UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Compacidad débil en espacios de funciones y medidas vectoriales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Carmen Fierro Bello

DIRECTOR:

Fernando Bombal Gordon

Madrid, 2015

Carmen Fierro Bello

COMPACIDAD DEBIL EN ESPACIOS DE FUNCIONES Y MEDIDAS VECTORIALES

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 155/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-25398-1982

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

MADRID

"COMPACIDAD DEBIL EN ESPACIOS DE FUNCIONES Y MEDIDAS VECTORIALES"

Memoria presentada para optar
al Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas

Carmen Fierro Bello

Agradezco al Profesor Fernando Bombal Gordón, director de este trabajo, sus valiosas orientaciones y la ayuda que continuamente me ha prestado.

También quiero expresar mi agradecimiento a los compañeros del Departamento de Teoría de Funciones que tanto me han ayudado y animado durante su realización.

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo de esta memoria es el estudio de algunas cuestiones de compacidad débil en ciertos espacios de funciones y medidas con valores en un espacio de Banach: es decir, en los espacios de funciones integrables-Bochner $L^p(\lambda,E)$, siendo $1 \leq p < +\infty$, λ una medida positiva y acotada sobre una σ-álgebra, y E un espacio de Banach; y en los espacios de medidas numerablemente aditivas sobre una σ-álgebra Σ, con valores en E, $Ca(\Sigma,E)$. Como caso particular especialmente interesante de este último, se estudia el espacio de 'medidas de Radón' acotadas sobre un compacto X, con valores en el dual E' de E ; $M(X,E')$, que es el dual del espacio $C(X,E)$ de las funciones continuas de X en E, dotado de la norma del supremo. Este estudio permite una serie de aplicaciones interesantes a algunas clases de operadores en $C(X,E)$, con valores en otro espacio de Banach: principalmente, la de los operadores débilmente compactos.

El tipo de problemas que se abordan en esta memoria fueron resueltos para el caso escalar en los años cincuenta, de los que datan los distintos resultados clásicos de Grothendieck |14| y Bartle, Dunford y Schwartz | 1 |, que establecieron las primeras caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$; $Ca(\Sigma)$ y $M(X)$, junto con la correspondiente caracterización de los operadores débilmente compactos en $C(X)$. Sin embargo, el análisis del caso vectorial es bastante más reciente, pese a que bastantes de sus problemas se encuentran ya planteados en el tratado clásico de Dinculeanu |10| (Notas al III$^{\underline{er}}$ Capítulo) , junto con la resolución para algunos casos restrictivos. La primera extensión completa al caso vectorial puede ser, quizás, la que se encuentra en el artículo de Brooks | 7 |, de 1972, que demuestra para Ca(Σ,E) , dónde E es un espacio de Banach reflexivo, el resultado establecido por Bartle, Dunford y Schwartz para Ca(Σ).. Dos años más tarde, Brooks y Lewis | 8 | publican una nueva extensión de dicho resultado al caso de que tanto E como su dual E' tengan la propiedad de Radón-Nykodim; para ello, es necesario ampliar ligeramente las hipótesis de Bartle, Dunford y Schwartz, en lo que es bajo todos los aspectos la extensión natural al caso vectorial de las condiciones necesarias en el caso escalar.

Desgraciadamente, se hizo evidente de inmediato que la exigencia de que tanto E como E' tuviesen ambos la propiedad de Radón-Nykodim limitaba de algún modo, si no el campo de validez de la caracterización, si al menos el de las demostraciones disponibles. En el mismo año 1974 se publicó un artículo de Batt | 2 | en el que se daban contraejemplos probando cómo la caracterización fallaba para algunos espacios de Banach tales que, o bien ellos o bien sus duales, carecían de la propiedad de Radón-Nykodim: e inmediatamente se vió que la hipótesis de que E tuviese dicha propiedad era estrictamente necesaria para la validez de la generalización. Aún quedaba, sin embargo, la duda de si también sucedería lo mismo para E' , o bien para este espacio la propiedad de Radón-Nykodim podría ser sustituída por alguna hipótesis más débil. Precisamente, el Capítulo II de esta memoria está básicamente dedicado a demostrar que ello no es posible; para que la extensión natural al caso vectorial de las caracterizaciones clásicas de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma,E)$ y $L^p(\lambda,E)$ sea cierta en su forma más general, es necesario (y suficiente) que tanto el espacio de Banach E como su dual E' tengan ambos la propiedad de Radón-Nykodim.

Este resultado hace sospechar que, si es posible dar caracterizaciones manejables para tales conjuntos en el caso vectorial, las mismas habrán de buscarse en direcciones distintas a las intentadas hasta ahora, basadas en la extensión natural desde el caso escalar. Además, precisamente en el capítulo ya citado de la memoria, se prueba que tales extensiones lo que nos proporcionan son caracterizaciones de la compacidad relativa para topologías que serán en muchos casos estrictamente menos finas que la débil.

Como ya hemos indicado, el estudio de subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma,E)$ reviste un especial interés cuando se particulariza al dual, $M(X,E')$, de $C(X,E)$, por su importancia para el estudio de los operadores débilmente compactos. Es bien sabido que, para el caso escalar, este tipo de problemática tiene su origen en el Teorema de Representación de Riesz que, al permitir identificar el dual del espacio $C(X)$ de las funciones continuas sobre un compacto X con un espacio de medidas, puso las bases para la representación de los operadores en $C(X)$ mediante funciones finitamente aditivas de conjunto a valores vectoriales. Teoremas de representación análogos, ahora para el caso vectorial, se obtuvieron bastante tempranamente: resultados de este tipo se pueden encontrar en el tratado de Dinculeanu ya citado, así como en los artículos de Batt y Berg |3|, Dobrakov |11|, etc, Y de nuevo se presenta el problema de fijar las condiciones sobre el espacio E que aseguren la validez de la extensión al caso vectorial de las caracterizaciones de las distintas clases de operadores, obtenidas para el caso escalar a partir de la representación mencionada.

En el Capítulo III de este trabajo se demuestra, precisamente, que para operadores débilmente compactos, y en estrecha relación con los resultados obtenidos en el Capítulo II, la condición necesaria y suficiente para asegurar la validez de la caracterización es que tanto E como E' tengan la propiedad de Radón-Nykodim. Sin embargo, para otros tipos de operadores, como son por ejemplo los incondicionalmente convergentes, no ha sido posible llegar a conclusiones igualmente generales, a menos de imponer nuevas restricciones, como el exigir que C(X,E) tenga la propiedad V de Pełczyński |17|. Sí se dan, en cambio, contraejemplos que prueban que tampoco para estos operadores la extensión natural de la caracterización que se tiene para el caso real es válida.

Se estudia también, en el mismo capítulo, la extensión al caso vectorial de un resultado clásico de Grothendieck |14|, que afirma que todo operador de C(X) en un espacio de Banch débilmente secuencialmente completo es débilmente compacto: resultado éste que fué extendido por Pełczyński para los espacios imagen que no contuviesen a C_0 . En 1974, Gamlen |13| probó que el teorema original de Grothendieck seguía siendo cierto para C(X,E) , supuesto que E' tuviese la propiedad de Radón-Nykodim: hipótesis ésta que, tal y como hemos demostrado, se puede rebajar a la de que E no contenga subespacio alguno isomorfo a l^1 .

Se ha mencionado ya que, a menos que el espacio de Banch E y su dual tengan ambos la propiedad de Radon-Nykodim, las caracterizaciones válidas en el caso escalar de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^p(\lambda)$ y $Ca(\Sigma)$ no se prestan a una extensión natural a $L^p(\lambda,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$; y tampoco han tenido éxito los ya numerosos intentos de buscar otros tipos de caracterización. Y, sin embargo, tal y como se estudia en el Capítulo IV de esta memoria, la caracterización es posible, en términos bastante sencillos, cuando $E = l^1$: ejemplo quizás el mejor conocido de un espacio que tiene la propiedad de Radón-Nykodim, careciendo de ella su dual. Ello hace posible proporcionar demostraciones directas de una serie de resultados, tales como la completitud secuencial débil de los $L^p(\lambda,l^1)$ para $1 \leq p < +\infty$ y $Ca(\Sigma,l^1)$, o el tener $L^1(\lambda,l^1)$ la propiedad de Dunford-Pettis, que eran conocidos principalmente gracias a argumentos indirectos. Desgraciadamente, y debido a la peculiar estructura de l^1 , el sistema de caracterización empleado parece poco susceptible de ampliación a otros espacios.

Damos a continuación un resumen del contenido de los diversos capítulos de esta memoria.

CAPITULO I:

1. Se definen los conceptos de función finitamente aditiva de conjunto, variación, semivariación y medida vectorial, y se dá un resumen de los principales resultados conocidos sobre estos tópicos.
2. Se definen los espacios $A(\Sigma,E)$, $P(\Sigma,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$, y se resumen sus propiedades más importantes: en el caso del segundo, se de-

muestran también algunas que no se han podido encontrar en la bibliografía consultada.

3. A título de referencia, se dá un resumen de los tópicos esenciales relativos a los espacios de funciones integrables-Bochner, $L^p(\lambda,E)$.
4. Se define el espacio $C(X,E)$, y se pasa revista a la teoría de representación de su dual como el espacio de medidas $M(X,E')$, así como a la de representación de operadores de $C(X,E)$ en otro espacio de Banach, mediante funciones finitamente aditivas de conjunto.

CAPITULO II:

1. Se definen las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P: esencialmente, el que un espacio de Banach E las tenga equívale a que en $L^p(\lambda,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$, respectivamente, sea válida la extensión des de el caso escalar de la caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos. Se estudian las propiedades de invarianza y localización de $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P, así como las relaciones entre ellas. En particular, se demuestra que si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$ y λ medida finita y positiva, E ha de tener la propiedad de Radón-Nykodim respecto de λ, y además, si λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, E no puede contener ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1.
2. Se demuestra que, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 < p < +\infty$, entonces $L^p(\lambda,E)$ no puede tener ningún subespacio isomorfo a l^1. Este resultado, junto con los de la sección anterior y la caracterización de Rosenthal de los espacios que no contienen copias (isomorfas) de l^1, permíte llegar al resultado principal: si λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, y E tiene la propie-

dad $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$, entonces E y E' tienen ambos la propiedad de Radón-Nykodim. Se sigue como corolario inmediato que también las propiedades P_p , $1 \leq p < +\infty$, y P son equivalentes a que tanto E como E' tengan la propiedad de Radón-Nykodim, y por lo tanto tan sólo en este caso son válidas las extensiones a $L^p(\lambda,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$, para cualesquiera medidas positivas y acotadas λ , $1 \leq p < +\infty$, y σ-álgebras Σ , de las caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos que se tienen en el caso escalar.

3. Se caracterizan los subconjuntos relativamente compactos en $Ca(\Sigma,E)$ para la topología de la convergencia puntual sobre el espacio de funciones acotadas y medibles-Bochner respecto de la σ-álgebra Σ , así como en $L^p(\lambda,E)$, con $1 \leq p < +\infty$, respecto de la topología de la convergencia puntual sobre el espacio $L^q(\lambda,E')$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, cuando E tiene la propiedad de Radón-Nykodim; y se estudian las relaciones existentes con las propiedades $P(\Sigma)$ y $P_p(\lambda)$, respectivamente. Se demuestra también que, si el espacio E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 < p < +\infty$, y es débilmente compactamente generado, también $L^p(\lambda,E)$ es débilmente compactamente generado.

CAPITULO III:

1. Se demuestra que, fijados un espacio topológico compacto y separado X , y un espacio de Banach E , el que los operadores débilmente compactos $T : C(X,E) \longrightarrow F$, con F espacio de Banach cualquiera, estén caracterizados porque su 'medida asociada' m toma valores en el espacio de los operadores débilmente compactos de E ..

en F , y es de semivariación continua en el vacío, equivale a que E' tenga la propidad $P(\beta_a(X))$, siendo $\beta_a(X)$ la σ-álgebra de Baire en X . Por lo tanto, fijado E , dicha caracterización es cierta para cualquier compacto separado X (o, en particular, para $X = [0,1]$) sí y sólamente si E' y E'' tienen la propiedad de Radón-Nykodim.

2. Se estudian los operadores incondicionalmente convergentes de $C(X,E)$, con X compacto separado, en un espacio de Banach cualquiera F . En particular, se demuestra que si $C(X,E)$ tiene la propiedad V de Pełczyński (es decir, los operadores débilmente compactos e incondicionalmente convergentes sobre $C(X,E)$ coinciden) , dichos operadores están caracterizados porque su medida asociada toma valores en el espacio de las aplicaciones lineales incondicionalmente convergentes de E en F , y es de semivariación continua en el vacío, si y sólo si E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$. Ello proporciona un contraejemplo a la conjetura de Swartz de que tales propiedades caracterizasen a lo operadores incondicionalmente convergentes en $C(X,E)$ para cualquier espacio de Banach F.
3. Esta sección está dedicada fundamentalmente a demostrar que, cuando E y F son espacios de Banach tales que E no contien ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1 , y F es débilmente secuencialmente completo, entonces todo operador dontinuo de $C(X,E)$ en F es débilmente compacto, siendo X un compacto separado cualquiera.

CAPITULO IV:

1. Se dán distintas caracterizaciones de la convergencia débil y los subconjuntos débilmente relativamente compactos del espacio

$L^1(\lambda, l^1)$, con λ medida finita y positiva, junto con demostraciones directas de la completitud secuencial débil y la propiedad de Dunford-Pettis de dicho espacio.

2. Se realiza un estudio similar de la topología débil en los espacios $L^p(\lambda, l^1)$, con $1 < p < +\infty$.
3. Se caracterizan los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma, l^1)$.
4. Se utilizan los resultados de la sección anterior para estudiar los operadores en $C(X, C_0)$, con X compacto y separado; en particular, se caracteriza la clase de los operadores débilmente compactos.

CAPITULO I

En el presente capítulo, aparte de establecer la notación que utilizaremos a lo largo de la memoria, daremos toda una serie de resultados previos sobre ciertos tópicos.

Muchos de tales resultados son ya conocidos, y aparecen acompañados por las referencias correspondientes; otros quizás lo sean, aunque no hemos podido encontrarlos de modo explícito en la bibliografía consultada. Sin embargo, todos ellos tienen en común su carácter técnico, de instrumentos que han de sernos útiles en el desarrollo posterior de la memoria.

Sea E un espacio de Banach. Indicaremos por:

- $B_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, la bola unidad de E

- E', el dual topológico de E, con su norma dual, que es a su vez un espacio de Banach.

- $\sigma(E,H)$, la topología en E de la convergencia puntual sobre los elementos de H, donde éste es un subconjunto cualquiera de E'. En particular, llamaremos a $\sigma(E,E')$ topología débil en E, y a $\sigma(E',E)$ topología débil* en E'.

- $L(E,F)$, el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en otro espacio de Banach F, con la normal usual:

  $\|u\| = \sup\{\|u(x)\| \mid x \in B_E\}$, $\forall u \in L(E,F)$. Es sabido que, en dicha norma, $L(E,F)$ es a su vez un espacio de Banach.

- $\mathbb{K}$ indicará siempre al cuerpo de escalares, supuesto $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

1. Funciones finitamente aditivas de conjunto

Sean: Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto X; E y F dos espacios de Banach. Dada una aplicación:

$m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, que llamaremos genéricamente función de conjunto , diremos que m es una función finitamente aditiva de conjunto, si verifica que:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad \forall A,B \in \Sigma, \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Se dice que una función finitamente aditiva de conjunto m es una medida si, para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ de conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene:

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n), \quad \text{siendo} \quad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \text{donde la convergencia}$$

tiene lugar en la norma de $L(E,F)$.

Dada una función finitamente aditiva de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, le asociamos canónicamente las siguientes funciones de conjunto:

a. $|m| : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, semivariación de m, definida según:

$$\forall A \in \Sigma, \quad |m|(A) = \sup \{\| \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i) \| \;/\; \{A_1,\dots,A_n\} \text{ partición de } A \text{ en } \Sigma, \; x_1,\dots,x_n \in B_E\}$$

donde la palabra "partición" se considerará siempre en el sentido de "partición disjunta", es decir, $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es una partición de A en Σ si: $A_i \in \Sigma$ $\forall i=1\ldots n$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$, y $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

b. $v(m) : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, variación de m, definida según:

$$\forall A \in \Sigma, \quad v(m)(A) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \|m(A_i)\| \ / \{A_1,\ldots,A_n\} \text{ partición de } A \text{ en } \Sigma\}$$

c. $m_x : \Sigma \longrightarrow F = L(\mathbb{K},F)$ $\quad \forall x \in E$

$A \longrightarrow m(A)(x)$

d. $m_{y'} : \Sigma \longrightarrow E' = L(E,\mathbb{K})$, $\forall y' \in F'$, definida según:

$$\forall A \in \Sigma, \quad \langle x, m_{y'}(A)\rangle = \langle m(A)(x), y'\rangle \quad \forall x \in E$$

Estas funciones de conjuntos, asociadas a m, poseen las siguientes propiedades, cuya demostración se puede encontrar, p.ej., en |10|, I.§3 y I.§4:

1. Proposición: Dada una función finitamente aditiva de conjunto, $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, se tiene:

a. $|m|$ es una submedida, es decir, verifica:

i) $|m|(\emptyset) = 0$

ii) $|m|(A \cup B) \leq |m|(A) + |m|(B)$ $\quad \forall A,B \in \Sigma$

iii) $|m|(A) \leq |m|(B)$ $\quad \forall A,B \in \Sigma$ tales que $A \subset B$.

y $\|m(A)\| \leq |m|(A)$ $\quad \forall A \in \Sigma$.

b. $v(m)$ es una función finitamente aditiva de conjunto, y $|m|(A) \leq v(m)(A) \quad \forall A \in \Sigma$. Además, si m es una medida, $v(m)$ también lo es.

c. $\forall x \in E$, $\forall y' \in F'$, m_x y $m_{y'}$ son funciones finitamente aditivas de conjuntos que serán medidas de serlo m y, $\forall A \in \Sigma$, se tiene:

$$|m_x|(A) \leq \|x\| \quad |m|(A); \qquad |m_{y'}|(A) \leq \|y\| \quad |m|(A);$$

$$|m|(A) = \sup \{|m_{y'}|(A) \mid y' \in B_{F'}\}$$

d. Siempre que $F = \mathbb{K}$, se tiene que $|m| = v(m)$. En particular, $\forall y' \in F'$, $v(m_{y'}) = |m_{y'}|$, y por conveniencia utilizaremos esta última notación.

En cuanto sigue, jugarán un paped primordial las funciones finitamente aditivas de conjunto m de semivariación acotada, es decir, tales que existe $M > 0$, con $|m|(A) \leq M \quad \forall A \in \Sigma$ (o equivalentemente, tales que $|m|(X) < +\infty$, debido a la propiedad (a - iii) de la proposición anterior). En este sentido, la semivariación asociada a una función finitamente aditiva de conjunto es una función de conjunto a valores positivos que será útil para estudiar su comportamiento, pero presenta el grave inconveniente de no ser, en general, una medida, ni siquiera en el caso de que la función finitamente aditiva de conjunto lo sea. Este es un inconveniente que no tiene, en cambio, la variación, aunque si presenta el de no ser finita ni aún en el caso en que la función finitamente aditiva de conjunto tenga semivariación acotada.

Para obviar ambos inconvenientes, convendría asociar a una función finitamente aditiva de conjunto m, una medida positiva y finita que de algún modo permita interpretar el comportamiento de m. Para ello, utilizaremos los siguientes conceptos:

Dada una función finitamente aditiva de conjunto, $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, diremos que su semivariación es <u>continua en $\emptyset$</u> si, para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, tal que $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} |m|(A_n) = 0$. Y diremos que la medida positiva $\lambda: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una <u>medida de control</u> para m si verifica: $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} |m|(A) = 0$ y $\lambda(A) \leq |m|(A)$ $\forall A \in \Sigma$.

Se tiene entonces el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse, p.ej., en | 9 |, I.1.18 y I.2.4. (teniendo en cuenta, naturalmente, que si la semivariación de m es continua en $\emptyset$, entonces m es una medida):

<u>2. Teorema</u>. Dada la función finitamente aditiva de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, de semivariación acotada, son equivalentes:

i) $|m|$ es continua en $\emptyset$.

ii) la familia $\{|m_{y'}| \ /y' \in B_{F'}\}$ es <u>equicontinua en $\emptyset$</u>, es decir $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, tal que $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} |m_{y'}|(A_n) = 0$ uniformemente en $y' \in B_{F'}$.

iii) La familia $\{|m_{y'}|/y' \in B_{F'}\}$ es <u>equiexhaustiva</u>, es decir, $\forall\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, $\lim\limits_{n\to\infty} |m_{y'}|(A_n) = 0$ uniformemente en $y' \in B_{F'}$.

iv) La familia $\{|m_{y'}| \ / y' \in B_{F'}\}$ es <u>uniformemente σ-aditiva</u>, es decir, $|m_{y'}|$ es una medida $\forall y' \in B_{F'}$, y $\forall\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en Σ de conjuntos disjuntos dos a dos,
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |m_{y'}|(A_n) = 0 \quad \text{uniformemente en } y' \in B_{F'}.$$

v) m posee una medida de control $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Resulta interesante recordar aquí un resultado clásico, el Teorema de Orlicz-Pettis, del que haremos uso más adelante, y cuya demostración se puede encontrar, p.ej., en |12|, IV.10.1:

<u>3. Teorema</u>. Sea la función finitamente aditiva de conjunto $\mu : \Sigma \longrightarrow E = L(K,E)$. μ es una medida si y sólo si $\mu_{x'}$ es una medida $\forall x' \in E'$.

2. <u>Espacios $A(\Sigma,E)$, $F(\Sigma,E)$ y $ca(\Sigma,E)$</u>

Fijemos la σ-álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto X, y el espacio de Banach E.

Definimos $A(\Sigma,E)$ como el espacio de las 'funciones simples' a valores en $E : f : X \longrightarrow E$; donde $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i}$, con $x_1,\dots,x_n \in E$ y $\{A_1,\dots,A_n\}$ partición de X en Σ, siendo χ_A la función característica del conjunto A.

$A(\Sigma,E)$ es trivialmente un espacio vectorial, al que dotamos de la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup \{\|f(t)\| \ / t \in X\} = \text{máx} \ \{\|x_i\| \ / i=1,\ldots,n\},$$
$$\forall f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i} \in A(\Sigma,E).$$

Dado un segundo espacio de Banach F, y $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$ función finitamente aditiva de conjunto de semivariación acotada, se puede definir el operador:

$$A(\Sigma,E) \longrightarrow F$$
$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i} \longrightarrow \int_X fd\ m = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i)$$

que trivialmente es lineal, y además verifica:

a) $\forall f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i}$, $\left\|\int_X fd\ m\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i)\right\| \leq \|f\|_\infty |m|(X)$,
es decir, el operador es continuo, y se puede comprobar que su norma coincide con $|m|(X)$.

b) Si se define, $\forall A \in \Sigma$, $\int_A fdm = \int_X \chi_A \cdot fdm \quad \forall f \in A(\Sigma,E)$ (que está bien definido, pues $f \in A(\Sigma,E)$ y $A \in \Sigma \Longrightarrow \chi_A \cdot f \in A(\Sigma,E)$),
se tiene que: $m_f : \Sigma \longrightarrow F = L(K,F)$
$$A \longrightarrow \int_A fdm$$
es una función finitamente aditiva de conjunto, de semivariación acotada, verificando además: $\forall A \in \Sigma$, $|m_f|(A) \leq \|\chi_A \cdot f\|_\infty \cdot$
$\cdot \ |m|(A)$.

Definimos $F(\Sigma,E)$ como el espacio de las funciones $f : X \longrightarrow E$ que son límite puntual de una sucesión acotada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$.

$F(\Sigma,E)$ es un espacio vectorial, y se comprueba sin mayor dificultad la siguiente caracterización:

4. Proposición. Una función $f : X \longrightarrow E$ pertenece a $F(\Sigma,E)$ si y sólo si verifica:

i) f está acotada

ii) f toma valores en un subespacio vectorial separable de E.

iii) $\forall G$ abierto en E, $f^{-1}(G) \in \Sigma$.

Por la condición (i) de la proposición anterior, a $F(\Sigma,E)$ se le puede dotar naturalmente de la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup \{\|f(t)\| \ / \ t \in X\}, \quad \forall f \in F(\Sigma,E)$$

Y, con la misma, se demuestra facilmente que $F(\Sigma,E)$ es un espacio de Banach, que contiene a $A(\Sigma,E)$ como subespacio vectorial. Además, $\forall f \in F(\Sigma,E)$, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$, acotada y que converge a f puntualmente, que existe por definición, se puede elegir siempre de modo que $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

El siguiente lema es un paso previo en la demostración de que el operador: $A(\Sigma,E) \longrightarrow F$, se puede extender a $F(\Sigma,E)$

$$f \longrightarrow \int_X f dm$$

para algunas funciones finitamente aditivas de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, de semivariación acotada.

5. Lema. Sea $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$ una función finitamente aditiva de conjunto, cuya semivariación está acotada y es continua en $\emptyset$. Enton

ces, $\forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$, sucesión acotada que converge a 0 puntualmente, se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm = 0$ en F.

Demostración. Por el Teorema 2, al ser la semivariación de m acotada y continua en $\emptyset$, se tiene que existe una medida de control para m, $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Se sigue entonces del Teorema de Egoroff (ver | |, III.6.12), que al ser $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples que convergen a 0 puntualmente, convergen a 0 λ-casi uniformemente. Es decir, fijado $\varepsilon > 0$ y siendo $M > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que existe $X_\varepsilon \in \Sigma$, con $\lambda(X \setminus X_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$, y $f_n(t) \to 0$ uniformemente en $t \in X_\varepsilon$; donde $\delta_\varepsilon > 0$ es tal que $\lambda(A) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |m|(A) < \frac{\varepsilon}{2M}$ (que existe, por ser λ medida de control para m). Por otro lado, y puesto que $f_n(t) \to 0$ uniformemente en $t \in X_\varepsilon$, se tiene que $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|f_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{2|m|(X)}$, $\forall t \in X_\varepsilon$. (Naturalmente, suponemos $|m|(X) > 0$, pues en caso contrario se tendría $m(A) = 0$ $\forall A \in \Sigma$, y el Lema sería trivial).

Queda entonces, $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$\left\| \int_X f_n \, dm \right\| = \left\| \int_{X_\varepsilon} f_n \, dm + \int_{X \setminus X_\varepsilon} f_n \, dm \right\| \leq \left\| \int_{X_\varepsilon} f_n \, dm \right\| + \left\| \int_{X \setminus X_\varepsilon} f_n \, dm \right\| \leq \|\chi_{X_\varepsilon} f_n\|_\infty \, |m|(X_\varepsilon) + \|\chi_{X \setminus X_\varepsilon} f_n\|_\infty \, |m|(X \setminus X_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2|m|(X)} \, |m|(X_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Y, efectivamente, $\int_X f_n \, dm \longrightarrow 0$ en F.

6. Teorema. Para cada espacio de Banach F, y para cada función finitamente aditiva de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, cuya semivariación está acotada y es continua en $\emptyset$, se define el operador:

$$\begin{aligned} F(\Sigma,E) &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow \int_X f dm \end{aligned}$$

según: $\int_X f dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n dm$, siendo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$ una sucesión acotada que converge a f puntualmente.

Se tiene que dicho operador es lineal y continuo, de norma igual a $|m|(X)$, y verifica que, $\forall f \in F(\Sigma,E)$, la función de conjunto definida según:

$$\begin{aligned} m_f : \Sigma &\longrightarrow F \\ A &\longrightarrow \int_A f dm = \int_X \chi_A f dm \end{aligned}$$

es una función finitamente aditiva de conjunto de semivariación acotada, con: $|m_f|(A) \leq \|\chi_A f\|_\infty \; |m|(A) \quad \forall A \in \Sigma$.

Demostración. El operador está bien definido, pues sea $f \in F(\Sigma,E)$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$ sucesiones acotadas que convergen a f puntualmente. Como $(f_n-g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$ es una sucesión acotada que converge a 0 puntualmente, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\int_X (f_n-g_n)dm = 0$ por el Lema 5, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n dm = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n dm$, si uno de dichos límites existe en F. Ahora bien, $(\int_X f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ es una suce sión de Cauchy en F, pues dadas $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f_{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$, subsucesiones cualesquiera de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene, también por el Lema 5, que $\lim_{k\to\infty}\int_X (f_{n_k}-f_{s_k})dm = 0$. Luego, por ser F un espacio de Banach, existe $\int_X fdm = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n dm$.

Además, si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se elige con la condición:

$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$, al ser $\left\|\int_X f_n dm\right\| \leq \|f_n\|_\infty \; |m|(X)$ por pertenecer f_n a $A(\Sigma,E)$, se tendrá: $\left\|\int_X fdm\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\int_X f_n dm\right\| \leq$ $\leq \|f\|_\infty \; |m|(X)$, es decir, la norma del operador es menor o igual que $|m|(X)$. Y puesto que, por definición de semivariación, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\chi_{A_i} \in A(\Sigma,E)$, con $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ y $|m|(X) \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i)\right\| + \varepsilon = \left\|\int_X f_\varepsilon dm\right\| + \varepsilon$, se sigue que la norma del operador coincide con $|m|(X)$.

Por otro lado, para $f\in F(\Sigma,E)$, $\chi_A\cdot f\in F(\Sigma,E)$ $\forall A\in\Sigma$, luego m_f está bien definida; y es una función finitamente aditiva de conjunto, por verificarse dicha propiedad cuando $f\in A(\Sigma,E)$. Análogamente, se deduce que: $|m_f|(A) \leq \|\chi_A f\|_\infty \; |m|(A) \quad \forall A\in\Sigma$, con $f\in F(\Sigma,E)$, de verificarse esta desigualdad $\forall f\in A(\Sigma,E)$, y en particular para la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f puntualmente y tal que $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

El espacio $Ca(\Sigma,E)$ se define como el de las medidas $\mu : \Sigma \longrightarrow E \subset L(E',\mathbb{K})$, de semivariación acotada, con la norma:

$\|\mu\| = |\mu|(X)$: norma de la variación (semivariación) total. En este caso, como ya se indicó en la Proposición 1, $|\mu| = v(\mu)$, y por lo tanto para $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, $|\mu| \in Ca(\Sigma) = Ca(\Sigma,\mathbb{K})$.

<u>7. Proposición</u>. $Ca(\Sigma,E)$ es un espacio de Banach, y tanto $A(\Sigma,E')$ como $F(\Sigma,E')$ se pueden identificar a subespacios vectoriales normantes de $Ca(\Sigma,E)$.

