subset V$ se tiene que $\forall x \in X$ $(x, g(x)) \in V$, luego $\forall x \in X$ $(x, fg(x)) \in U$, lo que significa que $\Gamma_{f\circ g} \subset U$. Así f_* es continua en g_0. #

Como consecuencia se obtiene la siguiente

<u>Proposición 3.2</u>.- Sean X, X', X'' espacios topológicos. Entonces, la aplicación
$$\phi : C_W(X, X' \times X'') \longrightarrow C_W(X,X') \times C_W(X,X'')$$
$$f \longrightarrow (p_1 \circ f,\ p_2 \circ f)$$
es continua y biyectiva.

<u>Demostración</u>:

Si $p_1 : X' \times X'' \longrightarrow X'$, $\quad p_2 : X' \times X'' \longrightarrow X''$
$$(x', x'') \longrightarrow x' \qquad\qquad (x', x'') \longrightarrow x''$$

son las proyecciones, se tiene que $\phi = (p_{1*}, p_{2*})$ y, por la Proposición 3.1, es continua.

ϕ es biyectiva y su inversa es

$$\begin{aligned} \psi : C_W(X,X') \times C_W(X,X'') &\longrightarrow C_W(X,X' \times X'') \\ (f,g) &\longrightarrow \langle f,g\rangle \end{aligned}$$

con $\langle f,g\rangle(x) = (f(x),g(x))$. #

En general la función ψ no es continua, como se ve con el siguiente

Ejemplo 3.1.- Sean $X = X' = ([0,\Omega), T_{\leq})$, $X'' = ([0,\Omega], T_{\leq})$, es decir los ordinales menores (menores ó iguales) que el primer ordinal no numerable con la topología inducida por el orden usual.

Tomemos
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X' \times X'' \\ \alpha &\longrightarrow (\alpha,\Omega) \\ f_1 = p_1 \circ f : X &\longrightarrow X' \\ \alpha &\longrightarrow \alpha \\ f_2 = p_2 \circ f : X &\longrightarrow X'' \\ \alpha &\longrightarrow \Omega. \end{aligned}$$

Veamos que ψ no es continua en (f_1,f_2). Sea $U \subset X \times X' \times X''$ dado por $U = \bigcup_{\alpha<\Omega} ([0,\alpha] \times [0,\alpha] \times (\alpha,\Omega])$.

U es abierto y, puesto que $\forall \alpha < \Omega$ $(\alpha,\alpha,\Omega) \in U$, $\Gamma_f \subset U$.

Sean $U_1 \subset X \times X'$ abierto arbitrario con $\Gamma_{f_1} \subset U_1$.

$U_2 \subset X \times X''$ " " con $\Gamma_{f_2} \subset U_2$.

Puesto que $\Gamma_{f_1} = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha < \Omega\}$ y $\Gamma_{f_1} \subset U_1$, se tiene $\forall \alpha$, $0 < \alpha < \Omega$ $\exists \lambda_\alpha$, $\lambda_\alpha < \alpha$ y $(\lambda_\alpha,\alpha] \times (\lambda_\alpha,\alpha] \subset U_1$; y dado que $(0,\Omega) \subset [0,\Omega)$ es estacionario, por el Pressing Down Lema, existe un conjunto estacionario $S \subset (0,\Omega)$ y existe $\lambda < \Omega$, tal que $\lambda_\alpha = \lambda$, $\forall\alpha \in S$. Por ser S estacionario no es acotado en $[0,\Omega)$ y en consecuencia

$$\bigcup \{(\lambda,\alpha] \times (\lambda,\alpha] \mid \alpha \in S\} = (\lambda,\Omega) \times (\lambda,\Omega) \subset U_1.$$

Por otro lado, $\Gamma_{f_2} = \{(\alpha,\Omega) \mid \alpha < \Omega\} \subset U_2$, luego existe $\beta < \Omega$, que podemos tomar $\beta \geq \lambda + 1$, tal que $\{\lambda+1\} \times (\beta,\Omega] \subset U_2$ ($\{\lambda+1\}$ es abierto en X).

Las funciones $g_1 : X \to X'$ $\quad g_1(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) & \alpha \neq \lambda+1 \\ \beta+1 & \alpha = \lambda+1 \end{cases}$

$$g_2 : X \to X'' \quad g_2(\alpha) = \begin{cases} f_2(\alpha) & \alpha \neq \lambda+1 \\ \beta+1 & \alpha = \lambda+1 \end{cases}$$

son continuas y por lo anterior $\Gamma_{g_1} \subset U_1$ y $\Gamma_{g_2} \subset U_2$. En cambio, la función $\langle g_1,g_2\rangle = g$ es tal que $\Gamma_g \not\subset U$.

En efecto: $(\lambda+1,\ g(\lambda+1)) = (\lambda+1,\ g_1(\lambda+1),\ g_2(\lambda+1)) =$ $= (\lambda+1,\ \beta+1,\ \beta+1) \in \Gamma_g$. Si $(\lambda+1,\ \beta+1,\ \beta+1) \in U$ entonces $\exists\alpha < \Omega$, $(\lambda+1,\ \beta+1,\ \beta+1) \in [0,\alpha] \times [0,\alpha] \times (\alpha,\Omega]$ y por tanto $\alpha \geq \beta+1$ y $\alpha < \beta+1$ lo cual es contradictorio.

La siguiente Proposición da condiciones suficientes para que ψ sea continua.

<u>Proposición 3.3</u>.- Sean X, X', X'' espacios topológicos, con X' y X'' pseudometrizables. La aplicación

$$\psi : C_W(X,X') \times C_W(X,X'') \longrightarrow C_W(X,X' \times X'')$$
$$(f,g) \longrightarrow \langle f,g\rangle$$

es continua, y por tanto un homeomorfismo (por la Proposición 3.2).

Demostración: Sea d' (d'') pseudométrica en X' (X'') que describe la topología de X' (X'').

La bola abierta $B_{d'}(a,r) = \{x' \in X' \mid d'(a,x') < r\}$ será notada abreviadamente $B_1(a,r)$. Análogamente $B_{d''}(b,r) = \{x'' \in X'' \mid d''(b,x'') < r\}$ será notada $B_2(b,r)$.

Sea $(f_o,g_o) \in C(X,X') \times C(X,X'')$ y $U \subset X \times X' \times X''$ abierto tal que $\Gamma_{<f_o,g_o>} \subset U$, lo que significa que $\forall x \in X$ $\exists V^x$ $\exists \varepsilon_x > 0$,

$$V^x \times B_1(f_o(x),\varepsilon_x) \times B_2(g_o(x),\varepsilon_x) \subset U$$

a) $$f_o(V^x) \subset B_1(f_o(x),1/3\ \varepsilon_x)$$
$$g_o(V^x) \subset B_2(g_o(x),1/3\ \varepsilon_x).$$

Sean $U_1 = \bigcup_{x \in X} (V^x \times B_1(f_o(x),\ 1/3\ \varepsilon_x)) \supset \Gamma_{f_o}$

$U_2 = \bigcup_{x \in X} (V^x \times B_2(g_o(x),\ 1/3\ \varepsilon_x)) \supset \Gamma_{g_o}$.

Claramente U_1 es abierto en $X \times X'$ y U_2 lo es en $X \times X''$.

Veamos que $\forall (f,g) \in C(X,X') \times C(X,X'')$, tal que $\Gamma_f \subset U_1$ y $\Gamma_g \subset U_2$, se tiene $\Gamma_{<f,g>} \subset U$.

Para todo $x \in X$ se verifica

$(x,f(x)) \in U_1$

$(x,g(x)) \in U_2$ y por tanto existen $x_1,x_2 \in X$,

tales que $\begin{cases} (x,f(x)) \in V^{x_1} \times B_1(f_o(x_1),1/3\ \varepsilon_{x_1}) \\ (x,g(x)) \in V^{x_2} \times B_2(g_o(x_2),1/3\ \varepsilon_{x_2}) \end{cases}$; luego $x \in V^{x_1} \cap V^{x_2}$,

y $\begin{cases} f(x) \in B_1(f_o(x_1),1/3\ \varepsilon_{x_1}) \\ f_o(x) \in B_1(f_o(x_2),\ 1/3\ \varepsilon_{x_2}) \end{cases}$ y $\begin{cases} g_o(x) \in B_2(g_o(x_1),1/3\ \varepsilon_{x_1}) \\ g(x) \in B_2(g_o(x_2),1/3\ \varepsilon_{x_2}) \end{cases}$

por a).

Supongamos $\varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon_{x_2}$. En este caso

$$d'(f(x),f_0(x_2)) \leq d'(f(x),f_0(x_1)) + d'(f_0(x_1),f_0(x)) +$$
$$+ d'(f_0(x),f_0(x_2)) < 1/3\ \varepsilon_{x_1} + 1/3\ \varepsilon_{x_1} + 1/3\ \varepsilon_{x_2} \leq \varepsilon_{x_2}.$$

Así que $f(x) \in B_1(f_0(x_2),\ \varepsilon_{x_2})$ y

$$(x,f(x),g(x)) \in V^{x_2} \times B_1(f_0(x_2),\ \varepsilon_{x_2}) \times B_2(g_0(x_2),\ \varepsilon_{x_2}) \subset U.$$

Si $\varepsilon_{x_2} \leq \varepsilon_{x_1}$,

$$d''(g(x),g_0(x_1)) \leq d''(g(x),g_0(x_2)) + d''(g_0(x_2),g_0(x)) +$$
$$+ d''(g_0(x),g_0(x_1)) < 1/3\ \varepsilon_{x_2} + 1/3\ \varepsilon_{x_2} + 1/3\ \varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon_{x_1}$$

y por tanto $(x,f(x),g(x)) \in V^{x_1} \times B_1(f_0(x_1),\ \varepsilon_{x_1}) \times B_2(g_0(x_1),\varepsilon_{x_1}) \subset U.$

\#

Que estas condiciones no son necesarias lo demuestra la Proposición 3.4 que sigue, donde condiciones sólo sobre el espacio X garantizan la continuidad de ψ.

Proposición 3.4.- Sean X, X', X" espacios topológicos, con X paracompacto y regular. Entonces ψ es continua, y por tanto un homeomorfismo.

Demostración: Sea $(f_0,g_0) \in C(X,X') \times C(X,X'')$ y U un abierto en $X \times X' \times X''$, tal que $\Gamma_{<f_0,g_0>} \subset U$. Como antes, para cada $x \in X$ existen V^x, $V^{f_0(x)}$, $V^{g_0(x)}$ que verifican

$$V^x \times V^{f_0(x)} \times V^{g_0(x)} \subset U$$

a)
$$f_0(V^x) \subset V^{f_0(x)}$$
$$g_0(V^x) \subset V^{g_0(x)}.$$

Como X es paracompacto y regular, existe $C = \{C_i\}_{i\in I}$ refinamiento cerrado localmente finito del recubrimiento $\{V^x \mid x \in X\}$.

Para cada $i \in I$ elegimos $x_i \in X$, tal que $C_i \subset V^{x_i}$.

Sean $A = \{V^{f_o(x_i)} \mid i \in I\}$ y $B = \{V^{g_o(x_i)} \mid i \in I\}$.

Por el Corolario 1.3, $\langle C,A\rangle = V^{f_o}$ y $\langle C,B\rangle = V^{g_o}$ son entornos de f_o en $C_W(X,X')$ y de g_o en $C_W(X,X'')$ respectivamente.

Si $(f,g) \in V^{f_o} \times V^{g_o}$ se tiene que, para todo $x \in X$ existe $i \in I$, con $x \in C_i \subset V^{x_i}$, $f(x) \in V^{f_o(x_i)}$ y $g(x) \in V^{g_o(x_i)}$, por tanto $(x,f(x),g(x)) \in V^{x_i} \times V^{f_o(x_i)} \times V^{g_o(x_i)} \subset U$ y $\Gamma_{\langle f,g\rangle} \subset U$. #

Como comentario a lo anterior añadir que la búsqueda de condiciones sobre los espacios X, X' y X'', necesarios y suficientes para que ψ sea continua parece cuando menos difícil, como el ejemplo 3.1 y el siguiente ejemplo 3.4 muestran.

Ejemplo 3.4.- Sean X un espacio conexo e $Y = (\mathbb{R}, T_{[\,)})$. Una función continua de X en Y es constante.

