Interpretaciones del Signo Igual. Un Estudio de Libros de Texto.

Trabajo presentado por:
Mónica Ramírez García

Dirigido por:
Purificación Rodríguez Marcos

Junio 2010

Programa de Psicología Escolar y del Desarrollo.
Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación
Facultad de Psicología y Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En matemáticas los signos y los símbolos tienen una gran importancia, ya que el lenguaje matemático los utiliza continuamente. Un signo es cualquier cosa, acción o suceso que, por una relación natural o convencional, evoca a otra o la representa (Moliner, 2007). Si tomamos como definición de símbolo un tipo de signo en el cual la relación con el objeto al que se refiere es arbitraria y se ha determinado por convenciones, encontraremos que la mayoría de los signos matemáticos son símbolos porque su significado se ha establecido por convenciones.

El aprendizaje de las Matemáticas implica forzosamente el manejo y comprensión de los símbolos matemáticos. Al ser signos con significados convencionales los alumnos encuentran dificultades en su aprendizaje. Una de estas dificultades es el hecho de que un mismo símbolo puede tener significados distintos (p.e., el número 2 representa la cantidad de un conjunto de dos elementos y también la posición de un objeto en un conjunto ordenado, además en unos casos, se utiliza la palabra ‘dos’ y en otros la palabra ‘segundo’ para nombrarlo). Otros conceptos matemáticos representados por símbolos son las relaciones entre las cantidades. Por ejemplo, “menor que <”, “mayor que >”, “menor o igual que ≤”, “mayor o igual que ≥”, pero sin duda el signo más usado en matemáticas es el signo igual = para representar la equivalencia numérica de las cantidades, que están a uno y otro lado del signo. Uno de los objetivos del currículum es aprender el significado de los símbolos matemáticos, lo que no quiere decir que los estudiantes adquieran los significados correctos de estos signos, y como consecuencia aparece el fracaso en esta materia. Uno de los signos al que los estudiantes no le dotan de un significado completo y es especialmente importante es el signo igual.

Siguiendo a Essien y Setati (2006), desde una perspectiva histórica, la primera vez que fue utilizado el signo igual (=) para afirmar la equivalencia de dos expresiones fue en la obra *The Whetstone of Witte* (*La piedra de afilar el ingenio*, 1557) del matemático inglés Robert Recorde. El libro está dedicado al Álgebra y hace referencia al signo igual explicando:

> …y para evitar la tediosa repetición de las palabras: ‘es igual a’, pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o rectas gemelas de la misma longitud, así: (═), porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales” (citado por Gutiérrez, 2008, p. 90).

Antes de Recorde, el signo igual no se representaba con las dos líneas paralelas que conocemos ahora. En los papiros más antiguos de Egipto aparecía la igualdad representada por el símbolo ╤ y Diofanto, alrededor de la mitad del siglo tercero antes de Cristo, representaba la relación de igualdad por í. Más adelante, Pacioli en 1494 utilizaba el signo æ como diminutivo de la palabra ‘aequalis’ y algunos autores, como Kepler, Galileo, Pascal y Fermat, expresaban la igualdad con palabras como *aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck,* o *gleich*. También, un siglo antes que Recorde, parece que casualmente Regiomontano utilizó una raya horizontal (—) para representar la igualdad.

Después de la primera aparición del signo (═) en la obra de Recorde (1557), no volvió a mostrarse hasta años después. Fue en 1631 cuando disfrutó de un reconocimiento generalizado en Inglaterra. Mientras tanto, en el resto de países europeos, el signo ═ se utilizaba para expresar relaciones distintas de la igualdad. Por ejemplo, Francisco Vieta en 1591 recurría a este signo para designar la diferencia aritmética; Descartes, en 1638, lo usó para designar más o menos (±); Johann Caramuel, marcaba la separación de la parte entera y la parte decimal de un número y finalmente, Dulaurens y Reyher para indicar el paralelismo de dos rectas. Esta situación en las que se daban cinco significados distintos a un mismo signo, hacía que el signo ═ corriese peligro de ser descartado a favor de algún otro símbolo que no tuviera asociado tantos significados.

Durante la segunda mitad del siglo XVI aparecieron otros símbolos para designar la igualdad. Por ejemplo, un monje francés llamado J. Buteo usaba el símbolo [; un escritor alemán Xylander recurrió al signo ‖ para expresar la igualdad. Este último signo lo llegó a utilizar Descartes. Este mismo autor utilizó el signo ꝏ que fue el más firme competidor del signo de Recorde, gracias a la gran difusión de su libro *Géométrie*. Una propuesta curiosa fue la realizada por Hérigone (París, 1644). Utilizó el símbolo 2|2 para la igualdad, 3|2 para “mayor que”, y 2|3 para “menor que”, aunque no llegó a interesar a nadie esta notación. Este autor también llegó a utilizar $\prod$ para la igualdad, acortando la línea vertical derecha para representar “mayor que” y la línea vertical izquierda para representar “menor que”.

Finalmente, el símbolo de Recorde fue usado por autores como Isaac Newton, lo que empezó a suponer un gran impulso en toda Europa. Los omienzos del siglo XVIII se pueden señalar como el momento en que se acaba la competencia. El gran avance matemático de este tiempo debido la invención del cálculo diferencial e integral, unido al hecho de que tanto Newton como Leibniz empleasen el símbolo de Recorde, llevó a su reconocimiento general. De esta forma, el signo de igualdad $=$ es uno de los pocos símbolos matemáticos que han contado con aprobación universal.

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto el del signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Numerosos estudios han puesto de relieve que incluso los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Teniendo en cuenta esto, en este trabajo realizaremos una revisión de algunas investigaciones anteriores para mostrar qué significados y qué usos le dan los escolares, establecer por qué es tan importante adquirir un significado completo del signo igual, cuál es el significado relacional que tiene este signo y cómo se puede desarrollar mediante una pedagogía basada en el pensamiento relacional. Todo esto los veremos en el Capítulo 1 que contendrá el marco teórico. En el Capítulo 2 presentaremos el estudio que hemos desarrollado, que constituye la primera parte de un proyecto más amplio que tendrá como objetivo la elaboración de la Tesis Doctoral. En concreto, revisaremos algunos libros de texto, de distintos niveles educativos, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes de primer ciclo de primaria.

1. CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

1.1. Aritmética y Álgebra

En los últimos años, muchos investigadores han intentado analizar las causas del alto fracaso escolar en Matemáticas, lo que les ha llevado a construir programas de enseñanza para conseguir mejorar el aprendizaje. Una de las áreas más problemáticas de las Matemáticas es el Álgebra. En efecto, muchos estudiantes de secundaria muestran una preparación insuficiente cuando se introduce esta asignatura. Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto.

La enseñanza tradicional tiende a separar la Aritmética del Álgebra, es decir, se produce una discontinuidad al pasar de la Aritmética al Álgebra. En el currículo, el aprendizaje de la Aritmética precede al del Álgebra y la razón es que la primera parece ser más concreta y por tanto, más fácil de aprender, se basa en la fluidez de cálculo y ha sido casi exclusivamente concebida para calcular respuestas. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir se consideran procesos que operan sobre las cantidades siguiendo una serie de pasos para generar un número simple, que es la respuesta al cálculo, sin reflexionar sobre las cantidades mismas y las relaciones entre ellas.

El Álgebra se introduce posteriormente según el currículum. La NCTM (2000) distingue varias componentes del Álgebra: Comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio. El Álgebra se ocupa de la generalización de la Aritmética, por lo que se introduce cuando se considera que los alumnos han adquirido las habilidades aritméticas necesarias, sin ocuparse de la conexión entre Aritmética y Álgebra. De hecho, la enseñanza tradicional de la Aritmética no se preocupa de que los alumnos capten las propiedades de los números y de las operaciones. Se da por hecho que las adquieren de forma inductiva con la práctica masiva de resolución de operaciones aritméticas. Para comprender el Álgebra, lo más importante son las relaciones que se dan entre las cantidades y las operaciones que aparecen en las ecuaciones. El razonamiento algebraico se basa en la comprensión de un pequeño número de propiedades de los números y las relaciones entre estas cantidades que marcan los símbolos, como por ejemplo el signo igual '='.

En Estados Unidos, la NCTM (2000) ha mostrado apoyo a la propuesta Early-Algebra proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Más concretamente, esta reforma consiste en un cambio curricular, que aboga por la introducción del Álgebra desde los primeros años escolares. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. Aprender Aritmética no consiste solo en la memorización de cientos de hechos numéricos y procedimientos para llevar a cabo algoritmos de resolución de operaciones aritméticas, sino en adquirir una serie de conceptos que permitan desarrollar estrategias para hacer cálculos aritméticos. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen generalidades (principios, propiedades, relaciones) que se encuentran implícitas en la estructura de la aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de la propuesta de pensamiento algebraico temprano, su puesta en práctica por los docentes y las distintas concepciones y capacidades del pensamiento algebraico en los niños.

Una de las dificultades que se han encontrado es la comprensión del signo igual. El estudio que aquí presentamos se centra en la comprensión del signo igual que adquieren los niños durante su escolarización. Veremos que si se adquiere un significado correcto del signo igual, se puede alcanzar con más seguridad el objetivo de trabajar el razonamiento algebraico. En Aritmética, el signo igual aparece como indicador de llevar a cabo la operación aritmética que le precede. Vamos a ver que durante los primeros años de Educación Primaria los niños adquieren el significado del signo igual como 'el total o resultado de una operación aritmética', adquiriendo así una comprensión incompleta del signo igual. De una forma más completa, el signo igual indica la relación de equivalencia numérica entre las dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo. Si lo que se pretende es ayudar a los niños a trabajar el pensamiento algebraico, se ha de prestar especial atención al hecho de que adquieran la comprensión relacional del signo igual en los primeros cursos, ya que es uno de los pilares para la manipulación de expresiones y ecuaciones algebraicas.

1.2. Uso e interpretaciones del signo igual en los niños

Como señalamos en páginas anteriores, un concepto fundamental en Aritmética y Álgebra es la relación de equivalencia numérica representada por el signo igual. Desde el primer curso de Educación Primaria los niños encuentran el signo igual en diversas situaciones. Ahora bien, que los estudiantes usen el signo igual no significa que comprendan realmente su significado matemático. En lo que sigue, pasaremos revista a distintas investigaciones que ponen de manifiesto las interpretaciones que hacen los niños de este signo.

En los últimos 20 años, las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto. En efecto, la mayoría de los niños, desde los primeros años de la enseñanza obligatoria no tienen una comprensión adecuada del signo igual, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional (p.e., Morris, 2003; Carpenter, Franke y Levi, 2003; McNeil y Alibali, 2005b; Essien & Setati, 2006; Hunter, 2007).

Existen distintas investigaciones realizadas con niños de diferentes edades. Desde los más pequeños que están empezando la educación obligatoria hasta estudiantes de secundaria.

Algunos resultados con niños de Educación Primaria

Las investigaciones realizadas en los años 80 (p.e., Behr, Erlwanger y Nichols, 1980) ponían de manifiesto que los niños de 5-8 años consideraban el signo de igualdad como un operador, en vez de un símbolo relacional. Como operador el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética. Esta interpretación operacional está relacionada con el hecho de que el signo se lea únicamente de izquierda a derecha, lo que significa que se ha de operar siempre sobre los dígitos que están a la izquierda y que la respuesta se ha de situar a la derecha del signo. Como era de esperar, esta interpretación conduce a los niños a múltiples errores.

Por ejemplo, cuando se presentan sentencias del tipo 4=1+3 consideran que se han escrito al revés o que expresiones como 4=4 están mal escritas, procediendo a reescribirlas de la siguiente forma: 4+0=4. Además, sentencias del tipo 1 + 3 = 2 + 2 tampoco tenían sentido para los niños con una interpretación operacional, ya que ignoran la parte final de la expresión '+2'. Para adquirir un significado más completo del signo igual, debería interpretarse como un signo bidireccional, que se pueda leer tanto de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Esto iría más en la línea del pensamiento algebraico que comentábamos anteriormente.

Utilizando otro tipo de sentencias, Carpenter (2003) mostró las diferentes soluciones que daban alumnos de entre 6 y 12 años a la sentencia abierta 8 + 4 = _ + 5. La respuesta correcta era 7, pero la mayoría de los niños realizaban la operación que estaba a la izquierda del signo igual y por lo tanto, la solución era 12 ó 17 si los niños sumaban todos los números (i.e., 8 + 4 + 5). Otros extendían el problema escribiendo 8 + 4 = 12 + 5 = 17. Este último error es un claro ejemplo del sentido unidireccional que adquiere el signo igual cuando su significado es operacional.

