

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



**MODELO “INARMA” PARA SERIES
TEMPORALES DE VALORES ENTEROS:
ANÁLISIS, PROPIEDADES ASINTOMÁTICAS Y
ESTIMACIÓN.**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

José Nerys Funes Torres

Bajo la dirección del doctor

Juan A. Tejada Cazorla

Madrid, 2010

- **ISBN: 978-84-692-9938-8**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa I



Modelos INARMA para series temporales de valores enteros: Análisis, propiedades asintóticas y estimación

José Nerys Funes Torres

Director: Dr. D. Juan A. Tejada Cazorla

Madrid, Enero de 2001

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa I

**Modelos INARMA para series temporales de
valores enteros: Análisis, propiedades asintóticas y
estimación**

José Nerys Funes Torres

Memoria para optar al grado de Doctor en CC.
Matemáticas, realizada bajo la dirección del
Dr. D. Juan A. Tejada Cazorla.

**JUAN A. TEJADA CAZORLA, PROFESOR DEL
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA I DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE
MADRID**

CERTIFICA:

Que la presenta memoria titulada:

**Modelos INARMA para series temporales de valores enteros:
Análisis, propiedades asintóticas y estimación**

ha sido realizada bajo mi dirección por José Nerys Funes Torres, Licenciado en Matemáticas y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presenta en Madrid a 8 de enero de dos mil uno.

A mi familia y a mis amigos

Enero 2001

Índice general

1. Introducción a los modelos INARMA. El modelo INMAG(q)	1
1.1. Introducción	1
1.2. Modelos DARMA	8
1.3. Modelos basados en el operador de refinamiento	11
1.3.1. Operador de refinamiento, ' \circ '	11
1.3.2. Procesos autorregresivos de valores enteros no negativos de primer orden, INAR(1)	14
1.3.3. Procesos autorregresivos de valores enteros no negativos de orden p , INAR(p)	19
1.3.4. Procesos de medias móviles de valores enteros no negativos de primer orden, INMA(1)	24
1.3.5. Procesos de medias móviles de valores enteros no negativos de orden q , INMA(q)	27
1.3.6. Procesos mixtos de valores enteros no negativos, INARMA(1, q)	31
1.4. Procesos de medias móviles de valores enteros	35
1.4.1. Procesos de medias móviles de valores enteros generalizado de primer orden, INMAG(1)	36
1.4.2. Proceso de medias móviles de valores enteros de orden q , INMAG(q)	39
2. Propiedades asintóticas de los momentos	45

2.1. Proceso INAR(1) con marginal geométrica	46
2.1.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral	50
2.2. Proceso INMA(q) con marginal geométrica	65
2.2.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral	69
2.3. Proceso INARMA(1,1)	75
2.3.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral cuando el ruido tiene distribución marginal de Poisson	80
2.3.2. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral cuando el ruido tiene distribución marginal geométrica	87
2.4. Proceso INARMA(1, q) con marginal de Poisson	93
2.4.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral	99
2.5. Proceso INMAG(1)	104
2.5.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y auto- correlación muestral	106
3. Estimación	115
3.1. Estimación de parámetros del proceso INAR(1) con marginal geométrica	116
3.1.1. Estimadores Yule-Walker	116
3.1.2. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales	118
3.1.3. Estimadores de máxima verosimilitud condicional	122
3.1.4. Estudio de simulación	125
3.2. Estimación de los parámetros del proceso INAR(p) con marginal de Poisson	132
3.2.1. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales	133

3.2.2. Estimadores de máxima verosimilitud condicional	135
3.2.3. Estudio de simulación	138
3.3. Estimación de los parámetros del modelo INMAG(1)	141
3.3.1. Estimadores por el método de los momentos	141
3.3.2. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales	142
3.3.3. Estudio de simulación del proceso INMAG(1)	145
3.3.4. Aplicación práctica del modelo INMAG(1)	148
Conclusiones	154
Apéndices	156
Referencias	169

Capítulo 1

Introducción a los modelos

INARMA. El modelo INMAG(q)

1.1. Introducción

Las series temporales de valores enteros aparecen frecuentemente en situaciones reales como, por ejemplo, la serie del número de convulsiones epilépticas por día para un paciente a lo largo de un cierto período de tiempo (Figura 1.1), (esta serie de datos ha sido estudiada por Albert (1991), Le, Leroux y Puterman (1992), Franke y Seligmann (1993), MacDonald y Zucchini (1997) y Latour (1998)), la serie del número de casos de poliomielitis en cierta área en meses sucesivos (Figura 1.2), (Lindsey (1995)), o la serie del número de infecciones mensuales en el hospital clínico San Carlos de Madrid debidas al *Staphylococcus aureus* meticilín resistente (SARM), (Figura 1.3). Otros casos podrían ser: número de pacientes diarios en un determinado servicio hospitalario, número de accidentes ocurridos cada fin de semana en una determinada ciudad, número de elementos defectuosos encontrados en muestras sucesivas tomadas de una línea de producción, la serie binaria de días lluviosos y días secos en algún lugar específico, etc.

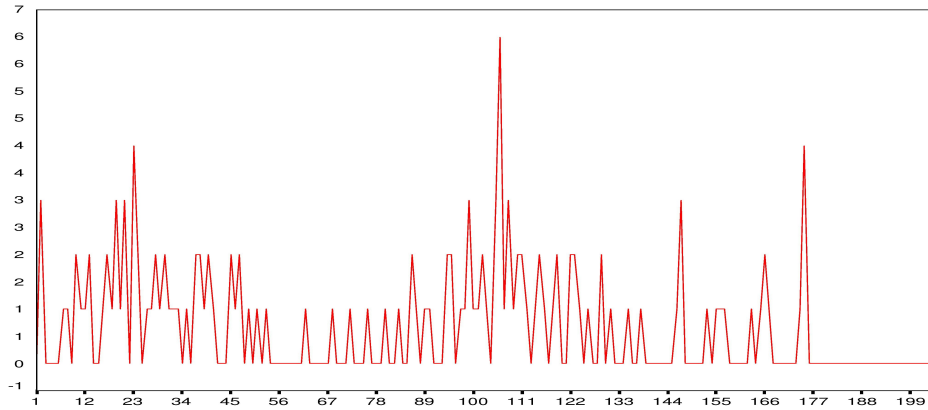


Figura 1.1: Número de convulsiones epilépticas por día para un paciente a lo largo de 204 días consecutivos. *Fuente:* MacDonald y Zucchini (1997). Tabla B.2, p. 208.

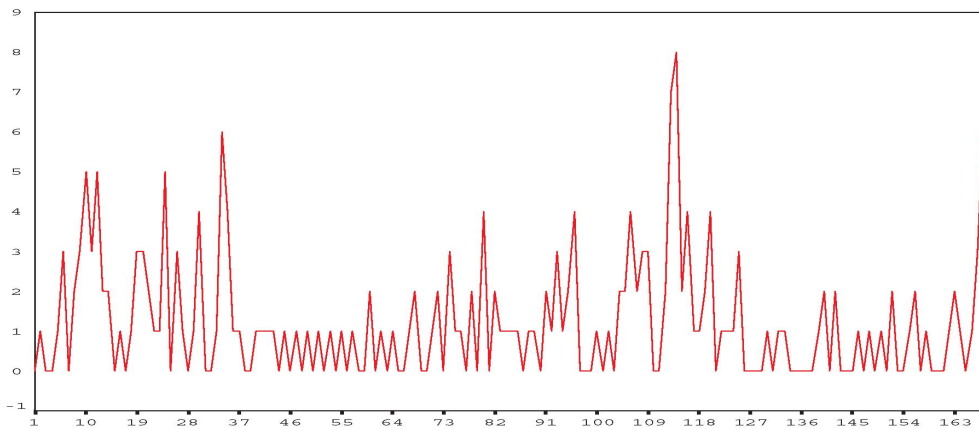


Figura 1.2: Número de casos mensuales de Poliomieltis durante 14 años (1970-1973) en U.S.A. *Fuente:* Lindsey (1995). Ejercicio 4, p. 179.

Una gran parte de la literatura sobre series temporales se centran en los modelos tipo ARMA asumiendo la distribución normal o, al menos, una distribución continua

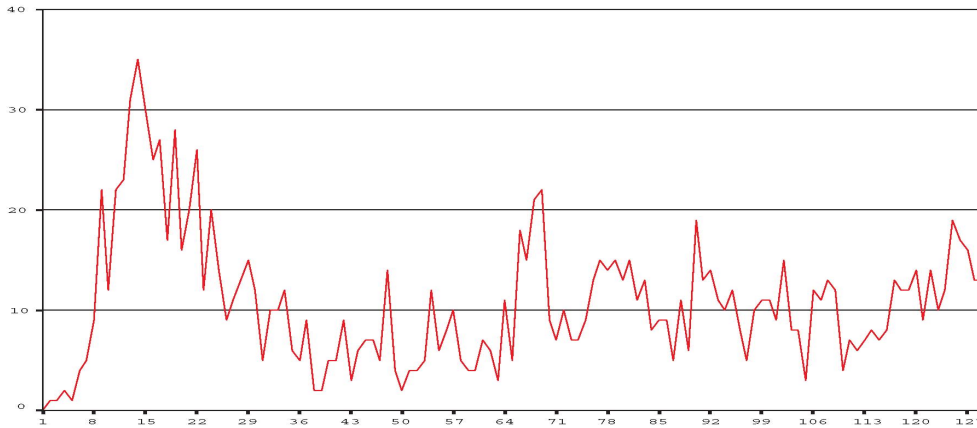


Figura 1.3: Número de infecciones mensuales de SARM. *Fuente:* Hospital Clínico San Carlos de Madrid.

en los datos. Aunque, en algunos casos, este tipo de modelos pueden ser una aproximación adecuada, esto no siempre es así. Cuando las observaciones son de naturaleza categórica o cuantitativa con valores discretos y pequeños, es necesario utilizar modelos que reflejen la naturaleza de dichos datos.

Para el estudio y análisis de este tipo de datos se han utilizado diversos modelos de procesos estocásticos cuya utilidad práctica es, en general, bastante limitada. Por ejemplo, para la serie de convulsiones epilépticas Albert (1991) y Le, Leroux y Puterman (1992) han considerado las cadenas de Markov en tiempo discreto con un espacio de estados finito. Sin embargo, desde el punto de vista estadístico se presenta inmediatamente el problema de la sobreparametrización. Además, los datos a modelar muestran frecuentemente un comportamiento no Markoviano, o al menos no de primer orden Markoviano. Aunque se pueden utilizar cadenas de Markov de orden superior, esto únicamente agravaría el problema de la sobreparametrización. Para una revisión del uso de las cadenas de Markov para series temporales de valores discretos, se re-

comienda el libro de MacDonald y Zucchini (1997).

En los últimos años se han propuesto modelos paramétricamente más simples para series temporales discretas estacionarias del tipo ARMA. Dichos modelos tratan de reproducir las características de versatilidad, generalidad y disponibilidad de las herramientas de identificación que poseen los modelos ARMA clásicos. Jacobs y Lewis (1978a) introducen el proceso mixto discreto estacionario de segundo orden (en adelante se dirá estacionario, simplemente), autorregresivo de primer orden y de medias móviles de orden $q+1$, DARMA(1, $q+1$), que se presenta brevemente en el apartado 1.2; obtienen explícitamente su distribución marginal y su función de autocorrelación que es independiente de dicha distribución. Estudian, también, la invertibilidad en el tiempo de dicho proceso y demuestran que, en general, no es Markoviano. Por otra parte, Jacobs y Lewis (1978b) estudian algunas propiedades asintóticas del proceso DARMA(1, $q+1$) y diversos procedimientos estadísticos que pueden ser utilizados para el análisis de este modelo; demuestran que la media muestral tiene distribución asintóticamente normal y que el test de la χ^2 puede ser utilizado para contrastar la hipótesis nula de que los datos del proceso DARMA(1, $q+1$) provienen de una distribución marginal especificada. Posteriormente, Jacobs y Lewis (1983) consideran los procesos DARMA(p , $q+1$) y NDARMA(p , q) para series temporales discretas estacionarias, obteniendo una generalización de los modelos precedentes. Los procesos DARMA de Jacobs y Lewis (1978a,b, 1983) ofrecen una alternativa para describir una serie temporal discreta. Sin embargo, estos procesos presentan algunas desventajas respecto a los modelos basados en el operador de refinamiento.

Una clase claramente más amplia de modelos de series temporales de valores enteros no negativos se basa en el operador de refinamiento, ' \circ ' (del inglés thinning) introducido por Steutel y Van Harn (1979). La idea consiste en reemplazar la multiplicación escalar

de los modelos ARMA estándar por dicho operador 'o'. McKenzie (1985) introduce el modelo AR(1) para variables aleatorias discretas con distribución marginal de Poisson, geométrica, binomial negativa o binomial. Dicho modelo es una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición dependen de un número pequeño de parámetros. Obtiene dichas probabilidades cuando el proceso tiene distribución marginal de Poisson. Hace, también, algunas consideraciones para generalizar el proceso al caso no estacionario. McKenzie (1986) obtiene de forma explícita la probabilidad de transición cuando el proceso tiene distribución marginal geométrica y considera la estructura de los modelos de Lawrance y Lewis (1980) para describir los análogos discretos, sustituyendo la multiplicación escalar por el operador de refinamiento y la distribución exponencial por la geométrica.

Al-Osh y Alzaid (1987) introducen, independientemente, el modelo AR(1) discreto denominándolo INAR(1). Obtienen, para dicho modelo, la función de autocovarianza, la función de autocorrelación y los estimadores de los parámetros con los métodos de Yule-Walker, mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional cuando el proceso tiene distribución marginal de Poisson. Alzaid y Al-Osh (1988a) establecen que el proceso INAR(1) puede verse como un proceso de ramificación del tipo de Galton-Watson con Inmigración suponiendo que los descendientes en este proceso tienen distribución de Bernoulli. Demuestran que, si el proceso es estacionario, se puede elegir cualquier miembro de la clase de distribuciones discretas autodescomponibles como distribución marginal del proceso INAR(1). Presentan algunas de las distribuciones que pertenecen a la clase discreta autodescomponible, entre las cuales están la de Poisson, binomial negativa y geométrica. Analizan el proceso INAR(1) con marginal geométrica, siendo éste el análogo discreto al de Lawrance y Lewis (1980) para el caso exponencial.

Aly y Bouzar (1994a) introducen una clase de procesos Galton-Watson con Inmigración (GWSI), que contiene al proceso INAR(1); estudian algunas propiedades de este proceso con marginal geométrica y binomial negativa. Por otra parte, Aly y Bouzar (1994b) extienden algunos resultados obtenidos para el modelo GWSI a un modelo más general con estructura ARMA e introducen una generalización del operador de refinamiento y lo utilizan para generalizar los resultados de McKenzie (1988b). Puesto que la distribución de probabilidad de Euler pertenece a la clase de distribuciones discretas autodescomponibles, Alzaid y Benkherouf (1995) la utilizan como distribución marginal del proceso INAR(1) y demuestran que, en este caso, el proceso INAR(1) no es invertible en el tiempo. En años más recientes, se han estudiado algunas propiedades asintóticas del proceso INAR(1): Park y Oh (1997) demuestran que la media muestral y la función de autocovarianza muestral del proceso INAR(1) con marginal de Poisson tienen distribución asintóticamente normal.

Para dar una mayor flexibilidad a la modelación de series temporales de valores enteros no negativos, McKenzie (1988b) define y estudia el proceso de Poisson MA(q) basado en el operador ' \circ '. Alzaid y Al-Osh (1988b) presentan el modelo de medias móviles de valores enteros no negativos de primer orden, INMA(1), siendo éste una generalización del proceso de Poisson MA(1) y similar en forma al proceso MA(1) estándar, reemplazando la multiplicación escalar por el operador ' \circ ', en la misma forma que se hizo para el proceso INAR(1). Por otra parte, introducen el proceso INMA(q). McCormick y Park (1997) demuestran que la media muestral y la función de autocovarianza muestral del proceso INMA(q) con distribución marginal de Poisson, introducido por Al-Osh y Alzaid (1988b), tienen distribución asintóticamente normal; este mismo resultado lo obtienen Park y Kim (1997) introduciendo una variante del proceso INMA(q); éstos últimos también demuestran que este nuevo modelo es invertible en el tiempo. Todos estos resultados asintóticos se han obtenido suponiendo que el proceso

tiene distribución marginal de Poisson.

Al-Osh y Alzaid (1990) introducen el proceso $\text{INAR}(p)$ suponiendo que $(\alpha_1 \circ X_t, \alpha_2 \circ X_t, \dots, \alpha_p \circ X_t/X_t)$ tiene distribución multinomial con parámetros $(X_t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Obtienen la distribución límite de dicho proceso y la función de autocovarianza la cual tiene la misma estructura que la del proceso $\text{ARMA}(p, p - 1)$ estándar. Du y Li (1991) introducen una variante al proceso $\text{INAR}(p)$ definido por Al-Osh y Alzaid (1990). La definición de Du y Li implica que la estructura de autocorrelación del proceso $\text{INAR}(p)$ es idéntica a la del proceso $\text{AR}(p)$ estándar y demuestran que este proceso existe, es único y estacionario bajo ciertas condiciones. Discuten la estimación de parámetros del tipo Yule-Walker y mínimos cuadrados condicionales y obtienen el predictor óptimo mínimo cuadrático. Gauthier y Latour (1994) introducen una generalización del operador de refinamiento; utilizan este nuevo operador para definir el proceso $\text{GINAR}(p)$ (proceso $\text{INAR}(p)$ generalizado) y obtienen la función de autocovarianza y autocorrelación para este proceso. Dion, Gauthier y Latour (1995) demuestran que el modelo $\text{GINAR}(p)$ puede verse como un modelo de ramificación múltiple con inmigración. Latour (1998) demuestra que el modelo $\text{INAR}(p)$ definido por Du y Li (1991) puede ser representado por un modelo $\text{AR}(p)$; utiliza el ajuste de un modelo $\text{AR}(p)$ para identificar el modelo $\text{INAR}(p)$ que propone para la serie de datos discretos del número de convulsiones epilépticas.

McKenzie (1988b) introduce el proceso mixto de Poisson $\text{ARMA}(1, q)$ el cual se construye uniendo dos procesos, el $\text{INAR}(1)$ y el $\text{INMA}(q)$ a través de un proceso de innovación común. Obtiene de forma explícita la función de autocorrelación. Aly y Bouzar (1994b) generalizan los resultados de McKenzie (1988b), utilizando el operador de refinamiento generalizado.

A continuación se presentan con más detalle algunos de los modelos referidos, además, se introduce una variante del modelo de Poisson ARMA(1,q) definido por McKenzie (1988b) y se define el proceso INMAG(q), obteniendo algunas propiedades básicas para este último proceso.

1.2. Modelos DARMA

Como se vio en la sección anterior los modelos DARMA han sido discutidos por Jacobs y Lewis (1978a,b, 1983). En este apartado se presentan algunas propiedades de los procesos DARMA(1, q + 1), DARMA(p, q + 1) y NDARMA(p, q).

Para especificar el modelo DARMA(1, q + 1) se necesitan las siguientes definiciones:

Sea $\{Y_t\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) que toman valores en un conjunto $E \subset \mathbb{Z}$ con $P(Y_t = i) = \pi(i)$ para todo $i \in E$; por otra parte, sean $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ sucesiones independientes de variables aleatorias binarias i.i.d. con $P(U_t = 1) = \beta \in [0, 1]$ y $P(V_t = 1) = \tau \in [0, 1)$, y sea, por último, $\{D_t\}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toman valores $0, 1, 2, \dots, q$ con función de probabilidad F , donde q es un entero fijo no negativo. El proceso DARMA(1, q + 1), $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ se obtiene de acuerdo al modelo lineal probabilístico:

$$X_t = U_t Y_{t-D_t} + (1 - U_t) Z_{t-(q+1)} \quad \text{para } t = 1, 2, \dots$$

donde

$$Z_t = V_t Z_{t-1} + (1 - V_t) Y_t \quad \text{para } t = -q, -q + 1, \dots$$

El proceso $\{Z_t, t = -q, -q + 1, \dots\}$ es un proceso DAR(1), es decir, autorregresivo discreto de primer orden y puede describirse como sigue: Z_t es igual a Z_{t-1} con probabilidad τ y es igual a Y_t con probabilidad $1 - \tau$. El proceso $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ puede

ser descrito de forma similar: X_t es uno de los valores Y_t, \dots, Y_{t-q} con probabilidad β y es igual a $Z_{t-(q+1)}$ con probabilidad $1 - \beta$.

Por sustituciones sucesivas Z_t puede expandirse hacia atrás hasta el valor inicial $Z_{-(q+1)}$ obteniendo $Z_t = Y_{t-j}$ con probabilidad $\tau^j(1 - \tau)$ para $0 \leq j \leq q + t$ y $Z_t = Z_{-(q+1)}$ con probabilidad τ^{q+t+1} ; es decir, Z_t es una mezcla de $Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-q}$ y $Z_{-(q+1)}$. Ahora, suponiendo que $Z_{-(q+1)}$ tiene distribución π y es independiente de $\{Y_t, t \geq -q\}$, $\{U_t\}$, $\{V_t\}$ y $\{D_t\}$ se demuestra que $\{X_t, t \geq 1\}$ tiene distribución marginal π , es decir, X_t tiene la misma distribución que Y_t . Con estas condiciones, el proceso DARMA(1, $q + 1$) es estacionario pero, en general no es Markoviano. Por ejemplo, el modelo DAR(1), $\{Z_t\}$, es una cadena de Markov, mientras que el proceso DMA(q), $X_t = Y_{t-D_t}$, no es Markoviano. La función de autocorrelación está determinada por los parámetros τ , β , la función de probabilidad F y es independiente de la distribución marginal del proceso:

$$\rho(h) = \begin{cases} \beta^2 \sum_{i=0}^{q-h} F(i)F(i+h) + \beta(1-\beta) \left((1-\tau)\tau^{-(q+1-h)} \sum_{i=q+1-h}^q \tau^i F(i) \right) & 0 \leq h \leq q \\ +(1-\beta)^2 \tau^h, & 1 \leq h \leq q \\ \tau^{h-q} \rho(q), & h > q. \end{cases}$$

Se observa que $0 \leq \rho(h) \leq 1$ y para $h > q$, $\rho(h)$ decrece exponencialmente si $0 < \tau < 1$ con un comportamiento similar al de un proceso ARMA(1, q) estándar.

Finalmente, Jacobs y Lewis introducen el modelo binario DARMA(1,1), que se define como:

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{con probabilidad } \beta \\ Z_{t-1} & \text{con probabilidad } (1 - \beta) \end{cases}$$

y

$$Z_t = \begin{cases} Z_{t-1} & \text{con probabilidad } \tau \\ Y_t & \text{con probabilidad } (1 - \tau), \end{cases}$$

donde $\{Y_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes que toman valores 0 y 1 con distribución común π . El proceso DARMA(1,1) no es Markoviano. Por otra parte, Jacobs y Lewis (1978b) presentan algunas propiedades asintóticas del proceso DARMA(1, $q+1$), demuestran que la media muestral tiene distribución asintóticamente normal y estudian el comportamiento asintótico del test de bondad de ajuste de la χ^2 para la distribución marginal del proceso DARMA(1, $q+1$), es decir, para contrastar la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución marginal especificada.

Jacobs y Lewis (1983) presentan los modelos DARMA($p, q+1$) y NDARMA(p, q) ("nuevo" modelo DARMA) generalizando todos los modelos precedentes presentados por ellos mismos. Obtienen la función de autocorrelación en ambos procesos, que siempre son no negativas, y consideran su estimación, en particular para el proceso DAR(1).

Los modelos DARMA de Jacobs y Lewis pueden verse como los análogos discretos a los modelos ARMA estándar, reemplazando la combinación lineal del caso de valores continuos por el modelo lineal probabilístico. Sin embargo, dicha analogía se consigue de una manera artificial y sólo desde el punto de vista teórico. El comportamiento en la práctica de estos modelos no se corresponde con el de sus análogos continuos. Por ejemplo, en el modelo DARMA(1, $q+1$), $Z_{t-(q+1)}$ contiene toda la información disponible acerca del pasado, ya que, Y_{t-D_t} es una variable aleatoria independiente de la historia del proceso. Si este último valor es tomado, caso que sucede con probabi-

lidad β , se pierde por completo la información del proceso. Por lo tanto, los modelos DARMA pueden ser cuestionables para describir series temporales discretas.

1.3. Modelos basados en el operador de refinamiento

En esta sección se presentan los modelos de series temporales discretas basados en el operador de refinamiento. El esquema de esta sección es el siguiente, en el apartado 1.3.1, se define y se presentan algunas propiedades del operador de refinamiento de Steutel y Van Harn (1979). En el apartado 1.3.2, se presenta el proceso INAR(1) discutido por McKenzie (1985, 1986, 1987), Al-Osh y Alzaid (1987), Alzaid y Al-Osh (1988a), Aly y Bouzar (1994a,b), Alzaid y Benkherouf (1995) y Park y Oh (1997). En el apartado 1.3.3, se presenta el proceso INAR(p) estudiado por Al-Osh y Alzaid (1990), Du y Li (1991), Dion, Gauthier y Latour (1995) y Latour (1998); en este apartado se obtiene, además, el coeficiente de asimetría para el ruido del proceso estacionario AR(1) propuesto por Latour (1998). En el apartado 1.3.4, se presenta el proceso INMA(1) estudiado por McKenzie (1988b) y Alzaid y Al-Osh (1988b). En el apartado 1.3.5, se presenta el proceso INMA(q) discutido por McKenzie (1988b), Alzaid y Al-Osh (1988b), McCormick y Park (1997) y Park y Kim (1997). Por último, en el apartado 1.3.6, se estudia el proceso mixto INARMA(1, q), se obtiene la media, la varianza y la función de autocovarianza, generalizando algunos resultados obtenidos por McKenzie (1988b) para el proceso de Poisson ARMA(1, q).

1.3.1. Operador de refinamiento, 'o'

Para modelar series temporales de valores enteros no negativos de forma análoga a los modelos ARMA estándar se ha propuesto utilizar el operador de refinamiento

to, ' \circ ' (también conocido como refinamiento binomial). A continuación se define dicho operador.

Definición 1.1. (Operador ' \circ ' de Steutel y Van Harn (1979))

Sea $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas con media α , independientes de X , una variable aleatoria de valores enteros no negativos. El operador ' \circ ' de Steutel y Van Harn está definido por:

$$\alpha \circ X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X Y_i & \text{para } X > 0 \\ 0 & \text{para } X = 0. \end{cases}$$

De la definición del operador ' \circ ' se deducen las siguientes propiedades:

Sean X e Y variables aleatorias de valores enteros no negativos, entonces para $\alpha \in [0, 1]$ y $\beta \in [0, 1]$ se tiene que:

1. $0 \circ X = 0$
2. $1 \circ X = X$
3. $E[\alpha \circ X] = \alpha E[X]$
4. $E[(\alpha \circ X)^2] = \alpha(1 - \alpha)E[X] + \alpha^2 E[(X)^2]$
5. $\alpha \circ (X + Y) = \alpha \circ X + \alpha \circ Y$
6. $E[(\alpha \circ X - \alpha \circ Y)^2] = \alpha(1 - \alpha)E[|X - Y|] + \alpha^2 E[(X - Y)^2]$
7. $\beta \circ (\alpha \circ X) \stackrel{d}{=} (\beta\alpha) \circ X$

donde la notación $X \stackrel{d}{=} Y$ se utiliza para indicar que X tiene la misma distribución que Y .

8. Si las variables Y_i incluidas en $\alpha \circ X$ son independientes de las variables Y_j incluidas en $\beta \circ Y$, entonces:

$$E[(\alpha \circ X)(\beta \circ Y)] = \alpha\beta E[XY].$$

Aly y Bouzar (1994b) generalizan la definición del operador de refinamiento, de la siguiente forma:

$$A_{\alpha,\theta} \circ X = \sum_{i=1}^X Y_i W_i$$

donde $\{Y_i, i \geq 1\}$ y $\{W_i, i \geq 1\}$ son dos sucesiones independientes de variables aleatorias i.i.d., independientes de X , tal que Y_i tiene distribución Bernoulli (α) y W_i tiene distribución T-geométrica ($\bar{\alpha}\theta$) ($\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ y T-geométrica: geométrica truncada en cero).

Latour (1998) también introduce una variante del operador de refinamiento ' \circ' ', concretamente, considera que las Y_i incluidas en el operador de refinamiento son variables aleatorias de valores enteros no negativos con media α_i y varianza β_i .

A continuación se presentan algunas propiedades de los procesos autorregresivos de valores enteros no negativos de orden p , INAR(p), medias móviles de orden q , INMA(q) y procesos mixtos INARMA($1, q$), estos procesos son los análogos a los procesos AR(p), MA(q) y ARMA($1, q$) estándar, respectivamente, reemplazando la multiplicación escalar por el operador de refinamiento. Por último se estudia el proceso INMAG(q). El objetivo de presentar únicamente estos cuatro modelos, es que éstos serán los utilizados en los siguientes capítulos.

1.3.2. Procesos autorregresivos de valores enteros no negativos de primer orden, INAR(1)

En este apartado se presenta el proceso autorregresivo de valores enteros no negativos de primer orden, INAR(1), como modelo para una sucesión estacionaria de variables aleatorias dependientes. Este modelo es apropiado para procesos de conteo donde los elementos del proceso en el tiempo t son los sobrevivientes del proceso en el tiempo $t - 1$ más el resultado de un proceso de innovación no negativo. El proceso INAR(1), $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, está definido por:

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.1)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias de valores enteros no negativos i.i.d., con media μ_ϵ y varianza σ_ϵ^2 y

$$\alpha \circ X_{t-1} = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} Y_i$$

donde las Y_i son variables aleatorias de Bernoulli, con $P(Y_i = 1) = \alpha$ e independientes de X_t y ϵ_t .

Una realización X_t del proceso (1.1) está formada por dos componentes:

1. Los elementos sobrevivientes de X_{t-1} , cada uno con probabilidad de sobrevivir α .
2. Los elementos que entran al sistema en el tiempo t (el término de innovación ϵ_t).

Alzaid y Al-Osh (1988a) establecen que el proceso INAR(1) definido por la ecuación (1.1) puede verse como un proceso de ramificación Galton-Watson con inmigración.

Si $E[\epsilon_t] = \mu_\epsilon < \infty$, $V[\epsilon_t] = \sigma_\epsilon^2 < \infty$ y $\alpha \in [0, 1)$, entonces el proceso INAR(1) es estacionario y la media, la varianza y la función de autocovarianza tienen las siguientes expresiones

$$E[X_t] = \frac{\mu_\epsilon}{1 - \alpha},$$

$$V[X_t] = \frac{\alpha\mu_\epsilon + \sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} = \gamma(0)$$

y

$$\gamma(h) = \alpha^h \gamma(0)$$

respectivamente, siendo $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$, h entero no negativo y $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

La función de autocorrelación está dada por:

$$\rho(h) = \alpha^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

La función de autocorrelación no se anula, si bien las correlaciones son menos intensas a medida que aumentan los desfases temporales, es decir, que al hacer la representación gráfica de la función de autocorrelación, ésta tendrá un comportamiento exponencialmente amortiguado hacia cero con todos los valores no negativos, ya que $\alpha \geq 0$.

Podemos observar que el proceso INAR(1) no sólo es similar en forma al proceso AR(1) estándar sino que tiene la misma estructura de autocorrelación. Por otra parte, el proceso INAR(1) puede verse como una cadena de Markov.

Vale la pena volver a mencionar aquí que el proceso INAR(1) tiene algunas ventajas sobre el proceso DAR(1) de Jacobs y Lewis (1978a) definido por:

$$X_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{con probabilidad } \tau \\ Y_t & \text{con probabilidad } (1 - \tau), \end{cases}$$

donde $\{Y_t\}$ es una sucesión de variables enteras no negativas i.i.d. Se observa que, el proceso DAR(1) frecuentemente sufre de la desventaja de que $X_t = X_{t-1}$ y que $P(X_t = j/X_{t-1} = i)$ no depende de i cuando $i \neq j$. Por otra parte, si $X_t = Y_t$, entonces la memoria del proceso antes del tiempo t se pierde para siempre, en contraste con lo que sucede en el INAR(1).

Distribución marginal del proceso INAR(1)

Por la definición del operador de refinamiento 'o' las variables aleatorias Y_i tienen distribución de Bernoulli con función generatriz de probabilidad (F.G.P.), $G(s)$, dada por:

$$G(s) = 1 - \alpha + \alpha s \quad |s| \leq 1,$$

entonces, la F.G.P. de X_t , $G_{X_t}(s)$, en el proceso INAR(1) tiene la siguiente forma:

$$G_{X_t}(s) = G_\epsilon(s)G_{X_{t-1}}(1 - \alpha + \alpha s). \quad (1.2)$$

donde $G_\epsilon(s)$ es la F.G.P. de ϵ_t . De la ecuación (1.2) se observa que la distribución marginal del proceso INAR(1) está relacionada con la definición de distribución discreta autodescomponible en el conjunto de los enteros no negativos.

Se dice que la distribución de una variable aleatoria pertenece a la clase de distribuciones discretas autodescomponibles si su F.G.P. satisface:

$$G(s) = G(1 - \alpha + \alpha s)G_\alpha(s), \quad |s| \leq 1, \quad \text{para todo } \alpha \in (0, 1) \quad (1.3)$$

siendo $G_\alpha(s)$ una función generatriz de probabilidad. Por lo tanto, si suponemos que el proceso INAR(1) es estacionario, podemos elegir cualquier miembro de la clase de distribuciones discretas autodescomponibles como distribución marginal de X_t . Sin embargo, la distribución marginal del proceso INAR(1) no debe ser necesariamente,

una distribución discreta autodescomponible. Esto se sigue del hecho de que, para la marginal del proceso INAR(1), es suficiente que la ecuación (1.2) sea válida para un valor fijo de α en el intervalo $(0,1)$, mientras que la autodescomponibilidad requiere que la ecuación (1.3) se cumpla para todo $\alpha \in (0, 1)$. Algunas de las distribuciones que pertenecen a la clase de distribuciones discretas autodescomponibles son: la de Poisson, binomial negativa y geométrica, entre otras.

Por otra parte, si $\alpha \in [0, 1)$ la distribución marginal del modelo (1.1) puede expresarse en términos de la sucesión de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ como:

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-i},$$

entonces, la distribución marginal del proceso INAR(1) está determinada por la distribución de ϵ_t . Por ejemplo, si ϵ_t tiene distribución de Poisson entonces X_t tendrá distribución de Poisson y el recíproco también es cierto. Por otra parte, si la media de la distribución de Poisson es λ , entonces la matriz de probabilidad de transición de la cadena de Markov correspondiente, $P = (p_{ij})_{i,j=0,1,2,\dots}$ siendo $p_{ij} = P(X_t = j / X_{t-1} = i)$, está dada por:

$$p_{ij} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{j} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} \lambda^{j-k} / (j-k)!$$

Las probabilidades de transición p_{ij} son funciones de los parámetros α y λ que, por lo tanto, son los únicos parámetros que necesitan ser estimados.