Veamos que $\psi : C_W(X,Y) \times C_W(X,Y) \to C_W(X,Y \times Y)$ es continua. Sean $f_o, g_o \in C(X,Y)$ y $U \subset X \times Y \times Y$ un abierto que contenga a $\Gamma_{\langle f_o,g_o\rangle}$. Sean $a = f_o(x)$ y $b = g_o(x)$. Para cada $x \in X$ existen V^x y $\varepsilon_x > 0$, tal que

$$V^x \times [a,a+\varepsilon_x) \times [b,b+\varepsilon_x) \subset U.$$

Consideremos $U_1 = \bigcup_{x\in X} (V^x \times [a,a+\varepsilon_x)) \supset \Gamma_{f_o}$

$$U_2 = \bigcup_{x\in X} (V^x \times [b,b+\varepsilon_x)) \supset \Gamma_{g_o}$$

abiertos en $X \times Y$ que contienen a Γ_{f_o} y Γ_{g_o} respectivamente. Si $f,g \in C(X,Y)$ verifican $\Gamma_f \subset U_1$ y $\Gamma_g \subset U_2$, para todo $x \in X$ se tiene: $(x,f(x)) \in U_1$ y $(x,g(x)) \in U_2$, luego existen $x_1,x_2 \in X$ tal que $(x,f(x)) \in V^{x_1} \times [a,a+\varepsilon_{x_1})$ y $(x,g(x)) \in V^{x_2} \times [b,b+\varepsilon_{x_2})$. Por tanto $x \in V^{x_1} \cap V^{x_2}$.

Supongamos $\varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon_{x_2}$. Entonces

$$(x,f(x)) \in V^{x_2} \times [a,a+\varepsilon_{x_1}) \subset V^{x_2} \times [a,a+\varepsilon_{x_2}), \quad \text{luego}$$

$$(x,f(x),g(x)) \in V^{x_2} \times [a,a+\varepsilon_{x_2}) \times [b,b+\varepsilon_{x_2}) \subset U.$$

Si $\varepsilon_{x_2} \leq \varepsilon_{x_1}$ el razonamiento es análogo.

Es decir $\Gamma_{<f,g>} \subset U$ y ψ es continua en $<f_o,g_o>$. Como se puede observar, el suponer que X es conexo sirve para asegurar que $C(X,Y)$ se reduce a las constantes, por consiguiente serviría como ejemplo cualquier espacio X que cumpliera esta condición.

Consecuencia de la Proposición 3.3 es el

Corolario 3.5.- $C_W(X,R)$ es un anillo topológico para todo espacio topológico X.

Demostración:

a) La función $+ : C_W(X,R) \times C_W(X,R) \longrightarrow C_W(X,R)$

$$(f,g) \longrightarrow f+g$$

es continua, ya que es la composición

$$C_W(X,R) \times C_W(X,R) \xrightarrow{\Psi} C_W(X,R \times R) \xrightarrow{(+)_*} C_W(X,R)$$

($(+)_*$ es la asociada a $R \times R \xrightarrow{+} R$, suma usual).

b) Análogamente, la función

$$\cdot : C_W(X,R) \times C_W(X,R) \longrightarrow C_W(X,R)$$
$$(f,g) \longrightarrow fg$$

es continua pues es la composición $(\cdot)_* \circ \psi$, con $\cdot : R \times R \to R$ la multiplicación usual. #

Nota: Ya que en la demostración del corolario 3.5 sólo se utiliza que R es un anillo topológico pseudometrizable el resultado es válido para cualquier A, anillo topológico pseudometrizable. Si G fuera un grupo topológico pseudometrizable, $C_W(X,G)$ sería un grupo topológico.

Aunque R es un espacio vectorial topológico, $C_W(X,R)$ (X espacio topológico), con las operaciones inducidas por las de R, no siempre lo es. De forma más general se tiene

Proposición 3.6.- Sea X espacio topológico T_1 y $(E,\| \|)$ un espacio vectorial real normado con $E \neq 0$.

Entonces, $C_W(X,E)$ es espacio vectorial topológico si y solamente si X es numerablemente compacto. Y si X es numerablemente compacto $C_W(X,E)$ es un espacio vectorial real normable. Además, si $(E,\| \|)$ es un espacio de Banach, $C_W(X,E)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

a) Supongamos que X no es numerablemente compacto.

Veamos que la multiplicación por escalares, es decir la aplicación

$$\alpha : R \times C_W(X,E) \longrightarrow C_W(X,E)$$
$$(r,f) \longrightarrow rf$$

no es continua. Sea $x_1 \in E$ con $\|x_1\| = 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $g_n = c_{x_1} \in C(X,E)$.

La sucesión $\{(1/n,\ g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R} \times C_W(X,E)$ a $(0,c_{x_1})$. Sin embargo, la sucesión transformada $\{\alpha(1/n,g_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{c_{1/_n x_1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\alpha(0,c_{x_1}) = c_0$.

En efecto: Como X no es numerablemente compacto existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sucesión en X, tal que $\mathrm{Agl}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$, y por tanto $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un cerrado en X, con la topología discreta. Entonces $U = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{x_n\} \times B(0,1/n))] \cup [(X-C) \times E]$ es un abierto en $X \times E$, tal que $\Gamma_{c_0} \subset U$.

(Como C es discreto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe V^{x_n}, de modo que $V^{x_n} \cap C = \{x_n\}$. Es inmediato verificar que

$$U = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V^{x_n} \times B(0,1/n))] \cup [(X-C) \times E]$$ que, por

ser C cerrado, es un abierto en $X \times E$).

Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $m > n$:

$$(x_m, c_{1/_n x_1}(x_m)) = (x_m, {}^1/_n x_1) \notin \{x_m\} \times B(0,1/m),$$ es

decir $\Gamma_{c_{1/_n x_1}} \not\subset U$; lo cual prueba que $\{c_{1/_n x_1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a c_0.

b) Supongamos ahora que X es numerablemente compacto.

Para cada $f \in C(X,E)$, definimos
$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$.

Se tiene:

1) Como X es numerablemente compacto si $f : X \to E$ es continua, $\|f\|(X)$ es compacto, y por tanto $\|f\|$ acotada. Así, en $C(X,E)$ podemos considerar la norma del supremo $\|\ \|$, y la métri-

ca $d_{\| \|}$ asociada a ella:

$$\|f\| = \sup \{\|f(x)\| \mid x \in X\}$$

$$d_{\| \|}(f,g) = \sup \{\|f(x)-g(x)\| \mid x \in X\} = \|f-g\|.$$

Por la Proposición 1.15 $T_{d_{\| \|}} = T_W$. Así, $C_W(X,E)$ es un espacio vectorial topológico normable.

Supongamos que $(E,\| \|)$ es un espacio de Banach.

Veamos que $(C_W(X,E),\| \|)$ es un espacio de Banach.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(C(X,E),d_{\| \|})$. Para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(E,\| \|)$ que tendrá límite.

Todo se reduce a probar que la función $f : X \to E$, definida por $f(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\}$, es continua. Pero f es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. $\#$

Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. f induce una aplicación

$$\begin{array}{rcl} f^* : C_W(Y,Z) & \longrightarrow & C_W(X,Z) \\ g & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

que, a diferencia de la $f_* : C_W(Z,X) \to C_W(Z,Y)$ que siempre es continua, no siempre lo es, como lo prueba la siguiente

<u>Proposición 3.7</u>.- Sean X un espacio T_1, Y un espacio completamente regular y $f : X \to Y$ una función continua, tal que existe $C \subset Y$ compacto con $f^{-1}(C)$ cerrado en X y no numerablemente compacto.

Entonces $\begin{array}{rcl} f^* : C_W(Y,R) & \longrightarrow & C_W(X,R) \\ g & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$ no es continua

en ningún punto.

<u>Demostración</u>: Basta probar que f^* no es continua en $g = c_0$. En efecto: para cada $g_0 \in C(Y,R)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_W(Y,R) \arrow[r, "f^*"] & C_W(X,R) \\ C_W(Y,R) \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "f^*"] & C_W(X,R) \arrow[u, "\approx"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g - g_0 \arrow[r] & (g-g_0)\circ f = g\circ f - g_0\circ f \\ g \arrow[u] \arrow[r] & g\circ f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

en el que las aplicaciones verticales son homeomorfismos por el Corolario 3.5. Así la continuidad de f^* en g_0 equivale a la continuidad de f^* en c_0.

Como $f^{-1}(C)$ no es numerablemente compacto existe en $f^{-1}(C)$ una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sin puntos de aglomeración, por tanto $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en $f^{-1}(C)$ y tiene la topología discreta. Además $f^{-1}(C)$ es cerrado, luego A es cerrado y discreto en X.

El abierto $U = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{a_n\} \times (-1/n, 1/n))] \cup [(X-A) \times R]$

en $X \times R$, es tal que $\Gamma_{c_o \circ f} \subset U$ pues $(c_o \circ f)(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea V un abierto en $Y \times R$ tal que $\Gamma_{c_o} \subset V$. Entonces, para cada $y \in Y$, existe V^y y existe $n_y \in \mathbb{N}$, de modo que $V^y \times (-1/n_y, 1/n_y) \subset V$.

Puesto que C es compacto, existe un número finito de puntos $y_1, \ldots, y_r \in C$, tales que $V_1 = \bigcup_{i=1}^{r} V^{y_i} \supset C$.

Si $n_o = \max\{n_{y_1}, \ldots, n_{y_r}\}$, $V_1 \times (-1/n_o, 1/n_o) \subset V$. Como Y es completamente regular y C es compacto, existe una función continua $h : Y \longrightarrow [0, 1/2n_o]$ tal que $h(C) = \{1/2n_o\}$ y $h(X-V_1) = \{0\}$. Claramente $\Gamma_h \subset V$, pero tomando $n \geq 2n_o$, $hf(a_n) = 1/2n_o \geq 1/n$, lo que indica que $\Gamma_{h\circ f} \not\subset U$, y por tanto f^* no es continua en c_o. #

La proposición anterior sigue siendo válida (salvo en "en ningún punto") si sustituimos R por un espacio Z que contiene un arco, pues si A es el interior de dicho arco es homeomorfo a R, con lo que, por la Proposición 3.7, $f^* : C_W(Y,A) \longrightarrow C_W(X,A)$ no es continua. Por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_W(Y,A) & \xrightarrow{f^*} & C_W(X,A) \\ {\scriptstyle j_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ C_W(Y,Z) & \xrightarrow[f^*]{} & C_W(X,Z) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & g\circ f \\ \downarrow & & \downarrow \\ j\circ g & \longrightarrow & j\circ g\circ f \end{array}$$

y por Lema 1.13, $f^* : C_W(Y,Z) \longrightarrow C_W(X,Z)$ no es continua. #

Resultados positivos acerca de la continuidad de f^* se obtienen en la siguiente

<u>Proposición 3.8</u>.- Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua, $\{C_i\}_{i\in I}$ familia de subconjuntos de Y que verifica:

a) $\overline{f(X)} \subset \bigcup_{i\in I} \mathring{C}_i$; b) $\mathring{C}_i \cap \overline{f(X)} \neq \emptyset$ y $f^{-1}(C_i)$ es numerablemente compacto para todo $i \in I$. Sea Z un espacio pseudometrizable.

Entonces, la función

$$f^* : C_W(Y,Z) \longrightarrow C_W(X,Z)$$
$$g \longrightarrow g\circ f$$

es continua.

<u>Demostración</u>: Sean $g : Y \to Z$ una aplicación continua y U un abierto en $X \times Z$ que contiene al grafo de $g\circ f$.

Para cada $i \in I$, $f^{-1}(C_i)$ es numerablemente compacto en X, y por tanto, si d es una pseudométrica en Z que describe su topología, existe, por el Lema 1.14, $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$U_i = \{(x,z) \in f^{-1}(C_i) \times Z \mid d(g\,f(x),z) < 1/n_i\} \subset U$ para todo $i \in I$.

Consideremos para cada $i \in I$ el subconjunto de $Y \times Z$,

$$V_i = \{(c,z) \in \mathring{C}_i \times Z \mid d(g(c),z) < 1/n_i\}.$$

Dado que $V_i = (\mathring{C}_i \times Z) \cap \alpha^{-1}(\leftarrow,1/n_i)$, donde $\alpha = d\circ(g \times 1_Z)$ es una función continua, es abierto para cada $i \in I$.

Además, para todo $c \in \overset{\circ}{C}_i$ se verifica $d(g(c),g(c)) = 0$ es decir $\Gamma_{g|\overset{\circ}{C}_i} \subset V_i$ para todo $i \in I$.

Sea $V = (\bigcup_{i\in I} V_i) \cup [(Y - \overline{f(X)}) \times Z]$. Es claro que V es abierto en $Y \times Z$ y contiene al grafo de g.

Veamos que $f^*(N(g,V)) \subset N(g\circ f,U)$. En efecto, si $g' \in N(g,V)$, es decir si $g' : Y \to Z$ es continua y $\Gamma_{g'} \subset V$, dado $x \in X$, $(f(x),g'f(x)) \in V$, y por tanto existe $i \in I$, tal que $(f(x),g'f(x)) \in V_i$. Así, $d(g\ f(x),g'f(x)) < 1/n_i$.

Como $x \in f^{-1}(C_i)$, $(x,g'f(x)) \in U_i \subset U$. Luego $\Gamma_{g'\circ f} \subset U$, y por tanto $g'\circ f \in N(g\circ f,U)$, y f^* es continua. #

Observación 3.8.- En las hipótesis de la Proposición 3.8, se verifica que para todo compacto $C \subset Y$, tal que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X, $f^{-1}(C)$ es numerablemente compacto. En efecto, basta observar que $f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap \overline{f(X)}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(C_{ij})$.