La resolución de tareas similares a las anteriores se podría llevar a cabo con éxito si los estudiantes tuvieran el conocimiento de algunos principios básicos que subyacen a las relaciones entre las cantidades numéricas. La interpretación del signo igual podría estar relacionada con la compresión del concepto de la relación de igualdad representada por el signo igual. Para averiguar si los niños de Educación Primaria (entre 6 y 11 años) eran capaces de utilizar el conocimiento de ciertos principios básicos sobre las relaciones de igualdad y desigualdad entre cantidades numéricas y aplicarlos a la resolución de problemas aritméticos, Morris (2003) diseñó dos conjuntos de tareas basadas en propiedades y principios básicos. Los principios básicos utilizados fueron el principio de inversión ($a + c - c = a - c + c = a$), compensación (si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \pm c = b \pm d$), adición compleja (si $a = b$ y $c > d$, entonces $a+c > b+d$), subtracción compleja (si $a = b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$), compensación de la resta y suma (se suma o resta la misma cantidad a ambos lados del signo igual). Además, utilizó alguna sentencia que reflejaba propiedades como la conmutativa. Morris propuso tareas que se podían resolver simplemente aplicando estos principios y propiedades y otras en las que era necesario cuantificar. Para comprobar si los niños eran capaces de aplicar principios básicos para resolver problemas en situaciones de igualdad o desigualdad numérica creó dos conjuntos de tareas, en uno aparecía el signo igual y en otro no estaba presente el signo igual, simplemente se mostraba dos cantidades separadas en dos columnas y se les preguntaba si esas cantidades eran iguales o si una era mayor que otra. En las tareas del conjunto sin signo igual, encontró que la mayoría de los niños aplicaban principios básicos para resolver las tareas numéricas sobre relaciones de igualdad y desigualdad, con muy pocas diferencias en los resultados teniendo en cuenta la edad.

Respecto a las tareas en las que si estaba presente el signo igual (por ejemplo 6+7= 7+6 o 4+2=42), la estrategia relacional de ‘descomponer y componer’ para compensar unas cantidades con otras se utilizó muy poco, aunque su uso aumentó ligeramente con la edad. En general, en este trabajo se encontró que los niños más pequeños exhibían una interpretación operacional del signo igual, a pesar de ser capaces de reconocer principios básicos de la relación de igualdad en tareas en las que no aparecía este signo. Según iban avanzando los cursos hasta los 11 años, empezaban a mostrar una interpretación relacional aunque solo el 25% de los alumnos mayores. Por lo tanto, a pesar de que los niños eran capaces de reconocer la relación de igualdad y desigualdad, el signo igual no tenía un significado relacional para ellos en la mayoría de los casos.

Molina (2006) realizó sesiones en las que utilizaba igualdades y sentencias numéricas para evaluar la comprensión del signo igual en los niños de tercero de Primaria. Observó cuatro significados del signo igual: ‘operador’, ‘indicador de una acción’, ‘similitud numérica’ y ‘equivalencia numérica’ (p. 436). El significado operador permitía a los niños evaluar igualdades con operaciones al lado izquierdo del signo igual (p.e., 12 + 7 = 127), pero no igualdades con operaciones al lado derecho. En sentencias abiertas los niños tendían a operar sobre los términos de la izquierda, para colocarlo en el espacio en blando de la derecha (p.e., 12 + 7 = 7 + _, resolvían con el número 26 ya que operaban sobre todos los número, o la sentencia 8 + 4 = _ +5, que resolvían con el número 12 ignorando el término ‘+5’). Con este significado se operaba siempre de izquierda a derecha. El significado expresión de una acción completa el significado de operador en el sentido que los niños son capaces de considerar las igualdades de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Esto último les permite considerar las operaciones al lado derecho del signo igual, pero realizando los mismos errores que en el significado operador (p.e., 12 + _ = 7 + 12, resolvían con el número 31 al operar todos los números, o la sentencia 8 + _ = 5 + 7, resolvían con el número 12 al ignorar miembros ‘8+’). Otro significado que aparece en el trabajo es el de similitud numérica en que los niños consideran el parecido de los miembros de las igualdades o sentencias sin tener en cuenta las operaciones que se realizan sobre las cantidades ni el orden de las mismas (p.e., 12-7=7-12). Por último, el significado equivalencia numérica permitía resolver toda clases de igualdades y sentencias numéricas utilizadas en el trabajo.

La autora confirma que a pesar de que el significado de equivalencia numérica es el adecuado para resolver todas las igualdades utilizadas, los niños utilizan en cada situación el significado que da sentido a la igualdad o sentencia numérica que se presenta. De aquí concluye que hay 3 niveles de comprensión del signo igual. El primer y menos completo sería el nivel de comprensión operacional de los niños en los que utilizan el significado de operador y expresión de una acción. Un segundo nivel no estable, en el que en algunas situaciones empieza aparecer el significado el equivalencia numérica. Y por último, el nivel de comprensión avanzado en el que se hace uso del significado de equivalencia numérica, aunque en sentencias con operaciones en el lado izquierdo utilizan el significado operador y en sentencias con operaciones en el lado derecho, utilizan el significado expresión de acción. El significado similitud numérica se mostraba de forma puntual. Se pudo observan que incluso niños que se consideraban en un nivel avanzado de compresión daban como buenas sentencias como a + b = b – a, posiblemente por estar repetidos los números y no fijarse en las operaciones.

La comprensión de la igualdad en Educación Secundaria

Los resultados de las investigaciones con alumnos de Educación Secundaria son similares a los hallados en Primaria y además muy poco alentadores, si tenemos en cuenta la importancia de una comprensión completa del signo igual para el aprendizaje del Álgebra. La relación de equivalencia numérica representada por el signo igual es crucial para resolver problemas y ecuaciones algebraicas y como veremos a continuación, los estudiantes de Educación Secundaria no ofrecen mejores resultados que los de Educación Primaria.

Para ver qué significado le dan los estudiantes de secundaria al signo igual, Knuth et al. (2005, 2006) trabajaron con estudiantes de edades comprendidas entre 11 a 14 años. En estos trabajos, utilizó la sentencia 3 + 4 = 7, marcando el signo igual con una flecha y pidiendo a los alumnos el nombre y los significados que conociesen de dicho signo.

Las respuestas tenían que ver con una interpretación operacional, del tipo ‘significa el total de los números que van antes’ ó ‘significa que después va la respuesta’ (2006, p. 302).

También surgieron respuestas que indicaban una interpretación relacional: ‘los números de la izquierda son equivalentes a los números de la derecha’ ó ‘las cosas en ambos lados tienen el mismo valor’ (2006, p. 303).

A pesar de incrementar con la edad el porcentaje de participantes que ofrecía una interpretación relacional, sólo alcanzó al 46% en los mayores (Knuth, 2005).

Para ver si este resultado estaba relacionado con la resolución de ecuaciones algebraicas, les pidieron a los mismos estudiantes que dijeran si el número que corresponde a □ es el mismo número en la ecuación 2 x □ + 15 = 31 y en la ecuación 2 x □ + 15 - 9 = 31 – 9. La comprensión de los estudiantes del signo igual, que se medía con la tarea mencionada más arriba, estaba asociada a un mayor rendimiento en el problema de ecuaciones equivalentes. En el trabajo posterior de Knuth et al. (2006) pidieron a los alumnos que descubrieran el valor de “m” para que la sentencia 4m + 10 = 70 y la sentencia 3m + 7 = 25 fueran verdaderas. En este trabajo las estrategias en las que probaban con números o despejaban se consideraron estrategias aritméticas, mientras que las estrategias algebraicas eran aquellas que hacían énfasis en la equivalencia a ambos lados del signo igual. Como en el trabajo anterior, se encontró una fuerte relación entre la interpretación del signo igual y el rendimiento en resolución de ecuaciones.

A partir de estos resultados, los autores concluyeron que comprender la relación de equivalencia numérica que representa el signo igual es un aspecto fundamental del razonamiento algebraico. En consecuencia, tener éxito en Álgebra puede depender del esfuerzo por mejorar la comprensión de la relación de equivalencia numérica y el significado del signo igual en los cursos anteriores a su enseñanza.

Por su parte, Essien & Setati (2006), también con estudiantes de secundaria (i.e., 13 a 15 años), exploraron el uso y comprensión del signo igual a través de varias pruebas. En la primera de ellas, presentaron una serie de sentencias abiertas (p.e., 14x3=_-3; 9-5=_-9; 24+_=27+35; 100÷5=_+5) solicitando a los estudiantes que anotaran el número que faltaba. A continuación, evaluaron la concepción unidireccional del signo, utilizando la sentencia 5 + 9 = 14 ÷ 2 = 7 x 3 = 21 y los estudiantes tenían que valorar si era correcta o no. También les pidieron que tradujesen una sentencia verbal del tipo: "tengo 5 manzanas y añado 1 más, después me regalan 2 y entonces tengo 8" en una expresión matemática (5+1=6+2=8). Finalmente, tenían que resolver ecuaciones mostrando todos los pasos que seguían (p. e., 4x + 1 = 4x + 4).

Al igual que en los trabajos anteriores, los estudiantes mostraron un sentido operacional del signo igual (hacer algo, encontrar la respuesta). Esta concepción se ponía de manifiesto nuevamente en las pruebas en las que se valoraba el sentido bidireccional del signo igual, lo que les llevaba a operar directamente sobre las cantidades para determinar el número que faltaba o para averiguar si el resultado de la ecuación era correcto. Además, observaron una sobregeneralización de algunas propiedades aritméticas como la conmutatividad**.**

Posteriormente, Hunter (2007) exploró las estrategias que utilizaban niños de entre 9 y 13 años para resolver sentencias numéricas abiertas del tipo a + b = c + d y a – b = c – d, siendo la incógnita cualquiera de las cantidades, prestando especial atención a los errores y su relación con la comprensión del signo igual. Las estrategias erróneas de resolución se codificaron como 'suma directa' (los estudiantes realizaban la operación del lado izquierdo del signo igual y ponían el resultado en el espacio en blanco a la derecha del signo), 'completar suma' (realizaban la operación del lado derecho del signo igual y ponían el resultado en el espacio en blanco en el lado izquierdo) o 'sumar todos los términos' (ponían el resultado en el espacio en blanco) (p. 424). Estos procedimientos se consideraron estrategias aritméticas, ya que todas ellas conllevan hacer un cálculo con algunos o todos los números presentes en las sentencias y situarlo en el espacio en blanco. Por lo tanto, el signo igual fue un claro indicador de 'realizar una operación'.

Como estrategias algebraicas o relacionales se observaron estrategias de compensación en las sentencias numéricas abiertas. Por ejemplo, para resolver la ecuación 73+49=72+_ un estudiante decía '73 es uno más que 72 así que yo sé que al compañero de 72 le tengo que dar uno más que al compañero del 73, por lo tanto, la solución es 50' (p. 425).

En resumen, la mayoría de los niños, sobre todo los más jóvenes, usaban estrategias que reflejaban una interpretación operacional del signo igual y, aunque la interpretación relacional aumentaba con los años, el incremento era muy pequeño.

Algunas explicaciones sobre el origen de las dificultades de comprensión del signo igual en los alumnos

Como hemos indicado en páginas anteriores, diferentes estudios has puesto de manifiesto que la falta de una comprensión relacional del signo igual afecta tanto a los niños de Educación Primaria como a los de Secundaria. En los que sigue, intentaremos profundizar en el origen de estas dificultades.

De acuerdo con el planteamiento de algunos autores de la psicología del desarrollo (Mcneil & Alibali, 2005b), los niños que inician la Educación Primaria no están todavía preparados para aprender los conceptos relacionales. Es precisamente en este momento cuando pueden adquirir una interpretación operacional del signo igual. Más adelante, entre los 11 y 14 años poseen las funciones y estructuras cognitivas generales necesarias para el aprendizaje de las matemáticas y también el sistema de memoria de trabajo ha madurado, por lo que entonces están más preparados desde el punto de vista del desarrollo para poder comprender el significado relacional del signo igual.