<u>Demostración</u>. Se comprueba trivialmente que $Ca(\Sigma,E)$ es un espacio vectorial, en el que la variación total es, efectivamente, una norma. Al ser E un espacio de Banach, comprobar la completitud de $Ca(\Sigma,E)$ es un ejercicio igualmente sencillo, utilizando la versión del Teorema de Nykodim para medidas vectoriales (ver |12|, IV.10.6).

Para la segunda parte de la proposición, bastará demostrar que $F(\Sigma,E')$ se puede identificar a un subespacio vectorial de $Ca(\Sigma,E)'$, y que $A(\Sigma,E')$ es normante sobre $Ca(\Sigma,E)$.

Sea $f \in F(\Sigma,E')$. Para cada $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, puesto que $\mu : \Sigma \longrightarrow E \subset L(E',\mathbb{K})$ está en las condiciones del Teorema 6, podemos definir:

$$\begin{aligned} V_f : Ca(\Sigma,E) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mu &\longrightarrow \int_X f d\mu \end{aligned}$$

que es trivialmente un operador lineal, y se tiene:

$$|V_f(\mu)| = \left|\int_X f d\mu\right| \leq \|f\|_\infty \cdot |\mu|(X) = \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|,$$

luego $\|V_f\| \leq \|f\|_\infty$

Por otro lado, al ser $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\| \,/ t \in X\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon \in X$ tal que $\|f\|_\infty \leq \|f(t_\varepsilon)\| + \varepsilon/2$, y existe $x_\varepsilon \in B_E$ tal que $\|f(t_\varepsilon)\| \leq |<x_\varepsilon, f(t_\varepsilon)>| + \varepsilon/2$.

Definamos entonces $\mu_\varepsilon : \Sigma \longrightarrow E$ según: $\forall A \in \Sigma$,

$\mu_\varepsilon(A) = \begin{cases} x_\varepsilon & \text{si } t_\varepsilon \in A \\ 0 & \text{si } t_\varepsilon \notin A \end{cases}$. Se comprueba facilmente que $\mu_\varepsilon \in Ca(\Sigma,E)$,

$\|\mu_\varepsilon\| \leq \|x_\varepsilon\| \leq 1$, $\int_X g d\mu_\varepsilon = <x_\varepsilon, g(t_\varepsilon)> \quad \forall g \in F(\Sigma,E')$. Entonces:

$$\|V_f\| \geq |V_f(\mu_\varepsilon)| = \left|\int_X f.d\mu_\varepsilon\right| = |<x_\varepsilon, f(t_\varepsilon)>| \geq$$

$$\geq \|f\|_\infty - \varepsilon, \text{ y por lo tanto } \|V_f\| = \|f\|_\infty.$$

En consecuencia, el operador:

$$F(\Sigma,E') \longrightarrow Ca(\Sigma,E')$$
$$f \longrightarrow V_f$$

es una isometría, que permite identificar $F(\Sigma,E')$ a un subespacio de $Ca(\Sigma,E)'$, según: $\forall f \in F(\Sigma,E')$,

$$<\mu, f> = \int_X f d\mu \quad \forall \mu \in Ca(\Sigma,E)$$

En adelante, dicha identificación se dará siempre por supuesta; análogamente la de $A(\Sigma,E')$, que se deduce de ser éste un subespacio vectorial de $F(\Sigma,E')$.

De la definición:

$$\|\mu\| = |\mu|(X) = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} <\mu(A_i),x_i'>| \ / \ \{A_1,\dots,A_n\} \text{ partición de } X \text{ en } \Sigma, \ x_1',\dots,x_n' \in B_{E'}\}, \quad \forall \mu \in Ca(\Sigma,E)$$

se sigue inmediatamente que tanto $A(\Sigma,E')$ como $F(\Sigma,E')$ son normantes sobre $Ca(\Sigma,E)$.

El resultado clásico de Bartle, Dunford y Schwartz, que caracteriza los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma)$, nos permitirá añadir algunas propiedades interesantes.

<u>8. Teorema</u>. |1| Un conjunto $K \subset Ca(\Sigma)$ es débilmente relativamente compacto si y sólamente si está acotado en norma, y verifica alguna de las condiciones equivalentes:

A_1. K es equicontinuo en $\emptyset$

A_2. K es uniformemente σ-aditivo

A_3. K es equiexhaustivo

A_4. Existe $\lambda \in Ca(\Sigma)$, positiva, tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} \mu(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$.

Como primera consecuencia inmediata se obtiene el:

<u>9. Corolario</u>. Dada la función finitamente aditiva de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, de semivariación acotada, las condiciones del Teorema 2 son además equivalentes a que el conjunto $\{|m_{y'}| \ / \ y' \in B_{F'}\}$ esté contenido en $Ca(\Sigma)$ y sea débilmente relativamente compacto.

Y, de forma algo menos inmediata:

<u>10. Corolario</u>. Para toda $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, se tiene que:

a. $\{\mu_{x'} \mid x' \in B_{E'}\}$ es débilmente relativamente compacto en $Ca(\Sigma)$.

b. $\{\mu(A) \ / A \in \Sigma\}$ es débilmente relativamente compacto en E.

(Ver |12|, IV.10.2. para la demostración de (a), y |9|, I.5.3. para (b)).

Finalmente, hagamos notar que, dada una función finitamente aditiva de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, si su semivariación es acotada y continua en $\emptyset$, entonces $m_{y'} \in Ca(\Sigma,E')$ $\forall y' \in F'$.

3. <u>Espacios $L^p(\lambda,E)$</u>

Fijemos una σ-álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto X, una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma,E)$, y un espacio de Banach E.

Dada una función $f : X \longrightarrow E$, diremos que es λ-medible si existen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E)$ y $X_o \in \Sigma$, tales que $\lambda(X \setminus X_o) = 0$ y $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ $\forall t \in X_o$.

Fijado f, para cada $x' \in E'$ se puede definir la función:

$$\begin{aligned} <f,x'> : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longrightarrow <f(t),x'> \end{aligned}$$

que es λ-medible siempre que f lo sea.

Se tiene las siguientes caracterizaciones clásicas de las funciones λ-medibles:

<u>11. Proposición</u>. Sea $f : X \longrightarrow E$ función. Son equivalentes:

a. f es λ-medible

b. existe $X_o \in \Sigma$ tal que $\lambda(X \setminus X_o) = 0$, y $f(X_o)$ engendra un subespacio vectorial separable de E; además, para todo G abierto en E, existe $A \in \Sigma$ tal que $\lambda(A) = 0$ y $f^{-1}(G) \setminus A \in \Sigma$.

c. existe $X_o \in \Sigma$ tal que $\lambda(X \setminus X_o) = 0$ y $f(X_o)$ engendra un subespacio vectorial separable de E; además, para todo $x' \in E'$, la función $\langle f, x' \rangle$ es λ-medible.

Si $f : X \longrightarrow E$ es una función λ-medible, se comprueba fácilmente que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A(X,E)$ de la definición se puede elegir siempre de modo que $\|f_n(t)\| \leq \|f(t)\| \quad \forall t \in X$. Además, y por el Teorema de Egoroff (ver |12|, III.6.12), puesto que $f_n(t) \longrightarrow f(t) \quad \forall t \in X_o$, con $\lambda(X \setminus X_o) = 0$, se tiene que $f_n \longrightarrow f$ λ-casi uniformemente, es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $X_\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\lambda(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en X_ε.

Hay que hacer notar también que de la definición de función λ-medible se deduce inmediatamente que el espacio $F(\Sigma,E)$ está formado por funciones λ-medibles, $\forall \lambda \in Ca(\Sigma)$, medida positiva.

Sea p tal que $1 \leq p \leq +\infty$: $\mathcal{L}^p(\lambda)$ y $L^p(\lambda)$ serán los espacios usuales de Lebesgue, de funciones y clases de funciones escalares, dotados respectivamente de la seminorma N_p y la norma $\| \ \|_p$, (ver, p.ej., |12|, III.3 y IV.8 para la definición y propiedades de estos espacios).

Se tiene que, si una función $f : X \longrightarrow E$ es λ-medible, también lo es la función: $\|f\| : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $t \longrightarrow \|f(t)\|$ (Ello resulta de que, $\forall f \in A(\Sigma,E)$, $\|f\| \in A(\Sigma) = A(\Sigma,\mathbb{K})$).

Entonces, dado p tal que $1 \leq p \leq +\infty$, se define $\mathcal{L}^p(\lambda,E)$ como el espacio de las funciones λ-medibles $f : X \longrightarrow E$, tales que $\|f\| \in \mathcal{L}^p(\lambda)$, dotado de la seminorma:

$$N_p : \mathcal{L}^p(\lambda,E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longrightarrow N_p(\|f\|)$$

A su vez, $L^p(\lambda,E)$ será el espacio cociente $\mathcal{L}^p(\lambda,E)/N_p^{-1}(0)$, dotado de la norma cociente, que indicaremos por $\|\ \|_p$ al igual que en el caso escalar: pues, como se comprueba fácilmente, si $f \in L^p(\lambda,E)$, $\|f\|_p = \|\ \|f\|\ \|_p$, con $\|f\| \in L^p(\lambda)$.

Tanto $A(\Sigma,E)$ como $F(\Sigma,E)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{L}^p(\lambda,E)$ para cada p tal que $1 \leq p \leq +\infty$; indicaremos con la misma notación los subespacios correspondientes de $L^p(\lambda,E)$, según la norma usual de identificar cada clase de funciones con una cualquiera de sus funciones representantes.

Se tiene que $L^p(\lambda,E)$ es un espacio de Banach para todo p, con $1 \leq p \leq +\infty$; además, si $p < +\infty$, $A(\Sigma,E)$ es denso en $L^p(\lambda,E)$ (ver |10|, II. §12, Th. 3. y |12|, III.3.8.).

Hay que hacer notar que, si $f \in L^p(\lambda,E)$, con $p > 1$, entonces $f \in L^1(\lambda,E)$, y se verifica:

$$\|f\|_1 = \int_X \|f\|\, d\lambda \leq \lambda(X)^{1/q} \cdot \|f\|_p, \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{Si } p = +\infty, \quad q = 1)$$

Damos a continuación un resultado general, muy similar al Teorema 6, que nos permite establecer una cierta relación entre los espacios $L^p(\lambda,E)$ y ciertas funciones finitamente aditivas de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow (E,F)$. En efecto, si m es semivariación acotada y posee una medida de control positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, se dirá que una función $f : X \longrightarrow E$ es m-integrable si y sólo si $f \in L^1(\lambda,E)$, en cuyo caso, siendo $(f_n)_{n\in N} \subset A(\Sigma,E)$ una sucesión tal que $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ $\forall t \in X_o$, con $X_o \in \Sigma$ y $\lambda(X \setminus X_o) = 0$, definimos: $\int_X f dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n dm \in F$.

La demostración de que esta definición es consistente es análoga a la del Teorema 6. Y m define entonces, $\forall p$ con $1 \leq p \leq +\infty$, un operador lineal:

$$\begin{aligned} L^p(\lambda,E) &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow \int_X f dm \end{aligned}$$

Nótese que, en general, este operador será continuo tan sólo para $p = +\infty$. Sin embargo, si $m = \lambda : \Sigma \longrightarrow K \subset L(E,E)$, el operador es continuo $\forall p$, y se tiene entonces:

$$\left\| \int_X f d\lambda \right\| \leq \int_X \|f\|\, d\lambda = \|f\|_1 \leq \lambda(X)^{1/q} \cdot \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\lambda,E), \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Un importante problema en relación con los espacios $L^p(\lambda,E)$ estriba en dar alguna caracterización manejable de sus espacios duales. En el caso $E = \mathbb{K}$, es bien conocida la dualidad $L^p(\lambda)' = L^q(\lambda)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, válida $\forall p < +\infty$. (Ver |12|, IV.8.1, IV.8.5).

Un resultado análogo para el caso vectorial se obtiene mediante la propiedad de Radón-Nykodim (P.R.N.), que se enuncia de modo siguiente:

Un espacio de Banach E tiene la P.R.N. si, para toda σ-álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto X, cualquiera, y para toda $\mu \in Ca(\Sigma,E)$ absolutamente continua respecto de una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$ (es decir, tal que $\mu(A) = 0$ $\forall A \in \Sigma$ con $\lambda(A) = 0$), existe $g \in L^1(\lambda,E)$ verificando: $\mu(A) = \int_A g d\lambda$ $\forall A \in \Sigma$.

(Ver en | 9 |, III, IV, V y VII, formulaciones equivalentes de la P.R.N., así como caracterizaciones y propiedades de los espacios que la poseen). Se tiene entonces que si, y solamente si, E' tiene la P.R.N., $L^p(\lambda,E)' = L^q(\lambda,E')$, para todo p tal que $1 \leq p < +\infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Ver | 9 |, IV.1.1). Sin embargo, en el caso general se dá tan sólo el siguiente resultado de dualidad parcial entre $L^p(\lambda,E)$ y $L^q(\lambda,E')$ (ver una demostración en | 9 |, IV.1):

12. Proposición. Sea p, tal que $1 \leq p < +\infty$, y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se tiene, fijada $g \in L^q(\lambda,E')$:

a. $\forall f \in L^p(\lambda,E)$, la función:

$$\begin{aligned} <f,g> : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longrightarrow <f(t),g(t)> \end{aligned}$$

pertenece a $L^1(\lambda)$, y $\|<f,g>\|_1 \leq \|f\|_p \ \|g\|_q$

b. La aplicación $v_g : L^p(\lambda,E) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f \longrightarrow \int_X <f,g> d\lambda$$

es un elemento de $L^p(\lambda,E)'$, y $\|v_g\| = \|g\|_q$.

Así, la aplicación: $L^q(\lambda,E') \longrightarrow L^p(\lambda,E)'$, es una isometría

$$g \longrightarrow v_g$$

entre $L^q(\lambda,E')$ y un subespacio de $L^p(\lambda,E)'$, que permite considerar al primer espacio sumergido en el segundo, identificando g con v_g. Además, con dicha identificación $L^q(\lambda,E')$ es normante sobre $L^p(\lambda,E)$ y separa puntos en dicho espacio. Por último, $A(\Sigma,E')$ como subespacio de $L^q(\lambda,E')$ es normante sobre $L^p(\lambda,E)$ para cualquier p con $1 \leq p < +\infty$.

En adelante, daremos siempre por sentada la identificación establecida en la proposición anterior.

Una caracterización de $L^p(\lambda,E)'$, de la que haremos un amplio uso en lo sucesivo, se obtiene de |10|, II. §13. Th. 8 y Th. 9: hay que notar que la parte (iv) se verifica debido a que, para cada $\lambda \in Ca(\Sigma)$, existe un lifting $\rho : L^\infty(\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(\lambda)$. (Ver |10|, II. §11. Th.1).

<u>1.3. Proposición</u>. Sea E un espacio de Banach, y sea p tal que $1 \leq p < +\infty$. Para cada $v \in L^p(\lambda,E)'$, existe una función $g_v : X \longrightarrow E'$ verificando:

i) $\|g_v\| \in L^q(\lambda)$, y $\|g_v\|_q = \|v\|$.

ii) Para toda $f \in L^p(\lambda,E)$, la función $<f,g_v>$ pertenece a $L^1(\lambda)$.

iii) $v(f) = \int_X <f.g_v> d\lambda \quad \forall f \in L^p(\lambda,E)$.

iv) Además, si $p=1$, g_v se puede elegir con unicidad con la condición: $\rho(g_v) = g_v$, donde ρ es un lifting en $L^\infty(\lambda)$, y $\rho(g_v) = g_v$ significa que, $\forall x \in E$, $\rho(<x,g_v>) = <x,g_v>$.

Recíprocamente, toda función que verifique (i) e (ii) define, por (iii), un elemento $v_g \in L^p(\lambda,E')$.

4. <u>El espacio $C(X,E)$ y su dual $M(X,E')$</u>

Fijados un espacio de Banach E y un espacio topológico compacto y T_2, X, llamaremos $C(X,E)$ al espacio de las funciones continuas $f : X \to E$, con la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\| / t \in X\}$. Debido a la completitud de E y a las propiedades de la convergencia uniforme, se obtiene inmediatamente que $C(X,E)$ es un espacio de Banach.

El siguiente problema consiste en caracterizar su dual, que denotaremos por $M(X,E')$.

Un primer resultado, ya conocido y que se deriva de forma inmediata del Teorema de Representación de Riesz (ver, p.ej., |20|, 2.14) es que, para $E = \mathbb{K}$, $M(X) = M(X, \mathbb{K})$ se identifica canónicamente con el espacio de las medidas de Radón acotadas $\mu : \beta_o(X) \longrightarrow \mathbb{K}$ (siendo $\beta_o(X)$ la σ-álgebra de Borel en X), dotadas con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(X)$ La identificación se realiza canónicamente según: para cada μ medida de Radón acotada,

$$<\phi,\mu> = \int_X \phi\, d\mu \qquad \forall\phi \in C(X)$$

Sea $v \in M(X,E')$. Para cada $x \in E$, definimos:

$$v_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\phi \longrightarrow v(x\ \phi)$$

y tenemos que $v_x \in M(X)$: luego existe $\mu_x : \beta_o(X) \longrightarrow \mathbb{K}$, medida de Radón acotada, tal que $v_x(\phi) = \int_X \phi\, d\,\mu_x \quad \forall\phi \in C(X)$.

Definimos entonces: $\mu : \beta_o(X) \longrightarrow E' = L(E,\mathbb{K})$ según: dado $A \in \beta_o(X)$, $<x,\mu(A)> = \mu_x(A)$ $\forall x \in E$. μ está bien definida, pues $|<x,\mu(A)>| = |\mu_x(A)| \leq |\mu_x|(A) \leq \|\mu_x\| = \|v_x\| \leq \|x\|\,\|v\|$, $\forall x \in E$.

Además, μ es de variación (en este caso, equivalentemente, semivariación) acotada. En efecto, sean $\{A_1,\ldots,A_n\}$ partición de X en $\beta_o(X)$, $x_1,\ldots,x_n \in B_E$. $\forall i = 1,\ldots,n$, μ_x es una medida de Radón acotada y, por lo tanto, regular: así, fijado $\varepsilon > 0$, $\forall i=1,\ldots,n$ existen K_i compacto, G_i^* abierto en X, tales que

$K_i \subset A_i \subset G_i^*$ y $|\mu_{x_i}|(G_i^* \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Por otro lado,
$K_i \cap K_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ $\Longrightarrow$ por ser X compacto, (y, por consiguiente, regular), $\forall i = 1,\dots,n$ existe G_i abierto en X, tal que $K_i \subset G_i \subset G_i^*$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Y, al ser X compacto y T_2, y por lo tanto normal, $\forall i=1,\dots,n$ existe una función continua $\phi_i : X \longrightarrow [0,1]$, tal que $\phi_i(K_i) = \{1\}$ y $\phi_i(X \setminus G_i) = \{0\}$ (Lema de Urysohn). Se tiene así:

$f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \phi_i \in C(X,E)$, y $\|f_\varepsilon\| = \text{máx}\{\|x_i\| \mid i=1,\dots,n\} \leq 1$.
Por lo tanto:

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i)| \leq |\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i) - v(f_\varepsilon)| + |v(f_\varepsilon)| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i) - \sum_{i=1}^{n} v(x_i \cdot \phi_i)| + |v(f_\varepsilon)| \leq$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} (\mu_{x_i}(A_i) - \int_X \phi_i \, d\mu_{x_i})| + |v(f_\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_{x_i}(A_i \setminus K_i)| + \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i \setminus K_i} \phi_i \, d|\mu_{x_i}| +$$

$$+ \|v\| \, \|f_\varepsilon\|_\infty \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |\mu_{x_i}| (G_i^* \setminus K_i) + \|v\| < \varepsilon + \|v\|$$

Luego, para cada partición $\{A_1,\dots,A_n\}$ de X en $\beta_o(X)$, $x_1,\dots,x_n \in B_E$, $|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i)| \leq \|v\| \Longrightarrow |\mu|(X) \leq \|v\|$, y μ es de semivariación acotada.

Queda ya tan sólo ver que $|\mu|$ es una medida de Radón acotada (y, por lo tanto, μ será una medida). Pero esto se consigue fácil mente sin más que comprobar que el conjunto $\{\mu_x \,/\, x \in B_E\}$ es débilmente relativamente compacto en $Ca(\beta_o(X))$.

Así, y puesto que $C(X,E)$ es un subespacio vectorial de $F(X,E) = F(\beta_o(X),E)$, se tiene que el operador:

$$\begin{aligned} C(X,E) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longrightarrow \int_X f d\mu \end{aligned}$$

es lineal y continuo, según el Teorema 6.

Ahora bien, sea $G(X,E)$ el subespacio de $C(X,E)$ formado por funciones de la forma: $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \phi_i$, con $x_1,\dots,x_n \in E$ y $\phi_i,\dots,\phi_n \in C(X)$: se comprueba fácilmente (ver, p.ej., la demostración en |10| III. §19. Prop. 1), que $G(X,E)$ es denso en $C(X,E)$. Y como, para cada $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \;\phi_i \in C(X,E)$, se tiene:

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i \cdot \phi_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_X \phi_i \, d\mu_{x_i} = \int_X \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \phi_i\Big) d\mu =$$

$$= \int_X f d\mu,$$

se sigue que $v(f) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C(X,E)$, y por lo tanto:

$$|v(f)| = \Big|\int_X f d\mu\Big| \leq \int_X \|f\| \, d|\mu| \leq \|f\|_\infty \,.\, |\mu|(X) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|v\| \leq |\mu|(X)$$

Ello nos permite identificar $M(X,E')$ con el espacio de las medidas $\mu : \beta_o(X) \to E'$, tales que $|\mu|$ es una medida de Radón acotada, dotadas de la norma de la variación total $\|\mu\| = |\mu|(X)$. En efecto, acabamos de ver que, para cada $v \in M(X,E')$, existe una medida μ

en tales condiciones, verificando que $v(f) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C(X,E)$, y $\|v\| = |\mu|(X)$. Y cada una de tales medidas define, según la misma fórmula, un elemento de $M(X,E')$, según se comprueba trivialmente.

Nos queda, por lo tanto:

14. Teorema. Para todo espacio compacto y T_2, X, y para todo espacio de Banach E, el dual $M(X,E')$ de $C(X,E)$ se identifica con el espacio de las medidas: $\mu : \beta_o(X) \to E'$, tales que $|\mu|$ es una medida de Radón acotada (es decir, $|\mu| \in M(X)$); dotado de la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Y la identificación se realiza según:

$$\langle f,\mu\rangle = \int_X f d\mu \qquad \forall f \in C(X,E)$$

Como corolario del Teorema, vamos a ver que el espacio $F(X,E) = F(\beta_o(X),E)$, y por lo tanto también su subespacio $A(X,E) = A(\beta_o(X),E)$, se pueden identificar a subespacios normantes del bidual $M(X,E')'$ de $C(X,E)$. En efecto, basta identifica toda función $f \in F(X,E)$ con el operador:

$$\begin{array}{rcl} M(X,E') & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mu & \longrightarrow & \langle f,\mu\rangle = \int_X f d\mu \end{array}$$

que, por el Teorema 6, está bien definido y es lineal y continuo: y comprobar que su norma coincide con $\|f\|_\infty$ es un simple ejercicio.

En general, y excepto en casos particulares (por ejemplo, cuando X es un compacto metrizable), tendremos que $M(X,E')$ es un sub espacio propio de $Ca(\beta_o(X),E')$. Sin embargo, $\mathcal{M}(X,E')$ se puede identificar siempre con uno de los espacios $Ca(\Sigma,E')$ tratados en la Sección 2, sin más que restringir algo la σ-álgebra. Para ello, es esencial el siguiente resultado, que se puede encontrar en |10|, III. §16.:

15. Proposición: Toda medida de variación finita, $\mu : \beta_a(X) \to E$, donde $\beta_a(X)$ es la σ-álgebra de Baire en el compacto X, puede extenderse con unicidad a una medida $\mu_1 : \beta_o(X) \to E$, tal que $|\mu_1|$ es una medida regular, extensión de $|\mu|$ a $\beta_o(X)$.

Así, $\mathcal{M}(X,E')$ se identifica a $Ca(\beta_a(X),E')$ sin más que hacer corresponder a cada $\mu \in \mathcal{M}(X,E')$ su restricción a la σ-álgebra de Baire $\beta_a(X) \subset \beta_o(X)$.

Esta proposición nos permite trasladar inmediatamente a $\mathcal{M}(X)$ el resultado clásico de Bartle, Dunford y Schwartz, recogido en el Teorema 9, sobre caracterización de subconjuntos débilmente relativamente compactos:

16. Teorema. Un subconjunto K de $\mathcal{M}(X)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) K está acotado

ii) Existe $\lambda \in \mathcal{M}(X)$, positiva, tal que $\lim\limits_{\lambda(A)\to o} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$.

Ahora bien, una consecuencia inmediata de la Proposición 15 es que toda medida $\lambda \in Ca(\beta_a(X)) = M(X)$ es regular. Por lo tanto, del Teorema 16 se obtiene el siguiente:

<u>17. Corolario</u>. Si $K \in M(X)$ es débilmente relativamente compacto, entonces K es <u>equiregular</u>, es decir, para cada $A \in \beta_o(X)$, $\forall \varepsilon > 0$ existen K_ε compacto y G_ε abierto en X, tales que $K_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ y $|\mu|(G_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall \mu \in K$.

Vimos en la Sección 2 que toda función finitamente aditiva de conjunto de semivariación acotada, $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F)$, definía un operador continuo:

$$\begin{aligned} A(\Sigma,E) &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow \int_X f\,dm \end{aligned}$$

el cual, en general, se podía extender a $F(\Sigma,E)$ tan sólo en caso de que m tuviese una medida de control. Sin embargo, vamos a demostrar que, para toda $m : \beta_o(X) \longrightarrow L(E,F)$, de semivariación acotada, dicho operador se puede extender con continuidad a $C(X,E)$: para lo cual bastará probar que $C(X,E)$ está contenido en el completado del espacio normado $A(X,E)$.

En efecto, sea $f \in C(X,E)$: $\forall \varepsilon > 0$, definimos, $\forall t \in X$:

$V_t = \{s \in X \ / \ \|f(t) - f(s)\| < \varepsilon\}$ que es un entorno abierto de t en X, por la continuidad de f. Entonces, $\{V_t\}_{t \in X}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto X, y por lo tanto existen $t_1,\dots,t_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{t_i}$. Sean, $\forall i=1,\dots,n$:

$A_i = V_{t_i} \setminus (\bigcup_{j=i+1}^{n} V_{t_j})$: $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición de X en $\beta_o(X)$, y por lo tanto $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \chi_{A_i}$ pertenece a $A(X,E)$. Y, $\forall t \in X$, existe un único $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $t \in A_i \subset V_{t_i}$, luego: $\|f(t) - f_\varepsilon(t)\| = \|f(t) - f(t_i)\| < \varepsilon$. $\|f-f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, y f pertenece al completado de $A(X,E)$.

En consecuencia, la función finitamente aditiva de conjunto, de semivariación acotada, $m : \beta_o(X) \longrightarrow L(E,F)$, define un operador continuo:

$$C(X,E) \longrightarrow F$$
$$f \longrightarrow \int_X f dm$$

donde, $\forall f \in C(X,E)$, $\int_X f dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm$, con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(X,E)$ y $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$. Además, $\|\int_X f dm\| \leq \|f\|_\infty \cdot |m|(X)$.

Este resultado, unido a la representación de $C(X,E)'$ como espacio de medidas, nos permite finalmente establecer el siguiente teorema general de representación de operadores:

<u>18. Teorema</u>. Sean X espacio compacto y T_2, E y F espacios de Banach. A todo operador continuo: $T : C(X,E) \longrightarrow F$, se le puede asociar una función finitamente aditiva de conjunto:

$$m : \beta_o(X) \longrightarrow L(E,F''), \text{ que verifica:}$$

i) m es de semivariación acotada, y $|m|(X) = \|T\|$.

ii) $\forall y' \in F'$, $m_{y'} \in M(X,E')$, y la aplicación:

$$F' \longrightarrow M(X,E')$$
$$y' \longrightarrow m_{y'}$$

es continua para las topologias $\sigma(F'F), \sigma(M(X,E'), C(X,E))$.

iii) $\forall f \in C(X,E)$, $T(f) = \int_X f dm$.

En dichas propiedades, m es única. Inversamente, toda función finitamente aditiva de conjunto $m : \beta_o(X) \longrightarrow L(E,F")$, que verifique (i) e (ii), define mediante (iii) un operador continuo de $C(X,E)$ en F.

Una demostración detallada del Teorema se puede encontrar en |3|. Aquí haremos notar únicamente que m se define de forma canónica según: $m(A)(x) = T"(x.\chi_A)$, siendo

$$T" : M(X,E')' \longrightarrow F"$$

el operador bitranspuesto de T. Entonces, si $T' : F' \to M(X,E')$ es el transpuesto de T, se comprueba inmediatamente que $\forall y' \in F'$, $m_{y'} = T'(y')$; y todas las demás propiedades se obtienen ya fácilmente.

Mediante un abuso de lenguaje, m se llama corrientemente la "medida asociada" al operador T, y un objeto fundamental de la teoría de tales operadores consiste en intentar relacionar propiedades de los mismos en propiedades correspondientes de sus medidas asociadas.

En este sentido, y ya para concluir, mencionaremos un importante resultado para el caso escalar, que se deriva del Teorema 16, y cuya demostración puede encontrarse, por ejemplo, en |12|, VI.7.3.

<u>19. Teorema</u>. Sean X espacio compacto y T_2, E espacio de Banach, y $T : C(X) \longrightarrow E$ un operador continuo. Entonces, T es débilmente compacto si y sólo si su "medida" asociada μ verifica una de las dos condiciones equivalentes:

a. μ toma valores en E

b. $\mu \in Ca(\beta_o(X),E)$, es decir, μ es realmente una medida.

CAPITULO II

El objetivo principal de este capítulo es aclarar algunas cuestiones relacionadas con el estudio de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de los espacios $L^p(\lambda,E)$ con $1 \leq p < +\infty$, y $Ca(\Sigma,E)$.

En 1955, un artículo de Bartle, Dunford y Schwartz |1| (ya mencionado en el capítulo anterior), relacionado con un trabajo precedente de Grothendieck |14|, estableció condiciones necesarias y suficientes de compacidad débil para subconjuntos de $Ca(\Sigma)$. Este resultado fue extendido por Brooks |7| en 1971 a $Ca(\Sigma,E)$ en el caso en que E fuese un espacio de Banach reflexivo. Y en 1972, Brooks y Lewis |8|, probaron el siguiente Teorema, extensión del anterior:

<u>1. Teorema</u>. Si K es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $Ca(\Sigma,E)$, entonces verifica:

i) K está acotado en norma

ii) Existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, tal que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0 \quad \text{uniformemente en} \quad \mu \in K.$$

iii) $K(A) = \{\mu(A) \,/\, \mu \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E, para cada $A \in \Sigma$.

