ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Núm. 111, 1986, págs. 49 a 58

Sobre la transitividad difusa

por FRANCISCO JAVIER MONTERO DE JUAN
y JUAN TEJADA CAZORLA
Departamento de Estadística e I. O.
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense

RESUMEN

En este trabajo se presentan algunos resultados que resaltan la importancia de la transitividad máx-mín dentro de las transitividades máx-$*$, cuando se pretenden definir relaciones de preferencia difusa.

Palabras clave: Relación de Preferencia Difusa, Transitividad Difusa, Alternativas nítidamente no Dominadas.

1. INTRODUCCION

Nuestro punto de partida será un conjunto

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

formado por n alternativas, sobre las que se pretende definir una relación de preferencia difusa; es decir, un subconjunto difuso del producto cartesiano $X \times X$, con una función de pertenencia asociada

$$\mu: X \times X \longrightarrow [0, 1]$$

de modo que

$$\mu(x_i, x_j) \in [0, 1]$$

representa el grado en que la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j.

Dada una relación de preferencia difusa, Orlovsky [3] define la relación de preferencia estricta asociada:

$$\mu^s: X \times X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\mu^s(x_i, x_j) = \text{máx}\,(\mu(x_i, x_j) - \mu(x_j, x_i), 0)$$

y a través de ella se obtiene el conjunto difuso de alternativas no dominadas:

$$\mu^{ND}: X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\mu^{ND}(x_i) = 1 - \underset{j}{\text{máx}}\ \mu^s(x_j, x_i)$$

que asigna a cada alternativa un valor que representa el grado en que no está dominada.

Desde este punto de vista, estaremos interesados por el conjunto de alternativas que hagan máximo este grado de no dominación. En concreto, nos podemos preguntar por la existencia de alternativas nítidamente no dominadas, es decir, si la relación de preferencia difusa tiene asociado un conjunto no vacío:

$$X_\mu^{UND} = \{x \in X / \mu^{ND}(x) = 1]$$

de alternativas nítidamente no dominadas.

2. TRANSITIVIDAD MAX-MIN

Orlovsky [3] demuestra, bajo condiciones bastante generales, que

$$X_\mu^{UND} \neq \phi$$

En particular, para obtener este resultado, basta suponer que la relación de preferencia sea máx-mín transitiva:

$$\mu(x_i, x_j) \geqslant \text{mín}\,\{\mu(x_i, x_k), \mu(x_k, x_j)\} \quad \forall\, i, j, k$$

Pero es evidente que dentro del conjunto de alternativas nítidamente no dominadas existen subconjuntos de especial interés:

$$X_{\mu}^{UNDd}=\{x \in X_{\mu}^{UND}/\exists \ y \notin X_{\mu}^{UND}, \ \mu^{s}(x, y)>0\}$$
$$X_{\mu}^{UNDnd}=\{x \in X_{\mu}^{UND}/\forall \ y \notin X_{\mu}^{UND}, \ \mu^{s}(x, y)=0]$$

siendo de comprobación trivial el siguiente:

Lema

$$X_{\mu}^{UNDd}=X_{\mu}^{UND}-X_{\mu}^{UNDnd}$$

Teorema 1

Sea μ una relación de preferencia máx-mín transitiva no trivial, en el sentido de que

$$\mu(x_i, x_j)\neq\mu(x_j, x_i)$$

para algún par de alternativas. Entonces

$$X_{\mu}^{UNDd}\neq\phi$$

Demostración:

Por el lema anterior, será suficiente estudiar el caso en que

$$X_{\mu}^{UNDnd}\neq\phi$$

Al ser la relación no trivial, podemos considerar el conjunto no vacío

$$\hat{X}=X-X_{\mu}^{UNDnd}$$

y la restricción de μ sobre él:

$$\hat{\mu}: \hat{X}\times\hat{X} \longrightarrow [0, 1]$$
$$\hat{\mu}(x_i, x_j)=\mu(x_i, x_j) \qquad \forall \ x_i, x_j \in \hat{X}$$

que desde luego sigue siendo máx-mín transitiva.

Por tanto

$$\hat{X}_{\mu}^{UND}\neq\phi$$

y como

$$\hat{X}_{\mu}^{UND}=X_{\mu}^{UNDd}$$

el teorema queda demostrado.

Podemos también estudiar bajo qué condiciones una relación máx-mín transitiva define un preorden nítido:

Definición

Diremos que una relación de preferencia difusa μ es «transitiva» cuando

$$\left.\begin{array}{l}\mu(x_i, x_j)\geqslant\mu(x_j, x_i)\\ \mu(x_j, x_k)\geqslant\mu(x_k, x_j)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mu(x_i, x_k)\geqslant\mu(x_k, x_i)$$

Es trivial que toda relación transitiva define el preorden nítido

$$x_i\geqslant x_j \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x_i, x_j)\geqslant\mu(x_j, x_i)$$

pero en general la transitividad máx-mín nos asegura sólo una transitividad parcial.