Las implicaciones educativas que tiene esta perspectiva sugieren que no debemos introducir conceptos que los niños no sean capaces de captar. Por lo tanto, la enseñanza tradicional no estaría mal enfocada en el sentido de que se trabajan procedimientos para realizar operaciones aritméticas sin profundizar en las relaciones entre las cantidades, lo que se posterga a la introducción del Álgebra. En la enseñanza tradicional, los estudiantes se vuelven expertos en la resolución rutinaria de operaciones aritméticas. Generalmente, son muy hábiles en aplicar estos algoritmos, pero muchas veces no comprenden los conceptos que subyacen. De hecho, cuando se enfrentan a ecuaciones con estructuras más complejas que la resolución de una operación aritmética, su experiencia con expresiones aritméticas de la forma 'operación = resultado' influyen en la interpretación de la información que están recibiendo. Intentan utilizar una estrategia de resolución que supone un obstáculo en el aprendizaje de un nuevo contexto. Estas estrategias han funcionado en los contextos aritméticos a los que los estudiantes se han visto expuestos masivamente, pero no en los contextos algebraicos. Aún así, el alumno tiene tanta confianza en ellas que la sigue utilizando a pesar de que no consiga el éxito deseado. En esta línea, McNeil & Alibali (2005b) proponen la hipótesis de la 'resistencia al cambio' para explicar el origen de las dificultades que tienen los niños al resolver las ecuaciones. La hipótesis de "resistencia al cambio" postula que las dificultades de aprendizaje de las ecuaciones se deben, al menos en parte, a la temprana y larga experiencia con las operaciones aritméticas (McNeil & Alibali, 2005b). La excesiva práctica con operaciones aritméticas dificulta el aprendizaje de ecuaciones más complejas, como pueden ser las sentencias abiertas con operaciones a ambos lados del signo igual. Por lo tanto, más que una carencia de los niños, se explica por la resistencia al cambio en los conocimientos que ya tienen. Concretamente, estos autores afirman que los niños aprenden tres modelos que dificultan su habilidad para aprender ecuaciones más complejas: 'realizar todas las operaciones sobre todos los números dados', 'operaciones = resultado' y el signo igual significa 'el total' (p. 885). Estos modelos se adquieren con el aprendizaje de la aritmética. Los niños entre los 7 y 11 años muestran una dependencia de estos modelos cuando se encuentra con ecuaciones nuevas y diferentes a la estructura habitual de una operación aritmética (a + b = _).

McNeil & Alibali (2005b) investigaron la dependencia de los niños en el modelo operacional. Los participantes eran niños de 8 a 11 años a los que se les planteaban ecuaciones para medir su adherencia al modelo operacional. Se dividieron en varios grupos: los niños que recibían instrucción en resolución de ecuaciones y los niños que no; los que recibían una lección sobre significado del signo igual y los que no. Finalmente, de nuevo los participantes tuvieron que resolver ecuaciones.

Los resultados apoyaron la hipótesis de la ‘resistencia al cambio’. Cuanto mayor era la adherencia a los modelos operacionales la probabilidad de aprendizaje tras la instrucción disminuía. Los niños que no estaban sujetos a ningún modelo operacional generaban estrategias correctas para resolver las ecuaciones después de las lecciones.

Estos modelos operacionales también parecen estar presentes entre los estudiantes universitarios. McNeil & Alibali (2005b) pusieron a prueba la hipótesis del modelo operacional causa dificultades en la resolución de ecuaciones. Para ello, activaron el conocimiento de los modelos operacionales en los participantes universitarios y examinaron los efectos en la resolución de ecuaciones. En la fase de activación presentaron operaciones aritméticas que ponían en marcha el modelo operacional (operación = respuesta) y el significado del signo igual como el total (por ejemplo, 375+659=_ o 8+7+15+9=_). Los resultados apoyaron la hipótesis de la ‘resistencia al cambio’. Es decir, cuando se activaban los modelos operacionales los estudiantes tenían más dificultades con las ecuaciones.

Estos autores sugieren que el conocimiento de modelos operacionales se fija en los niños a la edad de 8 a 11 años. Antes de esas edades, están en proceso de aprender las operaciones aritméticas y su conocimiento de los modelos operacionales es débil. Sin embargo, entre los 8 y los 11 años, los niños siguen practicando procedimientos aritméticos y su conocimiento de los modelos operacionales se va haciendo fuerte y robusto, con lo que acaban aplicando estrategias de modo rutinario e inflexible.

Otra de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual se refiere a la experiencia que tienen los niños en la escuela elemental con los contextos que encuentran en los libros de texto y las explicaciones del profesor. En efecto, los contextos se suelen restringir a expresiones en las que el signo igual aparece como el resultado de una operación que está a la izquierda del signo, (por ejemplo 2 + 3 = _) (Carpenter, Franke y Levi,, 2003). Para realizar con éxito esta tarea no es necesario saber que el signo igual representa una equivalencia entre las cantidades que hay a ambos lados del signo, basta simplemente con interpretar el signo igual como un indicador de que hay que operar sobre las cantidades que aparecen en el problema para obtener la respuesta.

Frecuentemente, los niños encuentran sólo este contexto concreto del signo igual, es decir, como el resultado de una operación o el total de operar con todas las cantidades. De esta forma, cuando llegan a la Educación Secundaria, en la que se dedica poco tiempo al significado del signo igual, aparecen las dificultades para adquirir un significado relacional

Como hemos visto anteriormente, los alumnos de Secundaria obtenían mejores resultados en tareas algebraicas si poseían una comprensión relacional del signo igual. Por esto, parece importante que para asegurar el éxito en el aprendizaje del Álgebra que los niños adquieran la interpretación relacional del signo igual. Parece importante buscar contextos que activen y guíen a los estudiantes a una comprensión relacional del signo igual. Por ejemplo, ¿sería suficiente que los profesores plantearan situaciones distintas del tipo: 2 + 3 = 1 + 4, 8 = 8, 7 = 3 + 4. Esto supondría ampliar los contextos en los que aparece el signo igual y ayudaría a darle esa interpretación relacional de equivalencia. En esta línea, McNeil & Alibali (2005a) comprobaron que el contexto en el que se presentaban las operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual. En un trabajo posterior, McNeil et al. (2006) plantearon contextos no estándares (8 = 8, ó 7 = 3 + 4) para comprobar si activaban una interpretación relacional. En el primer experimento, los participantes eran estudiantes de 11 y 14 años. Se les presentaba aleatoriamente uno de los tres contextos siguientes del signo igual: 'operación igual respuesta' (4+3=7), 'operación en el lado derecho del signo igual' (7 = 3 +4), o 'relación reflexiva' (7=7) (p. 376). Les interrogaron acerca del símbolo y su significado. Encontraron que los estudiantes del contexto 'operación igual respuesta' era menos probable que mostrasen una interpretación relacional del signo igual que los estudiantes de los contextos no estándares. Estos resultados sugieren que las ecuaciones no estándares son más efectivas que las ecuaciones 'operación igual respuesta' para activar la comprensión relacional del signo igual. En un experimento posterior, evaluaron en los mismos estudiantes las interpretaciones del signo igual en dos contextos: operaciones en ambos lados del signo igual y operaciones al lado derecho del signo igual. Aquellos que fueron expuestos al contexto de operaciones en ambos lados del signo igual mostraban más a menudo una interpretación relacional del signo igual que los estudiantes del contexto operaciones al lado derecho del signo igual.

En resumen, esto sugiere que las ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual son más efectivas que otros contextos no estándares (ecuaciones con operaciones a la derecha del signo igual), para adquirir una comprensión relacional del signo igual.

Desde este mismo enfoque, McNeil et al. (2006) examinaron libros de texto de cuatro editoriales distintas para ver en qué contextos aparecía el signo igual. En concreto, evaluaron libros de texto de 6-8 grado (equivalentes a sexto de primaria, primero y segundo de la ESO), que se usan frecuentemente en Estados Unidos. Los contextos en los que aparecía el signo igual se clasificaron en 'operación igual respuesta' y no estándares: ecuaciones con operaciones en ambos lados del signo igual (4 + 5 = 3 + 6), ecuaciones con operaciones en el lado derecho del signo igual (7=3+4), ecuaciones sin operaciones explícitas en ningún lado (7=7), 'no ecuaciones' que comprendían usos de =, <, > para completar sentencias (1metro=10decímetros, x=y). Se comprobó que el contexto 'operación igual respuesta' decrecía con los cursos en las cuatro editoriales. El contexto 'operaciones a ambos lados del signo igual' aparecía en una proporción muy pequeña en todos los libros, y aumentaba de forma muy discreta a través de los años. En cambio, los contextos no estándares, como 6 = 6 ó 7 = 3 + 4, se presentaban frecuentemente en todos los libros. También observaron que el contexto 'operación igual resultado' se presentaba con más frecuencia en los libros que se basaban en habilidades de cálculo.

En resumen, el análisis de los textos mostró que las ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual eran muy poco frecuentes en los textos y por lo tanto, no están bien orientados para despertar una interpretación relacional del signo igual.

La experiencia de los niños con el signo igual no se reduce a los libros de texto. Hay otros factores que se relacionan con la presentación que hacen los profesores y los contextos que utilizan para plantear las actividades. Seo & Ginsburg (2003) estudiaron los libros de textos y los contextos que utilizaba el profesor en un aula a la que asistían niños de 7 y 8 años. Como en el estudio de McNeil et al. (2006), el análisis de los textos mostró que la mayoría de las situaciones favorecían una interpretación operacional del signo igual. Sin embargo, el profesor era consciente de esto y planteaban distintas situaciones (p.e., comparación de números, $3<4$, $5>2$, 2 = 2, equivalencia de monedas 1 euro = 100 céntimos). Debido a esto, Seo y Ginsburg se encontraron que los niños restringían la interpretación operacional a los contextos aritméticos que implicaban realizar una operación, pero en situaciones de medida y equivalencia de monedas ofrecían un significado relacional del signo igual. Concluyeron que no parece suficiente que se presenten a los niños distintos contextos para que desarrollen una concepción relacional del signo igual. Insisten en la necesidad de trabajar de manera conjunta los distintos significados que puede tener el signo igual, de manera que la interpretación relacional no se restrinja a ciertas situaciones sino que se extienda a otras (a + b = _) en las que habitualmente el signo igual significa el resultado. Molina (2006) realiza un estudio de los diferentes contextos en los que aparece el signo igual en el contexto de la Aritmética y Álgebra escolar encontrando hasta once situaciones diferentes. Observa que los alumnos que parecen que dan un significado relacional al signo igual pueden estar utilizando y ser conscientes de esta multiplicidad de significados y utilizar, dependiendo del contexto en el que se encuentre, un significado u otro del signo igual.

1.3. El desarrollo del pensamiento relacional. La igualdad como relación

El desarrollo del pensamiento relacional

Teniendo en cuenta lo dicho hasta el momento, parece existir un problema importante en la instrucción de la Aritmética que dificulta posteriormente la comprensión del Álgebra. Como respuesta a esta problemática, autores como Carpenter proponen una instrucción basada en el pensamiento relacional. Según este autor, el aprendizaje de las matemáticas debería tratarse más como una forma de razonar en la que aprendemos a generar ideas, a expresar estas ideas con palabras y símbolos, y a evaluar no sólo nuestras propias ideas sino otras que nos llegan de los demás (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

La enseñanza de la Aritmética se basa tradicionalmente en el aprendizaje de algoritmos sin dar importancia a las propiedades de los números y operaciones aritméticas involucradas. Sin embargo, estas propiedades son la base de los razonamientos que necesitamos para resolver ecuaciones algebraicas. Si trabajamos su comprensión desde el comienzo de la enseñanza de la Aritmética, conseguiremos una base más sólida para el aprendizaje del Álgebra. Para conseguir esto, el objetivo del aprendizaje debería estar más centrado en la adquisición de los principios y propiedades básicas, dando la oportunidad a los niños de razonar sobre sus ideas, comunicarlas y evaluarlas. Esta forma de trabajo creará una base consistente para el aprendizaje del Álgebra. Si los alumnos son capaces de articular las propiedades que usan para llevar a cabo cálculos aritméticos, se aseguran un mayor éxito en el aprendizaje del Álgebra.

Molina (2006) define el pensamiento relacional como la actividad intelectual consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo (p. 475). Cuando aparece en el contexto de la Aritmética y por supuesto del Álgebra consiste en examinar las expresiones como una totalidad y aprovechar las relaciones entre ellas. En el contexto de la Aritmética, se puede dar en situaciones de cálculo (p.e., 2 + 3 = _), o en situaciones que relacione expresiones aritméticas (p.e., a + b = c + d). De esta manera construimos estrategias de forma flexible en las que el centro de atención son las relaciones y elementos claves de nuestra situación o problema matemático. Un ejemplo de estrategia basada en pensamiento relacional es la conocida como 'el paso del diez' (9 + 5 lo transformo en 9 + 1 + 4 = 10 + 4 = 14 ya que es más sencillo sumar un número a 10), que es una estrategia de cálculo flexible. Otro ejemplo de uso del pensamiento relacional es la estrategia para considerar si la sentencia 4 + 8 = 5 + 7 es verdadera, en la que se pone uno más al 4 y se la quito al 8 y por lo tanto queda 5 y 7 en el otro lado del signo igual. El uso de pensamiento relacional no implica realizar los cálculos a ambos lados del signo igual, basta con ver la sentencia numérica como un todo y utilizar propiedades de las operaciones para poder concluir.