Por tanto no existe contradicción entre la Proposición 3.7 y la Proposición 3.8.

Definición 3.9.- Una función continua $f : X \to Y$ decimos que es q-propia si para todo $C \subset Y$ compacto, $f^{-1}(C)$ es numerablemente compacto.

Es claro que toda función propia es q-propia aunque no a la inversa.

Consecuencia inmediata de la proposición 3.8. es el siguiente

Corolario 3.10.- Sean X un espacio topológico, Y un espacio topológico localmente compacto, $f : X \to Y$ una función q-propia y Z un espacio pseudometrizable. Entonces f^* es continua.

Demostración: Para cada $y \in \overline{f(X)}$ existe V^y entorno compacto de y; por ser f q-propia $f^{-1}(V^y)$ es numerablemente compacto. #

En el caso de ser X compacto y T_2, Z pseudometrizable e Y y $f \in C(X,Y)$ arbitrarios, f^* es continua. Un resultado más fuerte se obtiene en proposición 3.14.

Hasta ahora se ha estudiado separadamente la continuidad de f^* y f_*. A continuación se trata de estudiar la continuidad en las dos variables.

El primer resultado es el siguiente:

Proposición 3.11.- Sean X e Y espacios topológicos regulares y paracompactos, $f_0 : X \to Y$ una función continua tal que existe una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de Y que verifica: a) $\overline{f_0(X)} \subset \bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{C}_i$. b) para todo $i \in I$, $\overset{\circ}{C}_i \cap \overline{f_0(X)} \neq \emptyset$ y $f_0^{-1}(C_i)$ es numerablemente compacto en X; y Z un espacio pseudometrizable.

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} c : C_W(X,Y) \times C_W(Y,Z) &\longrightarrow C_W(X,Z) \\ (f,g) &\longrightarrow g\circ f \end{aligned}$$

es continua en (f_0,g_0), cualquiera que sea $g_0 \in C(Y,Z)$.

Demostración: Sea d una pseudométrica en Z que describe su topología.

Sea $U = B_d(g_0\circ f_0,\varepsilon)$ un entorno básico de $g_0\circ f_0$, con $\varepsilon \in C(X,R^+)$. Como para cada $i \in I$, $f_0^{-1}(C_i)$ es numerablemente compacto, por el Lema 1.14, existe $\mu_i > 0$, tal que

$$\{(x,z) \in f_0^{-1}(C_i) \times Z \mid d(g_0f_0(x),z) < \mu_i\} \subset W \quad \text{con}$$

$$W = \{(x,z) \in X \times Z \mid d(g_0f_0(x),z) < \varepsilon(x)\} .$$

Para cada $y \in \overline{f_0(X)}$ sea $i(y) \in I$ tal que $y \in \overset{\circ}{C}_{i(y)}$, y sea $V^y \subset \overset{\circ}{C}_{i(y)}$ tal que $g_0(V^y) \subset B_d(g_0(y),1/4\ \mu_{i(y)})$.

Del recubrimiento abierto $\{V^y \mid y \in \overline{f_0(X)}\} \cup \{Y-\overline{f_0(X)}\}$

consideramos, por ser Y paracompacto, un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}' = \{V'_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Por la normalidad de Y, existen $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ contracción de $\mathcal{V}'$ y $\mathcal{W} = \{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ contracción de $\mathcal{V}$. Es claro que tanto $\mathcal{V}$ como $\mathcal{W}$ son recubrimientos abiertos localmente finitos de Y.

Elegimos para cada $\alpha \in A$, tal que $V_\alpha \cap \overline{f_o(X)} \neq \emptyset$, un $y(\alpha)$ de modo que

$$W_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \subset V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset V'_\alpha \subset V^{y(\alpha)} \subset \mathring{C}_{i(y(\alpha))}.$$

Tomamos como entorno de g_o

$$U_2 = \{g \in C(Y,Z) \mid d(g(y),g_o(y)) < 1/2\ \mu_{i(y(\alpha))},\ \forall y \in \overline{V}_\alpha,\ \alpha \in A \text{ tal que } V_\alpha \cap \overline{f_o(X)} \neq \emptyset\}.$$

Como $\{\overline{V}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es localmente finito, Y paracompacto y regular, y Z pseudometrizable, U_2 es un entorno abierto de g_o (Ver proposición 1.12).

Sea $K_\alpha = f_o^{-1}(\overline{W}_\alpha)$ que es cerrado para cada $\alpha \in A$.

La familia $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\} = \{f_o^{-1}(\overline{W}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ es localmente finita por serlo $\{\overline{W}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Como entorno de f_o tomamos:

$$U_1 = \{f \in C(X,Y) \mid f(K_\alpha) \subset V_\alpha,\ \forall \alpha \in A\}.$$

Como para todo $\alpha \in A$

$$f_o(K_\alpha) = f_o\, f_o^{-1}(\overline{W}_\alpha) \subset \overline{W}_\alpha \subset V_\alpha, \qquad f_o \in U_1.$$

Sean f y g elementos cualesquiera de U_1 y U_2 respectivamente.

Para cada $x \in X$, existe $\alpha \in A$ tal que

$f_o(x) \in \overline{W}_\alpha$; entonces $V_\alpha \cap \overline{f_o(X)} \neq \emptyset$ y $x \in K_\alpha$.

Se tiene:

a) $d(gf(x),g_0f(x)) < 1/2\ \mu_{i(y(\alpha))}$: puesto que $f \in U_1$ y $x \in K_\alpha$ se tiene que $f(x) \in V_\alpha$, lo que unido a que $V_\alpha \cap \overline{f_0(X)} \neq \emptyset$ y $g \in U_2$ trae como consecuencia la anterior desigualdad.

b) ya que $x \in K_\alpha$, $f_0(x)$ y $f(x) \in V_\alpha$ y $V_\alpha \cap \overline{f_0(X)} \neq \emptyset$; como además $V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset V'_\alpha \subset V^{y(\alpha)} \subset \mathring{C}_{i(y(\alpha))}$ y $g_0(V^{y(\alpha)}) \subset B_d(g_0(y(\alpha)),1/4\ \mu_{i(y(\alpha))})$, se verifica

$$d(g_0f(x),g_0f_0(x)) \leq d(g_0f(x),g_0(y(\alpha))) +$$

$$+ d(g_0(y(\alpha)),g_0f_0(x)) < 1/4\ \mu_{i(y(\alpha))} + 1/4\ \mu_{i(y(\alpha))} =$$

$$= 1/2\ \mu_{i(y(\alpha))}$$

Teniendo en cuenta a) y b), vemos que

$$d(gf(x),g_0f_0(x)) \leq d(gf(x),g_0f(x)) + d(g_0f(x),g_0f_0(x)) <$$

$$< 1/2\ \mu_{i(y(\alpha))} + 1/2\ \mu_{i(y(\alpha))} = \mu_{i(y(\alpha))}$$

Luego, como $f_0(x) \in \mathring{C}_{i(y(\alpha))} \subset C_{i(y(\alpha))}$, $(x,gf(x)) \in W$, y por tanto $d(g_0f_0(x),gf(x)) < \varepsilon(x)$.

Puesto que x es arbitrario $g\circ f \in U$. $_\blacksquare$

Comparando la anterior proposición con la proposición 3.8 se observa que se ha tenido que suponer que tanto X como Y son regulares y paracompactos para que la composición fuera continua en (f_0,g_0).

Consecuencia de la anterior proposición es el siguiente

Corolario 3.12.- Sean X un espacio paracompacto y regular, Y un espacio regular, localmente compacto y paracompacto,

$f_o : X \to Y$ una función q-propia y Z un espacio psedometrizable. Entonces, la función

$$c : C_W(X,Y) \times C_W(Y,Z) \longrightarrow C_W(X,Z)$$
$$(f,g) \longrightarrow g\circ f$$

es continua en (f_o,g_o), cualquiera que sea $g_o \in C(Y,Z)$.

<u>Demostración</u>: Para cada $y \in \overline{f_o(X)}$ tomamos U^y entorno relativamente compacto de y en Y. La familia $\{U^y \mid y \in \overline{f_o(X)}\}$ verifica:

a) $\overline{f_o(X)} \subset \bigcup \{\mathring{\overline{U}}^y \mid y \in \overline{f_o(X)}\}$.

b) puesto que f_o es q-propia y $\overline{U}^y$ es compacto, $f_o^{-1}(\overline{U^y})$ es numerablemente compacto.

Basta aplicar ahora la proposición 3.11.

<u>Corolario 3.13</u>.- En las hipótesis del corolario anterior, la aplicación

$$C_W^{q-p}(X,Y) \times C_W(Y,Z) \longrightarrow C_W(X,Z)$$
$$(f\ ,\ g) \longrightarrow g\circ f$$

es continua. ($C_W^{q-p}(X,Y)$ es el subespacio de $C_W(X,Y)$ de las funciones q-propias). #

Con las hipótesis que sobre los espacios X, Y y Z se hacen en el corolario 3.12, la condición de que f_o sea q-propia no es necesaria para la continuidad de c en (f_o,g_o).

<u>Ejemplo 3.12</u>.- Sean $X = Y = R$, $Z = P$ espacio topológico puntual, y $f_o = c_o : X \to Y$ que es continua y no es q-propia.

Sea $g_o : Y \to Z$ la función c_p.

Dado un abierto $U \subset X \times Z$ tal que $U \supset \Gamma_{g_o\circ f_o}$, entonces

$U = X \times P$.

Los abiertos $V_1 = X \times Y \supset \Gamma_{f_o}$ y $V_2 = Y \times P \supset \Gamma_{g_o}$, y si f y g son tales que $\Gamma_f \subset V_1$ y $\Gamma_g \subset V_2$, es claro que $g \circ f$ es la constante a P y $\Gamma_{g \circ f} \subset U$.

Por tanto la aplicación composición es continua en (f_o, g_o).

Obsérvese que f_o tampoco cumple las condiciones de la proposición 3.11.

En lo que se refiere a la continuidad de c se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.14.- Sean X un espacio numerablemente compacto, Y un espacio arbitrario y Z un espacio pseudometrizable. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} c : C_W(X,Y) \times C_W(Y,Z) & \longrightarrow & C_W(X,Z) & \text{es continua} \\ (f\ ,\ g) & \longrightarrow & g \circ f & \end{array}$$

Demostración: Sea d una pseudométrica en Z que describe su topología. Sean $f_o \in C(X,Y)$ y $g_o \in C(Y,Z)$. Un entorno básico de $g_o \circ f_o$ viene dado por un número real positivo ε : $B_\delta(g_o \circ f_o, \varepsilon)$ (ver proposición 1.15).

Del recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{B_d(z, \varepsilon/4) \mid z \in Z\}$ de Z obtenemos un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$, una contracción $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{V}$, y una contracción $\mathcal{G} = \{G_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{W}$.

Para cada $i \in I$ elegimos $z_i \in Z$, tal que

$$G_i \subset \overline{G}_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset B_d(z_i, \varepsilon/4).$$

La familia $\mathcal{K} = \{K_i \mid i \in I\} = \{g_o^{-1}(\overline{W}_i) \mid i \in I\}$ es localmente finita porque lo es $\{\overline{W}_i \mid i \in I\}$.

Consideremos el abierto en $C_W(Y,Z)$ dado por

$U_2 = <K,V>$. Puesto que

$g_o g_o^{-1}(\overline{W}_i) \subset \overline{W}_i \subset V_i$ para todo $i \in I$, la

función $g_o \in U_2$.

La familia $C = \{f_o^{-1} g_o^{-1}(\overline{G}_i) \mid i \in I\}$ es un recubrimiento localmente finito de cerrados de X porque $\{\overline{G}_i \mid i \in I\}$ lo es de Z.

Consideremos el abierto en $C_W(X,Y)$ dado por

$U_1 = <C,A>$, con $A = \{g_o^{-1}(W_i) \mid i \in I\}$.

Como $f_o\ f_o^{-1} g_o^{-1}(\overline{G}_i) \subset g_o^{-1}(\overline{G}_i) \subset g_o^{-1}(W_i)$ para todo $i \in I$, la función $f_o \in U_1$.

Sean $f \in U_1$ y $g \in U_2$. Para cada $x \in X$ existe $i \in I$ tal que $x \in f_o^{-1} g_o^{-1}(\overline{G}_i)$, y dado que $f \in U_1$ se tiene:

$$f(x) \in g_o^{-1}(W_i) \quad \text{y} \quad f_o(x) \in g_o^{-1}(W_i)$$

Por otra parte $g \in U_2$ y como $g_o^{-1}(W_i) \subset K_i$ para todo $i \in I$, tenemos:

$$g_o f(x) \in V_i, \quad g_o f_o(x) \in V_i \quad \text{y} \quad gf(x) \in V_i.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $V_i \subset B_d(z_i, \varepsilon/4)$, se verifica

$$d(gf(x), g_o f_o(x)) \leq d(gf(x), g_o f(x)) + d(g_o f(x), g_o f_o(x)) <$$
$$< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$$

Como X es numerablemente compacto

$$\sup \{d(gf(x), g_o f_o(x)) \mid x \in X\} < \varepsilon,$$

es decir $g \circ f \in B_\delta(g_o \circ f_o, \varepsilon)$, y c es continua en (f_o, g_o). #

(Comparar con Levine N.).

