

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT44

Simetrías e integrabilidad en sistemas hamiltonianos y ecuaciones
diferenciales

Supervisor/es: Miguel Ángel Rodríguez González, Piergiulio Tempesta

Sergio Calle López

Grado en Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria julio 2025

Calificación: 9.7

Simetrías e integrabilidad en sistemas hamiltonianos y ecuaciones diferenciales

Resumen:

El presente trabajo consiste en un análisis de sistemas físicos superintegrables. Se pretende explicar sus propiedades y su relación con las simetrías asociadas. Asimismo, se aplicará su estudio centrándose en los hamiltonianos tanto clásicos como cuánticos, sirviéndose, como pilares, de los ejemplos de los osciladores Darboux III y Dunkl, así como de un caso combinado. En estos ejemplos se considerarán un espacio plano deformable según un parámetro a elección y un operador asociado a la simetría de reflexión, ambos en bajas dimensiones. Finalmente se analizarán sus implicaciones y sus posibles aplicaciones.

Abstract:

The present work consists of an analysis of superintegrable physical systems. The aim is to explain their properties and their relationship with the associated internal symmetries. Moreover, the study will be applied focusing on both classical and quantum Hamiltonians, using as key examples the Darboux III and Dunkl oscillators, as well as a combined case of both. In these examples, a deformable flat space depending on a chosen parameter and an operator associated with reflection symmetry will be considered, both in low dimensions. Finally, their implications and possible applications will be analyzed.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Contexto y relevancia de la superintegrabilidad	2
1.2. Sistemas superintegrables clásicos	2
1.3. Extensión a los sistemas cuánticos	3
1.4. Aplicaciones	4
1.5. Espacios con curvatura	4
1.6. Operadores de Dunkl	4
2. Hamiltonianos clásicos en espacios de Darboux III	5
2.1. Oscilador Darboux III bidimensional isótropo	6
2.2. Ruptura de la superintegrabilidad: el oscilador Darboux III anisótropo	9
3. Extensión a hamiltonianos cuánticos	13
3.1. Oscilador Darboux III cuántico unidimensional	13
3.2. Oscilador Darboux III cuántico N -dimensional	14
4. Osciladores de Dunkl	15
4.1. Preliminares sobre los operadores de Dunkl	15
4.2. El oscilador de Dunkl-Darboux III	16
4.3. Conclusiones: aplicaciones de los operadores de Dunkl	18
Referencias	20

1. Introducción

1.1. Contexto y relevancia de la superintegrabilidad

Los avances relacionados al campo de la física, desde una perspectiva histórica, siempre han estado estrechamente ligados al análisis de sistemas. La capacidad de comprender su funcionamiento y aprovechar sus propiedades es algo fundamental a la hora de obtener conclusiones. Si bien es cierto que no todos los sistemas parecen resolubles a simple vista, vislumbrar sus simetrías, aunque parezcan ocultas, siempre ha sido un buen método para facilitar el proceso.

Lamentablemente, no todos los sistemas físicos son resolubles de forma analítica o exacta, siendo necesario recurrir a métodos numéricos. Una resolución analítica, desde un punto de vista pragmático, parece ser notablemente más ventajosa al permitir obtener predicciones claras y concretas sobre las variables implicadas. No solo en cuestiones mecánicas o cinemáticas, al poder predecir y reproducir los movimientos, sino también a niveles más profundos, ayudando a comprender su comportamiento.

Si bien es cierto que existen numerosos sistemas físicos con sus correspondientes tipos, para el desarrollo de este trabajo, van a ser estudiados aquellos con resolución analítica. Centrando un poco más el foco, se va a enfocar en los sistemas superintegrables.

Los sistemas superintegrables, como una visión superficial, poseen la mayor cantidad posible de simetrías. Este hecho es el que les confiere las principales propiedades que hacen que puedan ser resueltos de forma exacta. También, estas simetrías agilizan su tratamiento, siendo posible aplicar técnicas matemáticas, como métodos algebraicos por ejemplo, que facilitan su resolución notablemente.

Desde una perspectiva histórica, estos sistemas han sido muy relevantes por su presencia en numerosos sistemas de física moderna, como agujeros negros [10] por ejemplo. Siempre que se encuentran sistemas de este tipo, se pretenden tomar como modelos por las ventajas que ofrecen. Si bien es cierto que el conocimiento de su existencia es antiguo, se cree que Wojciechowski acuñó el término superintegrable [15]. Algunos ejemplos de enorme relevancia para la superintegrabilidad son las soluciones explícitas de un problema de n cuerpos desarrolladas por Calogero [5].

1.2. Sistemas superintegrables clásicos

Entrando más en los conceptos cruciales, sería conveniente sentar unas bases sobre lo que es la integrabilidad.

Un sistema clásico con hamiltoniano $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ se le dice integrable cuando posee unas ecuaciones del movimiento resolubles independientemente de las condiciones dadas. Se puede realizar una definición más formal sobre este tipo de sistemas.

Definición 1. *Un sistema hamiltoniano clásico de dimensión n se dirá que es integrable cuando posee n constantes del movimiento en involución entre sí que son funcionalmente independientes.*

Generalmente, dichas ecuaciones son resolubles mediante integrales o cuadraturas. Una resolución exacta permitiría obtener funciones para todas las variables implicadas de modo que se pueda predecir su comportamiento bajo diferentes condiciones.

Existen casos en los que los sistemas, además de ser integrables, poseen ciertas simetrías añadidas que aportan nuevas constantes del movimiento. A estos sistemas se les denomina superintegrables. Existe una definición más explícita y que permite establecer una clara clasificación dentro de los tipos de superintegrabilidad [13].

Definición 2. *Un sistema hamiltoniano clásico integrable de dimensión n se dirá que es superintegrable cuando posee $k \leq n - 1$ constantes del movimiento funcionalmente independientes adicionales.*

Exploremos momentáneamente el concepto de independencia funcional para facilitar el entendimiento de la definición de integrabilidad y superintegrabilidad.

Definición 3. Sea $\mathcal{F} = (f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ un conjunto de N funciones definidas y localmente analíticas en una región del espacio de fases de dimensión $2n$. Se dirá que \mathcal{F} es funcionalmente independiente si la matriz de dimensiones $N \times 2n$ definida como $\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}, \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\right)$ es de rango N . Opuestamente, será funcionalmente dependiente si el rango es menor que N .

Si el conjunto es funcionalmente dependiente, entonces existe una función no nula F de N variables tal que $F(f_1, \dots, f_N) = 0$.

Si se da el caso en el que $k = 1$, entonces se le dice que es minimalmente superintegrable ya que cumple el requisito en su cota mínima y si se da el caso en el que $k = n - 1$, entonces se le dice que es maximalmente superintegrable ya que cumple el requisito en su cota máxima. En el caso de la superintegrabilidad maximal se da que las trayectorias acotadas son todas cerradas y el movimiento es periódico [14].