Ahora, consideremos el proceso INAR(1) con marginal geométrica de parámetro ν , es decir,

$$P(X_t = k) = \nu(1 - \nu)^k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso, la F.G.P. de ϵ_t está dada por:

$$G_\epsilon(s) = \alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - (1 - \nu)s}$$

por lo tanto, la distribución de ϵ_t es una mixtura de dos variables aleatorias, una con distribución degenerada en cero con probabilidad α y la otra con distribución geométrica con probabilidad $(1 - \alpha)$. Así, el proceso INAR(1) puede escribirse de forma alternativa como:

$$X_t = \begin{cases} \alpha \circ X_{t-1} & \text{con probabilidad } \alpha \\ \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon'_t & \text{con probabilidad } (1 - \alpha) \end{cases}$$

donde $\{\epsilon'_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con función de probabilidad geométrica:

$$P(\epsilon'_t = k) = \nu(1 - \nu)^k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La representación del proceso INAR(1) con marginal geométrica es el análogo discreto al modelo de Lawrance y Lewis (1980) reemplazando la multiplicación escalar por el operador de refinamiento ' \circ ' y la distribución exponencial por la geométrica.

La probabilidad de transición $p_{ij} = P(X_t = j / X_{t-1} = i)$ está dada por:

$$p_{ij} = \begin{cases} (1 - \alpha)\nu(1 - \nu)^{j-i} \sum_{k=0}^j \binom{i}{k} \alpha^k [(1 - \alpha)(1 - \nu)]^{i-k} \\ \quad + \binom{i}{j} \alpha^{j+1} (1 - \alpha)^{i-j}, & j = 0, 1, 2, \dots, i \\ (1 - \alpha)\nu(1 - \nu)^{j-i} (\alpha + (1 - \alpha)(1 - \nu))^i, & j = i + 1, i + 2, \dots \end{cases}$$

McKenzie (1985) considera, también, la distribución binomial negativa como marginal del proceso INAR(1). Por último, Alzaid y Benkherouf (1995) consideran la distribución de Euler como distribución marginal de dicho proceso; esta última distribución también pertenece a la clase de distribuciones discretas autodescomponibles.

1.3.3. Procesos autorregresivos de valores enteros no negativos de orden p , INAR(p)

El proceso INAR(1) definido por la ecuación (1.1) es apropiado para modelar procesos de ramificación con inmigración. Sin embargo, las realizaciones de algunos procesos de conteo $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ podrían estar relacionadas no sólo con el pasado inmediato X_{t-1} , sino también con realizaciones previas del proceso, $\{X_{t-i}, i = 1, 2, 3, \dots, p\}$ para alguna constante p . En consecuencia, para modelizar tales procesos y tener en consideración estas realizaciones previas, surge la necesidad de extender el proceso INAR(1) a un proceso autorregresivo de orden p .

El proceso INAR(p) definido por Alzaid y Al-Osh (1990) es el siguiente:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i} + \epsilon_t \quad \text{para } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.4)$$

donde $\{\epsilon_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de valores enteros no negativos con cierta distribución discreta, con media $\mu_\epsilon < \infty$ y varianza $\sigma_\epsilon^2 < \infty$, α_i ($i = 1, 2, \dots, p$) son constantes no negativas tal que $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ y la distribución del vector $((\alpha_1 \circ X_t, \alpha_2 \circ X_t, \dots, \alpha_p \circ X_t)/X_t = x)$ es multinomial con

parámetros $(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $(\text{MB}(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))$ y es independiente de la historia pasada del proceso. Es decir, dada $X_t = x$ la variable aleatoria $\alpha_i \circ X_t$ es independiente de X_{t-k} y sus sobrevivientes $\alpha_j \circ X_{t-k}$ para $i, j = 1, 2, \dots, p$ y $k > 0$.

Podemos señalar que el proceso $\text{INAR}(p)$ definido por Alzaid y Al-Osh es similar, en forma, al proceso $\text{AR}(p)$ estándar, sin embargo, la dependencia a través del tiempo del operador ' \circ ' en la ecuación (1.4) hace que este proceso difiera del proceso $\text{AR}(p)$ estándar. Para explicar este punto consideremos por simplicidad el caso $p = 2$, esto es:

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \alpha_2 \circ X_{t-2} + \epsilon_t.$$

En el proceso $\text{AR}(2)$ clásico, X_t se obtiene por una multiplicación directa de las constantes α_1 , y α_2 por X_{t-1} y X_{t-2} , respectivamente, en el tiempo t e independientemente de la estructura estocástica previa. Este no es el caso para el proceso $\text{INAR}(2)$: para este proceso las variables aleatorias $\alpha_1 \circ X_{t-2}$ y $\alpha_2 \circ X_{t-2}$ son dependientes y se obtienen a la vez, aunque parecen ejecutadas en tiempos diferentes, ya que son elementos de X_{t-1} y X_t , respectivamente. La estructura del proceso $\text{INAR}(2)$ propuesto por Alzaid y Al-Osh (1990) es quizá más comprensible cuando se hace una simulación de dicho proceso. Supongamos que se han observado X_1 y X_2 , entonces el primer paso es elegir simultáneamente $\alpha_1 \circ X_1$ y $\alpha_2 \circ X_1$ de una distribución $\text{MB}(X_1, \alpha_1, \alpha_2)$ y, por otro lado, $\alpha_1 \circ X_2$ y $\alpha_2 \circ X_2$ de una distribución $\text{MB}(X_2, \alpha_1, \alpha_2)$. Por lo tanto, $X_3 = \alpha_1 \circ X_2 + \alpha_2 \circ X_1 + \epsilon_3$ y $\alpha_2 \circ X_2$ está disponible para ser utilizada en la derivación de X_4 . En el segundo paso, se obtiene $\alpha_1 \circ X_3$ y $\alpha_2 \circ X_3$ de una distribución $\text{MB}(X_3, \alpha_1, \alpha_2)$ y, entonces, $X_4 = \alpha_1 \circ X_3 + \alpha_2 \circ X_2 + \epsilon_4$ y $\alpha_2 \circ X_3$ está disponible para ser utilizada en la derivación de X_5 . Así, sucesivamente, se genera la muestra (X_1, X_2, \dots, X_n) del proceso $\text{INAR}(2)$.

A continuación se dan las condiciones de estacionariedad y se presenta la distribu-

ción límite del proceso INAR(p). Para ello, se define la sucesión de pesos $\{w_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ tal que:

$$w_0 = 1$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \alpha_i w_{j-i}.$$

Ahora, si las raíces del polinomio

$$Z^p - \alpha_1 Z^{p-1} - \dots - \alpha_{p-1} Z - \alpha_p = 0, \quad \text{con } \alpha_p \neq 0 \quad (1.5)$$

tienen módulo menor que 1, entonces existe λ , $0 < \lambda < 1$ tal que

$$0 \leq w_j \leq c\lambda^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

para alguna constante c .

Supongamos que las raíces de la ecuación (1.5) tienen módulo menor que 1 y $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)r_j < \infty$ con $r_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} P(\epsilon_t = k)$, entonces el proceso INAR(p) con parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tal que $\alpha_p > 0$ es estacionario y tiene distribución límite con F.G.P. dada por:

$$G(s) = \prod_{i=0}^{\infty} G_\epsilon(1 - w_i + w_i s)$$

donde $|s| \leq 1$, $G(s)$ y $G_\epsilon(z)$ denotan las F.G.P. de X_t y ϵ_t , respectivamente.

Bajo la suposición de estacionariedad la media del proceso INAR(p) está dada por:

$$E[X_t] = \frac{\mu_\epsilon}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}$$

y la función de autocovarianza para un retardo $h \geq 0$ está definida por:

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma(h-i) + \sum_{i=h+1}^p \mu(h-i, \alpha_i) + \delta_h(0) \sigma_\epsilon^2$$

donde $\delta_h(0) = 1$, si $h = 0$ y cero en otro caso, y

$$\mu(h-i, \alpha_i) = \begin{cases} 0, & h \geq i \\ \sum_{j=1}^{i+1-h} \alpha_j \mu(j+h-i, \alpha_i) + \alpha_i (\delta_i(i-h) - \alpha_{i-h}) \mu_X, & h < i, \end{cases}$$

siendo $\mu_X = E[X_i]$.

Se observa que, a diferencia del proceso INAR(1), la similitud entre el proceso AR(p) estándar y el INAR(p) no se extiende más allá de la forma. En concreto, la función de autocovarianza del proceso INAR(p) tiene la misma estructura que la de un proceso ARMA($p, p-1$) estándar.

Du y Li (1991) introducen una variante del proceso INAR(p) definido por Al-Osh y Alzaid (1990), concretamente, consideran que las componentes del vector $(\alpha_1 \circ X_t, \alpha_2 \circ X_t, \dots, \alpha_p \circ X_t/X_t)$ son independientes, es decir, la definición de Du y Li es equivalente a la del proceso AR(p) estándar, reemplazando la multiplicación escalar por el operador de refinamiento. Por lo tanto, la función de autocovarianza tiene la misma estructura que la de dicho proceso, es decir,

$$\gamma(h) = \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) + \dots + \alpha_p \gamma(h-p)$$

o

$$\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) + \dots + \alpha_p \rho(h-p).$$

Este resultado lo utiliza Latour (1998) para demostrar que el proceso INAR(p) definido por Du y Li puede escribirse de forma alternativa como un proceso AR(p) dado por:

$$X_t - \mu_X = \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_{t-i} - \mu_X) + e_t$$

donde $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma_e^2 = \mu_X \sum_{i=1}^p \alpha_i (1 - \alpha_i) + \sigma_e^2$. A continuación se demuestra, además, que el coeficiente de asimetría de e_t es mayor que cero para un proceso INAR(1) con marginal de Poisson.

Para obtener el coeficiente de asimetría de e_t consideremos por simplicidad el modelo estacionario INAR(1) y supongamos que e_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ ; por otra parte, consideremos el modelo estacionario AR(1), $(X_t = \alpha X_{t-1} + \lambda + e_t)$ propuesto por Latour.

Es fácil verificar que las funciones generatrices de momentos para los procesos INAR(1) y AR(1) están dadas por:

$$M_{X_t}(r) = e^{-\frac{\lambda(1-e^r)}{1-\alpha}} \quad \text{para } r \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

y

$$M_{X_t}(r) = e^{\lambda r} M_{X_{t-1}}(\alpha r) M_{e_t}(r) \quad (1.7)$$

respectivamente, donde $M_{e_t}(r)$ es la función generatriz de momentos de e_t . Ahora, igualando las ecuaciones (1.6) y (1.7) y utilizando la propiedad de estacionariedad del modelo AR(1), se tiene:

$$M_{e_t}(r) = e^{-\frac{\lambda}{1-\alpha} (e^{\alpha r} - e^r + (1-\alpha)r)}$$

Calculando la tercera derivada de $M_{e_t}(r)$ con respecto a r y evaluandola en $r = 0$, se tiene:

$$M_{e_t}'''(0) = \frac{\lambda(1 - \alpha^3)}{1 - \alpha}$$

obteniéndose, entonces, que el coeficiente de asimetría (η_3) está dado por:

$$\eta_3 = \frac{1 - \alpha^3}{(1 - \alpha^2)\sqrt{\lambda(1 + \alpha)}}$$

Por lo tanto $\eta_3 > 0$ y, en consecuencia, e_t tendrá una distribución asimétrica positiva, propiedad que no será compatible con la hipótesis habitual de normalidad. Sin embargo, la utilidad práctica del modelo propuesto por Latour es la de utilizar las técnicas de ajuste para los modelos $AR(p)$ estándar, para proponer el modelo $INAR(p)$ correspondiente.

1.3.4. Procesos de medias móviles de valores enteros no negativos de primer orden, INMA(1)

En esta sección se presenta el proceso de medias móviles de valores enteros no negativos de primer orden, INMA(1). Este proceso está definido por:

$$X_t = \epsilon_t + \beta \circ \epsilon_{t-1} \quad (1.8)$$

donde $\beta \in [0, 1]$ y $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas i.i.d. con media $\mu_\epsilon < \infty$ y varianza $\sigma_\epsilon^2 < \infty$. El modelo INMA(1) se puede interpretar de la siguiente forma: el número de elementos en el tiempo t , X_t , está formado por dos componentes:

1. Los sobrevivientes de las innovaciones que llegaron en el tiempo $t - 1$, $\beta \circ \epsilon_{t-1}$.

2. Las innovaciones que llegaron en el tiempo t , ϵ_t .

Como las variables aleatorias $\beta \circ \epsilon_{t-i}$ y $\beta \circ \epsilon_{t-j}$ son independientes para $i \neq j$, entonces el proceso INMA(1) es estacionario y la media, la varianza y la función de autocovarianza están dadas por:

$$E[X_t] = (1 + \beta)\mu_\epsilon,$$

$$V[X_t] = \beta(1 - \beta)\mu_\epsilon + (1 + \beta^2)\sigma_\epsilon^2,$$

$$\gamma(h) = \begin{cases} \beta\sigma_\epsilon^2 & \text{para } h = 1 \\ 0 & \text{para } h > 1 \end{cases}$$

respectivamente, y la función de autocorrelación por:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\beta\sigma_\epsilon^2}{\beta(1 - \beta)\mu_\epsilon + (1 + \beta^2)\sigma_\epsilon^2} & \text{para } h = 1 \\ 0 & \text{para } h > 1 \end{cases}$$

La función de autocorrelación se anula para retardos superiores a uno (el orden del modelo), por lo tanto, el modelo INMA(1) tiene memoria de un único período; esto es, cualquier valor X_t está correlacionado con X_{t-1} y X_{t+1} , pero no lo está con ningún otro valor de la serie, por lo que los sucesos ocurridos en períodos previos al inmediato anterior no tienen efecto alguno sobre lo que ocurre en el momento presente. Este comportamiento es totalmente análogo al de un proceso MA(1) estándar.

La estructura de dependencia del proceso $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ no es Markoviana en contraste con el proceso INAR(1). La F.G.P. de X_t es de la forma:

$$G(s) = G_\epsilon(1 - \beta + \beta s)G_\epsilon(s), \quad |s| \leq 1. \quad (1.9)$$

siendo $G_\epsilon(s)$ la F.G.P. de ϵ_t para todo t . Por otra parte, la F.G.P. conjunta de (X_1, X_2, \dots, X_k) es:

$$G(s_1, s_2, \dots, s_k) = G_\epsilon(s_k) \prod_{i=1}^k G_\epsilon(s_{i-1}(1 - \beta + \beta s_i)) \quad (1.10)$$

para $|s_i| \leq 1$ y $s_0 = 1$.

Si $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución de Poisson de parámetro λ , entonces, por la ecuación (1.9), X_t tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda(1 + \beta)$ y la F.G.P. conjunta (1.10) es igual a:

$$G(s_1, s_2, \dots, s_k) = e^{-\lambda \left[k + \beta - (1 - \beta) \sum_{i=1}^k s_i - \beta(s_1 + s_k) - \beta \sum_{i=1}^{k-1} s_i s_{i+1} \right]} \quad (1.11)$$

Utilizando la última ecuación se puede demostrar que el número total de elementos que llegaron durante el intervalo de tiempo $[0, k]$, $T_k = \sum_{i=1}^k X_i$, se distribuye como la suma de dos variables aleatorias independientes, digamos, $Z + 2Y$, donde Z e Y tienen distribución de Poisson con media $\lambda[(1 - \beta)k + 2\beta]$ y $\lambda\beta(k - 1)$, respectivamente. En consecuencia T_k no tiene distribución de Poisson. Esto contrasta con lo que ocurre con el proceso MA(1) estándar, en el cual, si X_t tiene distribución Gaussiana, entonces, $\sum_{t=1}^k X_t$ tiene distribución Gaussiana. También, se demuestra que si ϵ_t tiene distribución de Poisson el proceso INMA(1) es invertible en el tiempo, es decir, (X_1, X_2, \dots, X_k) tiene la misma distribución que $(X_k, X_{k-1}, \dots, X_1)$ para todo $k \geq 2$.

1.3.5. Procesos de medias móviles de valores enteros no negativos de orden q , INMA(q)

Para dar una mayor flexibilidad a la modelación de series temporales de valores enteros no negativos, Al-Osh y Alzaid (1988b) presentan una extensión del proceso INMA(1). Para ello, consideran un proceso en el que la máxima vida para un elemento en el sistema es $(q+1)$ unidades de tiempo.

En primer lugar, consideran α_j ($j = 1, 2, \dots, q$) como la probabilidad que tiene un elemento de ϵ_t de aparecer por primera vez en el tiempo $t + j$ y ser un elemento de X_{t+j} , donde $\sum_{j=1}^q \alpha_j \leq 1$.

Se definen los coeficientes β_i ($i = 0, 1, 2, \dots, q$) como:

$$\beta_0 = 1,$$

$$\beta_i = \sum_{k=1}^i \alpha_k \beta_{i-k} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, q.$$

Los coeficientes β_i pueden interpretarse como la probabilidad que tiene un elemento de ϵ_t de ser un elemento de X_{t+i} (este elemento podría estar presente en el sistema durante instantes precedentes al $t + i$).

Por otra parte, sea $\{\mathbf{Y}_i^t = (Y_{i,1}^t, \dots, Y_{i,q}^t); \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión de vectores i.i.d. donde

$$Y_{i,j}^t = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento de } \epsilon_t \text{ está presente en el} \\ & \text{sistema en el tiempo } t + j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

entonces, $\beta_j = P(Y_{i,j}^t = 1)$ para $j = 1, 2, \dots, q$ y para todo $i = 1, 2, \dots$ y

$t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Se puede observar que:

$$P(Y_{i,k_1}^t = 1, Y_{i,k_2}^t = 1, \dots, Y_{i,k_j}^t = 1) = \prod_{l=1}^j \beta_{k_l - k_{l-1}} \quad (1.12)$$

siendo $k_0 = 0$.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, el proceso INMA(q) se define de la siguiente forma:

$$X_t = \beta_1 \circ \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \circ \epsilon_{t-q} + \epsilon_t \quad (1.13)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ_ϵ y varianza σ_ϵ^2 finitas y

$$\beta_j \circ \epsilon_t = \sum_{i=1}^{\epsilon_t} Y_{i,j}^t$$

que denota los sobrevivientes de ϵ_t en el tiempo $t + j$.

El modelo (1.13) es siempre estacionario y la media, varianza y función de autocovarianza están dadas por:

$$E[X_t] = \mu_\epsilon \sum_{j=0}^q \beta_j,$$

$$V[X_t] = \mu_\epsilon \sum_{j=1}^q \beta_j (1 - \beta_j) + \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2$$

y

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-h} [\beta_j(\beta_h - \beta_{h+j})\mu_\epsilon + \beta_j\beta_{h+j}\sigma_\epsilon^2] & h = 0, 1, \dots, q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

Por lo tanto, el modelo INMA(q) tiene la siguiente función de autocorrelación:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-h} [\beta_j(\beta_h - \beta_{h+j})\mu_\epsilon + \beta_j\beta_{h+j}\sigma_\epsilon^2]}{\mu_\epsilon \sum_{j=1}^q \beta_j(1 - \beta_j) + \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2} & 1 \leq h \leq q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

La función de autocorrelación se anula cuando el desfase temporal considerado es superior al orden del modelo, por lo tanto, la memoria del proceso de medias móviles de valores enteros no negativos es igual al orden del proceso; lo mismo que sucede en el proceso MA(q) estándar.

La F.G.P. de X_t es de la forma:

$$G(s) = \prod_{i=0}^q G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s) \quad (1.14)$$

Utilizando la ecuación (1.12) se demuestra que la F.G.P. conjunta de X_t, X_{t+1} está dada por:

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2) &= \prod_{i=1}^q G_\epsilon(1 - \beta_i(1 - s_2) - \beta_{i-1}(1 - \beta_1)(1 - s_1) - \beta_1\beta_{i-1}s_2(1 - s_1)) \\
&\quad G_\epsilon(s_2)G_\epsilon(1 - \beta_q + \beta_q s_1)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Si ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ , entonces, por la ecuación (1.14), X_t tendrá distribución de Poisson con parámetro $\lambda(1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots, \beta_q)$. También, de la ecuación (1.15) se observa que la F.G.P. conjunta de X_t, X_{t+1} es:

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2) &= e^{-\lambda \left[1 + \beta_q + \sum_{i=1}^q \beta_i + (1 - \beta_1) \sum_{i=1}^q \beta_{i-1} - s_1 s_2 \beta_1 \sum_{i=1}^q \beta_{i-1} \right]} \\
&\quad e^{\lambda(s_1 + s_2) \left[\beta_q + (1 - \beta_1) \sum_{i=1}^q \beta_i - 1 \right]}
\end{aligned}$$

Además, para $i \neq j$ las componentes del vector $(\beta_i \circ \epsilon_t, \beta_j \circ \epsilon_t / \epsilon_t)$ no son independientes, propiedad que será ampliamente utilizada para obtener las funciones de probabilidad conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$ y $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $h, l, p \geq 0$, en el proceso INMA(q).

McCormick y Park (1997) estudian el proceso INMA(q) con marginal de Poisson y observan que la estimación de los parámetros β_1, \dots, β_q y λ puede obtenerse a través de la función de autocovarianza estimada, es decir,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\gamma(1)}{\gamma(0) - \gamma(q)}, \\
\beta_h &= \gamma(h) \left(\gamma(0) - \sum_{t=0}^{h-1} \left(\frac{\gamma((q-t))}{\sum_{i=0}^t \beta_i} \right) \right)^{-1}, \quad h = 2, 3, \dots, q,
\end{aligned}$$

y

$$\lambda = \gamma(0) \left(\sum_{i=0}^q \beta_i \right)^{-1}.$$

También, demuestran que la función de autocovarianza muestral tiene distribución asintóticamente normal y que el proceso INMA(q) con marginal de Poisson es invertible en el tiempo.

Park y Kim (1997) introducen una modificación del modelo (1.13), en concreto, suponen que:

$$P \left(Y_{i,k_1}^t = 1, Y_{i,k_2}^t = 1, \dots, Y_{i,k_j}^t = 1 \right) = \beta_{k_j}$$

para $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_j \leq q$. Demuestran que si ϵ_t tiene distribución de Poisson, entonces la función de autocovarianza muestral y los estimadores de los parámetros de tipo Yule-Walker para este nuevo modelo tienen distribución asintóticamente normal.

1.3.6. Procesos mixtos de valores enteros no negativos, INARMA($1, q$)

En la literatura sobre modelos mixtos de series temporales de valores enteros no negativos se encuentran los modelos de Poisson ARMA($1, q$) introducidos por McKenzie (1988b), donde el proceso de innovación tiene distribución de Poisson y las operaciones con el operador de refinamiento son independientes y, además, son independientes de las operaciones correspondientes a tiempos anteriores. Es decir, la parte de medias móviles es análoga al proceso MA(q) estándar, reemplazando la multiplicación escalar por el operador de refinamiento. Aly y Bouzar (1994b) generalizan el proceso de Poisson ARMA($1, q$), para ello, utilizan una generalización del operador 'o'.

Sin embargo en lo que sigue, se propone considerar el siguiente modelo mixto INARMA(1, q):

Dicho modelo se construye uniendo dos procesos, el INAR(1) y el INMA(q) definido por Al-Osh y Alzaid (1988b) a través de un proceso de innovación común, $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Así, el proceso INARMA(1, q), $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, está definido por:

$$X_t = Z_{t-q} + \sum_{i=1}^q \beta_i \circ \epsilon_{t+1-i} \quad (1.16)$$

donde

$$Z_t = \alpha \circ Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.17)$$

y, una vez más, $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ_ϵ y varianza σ_ϵ^2 y los β_i para $i = 1, 2, \dots, q$ están definidos como en el proceso INMA(q) del apartado anterior. Recordemos que si $\alpha \in [0, 1)$, $\mu_\epsilon < \infty$ y $\sigma_\epsilon^2 < \infty$ se tiene que el proceso $\{Z_t\}$ es estacionario, por otra parte, el proceso INMA(q) definido por Al-Osh y Alzaid (1988b) siempre es estacionario, en consecuencia $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ también será estacionario.

En el modelo INARMA(1, q) propuesto las operaciones con el operador de refinamiento no son independientes, ya que, como se vio en el apartado 1.3.5, las componentes del vector $(\beta_i \circ \epsilon_t, \beta_j \circ \epsilon_t / \epsilon_t)$ no son independientes para $i \neq j$. Por lo tanto, el modelo INARMA(1, q) es diferente al de Poisson ARMA(1, q). Esta forma curiosa de construir el proceso INARMA(1, q) evita contar más de una vez un mismo elemento en el sistema, esta es la razón de dicha construcción. Por ejemplo, si consideramos el proceso INARMA(1,1) construido de forma análoga al proceso ARMA(1,1) estándar, es decir,

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \beta \circ \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

En este caso un elemento de ϵ_{t-1} puede entrar al sistema en el tiempo t a través de $\alpha \circ X_{t-1}$ ó $\beta \circ \epsilon_{t-1}$, por lo tanto, cabe la posibilidad de que un mismo elemento sea

contado dos veces. Posibilidad que queda excluida con la definición (1.16) y (1.17).

Se observa que en el proceso definido por las ecuaciones (1.16) y (1.17) si $\alpha = 0$, la estructura se reduce a la del proceso INMA(q) y si tomamos todos los β_i igual a cero y $q = 0$ la estructura se reduce a la del proceso INAR(1). Además, este proceso es estructuralmente igual al proceso ARMA(1, q) estándar, la media y la varianza están dadas por:

$$E[X_t] = \frac{\mu_\epsilon}{1 - \alpha} + \mu_\epsilon \sum_{i=1}^q \beta_i,$$

$$V[X_t] = \frac{\alpha\mu_\epsilon + \sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} + \sum_{i=1}^q [\beta_i(1 - \beta_i)\mu_\epsilon + \beta_i^2\sigma_\epsilon^2]$$

A continuación, se obtiene la función de autocovarianza de dicho proceso. En primer lugar, se tiene la siguiente covarianza condicional:

$$Cov(\beta_j \circ \epsilon_t, \beta_{j+h} \circ \epsilon_t / \epsilon_t = x) = \sum_{i=1}^x Cov(Y_{i,j}^t, Y_{i,j+h}^t)$$

Utilizando la ecuación (1.12) se sigue:

$$Cov(\beta_j \circ \epsilon_t, \beta_{j+h} \circ \epsilon_t / \epsilon_t = x) = x\beta_j(\beta_h - \beta_{h+j})$$

Ahora, utilizando el resultado de la última ecuación tenemos:

$$Cov(\beta_j \circ \epsilon_t, \beta_{j+h} \circ \epsilon_t) = \beta_j(\beta_h - \beta_{h+j})\mu_\epsilon + \beta_j\beta_{h+j}\sigma_\epsilon^2.$$

En consecuencia, la función de autocovarianza del proceso INARMA(1, q) está definida por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha\mu_\epsilon + \sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} \right) \alpha^h + \sum_{i=1}^{q-h} (\beta_i(\beta_h - \beta_{h+i})\mu_\epsilon + \beta_i\beta_{h+i}\sigma_\epsilon^2) \\ + \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=q-h+1}^q \alpha^{h-1+i-q}\beta_i & 1 \leq h \leq q, \\ \left(\left(\frac{\alpha\mu_\epsilon + \sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} \right) \alpha^q + \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=1}^q \alpha^{i-1}\beta_i \right) \alpha^{h-q} & \text{para } h > q \end{cases}$$

Se observa que $\rho(h)$, $h = 1, 2, \dots, q$ está determinada por todos los parámetros del proceso y $\rho(h) = \alpha^{h-q}\rho(q)$ para $h \geq q$.

La función de autocorrelación se obtiene dividiendo $\gamma(h)$ por $V[X_t]$ y dicha función no se anula, si bien tiende a cero a medida que aumentan los desfases temporales considerados. En consecuencia, la memoria de este modelo es infinita. La presencia del término de medias móviles en el modelo INARMA(1,q) afecta a la determinación de las q primeras autocorrelaciones, estando el resto de las autocorrelaciones afectadas únicamente por la parte autorregresiva del modelo. Concretamente, la función de autocorrelación muestra que una vez superado el orden de la parte de medias móviles, las autocorrelaciones del modelo INARMA(1,q) se comportan como las de un modelo INAR(1). Esta es la forma usual del proceso ARMA(1,q) estándar.

1.4. Procesos de medias móviles de valores enteros

Los modelos presentados anteriormente basados en el operador de refinamiento son útiles para describir series temporales estacionarias de valores enteros no negativos, sin embargo, no siempre estas series temporales presentan un comportamiento estacionario. Como ocurre, por ejemplo, con la serie del número de infecciones mensuales debido al *Staphylococcus aureus* meticilín resistente. Sin embargo, si se efectúa una diferencia regular de dicha serie se obtiene una serie estable pero que toma valores positivos y negativos. Por lo tanto, puede estar justificado introducir una nueva clase de modelos que permitan analizar series temporales de valores enteros (no necesariamente no negativos).

En el siguiente apartado se introducen los procesos de medias móviles de valores enteros generalizado de orden q (INMAG(q)). Estos modelos se basan en el operador de refinamiento generalizado.

Definición 1.2. (Operador de refinamiento generalizado, ' \odot ')

Sea $\beta \in (-1, 1)$ e $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli i.i.d, tales que $P(Y_i = 1) = |\beta| = 1 - P(Y_i = 0)$, independientes de X , una variable aleatoria de valores enteros. El operador ' \odot ' se define como:

$$\beta \odot X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{|X|} Y_i & \text{si } \beta > 0 \text{ y } X > 0 \text{ ó} \\ & \beta < 0 \text{ y } X < 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \text{ ó } \beta = 0 \\ -\sum_{i=1}^{|X|} Y_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De la definición del operador ' \odot ' se deducen, de manera trivial, las siguientes propiedades:

1. $0 \odot X = 0$

2. $1 \odot X = X$

3. $E[\beta \odot X] = \beta E[X]$

4. $V[\beta \odot X] = \beta^2 V[X] + |\beta|(1 - |\beta|)E[|X|]$

Estas propiedades serán utilizadas en la siguiente clase de modelos.

1.4.1. Procesos de medias móviles de valores enteros generalizado de primer orden, INMAG(1)

En este apartado se introduce una generalización del proceso INMA(1) (Al-Osh y Alzaid (1988b)), a este nuevo proceso se le denominará proceso de medias móviles de valores enteros (sin la restricción de que sean no negativos) generalizado de primer orden, INMAG(1).

El proceso INMAG(1) se define como:

$$X_t = \beta \odot \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.18)$$

donde $\beta \in (-1, 1)$, $\{\epsilon_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de valores enteros de media μ_ϵ y varianza σ_ϵ^2 .

Si $E[|\epsilon_t|] = \mu_{|\epsilon|} < \infty$ y $\sigma_\epsilon^2 < \infty$ entonces, el proceso INMAG(1) es estacionario. Por otra parte, utilizando las propiedades 3 y 4 del operador ' \odot ', se obtiene la media y la varianza del proceso $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ definido por la ecuación (1.18), que vienen dadas por:

$$E[X_t] = (1 + \beta)\mu_\epsilon \quad (1.19)$$

y

$$V[X_t] = (1 + \beta^2)\sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} \quad (1.20)$$

Ahora, para cualquier entero positivo h , la función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{para } h > 1 \\ \beta\sigma_\epsilon^2 & \text{para } h = 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= Cov(X_{t-1}, X_t) \\ &= Cov(\epsilon_{t-1}, \beta \odot \epsilon_{t-1}) \\ &= E(\epsilon_{t-1} E(\beta \odot \epsilon_{t-1} / \epsilon_{t-1})) - \beta\mu_\epsilon^2 \\ &= \beta\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Por las ecuaciones (1.20) y (1.21) la función de autocorrelación del proceso INMAG(1) es:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\beta\sigma_\epsilon^2}{(1 + \beta^2)\sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|}} & \text{para } h = 1 \\ 0 & \text{para } h > 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Se observa que la función de autocorrelación tiene la misma estructura que la del proceso MA(1) estándar, pero, ahora, a diferencia de los modelos introducidos en las secciones anteriores, puede tomar valores positivos y negativos dependiendo del signo de β .

Por otra parte, la F.G.P. de X_t está dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= E \left[s^\beta \odot \epsilon_{t-1} \right] E \left[s^{\epsilon_t} \right] \\ &= E \left[E \left[s^\beta \odot \epsilon_{t-1} / \epsilon_{t-1} \right] \right] G_\epsilon(s) \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho de que $(\beta \odot \epsilon_{t-1} / \epsilon_{t-1}) = I_{t-1} \sum_{i=1}^{|\epsilon_{t-1}|} Y_i$, donde

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta > 0 \text{ y } \epsilon_t > 0 \text{ ó} \\ & \beta < 0 \text{ y } \epsilon_t < 0 \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se tiene:

$$G(s) = E \left[(1 - |\beta| + |\beta|s^{I_{t-1}})^{|\epsilon_{t-1}|} \right] G_\epsilon(s), \quad |s| \leq 1. \quad (1.23)$$

De manera análoga, se obtienen las funciones generatrices de probabilidad conjunta de (X_t, X_{t+1}) , $G(s_1, s_2)$ y (X_1, X_2, \dots, X_k) , $G(s_1, s_2, \dots, s_k)$ para $|s_i| \leq 1$, e $i = 1, 2, \dots, k$, $\forall k$ las cuales están dadas por:

$$G(s_1, s_2) = E \left[\left(1 - |\beta| + |\beta|s_1^{I_{t-1}} \right)^{|\epsilon_{t-1}|} \right] E \left[s_1^{\epsilon_t} \left(1 - |\beta| + |\beta|s_2^{I_t} \right)^{|\epsilon_t|} \right] G_\epsilon(s_2) \quad (1.24)$$

y

$$G(s_1, s_2, \dots, s_k) = \prod_{i=1}^{k-1} E \left[s_i^{\epsilon_i} \left(1 - |\beta| + |\beta|s_{i+1}^{I_i} \right)^{|\epsilon_i|} \right] G_\epsilon(s_k) E \left[\left(1 - |\beta| + |\beta|s_1^{I_0} \right)^{|\epsilon_0|} \right] \quad (1.25)$$

De la ecuación (1.25) se observa que la distribución conjunta de (X_1, X_2, \dots, X_k) no depende de t , por lo tanto, el proceso INMAG(1) es estrictamente estacionario, también, se verifica que es 1-dependiente, es decir, X_i y X_j son independientes si $|i - j| > 1$.

1.4.2. Proceso de medias móviles de valores enteros de orden q , INMAG(q)

Con el fin de obtener una mayor flexibilidad en la modelación de procesos de valores enteros, en este apartado se presenta una extensión del proceso INMAG(1). Para ello, se consideran hipótesis análogas a las del proceso INMA(q) definido en el apartado 1.3.5.