Además, si tanto E como E' tienen la P.R.N., dichas condiciones necesarias son también suficientes.

Resultados enteramente equivalentes se obtienen para los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^p(\lambda,E)$, con $1 \leq p < +\infty$, teniendo en cuenta la estrecha relación existente entre tales espacios y $Ca(\Sigma,E)$ cuando E tiene la P.R.N.

Ahora bien, en el curso del presente capítulo demostraremos que la hipótesis de que tanto E como E' tienen la P.R.N. es estrictamente necesaria para que las condiciones contenidas en el Teorema 1 constituyan una caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma,E)$. Y, en correspondencia, que las condiciones análogas lo sean para las de $L^p(\lambda,E)$, con $1 \leq p < +\infty$.

1. Las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P .

En esta primera sección, daremos una serie de definiciones y de resultados que nos servirán para establecer, en la próxima, la conclusión que perseguimos. En cuanto sigue, E será siempre un espacio de Banach, y Σ representará una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto cualquiera X.

2. Definición. E tiene la propiedad $P_1(\lambda)$, siendo $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva, cuando un subconjunto K de $L^1(\lambda,E)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) K está acotado en norma

ii) K es uniformemente λ-integrable, es decir,

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A \|f\|\, d\lambda = 0 \text{ uniformemente para } f \in K.$$

iii) $K(A) = \{\int_A f d\lambda \mid f \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en E, cuando $\lambda \in \Sigma$.

3. Definición. E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $\lambda \in Ca(\Sigma)$ medida positiva y $1 < p < +\infty$, cuando un subconjunto K de $L^p(\lambda,E)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) K está acotado en norma

ii) $K(A) = \{\int_A f d\lambda \mid f \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en E, cuando $A \in \Sigma$.

4. Definición. E tiene la propiedad P_p, con $1 \leq p < +\infty$, si tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ para cualquier medida positiva y finita, λ.

5. Definición. E tiene la propiedad $P(\Sigma)$ cuando un subconjunto de $Ca(\Sigma,E)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) K está acotado en norma.

ii) Existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, tal que $\lim\limits_{\lambda(A)\to o} |\mu|(A) = 0$ uniformemente para $\mu \in K$.

iii) $K(A) = \{\mu(A) \mid \mu \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E, cuando $A \in \Sigma$.

6. Definición. E tiene la propiedad P si tiene la propiedad $P(\Sigma)$ para cualquier σ-álgebra Σ en cualquier conjunto X.

Nótese que es equivalente el que un espacio tenga la propiedad P a que para él se verifique la parte recíproca del Teorema 1.

A continuación, y basándonos en el siguiente Lema previo, estableceremos una serie de relaciones entre las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P.

7. Lema. Sea $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva. Entonces, $L^1(\lambda,E)'$ se puede identificar a un subespacio vectorial denso de $L^p(\lambda,E)'$, para cualquier p, con $1 < p < +\infty$.

Demostración. Fijadas λ y p, sea $J : L^p(\lambda,E) \longrightarrow L^1(\lambda,E)$ la inyección canónica, que es una aplicación lineal y continua de norma $\|J\| \leq \lambda(X)^{1/q}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. J permite identificar $L^p(\lambda,E)$ a un subespacio vectorial de $L^1(\lambda,E)$, el cual es denso por contener a $A(\Sigma,E)$.

Sea $J' : L^1(\lambda,E)' \longrightarrow L^p(\lambda,E)'$ la transpuesta de J, y sea $\pi : \mathcal{L}^p(\lambda,E) \longrightarrow L^p(\lambda,E)$ la proyección canónica. Dada $v \in L^p(\lambda,E)'$, $v \circ \pi \in \mathcal{L}^p(\lambda,E)'$, y por lo tanto, según la Proposición I.13, existe una función $g_v : X \longrightarrow E'$ tal que:

i) $\|g_v\| \in \mathcal{L}^q(\lambda)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y $\|g_v\|_q = \|v\|$.

ii) Para toda $f \in \mathcal{L}^p(\lambda,E)$, la función $\langle f,g_v\rangle$ pertenece a $\mathcal{L}^1(\lambda)$, y $v \circ \pi(f) = \int_X \langle f,g_v\rangle \, d\lambda$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{t \in X \,/\, \|g_v(t)\| \leq n\}$. Se tiene, por (i), que $A_n \in \Sigma$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$.

Definamos entonces, para cada n:

$$v_n : L^1(\lambda,E) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$h \longmapsto \int_{A_n} \langle h,g_v\rangle \, d\lambda = \int_X \langle h,\chi_{A_n}\cdot g_v\rangle \, d\lambda$$

y tenemos:

a. v_n está bien definida, pues por (ii) se tiene que, $\forall h \in A(\Sigma,E)$, $\langle h,g_v\rangle \in \mathcal{L}^1(\lambda)$: entonces, para cada $h \in L^1(\lambda,E)$, $\langle h,g_v\rangle$ es límite puntual de una sucesión de funciones medibles, y por lo tanto es una función medible. Y, fijada $h \in L^1(\lambda,E)$:

$$\int_X |<h,\chi_{A_n} g_v>| \, d\lambda = \int_{A_n} |<h,g_v>| \, d\lambda \leq \int_{A_n} \|h\| \, \|g_v\| \, d\lambda \leq$$

$$\leq n \, . \, \|h\|_1$$

Así, $|<h,\chi_{A_n} g_v>| \in L^1(\lambda)$, y si $\|h\|_1 = 0$, $\int_X <h,\chi_{A_n} g_v> d\lambda = 0$.

b. v_n es claramente lineal, y es continua, pues como acabamos de ver, $|v_n(h)| \leq n \, \|h\|_1 \quad \forall h \in L^1(\lambda,E)$.

Por lo tanto, $v_n \in L^1(\lambda,E)' \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Y vamos a ver que $J'(v_n) \longrightarrow v$ en $L^p(\lambda,E)'$.

En efecto, se tiene que $\|\chi_{A_n} g_v - g_v\| = \chi_{X \setminus A_n} \cdot \|g_v\| \in L^q(\lambda)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ya que $\|g_v\| \in L^q(\lambda)$ por (i), y $A_n \in \Sigma$. Y, para cada $t \in X$:

$$\|\chi_{A_n} g_v - g_v\|(t) = \|\chi_{A_n}(t) g_v(t) - g_v(t)\| = \|\chi_{X \setminus A_n}(t) \; g_v(t)\| \leq$$

$$\leq \|g_v(t)\|, \quad y$$

$$\|\chi_{A_n} g_v - g_v\|(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \text{al ser } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad y \quad A_n \subset A_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Resulta entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, que $\|\chi_{A_n} g_v - g_v\|_q \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Como para cada $f \in L^p(\lambda,E)$, con $\|f\|_p \leq 1$, se tiene:

$$\|J'(v_n)(f) - v(f)\| = \left| \int_{A_n} <f,g_v> d\lambda - \int_X <f,g_v> d\lambda \right| =$$

$$= \left| \int_X \langle f, \chi_{A_n} g_v - g_v \rangle \, d\lambda \right| \leq \int_X \|f\| \, \|\chi_{A_n} g_v - g_v\| \, d\lambda \leq \|\chi_{A_n} g_v - g_v\|_q,$$

nos queda: $\|J'(v_n) - v\| \leq \|\chi_{A_n} g_v - g_v\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Así, $J'(v_n) \to v$ en $L^p(\lambda,E)'$: concluyendo, $J'(L^1(\lambda,E)')$ es un subespacio vectorial denso de $L^p(\lambda,E)'$.

<u>8. Proposición</u>. Fijada una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, si E tiene la propiedad $P_1(\lambda)$, entonces tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ para cualquier p con $1 < p < +\infty$.

<u>Demostración</u>. Sea p tal que $1 < p < +\infty$, y tomemos un subconjunto K de $L^p(\lambda,E)$ que verifique las condiciones (i) e (ii) de la Definición 3. Siendo $J : L^p(\lambda,E) \longrightarrow L^1(\lambda,E)$, como anteriormente, la inyección canónica, es claro que $J(K)$ verifica las condiciones (i) e (iii) de la Definición 2. Y es uniformemente λ-integrable por ser un subconjunto acotado de $L^p(\lambda,E)$, ya que, dada $f \in L^p(\lambda,E)$, se tiene:

$$\int_A \|f\| \, d\lambda = \int_X \chi_A \cdot \|f\| d\lambda \leq \|\chi_A\|_q \cdot \|f\|_p = \lambda(A)^{1/q} \cdot \|f\|_p,$$

para cualquier $A \in \Sigma$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Así, $J(K)$ verifica también la condición (ii) de la Definición 2, y por lo tanto, si E tiene la propiedad $P_1(\lambda)$, $J(K)$ es débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda,E)$.

Consideremos una sucesión cualquiera $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$: $(J(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ será una sucesión en el subconjunto débilmente relativamente compacto de $L^1(\lambda,E)$, $J(K)$; luego, por el Teorema de Eberlein, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y existe $f^* \in L^1(\lambda,E)$, tales que

$J(f_{n_k}) \longrightarrow f^*$ débilmente en $L^1(\lambda,E)$.

Veamos que $f^* \in J(L^p(\lambda,E))$: para ello, y según la definición de $L^p(\lambda,E)$ dada en el Capítulo I, Sección 3, bastará comprobar que $\|f^*\| \in L^p(\lambda)$. Y puesto que al ser $1 < p < +\infty$, se tiene que $L^p(\lambda) = L^q(\lambda)'$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, utilizando además que $A(\Sigma)$ es denso en $L^q(\lambda)$, tendremos que $\|f^*\| \in L^p(\lambda)$ si y sólamente si $|\int_X \|f^*\| g\, d\lambda| \leq M \cdot \|g\|_q$ $\forall g \in A(\Sigma)$, con $M > 0$.

Por verificar K la condición (i) de la Definición 3, sabemos que existe $M > 0$ tal que $\|f\|_p \leq M$ para toda $f \in K$. Tomemos entonces $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \in A(\Sigma)$, y tendremos:

$$\int_X \|f^*\| g\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_{A_i} \|f^*\|\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_X \|\chi_{A_i} f^*\|\, d\lambda$$

Puesto que $f^* \in L^1(\lambda,E)$, también $\chi_A \cdot f^*$ pertenecerá á dicho espacio para todo $A \in \Sigma$, y al ser $A(\Sigma,E')$ un subespacio de $L^1(\lambda,E)'$ normante, se verifica:

$$\int_X \|\chi_A \cdot f^*\|\, d\lambda = \sup \{ |\int_X \langle \chi_A \cdot f^*, h\rangle d\lambda| \;/\; h \in A(\Sigma,E'),\ \|h\|_\infty \leq 1\}$$

Así, fijado $\varepsilon > 0$, tendremos que, $\forall i=1,\dots,n$, existe $h_i \in A(\Sigma,E')$ tal que $\|h_i\| \leq 1$ y $0 \leq \int_X \|\chi_{A_i} f^*\|\, d\lambda - \int_X \langle \chi_{A_i} f^*, h_i\rangle\, d\lambda \leq$ $\leq \frac{\varepsilon}{n(m+1)}$, donde $m = \text{máx}\,\{|\alpha_i| \;/\; i=1,\dots,n\}$. Entonces:

$$|\int_X \|f^*\| g\, d\lambda| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \|\chi_{A_i} f^*\|\, d\lambda| \leq$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\int_X \|\chi_{A_i} f^*\|\, d\lambda - \int_X \langle \chi_{A_i} f^*, h_i\rangle\, d\lambda\right)| +$$

$$+ \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X <\chi_{A_i} f^*, h_i> d\lambda\right| \leq \varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_X <f^*, \chi_{A_i} h_i> d\lambda\right| =$$

$$= \varepsilon + \left|\int_X <f^*, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} h_i> d\lambda\right|.$$

Ahora bien, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \cdot h_i \in A(\Sigma, E')$, que es un subespacio de $L^1(\lambda,E)'$: luego, al ser f^* el límite débil en $L^1(\lambda,E)$ de $(J(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ se tendrá:

$$\left|\int_X <f^*, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \cdot h_i> d\lambda\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\int_X <f_{n_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} h_i> d\lambda\right| \leq$$

$$\leq M \cdot \|g\|_q,$$

puesto que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_X <f_{n_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} h_i> d\lambda\right| \leq \|f_{n_k}\|_p \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} h_i\right\|_q \leq$$

$$\leq M \cdot \left(\int_X \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} h_i\right\|^q d\lambda\right)^{1/q} = M \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q \cdot \int_{A_i} \|h_i\|^q d\lambda\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq M \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q \cdot \lambda(A_i)\right)^{1/q} = M \cdot \|g\|_q.$$

En definitiva queda que, dada $g \in A(\Sigma)$, se tiene, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\left|\int_X \|f^*\| g \, d\lambda\right| \leq \varepsilon + M \cdot \|g\|_q, \quad \text{es decir,}$$

$$\left|\int_X \|f^*\| g \, d\lambda\right| \leq M \|g\|_q \quad \forall g \in A(\Sigma), \quad \text{o lo que es lo mismo,}$$

$\|f^*\| \in L^p(\lambda)$ y $\|f^*\|_p \leq M$. De ello se deduce que, efectivamente, $f^* \in J(L^p(\lambda,E))$; es decir, existe $f \in L^p(\lambda,E)$ con $J(f) = f^*$: y $\|f\|_p = \|f^*\|_p \leq M$.

Veremos a continuación que $f_{n_k} \longrightarrow f$ débilmente en $L^p(\lambda,E)$. Dados $v \in L^p(\lambda,E)'$, y $\varepsilon > 0$, se tiene, por el Lema 7, que existe $v_\varepsilon \in L^1(\lambda,E)'$ tal que $\|v-J'(v_\varepsilon)\| < \varepsilon/3M$. Y como, por hipótesis. $<f,J'(v_\varepsilon)> = <J(f), v_\varepsilon> = v_\varepsilon(f^*) = \lim_{k\to\infty} v_\varepsilon(J(f_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} <f_{n_k}, J'(v_\varepsilon)>$, podemos encontrar $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geq k_\varepsilon$, $|<f-f_{n_k},J'(v_\varepsilon)>| < \frac{\varepsilon}{3}$. Queda así:

$$|v(f)-v(f_{n_k})| \leq |v(f)-J'(v_\varepsilon)(f)| + |J'(v_\varepsilon)(f) - J'(v_\varepsilon)(f_{n_k})| +$$

$$+ |J'(v_\varepsilon)(f_{n_k}) - v(f_{n_k})| \leq \|v - J'(v_\varepsilon)\| \; \|f\|_p + |<f-f_{n_k},$$

$$J'(v_\varepsilon)>| + \|v-J'(v_\varepsilon)\| \; \|f_{n_k}\|_p < \frac{\varepsilon}{3M} . M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} . M = \varepsilon,$$

$$\forall k \geq k_\varepsilon .$$

En conclusión, $v(f_{n_k}) \longrightarrow v(f)$ para cualquier $v \in L^p(\lambda,E)'$.

Tenemos así que, dada una sucesión cualquiera en K, podemos extraer siempre una subsucesión débilmente convergente en $L^p(\lambda,E)$ a un elemento de dicho espacio: luego, por el Teorema de Eberlein, K es débilmente relativamente compacto. Por lo tanto, E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, y ello para cualquier p, con $1 < p < +\infty$.

Para ligar las propiedades $P_p(\lambda)$ con $P(\Sigma)$, necesitaremos el siguiente resultado que es esencialmente análogo al que se puede encontrar, por ejemplo, en | 9 |, IV.2.3:

9. Teorema. Sea $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva: si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces E tiene necesariamente la P.R.N. respecto de λ.

Demostración. Por definición, E tiene la propiedad de Radón - Nykodim respecto de λ si y solo si para toda medida $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, absolutamente λ-continua, existe $f \in L^1(\lambda,E)$ tal que $\mu(A) = \int_A f d\lambda \quad \forall A \in \Sigma$: es decir, μ tiene densidad respecto de λ.

Por lo tanto, si E no tiene la P.R.N. respecto de λ, existirá una medida $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, tal que $|\mu|(A) = 0$ cuando $\lambda(A) = 0$, y μ carece de densidad respecto de λ. Además, se puede comprobar sin dificultad que podemos suponer siempre $|\mu|(A) \leq \lambda(A) \quad \forall A \in \Sigma$ (ver p.ej., | 9 |, III.1.5). Sea entonces Π el conjunto de las particiones $\pi = \{A_1,\dots,A_n\}$ de X en Σ. Con el orden $\pi_1 = \{A_1,\dots,A_n\} \leq \pi_2 = \{B_1,\dots,B_m\}$ si y sólo si $\forall i=1,\dots,n$ existen $j_1,\dots,j_s$ en $\{1,\dots,m\}$ tales que $A_i = \bigcup_{k=1}^{s} B_{j_k}$, Π es un conjunto dirigido. Definimos, para cada partición $\pi = \{A_1,\dots,A_n\} \in \Pi$:

$$g_\pi = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{\lambda(A_i)} \cdot \chi_{A_i} \in A(\Sigma,E) \subset L^p(\lambda,E),$$ quienquiera que sea p, con $1 \leq p < +\infty$.

Fijado p, consideremos el subconjunto $K = \{g_\pi \mid \pi \in \Pi\} \subset L^p(\lambda,E)$: y tenemos que K está en las condiciones de la Definición 3, si $1 < p < +\infty$; o en las de la definición 2, si $p=1$. En efecto, suponiendo $p > 1$, se tiene:

i) K está acotado en $L^p(\lambda,E)$ pues, $\forall \pi = \{A_1,\dots,A_n\} \in \Pi$:

$$\|g_\pi\|_p = \left(\int_X \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{\lambda(A_i)} \cdot \chi_{A_i}\right\|^p d\lambda\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\|\mu(A_i)\|^p}{\lambda(A_i)^p} \cdot \lambda(A_i)\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\right)^{1/p} = \lambda(X)^{1/p}$$

ii) $K(A) = \{\int_A g_\pi \, d\lambda \ / \ \pi \in \Pi\}$ es débilmente relativamente compacto cualquiera que sea $A \in \Sigma$. En efecto, al ser $\mu \in Ca(\Sigma,E)$ se tiene, tal y como se indicó en el Corolario I.10, que el conjunto $\{\mu(A) \ / \ A \in \Sigma\}$ es débilmente relativamente compacto en E; por lo tanto, y por el Teorema de Krein, su envoltura absolutamente convexa y cerrada, C, es débilmente compacta. Bastará comprobar entonces que $K(A) \subset C$ para todo $A \in \Sigma$. Fijemos $A \in \Sigma$: $\forall \pi = \{A_1,\ldots,A_n\} \in \Pi$, se tiene:

$$\int_A g_\pi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{\lambda(A_i)} \cdot \lambda(A \cap A_i), \quad \text{y} \quad \forall i=1,\ldots n, \quad \text{siendo}$$

$\alpha_i = \dfrac{\lambda(A_i \cap A)}{\lambda(A_i)}$, claramente es $0 \leq \alpha_i \leq 1$, por lo que podemos siempre suponer que $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots . \leq \alpha_n \leq 1$. Llamemos entonces: $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ si $2 \leq i \leq n$, y $B_i = \bigcup_{j=i}^{n} A_j$, y tendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, \mu(B_i) = \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i) \right) + \alpha_2 \left(\sum_{i=2}^{n} \mu(A_i) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=3}^{n} \mu(A_i) \right) + \cdots + \alpha_{n-1} \left(\sum_{i=n-1}^{n} \mu(A_i) - \mu(A_n) \right) + \alpha_n \, \mu(A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i) = \int_A g_\pi d\lambda$$

Pero, por otro lado, $\mu(B_i) \in C \quad \forall i=1,\ldots,n$, y puesto que $0 \leq \beta_i \leq 1 \quad \forall i=1,\ldots,n$, y $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \alpha_n \leq 1$, queda que $\int_A g_\pi \, d\lambda$ es una combinación absolutamente convexa de elementos del conjunto absolutamente convexo C: Por consiguiente, $\int_A g_\pi \, d\lambda \in C$, y ello cualquiera que sea $\pi \in \Pi$. De donde resulta que, efectivamente, $K(A) \subset C$ para todo conjunto $A \in \Sigma$.

Acabamos asi de ver que, dado p con $1 < p < +\infty$, K es un subconjunto de $L^p(\lambda,E)$ que está en las condiciones de la Definición 3.

Ahora bien, el que se verifique (i) nos asegura, según se vió en la demostración de la Proposición 8, que K verifica también las condiciones (i) e (iii) de la Definición 2: y, por consiguiente, K está en las condiciones de dicha definición como subconjunto de $L^1(\lambda,E)$. Sin embargo, K no es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$, cualquiera que sea p en las condiciones $1 \leq p < +\infty$.

En efecto, fijemos tal p : si K fuese débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$, y puesto que $(g_\pi)_{\pi \in \Pi} = K$ es una red, tendrían que existir una subred $(g_{\pi_i})_{i \in I}$, y un elemento $g \in L^p(\lambda,E)$, tales que $g_{\pi_i} \longrightarrow g$ débilmente. Y, puesto que dados $x' \in E'$ y $A \in \Sigma$, $x'.\chi_A \in L^p(\lambda,E)'$, obtendríamos que $\int_A \langle g,x'\rangle \, d\lambda =$
$= \langle g,\, x'.\chi_A\rangle = \lim\limits_I \langle g_{\pi_i}, x'.\chi_A\rangle = \lim\limits_I \int_A \langle g_{\pi_i},x'\rangle \, d\lambda$, $\forall x' \in E'$ y $\forall A \in \Sigma$.

Ahora bien, dado $A \in \Sigma$, es de comprobación inmediata que, $\forall \pi = \{A_1,\dots,A_n\} \in \Pi$, con $\pi \geq \pi_A = \{A, X \setminus A\}$, se tiene $\int_A g_\pi \, d\lambda = \mu(A)$; y por lo tanto, $\forall x' \in E'$:

$$\left\langle \int_A g.d\lambda \,,x'\right\rangle = \int_A \langle g,x'\rangle \, d\lambda = \lim_I \int_A \langle g_{\pi_i},x'\rangle \, d\lambda =$$

$$= \left\langle \lim_I \int_A g_{\pi_i} \, d\lambda,\, x'\right\rangle = \langle \mu(A),x'\rangle$$

De donde queda: $\int_A g \, d\lambda = \mu(A)$ $\forall A \in \Sigma$, con $g \in L^p(\lambda,E) \subset L^1(\lambda,E)$, cualquiera que sea p. Es decir, g sería una densidad de μ respecto de λ, en contra de la hipótesis inicial, En conclusión, si E no tiene la P.R.N. respecto de λ, E no puede tener la propiedad $P_p(\lambda)$ para ningún p, con $1 \leq p < +\infty$.

Recordando que, tal y como se definió en I.3, un espacio E tiene la P.R.N. si y sólo si tiene la P.R.N. respecto de toda medida finita y positiva λ; y que además son equivalentes:

B_1. E tiene la P.R.N.

B_2. E tiene la P.R.N. respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$, tal y como se puede ver en | 9 |, V. 3.8.

Del Teorema anterior se obtiene el siguiente:

10. Corolario. Sea E un espacio de Banach. Entonces, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con λ medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $1 \leq p < +\infty$, E tiene la P.R.N.

Utilizando el Teorema 9, llegamos por fin a la siguiente relación entre las propiedades P_1 y P:

11. Proposición. El espacio de Banach E tiene la propiedad P si y sólo si E tiene la propiedad P_1.

Demostración. (a) Supongamos que E tiene la propiedad P, y sean X conjunto, Σ σ-álgebra de subconjuntos de X, $\lambda \in Ca(\Sigma)$ medida positiva. La aplicación: $\tilde{J} : L^1(\lambda,E) \longrightarrow Ca(\Sigma,E)$, definida por:

$$f \longrightarrow \mu_f$$

$\mu_f(A) = \int_A f d\lambda \quad \forall A \in \Sigma$, es lineal, tal y como se vió en la Sección 3 del Capítulo I. Además, $\tilde{J}$ es una isometría sobre la imagen, pues al ser $A(\Sigma,E')$, como subespacio de $L^\infty(\lambda,E') \subset L^1(\lambda,E)'$, normante sobre $L^1(\lambda,E)$, se tiene:

$\|\mu_f\| = |\mu_f|(X) = \sup \{ |\sum_{i=1}^{n} \langle x_i', \mu_f(A_i)\rangle| \ / \ x_1', \dots, x_n' \in B_{E'},$ $\{A_1, \dots, A_n\}$ partición de X en $\Sigma\} = \sup\{ |\int_X \langle f,h\rangle \, d\lambda| \ / \ h \in A(\Sigma, E'),$ $\|h\|_\infty \leq 1\} = \|f\|_1$.

Es decir, $\|\tilde{J}(f)\| = \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(\lambda,E)$, y $L^1(\lambda,E)$ se puede identificar con $\tilde{J}(L^1(\lambda,E))$, que será un subespacio vectorial cerrado de $Ca(\Sigma,E)$.

Sea entonces K un subconjunto de $L^1(\lambda,E)$, verificando las condiciones (i) — (iii) de la Definición 2: $\tilde{J}(K)$ verificará las condiciones (i) — (iii) de la Definición 5 luego, por tener E la propiedad P, y en particular la propiedad $P(\Sigma)$, $\tilde{J}(K)$ es débilmente relativamente compacto en $Ca(\Sigma,E)$. Ahora bien, $\tilde{J}(L^1(\lambda,E))$ es un subespacio vectorial cerrado, y en consecuencia débilmente cerrado, de $Ca(\Sigma,E)$: por lo tanto, $\tilde{J}(K)$ es débilmente relativamente compacto como subconjunto de $\tilde{J}(L^1(\lambda,E))$. Y, al ser $\tilde{J}$ un isomorfismo sobre la imagen, K es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $L^1(\lambda,E)$. Así, E tiene la propiedad $P_1(\lambda)$ para cualquier medida finita y positiva, y en consecuencia, tiene la propiedad P_1.

(b) Supongamos que E tiene la propiedad P_1: entonces, para cualquier medida finita y positiva λ, E tiene la propiedad $P_1(\lambda)$, y por lo tanto, por el Teorema 9, E tiene la P.R.N.

Sea X un conjunto y Σ una σ-álgebra de subconjuntos de X, y sea un conjunto $K \in Ca(\Sigma,E)$, en las condiciones de la Definición 5. Por la condición (ii) de dicha definición, tendremos entonces que existe $\lambda \in Ca(\Sigma)$, medida positiva, tal que $\lim\limits_{\lambda(A)\to o} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$. En particular, esto nos asegura que toda medida $\mu \in K$ es absolutamente λ-continua, y por tener E la P.R.N., existirá $f_\mu \in L^1(\lambda,E)$ función de densidad de μ respecto de λ: es decir, $\mu(A) = \int_A f_\mu \, d\lambda \quad \forall A \in \Sigma$.

Definimos: $K^* = \{f_\mu \,/\, \mu \in K\}$, y tenemos que K^* es un subconjunto de $L^1(\lambda,E)$, que trivialmente verifica las condiciones (i) - (iii) de la Definición 2, por verificar K las condiciones correspondientes de la Definición 5. Por tener E la propiedad $P_1(\lambda)$, resulta entonces que K^* es débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda,E)$.

Sea $\tilde{J} : L^1(\lambda,E) \longrightarrow Ca(\Sigma,E)$ la isometría sobre la imagen definida en la parte (a): se comprueba inmediatamente que $\tilde{J}(K^*) = K$, luego, de ser K^* débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda,E)$, y $\tilde{J}$ una isometría sobre la imagen, se deduce que K es débilmente relativamente compacto en $Ca(\Sigma,E)$.

Concluyendo, E tiene la propiedad $P(\Sigma)$, y ello cualesquiera que sean el conjunto X y la σ-álgebra Σ de subconjuntos de X: es decir, de acuerdo con la definición 6, E tiene la propiedad P.

Estableceremos a continuación una serie de propiedades de invariancia de las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P, así como un resultado de localización de dichas propiedades. Todo ello, aparte de sernos útil en lo sucesivo, es un claro indicio, por analogía, de la profunda relación básica entre estas propiedades y la P.R.N.

12. Proposición. Las propiedades $P_p(\lambda)$ y P_p, con $1 \leq p < +\infty$, así como $P(\Sigma)$ y P, se conservan mediante isomorfismos.

Demostración. La haremos para $P_p(\lambda)$, con $\lambda \in Ca(\Sigma)$ medida positiva y $1 < p < +\infty$, siendo análoga en los demás casos. Fijados λ y p, sean E y F dos espacios de Banach, y $\theta : F \longrightarrow E$ un isomorfismo entre ambos. Supongamos además que E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$. θ induce una aplicación:

$$\theta^* : \mathcal{L}^p(\lambda,F) \longrightarrow \mathcal{L}^p(\lambda,E)$$
$$f \longrightarrow \theta \circ f$$

que es trivialmente lineal. Además, por ser θ un isomorfismo, sabemos que existen $m > 0$, $M > 0$ tales que $m\|y\| \leq \|\theta(y)\| \leq M\|y\|$ para todo $y \in F$. Se tiene por lo tanto, para cada $f \in \mathcal{L}^p(\lambda,E)$:

$$m\, N_p(f) = m \cdot \left(\int_X \|f\|^p \, d\lambda\right)^{1/p} = \left(\int_X m^p \|f\|^p \, d\lambda\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_X \|\theta^*(f)\|^p d\lambda\right)^{1/p} = N_p(\theta \circ f) \leq \left(\int_X M^p \, \|f\|^p \, d\lambda\right)^{1/p} =$$

$$= M \cdot \left(\int_X \|f\|^p \, d\lambda\right)^{1/p} = M \cdot N_p(f).$$

De donde se sigue que $N_p(f) = 0$ si y sólo si $N_p(\theta \circ f) = 0$, y por lo tanto, θ^* es compatible con el paso al cociente, e induce la aplicación lineal:

$$\overline{\theta}^* : L^p(\lambda,F) \longrightarrow L^p(\lambda,E), \text{ que verifica:}$$

$m\|f\|_p \leq \|\overline{\theta}^*(f)\|_p = \|\theta \circ f\|_p \leq M \, . \, \|f\|_p$: es decir, $\overline{\theta}^*$ es un isomorfismo.

Sea entonces un subconjunto $K \subset L^p(\lambda,F)$, que verifica las condiciones (i) e (ii) de la Definición 3: $\overline{\theta}^*(K)$ será un subconjunto de $L^p(\lambda,E)$, que naturalmente verificará las mismas condiciones. Como, por hipótesis, E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, se sigue que $\overline{\theta}^*(K)$ es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$: y, al ser $\overline{\theta}^*$ un isomorfismo, K ha de ser débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,F)$.

En definitiva, F tiene éfectivamente la propiedad $P_p(\lambda)$.