Para cualquier sistema físico, sus constantes del movimiento \mathcal{S} deben satisfacer la ecuación $\{\mathcal{H}, \mathcal{S}\} = 0$, donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el corchete de Poisson. El corchete de Poisson de dos funciones $\mathcal{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ en el espacio de fases es:

$$\{\mathcal{R}, \mathcal{S}\}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} \right) \quad (1.1)$$

Como se observa fácilmente, cada resultado de las ecuaciones para las constantes del movimiento puede ser expresado como una función $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_{2n-1})$ de $2n - 1$ funciones funcionalmente independientes. El problema se presenta en que es difícil encontrar $2n - 1$ funciones que estén definidas globalmente. Este hecho es el que refleja de forma clara lo especiales que son los sistemas superintegrables y su escasez.

1.3. Extensión a los sistemas cuánticos

Hasta el momento solo se han considerado los casos de sistemas hamiltonianos clásicos, pero se puede realizar una extensión de la teoría a los sistemas cuánticos. El concepto de integrabilidad se mantiene más o menos invariante al ser necesaria una resolución de sus ecuaciones de estado, en este caso basadas en operadores, de forma exacta.

Definición 4. Un sistema cuántico de dimensión n se dirá que es integrable cuando posee n cantidades conservadas, expresadas como operadores diferenciales L_i , algebraicamente independientes que conmutan entre sí.

Como en el caso clásico, existen sistemas con simetrías internas que permiten obtener un mayor número de operadores diferenciales. A estos sistemas son a los que se les denominará superintegrables.

Definición 5. Un sistema cuántico de dimensión n se dirá que es superintegrable cuando posee $k \leq n - 1$ cantidades conservadas adicionales, expresadas también como operadores diferenciales, algebraicamente independientes que conmutan entre sí.

Claramente, se sustituye la condición de independencia funcional por la de independencia algebraica, como era de esperar al cambiar de tipo de sistema. El hecho de que dos operadores conmuten es el equivalente cuántico para las cantidades conservadas en involución. Al igual que en el caso clásico, se llamará sistema minimalmente superintegrable si $k = 1$ por cumplir el requisito en su cota mínima y se llamará sistema maximalmente integrable si $k = n - 1$ por cumplir el requisito en su cota máxima. Como aclaración, aunque un sistema superintegrable cuántico puede tener $k = n$, el caso maximal se considera para $k = n - 1$ ya que, aunque no existe prueba de que $2n - 1$ sea el número máximo de operadores algebraicamente independientes, no se conocen contraejemplos.

1.4. Aplicaciones

Anteriormente, para el caso clásico, se ha comentado vagamente unas ideas de gran importancia. Una de ellas es el concepto de obtener trayectorias periódicas cuando estas están acotadas. Esta idea se relaciona con la obtención de órbitas en el espacio de fases. Dada esta información, es fácil pensar en un sistema físico archiconocido, el kepleriano. Se da que este sistema de dos cuerpos, al ser superintegrable [13], permite ver con facilidad cómo esas órbitas cerradas aparecen en el caso de las soluciones que son elipses. Otra idea fundamental que se presenta en este ejemplo también es que, dado que es un sistema maximalmente superintegrable, se pueden obtener las ecuaciones de las trayectorias de forma algebraica sin necesidad de las integrales. Es aquí cuando la superintegrabilidad garantiza soluciones exactas de los sistemas. Dado que existen $2n - 1$ simetrías dependientes de las coordenadas y los momentos generalizados, cada una de ellas define una hipersuperficie de dimensión $2n - 1$ en un espacio de dimensión $2n$. Como la trayectoria debe estar contenida en todas ellas, esta se debe encontrar su intersección, es decir, será una curva calculable a partir de las ecuaciones de las hipersuperficies.

1.5. Espacios con curvatura

Como objeto de estudio para este trabajo, se va a focalizar en los espacios de curvatura no nula. Se buscará cómo la superintegrabilidad se manifiesta en ellos y ayuda a comprender su funcionamiento a priori. Existen espacios con curvatura no nula pero constante. En estos es posible estudiar sistemas superintegrables como osciladores armónicos en superficies esféricas, planas o hiperbólicas [12]. Es en ellos donde la superintegrabilidad maximal presente contribuye en gran manera a facilitar su trabajo y tratamiento. Para este trabajo se va a desarrollar el caso de espacios con curvatura no constante. Existen numerosos espacios que poseen esta característica como, por ejemplo, los de Darboux [11], que serán de gran importancia. Se tomará un espacio de Darboux, concretamente Darboux III en el tipo b según la clasificación típica de este tipo de espacios [2]. Por comodidad, a lo largo del trabajo se le nombrará simplemente como Darboux III. Posteriormente, se analizará el hamiltoniano de un oscilador armónico en este, atendiendo a su superintegrabilidad y las consecuencias que genera.

1.6. Operadores de Dunkl

Tras hacer las consideraciones pertinentes sobre los osciladores en espacios con curvatura no constante, se pasará a analizar el caso para el oscilador Dunkl. Este tipo de operadores se basa en la simetría de reflexión y son cruciales para el desarrollo de teorías de polinomios ortogonales en varias variables [6]. Con las relaciones de simetría se puede redefinir un nuevo operador laplaciano aplicable a sistemas cuánticos [7], donde se podrá estudiar su resolubilidad y el efecto generado en la integrabilidad de los sistemas.

Con todo esto, la estructura de este trabajo ya queda bien cerrada. En la primera sección se tratará el caso para el hamiltoniano de un oscilador armónico en espacios de Darboux III, atendiendo sobre todo al caso isótropo en dimensión baja. Posteriormente se procederá con la extensión al caso cuántico y se finalizará con la introducción del oscilador de Dunkl al caso cuántico anterior para ver sus efectos.

2. Hamiltonianos clásicos en espacios de Darboux III

Un espacio de Darboux III, como se ha expresado con anterioridad, es un espacio de curvatura no constante. Estos espacios se pueden parametrizar de forma que la métrica es la siguiente:

$$ds^2 = (1 + \lambda|\mathbf{x}|^2) d\mathbf{x}^2, \quad (2.1)$$

donde λ representa la deformación del espacio y satisface $\lambda \geq 0$. Nótese que se trata de un espacio de dimensión N , así se podrá hacer el estudio más general posible.