Teniendo en cuenta las definiciones del apartado 1.3.5 se define la sucesión $\{\mathbf{Y}_i^t = (Y_{i,1}^t, \dots, Y_{i,q}^t); \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \in \mathbb{Z}\}$ de vectores aleatorios i.i.d. con $Y_{i,j}^t$

definida por:

$$Y_{i,j}^t = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento de } \epsilon_t \text{ está presente en el} \\ & \text{sistema en el tiempo } t + j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

entonces, $|\beta_j| = P(Y_{i,j}^t = 1)$ para $i, j = 1, 2, \dots, q$ y $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En este caso, $|\beta_j|$ se puede interpretar como la probabilidad que tiene un elemento de ϵ_t de ser un elemento de X_{t+j} , pero, ahora, un elemento de ϵ_t puede entrar al sistema con signo positivo o negativo, manteniendo su signo si $\beta_j \epsilon_t \geq 0$ y, en otro caso, este elemento está en el sistema con signo cambiado si $\beta_j \epsilon_t < 0$. Por otra parte, se tiene que:

$$P(Y_{i,k_1}^t = 1, Y_{i,k_2}^t = 1, \dots, Y_{i,k_j}^t = 1) = \prod_{l=1}^j |\beta_{k_l - k_{l-1}}| \quad (1.26)$$

siendo $k_0 = 0$.

Ahora, el proceso INMAG(q) se define de la siguiente forma:

$$X_t = \epsilon_t + \beta_1 \odot \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \odot \epsilon_{t-q} \quad (1.27)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con cierta distribución discreta de media μ_ϵ y varianza σ_ϵ^2 finitas y

$$\beta_j \odot \epsilon_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{|\epsilon_t|} Y_{i,j}^t & \text{si } \beta > 0 \text{ y } \epsilon_t > 0 \text{ ó} \\ & \beta < 0 \text{ y } \epsilon_t < 0 \\ 0 & \text{si } \epsilon_t = 0 \text{ ó } \beta_j = 0 \\ -\sum_{i=1}^{|\epsilon_t|} Y_{i,j}^t & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que denota los elementos de ϵ_t que están en el sistema en el tiempo $t + j$. Recordemos que estos elementos pueden entrar al sistema con signo positivo si $\beta_j \epsilon_{t-j} > 0$ ó con signo negativo si $\beta_j \epsilon_{t-j} < 0$.

El proceso $\text{INMAG}(q)$ definido por la ecuación (1.27) es de la misma forma que el proceso $\text{INMA}(q)$ reemplazando el operador ' \circ ' por el operador ' \odot ' como se hizo con el proceso $\text{INMAG}(1)$.

Ahora, directamente de la ecuación (1.27) y utilizando las propiedades 3 y 4 del operador ' \odot ', se obtiene la media y la varianza del proceso $\text{INMAG}(q)$, las cuales están dadas por:

$$E[X_t] = \mu_\epsilon \sum_{j=0}^q \beta_j,$$

y

$$V[X_t] = \sum_{j=1}^q |\beta_j| (1 - |\beta_j|) \mu_{|\epsilon|} + \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2.$$

Para calcular la función de autocovarianza, primero se obtiene la covarianza de $(\beta_j \odot \epsilon_t, \beta_{k+j} \odot \epsilon_t)$ condicionado por ϵ_t , es decir,

$$\begin{aligned} Cov(\beta_j \odot \epsilon_t, \beta_{k+j} \odot \epsilon_t / \epsilon_t = x) &= Cov \left(I_{j,t} \sum_{i=1}^{|x|} Y_{i,j}^t, I_{k+j,t} \sum_{i=1}^{|x|} Y_{i,k+j}^t \right) \\ &= I_{j,t} I_{k+j,t} \sum_{i=1}^{|x|} Cov(Y_{i,j}^t, Y_{i,k+j}^t) \\ &= I_{j,t} I_{k+j,t} \sum_{i=1}^{|x|} (E[Y_{i,j}^t Y_{i,k+j}^t] - |\beta_j| |\beta_{k+j}|) \end{aligned}$$

donde

$$I_{j,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_j > 0 \text{ y } \epsilon_t > 0 \text{ ó} \\ & \beta_j < 0 \text{ y } \epsilon_t < 0 \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por la ecuación (1.26) la covarianza de $(\beta_j \odot \epsilon_t, \beta_{k+j} \odot \epsilon_t / \epsilon_t = x)$ es igual a:

$$Cov(\beta_j \odot \epsilon_t, \beta_{k+j} \odot \epsilon_t / \epsilon_t = x) = I_{j,t} I_{k+j,t} |x| |\beta_j| (|\beta_k| - |\beta_{k+j}|) \quad (1.28)$$

Ahora, utilizando el resultado de la última ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned}
Cov(\beta_j \odot \epsilon_t, \beta_{k+j} \odot \epsilon_t) &= E[(\beta_j \odot \epsilon_t)(\beta_{k+j} \odot \epsilon_t)] - \beta_j \beta_{k+j} \mu_\epsilon^2 \\
&= E[I_{j,t} I_{k+j,t} |\epsilon_t| |\beta_j| (|\beta_k| - |\beta_{k+j}|) + \beta_j \beta_{k+j} \epsilon_t^2] - \beta_j \beta_{k+j} \mu_\epsilon^2 \\
&= I_{j,t} I_{k+j,t} |\beta_j| (|\beta_k| - |\beta_{k+j}|) \mu_{|\epsilon_t|} + \beta_j \beta_{k+j} \sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene la función de autocovarianza ($\gamma(h) = Cov(X_{t-h}, X_t)$) del proceso INMAG(q), la cual está dada por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-h} [I_{j,t} I_{k+j,t} |\beta_j| (|\beta_h| - |\beta_{h+j}|) \mu_{|\epsilon_t|} + \beta_j \beta_{h+j} \sigma_\epsilon^2], & h = 0, 1, \dots, q \\ 0 & h > q. \end{cases} \quad (1.29)$$

De la última ecuación se observa que la función de autocovarianza tiene la misma estructura que la del proceso MA(q) estándar. Por otra parte, la función de autocorrelación $\rho(h)$ tiene la siguiente expresión:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} [I_{j,t} I_{k+j,t} |\beta_j| (|\beta_h| - |\beta_{h+j}|) \mu_{|\epsilon_t|} + \beta_j \beta_{h+j} \sigma_\epsilon^2]}{\sum_{j=1}^q |\beta_j| (1 - |\beta_j|) \mu_{|\epsilon_t|} + \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2}, & h = 0, 1, \dots, q \\ 0 & h > q. \end{cases} \quad (1.30)$$

Se observa que la función de autocorrelación puede tomar valores positivos o negativos dependiendo del signo de β y tiene la misma estructura que la del proceso MA(q) estándar.

Ahora que hemos definido algunos procesos estocásticos de valores enteros y presentado propiedades básicas, nos dedicaremos a estudiar algunas características adicionales de estos procesos, con el fin de avanzar en el desarrollo de resultados análogos a los existentes para los procesos ARMA estándar. En el capítulo 2, se estudia la distribución asintótica de la media muestral, función de autocovarianza y autocorrelación muestral para el proceso INAR(1) con distribución marginal geométrica. Por otra parte, para el proceso INMA(q) se supone que el proceso de innovación (ruido) tiene distribución marginal geométrica, mientras que, en el proceso INARMA(1,1) se considera la distribución de Poisson y la geométrica; para el proceso INARMA(1, q) se supone que el proceso de innovación tiene distribución de Poisson y, por último, se considera el proceso INMAG(1) con cierta distribución discreta.

En el capítulo 3, se estudia la estimación de parámetros con los métodos Yule-Walker, mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional para el proceso INAR(1) con marginal geométrica. Por otra parte, se obtiene la distribución asintótica de dichos estimadores. Además, se hace un estudio de simulación de dicho proceso. Se obtienen, también, estimadores con los métodos de mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional para el proceso INAR(p) con marginal de Poisson. Por último, se estiman los parámetros del proceso INMAG(1) con marginal geométrica desdoblada, con los métodos de los momentos y mínimos cuadrados condicionales; se concluye este capítulo con un estudio de simulación del proceso INMAG(1) y se ajusta este modelo a la primera diferencia de la serie temporal del número de convulsiones epilépticas, presentada en la figura 1.1 y también, a la primera diferencia de la serie temporal SARM, presentada en la figura 1.3.

Capítulo 2

Propiedades asintóticas de los momentos

En este capítulo se aborda el problema de la estimación de la media, función de autocovarianza y función de autocorrelación de un proceso estocástico $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ estacionario de valores enteros. Los estimadores de μ , $\gamma(\cdot)$ y $\rho(\cdot)$ que se obtienen a partir de las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n , juegan un papel importante en el problema de inferencia y, en particular, en el problema de construir un modelo apropiado para los datos observados, por lo tanto, es necesario conocer o derivar la distribución de dichos estimadores. Pero, obtener la distribución exacta de estos estadísticos es prácticamente imposible o demasiado complicada cuando n es finito. Sin embargo, se puede basar la inferencia en la distribución del estadístico en cuestión para muestras grandes.

A continuación se obtiene la distribución asintótica para la media muestral, función de autocovarianza y autocorrelación muestral para los procesos INAR(1) e INMA(q) con marginal geométrica, proceso INARMA(1,1) con marginal de Poisson y geométrica, proceso INARMA(1, q) con marginal de Poisson y para el proceso INMAG(1) se considera el caso de que el proceso de innovación tenga distribución discreta con los

primeros cuatro momentos finitos.

2.1. Proceso INAR(1) con marginal geométrica

Como se vio en el apartado 1.3.2, el proceso INAR(1) está definido por:

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias de valores enteros no negativos i.i.d. y $\alpha \circ X_t = \sum_{i=1}^{X_t} Y_i$ donde las Y_i son variables aleatorias binarias i.i.d. con $P(Y_i = 1) = \alpha$ e independientes de X_t y ϵ_t . Si $\alpha \in [0, 1)$, entonces el proceso (2.1) es estacionario y

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-i} \quad (2.2)$$

Park y Oh (1997) presentan algunas propiedades asintóticas de los estimadores de los momentos del proceso INAR(1) cuando X_t tiene distribución marginal de Poisson. En esta sección se considera que X_t tiene distribución marginal geométrica de parámetro ν , es decir, $P(X_t = k) = \nu(1 - \nu)^k$ para $(k = 0, 1, 2, \dots)$ y para todo $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

En el apartado 1.3.2 se vio que el proceso INAR(1) definido por la ecuación (2.1)

con distribución marginal geométrica puede escribirse de forma alternativa como:

$$\begin{aligned}
 X_t &= \begin{cases} \alpha \circ X_{t-1} & \text{con probabilidad } \alpha \\ \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon'_t & \text{con probabilidad } (1 - \alpha) \end{cases} \\
 &= \alpha \circ X_{t-1} + I_t \epsilon'_t
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\{I_t, t \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\epsilon'_t, t \in \mathbb{Z}\}$ son dos sucesiones independientes de variables aleatorias i.i.d., tal que $P(I_t = 0) = 1 - P(I_t = 1) = \alpha$, para todo t y ϵ'_t tiene distribución geométrica con parámetro ν , es decir, ϵ'_t tiene la misma distribución de X_t .

Se verifica que la función de probabilidad de $\epsilon_t = I_t \epsilon'_t$, está dada por:

$$P(\epsilon_t = k) = \begin{cases} \alpha(1 - \nu) + \nu; & k = 0 \\ (1 - \alpha)\nu(1 - \nu)^k; & k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2.4}$$

y la F.G.P. tiene la siguiente expresión:

$$G_{\epsilon_t}(s) = \alpha + \frac{\nu(1 - \alpha)}{1 - \bar{\nu}s}, \quad |s| \leq 1, \quad \bar{\nu} = 1 - \nu.$$

Si X_t tiene distribución marginal geométrica con parámetro ν , entonces la media y la varianza están dadas por:

$$E[X_t] = \mu = \frac{1 - \nu}{\nu}$$

y

$$V[X_t] = \gamma(0) = \frac{1 - \nu}{\nu^2}$$

respectivamente, y la función de autocovarianza del proceso INAR(1), definido por la ecuación (2.3), está dada por:

$$\gamma(h) = \alpha^h \left(\frac{1 - \nu}{\nu^2} \right) \quad \text{para } h \geq 0 \quad (2.5)$$

La función de autocorrelación está dada por:

$$\rho(h) = \alpha^h, \quad \text{para } h = 0, 1, 2, \dots$$

siendo $\rho(h) = \rho(-h)$.

Las funciones generatrices de probabilidad conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $h, l, p \geq 0$, $|s_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$, siendo $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario definido por la ecuación (2.3), están dadas por (ver apéndice A):

$$G(s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{\nu}{1 - \bar{\nu}s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3))} \right) \prod_{i=0}^{h-1} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)) \prod_{j=0}^{l-1} G_\epsilon(1 - \alpha^j + \alpha^j s_3) \quad (2.6)$$

y

$$\begin{aligned}
 G(s_1, s_2, s_3, s_4) = & \left(\frac{\nu}{1 - \bar{\nu}s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4)))} \right) \\
 & \prod_{i=0}^{h-1} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))) \\
 & \prod_{j=0}^{l-1} G_\epsilon(1 - \alpha^j + \alpha^j s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4)) \\
 & \prod_{k=0}^{p-1} G_\epsilon(1 - \alpha^k + \alpha^k s_4)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

respectivamente. Ahora, diferenciando la F.G.P. conjunta dada por la ecuación (2.6) con respecto a s_1, s_2, s_3 y evaluando dichas derivadas en $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ y, por otra parte, diferenciando, también, la F.G.P. conjunta dada por la ecuación (2.7) con respecto a s_1, s_2, s_3, s_4 y evaluando en $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$, se obtienen para $h, l, p \geq 0$ los siguientes momentos:

$$E[X_t X_{t+h}] = \frac{\bar{\nu}^2 + \bar{\nu}\alpha^h}{\nu^2}, \tag{2.8}$$

$$E[X_t X_{t+h} X_{t+h+l}] = \frac{\bar{\nu}\alpha^{h+l} + 2\bar{\nu}^2\alpha^{2h+l} + \bar{\nu}^2\alpha^h + \bar{\nu}^2\alpha^l + \bar{\nu}^3}{\nu^3} \tag{2.9}$$

y

$$\begin{aligned}
 E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+h+l} - \mu)(X_{t+h+l+p} - \mu)] = & \gamma(h)\gamma(p) + \gamma(h+l+p) \\
 & + 2\gamma(h+l) [\nu\gamma(h+p) + \gamma(l+p) + 2\nu\gamma(h+l+p) + 3\nu^2\gamma(h+l+p)\gamma(h)]
 \end{aligned}$$

En el siguiente apartado se estudia la distribución asintótica de la media muestral, de la función de autocovarianza y de la autocorrelación muestral, para el proceso INAR(1) con marginal geométrica de parámetro ν .

2.1.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral

Los estimadores que se estudian para la función de autocovarianza $\gamma(h)$ y la función de autocorrelación, $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ a partir de las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n son:

$$\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+h} - \bar{X}_n), \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

y

$$\hat{\rho}_n(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)}, \quad (2.11)$$

respectivamente, siendo $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$.

Si $E[X_t] = \mu$ es conocido, se define

$$\tilde{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu) \quad (2.12)$$

entonces, se obtienen, los siguientes resultados.

Lema 2.1. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INAR(1) con marginal geométrica, es decir, $P(X_t = k) = \nu \bar{\nu}^k, k = 0, 1, \dots$, entonces,

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV [\bar{X}_n] = \frac{\bar{\nu}}{\nu^2} \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) = \begin{cases} \frac{\bar{\nu}\alpha^h}{\nu^2} \left(\frac{2(1 + \alpha + \bar{\nu}\alpha^2)}{\nu(1 - \alpha^2)} + (h - 1) \right) & h \geq 1 \\ \frac{\bar{\nu}}{\nu^3} \left(\frac{2(1 + \alpha + \bar{\nu})}{1 - \alpha^2} + \bar{\nu} \right) & h = 0 \end{cases}$$

Demostración.

Se observa que:

$$E[\bar{X}_n^2] = E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_t \sum_{j=1}^n X_j\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{t=1}^n E[X_t^2] + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} E[X_t X_{t+j}] \right)$$

Por la ecuación (2.8) y teniendo en cuenta que $E[X_t^2] = \frac{2 + \nu^2 - 3\nu}{\nu^2}$, la ecuación anterior es igual a:

$$E[\bar{X}_n^2] = \frac{\bar{\nu}}{n\nu^2} + \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{\nu}}{n^2\nu^2}\right) \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \left[n - 1 - \frac{\alpha - \alpha^n}{1 - \alpha}\right]$$

Así,

$$V[\bar{X}_n] = \frac{\bar{\nu}}{n\nu^2} \left[1 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\right] - \frac{2\bar{\nu}}{n^2\nu^2} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \left[1 + \frac{\alpha - \alpha^n}{1 - \alpha}\right]$$

Multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se sigue (i). Para (ii) se observa que:

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(h)] &= E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_t \sum_{s=1}^n (X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[X_t(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+h} - \mu)] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[(X_t - \mu)X_{t+j}(X_{t+h} - \mu)] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)X_{t+j}]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Por las ecuaciones (2.8) y (2.9), la ecuación (2.14) es igual a:

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(h)] &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\frac{\bar{\nu}\alpha^{j+h}}{\nu^2} + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{2j+h} + \bar{\nu}^2\alpha^h}{\nu^3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\frac{\bar{\nu}\alpha^h + 2\bar{\nu}^2\alpha^{j+h}}{\nu^3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\frac{\bar{\nu}\alpha^j}{\nu^2} + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{j+h} + \bar{\nu}^2\alpha^h}{\nu^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Restando $E[\bar{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(h)] = \frac{\bar{\nu}^2\alpha^h}{\nu^3}$, multiplicando por n en ambos lados de la ecuación (2.15) y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene (ii). ■

Lema 2.2. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso INAR(1) de la misma forma que en el Lema 2.1, entonces, para $h \geq l$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \begin{cases} \frac{\bar{\nu}\alpha^h}{\nu^4(1-\alpha^2)} \{2\bar{\nu}\alpha^l[(1-\alpha^2)(h+l) + (1+\alpha^2)(3+\bar{\nu}) \\ +4\alpha\nu] - 2\nu\bar{\nu}\alpha^{h+l+1}(1+\alpha^{l-h} + \alpha^{-2l}) + 2\nu\bar{\nu}\alpha^2 \\ +\nu^2(1-\alpha^2)(h-l) + (1+\alpha)(1+\bar{\nu} + \alpha\nu)\}, & l \geq 1 \\ \frac{\bar{\nu}\alpha^h}{\nu^4(1-\alpha^2)} \{(1+\bar{\nu}^2)(1-\alpha^2)h + 2(1+\bar{\nu})(1+3\bar{\nu}) \\ +2\alpha\nu\bar{\nu}(1+3\bar{\nu} - 2\bar{\nu}\alpha^h) + 4\nu\bar{\nu}\}, & l = 0. \end{cases}$$

Demostración.

Se observa que:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^n (X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_i - \mu)(X_{i+l} - \mu) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{h-l-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)(X_{t+h} - \mu)] \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h-l}^{h-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)] \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)] \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{l-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu)] \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=l}^{n-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu)] \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.10), puede escribirse:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^n (X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_i - \mu)(X_{i+l} - \mu) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{h-l-1} (n-i) \left(\frac{\nu^2 \bar{\nu} \alpha^h + 2\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+i} + 2\bar{\nu}^2 \alpha^{h+l} + 4\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+l+i} + 6\bar{\nu}^3 \alpha^{2i+l+h}}{\nu^4} \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h-l}^{h-1} (n-i) \left(\frac{\nu^2 \bar{\nu} \alpha^{l+i} + 2\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{2i+l} + 2\bar{\nu}^2 \alpha^{h+l} + 4\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+l+i} + 6\bar{\nu}^3 \alpha^{2i+l+h}}{\nu^4} \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i) \left(\frac{\nu^2 \bar{\nu} \alpha^{l+i} + 2\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+l+i} + 2\bar{\nu}^2 \alpha^{2i+l-h} + 4\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{2i+l} + 6\bar{\nu}^3 \alpha^{2i+l+h}}{\nu^4} \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{l-1} (n-i) \left(\frac{\nu^2 \bar{\nu} \alpha^{h+i} + 2\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{2i+h} + 2\bar{\nu}^2 \alpha^{h+l} + 4\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+l+i} + 6\bar{\nu}^3 \alpha^{2i+l+h}}{\nu^4} \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=l}^{n-1} (n-i) \left(\frac{\nu^2 \bar{\nu} \alpha^{h+i} + 2\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{h+l+i} + 2\bar{\nu}^2 \alpha^{2i+h-l} + 4\nu \bar{\nu}^2 \alpha^{2i+h} + 6\bar{\nu}^3 \alpha^{2i+l+h}}{\nu^4} \right) \\
&+ \frac{\bar{\nu}^2 \alpha^{h+l}}{\nu^4}.
\end{aligned}$$

Restando $E[\tilde{\gamma}(h)]E[\tilde{\gamma}(l)] = \frac{\bar{\nu}^2 \alpha^{h+l}}{\nu^4}$, después multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, en ambos lados de la última ecuación, se tiene el resultado. ■

En el resto de este apartado se estudia la distribución asintótica de las funciones de autocovarianza y autocorrelación muestral del proceso $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ definido por la ecuación (2.3). Para ello, se definen los siguientes vectores y matrices.

Sean,

$$\tilde{\Gamma}_n(h) = (\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(0), \tilde{\gamma}_n(1), \dots, \tilde{\gamma}_n(h))^T, \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h) = (\bar{X}_n, \hat{\gamma}_n(0), \hat{\gamma}_n(1), \dots, \hat{\gamma}_n(h))^T, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{\Gamma}(h) = (\mu, \gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(h))^T, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{V} es una matriz de dimensión $(h+2) \times (h+2)$ con elementos

$$V_{11} = \lim_{n \rightarrow \infty} nV[\bar{X}_n],$$

$$V_{12} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(s)) \right)^T, \quad s = 0, 1, 2, \dots, h,$$

$$V_{22} = \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(s), \tilde{\gamma}_n(l)), \quad s, l = 0, 1, 2, \dots, h,$$

y

$$\mathbf{D}_h = \gamma(0)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho(1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho(2) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\rho(h) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde \mathbf{D}_h es una matriz $(h+1) \times (h+2)$ cuyos elementos se obtienen a partir de las derivadas parciales de la función \mathbf{g} evaluadas en $\mathbf{\Gamma}(h)$, siendo \mathbf{g} una función de \mathbb{R}^{h+2} a

\mathbb{R}^{h+1} definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\hat{\Gamma}_n(h)) &= [g_0(\hat{\Gamma}_n(h)), g_1(\hat{\Gamma}_n(h)), \dots, g_h(\hat{\Gamma}_n(h))]^T \\ &= \left[\bar{X}_n, \frac{\hat{\gamma}_n(1)}{\hat{\gamma}_n(0)}, \frac{\hat{\gamma}_n(2)}{\hat{\gamma}_n(0)}, \dots, \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)} \right]^T, \hat{\gamma}_n(0) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

y sus derivadas parciales evaluadas en $\Gamma(h)$ están dadas por:

$$\frac{\partial g_0(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \bar{X}_n} \Big|_{\Gamma(h)} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_0(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(j)} \Big|_{\Gamma(h)} = 0, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, h,$$

$$\frac{\partial g_1(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \bar{X}_n} \Big|_{\Gamma(h)} = 0, \quad \frac{\partial g_1(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(0)} \Big|_{\Gamma(h)} = -\frac{\gamma(1)}{(\gamma(0))^2}, \quad \frac{\partial g_1(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(1)} \Big|_{\Gamma(h)} = \frac{1}{\gamma(0)}$$

y

$$\frac{\partial g_1(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(j)} \Big|_{\Gamma(h)} = 0 \quad \text{para } j = 2, \dots, h.$$

Así, sucesivamente hasta obtener las derivadas parciales de $g_h(\hat{\Gamma}_n(h))$ y, con ello, se obtienen los elementos de la última fila de la matriz \mathbf{D}_h , esto es:

$$\frac{\partial g_h(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \bar{X}_n} \Big|_{\Gamma(h)} = 0, \quad \frac{\partial g_h(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(0)} \Big|_{\Gamma(h)} = -\frac{\gamma(h)}{(\gamma(0))^2},$$

$$\left. \frac{\partial g_h(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(j)} \right|_{\mathbf{r}(h)} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, h-1, \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial g_h(\hat{\Gamma}_n(h))}{\partial \hat{\gamma}_n(h)} \right|_{\mathbf{r}(h)} = \frac{1}{\gamma(0)}.$$

A continuación se presenta la definición de sucesiones de variables aleatorias m -dependientes.

Definición 2.1. (m -dependiente)

Se dice que una sucesión $\{X_t\}$ estrictamente estacionaria de variables aleatorias es m -dependiente (donde m es un entero no negativo) si dados dos conjuntos de variables aleatorias $\{X_j, j \leq t\}$ y $\{X_j, j \geq t + m + 1\}$ son independientes para cada t .

Observación 2.1.

La propiedad de m -dependencia generaliza la de independencia. En el caso especial $m = 0$, la m -dependencia se reduce a la independencia.

Por otra parte, los proceso INMA(q) son estrictamente estacionarios m -dependientes con $m=q$ siempre que, el proceso de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sea una sucesión de variables aleatorias i.i.d.

Por último, si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso estrictamente estacionario m -dependiente entonces el proceso $\{\mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario $(m+h)$ -dependiente, siendo $\mathbf{Z}_t(h) = (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+h})^T$.

Observación 2.2.

En la demostración de los teoremas que se presentan a continuación se utiliza el argumento de Cramer-Wold, el cual se enuncia como: Sea $\{\mathbf{X}_n\}$ una sucesión de

k-vectores aleatorios, entonces \mathbf{X}_n converge en distribución a \mathbf{X} si y sólo si $\lambda^T \mathbf{X}_n$ converge en distribución a $\lambda^T \mathbf{X}$ para todo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Proposición 2.1. (Proposición 6.3.3 en Brockwell y Davis (1987))

Sean \mathbf{X}_n e \mathbf{Y}_n , k-vectores aleatorios tal que $(\mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n)$ converge en probabilidad a cero y \mathbf{X}_n converge en distribución a \mathbf{X} , entonces \mathbf{Y}_n converge en distribución a \mathbf{X} .

Proposición 2.2. (Proposición 6.3.9 en Brockwell y Davis (1987))

Sean \mathbf{X}_n , $n = 1, 2, \dots$ e \mathbf{Y}_{nj} , $j = 1, 2, \dots$ k-vectores aleatorios tal que

1. Y_{nj} converge en distribución a Y_j cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $j = 1, 2, \dots$,
2. Y_j converge en distribución a Y cuando $j \rightarrow \infty$, y
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_{nj}| > \epsilon) = 0$ para todo $\epsilon > 0$.

Entonces \mathbf{X}_n converge en distribución a \mathbf{Y} cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 2.3. (Proposición 6.4.3 en Brockwell y Davis (1987))

Si $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} N(\mu, c_n^2 \Sigma)$ donde Σ es una matriz simétrica definida no negativa y $c_n^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) = (g_1(\mathbf{X}_n), g_2(\mathbf{X}_n), \dots, g_m(\mathbf{X}_n))^T$ es una función de \mathbb{R}^k a \mathbb{R}^m tal que $g_i(\cdot)$ tenga derivadas continuas en un entorno de μ , y si $D\Sigma D^T$ tiene todos los elementos de la diagonal distintos de cero, donde D es una matriz $m \times k$ $[(\partial g_i / \partial x_j)(\mu)]$, entonces

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{d} N(\mathbf{g}(\mu), c_n^2 D\Sigma D^T).$$

La definición de m-dependencia está relacionada con el Teorema Central del Límite para sucesiones estrictamente estacionarias m-dependientes. Para más detalles de este

Teorema y los procesos m-dependientes se recomienda el libro de Brockwell y Davis (1987).

Teorema 2.1. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INAR(1) y X_t tiene distribución marginal geométrica de parámetro ν , entonces

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Primero se define una sucesión $\{\mathbf{Z}_t^m(h), t \in \mathbb{Z}\}$ de $(h+2)$ -vectores aleatorios por:

$$\mathbf{Z}_t^m(h) = (X_t^m, X_t^m X_t^m, X_t^m X_{t+1}^m, \dots, X_t^m X_{t+h}^m)^T,$$

donde $X_t^m = \sum_{i=0}^m \alpha^i \circ \epsilon_{t-i}$.

Por la definición de X_t^m el proceso $\{X_t^m, t \in \mathbb{Z}\}$ puede verse como un proceso MA(m), entonces por la observación 2.1 el proceso $\{X_t^m, t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario m-dependiente.

Por otra parte, el proceso $\{\mathbf{Z}_t^m(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario $(m+h)$ -dependiente ya que, dados dos conjuntos $\{\mathbf{Z}_j^m(h), j \leq t\}$ y $\{\mathbf{Z}_j^m(h), j \geq t+m+h+1\}$ del proceso $\{\mathbf{Z}_t^m(h), t \in \mathbb{Z}\}$, son independientes para cada t y, además, el proceso $\{X_t^m, t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario m-dependiente. También, se observa que:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n [X_t^m, (X_t^m - \mu^m)(X_t^m - \mu^m), \dots, (X_t^m - \mu^m)(X_{t+h}^m - \mu^m)] = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_n^m(h)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_n^m(h) = (\bar{X}_n^m, \tilde{\gamma}_n^m(0), \tilde{\gamma}_n^m(1), \dots, \tilde{\gamma}_n^m(h))^T,$$

y

$$\bar{X}_n^m = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^m,$$

$$\tilde{\gamma}_n^m(i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t^m - \mu^m)(X_{t+i}^m - \mu^m), \quad i = 0, 1, \dots, h$$

$$E[X_t^m] = \mu^m = \frac{\bar{\nu}}{\nu} (1 - \alpha^{m+1})$$

Ahora, como $\{\mathbf{Z}_t^m(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso estrictamente estacionario $(m+h)$ -dependiente, entonces, por el Teorema Central del Límite para sucesiones estrictamente estacionarias $(m+h)$ -dependientes y el argumento de Cramer-Wold, se tiene:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_n^m(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}^m(h), n^{-1}\mathbf{V}^m) \quad (2.21)$$

donde

$$\mathbf{\Gamma}^m(h) = (\mu^m, \gamma^m(0), \gamma^m(1), \dots, \gamma^m(h))^T,$$

siendo $\gamma^m(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, h$ la función de autocovarianza del proceso $\{X_t^m, t \in \mathbb{Z}\}$; obviamente, $\gamma^m(i) \rightarrow \gamma(i)$ cuando $m \rightarrow \infty$ y \mathbf{V}^m converge a \mathbf{V} cuando $m \rightarrow \infty$.

Por otra parte, se observa que:

$$V [\sqrt{n}(\bar{X}_n - \bar{X}_n^m)] = nV \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-i} \right]$$

Para calcular la última ecuación se define $X'_t = \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-i}$, entonces,

$$\begin{aligned} V [\sqrt{n}(\bar{X}_n - \bar{X}_n^m)] &= nV [\bar{X}'_t] \\ &= \left(\frac{\bar{\nu}\alpha^{m+1}}{\nu} + \frac{\bar{\nu}^2\alpha^{2(m+1)}}{\nu^2} \right) \left[1 + \frac{2\alpha(1 - \alpha^{n-1})}{1 - \alpha} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha^i \right] \\ &\leq \left(\frac{\bar{\nu}\alpha^{m+1}}{\nu} + \frac{\bar{\nu}^2\alpha^{2(m+1)}}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{2\alpha(1 - \alpha^{n-1})}{1 - \alpha} \right) \end{aligned}$$

Así, para $\epsilon > 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P [\sqrt{n}|\bar{X}_n^m - \bar{X}_n - \mu^m + \mu| > \epsilon] = 0 \quad (2.22)$$

Además, mediante cálculos similares a los del Lema 2.2, es decir, trabajando con $\tilde{\gamma}_n^m(l)$ en vez de $\tilde{\gamma}_n(l)$ y los argumentos precedentes utilizados para calcular $V [\sqrt{n}(\bar{X}_n - \bar{X}_n^m)]$, se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n}|\tilde{\gamma}_n^m(l) - \tilde{\gamma}_n(l) - \gamma^m(l) + \gamma(l)| > \epsilon] = 0 \quad (2.23)$$

Por las ecuaciones (2.22)-(2.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n^m(h) &\xrightarrow{d} N(\Gamma^m(h), n^{-1}\mathbf{V}^m), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P [\sqrt{n}|\bar{X}_n^m - \bar{X}_n - \mu^m + \mu| > \epsilon] &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n}|\tilde{\gamma}_n^m(l) - \tilde{\gamma}_n(l) - \gamma^m(l) + \gamma(l)| > \epsilon] = 0$$

respectivamente, estas son exactamente las hipótesis de la Proposición 2.2, por lo tanto, utilizando dicha proposición, se sigue el resultado. ■

A continuación se demuestra que, bajo las condiciones del Teorema 2.1, $\tilde{\gamma}_n(l)$ y $\hat{\gamma}_n(l)$ tienen la misma distribución asintótica.

Teorema 2.2. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de la misma forma que en el Teorema 2.1, entonces

$$\hat{\Gamma}_n(h) \xrightarrow{d} N(\Gamma(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Para $0 \leq l \leq h$, se observa que:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\tilde{\gamma}_n(l) - \hat{\gamma}_n(l)) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-l} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+l} - \bar{X}_n) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{t=n-l+1}^n X_t X_{t+l} - \mu \sum_{t=1}^n (X_t + X_{t+l}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{X}_n \sum_{t=1}^{n-l} (X_t + X_{t+l}) + n\mu^2 - (n-l)\bar{X}_n^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} (\bar{X}_n - \mu) \left(\sum_{t=1}^{n-l} X_t + \sum_{t=1}^{n-l} X_{t+l} - (n-l)(\bar{X}_n + \mu) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=n-l+1}^n (X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu) \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ tiene distribución asintóticamente normal con media cero y varianza $\lim_{n \rightarrow \infty} nV[\bar{X}_n]$, por lo tanto, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ está acotada en probabilidad, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) \in (0, \infty)$ tal que

$$P[\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) > \delta(\epsilon)] < \epsilon \quad \text{para todo } n,$$

también, \bar{X}_n converge en probabilidad a μ , entonces,

$$\left(n^{-1} \sum_{t=1}^{n-l} (X_t + X_{t+l}) - (1 - n^{-1}l)(\bar{X}_n + \mu) \right)$$

converge en probabilidad a cero y

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=n-l+1}^n (X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)$$

converge en probabilidad a cero, puesto que,

$$n^{-\frac{1}{2}} E \left| \sum_{t=n-l+1}^n (X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu) \right| \leq n^{-\frac{1}{2}} l \gamma(0)$$

y $n^{-\frac{1}{2}} l \gamma(0)$ converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

De estas observaciones se concluye que

$$\sqrt{n}(\tilde{\gamma}_n(l) - \hat{\gamma}_n(l))$$

converge en probabilidad a cero cuando $n \rightarrow \infty$ y la conclusión de este Teorema se sigue de la Proposición 2.1 y el Teorema 2.1. ■

Teorema 2.3. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(h), n^{-1} \mathbf{D}_h \mathbf{V} \mathbf{D}_h^T)$$

donde

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) = (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h))^T,$$

$$\mathbf{R}(h) = (\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^T,$$

\mathbf{V} y \mathbf{D}_h han sido definidas en las ecuaciones (2.19) y (2.20), respectivamente.

Demostración.