Por tanto, centrar la atención en las propiedades de las operaciones, transformar sentencias con operaciones y detectar cómo estas transformaciones afectan a las operaciones que contienen las sentencias se relaciona con la propuesta de trabajo relacional. Se favorece así el aprendizaje significativo de la Aritmética. Con el pensamiento relacional, las actividades pasan de tener un enfoque procedimental, centrado en el cálculo de respuestas a un enfoque estructural, centrado en examinar relaciones (Molina, 2009, p. 143)

La propuesta de llevar a cabo una instrucción en la que se trabaje una forma de razonar las matemáticas distinta a la tradicional, donde los niños se dedican a razonar, comunicar y evaluar las estrategias de resolución de operaciones aritméticas, ha sido puesta en práctica por Carpenter et al. (2003, 2005). Si los alumnos se basan en las propiedades de los números y propiedades de las operaciones para resolver ecuaciones, incluso aplicarlo a la resolución de un problema matemático, estarán trabajando el pensamiento relacional. Carpenter (2005) muestra dos ejemplos de instrucción en la que dos alumnos adquieren el concepto de la propiedad distributiva y son capaces de aplicarlo a distintas situaciones basándose en el pensamiento relacional. La habilidad matemática no supone solo fluidez de cálculo, también implica la comprensión. Cuando aprendemos procedimientos de memoria sin comprensión, se olvidan fácilmente y además se mezclan los pasos que se realizan en un algoritmo con los de otro. Los estudiantes que utilizan pensamiento relacional están usando un conjunto relativamente pequeño de principios fundamentales de matemáticas para establecer relaciones. El pensamiento relacional conduce al aprendizaje con comprensión.

La igualdad como relación

En los trabajos consultados se observa que los términos igualdad y equivalencia se utilizan para hacer referencia al signo igual, lo que marca la complejidad de la comprensión del signo igual. El término equivalencia hace referencia a las relaciones binarias que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva y el término igualdad se utiliza 'para denominar al modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que se refieren a un mismo objeto matemático, escribiendo entre ellas un signo igual, así como a la relación existente entre ellas' (Molina, 2006, p.244).

El signo igual representa la relación `de equivalencia numérica'. En igualdades numéricas simboliza la equivalencia numérica entre las expresiones que se encuentran en los dos lados del signo igual.

En el apartado 1.2 hemos mostrado algunos trabajos donde se veía que los estudiantes adquirían un significado incompleto del signo igual. La mayoría utilizaban dos tipos de tareas para valorar el significado que tiene el signo igual para los estudiantes. Unas veces recurrían a sentencias en las que los niños tienen que decir si son verdaderas o falsas, si cumplían la igualdad entre los dos términos que hay a ambos lados del signo igual, como por ejemplo, 5 + 3 = 4 + 4 (Morris 2003, Knuth 2005 y 2006). Otras veces utilizaban sentencias abiertas, en las que aparecía un espacio que los niños debían completar. Estas expresiones son del tipo a + b = _ + d, _ = a + b, a + _ = b + c. Expresiones de este último tipo se han utilizado en muchas investigaciones (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Carpenter, 2003; Essien & Setati 2006; Hunter, 2007; Molina, 2009). Hemos visto que los niños utilizan distintas estrategias dependiendo de la interpretación que tuviera signo igual. Por ejemplo, cuando se presentaba una sentencia abierta como 3 + 4 = _ + 5, el niño que da el valor 7 al espacio en blanco, seguramente ha adquirido una interpretación operacional del signo igual. Otro niño resuelve el problema sumando 3 + 4, que son 7, entonces, en el otro lado hay 5 y para llegar a 7 le faltan 2, por lo tanto, la solución es 2. Un tercer niño, observa que en un lado hay 4 y en el otro lado hay un 5. Si 5 en uno más que 4, al 3 le quita 1 para que los dos lados del signo igual sean la misma cantidad, es decir, 2. Las dos últimas estrategias entienden el signo igual como la equivalencia numérica de las expresiones que hay a ambos lados del signo igual, pero la última, en la que no necesita realizar el cálculo de las operaciones en los dos lados, en la que sólo se trata de equilibrar la ecuación, se puede observar pensamiento relacional, pues trata la igualdad en su totalidad.

En el caso de sentencias de verdadero y/o falso, Carpenter (2003), propone una secuencia de expresiones en la que primero se muestra el contexto estándar de una operación aritmética (a + b = c) y luego se van presentando contextos no estándares (a = b + c, a = a, a + b = a + b, a + b = c + d). En la metodología de trabajo que propone estos autores, los alumnos deberían expresar sus ideas y discutirlas con los demás compañeros. De esta forma se pueden ir mostrando las expresiones anteriores, preguntando a los niños si son verdaderas o falsas y por qué. En esta secuencia, solo la primera sentencia es familiar ya que tiene la operación al lado izquierdo del signo igual y la solución al lado derecho. Muchos alumnos que todavía no hayan adquirido la comprensión del signo igual como indicador relacional, no estarán conformes con las ecuaciones no estándares. En estas actividades es muy importante la interacción entre los alumnos, que escuchen las explicaciones de los demás porque les ayuda a razonar sobre sus propias ideas.

La misma secuencia se podría seguir para sentencias numéricas abiertas, preguntando qué número hay que poner en el espacio en blanco (por ejemplo, a + b = _ ; a + _ = c; a = b + _; _ = a + b; a = _; a + b = _ + b; a + b = _ + d).

Los ejemplos mencionados proporcionan a los niños contextos para adquirir el concepto de relación de igualdad del signo igual. Como hemos visto en el apartado anterior, las ecuaciones a ambos lados del signo igual, las identidades como 8 = 8, son contextos no estándares que favorecen la comprensión relacional del signo igual.

Carpenter et al. (2003) proponen una secuencia de pasos para la correcta comprensión del signo igual con los niños, aunque afirman que no todos los niños pasan necesariamente por todos ellos. Primero hay que saber la concepción del signo igual que tienen los niños, procurando además que sean capaces de articular su interpretación. Para esta tarea se pueden utilizar sentencias numéricas abiertas o sentencias verdadero/falso. El segundo paso se alcanza cuando los niños admiten como correctas sentencias que no sean de la forma a + b = c, como por ejemplo, a = b + c, a = a, a + b = b + a. El tercer paso es que reconozcan el signo igual como expresión de una relación entre dos números iguales. En este paso los niños hacen cálculos con los números de ambos lados del signo igual. Al final, ya no realizan cálculos sino que utilizan propiedades de los números y de las operaciones para resolver el problema.

El trabajo que distintos tipos de igualdades favorece la adquisición de un buen significado del signo igual. En el trabajo de Molina (2006, 2009), estudiantes de tercero de Primaria eran sometidos a una series de sesiones en los que se les proponía actividades con sentencias de verdadero o falso. En las primeras sesiones los alumnos tendían a resolver con cálculos, pero a partir de la tercera sesión aumentaba el número de estrategias basadas en pensamiento relacional.

En resumen, para alcanzar un buen significado del signo igual los profesores deberían enfocar sus clases intentando desarrollar el pensamiento relacional, presentando los problemas y situaciones aritméticas y algebraicas de una forma global, realizando transformaciones sobre las sentencias numéricas que se plantean aunque respetando siempre las propiedades de las operaciones aritméticas. Esto se consigue proponiendo una variedad de contextos para que los niños no adquieran únicamente el significado operacional del signo igual, e integrando los distintos significados que los estudiantes le asignan en los distintos contextos en uno sólo como símbolo relacional. Los profesores deberían plantear actividades en este sentido y vigilar el significado que sus alumnos le dan al signo igual en clase, para poder suministrar la asistencia necesaria en el caso de no conseguir la interpretación relacional global del símbolo.

2. CAPÍTULO 2: MARCO EXPERIMENTAL

2.1. Objetivos e hipótesis del estudio

El objetivo principal de este trabajo es realizar una revisión de algunos libros de textos de Matemáticas de Primer Ciclo de Educación Primaria, para ver en qué contextos encuentran nuestros alumnos el signo igual al comienzo de su formación.

En el Primer Ciclo de Primaria se introducen las operaciones aritméticas por lo que se corre el riesgo de utilizar el signo igual como indicador de que hay que efectuar una operación. Esto puede provocar, como ya hemos insistido en la parte teórica, que los niños adquieran en los primeros años de escolaridad una interpretación operacional del signo igual. La comprensión y el significado que den los niños al signo igual desde el comienzo pueden ser decisivos en un aprendizaje exitoso en matemáticas. Como hemos tenido ocasión de ver, si adquieren una interpretación incompleta del signo igual desde principio, resulta difícil después desprenderse de ella. Esta situación puede complicarse aún más al final del primer ciclo cuando empiezan a trabajar las propiedades de las operaciones aritméticas. El signo igual aparece en sentencias en las que una interpretación operacional no permitiría la comprensión de dichas propiedades. Por ejemplo, si los niños se encuentran con $2 + 3 = 3 + 2$, esta sentencia será errónea para ellos, ya que sobraría '+2' en caso de tener adquirida una comprensión operacional del signo igual.

En definitiva, vamos a evaluar los contextos en los que se presenta el signo igual en los libros de texto a nuestros estudiantes, para deducir si el significado que se le va dando al signo igual a lo largo de los cursos ayuda a que los niños sean capaces de adquirir una comprensión adecuada de dicho signo.

Teniendo en cuenta esto, nuestras hipótesis son las siguientes:

1. El signo igual aparecerá principalmente en contextos aritméticos frente a los no aritméticos, ya que uno de los principales contenidos del currículo del Primer Ciclo de Primaria es la introducción de las operaciones aritméticas.

2. La mayoría de los contextos en los que va a aparecer el signo igual serán de la forma aritmética canónica, es decir, encontraremos una operación aritmética al lado izquierdo del signo cuya solución se colocará a la derecha (i.e. $2 + 3 = 5$).
3. En general, basándonos en los estudios previos, se espera una gran cantidad de situaciones en las que el signo igual funcione como operador.

2.2. Metodología

Materiales

Se utilizarán los libros de texto de cuatro de las editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid. Para ello, seleccionamos los últimos proyectos o series que se han editado en cada una de las editoriales (ver Tabla 1) y como ya hemos mencionado, el estudio se centrará en Primer Ciclo de Primaria.

TABLA 1*: Editoriales y proyectos de los libros de texto analizados.*

Editorial	**Proyecto**	**Curso**	**Año**
Vicens Vives	Mundo de Colores	1º y 2º	2008, 2009
Anaya	Salta a la vista	1º y 2º	2007
SM	Trampolín	1º y 2º	2007
Bruño	Lapiceros	1º y 2º	2008

Procedimiento

Realizaremos un estudio cualitativo, analizando y describiendo los diferentes contextos en los que aparece el signo igual en algunos libros de texto.

Basándonos en los estudios previos (McNeil et al., 2006, Seo & Ginsburg, 2003) hemos elaborado una clasificación de los posibles contextos en los que puede aparecer el signo igual.

1) Contextos Aritméticos.

   a) Contexto Aritmético Canónico:

      i) **Operación igual resultado**. Encuadraremos aquí sentencias del tipo a + b = c pudiendo ser la incógnita cualquiera de las cantidades (i. e., a, b o c), y la operación suma, resta, multiplicación, incluso división ya que al final de Segundo Curso de Primaria hay editoriales que la introducen.

b) Contextos Aritméticos no Canónicos:

  i) **Operaciones en ambos lados del signo igual**. En este caso, se incluyen sentencias con **la misma operación en ambos lados del signo igual** (p.e. a + b = c + d), o con **diferente operación en ambos lados del signo igual** (p.e. a × b = a + a + a (b veces)). En segundo de Primaria se estudian las tablas de multiplicar que en su definición se introducen como una suma reiterada (i.e., 2 + 2 + 2 = 3 ×2) y los recogeremos en este ítem.

  ii) **Resultado igual operación**: a = b + c, pudiendo ser la incógnita cualquiera de las cantidades (i.e., a, b o c) y la operación suma, resta, multiplicación y división.

2) Contextos no Aritméticos.

  a) **Comparación de cantidades:** a = a.

  b) **Contextos de medida**: p.e., 1 metro = 10 decímetros o 1 regleta roja = 2 regletas blancas.

  c) **Contextos de equivalencia de monedas**: p.e., 1 euro = 100 céntimos.

  d) **Sistema numérico decimal**: p.e., 400 unidades = 4 centenas.

  e) **Otros contextos no aritméticos**: p.e., a = 1.