Estos espacios se caracterizan por poseer una curvatura escalar no constante dada por la expresión [1] :

$$\mathcal{R} = -\lambda \frac{(N-1)(2N+3(N-2)\lambda|\mathbf{x}|^2)}{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)^3}. \quad (2.2)$$

Para el caso que ocupa de ahora en adelante, el de dimensión 2, se puede simplificar la curvatura escalar como:

$$\mathcal{R} = -\frac{4\lambda}{(1+\lambda(x^2+y^2))^3}. \quad (2.3)$$

Como principal objeto de estudio se van a considerar los hamiltonianos de osciladores armónicos. De forma general, el hamiltoniano de un oscilador armónico se puede escribir de la siguiente forma:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2), \quad (2.4)$$

donde p representa el momento, m la masa y ω las respectivas frecuencias de cada coordenada. También se ha considerado un caso bidimensional por simplicidad ya que será el caso de mayor dimensión considerado en adelante.

Dentro de los posibles osciladores se van a utilizar los isótropos, es decir, aquellos que solo poseen una única frecuencia para todas las coordenadas. Así, se puede reescribir este hamiltoniano de forma más compacta y simplificada:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega^2 \mathbf{x}^2), \quad (2.5)$$

donde \mathbf{p} representa el vector momento y \mathbf{x} el vector posición. Esta expresión es generalizable a espacios de dimensión N .

Este hamiltoniano es el asociado a un oscilador armónico isótropo en un espacio plano. El caso que nos ocupa, un espacio de Darboux III, como es esperable, debe necesariamente dar lugar a un nuevo hamiltoniano que involucre la deformación del espacio dependiente de la posición. Así, se puede obtener el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)} (|\mathbf{p}|^2 + \omega^2 |\mathbf{x}|^2). \quad (2.6)$$

Este tipo de oscilador es integrable. Se pueden deducir con facilidad las ecuaciones del movimiento gracias a las ecuaciones de Hamilton con la forma:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (2.7)$$

2.1. Oscilador Darboux III bidimensional isótopo

Este caso presenta un gran interés al poder analizar el comportamiento de la curvatura no constante del espacio en un sistema algo complejo. En este caso el hamiltoniano es el siguiente:

$$H = \frac{1}{2(1 + \lambda(x^2 + y^2))} (p_x^2 + p_y^2 + \omega^2(x^2 + y^2)). \quad (2.8)$$

Con cuidado se pueden deducir las ecuaciones del movimiento:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{1 + \lambda(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{1 + \lambda(x^2 + y^2)}, \quad (2.9)$$

$$\dot{p}_x = \frac{x(\lambda(p_x^2 + p_y^2) - \omega^2)}{(1 + \lambda(x^2 + y^2))^2}, \quad \dot{p}_y = \frac{y(\lambda(p_x^2 + p_y^2) - \omega^2)}{(1 + \lambda(x^2 + y^2))^2}. \quad (2.10)$$

En general, este tipo de osciladores son integrables. Por ser un oscilador armónico isótopo, posee una simetría fundamental propia de este tipo de potenciales, la de rotación. Gracias a esta se puede definir un operador de momento angular típico de estos sistemas. Este operador viene definido por:

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i, \quad \text{con } i < j = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Si bien es cierto que no se garantizaría su existencia para un caso de curvatura no nula, la métrica con simetría radial permite que se mantenga como cantidad conservada pese a la deformación del espacio. La característica principal de estos operadores es que son cantidades conservadas del sistema. De este modo, por el momento, tendríamos dos cantidades conservadas, la energía total, H y el momento angular que, para dimensión $N = 2$, es L_{12} .

Buscando más simetrías o comportamientos que permitan obtener cantidades conservadas claves para la superintegrabilidad, se pueden calcular unas pseudoenergías que también se conservan. Estas se pueden deducir de una propiedad que posee el hamiltoniano de un oscilador armónico isótopo, su separabilidad para cada coordenada. Como para un caso en el que existe una deformación espacial λ el hamiltoniano no es separable de forma directa es necesario redefinirlas como:

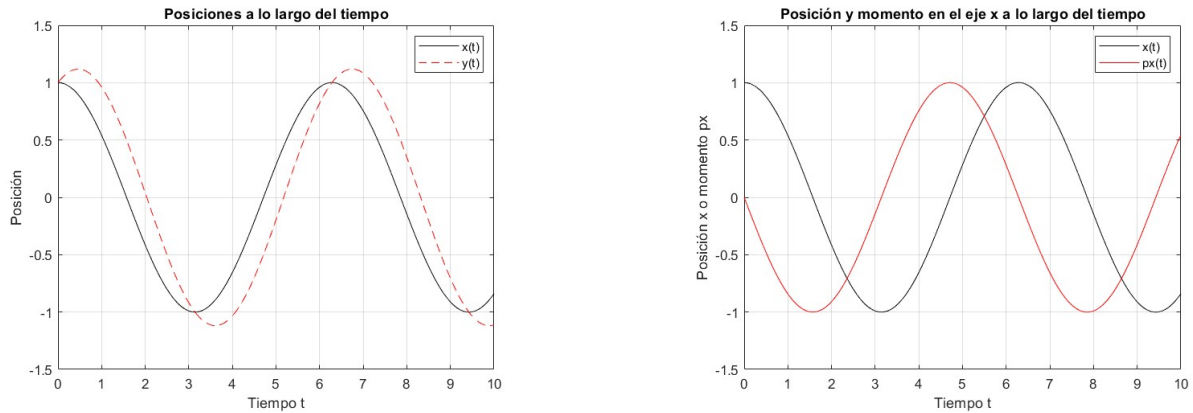
$$h_i = p_i^2 + (\omega^2 - 2\lambda H)x_i^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

Como se deduce de su expresión, para el caso de $\lambda = 0$, el resultado es cada uno de los hamiltonianos individuales de cada coordenada ya que la separabilidad directa vuelve a aparecer. Para este caso de dimensión dos se tienen como cantidades conservadas H , una de las pseudoenergías h_1 o h_2 , ya que son el resultado de la separabilidad del hamiltoniano y no serían independientes con H por ser su suma igual a $2H$, y L_{12} . Esto satisface que la existencia de $2n - 1$ cantidades conservadas y, por tanto, se trata de un sistema maximalmente superintegrable. Este hecho permite, mediante los paréntesis de Poisson (1.1), definir un álgebra para deducir las hipersuperficies que definen las curvas de las trayectorias. En este caso concreto, se da que las cantidades L_{12} y h_1 , por escoger una de las dos, conmutan con H , es decir, su paréntesis de Poisson es nulo. Pero L_{12} y h_1 no lo hacen entre sí. Esta característica es fundamental en superintegrabilidad ya que, si hubiera n cantidades conservadas, estas podrían conmutar todas entre sí, pero para el caso de $2n - 1$ no lo hacen. De este modo, el álgebra de simetría definido es interesante por tener una estructura no trivial.