Por el Teorema 2.2 se tiene que:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h) = (\bar{X}_n, \hat{\gamma}_n(0), \hat{\gamma}_n(1), \dots, \hat{\gamma}_n(h))^T \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(h), n^{-1} \mathbf{V}) \quad (2.24)$$

donde \mathbf{V} es una matriz simétrica definida positiva.

Por otra parte, sea \mathbf{g} una función de \mathbb{R}^{h+2} a \mathbb{R}^{h+1} definida por la ecuación (2.21).

Si $\hat{\rho}_n(i)$, $i = 1, 2, \dots, h$, es la función de autocorrelación muestral del proceso INAR(1) definido por la ecuación (2.3), entonces por la definición de \mathbf{g} se tiene:

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h)) = [\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h)]^T$$

De la última ecuación se observa que $g_0(\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h)) = \bar{X}_n$ y $g_i(\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h)) = \hat{\rho}_n(i)$ para $i = 1, 2, \dots, h$, tienen derivadas continuas en un entorno de $\mathbf{\Gamma}(h)$ y, además, todos los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}_h \mathbf{V} \mathbf{D}_h^T$ son distintos de cero. Estas observaciones y la ecuación (2.25) son exactamente las hipótesis de la Proposición 2.3. Por lo tanto, la conclusión de este teorema se sigue utilizando dicha proposición, es decir:

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h)) \xrightarrow{d} N(\mathbf{g}(\mathbf{\Gamma}(h)), n^{-1} \mathbf{D}_h \mathbf{V} \mathbf{D}_h^T).$$

Esto completa la demostración. ■

2.2. Proceso INMA(q) con marginal geométrica

En esta sección se estudia algunas propiedades asintóticas de los momentos del proceso INMA(q) introducido por Al-Osh y Alzaid (1988b). McCormick y Park (1997) estudian la distribución asintótica de la función de autocovarianza muestral para el proceso INMA(q) con marginal de Poisson. Park y Kim (1997) introducen una variante del proceso INMA(q) y, también, estudian algunas propiedades asintóticas de dicho proceso con marginal de Poisson.

Como se vio en el apartado 1.3.5 el proceso INMA(q) está definido por:

$$X_t = \epsilon_t + \beta_1 \circ \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \circ \epsilon_{t-q} \quad (2.25)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de valores enteros no negativos; los β_i , para $i = 1, 2, \dots, q$ están definidos en dicho apartado.

Denotemos por $G_\epsilon(z)$ la F.G.P. de ϵ_t para todo t , entonces, las funciones generatrices de probabilidad conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$, de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $h, l, p \geq 0$, $|s_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$ y $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario definido por la ecuación (2.26), están dadas por (ver apéndice A):

$$G(s_1, s_2) = \prod_{i=0}^{q-h} G_\epsilon(1 - \beta_i(1 - \beta_h)(1 - s_1) - \beta_{h+i}(1 - s_2) - s_2\beta_i\beta_h(1 - s_1)) \prod_{j=0}^{h-1} G_\epsilon(1 - \beta_j + \beta_j s_2) \prod_{k=q-h+1}^q G_\epsilon(1 - \beta_k + \beta_k s_1), \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2, s_3) = & \prod_{k=0}^{l-1} G_\epsilon(1 - \beta_k + \beta_k s_3) \prod_{i=q-h+1}^q G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s_1) \\
& \prod_{j=0}^{h-1} G_\epsilon(1 - \beta_j(1 - \beta_l)(1 - s_2) - \beta_{l+j}(1 - s_3) - s_3 \beta_j \beta_l(1 - s_2)) \\
& \prod_{i=r}^{q-h} G_\epsilon(1 - \beta_i(1 - \beta_h)(1 - s_1) - \beta_{h+i}(1 - s_2) - s_2 \beta_i \beta_h(1 - s_1)) \\
& \prod_{i=0}^{r-1} G_\epsilon(f_1(s_1, s_2, s_3, \beta_i, \beta_h, \beta_l))
\end{aligned} \tag{2.27}$$

y

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2, s_3, s_4) = & \prod_{i=0}^{p-1} G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s_4) \prod_{k=q-h+1}^q G_\epsilon(1 - \beta_k + \beta_k s_1) \\
& \prod_{j=r}^{q-h} G_\epsilon(1 - \beta_j(1 - \beta_h)(1 - s_1) - \beta_{h+j}(1 - s_2) - s_2 \beta_j \beta_h(1 - s_1)) \\
& \prod_{k=0}^{l-1} G_\epsilon(1 - \beta_k(1 - \beta_p)(1 - s_3) - \beta_{p+k}(1 - s_4) - s_4 \beta_k \beta_p(1 - s_3)) \\
& \prod_{i=m}^{r-1} G_\epsilon(f_1(s_1, s_2, s_3, \beta_i, \beta_h, \beta_l)) \prod_{i=0}^{h-1} G_\epsilon(f_1(s_2, s_3, s_4, \beta_i, \beta_l, \beta_p)) \\
& \prod_{i=0}^{m-1} G_\epsilon(f_2(s_1, s_2, s_3, s_4))
\end{aligned} \tag{2.28}$$

respectivamente. Donde $r = q - h - l + 1$, $m = q - h - l - p + 1$,

$$\begin{aligned}
f_1(s_1, s_2, s_3, \beta_i, \beta_h, \beta_l) &= 1 - \beta_i(1 - \beta_h)(1 - \beta_{h+l})(1 - s_1) - \beta_{h+i}(1 - \beta_l)(1 - s_2) \\
&\quad - s_3 \beta_i(1 - \beta_h) \beta_{h+l}(1 - s_1) - s_2 \beta_i \beta_h(1 - \beta_l)(1 - s_1) \\
&\quad - s_3 \beta_l \beta_{h+i}(1 - s_2) - s_2 s_3 \beta_i \beta_h \beta_l(1 - s_1) - \beta_{h+l+i}(1 - s_3)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 f_2(s_1, s_2, s_3, s_4) &= 1 - \beta_i(1 - \beta_h)(1 - \beta_{h+l})(1 - \beta_{h+l+p})(1 - s_1) - \beta_{h+l+p+i}(1 - s_4) \\
 &\quad - \beta_{h+i}(1 - \beta_l)(1 - \beta_{l+p})(1 - s_2) - \beta_{h+l+i}(1 - \beta_p)(1 - s_3) \\
 &\quad - s_2\beta_i\beta_h(1 - \beta_l)(1 - \beta_{l+p})(1 - s_1) - s_3\beta_{h+i}\beta_l(1 - \beta_p)(1 - s_2) \\
 &\quad - s_3\beta_i\beta_{h+l}(1 - \beta_h)(1 - \beta_p)(1 - s_1) - s_4\beta_{h+i}\beta_{l+p}(1 - \beta_l)(1 - s_2) \\
 &\quad - s_4\beta_{h+l+i}\beta_p(1 - s_3) - s_4\beta_i\beta_{h+l+p}(1 - \beta_h)(1 - \beta_{h+l})(1 - s_1) \\
 &\quad - s_2s_3\beta_i\beta_h\beta_l(1 - \beta_p)(1 - s_1) - s_2s_4\beta_i\beta_h\beta_{l+p}(1 - \beta_l)(1 - s_1) \\
 &\quad - s_3s_4\beta_l\beta_p\beta_{h+i}(1 - s_2) - s_3s_4\beta_i\beta_p\beta_{h+l}(1 - \beta_h)(1 - s_1) \\
 &\quad - s_2s_3s_4\beta_i\beta_h\beta_l\beta_p(1 - s_1).
 \end{aligned}$$

Ahora, diferenciando las funciones generatrices de probabilidad dadas por las ecuaciones (2.27)-(2.29), con respecto a s_1, s_2, s_3, s_4 y evaluando en $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$; por otra parte, considerando que $E[X_t] = \mu$ y que ϵ_t tiene distribución marginal geométrica de parámetro ν , es decir, $P(\epsilon_t = k) = \nu(1 - \nu)^k, k = 0, 1, 2, \dots$, para todo t , entonces, para $h, l, p \geq 0$, se obtiene:

$$E[X_t X_{t+h}] = \mu^2 + \sum_{i=0}^{q-h} \left(\frac{\nu(1 - \nu)\beta_i\beta_h + (1 - \nu)^2\beta_i\beta_{i+h}}{\nu^2} \right) \quad (2.29)$$

De la ecuación (2.30) se observa que la covarianza de (X_t, X_{t+h}) está dada por:

$$\gamma(h) = \sum_{i=0}^{q-h} \left(\frac{\nu(1 - \nu)\beta_i\beta_h + (1 - \nu)^2\beta_i\beta_{i+h}}{\nu^2} \right)$$

siendo $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

Por otra parte, también, se obtiene:

$$\begin{aligned}
E[X_t X_{t+h} X_{t+h+l}] &= \mu^3 + \mu(\gamma(h) + \gamma(l) + \gamma(h+l)) \\
&+ \beta_h(\beta_l + \mu(\beta_l - \beta_{h+l})) \sum_{i=0}^{q-h-l} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \beta_i + 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^3 \sum_{i=0}^{q-h-l} \beta_i \beta_{h+i} \beta_{h+l+i} \quad (2.30) \\
&+ \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \sum_{i=0}^{q-h-l} \beta_i (\beta_l \beta_{h+i} + \beta_h \beta_{h+l+i} + (1-\beta_h) \beta_{h+i} \beta_{h+l} + \beta_h \beta_l \beta_{h+i})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+h+l} - \mu)(X_{t+h+l+p} - \mu)] &= \gamma(h)\gamma(p) + \gamma(l)\gamma(h+l+p) \\
&+ \gamma(h+l)\gamma(l+p) + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) (\gamma(h+l) - \mu^2) \beta_l (\beta_p - \beta_{l+p}) \sum_{i=0}^{q-l-p} \beta_i \\
&+ \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \beta_h (\beta_l - \beta_{h+l}) \sum_{i=0}^{q-h-l} \beta_i \left(\gamma(l+p) + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \beta_l (\beta_p - \beta_{l+p}) \sum_{i=0}^{q-l-p} \beta_i \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i [1, \beta_{h+i}(1, \beta_{h+l+i}, \beta_{h+l+p+i}), \beta_{h+l+i}, \beta_{h+l+p+i}, \\
&\quad \beta_{h+l+i} \beta_{h+l+p+i} (1, \beta_{h+i})] F(\beta_h, \beta_l, \beta_p) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

donde $F(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = (f_j(\beta_h, \beta_l, \beta_p))^T$ para $j = 1, 2, \dots, 8$ y las expresiones de $f_j(\beta_h, \beta_l, \beta_p)$ están dadas en el apéndice B.

Ahora, que se han obtenido los momentos de segundo, tercero y cuarto orden del proceso INMA(q), se está en condiciones de obtener la distribución asintótica de la media muestral, función de autocovarianza muestral y función de autocorrelación muestral, para dicho proceso, cuando las innovaciones ϵ_t tienen distribución geométrica de parámetro ν .

2.2.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral

Los estimadores que se estudian para la función de autocovarianza $\gamma(h)$ y la función de autocorrelación, $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ a partir de las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n de un proceso INMA(q) son exactamente iguales a los definidos en el apartado 2.1.1.

Sea $\tilde{\gamma}_n(h)$ como en la ecuación (2.13), entonces se tienen los siguientes resultados.

Lema 2.3. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario de valores enteros no negativos, INMA(q), definido por la ecuación (2.26) y supongamos que ϵ_t tiene distribución marginal geométrica con parámetro ν , para todo t , entonces para $0 \leq h \leq q$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV[\bar{X}_n] &= \gamma(0) + 2 \sum_{i=1}^q \gamma(i) \\
 (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} [E(X_t X_{t+i} X_{t+i+h}) - \mu^3 - \mu(\gamma(i) + \gamma(h) + \gamma(i-h))] + \sum_{i=1}^{q+h} [E(X_t X_{t+i} X_{t+h}) - \mu^3 - \mu(\gamma(i) + \gamma(h) + \gamma(h-i))] & h \geq 1 \\ \sum_{i=0}^q [E(X_t X_{t+i}^2) - \mu^3 - \mu(2\gamma(i) + \gamma(0))] + \sum_{i=0}^q [E(X_t^2 X_{t+i}) - \mu^3 - \mu(2\gamma(i) + \gamma(0))] & h = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demostración.

El esquema utilizado en la demostración de este Lema es similar a la del Lema 2.1, entonces, utilizando la ecuación (2.30), se tiene que:

$$E \left[\overline{X}_n^2 \right] = \frac{1}{n^2} \left(n^2 \mu^2 + n \gamma(0) + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} \gamma(j) \right)$$

Así, la varianza de \overline{X}_n está dada por:

$$V \left[\overline{X}_n \right] = \frac{\gamma(0)}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} \gamma(j)$$

Multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se sigue (i). Para (ii), una vez más se utilizan los argumentos del Lema 2.1 (parte (ii)) y por las ecuaciones (2.30) y (2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} E \left[\overline{X}_n \tilde{\gamma}_n(h) \right] &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \left\{ \mu \gamma(h) + 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{3q-j-h} \sum_{i=0}^{q-j-h} \beta_i \beta_{j+i} \beta_{j+h+i} \right. \\ &\quad + \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{2q-j-h} \sum_{i=0}^{q-j-h} \beta_i (\beta_h \beta_{j+i} + \beta_j \beta_{j+h+i} + (1-\beta_j) \beta_{j+i} \beta_{j+h} + \beta_j \beta_h \beta_{j+i}) \\ &\quad \left. + \beta_i (\beta_h + \mu(\beta_h - \beta_{j+h})) \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{q-j-h} \sum_{i=0}^{q-j-h} \beta_i \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \left\{ \mu \gamma(h) + \beta_i (\beta_{h-j} + \mu(\beta_{h-j} - \beta_h)) \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{q-h} \sum_{i=0}^{q-h} \beta_i \right. \\ &\quad + \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{2q-h} \sum_{i=0}^{q-h} \beta_i (\beta_{h-j} \beta_{j+i} + \beta_j \beta_{h+i} + (1-\beta_j) \beta_{j+i} \beta_h + \beta_j \beta_{h-j} \beta_{j+i}) \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^{3q-h} \sum_{i=0}^{q-h} \beta_i \beta_{j+i} \beta_{h+i} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{n} \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left\{ \mu\gamma(h) + \beta_h(\beta_{j-h} + \mu(\beta_{j-h} - \beta_j)) \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \sum_{i=0}^{q-j} \beta_i \right. \\
 & + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \sum_{i=0}^{q-j} \beta_i (\beta_{j-h}\beta_{h+i} + \beta_h\beta_{j+i} + (1-\beta_h)\beta_{h+i}\beta_j + \beta_h\beta_{j-h}\beta_{h+i}) \\
 & \left. + 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^3 \sum_{i=0}^{q-j} \beta_i \beta_{h+i} \beta_{j+i} \right\} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Restando $E[\bar{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(h)] = \mu\gamma(h)$, multiplicando por n en ambos lados de la ecuación (2.33) y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene (ii). ■

Lema 2.4. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso INMA(q) de la misma forma que en el Lema 2.3, entonces, para $0 \leq l \leq h \leq q$, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{h+q} E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l+i} - \mu)] \\ + \sum_{i=1}^{l+q} E[(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h+i} - \mu)] \\ - (2q + h + l + 1)\gamma(h)\gamma(l), \quad l \geq 1 \\ \\ \sum_{i=0}^{h+q} E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)^2] \\ + \sum_{i=0}^q E[(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h+i} - \mu)] \\ - (2q + h + 2)\gamma(0)\gamma(h), \quad l = 0 \end{cases}$$

Demostración.

Se observa que:

$$\begin{aligned}
& Cov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{h-l-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)(X_{t+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h-l}^{h-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{l-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=l}^{n-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)]
\end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \\
&= \sum_{i=0}^{h-l-1} E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)(X_{t+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \sum_{i=h-l}^{h-1} E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \sum_{i=h}^{q+h} E [(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \sum_{i=1}^{l-1} E [(X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ \sum_{i=l}^{q+l} E [(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)]
\end{aligned}$$

El cálculo explícito de los momentos de cuarto orden están dados en la ecuación (2.32).■

En el resto de este apartado se estudia la distribución asintótica de la media muestral, función de autocovarianza y función de autocorrelación muestral del proceso $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ definido en la ecuación (2.26).

Teorema 2.4. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INMA(q) y ϵ_t tiene distribución marginal geométrica de parámetro ν , entonces

$$\tilde{\Gamma}(h) \xrightarrow{d} N(\Gamma(h), n^{-1}\mathbf{V}), \quad h \leq q.$$

Demostración.

El esquema de esta demostración es análogo a la del Teorema 2.1. Primero se define una sucesión $\{\mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ de $(h+2)$ -vectores aleatorios por:

$$\mathbf{Z}_t(h) = (X_t, X_t^* X_t^*, X_t^* X_{t+1}^*, \dots, X_t^* X_{t+h}^*)^T,$$

donde $X_t^* = X_t - \mu$, entonces, el proceso X_t^* es estrictamente estacionario q -dependiente ya que, X_t es un proceso INMA(q) y, por la observación 2.1, se tiene que el proceso $\{\mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario $(q+h)$ -dependiente.

Por otra parte, se observa que:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_t(h) = (\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(0), \tilde{\gamma}_n(1), \dots, \tilde{\gamma}_n(h))^T,$$

y la sucesión $\{\mathbf{a}^T \mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionaria $(q+h)$ -dependiente, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{h+2}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ya que el proceso $\{\mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario $(q+h)$ -dependiente. Además, es fácil verificar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} V \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{a}^T \mathbf{Z}_t(h) \right) = \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a} > 0$$

puesto que \mathbf{V} es una matriz simétrica definida positiva.

Ahora, como el proceso $\{\mathbf{a}^T \mathbf{Z}_t(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es estrictamente estacionario (q+h)-dependiente, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{h+2}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a} > 0$, entonces, por el Teorema Central del Límite para sucesiones estrictamente estacionarias (q+h)-dependientes, se tiene que:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{a}^T \mathbf{Z}_t(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Gamma}(h), n^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a}), \quad \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{h+2}.$$

Finalmente, utilizando el argumento de Cramer-Wold, se sigue el resultado. ■

A continuación se enuncian dos teoremas cuyas demostraciones son totalmente análogas a la de los Teoremas 2.2 y 2.3, respectivamente.

Teorema 2.5. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de la misma forma que en el Teorema 2.4, se tiene

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\boldsymbol{\Gamma}(h), n^{-1} \mathbf{V}).$$

Teorema 2.6. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.4, se cumple

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(h), n^{-1} \mathbf{D}_h \mathbf{V} \mathbf{D}_h^T)$$

donde

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) = (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h))^T$$

$$\mathbf{R}(h) = (\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^T.$$

2.3. Proceso INARMA(1,1)

El proceso mixto INARMA(1,1) fue introducido en el apartado 1.3.6 y, como se vio en dicho apartado, este proceso se construye uniendo el proceso INAR(1) y el INMA(1), a través de un proceso de innovación común, $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Así, el proceso INARMA(1,1) se define como:

$$X_t = Z_{t-1} + \beta \circ \epsilon_t \quad (2.33)$$

donde

$$Z_t = \alpha \circ Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.34)$$

donde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha \circ Z_{t-1}$ y $\beta \circ \epsilon_t$ están definidos en dicho apartado.

En el apartado 1.3.6 se obtuvo la media, varianza, función de autocovarianza del proceso INARMA(1, q). En esta sección se estudia la distribución asintótica de la media muestral, función de autocovarianza y autocorrelación muestral del proceso INARMA(1,1) definido por las ecuaciones (2.34) y (2.35).

Es fácil verificar que la F.G.P. del proceso INARMA(1,1), $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ está dada por:

$$G_{X_t}(s) = E [s^{Z_{t-1}}] G_\epsilon(1 - \beta + \beta s), \quad |s| \leq 1. \quad (2.35)$$

Además, las funciones generatrices de probabilidad conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$, $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$ para $h, l, p > 0$ y $|s_i| \leq 1$, e $i = 1, 2, 3, 4$, se obtienen de forma análoga a las del proce-

so INAR(1) y están dadas por:

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2) = & G_\epsilon(1 - \beta + \beta s_2) E \left[(s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2))^{Z_{t-1}} \prod_{i=0}^{h-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_2) \right. \\
& \left. G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_1)(1 - \alpha^{h-1} + \alpha^{h-1} s_2)) \right],
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2, s_3) = & G_\epsilon(1 - \beta + \beta s_3) G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_2)(1 - \alpha^{l-1} + \alpha^{l-1} s_3)) \\
& \prod_{i=0}^{h-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)) \prod_{i=0}^{l-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_3)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_1)(1 - \alpha^{h-1} + \alpha^{h-1} s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)))$$

$$E \left[(s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)))^{Z_{t-1}} \right]$$

y

$$G(s_1, s_2, s_3, s_4) = G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_1)(1 - \alpha^{h-1} + \alpha^{h-1} s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))))$$

$$E \left[(s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))))^{Z_{t-1}} \right]$$

$$\prod_{i=0}^{p-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_4) \prod_{i=0}^{l-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))$$

$$G_\epsilon(1 - \beta + \beta s_4) G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_3)(1 - \alpha^{p-1} + \alpha^{p-1} s_4))$$

$$G_\epsilon((1 - \beta + \beta s_2)(1 - \alpha^{l-1} + \alpha^{l-1} s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4)))$$

$$\prod_{i=0}^{h-2} G_\epsilon(1 - \alpha^i + \alpha^i s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3(1 - \alpha^p + \alpha^p s_4)))$$

(2.38)

respectivamente. La distribución de Poisson es quizá la más utilizada en los procesos de conteo, en la misma forma que la distribución Gaussiana en los procesos ARMA estándar. Además, cabría esperar que la distribución de Poisson para el proceso INARMA(1,1) juegue un papel similar a la distribución normal en los modelos estándar de series temporales. A continuación demostramos que, si la sucesión $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tiene distribución de Poisson, entonces X_t tiene distribución de Poisson.

Supongamos que ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ y F.G.P. $G_\epsilon(s) = e^{-\lambda(1-s)}$, entonces por la ecuación (2.36) se tiene que:

$$G_{X_t}(s) = e^{\left\{ -\frac{\lambda(1+(1-\alpha)\beta)(1-s)}{1-\alpha} \right\}} \quad (2.39)$$

Esto demuestra que X_t tiene distribución de Poisson con media $\mu = \frac{\lambda(1+(1-\alpha)\beta)}{1-\alpha}$.

También, se tiene que la función de autocovarianza del proceso INARMA(1,1) con marginal de Poisson, está dada por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{\lambda\alpha^h}{1-\alpha} + \lambda\beta\alpha^{h-1}, & h > 0 \\ \mu, & h = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Si ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ entonces por la ecuación (2.40) X_t tiene distribución de Poisson con parámetro $(\lambda/(1-\alpha) + \lambda\beta)$ para todo t y la F.G.P.

conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$, para $h > 0$ está dada por:

$$G(s_1, s_2) = e^{\left\{-\lambda (\beta(1-s_1) + (\alpha^{h-1} + \beta)(1-s_2) - \alpha^{h-1}\beta(1-s_1)(1-s_2))\right\}} \\ e^{\left\{-\frac{\lambda}{1-\alpha} (1-s_1 + (1-\alpha^{h-1} + \alpha^h s_1)(1-s_2))\right\}}, \quad (2.41)$$

Por la ecuación (2.38) la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$, para $h, l > 0$ queda recogida como:

$$G(s_1, s_2, s_3) = e^{\left\{-\lambda (1 - (1 - \beta + \beta s_1) (1 - \alpha^{h-1} + \alpha^{h-1} s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)))\right\}} \\ e^{\left\{-\lambda [(1 - (1 - \beta + \beta s_2) (1 - \alpha^{l-1} + \alpha^{l-1} s_3)) + \beta(1 - s_3)]\right\}} \\ e^{\left\{-\frac{\lambda}{1-\alpha} (1 - s_1 (1 - \alpha^h + \alpha^h s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)))\right\}} \\ e^{\left\{-\frac{\lambda}{1-\alpha} [(1 - \alpha^{h-1}) (1 - s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)) + (1 - \alpha^{l-1}) (1 - s_3)]\right\}} \\ e^{\left\{-\frac{\lambda}{1-\alpha} (1 - \alpha^{l-1}) (1 - s_3)\right\}} \quad (2.42)$$

y por la ecuación (2.39) la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$

para $h, l, p > 0$ está dada por:

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2, s_3, s_4) = & e^{\lambda(1 - \beta + \beta s_1) (1 - \alpha^{h-1} + \alpha^{h-1} s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3 (1 - \alpha^p + \alpha^p s_4)))} \\
& e^{\lambda(1 - \beta + \beta s_2) (1 - \alpha^{l-1} + \alpha^{l-1} s_3 (1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))} \\
& e^{\left\{ -\lambda [\beta(1 - s_4) + (1 - (1 - \beta + \beta s_3) (1 - \alpha^{p-1} + \alpha^{p-1} s_4))] \right\}} \\
& e^{\left\{ \frac{\lambda s_1}{1 - \alpha} (1 - \alpha^h + \alpha^h s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3 (1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))) \right\}} \\
& e^{\left\{ -\frac{\lambda}{1 - \alpha} (1 - \alpha^{h-1}) (1 - s_2 (1 - \alpha^l + \alpha^l s_3 (1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))) \right\}} \\
& e^{\left\{ -\frac{\lambda}{1 - \alpha} [(1 - \alpha^{l-1}) (1 - s_3 (1 - \alpha^p + \alpha^p s_4))] \right\}} \\
& e^{\left\{ -\frac{\lambda}{1 - \alpha} [1 + (1 - \alpha^{p-1}) (1 - s_4)] - 2\lambda \right\}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Ahora, diferenciando las funciones generatrices de probabilidad conjunta dadas por las ecuaciones (2.42)-(2.44) con respecto a s_1, s_2, s_3, s_4 y evaluando en $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ y, considerando $E[X_t] = \mu$, se obtienen los siguientes momentos del proceso INARMA(1,1) para $h, l, p \geq 0$:

$$E[X_t X_{t+h}] = \mu^2 + \gamma(h), \tag{2.44}$$

$$E[X_t X_{t+h} X_{t+h+l}] = \mu^3 + \mu[\gamma(h) + \gamma(l) + \gamma(h+l)] + \gamma(h+l) \tag{2.45}$$

y

$$\begin{aligned}
E[X_t X_{t+h} X_{t+h+l} X_{t+h+l+p}] &= \mu^4 + \gamma(l)\gamma(h+l+p) + \gamma(h+l)\gamma(l+p) \\
&+ \mu^2 [\gamma(h) + \gamma(l) + \gamma(p) + \gamma(h+l) + \gamma(l+p)] \\
&+ \mu [\gamma(h+l) + \gamma(l+p) + 2\gamma(h+l+p)] \\
&+ \gamma(h+l+p)[1 + \mu^2] + \gamma(h)\gamma(p).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Utilizando las ecuaciones (2.45)-(2.47) se obtiene el momento de cuarto orden con respecto a la media, es decir:

$$\begin{aligned}
&E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+h+l} - \mu)(X_{t+h+l+p} - \mu)] \\
&= \gamma(h)\gamma(p) + \gamma(l)\gamma(h+l+p) + \gamma(h+l)\gamma(l+p) + \gamma(h+l+p)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Los momentos obtenidos anteriormente son útiles para demostrar los Lemas 2.5 y 2.6 que se presentan en el siguiente apartado.

2.3.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral cuando el ruido tiene distribución marginal de Poisson

Dadas las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n del proceso INARMA(1,1) los estimadores que se utilizan para la función de autocovarianza $\gamma(h)$ y la función de autocorrelación, $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$, son los definidos en el apartado 2.1.1.

Teniendo en cuenta los momentos calculados anteriormente y $\tilde{\gamma}_n(h)$ definido por la ecuación (2.13), se obtiene, entonces, los siguientes resultados.

Lema 2.5. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INAR-MA(1,1) con distribución marginal de Poisson, entonces,

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV [\bar{X}_n] = \frac{2\gamma(1)}{1-\alpha} + \mu$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) = \begin{cases} \frac{\gamma(h)}{1-\alpha} (1 + \alpha + h(1-\alpha)) & h \geq 1, \\ \frac{2}{1-\alpha} (\mu(1-\alpha) + \gamma(1)) & h = 0. \end{cases}$$

Demostración.

Utilizando los mismos argumentos de la demostración del Lema 2.1 y la ecuación (2.45) se obtiene:

$$E [\bar{X}_n^2] = \frac{1}{n^2} \left(n(\mu + \mu^2) + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} \left(\mu^2 + \frac{\lambda\alpha^j}{1-\alpha} + \lambda\alpha^{j-1}\beta \right) \right)$$

$$= \frac{2\lambda}{n^2} \left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{\beta}{1-\alpha} \right) \left(n-1 - \frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha} \right) + \mu^2 + \frac{\mu}{n}$$

Restando μ^2 en ambos lados de la última ecuación, se obtiene la varianza de \bar{X}_n , es decir,

$$V [\bar{X}_n] = \frac{2\lambda}{n^2} \left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{\beta}{1-\alpha} \right) \left(n-1 - \frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha} \right) + \frac{\mu}{n}$$

Multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene (i). Para (ii), una vez más se utilizan los argumentos del Lema 2.1, entonces por las ecuaciones (2.45) y (2.46), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
E [\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(h)] &= \mu\gamma(h) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \gamma(h+j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \gamma(h) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \gamma(j)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Ahora, en la ecuación (2.49) se consideran dos caso $h > 0$ y $h = 0$. Primero se analiza el caso $h > 0$, entonces la ecuación (2.49) es igual a:

$$\begin{aligned}
E [\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(h)] &= \frac{\gamma(h)}{n} \left(\frac{\alpha(1 - \alpha^{n-1})}{1 - \alpha} - \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha(1 - n\alpha^{n-1})}{1 - \alpha} + \frac{\alpha^2(1 - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha)^2} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha} + \lambda\alpha^{-1}\beta \right) \left(\frac{\alpha(h\alpha^{h-1} - n\alpha^{n-1})}{1 - \alpha} + \frac{\alpha^2(\alpha^{h-1} - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha)^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha} + \lambda\alpha^{-1}\beta \right) \left(\frac{\alpha(\alpha^{h-1} - \alpha^{n-1})}{1 - \alpha} \right) \\
&\quad + \mu\gamma(h) + \frac{\gamma(h)}{n} \left(h - \frac{h(h-1)}{2n} \right).
\end{aligned}$$

Restando $E[\bar{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(h)] = \mu\gamma(h)$, multiplicando por n y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) = \frac{\gamma(h)}{1 - \alpha} (1 + \alpha + h(1 - \alpha)), \quad h > 0.$$

Ahora, se considera el caso $h = 0$, entonces la ecuación (2.49) es igual a:

$$E [\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(0)] = \mu\gamma(0) + \frac{2\gamma(0)}{n} + \frac{2}{n} \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha} + \lambda\beta\alpha^{-1} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \alpha^j \tag{2.49}$$

Restando $E[\bar{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(0)] = \mu^2$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} Cov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(0)) &= \frac{2}{n} \left(\frac{\lambda}{1-\alpha} + \lambda\beta\alpha^{-1} \right) \left(\frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha} - \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha(1-n\alpha^{n-1})}{1-\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha^2(1-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)^2} \right) \right) + \frac{2\mu}{n} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Multiplicando por n y después tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, en ambos lados de la ecuación (2.51), se obtiene (ii) para $h = 0$. Esto completa la demostración. ■

Lema 2.6. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso INARMA(1,1) de la misma forma que en el Lema 2.5, entonces, para $h \geq l$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \begin{cases} \frac{\gamma(h)\gamma(l)}{1-\alpha^2} (\alpha^2 + \alpha^{2h} + \alpha^{2l} + \alpha^{2(h-l)} + (2h-1)(1-\alpha^2)) \\ \quad + \frac{1}{1-\alpha} (\gamma(h)(\alpha + (h-l)(1-\alpha)) + \alpha^{h-l}\gamma(l)), & l \geq 1. \\ \frac{\mu\gamma(h)}{1-\alpha^2} (2\alpha^2 + 2\alpha^{2h} + (2h+1)(1-\alpha^2)) \\ \quad + \frac{1}{1-\alpha} (\alpha\gamma(h) + \mu\alpha^h + h(1-\alpha)\gamma(h)), & l = 0. \end{cases}$$

Demostración.

El esquema de esta demostración es similar a la del Lema 2.2, entonces utilizando la ecuación (2.47) y $\gamma(h) = \gamma(-h)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\gamma}_n(h)\tilde{\gamma}_n(l)] &= \gamma(h)\gamma(l) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{h-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{h-l-1} (n-i)\gamma(h)(1+\gamma(l)) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h-l}^{n-1} (n-i)\gamma(l)\alpha^i (1+\gamma(h)\alpha^i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l)\alpha^{2i} \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\alpha^i (1+\gamma(l)\alpha^i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{l-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=l}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l)\alpha^{2i}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Si $l \geq 1$, entonces la última ecuación es igual a:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\gamma}_n(h)\tilde{\gamma}_n(l)] &= \gamma(h)\gamma(l) + \frac{\gamma(h)}{n^2} \left(n(h-l) - \frac{(h-l)(h-l-1)}{2} \right) \\
&+ \frac{\gamma(h)\gamma(l)(hl-n-l^2)}{n^2} + \frac{2\gamma(h)\gamma(l)}{n^2} \left(nh - \frac{h(h-1)}{2} \right) \\
&+ \frac{\gamma(h)\gamma(l)}{n} \left(\frac{\alpha^2(1-\alpha^{2n-2})}{1-\alpha^2} - \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha^2(1-n\alpha^{2n-2})}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^4(1-\alpha^{2n-2})}{(1-\alpha^2)^2} \right) \right) \\
&+ \frac{\gamma(h)}{n} \left(\frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha} - \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha(1-n\alpha^{n-1})}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2(1-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)^2} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l)\alpha^{2i} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=l}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\gamma(l)\alpha^{2i} \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=h-l}^{n-1} (n-i) (\gamma(h)\gamma(l)\alpha^{2i} + \gamma(l)\alpha^i).
\end{aligned}$$

Restando $E[\tilde{\gamma}_n(h)]E[\tilde{\gamma}_n(l)] = \gamma(h)\gamma(l)$, multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) &= \frac{\gamma(h)\gamma(l)}{1-\alpha^2} (\alpha^2 + \alpha^{2h} + \alpha^{2l} + \alpha^{2(h-l)} + (2h-1)(1-\alpha^2)) \\ &+ \frac{1}{1-\alpha} (\gamma(h)(\alpha + (h-l)(1-\alpha)) + \alpha^{h-l}\gamma(l)). \end{aligned}$$

Ahora, si $l = 0$, entonces la ecuación (2.52) es igual a:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\gamma}_n(h)\tilde{\gamma}_n(0)] &= \mu\gamma(h) + \frac{1}{n^2} (2nh - h(h-1))\mu\gamma(h) + \frac{1}{n^2} \left(nh - \frac{h(h-1)}{2} \right) \gamma(h) \\ &+ \frac{\mu\gamma(h)}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i)\mu\gamma(h)\alpha^{2i} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\mu\gamma(h)\alpha^{2i} \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\gamma(h)\alpha^i + \frac{\mu}{n^2} \sum_{i=h}^{n-1} (n-i)\alpha^i. \end{aligned}$$

Restando $E[\tilde{\gamma}_n(h)]E[\tilde{\gamma}_n(0)] = \mu\gamma(h)$, multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(0)) &= (2h+1)\mu\gamma(h) + h\gamma(h) + \frac{2\mu\gamma(h)}{1-\alpha^2} (\alpha^2 + \alpha^{2h}) \\ &+ \frac{1}{1-\alpha} (\alpha\gamma(h) + \mu\alpha^h) \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

A continuación, se estudia la distribución asintótica de la media muestral, de la función de autocovarianza y de la autocorrelación muestral del proceso INARMA(1,1) definido por las ecuaciones (2.34) y (2.35).