Teorema 2

Si la relación de preferencia μ es máx-mín transitiva, entonces

$$\left.\begin{array}{l}\mu(x_i, x_j)>\mu(x_j, x_i)\\ \mu(x_j, x_k)>\mu(x_k, x_j)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mu(x_i, x_k)>\mu(x_k, x_i)$$

Demostración

Trivial porque bajo las condiciones del teorema la relación de preferencia estricta también es máx-mín transitiva (Orlovsky, [3]), luego

$$\mu^s(x_i, x_k)\geqslant \text{mín}\{\mu^s(x_i, x_j), \mu^s(x_j, x_k)\}>0$$

Teorema 3

Sea μ relación de preferencia máx-mín transitiva. Si además es recíproca:

$$\mu(x_i, x_j)=1-\mu(x_j, x_i) \quad \forall\ i\neq j$$

entonces μ es transitiva.

Demostración

Por el teorema anterior, será suficiente estudiar el caso en que

$$\mu(x_i, x_j)=\mu(x_j, x_i)=1/2$$

o bien

$$\mu(x_j, x_k) = \mu(x_k, x_j) = 1/2$$

Pero en cualquier caso

$$\mu(x_i, x_k) \geqslant \text{mín}\{\mu(x_i, x_j), \mu(x_j, x_k)\} = 1/2$$
$$\mu(x_k, x_i) \geqslant \text{mín}\{\mu(x_k, x_j), \mu(x_j, x_i)\} = 1/2$$

luego ha de ser

$$\mu(x_i, x_k) = \mu(x_k, x_i) = 1/2$$

3. TRANSITIVIDAD MAX-*

Zadeh [4] y Bezdek-Harris [1] proponen sin embargo otros tipos de transitividad basados en operaciones binarias conmutativas y continuas

$$*: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

distintas del mínimo. Así se dirá que una relación de preferencia difusa

$$\mu: X \times X \longrightarrow [0, 1]$$

es máx-* transitiva si y sólo si

$$\mu(x_i, x_j) \geqslant \mu(x_i, x_k) * \mu(x_k, x_j) \ \forall\ i, j, k$$

Y sería interesante que en cualquier caso quede asegurada la existencia de alguna alternativa nítidamente no dominada. En este sentido, vamos a ver que la máx-mín transitividad juega un papel clave dentro de la familia de transitividades máx-*. Para ello consideraremos las siguientes familias de operaciones binarias definidas en el intervalo [0, 1]:

$$0^{\text{mín}} = \{* / a * b \leqslant \text{mín}\ (a, b)\ \forall\ a, b \in [0, 1]\}$$
$$0_{\text{mín}} = \{* / a * b \geqslant \text{mín}\ (a, b)\ \forall\ a, b \in [0, 1]\}$$

Cuando una operación binaria en [0, 1] se utiliza para agregar preferencias definidas por grupos de individuos, Fung y Fu [2] hablan de «operaciones de agregación», y demuestran que si tal operación binaria * verifica las condiciones de continuidad, idempotencia, conmutatividad, asociatividad y monotonía no decreciente, entonces necesariamente existe un $\alpha \in [0, 1]$ tal

$$a * b = \text{máx } (a, b) \qquad \text{si } a, b \leqslant \alpha$$
$$a * b = \alpha \qquad \text{si } a \leqslant \alpha \leqslant b$$
$$a * b = \text{mín } (a, b) \qquad \text{si } a, b \geqslant \alpha$$

Aunque en nuestro contexto no tenga sentido la asociatividad, podemos imponer a la operación base de la máx-$*$ transitividad alguna condición en la línea del trabajo de Fung-Fu [2].

Teorema 4

La única operación continua

$$* \in 0^{\text{mín}}$$

para la cual toda relación de preferencia máx-$*$ transitiva tiene asociada un conjunto no vacío de alternativas nítidamente no dominadas, es la del mínimo:

$$a * b = \text{mín } (a, b) \qquad \forall\ a, b \in [0, 1]$$

Demostración

Bastará ver que para toda operación distinta del mínimo existe una relación de preferencia μ máx-$*$ transitiva con

$$X_{\mu}^{UND} = \phi$$

En efecto: sean $a, b \in [0, 1]$ tales que

$$a * b < \text{mín } (a, b) \tag{1}$$

Por la continuidad de la operación binaria podemos suponer que ambos elementos son distintos, pues si fuese

$$a * b = \text{mín } (a, b) \qquad \forall\ a \neq b$$

entonces, para todo $c \in [0, 1]$:

$$c * c = \lim_{\substack{c_n \to c \\ c_n \neq c}} c_n * c = \lim_{\substack{c_n \to c \\ c_n \neq c}} \text{mín}(c_n, c) = c$$

y por tanto sería

$$a * b = \text{mín}\,(a, b) \quad \forall\ a, b$$

Entonces, supuesto (1), es de fácil comprobación que la relación de preferencia difusa μ definida de modo que

$$\mu(x_i, x_j) = \begin{cases} \text{mín } (a, b) & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ a * b & \text{si } i = j - 1 \\ \text{máx } (a, b) & \text{si } i < j - 1 \end{cases}$$