<u>13. Proposición</u>. Si E tiene alguna de las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ ó P, todo subespacio vectorial cerrado de E también la tiene.

<u>Demostración</u>. La haremos nuevamente para $P_p(\lambda)$, con $1 < p < +\infty$, siendo los demás casos análogos. Fijados p, con $1 < p < +\infty$, y $\lambda \in Ca(\Sigma)$, medida positiva, supongamos que E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ y que F es un subespacio vectorial cerrado de E. Siendo entonces $I : F \to E$ la inclusión canónica, I induce una aplicación:

$$\begin{aligned} I^* : L^p(\lambda,F) &\longrightarrow L^p(\lambda,E), \\ f &\longmapsto I \circ f \end{aligned}$$

que a su vez permite identificar $L^p(\lambda,F)$ a un subespacio vectorial cerrado de $L^p(\lambda,E)$ (el cual, como fácilmente se ve, estará formado por aquellas funciones de $L^p(\lambda,E)$ que toman valores en F salvo, a lo más, para un conjunto $X_o \in \Sigma$

con $\lambda(X_o) = 0)$. Siendo $K \subset L^p(\lambda,F)$ un conjunto en las condiciones de la Definición 3, es inmediato comprobar que $I^*(K)$ es un subconjunto de $L^p(\lambda,E)$ que verifica esas mismas condiciones: y, puesto que E tiene por hipótesis la propiedad $P_p(\lambda)$, $I^*(K)$ será débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$. Pero $I^*(K)$ está contenido íntegramente en $I^*(L^p(\lambda,F))$, que es un subespacio vectorial cerrado, y en consecuencia débilmente cerrado, de $L^p(\lambda,E)$: por lo que $I^*(K)$ debe ser débilmente relativamente compacto en $I^*(L^p(\lambda,F))$. Y por ser este último espacio isométrico a $L^p(\lambda,F)$, se sigue que K es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,F)$. Así, F tiene efectivamente la propiedad $P_p(\lambda)$.

<u>14. Proposición</u>. E tiene alguna de las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ ó P si y solamente si todo subespacio vectorial cerrado y separable de E también la tiene.

<u>Demostración</u>. Por la Proposición anterior, es evidente que, de tener E alguna de dichas propiedades, también han de tenerla todos sus subespacios vectoriales cerrados, y en particular los cerrados y separables.

Supongamos ahora que todo subespacio vectorial cerrado y separable de E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 < p < +\infty$ y $\lambda \in Ca(\Sigma)$ medida positiva (para las demás propiedades, la demostración es análoga). Sea $K \subset L^p(\lambda,E)$ un subconjunto que verifica las condiciones de la Definición 3, y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ una sucesión cualquiera.

Según la definición dada en el Capítulo I, Sección 3, al ser cada $f_n : X \longrightarrow E$ una función medible, se tiene que $f_n(X)$ engendra un subespacio vectorial separable de E. (Notar que, al ser $f_n \in L^p(\lambda,E)$ una clase de funciones, cuyos representantes se diferencian tan sólo en un conjunto de λ-mèdida nula, ésto se puede conseguir siempre sin más que elegir un representante adecuado) Llamamos entonces F al subespacio vectorial cerrado de E engendrado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)$, y tendremos que F es separable; además, $f_n \in L^p(\lambda,F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $K^* = \{f_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $L^p(\lambda,F)$, que verifica en dicho espacio las condiciones de la Definición 3, por verificar K las condiciones correspondientes en $L^p(\lambda,E)$. Por hipótesis, F, al ser un subespacio vectorial cerrado y separable de E, tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, y en consecuencia, K^* es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,F)$. Pero este último espacio, como ya hemos visto, se identifica canónicamente a un subespacio vectorial cerrado de $L^p(\lambda,E)$, de donde resulta que K^* es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$. Se tiene así, por el Teorema de Eberlein, que existe $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y existe $f \in L^p(\lambda,E)$, tales que $f_{n_k} \longrightarrow f$ débilmente en $L^p(\lambda,E)$. Y como ésto es cierto para cualquier sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, se tendrá, aplicando otra vez el Teorema de Eberlein, que K es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $L^p(\lambda,E)$. En conclusión, E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$.

La localización de las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P, en los subespacios vectoriales cerrados y separables de un espacio de Banach va a permitirnos, junto con el resultado siguiente, imponer una nueva condición restrictiva a los espacios que las verifican, la cual será un paso esencial en la caracterización de dichos espacios.

15. Proposición. El espacio l^1 no tiene ninguna de las propiedades $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$ y λ medida de Lebesgue en $[0,1] = X$.

Demostración. Sea, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la n-ésima función de Rademacher, es decir, $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} 2^n \pi t)$, donde:

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Y definimos: $f_n : [0,1] \longrightarrow l^1$ según
$t \longrightarrow (f_n^k(t))_{k \in \mathbb{N}}$

$$f_n^k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ r_n(t) & \text{si} \quad k = n \end{cases}.$$

Claramente, f_n es una función λ-medible $\forall n \in \mathbb{N}$, por ser r_n medible y l^1 un espacio de Banach separable.

Además, $\|f_n(t)\|_1 = |r_n(t)| = 1$ $\forall t \in [0,1]$, y en consecuencia para cada p, con $1 \leq p < +\infty$, se tiene:

$$\|f_n\|_p = \left(\int_X \|f_n\|^p d\lambda\right)^{1/p} = \left(\int_X |r_n(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así, $K = \{f_n \, / \, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $L^p(\lambda, l^1)$ para cualquier p, con $1 \leq p < +\infty$; K está además acotado en $L^p(\lambda, l^1)$, y es uniformemente λ-integrable. Por otro lado, siendo A un subconjunto medible Lebesgue en $X = [0,1]$, se tiene que:

$K(A) = \{\int_A f_n \, d\lambda \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto relativamente compacto de l^1, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_A f_n \, d\lambda \right\| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_A r_n(t)dt \right| = 0 \qquad (*)$$

Así, si $1 < p < +\infty$, K es un subconjunto de $L^p(\lambda, l^1)$ que verifica las condiciones de la definición 3, y un subconjunto de $L^1(\lambda, l^1)$ en las condiciones de la Definición 2. Sin embargo, vamos a ver que K no es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda, l^1)$, para ningún p con $1 \leq p < +\infty$.

En efecto, si lo fuese para un cierto p en dichas condiciones, tendríamos una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y un elemento $f \in L^p(\lambda, l^1)$, tales que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergería débilmente a f en $L^p(\lambda, l^1)$. Pero, puesto que $A(\Sigma, l^\infty)$ es un subespacio de $L^p(\lambda, l^1)'$ que separa puntos sobre $L^p(\lambda, l^1)$, por (*) se tendría que $f = 0$.

Ahora bien, definamos:

$$v : L^p(\lambda, l^1) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f^k \cdot r_k\right) d\lambda$$

v es una aplicación lineal, que verifica:

$$|v(f)| = \left|\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f^k r_k\right) d\lambda\right| = \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} f^k(t) . r_k(t) dt\right|\right. \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f^k(t)| \ |r_k(t)|\right) dt \leq \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f^k(t)|\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \|f(t)\| dt \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_p .$$

Así, v es continua, y por lo tanto $v \in L^p(\lambda, l^1)'$. Pero, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v(f_n) = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_n^k \cdot r_k \right) d\lambda = \int_0^1 r_n^2(t) dt = \int_0^1 dt = 1;$$ es

decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $v(f_{n_k}) \longrightarrow 0$. Y esto nos asegura que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener ninguna subsucesión que converja a 0 débilmente en $L^p(\lambda, l^1)$, con $1 \leq p < +\infty$.

En definitiva, l^1 no puede tener la propiedad $P_p(\lambda)$ para ningún p, con $1 \leq p < +\infty$.

Nota. La anterior demostración se basa prácticamente en un contraejemplo de Batt (ver | 2 |), que muestra precisamente que para el espacio l^1, falla el inverso del Teorema 1.

De esta proposición 25, junto con las propiedades de localización, obtenida en la Proposición 14, y de invarianza por isomorfismos, dada en la Proposición 12, obtenemos el siguiente:

16. Corolario. Si E tiene alguna de las propiedades $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$ y λ medida de Lebesgue en $[0,1]$, entonces E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1.

Y, puesto que las propiedades P_p y P implican respectivamente las propiedades $P_p(\lambda)$ y $P_1(\lambda)$, con λ medida de Lebesgue en $[0,1]$, se obtiene igualmente:

17. Corolario. Ningún espacio de Banach E que contenga un subespacio vectorial isomorfo a l^1 puede tener alguna de las propiedades P_p, con $1 \leq p < +\infty$, ó P.

2. El resultado principal

En la anterior Sección de este capítulo hemos definido las propiedades $P_p(\lambda)$, P_p, $P(\Sigma)$ y P, y hemos establecido una serie de correspondencias entre ellas, así como un par de caracterizaciones parciales de los espacios que las poseen. Por fin estamos en condiciones de pasar a una caracterización final, que nos va a permitir responder a la cuestión principal, es decir, cuáles son exactamente los espacios de Banach para los que es cierta la parte recíproca del Teorema 1. Para ello, y tanto en el primer resultado previo, como en el Teorema principal, haremos uso esencial de un reciente resultado de Rosenthal |19|, que caracteriza los espacios de Banach que no contienen ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1. De las numerosas caracterizaciones que aparecen en dicho artículo, destacamos a continuación dos, que son las más útiles para nuestros propósitos:

(*) Sea un espacio de Banach E: E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1 si y sólo si toda sucesión en B_E posee alguna subsucesión débilmente de Cauchy.

(**) Sea E un espacio de Banach separable: E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1 si y sólo si la bola unidad B_E es secuencialmente densa en la bola unidad del bidual, $B_{E''}$, para la topología débil* en E" (es decir, la topología $\sigma(E'',E')$).

18. Proposición. Sean E un espacio de Banach, $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva, y p un número tal que $1 < p < +\infty$. Entonces, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, el espacio $L^p(\lambda,E)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a l^1.

Demostración. Supongamos que, en las condiciones del enunciado, existe una aplicación $\theta : l^1 \longrightarrow L^p(\lambda,E)$ que sea un isomorfismo sobre la imagen. Llamamos $\{e_n\}_{n\in N}$ a la base canónica de l^1, y sea, $\forall n \in N$, $f_n = \theta(e_n)$: $\|f_n\|_p = \|\theta(e_n)\| \leq \|\theta\| \, \|e_n\| \leq \|\theta\|$.

Al ser $f_n \in L^p(\lambda,E)$ para cada n, podemos considerar que el subespacio vectorial cerrado F engendrado por $\bigcup_{n\in N} f_n(X)$ es separable. Sea entonces $\{G_m \ / \ m \in N\}$ una base de abiertos en F: eligiendo adecuadamente la función representante de cada clase $f_n \in L^p(\lambda,E)$, podemos considerar que la función medible $f_n : X \to F$ verifica que $A_{nm} = f_n^{-1}(G_m) \in \Sigma$ para cada $n,m \in N$. Y siendo Σ_o el álgebra engendrada por $\{A_{n\,m} \ / \ n,m \in N\}$, tendremos que Σ_o es una subálgebra numerable de la σ-álgebra Σ. Para cada $A \in \Sigma_o$, $(\int_A f_n \, d\lambda)_{n\in N}$ es una sucesión acotada en E, ya que, fijado $n \in N$:

$$\|\int_A f_n \, d\lambda\| = \|\int_X \chi_A f_n \, d\lambda\| \leq \|\chi_A\|_q \, \|f_n\|_p \leq \lambda(X)^{1/q} \, .$$

$$. \, \|f_n\|_p \leq \lambda(X)^{1/q} \, . \, \|\theta\| \quad ,$$

siendo q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Puesto que E, por hipótesis, no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1, se sigue de la caracterización (*) que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $(\int_A f_{n_k}\, d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(E,E')$-de Cauchy en E. Ahora bien, al ser Σ_o numerable, un proceso diagonal de Cantor nos permitirá extraer una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que la sucesión $(\int_A f_{n_k}\, d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy en E para todo $A \in \Sigma_o$.

Sea entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k^* = f_{n_k} - f_{n_{2k}} = \theta(e_{n_k} - e_{n_{2k}}) \in$ $\in L^p(\lambda,E)$.

Llamemos Σ_1 a la σ-álgebra engendrada por Σ_o, y λ_1 a la restricción de λ a Σ_1 : $\lambda_1 \in Ca(\Sigma_1)$, y $f_k^* \in L^p(\lambda_1,E)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Además se tiene:

a. $(f_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado en $L^p(\lambda_1,E)$, pues para toda $k \in \mathbb{N}$: $\|f_k^*\|_p = (\int_X \|f_k^*\|^p\, d\lambda_1)^{1/p} = (\int_X \|f_k^*\|^p\, d\lambda)^{1/p} =$

$$= (\int_X \|f_{n_k} - f_{n_{2k}}\|^p\, d\lambda)^{1/p} = \|\theta(e_{n_k} - e_{n_{2k}})\| \leq \|\theta\|\ \|e_{n_k} - e_{n_{2k}}\| =$$

$$= 2\|\theta\|.$$

b. Para todo $A \in \Sigma_1$, $(\int_A f_k^*\, d\lambda_1)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a 0 en E. En efecto, si $A \in \Sigma_o$, se tiene, $\forall x' \in E'$:

$$\lim_{k\to\infty} \langle \int_A f_k^*\, d\lambda_1, x'\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \int_X (f_{n_k} - f_{n_{2k}})\, d\lambda_1, x'\rangle = 0,$$ de donde se sigue mediante un procedimiento standard que

$\lim\limits_{k\to\infty} <\int_A f_k^* \, d\lambda_1, x'> = 0 \quad \forall A \in \Sigma_1.$

Y esto nos asegura que $K = \{f_k^* \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $L^p(\lambda_1, E)$ en las condiciones de la Definición 3.

Ahora bien, la inclusión canónica:

$$I : L^p(\lambda_1, E) \longrightarrow L^p(\lambda, E)$$

es un isomorfismo sobre la imagen, y sea $I' : L^p(\lambda, E)' \to L^p(\lambda_1, E)'$ su transpuesta. Sabemos (ver |9|, V.1.4.), que al ser Σ_1 una sub-σ-álgebra de Σ, y $\lambda \in Ca(\Sigma)$, para $1 \leq q < +\infty$ existe una esperanza condicionada:

$$E(\,.\,|\Sigma_1) : L^q(\lambda, E') \longrightarrow L^q(\lambda_1, E'), \quad \text{operador lineal,}$$

con: $\int_A g \, d\lambda = \int_A E(g|\Sigma_1) d\lambda_1 \quad \forall g \in L^q(\lambda, E')$ cuando $A \in \Sigma_1$, y $\|E(g, \Sigma_1)\|_q \leq \|g\|_q$. Y vamos a ver que $I'(g) = E(g|\Sigma_1)$ siempre que $g \in L^q(\lambda, E')$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto, sea $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i} \in A(\Sigma_1, E)$. Se tiene, al ser $A_i \in \Sigma_1 \quad \forall i=1,\ldots n$:

$$<f, I'(g)> = \int_X <f, I'(g)> d\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} <x_i, \int_{A_i} g \, d\lambda_1> =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} <x_i, \int_{A_i} E(g, \Sigma_1) d\lambda_1> = \int_X <\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i}, E(g|\Sigma_1)> d\lambda_1 =$$

$$= \int_X <f, E(g|\Sigma_1)> d\lambda_1 = <f, E(g|\Sigma_1)>.$$

Luego $I'(g) = E(g|\Sigma_1) \quad \forall g \in L^q(\lambda, E')$, por ser $I'(g)$ y $E(g|\Sigma_1)$ dos formas lineales y continuas que coinciden sobre el subespacio denso $A(\Sigma_1,E)$ de $L^p(\lambda_1,E)$.

Ahora bien, por (b), se tiene que $\forall g_1 \in L^q(\lambda_1,E')$, $\lim_{k\to\infty} \int_X <f_k^*,g_1>d\lambda_1 = 0$, y por lo tanto, $\forall g \in L^q(\lambda,E')$:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X <f_k^*,g>d\lambda = \lim_{k\to\infty} <I(f_k^*),g> = \lim_{k\to\infty} <f_k^*,I'(g)> =$$

$$= \lim_{k\to\infty} <f_k^*,E(g|\Sigma_1)> = 0,$$ ya que $E(g|\Sigma_1) \in L^q(\lambda_1,E')$.

En particular, dados $A \in \Sigma$ y $x' \in E'$, como $x'.\chi_A \in A(\Sigma,E')\subset L^q(\lambda,E')$, se tiene: $\lim_{k\to\infty} <\int_A f_k^*\, d\lambda,\ x'> = \lim_{k\to\infty}\int_X <f_k^*,x'.\chi_A>d\lambda = 0$, y por consiguiente, $(\int_A f_k^*\, d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a 0 en E, $\forall A \in \Sigma$.

Se tiene entonces que, también como subconjunto de $L^p(\lambda,E)$, K está en las condiciones de la Definición 3: y al tener E, por hipótesis la propiedad $P_p(\lambda)$, se sigue que K es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$: por lo tanto, $(f_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(f_{k_m}^*)_{m\in\mathbb{N}}$, débilmente convergente a un elemento $f^* \in L^p(\lambda,E)$. Y como acabamos de ver que, $\forall g \in L^q(\lambda,E')$, $\lim_{k\to\infty}\int_X <f_k^*,g>\, d\lambda = 0$, y $L^q(\lambda,E')$ es un subespacio del dual de $L^p(\lambda,E)$ que separa puntos, nos queda que $f^* = 0$. Pero, $\forall m \in \mathbb{N}$, $f_{k_m}^* \in \theta(l^1)$, y al ser un isomorfismo, debe verificarse que $\theta^{-1}(f_{k_m}^*) \longrightarrow 0$ débilmente en l^1: por el Lema de Schur, ello implica que $\|\theta^{-1}(f_{k_m}^*)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.
Sin embargo, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\theta^{-1}(f_k^*) = e_n - e_{n_{2k}} \Longrightarrow \|\theta^{-1}(f_{n_k})\| =$

$= \|e_{n_k} - e_{n_{2k}}\| = 1$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Así, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 < p < +\infty$ y $\lambda \in Ca(\Sigma)$, medida positiva, $L^p(\lambda,E)$ no puede contener ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1.

<u>Nota</u>. Parece que esta Proposición es un caso particular de un resultado de Pisier |18|, aún sin publicar, que vendría a asegurar que, si $1 < p < +\infty$ y λ es una medida finita y positiva, el que un espacio de Banach E contenga un subespacio vectorial isomorfo a l^1 es equivalente a que también $L^p(\lambda,E)$ lo contenga.

<u>19. Teorema</u>. Sean E un espacio de Banach separable, λ la medida de Lebesgue en $X = [0,1]$, y p un número tal que $1 < p < +\infty$. Entonces, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, se tiene que el dual de $L^p(\lambda,E)$ se identifica con $L^q(\lambda,E')$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

<u>Demostración</u>. Se tiene que, al ser E separable y λ la medida de Lebesgue en $[0,1] = X$, $L^p(\lambda,E)$ es claramente un espacio de Banach separable, que, por el Corolario 16 y la Proposición 18, no contendrá ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1, siempre que E tenga la propiedad $P_p(\lambda)$. Entonces, y según la caracterización (**) de Rosenthal, tendremos que la bola unidad de $L^p(\lambda,E)$ es débil*-secuencialmente densa en la bola unidad de $L^p(\lambda,E)''$.

Sea $U \in L^p(\lambda,E)''$ tal que $\|U\| \leq 1$ y $U\big|_{L^q(\lambda,E')} = 0$, por lo anterior, podremos encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\lambda,E)$, tal que $\|f_n\|_p \leq 1$ para cada n, y $U(v) = \lim_{n\to\infty} v(f_n)$ si $v \in L^p(\lambda,E)'$.

Sea $K = \{f_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(\lambda,E)$. Tenemos:

(i) K está acotado, por la elección de las f_n.

(ii) Sea $A \in \Sigma$ (σ-álgebra de Lebesgue en $X = [0,1]$): $K(A) = \{\int_A f_n \, d\lambda \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente relativamente compacto en E, pues para todo $x' \in E'$, $x'.\chi_A \in A(\Sigma,E') \subset L^q(\lambda,E')$, y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} <\int_A f_n \, d\lambda, x'> = \lim_{n\to\infty} \int_X <f_n, x'.\chi_A> d\lambda = U(x'.\chi_A) = 0,$$ por la elección de U. Así, $(\int_A f_n \, d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a 0 en E, y $K(A)$ es, efectivamente, débilmente relativamente compacto.

Hemos visto, por consiguiente, que K es un subconjunto de $L^p(\lambda,E)$ en las condiciones de la Definición 3: y como, por hipótesis, E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, nos queda que K es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$. De donde, y por el Teorema de Eberlein, resulta que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge débilmente a un elemento $f \in L^p(\lambda,E)$.

Pero, para cada $g \in L^q(\lambda,E')$, se tiene:

$$\int_X <f,g> d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_X <f_{n_k}, g> d\lambda = U(g) = 0,$$ y como $L^q(\lambda,E')$ separa puntos sobre $L^p(\lambda,E)$, resulta que $f = 0$. Como consecuencia, dada $v \in L^p(\lambda,E)'$, se tiene:

$$U(v) = \lim_{k\to\infty} v(f_{n_k}) = v(f) = 0.$$ Y, por lo tanto, $U = 0$.

Nos queda así que si $U \in L^p(\lambda,E)''$, $\|U\| \leq 1$ y $U(g) = 0$ para to_ da $g \in L^q(\lambda,E')$, U ha de ser igual a 0: lo cual nos asegura que $L^q(\lambda,E')$ es un subespacio vectorial denso de $L^p(\lambda,E)'$ (ver |21|, II. 9.2). Pero $L^q(\lambda,E')$ es un espacio de Banach y por lo tanto, considerado como subespacio vectorial de $L^p(\lambda,E)'$, debe de ser cerrado: en definitiva, $L^p(\lambda,E)'$ coincide con $L^q(\lambda,E')$.

<u>20. Corolario</u>. Si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$, y λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, entonces E' tiene la P.R.N.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $1 < p < +\infty$ y E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$: entonces, por la Proposición 14, cualquier subespacio vectorial cerrado y separable, F, de E, tiene también la propiedad $P_p(\lambda)$. El Teorema 19 nos asegura que, en tal caso, $L^p(\lambda,F)' = L^q(\lambda,F')$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y ello es equivalente a que F' tenga la P.R.N. (ver | 9 |, V.4.1). Pero E' tiene la P.R.N. si y sólo si F' la tiene, para todo F subespacio vectorial cerrado y separable de E (ver | 9 |, III.3.5).

Y, si p=1, el que E tenga la Propiedad $P_1(\lambda)$ implica, tal y como se vió en la Proposición 8, que E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ para todo p, con $1 < p < +\infty$: de lo visto anteriormente se sigue que, también en este caso, E' ha de tener la P.R.N.

<u>21. Corolario</u>. Un espacio de Banach E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, con $1 \leq p < +\infty$ y λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, si y sólo si E y E' tienen ambos la P.R.N.

<u>Demostración</u>. Dado p, con $1 \leq p < +\infty$, y siendo λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, el que E y E' tienen ambos la P.R.N. si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ se sigue inmediatamente de los Corolarios 10 y 20.

En cuanto al recíproco, su demostración coincide esencialmente con la de la parte recíproca del Teorema 1, y está basada en que, al tener E' la P.R.N., $L^p(\lambda,E)' = L^q(\lambda,E')$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: una exposición detallada para el caso en que $p=1$ se puede encontrar, por ejemplo, en |9|, IV.2.1, y la demostración para $p>1$ es análoga por completo.

De la equivalencia entre las propiedades P y P_1, vista en la Proposición 11, así como de las Definiciones 4 y 6, se sigue el siguiente corolario:

<u>22. Corolario</u>. E tiene la propiedad P_p, con $1 \leq p < +\infty$, o la propiedad P, si y sólo si E y E' tienen ambos la P.R.N.

Resumiendo los resultados anteriores, se obtiene:

<u>23. Corolario</u>. Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:

a. E y E' tienen ambos la P.R.N.

b. E tiene las propiedades P y P_p, para todo p con $1 \leq p < +\infty$.

c. Siendo λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, existe r, con $1 \leq r < +\infty$, tal que E tiene la propiedad $P_r(\lambda)$.

Recordemos que, dados una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$ no atómica y un número p tal que $1 < p < +\infty$, se tiene que $L^p(\lambda,E)$ tiene la P.R.N. si y solamente si E la tiene (ver | 9 |, V.4.1); y que $L^p(\lambda,E)' = L^q(\lambda,E')$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, si y solamente si E' tiene la P.R.N. respecto de λ (ver | 9 |, IV.1.1). Además, E se puede identificar siempre a un subespacio vectorial de $L^p(\lambda,E)$, mediante el isomorfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L^p(\lambda,E) \\ x & \longrightarrow & \dfrac{x}{\lambda(X)} \cdot \chi_X \end{array}$$

y la P.R.N. se conserva para subespacios vectoriales cerrados (ver | 9 |, III.3.2). Se tiene entonces:

<u>24. Corolario</u>. Sea E un espacio de Banach.

a. Si E tiene la propiedad P_r, con $1 \leq r < +\infty$, entonces también $L^p(\lambda,E)$ tiene la propiedad P_r, siendo p tal que $1 < p < +\infty$ y $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva y no atómica.

b. Si, para algún p con $1 < p < +\infty$, existe r, tal que $1 \leq r < +\infty$ y $L^p(\lambda,E)$ tiene la propiedad P_r, siendo $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva y no atómica, entonces E tiene la propiedad P_r para cualquier r con $1 \leq r < +\infty$.

3. <u>Algunas cuestiones sobre los espacios $L^p(\lambda,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$</u>.

En la Sección 2 hemos visto que para que las condiciones que aparecen en las Definiciones 2, 3 y 5 caractericen en general los subconjuntos débilmente relativamente compactos de los espacios $L^p(\lambda,E)$ y $Ca(\Sigma,E)$, respectivamente, es necesario que tanto E como E' tengan la P.R.N. En esta Sección relacionaremos dichas condiciones con los subconjuntos de tales espacios que son relativamente compactos para ciertas topologías que, en general, resultarán ser menos finas que la débil.

Como anteriormente, E designará siempre un espacio de Banach, y Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto cualquier X.

25. Proposición. Sea K un subconjunto de $Ca(\Sigma,E)$. Se tiene:

a. Si K es débilmente relativamente compacto, verifica:

i) K está acotado en norma

ii) Existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente cuando $\mu \in K$.

iii) Para cada $A \in \Sigma$, $K(A) = \{\mu(A) / \mu \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E.

b. K verifica las condiciones anteriores si y sólo si K es relativamente compacto para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$.

Demostración. La parte (a) no es más que la forma directa del resultado de Brooks y Lewis, enunciado al comienzo del Capítulo como Teorema 1. Veamos, pues, la parte (b).

Sea $K \subset Ca(\Sigma,E)$ un conjunto que verifique (i), (ii) e (iii), y sea $(\mu_i)_{i\in I}$ una red en K. Por (i), K está acotado, luego es un subconjunto relativamente compacto de $Ca(\Sigma,E)''$ para la topología débil*, $\sigma(Ca(\Sigma,E)'', Ca(\Sigma,E)')$, cuya restricción a $Ca(\Sigma,E)$ es precisamente la topología débil $\sigma(Ca(\Sigma,E), Ca(\Sigma,E)')$. Por lo tanto, podemos extraer de $(\mu_i)_{i\in I}$ una subred $(\mu_{i_j})_{j\in J}$, $\sigma(Ca(\Sigma,E), Ca(\Sigma,E)')$-de Cauchy. Según vimos en la Proposición I.7, $F(\Sigma,E')$ se identifica a un subespacio vectorial normante de $Ca(\Sigma,E)'$: por lo tanto, la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$ es menos fina que $\sigma(Ca(\Sigma,E), Ca(\Sigma,E)')$, y la red $(\mu_{i_j})_{j\in J}$ será $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$ - de Cauchy en $Ca(\Sigma,E)$.

Fijado $A \in \Sigma$, para cualquier $x' \in E'$ se tiene que $x'.\chi_A \in F(\Sigma,E')$, y por lo tanto, existe el límite:

$\lim_J <\mu_{i_j}(A),x'> = \lim_J <\mu_{i_j},x'.\chi_A>$. Ello nos permite definir:

$$\mu(A) : E' \longrightarrow K$$
$$x' \longrightarrow <\mu(A),x'> = \lim_J <\mu_{i_j}(A),x'>.$$

Por (i), K está acotado, de donde se deduce facilmente que $\mu(A)$ es una aplicación lineal y continua. Por otro lado, y para cada $j \in J$, $\mu_{i_j}(A) \in K(A) = \{\nu(A) \ / \ \nu \in K\}$, que es débilmente relativamente compacto en E, por verificar K la condición (iii): y esto nos asegura que $\mu(A) \in E$.

Se tiene así definida $\mu : \Sigma \longrightarrow E$, $A \longrightarrow \mu(A)$ que es una función finitamente aditiva de conjunto, como se comprueba sin dificultad.

Además, es de variación (equivalentemente, semivariación) acotada. En efecto, por (i) sabemos que existe un número $M > 0$ tal que $|\nu|(X) = \|\nu\| \leq M$ para toda $\nu \in K$. Sean $\{A_1,\ldots,A_n\}$ una partición de X en Σ, y $x_1',\ldots,x_n' \in B_{E'}$: se tiene:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} <\mu(A_k),x_k'>\right| = \lim_J \left|\sum_{k=1}^{n} <\mu_{i_j}(A_k),x_k'>\right| \leq M, \text{ y por lo tanto}$$

$|\mu|(X) \leq M$. Por otro lado, y al verificar K la condición (ii), tenemos que existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\nu|(A) = 0$ uniformemente cuando $\nu \in K$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $A \in \Sigma$ y $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, se tenga $|\nu|(A) \leq \varepsilon$ para toda medida $\nu \in K$. Tomemos $A \in \Sigma$ tal que $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, y sean $\{A_1,\dots,A_n\}$ una partición de A en Σ, $x_1',\dots,x_n' \in B_{E'}$. Se tiene: $|\sum_{k=1}^n \langle\mu(A_k),x_k'\rangle| = \lim_J |\sum_{k=1}^n \langle\mu_{i_j}(A_k), x_k'\rangle| \leq \varepsilon$, puesto que $\mu_{i_j} \in K$ $\forall j \in J$. Por consiguiente, $|\mu|(A) \leq \varepsilon$, y ello para cada $A \in \Sigma$ tal que $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$. Esto nos asegura, entre otras cosas, que μ es una medida: y por lo tanto $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, y $\|\mu\| \leq M$.