Pese a que las soluciones algebraicas son muy interesantes para resolver de forma exacta estos sistemas, lo que realmente ocupa al trabajo es ver cómo las órbitas cerradas son periódicas. Para ello se ha procedido a resolver numéricamente las ecuaciones del movimiento con el fin de tener una representación del comportamiento para las diferentes curvaturas del espacio. Si bien es cierto

que el caso para $\lambda = 0$ es análogo a dos casos unidimensionales por ser separable, al introducir curvatura, la resolución explícita se complica y es mejor recurrir al cálculo numérico por comodidad. La ciclicidad de las órbitas cerradas es clave para estos sistemas al evitar una divergencia en las soluciones.

Como punto de partida, sería conveniente hacer una breve representación de un caso en curvatura plana con el fin de ver cómo es una situación de este estilo, aunque sea archiconocido en física. Un caso de este tipo daría lugar a los siguientes resultados:



(a) Posición en el eje x e y en función del tiempo

(b) Posición y momento en función del tiempo

Figura 2.1: Momento y posiciones para $\lambda = 0$ y $\omega = 1$

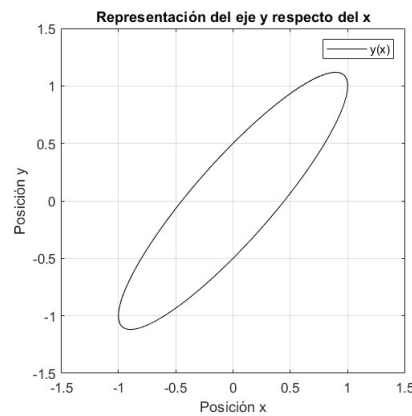


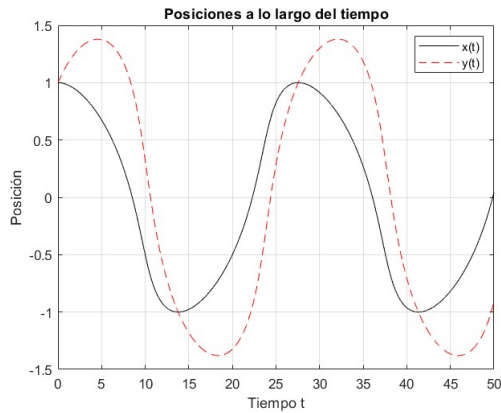
Figura 2.2: Plano (x,y) para $\lambda = 0$ y $\omega = 1$

Para obtener estas gráficas se han tomado como condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $p_x(0) = 0$ y $p_y(0) = 0,5$. Dadas estas condiciones, las oscilaciones para cada posición presentan un desfase y una amplitud diferentes, haciendo el caso más interesante. Prosiguiendo con la comparativa entre posición y momento, estos presentan un desfase de $\frac{\pi}{2}$. El caso para el eje y es análogo, por lo que no sería necesario siquiera comentarlo. Respecto a la trayectoria en el plano (x,y) , se observa una elipse consecuencia del desfase inicial que presentan las posiciones. Del mismo modo, aunque presentarían un desfase de $\frac{\pi}{2}$ la figura no llegaría a ser una circunferencia por tener amplitudes diferentes.

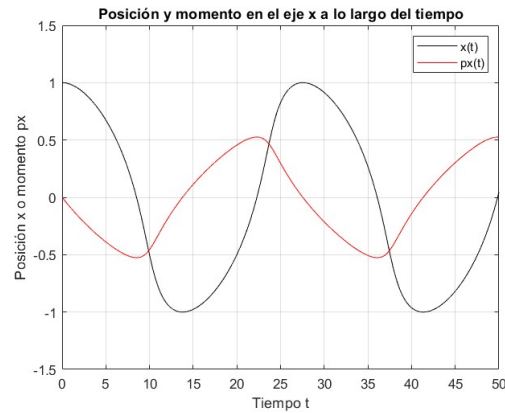
Ahora se va a proceder a variar el parámetro λ para ver su efecto en las oscilaciones y en la trayectoria final. Respecto a la frecuencia, esta regula en gran parte el sistema y será favorable

mantenerla baja para hacer los cálculos numéricos. Esto es debido a que se ha comprobado que el método presenta inestabilidades para altos valores tanto de ω como de λ . La causa puede ser, por parte de ω un aumento en la variabilidad de los puntos en los intervalos, lo que facilita la acumulación de errores y por parte de λ un aumento del periodo como en el caso unidimensional que hace necesitar una mayor muestra de tiempo para ver las oscilaciones.

Atendiendo a estas restricciones por los métodos de cálculo numérico, para un caso de espacio con curvatura no constante se han obtenido los siguientes resultados:



(a) Posición en el eje x e y en función del tiempo



(b) Posición y momento en función del tiempo

Figura 2.3: Momento y posiciones para $\lambda = 0,9$ y $\omega = 1$

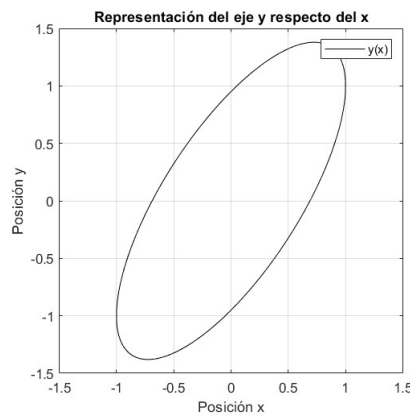


Figura 2.4: Plano (x,y) para $\lambda = 0,9$ y $\omega = 1$

Se han tomado nuevamente las mismas condiciones iniciales que para el caso de espacio plano para establecer una comparación directa. Como se aprecia en la primera figura, el desfase entre posiciones se mantiene, aunque ahora la amplitud difiere aún más. La forma de las oscilaciones se ve deformada como consecuencia de la deformación del espacio. Un efecto muy interesante que se da es que la deformación del espacio aumenta significativamente el periodo de oscilación ya que, pese a haber representado casi el mismo número de oscilaciones que en el caso anterior, el tiempo necesario se ha visto incrementado de forma notable. Analizando también la comparativa entre posición y momento, se aprecian comportamientos radicalmente diferentes entre estos. El modo de oscilación ha cambiado y el momento parece tener una forma de oscilación triangular ligeramente deformada, mientras que la posición ha visto las partes superior e inferior de la oscilación ligera-

mente ensanchadas. Para finalizar el análisis, en el plano (x,y) vuelve a aparecer una elipse como en el caso de espacio plano. Este hecho final demuestra que, pese a la deformación del espacio, como es un sistema maximalmente superintegrable, las trayectorias cerradas siguen siendo periódicas, aunque en este caso la elipse se haya ensanchado como consecuencia del cambio de amplitud del eje y .