Teorema 2.7. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INARMA(1,1) definido por las ecuaciones (2.34) y (2.35) y ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ para todo t , entonces

$$\tilde{\Gamma}_n(h) \xrightarrow{d} N(\Gamma(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Se observa que:

$$X_t \stackrel{d}{=} \beta \circ \epsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-1-i}$$

Una vez más se define una sucesión de $(h+2)$ -vectores aleatorios $\{\mathbf{Z}_t^m(h), t \in \mathbb{Z}\}$ por:

$$\mathbf{Z}_t^m(h) = (X_t^m, X_t^m X_t^m, X_t^m X_{t+1}^m, \dots, X_t^m X_{t+h}^m)^T,$$

donde $X_t^m = \beta \circ \epsilon_t + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \circ \epsilon_{t-1-i}$. El resto de la demostración es totalmente análoga a la del Teorema 2.1, utilizando los resultados de los Lemas 2.5 y 2.6 en lugar de los resultados de los Lemas 2.1 y 2.2. ■

A continuación se enuncian dos teoremas y se omiten sus demostraciones, ya que son totalmente análogas a las demostraciones de los Teoremas 2.2 y 2.3.

Teorema 2.8. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario de la misma forma que en el Teorema 2.7, entonces,

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Teorema 2.9. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.7, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(h), n^{-1}\mathbf{D}_h\mathbf{V}\mathbf{D}_h^T),$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_n(h) &= (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h))^T \\ \mathbf{R}(h) &= (\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^T.\end{aligned}$$

2.3.2. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral cuando el ruido tiene distribución marginal geométrica

Si ϵ_t tiene distribución geométrica con parámetro ν , entonces las funciones generatrices de probabilidad conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$, $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$ dadas en las ecuaciones (2.37), (2.38) y (2.39), respectivamente, no tienen expresiones sencillas, por lo tanto, únicamente se escriben los resultados que se derivan de dichas funciones. Así, para $h, l, p > 0$, se obtiene:

$$E[X_t] = \mu = \frac{\beta\bar{\nu}}{\nu} + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1-\alpha)},$$

$$V[X_t] = \sigma^2 = \mu + \left(\frac{\bar{\nu}\beta}{\nu}\right)^2 + \frac{\bar{\nu}^2}{\nu^2(1-\alpha^2)},$$

$$E[X_t^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + \sigma^2 + \frac{2\bar{\nu}^2\beta^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}\beta}{\nu}\right) + \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1-\alpha^3)}\right),$$

$$E[X_t^2 X_{t+h}] = \mu^3 + \mu\sigma^2 + 2\mu\gamma(h) + \gamma(h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{h-1}}{\nu^2} \left(\frac{\beta^2}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^3)} \right),$$

$$E[X_t X_{t+h}^2] = \mu^3 + \mu\sigma^2 + 2\mu\gamma(h) + \gamma(h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{2h-2}}{\nu^2} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right)$$

y

$$E[X_t X_{t+h}] = \mu^2 + \frac{\bar{\nu}\alpha^{h-1}}{\nu} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1-\alpha^2)} \right).$$

También, se verifica que el momento de cuarto orden con respecto a la media, está dado por:

$$\begin{aligned} E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+h+l} - \mu)(X_{t+h+l+p} - \mu)] &= \gamma(h)\gamma(p) + \gamma(l)\gamma(h+l+p) \\ &+ \gamma(h+l)\gamma(l+p) + \gamma(h+l+p) + \frac{6\bar{\nu}^3\alpha^{3h+2l+p-3}}{\nu^3} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3} + \frac{\bar{\nu}\alpha^3}{\nu(1-\alpha^4)} \right) \\ &+ \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{2h+l+p-2}}{\nu^2} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) (1 + 2\mu\alpha^l) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por otra parte, si al menos uno de los valores h, l, p es cero, entonces el momento de cuarto orden se obtiene a partir de la F.G.P. $G(s_1^*, s_2^*, s_4)$, donde $|s_1^*| \leq 1$, $|s_2^*| \leq 1$ y $|s_4| \leq 1$. Por ejemplo, si $h = 0$ entonces, $G(s_1^*, s_2^*, s_4) = G(s_1 s_2, s_3, s_4)$ y se deriva esta función con respecto a cada variable, es decir, s_1, s_2, s_3, s_4 y se evalúan dichas derivadas en $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 1$ y $s_4 = 1$.

Ahora, utilizando $\tilde{\gamma}_n(h)$ definida por la ecuación (2.13), se obtienen los siguientes resultados.

Lema 2.7. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INARMA(1,1) definido por las ecuaciones (2.34) y (2.35). Supongamos que el proceso de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tiene distribución marginal geométrica con parámetro ν , entonces,

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV[\bar{X}_n] = \mu + \frac{\bar{\nu}^2}{\nu^2} \left(\beta^2 + \frac{1}{1 - \alpha^2} \right) + \frac{2\bar{\nu}\alpha}{\nu(1 - \alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1 + \alpha)} \right) + \frac{2\bar{\nu}\beta}{\nu^2(1 - \alpha)}$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h))$ existe y es finito. La expresión explícita está dada en el apéndice B.

Demostración.

Utilizando los mismos argumentos de la demostración del Lema 2.1, se obtiene que:

$$V[\bar{X}_n] = \frac{\mu}{n} + \frac{\bar{\nu}^2}{n\nu^2} \left(\beta^2 + \frac{1}{1 - \alpha^2} \right) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \gamma(i)$$

Multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene (i). Ahora, para (ii) primero se considera el caso $h \geq 2$. Nuevamente se utilizan los argumentos de la demostración del Lema 2.1. Así, para $h \geq 2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \left[\gamma(j+h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{2j+h-2}}{\nu^2} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1 - \alpha^3)} \right) \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \left[\gamma(h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{j+h-2}}{\nu^2} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1 - \alpha^3)} \right) \right] \\ &+ \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \left[\gamma(j) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{j+h-2}}{\nu^2} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1 - \alpha^3)} \right) \right] \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, en ambos lados de la última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \frac{2\bar{\nu}\alpha^h}{\nu(1-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1+\alpha)}\right) + \frac{2\bar{\nu}\beta\alpha^{h-1}}{\nu^2(1-\alpha)} \\ &+ \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{h-2}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)}\right) + (h-1)\gamma(h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{h-1}}{\nu^2(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

para $h \geq 2$. Ahora, si $h = 0$ ó $h = 1$ el resultado es inmediato. ■

Antes de enunciar el siguiente lema, se observa que para $h, l \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=l}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) [E(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\ &= \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{l+h}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^2)}\right)^2 + \frac{\bar{\nu}\alpha^{l+h}}{\nu} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^2)}\right) \\ &+ \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{2l+h-1}}{\nu^2(1-\alpha)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)}\right) + \frac{4\bar{\nu}^2\mu\alpha^{2l+h}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)}\right) \\ &+ \frac{6\bar{\nu}^3\alpha^{3l+h-1}}{\nu^3(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3} + \frac{\bar{\nu}\alpha^3}{\nu(1-\alpha^4)}\right) + E[(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)^2(X_{t+l+h} - \mu)] \\ &- \gamma(h)\gamma(l) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Para la deducción de la última ecuación ver apéndice B. Ahora, estamos en condiciones de enunciar el siguiente lema.

Lema 2.8. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso INARMA(1,1) de la misma forma que en el Lema 2.7, entonces, para $h \geq l$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \\
& = \sum_{i=0}^{h-l-1} E((X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)(X_{t+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \sum_{i=s-l}^{h-1} E((X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \sum_{i=1}^{l-1} E((X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=h}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) E((X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) E((X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)).
\end{aligned}$$

Demostración.

Trivial. Consecuencia de la definición de $Cov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l))$ y la ecuación (2.54). ■

Los momentos de cuarto orden con respecto a la media están dados en la ecuación (2.53).

En los siguientes teoremas se obtiene la distribución asintótica de la media muestral, función de autocovarianza y autocorrelación muestral del proceso INARMA(1,1), cuando ϵ_t tiene distribución geométrica.

Teorema 2.10. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INARMA(1,1) definido por las ecuaciones (2.34) y (2.35) y ϵ_t tiene distribución geométrica de parámetro ν para todo t , entonces

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Trivial. Utilizando los resultados de los Lemas 2.7 y 2.8 y los argumentos de la demostración del Teorema 2.7.■

A continuación se demuestra que bajo las condiciones del Teorema 2.10, $\tilde{\gamma}_n(l)$ y $\hat{\gamma}_n(l)$ tienen la misma distribución asintótica.

Teorema 2.11. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico INARMA(1,1) de la misma forma que en el Teorema 2.10, entonces

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Trivial. Consecuencia del Teorema 2.10 y los argumentos de la demostración del Teorema 2.2.■

Teorema 2.12 Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.10, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(h), n^{-1}\mathbf{D}_h\mathbf{V}\mathbf{D}_h^T),$$

donde

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) = (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h))^T$$

$$\mathbf{R}(h) = (\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^T.$$

2.4. Proceso INARMA(1, q) con marginal de Poisson

El proceso mixto INARMA(1, q) introducido en el apartado 1.3.6 se construye uniendo dos procesos, el INAR(1) y el INMA(q), a través de un proceso de innovación común, $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Así, el proceso INARMA(1, q) está definido por:

$$X_t = Z_{t-q} + \sum_{i=1}^q \beta_i \circ \epsilon_{t+1-i} \quad (2.54)$$

donde

$$Z_t = \alpha \circ Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.55)$$

y $\alpha \in [0, 1)$ y los β_i para $i = 1, 2, \dots, q$ están definidos en el apartado 1.3.6.

Es fácil verificar que la F.G.P. de X_t está dada por:

$$G_{X_t}(s) = G_{Z_t}(s) \prod_{i=1}^q G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s), \quad |s| \leq 1. \quad (2.56)$$

Además, se puede demostrar que la F.G.P. conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$, para $h \geq 0$, $|s_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, está dada por:

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2) &= \prod_{i=1}^h G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s_2) \prod_{i=1}^k E \left[s_1^{\beta_i \circ \epsilon_{t+1-i}} s_2^{\beta_{h+i} \circ \epsilon_{t+1-i}} \right] \\ &\quad \prod_{i=k+1}^q G_\epsilon \left((1 - \alpha^{h-q+i-1} + \alpha^{h-q+i-1} s_2) (1 - \beta_i + \beta_i s_1) \right) \\ &\quad E \left((s_1 (1 - \alpha^h + \alpha^h s_2))^{Z_{t-q}} \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde $k = q - h$. Ahora, la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ para $h, l, p \geq 0$, $|s_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, está dada por:

$$\begin{aligned}
G(s_1, s_2, s_3) &= \prod_{i=1}^l G_\epsilon(1 - \beta_i + \beta_i s_3) \prod_{i=1}^h E \left(s_2^{\beta_i} \circ \epsilon_{t+h+1-i} s_3^{\beta_{i+l}} \circ \epsilon_{t+h+1-i} \right) \\
&\quad \prod_{i=0}^{l-1} E \left(s_1^{\beta_{m+1+i}} \circ \epsilon_{t-m-i} s_2^{\beta_{q-l+1+i}} \circ \epsilon_{t-m-i} s_3^{\alpha^i} \circ \epsilon_{t-m-i} \right) \\
&\quad \prod_{i=0}^{h-1} E \left(s_1^{\beta_{k+1+i}} \circ \epsilon_{t-k-i} s_2^{\alpha^i} \circ \epsilon_{t-k-i} s_3^{\alpha^{l+i}} \circ \epsilon_{t-k-i} \right) \tag{2.58} \\
&\quad \prod_{i=1}^m E \left(s_1^{\beta_i} \circ \epsilon_{t+1-i} s_2^{\beta_{i+h}} \circ \epsilon_{t+1-i} s_3^{\beta_{i+h+l}} \circ \epsilon_{t+1-i} \right) \\
&\quad E \left(s_1^{Z_{t-q}} s_2^{\alpha^h} \circ Z_{t-q} s_3^{\alpha^{h+l}} \circ Z_{t-q} \right)
\end{aligned}$$

donde $m = q - h - l$. Finalmente, la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$ para $h, l, p \geq 0$, $|s_i| \leq 1$ e $i = 1, 2, 3, 4$, está dada por:

$$\begin{aligned}
 G(s_1, s_2, s_3, s_4) = & \prod_{i=1}^p E \left(s_4^{\beta_i \circ \epsilon_{t+q-r+1-i}} \right) \prod_{i=1}^l E \left(s_3^{\beta_i \circ \epsilon_{t+h+l+1-i}} s_4^{\beta_{i+p} \circ \epsilon_{t+h+l+1-i}} \right) \\
 & \prod_{i=1}^h E \left(s_2^{\beta_i \circ \epsilon_{t+h+1-i}} s_3^{\beta_{i+l} \circ \epsilon_{t+h+1-i}} s_4^{\beta_{i+l+p} \circ \epsilon_{t+h+1-i}} \right) \\
 & \prod_{i=1}^r E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_{t+1-i}} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_{t+1-i}} s_3^{\beta_{i+h+l} \circ \epsilon_{t+1-i}} s_4^{\beta_{i+q-r} \circ \epsilon_{t+1-i}} \right) \\
 & \prod_{i=0}^{p-1} E \left(s_1^{\beta_{r+1+i} \circ \epsilon_{t-r-i}} s_2^{\beta_{d+1+i} \circ \epsilon_{t-r-i}} s_3^{\beta_{q-p+1+i} \circ \epsilon_{t-r-i}} s_4^{\alpha^i \circ \epsilon_{t-r-i}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=0}^{l-1} E \left(s_1^{\beta_{m+1+i} \circ \epsilon_{t-m-i}} s_2^{\beta_{q-l+1+i} \circ \epsilon_{t-m-i}} s_3^{\alpha^i \circ \epsilon_{t-m-i}} s_4^{\alpha^{p+i} \circ \epsilon_{t-m-i}} \right) \\
 & \prod_{i=0}^{h-1} E \left(s_1^{\beta_{k+1+i} \circ \epsilon_{t-k-i}} s_2^{\alpha^i \circ \epsilon_{t-k-i}} s_3^{\alpha^{l+i} \circ \epsilon_{t-k-i}} s_4^{\alpha^{l+p+i} \circ \epsilon_{t-k-i}} \right) \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

$$E \left(s_1^{Z_{t-q}} s_2^{\alpha^h \circ Z_{t-q}} s_3^{\alpha^{h+l} \circ Z_{t-q}} s_4^{\alpha^{q-r} \circ Z_{t-q}} \right)$$

donde $d = q - l - p$, $r = q - h - l - p$ y las expresiones explícitas de

$$E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_t} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_t} \right), \quad E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_t} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_t} s_3^{\beta_{i+h+l} \circ \epsilon_t} \right)$$

y

$$E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_t} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_t} s_3^{\beta_{i+h+l} \circ \epsilon_t} s_4^{\beta_{i+q-r} \circ \epsilon_t} \right), \text{ están dadas en el apéndice B.}$$

En los apartados 2.3.1 y 2.3.2 se presentó el proceso INARMA(1,1) y se utilizaron las distribuciones de Poisson y geométrica, como distribución marginal del proceso de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, obteniendo resultados análogos en ambos casos. Pero, con la distribución geométrica las operaciones algebraicas resultaron complicadas. En esta sección se utiliza únicamente la distribución de Poisson para el proceso de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pues con la distribución geométrica las operaciones algebraicas resultan muy tediosas e intratables para el proceso INARMA(1, q). A continuación se demuestra que, si la sucesión $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tiene distribución de Poisson, entonces X_t tiene distribución marginal de Poisson.

Supongamos que ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ y F.G.P. dada por $G_\epsilon(s) = e^{-\lambda(1-s)}$, entonces de la ecuación (2.57) se sigue que:

$$G_{X_t}(s) = e^{-\lambda \left(\frac{1}{1-\alpha} + b \right) (1-s)} \quad (2.60)$$

Esto demuestra que X_t tiene distribución de Poisson con media

$$\mu = \lambda \left(\frac{1}{1-\alpha} + b \right)$$

siendo $b = \sum_{i=1}^q \beta_i$

La F.G.P. conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$ para $h \geq 0$ está dada por:

$$G(s_1, s_2) = e^{\left\{ -\lambda(1-s_2) \sum_{i=1}^h \beta_i - \frac{\lambda}{1-\alpha} (1-s_1(1-\alpha^h + \alpha^h s_2)) \right\}}$$

$$\prod_{i=1}^k e^{-\lambda(\beta_i + \beta_{h+i} - \beta_i \beta_h - s_1 \beta_i (1-\beta_h) - s_2(\beta_{h+i} - \beta_i \beta_h) - s_1 s_2 \beta_i \beta_h)}$$

$$\prod_{i=k+1}^q e^{-\lambda(1 - (1-\beta_i + \beta_i s_1)(1 - \alpha^{h-q-1+i} + \alpha^{h-q-1+i} s_2))}$$
(2.61)

y, para obtener las funciones generatrices de probabilidad conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$ para $h, l, p \geq 0$, se utilizan las ecuaciones (2.59)-(2.60), respectivamente, y, además, la suposición de que ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ y que

$$E \left(s_1^{Z_{t-q}} s_2^{\alpha^h \circ Z_{t-q}} s_3^{\alpha^{h+l} \circ Z_{t-q}} \right) = E \left[(s_1(1-\alpha^h + \alpha^h s_2(1-\alpha^l + \alpha^l s_3)))^{Z_{t-q}} \right].$$

Sin embargo, no tienen expresiones manejables, por lo tanto, únicamente se escriben los resultados que se derivan de su utilización. Así, considerando $E[X_t] = \mu$ se obtienen los siguientes momentos del proceso INARMA(1, q) para $h, l, p \geq 0$:

$$E[X_t X_{t+h}] = \mu^2 + \gamma(h) \tag{2.62}$$

donde

$$\gamma(h) = \frac{\lambda \alpha^h}{1-\alpha} + \lambda \beta_h \sum_{i=1}^{q-h} \beta_i + \lambda \sum_{i=q-h+1}^q \beta_i \alpha^{h-q-1+i}, \quad h \geq 0 \text{ y } \beta_0 = 1, \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
E[X_t X_{t+h} X_{t+h+l}] &= \mu^3 + \mu(\gamma(h) + \gamma(l) + \gamma(h+l)) + \frac{\lambda \alpha^{h+l}}{1-\alpha} + \lambda \beta_h \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^i \beta_{q-h-l+1+i} \\
&\quad + \lambda \beta_h (\beta_l + \mu(\beta_l - \beta_{h+l})) \sum_{i=1}^{q-h-l} \beta_i + \lambda \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^{i+l} \beta_{q-h+1+i}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

y el momento de cuarto orden con respecto a la media, está dado por:

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+h+l} - \mu)(X_{t+q-r} - \mu)] &= \gamma(h)\gamma(p) + \gamma(l)\gamma(q-r) \\
&\quad + \gamma(h+l)\gamma(l+p) + \frac{\lambda \alpha^{q-r}}{1-\alpha} + \lambda \mu^2 \sum_{i=1}^r \beta_i \beta_h (\beta_l(\beta_p - \beta_{l+p}) - \beta_{h+l}(\beta_p - \beta_{q-r})) \\
&\quad + \lambda \mu \left(2 \sum_{i=1}^r \beta_i \beta_h (\beta_l \beta_p - \beta_l \beta_{l+p} - \beta_{h+l} \beta_p) + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i \beta_{r+1+i} \beta_h (\beta_l - \beta_{h+l}) \right) \\
&\quad + \lambda \left(\sum_{i=1}^r \beta_i \beta_h \beta_l \beta_p + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i \beta_{r+1+i} \beta_h \beta_l + \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^{i+p} \beta_{m+1+i} \beta_h + \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^{i+l+p} \beta_{k+1+i} \right) \\
&\quad + \lambda \gamma(l) \sum_{i=1}^r \beta_i (\beta_h \beta_l \beta_p + \beta_h (1 - \beta_l) \beta_{l+p} + (1 - \beta_h) \beta_{h+l} \beta_p - (\beta_{h+l} + \beta_h (1 - \beta_{h+l})) \beta_{q-r}) \\
&\quad + \lambda \gamma(h+l) \sum_{i=1}^d \beta_i \beta_l (\beta_p - \beta_{l+p})
\end{aligned} \tag{2.65}$$

En el siguiente apartado se estudia algunas propiedades asintóticas de los momentos del proceso INARMA(1, q), cuando la sucesión $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tiene distribución de Poisson con parámetro λ y $\alpha \in [0, 1)$.

2.4.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral

Teniendo en cuenta los momentos obtenidos anteriormente en las ecuaciones (2.63)-(2.66) y sea $\tilde{\gamma}_n(h)$ como en la ecuación (2.13), entonces se obtienen los siguientes resultados.

Lema 2.9. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INARMA(1, q) con distribución marginal de Poisson, entonces,

$$\begin{aligned}
 (i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV(\bar{X}_n) &= \mu + \frac{2\alpha\lambda}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\lambda(1+b)}{1-\alpha} + 2\lambda \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i \sum_{j=1}^{q-i} \beta_j, \\
 (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \frac{2\lambda\alpha^h}{(1-\alpha)^2} + \frac{\lambda(h-1)\alpha^h}{1-\alpha} + \frac{\lambda\beta_h \left(1 + \sum_{i=1}^{q-h} \beta_i\right)}{1-\alpha} \\
 &+ \lambda \sum_{j=0}^q \beta_j \left[(\beta_h(1+\mu) - \mu\beta_{h+j}) \sum_{i=1}^{q-h-j} \beta_i + \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \beta_{q-j-h+1+i} \right] + \lambda \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^{j-1} \alpha^{i+h} \beta_{q-j+1+i} \\
 &+ \lambda \sum_{j=1}^{h-1} \left(\beta_j (\beta_{h-j}(1+\mu) - \mu\beta_h) \sum_{i=1}^{q-h} \beta_i + \beta_j \sum_{i=0}^{h-j-1} \alpha^i \beta_{q-h+1+i} + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha^{i+h-j} \beta_{q-j+1+i} \right) \\
 &+ \frac{\lambda}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \beta_{q-h+1+i} + \lambda\beta_h \sum_{j=h}^{q-1} (\beta_{j-h}(1+\mu) - \mu\beta_j) \sum_{i=1}^{q-j} \beta_i
 \end{aligned}$$

Demostración.

Utilizando los mismos argumentos de la demostración del Lema 2.1 y la ecuación (2.63), se tiene que:

$$E \left[\overline{X}_n^2 \right] = \frac{\mu}{n} + \mu^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} \gamma(j)$$

Restando $[E(\overline{X}_n)]^2 = \mu^2$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene la varianza de \overline{X}_n , es decir:

$$V \left[\overline{X}_n \right] = \frac{\mu}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} \gamma(j)$$

Multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nV[\overline{X}_n] = \mu + \frac{2\alpha\lambda}{(1-\alpha)^2} + 2\lambda \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i \sum_{j=1}^{q-i} \beta_j + 2\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=q-i+1}^q \beta_j \alpha^{i-q-1+j}.$$

Ahora, es fácil verificar que el último término de la ecuación anterior es igual a $2\lambda(1+b)/(1-\alpha)$, esto completa la demostración de (i). Para (ii), se observa que:

$$\begin{aligned} E \left[\overline{X}_n \tilde{\gamma}_n(h) \right] &= E \left(\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_t \sum_{s=1}^n (X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) [E(X_t X_{t+j} X_{t+j+h}) - \mu^3 - \mu(\gamma(j) + \gamma(j+h))] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) [E(X_t X_{t+j} X_{t+h}) - \mu^3 - \mu(\gamma(j) + \gamma(h-j))] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) [E(X_t X_{t+h} X_{t+j}) - \mu^3 - \mu(\gamma(j) + \gamma(j-h))] \end{aligned} \tag{2.66}$$

Utilizando la ecuación (2.65), restando $E[\overline{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(h)] = \mu\gamma(h)$ y después multiplicando por n en ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \frac{\lambda\alpha^h}{1-\alpha} \left((h-1) \left(1 - \frac{h}{2n}\right) + \frac{1}{1-\alpha} \left(2 - \frac{h}{n}\right) - \frac{\alpha(2 - \alpha^n - \alpha^{n-h})}{n(1-\alpha)^2} \right) \\
 &+ \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\beta_j (\beta_h(1+\mu) - \mu\beta_{h+j}) \sum_{i=1}^{k-j} \beta_i + \beta_j \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \beta_{k-j+1+i} + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha^{i+h} \beta_{q-j+1+i} \right) \\
 &+ \lambda \sum_{j=1}^{h-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\beta_j (\beta_{h-j}(1+\mu) - \mu\beta_h) \sum_{i=1}^k \beta_i + \beta_j \sum_{i=0}^{h-j-1} \alpha^i \beta_{k+1+i} + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha^{i+h-j} \beta_{q-j+1+i} \right) \\
 &+ \lambda \sum_{j=h}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\beta_h (\beta_{j-h}(1+\mu) - \mu\beta_j) \sum_{i=1}^{q-j} \beta_i + \beta_h \sum_{i=0}^{j-h-1} \alpha^i \beta_{q-j+1+i} + \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^{i+j-h} \beta_{k+1+i} \right)
 \end{aligned}$$

Ahora, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, en ambos lados de la última ecuación se sigue

(ii). ■

Antes de enunciar el siguiente lema, se demuestra que para $s, l \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[(X_t - \mu)(X_{t+s} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+l} - \mu)]$$

existe y es finito. El cálculo de esta expresión está dada en el apéndice B. Ahora, estamos en condiciones de calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l))$, el cual se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2.10. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso INARMA(1, q) de la misma forma que en el Lema 2.9, entonces, para $h, l \geq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \\
& = \sum_{i=0}^{h-1} E((X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu)(X_{t+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=h}^{n-1} E((X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+l} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \sum_{i=1}^{l-1} E((X_t - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)) \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l}^{n-1} E((X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l))
\end{aligned}$$

Demostración.

Totalmente análoga a la del Lema 2.4. ■

La expresión explícita del segundo sumando está dada en el apéndice B y el último término es idéntico al segundo, sustituyendo h por l y viceversa. Los momentos de cuarto orden con respecto a la media están dados en la ecuación (2.66).

A continuación se obtiene la distribución asintótica de los momentos del proceso INARMA(1, q) con distribución marginal de Poisson.

Teorema 2.13. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INARMA(1, q) definido por las ecuaciones (2.55) y (2.56) y ϵ_t tiene distribución de

Poisson con parámetro λ para todo t , entonces,

$$\tilde{\Gamma}_n(h) \xrightarrow{d} N(\Gamma(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Se observa que:

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^q \beta_i \circ \epsilon_{t+1-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \circ \epsilon_{t-q-i}$$

Ahora, se define una sucesión de $(h+2)$ -vectores aleatorios $\{\mathbf{Z}_t^{m+q-1}(h), t \in \mathbb{Z}\}$ por:

$$\mathbf{Z}_t^{m+q-1}(h) = (X_t^{m+q-1}, X_t^{m+q-1} X_t^{m+q-1}, X_t^{m+q-1} X_{t+1}^{m+q-1}, \dots, X_t^{m+q-1} X_{t+h}^{m+q-1})^T,$$

donde $X_t^{m+q-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \circ \epsilon_{t-q-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \circ \epsilon_{t+1-i}$.

Por otra parte, utilizando los argumentos de la demostración del Teorema 2.1, se tiene que $\{\mathbf{Z}_t^{m+q-1}(h), t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso estrictamente estacionaria $(m+h+q-1)$ -dependiente.

Ahora, el resto de la demostración es totalmente análoga a la del Teorema 2.1. ■

A continuación se presentan dos teoremas y se omiten sus demostraciones, ya que son totalmente análogas a las demostraciones de los Teoremas 2.2 y 2.3, utilizando los resultados de los Lemas 2.9 y 2.10 en lugar de los resultados de los Lemas 2.1 y 2.2.

Teorema 2.14. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario de la misma forma que en el Teorema 2.13, entonces,

$$\hat{\Gamma}_n(h) \xrightarrow{d} N(\Gamma(h), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Teorema 2.15. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.13, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{R}}_n(h) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(h), n^{-1} \mathbf{D}_h \mathbf{V} \mathbf{D}_h^T),$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_n(h) &= (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1), \hat{\rho}_n(2), \dots, \hat{\rho}_n(h))^T \\ \mathbf{R}(h) &= (\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^T. \end{aligned}$$

2.5. Proceso INMAG(1)

En el apartado 1.4.1 se estudió el proceso INMAG(1) y se obtuvo la media, varian-za, función de autocovarianza y función de autocorrelación. En esta sección se estudia la distribución asintótica para los estimadores de los momentos mencionados anterior-mente.

A continuación se presentan algunos momentos del proceso estocástico estacionario INMAG(1) definido por la ecuación (1.18), útiles para el estudio de la distribución asintótica de $\hat{\gamma}_n(h)$ y $\hat{\rho}_n(h)$, los cuales se obtienen directamente de la ecuación (1.18) y las propiedades del operador ' \odot ':

$$E[X_t^2] = (1 + \beta^2) \sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + ((1 + \beta)\mu_\epsilon)^2, \quad (2.67)$$

$$E[X_t X_{t+1}] = (1 + \beta)^2 \mu_\epsilon^2 + \beta \sigma_\epsilon^2, \quad (2.68)$$

$$E[X_t X_{t+h}] = (1 + \beta)^2 \mu_\epsilon^2, \quad h > 1, \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}
E[X_t^3] &= E[I_{t-1}|\beta||\epsilon_{t-1}|(1+|\beta|(|\epsilon_{t-1}|-1)(3+(|\epsilon_{t-1}|-2)|\beta|))] \\
&\quad +3\mu_\epsilon(\beta^2\sigma_\epsilon^2+|\beta|(1-|\beta|)\mu_{|\epsilon|}+\beta^2\mu_\epsilon^2) \\
&\quad +3\beta\mu_\epsilon(\sigma_\epsilon^2+\mu_\epsilon^2)+E[\epsilon_t^3],
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$E[X_tX_{t+1}X_{t+2}] = (1+\beta)^3\mu_\epsilon^3+2\beta(1+\beta)\mu_\epsilon\sigma_\epsilon^2, \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
E[X_t^2X_{t+1}] &= (1+2\beta+3\beta^2+\beta^3)\mu_\epsilon^3+(1+3\beta^2+\beta^3)\mu_\epsilon\sigma_\epsilon^2 \\
&\quad +|\beta|(1-|\beta|)(1+\beta)\mu_{|\epsilon|}+\beta E[\epsilon_t^3],
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
E[X_tX_{t+1}^2] &= (1+3\beta+2\beta^2+\beta^3)\mu_\epsilon^3+(1+3\beta+\beta^3)\mu_\epsilon\sigma_\epsilon^2 \\
&\quad +\beta|\beta|(1-|\beta|)\mu_\epsilon\mu_{|\epsilon|}+|\beta|(1-|\beta|)E[\epsilon_t|\epsilon_{t-1}|] \\
&\quad +\beta^2E[\epsilon_t^3],
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
E[X_t^4] &= 6\beta^2E[|\epsilon_{t-1}|(|\epsilon_{t-1}|-1)(3+(|\epsilon_{t-1}|-2)|\beta|)] \\
&\quad +\beta^4E[|\epsilon_{t-1}|(|\epsilon_{t-1}|-1)(|\epsilon_{t-1}|-2)(|\epsilon_{t-1}|-3)] \\
&\quad +6E[\epsilon_t^2](\beta^2\mu_\epsilon^2+\beta^2\sigma_\epsilon^2+|\beta|(1-|\beta|)\mu_{|\epsilon|}) \\
&\quad +4\mu_\epsilon E[I_{t-1}|\beta||\epsilon_{t-1}|(1+|\beta|(|\epsilon_{t-1}|-1)(3+(|\epsilon_{t-1}|-2)|\beta|))] \\
&\quad -|\beta|(10-11|\beta|)\mu_{|\epsilon|}+4|\beta|\mu_\epsilon E[\epsilon_t^3]+E[\epsilon_t^4],
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$E[X_tX_{t+1}X_{t+2}X_{t+3}] = (1+\beta)^4\mu_\epsilon^4+3\beta(1+\beta)^2\mu_\epsilon^2\sigma_\epsilon^2+\beta^2\sigma_\epsilon^4, \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
E [X_t^2 X_{t+1}^2] &= (\beta^2 \sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + \beta^2 \mu_\epsilon^2) (\mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 + 2\beta \mu_\epsilon^2) \\
&+ (\beta^2 \sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + \beta^2 \mu_\epsilon^2)^2 + \beta^2 E [\epsilon_t^4] \\
&+ |\beta|(1 - |\beta|)E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}] + \beta^2 (1 - |\beta|)\mu_\epsilon E[\epsilon_t | \epsilon_t] \\
&+ (\mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2) (\mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 + 2\beta \mu_\epsilon^2 + 4\beta^2 \mu_\epsilon^2) \\
&+ 2\beta \mu_\epsilon (1 + \beta^2) E [\epsilon_t^3],
\end{aligned} \tag{2.76}$$

y

$$\begin{aligned}
E [X_t X_{t+1}^2 X_{t+2}] &= \beta \mu_\epsilon^2 (1 + \beta) (\beta^2 \sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + \beta^2 \mu_\epsilon^2) \\
&+ (\mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2) ((1 + 3\beta)\mu_\epsilon^2 + 2\beta^2 (\mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2)) + 2\beta^2 \mu_\epsilon^4 \\
&+ \mu_\epsilon (1 + \beta) (|\beta|(1 - |\beta|)E[\epsilon_t | \epsilon_t] + \beta^2 E [\epsilon_t^3]) \\
&+ \beta \mu_\epsilon (1 + \beta)^2 E [\epsilon_t^3]
\end{aligned} \tag{2.77}$$

2.5.1. Distribución asintótica de la función de autocovarianza y autocorrelación muestral

Los estimadores que se estudian para la función de autocovarianza $\gamma(h)$ y la función de autocorrelación, $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$, a partir de las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n del proceso INMAG(1), tienen las siguientes expresiones:

$$\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+h} - \bar{X}_n), \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$\hat{\rho}_n(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)},$$

respectivamente, siendo $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$.

Si los momentos del proceso INMAG(1) definidos por las ecuaciones (2.68)-(2.78) existen y son finitos; y además, si $E[X_t] = \mu$ es conocido, se define

$$\tilde{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)$$

y se obtienen, entonces, los siguientes resultados.