Queda por ver que, dada $f \in F(\Sigma,E')$, se tiene:

$$\langle\mu,f\rangle = \int_X f d\mu = \lim_J \int_X f d\mu_{i_j} = \lim_J \langle\mu_{i_j},f\rangle$$

Ahora bien, por la definición de μ es claro que ésto se cumple siempre que $f \in A(\Sigma,E')$. Y, si $f \in F(\Sigma,E')$, se tiene por definición que existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesión acotada en $A(\Sigma,E')$, tal que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ $\forall t \in X$. Por el Teorema de Egoroff se tiene entonces que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f λ-casi uniformemente en X.

Fijemos $\varepsilon > 0$, y sea $H > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (y, por lo tanto también $\|f\|_\infty \leq H$). Según acabamos de ver, se puede encontrar un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, si $A \in \Sigma$ y $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, $|\mu_{i_j}|(A) \leq \frac{\varepsilon}{12H}$ $\forall j \in J$ y $|\mu|(A) \leq \frac{\varepsilon}{12H}$.

Por otro lado, al converger $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f λ-casi uniformemen te en X, existen $X_\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\lambda(X \setminus X_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$, y $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$\|\chi_{X_\varepsilon}(f-f_n)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{6M}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Y, como $f_{n_\varepsilon} \in A(\Sigma,E')$,

$\lim_J \langle\mu_{i_j}, f_{n_\varepsilon}\rangle = \langle\mu, f_{n_\varepsilon}\rangle$, luego existe $j_\varepsilon \in J$ tal que, si $j \geq j_\varepsilon$, $|\langle\mu-\mu_{i_j}, f_{n_\varepsilon}\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Tenemos entonces, para $j \geq j_\varepsilon$:

$$|\langle\mu-\mu_{i_j}, f\rangle| \leq |\langle\mu-\mu_{i_j}, f-f_{n_\varepsilon}\rangle| + |\langle\mu-\mu_{i_j}, f_{n_\varepsilon}\rangle| <$$

$$< \left|\int_X (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu\right| + \left|\int_X (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu_{i_j}\right| + \frac{\varepsilon}{3} \leq$$

$$\leq \left|\int_{X_\varepsilon} (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu\right| + \left|\int_{X\setminus X_\varepsilon} (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu\right| + \left|\int_{X_\varepsilon} (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu_{i_j}\right| +$$

$$+ \left|\int_{X\setminus X_\varepsilon} (f-f_{n_\varepsilon})\,d\mu_{i_j}\right| + \varepsilon/3 \leq \|\chi_{X_\varepsilon}(f-f_{n_\varepsilon})\|_\infty \cdot |\mu|(X_\varepsilon) +$$

$$+ \|f-f_{n_\varepsilon}\|_\infty \cdot |\mu|(X\setminus X_\varepsilon) + \|\chi_{X_\varepsilon}\cdot(f-f_{n_\varepsilon})\|_\infty\, |\mu_{i_j}|(X_\varepsilon) +$$

$$+ \|f-f_{n_\varepsilon}\|_\infty \cdot |\mu_{i_j}|(X\setminus X_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{3} < 2\,\frac{\varepsilon}{6M}\cdot M + 4H\cdot\frac{\varepsilon}{12H} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Y, en conclusión, $\langle\mu, f\rangle = \lim_J \langle\mu_{i_j}, f\rangle$, para cualquier $f \in F(\Sigma,E')$.

Tenemos así que de toda red en K se puede extraer una subred $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$ - convergente a un elemento de $Ca(\Sigma,E)$: y por lo tanto K es relativamente compacto en $Ca(\Sigma,E)$ para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$.

Veamos ahora que, si K es relativamente compacto para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$, entonces verifica las tres condiciones del enunciado.

(i) K está acotado en norma: esto se sigue inmediatamente del Principio de Acotación Uniforme, por ser $F(\Sigma,E')$ un subespacio vectorial de $Ca(\Sigma,E)'$ normante sobre $Ca(\Sigma,E)$.

(ii) Hay una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$: tal y como se indicó en el Teorema I.8, ello es equivalente a que la familia $\{|\mu| \mid \mu \in K\}$ contenida en $Ca(\Sigma)$ sea equiexhaustiva, es decir, a que para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, se tenga que $\lim_{n\to\infty} |\mu|(A_n) = 0$ uniformemente cuando $\mu \in K$.

Entonces, si (ii) no se verifica, para un cierto $\varepsilon > 0$ podremos encontrar una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K, y una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, tales que $|\mu_n|(A_n) \geq 3\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $3\varepsilon \leq |\mu_n|(A_n) = \sup \{|\sum_{i=1}^{k} <\mu_n(B_i),x_i'>| \ /$ $/ \ \{B_1,\ldots,B_k\}$ partición de A_n en Σ, $x_1',\ldots,x_k' \in B_{E'}\}$, podemos encontrar $\{A_1^n,\ldots,A_{s_n}^n\}$ partición de A_n en Σ, y $x_1'^n,\ldots,x_{s_n}'^n \in B_{E'}$, tales que, siendo $h_n = \sum_{i=1}^{s_n} x_i'^n \cdot \chi_{A_i^n} \in A(\Sigma,E')$, se tiene:

$$|<\mu_n,h_n>| = |\sum_{i=1}^{s_n} <\mu(A_i^n).x_n'^n>| \geq |\mu_n|(A_n) - \varepsilon \geq 2\varepsilon.$$

Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, y llamemos $\bar{K}$ a la adherencia de K para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$, que es un subconjunto compacto de $Ca(\Sigma,E)$ para dicha topología.

Dado $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^{\infty}$, definimos: $h_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k . h_k$, función con valores en E', y tenemos que $h_\alpha \in F(\Sigma,E')$, pues sea para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$h_\alpha^N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k h_k \therefore h_\alpha^N \in A(\Sigma,E'), \quad \|h_\alpha^N\|_\infty = \text{máx} \{ |\alpha_k| \; / k=1,\dots,N\} \leq$$

$$\leq \|\alpha\|_\infty , \quad y \quad h_\alpha^N(t) \xrightarrow[N \to \infty]{} h_\alpha(t) \quad \forall t \in X. \quad Y, si$$

$\mu \in Ca(\Sigma,E)$, se tiene:

$$<\mu,h_\alpha> = \int_X h_\alpha \, d\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X h_\alpha^N \, d\mu = \lim_{N \to \infty} (\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_X h_k \, d\mu) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \int_X h_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k <\mu,h_k>.$$

Llamemos H a $\{h_\alpha \; / \; \alpha \in l^\infty\}$, y tenemos que H es un subespacio vectorial cerrado de $F(\Sigma,E')$, como se comprueba sin dificultad: entonces, la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E),H)$ es menos fina que $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$, y por lo tanto $\overline{K}$ es $\sigma(Ca(\Sigma,E), H)$-compacto en $Ca(\Sigma,E)$.

Dada $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, sea $\beta_\mu = (<\mu,h_k>)_{k \in \mathbb{N}}$: se tiene que $\beta_\mu \in l^1$, pues:

$$\|\beta_\mu\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |<\mu,h_k>| = \sum_{k=1}^{\infty} | \sum_{i=1}^{s_k} <\mu(A_i^k),x_i'^k>| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(A_k) =$$

$$= |\mu|(A) \leq \|\mu\| .$$

Entonces, $\theta : Ca(\Sigma,E) \longrightarrow l^1$ es una aplicación lineal y conti-
$\mu \longrightarrow \beta_\mu$
nua; continua además para las topologías $\sigma(Ca(\Sigma,E),H)$ y $\sigma(l^1,l^\infty)$,

puesto que, dado $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$, se tiene:

$$\langle\beta_\mu,\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle\mu,h_k\rangle = \langle\mu,h_\alpha\rangle, \quad \forall\mu \in Ca(\Sigma,E).$$

Entonces, $\theta(\overline{K})$ es un subconjunto $\sigma(l^1,l^\infty)$-compacto en l^1, y al ser $l^{1'} = l^\infty$, se tiene, por el Teorema de Eberlein, que $\theta(\overline{K})$ es débilmente secuencialmente compacto. Existen por lo tanto una subsucesión $(\mu_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un elemento $\mu \in \overline{K}$, tales que $(\beta_{\mu_{n_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a β_μ en l^1: y, por el Lema de Schur, ello equivale a que $\beta_\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \beta_{\mu_{n_m}}$ en la norma de l^1.
Así, podremos encontrar un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que si $m \geq m_\varepsilon$,
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle\mu_{n_m}-\mu,h_k\rangle| = \|\beta_{\mu_{n_m}}-\beta_\mu\|_1 < \varepsilon$; y por lo tanto, si $m \geq m_\varepsilon$ y $k \in \mathbb{N}$: $|\langle\mu_{n_m},h_k\rangle| \leq |\langle\mu-\mu_{n_m},h_k\rangle| + |\langle\mu,h_k\rangle| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle\mu_{n_m}-\mu,h_k\rangle| +$

$$+ |\langle\mu,h_k\rangle| < \varepsilon + |\langle\mu,h_k\rangle| = \varepsilon + \Big|\sum_{i=1}^{s_k} \langle\mu(A_i^k),x'^k_i\rangle\Big| \leq \varepsilon + |\mu|(A_k).$$

Y puesto que $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, $\lim\limits_{k\to\infty} |\mu|(A_k) = 0$: es decir, existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_\varepsilon$, $|\mu|(A_k) < \varepsilon$. Así, para $k \geq k_\varepsilon$ y $m \geq m_\varepsilon$, se tiene: $|\langle\mu_{n_m},h_k\rangle| < 2\varepsilon$. Pero, en tal caso, tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m_\varepsilon$ y $n_m \geq k_\varepsilon$, nos queda: $|\langle\mu_{n_m},h_{n_m}\rangle| < 2\varepsilon$, cuando las sucesiones $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\Sigma,E')$ se habían elegido precisamente con la condición de que $|\langle\mu_n,h_n\rangle| \geq 2\varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esta contradicción nos demuestra precisamente que la familia de medidas $\{|\mu| \,/\, \mu \in K\}$ debe ser necesariamente equiexhaustiva: equivalentemente, K verifica la condición (ii) del enunciado.

(iii) $K(A) = \{\mu(A) \,/\, \mu \in K\}$ es un subconjunto débilmente relati ..

vamente compacto de E, cualquiera que sea $A \in \Sigma$.

En efecto, fijado $A \in \Sigma$, definamos:

$$\delta_A : Ca(\Sigma,E) \longrightarrow E$$
$$\mu \longrightarrow \mu(A)$$

δ_A es una aplicación lineal; además, dado $x' \in E'$, $x'.\chi_A \in A(\Sigma,E')$, y: $\langle\delta_A(\mu),x'\rangle = \langle\mu(A),x'\rangle = \langle\mu,x'.\chi_A\rangle$: es decir, δ_A es continua para las topologias $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$ y $\sigma(E,E')$. Entonces, al ser K $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$-relativamente compacto, $\delta_A(K) = K(A)$ ha de ser débilmente relativamente compacto en E.

Recordando que las condiciones (i), (ii) e (iii) de la Proposición anterior coinciden con las condiciones correspondientes de la Definición 5 (definición de la propiedad $P(\Sigma)$), se obtiene como corolario inmediato:

26. Corolario. E tiene la propiedad $P(\Sigma)$ si y solamente si en la $Ca(\Sigma,E)$ coinciden los subconjuntos débilmente compactos con los compactos para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$.

Tal y como se vió en la Sección anterior, para que los subconjuntos $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$-relativamente compactos de $Ca(\Sigma,E)$ coincidan con los débilmente relativamente compactos, y ello para cualquier σ-álgebra Σ en cualquier conjunto X, es condición necesaria y suficiente que tanto E como E' tengan la P.R.N. Cuando ésto no sucede, no sólo la igualdad falla en general (por lo menos, para $X = [0,1]$ y Σ la σ-álgebra de Borel en X), sino que los subconjuntos de

$Ca(\Sigma,E)$ que verifican las tres condiciones de la Proposición 25 no tienen por qué ser ni siquiera relativamente secuencialmente compactas para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E),\ F(\Sigma,E'))$, a pesar de ser relativamente compactos para la misma. Precisamente, existe un ejemplo de Batt |2|, en el que, con $E = B(X)$, espacio de las funciones acotadas $f : X = [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$, con la norma del supremo, se prueba la existencia de una σ-álgebra Σ y un conjunto $K \subset Ca(\Sigma,E)$, que verifica las tres condiciones (i), (ii) e (iii) de la Proposición 25 y no es relativamente secuencialmente compacto para la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E),\ F(\Sigma,E'))$ aunque, como acabamos de demostrar, debe ser relativamente compacto. Naturalmente, cuando tanto E como E' tienen la P.R.N., el Teorema de Eberlein asegura que una situación como la mencionada es imposible.

Veamos a continuación los resultados análogos al anterior, para los espacios $L^p(\lambda,E)$.

27. Proposición. Sean $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva, y K un subconjunto de $L^p(\lambda,E)$, con $1 \leq p < +\infty$. Consideremos las condiciones siguientes:

i) K está acotado en norma.

ii) K es uniformemente λ-integrable , es decir:

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A \|f\|\, d\lambda = 0 \text{ uniformemente cuando } f \in K.$$

iii) Para cada $A \in \Sigma$, $K(A) = \{\int_A f d\lambda \ /\ f \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E .

Se tiene entonces:

a. Si $p=1$, y K es débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda,E)$, entonces K verifica (i), (ii) e (iii).

a'. Si $p > 1$, y K es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$, entonces K verifica (i) e (iii).

Además, si el espacio E tiene la P.R.N. respecto de λ:

b. Si $p=1$, K verifica (i), (ii) e (iii) si y solamente si es relativamente compacto para la topología $\sigma(L^1(\lambda,E), L^\infty(\lambda,E'))$.

b'. Si $p > 1$, K verifica (i) e (iii) si y solamente si es relativamente compacto para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

<u>Demostración</u>. La parte (a) no es más que una consecuencia del Teorema 1: una demostración detallada se puede encontrar, por ejemplo, en |9| IV.2.4. En cuanto a (a'), la necesidad de la condición (i) se sigue inmediatamente del Principio de Acotación Uniforme, y la de la condición (iii), de ser la aplicación:

$$\begin{aligned} \delta_A : L^p(\lambda,E) &\longrightarrow E \\ f &\longrightarrow \int_A f d\lambda \end{aligned}$$

continua para las topologías débiles en $L^p(\lambda,E)$ y E.

Veamos ahora la parte (b).

Sea $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva: la aplicación:

$$\begin{aligned} I : L^1(\lambda,E) &\longrightarrow Ca(\Sigma,E) \\ f &\longrightarrow \mu_f \end{aligned}$$

donde $\mu_f(A) = \int_A f d\lambda$ para cada $A \in \Sigma$, es una isometría sobre la imagen, como se comprueba sin mayor dificultad.

Dado entonces un subconjunto K de $L^1(\lambda,E)$ que verifique las condiciones (i), (ii) e (iii) del enunciado, se tiene inmediatamente que $I(K)$ es un subconjunto de $Ca(\Sigma,E)$ en las condiciones de la Proposición 25, y por lo tanto $I(K)$ es $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$-relativamente compacto. Sea entonces $(f_i)_{i\in I}$ una red en K: tendremos que existen una subred $(f_{i_j})_{j\in J}$ y una medida $\mu \in Ca(\Sigma,E)$, tales que $\mu_{f_{i_j}} \to \mu$ en la topología $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$. Al ser $\int_X h\, d\mu = \lim_J \int_X hd\, \mu_{f_{i_j}}$ para cada $h \in A(\Sigma,E')$, y verificarse además que $\lim_{\lambda(A)\to o} |\mu_{f_{i_j}}|(A) = 0$ uniformemente en $j \in J$, se tiene que la medida μ es absolutamente λ-continua: como, por hipótesis, E tiene la P.R.N. respecto de λ, podremos encontrar una función de densidad de μ respecto de λ, $f \in L^1(\lambda,E)$. Y ya tan sólo nos queda ver que $f_{i_j} \to f$ en $\sigma(L^1(\lambda,E), L^\infty(\lambda,E'))$. Ahora bien, dada $h \in L^\infty(\lambda,E')$, siempre podremos elegir una función representante, que indicaremos también por h, de modo que $h \in F(\Sigma,E')$. Así:

$$\int_X \langle f,h\rangle\, d\lambda = \int_X h\, d\mu = \langle \mu,h\rangle = \lim_J \langle \mu_{f_{i_j}},h\rangle =$$

$$= \lim_J \int_X \langle f_{i_j},h\rangle\, d\lambda,$$

y, efectivamente, f es el límite de la red $(f_{i_j})_{j\in J}$ en la topología $\sigma(L^1(\lambda,E), L^\infty(\lambda,E'))$.

Recíprocamente, sea K un subconjunto $\sigma(L^1(\lambda,E), L^\infty(\lambda,E'))$-relativamente compacto de $L^1(\lambda,E)$. La aplicación $I : L^1(\lambda,E) \to Ca(\Sigma,E)$ "

definida anteriormente, es continua para las topologías $\sigma(L^1(\lambda,E), L^\infty(\lambda,E'))$ y $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$, pues ya hemos dicho que toda $h \in L^\infty(\lambda,E')$ tiene algún representante en $F(\Sigma,E')$. Luego $I(K)$ es $\sigma(Ca(\Sigma,E), F(\Sigma,E'))$-relativamente compacto en $Ca(\Sigma,E)$, y por lo tanto verifica las condiciones (i), (ii) e (iii) de la Proposición 25: de donde se deduce inmediatamente que K verifica las tres condiciones análogas de nuestro enunciado.

En cuanto a la parte (b'), se deduce de (b) sin más que tener en cuenta que, dado p tal que $1 < p < +\infty$, la inyección canónica $J : L^p(\lambda,E) \longrightarrow L^1(\lambda,E)$ es una aplicación continua, cuya transpuesta $J' : L^1(\lambda,E)' \longrightarrow L^p(\lambda,E)'$ aplica $L^\infty(\lambda,E')$ en un subespacio vectorial denso de $L^q(\lambda,E')$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En contra de cuanto sucedía en la Proposición 25, en la Proposición 27 hemos necesitado la hipótesis adicional de que E tuviese la P.R.N. respecto de λ, para poder asegurar que las condiciones del enunciado eran equivalentes a la compacidad relativa en $L^p(\lambda,E)$ para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. El siguiente resultado justifica precisamente la necesidad de tal hipótesis: no incluimos la demostración, por ser esencialmente la misma del Teorema 9.

<u>28. Proposición</u>. Sea $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva. Si E no tiene la P.R.N. respecto de λ, para todo p en las condiciones $1 \leq p < +\infty$, existe un subconjunto K de $L^p(\lambda,E)$, que verifica las condiciones (i) e (iii) de la Proposición 25, si $p > 1$, y además la condición (ii), si $p=1$, pero que no es $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$ rela

tivamente compacto, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Recordando que las condiciones que aparecen en las partes (b) y (b') de la Proposición 27 son esencialmente las mismas de las Definiciones 2 y 3, respectivamente, es decir, las de la propiedad $P_p(\lambda)$, se obtiene como corolario:

29. Corolario. Sean $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva, y p un número tal que $1 \leq p < +\infty$. Un espacio E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$ si y sólo si E tiene la P.R.N. respecto de λ, y en $L^p(\lambda,E)$ coinciden los subconjuntos débilmente relativamente compactos con los relativamente compactos para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Una cuestión que surge naturalmente, al igual que nos sucedió con el espacio $Ca(\Sigma,E)$, es la de si las condiciones de la Proposición 27, al menos cuando aseguren compacidad relativamente para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$, asegurarán también compacidad relativa secuencial para dicha topología. En este caso, el ejemplo de Batt ya citado no es útil, puesto que el espacio E que aparece en él no tiene la P.R.N., que como hemos visto es esencial para que se verifiquen las partes (b) y (b') de la Proposición 27. De hecho, en el mismo artículo | 2 |, Batt pareció demostrar que, en las condiciones de las partes (b) y (b') de la Proposición 27, se tiene no sólo compacidad relativa para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E), L^q(\lambda,E'))$, sino también compacidad secuencial. Sin embargo, en | 5 | Bombal hace notar que la demostración de Batt falla en algunos casos particulares, dando al mis mo tiempo una nueva demostración, válida únicamente cuando $p > 1$. Como consecuencia, se tiene que en $L^p(\lambda,E)$, con $1 < p < +\infty$, cuando E tiene la P.R.N., los conjuntos que verifican las condiciones (i) e (iii) de la Proposición 27 no sólo son relativamente compactos, sino también relativamente secuencialmente compactos para la topología $\sigma(L^p(\lambda,E),\ L^q(\lambda,E'))$. Sin embargo, dicha cuestión parece continuar abierta en el caso en que $p=1$: y, por lo tanto, también para $Ca(\Sigma,E)$, cuando E tiene la P.R.N. Naturalmente, si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, la compacidad y la compacidad secuencial respecto de $\sigma(L^p(\lambda,E),\ L^q(\lambda,E'))$ coinciden, según nos asegura el Teorema de Eberlein, por coincidir ambas con la compacidad para la topología débil.

Por último, cerraremos la Sección con un resultado sobre los espacios $L^p(\lambda,E)$, relacionado con la propiedad $P_p(\lambda)$. En el caso escalar, es bien conocido que, siempre que $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\lambda)$ es un espacio débilmente compactamente generado (ω.c.g), precisamente por ser la bola unidad de $A(\Sigma)$ (con la norma propia de este espacio, es decir, la del supremo), un subconjunto débilmente relativamente compacto y total en $L^p(\lambda)$. Sin embargo, este resultado no se puede trasladar mecánicamente al caso vectorial, debido a las dificultades con que se tropieza para caracterizar los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^p(\lambda,E)$.

30. Proposición. Sea $\lambda \in Ca(\Sigma)$ una medida positiva, y $1 \leq p < +\infty$. Si E tiene la propiedad $P_p(\lambda)$, el espacio $L^p(\lambda,E)$ es ω.c.g. si y solamente si E lo es.

<u>Demostración</u>. La necesidad de que E sea ω.c.g. al serlo $L^p(\lambda,E)$ se sigue de ser el primero isomorfo a un subespacio vectorial complementado del segundo, mediante la identificación:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L^p(\lambda,E) \\ x & \longrightarrow & x.\chi_X \end{array}$$

Y se comprueba sin dificultad que el ser ω.c.g. es una propiedad que se conserva para subespacios complementados.

Supongamos ahora que E es ω.c.g. y tiene la propiedad $P_p(\lambda)$. Por la primera condición, podemos encontrar un subconjunto K de E, absolutamente convexo, débilmente compacto, y total en E. Sea entonces $K^* = \{x.\chi_A \;/\; A \in \Sigma,\; x \in K\}$. Tenemos:

i) K^* está acotado en norma, pues dados $x \in K$, $A \in \Sigma$:

$\|x.\chi_A\|_p = \|x\| \,.\, \lambda(A)^{1/p} \leq M\, \lambda(X)^{1/p}$, con $M \geq \|x\|$ $\forall x \in K$, que existe por ser K débilmente compacto.

ii) K^* es uniformemente λ-integralbe, pues si $x \in K$ y $A \in \Sigma$:

$\int_B \|x.\chi_A\|\, d\lambda = \|x\|\; \lambda(A \cap B) \leq M \,.\, \lambda(B)$: y por lo tanto,

$\lim\limits_{\lambda(B)\to 0} \int_B \|f\|\, d\lambda = 0$ uniformemente cuando $f \in K^*$.

iii) Para cada $A \in \Sigma$, $K^*(A) = \{\int_A f d\lambda \;/\; f \in K^*\} =$

$= \{\int_A (x.\chi_B) d\lambda \;/\; x \in K,\; B \in \Sigma\} = \{\lambda(A\cap B).x \;/\; B \in \Sigma,\; x \in K\} \subset$

$\subset \lambda(X) \,.\, K.$ por ser K equilibrado: así, $K^*(A)$ es débilmente relativamente compacto en E.

Como consecuencia, resulta que si $p=1$, K^* está en las condiciones de la Definición 2, y en las de la Definición 3 si $p > 1$: en cualquier caso, K^* es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda,E)$, por tener E la propiedad $P_p(\lambda)$.

Y K^* es total en $L^p(\lambda,E)$, pues sabemos que $A(\Sigma,E)$ es denso en dicho espacio:, dadas $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \chi_{A_i} \in A(\Sigma,E)$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que, por ser K total en E, existen para cada $i=1,\dots,n$, $\lambda_1^i,\dots,\lambda_{s_i}^i \in \mathbb{K}$ y $y_1^i,\dots,y_{s_i}^i \in K$, tales que $\|x_i - \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^i \; y_j^i\| < \dfrac{\varepsilon}{\lambda(X)^{1/p}}$. Ahora bien, $y_j^i \cdot \chi_{A_i} \in K^*$ $\forall j = 1,\dots,s_i$, $i=1,\dots,n$, y:

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^i \, y_j^i \cdot \chi_{A_i}\|_p = \|\sum_{i=1}^{n} (x_i - \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^i \, y_j^i) \, \chi_{A_i}\|_p =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \|x_i - \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^i \, y_j^i\|^p \; \lambda(A_i))^{1/p} < \varepsilon \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(A_i)}{\lambda(X)})^{1/p} \leq \varepsilon .$$

Así, el débilmente relativamente compacto K^* es efectivamente total en $L^p(\lambda,E)$, luego $L^p(\lambda,E)$ es ω.c.g.

CAPITULO III

Este capítulo está consagrado esencialmente a estudiar algunas cuestiones relativas a los operadores $T : C(X,E) \longrightarrow F$: principalmente, cuestiones de compacidad débil. El nexo de unión con el Capítulo anterior se encuentra tanto en ser el dual $M(X,E')$ de $C(X,E)$ un espacio de medidas, cuanto en el Teorema I.18., que como vimos permitía asociar a cada operador continuo T de $C(X,E)$ en un espacio de Banach F, una función finitamente aditiva de conjunto, de semivariación acotada, definida en la σ-álgebra de Borel de X y a valores en $L(E,F'')$. Como ya indicamos, dicha función finitamente aditiva de conjunto se suele llamar, por un abuso de lenguaje, la 'medida asociada' al operador T.

Es bien sabido que, en el caso escalar, el recurso de estudiar los operadores $T : C(X) \longrightarrow E$ a través de sus 'medidas asociadas' ha dado magníficos frutos, permitiendo caracterizar de modo bastante sencillo las diferentes clases de operadores en términos de sus correspondientes medidas: recordemos de nuevo la caracterización de los operadores débilmente compactos, que enunciamos como Teorema I.19. Y de nuevo se plantea la cuestión de hasta qué punto, o en qué condiciones, los resultados así obtenidos para el caso escalar admiten una extensión igualmente fructífera al caso vectorial.

1. Operadores débilmente compactos

Al igual que sucedió con la caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma,E)$, y en relación con ella, Brooks y Lewis |8| demostraron en 1972 la siguiente extensión del Teorema I.19.:

1. Teorema. Sean X un espacio topológico compacto y T_2, E y F dos espacios de Banach. Dado un operador continuo $T : C(X,E) \longrightarrow F$, de 'medida asociada' $m : \beta_o(X) \longrightarrow L(E,F'')$, se tiene que, si T es débilmente compacto, entonces m verifca:

i) m toma valores en $L(E,F)$, y su semivariación $|m|$ es continua en $\emptyset$.

ii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador débilmente compacto.
$$x \longrightarrow m(A)(x)$$

Además, si E' y E'' tienen ambos la P.R.N. , las condiciones (i) e (ii) son suficientes para que el operador T sea débilmente compacto.

Veremos a continuación que la hipótesis de que tanto E' como E'' tengan la P.R.N. es esencial para que se verifique la parte inversa del Teorema: y en ello, como vamos a ver en el siguiente Lema, juegan un papel esencial los resultados del Capítulo II, a través de la identificación, apuntada en el Capítulo I, Sección 4, de $M(X,E')$ con $Ca(\beta_a(X),E')$, que es un subespacio vectorial de $Ca(\beta_o(X),E')$.

2. Lema. Sean E un espacio de Banach y X un espacio topológico compacto y T_2. Si E' no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$, existe un subconjunto K de $M(X,E')$ tal que:

a. K es absolutamente convexo y cerrado para la topología débil* en $M(X,E')$.

b. K verifica:

i) K está acotado en norma.

ii) Existe una medida positiva $\lambda \in M(X)$, tal que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0 \text{ uniformemente en } \mu \in K .$$

iii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $K(A) = \{\mu(A) / \mu \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en E' .

c. K no es débilmente relativamente compacto en $M(X,E')$.

<u>Demostración</u>. Supongamos que E' no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$. Entonces, y de acuerdo con la Definición II.5., podemos encontrar un subconjunto K^* de $Ca(\beta_a(X),E')$, que verifica:

i') K^* está acotado en norma.

ii') Existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\beta_a(X))$ tal que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0 \text{ uniformemente en } \mu \in K^* .$$

iii') $K^*(A) = \{\mu(A) / \mu \in K^*\}$ es débilmente relativamente compacto en E' para cada $A \in \beta_a(X)$.

Pero K^* no es débilmente relativamente compacto en $Ca(\beta_a(X),E')$.

Utilizando la identificación de $Ca(\beta_a(X),E')$ con $M(X,E')$ mencionada en I.4., podemos considerar la envoltura absolutamente convexa y cerrada para la topología débil* en $M(X,E')$, de K^* , a la que llamaremos K : vamos a ver que K es el conjunto buscado.

Es inmediato que K verifica la condición (a) del enunciado, por construcción; y la condición (c), debido a la identificación entre $Ca(\beta_a(X),E')$ y $M(X,E')$: si K fuese débilmente relativamente compacto en el segundo espacio, también lo sería su subconjunto K^* , y por lo tanto este último habría de ser débilmente relativamente compacto en $Ca(\beta_a(X),E')$, en contra de lo supuesto.

Nos queda demostrar que K verifica la condición (b), y para ello nos basaremos en que K es el cierre en la topología débil*, $\sigma(M(X,E'), C(X,E))$, de la envoltura absolutamente convexa, $\Gamma(K^*)$, de K^* . Y es inmediato que $\Gamma(K^*)$ verifica las condiciones (i'), (ii') e (iii'), por verificarlas K^* . Tenemos entonces:

(i) K está acotado en norma, como se deduce inmediatamente de la acotación de $\Gamma(K^*)$, junto con el Principio de Acotación Uniforme.