2.2. Ruptura de la superintegrabilidad: el oscilador Darboux III anisótropo

En los casos anteriores se ha trabajado con osciladores isótropos por simplicidad. En este apartado se pretende hacer una revisión superficial a un caso más complejo para ver las complicaciones que se dan. El hamiltoniano para un caso anisótropo en un espacio de curvatura no constante es el siguiente:

$$H = \frac{1}{2(1 + \lambda(x^2 + y^2))} (p_x^2 + p_y^2 + \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \quad (2.13)$$

De este nuevo hamiltoniano se pueden reobtener las ecuaciones del movimiento. Para los casos de las derivadas temporales tanto de x como de y se tienen las mismas ecuaciones del movimiento que para el caso isótropo (2.9). Sin embargo, las derivadas temporales de los momentos presentan una pequeña variación al poder diferenciar entre dos posibles frecuencias. Estas ecuaciones son las siguientes:

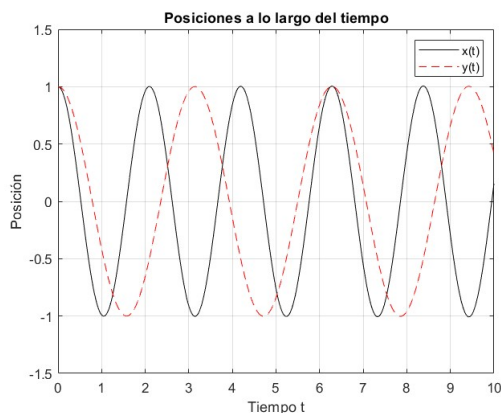
$$\dot{p}_x = \frac{x(\lambda(p_x^2 + p_y^2) + \lambda(\omega_y^2 - \omega_x^2)y^2 - \omega_x^2)}{(1 + \lambda(x^2 + y^2))^2}, \quad \dot{p}_y = \frac{y(\lambda(p_x^2 + p_y^2) + \lambda(\omega_x^2 - \omega_y^2)x^2 - \omega_y^2)}{(1 + \lambda(x^2 + y^2))^2}. \quad (2.14)$$

El caso anisótropo es integrable en tanto que también permite definir dos pseudoenergías derivadas de la idea de separabilidad del hamiltoniano, aunque nuevamente, incluso para el caso de espacio plano, no lo sea de forma directa. Estas toman la forma:

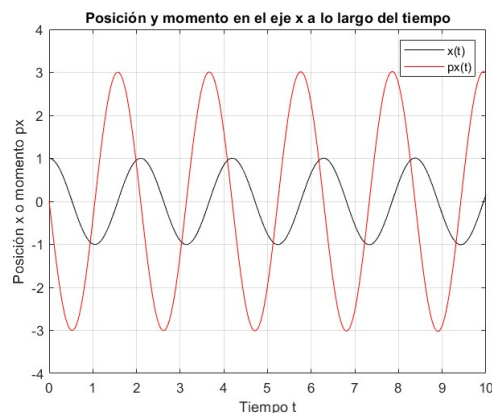
$$h_x = p_x^2 + (\omega_x^2 - 2\lambda H)x^2, \quad h_y = p_y^2 + (\omega_y^2 - 2\lambda H)y^2. \quad (2.15)$$

Una de estas cantidades junto con el hamiltoniano completo satisfacen la condición de integrabilidad. El problema surge en la búsqueda de una tercera cantidad conservada que haga de este sistema uno maximalmente superintegrable. En este caso, el momento angular no es una constante del movimiento por haber diferentes frecuencias. Aunque, si estas frecuencias fueran conmensurables, las órbitas, basándose en el caso de espacio plano $\lambda = 0$, serían periódicas, invitando a pensar que existe una tercera cantidad conservada.

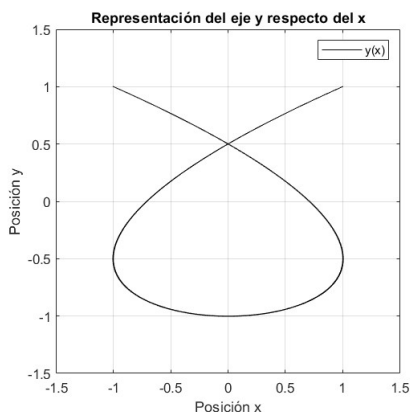
Teniendo todas las ecuaciones necesarias, se pueden resolver numéricamente de nuevo y ver las trayectorias. El caso sin deformación del espacio con frecuencias diferentes ofrece los siguientes resultados:



(a) Posiciones en función del tiempo



(b) Posición y momento en función del tiempo

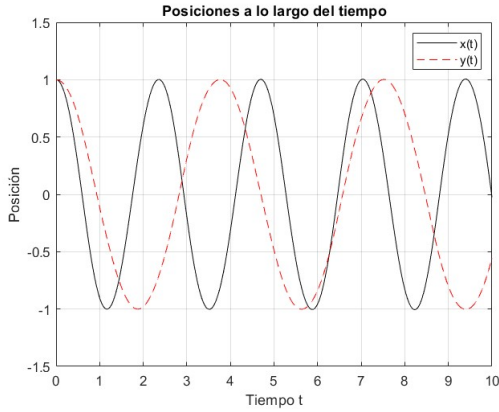


(c) Plano (x, y)

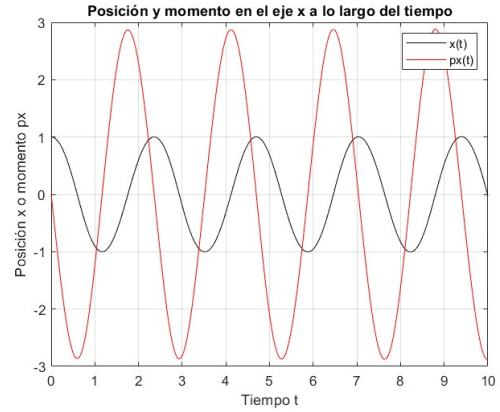
Figura 2.5: Momento y posiciones para $\lambda = 0$, $\omega_x = 3$ y $\omega_y = 2$

Para obtener estas gráficas se han tomado como condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $p_x(0) = 0$ y $p_y(0) = 0$. En este caso se aprecia claramente cómo las frecuencias son diferentes para ambos ejes ya que las posiciones parten del mismo punto sin un desfase entre ellas, así los máximos coinciden cada un cierto número de oscilaciones dependiente de la relación entre frecuencias. Respecto a la posición y el momento, mantiene el desfase esperable para este caso, como en todos los anteriores, aunque las amplitudes sí son diferentes. Finalmente, en el plano (x, y) aparece la figura de Lissajous asociada a esa relación entre frecuencias. El hecho de que esta trayectoria sea acotada y periódica invita a pensar que, efectivamente, existiría una tercera cantidad conservada. Como es fácil imaginar, si no son conmensurables las frecuencias, pueden tener unos ciclos con periodo muy largo y, si una de las frecuencias fuera un número irracional, solo en un tiempo infinito podría cerrarse su ciclo. Este es el motivo fundamental que hace de este tipo de osciladores unos sistemas tan delicados. La condición para que las trayectorias sean periódicas es fácil de romper.