Consecuencia de las proposiciones 3.7 y 3.14 tenemos la siguiente

<u>Proposición 3.15</u>.- Sean X un espacio topológico T_1, Y un espacio completamente regular y Z un espacio pseudometrizable que contiene un arco.

Entonces $c : C_W(X,Y) \times C_W(Y,Z) \longrightarrow C_W(X,Z)$

$$(f\ ,\ g) \longrightarrow g \circ f$$

es continua si y solamente si X es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: Supongamos que c es continua. Veamos que X es numerablemente compacto.

Sea $f_o : X \to Y$ la función constante de valor $y_o \in Y$.
Entonces, la función

$$\begin{array}{cccccc} f_o^* : C_W(Y,Z) & \longrightarrow & C_W(X,Y) \times C_W(Y,Z) & \xrightarrow{c} & C_W(X,Z) \\ g & \longrightarrow & (f_o\ ,\ g) & \longrightarrow & g \circ f_o \end{array}$$

es continua, lo cual, por las explicaciones que siguen a la Proposición 3.7, implica que X es numerablemente compacto.

En la demostración de esta implicación sólo se ha utilizado que X es T_1, Y es completamente regular y Z contiene un arco.

La implicación inversa es inmediata por la proposición anterior. #

Dado un espacio topológico X podemos considerar $H_W(X,X)$ subespacio de $C_W(X,X)$ formado por los homeomorfismos de X y estudiar qué condiciones debe verificar X para que aquél sea un grupo topológico respecto a la composición de homeomorfismos. En esta dirección se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.16.- Sean X e Y espacios topológicos homeomorfos. Entonces, la función

$$\begin{aligned} \alpha : H_W(X,Y) &\longrightarrow H_W(Y,X) \\ f &\longrightarrow f^{-1} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración: Sea $f_o \in H(X,Y)$, $U \subset X \times Y$ abierto tal que $\Gamma_{f_o} \subset U$. Si denotamos por $U^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in U\}$, U^{-1} es abierto en $Y \times X$ y $f \in N(f_o,U) \cap H(X,Y)$ si y sólo si $f^{-1} \in N(f_o^{-1},U^{-1}) \cap H(Y,X)$. Como X e Y juegan papeles duales, la Proposición queda probada. #

Proposición 3.17.- Sea X un espacio topológico regular y paracompacto. Entonces, $H_W(X,X)$ es un grupo topológico.

(Puesto que para demostrar esta proposición lo único que es necesario probar es la continuidad de la composición se ve que, en el caso de los homeomorfismos de un espacio, ésta se consigue con condiciones bastante más débiles que en el caso general, como por ejemplo en la Proposición 3.10 y Proposición 3.14).

Demostración: Por la proposición anterior

$$\begin{aligned} \alpha : H_W(X,X) &\longrightarrow H_W(X,X) \\ f &\longrightarrow f^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Veamos que también la composición

$$\begin{aligned} \circ : H_W(X,X) \times H_W(X,X) &\longrightarrow H_W(X,X) \\ (f\ ,\ g) &\longrightarrow g\circ f \end{aligned}$$

es continua.

Sean $f_o, g_o \in H(X,X)$ y $V \subset X \times X$ abierto tal que $\Gamma_{g_o \circ f_o} \subset V$. Para todo $x \in X$ existen V^x y $V^{g_o f_o(x)}$ tales que

$$V^x \times V^{g_o f_o(x)} \subset V \quad y \quad g_o f_o(V^x) \subset V^{g_o f_o(x)}.$$

Como X es paracompacto existe $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ refinamiento abierto localmente finito de $\{V^x \mid x \in X\}$. Además por ser X normal existe $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ contracción de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$ contracción de $\mathcal{V}$.

Para cada $i \in I$, sea $x_i \in X$ tal que $U_i \subset V^{x_i}$. Entonces

$$W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i \subset V^{x_i} \quad \text{para todo} \quad i \in I.$$

Por el corolario 1.3, $V^{f_o} = \langle\{\overline{W}_i\}_{i\in I}, \{f_o(V_i)\}_{i\in I}\rangle_H$ es un entorno abierto de f_o en $H_{\mathcal{V}}(X,X)$ y

$V^{g_o} = \langle\{f_o(\overline{V}_i)\}_{i\in I}, \{g_o f_o(U_i)\}_{i\in I}\rangle_H$ es un entorno abierto de g_o en $H_{\mathcal{W}}(X,X)$.

Sean $f \in V^{f_o}$ y $g \in V^{g_o}$. Entonces, para cada $x \in X$ existe $i_o \in I$, tal que $x \in \overline{W}_{i_o}$; luego $f(x) \in f_o(V_{i_o}) \subset f_o(\overline{V}_{i_o})$ y $gf(x) \in g_o f_o(U_{i_o})$.

Por tanto $(x, gf(x)) \in \overline{W}_{i_o} \times g_o f_o(U_{i_o}) \subset V^{x_{i_o}} \times g_o f_o(V^{x_{i_o}}) \subset$

$$\subset V^{x_{i_o}} \times V^{g_o f_o(x_{i_o})} \subset V.$$

Es decir $\Gamma_{g\circ f} \subset V$. #

Si X no es regular puede no ser continua la composición.

Ejemplo 3.17.- Sea $X = (R,T)$ la recta real con la topología de Smirnof: $G \subset R$ pertenece a T si es de la forma $U - B$ con U un abierto usual y $B \subset A = \{1/n \mid n \in N\}$.

Este espacio es T_2, pero no es regular pues el punto 0 no posee una base de entornos cerrados. En $\mathbb{R} - \{0\}$ la topología coincide con la usual.

Sean $f_o = g_o = 1_X$ y U un abierto de $X \times X$ dado por

$$U = [(\mathbb{R}-A) \times (\mathbb{R}-A)] \cup [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U^n \times U^n)],$$

donde $U^n = (\frac{1}{n} - a_n, \frac{1}{n} + a_n)$, $a_n = 1/3(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

U contiene al grafo de $g_o \circ f_o = 1_X$.

Sean U_1, U_2 abiertos cualesquiera en $X \times X$ que contengan al grafo de 1_X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U_1 = U_2$. Llamémosle V.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 1/n) \in V$ luego existe un número real positivo b_n tal que $V^n \times V^n \subset V$ siendo $V^n = (1/n - b_n, 1/n + b_n)$. Como también $(0,0) \in V$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ de modo que $[(-1/n_o, 1/n_o) - A]^2 \subset V$.

Podemos suponer $b_n < a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $f : X \to X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq a \text{ ó } x \geq d \\ a + \frac{b-a}{c-a}(x-a) & a \leq x \leq c \\ b + \frac{d-b}{d-c}(x-c) & c \leq x \leq d \end{cases}$$

donde $d = 1/n_o$, $b = 1/n_o - 1/3\, b_{n_o} = d - 1/3\, b_{n_o}$

$$a = 1/n_o+1,\ c = 1/n_o+1 + 1/2\, b_{n_o+1} = a + 1/2\, b_{n_o+1}.$$

f es un homeomorfismo de X y, puesto que

$$f([a,d]) \subset [(a,d) \times (a,d)] \cup \{(a,a),(d,d)\} \subset V,$$

se tiene que $\Gamma_f \subset V$.

La función $g : X \to X$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x & x \notin (d-b_{n_0}, d+b_{n_0}) \\ 1/2\,(b_{n_0} - d + 3x) & d-b_{n_0} \leq x \leq d \\ 1/2\,(b_{n_0} + d + x) & d \leq x \leq d+b_{n_0} \end{cases}$$

también es un homeomorfismo y $\Gamma_g \subset V$.

Pero en el punto c

$$gf(c) = g(b) = g(1/n_0 - 1/3\, b_{n_0}) = 1/n_0$$

es decir $(c, gf(c)) = (1/n_0+1 + 1/2\, b_{n_0+1}, 1/n_0) \notin U$.

Por tanto $H_W(X,X)$ no es grupo topológico respecto de la composición.

Pero puede ser la composición en $H_W(X,X)$ continua aunque no sea X paracompacto.

<u>Ejemplo 3.18</u>.- Sean $X = ([0,\Omega), T_\leq)$, f_0, g_0 homeomorfismos de X y U un abierto en $X \times X$ que contiene al grafo de $g_0 \circ f_0 = h_0$.

Para cada α, $0 < \alpha < \Omega$ existen $\lambda_\alpha, \gamma_{h_0(\alpha)}$ tales que

$\lambda_\alpha < \alpha$, $\gamma_{h_0(\alpha)} < h_0(\alpha)$ y $(\lambda_\alpha, \alpha] \times (\gamma_{h_0(\alpha)}, h_0(\alpha)] \subset U$.

Por tanto, por el Pressing Down Lema, asociado a la función $\alpha \to \lambda_\alpha$, existe un conjunto estacionario $S \subset (0,\Omega)$ y existe $\lambda < \Omega$ tales que $\lambda_\alpha = \lambda$ para todo $\alpha \in S$.

Como h_0 es un homeomorfismo $h_0(S)$ es un conjunto estacionario de $[0,\Omega)$. En efecto: Sea C un cerrado no acotado de $[0,\Omega)$. $h_0^{-1}(C)$ es cerrado evidentemente y no es acotado, porque al ser C no acotado no es numerable, luego $h_0^{-1}(C)$ no es numerable y por tanto no es acotado. Entonces, $S \cap h_0^{-1}(C) \neq \emptyset$ lo que equivale a que $h_o(S) \cap C \neq \emptyset$, es decir $h_o(S)$ es estacionario. Ahora sobre $h_o(S)$ tengo definida la función ϕ: $\phi(h_o(\alpha)) = \gamma_{h_o(\alpha)}$ con $\gamma_{h_o(\alpha)} < h_o(\alpha)$ para $\alpha \in S$.

De nuevo por el Pressing Down Lema existe un conjunto estacionario $A \subset h_o(S)$ y existe $\gamma < \Omega$ tales que $\gamma_{h_o(\alpha)} = \gamma$ para todo $h_o(\alpha) \in A$.

Un razonamiento análogo al hecho con h_o prueba que $h_o^{-1}(A) = B \subset h_o^{-1}h_o(S) = S$ es estacionario. Tenemos pues que existen λ y γ menores que Ω que verifican que para todo $\alpha \in B$,

$$\lambda_\alpha = \lambda, \quad \gamma_{h_o(\alpha)} = \gamma \quad \text{y} \quad (\lambda,\alpha] \times (\gamma,h_o(\alpha)] \subset U.$$

Puesto que B es estacionario no es acotado, lo mismo que $h_o(B)$, por ser h_o homeomorfismo. Luego el conjunto $(\lambda,\Omega) \times (\gamma,\Omega) \subset U$: dados α_o y β_o con $\lambda < \alpha_o < \Omega$ y $\gamma < \beta_o < \Omega$ existe $\alpha \in B$, tal que $\alpha > \alpha_o$, $h_o(\alpha) > \beta_o$ y entonces $(\alpha_o,\beta_o) \in (\lambda,\alpha] \times (\gamma,h_o(\alpha)] \subset U$.

Como $[0,\gamma]$ es numerable y h_o es homeomorfismo existe a lo sumo un conjunto numerable de puntos de (λ,Ω) tales que su imagen por h_o sea menor ó igual que γ. Como todo conjunto numerable en $[0,\Omega)$ es acotado existe un $\lambda_o > \lambda$ tal que el grafo de $h_o|_{(\lambda_o,\Omega)}$ está contenido en $(\lambda_o,\Omega) \times (\gamma,\Omega)$.

Podemos suponer que $\lambda_o = \lambda$.

Sean β_o y α_o de modo que $g_o(\beta) > \gamma$ para todo $\beta > \beta_o$ y $f_o(\alpha) > \beta_o$ para todo $\alpha > \alpha_o$. Existen porque g_o y f_o son homeomorfismos y tanto $[0,\gamma]$ como $[0,\beta_o]$ son numerables. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\alpha_o \geq \lambda$.

La imagen de $[0,\alpha_o]$ por f_o estará contenida en $[0,\beta_1]$

para algún β_1, que se puede tomar mayor que β_o, y la imagen de $[0,\beta_1]$ por g_o estará contenida en $[0,\gamma_1]$.