Esta clasificación separa los contextos aritméticos de los no aritméticos. El análisis de los contextos no aritméticos permitirá estudiar si existen situaciones en los libros de texto en las que los niños tienen la oportunidad de dar un significado relacional al signo igual (i. e.; el de medida y la equivalencia de monedas como vimos anteriormente en el trabajo de Seo y Ginsburg). Los contextos aritméticos ayudarán a su vez a deducir si los libros de texto favorecen un sentido operacional o relacional al signo igual en situaciones aritméticas. Por ejemplo, como vimos en el trabajo de McNeil (2006), el contexto 'operaciones a ambos lados del signo igual' ayuda a dar un sentido relacional.

Teniendo en cuenta que en una misma página de un libro pueden aparecer distintas expresiones y por lo tanto, distintos contextos del signo igual, hemos analizado por separado cada una de esas situaciones. Del mismo modo, si en un ejercicio se repite varias veces, hemos tomado todas y cada una de esas veces porque incluso dentro de cada ejercicio puede variar el contexto.

En una primera revisión, analizamos el número de páginas del libro en las que aparecía el signo igual (ver Tabla 2) y como no era excesivo se decidió analizarlas todas.

TABLA 2: *Número de páginas en las que aparece el signo igual*.

Curso	*Editorial/proyecto*	*Páginas*	*Nº páginas con signo igual*	*% páginas con signo igual*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	195	63	32%
	Anaya – Salta a la vista	199	50	25%
	SM – Trampolín	192	54	28%
	Bruño	190	27	14%
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	193	71	37%
	Anaya – Salta a la vista	207	74	36%
	SM – Trampolín	207	66	32%
	Bruño	190	37	20%

2.3. Resultados y análisis

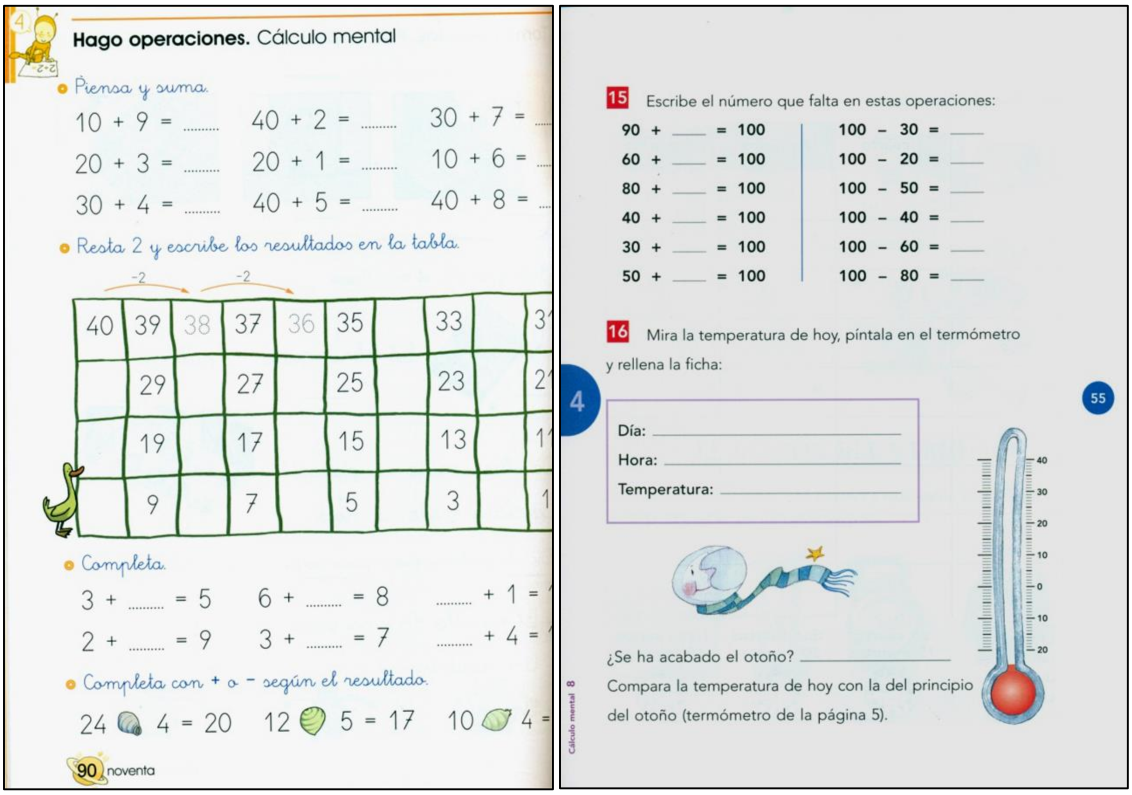
Los resultados muestran que el signo igual se utiliza en contextos aritméticos con más frecuencia que en contextos no aritméticos (ver Tabla 3). Todas las editoriales utilizan el signo igual en más de un 90% de las ocasiones en expresiones aritméticas. Sólo en la editorial Anaya no alcanza este porcentaje en segundo curso, que como veremos más adelante, se debe al gran uso de las relaciones de equivalencia del sistema numérico decimal. En todas las editoriales disminuye levemente la utilización de los contextos aritméticos en segundo curso, excepto en la editorial Bruño, aunque las diferencias entre primero y segundo en todos los casos son pequeñas.

TABLA 3: *Porcentaje de contextos aritméticos y no aritméticos*.

Curso	*Libro de Texto (Editorial)*	*Contexto Aritmético*	*Contexto no Aritmético*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	97,58	2,42
	Anaya – Salta a la vista	93,03	6,97
	SM – Trampolín	95,85	4,15
	Bruño – Lapiceros	95,63	4,37
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	96,84	3,16
	Anaya – Salta a la vista	86,26	13,74
	SM – Trampolín	94,63	5,37
	Bruño - Lapiceros	96,76	3,24

En el Primer ciclo de Primaria se introducen las operaciones aritméticas, la suma y la resta en el primer curso, y la multiplicación y en algunos casos la división en el segundo curso. Por lo tanto, se puede observar en todas las editoriales listados de actividades en las que aparece el contexto canónico ‘operación igual resultado’ con alguna de las cantidades como incógnita (ver Figura 1).

FIGURA 1: *Páginas con actividades sobre operaciones aritméticas de la editorial SM y Bruño.*



Comenzaremos nuestro análisis por los contextos aritméticos y a continuación los no aritméticos.

Contextos Aritméticos

En la Tabla 4 se recoge los porcentajes de cada uno de los contextos aritméticos por curso y editorial. El contexto *operación igual resultado* es con diferencia el más frecuente. La editorial Vicens Vives destaca por la utilización del signo igual en esta forma en los dos cursos, seguida de la editorial SM.

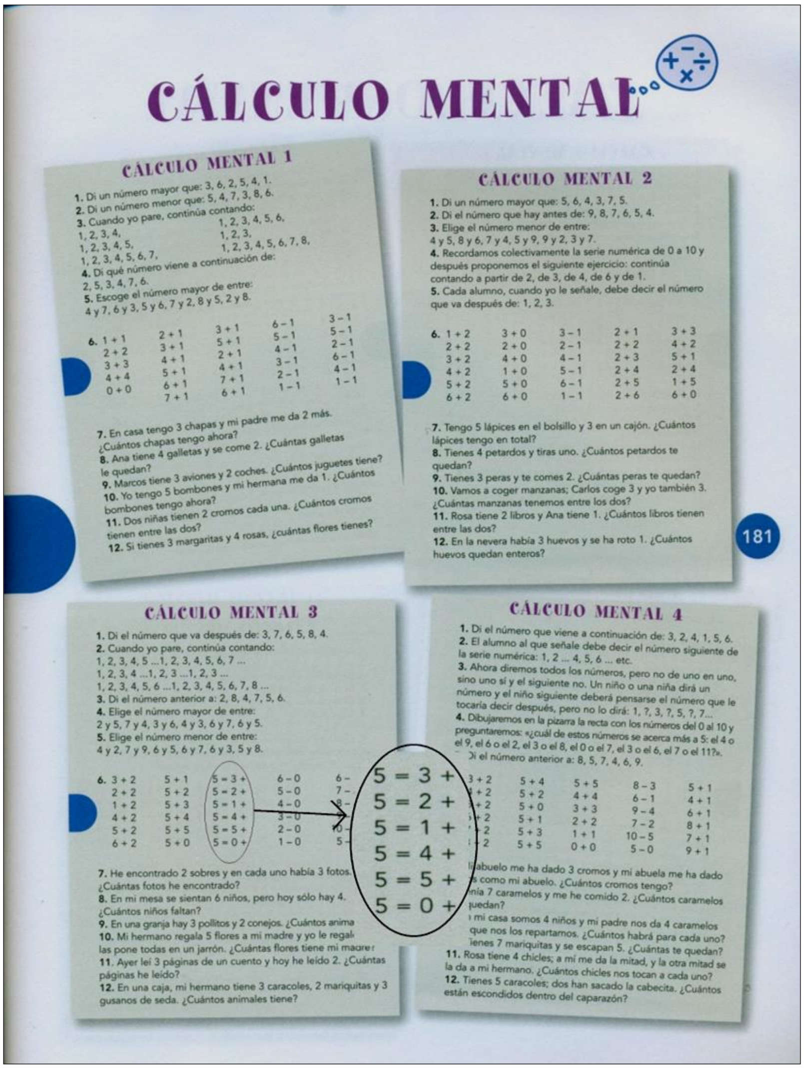
TABLA 4: *Porcentajes de los distintos contextos aritméticos.*

		SM		*ANAYA*		*BRUÑO*		*VICENS VIVES*	
		1º	*2º*	*1º*	*2º*	*1º*	*2º*	*1º*	*2º*
Operación = resultado		93,43	86,58	84,43	69,53	61,88	85,98	96,54	96,67
Operación ambos lados(*)	misma operación	1,39	0	0	3,43	0	2,88	0	0
	distinta operación	0	6,88	0	8,58	0	0	0	0
	TOTAL	1,38	6,88	0	12,02	0	2,88	0	0
Resultado = Operación		1,04	1,18	8,61	4,72	33,75	7,91	1,04	0,18

(*) En el contexto operación en ambos lados hemos separado las situaciones en las que las operaciones que aparecían a ambos lados eran del mismo tipo (i.e., las dos sumas), o si eran de distintos tipo (i.e., una suma y la otra multiplicación).

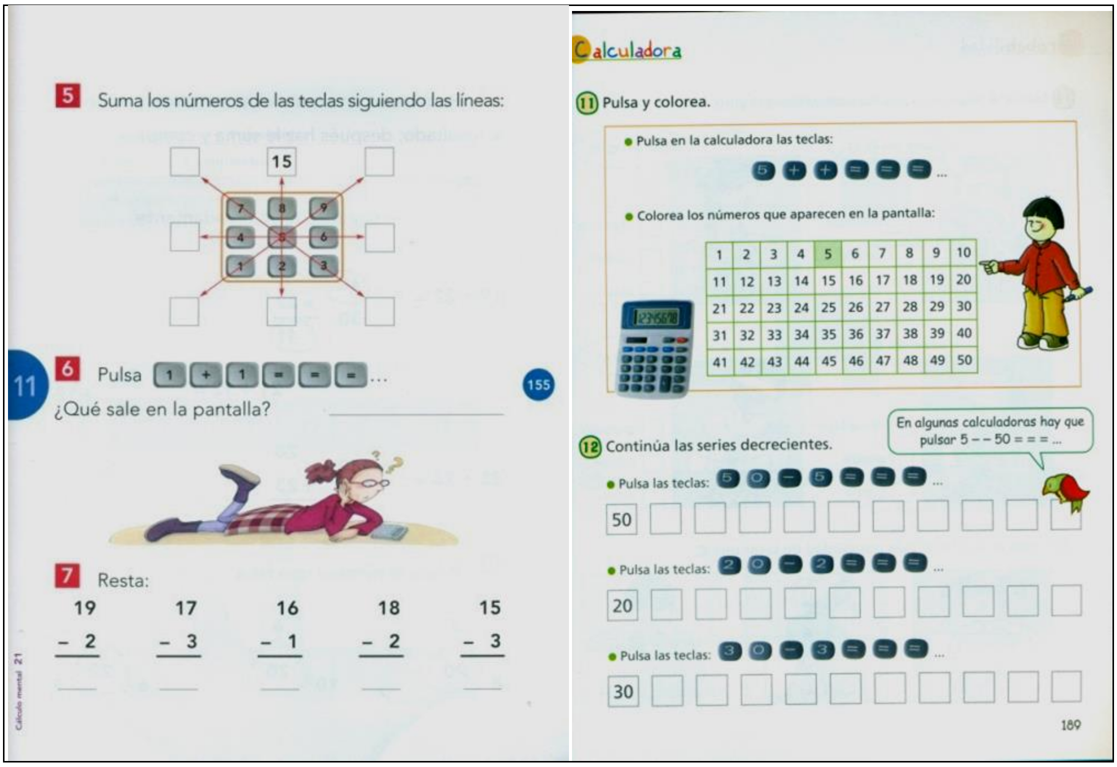
En general, parece que dicho contexto disminuye de primer curso a segundo excepto en la Editorial Bruño. El porcentaje del contexto canónico en primer curso es menor debido a la aparición del signo igual en el contexto no canónico *resultado igual operación* en las últimas páginas que se relaciona con el cálculo mental (ver Figura 2). El ejercicio de la forma 5 = 4 + ? utiliza el signo igual, y sin embargo, los ejercicios del tipo 1 + 2 no lo utilizan, por lo que, aunque aparecía con más frecuencia la expresión a ± b, al no estar presente el signo igual, se dispara el porcentaje del contexto que tiene la operación a la derecha.