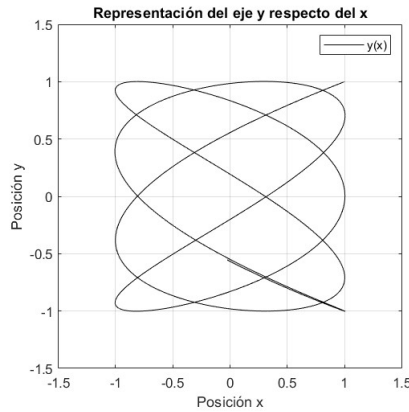
Ahora se va a proceder a variar el parámetro que regula la curvatura del espacio para ver los efectos de esta. Así como ver si sus órbitas son acotadas y periódicas o no. Los resultados han sido los siguientes:



(a) Posición en el eje x e y en función del tiempo



(b) Posición y momento en función del tiempo



(c) Plano (x,y)

Figura 2.6: Momento y posiciones para $\lambda = 0,07$, $\omega_x = 3$ y $\omega_y = 2$

Nuevamente, se han considerado las mismas condiciones iniciales que en el caso anterior para poder establecer una comparación. Como se aprecia, las oscilaciones en x e y han visto su periodo modificado y han cambiado su superposición como consecuencia de ello. Este efecto era esperable ya que, como se ha visto con anterioridad, la deformación del espacio tiende a aumentar el periodo de las oscilaciones. Respecto a la posición y al momento no hay nada interesante que comentar, el desfase es el mismo y la amplitud del momento ha variado, como ha ocurrido en casos anteriores. Si se atiende al plano (x,y) , se observa lo que podría ser una nueva figura de Lissajous y la trayectoria una vez más parece periódica. Esta figura aparente no sería la esperable para una relación 3:2 en las frecuencias. De hecho, se trata de la que aparece cuando esta relación es 8:5. Este hecho se explica al considerar que la curvatura cambia las frecuencias, como ya se ha demostrado. En la parte inferior derecha de dicha gráfica parece que la vuelta de la trayectoria no recorre el mismo camino, este hecho será discutido más adelante.

Si se tomara más tiempo para la trayectoria, se vería cómo esta no es periódica, sino que empieza a ocupar todo el espacio dentro de las cotas que posee. Este hecho se ve reflejado en la siguiente imagen:

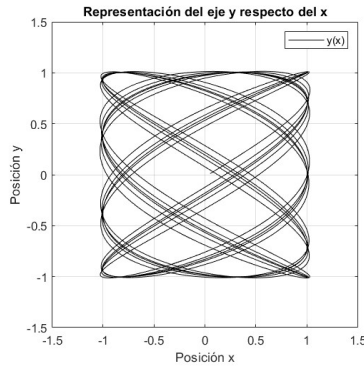


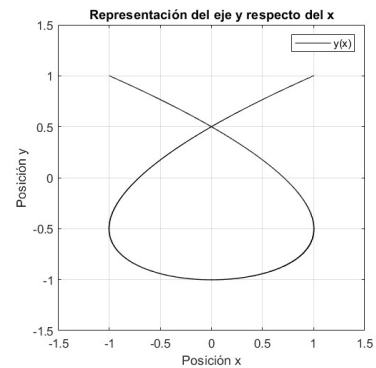
Figura 2.7: Plano (x, y) con más tiempo para $\lambda = 0,07$, $\omega_x = 3$ y $\omega_y = 2$

Con todo esto se deduce que el periodo del ciclo es mayor de lo que podría parecer a simple vista. No existe una proporción exacta 8:5 como consecuencia de la deformación del espacio. Ciertamente, la región está acotada y la trayectoria parece cíclica, pero su periodo puede tender a infinito dependiendo de la conmensurabilidad de las nuevas frecuencias.

Para hacer un análisis más a fondo, se puede partir de la hipótesis de que lo que realmente ha cambiado no han sido las frecuencias de forma individual, sino su proporción. Esta proporción β_λ definida como $\beta_\lambda = \omega_x/\omega_y$ tiene un valor de $\beta_0 = 1,5$ para el espacio plano. Para calcular la proporción para el caso con $\lambda = 0,07$ se puede recurrir a las gráficas y calcular el periodo de las oscilaciones ya que la proporción 8:5 no es exacta. Los resultados de ambas frecuencias son $\omega_x = 2,66$ y $\omega_y = 1,67$, así su proporción resultaría en $\beta_{0,07} = 1,59$. Comparando ambos valores de β_λ , se deduce que discrepan en un factor $\alpha = 1,06$. En esta situación, lo esperable, si la hipótesis es correcta, es que si se divide ω_x entre α o si se multiplica ω_y por esta, se reobtena el mismo comportamiento que para $\lambda = 0$. El resultado se muestra en la siguiente gráfica:



(a) Caso para $\alpha = 1,06$



(b) Caso para $\alpha = 1,056$

Figura 2.8: Plano (x, y) para $\lambda = 0,07$, $\omega_x = 3$ y $\omega_y = 2 \cdot \alpha$

Se observa claramente cómo se recupera el comportamiento previo. No se ajusta del todo a la figura esperada en la imagen a ya que el valor de α no se ha obtenido de forma exacta al ser fruto de medidas sobre las gráficas. Probando diferentes valores cercanos, se ha deducido que el valor real de este parámetro se encuentra en torno a $\alpha = 1,056$, donde el resultado se puede ver en la imagen b. Parece que en este último caso, con un valor bien determinado del conversor de proporcionalidad α , probablemente dependiente de λ , se puede recuperar la periodicidad de las trayectorias. Al obtener un caso de propiedades como en el espacio sin deformar, invita a pensar nuevamente que existiría una tercera cantidad conservada relacionada a la conmensurabilidad de las frecuencias.

Este caso es un claro ejemplo de cómo la superintegrabilidad se da en sistemas muy especiales y concretos. Como se ha visto para un simple oscilador armónico, la superintegrabilidad no está garantizada ni siquiera en sus posibles variantes más sencillas. Para el caso isótropo es una realidad fácilmente demostrable por sus cantidades conservadas, pero para el anisótropo se depende de una tercera cantidad conservada que parece solo existir para frecuencias conmensurables.