Consideremos ahora

$$[0,\alpha_o] \xrightarrow{\bar{f}_o} [0,\beta_1] \xrightarrow{\bar{g}_o} [0,\gamma_1]$$

$\bar{f}_o$ es f_o como función del subespacio $[0,\alpha_o]$ en el subespacio $[0,\beta_1]$, y análogamente $\bar{g}_o$ es g_o de $[0,\beta_1]$ en $[0,\gamma_1]$. Como abierto U_1 que contenga al grafo de $\bar{g}_o \circ \bar{f}_o$ tomamos $U \cap ([0,\alpha_o] \times [0,\gamma_1])$.

Como los subespacios considerados son compactos y T_2 la topología compacta abierta y la de Whitney coinciden en $C([0,\alpha_o], [0,\beta_1])$ y en $C([0,\beta_1], [0,\gamma_1])$, y además la composición

$$\begin{array}{ccc} C_W([0,\alpha_o],[0,\beta_1]) \times C_W([0,\beta_1],[0,\gamma_1]) & \longrightarrow & C_W([0,\alpha_o],[0,\gamma_1]) \\ (k\ ,\ 1) & \longrightarrow & 1 \circ k \end{array}$$

es continua.

Por tanto existen abiertos $V_1 \subset [0,\alpha_o] \times [0,\beta_1]$ y $V_2 \subset [0,\beta_1] \times [0,\gamma_1]$ de modo que $\Gamma_{\bar{f}_o} \subset V_1$, $\Gamma_{\bar{g}_o} \subset V_2$ y si $\Gamma_k \subset V_1$ y $\Gamma_1 \subset V_2$ entonces $\Gamma_{1 \circ k} \subset U_1$.

Finalmente consideremos los abiertos en $X \times X$

$$W_1 = V_1 \cup [(\alpha_o,\Omega) \times (\beta_o,\Omega)]$$

$$W_2 = \{V_2 \cap [([0,\beta_o] \times [0,\gamma_1]) \cup ((\beta_o,\beta_1] \times (\gamma,\gamma_1])]\} \cup$$
$$\cup [(\beta_1,\Omega) \times (\gamma,\Omega)]$$

Puesto que $f_o(\alpha) > \beta_o$ si $\alpha > \alpha_o$, $\Gamma_{f_o} \subset W_1$, y como $g_o(\beta) > \gamma$ si $\beta > \beta_o$, $\Gamma_{g_o} \subset W_2$.

Sean f y g en $C(X,X)$ con $\Gamma_f \subset W_1$ y $\Gamma_g \subset W_2$.

Para todo $\alpha < \Omega$ tenemos:

$(\alpha,\ gf(\alpha)) \in U_1 \subset U$ si $\alpha \leq \alpha_0$.

$(\alpha,\ gf(\alpha)) \in (\alpha_0,\Omega) \times (\gamma,\Omega) \subset (\lambda,\Omega) \times (\gamma,\Omega)$ si $\alpha > \alpha_0$,

pues en este caso $f(\alpha) > \beta_0$ y $g(f(\alpha)) > \gamma$.

En resumen, $H_W(X,X)$ es un grupo topológico respecto la composición de homeomorfismos.

Sean X, X', Y e Y' espacios topológicos. Se trata de estudiar la continuidad de la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : C_W(X,Y) \times C_W(X',Y') &\longrightarrow C_W(X \times X', Y \times Y') \\ (f, g) &\longrightarrow f \times g \end{aligned}$$

Los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C_W(X,Y) \times C_W(X',Y') \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\xi"'] & C_W(X \times X', Y \times Y') \arrow[dl, shift right, "\pi"'] \\ C_W(X \times X',Y) \times C_W(X \times X',Y') \arrow[ur, shift right, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\xi(f,g) = (f \circ p_1, g \circ p_2) = (p_1^*(f), p_2^*(g)) = (p_1^* \times p_2^*)(f,g)$,

$\psi(h,k) = \langle h,k \rangle$ y $\pi(f) = (q_1 \circ f, q_2 \circ f)$.

($q_1 : Y \times Y' \to Y$ primera proyección y $q_2 : Y \times Y' \to Y'$ segunda proyección).

Por tanto, si Ψ es continua, ξ es continua porque π lo es.

Por otro lado, si Y e Y' son espacios pseudometrizables (respectivamente $X \times X'$ es paracompacto y regular) según la Proposición 3.3 (respect. la Proposición 3.4) ψ es un homeomorfismo y por lo tanto, Ψ es continua si y solamente si ξ es continua, lo cual es equivalente a que p_1^* y p_2^* lo sean.

Interesa por tanto analizar en qué condiciones p_1^* y p_2^* son continuas. De la Proposición 3.7 se obtienen los siguientes resultados:

A) Si X y X' son espacios T_1, X es completamente regular, e Y contiene un arco, el que $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X',Y)$

sea continua implica que X' es numerablemente compacto ($p^{-1}(x) = \{x\} \times X'$, que es cerrado en $X \times X'$ y $\{x\} \times X' \approx X'$).

B) Si X y X' son espacios T_1, X' es completamente regular, e Y' contiene un arco, el que $p_2^* : C_W(X',Y') \to C_W(X \times X',Y')$ sea continua implica que X es numerablemente compacto.

Supongamos pues que X' es numerablemente compacto y veamos condiciones sobre X e Y para que p_1^* sea continua.

Lema 3.19.- Sean X un espacio topológico I A.N., e Y un espacio numerablemente compacto. Sean $x \in X$ y U un abierto en $X \times Y$ que contiene a $\{x\} \times Y$. Entonces, existe V, entorno de x en X, de modo que $V \times Y \subset U$.

Demostración: Sea $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base del sistema de entornos de x, que sin pérdida de generalidad podemos suponer verifica $V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos no existe V, entorno de x, de modo que $V \times Y \subset U$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $V_n \times Y \not\subset U$ y por tanto existe $(x_n,y_n) \in V_n \times Y$ con $(x_n,y_n) \notin U$.

La sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de aglomeración $y \in Y$.

Sean V_{n_0}, V^y de modo que $V_{n_0} \times V^y \subset U$; existe un $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ tal que $(x_n,y_n) \in V_{n_0} \times V^y \subset U$, ya que la sucesión $\{(x_n,y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene a (x,y) como punto de aglomeración, lo que se contradice con que $(x_n,y_n) \notin U$. #

Es sabido que si Y es compacto el lema anterior es válido cualquiera que sea X.

<u>Proposición 3.20</u>.- Sean X e Y espacios topológicos que verifican el I A.N., y X' un espacio numerablemente compacto.

Entonces, la función

$$p_1^* : C_W(X,Y) \longrightarrow C_W(X \times X',Y) \text{ es continua.}$$

<u>Demostración</u>: Sea $f \in C(X,Y)$ y U un abierto de $X \times X' \times Y$, tal que $\Gamma_{f \circ p_1} \subset U$.

Por el lema anterior, dado $x \in X$ existen U^x y $U^{f(x)}$ tales que $U^x \times X' \times U^{f(x)} \subset U$.

Si tomamos $V = \bigcup\limits_{x \in X} (U^x \times U^{f(x)}) \subset X \times Y$, se tiene que V es abierto y contiene al grafo de f.

Sea $g \in C(X,Y)$ tal que $\Gamma_g \subset V$. Para todo $x \in X$, existe $x_1 \in X$, de modo que $(x,g(x)) \in U^{x_1} \times U^{f(x_1)}$.

Entonces, para todo $(x,x') \in X \times X'$, tenemos

$(x,x',g \circ p_1(x,x')) = (x,x',g(x)) \in U^{x_1} \times X' \times U^{f(x_1)} \subset U$, lo cual indica que $\Gamma_{g \circ p_1} \subset U$. Luego p_1^* es continua. #

De forma análoga se obtiene

<u>Proposición 3.21</u>.- Sean X' e Y' espacios topológicos que verifican el I A.N., y X un espacio numerablemente compacto. Entonces, la función $p_2^* : C_W(X',Y') \to C_W(X \times X',Y')$ es continua. #

La condición de que $X(X')$ sea I A.N. en la proposición 3.20 (3.21) no es necesaria, como lo prueba la siguiente proposición:

<u>Proposición 3.22</u>.-

a) Sean X, X' e Y espacios topológicos localmente compacto, numerablemente compacto y pseudometrizable, respectivamente.

Entonces, $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X',Y)$ es continua.

b) Sean X, X' e Y' espacios topológicos numerablemente compacto, localmente compacto y pseudometrizable, respectivamente. Entonces, $p_2^* : C_W(X,Y') \to C_W(X \times X',Y')$ es continua.

Demostración:

a) Basta observar que la función $p_1 : X \times X' \to X$, y los espacios X, X' e Y cumplen las hipótesis de la Proposición 3.8.

b) También la función $p_2 : X \times X' \to X'$, y los espacios X, X' e Y' cumplen las hipótesis de la Proposición 3.8. #

Aunque, como acabamos de ver, la condición de ser X I A.N. no es necesaria para la continuidad de p_1^*, para garantizar ésta en ausencia de aquella hemos impuesto condiciones "fuertes", como pseudometrizabilidad a Y y local compacidad a X. Si Y no es I A.N., aunque X sea I A.N., localmente compacto, y numerablemente compacto, puede p_1^* ($p_1 : X \times X \to X$) no ser continua como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.22.- Sean $X = ([0,\Omega), T\leq)$ e $Y = ([0,\Omega], T\leq)$. X es T_2, normal, I A.N., localmente compacto y numerablemente compacto. Y es T_2 y compacto, pero no I A.N.

Veamos que $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X,Y)$ no es continua en f, donde $f(\alpha) = \Omega$, para todo $\alpha < \Omega$.

En efecto:

$$f \circ p_1 : X \times X \longrightarrow Y$$
$$(\alpha,\beta) \longrightarrow \Omega$$

Se considera en $X \times X \times Y$ el abierto

$$U = \bigcup_{\lambda<\Omega} (X \times [0,\lambda] \times (\lambda,\Omega])$$

que claramente contiene al grafo de $f \circ p_1$.

Sea $V \subset X \times Y$ un abierto arbitrario tal que $\Gamma_f \subset V$. Entonces, existirá un $\lambda < \Omega$, tal que $\{0\} \times (\lambda,\Omega] \subset V$, y esto porque $(0,\Omega) \in \Gamma_f$ y $\{0\}$ es abierto en X.

La función $g : X \to Y$ dada por $g(0) = \lambda+1$ y $g(\alpha) = \Omega$ para $\alpha \neq 0$, es continua (por ser $\{0\}$ abierto y cerrado en X), y su grafo está contenido en V.

Si $\alpha \geq \lambda+1$, $gp_1(0,\alpha) = g(0) = \lambda+1$ y el punto $(0,\alpha,gp_1(0,\alpha)) = (0,\alpha,\lambda+1) \in \Gamma_{g\circ p_1}$.

En cambio $(0,\alpha,\lambda+1) \notin U$ pues $(0,\alpha,\lambda+1) \notin X \times [0,\beta] \times (\beta,\Omega]$ tanto si $\beta \leq \lambda$, ya que entonces $\alpha \notin [0,\beta]$ como si $\beta > \lambda$, pues entonces $\lambda+1 \notin (\beta,\Omega]$.

Nota: En el ejemplo anterior el espacio Y no contiene ningún arco. Si en lugar de $[0,\Omega]$ tomamos como Y el espacio $L^* \times [0,1]$, donde L^* es la recta "larga" cerrada con Ω, se puede repetir la misma construcción en el punto $(\Omega,0)$ en lugar del punto Ω. Este espacio tiene las "mismas" propiedades de $[0,\Omega]$ pero además ya contiene arcos.

Por la Proposición 3.22, L^* no es pseudometrizable, lo cual ya se sabe pues Ω no tiene una base numerable del sistema de entornos en L^* (Ver Steen and Seebach [ ]).

Proposición 3.23.-

I - Sean X un espacio topológico T_{3a} y I A.N., X' un espacio topológico T_1 e Y un espacio I A.N. que contiene un arco. Entonces, $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X',Y)$ es continua si y sólo si X' es numerablemente compacto.

II - Sean X un espacio topológico T_1, X' un espacio topológico T_{3a} y I A.N. e Y' un espacio I A.N. que contiene un arco. Entonces, $p_2^* : C_W(X',Y') \to C_W(X \times X',Y')$ es continua si y sólo si X es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de A) y B) y de las proposiciones 3.20 y 3.21. #

Si en lugar de las proposiciones 3.20 y 3.21 utilizamos la proposición 3.22 se tiene

<u>Proposición 3.24</u>.-

I - Sean X un espacio T_{3a} y localmente compacto, X' un espacio T_1, e Y un espacio pseudometrizable que contiene un arco. Entonces, $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X',Y)$ es continua si y sólo si X' es numerablemente compacto.

II - Sean X un espacio T_1, X' un espacio T_{3a} y localmente compacto e Y' un espacio pseudometrizable que contiene un arco. Entonces, $p_2^* : C_W(X',Y') \to C_W(X \times X',Y')$ es continua si y sólo si X es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de A), B) y proposición 3.22. #

<u>Proposición 3.25</u>.- Sean X un espacio topológico T_2 y paracompacto (ó T_{3a} y Lindelöf) e Y un espacio topológico que contiene un arco. Entonces, $p_1^* : C_W(X,Y) \to C_W(X \times X,Y)$ es continua si y sólo si X es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: La parte "sólo si" es consecuencia de A).