FIGURA 2: *Páginas con ejercicios de cálculo mental del libro de primero de Ed. Bruño.*



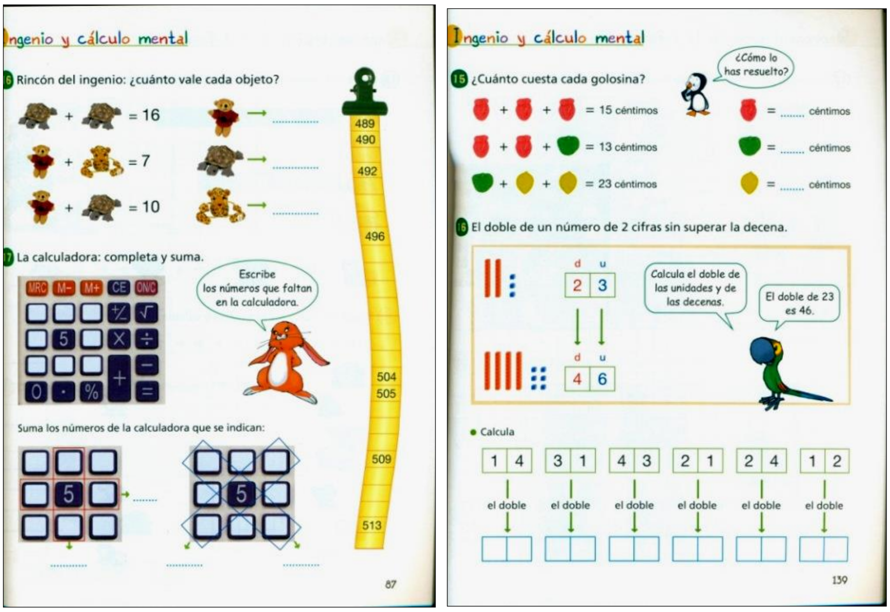
El uso del signo igual en la calculadora también se ha incluido en este contexto. Cuando realizamos un cálculo marcamos la operación y seguidamente el signo igual como indicador de buscar el resultado, lo que implica un contexto operacional para el signo igual. Este uso se puede encontrar en los dos cursos de la editorial Vicens Vives y en el segundo curso de la editorial Bruño (Figura 3).

FIGURA 3: *Calculadora en Bruño y Vicens Vives*.



En un número mínimo de ocasiones aparecen expresiones de la forma *operación igual resultado* utilizando objetos como sumandos (ver Figura 4). Por ejemplo, en la editorial de Vicens Vives utilizan un objeto que será una incógnita a la que habrá que darle un valor. O incluso, hay una actividad (ver Figura 4) en la que parece tres igualdades con varias figuras en los sumandos, en las que hay que averiguar el valor de todas las figuras, como en un sistema de ecuaciones algebraicas.

FIGURA 4. *Contextos aritméticos canónicos con imágenes en la editorial Vicens Vives.*



El hecho de que hayamos encontrado un alto porcentaje de páginas en los libros de texto en las que aparece el signo igual en la forma aritmética canónica coincide con lo visto en los trabajos anteriores. McNeil et al. (2006) encontraron que el contexto más frecuente era el contexto *operación igual resultado*, que coincide con lo aquí obtenido.

Un contexto importante para adquirir una interpretación relacional del signo igual según los estudios previos es el que tiene *operaciones en ambos lados del signo igual* (p.372). En la Tabla 5 aparecen los porcentajes de presentaciones de este contexto respecto al total de cada libro. De nuevo encontramos que este contexto aparece un número muy bajo de veces, a pesar de ser el contexto que más favorece la adquisición de un significado relacional del signo según McNeil et al. (2006), entre otros.

TABLA 5: *Porcentaje de contextos 'operación a ambos lados del signo igual' respecto al total de contextos*.

Libro de texto	*1º*	*2º*
Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0
Anaya – Salta a la vista	0	12,02
SM – Trampolín	1,38	6,88
Bruño -Lapiceros	0	2,88

Señalar en este punto que en el segundo curso se introducen las tablas de multiplicar, y la gran mayoría de los contextos con operaciones a ambos lados del signo igual eran del tipo '$a + a + a + a = 4 \times a$'. Las editoriales Vivens Vives y Bruño explican las tablas de multiplicar exponiendo en una igualdad la suma reiterada con el resultado (p.e., $3 + 3 + 3 = 6$) y en otra igualdad el producto (p.e., $3 \times 2 = 6$) como se puede ver en la Figura 5, por lo tanto el contexto con *operaciones diferentes en ambos lados del signo igual* no aparece.

Sin embargo, las editoriales Anaya y SM utilizan la igualdad entre la suma reiterada y el producto del número de veces que se suma el número (Figura 6). Por esta razón el porcentaje de apariciones de este contexto es mayor.

FIGURA 5: *Multiplicación en Vicens Vives.*

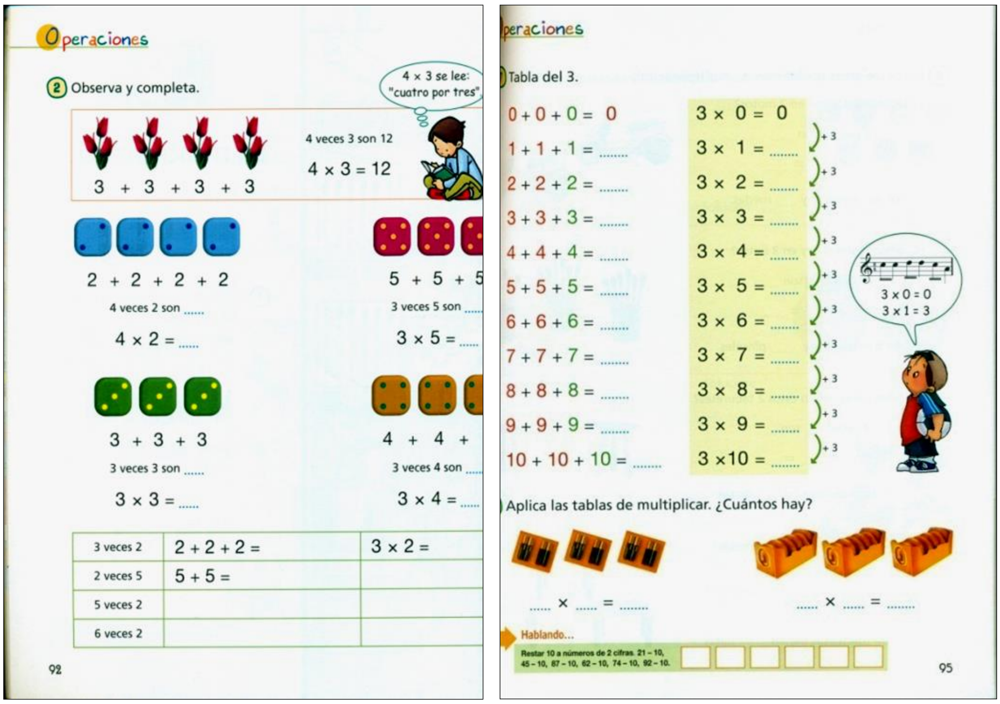
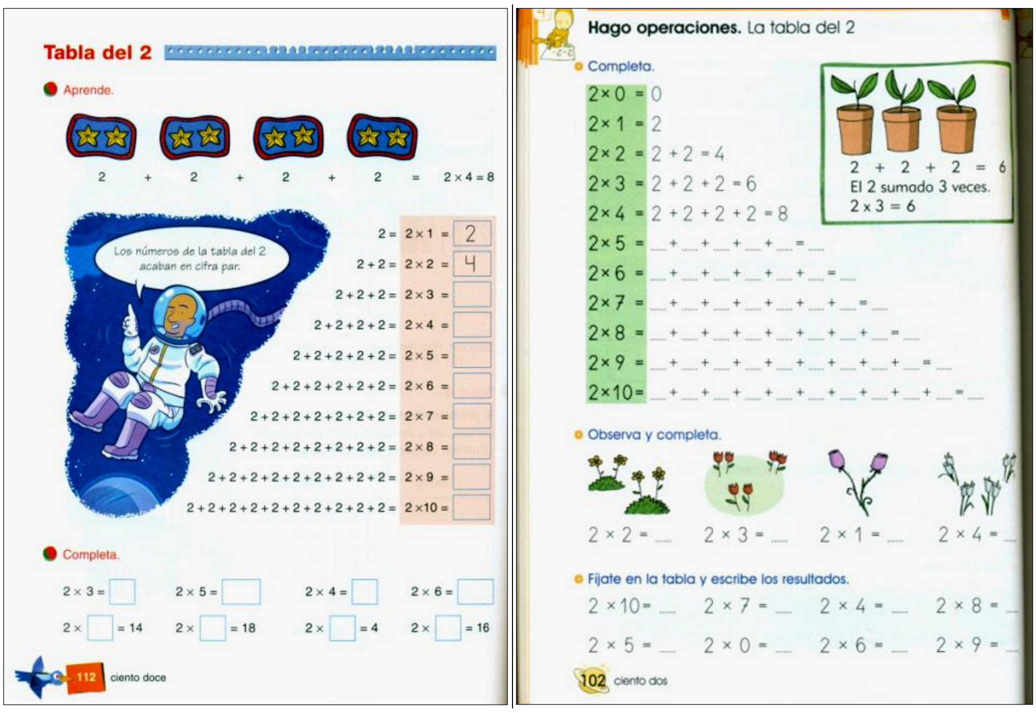
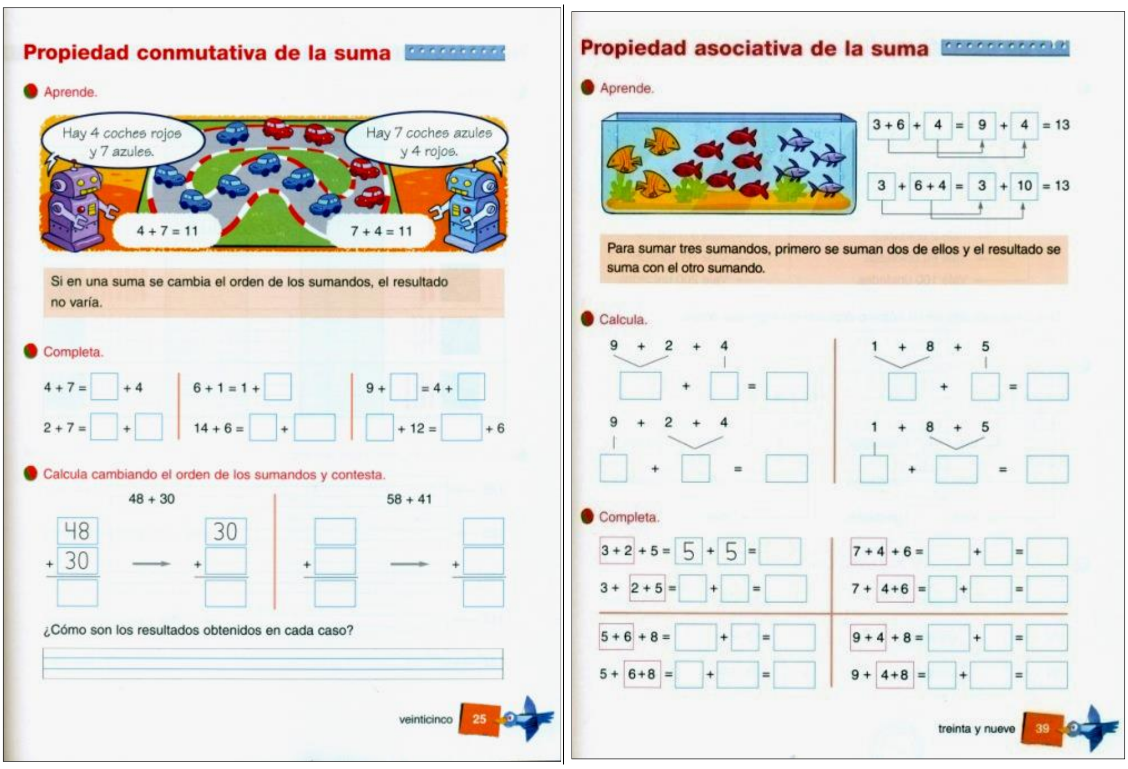