(ii) Existe una medida $\lambda \in M(X)$, tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente cuando $\mu \in K$. En efecto, por verificar $\Gamma(K^*)$ las condiciones (i') e (ii'), tenemos que el conjunto $\{|\nu| \ / \ \nu \in \Gamma(K^*)\}$ es débilmente relativamente compacto en $Ca(\beta_a(X))$ y, por lo tanto, en $M(X)$. Luego, según el Teorema I.16., podemos encontrar una medida positiva $\lambda \in M(X)$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que, si $A \in \beta_o(X)$ y $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, $|\nu|(A) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $\nu \in \Gamma(K^*)$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $A \in \beta_o(X)$ tal que $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, y veamos que, si $\mu \in K$, $|\mu|(A) \leq \varepsilon$. Puesto que $\mu \in K$, podemos encontrar una red $(\mu_i)_{i\in I}$ en $\Gamma(K^*)$, tal que $<f,\mu> = \lim_I <f,\mu_i>$ cuando $f \in C(X,E)$. Consideremos una partición cualquiera, $\{A_1,\ldots,A_n\}$, de A en $\beta_o(X)$, y sean $x_1,\ldots x_n \in B_E$. Por el Corolario I.17., al ser $\{|\nu| \ / \ \nu \in \Gamma(K^*)\}$ débilmente relativamente compacto en $M(X)$, es equiregular, y por lo tanto, para cada $i = 1,\ldots n$, se pueden encontrar un compacto K_i y un abierto G_i^* en X , tales que $K_i \subset A_i \subset G_i^*$ y $|\nu|(G_i^* \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{6n}$. Y como también $|\mu|$ es regular, K_i y G_i^* se pueden elegir verificando además que $|\mu|(G_i^* \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{6n}$. Si $i \neq j$, $K_i \cap K_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$, y como X es compacto, y por consiguiente regular, existe para cada $i = 1,\ldots n$ un abierto G_i de X de modo que $K_i \subset G_i \subset G_i^*$, y $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Por el Lema de Urysohn, tenemos que $\forall i = 1,\dots n$, existe una función continua $\phi_i : X \longrightarrow [0,1]$, tal que $\phi_i(K_i) = \{1\}$ y $\phi_i(X \setminus G_i) = \{0\}$.

Sea entonces $f = \sum_{j=1}^{n} x_j\ \phi_j$: $f \in C(X,E)$, luego:

$\int_X f d\mu = \langle f,\mu\rangle = \lim_I \langle f,\mu_i\rangle = \lim_I \int_X f d\mu_i$. Y, para cada $i \in I$, puesto que $\mu_i \in \Gamma(K^*)$, se tiene:

$$|\int_X f d\mu_i| = |\sum_{j=1}^{n} \int_X x_j\ \phi_j d\mu_i| \leq |\sum_{j=1}^{n} (\int_X x_j\ \phi_j d\mu_i - \mu_i(A_j)(x_j))| +$$

$$+ |\sum_{j=1}^{n} \mu_i(A_j)(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\int_X x_j\ \phi_j d\mu_i - \mu_i(A_j)(x_j)| + |\mu_i|(A) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\mu_i(A_j \setminus K_j)(x_j)| + \sum_{j=1}^{n} \int_{G_j \setminus K_j} \phi_j d|\mu_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\mu_i|(A_j \setminus K_j) + \sum_{j=1}^{n} |\mu_i|(G_j \setminus K_j) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3} .$$

Entonces:

$$|\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)(x_j)| \leq |\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)(x_j) - \int_X f d\mu| + |\int_X f d\mu| =$$

$$= |\sum_{j=1}^{n} (\mu(A_j)(x_j) - \int_X x_j\ \phi_j d\mu)| + \lim_I |\int_X f d\mu_i| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\mu|(A_j \setminus K_j) + \sum_{j=1}^{n} \int_{G_j \setminus K_j} \phi_j d|\mu| + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Y nos queda que: $|\mu|(A) \leq \varepsilon$, cuando $A \in \beta_o(X)$ y $\lambda(A) < \delta_\varepsilon$, para cada $\mu \in K$. Es decir, $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$.

(iii) Veamos que, si $A \in \beta_o(X)$, $K(A)$ es débilmente relativamente compacto en E' . Supongamos en primer lugar que $A \in \beta_a(X)$. Tenemos entonces que $\Gamma(K^*)(A) = \{\nu(A) \ / \ \nu \in \Gamma(K^*)\}$, es débilmente relativamente compacto en E', y por lo tanto el Teorema de Krein nos asegura que su envoltura absolutamente convexa y débilmente cerrada, $C(A)$, es débilmente compacta. Nos bastará así comprobar que $K(A) \subset \subset C(A)$. Ahora bien, puesto que $C(A)$ es débilmente compacto en E' , es también compacto para la topología débil* , y al ser ésta separada, es cerrado para la misma. Supongamos entonces que existe $\mu_o \in K$, tal que $\mu_o(A) \notin C(A)$: al ser este conjunto convexo y cerrado para la topología $\sigma(E,E')$, podremos encontrar $x_o \in E$ tal que $|<x_o,x'>| \leq 1$ si $x' \in C(A)$, pero $|<x_o,\mu_o(A)>| = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Ahora bien, al verificar K las condiciones (i) e (ii), tal y como acabamos de ver, se tiene que $\{|\mu| \ / \ \mu \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en $M(X)$, y por lo tanto equiregular: podemos encontrar así un compacto H y un abierto G en $\beta_a(X)$, tales que $H \subset A \subset G$, y $|\mu|(G \setminus H) < \frac{\varepsilon}{6\|x_o\|}$ cuando $\mu \in K$. Sean entonces $\phi : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\phi(H) = \{1\}$ y $\phi(X \setminus G) = \{0\}$; $f_\varepsilon = x_o\phi \in C(X,E)$.

Para cualquier $\mu \in K$, se tiene:

$$|\mu(A)(x_o) - \int_X f_\varepsilon d\mu| = |\mu(A)(x_o) - \int_X x_o\phi \ d\mu| \leq |\mu(A \setminus H)(x_o)| +$$

$$+ \int_{G \setminus H} \|x_o\|\phi \ d|\mu| \leq \|x_o\| \ |\mu|(A \setminus H) + \|x_o\| \ |\mu|(G \setminus H) \leq$$

$$\leq 2\|x_o\| \ |\mu|(G \setminus H) < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Puesto que $\mu_o \in K$, podemos encontrar una red $(\mu_i)_{i \in I}$ en $\Gamma(K^*) \subset K$ tal que $\int_X f d\mu_o = \lim_I \int_X f d\mu_i$ siempre que $f \in C(X,E)$.

Tenemos entonces:

$$|\mu_o(A)(x_o)| \leq |\mu_o(A)(x_o) - \int_X f_\varepsilon d\mu_o| + |\int_X f_\varepsilon d\mu_o| < \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+ \lim_I |\int_X f_\varepsilon d\mu_i| .$$

Y, para cada $i \in I$:

$$\left|\int_X f_\varepsilon d\mu_i\right| \leq \left|\int_X f_\varepsilon d\mu_i - \mu_i(A)(x_o)\right| + |\mu_i(A)(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3} + 1 ,$$

luego nos queda: $|\langle x_o,\mu_o(A)\rangle| = |\mu_o(A)(x_o)| \leq 1 + \frac{2\varepsilon}{3}$, cuando teníamos, por hipótesis, que $|\langle x_o,\mu_o(A)\rangle| = 1 + \varepsilon$.

Por lo tanto, ha de ser $\mu_o(A) \in C(A)$ siempre que $\mu_o \in K$: lo cual nos asegura que $K(A)$ es débilmente relativamente compacto en E' siempre que $A \in \beta_a(X)$. Ahora bien, si $A \in \beta_o(X)$, tenemos que: $K(A) \subset C^*(A)$, dónde $C^*(A)$ indica la intersección de los cierres débiles en E' de los conjuntos $K(B)$, con $B \in \beta_a(X)$ y $B \supset A$. En efecto, como acabamos de ver, cada $K(B)$ es débilmente relativamente compacto en E' , y es además absolutamente convexo , por serlo K : luego $C^*(A)$ es absolutamente convexo y débilmente compacto en E' . Entonces, si $K(A)$ no estuviese contenido en $C^*(A)$ podríamos encontrar como anteriormente un par de elementos $x_o \in E$ y $\mu_o \in K$, tales que $|\langle x_o,\mu_o(A)\rangle| > 1$ y $|\langle x_o,x'\rangle| \leq 1$ $\forall x' \in C^*(A)$.

Ahora bien, $|\mu_{o_{x_o}}|$ es una medida de Borel positiva y regular, luego se tiene que: $|\mu_{o_{x_o}}|(A) = \inf\{|\mu_{o_{x_o}}|(B) \;/\; B \in \beta_a(X) , B \supset A\}$. (ver |10|, III.§16., Teorema 3.) , y por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $B_\varepsilon \in \beta_a(X)$ tal que $B_\varepsilon \supset A$ y $|\mu_{o_{x_o}}|(A) \geq |\mu_{o_{x_o}}|(B_\varepsilon) - \varepsilon$. Nos queda, al ser $\mu_o(B_\varepsilon) \in C^*(A)$:

$$|\langle x_o,\mu_o(A)\rangle| = |\langle x_o,\mu_o(B_\varepsilon)\rangle - \langle x_o,\mu_o(B_\varepsilon \setminus A)\rangle| \leq |\langle x_o,\mu_o(B_\varepsilon)\rangle| +$$
$$+ |\langle x_o,\mu_o(B_\varepsilon \setminus A)\rangle| \leq 1 + |\mu_{o_{x_o}}|(B_\varepsilon \setminus A) = 1 + (|\mu_{o_{x_o}}|(B_\varepsilon) - |\mu_{o_{x_o}}|(A))$$
$$\leq 1 + \varepsilon ,$$

y ello para cada $\varepsilon > 0$: es decir, ha de ser $|\langle x_o,\mu_o(A)\rangle| \leq 1$. Y, por lo tanto, $K(A) \subset C^*(A)$; luego es débilmente relativamente compacto.

En definitiva, K es efectivamente el conjunto buscado.

3. Teorema. Sean X un espacio topológico compacto y T_2, y E un espacio de Banach. Si E' no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$, existen un espacio de Banch F y un operador continuo $T : C(X,E) \longrightarrow F$, cuya 'medida asociada' m verifica:

i) m toma valores en $L(E,F)$ y su semivariación es continua en $\emptyset$.

ii) $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador débilmente compacto para cada $A \in \beta_o(X)$.

Sin que T sea, sin embargo, débilmente compacto.

Demostración. Supongamos que E' no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$: sea entonces K el subconjunto de $M(X,E')$ cuya existencia está asegurada por el Lema 2. Tomando polares respecto de la dualidad: $\langle C(X,E), M(X,E')\rangle$, tenemos que $V = K^o$ es un entorno de 0 en $C(X,E)$, y $V^o = K^{oo} = K$, al ser K absolutamente convexo y cerrado para la topología $\sigma(M(X,E'), C(X,E))$, por la condición (a) del Lema 2. Consideremos entonces los espacios: $M(X,E')_K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nK$, y $C(X,E)_V =$

$= C(X,E)/p_V^{-1}(0)$, siendo p_V el funcional de Minkowski de V (ver |21|, III.7.) . $M(X,E')_K$ es un espacio de Banach con la norma definida por el funcional de Minkowski de K, mientras que $C(X,E)_V$, con la norma cociente inducida por p_V, es un espacio normado, por lo que su completado F será un espacio de Banach.

Se tienen las aplicaiones lineales y continuas:

$\phi_V : C(X,E) \longrightarrow C(X,E)_V$ (proyección canónica)

$\psi_K : M(X,E')_K \longrightarrow M(X,E')$ (inclusión canónica)

Y, puesto que se comprueba fácilmente que:

:

$F' = (C(X,E)_V)' = C(X,E)'_{V_0} = M(X,E')_K$,

resulta que ψ_K es la aplicación transpuesta de ϕ_V .

Definimos entonces: $T : C(X,E) \longrightarrow F$, $f \longrightarrow \phi_V(f)$, que es un operador continuo pero no débilmente compacto, puesto que, como acabamos de indicar, su transpuesto es: $T' : M(X,E')_K = F' \longrightarrow M(X,E')$, $\mu \longrightarrow \psi_K(\mu) = \mu$

Y, por definición de $M(X,E')_K$, la bola unidad de este espacio es K , luego se tiene: $T'(K) = \psi_K(K) = K$, que, por la condición (c) del Lema 2., no es débilmente relativamente compacto en $M(X,E')$: así, T' no es débilmente relativamente compacto, y el Teorema de Gantmacher nos asegura que tampoco T puede serlo.

Vamos a ver ahora que la 'medida asociada' a T verifica las condiciones (i) e (ii) del enunciado. Según se vió en el Capítulo I., Sección 4, m , 'medida asociada' a T , se define canónicamente según: $m(A)(x) = T''(x\chi_A)$, dónde $x \in E$ y $A \in \mathcal{B}_o(X)$. Tenemos entonces:

(i) m toma valores en $L(E,F)$ y es de semivariación continua en $\emptyset$. En efecto, fijemos $A \in \mathcal{B}_o(X)$, $x \in E$, y veamos que $m(A)(x) = T''(x\chi_A) \in F$. Se tiene, dada $\mu \in M(X,E')_K = F'$:

$\langle T''(x\chi_A),\mu\rangle = \langle x\chi_A, T'(\mu)\rangle = \mu(A)(x)$.

Ahora bien, por verificar K las condiciones (b-i) y (b-ii) del Lema 2., tenemos que $\{|\mu| \;/\; \mu \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $M(X)$, y por lo tanto es equiregular (Teorema I.16. y Corolario I.17.) . Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, existen un compacto K_n y un abierto G_n en X , tales que $K_n \subset A \subset G_n$ y $|\mu|(G_n \setminus K_n) <$

$< \frac{1}{2n(\|x\|+1)}$ si $\mu \in K$. Por el Lema de Urysohn, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una función continua $\phi_n : X \longrightarrow [0,1]$, tal que $\phi_n(K_n) = \{1\}$ y $\phi_n(X \setminus G_n) = \{0\}$.

Sea $f_n = x\phi_n \in C(X,E)$; vamos a ver que $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a $T''(x\chi_A)$ en F'' . En efecto, en la norma de dicho espacio, y por ser éste el dual de $\mathcal{M}(X,E')_K$, cuya bola unidad es K , tenemos:

$$\|T''(x\chi_A) - T(f_n)\| = \sup \{|\langle T''(x\chi_A) - T(f_n),\mu\rangle| \ / \ \mu \in K\} =$$
$$= \sup \{|\langle x''\chi_A - f_n, T'(\mu)\rangle| \ / \ \mu \in K\} = \sup \{|\mu(A)(x) - \int_X f_n d\mu| / \ \mu \in K\}$$

Ahora bien, dada $\mu \in K$, y por la construcción de las f_n , se tiene, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\mu(A)(x) - \int_X f_n d\mu| \leq |\mu(A)(x) - \mu(K_n)(x)| + \int_{G_n \setminus K_n} \|x\|\phi_n \, d|\mu| \leq$$

$$\leq \|x\| |\mu|(A \setminus K_n) + \|x\| |\mu|(G_n \setminus K_n) = 2\|x\| |\mu|(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} .$$

Luego, en la norma de F'' , $\|T''(x\chi_A) - T(f_n)\| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Así, $T''(x\chi_A)$ es el límite en F'' de la sucesión $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$: pero $T(f_n) \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y F es un espacio de Banach, luego $m(A)(x) = T''(x\chi_A) \in F$.

Y $|m|$ es continua en $\emptyset$, pues sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\beta_o(X)$, tal que $A_n \downarrow \emptyset$. Dado $\varepsilon > 0$, y por verificar K las condiciones (b-i) y (b-ii) del Lema 2., $\{|\mu| \ / \ \mu \in K\}$ es una familia equicontinua en $\emptyset$ en $Ca(\beta_o(X))$, luego existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_\varepsilon$, $|\mu|(A_n) < \varepsilon$ cuando $\mu \in K$. Entonces, siendo $n \geq n_\varepsilon$, y para cualquier partición $\{B_1,\ldots,B_s\}$ de A_n en $\beta_o(X)$, $x_1,\ldots x_s \in B_E$, se tiene:

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} m(B_i)(x_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{s} T''(x_i \chi_{B_i}) \right\| = \left\| T''\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \chi_{B_i} \right) \right\| =$$

$$= \sup \left\{ \left| \langle T''\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \chi_{B_i} \right), \mu \rangle \right| \;/\; \mu \in K \right\} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{s} \mu(B_i)(x_i) \right| \;/\; \mu \in K \right\} \leq$$

$$\leq \sup \{ |\mu|(A_n) \;/\; \mu \in K \} \leq \varepsilon .$$

Así, $|m|(A_n) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$, y por lo tanto $|m|$ es continua en $\emptyset$.

(ii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador débilmente compacto. En efecto, fijado $A \in \beta_o(X)$, tenemos que el adjunto del operador $m(A)$ es $m(A)' : F' = M(X,E')_K \longrightarrow E'$, definido por:

$$\langle x, m(A)'(\mu) \rangle = \langle m(A)(x), \mu \rangle = \langle T''(x\chi_A), \mu \rangle = \langle x\chi_A, T'(\mu) \rangle = \mu(A)(x) ,$$

para $\mu \in M(X,E')_K$ y $x \in E$. Es decir, dado $\mu \in M(X,E')_K$, $m(A)'(\mu) = \mu(A)$, y por lo tanto $m(A)'(K) = \{\mu(A) \;/\; \mu \in K\} = K(A)$, que por cumplir K la condición (b-iii) del Lema 2., es débilmente relativamente compacto en E' . Y, como K es la bola unidad de F' , nos queda que $m(A)'$ es un operador débilmente compacto: el Teorema de Gantmacher asegura que también $m(A)$ debe serlo.

En conclusión, tenemos que el operador

$$\begin{aligned} T : C(X,E) &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow \phi_y(f) \end{aligned}$$

está en las condiciones del enunciado, pero no es débilmente compacto.

<u>4. Corolario</u>. Sean E un espacio de Banach, X un espacio topológico compacto y T_2. Los operadores $T : C(X,E) \longrightarrow F$ débilmente compactos, con F espacio de Banach cualquiera, quedan caracterizados por verificar su 'medida asociada' m las condiciones (i) e (ii) del Teorema anterior, si y solamente si E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$.

<u>Demostración</u>. La necesidad de que E' tenga la propiedad $P(\beta_a(X))$ es

consecuencia inmediata del Teorema 3, Supongamos, por otra parte, que E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$, y sean F un espacio de Banach, $T : C(X,E) \longrightarrow F$ un operador continuo, cuya 'medida asociada' m toma valores en $L(E,F)$, es de semivariación continua en $\emptyset$, y dá origen para cada $A \in \beta_o(X)$, a un operador débilmente compacto $m(A) : E \longrightarrow F$. Llamemos $T' : F' \longrightarrow M(X,E')$ al operador trans-

$$y' \longrightarrow m_{y'}$$

puesto de T : $T'(B_{F'}) = \{m_{y'} \ / \ y' \in B_{F'}\}$ es un subconjunto de $Ca(\beta_a(X),E') = M(X,E')$ que está en las condiciones de la Definición II.5., pues se tiene:

i) $T'(B_{F'})$ está acotado en norma, ya que, $\forall y' \in B_{F'}$:
$\|m_{y'}\| = \|T'(y')\| \leq \|T\|$.

ii) Al ser la semivariación de m continua en $\emptyset$, se tiene, como se apuntó en el Teorema I.2., que existe una medida de control para m, $\lambda \in Ca(\beta_a(X))$. λ es así una medida positiva, y al ser, para cada $y' \in B_{F'}$, $|m_{y'}|(A) \leq \|y'\| \ |m|(A)$ cuando $A \in \beta_o(X)$, se tiene que $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} |m_{y'}|(A) = 0$ uniformemente en $y' \in B_{F'}$.

iii) $T'(B_{F'})(A) = \{m_{y'}(A) \ / \ y' \in B_{F'}\} = m(A)'(B_{F'})$ para cada $A \in \beta_o(X)$, siendo $m(A)'$ el operador transpuesto de $m(A)$: como $m(A)$ es débilmente compacto, $T'(B_{F'})(A)$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E'.

Y, puesto que E' tiene, por hipótesis, la propiedad $P(\beta_a(X))$, $T'(B_{F'})$ es un subconjunto dpebilmente relativamente compacto de $M(X,E')$: es decir, T' es un operador débilmente compacto, por lo que también T debe serlo.

Recordemos que, si E' ó E'' no tienen la P.R.N., entonces E' no tiene tampoco la propiedad $P(\mathcal{B}_o(X))$, siendo $X = [0,1]$ (Corolario II.21.) . Y, al ser $[0,1]$ un compacto metrizable, en él coinciden las σ-álgebras de Borel y de Baire: por lo tanto, E' no tiene tampoco la propiedad $P(\mathcal{B}_a(X))$. Ello, unido al Teorema 3., nos dá el siguiente:

5. Corolario. Sea E un espacio de Banach, Son equivalentes:

a. Para todo espacio X compacto y T_2, y para todo espacio de Banach F , un operador continuo $T : C(X,E) \longrightarrow F$ es débilmente compacto si y sólo si su 'medida asociada' m verifica:

   i) m toma valores en $L(E,F)$ y es de semivariación continua en $\emptyset$.

   ii) Para cada $A \in \mathcal{B}_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador débilmente compacto.

b. E' tiene la propiedad $P(\mathcal{B}_a(X))$, para cada espacio X compacto y T_2.

c. E' y E'' tienen ambos la P.R.N.

2. Operadores incondicionalmente convergentes

Dados dos espacios de Banach E y F , diremos que un operador $T : E \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente si T transforma series débilmente incondicionalmente de Cauchy en E , en series incondicionalmente convergentes en la norma de F . En 1962, Pełczyński |17| demostró que, siendo $E = C(X)$, con X compacto y T_2, los operadores incondicionalmente convergentes en E coinciden con los débilmente compactos. En 1971, Dobrakov |11| probó el siguiente resultado, como un primer paso en el intento de caracterizar los operadores débilmente incondicionalmente convergentes en $C(X,E)$:

<u>6. Teorema</u>. Sean X un espacio topológico compacto y T_2, E y F dos espacios de Banach, y $T : C(X,E) \longrightarrow F$ un operador continuo, de 'medida asociada' m . Entonces, si T es incondicionalmente convergente, se tiene:

i) m toma valores en $L(E,F)$ y su semivariación es continua en $\emptyset$.

ii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente.

Sin embargo, quedó abierta la cuestión de si las condiciones en el anterior Teorema eran o no suficientes para que un operador de $C(X,E)$ en un espacio de Banach sea incondicionalmente convergente. A continuación probaremos que la respuesta es negativa: hay operadores que verifican las condiciones (i) e (ii) y no son incondicionalmente convergentes.

Para ello, utilizaremos el siguiente concepto, introducido por Pełczyński en el artículo ya mencionado |17|:

' Se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad V si y sólamente si todo operador incondicionalmente convergente $T : E \longrightarrow F$, dónde F es otro espacio de Banach, es débilmente compacto. '

Naturalmente, de ello se sigue que todos los espacios $C(X)$, con X espacio topológico compacto y T_2, tienen la propiedad V : en particular, la tienen los espacios de tipo $C(X,C(Y))$, dónde X e Y son dos compactos separados, debido a la isometría existente entre

$C(X,C(Y))$ y $C(X\times Y)$.

Probaremos a continuación el siguiente resultado:

7. Teorema. Sean E un espacio de Banach y X un espacio topológico compacto y T_2. Si $C(X,E)$ tiene la propiedad V , son equivalentes:

a. Un operador $T : C(X,E) \longrightarrow F$, con F espacio de Banach, es incondicionalmente convergente si y sólo si su 'medida asociada' m verifica:

   i) m toma valores en $L(E,F)$ y es de semivariación continua en $\emptyset$.

   ii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente.

b. E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$.

Demostración. Supongamos que E' no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$; entonces, por el Lema 2., tendremos que existen un espacio de Banach F y un operador continuo, pero no débilmente compacto, $T : C(X,E) \longrightarrow F$, tal que su 'medida asociada' m verifica:

i') m toma valores en $L(E,F)$, y es de semivariación continua en $\emptyset$.

ii') Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador débilmente compacto.

Ahora bien, todo operador débilmente compacto es incondicionalmente convergente, como se deduce del Teorema de Orlicz-Pettis (ver |15|, 3.2.1.) , y por lo tanto m verifica también las condiciones (i) e (ii) del enunciado. Sin embargo, T no puede ser incondicionalmente convergente, pues $C(X,E)$ tiene, por hipótesis, la propiedad V., y T no es débilmente compacto. "

Supongamos ahora que E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$; y sean F un espacio de Banach, $T : C(X,E) \longrightarrow F$ un operador continuo, cuya 'medida asociada' m cumple (i) e (ii). Entonces, m toma valores en $L(E,F)$, su semivariación es continua en $\emptyset$, y para cualquier $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente. Ahora bien, si C(X,E) tiene la propiedad V , también E debe tenerla, puesto que se identifica a un subespacio vectorial complementado de C(X,E) mediante la isometría canónica:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow C(X,E) \\ x &\longrightarrow x\cdot\chi_X \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, dado un conjunto cualquiera $A \in \beta_o(X)$, el operador incondicionalmente convergente $m(A) : E \longrightarrow F$ debe ser débilmente compacto.

Puesto que, por hipótesis, E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$, del Corolario 4. se sigue que T es un operador débilmente compacto; y, por lo tanto, es incondicionalmente convergente.

<u>8. Corolario</u>. Sean E un espacio de Banach, X un espacio topológico compacto y T_2: si E tiene la propiedad V y E' tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$, entonces C(X,E) tiene la propiedad V .

<u>Demostración</u>. Sean F un espacio de Banach y $T : C(X,E) \longrightarrow F$ un operador incondicionalmente convergente, de 'medida asociada' m . Por el resultado de Dobrakov (Teorema 6.) , tendremos que m verifica:

i) m toma valores en $L(E,F)$, y su semivariación es continua en $\emptyset$.

ii) Para cada $A \in \beta_o(X)$, $m(A) : E \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente.

Ahora bien, al tener E la propiedad V , todo operador incondicionalmente convergente de E en un espacio de Banach, es débilmente compacto: en particular, todos los $m(A)$, $A \in \beta_o(X)$, lo son: así, y por tener E' la propiedad $P(\beta_a(X))$, se sigue del Corolario 4. que T es un operador débilmente compacto.

Resulta pues que todo operador inncondiconalmente convergente de $C(X,E)$ en un espacio de Banach es débilmente compacto, y por lo tanto $C(X,E)$ tiene la propiedad V .

Observación. Consideremos $X = [0,1]$ y $E = C(X)$: como ya hicimos notar, $C(X,E) = C(X, C(X))$ tiene la propiedad V , y $C(X)$, trivialmente, no tiene la propiedad $P(\beta_a(X))$. Por lo tanto, el Teorema 7. nos asegura que en este caso las condiciones necesarias de Dobrakov, que aparecen en el Teorema 6., no son suficientes para caracterizar los operadores incondicionalmente convergentes en $C(X,E)$. Ello proporciona un contraejemplo a un artículo de Swartz |22|, en el que se afirmaba la validez del recíproco del Teorema 6.

3. Operadores con valores en espacios débilmente secuencialmente completos

En |14| , Grothendieck demostró que si X es un espacio topológico compacto y separado, y F un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo, cualquier operador continuo $T : C(X) \longrightarrow F$ es débilmente compacto. Más tarde, Pełczyński |16| demostró que la hipótesis sobre F se puede debilitar al requerimiento de que dicho espacio no contenga ningún subespacio vectorial isomorfo a c_0 , e incluso que este último resultado se puede extender a $C(X,E)$ siempre que E sea reflexivo (ver |17|) . Desgraciadamente, parece difícil dar una extensión adecuada de este teorema para espacios E más generales: sin embargo, recientemente Gamlen |13| probó que el resultado original de Grothendieck se puede extender a $C(X,E)$ imponiendo tan sólo la condición de que E' tenga la P.R.N. Tal y como vamos a ver a continuación, dicha hipótesis puede ser debilitada sustancialmente, pues basta imponer que E no contenga ningún subespacio isomorfo a l^1 .

<u>9. Lema</u>. Sean E un espacio de Banach, X un espacio topológico compacto y T_2, y $\lambda \in M(X)$ una medida positiva. Si indicamos por $M_\lambda(X,E')$ el subespacio de $M(X,E')$ formado por las medidas absolutamente λ-continuas, se tiene que, siendo $\theta_\lambda : C(X,E) \longrightarrow L^1(\lambda,E)$ la inclusión canónica y $\theta'_\lambda : L^1(\lambda,E)' \longrightarrow M(X,E')$ su transpuesta, $\theta'_\lambda(L^1(\lambda,E)')$ es denso en $M_\lambda(X,E')$.

<u>Demostración</u>. Se tiene que, en las condiciones del enunciado, $\theta'_\lambda(v) \in$ $\in M_\lambda(X,E')$ para cada $v \in L^1(\lambda,E)'$. En efecto, fijada v sabemos, por el resultado de Dinculeanu que indicamos como Proposición I.13., que existe una función $g_v : X \longrightarrow E'$ tal que:

a) $\|g_v\| \in L^\infty(\lambda)$, y $\|g_v\|_\infty = \|v\|$.

b) $\langle f,g_v\rangle \in L^1(\lambda)$ para cada $f \in L^1(\lambda,E)$, y
$$v(f) = \int_X \langle f,g_v\rangle d\lambda .$$

Entonces, siendo $\mu_v = \theta'_\lambda(v) \in M(X,E')$, se tendrá, para cada $A \in \beta_0(X)$, $x \in E$, que $\mu_v(A)(x) = \langle x.\chi_A,\theta'_\lambda(v)\rangle = \int_X \langle x.\chi_A,g_v\rangle d\lambda$.

Y, dado $A \in \beta_0(X)$ tal que $\lambda(A) = 0$, para cualesquiera $x_1,\ldots x_n \in$

$\in B_E$, $\{A_1,\ldots A_n\}$ partición de A en $\beta_o(X)$, queda:

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_v(A_i)(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \int_X \langle x_i\cdot\chi_{A_i}, g_v\rangle d\lambda| = |\int_X \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\chi_{A_i}, g_v\rangle d\lambda| = 0.$$

Luego $|\mu_v|(A) = 0$, y por lo tanto μ_v es absolutamente continua respecto de λ : $\theta_\lambda^1(v) = \mu_v \in M_\lambda(X,E')$.