Recíprocamente, si X es numerablemente compacto, como es paracompacto, es compacto. En este caso $T_W = T_C$ y p_1^* es continua. #

Volviendo a la función Ψ, en cuya continuidad se estaba interesado, se tiene, como resumen de lo anterior, las proposiciones siguientes:

<u>Proposición 3.26</u>.- Sean X un espacio T_{3a} y I A.N., Y e Y' espacios pseudometrizables que contienen sendos arcos.

Entonces $\Psi : C_W(X,Y) \times C_W(X,Y') \to C_W(X \times X, Y \times Y')$ es continua si y sólo si X es numerablemente compacto. #

<u>Proposición 3.27</u>.- Sean X, X' espacios topológicos T_{3a} y I A.N. e Y, Y' espacios pseudometrizables que contienen sendos arcos. Entonces

$$\Psi : C_W(X,Y) \times C_W(X',Y') \longrightarrow C_W(X \times X', Y \times Y')$$
$$(f\ ,\ g) \longrightarrow (f \times g)$$

es continua si y sólo si X y X' son numerablemente compactos. #

CAPITULO 4. LEY EXPONENCIAL

En el capítulo 4 estudiaremos la ley exponencial, es decir, las condiciones que aseguran que el espacio $C_W(X \times Y, Z)$ es homeomorfo, mediante la función exponencial, a $C_W(X, C_W(Y,Z))$.

En el caso de variedades metrizables, con Y y Z conteniendo un arco, el homeomorfismo es equivalente a que Y sea compacta.

Estrechamente relacionada con la función exponencial, y de interés en sí misma, se encuentra la función evaluación. Así como con la topología compacta abierta sólo algunas condiciones fuertes, como por ejemplo la local compacidad de X, permiten asegurar que es continua, en el caso de la de Whitney "casi" siempre lo es.

<u>Proposición 4.1</u>.- Sean X un espacio topológico regular e Y un espacio topológico. Entonces, la función

$$\begin{aligned} \omega : C_W(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

es continua.

<u>Demostración</u>: Sean $x \in X$, $f \in C(X,Y)$ y $V^{f(x)}$ entorno de $f(x)$. Puesto que f es continua existe V^x, tal que $f(V^x) \subset V^{f(x)}$, y, como X es regular, existe W^x de modo que $\overline{W}^x \subset V^x$.

El conjunto

$$U = (V^x \times V^{f(x)}) \cup ((X - \overline{W}^x) \times Y) \subset X \times Y$$

es abierto y contiene al grafo de f.

Si consideramos el entorno $N(f,U) \times W^x$ de (f,x) se tiene que, para todo $g \in N(f,U)$ y todo $z \in W^x$, $\omega(g,z) = g(z) \in V^{f(x)}$, lo que prueba la continuidad de ω en (f,x). #

Observación: Si $C(X,Y)$ se reduce a las constantes la evaluación es continua, pues dados (f,x) y $V^{f(x)}$, se verifica que $\omega(N(f,U) \times X) = V^{f(x)}$, donde $U = X \times V^{f(x)}$.

Por consiguiente no es necesario que X sea regular para que ω sea continua.

Sin embargo, si X no es regular puede ω no ser continua, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.- Sea $X = Y = (R,T)$. La topología $T = \{U-B \mid U \in T_u,\ B \subset A\}$, con $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. X no es regular, pues el punto 0 no posee una base de entornos cerrados.

Sean $f = 1_X$, $x = 0$ y $V^{f(x)} = R-A$.

Si V^0 es un entorno arbitrario de 0, y $U \subset X \times X$ es un abierto cualquiera que contenga a Γ_f, existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $(-1/n_o, 1/n_o) - A \subset V^0$, y para $n > n_o$, como $(1/n, 1/n) \in \Gamma_f$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon) \times (\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon) \subset U$ (Podemos tomar $\varepsilon < 1/n - 1/n+1$). Sea la función $g : X \to X$ definida por $g(x) = x$ si $x \notin (\frac{1}{n} - \varepsilon, 1/n)$, $g(x) = 1/n$ si $x \in (\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2}, 1/n)$ y $g(x) = 2x+\varepsilon - 1/n$, es decir lineal, en $[\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} - \varepsilon/2]$.

Es inmediato que g es continua y $\Gamma_g \subset U$ y, puesto que el punto $\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2} \in V^0$ pero $g(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2}) = 1/n \notin R-A$, queda probado que ω no es continua en $(f,0)$.

Dados X, Y, Z espacios topológicos, a cada aplicación continua $\alpha : X \times Y \to Z$ se le asocia una aplicación $\hat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ del siguiente modo: $\hat{\alpha}(x) = \alpha(x,.)$. Recíprocamente, dada una aplicación $\hat{\alpha} : X \to C(Y,Z)$ se le asocia la aplicación $\alpha : X \times Y \to Z$, dada por $\alpha(x,.) = \hat{\alpha}(x)$, para todo $x \in X$.

Esta correspondencia $\alpha \to \hat{\alpha}$ es la que se conoce como función exponencial.

Se trata de estudiar en qué condiciones α continua implica que $\hat{\alpha} : X \to C_W(Y,Z)$ lo es y reciprocamente.

<u>Proposición 4.3</u>.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, tal que X verifica el I A.N. e Y es numerablemente compacto.

Entonces, $\alpha : X \times Y \to Z$ continua implica

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : X &\longrightarrow C_W(Y,Z) \qquad \text{continua.} \\ x &\longrightarrow \alpha(x,.) \end{aligned}$$

<u>Demostración</u>: Sean $x_0 \in X$ y $U \subset Y \times Z$ abierto tal que $\Gamma_{\hat{\alpha}(x_0)} \subset U$. Como $\hat{\alpha}(x_0)$ es continua, para todo $y \in Y$ existen V^y, $V^{\alpha(x_0,y)}$ tales que $\hat{\alpha}(x_0)(V^y) \subset V^{\alpha(x_0,y)}$ y $V^y \times V^{\alpha(x_0,y)} \subset U$.

Por otro lado α es continua, luego para todo $y \in Y$ existen $W^{x_0}_{n(y)}$, W^y de modo que $W^y \subset V^y$, y $\alpha(W^{x_0}_{n(y)} \times W^y) \subset V^{\alpha(x_0,y)}$. ($\{W^{x_0}_n\}$ es una base de entornos del punto x_0 que verifica $W^{x_0}_{n+1} \subset W^{x_0}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$).

Supongamos ahora que $\hat{\alpha}$ no es continua en x_0. Entonces, existe un abierto $U \subset Y \times Z$ tal que $\Gamma_{\hat{\alpha}(x_0)} \subset U$ y $\hat{\alpha}(W^{x_0}_n) \not\subset N(\hat{\alpha}(x_0),U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(Este abierto U está en las condiciones anteriores con respecto a $\hat{\alpha}(x_0)$).

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in W^{x_0}_n$ e $y_n \in Y$, tal que $(y_n, \alpha(x_n,y_n)) \notin U$.

Por hipótesis Y es numerablemente compacto, luego existe y_0 punto de aglomeración de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Elijamos un índice n_0 de modo que $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in W^{x_0}_{n(y_0)} \times W^{y_0}$, que existe pues $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 e $y_0 \in \mathrm{Agl}\,\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Así que por un lado tenemos $(y_{n_0}, \alpha(x_{n_0}, y_{n_0})) \notin U$, y por otro $\alpha(x_{n_0}, y_{n_0}) \in V^{\alpha(x_0,y_0)}$, pues $y_{n_0} \in W^{y_0} \subset V^{y_0}$, y además $V^{y_0} \times V^{\alpha(x_0,y_0)} \subset U$, lo que implica $(y_{n_0}, \alpha(x_{n_0}, y_{n_0})) \in U$ que es absurdo. Luego $\hat{\alpha}$ es continua. #

<u>Observación</u>: Si Y es compacto y T_2, la proposición anterior es válida cualquiera que sea X, pues entonces $C_W(Y,Z) = C_c(Y,Z)$ (topología compacta-abierta).

Si en la proposición anterior falla alguna de las hipótesis la conclusión no siempre es cierta. Veamos unos ejemplos.

<u>Ejemplo 4.4</u>.- Sea Y un espacio T_1, no numerablemente compacto. Tomamos $X = Z = R$ y la función $\alpha : X \times Y \to Z$ dada por $\alpha(x,y) = x$, para todo (x,y). α es continua y sin embargo $\hat{\alpha}$ no es continua en ningún punto.

En efecto: como Y no es numerablemente compacto y es T_1, posee un subconjunto $A = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ cerrado, discreto e infinito. Dado $t \in X = R$ el conjunto

$U = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{y_n\} \times (t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}))] \cup [(Y-A) \times Z]$ es abierto en $Y \times Z$, además, puesto que para todo $y \in Y$, $(y, \hat{\alpha}(t)(y)) = (y, \alpha(t,y)) = (y,t) \in U$, contiene a $\Gamma_{\hat{\alpha}(t)}$. Dado

$\varepsilon > 0$, en el entorno $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ de t elegimos un t_o cualquiera distinto de t, y un número natural n, tal que $1/n < |t-t_o|$. Entonces $(y_n, \hat{\alpha}(t_o)(y_n)) = (y_n, t_o) \notin U$ y por tanto $\Gamma_{\hat{\alpha}(t_o)} \not\subset U$ y $\hat{\alpha}$ no es continua en ningún punto al ser t arbitrario.

Por la demostración de este ejemplo se ve que en vez de $X = Z = R$ podríamos tomar espacios que contuvieran arcos. Más concretamente:

<u>Proposición 4.5</u>.- Sean X un espacio topológico T_4 que contiene un arco, Y un espacio T_1, y Z un espacio topológico que contiene un arco. Si para toda $\alpha : X \times Y \to Z$ continua, $\hat{\alpha} : X \to C_W(Y,Z)$ es continua, entonces Y es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: Sean $\delta : I \to X$, $\beta : I \to Z$ arcos en X y Z respectivamente, con $\delta(0) = x_o$, $\beta(0) = z_o$, $\delta(I) = A$ y $\beta(I) = B$.

Como X es T_4 existe una extensión continua $f : X \to I$ de $\delta^{-1} : A \to I$.

La función $\begin{array}{rcl} \alpha : X \times Y & \longrightarrow & Z \\ (x,y) & \longrightarrow & \beta f(x) \end{array}$ es continua. Veamos que

$\begin{array}{rcl} \hat{\alpha} : X & \longrightarrow & C_W(Y,Z) \\ x & \longrightarrow & \alpha(x,.) \end{array}$ no es continua en x_o si Y no es numerablemente compacto.

Puesto que Y no es numerablemente compacto y es T_1, posee un subespacio infinito $C = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ cerrado discreto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos un abierto V_n en Z tal que $V_n \cap B = \beta([0,1/n))$.

El subconjunto $U = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{y_n\} \times V_n)] \cup [(Y-C) \times Z]$ de $Y \times Z$ es abierto, y contiene al grafo de $\hat{\alpha}(x_o)$, ya que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(y_n, \hat{\alpha}(x_o)(y_n)) = (y_n, \alpha(x_o, y_n)) = (y_n, \beta f(x_o)) =$ $= (y_n, \beta(0)) = (y_n, z_o)$.

Sea ahora un entorno arbitrario V^{x_o} de x_o; existirá un $n \in \mathbb{N}$, tal que $\delta(1/n) \in V^{x_o}$. Entonces,

$\hat{\alpha}(\delta(1/n))(y_n) = \alpha(\delta(1/n), y_n) = \beta f(\delta(1/n)) = \beta(1/n)$, con lo que $(y_n, \hat{\alpha}(\delta(1/n))(y_n)) \notin U$. #

Ejemplo 4.6.- Sean $X = Z = ([0,\Omega], T_{\leq})$ e $Y = ([0,\Omega), T_{\leq})$. X no es I A.N. pero Y si es numerablemente compacto.

La función $\alpha : X \times Y \to Z$, dada por $\alpha(x,y) = x$ para todo (x,y), es continua.

La función $\hat{\alpha} : X \to C_W(Y,Z)$ asociada a α, dada por $\hat{\alpha}(x)(y) = \alpha(x,y)$ para todo x e y, no es continua en el punto Ω. En efecto: Sea $U = \bigcup_{\lambda<\Omega} ([0,\lambda] \times (\lambda,\Omega]) \subset Y \times Z$.

U es abierto y para todo $\gamma \in Y$, $(\gamma, \hat{\alpha}(\Omega)(\gamma)) =$ $= (\gamma,\Omega) \in [0,\gamma] \times (\gamma,\Omega] \subset U$, luego $\Gamma_{\hat{\alpha}(\Omega)} \subset U$.