Lema 2.11. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INMAG(1) y $E[\epsilon_t^k] < \infty$, $E[|\epsilon_t|^k] < \infty$, para $k = 1, 2, 3$, $E[\epsilon_t|\epsilon_t] < \infty$, entonces,

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} nV[\bar{X}_n] = (1 + \beta)^2 \sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + 2\beta\sigma_\epsilon^2$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^1 E[X_t(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)] \\ + \sum_{i=1}^2 E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)X_{t+i}] - 4\mu\gamma(1), & h = 1 \\ 2E[X_t(X_t - \mu)^2] + E[X_t(X_{t+1} - \mu)^2] \\ + E[(X_t - \mu)^2 X_{t+1}] - 3\mu\gamma(0), & h = 0. \end{cases}$$

Demostración.

Se observa que:

$$E[\bar{X}_n^2] = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{t=1}^n E[X_t^2] + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-t} E[X_t X_{t+j}] \right)$$

Por la ecuaciones (2.68)-(2.70) se tiene que $E[\bar{X}_n^2]$ es igual a:

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}_n^2] &= \frac{1}{n} \left((1 + \beta^2)\sigma_\epsilon^2 + |\beta|(1 - |\beta|)\mu_{|\epsilon|} + (1 + \beta)^2\mu_\epsilon^2 \right) \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \left((1 + \beta)^2\mu_\epsilon^2 + \beta^2\sigma_\epsilon^2 \right) + \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) (1 + \beta)^2\mu_\epsilon^2
\end{aligned}$$

Restando $(E[\bar{X}_n])^2 = (1 + \beta)^2\mu_\epsilon^2$, después multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se sigue (i). Para (ii) se observa que:

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}_n \tilde{\gamma}_n(1)] &= E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_t \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)(X_{j+1} - \mu) \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) E[X_t(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+1} - \mu)] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)X_{t+j}] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^1 \left(1 - \frac{j}{n} \right) E[X_t(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+1} - \mu)] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^2 \left(1 - \frac{j}{n} \right) E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)X_{t+j}] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \mu\gamma(1) + \frac{1}{n} \sum_{j=3}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \mu\gamma(1)
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Restando $E[\bar{X}_n]E[\tilde{\gamma}_n(1)] = \mu\gamma(1)$, multiplicando por n en ambos lados de la ecuación (2.79) y después tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene (ii) para $h = 1$. El caso $h = 0$,

se obtiene realizando cálculos similares a los del caso $h = 1$. Las expresiones explícitas de las esperanzas matemáticas dentro de los sumatorios se obtienen utilizando las ecuaciones (2.68)-(2.78). ■

Lema 2.12. Sea $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ un proceso estocástico estacionario INMAG(1) y $E[\epsilon_t^k] < \infty$, $E[|\epsilon_t|^k] < \infty$, para $k = 1, 2, 3, 4$, $E[\epsilon_t^j | \epsilon_t] < \infty$, para $j = 1, 2$, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^2 E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)] \\ + E[(X_t - \mu)^2(X_{t+1} - \mu)^2] - 5(\gamma(1))^2, & h = l = 1 \\ \\ \sum_{i=0}^2 E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)(X_{t+i} - \mu)^2] \\ \sum_{i=0}^1 E[(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)^2] \\ + E[(X_t - \mu)^3(X_{t+1} - \mu)] - 4\gamma(0)\gamma(1), & h = 1, l = 0 \\ \\ 2 \sum_{i=0}^1 E[(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)^2] - 3(\gamma(0))^2, & h = l = 0. \end{cases}$$

Demostración.

Primero, se considera el caso $h = l = 1$. Se observa que:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\gamma}_n(1)\tilde{\gamma}_n(1)] &= \frac{1}{n} E [(X_t - \mu)^2(X_{t+1} - \mu)^2] \\
&+ \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) E [(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)] \\
&= \frac{1}{n} E [(X_t - \mu)^2(X_{t+1} - \mu)^2] + (\gamma(1))^2 - \left(\frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}\right) (\gamma(1))^2 \\
&+ \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) E [(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)^2(X_{t+2} - \mu)] \\
&+ \frac{2}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) E [(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)^2(X_{t+2} - \mu)(X_{t+3} - \mu)]
\end{aligned}$$

Restando $E[\tilde{\gamma}_n(1)]E[\tilde{\gamma}_n(1)] = (\gamma(1))^2$, multiplicando por n y después tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene el resultado. Ahora, se considera el caso $h = l = 0$, se observa que:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\gamma}_n(0)\tilde{\gamma}_n(0)] &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^1 (n-i) E [(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)^2] + \frac{2}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} (n-i) (\gamma(0))^2 \\
&= \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^1 (n-i) E [(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)^2] \\
&+ \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) (\gamma(0))^2
\end{aligned}$$

Restando $(\gamma(0))^2$, después multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene el resultado. Finalmente, se considera el caso $h = 1$ y $l = 0$, se observa que:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\gamma}_n(1)\tilde{\gamma}_n(0)] &= \frac{1}{n}E[(X_t - \mu)^3(X_{t+1} - \mu)] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)(X_{t+i} - \mu)^2] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)E[(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)] \\
&= \frac{1}{n}E[(X_t - \mu)^3(X_{t+1} - \mu)] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^2\left(1 - \frac{i}{n}\right)E[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)(X_{t+i} - \mu)^2] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^1\left(1 - \frac{i}{n}\right)E[(X_t - \mu)^2(X_{t+i} - \mu)(X_{t+i+1} - \mu)] \\
&+ \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)\gamma(0)\gamma(1).
\end{aligned}$$

Restando $\gamma(0)\gamma(1)$, después multiplicando por n y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última ecuación, se obtiene el resultado, esto completa la demostración del Lema 2.12. ■

Las esperanzas matemáticas indicadas en el Lema 2.12 se calculan utilizando las ecuaciones (2.68)-(2.78). Además, si suponemos que ϵ_t tiene distribución simétrica respecto a cero, entonces las ecuaciones (2.68)-(2.78) resultan fácil de calcular.

En el resto de este apartado se estudia la distribución asintótica de las funciones de autocovarianza y autocorrelación muestral del proceso $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ definido

por la ecuación (1.18). Para ello, se definen los siguientes vectores y matrices.

Sean,

$$\tilde{\Gamma}(1) = (\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(0), \tilde{\gamma}_n(1))^T,$$

$$\hat{\Gamma}(1) = (\bar{X}_n, \hat{\gamma}_n(0), \hat{\gamma}_n(1))^T,$$

$$\Gamma(1) = (\mu, \gamma(0), \gamma(1))^T,$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

donde \mathbf{V} es una matriz de dimensión 3x3 con elementos

$$V_{11} = \lim_{n \rightarrow \infty} nV(\bar{X}_n),$$

$$V_{12} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) \right)^T, \quad h = 0, 1,$$

$$V_{22} = \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\tilde{\gamma}_n(h), \tilde{\gamma}_n(l)), \quad h, l = 0, 1,$$

y

$$\mathbf{D} = \gamma(0)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(0) & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Los elementos de \mathbf{D} se obtienen de la misma forma que se obtuvieron los elementos de \mathbf{D}_h en el apartado 2.1.1.

Teniendo en cuenta estas definiciones y los resultados de los Lemas 2.11 y 2.12, se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 2.16. Si $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso estocástico estacionario INMAG(1) y ϵ_t satisface las hipótesis de los Lemas 2.11 y 2.12, entonces

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}(1) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(1), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

La demostración de este teorema es totalmente análoga a la del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.17. Sea $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de la misma forma que en el Teorema 2.16, entonces

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(1) \xrightarrow{d} N(\mathbf{\Gamma}(1), n^{-1}\mathbf{V}).$$

Demostración.

Idéntica a la demostración del Teorema 2.2. ■

Del Teorema 2.17, se observa que la media muestral y la función de autocovarianza muestral tienen distribución asintóticamente normal. Por lo tanto, se puede demostrar que la función de autocorrelación muestral, también se distribuye asintóticamente normal.

Teorema 2.18. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.16, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{R}}(1) \xrightarrow{d} N(\mathbf{R}(1), n^{-1}\mathbf{DVD}^T)$$

donde

$$\hat{\mathbf{R}}(1) = (\bar{X}_n, \hat{\rho}_n(1))^T,$$

$$\mathbf{R}(1) = (\mu, \rho(1))^T$$

\mathbf{V} y \mathbf{D} han sido definidas en las ecuaciones (2.80) y (2.81), respectivamente.

Demostración.

Totalmente análoga a la del Teorema 2.3. ■

Capítulo 3

Estimación

El determinar un modelo apropiado $\text{INAR}(p)$, $\text{INMA}(q)$, $\text{INARMA}(1, q)$ o $\text{INMAG}(q)$ para representar una serie temporal estacionaria de valores enteros observada incluye un número de problemas relacionados. Por ejemplo, seleccionar el orden del proceso y la estimación de los parámetros, es decir, la media del proceso, los coeficientes $\{\alpha_i, \beta_j : i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q\}$ y la media y la varianza del proceso de innovación $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

En este capítulo se aborda el problema de la estimación de parámetros para algunos modelos presentados en el capítulo 1. Al-Osh y Alzaid (1987) obtienen estimadores de los parámetros del tipo Yule-Walker, mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional para el proceso $\text{INAR}(1)$ con distribución marginal de Poisson. Du y Li (1991) obtienen estimadores de los parámetros con el método de mínimos cuadrados condicionales para el proceso $\text{INAR}(p)$ definido por ellos mismos.

A continuación se obtienen estimadores de parámetros con los métodos de Yule-Walker, mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional para el proceso $\text{INAR}(1)$ con distribución marginal geométrica. Se estudia, también, la

distribución asintótica de dichos estimadores. Se obtienen estimadores de máxima verosimilitud condicional para el proceso INAR(p) definido por Du y Li (1991). Por otra parte, también se obtienen estimadores de los parámetros por el método de los momentos y por el método de los mínimos cuadrados condicionales para el proceso INMAG(1) con distribución geométrica desdoblada. Por último se ajusta el modelo INMAG(1) a la primera diferencia regular de las series temporales: convulsiones epilépticas (Figura 1.1) y al número de infecciones por *Staphylococcus aureus* (Figura 1.3).

3.1. Estimación de parámetros del proceso INAR(1) con marginal geométrica

En esta sección se presentan varios métodos de estimación de parámetros del modelo INAR(1) y se obtiene su distribución asintótica, cuando la sucesión $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tiene distribución marginal geométrica de parámetro ν , para todo t . Primero se presentan los estimadores de Yule-Walker, en segundo lugar, los estimadores mínimos cuadrados condicionales y por último, los estimadores de máxima verosimilitud condicional.

3.1.1. Estimadores Yule-Walker

Dado un conjunto de observaciones $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ del proceso estacionario INAR(1), se pueden obtener estimadores del tipo Yule-Walker para los parámetros de dicho proceso. Recordemos que para el proceso INAR(1) la función de autocorrelación de primer orden es igual a α ($\rho(1) = \alpha$). Por lo tanto, el estimador de α está dado por:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_n(1)}{\hat{\gamma}_n(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+1} - \bar{X}_n)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2}$$

Además, bajo la hipótesis de que X_t tiene distribución geométrica de parámetro ν , entonces el estimador $\hat{\nu}$ de ν está dado por:

$$\hat{\nu} = \frac{\bar{X}_n}{\hat{\gamma}_n(0)}.$$

A continuación se demuestra que $(\hat{\nu}, \hat{\alpha})^T$ tiene distribución asintótica normal. Para ello, se definen las siguientes matrices:

Sean,

$$D_1 = \gamma(0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\gamma(0) = V[X_t] = \frac{1-\nu}{\nu^2}$.

$$V' = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de V' están dados por:

$$v_{11} = \frac{\bar{\nu}}{\nu^2} \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)$$

$$v_{12} = \frac{\bar{\nu}(2 + 3\bar{\nu} + \alpha(2 - \alpha\bar{\nu}))}{\nu^3(1 - \alpha^2)}$$

$$v_{13} = \frac{2\bar{\nu}\alpha}{\nu^3(1 - \alpha^2)}(1 + \alpha + \alpha^2\bar{\nu})$$

$$v_{22} = \frac{\bar{\nu}}{\nu^4(1 - \alpha^2)}(2\alpha\nu\bar{\nu}(1 + \bar{\nu}) + 2(1 + 6\bar{\nu} + \bar{\nu}^2))$$

$$v_{32} = \frac{\bar{\nu}\alpha}{\bar{\nu}^4(1 - \alpha^2)}(3(1 + \bar{\nu}(4 + \bar{\nu})) + 2\alpha\nu\bar{\nu}(1 + 3\bar{\nu}) - \alpha^2(1 + \bar{\nu}^2 + 4\nu\bar{\nu}^2))$$

$$v_{33} = \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu^4(1 - \alpha^2)}[(1 + \alpha)(1 + \bar{\nu} + \alpha\nu) + 2\alpha\bar{\nu}(4 + 2\bar{\nu} + 3\alpha^2\bar{\nu} + 5\alpha\nu - \alpha^2)]$$

Corolario 3.1. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$$

donde $\hat{\theta} = (\hat{\nu}, \hat{\alpha})^T$, $\theta = (\nu, \alpha)^T$ y $\mathbf{W} = D_1 V' D_1^T$.

Demostración.

Trivial, es consecuencia del Teorema 2.3. ■

3.1.2. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales

Para el proceso INAR(1) definido por la ecuación (2.3), se tiene que:

$$E_{\alpha, \nu}[X_t / X_{t-1}] = \alpha X_{t-1} + \frac{\bar{\nu}(1 - \alpha)}{\nu}, \quad \bar{\nu} = 1 - \nu.$$

Supongamos que se han observado X_0, X_1, \dots, X_n de un proceso estocástico estacionario INAR(1), entonces, los estimadores de mínimos cuadrados condicionales de α y ν son los valores que minimizan:

$$Q(\alpha, \nu) = \sum_{t=1}^n (X_t - E_{\alpha, \nu}[X_t/X_{t-1}])^2 \quad (3.1)$$

con respecto a α y ν . Diferenciando la ecuación (3.1) con respecto a α y ν e igualando a cero se tiene:

$$\sum_{t=1}^n \left(X_t X_{t-1} - \alpha X_{t-1}^2 - \frac{\bar{\nu}}{\nu} (1 - 2\alpha) X_{t-1} - \frac{\bar{\nu} X_t}{\nu} \right) = -n\bar{\nu}^2 \left(\frac{1 - \alpha}{\nu^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\sum_{t=1}^n (X_t - \alpha X_{t-1}) = \frac{n\bar{\nu}(1 - \alpha)}{\nu} \quad (3.3)$$

Un simple tratamiento algebraico en las ecuaciones (3.2) y (3.3) nos lleva a las siguientes expresiones explícitas para los estimadores de α y ν :

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{t=1}^n X_t X_{t-1} - \sum_{t=1}^n X_t \sum_{t=1}^n X_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1} \right)^2}$$

y

$$\hat{\nu} = \frac{n(1 - \hat{\alpha})}{\sum_{t=1}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n X_{t-1} + n(1 - \hat{\alpha})}$$

Para obtener la distribución asintótica de $(\hat{\alpha}, \hat{\nu})^T$ los estimadores mínimos cuadrados condicionales, se definen las siguientes matrices:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de V están dados por:

$$v_{11} = E \left[\frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \alpha} \right]^2 = \frac{1 - \nu}{\nu^2}$$

$$v_{12} = E \left[\frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \nu} \right] = 0$$

$$v_{21} = E \left[\frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \alpha} \right] = 0$$

$$v_{22} = E \left[\frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial E[X_t/X_{t-1}]}{\partial \nu} \right] = \left(\frac{1 - \alpha}{\nu^2} \right)^2$$

y los elementos de W son:

$$\begin{aligned}
w_{11} &= E \left[\left(X_t - \alpha X_{t-1} - \frac{\bar{\nu}(1-\alpha)}{\nu} \right)^2 \left(X_{t-1} - \frac{\bar{\nu}}{\nu} \right)^2 \right] \\
w_{12} &= E \left[\left(X_t - \alpha X_{t-1} - \frac{\bar{\nu}(1-\alpha)}{\nu} \right)^2 \left(-\frac{1-\alpha}{\nu^2} \left(X_{t-1} - \frac{\bar{\nu}}{\nu} \right) \right) \right] \\
w_{21} &= w_{12} \\
w_{22} &= E \left[\left(X_t - \alpha X_{t-1} - \frac{\bar{\nu}(1-\alpha)}{\nu} \right)^2 \left(\frac{1-\alpha}{\nu^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Después de realizar algunas operaciones algebraicas y utilizar la hipótesis de que X_t tiene distribución geométrica de parámetro ν se obtienen las expresiones explícitas para los elementos de W :

$$\begin{aligned}
w_{11} &= \frac{\bar{\nu}(1-\alpha)(\alpha + \bar{\nu} + \alpha\nu\bar{\nu})}{\nu^4} \\
w_{12} &= -\frac{\alpha\bar{\nu}(1-\alpha)^2}{\nu^4} \\
w_{21} &= w_{12} \\
w_{22} &= \left(\frac{1-\alpha}{\nu^2} \right)^2 \left(\frac{\bar{\nu}(1-\alpha^2)}{\nu^2} \right)
\end{aligned}$$

Ahora, la matriz de covarianza límite ($V^{-1}WV^{-1}$) está dada por:

$$V^{-1}WV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha)(\alpha + \bar{\nu} + \alpha\nu\bar{\nu})}{\bar{\nu}} & -\alpha\nu^2 \\ -\alpha\nu^2 & \frac{\bar{\nu}\nu^2(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Corolario 3.2. Sea $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ un conjunto de observaciones del proceso estocástico estacionario INAR(1) con distribución marginal geométrica de parámetro ν , entonces, los estimadores $(\hat{\alpha}, \hat{\nu})^T$ de mínimos cuadrados condicionales de $(\alpha, \nu)^T$, tienen distribución asintótica normal, esto es,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, V^{-1}WV^{-1})$$

donde $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\nu})^T$ y $\theta = (\alpha, \nu)^T$.

Demostración.

Es consecuencia del Teorema 3.2 de Klimko y Nelson (1978).

3.1.3. Estimadores de máxima verosimilitud condicional

A continuación se consideran los estimadores de máxima verosimilitud condicional de α y ν cuando $X_0 = x_0$ es observada, en este caso la función de verosimilitud condicionada a que $X_0 = x_0$ es de la forma:

$$L(\mathbf{x}, \alpha, \nu/x_0) = \prod_{t=1}^n P_{X_t/X_{t-1}}(x_t) \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y

$$P_{X_t/X_{t-1}}(x_t) = \begin{cases} \binom{x_{t-1}}{x_t} \alpha^{x_t+1} (1-\alpha)^{x_{t-1}-x_t} + P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t), & x_t \leq x_{t-1} \\ \sum_{i=0}^{\min(x_{t-1}, x_t)} \binom{x_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{x_{t-1}+1-i} \nu \bar{\nu}^{x_t-i}, & x_t > x_{t-1} \end{cases}$$

donde

$$P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t) = \sum_{i=0}^{\min(x_{t-1}, x_t)} \binom{x_{t-1}}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{x_{t-1} + 1 - i} \nu \bar{\nu}^{x_t - i}$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación (3.4) y diferenciando con respecto a α y ν se tiene:

$$S_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{A(1+x_t) + P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)i}{A + P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} - \alpha(1+x_{t-1}) \right), & x_t \leq x_{t-1} \\ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)i}{P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} - \alpha(1+x_{t-1}) \right), & x_t > x_{t-1} \end{cases}$$

donde

$$A = \binom{x_{t-1}}{x_t} \alpha^{x_t+1} (1 - \alpha)^{x_{t-1} - x_t}$$

y

$$S_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu\bar{\nu}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)(\nu i + \bar{\nu} - \nu x_t)}{A + P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} \right), & x_t \leq x_{t-1} \\ \frac{1}{\nu\bar{\nu}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)\nu i}{P'_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} + (\bar{\nu} - \nu x_t) \right), & x_t > x_{t-1} \end{cases}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud condicional de α y ν se obtienen resolviendo las ecuaciones de verosimilitud $S_\alpha = 0$ y $S_\nu = 0$ por métodos numéricos. Se observa que dichos estimadores no son fácilmente manejables, mientras que si el proceso INAR(1) tiene distribución marginal de Poisson (Al-Osh y Alzaid (1987)) sólo hay que resolver una de las ecuaciones de verosimilitud por métodos numéricos.

La estimación de la matriz de covarianza asintótica para estimadores de los parámetros puede obtenerse calculando la segunda derivada de la función de verosimilitud, pero estas derivadas no tiene expresiones manejables. Por otra parte, utilizando los resultados de Sprott (1983) los estimadores de máxima verosimilitud condicional $(\hat{\alpha}, \hat{\nu})$ tienen distribución asintótica normal.

Ahora, sea $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ una muestra de $(n + 1)$ observaciones del proceso estocástico estacionario INAR(1) con marginal geométrica, entonces la función de verosimilitud exacta puede escribirse como:

$$L(\mathbf{x}, \alpha, \nu) = \nu(1 - \nu)^{x_0} \prod_{t=1}^n P_{X_t/X_{t-1}}(x_t) \quad (3.5)$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación (3.5) y diferenciando con respecto a

α y ν se obtienen las ecuaciones de verosimilitud exacta y éstas se resuelven utilizando métodos numéricos para obtener los estimadores de α y ν . En el siguiente apartado se hace un estudio de simulación y se obtienen estimadores del tipo Yule-Walker, mínimos cuadrados condicionales y máxima verosimilitud condicional.

3.1.4. Estudio de simulación

Para evaluar la fiabilidad de los métodos de estimación de parámetros presentados anteriormente, se hace un estudio de simulación del proceso INAR(1) con marginal geométrica de parámetro ν . El valor inicial $X_0 = x_0$, se elige igual a $(1 - \nu)/\nu$ (parte entera) media del proceso. La simulación se realiza utilizando la librería IMSL para generar valores aleatorios de las distribuciones $B(X_{t-1}, \alpha)$, $B(1, 1 - \alpha)$ y $G(\nu)$, (B:binomial, G:geométrica), con semilla (iseed = 8676739 completamente aleatorio). El experimento se realiza para muestras de tamaño, $n = 50, 75, 100, 150, 200$, para diferentes valores del parámetro $\alpha = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$ y $\nu = 0,4$. También, para $\nu = 0,6$ se considera $\alpha = 0,1, 0,3$. Para obtener los estimadores de α y ν con el método de máxima verosimilitud condicional se utiliza la subrutina NEQNF de la librería IMSL. Se hacen 200 replicaciones en cada muestra para cada posible combinación de α y ν ; se obtiene el sesgo medio y error cuadrático medio (ECM) para los estimadores de los parámetros.

Los resultados de la simulación para $\nu = 0,4$ se presentan en las TABLAS 3.1, 3.2 y 3.3 las cuales muestran, respectivamente, los métodos de Yule-Walker (Y-W), mínimos cuadrados condicionales (MCC) y máxima verosimilitud condicional (MVC) para diferentes valores de α . Para $\nu = 0,6$ y $\alpha = 0,1, 0,3$ en las TABLAS 3.4, 3.5 y 3.6 las cuales muestran, respectivamente, los métodos de Y-W, MCC y MVC.

TABLA 3.1

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,4$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		Y-W	Y-W	Y-W	Y-W
50	0.1	- 0.03824	0.00845	0.02136	0.00227
	0.3	- 0.05350	0.01012	0.02141	0.00363
	0.5	- 0.06695	0.01591	0.02199	0.00653
	0.7	- 0.08098	0.02636	0.02022	0.01259
	0.9	- 0.11574	0.09614	0.02473	0.04189
75	0.1	- 0.02844	0.00541	0.01421	0.00175
	0.3	- 0.02925	0.00876	0.01461	0.00257
	0.5	- 0.03385	0.00702	0.01488	0.00348
	0.7	- 0.05522	0.01850	0.01307	0.00704
	0.9	- 0.07794	0.05975	0.01486	0.02747
100	0.1	- 0.01128	0.00336	0.01107	0.00107
	0.3	- 0.02156	0.00516	0.01060	0.00169
	0.5	- 0.02161	0.00341	0.01084	0.00291
	0.7	- 0.03954	0.01160	0.00918	0.00492
	0.9	- 0.05960	0.06127	0.00788	0.02494
150	0.1	- 0.00569	0.00399	0.00635	0.00074
	0.3	- 0.01543	0.00211	0.00744	0.00119
	0.5	- 0.00993	0.00245	0.00670	0.00180
	0.7	- 0.02820	0.00568	0.00517	0.00310
	0.9	- 0.03739	0.03798	0.00361	0.01562
200	0.1	- 0.00490	0.00320	0.00487	0.00058
	0.3	- 0.01150	0.00292	0.00510	0.00085
	0.5	- 0.00707	0.00060	0.00435	0.00127
	0.7	- 0.01719	0.00516	0.00393	0.00252
	0.9	- 0.02469	0.02358	0.00199	0.01052

TABLA 3.2

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,4$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MCC	MCC	MCC	MCC
50	0.1	- 0.03800	0.00845	0.02212	0.00226
	0.3	- 0.04830	0.00940	0.02133	0.00365
	0.5	- 0.04904	0.01279	0.02153	0.00678
	0.7	- 0.06124	0.02259	0.01753	0.01314
	0.9	- 0.08312	0.08936	0.01681	0.05346
75	0.1	- 0.02834	0.00536	0.01449	0.00176
	0.3	- 0.02555	0.00831	0.01477	0.00257
	0.5	- 0.02742	0.00587	0.01548	0.00363
	0.7	- 0.04219	0.01524	0.01089	0.00678
	0.9	- 0.05787	0.06609	0.00955	0.04417
100	0.1	- 0.01033	0.00330	0.01121	0.00107
	0.3	- 0.01717	0.00466	0.01071	0.00167
	0.5	- 0.01605	0.00254	0.01051	0.00293
	0.7	- 0.03177	0.01005	0.00795	0.00499
	0.9	- 0.04525	0.05848	0.00586	0.02847
150	0.1	- 0.00493	0.00392	0.00650	0.00074
	0.3	- 0.01391	0.00204	0.00747	0.00119
	0.5	- 0.00567	0.00176	0.00655	0.00181
	0.7	- 0.02328	0.00443	0.00470	0.00317
	0.9	- 0.02923	0.03524	0.00281	0.01604
200	0.1	- 0.00443	0.00315	0.00492	0.00058
	0.3	- 0.01014	0.00275	0.00512	0.00084
	0.5	- 0.00484	0.00025	0.00431	0.00128
	0.7	- 0.01320	0.00404	0.00390	0.00253
	0.9	- 0.01997	0.02189	0.00169	0.01092

TABLA 3.3

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,4$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MVC	MVC	MVC	MVC
50	0.1	- 0.00284	0.00812	0.00813	0.00228
	0.3	- 0.01010	0.00879	0.00930	0.00360
	0.5	- 0.00814	0.01432	0.00734	0.00576
	0.7	- 0.00940	0.02311	0.00349	0.01102
	0.9	- 0.01697	0.06671	0.00370	0.04655
75	0.1	- 0.00644	0.00561	0.00685	0.00173
	0.3	- 0.00244	0.00795	0.00656	0.00247
	0.5	- 0.00282	0.00804	0.00487	0.00302
	0.7	- 0.00777	0.01330	0.00228	0.00588
	0.9	- 0.01066	0.05043	0.00312	0.02761
100	0.1	- 0.00169	0.00369	0.00518	0.00104
	0.3	- 0.00355	- 0.00480	0.00467	0.00166
	0.5	- 0.00302	0.00439	0.00339	0.00256
	0.7	- 0.00769	0.00691	0.00152	0.00404
	0.9	- 0.00957	0.06432	0.00121	0.02593
150	0.1	- 0.00148	0.00407	0.00380	0.00072
	0.3	- 0.00237	0.00192	0.00303	0.00114
	0.5	0.00299	0.00392	0.00200	0.00163
	0.7	- 0.00489	0.00402	0.00110	0.00239
	0.9	- 0.00621	0.03952	0.00053	0.01479
200	0.1	0.00126	0.00336	0.00275	0.00057
	0.3	- 0.00215	0.00269	0.00211	0.00076
	0.5	0.00207	0.00249	0.00158	0.00111
	0.7	- 0.00219	0.00393	0.00095	0.00205
	0.9	- 0.00417	0.02607	0.00039	0.00967

TABLA 3.4

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,6$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		Y-W	Y-W	Y-W	Y-W
50	0.1	- 0.02357	0.00331	0.01931	0.00346
	0.3	- 0.05052	0.01259	0.02167	0.00443
75	0.1	- 0.01898	0.00106	0.01284	0.00208
	0.3	- 0.03264	0.00980	0.01473	0.00319
100	0.1	- 0.00755	0.00003	0.01445	0.00148
	0.3	- 0.02242	0.00849	0.01194	0.00265
150	0.1	- 0.00326	- 0.00123	0.00625	0.00105
	0.3	- 0.01765	0.00286	0.00716	0.00167
200	0.1	- 0.00541	0.00000	0.00534	0.00086
	0.3	- 0.01299	0.00531	0.00675	0.00125

TABLA 3.5

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,6$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MCC	MCC	MCC	MCC
50	0.1	- 0.02191	0.00277	0.01966	0.00349
	0.3	- 0.04467	0.01076	0.02152	0.00447
75	0.1	- 0.01804	0.00071	0.01287	0.00208
	0.3	- 0.02624	0.00791	0.01523	0.00316
100	0.1	- 0.00528	0.00024	0.01142	0.00149
	0.3	- 0.01941	0.00754	0.01167	0.00266
150	0.1	- 0.00230	- 0.00146	0.00637	0.00105
	0.3	- 0.01517	0.00218	0.00709	0.00166
200	0.1	- 0.00446	- 0.00015	0.00534	0.00086
	0.3	- 0.01098	0.00476	0.00677	0.00126

TABLA 3.6

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,6$)					
n	α	sesgo de $\hat{\alpha}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\alpha}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MVC	MVC	MVC	MVC
50	0.1	0.00313	0.00356	0.01001	0.00344
	0.3	- 0.01504	0.00993	0.01379	0.00439
75	0.1	- 0.00131	0.00103	0.00714	0.00207
	0.3	- 0.00217	0.00840	0.00944	0.00308
100	0.1	0.00572	0.00019	0.00637	0.00148
	0.3	- 0.00277	0.00740	0.00767	0.00263
150	0.1	0.00594	- 0.00101	0.00454	0.00104
	0.3	- 0.00196	0.00227	0.00412	0.00166
200	0.1	- 0.00049	0.00011	0.00388	0.00085
	0.3	0.00013	0.00425	0.00357	0.00122

De la TABLA 3.1 (método de Yule-Walker) se observa que el sesgo de $\hat{\alpha}$ siempre es negativo, en contraste con el sesgo de $\hat{\nu}$. Por otra parte, el error cuadrático medio de $\hat{\alpha}$ es mayor que el de ν , excepto para $\alpha = 0,9$

Ahora, de la TABLA 3.2 (mínimos cuadrados condicionales) se observa que, el comportamiento del sesgo de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\nu}$ es exactamente igual al del método de Yule-Walker.

Finalmente, de los resultados de la TABLA 3.3 (máxima verosimilitud condicional) se observa que el sesgo de $\hat{\alpha}$ es negativo en 22 casos, mientras que, el sesgo de $\hat{\nu}$ es positivo en 24 casos. Por otra parte, el error cuadrático medio de $\hat{\alpha}$ es siempre más grande que el error cuadrático medio de $\hat{\nu}$ para $\alpha = 0,1, 0,3$ y $0,5$, en contraste con los valores de $\alpha = 0,7$ y $0,9$.

En las TABLAS 3.1, 3.2, 3.3 se observa que la magnitud del sesgo de $\hat{\alpha}$, $\hat{\nu}$ y el

error cuadrático medio de $\hat{\nu}$ aumenta cuando se incrementa α ($\alpha = 0,7, 0,9$), con los tres métodos de estimación; excepto el error cuadrático medio de $\hat{\alpha}$ con los métodos de Yule-Walker, máxima verosimilitud y tamaños muestrales $n = 50$ y 75 . También, como se esperaba, la magnitud del sesgo y error cuadrático medio están recíprocamente relacionados con el tamaño muestral.

Comparando los tres métodos de estimación en relación con los resultados de la simulación (TABLAS 3.1-3.3), éstos podrían ordenarse de la siguiente forma, el primero podría ser el método de la máxima verosimilitud condicional, el siguiente el de los mínimos cuadrados condicionales y por último el método de Yule-Walker.

Con el fin de analizar si existe una variación significativa en el sesgo y ECM al incrementar el parámetro ν en un 20 por ciento, se presentan las TABLAS 3.4, 3.5 y 3.6 en las cuales se consideran únicamente los valores de $\alpha = 0,1$ y $0,3$, ya que, este modelo es útil cuando se tienen series temporales de valores enteros no negativos y pequeños.

Comparando los resultados de las TABLAS 3.1 y 3.4, se observa que, en general, no existe ninguna diferencia significativa, excepto cuando $\nu = 0,6$, $n = 150$ y $\alpha = 0,1$ que el sesgo de $\hat{\nu}$ es negativo. Ahora, comparando los resultados de las TABLAS 3.2 y 3.5 del métodos de mínimos cuadrados condicionales, se observan resultados similares en ambas TABLAS, finalmente, en las TABLAS 3.3 y 3.6 del método de máxima verosimilitud condicional, no se observan diferencias significativas en el sesgo ni en el ECM.

Según los resultado, de las TABLAS 3.4-3.6 se observa que, si α es menor o igual que $0,3$, no existen variaciones significativas en el sesgo ni en el error cuadrático medio con los métodos de Yule-Walker y el de mínimos cuadrados condicionales. Por otra

parte, una vez más se observa que con el método de máxima verosimilitud condicional se obtienen resultados notablemente mejores.

3.2. Estimación de los parámetros del proceso INAR(p) con marginal de Poisson

El proceso INAR(p) ha sido estudiado por Alzaid y Al-Osh (1990) y Du y Li (1991), se presentó un breve resumen de éste en el apartado 1.3.3 donde se constató la diferencia entre el modelo introducido por Alzaid y Al-Osh y el modelo definido por Du y Li. En esta sección se estudian los métodos de estimación de parámetros, de mínimos cuadrados condicionales y de máxima verosimilitud condicional para el proceso definido por Du y Li (1991).

Como se vio en el apartado 1.3.3 la ecuación en diferencias del proceso INAR(p) está dada por:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i} + \epsilon_t \quad \text{para } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

De la ecuación (3.6) es obvio que los estimadores de mínimos cuadrados condicionales del proceso INAR(p) coinciden con los del proceso AR(p) estándar. Sin embargo, el problema de estimación de máxima verosimilitud condicional es más complicado. Por ejemplo, la probabilidad condicional de X_t dado $X_{t-1} = x_{t-1}$, $X_{t-2} = x_{t-2}$, \dots , $X_{t-p} = x_{t-p}$, en el proceso INAR(p) es la convolución de la distribución de ϵ_t y las binomiales con parámetros (x_{t-1}, α_1) , (x_{t-2}, α_2) , \dots , (x_{t-p}, α_p) , respectivamente, mientras que en el proceso AR(p) esta distribución está determinada por la distribución del ruido generado por el proceso.