3. Extensión a hamiltonianos cuánticos

Anteriormente se han visto y estudiado casos para un oscilador armónico isótropo clásico en un espacio de Darboux III. Este tipo de sistemas se pueden extender fácilmente a su correspondiente hamiltoniano cuántico. Para hacer esta extensión, bastaría con atender a las definiciones usuales de los operadores posición \hat{x} y momento \hat{p} . Estos operadores se definen como:

$$\hat{x}_i = x_i \quad \text{y} \quad \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.1)$$

3.1. Oscilador Darboux III cuántico unidimensional

Para este caso se tiene como versión cuántica del hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2(1 + \lambda x^2)} [-\hbar^2 \partial_x^2 + \omega^2 x^2]. \quad (3.2)$$

Este hamiltoniano se puede aplicar en la ecuación de Schrödinger estacionaria usual, a saber, $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$, para obtener los autovalores de las energías y sus respectivas autofunciones. Este hamiltoniano ya aplicado en dicha ecuación se puede reescribir como;

$$\frac{1}{2} [-\hbar^2 \partial_x^2 + (\omega^2 - 2\lambda E) x^2] \psi(x) = E\psi(x). \quad (3.3)$$

Esta ecuación es análoga a la que se tendría en un espacio sin curvatura pero con una pequeña modificación, aparece un nuevo término que afecta a la frecuencia, $2\lambda E$. Este término adicional añadido por la deformación del espacio permite definir una nueva frecuencia asociada a este tipo de oscilador, de la forma:

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda E}. \quad (3.4)$$

Se impone una restricción sobre la energía $E < \omega^2/2\lambda$ con el fin de que esta frecuencia sea real. Un comentario claro e importante es que existe una dependencia explícita de la frecuencia con la energía, cosa que para el espacio plano no se daba. Con esta redefinición de la frecuencia del sistema, se puede obtener de forma directa, y análoga al caso de $\lambda = 0$, los autovalores de las energías, que deberán ser desarrollados para obtener la expresión de la energía:

$$E_n = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow E_n = -\hbar^2 \lambda \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\hbar^2 \lambda^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2}. \quad (3.5)$$

Las autofunciones de este sistema se obtienen por analogía con el caso $\lambda = 0$. Para que sean de cuadrado integrable, n debe tomar valores enteros no negativos, $n = 0, 1, 2, \dots$. Estas toman la forma:

$$\psi_n(x) = A_n \left(\frac{\beta^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} H_n(\beta x) \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{\frac{\Omega}{\hbar}}, \quad (3.6)$$

donde A_n es una constante de normalización de las autofunciones y $H_n(\beta x)$ son los polinomios enésimos de Hermite.

Finalmente se ha obtenido una expresión idéntica al caso $\lambda = 0$, el espacio plano. Esto se debe a que esta deformación del espacio solo genera un efecto en la frecuencia, generando, como ya se ha visto anteriormente, una dependencia de la energía con la frecuencia.

3.2. Oscilador Darboux III cuántico N -dimensional

Para este caso, es conveniente recordar las expresiones del operador gradiente y del operador laplaciano, a saber:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right) \quad \text{y} \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}. \quad (3.7)$$

Una vez definidos, se puede expresar el hamiltoniano para un caso general de dimensión N como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2(1 + \lambda \hat{\mathbf{x}}^2)} [-\hbar^2 \Delta^2 + \omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2]. \quad (3.8)$$

Como se da en el caso clásico, este hamiltoniano no es separable para cada una de sus componentes. Pese a este hecho, es posible definir operadores análogos a las pseudoenergías ya calculadas en el caso clásico y garantizar su carácter maximalmente superintegrable. Estos operadores tienen la forma:

$$\hat{I}_i = \hat{p}_i^2 + \hat{x}_i^2 (\omega^2 - 2\lambda \hat{H}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Así, como ocurre clásicamente, el hamiltoniano completo se compone de la suma de los diferentes operadores, que conmutan entre sí, con un factor $\frac{1}{2}$. De este modo, gracias a la factorización de las funciones de onda en cuántica, se pueden separar las soluciones para cada operador del hamiltoniano. Esta consideración se puede reflejar según:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \psi_i(x_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \hat{I}_i \psi_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_i \psi_i(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

donde cada una de las funciones $\psi_i(x_i)$ es una función de onda dependiente únicamente de una de las variables x_i y ε_i es el autovalor de dicha autofunción. Si se unifican todas las soluciones para cada función $\psi_i(x_i)$ con su operador \hat{I}_i correspondiente, se llega a la expresión:

$$\hat{H} \Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{I}_i \left(\prod_{i=1}^N \psi_i(x_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \right) \left(\prod_{i=1}^N \psi_i(x_i) \right) = \mathcal{E} \Psi(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

donde \mathcal{E} representa la energía total del sistema, suma de todas las ε_i , que es dependiente de la frecuencia.

Por analogía al caso unidimensional, tanto los autovalores como las autofunciones tienen la forma:

$$\varepsilon_i(\mathcal{E}, n_i) = \hbar \Omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \quad \text{y} \quad \psi_{n_i}(\mathcal{E}, x_i) = A_{n_i} \left(\frac{\beta^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\beta^2 x_i^2}{2}} H_{n_i}(\beta x_i). \quad (3.12)$$

Con estos resultados se puede obtener la expresión de la energía total del oscilador y despejarla, como se ha hecho con anterioridad, al extraer la dependencia de la frecuencia con la energía. Así,

la expresión total de la energía:

$$\mathcal{E}_n = -\hbar^2\lambda \left(n + \frac{N}{2}\right)^2 + \hbar \left(n + \frac{N}{2}\right) \sqrt{\hbar^2\lambda^2 \left(n + \frac{N}{2}\right)^2 + \omega^2}, \quad \text{con } n = \sum_{i=1}^N n_i. \quad (3.13)$$

Analizando la estructura de la energía se aprecia claramente cómo la degeneración de los estados se conserva. Esto es debido a que el valor de n es la suma de los n_i , como en un caso de espacio plano. Pese a que la degeneración de los estados no se rompe ni se modifica, el equiespaciado de los niveles sí se ve afectado. Se genera un espaciado no lineal entre niveles al disminuir la diferencia de energía entre niveles al aumentar n . Esto resulta en que se vayan comprimiendo los niveles según se avanza en los sucesivos valores de n [3].

4. Osciladores de Dunkl

Una vez se ha realizado el paso al caso cuántico, se pueden aplicar los operadores de Dunkl con la intención de ver cómo estos afectan a las soluciones de un espectro propio de un oscilador armónico. Como ya se ha comentado, estos operadores se basan en la simetría de reflexión y permiten describir otra mecánica cuántica con su nuevo momento asociado.

4.1. Preliminares sobre los operadores de Dunkl

Como primer punto clave para estos operadores, se define una reflexión en \mathbb{R}^N como la transformación [6]:

$$\sigma_v \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (4.1)$$

donde el vector \mathbf{v} representa el vector normal al hiperplano respecto al que se hace la reflexión del vector general \mathbf{x} , el término $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ es el producto interno y el módulo al cuadrado cumple $|\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

Para un cierto conjunto de reflexiones finito, se puede formar un grupo generado por ellas, subgrupo del grupo ortogonal O_N . Bajo ciertas condiciones, el subgrupo generado es finito y se denomina grupo de reflexiones o de Coxeter.