FIGURA 6: *Multiplicación en Anaya y SM.*



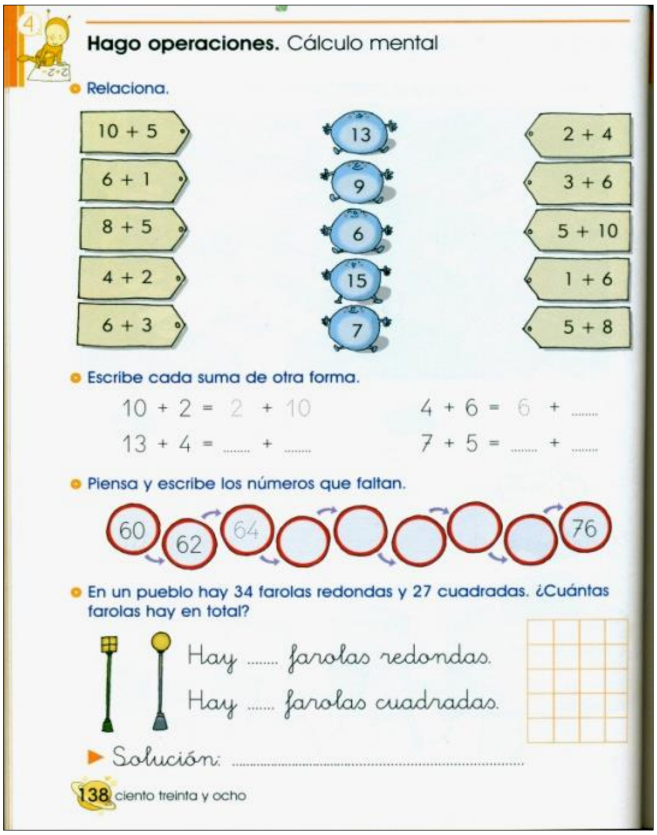
La editorial Anaya recurre también al contexto *operaciones en ambos lados del signo igual*' en la definición de las propiedades conmutativa y asociativa (ver figura 7).

FIGURA 7: *Propiedades conmutativa y asociativa en Ed. Anaya*.



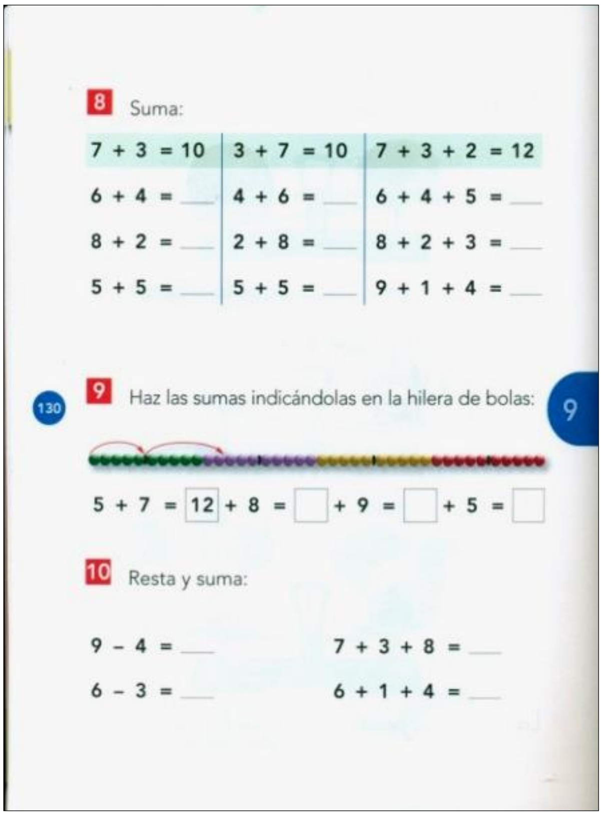
En el libro de primero de SM se muestran sentencias que los estudiantes deben completar para adquirir la propiedad conmutativa (Figura 8).

FIGURA 8: *Propiedades conmutativa en Ed. SM en primero*.



En la Editorial Bruño aparece en dos ocasiones una expresión clara de utilización unidireccional del signo igual (figura 9). Este contexto no lo podemos considerar como *operación en ambos lados del signo igual* ya que en la sentencia 5 + 7 = 12 + 8 = _ + 9 = _ + 5 = _, el signo igual no significa que el valor de la operación de la izquierda sea igual al valor de la operación de la derecha. Lo que realmente se está utilizando es el contexto *operación igual resultado* concatenado varias veces.

FIGURA 9. *Concatenación de 'operación igual resultado' en 1º de Ed. Bruño.*



Otro de los contextos que más favorecen interpretación relacional del signo igual es el contexto aritmético *resultado igual operación* según lo anterior. Los porcentajes obtenidos están recogidos en la Tabla 6.

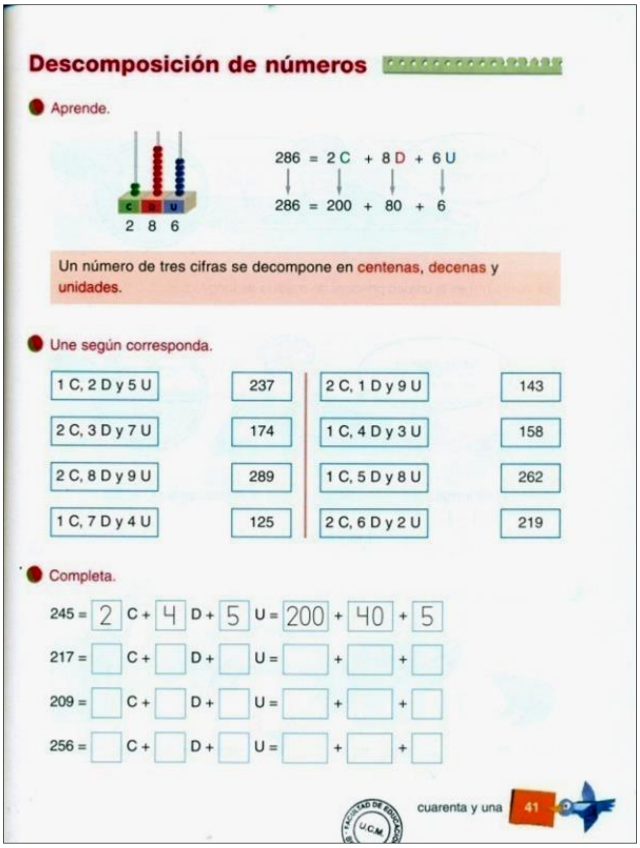
Todas las editoriales no superan un 10% de este tipo de contextos excepto la editorial Bruño. Como hemos comentado, el libro de primero de la editorial Bruño presenta un porcentaje más alto que el resto de las editoriales en el contexto *resultado igual operación*. Esto es debido a la presentación de unas actividades para ejercitar el cálculo mental en las últimas páginas de libro, aparecen ecuaciones del tipo 'a = b + _'. (Figura 2).

El resto de editoriales utiliza este contexto para descomponer números en decenas y unidades, es decir, en actividades de descomposición del sistema numérico decimal. (Figura 10).

TABLA 6: *Porcentaje de 'operación al lado derecho' respecto al total de contextos.*

Curso	*Libro de texto*	*Operación lado derecho*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04
	Anaya – Salta a la vista	8,60
	SM – Trampolín	1,04
	Bruño – Lapiceros	33,75
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,18
	Anaya – Salta a la vista	4,72
	SM – Trampolín	1,18
	Bruño - Lapiceros	7,91

FIGURA 10: *Contexto 'resultado igual operación' en actividades del sistema numérico de Ed. Bruño.*



En resumen, en los contextos aritméticos, el que más aparece en todos los libros de texto es la forma ‘operación igual resultado’ (McNeil et al., 2006, p. 372), que lleva a una interpretación operacional según hemos visto en el marco teórico.

Contexto no Aritméticos

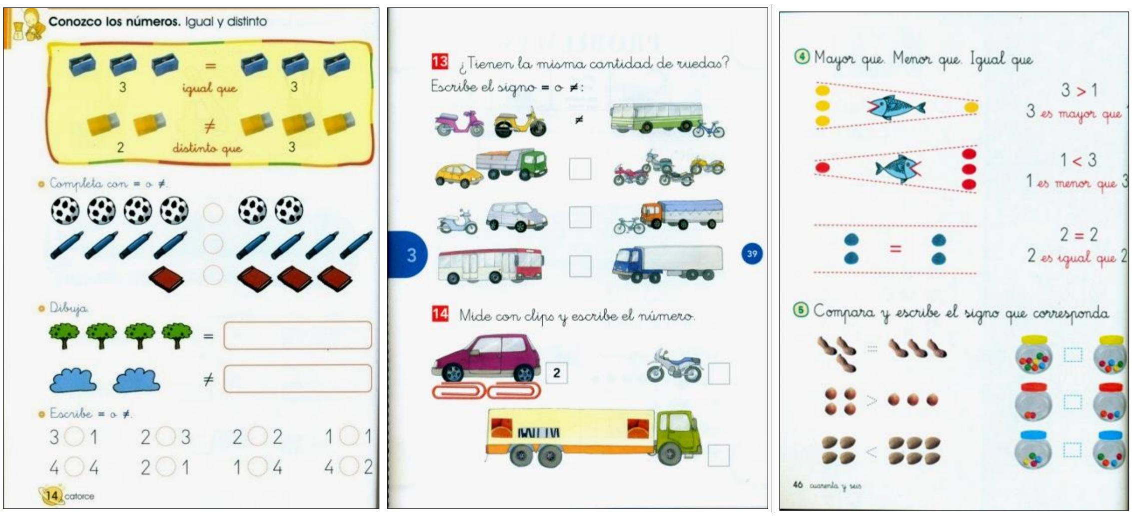
Por lo que se refiere a los contextos no aritméticos, Seo & Ginsburg (2003) concluyeron que este tipo de contextos ayudaba a los niños a construir un significado de equivalencia numérica del signo igual. En la Tabla 7 se pueden observar los porcentajes en los que aparece el signo igual en ese contexto, respecto al total en cada libro. Como se puede observar, en ninguno de los libros analizados los porcentajes son altos. El más destacado es el de la editorial Anaya, en segundo curso, en el apartado correspondiente al Sistema Numérico Decimal.

TABLA 7: *Porcentaje de los distintos contextos no aritméticos respecto al total.*

Curso	*Libro de texto*	*Comparación*	*Medida*	*Monedas*	*Sistema decimal*	*Otros*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04	0	0	1,04	0
	Anaya – Salta a la vista	0	0	0	3,69	3,28
	SM – Trampolín	3,46	0	0	0,69	0
	Bruño – Lapiceros	0,63	0	3,75	0	0
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0,35	0,18	1,93	0,70
	Anaya – Salta a la vista	0,29	2,58	0,29	10,44	0,14
	SM – Trampolín	0,17	2,01	0,17	3,02	0
	Bruño - Lapiceros	0,36	0,72	1,44	0,36	0,36

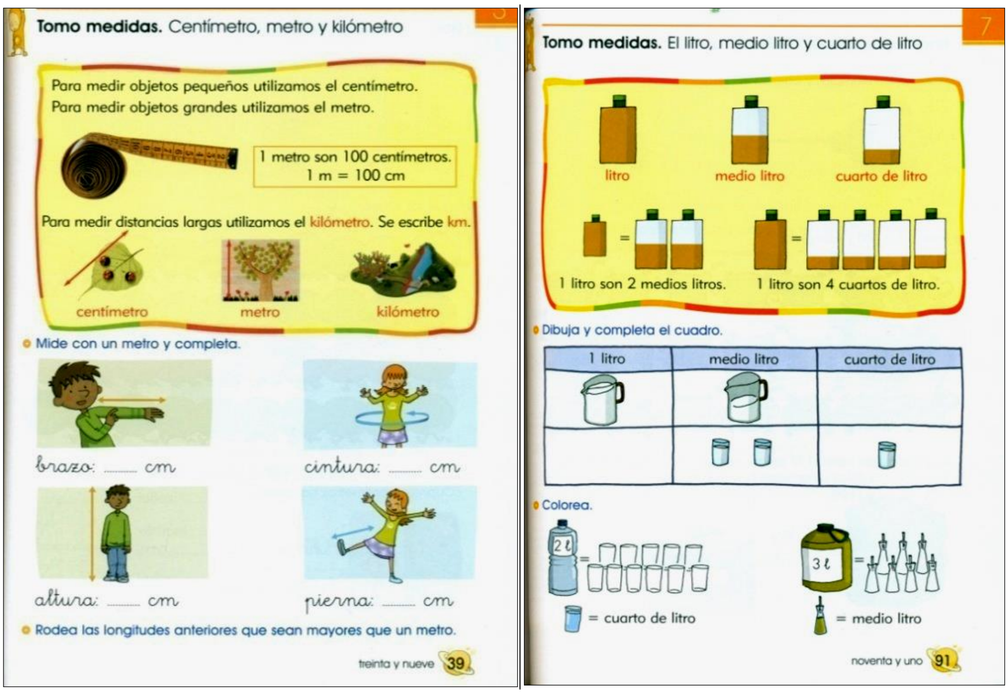
En la Editorial SM, la primera aparición del signo igual se produce en el contexto no aritmético, simplemente define los signos = y ≠ para comparar cantidades sin operaciones aritméticas. En Bruño y Vicens Vives también proponen algunas actividades para diferenciar las relaciones de igualdad, mayor que y menor que (Figura 11). Estas actividades las englobamos en el contexto de comparación y, como podemos observar en la tabla 7, obtienen un porcentaje muy bajo.