3.2.1. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales

El método de mínimos cuadrados condicionales para el proceso INAR(p) ha sido estudiado por Du y Li (1991). Aquí se presenta un breve resumen de dicho método y algunas propiedades asintóticas para los estimadores de los parámetros. Este método será comparado con el de máxima verosimilitud condicional a través de un estudio de simulación.

En el modelo INAR(p) se tiene que, dado $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$ y ϵ_t , X_t sigue siendo una variable aleatoria. La media condicional de X_t dado $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$ está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t / (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})) &= \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \lambda \\ &= g(\theta, (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})), \end{aligned}$$

donde $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \lambda)^T$ son los parámetros a estimar. El procedimiento de estimación se basa en minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado respecto a la media condicional. Así, los estimadores mínimos cuadrados condicionales para θ son los valores que minimizan:

$$\sum_{t=p}^n (X_t - E[X_t / (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})])^2. \quad (3.7)$$

Diferenciando la ecuación (3.7) con respecto a θ_i para $i = 1, 2, \dots, (p+1)$ e igualando a cero se obtienen los estimadores de mínimos cuadrados condicionales, $\hat{\theta}_i$.

Por otra parte, es fácil verificar que las funciones

$$g, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta_i \theta_j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 g}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$$

existen y son continuas para todo $i, j, k = 1, 2, \dots, p, p+1$ y

$$E \left[(X_t - g) \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \right] < \infty, \quad E \left[(X_t - g) \frac{\partial^2 g}{\partial \theta_i \theta_j} \right] < \infty \quad \text{y} \quad E \left[\frac{\partial g}{\partial \theta_i} \frac{\partial g}{\partial \theta_j} \right] < \infty.$$

Ahora, por el Teorema (3.1) de Klimko y Nelson (1978) los estimadores mínimos cuadrados condicionales son consistentes. Además, se observa que $E(|\epsilon_t|^3) < \infty$, cuando ϵ_t tiene distribución de Poisson, entonces por el Teorema (3.2) de Klimko y Nelson, $\hat{\theta}$ tiene distribución asintótica normal, esto es,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, V^{-1} W V^{-1})$$

donde $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\lambda})^T$ son los estimadores de parámetros y V es una matriz $(p+1) \times (p+1)$ con elementos

$$v_{ij} = E \left[\frac{\partial g}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p+1$$

y los elementos de W están dados por:

$$w_{ij} = E \left[(X_t - g)^2 \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p+1.$$

A continuación se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud condicional para el proceso INAR(p).

3.2.2. Estimadores de máxima verosimilitud condicional

En esta sección se presentan los resultados de Al-Osh y Alzaid (1987) para el proceso INAR(1) con marginal de Poisson y luego se obtienen los estimadores de los parámetros para el proceso INAR(2) definido por Du y Li (1991).

Supongamos que X_0 es observada, en este caso la función de verosimilitud condicionada a que $X_0 = x_0$ es de la forma:

$$L(\mathbf{x}, \alpha, \lambda/x_0) = \prod_{t=1}^n P_{X_t/X_{t-1}}(x_t) \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y

$$P_{X_t/X_{t-1}}(x_t) = \sum_{i=0}^{\min(x_{t-1}, x_t)} \binom{x_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{x_{t-1}-i} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_t-i}}{(x_t-i)!}$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación (3.8) y diferenciando con respecto a α y λ se tiene:

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{t=1}^n \left(x_t - \alpha x_{t-1} - \lambda \frac{P_{X_t/X_{t-1}}(x_t-1)}{P_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} \right) \quad (3.9)$$

y

$$S_\lambda = \sum_{t=1}^n \left(\frac{P_{X_t/X_{t-1}}(x_t-1)}{P_{X_t/X_{t-1}}(x_t)} \right) - n. \quad (3.10)$$

Realizando simples operaciones algebraicas en el sistema de ecuaciones de verosimilitud condicional $S_\alpha = 0$ y $S_\lambda = 0$, tenemos que:

$$\sum_{t=1}^n x_t = \alpha \sum_{t=1}^n x_{t-1} + n\lambda. \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) puede ser utilizada para eliminar uno de los parámetros, digamos α , entonces S_λ se puede escribir como una función únicamente de λ y el estimador de máxima verosimilitud condicional de λ se obtiene utilizando métodos numéricos para resolver S_λ . Una descripción más detallada del método de máxima verosimilitud para el proceso INAR(1) con distribución marginal de Poisson se encuentra en Al-Osh y Alzaid (1987).

A continuación se aplica el método de máxima verosimilitud condicional al proceso INAR(2) definido por Du y Li (1991). La probabilidad condicional de $X_t = x_t$ dado $X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}$, tiene la siguiente estructura:

$$P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t) = \sum_{i=0}^{\min(x_{t-1}, x_t)} \sum_{j=0}^{\min(x_{t-2}, x_t-i)} P(Z_1 = i)P(Z_2 = j)P(\epsilon_t = x_t - i - j) \quad (3.12)$$

donde las variables Z_1 y Z_2 tienen distribución binomial con parámetros (x_{t-1}, α_1) y (x_{t-2}, α_2) , respectivamente y ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ .

La función de verosimilitud condicional de $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ dado X_0 y X_1 puede escribirse como:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda; \mathbf{x}/x_0, x_1) = \prod_{t=2}^n P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t) \quad (3.13)$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación (3.13) y diferenciando con respecto a α_1, α_2 y λ se tiene:

$$S_{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1(1 - \alpha_1)} \sum_{t=2}^n \left(\frac{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)i}{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)} - \alpha_1 x_{t-1} \right)$$

$$S_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2(1 - \alpha_2)} \sum_{t=2}^n \left(\frac{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)j}{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)} - \alpha_2 x_{t-2} \right)$$

$$S_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=2}^n \left(\frac{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)(x_t - i - j)}{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)} - \lambda \right)$$

Realizando simples operaciones algebraicas en S_{α_1} y S_{α_2} se obtiene:

$$\sum_{t=2}^n \left\{ \frac{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)(i + j)}{P_{X_t/X_{t-2}, X_{t-1}}(x_t)} \right\} = \alpha_1 \sum_{t=2}^n x_{t-1} + \alpha_2 \sum_{t=2}^n x_{t-2} \quad (3.14)$$

Ahora, utilizando la última ecuación y $S_{\lambda} = 0$ se obtiene λ en términos de α_1 y α_2 , esto es,

$$\lambda = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2})}{n - 1}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones S_{α_1} y S_{α_2} pueden escribirse como funciones únicamente de α_1 y α_2 . Los estimadores de máxima verosimilitud condicional se obtienen utilizando métodos numéricos para resolver S_{α_1} y S_{α_2} .

La estimación de la matriz de covarianza asintótica para estimadores de parámetros puede obtenerse calculando la segunda derivada de la función de verosimilitud; y utilizando los resultados de Sprott (1983). Los estimadores de máxima verosimilitud condicional del proceso INAR(2) tienen distribución asintótica normal.

Por otra parte, el método de la máxima verosimilitud condicional se puede generalizar para obtener estimadores de parámetros del proceso INAR(p) definido por Du y Li (1991). Para ello, hay que tener en cuenta que la probabilidad condicional de X_t dado $X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_{t-p} = x_{t-p}$, en el proceso INAR(p) es la convolución de la distribución de ϵ_t y las binomiales con parámetros $(x_{t-1}, \alpha_1), (x_{t-2}, \alpha_2), \dots, (x_{t-p}, \alpha_p)$, respectivamente.

3.2.3. Estudio de simulación

Para evaluar la fiabilidad de los dos métodos de estimación, mínimos cuadrados condicionales (MCC) y máxima verosimilitud condicional (MVC), se hace una simulación del proceso INAR(2) para el caso en el que un elemento de X_{t-1} tiene probabilidad α_1 de entrar al sistema en el tiempo t y un elemento de X_{t-2} tiene probabilidad α_2 de entrar al sistema en el tiempo t . Los valores de X_0 y X_1 se eligen igual al valor esperado del proceso $\left\lceil \frac{\lambda}{1-\alpha_1-\alpha_2} \right\rceil$ (parte entera) y se supone que ϵ_t tiene distribución de Poisson con parámetro λ . La simulación se realiza utilizando la librería IMSL para generar los valores aleatorios de las distribuciones binomiales con parámetros (X_{t-1}, α_1) y (X_{t-2}, α_2) , respectivamente y semilla (iseed = 8676739). El experimento se realiza para tamaños muestrales $n = 50, 75, 100, 150$ y 200 y diferentes valores de $\alpha_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8$ y $(\lambda = 1, \alpha_2 = 0,1)$.

Los estimadores de máxima verosimilitud condicional de α_1, α_2 y λ se obtienen utilizando la subrutina NEQNF de la librería IMLS. Se hacen 200 replicaciones en cada muestra, para cada posible combinación de los parámetros y se calcula el sesgo medio y el error cuadrático medio para los estimadores de los parámetros. Los resultados de la simulación se describen a continuación.

TABLA 3.7, INAR(2)

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ y $\hat{\lambda}$ ($\lambda = 1, \alpha_2 = 0,1$)							
n	α_1	sesgo de $\hat{\alpha}_1$	sesgo de $\hat{\alpha}_2$	sesgo de $\hat{\lambda}$	ECM($\hat{\alpha}_1$)	ECM($\hat{\alpha}_2$)	ECM($\hat{\lambda}$)
		MCC	MCC	MCC	MCC	MCC	MCC
50	0.1	- 0.02236	- 0.05077	- 0.09644	0.02181	0.02485	0.09623
	0.3	- 0.03889	- 0.06188	0.16060	0.02426	0.02651	0.13810
	0.5	- 0.04214	- 0.06125	0.02508	0.03106	0.02576	0.23377
	0.7	- 0.03663	- 0.05905	0.45334	0.02821	0.02185	0.66223
	0.8	- 0.05458	- 0.05550	1.06229	0.02425	0.02194	2.53523
75	0.1	- 0.01734	- 0.03383	0.07087	0.01284	0.01540	0.06542
	0.3	- 0.02541	- 0.03867	0.11459	0.01616	0.01628	0.08417
	0.5	- 0.01233	- 0.04952	0.16621	0.01764	0.01688	0.13215
	0.7	- 0.02574	- 0.03618	0.32005	0.01484	0.01303	0.38557
	0.8	- 0.03381	- 0.03878	0.68659	0.01361	0.01306	1.30000
100	0.1	- 0.01769	- 0.03804	0.07540	0.01256	0.01230	0.05494
	0.3	- 0.01647	- 0.03932	0.09205	0.01167	0.01510	0.07365
	0.5	- 0.00620	- 0.04110	0.12333	0.01076	0.01274	0.09122
	0.7	- 0.02106	- 0.01921	0.18234	0.01019	0.00954	0.17904
	0.8	- 0.02608	- 0.03384	0.52747	0.01147	0.01000	0.81745
150	0.1	- 0.01792	- 0.02257	0.05450	0.00847	0.00682	0.03348
	0.3	- 0.01745	- 0.02541	0.07128	0.00819	0.00901	0.04010
	0.5	- 0.00812	- 0.02759	0.09137	0.00748	0.00839	0.05959
	0.7	- 0.01715	- 0.01171	0.13100	0.00719	0.00715	0.11404
	0.8	- 0.01250	- 0.02270	0.32014	0.00686	0.00786	0.37995
200	0.1	- 0.00871	- 0.01612	0.03034	0.00542	0.00627	0.02502
	0.3	- 0.01512	- 0.01582	0.05082	0.00617	0.00622	0.03082
	0.5	- 0.00566	- 0.02296	0.07032	0.00623	0.00574	0.04566
	0.7	- 0.00890	- 0.01543	0.10732	0.00488	0.00452	0.07962
	0.8	- 0.00464	- 0.01945	0.21755	0.00482	0.00576	0.21485

TABLA 3.8, INAR(2)

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ y $\hat{\lambda}$ ($\lambda = 1, \alpha_2 = 0,1$)							
n	α_1	sesgo de $\hat{\alpha}_1$	sesgo de $\hat{\alpha}_2$	sesgo de $\hat{\lambda}$	ECM($\hat{\alpha}_1$)	ECM($\hat{\alpha}_2$)	ECM($\hat{\lambda}$)
		MVC	MVC	MVC	MVC	MVC	MVC
50	0.1	0.00886	- 0.00155	- 0.00265	0.01266	0.01197	0.05165
	0.3	- 0.03044	- 0.01407	0.06898	0.01966	0.01073	0.08093
	0.5	- 0.01999	- 0.02660	0.10832	0.01387	0.01050	0.13106
	0.7	- 0.01290	- 0.00745	0.07280	0.00576	0.01154	0.25975
	0.8	- 0.01272	- 0.00183	0.08780	0.00241	0.00858	0.79161
75	0.1	- 0.00078	- 0.00647	0.01557	0.00855	0.00849	0.04160
	0.3	- 0.02147	- 0.01874	0.07372	0.01352	0.00799	0.05575
	0.5	0.00263	- 0.02986	0.07887	0.00838	0.00925	0.08773
	0.7	- 0.00606	- 0.00934	0.07040	0.00322	0.00783	0.21395
	0.8	- 0.00707	- 0.01683	0.19013	0.00151	0.00787	0.67284
100	0.1	- 0.00207	- 0.01575	0.02755	0.00777	0.00705	0.03448
	0.3	- 0.01671	- 0.01180	0.04560	0.00933	0.00732	0.04645
	0.5	0.00328	- 0.02497	0.05912	0.00502	0.00806	0.06127
	0.7	- 0.00744	- 0.00566	0.04617	0.00237	0.00595	0.14149
	0.8	- 0.00806	- 0.01137	0.12191	0.00143	0.00557	0.42442
150	0.1	- 0.00780	- 0.01128	0.02767	0.00606	0.00490	0.02481
	0.3	- 0.01624	- 0.01182	0.04646	0.00701	0.00573	0.02929
	0.5	- 0.00013	- 0.02053	0.05276	0.00298	0.00554	0.04333
	0.7	- 0.00334	- 0.00846	0.04255	0.00165	0.00434	0.07805
	0.8	- 0.00118	- 0.01630	0.12942	0.00012	0.00370	0.29072
200	0.1	- 0.00410	- 0.00702	0.01330	0.00422	0.00485	0.01971
	0.3	- 0.01257	- 0.00973	0.03634	0.00495	0.00469	0.02293
	0.5	0.00238	- 0.01597	0.03332	0.00254	0.00381	0.02866
	0.7	- 0.00029	- 0.01106	0.03858	0.00123	0.00385	0.07093
	0.8	- 0.00308	- 0.00758	0.07966	0.00067	0.00338	0.24837

De la TABLA 3.7 (mínimos cuadrados condicionales) se observa que el sesgo de $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ siempre es negativo, mientras que el sesgo de $\hat{\lambda}$ es negativo únicamente cuando $\alpha_1 = 0,1$ y $n = 50$. Por otra parte, de la TABLA 3.8 se observa que el sesgo de $\hat{\alpha}_1$ es positivo en 4 veces y el sesgo de $\hat{\alpha}_2$ siempre es negativo, respecto al signo del sesgo de $\hat{\lambda}$ ocurre lo mismo que en la TABLA 3.7.

También, se observa que la magnitud del sesgo y el error cuadrático medio de $\hat{\lambda}$ con

el método de MCC aumenta significativamente a medida que se incrementa α_1 de 0.7 a 0.8, sin embargo, esta diferencia no es apreciable en $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$.

Por último, comparando los dos métodos de estimación en relación con los resultados de la simulación, se observa que con el método de máxima verosimilitud condicional se obtiene mejores resultados.

3.3. Estimación de los parámetros del modelo INMAG(1)

El modelo INMAG(1) fue estudiado en el apartado 1.4.1 y se obtuvieron algunas propiedades básicas del mismo. En esta sección se presentan los métodos de los momentos y mínimos cuadrados condicionales, para estimar sus parámetros. Se supone que el proceso de innovación tiene distribución geométrica desdoblada con parámetro ν , es decir, $P(\epsilon_t = 0) = \nu$ y $P(\epsilon_t = k) = P(\epsilon_t = -k) = \frac{\nu(1-\nu)^{|k|}}{2}$, para $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

3.3.1. Estimadores por el método de los momentos

Dado un conjunto de observaciones $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de un proceso estacionario INMAG(1), se pueden obtener los estimadores de β y ν a partir de las primeras dos autocovarianzas muestrales de dicho modelo. Es decir,

$$\hat{\gamma}_n(0) = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2}{n}$$

$$\hat{\gamma}_n(1) = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+1} - \bar{X}_n)}{n}$$

siendo $\bar{X}_n = \sum_{t=1}^n X_t$

Si ϵ_t tiene distribución geométrica desdoblada con parámetro ν , los estimadores de β y ν se obtienen de las siguientes expresiones:

$$\hat{\nu}^2 \hat{\gamma}(0) = (1 + \hat{\beta}^2)(1 - \hat{\nu})(2 - \hat{\nu}) + |\hat{\beta}|(1 - |\hat{\beta}|)(1 - \hat{\nu})$$

y

$$\hat{\nu}^2 \hat{\gamma}(1) = \hat{\beta}(1 - \hat{\nu})(2 - \hat{\nu}).$$

De las expresiones anteriores se observa que los estimadores de β y ν no tienen expresiones explícitas, por lo tanto, hay que utilizar métodos numéricos para obtener dichos estimadores.

3.3.2. Estimadores de mínimos cuadrados condicionales

Dada las observaciones $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ de un proceso estacionario INMAG(1) se obtiene el estimador mínimo cuadrático $\hat{\beta}$ de β minimizando la siguiente suma de cuadrados:

$$\sum_{t=2}^n (X_t - E[X_t/I_{t-1}])^2$$

donde $I_t = (X_0, X_1, \dots, X_t)$ y $E[X_t/I_{t-1}] = \beta(X_{t-1} - E[X_{t-1}/I_{t-2}])$

Por otra parte, utilizando los resultados de la sección 8.8 (página 252) y el Teorema 10.8.2 en Brockwell y Davis (1987), el estimador mínimo cuadrático de β tiene distribución asintóticamente normal, esto es:

$$\hat{\beta} \xrightarrow{d} N(\beta, V[\hat{\beta}])$$

donde la varianza asintótica $V[\hat{\beta}]$ está dada por:

$$V[\hat{\beta}] = \sigma_\epsilon^2 (E[Z_t^2])^{-1} n^{-1}$$

siendo $Z_t = \epsilon_t - \beta \odot Z_{t-1}$.

Se observa que:

$$\begin{aligned} E[Z_t^2] &= V[\epsilon_t - \beta \odot Z_{t-1}] \\ &= V[\epsilon_t] + V[\beta \odot Z_{t-1}] \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \beta^2 V[Z_{t-1}] + |\beta|(1 - |\beta|)E[|Z_{t-1}|] \end{aligned}$$

Ahora, iterando n veces, cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene:

$$E[Z_t^2] = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \beta^2} + \frac{|\beta|(1 - |\beta|)E[|Z_t|]}{1 - \beta^2} \quad (3.15)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V[\epsilon_t] &= V[Z_t + \beta \odot Z_{t-1}] \\ &= V[Z_t] + \beta^2 V[Z_{t-1}] + |\beta|(1 - |\beta|)E[|Z_{t-1}|] - 2Cov(Z_t, \beta \odot Z_{t-1}) \end{aligned}$$

Se observa que:

$$\begin{aligned} -2Cov(Z_t, \beta \odot Z_{t-1}) &= -2Cov(-\beta \odot Z_{t-1}, \beta \odot Z_{t-1}) \\ &= 2E[E[(\beta \odot Z_{t-1})^2/Z_{t-1}]] \\ &= 2E[|\beta|(1 - |\beta|)|Z_{t-1}| + \beta^2 Z_{t-1}] \\ &= 2|\beta|(1 - |\beta|)E[|Z_{t-1}|] + 2\beta^2 V[Z_{t-1}] \end{aligned}$$

Utilizando el resultado de la última ecuación

$$V[\epsilon_t] = \sigma_\epsilon^2 = (1 + 3\beta^2)V[Z_{t-1}] + 3|\beta|(1 - |\beta|)E[|Z_{t-1}|]. \quad (3.16)$$

Ahora, relacionando las ecuaciones (3.15) y (3.16)

$$V[Z_t] = \sigma_\epsilon^2.$$

Finalmente, se tiene que la varianza asintótica de $\hat{\beta}$ es:

$$V[\hat{\beta}] = n^{-1}.$$

Ahora, si ϵ_t tiene distribución geométrica desdoblada de parámetro ν , entonces, el estimador de dicho parámetro se obtiene de la varianza residual, es decir,

$$S_{\epsilon}^2 = \frac{(1 - \hat{\nu})(2 - \hat{\nu})}{\hat{\nu}^2}$$

En el apartado 3.3.4 se incluye una aplicación con datos reales utilizando el método de mínimos cuadrados para estimar β .

3.3.3. Estudio de simulación del proceso INMAG(1)

A continuación se hace un estudio de simulación del proceso INMAG(1) definido por la ecuación (1.18). Se supone que ϵ_t tiene distribución geométrica desdoblada con parámetro ν . Los estimadores, $\hat{\beta}$ y $\hat{\nu}$ de β y ν , respectivamente, se obtienen mediante el método de los mínimos cuadrados condicionales. La simulación se realiza utilizando la librería IMSL para generar los valores aleatorios de las distribuciones binomiales con parámetros $(|\epsilon_{t-1}|, \beta)$ y geométrica desdoblada con parámetro $\nu = 0,2$ con semilla (iseed = 8676739). Para obtener los valores de ϵ_t se generan n valores de la distribución geométrica con parámetro $\nu = 0,2$ y n valores aleatorios positivos y negativos, los cuales indican el signo que le corresponde a ϵ_t para cada t . El experimento se realiza para tamaños muestrales $n = 50, 75, 100, 150$ y 200 y diferentes valores de $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ y 0.9 . También, se considera la distribución geométrica de parámetro $\nu = 0,4$.

Los estimadores $\hat{\beta}$ y $\hat{\nu}$ se obtienen utilizando la subrutina UNLSF de la librería IMSL. Se hacen 200 replicaciones en cada muestra, para cada posible combinación de

los parámetros β y ν y se calcula el sesgo medio y el error cuadrático medio para los parámetros estimados. Los resultados de la simulación (mínimos cuadrados condicionales) se presentan en la TABLA 3.9 para $\nu = 0,2$ y TABLA 3.10 para $\nu = 0,4$.

TABLA 3.9, INMAG(1)

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\beta}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,2$)					
n	β	sesgo de $\hat{\beta}$	sesgo de $\hat{\nu}$	ECM($\hat{\beta}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MCC	MCC	MCC	MCC
50	0.1	0.00183	- 0.00998	0.02584	0.00100
	0.3	0.00886	- 0.00848	0.02304	0.00101
	0.5	0.01407	- 0.00489	0.01478	0.00094
	0.7	0.03746	- 0.00604	0.01749	0.00101
	0.9	0.05611	- 0.00477	0.01749	0.00090
75	0.1	- 0.01648	- 0.00506	0.01412	0.00059
	0.3	- 0.01469	- 0.00363	0.01425	0.00066
	0.5	0.00967	- 0.00253	0.01206	0.00067
	0.7	0.00967	- 0.00253	0.01206	0.00067
	0.9	0.03908	- 0.00109	0.00881	0.00054
100	0.1	- 0.00384	- 0.00347	0.01196	0.00051
	0.3	0.00300	- 0.00274	0.01088	0.00050
	0.5	0.01868	- 0.00226	0.00883	0.00039
	0.7	0.03209	- 0.00032	0.00737	0.00046
	0.9	0.05150	0.00092	0.00610	0.00046
150	0.1	- 0.00853	- 0.00300	0.00754	0.00030
	0.3	- 0.00144	- 0.00069	0.00743	0.00026
	0.5	- 0.01076	0.00048	0.00761	0.00029
	0.7	0.02693	0.00127	0.00585	0.00024
	0.9	0.05022	0.00123	0.00517	0.00028
200	0.1	0.00347	- 0.00306	0.00593	0.00024
	0.3	- 0.00649	- 0.00073	0.00521	0.00022
	0.5	0.00834	- 0.00081	0.00412	0.00019
	0.7	0.03433	0.00127	0.00444	0.00022
	0.9	0.04803	0.00080	0.00470	0.00023

TABLA 3.10, INMAG(1)

Sesgo y Error Cuadrático Medio de $\hat{\beta}$ y $\hat{\nu}$ ($\nu = 0,4$)					
n	β	sesgo de $\hat{\beta}$		ECM($\hat{\beta}$)	ECM($\hat{\nu}$)
		MCC	MCC	MCC	MCC
50	0.1	0.00915	- 0.00878	0.02284	0.00209
	0.3	0.01518	- 0.00370	0.02205	0.00195
	0.5	0.03207	- 0.00052	0.02150	0.00195
	0.7	0.05030	0.00038	0.01965	0.00191
	0.9	0.01914	0.00198	0.01725	0.00195
75	0.1	- 0.00206	- 0.00575	0.01491	0.00160
	0.3	0.00342	- 0.00151	0.01517	0.00160
	0.5	0.02404	0.00120	0.01349	0.00154
	0.7	0.05921	0.00568	0.01295	0.00143
	0.9	0.08576	0.00608	0.01345	0.00153
100	0.1	- 0.01076	- 0.00453	0.01035	0.00126
	0.3	0.00314	0.00005	0.01006	0.00118
	0.5	0.02685	0.00339	0.01058	0.00116
	0.7	0.06776	0.00604	0.01203	0.00123
	0.9	0.08441	0.00623	0.01321	0.00122
150	0.1	- 0.00527	- 0.00139	0.00927	0.00097
	0.3	0.00936	0.00286	0.00889	0.00097
	0.5	0.03197	0.00729	0.00764	0.00096
	0.7	0.06521	0.00880	0.00922	0.00094
	0.9	0.07954	0.00796	0.00960	0.00093
200	0.1	0.00420	- 0.00042	0.00475	0.00065
	0.3	0.01889	0.00417	0.00499	0.00062
	0.5	0.03693	0.00711	0.00562	0.00063
	0.7	0.05938	0.00877	0.00726	0.00071
	0.9	0.07819	0.00894	0.00840	0.00069

De la TABLA 3.9 (mínimos cuadrados condicionales) se observa que el sesgo de $\hat{\beta}$ es negativo en 7 de los 25 casos, mientras que el sesgo de $\hat{\nu}$ es negativo 19 veces. Respecto a la magnitud del sesgo se observa que: en general la magnitud del sesgo de $\hat{\nu}$ disminuye en más de la mitad con respecto a la de $\hat{\beta}$. Por otra parte, el error cuadrático medio de $\hat{\nu}$ mantiene un comportamiento estable para todo $n \geq 75$ y para todo β , mientras que el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$ mantiene un comportamiento estable a partir de $n \geq 100$ y $\beta \geq 0,5$.

De los resultados de la TABLA 3.10 se observa que el sesgo de $\hat{\beta}$ es negativo en 3 de los 25 casos y el sesgo de $\hat{\nu}$ es negativo en 8 casos. También, se observa que la magnitud del sesgo de $\hat{\nu}$ disminuye en más de la mitad con respecto a la de $\hat{\beta}$, este mismo comportamiento se observa en el error cuadrático medio.

Ahora, comparando los resultados de las TABLAS 3.9 y 3.10 se tiene que la magnitud del sesgo de $\hat{\beta}$ con $(\nu = 0,4)$, aumenta cuando $\beta = 0,5, 0,7, 0,9$ y $n \geq 75$. Este mismo comportamiento se observa para la magnitud del sesgo de $\hat{\nu}$ a partir de $n = 100$. Por otra parte, el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$ y $\hat{\nu}$ aumenta cuando se incrementa ν de 0.2 a 0.4.

3.3.4. Aplicación práctica del modelo INMAG(1)

En esta sección se ajusta el modelo INMAG(1) a la diferencia primera de las series temporales: convulsiones epilépticas por día para un paciente, presentada en la figura 1.1 y número de infecciones mensuales por *Staphylococcus aureus* presentada en la figura 1.3.

La serie temporal de convulsiones epilépticas no parece que tenga un comportamiento estacionario, sin embargo, la función de autocorrelación podría sugerir la necesidad de un modelo tipo ARIMA(0,1,1)(figura 3.1). Al aplicar una diferencia a dicha serie temporal, se observa que la serie temporal resultante (figura 3.2) puede ser descrita a través de un modelo INMAG(1), puesto que, la función de autocorrelación sólo tiene un valor significativamente distinto de cero en el primer retardo (figura 3.3)

Los estimadores de β y ν se obtienen utilizando el método de mínimos cuadrados condicionales y la subrutina UNLSF de la librería IMLS. El modelo ajustado es el siguiente:

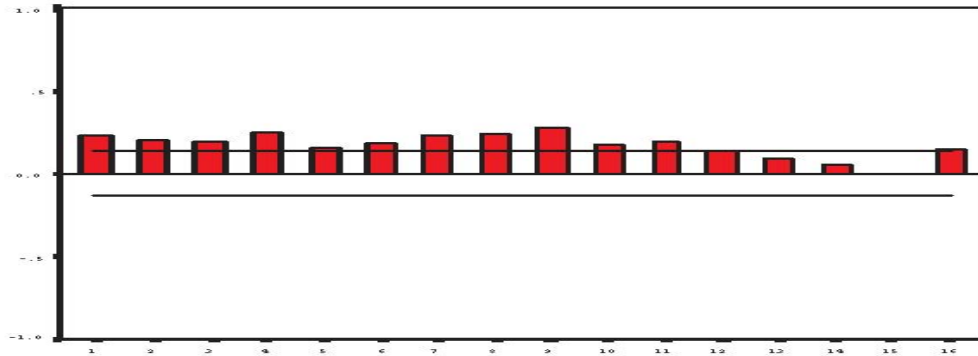


Figura 3.1: Función de autocorrelación para la serie temporal convulsiones epilépticas

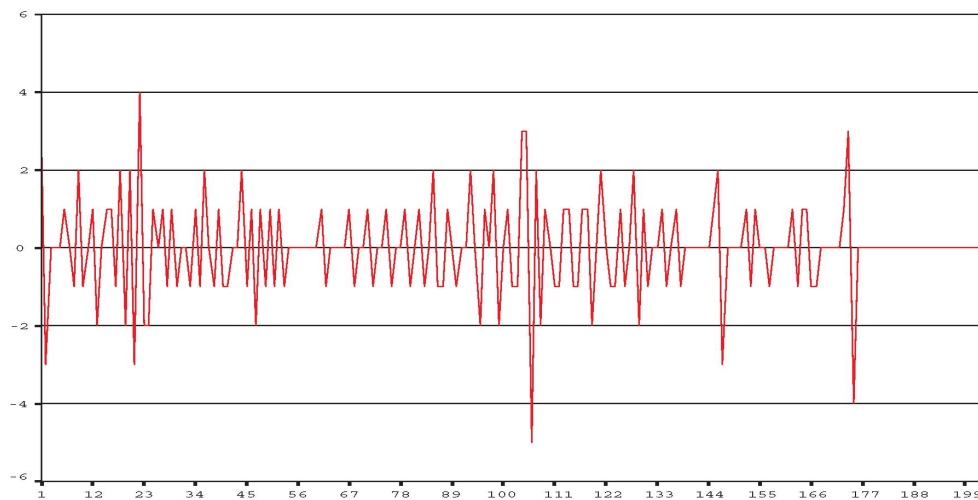


Figura 3.2: Primera diferencia para la serie convulsiones epilépticas.

$$X_t = -0,8472 \odot \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.17)$$

donde la varianza de $\hat{\beta}$ es igual a 0.0049 con un intervalo de confianza $(-0.9844, -0.7100)$ del 95% y $\{\epsilon_t, t = 1, 2, \dots, 203\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución geométrica desdoblada de parámetro $\hat{\nu} = 0,7$.

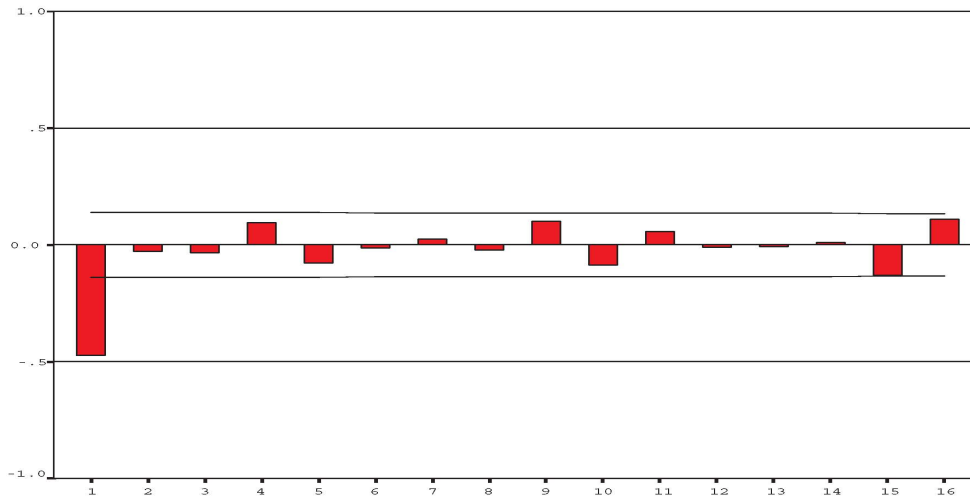


Figura 3.3: Función de autocorrelación por la primera diferencia de la serie convulsiones epilépticas.

Por otra parte, la función de autocorrelación de los residuos para el modelo ajustado a la serie de convulsiones epilépticas se presenta en la figura (3.4).

Ahora, se analiza la serie SARM. Obviamente, esta serie no presenta un comportamiento estacionario; entonces, con el fin de volverla estacionaria se aplica la primera diferencia a dicha serie temporal y se presenta en la figura 3.5, también se recoge su función de autocorrelación en la figura 3.6.