Dado un entorno básico de Ω, $(\lambda,\Omega]$ con $\lambda < \Omega$, tomemos $\beta \in (\lambda,\Omega)$. Entonces,

$(\beta, \hat{\alpha}(\beta)(\beta)) = (\beta, \alpha(\beta,\beta)) = (\beta,\beta) \notin U$ y por tanto $\Gamma_{\hat{\alpha}(\beta)} \not\subset U$, y así $\hat{\alpha}$ no es continua en Ω.

Tanto X como Y y Z de este ejemplo son desconexos. Pero se puede evitar tomando $X = Z = L^*$ la recta "larga" ampliada con Ω y por $Y = L$, la recta "larga" (ver Steen-Seebach, pág. 71).

El razonamiento es análogo para probar que dada α, como antes, $\hat{\alpha}$ no es continua en Ω.

El paso de $\hat{\alpha}$ a α ofrece pocas dificultades pues, como vimos en proposición 4.1, la evaluación es "casi" siempre continua.

<u>Proposición 4.7</u>.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, Y regular. Entonces $\hat{\alpha} : X \to C_W(Y,Z)$ continua implica que

$$\begin{aligned} \alpha : X \times Y &\longrightarrow Z \\ (x,y) &\longrightarrow \hat{\alpha}(x)(y) \end{aligned} \quad \text{es continua.}$$

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de la Proposición 4.1, ya que $\alpha = \omega\circ(\hat{\alpha} \times 1_Y)$. #

Como consecuencia se obtiene el siguiente corolario.

<u>Corolario 4.8</u>.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, tal que X verifica I A.N., e Y es regular y numerablemente compacto. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda : C(X \times Y, Z) &\longrightarrow C(X, C_W(Y,Z)) \\ \alpha &\longrightarrow \hat{\alpha} \end{aligned}$$

es biyectiva.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de las proposiciones 4.3 y 4.7. #

Es ya sabido que si $f : X \to X'$ es una identificación e Y es localmente compacto, entonces $f \times 1_Y : X \times Y \to X' \times Y$ es una identificación. La demostración utiliza el hecho de que la función

$$\begin{aligned} \Lambda : C(X \times Y,Z) &\longrightarrow C(X,C_c(Y,Z)) \\ \alpha &\longrightarrow \hat{\alpha} \end{aligned}$$

es una biyección si Y es localmente compacto. Se puede pues, utilizando el corolario anterior, probar la siguiente proposición:

<u>Proposición 4.9</u>.- Sean X, X', Y espacios topológicos, X verifica el I A.N. e Y es regular y numerablemente compacto. Entonces, si $f : X \to X'$ es una identificación, $f \times 1_Y : X \times Y \to X' \times Y$ también es identificación.

<u>Demostración</u>: Sea X'' un espacio topológico y $g : X' \times Y \to X''$ una aplicación tal que $g \circ (f \times 1_Y) = h : X \times Y \to X''$ es continua. Por lo anterior $\hat{h} : X \to C_W(Y, X'')$ es continua. Ahora si $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene $\hat{h}(x_1)(y) = h(x_1, y) = g(f(x_1), y) =$ $= g(f(x_2), y) = h(x_2, y) = \hat{h}(x_2)(y)$, es decir, $\hat{h}$ es compatible con f, luego existe una función continua $\bar{h} : X' \to C_W(Y, X'')$ de modo que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d, "f"'] & C_W(Y, X'') \\ X' \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Luego, la función $\tilde{\bar{h}} : X' \times Y \to X''$, tal que $\Lambda^{-1}(\bar{h}) = \tilde{\bar{h}}$ es continua. Pero $\tilde{\bar{h}}(x', y) = \bar{h}(x')(y) = h(x, y)$ con $f(x) = x'$ y $\tilde{\bar{h}}(x', y) = g(f(x), y) = g(x', y)$, es decir $\tilde{\bar{h}} = g$ es continua.

Así $f \times 1_Y$ es una identificación. #

<u>Corolario 4.10</u>.- Si $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ son identificaciones, con X e Y que verifican el I A.N., y el rango de una de las identificaciones y el dominio de la otra numerablemente compactos y regulares entonces $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ es una identificación.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de la Proposición 4.9, pues

$$f \times g = (f \times 1_{Y'}) \circ (1_X \times g) = (1_{X'} \times g) \circ (f \times 1_Y)$$

y entonces ó bien $f \times 1_Y$ e $1_{X'} \times g$ son identificaciones ó lo son $f \times 1_{Y'}$ y $1_X \times g$; por último la composición de identificaciones es siempre una identificación. #

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 4.3 y 4.5 se obtiene la

<u>Proposición 4.11</u>.- Sean X un espacio que es T_4, verifica I A.N. y contiene un arco, Y un espacio T_3, y Z un espacio con un arco.

Entonces, $\Lambda : C(X \times Y, Z) \longrightarrow C(X, C_W(Y,Z))$ es biyectiva si y solamente si Y es numerablemente compacto.

<u>Demostración</u>: Inmediata de las Proposiciones 4.3, 4.5 y 4.7. #

<u>Corolario 4.12</u>.- Sean X, Y, Z variedades paracompactas y T_2, tales que existen $x_0 \in X$ y $z_0 \in Z$, tal que $\dim_{x_0} X \geq 1$ y $\dim_{z_0} Z \geq 1$. Entonces $\Lambda : C(X \times Y, Z) \to C(X, C_W(Y,Z)$ es biyectiva si y sólo si Y es compacta. #

<u>LEY EXPONENCIAL</u>

En lo que sigue se trata de buscar condiciones que aseguren que $C_W(X \times Y, Z) \approx C_W(X, C_W(Y,Z)$ (mediante Λ) que es lo que se conoce como Ley exponencial.

En el caso de que X sea discreto tenemos:

<u>Lema 4.13</u>.- Si X es un espacio topológico discreto, para cualquier espacio topológico Y se verifica que

$$C_W(X,Y) = \square_X\, Y$$

$(\square_X\, Y = Y^X$ con la topología de las cajas).

<u>Demostración</u>: Como X es discreto todas las funciones de X en Y son continuas, es decir $C(X,Y) = Y^X$.

Sea $f \in C(X,Y)$ y $U \subset X \times Y$ abierto con $\Gamma_f \subset U$. Para cada $x \in X$ existe $V^{f(x)}$ tal que $\{x\} \times V^{f(x)} \subset U$.

Si $V = \bigcup_{x\in X} (\{x\} \times V^{f(x)})$, se tiene $N(f,V) \subset N(f,U)$ y $N(f,V) = \prod_{x\in X} V^{f(x)}$. Como $\mathcal{B} = \{ \prod_{x\in X} U_x \mid U_x$ abierto en Y para todo $x \in X\}$ es una base de la topología de las cajas, la igualdad de las topologías del grafo y de las cajas queda probada. #

Si X fuera una suma topológica de espacios se obtiene la relación siguiente

<u>Lema 4.14</u>.- Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Para cualquier espacio topológico Y se tiene que

$$\begin{aligned} \phi : C_W(\textstyle\sum_{i\in I} X_i, Y) &\longrightarrow \square_{i\in I} C_W(X_i,Y) \\ f &\longrightarrow (f \circ j_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

<u>Demostración</u>: Es evidente que ϕ es una aplicación biyectiva.

a) ϕ es continua

Sea $f \in C(\sum_{i\in I} X_i, Y)$, y para cada $i \in I$ sea U_i abierto en $X_i \times Y$ tal que $\Gamma_{f\circ j_i} \subset U_i$.

Entonces $\sum_{i\in I} U_i$ es un abierto en $(\sum_{i\in I} X_i) \times Y \equiv$

$\equiv \sum_{i\in I} (X_i \times Y)$. Si $g \in C(\sum_{i\in I} X_i, Y)$ es tal que $\Gamma_g \subset \sum_{i\in I} U_i$, para todo $i \in I$ y para todo $x_i \in X_i$ se tiene

$(x_i,\ g\circ j_i(x_i)) = (x_i, g(x_i,i)) \equiv ((x_i,i), g(x_i,i)) \subset U_i$.

Luego, para todo $i \in I$, $\Gamma_{g\circ j_i} \subset U_i$ y ϕ es continua en f.

b) ϕ^{-1} es continua.

Sea $f = \langle f_i\rangle_{i\in I} = \phi^{-1}((f_i)_{i\in I})$ y W un abierto en $(\sum_{i\in I} X_i) \times Y \equiv \sum_{i\in I} (X_i \times Y)$ tal que $\Gamma_f \subset W$.

W será de la forma $\sum_{i\in I} W_i$, con W_i abiertos en $X_i \times Y$.

Se tiene que $\Gamma_{f_i} \subset W_i$ para cada $i \in I$. Entonces, para toda $(g_i)_{i\in I}$ con $g_i \in C(X_i,Y)$ para todo $i \in I$, tal que $\Gamma_{g_i} \subset W_i$ para todo $i \in I$, es claro que $\Gamma_{\langle g_i\rangle_{i\in I}} \subset W$.

Así ϕ^{-1} es continua en $(f_i)_{i\in I}$. #

La siguiente proposición prueba que si X es discreto la ley exponencial es válida.

<u>Proposición 4.15</u>.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, con X discreto. Entonces

$$\Lambda : C_W(X \times Y, Z) \longrightarrow C_W(X, C_W(Y,Z))$$
$$\alpha \longmapsto \hat{\alpha}$$

es un homeomorfismo.

<u>Demostración</u>: Basta observar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_W(X,C_W(Y,Z)) \arrow[r, "\Lambda^{-1}"] \arrow[d, equal] & C_W(X \times Y,Z) = C_W(\sum_X Y,Z) \arrow[d, "\phi"] \\ \square_X C_W(Y,Z) \arrow[r, "1"] & \square_X C_W(Y,Z) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y aplicar los lemas anteriores.

Para todo $\hat{\beta} \in C(X, C_W(Y,Z))$, $\phi\Lambda^{-1}(\hat{\beta}) = \phi(\beta) = (\beta\circ j_x)_{x\in X}$, donde

$$\beta\circ j_x(y) = \beta(x,y) = \hat{\beta}(x)(y) \quad \text{para todo } y \in Y \text{ y todo } x \in X,$$

es decir $\beta\circ j_x = \hat{\beta}(x)$, para todo $x \in X$, y por tanto $(\beta\circ j_x)_{x\in X} = \hat{\beta}$. #

Si X no es discreto la proposición anterior no es válida, ya que, entre otras razones, Λ no es siempre biyectiva (Proposición 4.11).

Lema 4.16.- Sean X un espacio topológico que verifica el I A.N., Y un espacio numerablemente compacto, Z un espacio pseudometrizable. Sea $f : X\times Y \to Z$ una función continua y $U \subset X\times Y\times Z$ un abierto tal que $\Gamma_f \subset U$. Entonces, si d es una pseudométrica en Z que describe su topología, para cada $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ y existe V^x, tal que

$$\{(t,y,z) \in V^x\times Y\times Z \mid d(f(t,y),z) < 1/n_x\} \subset U.$$

Demostración: Para cada $x \in X$

sea $V(x) = \{V_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base del sistema de entornos de x, tal que $V_{n+1}^x \subset V_n^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que la conclusión del lema no es cierta. Entonces existe $x \in X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_n^x$, existe $y_n \in Y$ y existe $z_n \in B_d(f(x_n,y_n),1/n)$, tales que $(x_n,y_n,z_n) \notin U$.

La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, y la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por ser Y numerablemente compacto, posee un punto de aglomeración, y. Entonces, $(x,y) \in \mathrm{Agl}\ \{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sean $V^x_{n_o}$, V^y, $B_d(f(x,y),1/n_1)$ de modo que

$$V^x_{n_o} \times V^y \times B_d(f(x,y),1/n_1) \subset U \quad y \quad f(V^x_{n_o} \times V^y) \subset B_d(f(x,y),1/2n_1).$$

Los elementos de la sucesión $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenecen a $V^x_{n_o} \times V^y$ constituyen una subsucesión que tiene a (x,y) como punto de aglomeración. Así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en $V^x_{n_o} \times V^y$.

Si $m = \max\{n_o,2n_1\}$ tenemos

$$d(z_m,f(x,y)) \leq d(z_m,f(x_m,y_m)) + d(f(x_m,y_m),f(x,y)) <$$
$$< 1/m + 1/2n_1 \leq 1/n_1$$

lo que indica que $z_m \in B_d(f(x,y),1/n_1)$ y por tanto

$$(x_m,y_m,z_m) \in V^x_{n_o} \times V^y \times B_d(f(x,y),1/n_1) \subset U,$$

lo que contradice al hecho de que $(x_n,y_n,z_n) \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. #

<u>Proposición 4.17</u>.- Sean X un espacio paracompacto regular y I A.N., Y un espacio numerablemente compacto y regular, y Z un espacio pseudometrizable.

Entonces, $\Lambda : C_W(X \times Y,Z) \longrightarrow C_W(X,C_W(Y,Z))$

$$\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}$$

es un homeomorfismo.