FIGURA 11. *Definición de la relación de igualdad representada por el = en SM, Bruño y Vicens Vives.*



Los contextos no aritméticos relacionados con la medida, apenas aparecen y tan solo se muestran algunos ejemplos con gráficos e imágenes que representa estas unidades y sus equivalencias (Figura 12).

FIGURA 12. *Medida en 2º de SM.*

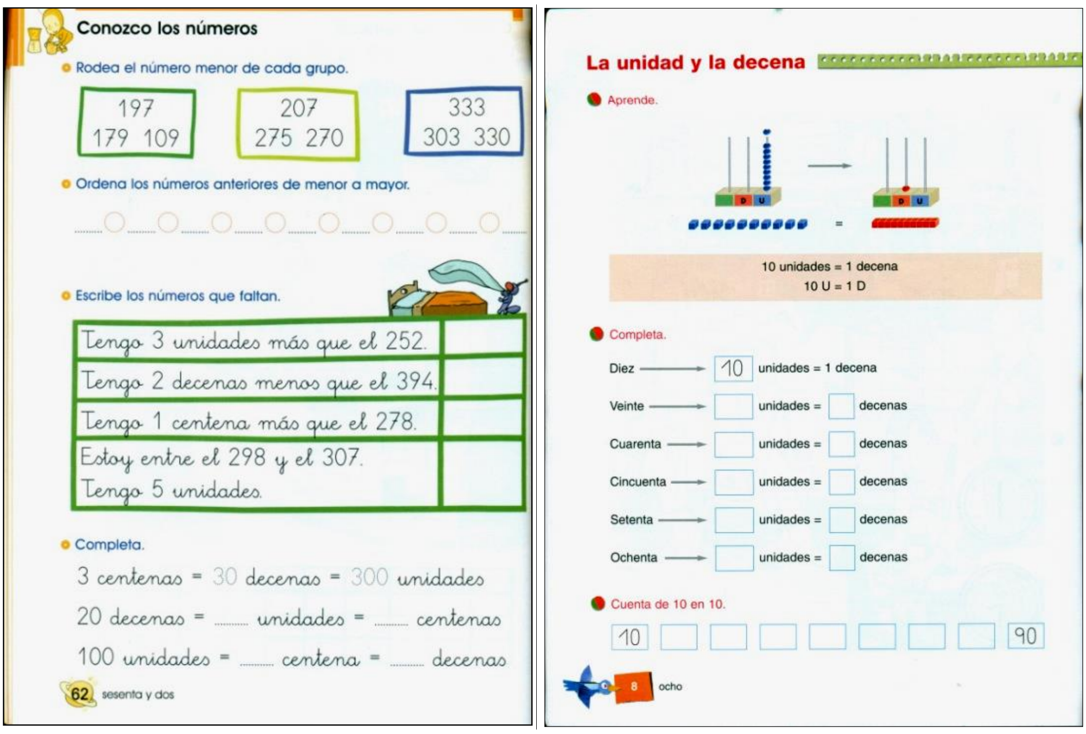


La equivalencia de monedas tampoco suele estar presente y la única referencia se produce en la editorial Bruño (Figura 13).

FIGURA 13. *Equivalencia de monedas en 1º de Ed. Bruño.*

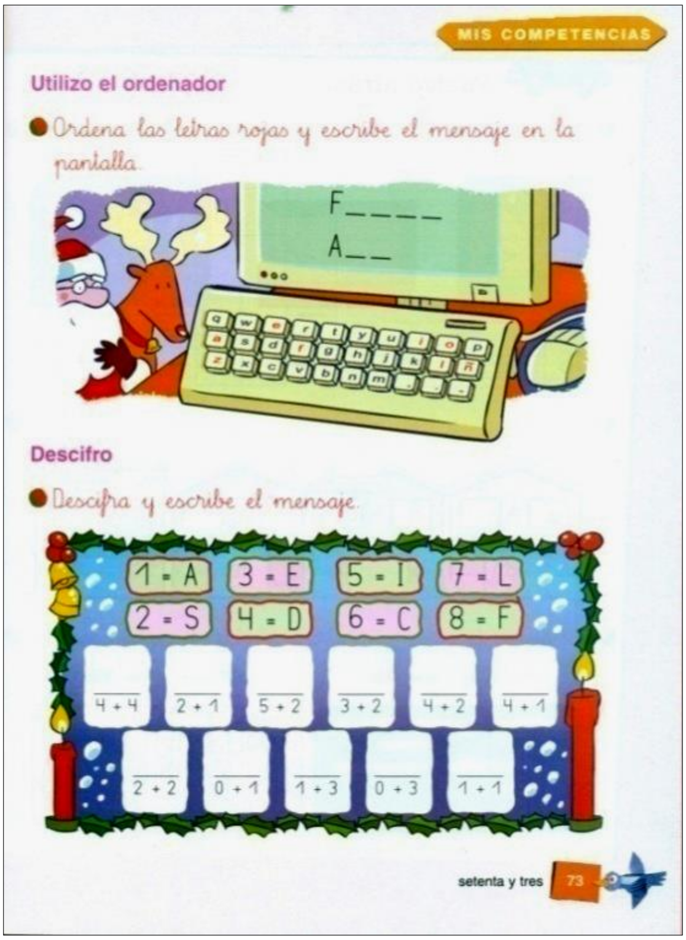
Con respecto al Sistema Numérico Decimal, las equivalencias expresadas en unidades, decenas y centenas resultan escasas (ver, figura nº 14). En el libro de segundo curso de la editorial Anaya aparecen con un porcentaje de poco más del 10% equivalencias de cantidades expresadas en unidades, decenas y centenas. Las demás editoriales no superan ninguna un 3,7% en ninguno de los cursos. Este contexto debe ser habitual en los libros de primer ciclo pues es cuando se introduce el concepto de decena, centena y millar.

FIGURA 14. *Sistema decimal en 2º de SM y Anaya*.



Por último, aparecen igualdades del tipo a = 1. Estos los clasificamos en ‘otros contextos no aritméticos’ (ver Figura nº 15).

FIGURA 15. *Otros contextos no aritméticos en 1º de ANAYA.*



2.4. Conclusiones

Los resultados obtenidos confirman la hipótesis de que la mayoría de las veces en las que aparece el signo igual en los libros de texto se produce en contextos aritméticos. Profundizando en estos contextos, los estudiantes del primer ciclo de Educación Primaria encuentran el signo igual en el contexto aritmético *operación igual resultado* mucho más frecuentemente que en los demás. Como hemos visto en la primera parte de nuestro trabajo, este contexto favorece el significado de operador del signo igual lo que les impide alcanzar una comprensión completa de la relación que representa dicho signo. Por el contrario, los contextos en los que aparecen las operaciones en ambos lados del signo igual o la operación al lado derecho apenas están presentes. Sin embargo, en los trabajos de McNeil et al. (2006) hemos tenido ocasión de ver que son estos contextos los que ayudan a los estudiantes a adquirir una interpretación relacional del signo igual.

También hemos observado que hay muy pocos contextos no aritméticos como la equivalencia de monedas, medida y comparación de cantidades, que según los trabajos de Seo & Ginsburg (2003) ayudan a percibir ese significado de relación de equivalencia numérica que tiene el signo igual.

Hemos encontrado incluso un uso indebido del signo igual en el que se concatenan varios cálculos aritméticos, lo que como vimos en los trabajos de Berh et al. (1980) conlleva a un uso unidireccional del signo igual y por tanto, una vez más un significado incorrecto del signo igual.

Como conclusión, los contextos que encontramos en los libros del primer ciclo de primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, lo que podría implicar una dificultad a la hora de adquirir un significado equivalencia numérica del signo igual. Esta comprensión como operador que parece provocar los libros de texto en primero de Primaria corre peligro de obstaculizar el aprendizaje de un significado más completo si no se expone a los alumnos a situaciones más variadas de uso del signo igual. Una instrucción basada en contextos que dan una imagen de operador del signo igual puede suponer problemas a la hora de extender su significado. No obstante, la información que llega a los niños no depende sólo de los libros de texto. En la instrucción las actividades planteadas por el profesor y otros materiales complementarios que se utilizan en el aula, pueden mostrar otra imagen diferente del signo.

En trabajos posteriores, comprobaremos si en los cursos sucesivos los contextos que aparecen en los libros de texto siguen reforzando el sentido operacional del signo o por el contrario, se presentan contextos que favorezcan una interpretación relacional. Además, analizaremos los materiales complementarios de aula y las actividades que proponen los profesores. El conjunto de todos estos factores dará una información más completa de la presencia del signo igual en la instrucción de las Matemáticas, trabajo que esperamos constituya una parte de lo que en el futuro será la Tesis Doctoral.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M. J., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, England: Heinemann.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. Madison. *ZDM*. *37*(1), 53-59.

Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the Equal Sign: Some Grade 8 and 9 Learners' Interpretations. University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. *African Journal of Research in SMT Education*, *10*(1), 47-58.

Farrington-Flint L., Canobi, K. H., Wood, C., y Faulkner, D. (2007). The role of Relational Reasoning in children's Addition Concepts. *British Journal of Development Psychology*, *25*, 227-246.

Gutiérrez, S. (2008). Robert Recorde: el creador del signo igual. *Suma 57*, 89-95.

Hunter J. (2007). Relational or Calculational Thinking: Students Solving Open number Equivalence Problems. En J. Watson & K. Beswick, *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 1*, (pp. 421-429). Massey University: MERGA.

Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. *ZDM 37*(1), 68-76.

Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M., Alibali, M.W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education 37*(4), 297-312.

McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005a). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6*, 285-306.

McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005b). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, *76*(4) 883-899.

McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.J., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-School students' understanding of the Equal sign: The Books They Read can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral.Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM072822.PDF.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Moliner, M. (2007). *Diccionario de uso del Español. Madrid*: Editorial Gredos.

Morris, A. K. (2003, Spring Edition). The Development of Children's Understanding of Equality and Inequality Relationships in Numerical Symbolic Contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25*(2), 18-51.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Seo K.H., Ginsburg, H.P (2003). "You've Got to Carefully Read de Math Sentence…": Classroom Context and Children's Interpretations of the Equal Sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skill: constructing adaptive expertise (pp. 161, 178).* Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Libros de Texto analizados

Fernández, B., Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). Matemáticas. 2º Primaria. Proyecto Trampolín. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.

Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). Matemáticas 1: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista. Madrid: GRUPO ANAYA.

Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). Matemáticas 2: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista. Madrid: GRUPO ANAYA.

Fraile, J. (2008). Matemáticas 1. Primer ciclo. Primer Curso. Mundo de Colores. Madrid: Vicens Vives.

Fraile, J. (2009). Matemáticas 2. Primer ciclo. Segundo Curso. Mundo de Colores. Madrid: Vicens Vives.

Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). Matemáticas. 1 Primaria. Proyecto Trampolín. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.

Torra, M. (2008). Matemáticas 1. Educación Primaria, Primer Ciclo. Lapiceros. Madrid: Bruño.

Torra, M. (2008). Matemáticas 2. Educación Primaria, Primer Ciclo. Lapiceros. Madrid: Bruño.