es máx- $*$ transitiva y sin embargo

$$X_\mu^{UND} = \phi$$

Idéntico resultado se sigue suponiendo que la operación

$$* \in 0^{\text{min}}$$

verifica la condición de idempotencia:

$$a * a = a \qquad \forall\ a \in [0, 1]$$

Teorema 5

Sea una operación binaria

$$x \in 0_{\text{min}}$$

tal que

$$a * b > \text{mín } (a, b) \qquad \forall\ a \neq b$$

Entonces sólo las relaciones constantes:

$$\exists\ p \in [0, 1] / \mu(x_i, x_j) = p \qquad \forall\ i, j$$

son máx- $*$ transitivas

Demostración

Supongamos dos alternativas tales que

$$\mu(x_i, x_j) \neq \mu(x_i, x_i)$$

Entonces:

$$\mu(x_i,\ x_j) \geqslant \mu(x_i,\ x_i) * \mu(x_i,\ x_j) >$$
$$> \text{mín}\,\{\mu(x_i,\ x_i),\ \mu(x_i,\ x_j)\} \Rightarrow$$
$$\mu(x_i,\ x_j) > \mu(x_i,\ x_i)$$

luego

$$\mu(x_i,\ x_i) \geqslant \mu(x_i,\ x_j) * \mu(x_j,\ x_i) \geqslant$$
$$\geqslant \text{mín}\,\{\mu(x_i,\ x_j),\ \mu(x_j,\ x_i)\} =$$
$$= \mu(x_j,\ x_i) \tag{2}$$

y por tanto

$$\mu(x_i,\ x_j) > \mu(x_i,\ x_i) \geqslant \mu(x_j,\ x_i)$$

pero entonces en (2) tendríamos la desigualdad estricta, y

$$\mu(x_j,\ x_i) \geqslant \mu(x_j,\ x_i) * \mu(x_i,\ x_i) >$$
$$> \text{mín}\,\{\mu(x_j,\ x_i),\ \mu(x_i,\ x_i)\}$$

nos llevaría a contradicción.

Análogamente llegaríamos a contradicción caso de suponer

$$\mu(x_j,\ x_i) \neq \mu(x_i,\ x_i)$$

Por tanto,

$$\mu(x_i,\ x_j) = \mu(x_i,\ x_i) = \mu(x_j,\ x_i)\ \ \forall\ i,\ j$$

y de este modo

$$\mu(x_i,\ x_j) = \mu(x_i,\ x_i) = \mu(x_k,\ x_i) =$$
$$= \mu(x_k,\ x_k) = \mu(x_k,\ x_m)\quad \forall\ i,\ j,\ k\ m$$

Teorema 6

Sea una operación binaria

$$* \in 0_{\text{mín}}$$

distinta del mínimo y verificando la condición de monotonía no decreciente:

$$a * b \geqslant c * d \quad \forall\ a \geqslant c,\ b \geqslant d$$

Entonces la única relación de preferencia reflexiva

$$(\mu(x_i,\ x_i) = 1\ \forall\ i)$$

y máx-$*$ transitiva es la constante:

$$\mu(x_i,\ x_j) = 1 \qquad \forall\ i,\ j$$

Demostración

Supongamos que existe

$$\mu(x_i,\ x_j) = a < 1$$

para algún par de alternativas. Por la máx-$*$ transitividad, ha de ser

$$a \geqslant 1 * a$$

pues μ se supone reflexiva. Y debido a la condición de monotonía,

$$1 * a \geqslant b * a \qquad \forall\ b \in [0,\ 1]$$

Pero como

$$* \in 0_{\text{min}}$$

entonces

$$1 * a \geqslant a$$
$$b * a \geqslant a \qquad \forall b \geqslant a$$

luego

$$b * a = a \qquad \forall b \geqslant a$$

Análogamente se obtiene

$$a * b = a \qquad \forall b \geqslant a$$

De esta manera, bajo condiciones generales, la máx- $*$ transitividad basada en el mínimo es la única dentro de

$$0^{min} \cup 0_{min}$$

que asegura la existencia de relaciones de preferencia máx-$*$ transitivas no triviales con alternativas nítidamente no dominadas.

REFERENCIAS

BEZDEK, J. C.; HARRIS, J. D.: *Fuzzy Partitions and Relations; an axiomatic basis for Clustering*. Int. J. Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 111-127.

FUNG, L. W.; FU, K. S.: *An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment*, en: Zadeh, L. A.; King-Sum, K.; Tanaka, K.; Shimura, M. (eds.): *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Academic Press, 1975.

ORLOVSKY, S. A.: *Decision-Making with a Fuzzy preference relation*. Int. J. Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 155-167.

ZADEH, L. A.: *Similarity Relations and Fuzzy Orderings*. Information Sciences, 3 (1971), 177-200.

SUMMARY

ON FUZZY TRANSITIVITY

In this paper we study some properties of max-min transitivity inside the family of max-$*$ transitivities, in order to define fuzzy preference relations.

Key Words: Fuzzy Preference Relation, Fuzzy Transitivity, Unfuzzy Nondominated Alternatives.

AMS, 1980. Subject classification: 90A08.