Sea ahora $\mu \in M_\lambda(X,E')$. Se tiene que $|\mu| \in M(X)$, y es continua respecto de λ : luego, por el Teorema de Radón-Nykodim, existe $g_\mu \in L^1(\lambda)$, función positiva, tal que $|\mu|(A) = \int_A g_\mu d\lambda$ para cada $A \in \beta_o(X)$. Definimos entonces, dado $n \in \mathbb{N}$:

$X_n = \{t \in X \ / \ g_\mu(t) \leq n\} \in \beta_o(X)$, y tenemos que:

$$n.\lambda(X\setminus X_n) \leq \int_{X\setminus X_n} g_\mu d\lambda = |\mu|(X\setminus X_n) \leq |\mu|(X) = \|\mu\| ,$$

luego $\lambda(X\setminus X_n) \leq \frac{\|\mu\|}{n}$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \lambda(X\setminus X_n) = 0$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mu_n : C(X,E) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f \longrightarrow \int_{X_n} fd\mu = \int_X \chi_{X_n} fd\mu .$$

Trivialmente, μ_n es una forma lineal y continua, y por lo tanto $\mu_n \in C(X,E)' = M(X,E')$. Además, y puesto que $\mu_n(A) = \mu(A\cap X_n)$ para cada $A \in \beta_o(X)$, de ser $\mu \in M_\lambda(X,E')$, se deduce que también $\mu_n \in M_\lambda(X,E')$. Por otro lado, tenemos que $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ en $M(X,E')$, pues dada $f \in C(X,E)$, con $\|f\|_\infty \leq 1$:

$$|\langle f,\mu - \mu_n\rangle| = |\int_X fd\mu - \int_X fd\mu_n| = |\int_X (f - \chi_{X_n} f)d\mu| =$$

$$|\int_{X\setminus X_n} fd\mu| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X\setminus X_n) \leq |\mu|(X\setminus X_n) .$$

Así, $\|\mu - \mu_n\| \leq |\mu|(X\setminus X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero hemos visto que $\lim_{n\to\infty} \lambda(X\setminus X_n) = 0$, luego también $\lim_{n\to\infty} |\mu|(X\setminus X_n) = 0$, al ser μ absolutamente continua respecto de λ . Por lo tanto, $\|\mu - \mu_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$," y $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$ en $\mathcal{M}(X,E')$,

Bastará ya tan sólo comprobar que $\mu_n \in \theta'_\lambda(L^1(\lambda,E)')$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Y, en efecto, se tiene, dado $A \in \beta_o(X)$:

$$|\mu|_n (A) = \sup \{|\sum_{i=1}^{s} \mu_n(A_i)(x_i)| \ / \ \{A_1,\dots A_s\} \text{ partición de } A \text{ en } \beta_o(X) \ , \ x_1,\dots x_s \in B_E\} =$$

$$= \sup \{|\sum_{i=1}^{s} \mu(A_i \cap X_n)(x_i)| \ / \ \{A_1,\dots A_s\} \text{ partición de } A \text{ en } \beta_o(X) \ , \ x_1,\dots x_s \in B_E\} =$$

$$= \sup \{|\sum_{i=1}^{s} \mu(B_i)(x_i)| \ / \ \{B_1,\dots B_s\} \text{ partición de } A\cap X_n \text{ en } \beta_o(X) \ , \ x_1,\dots x_s \in B_E\} =$$

$$= |\mu|(A\cap X_n) = \int_{A\cap X_n} g_\mu d\lambda = \int_A \chi_{X_n} g_\mu d\lambda \leq n\lambda(A) \ .$$

Entonces, para cada $f = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \chi_{A_i} \in A(X,E)$:

$$|\int_X f d\mu_n| = |\sum_{i=1}^{s} \mu_n(A_i)(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{s} \|x_i\| \, \mu_n(A_i) \leq n. \sum_{i=1}^{s} \|x_i\| \lambda(A_i) =$$

$$= n\|f\|_1 \ .$$

Y, por consiguiente, se puede definir una función lineal y continua:

$$v_n : L^1(\lambda,E) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longrightarrow \int_X f d\mu_n$$

con: $\theta'_\lambda(v_n) = \mu_n$. Así, $v_n \in L^1(\lambda,E)'$ y $\mu_n = \theta'_\lambda(v_n) \in \theta'_\lambda(L^1(\lambda,E)')$.

Luego $\theta'_\lambda(L^1(\lambda,E)')$ es efectivamente denso en $\mathcal{M}_\lambda(X,E')$.

<u>10. Teorema</u>. Sean X un espacio topológico compacto y T_2, y E un espacio de Banach. Si E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1 , todo operador continuo $T : C(X,E) \longrightarrow F$, siendo F un espcio de Banach débilmente secuencialmente completo, es débilmente compacto.

<u>Demostración</u>. Fijemos X, E y F en las condiciones del enunciado, y sea $T : C(X,E) \longrightarrow F$ un operador continuo, de 'medida asociada' m. Para cada $x \in E$, tenemos:

$$m_x : \beta_o(X) \longrightarrow F'' \qquad y \qquad T_x : C(X) \longrightarrow F$$
$$A \longrightarrow m(A)(x) \qquad\qquad \phi \longrightarrow T(x\phi)$$

Claramente, para cada $A \in \beta_o(X)$, $T''_x(\chi_A) = T''(x.\chi_A) = m(A)(x) = m_x(A)$, luego m_x es la 'medida asociada' al operador T_x. Por ser F débilmente secuencialmente completo, según el resultado de Grothendieck |14|, T_x es un operador débilmente compacto, luego m_x es una medida y toma valores en F (Teorema I.19.) De donde se deduce inmediatamente que m toma valores en $L(E,F)$. Además, la subfamilia de $Ca(\beta_a(X))$, $\{|m_{y'}| \ / \ y' \in B_{F'}\}$, es equiexhaustiva, pues en caso contrario podríamos encontrar un número $r > 0$ y sendas sucesiones $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B_{F'}$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\beta_a(X)$, tales que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está formada por conjuntos disjuntos dos a dos, y $|m_{y'_n}|(A_n) \geq 4r \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Tomemos <u>$n_1 = 1$</u>. Puesto que $|m_{y'_1}| \in M(X)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |m_{y'_1}|(A_n) < +\infty$, luego existe $N_1 > 1$ tal que $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} |m_{y'_1}|(A_n) < r$ y $\sum_{n=1}^{N_1} |m_{y'_1}|(A_n) \geq |m_{y'_1}|(A_1) \geq 4r$. Y, para cada n desde 1 a N_1, podemos encontrar una partición de A_n en $\beta_a(X)$, $\{B_1^n,\dots,B_{s_n}^n\}$, y $x_1^n,\dots x_{s_n}^n \in B_E$, tales que $|m_{y'_1}|(A_n) \leq \sum_{i=1}^{s_n} m_{y'_1}(B_i^n)(x_i^n) + \frac{r}{N_1}$; con lo que queda: $\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{s_n} m_{y'_1}(B_i^n)(x_i^n) \geq \sum_{n=1}^{N_1} |m_{y'_1}|(A_n) - r \geq 3r$.

Sea <u>$n_2 = N_1 + 1$</u>. $m_{y'_{n_2}} \in M(X)$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} |m_{y'_{n_2}}|(A_n) < +\infty$, y podemos encontrar $N_2 > N_1 + 1$, tal que $\sum_{n=N_2+1}^{\infty} |m_{y'_{n_2}}|(A_n) < r$, mientras que: $\sum_{n=N_1+1}^{N_2} |m_{y'_{n_2}}|(A_n) \geq |m_{y'_{n_2}}|(A_{n_2}) \geq 4r$. Y de nuevo, para cada n desde $N_1 + 1$ hasta N_2 , existen una partición de A_n en $\beta_a(X)$, $\{B_1^n, \ldots B_{s_n}^n\}$, y $x_1^n, \ldots x_{s_n}^n \in B_E$, tales que

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n) \geq 3r \ .$$

Así, por un proceso de inducción, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $n_k = N_{k-1} + 1$, tenemos que existe $N_k > N_{k-1} + 1$, tal que $\sum_{n=N_k+1}^{\infty} |m_{y'_{n_k}}|(A_n) < r$, mientras que, para n entre $N_{k-1} + 1$ y N_k , se pueden encontrar una partición de A_n en $\beta_a(X)$, $\{B_1^n, \ldots B_{s_n}^n\}$, y $x_1^n, \ldots x_{s_n}^n \in B_E$, tales que $\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \sum_{i=1}^{s_n} m_{y'_{n_k}}(B_i^n)(x_i^n) \geq 3r$.

Consideremos entonces la serie en F : $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n)$.

Para cada $y' \in F'$, se tiene:

$$|<\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n), y'>| = |\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m_{y'}(B_i^n)(x_i^n)| \leq$$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{i=1}^{s_n} m_{y'}(B_i^n)(x_i^n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |m_{y'}|(A_n)$, y por ser $|m_{y'}|$ una medida, la serie es incondicionalmente convergente.

Así, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n)$ es una serie débilmente incondicionalmente de Cauchy en F . Ahora bien, por ser F débilmente secuencialmente completo, F no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a c_0 , y por lo tanto las series débilmente incondicionalmente de Cauchy convergen en la norma de F (ver |4|) . Luego, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $N \geq N_\varepsilon$, $\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n)\| < \varepsilon$. Tomemos $\varepsilon = r$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_{k-1} \geq N_r$. Entonces:

$$r > \|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n)\| \geq |\langle \sum_{n=N_{k-1}+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m(B_i^n)(x_i^n), y'_{n_k}\rangle| =$$

$$= |\sum_{n=N_{k-1}+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_n} m_{y'_{n_k}}(B_i^n)(x_i^n)| \geq |\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \sum_{i=1}^{s_n} m_{y'_{n_k}}(B_i^n)(x_i^n)| -$$

$$- |\sum_{n=N_k+1}^{\infty} m_{y'_{n_k}}(B_i^n)(x_i^n)| \geq 3r - r = 2r .$$

Contradicción ésta que nos asegura que la familia $\{|m_{y'}| \ / \ y' \in B_{F'}\}$ ha de ser equiexhaustiva, y por lo tanto, según el Teorema I.2., m tiene una medida de control $\lambda \in Ca(\beta_a(X)) = \mathcal{M}(X)$.

λ es pues una medida positiva, y fácilmente se comprueba que $m_{y'} = T'(y') \in \mathcal{M}_\lambda(X,E')$ para cada $y' \in F'$. Sean entonces θ_λ y θ'_λ como en el Lema 9., y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,E)$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$: $(\theta_\lambda(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ será una sucesión acotada y uniformemente λ-integrable en $L^1(\lambda,E)$. Ahora bien, λ es una medida de Radón acotada en el compacto X, y E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a l^1, luego, por un resultado de Bourgain |6|, toda sucesión acotada y uniformemente λ-integrable en $L^1(\lambda,E)$ posee una subsucesión débilmente de Cauchy. Así, podemos encontrar una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $(\theta_\lambda(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy en $L^1(\lambda,E)$. Veamos que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es $\sigma(C(X,E), \mathcal{M}(X,E'))$ - de Cauchy.

Fijados $\mu \in \mathcal{M}_\lambda(X,E')$, $\varepsilon > 0$, se tiene:

— por el Lema 9., existe $v_\varepsilon \in L^1(\lambda,E)'$ tal que $\|\mu - \theta'_\lambda(v_\varepsilon)\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

— por ser $(v_\varepsilon(\theta_\lambda(f_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $k, k' \geq k_\varepsilon$, $|v_\varepsilon(\theta_\lambda(f_{n_k})) - v_\varepsilon(\theta_\lambda(f_{n_{k'}}))| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Y, por lo tanto, para $k, k' \geq k_\varepsilon$ queda:

$$|\langle\mu, f_{n_k} - f_{n_{k'}}\rangle| \leq |\langle\mu - \theta_\lambda'(v_\varepsilon), f_{n_k} - f_{n_{k'}}\rangle| + |\langle\theta_\lambda'(v_\varepsilon), f_{n_k} - f_{n_{k'}}\rangle| \leq$$

$$\leq \|\mu - \theta_\lambda'(v_\varepsilon)\| \, \|f_{n_k} - f_{n_{k'}}\|_\infty + |v_\varepsilon(\theta_\lambda(f_{n_k})) - v_\varepsilon(\theta_\lambda(f_{n_{k'}}))| < \frac{\varepsilon}{4}2 + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \varepsilon .$$

En definitiva, para cada $\mu \in M_\lambda(X,E')$, $(\langle f_{n_k}, \mu\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Ahora bien, para cada $y' \in F'$, $T'(y') = m_{y'} \in M_\lambda(X,E')$, y $\langle T(f_{n_k}), y'\rangle = \langle f_{n_k}, T'(y')\rangle = \langle f_{n_k}, m_{y'}\rangle$: por lo tanto, $(T(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en F, luego es débilmente convergente, ya que, por hipótesis, F era débilmente secuencialmente completo.

Si llamamos B a la bola unidad de $C(X,E)$, nos queda, por lo visto anteriormente, que de cada sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B, se puede extraer una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $(T(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente convergente en F : por el Teorema de Eberlein, resulta así que $T(B)$ es débilmente relativamente compacto, y por lo tanto el operador T es débilmente compacto.

Observación. En las condiciones del Teorema 10., la hipótesis de que E no contenga ningún subespacio isomorfo a l^1 es suficiente, pero no necesaria. En efecto, sea $X = [0,1]$: $C(X)$ contiene algún subespacio isómorfo a l^1 (ver, por ejemplo, |19|) ; sin embargo, al ser $C(X,C(X))$ isomorfo a $C(X\times X)$, el resultado de Grothendieck garantiza que cualquier operador continuo $T : C(X,C(X)) \longrightarrow F$ es débilmente compacto siempre que F sea un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo. (Más aún, siempre que F no contenga ningún subespacio vectorial isomorfo a C_0, por el resultado de Pełczyński).

CAPITULO IV

Tal y como vimos a lo largo del Capítulo II de esta memoria, el intento de extender a $L^p(\lambda,E)$ ó $Ca(\Sigma,E)$ las caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos que se tienen para el caso escalar, tropieza con graves dificultades a menos que tanto E como su dual E' tengan la P.R.N. Ello, a su vez, es un fuerte obstáculo para el estudio de los operadores de $\mathcal{C}(X,E)$ a valores en un espacio de Banach cualquiera, tal y como se vió en el Capítulo III. Sin embargo, en el presente capítulo podremos comprobar que muchas de tales dificultades desaparecen en el caso en que $E = l^1$: para este espacio, es posible dar caracterizaciones directas, pese a que su dual, como es bien sabido, no tienen la P.R.N. Desgraciadamente, el procedimiento que seguiremos no parece susceptible de una generalización más amplia, debido a los fuertes requisitos sobre el espacio que subyacen en los métodos empleados.

A lo largo del capítulo, l^1 representará siempre el espacio usual de las sucesiones reales o complejas absolutamente convergentes con su norma usual; $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(e^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serán, respectivamente las bases canónicas en C_0 y l^1, y toda función $f: X \longrightarrow l^1$, dónde X es un conjunto cualquiera, se identificará del modo usual con la sucesión de funciones $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$, dónde, $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^k = \langle e_k, f\rangle : X \to \mathbb{K}$ es la función 'coordenada k-ésima' de f. Una consideración análoga regirá para las funciones con valores en l^∞ ó C_0.

1. Topología débil en el espacio $L^1(\lambda,l^1)$.

En esta sección, fijados un conjunto X, una σ-álgebra de subconjuntos de X, y una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$, nos ocuparemos principalmente de dar varias caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^1(\lambda, l^1)$, así como de la convergencia débil en dicho espacio. Para ello, va a tener una importancia esencial el aislar en el dual $L^1(\lambda, l^1)'$ un subespacio total que cumpla de alguna manera un papel análogo al de las funciones simples en el caso escalar.

<u>1. Lema</u>: Sea $H = \{g : X \longrightarrow l^\infty \ / \ g(t) = (\alpha_n \chi_{A_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}$, con $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma\}$, y sea $H^* = \{v_g \ / \ g \in H\}$, dónde, para cada $g = (\alpha_n \chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \in H$, definimos:

$$v_g(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{A_k} f^k d\lambda \quad , \text{ con } f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda, l^1).$$

Entonces H^* es un subconjunto total de $L^1(\lambda, l^1)'$.

<u>Demostración</u>. H^* es efectivamente un subconjunto de $L^1(\lambda, l^1)'$, pues para cada $g = (\alpha_n \chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \in H$, la aplicación:

$$v_g : L^1(\lambda, l^1) \longrightarrow \mathbb{K}$$

está bien definida, es claramente lineal, y se tiene, dada $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ perteneciente a $L^1(\lambda, l^1)$:

$$|v_g(f)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{A_k} f^k d\lambda\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \int_{A_k} |f^k| d\lambda \leq$$

$$\leq \|\alpha\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f^k| d\lambda = \|\alpha\|_\infty \|f\|_1 .$$

Luego $v_g \in L^1(\lambda, l^1)'$, y $\|v_g\| \leq \|\alpha\|_\infty = \|g\|_\infty$.

Veamos ahora que H^* es total en $L^1(\lambda, l^1)'$. Sea $v \in L^1(\lambda, l^1)'$ tal que $\|v\| \leq 1$: según se indicó en la Proposición I. 13., a v se le puede asociar una función $g_v : X \longrightarrow l^\infty$ tal que:

i) $\|g_v\| \in \mathcal{L}^\infty(\lambda)$, y $\|g_v\|_\infty = \|v\|$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_{vn} = <g_v, e_n^*> \in \mathcal{L}^\infty(\lambda)$; además, siendo ρ un lifting en $\mathcal{L}^\infty(\lambda)$, g_{vn} se puede elegir con unicidad con la condición: $\rho(g_{vn}) = g_{vn}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Dada $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda, l^1)$, $<f, g_v> = \sum_{k=1}^{\infty} f^k g_{vk} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$,

y: $$v(f) = \int_X <f, g_v> d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f^k g_{vk} d\lambda .$$

Puesto que, en caso de que sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, g_v admite una descomposición en 'parte real' y 'parte imaginaria' según: $g_v = g_v^1 - ig_v^2$, con $g_v^j = (g_{vk}^j)_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall j = 1,2$, y $g_{vk} = g_{vk}^1 - ig_{vk}^2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada g_{vk} toma tan sólo valores reales. Fijemos pues $\varepsilon > 0$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos:

$A_i^{k*} = \{t \in X \ / \ \frac{i-1}{m} \leq g_{vk}(t) \leq \frac{i}{m}\}$, $-m+1 \leq i \leq m$. $A_i^{k*} \in \Sigma$ para cada i, por ser g_{vk} una función medible. Sea $A_i^k = A_i^{k*} \setminus (\bigcup_{i<j} A_j^{k*})$, con $A_{-m+1}^k = A_{-m+1}^{k*}$: $\{A_{-m+1}^k, \ldots A_m^k\}$ es una partición de X en Σ .

Para cada $i = -m+1, \ldots m$, sea $g_{i\varepsilon} = (\frac{i}{m} \cdot \chi_{A_i^k})_{k\in\mathbb{N}}$. $g_{i\varepsilon} \in H$, luego $v_{i\varepsilon} = v_{g_{i\varepsilon}} \in H^*$, y siendo $v_\varepsilon = \sum_{i=-m+1}^{m} v_{i\varepsilon}$ se tiene, para cada $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda, l^1)$:

$$|<f, v - v_\varepsilon>| = \Big|\sum_{i=-m+1}^{m} v_{i\varepsilon}(f) - v(f)\Big| = \Big|\sum_{i=-m+1}^{m} \int_X <f, g_{i\varepsilon}> d\lambda -$$

$$- \int_X <f, g_v> d\lambda\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=-m+1}^{m} \int_{A_i^k} f^k \cdot \frac{i}{m} \, d\lambda - \int_X f^k g_{vk} \, d\lambda \Big)\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=-m+1}^{m} \int_{A_i^k} f^k \big(\frac{i}{m} - g_{vk}\big) \, d\lambda \Big)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=-m+1}^{m} \int_{A_i^k} |f^k| \, \Big|\frac{i}{m} - g_{vk}\Big| d\lambda \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=-m+1}^{m} \int_{A_i^k} |f^k| \, d\lambda = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f^k| \, d\lambda = \frac{1}{m} \|f\|_1 < \varepsilon \ \|f\|_1 .$$

Luego $\|v - v_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, y como $v_\varepsilon = \sum_{i=-m+1}^{m} v_{i\varepsilon}$, con $v_{i\varepsilon} \in H^*$ para cada $i=-m+1,\ldots m$, queda que H^* es efectivamente total en $L^1(\lambda, l^1)$.

2. Proposición. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^1(\lambda, l^1)$. Se tiene:

a. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy si y sólamente si, para toda sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ ,
$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k) \, d\lambda \right| = 0 .$$

b. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $f \in L^1(\lambda, l^1)$ si y sólamente si, para toda sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ ,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f^k) \, d\lambda \right| = 0 .$$

Demostración. La haremos únicamente para (a), ya que (b) se hace análogamente. Supongamos pues que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy: dada la sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ , sea para cada $n \in \mathbb{N}$ $\xi_n = \left(\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right)_{k\in\mathbb{N}} \in l^1$. Dado $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$, $g = (\alpha_k \chi_{A_k})_{k\in\mathbb{N}} \in H$, y por lo tanto $v_g \in H^* \subset L^1(\lambda, l^1)'$. Entonces, al ser $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente de Cauchy, se tiene:

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle \xi_n - \xi_m, \alpha \rangle = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k) \, d\lambda =$$

$$= \lim_{n,m} v_g(f_n - f_m) = 0 ,$$

y así $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en l^1 : de dónde se sigue que es de Cauchy en norma (Lema de Schur). Nos queda:

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k) \, d\lambda \right| = \lim_{n,m\to\infty} \| \xi_n - \xi_m \| = 0 .$$

Supongamos ahora que $\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k)\, d\lambda \right| = 0$ para cualquier sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ : de ello se sigue inmediatamente que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para la topología $\sigma(L^1(\lambda, l^1), H^*)$. Ahora bien, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto equicontinuo de $L^1(\lambda, l^1)''$, por ser una sucesión acotada, y como H^* es total en $L^1(\lambda, l^1)'$ por el el Lema 1. , se tiene que las topologías $\sigma(L^1(\lambda, l^1), H^*)$ y $\sigma(L^1(\lambda, l^1), L^1(\lambda, l^1)')$ coinciden en sus restricciones a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: luego la sucesión es débilmente de Cauchy.

La proposición anterior nos proporciona una nueva demostración de un resultado ya conocido:

3. Teorema. $L^1(\lambda, l^1)$ es un espacio débilmente secuencialmente completo.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente de Cauchy en $L^1(\lambda, l^1)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es necesariamente acotada, podemos suponer que $\|f_n\|_1 \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dado $A \in \Sigma$, $(\int_A f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en l^1, pues, para cada $\alpha \in l^\infty$, $\alpha\, \chi_A \in L^1(\lambda, l^1)'$: de ello se sigue que $(\int_A f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en l^1 , y por lo tanto de Cauchy, según el Lema de Schur.

Por consiguiente, para cada $A \in \Sigma$ existe $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\lambda \in l^1$, y ello nos permite definir la función de conjunto

$$\mu : \Sigma \longrightarrow l^1 \qquad .$$
$$A \longrightarrow \mu(A)$$

Se comprueba sin mayor dificultad que μ es una función finitamente aditiva de conjunto, de variación total acotada: $\|\mu\| \leq 1$. Además, y al ser $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\lambda$ para cada $A \in \Sigma$, se sigue del Teorema de Vitali-Hahn-Saks (ver |12|, IV.10.6.), que μ es una medida. Y μ es absolutamente λ-continua, luego, por tener l^1 la P.R.N., existe $f \in L^1(\lambda, l^1)$ tal que $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ para cada $A \in \Sigma$: y $\|f\|_1 = \|\mu\| \leq 1$. Nos queda tan sólo comprobar que $f_n \longrightarrow f$ débilmente: para lo cual, según la Proposición 2., bastará ver que para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ , $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\int_{A_k} (f_n^k - f^k)\, d\lambda| = 0$.

Pero, fijada la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sean $\xi = (\int_{A_k} f^k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$,

$\xi_n = (\int_{A_k} f_n^k\, d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es trivialmente una sucesión de Cauchy en l^1 , luego existe $\xi^* \in l^1$ tal que $\xi^* = \lim_{n\to\infty} \xi_n$. Ahora bien, para cada k :

$$<e_k, \xi> = \int_{A_k} f^k d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{A_k} f_n^k\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} <e_k, \xi_n> = <e_k, \xi^*> \quad ;$$

de dónde resulta que $\xi = \xi^*$, y por lo tanto $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, es decir:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\int_{A_k} (f_n^k - f^k)\, d\lambda| = \lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$. Así, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $f \in L^1(\lambda, l^1)$, y el espacio es débilmente secuencialmente completo.

Utilizando la Proposición 2. se puede dar una primera caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^1(\lambda, l^1)$.

4. Proposición. Un subconjunto K de $L^1(\lambda,l^1)$ es débilmente relativamente compacto si y sólamente si verifica:

i) K está acotado en norma.

ii) K es uniformemente λ-intgrable.

iii) Para toda sucesión $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ, $K(S) = \{(\int_{A_k} f^k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}} \,/\, f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es un subconjunto relativamente compacto de l^1.

Demostración. La necesidad de (i) e (ii) se mencionó ya en la Proposición II.27. Y, si (iii) no se verifica, existen una sucesión $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K tales que, siendo para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = (\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$, la sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente. Pero, al ser K por hipótesis débilmente relativamente compacto, podemos suponer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a $f \in L^1(\lambda,l^1)$. Siendo $\xi = (\int_{A_k} f^k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$, se tiene, por la Proposición 2., que:

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} (f_n^k - f^k)\, d\lambda\right| = 0 .$$ Por lo tanto,

$\xi_n \longrightarrow \xi$ en l^1, y $K(S)$ debe ser relativamente compacto.

Supongamos ahora que K es un subconjunto de l^1 que verifica las condiciones (i), (ii) e (iii), y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K. Para cada $A \in \Sigma$, sea $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en Σ constantemente igual a A: $A_k = A$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Entonces: $K(A) = \{\int_A f d\lambda \,/\, f \in K\} =$

$= \{(\int_A f^k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}} \,/\, f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\} = K(S)$ es relativamente compacto en l^1, por la condición (iii).

Sea $\{G_m \ / \ m \in \mathbb{N}\}$ una base de abiertos en el espacio separable l^1, y sea Σ_o el álgebra engendrada por la familia numerable de conjuntos: $\{f_n^{-1}(G_m) \ / \ n \in \mathbb{N} \ , \ m \in \mathbb{N}\}$, la cual está contenida en Σ para una elección adecuada de los representantes de las f_n . Tendremos que Σ_o es una subálgebra numerable de la σ-álgebra Σ , y llamaremos Σ_1 a la sub-σ-álgebra de Σ engendrada por Σ_o . Al ser $K(A)$ relativamente compacto en l^1 para cada $A \in \Sigma_o$, y Σ_o numerable, mediante un proceso diagonal de Cantor se puede extraer una subsucesión $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $A \in \Sigma_o$, existe $\lim_{m\to\infty} \int_A f_{n_m} d\lambda \in l^1$. Por verificar K la condición (ii) del enunciado, la sucesión de medidas definidas por las $\{f_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es uniformemente σ-aditiva, luego para cada $A \in \Sigma_1$, existe $\lim_{m\to\infty} \int_A f_{n_m} d\lambda \in$ $\in l^1$, por existir dicho límite para $A \in \Sigma_o$ (ver |12|, IV.8.8.) . Podemos así definir:

$$\mu : \Sigma_1 \longrightarrow l^1$$
$$A \longrightarrow \lim_{m\to\infty} \int_A f_{n_m} d\lambda$$

función de conjunto que, por el Teorema de Vitali-Hahn-Saks, es numerablemente aditiva; y, como se comprueba fácilmente, μ es de variación acotada y absolutamente λ_1-continua, siendo λ_1 la medida que se obtiene al restringir λ a Σ_1 . Entonces, por tener l^1 la P.R.N., existe $f \in L^1(\lambda, l^1)$ tal que, para cada $A \in \Sigma_1$, $\int_A f d\lambda_1 = \mu(A) = \lim_{m\to\infty} \int_A f_{n_m} d\lambda$. Trivialmente, también $f_{n_m} \in$ $\in L^1(\lambda_1, l^1)$ para cada $m \in \mathbb{N}$: y vamos a ver que $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a f en $L^1(\lambda_1, l^1)$. En caso contrario, y por la Proposición 2., se podría encontrar una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ_1 , tal que

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} (f^k_{n_m} - f^k)\, d\lambda_1\right| \not\longrightarrow 0$, luego existe $\varepsilon > 0$ y, para cada $s \in \mathbb{N}$, existe $m_s > m_{s-1}$, con: $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} (f^k_{n_{m_s}} - f^k)\, d\lambda_1\right| \geq \varepsilon$ (*) .

Ahora bien, sean $\xi = (\int_{A_k} f^k d\lambda_1)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\xi_s = (\int_{A_k} f^k_{n_{m_s}} d\lambda_1)_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall s \in \mathbb{N}$. Por verificar K la condición (iii), $(\xi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, que podemos suponer que es ella misma, y puesto que, por la definición de f , $\int_{A_k} f^k d\lambda = \lim_{s\to\infty} \int_{A_k} f^k_{n_{m_s}} d\lambda$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $(\xi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ converge a ξ en l^1 . Por lo tanto, $\lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} (f^k_{n_{m_s}} - f^k)\, d\lambda\right| = \lim_{s\to\infty} \|\xi_s - \xi\| = 0$, en contradicción con (*) . Y, como consecuencia, $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ debe converger débilmente a f en $L^1(\lambda_1, l^1)$. Ahora bien, la inclusión canónica:

$$I : L^1(\lambda_1, l^1) \longrightarrow L^1(\lambda, l^1)$$

es una isometría sobre la imagen, que nos permite considerar a $L^1(\lambda_1, l^1)$ como un subespacio vectorial cerrado de $L^1(\lambda, l^1)$. Por consiguiente, queda que $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f débilmente en $L^1(\lambda, l^1)$.

Tenemos así, por el Teorema de Eberlein, que K es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $L^1(\lambda, l^1)$.

A continuación daremos una nueva caracterización de la convergencia débil en $L^1(\lambda, l^1)$, que traerá aparejada la caracterización correspondiente de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de dicho espacio.

<u>5. Proposición</u>. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(\lambda, l^1)$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente si y sólo si: para cada $k \in \mathbb{N}$ $(f^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge a 0 débilmente en $L^1(\lambda)$, y $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=K+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que la caracterización no es cierta: entonces podremos encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente a 0 en $L^1(\lambda, l^1)$ (lo cual evidentemente implica que $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a 0 en $L^1(\lambda)$ para cada $k \in \mathbb{N}$) y un número $r > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ cumpliendo: $\sum_{k=K+1}^{\infty} \int_X |f_{n_K}^k| d\lambda \geq 6r$. Y podemos suponer que $n_{K+1} > n_K$ para cada K.