A partir de la función de autocorrelación se observa que la primera diferencia de la serie temporal SARM tiene un comportamiento estacionario con estructura INMAG(1). El modelo INMAG(1) ajustado a dicha serie es:

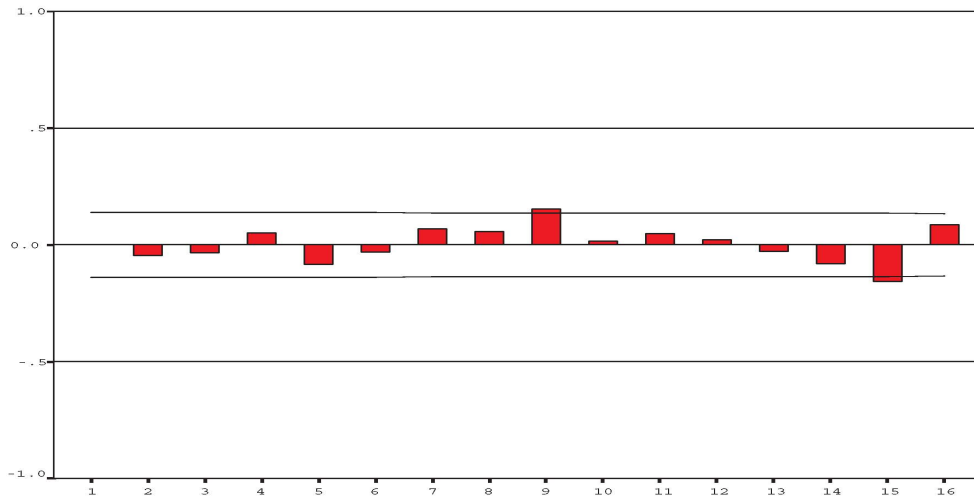


Figura 3.4: Función de autocorrelación para los residuos del modelo (3.17)

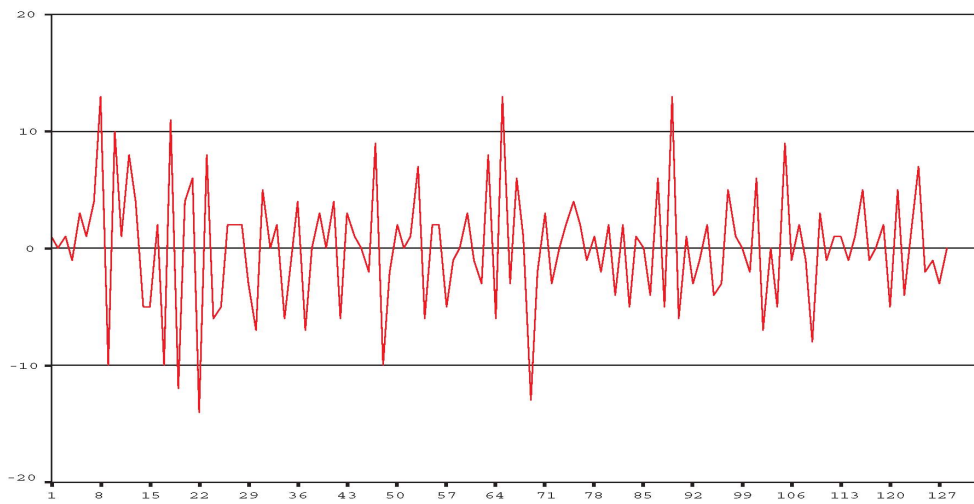


Figura 3.5: Primera diferencia para la serie SARM.

$$X_t = -0,4258 \odot \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.18)$$

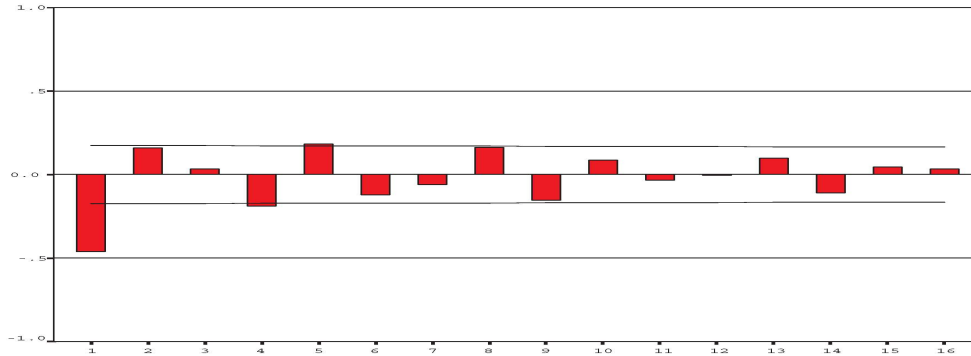


Figura 3.6: Función de autocorrelación para la primera diferencia de la serie temporal SARM.

donde la varianza de $\hat{\beta}$ es igual a 0.0078 con un intervalo de confianza $(-0.5988, -0.2528)$ del 95% y $\{\epsilon_t, t = 1, 2, \dots, 128\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución geométrica desdoblada con parámetro $\hat{\nu} = 0,25$.

También, se incluye la función de autocorrelación de los residuos (figura 3.7) para el modelo ajustado a la primera diferencia de la serie temporal SARM.

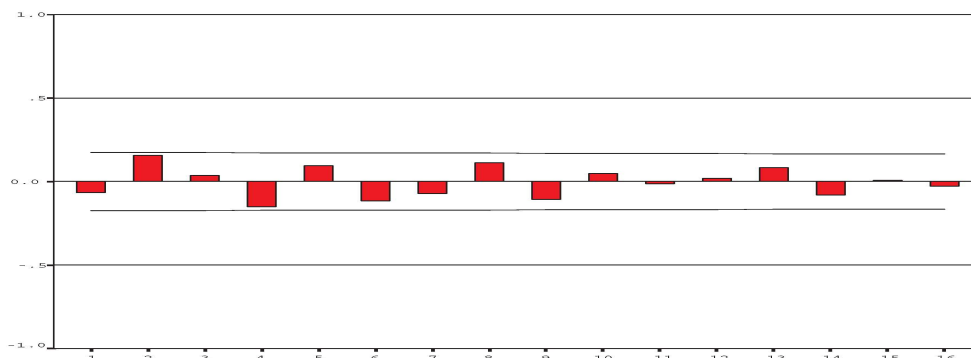


Figura 3.7: Función de autocorrelación de los residuos para la primera diferencia de la serie SARM

Se observa que la función de autocorrelación de los residuos para la serie de convulsiones epilépticas presenta valores significativos para los retardos 9 y 15, esto posiblemente se deba a un comportamiento estacional en los datos. Mientras que los residuos de la primera diferencia de la serie temporal SARM, hacen razonable el suponer que son variables aleatorias i.i.d.

Conclusiones

En esta memoria se han presentado los modelos tipo ARMA existentes para describir el comportamiento de una serie temporal de valores enteros no negativos.

Se ha introducido una clase de modelos que permiten analizar series temporales de valores enteros sin la restricción de que sean no negativos.

Por otra parte, se han aportado nuevos resultados teóricos tanto para los modelos existentes como para los nuevos modelos, con el fin de avanzar en el desarrollo de resultados análogos a los existentes para los modelos ARMA estándar.

Por último, se ha realizado una aplicación con datos reales del modelo INMAG(1) cuando el ruido tiene distribución geométrica desdoblada.

Como futuras líneas de investigación se podrían apuntar las siguientes:

1. Definición de los modelos INARMA(p, q). En este sentido cabe señalar la posibilidad de empezar a trabajar con modelos formales que produzcan valores enteros sin que necesariamente se correspondan con procesos de conteo. Es decir, considerar los modelos INARMA como un modelo ARMA estándar, reemplazando la multiplicación escalar por el operador de refinamiento, sin considerarlos como procesos de conteo, tal como hicieron Du y Li (1991) con el modelo INAR(p).
2. Abordar el problema, no resuelto hasta ahora, de la obtención de estimadores de máxima verosimilitud para modelos tipo INMA.
3. Estudiar el problema de predicción con el objeto de predecir valores enteros; por ejemplo, considerar el valor más probable como predictor.

4. Abordar la modelación y el tratamiento de datos atípicos.

APÉNDICE A

Proceso INAR(1) con marginal geométrica

El proceso INAR(1) con distribución marginal geométrica puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 X_t &= \begin{cases} \alpha \circ X_{t-1} & \text{con probabilidad } \alpha \\ \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon'_t & \text{con probabilidad } (1 - \alpha) \end{cases} \\
 &= \alpha \circ X_{t-1} + I_t \epsilon'_t
 \end{aligned}$$

Denotemos por $G(s_1, s_2, s_3)$ la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, para $h, l \geq 0$ y $|s_i| \leq 1$ para $i = 1, 2, 3$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
 G(s_1, s_1, s_3) &= \alpha E \left[s_1^{X_t} s_2^{X_{t+h}} s_3^{\alpha \circ X_{t+h+s-1}} \right] \\
 &\quad + (1 - \alpha) E \left[s_1^{X_t} s_2^{X_{t+h}} s_3^{\alpha \circ X_{t+h+s-1} + \epsilon'_{t+h+s}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha E \left[s_1^X s_2^{X_{t+h}} (1 - \alpha + \alpha s_3)^{X_{t+h+s-1}} \right] \\
&+ (1 - \alpha) E \left[s_1^X s_2^{X_{t+h}} (1 - \alpha + \alpha s_3)^{X_{t+h+s-1}} \right] \left(\frac{\nu}{1 - \bar{\nu} s_3} \right) \\
&= \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu} s_3} \right) E \left[s_1^X s_2^{X_{t+h}} (1 - \alpha + \alpha s_3)^{X_{t+h+s-1}} \right] \\
&= \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu} s_3} \right) \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu}(1 - \alpha + \alpha s_3)} \right) \\
&\quad E \left[s_1^X s_2^{X_{t+h}} (1 - \alpha^2 + \alpha^2 s_3)^{X_{t+h+s-2}} \right] \\
&= \prod_{i=0}^{l-1} \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu}(1 - \alpha^i + \alpha^i s_3)} \right) E \left[s_1^X (s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3))^{X_{t+h}} \right] \\
&= \prod_{j=0}^{h-1} \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu}(1 - \alpha^j + \alpha^j s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3))} \right) \\
&\quad \prod_{i=0}^{l-1} \left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)\nu}{1 - \bar{\nu}(1 - \alpha^i + \alpha^i s_3)} \right) E \left[(s_1(1 - \alpha^h + \alpha^h s_2(1 - \alpha^l + \alpha^l s_3)))^{X_t} \right]
\end{aligned}$$

Utilizando un procedimiento totalmente análogo al anterior se obtiene la F.G.P. conjunta de $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$.

Proceso INMA(q) con marginal geométrica

La F.G.P. conjunta de (X_t, X_{t+h}) , $G(s_1, s_2)$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 G(s_1, s_2) &= E \left[s_1^{X_t} s_2^{X_{t+h}} \right] \\
 &= E \left[\sum_{j=0}^q \beta_j \circ \epsilon_{t-j} \sum_{i=0}^q \beta_i \circ \epsilon_{t+h-i} \right] \\
 &= E \left[\sum_{j=0}^q \beta_j \circ \epsilon_{t-j} \sum_{i=0}^{q-h} \beta_{h+i} \circ \epsilon_{t-i} \sum_{i=0}^{h-1} \beta_i \circ \epsilon_{t+h-i} \right] \\
 &= \prod_{i=0}^{h-1} E \left[(1 - \beta_i + \beta_i s_2)^{\epsilon_{t+h-i}} \right] E \left[\sum_{j=0}^q \beta_j \circ \epsilon_{t-j} \sum_{i=0}^{q-h} \beta_{h+i} \circ \epsilon_{t-i} \right] \\
 &= \prod_{i=0}^{h-1} E \left[(1 - \beta_i + \beta_i s_2)^{\epsilon_{t+h-i}} \right] \prod_{j=q-h+1}^q E \left[(1 - \beta_j + \beta_j s_1)^{\epsilon_{t-j}} \right] \\
 &\quad \prod_{k=0}^{q-h} E \left[s_1^{\beta_k \circ \epsilon_{t-k}} s_2^{\beta_{h+k} \circ \epsilon_{t-k}} \right]
 \end{aligned}$$

Ahora, se obtiene:

$$E \left[s_1^{\beta_k \circ \epsilon_{t-k}} s_2^{\beta_{h+k} \circ \epsilon_{t-k}} \right] = E \left[\prod_{i=1}^{\epsilon_{t-k}} E \left[\begin{matrix} Y_{i,k}^{t-k} & Y_{i,k+h}^{t-k} \\ s_1 & s_2 \end{matrix} \right] \right]$$

Se observa que:

$$\begin{aligned} E \left[\begin{matrix} Y_{i,k}^{t-k} & Y_{i,k+h}^{t-k} \\ s_1 & s_2 \end{matrix} \right] &= s_1 s_2 P(Y_{i,k}^{t-k} = 1, Y_{i,k+h}^{t-k} = 1) \\ &+ s_1 P(Y_{i,k}^{t-k} = 1, Y_{i,k+h}^{t-k} = 0) + s_2 P(Y_{i,k}^{t-k} = 0, Y_{i,k+h}^{t-k} = 1) + P(Y_{i,k}^{t-k} = 0, Y_{i,k+h}^{t-k} = 0) \\ &= s_1 s_2 \beta_k \beta_h + s_1 \beta_k (1 - \beta_h) + s_2 (\beta_{h+k} - \beta_k \beta_h) + 1 - \beta_k (1 - \beta_h) - \beta_{k+h} \end{aligned}$$

Utilizando el último resultado se tiene que:

$$\begin{aligned} E \left[s_1^{\beta_k \circ \epsilon_{t-k}} s_2^{\beta_{h+k} \circ \epsilon_{t-k}} \right] \\ = E \left[(s_1 s_2 \beta_k \beta_h + s_1 \beta_k (1 - \beta_h) + s_2 (\beta_{h+k} - \beta_k \beta_h) + 1 - \beta_k (1 - \beta_h) - \beta_{k+h})^{\epsilon_{t-k}} \right] \end{aligned}$$

Esto completa la deducción de la F.G.P. conjunta de (X_t, X_{t+h}) para el proceso INMA(q). Utilizando un procedimiento totalmente análogo al anterior se obtienen las F.G.P. conjunta para $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l})$, $G(s_1, s_2, s_3)$ y para $(X_t, X_{t+h}, X_{t+h+l}, X_{t+h+l+p})$, $G(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $h, l, p \geq 0$, $|s_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

APÉNDICE B

Momentos de cuarto orden del proceso INMA(q) con marginal geométrica

Para obtener el momento de cuarto orden (ecuación (2.32)) del proceso INMA(q), se necesitan las expresiones explícitas de $f_i(\beta_h, \beta_l, \beta_p)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) que están dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(\beta_h, \beta_l, \beta_p) &= \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) \beta_h [\beta_l(\beta_p - \beta_{l+p}) - \beta_{h+l}(\beta_p - \beta_{h+l+p})] (\mu + \mu^2 + \gamma(l)) \\ &+ \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) [\beta_h \beta_l \beta_p (1 + \mu) - \beta_{h+l} \beta_{h+l+p} (\gamma(l) + \mu \beta_h) + \beta_h \beta_{h+l+p} (\mu^2 - \gamma(l)) \\ &+ \gamma(l) (\beta_p \beta_{h+l} + \beta_h \beta_{l+p})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\beta_h, \beta_l, \beta_p) &= \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \beta_l [2(1 - \beta_h) \beta_p \beta_{h+l} + \beta_h \beta_l (\beta_p - \beta_{l+p}) \\ &+ (1 - \beta_h)(1 - \beta_{h+l}) \beta_{h+l+p}] + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 [\beta_l \beta_p (1 + \beta_h)(1 + \mu) + \beta_h \beta_l \beta_{l+p} (1 - \mu)] \\ &+ \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \mu [(1 - \beta_h)(\beta_p - \beta_{h+l+p}) \beta_{h+l} - \beta_l \beta_{l+p}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(\beta_h, \beta_l, \beta_p) &= 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^3 [\beta_p + (1 + \beta_h)((1 - \beta_l) \beta_{l+p} + \beta_l \beta_p) \\ &+ (1 - \beta_h)((1 - \beta_{h+l}) \beta_{h+l+p} + \beta_{h+l} \beta_p)], \end{aligned}$$

$$f_4(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^3 [\beta_l + \beta_h \beta_l + (1 - \beta_h) \beta_{h+l}],$$

$$f_5(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 [\beta_h\beta_p + (\beta_h\beta_l + (1-\beta_l)\beta_{h+l})(\beta_l\beta_p + (1-\beta_l)\beta_{l+p})] \\ + \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \beta_h [(\beta_l\beta_p + (1-\beta_l)\beta_{l+p})(\mu-1) + \mu(\beta_p\beta_{h+l} - (1-\beta_{h+l})\beta_{h+l+p})],$$

$$f_6(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \beta_h [\mu(\beta_l - \beta_{h+l}) + \beta_l],$$

$$f_7(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = 2 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^3 \beta_h,$$

$$f_8(\beta_h, \beta_l, \beta_p) = 6 \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2.$$

Lema 2.7. parte (ii)

$$(ii)a. - \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) = 2\sigma^2 + \frac{4\bar{\nu}^2}{\nu^2} \left(\beta^2 + \frac{\bar{\nu}\beta^3}{\nu} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\ + \frac{2\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1+\alpha)} \right) + \frac{2\bar{\nu}\beta}{\nu^2(1-\alpha)} + \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\ + \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2(1-\alpha)} \left(\frac{\beta^2}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^3)} \right), \quad h = 0,$$

$$\begin{aligned}
b. - \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \gamma(1) + \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2} \left(\frac{\beta^2}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\
&+ \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1+\alpha)} \right) + \frac{\bar{\nu}\alpha\beta}{\nu^2(1-\alpha)} + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\
&+ \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1+\alpha)} \right) + \frac{\bar{\nu}\beta}{\nu^2(1-\alpha)} + \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right), \quad h = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c. - \lim_{n \rightarrow \infty} nCov(\bar{X}_n, \tilde{\gamma}_n(h)) &= \frac{2\bar{\nu}\alpha^h}{\nu(1-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\bar{\nu}}{\nu(1+\alpha)} \right) + \frac{2\bar{\nu}\beta\alpha^{h-1}}{\nu^2(1-\alpha)} \\
&+ \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{h-2}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) + (h-1)\gamma(h) + \frac{2\bar{\nu}^2\alpha^{h-1}}{\nu^2(1-\alpha)}, \quad h \geq 2.
\end{aligned}$$

Deducción de la ecuación (2.54)

Para enunciar el Lema 2.8 se necesita obtener el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=l}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) [E(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=l+1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) [E(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)] \\
&+ E[(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)^2(X_{t+j+h} - \mu) - \gamma(h)\gamma(l)]
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la ecuación (2.53) se puede escribir la última ecuación como:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=l+1}^{n-1} [\gamma(j-l)\gamma(j+h) + \gamma(j)\gamma(j+h-l) + \gamma(j+h)] \\
 &+ \frac{2\bar{\nu}^2 \alpha^{2l+h-1}}{\nu^2(1-\alpha)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) + \frac{4\bar{\nu}^2 \mu \alpha^{2l+h}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\
 &+ \frac{6\bar{\nu}^3 \alpha^{3l+h-1}}{\nu^3(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3} + \frac{\bar{\nu}\alpha^3}{\nu(1-\alpha^4)} \right) + E [(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)^2(X_{t+l+h} - \mu)] \\
 &- \gamma(h)\gamma(l) \\
 &= \frac{2\bar{\nu}^2 \alpha^{l+h}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^2)} \right)^2 + \frac{\bar{\nu}\alpha^{l+h}}{\nu} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\bar{\nu}\alpha}{\nu(1-\alpha^2)} \right) \\
 &+ \frac{2\bar{\nu}^2 \alpha^{2l+h-1}}{\nu^2(1-\alpha)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) + \frac{4\bar{\nu}^2 \mu \alpha^{2l+h}}{\nu^2(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\bar{\nu}\alpha^2}{\nu(1-\alpha^3)} \right) \\
 &+ \frac{6\bar{\nu}^3 \alpha^{3l+h-1}}{\nu^3(1-\alpha^2)} \left(\frac{\beta}{\nu} + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3} + \frac{\bar{\nu}\alpha^3}{\nu(1-\alpha^4)} \right) + E [(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)^2(X_{t+l+h} - \mu)] \\
 &- \gamma(h)\gamma(l).
 \end{aligned}$$

Funciones generatrices de probabilidad conjunta del proceso INARMA(1,q)

Para obtener las funciones generatrices de probabilidad conjunta indicadas en las ecuaciones (2.58)-(2.60) del proceso INARMA(1,q) con marginal de Poisson, se nece-

sitan las siguientes esperanzas matemáticas, que se obtienen utilizando los mismos argumentos empleados en la obtención de la F.G.P. conjunta de (X_t, X_{t+h}) en el proceso INMA(q) (Apéndice A).

$$E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_t} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_t} \right) = E \left(1 - \beta_i - \beta_{i+h} + \beta_i \beta_h + s_1 \beta_i (1 - \beta_h) + s_2 (\beta_{h+i} - \beta_i \beta_h) + s_1 s_2 \beta_i \beta_h \right)^{\epsilon_t}$$

$$E \left(s_1^{\beta_i \circ \epsilon_t} s_2^{\beta_{i+h} \circ \epsilon_t} s_3^{\beta_{i+h+l} \circ \epsilon_t} \right) = E \left[1 - \beta_{h+l+i} (1 - s_3) - (1 - \beta_l + \beta_l s_3) (\beta_{h+i} (1 - s_2) + s_2 \beta_i \beta_h (1 - s_1)) - \beta_i (1 - \beta_h) (1 - s_1) (1 - \beta_{h+l} + \beta_{h+l} s_3) \right]^{\epsilon_t}$$

y

$$\begin{aligned}
E \left(s_1^{\beta_i} \circ \epsilon_t s_2^{\beta_{i+h}} \circ \epsilon_t s_3^{\beta_{i+h+l}} \circ \epsilon_t s_4^{\beta_{i+q-r}} \circ \epsilon_t \right) &= E [1 - s_2 \beta_i \beta_h (1 - \beta_l) (1 - \beta_{l+p}) (1 - s_1) \\
&- \beta_i (1 - \beta_h) (1 - \beta_{h+l}) (1 - \beta_{q-r}) (1 - s_1) - s_3 \beta_{h+i} \beta_l (1 - \beta_p) (1 - s_2) \\
&- s_3 \beta_i \beta_{h+l} (1 - \beta_h) (1 - \beta_p) (1 - s_1) - s_4 \beta_{h+i} \beta_{l+p} (1 - \beta_l) (1 - s_2) - s_4 \beta_{h+l+i} \beta_p (1 - s_3) \\
&- s_4 \beta_i \beta_{h+l+p} (1 - \beta_h) (1 - \beta_{h+l}) (1 - s_1) - s_2 s_3 \beta_i \beta_h \beta_l (1 - \beta_p) (1 - s_1) \\
&- s_2 s_4 \beta_i \beta_h \beta_{l+p} (1 - \beta_l) (1 - s_1) - s_3 s_4 \beta_l \beta_p \beta_{h+i} (1 - s_2) - \beta_{h+l+p+i} (1 - s_4) \\
&- \beta_{h+i} (1 - \beta_l) (1 - \beta_{l+p}) (1 - s_2) - \beta_{h+l+i} (1 - \beta_p) (1 - s_3) \\
&- s_3 s_4 \beta_i \beta_p \beta_{h+l} (1 - \beta_h) (1 - s_1) - s_2 s_3 s_4 \beta_i \beta_h \beta_l \beta_p (1 - s_1)]^{\epsilon_t}.
\end{aligned}$$

Lema 2.10.

Para demostrar el Lema 2.10 del proceso INARMA(1,q) con marginal de Poisson es necesario conocer el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[(X_t - \mu)(X_{t+s} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+l} - \mu)]$$

Por la ecuación (2.66) se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) E[(X_t - \mu)(X_{t+s} - \mu)(X_{t+j} - \mu)(X_{t+j+l} - \mu)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left\{ \gamma(j-s)\gamma(l+j) + \gamma(j)\gamma(j+l-s) + \frac{\lambda\alpha^{j+l}}{1-\alpha} \right. \\ &+ \lambda\gamma(j) \sum_{i=1}^{v+s-j} \beta_i \beta_{j-s} (\beta_l - \beta_{j+l-s}) + \lambda\mu^2 \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i (\beta_s \beta_{j-s} (\beta_l - \beta_{j+l-s}) - \beta_s \beta_j (\beta_l - \beta_{j+l})) \\ &+ \lambda\mu \left(\sum_{i=1}^{v-j} \beta_i \beta_s (2\beta_{j-s} \beta_l - \beta_{j-s} \beta_{j+l-s} - \beta_j \beta_l) + \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^i \beta_{v-j+1+i} (\beta_s \beta_{j-s} - \beta_s \beta_j) \right) \\ &+ \lambda \left(\sum_{i=1}^{v-j} \beta_i \beta_s \beta_{j-s} \beta_l + \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^i \beta_{v-j+1+i} \beta_s \beta_{j-s} + \sum_{i=0}^{j-s-1} \alpha^{i+l} \beta_{q-j+1+i} \beta_s + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha^{i+j+l-s} \beta_{q-s+1+i} \right) \\ &\left. + \lambda\gamma(j-s) \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i (\beta_s \beta_{j-s} \beta_l + \beta_s (1 - \beta_{j-s}) \beta_{j+l-s} + (1 - \beta_s) \beta_j \beta_l - (\beta_j + \beta_s (1 - \beta_j)) \beta_{j+l}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} (\gamma(j-s)\gamma(l+j) + \gamma(j)\gamma(j+l-s)) + \frac{\lambda\alpha^{l+s}}{(1-\alpha)^2} + \frac{\lambda}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{s-1} \alpha^{i+l} \beta_{q-s+1+i} \\
 &+ \lambda \sum_{j=s}^{v+s-1} \gamma(j) \sum_{i=1}^{v+s-j} \beta_i \beta_{j-s} (\beta_l - \beta_{j+l-s}) + \lambda \sum_{j=s}^q \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^i \beta_w \beta_s \beta_{j-s} + \frac{\lambda\alpha^l}{1-\alpha} \sum_{i=0}^v \beta_i \\
 &+ \lambda\mu^2 \sum_{j=s}^{v-1} \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i \beta_s (\beta_{j-s} (\beta_l - \beta_{j+l-s}) - \beta_j (\beta_l - \beta_{j+l})) + \lambda \sum_{j=s}^{v-1} \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i \beta_s \beta_{j-s} \beta_l \\
 &+ 2\lambda\mu \sum_{j=s}^{v-1} \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i \beta_s (\beta_{j-s} \beta_l - \beta_{j-s} \beta_{j+l-s} - \beta_j \beta_l) + \lambda\mu \sum_{j=s}^q \sum_{i=0}^{l-1} \alpha^i \beta_w (\beta_s \beta_{j-s} - \beta_s \beta_j) \\
 &+ \lambda \sum_{j=s}^{v-1} \gamma(j-s) \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i (\beta_s \beta_{j-s} \beta_l + \beta_s (1 - \beta_{j-s}) \beta_{j+l-s} + (1 - \beta_s) \beta_j \beta_l - (\beta_j + \beta_s (1 - \beta_j)) \beta_{j+l})
 \end{aligned}$$

donde $v = q - l$, y $w = v - j + 1 + i$. Ahora, calculemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} (\gamma(j-s)\gamma(l+j) + \gamma(j)\gamma(j+l-s)).$$

Se observa que, en la expresión anterior es suficiente obtener $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \gamma(j-s)\gamma(l+j)$,

ya que, el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \gamma(j)\gamma(j+l-s)$ se obtiene realizando cálculos similares. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \gamma(j-s)\gamma(l+j) &= \frac{\lambda^2 \alpha^{l+s}}{(1-\alpha)^2(1-\alpha^2)} + \frac{\lambda^2}{1-\alpha} \sum_{j=s}^{v-j} \alpha^{j-s} \beta_{l+j} \sum_{i=1}^{v-1} \beta_i \\
&+ \frac{\lambda^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \left(\sum_{i=0}^{v-s+1} \alpha^{v-s+1-i} \beta_i + \sum_{i=v-s+2}^q \beta_i \alpha^{i-(v-s+1)} \right) \\
&+ \lambda^2 \sum_{j=s}^{q+s-1} \beta_{j-s} \sum_{i=1}^{q+s-j} \beta_i \left(\beta_{l+j} \sum_{i=1}^{v-j} \beta_i + \sum_{i=v-j+1}^q \alpha^{j-v-1+i} \beta_i \right) \\
&+ \frac{\lambda^2}{1-\alpha} \sum_{j=s}^{q+s-1} \alpha^{l+j} \beta_{j-s} \sum_{i=1}^{q+s-j} \beta_i + \frac{\lambda^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \sum_{i=0}^q \alpha^{q+l+s+1-i} \beta_i \\
&+ \lambda^2 \sum_{j=s}^{v-1} \beta_{l+j} \sum_{i=\eta}^q \alpha^{i-\eta} \beta_i \sum_{k=1}^{v-j} \beta_k + \lambda^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(\sum_{i=\eta}^q \alpha^{i-\eta} \beta_i \right) \left(\sum_{k=v-j+1}^q \alpha^{j-v-1+i} \beta_k \right).
\end{aligned}$$

donde $\eta = q - j + s + 1$. El último sumando de la ecuación anterior puede calcularse exactamente para valores de l, s y q conocidos. En general, podemos obtener una cota superior de dicho sumando, es decir,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=s}^{n-1} \left(\sum_{i=\eta}^q \alpha^{i-\eta} \beta_i \right) \left(\sum_{k=v-j+1}^q \alpha^{j-v-1+i} \beta_k \right) \\
&\leq \left(\frac{1+b}{1-\alpha} \right) \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\sum_{i=0}^{v-s+1} \beta_i + \sum_{i=v-s+2}^q \beta_i \alpha^{i-v+s-1} \right).
\end{aligned}$$

Referencias

Albert, Paul S. (1991). A Two-State Markov Mixture Model for a Time Series of Epileptic Seizure Counts. *Biometrics*, 47, 1371-1381.

Al-Osh, M.A. and Alzaid, A.A. (1994). A Class of Non-Negative Time Series Processes With ARMA Structure. *Journal of Applied Statistical Science*, 1, 3, 313-322.

Al-Osh, M.A. and Aly, E.-E. A.A. (1992). First Order Autoregressive Time Series with Negative Binomial and Geometric Marginals. *Commun. Statist. -Theory Meth.* 21, 9, 2483-2492.

Al-Osh, M.A. and Alzaid, A.A. (1987). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process. *Journal of Time Series Analysis*, 8, 3, 261-275.

Al-Osh, M.A. and Alzaid, A.A. (1988). Integer-Valued Moving Average (IN-MA) Process. *Statistical Paper*, 29, 281-300.

Aly, E.-E. A.A. and Bouzar, N. (1994a). Explicit Stationary Distributions for Some Galton-Watson Processes with Immigration. *Commun. Statist. -Stochastic Models*, 10, 2, 499-517.

Aly, E.-E. A.A. and Bouzar, N. (1994b). On Some Integer-Valued Autoregressive Moving Average Models. *Journal of Multivariate Analysis*, 50, 132-151.

Alzaid, A.A. and Al-Osh, M. (1990). An Integer-Valued pth -Order Autoregressive Structure (INAR(p)) Process. *J. Appl. Prob.* 27, 314-324.

Alzaid, A. and Al-Osh, M. (1988). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process: Distributional and Regression Properties. *Statistica Neerlandica*, 42, 1, 53-61.

Alzaid, A.A. and Al-Osh, M.A. (1993). Some Autoregressive Moving Average Processes With Generalized Poisson Marginal Distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.* 45, 2, 223-232.

Alzaid, A.A. and Benkherouf, Lakdere (1995). First-Order Integer-Valued Autoregressive Process With Euler Marginal Distributions. *Journal of Statistical Research*, 29, 2, 89-92.

Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1987). Time Series: Theory and Methods. Springer-verlag, New York.

Cameron, A. Colin and Trivedi, Pravin K. (1998). Regression Analysis of Count Data. Cambridge University Press, New York.

Dion, J. P., Gauthier, G. y Latour, A. (1995). Branching Processes With Immigration and Integer-Valued Time Series. *Serdica Mathematical Journal*, 21, 123-136.

Franke, J. and Seligmann, T. (1993). Conditional Maximum Likelihood Estimates For INAR(1) Processes and Their Application to Modelling Epileptic Seizure Counts. *Developments in Time Series Analysis*, ed. T. Subba Rao. Chapman&Hall, London, 310- 330.

Gauthier, G. and Latour, A. (1994). Convergence Forte Des Estimateur Des

Paramters Dún Processus GENAR(p). *Ann. Sci . Math. Québec*, 18, 1, 49-71.

Jacobs, P.A. and Lewis, P.A.W. (1978a). Discrete Time Series Generated by Mixtures I: Correlation and Runs Properties. *J. R. Statist. Soc. B*, 40, 1, 94-105.

Jacobs, P.A. and Lewis, P.A.W. (1978b). Discrete Time Series Generated by Mixtures II: Asymptotic Properties. *J. R. Statist. Soc. B*, 40, 2, 222-228.

Jacobs, P.A. and Lewis, P.A.W. (1978c). Discrete Time Series Generated by Mixtures III: Autoregressive Processes (DAR(p)). **Technical Report NPS55-78-022**. Naval Postgraduate School, Monterey, California.

Jacobs, P.A. and Lewis, P.A.W. (1983). Stationary Discrete Autoregressive-Moving Average Time Series Generate by Mixtures. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1, 19-36.

Jin-Guan, D. and Yuan, L. (1991). The Integer-Valued Autoregressive (INAR(p)) Model. *Journal of Time Series Analysis*, 12, 2, 129-142.

Klimko, L.A. and Nelson, P.I. (1978). On Conditional Least Squares Estimation for Stochastic Processes. *The Annals of Statistics*, 6, 3, 629-642.

Latour, A. (1998). Existence and Stochastic Structure of a Non-Negative Integer-Valued Autoregressive Process. *Journal of Time Series Analysis*, 19, 4, 439-455.

Lawrance, A.J. and Lewis, P.A. (1980). The Exponential Autoregressive-Moving Average EARMA (p, q) Process. *J.R. Statist. Soc. (B)*, 42, 2, 150-161.

Le, Nhu D., Leroux, Brian G. y Puterman, Martin L. (1992). Exact Likelihood in a Markov Mixture Model for a Time Series of Epileptic Seizure Counts. *Biometrics*, 48, 317-323.

Lindsey, J.K. (1995). Modelling Frequency and Count Data. *Oxford University Press Inc.* New York.

MacDonald, Iain L. and Zucchini, Walter (1997). Hidden Markov and Other Models for Discrete-Valued Time Series. Chapman&Hall, London.

McKenzie, E. (1985). Some Simple Models for Discrete Variate Time Series. *American Water Resources Association*, 21, 4, 645-650.

McKenzie, E. (1988a). The Distributional Structure of Finite Moving-Average Processes. *J. Appl. Prob.* 25, 313-321.

McKenzie, E. (1988b). Some ARMA Models for Dependent Sequences of Poisson Counts. *Adv. Appl. Prob.* 20, 822-835.

Park, Y. and Kim, M. (1997). Some Basic and Asymptotic Properties in IN-MA(q) Processes. *Journal of the Korean Statistical Society*, 26, 2, 155-170.

Park, Y. and Oh, C.W. (1997). Some Asymptotic Properties in INAR(1) Processes with Poisson Marginals. *Statistical Papers*, 38, 287-302.

Sim, C.H. (1990). First-Order Autoregressive Models for Gamma and Exponen-

tial Processes. *J. Appl. Prob.* 27, 325-332.

Sprott, D.A. (1983). Estimating the Parameters of a Convolution by Maximum Likelihood. *Journal of the American Statistical Association*, 78, 382, 457-460.

Steutel, F.W. y Van Harn, K. (1979). Discrete Analogues of Self-Decomposability and Stability. *The Annals of Probability*, 7, 5, 893-899.

Van Harn, K., Steutel, F.W. and Vervaat, W. (1982). Self-Decomposable Discrete Distributions and Branching Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, 61, 97-118.

Yuan, L. , Yinguan, D. , Yougui, W. y Yiuyu. S. (1994). A Type of Seasonal Integer-Valued Autoregressive Model - SINAR(1). *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 17, 1, 100-108.