<u>Demostración</u>: Por el Corolario 4.8, Λ es biyectiva.

a) Λ es continua.

Como Y es numerablemente compacto y Z es pseudometrizable (d una pseudométrica que describa su topología), por la proposición 1.15,

$\delta(f,g) = \sup\{d(f(y),g(y)) \mid y \in Y\}$, para $f,g \in C(Y,Z)$,

es una pseudométrica que describe la topología de $C_W(Y,Z)$.

Así, como X es paracompacto y regular un entorno básico de $\hat{\alpha}$ viene dado por $B_\delta(\hat{\alpha},\varepsilon)$, donde $\varepsilon \in C(X,R^+)$.

Sea $\eta : X \times Y \to R^+$ la función continua dada por $\eta(x,y) = \frac{\varepsilon}{2}(x)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Consideremos el entorno de α dado por η, es decir $B_d(\alpha,\eta)$. Si $g \in B_d(\alpha,\eta)$ se verifica: para todo $x \in X$

$$\delta(\hat{g}(x),\hat{\alpha}(x)) = \sup\{d(\hat{g}(x)(y),\hat{\alpha}(x)(y)) \mid y \in Y\} =$$
$$= \sup\{d(g(x,y),\alpha(x,y)) \mid y \in Y\} \leq \frac{\varepsilon}{2}(x) < \varepsilon(x).$$

Por tanto $\hat{g} \in B_\delta(\hat{\alpha},\varepsilon)$ y Λ es continua en α.

b) Λ^{-1} es continua.

Sea $\hat{\alpha} : X \to C_W(Y,Z)$ y $\Lambda^{-1}(\hat{\alpha}) = \alpha$.

Dado U un abierto de $X \times Y \times Z$, tal que $\Gamma_\alpha \subset U$, por el lema 4.16, para cada $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ y existe V^x tales que

$$\{(t,y,z) \in V^x \times Y \times Z \mid d(\alpha(t,y),z) < 1/n_x\} \subset U.$$

Como X es paracompacto y regular, existe $C = \{C_i \mid i \in I\}$ refinamiento cerrado, localmente finito del recubrimiento abierto $\{V^x \mid x \in X\}$ de X. Para cada $i \in I$ elijamos $x_i \in X$, de modo que $C_i \subset V^{x_i}$.

Consideremos $V^{\hat{\alpha}}\langle C, \{1/n_{x_i}\}_{i\in I}\rangle = V$ entorno de $\hat{\alpha}$ (Ver Def. 1.5 y Prop. 1.12).

Si $\hat{\gamma} \in V$, para todo $(x_0,y_0) \in C_i \times Y$ se tiene que:

$$d(\gamma(x_0,y_0),\alpha(x_0,y_0)) = d(\hat{\gamma}(x_0)(y_0),\hat{\alpha}(x_0)(y_0)) \leq$$
$$\leq \sup\{d(\hat{\gamma}(x_0)(y),\hat{\alpha}(x_0)(y)) \mid y \in Y\} =$$

$$= \delta(\hat{\gamma}(x_o),\hat{\alpha}(x_o)) < {}^1/_{n_{x_i}}$$

Luego $((x_o,y_o),\ \gamma(x_o,y_o)) \in U$, pues $x_o \in C_i \subset V^{x_i}$.

Como C es un recubrimiento $\Gamma_\gamma \subset U$ y Λ^{-1} es continua en $\hat{\alpha}$. #

Como consecuencia inmediata de las proposiciones 4.11 y 4.17 tenemos la siguiente

Proposición 4.18.- Sean X un espacio paracompacto, T_2, I A.N. y que contiene un arco, Y un espacio T_3 y Z un espacio pseudometri zable conteniendo un arco. Entonces,

$$\begin{aligned} \Lambda : C_W(X \times Y,Z) &\longrightarrow C_W(X,C_W(Y,Z)) \\ \alpha &\longrightarrow \hat{\alpha} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo si y sólo si Y es numerablemente compacto. #

Si al espacio Y se le impone que sea compacto se pueden de bilitar las condiciones sobre el espacio Z ó X y seguir obteniendo resultados análogos a los ya obtenidos.

Proposición 4.19.- Sean X, Y, Z espacios topológicos, con Y regular y compacto. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} : C_W(X,C_W(Y,Z)) &\longrightarrow C_W(X \times Y,Z) \\ \hat{\alpha} &\longrightarrow \alpha \end{aligned}$$

es una función continua.

Demostración: Por la proposición 4.7, Λ^{-1} es una aplicación.

Veamos la continuidad de Λ^{-1} en $\hat{\alpha}$:

Sea U un abierto de $X \times Y \times Z$ tal que $\Gamma_\alpha \subset U$. Dado

$x_o \in X$ fijo, para todo $y \in Y$ existen $V_y^{x_o}$, V^y, $V^{\alpha(x_o,y)}$, tales que $V_y^{x_o} \times V^y \times V^{\alpha(x_o,y)} \subset U$

y $\alpha(V_y^{x_o} \times V^y) \subset V^{\alpha(x_o,y)}$.

Como Y es compacto, existen $y_1,\dots,y_n \in Y$ de modo que $\bigcup_{i=1}^{n} V^{y_i} = Y$. Sea $V^{x_o} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}^{x_o}$. Entonces, para todo $i=1,\dots,n$, $V^{x_o} \times V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)} \subset U$ y $\alpha(V^{x_o} \times V^{y_i}) \subset V^{\alpha(x_o,y_i)}$.

El abierto $V = \bigcup_{i=1}^{n} (V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)})$ de $Y \times Z$ contiene al grafo de $\hat{\alpha}(x_o)$, pues si $y \in V^{y_i}$

$$(y,\hat{\alpha}(x_o)(y)) = (y,\alpha(x_o,y)) \in V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)} \subset V .$$

Si denotamos $N(\hat{\alpha}(x_o),V)$ por $V^{\hat{\alpha}(x_o)}$, el abierto

$$W = \bigcup_{x_o \in X} V^{x_o} \times V^{\hat{\alpha}(x_o)} \quad \text{de} \quad X \times C_W(Y,Z)$$

contiene a $\Gamma_{\hat{\alpha}}$. Y si $\hat{\gamma} \in C(X,C_W(Y,Z))$ es tal que $\Gamma_{\hat{\gamma}} \subset W$ se tiene:

para todo $x \in X$, existe $x_o \in X$ tal que $(x,\hat{\gamma}(x)) \in V^{x_o} \times V^{\hat{\alpha}(x_o)}$ lo que indica que $x \in V^{x_o}$, y que para todo $y \in Y$, $(y,\hat{\gamma}(x)(y)) = (y,\gamma(x,y)) \in \bigcup_{i=1}^{n} (V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)})$.

Fijado ahora $y \in Y$, elegimos $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que

$$(y,\hat{\gamma}(x)(y)) \in V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)} .$$

Entonces,

$$(x,y,\gamma(x,y)) = (x,y,\hat{\gamma}(x)(y)) \in V^{x_o} \times V^{y_i} \times V^{\alpha(x_o,y_i)} \subset U,$$

es decir, puesto que x e y son arbitrarios, $\Gamma_\gamma \subset U$. Así Λ^{-1} es continua en $\hat{\alpha}$. #

En lo que respecta a la continuidad de Λ se tiene el resultado siguiente:

<u>Proposición 4.20</u>.- Sean X espacio topológico paracompacto, regular y I A.N., Y un espacio numerablemente compacto y Z un espacio topológico arbitrario.

Entonces, $\Lambda : C_W(X \times Y,Z) \to C_W(X,C_W(Y,Z))$ es continua.

<u>Demostración</u>: Por la proposición 4.3, Λ es aplicación.

Veamos la continuidad de Λ en α:

Sea U un entorno básico de $\hat{\alpha}$ que, por la observación del Corolario 1.7, se puede tomar de la forma:

$$U = <C,A> = \{g \in C(X,C_W(Y,Z)) \mid g(C_i) \subset A_i, \ \forall i \in I\}$$

donde $C = \{C_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento cerrado localmente finito de X y $A = \{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos de una base de $C_W(Y,Z)$. Podemos suponer que para todo $i \in I$, $A_i = N(h_i,W_i)$, con $W_i \subset Y \times Z$ abierto, y $h_i \in C(Y,Z)$ tal que $\Gamma_{h_i} \subset W_i$.

La familia $F = \{C_i \times Y\}_{i\in I}$, de cerrados de $X \times Y$, es localmente finita y $G = \{X \times W_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos en $X \times Y \times Z$, luego, por el lema 1.2, $N(F,G)$ es un abierto de $C_W(X \times Y,Z)$.

Puesto que si $(x,y) \in C_i \times Y$ se verifica que

$(x,y,\alpha(x,y)) = (x,y,\hat{\alpha}(x)(y)) \in X \times W_i$, se tiene que

$\Gamma_{\alpha|_{C_i \times Y}} \subset X \times W_i$, es decir $\alpha \in N(F,G)$.

Finalmente, si $\gamma \in N(F,G)$ para todo $x \in C_i$ y todo $y \in Y$, $(x,y,\gamma(x,y)) \in X \times W_i$, luego $(y,\gamma(x,y)) = (y,\hat{\gamma}(x)(y)) \in W_i$, es decir $\Gamma_{\hat{\gamma}(x)} \subset W_i$, ó lo que es lo mismo $\hat{\gamma}(x) \in A_i$ para todo $x \in C_i$. Por tanto $\hat{\gamma} \in U$ y Λ es continua en α. #

Como consecuencia de las proposiciones anteriores se tiene

Corolario 4.21.- Sean X espacio topológico regular, paracompacto y I A.N., Y un espacio compacto y regular, y Z un espacio topológico arbitrario. Entonces Λ es un homeomorfismo. #

Proposición 4.22.- Sean X un espacio topológico T_2, paracompacto I A.N. y que contiene un arco, Y un espacio paracompacto y T_2 y Z un espacio que contiene un arco. Entonces Λ es un homeomorfismo si y solamente si Y es compacto.

Demostración: Consecuencia inmediata de la proposición 4.11 y del corolario 4.21. #

Corolario 4.23.- Sean X, Y, Z variedades paracompactas y T_2, y x_o, z_o tales que $\dim_{x_o} X \geq 1$ y $\dim_{z_o} Z \geq 1$, entonces $\Lambda : C_W(X \times Y, Z) \approx C_W(X, C_W(Y,Z))$ si y sólo si Y es compacta. #

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía

[C] Cerf, J.,Topologie de certains espaces de plongements, Bulletin Soc. Math. France, Vol. 89 (1961), 227-380.

[Co] Di Concilio, A.; Di Maio, G.; Russo, A., Some topologies in function spaces, specially the Whitney topology. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 49 (1982), 9-16 (M.R. 85a:54020).

[G] Gauld, D.B., The graph topology for function spaces. Indian J. Math. 18 (1976), no. 3, 125-132 (Zbl. Math. 372:54011).

[G-G] Golubistsky, M.; Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer-Verlag, 1973.

[G-Z] Guran, I.I.; Zarichnyjĭ, M.M., Whitney topology and box products. Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, Ser A 1984, No 11, 5-7 (1984). (Zbl. Math. 579:54010).

[H] Hirsch, M.V., Differential Topology, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, Vol. 33 (1976).

[K] Kunen, K., Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, North Holland, 1980.

[L] Levine, N., On the graph topology for function spaces. Kyungpook Math. J. 24 (1984), no. 2, 101-113 (M.R. 86a:54018).

[M] Margalef, J.; Outerelo, E.; Pinilla, J.L., Topología, Alhambra, Madrid, 1979.

[Ma] Mather, J.N., Stability on C^∞ mappings: II. Infinitesimal stability implies stability, Annals of Mathematics, Vol. 89, no. 2 (1969), 254-291.

[Mc] McCoy, R.A., Fine topologies on function spaces. Preprint.

[Mi] Michor, P.W., Manifolds of Differentiable mappings. Shiwa Math. Series, no. 3, 1980.

[M-1] Munkres, J.R., Elementary Differential Topology, Ann. Math. Studies, no. 54. Princeton Univ. Press, 1966.

[M-2] Munkres, J.R., Topology. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[N] Naimpally, S.A., Graph topology for function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. (1966), 267-272.

[N-P] Naimpally, S.A.; Pareek, C.M., Graph topologies for function spaces. II, Comment. Math. Prace Mat. 13 (1970), 221-231. (M.R. 41:9184).

[P] Poppe, H., Über Graphentopologien für Abilldungsraüme I. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 15, 71-80 (1967).

[S] Spring, D., Compactness in the fine topology, Topology and its Applications 18 (1984), 89-94.

[S-S] Steen, L.A.; Seebach, J.A., Jr., Counterexamples in topology, (Second edition) Springer-Verlag, New York, 1978.

[W] Whitney, H., Singularities of mappings of Euclidian spaces, Symp. Int. de Topología Algebraíca, Mexico, 1958.