Sea $K_1 = 0$: tendremos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_{n_1}^k| d\lambda \geq 6r$. Pero: $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_{n_1}^k| d\lambda = \|f_{n_1}\|_1 < +\infty$, luego existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=K_2+1}^{\infty} \int_X |f_{n_1}^k| d\lambda < r$, y por lo tanto $\sum_{k=1}^{K_2} \int_X |f_{n_1}^k| d\lambda > 5r$. Ahora bien, $\forall k = 1,\dots K_2$ se tiene:

$\int_X |f_{n_1}^k| d\lambda \leq 4 \sup \{|\int_A f_{n_1}^k d\lambda| \ / \ A \in \Sigma\}$, luego existe $A_k \in \Sigma$ verificando: $\int_X |f_{n_1}^k| d\lambda \leq 4.|\int_{A_k} f_{n_1}^k d\lambda| + \frac{r}{K_2}$, y por lo tanto:

$$5r < \sum_{k=1}^{K_2} \int_X |f_{n_1}^k| d\lambda \leq 4 \sum_{k=1}^{K_2} |\int_{A_k} f_{n_1}^k d\lambda| + r \Longrightarrow \sum_{k=1}^{K_2} |\int_{A_k} f_{n_1}^k d\lambda| > r.$$

Al mismo tiempo, y por hipótesis, existe $n_2 > n_1$ tal que $\sum_{k=K_2+1}^{\infty} \int_X |f_{n_2}^k| d\lambda \geq 6r$. Así, podemos construir dos sucesiones de números naturales: $0 = K_1 < K_2 < \dots$, y $n_1 < n_2 < \dots$, así como una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ, verificando:

$$\sum_{k=K_m+1}^{K_{m+1}} \left|\int_{A_k} f_{n_m}^k \, d\lambda\right| > r \qquad \forall m \in \mathbb{N} .$$

Entonces resulta que, para cada m :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} f_{n_m}^k \, d\lambda\right| \geq \sum_{k=K_m+1}^{K_{m+1}} \left|\int_{A_k} f_{n_m}^k \, d\lambda\right| > r$$, en contradicción con que,

al ser $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a 0 débilmente en $L^1(\lambda, l^1)$, se tendría, por la Proposición 2., que:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_A f_{n_m}^k \, d\lambda\right| = 0 .$$

Sea ahora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(\lambda, l^1)$ tal que $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente en $L^1(\lambda)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=K+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$: vamos a ver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente en $L^1(\lambda, l^1)$, para lo cual utilizaremos la caracterización de la Proposición 2. Fijemos así una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y para cada $k = 1, \ldots K$, como $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente en $L^1(\lambda)$, $\lim_{n\to\infty} \int_{A_k} f_n^k \, d\lambda = 0$, y por lo tanto existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\left|\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right| < \frac{\varepsilon}{2K_\varepsilon}$ $\forall k = 1, \ldots K_\varepsilon$. En definitiva queda, $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right| = \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} \left|\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right| + \sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} \left|\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right| < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda < \varepsilon .$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{A_k} f_n^k \, d\lambda\right| = 0$, y ello para cada sucesión

$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ : por la Proposición 2., tenemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente.

6. Proposición. Un subconjunto K de $L^1(\lambda,l^1)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{f^n \ / \ f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda)$.

ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que: $\sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda < \varepsilon$ siempre que $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pertenezca a K .

Demostración. Sea K un subconjunto de $L^1(\lambda,l^1)$, y supongamos que es débilmente relativamente compacto. Entonces, la necesidad de la condición (i) se deduce inmediatamente de la continuidad para las topologías débiles de las proyecciones:

$$\pi_n : L^1(\lambda,l^1) \longrightarrow L^1(\lambda) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow f^n$$

Supóngamos que la condición (ii) no se verifica: entonces, existirá $r > 0$ tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $f_N \in K$ verificando: $\sum_{k=N+1}^{\infty} \int_X |f_N^k| d\lambda \geq r$. $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en K, que es un suconjunto débilmente relativamente compacto: entonces, y según el Teorema de Eberlein, podemos econtrar una función $f \in$ $\in L^1(\lambda,l^1)$ y una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que es ella misma), que converge a f débilmente. Entonces, $(f_N - f)_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(\lambda,l^1)$ que converge a 0 débilmente, y por la Proposición 5., podremos encontrar

$N_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f_N^k - f^k| d\lambda < \frac{r}{2}$ $\forall N \in \mathbb{N}$. Además, y puesto que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda$ es una serie convergente, podemos tomar N_o de forma que se tenga: $\sum\limits_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda < \frac{r}{2}$, con lo que nos queda,

$$\forall N \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f_N^k| d\lambda \leq \sum_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f_N^k - f^k| d\lambda +$$
$$+ \sum_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda < r :$$

y basta considerar $N \geq N_o$ para llegar a una contradicción. De lo cual se deduce que también la condición (ii) es necesaria para que K sea un subconjunto débilmente relativamente compacto de $L^1(\lambda, l^1)$.

Supongamos ahora que $K \subset L^1(\lambda, l^1)$ verifica las condiciones (i) e (ii) del enunciado, y vamos a ver que, en tal caso, deberá verificar también las tres condiciones de la Proposición 4. En efecto:

a. K está acotado en norma, puesto que, por (ii), existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda < 1$ para cada $f = (f^k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$, y por (i), $\bigcup\limits_{n=1}^{N_o} K_n$ es débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda)$, y por lo tanto está acotado: es decir, existe $M > 0$ tal que $\|f^k\|_1 = \int_X |f^k| d\lambda \leq$ $\leq M$ para cada $f = (f^k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$, $k = 1, \ldots N_o$. Entonces, para cada $f = (f^k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$, se tiene: $\|f\|_1 = \int_X \|f\| d\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda =$

$$= \sum_{k=1}^{N_o} \int_X |f^k| d\lambda + \sum_{k=N_o+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda \leq N_o M + 1 \text{ ; es decir,}$$

$\|f\|_1 \leq N_o M + 1$ para cada $f \in K$.

b. K es uniformemente λ-integrable: pues, de no ser así, podríamos encontrar un número $r > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen

$A_n \in \Sigma$ con $\lambda(A_n) < \frac{1}{n}$ y $f_n \in K$ con $r < \int_{A_n} \|f_n\| d\lambda =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n} |f_n^k| d\lambda$. Pero, por (ii), fijado tal r existe $N \in \mathbb{N}$ con:

$\sum_{k=N+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda < \frac{r}{2}$ para cada $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$r < \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n} |f_n^k| d\lambda \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{A_n} |f_n^k| d\lambda + \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda < \sum_{k=1}^{N} \int_{A_n} |f_n^k| d\lambda$

$+ \frac{r}{2}$, de donde $\sum_{k=1}^{N} \int_{A_n} |f_n^k| d\lambda > \frac{r}{2}$.

Ahora bien, $\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ es, por (i), débilmente relativamente compacto en $L^1(\lambda)$, y en consecuencia uniformemente λ-integrable: así, existe $\delta > 0$ tal que, si $A \in \Sigma$ y $\lambda(A) < \delta$, $\int_A |f^k| d\lambda < \frac{r}{2N}$ cuando $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$ y $k = 1,\ldots N$. Luego, tomando n tal que $\frac{1}{n} < \delta$, se tendrá: $\sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} |f_n^k| d\lambda < \frac{r}{2}$, en contradicción con el resultado anterior. De lo cual se deduce que debe verificarse necesariamente que $\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A \|f\| d\lambda = 0$ uniformemente cuando $f \in K$.

c. Para cada sucesión $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ , $K(S) = \{\int_{A_k} f^k d\lambda \ /$ $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ es un subconjunto relativamente compacto en l^1 . En efecto, ello es equivalente a que $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |\int_{A_k} f^k d\lambda| = 0$ uniformemente cuando $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$ (ver |12|, IV.13.3.) : pero, según la condición (ii), $\lim_{N\to\infty} \sum_{N+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda = 0$ uniformemente en $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\in K$, y $\sum_{N+1}^{\infty} |\int_{A_k} f^k d\lambda| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

Nos ha quedado así que si K verifica las condiciones (i) e

(ii) del enunciado, verifica también las tres condiciones de la Proposición 4, y, por lo tanto, es débilmente relativamente compacto.

Como se comprueba inmediatamente, la caracterización de la Proposición anterior admite una formulación equivalente según el siguiente Corolario:

<u>7. Corolario</u>. Sea K un subconjunto de $L^1(\lambda,l^1)$, e indiquemos por: $|K| = \{|f| = (|f^k|)_{k\in\mathbb{N}} \,/\, f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$. Tenemos entonces que son equivalentes:

a. K es débilmente relativamente compacto.

b. $|K|$ es débilmente relativamente compacto.

c. $|K|$ verifica:

i) $|K|$ es uniformemente λ-integrable.

ii) $|K|(X) = \{(\int_X |f^k|d\lambda)_{k\in\mathbb{N}} \,/\, (|f^k|)_{k\in\mathbb{N}} \in |K|\}$ es relativamente compacto en l^1 .

Las anteriores caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos del espacio $L^1(\lambda,l^1)$ permiten dar una demostración directa de que dicho espacio tiene la propiedad de Dunford - Pettis , tal y como fue definida por Grothendieck en |14| ; es decir, que dado un espacio de Banach cualquiera F , todo operador débilmente compacto $T : L^1(\lambda,l^1) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.

<u>8. Teorema</u>. El espacio $L^1(\lambda,l^1)$ tiene la propiedad de Dunford - Pettis .

Demostración. Sean F un espacio de Banach y $T : L^1(\lambda, l^1) \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto; y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente de Cauchy en $L^1(\lambda, l^1)$: al ser éste un espacio débilmente secuencialmente completo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a una función $f \in L^1(\lambda, l^1)$, por lo que $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a 0 . Vamos a ver que $(T(f_n - f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en F. En efecto, sea $\varepsilon > 0$: por la Proposición 5., sabemos que existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int_X |f_n^k - f^k| d\lambda < \frac{\varepsilon}{2(\|T\|+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para cada $k = 1,\ldots N_\varepsilon$, definamos el operador:

$$\begin{aligned} T^k : L^1(\lambda) &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow T(e_k^* f) \end{aligned}$$

siendo e_k^* , como ya se indicó al principio, el elemento k-ésimo de la base canónica de l^1 . T^k es, trivialmente, un operador lineal y continuo, que es además débilmente compacto, por serlo T . Por otro lado, $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a f^k en $L^1(\lambda)$, y como $L^1(\lambda)$ tiene la propiedad de Dunford - Pettis (ver |14|), podemos encontrar $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|T^k(f_n^k - f^k)\| < \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon}$ $\forall k = 1,\ldots N_\varepsilon$. Entonces, dado $n \geq n_\varepsilon$, se tendrá:

$$\|T(f_n - f)\| \leq \|T(f_n - f) - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} T^k(f_n^k - f^k)\| + \|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} T^k(f_n^k - f^k)\| \leq$$

$$\leq \|T(f_n - f) - T(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} e_k^*(f_n^k - f^k))\| + \|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} T^k(f_n^k - f^k)\| <$$

$$< \|T\| \, \|(f_n - f) - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} e_k^*(f_n^k - f^k)\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} = \|T\| \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int_X |f_n^k - f^k| d\lambda +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} < \|T\| \frac{\varepsilon}{2(\|T\|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Es decir, que $T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f_n)$ en F y, por lo tanto, $L^1(\lambda, l^1)$ tiene efectivamente la propiedad de Dunford - Pettis.

2. Topología débil en los espacios $L^p(\lambda, l^1)$, con $1 < p < +\infty$.

Basándonos en los resultados de la Sección 1 , podemos dar caracterizaciones análogas de la convergencia de sucesiones y la compacidad relativa de subconjuntos para la topología débil, en los espacios $L^p(\lambda, l^1)$. Para ello, haremos uso del Lema II.7. , que nos asegura que la transpuesta de la inyección canónica $J : L^p(\lambda, l^1) \longrightarrow L^1(\lambda, l^1)$ tiene imagen densa en $L^p(\lambda, l^1)'$ para la norma dual. Se tiene entonces:

9. Proposición. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^p(\lambda, l^1)$, $1 < p < +\infty$.

a. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy si y sólo si para toda sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ , $\lim_{n,m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k) d\lambda \right| = 0$.

b. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a $f \in L^p(\lambda, l^1)$ si y sólo si para toda sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ , $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f^k) d\lambda \right| = 0$.

Demostración. La haremos únicamente para (a), puesto que para (b) es análoga. Supongamos primeramente que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy: por la continuidad para las topologías débiles de la inyección canónica J , $(J(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\lambda, l^1)$ con la topología débil, luego, por la Proposición 2.,

$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} (f_n^k - f_m^k) d\lambda \right| = 0$ para cada sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ .

A su vez, si es esta condición la que se cumple, de nuevo por la Proposición 2. tendremos que $(J(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en $L^1(\lambda, l^1)$, luego dado $v \in L^1(\lambda, l^1)'$, y por ser $\langle f_n, J'(v) \rangle = \langle J(f_n), v \rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$, tendremos que $(\langle f_n, J'(v) \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy: o, lo que es lo mismo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para la topología $\sigma(L^p(\lambda,l^1),\ J'(L^1(\lambda,l^1)'))$. Ahora bien, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, y por lo tanto equicontinua como subconjunto del dual de $L^p(\lambda,l^1)'$: al ser $J'(L^1(\lambda,l^1)')$ denso en $L^p(\lambda,l^1)'$, las topologías $\sigma(L^p(\lambda,l^1),\ J'(L^1(\lambda,l^1)')$ y $\sigma(L^p(\lambda,l^1),\ L^p(\lambda,l^1)')$ coinciden sobre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy en $L^p(\lambda,l^1)$.

Antes de demostrar que los espacios $L^p(\lambda,l^1)$ son débilmente secuencialmente completos, estableceremos el siguiente Lema, en el que se dá por sentada (como se hará siempre a partir de ahora) , la identificación en el sentido conjuntista entre $L^p(\lambda,l^1)$ y el subespacio vectorial $J(L^p(\lambda,l^1))$ de $L^1(\lambda,l^1)$.

<u>10. Lema</u>. Una función $f : X \longrightarrow l^1$ pertenece a $L^p(\lambda,l^1)$, $1 < p < +\infty$, si y solamente si $f \in L^1(\lambda,l^1)$ y existe una constante $M > 0$ tal que $\left|\int_X \langle f,g\rangle d\lambda\right| \leq M\,\|g\|_q$ para cada $g \in A(\Sigma,l^\infty)$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Además, en tal caso $\|f\|_p \leq M$.

<u>Demostración</u>. La necesidad de las condiciones es evidente. En cuanto a su suficiencia, se sigue de ser condiciones suficientes, a su vez, para que $f \in L^p(\lambda,l^1)$, el que $f \in L^p(\lambda,l^1)$ y $\|f\| \in L^p(\lambda)$: las cuales se demuestran a partir de las dadas mediante los procedimientos usuales.

<u>11. Teorema</u>. $L^p(\lambda,l^1)$, con $1 < p < +\infty$, es un espacio débilmente secuencialmente completo.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente de Cauchy en $L^p(\lambda,l^1)$: estará, por lo tanto, acotada en norma, y se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\|f_n\|_p \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad para las topologías débiles de la inyección canónica de $L^p(\lambda,l^1)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en $L^1(\lambda,l^1)$, el cual es débilmente secuencialmente completo, como se vió en el Teorema 3. : luego existe $f \in L^1(\lambda,l^1)$ a la que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $L^1(\lambda,l^1)$. Queda tan sólo ver que $f \in L^p(\lambda,l^1)$, pues como ya se ha indicado anteriormente, al ser $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ un conjunto equicontinuo, sobre él coincidirán la topología débil y la de la convergencia puntual sobre $L^1(\lambda,l^1)'$, considerado como subespacio vectorial denso de $L^p(\lambda,l^1)'$. Y, según el Lema 10., bastará comprobar que existe una constante $M > 0$ tal que $\left|\int_X \langle f,g\rangle d\lambda\right| \leq M\,\|g\|_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, para cada $g \in A(\Sigma,l^\infty)$. Ahora bien, $A(\Sigma,l^\infty)$ se identifica en el modo usual a un subespacio de $L^1(\lambda,l^1)'$, y por lo tanto se tiene:

$\left|\int_X \langle f,g\rangle d\lambda\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_X \langle f_n,g\rangle d\lambda\right| \leq \|g\|_q$, puesto que

$\left|\int_X \langle f_n,g\rangle d\lambda\right| \leq \|f_n\|_p\,\|g\|_q \leq \|g\|_q \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Así, efectivamente, $f \in L^p(\lambda,l^1)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f débilmente en $L^p(\lambda,l^1)$: luego este espacio es débilmente secuencialmente completo.

12. Proposición. Un subconjunto K de $L^p(\lambda,l^1)$, $1 < p < +\infty$, es débilmente relativamente compacto sí y sólamente si verifica:

i) K está acotado en norma.

ii) Para toda sucesión $S = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ , el conjunto $K(S) = \{(\int_{A_k} f^k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}} \;/\; f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es relativamente compacto en l^1 .

Demostración. La necesidad de las condiciones (i) e (ii) se sigue inmediatamente de la proposición 4., así como de la continuidad para las topologías débiles de la identificación entre $L^p(\lambda,l^1)$ y un subespacio vectorial de $L^1(\lambda,l^1)$. En cuanto a su suficiencia, se deduce también de la Proposición 4., ya que todo conjunto acotado en norma en $L^p(\lambda,l^1)$, con $1 \leq p < +\infty$, es uniformemente λ-integrable .

13. Proposición. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\lambda,l^1)$, $1 \leq p < +\infty$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente sí y sólamente sí $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 débilmente en $L^p(\lambda)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{k=K+1}^{\infty} \int_X |f_n^k| d\lambda = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En un procedimiento análogo a la demostración de la Proposición anterior, se comprueba que tanto la necesidad como la suficiencia de las condiciones anteriores se siguen de la Proposición 5., junto con las propiedades de la inyección canónica de $L^p(\lambda,l^1)$ en $L^1(\lambda,l^1)$.

De manera muy semejante, a partir de la Proposición 6. se demuestran la siguiente caracterización y su corolario:

14. Proposición. Un subconjunto K de $L^p(\lambda,l^1)$, $1 < p \leq +\infty$, es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) $K_n = \{f^n \ / \ f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en $L^p(\lambda)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{k=K+1}^{\infty} \int_X |f^k| d\lambda = 0$ uniformemente cuando $f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}}$

$\in K$.

15. Corolario. Sea K un subconjunto de $L^p(\lambda,l^1)$, $1 < p < +\infty$, e indiquemos por $|K| = \{|f| = (|f^k|)_{k\in\mathbb{N}} \ / \ f = (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$. Entonces son equivalentes:

a. K es débilmente relativamente compacto.

b. $|K|$ es débilmente relativamente compacto.

c. $|K|$ está acotado en $L^p(\lambda,l^1)$, y el conjunto $|K|(X) = \{\int_X |f|d\lambda \ / \ f \in K\}$ es relativamente compacto en l^1.

3. Topología débil en los espacios $Ca(\Sigma,l^1)$

Nuestro objetivo es dar caracterizaciones de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $Ca(\Sigma,l^1)$, para lo cual nos basaremos ampliamente en los resultados de la Sección 1 y en la siguiente identificación, bien conocida:

16. Lema. La aplicación: $\begin{array}{ccc} L^1(\lambda,l^1) & \longrightarrow & Ca(\Sigma,l^1) \\ f & \longrightarrow & \mu_f \end{array}$, con $\lambda \in Ca(\Sigma)$, definida por: $\mu_f(A) = \int_A f d\lambda$ para cada $A \in \Sigma$, es una isometría que permite identificar $L^1(\lambda,l^1)$ a un subespacio vectorial cerrado de $Ca(\Sigma,l^1)$ el cual, por tener l^1 la P.R.N. , será precisamente:

$$Ca_\lambda(\Sigma,l^1) = \{\mu \in Ca(\Sigma,l^1) \ / \ \mu \text{ es absolutamente } \lambda\text{-continua}\} .$$

Tenemos entonces:

17. Proposición. Un subconjunto K de $Ca(\Sigma,l^1)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si verifica:

i) K está acotado en norma.

ii) K es uniformemente σ-aditivo.

iii) Para toda sucesión $S = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ, el conjunto: $K(S) = \{(\mu^k(A_k))_{k\in\mathbb{N}} \,/\, \mu = (\mu^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es relativamente compacto en l^1.

Demostración. La condición (ii), según se indicó en el Teorema I.8., unida a (i), basta para garantizar que existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$ tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente cuando $\mu \in K$. Por lo tanto, K está contenido en el subespacio $Ca_\lambda(\Sigma,l^1)$ de $Ca(\Sigma,l^1)$, y el Lema 16., junto con la Proposición 4., nos garantizan que las condiciones (i), (ii) e (iii) son suficientes para que K sea débilmente relativamente compacto.

Por otro lado, si K es débilmente relativamente compacto en $Ca(\Sigma,l^1)$, el resultado de Brooks y Lewis, que indicamos como Teorema II.1., nos garantiza que existe una medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$ tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$: por lo tanto, K está contenido en $Ca_\lambda(\Sigma,l^1)$, y de nuevo del Lema16. y la Proposición 4. se sigue que K ha de verificar las condiciones (i), (ii) e (iii).

De un modo enteramente análogo, utilizando el Lema 16. y la Proposición 2., podemos dar la siguiente caracterización de la convergencia débil de sucesiones en $Ca(\Sigma,l^1)$:

18. Proposición. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Ca(\Sigma,l^1)$, y μ un elemento de dicho espacio. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a μ si y sólamente si, para cada sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ, la sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\xi_n = (\mu_n^k(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$, converge en l^1 a $\xi = (\mu^k(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Por otro lado, si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en $Ca(\Sigma,l^1)$, se tendrá que, para cada $A \in \Sigma$, $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en l^1 , y por lo tanto el Teorema de Vitali-Hahn-Saks asegura que $\{\mu_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto uniformemente σ-aditivo. Ello permite sumergir la sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Ca_\lambda(\Sigma,l^1)$ para alguna medida positiva $\lambda \in Ca(\Sigma)$: utilizando nuevamente el Lema 16., del Teorema 3. se obtiene:

<u>19. Proposición</u>. $Ca(\Sigma,l^1)$ es un espacio débilmente secuencialmente completo.

El mismo tipo de razonamiento permite trasladar a $Ca(\Sigma,l^1)$ el resultado para $L^1(\lambda,l^1)$ dado en la Proposición 6. y el Corolario 7., obteniéndose:

<u>20. Proposición</u>. Sea K un subconjunto de $Ca(\Sigma,l^1)$, e indiquemos por $|K| = \{(|\mu^k|)_{k\in\mathbb{N}} \;/\; (\mu^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$. Son equivalentes:

a. K es débilmente relativamente compacto.

b. $|K|$ es débilmente relativamente compacto.

c. $|K|$ verifica:

i) $|K|$ es uniformemente σ-aditivo.

ii) $|K|(X) = \{(|\mu^k|(X))_{k\in\mathbb{N}} \;/\; \mu = (\mu^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K\}$ es relativamente compacto en l^1 .

<u>4. Aplicación al estudio de operadores en $C(X,c_0)$</u>

Tal y como se vió en el Capítulo III, cualquier caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos del espacio $Ca(\beta_a(X),E')$, con X espacio topológico compacto y T_2, y E espacio de Banach, produce inmediatamente una caracterización correspondiente de los operadores débilmente relativamente compactos

$T : C(X,E) \longrightarrow F$, siendo F otro espacio de Banach cualquiera.

Entonces, de los resultados de la Sección 3 se obtiene:

<u>21. Proposición</u>. Sean X un espacio topológico compacto y Hausdorff, E un espacio de Banach. Un operador $T : C(X,C_0) \longrightarrow E$, de 'medida asociada' $m : \beta_o(X) \longrightarrow L(C_o,E'')$ es débilmente compacto si y sólo si verifica:

i) m toma valores en $L(C_o,E)$ y su semivariación es continua en $\emptyset$.

ii) Siendo, para cada $x' \in E'$, $m_{x'} : \beta_o(X) \longrightarrow l^1$, $A \longrightarrow (m^k_{x'}(A))_{k\in\mathbb{N}}$

se define, dada una sucesión $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ ,

$$m(S) : E' \longrightarrow l^1 , \quad x' \longrightarrow (m^k_{x'}(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

, y se tiene que $m(S)$ es un operador compacto.

<u>Demostración</u>. La necesidad de (i) quedó establecida en el Teorema III, 1. Por otro lado, si T es un operador débilmente compacto, también lo será su transpuesto $T' : F \longrightarrow M(X,l^1)$, y por lo tanto, $T'(B_{E'})$ será un subconjunto débilmente relativamente compacto de $M(X,l^1)$, el cual a su vez es un subespacio vectorial de $Ca(\beta_o(X),l^1)$.. Entonces, la condición (iii) de la Proposición 17. nos asegura que, dada la sucesión $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\beta_o(X)$, $m(S)(B_{E'}) = \{(m^k_{x'}(A_k)_{k\in\mathbb{N}} / x' \in B_{E'}\}$ $= T'(B_{E'})(S)$, es un subconjunto relativamente compacto de l^1 , y por lo tanto $m(S)$ es un operador compacto. Ello nos asegura la necesidad de las condicones (i) e (ii): en cuanto a su suficiencia, queda asegurada gracias a la Proposición 17., de la que se sigue que, en las ,,

condiciones dadas, $T'(B_{E'})$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de $Ca(\beta_a(X),l^1)$, y por lo tanto de $M(X,l^1)$.

Esta caracterización nos permite dar una demostración simple del siguiente resultado:

<u>22. Proposición</u>: Si E es un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a C_o , entonces todo operador continuo $T : C(X,C_o) \longrightarrow E$, dónde X es un espacio compacto y T_2, es débilmente compacto.

<u>Demostración</u>. Sea m la 'medida asociada' al operador continuo T . Al no contener E ningún subespacio isomorfo a C_o , toda serie débilmente incondicionalmente de Cauchy en E es incondicionalmente convergente (ver |4|) : de dónde se deduce que m toma valores en $L(C_o, E)$ y que su semivariación es continua en $\emptyset$ (ver |3|) . Por lo tanto, m verifica la condición (i) de la Proposición 21. Queda ver que también verifica (ii). Sea $S = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Σ : tenemos que comprobar que $m(S)(B_{E'}) = \{(m^k_{x'}(A_k))_{k\in\mathbb{N}} \ / \ x' \in B_{E'}\}$ es un subconjunto relativamente compacto de l^1 , es decir, que $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=K+1}^{\infty} |m^k_{x'}(A_k)| = 0$ uniformemente en $x' \in B_{E'}$, según la caracterización en |12|, IV.13.3.

Pero, fijados S y $x' \in B_{E'}$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |m^k_{x'}(A_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |m_{x'}(A_k)(e_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle m\ (A_k)(e_k),x'\rangle| \ ; \quad Y:$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle m(A_k)(e_k),x'\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T''(e_k\ \chi_{A_k}),x'\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} T''(e_k\ \chi_{A_k}),\ x'\rangle =$$

$= \langle T''(\sum_{k=1}^{\infty} e_k\ \chi_{A_k});x'\rangle$, dónde $\sum_{k=1}^{\infty} e_k\ \chi_{A_k} \in M(X,l^1)'$. Es decir, que $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)(e_k)$ es una serie débilmente incondicionalmente de Cauchy en E, y puesto que E no contiene ningún subespacio vectorial isomorfo a C_0, es incondicionalmente convergente en E. Así, fijado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\| \sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_k \, m(A_k)(e_k) \| < \varepsilon$ para todo $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ tal que $\|\alpha\| \leq 1$. Y como, para cada $x' \in B_{E'}$, existe $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ tal que $\|\alpha\| = 1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |m^k_{x'}(A_k)| = |\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, m_{x'}(A_k)(e_k)|$, queda que $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=K+1}^{\infty} |m^k_{x'}(A_k)| = 0$ uniformemente en $x' \in B_{E'}$, y por lo tanto $m(S)$ es, en efecto, un operador compacto.

La Proposición 21, nos asegura entonces que todo operador $T : C(X,C_0) \longrightarrow E$ es débilmente compacto, siempre que E no contenga ningún subespacio vectorial isomorfo a C_0..

BIBILIOGRÁFIA

1. BARTLE,R.G.; DUNFORD,N. y SCHWARTZ,J. - Weak compctness and vector measures. - Canad. J. Math. 7. (1955) 289 - 305.

2. BATT,J. - On weak compactness in spaces of vector-valued measures and Bochner-integrable functions in connection with the Radon-Nykodim property of Banach spaces. - Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 19. (1974) 285 - 304.

3. BATT,J. y BERG,E.J. - Linear bounded transformations on the space of continuous functions. - J. Funct. Anal. 4. (1969) 215 - 239.

4. BESSAGA,C. y PEŁCZYNSI,A. - On basis and unconditional convergence of series in Banach spaces. - Studia Math. 17. (1958) 151 -164.

5. BOMBAL,F. - On the space $L^p(\mu,X)$. - Por aparecer.

6. BOURGAIN,J. - An averaging result for l^1-sequences and applications to weakly compact sets in L^1_X. - Por aparecer.

7. BROOKS, J.K. - Weak compactness in the space of vector measures. - Bull. Amer. Math. Soc. 78. (1972) 284 - 287.

8. BROOKS, J.K. y LEWIS,P.W. - Linear operators and vector measures. - Trans. Amer. Math. Soc. 193. (1974) 139 - 162.

9. DIESTEL,J. y UHL,J.J.Jr. - Vector measures. - Math. Surveys, nº 15, Amer. Math. Soc., providence. (1977).

10. DINCULEANU,N. - vector measures. - internat. Series of Monographs in Pure and Appl. Math., vol. 95. Pergamon Press, New York; VEB

Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. (1967).

11. DOBRAKOV, I. - On representation of linear operator on $C_0(T,X)$. - Czech. Math. Journ. 20. (1971). 13 - 30.

12. DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. - Linear operators, Part I. - Interscien sce Publishers. New York. (1958).

13. GAMLEN, J.L.B. - On a theorem of A. Pełczyński. - Proc. Amer. Math. Soc. 44. (1974) 283 - 285.

14. GROTHENDIECK, A. - Sur les applications lineaires faiblement compac tes d'espaces du type C(K). - Canad. J. Math. 5. (1953) 129 - 173.

15. HILLE, E. y PHILLIPS, R. -Functional analysis and semi-groups. - Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence. (1957).

16. PEŁCZYNSKI, A. - Projections in certain Banach spaces. - Studia Math. 19. (1960) 209 - 228.

17. PEŁCZYNSKI, A. - Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact. - Bull. Acad. Polonaise 10. (1962) 641 - 648.

18. PISIER, G. - Por aparecer en C.R.A.S. París.

19. ROSENTHAL, H. - Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces. - Bull. Amer. Math. Soc. 84. (1978). 803 - 831.

20. RUDIN, W. - Real and complex analysis. - McGraw-Hill, New York. (1966).

21. SCHAEFER, H.H. - Topological vector spaces. - Macmillan, New York. (1966).

22. SWARTZ, C. - Unconditionally converging and Dunford-Pettis opera-

on $C_X(S)$. - Studia Math. 57. (1976) 85 - 90.