Conviene ahora definir bien las bases de lo que se denomina grupo de Coxeter. Sea Φ un conjunto de vectores no nulos en \mathbb{R}^N tal que para $v \in \Phi$, los únicos vectores λv , con $\lambda \in \mathbb{R}$, que pertenecen a Φ son $\pm v$. Un grupo de Coxeter asociado a Φ es un grupo de transformaciones, generadas por reflexiones en los hiperplanos perpendiculares a los vectores que componen Φ , que dejan invariante a Φ .

Un ejemplo sencillo de grupo de Coxeter se puede deducir de un caso unidimensional. Se define un conjunto de vectores como $\Phi = \{-1, 1\}$. Este conjunto Φ es invariante bajo la reflexión σ que satisface $\sigma(1) = -1$ y $\sigma(-1) = 1$. De este modo, el grupo formado por la identidad y σ es un grupo de Coxeter.

Continuando con el desarrollo de los operadores de Dunkl, sea G un grupo de Coxeter generado por el conjunto de reflexiones $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq m\}$. Cada reflexión σ_i viene definida por el vector \mathbf{v}_i y V es el conjunto de dichos vectores. Si $|\mathbf{v}_i| = |\mathbf{v}_j|$, entonces σ_i es conjugado a σ_j y la longitud de los vectores es idéntica para cada clase de conjugación. Sea α_i un conjunto de parámetros positivos tales que $\alpha_i = \alpha_j$ si σ_i es conjugado a σ_j . Se puede definir la función:

$$h(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle|^{\alpha_i}. \quad (4.2)$$

Esta función es invariante bajo transformaciones en G , el grupo de Coxeter.

Sea S^N la esfera de radio unidad y dimensión N con medida invariante de rotación $d\omega$ y sean ∇ el gradiente y Δ el operador laplaciano. Se puede definir un laplaciano asociado a la función h de la forma:

$$\Delta_h f(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\frac{2\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle} - |\mathbf{v}_i|^2 \frac{f(\mathbf{x}) - f(\sigma_i \mathbf{x})}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle^2} \right). \quad (4.3)$$

Este nuevo laplaciano posee una parte continua dada por el laplaciano estándar y el gradiente, y otra parte discreta dada por el grupo de reflexiones. También se verifica que es un endomorfismo en el espacio de polinomios y es homogéneo de grado -2 , como el laplaciano estándar.

El objetivo es encontrar un conjunto de operadores diferenciales de primer orden tales que la suma de sus cuadrados sea el laplaciano Δ_h . Para ello se define el gradiente asociado a h , o al grupo de Coxeter como:

$$\nabla_h f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{f(\mathbf{x}) - f(\sigma_i \mathbf{x})}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i. \quad (4.4)$$

Se definen entonces los operadores $T_{\mathbf{v}}$ de la forma:

$$T_{\mathbf{v}} = \langle \nabla_h f, \mathbf{v} \rangle. \quad (4.5)$$

Se puede demostrar que $T_{\mathbf{v}}$ y $T_{\mathbf{u}}$ conmutan entre sí y que la suma de sus cuadrados, cuando los vectores \mathbf{u}_i son una base ortogonal de \mathbb{R}^N , resultan en el laplaciano modificado. Esto es:

$$\Delta_h = \sum_{i=1}^N T_{\mathbf{u}_i}^2. \quad (4.6)$$

4.2. El oscilador de Dunkl-Darboux III

Una vez se han sentado las bases de dichos operadores, se puede considerar el oscilador de Dunkl. En la mecánica cuántica de Dunkl, se modifica la definición de momento cambiando su derivada, en una dimensión, ordinaria por la derivada de Dunkl. Esta derivada se define como:

$$D_x^{\mu_x} = \partial_x + \frac{\mu_x}{x}(1 - R_x), \quad (4.7)$$

donde R_x es la reflexión unidimensional respecto al punto $x = 0$, el cambio de signo de una función $R_x f(x) = f(-x)$, y el parámetro μ_x es análogo al α_x comentado con anterioridad. En este caso, el valor de μ_x satisface ser mayor o igual que $-1/2$, mientras que anteriormente α_x debía ser positiva. Esto se debe a que la restricción anterior puede eliminarse al ser una fórmula puramente algebraica [7] aunque los valores se discuten para cada caso.

Con esta definición, los nuevos operadores cuánticos satisfacen las siguientes relaciones:

$$\hat{P}_x = -i\hbar D_x^{\mu_x}, \quad \hat{x} = x \quad \text{y} \quad [\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar(1 + 2\mu_x R_x). \quad (4.8)$$

El hamiltoniano para un oscilador de Dunkl unidimensional resulta ser de la siguiente forma:

$$\hat{H}_D = -\frac{\hbar^2}{2}(D_x^{\mu_x})^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \quad (4.9)$$

Este hamiltoniano es el que aparecería en un espacio plano sin curvatura. Como se ha visto a lo largo de este trabajo, este caso puede considerarse como un caso particular, para $\lambda = 0$, del espacio

de Darboux III. Es por este motivo que el oscilador de interés a partir de ahora será el oscilador de Dunkl-Darboux III, cuyo hamiltoniano tiene la forma:

$$\hat{H}_{DD'} = \frac{1}{(1 + \lambda x^2)} \left[-\frac{\hbar^2}{2} (D_x^{\mu_x})^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right] = \frac{1}{(1 + \lambda x^2)} \hat{H}_D. \quad (4.10)$$

En este caso, el hamiltoniano depende de dos parámetros μ_x y λ . Como se ha comentado a lo largo del trabajo, estos parámetros satisfacen $\mu_x \geq -1/2$ y $\lambda \geq 0$. Cuando μ_x se anula, el hamiltoniano se reduce al caso cuántico del espacio de Darboux III, desaparece el efecto del operador de Dunkl. Mientras que cuando λ se anula, el hamiltoniano se reduce al oscilador de Dunkl en un espacio plano al desaparecer la curvatura.

Para resolver la ecuación de Schrödinger se sigue un procedimiento similar al caso sin operadores de Dunkl. El hamiltoniano aplicado queda de la forma:

$$\frac{1}{(1 + \lambda x^2)} \hat{H}_D \psi(x) = E \psi(x). \quad (4.11)$$

Por analogía directa al caso sin operadores de Dunkl, esta ecuación va a ser la ecuación para un oscilador de Dunkl en el espacio plano con una frecuencia modificada dependiente de la energía. Esto se ve claramente al expresar:

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 (D_x^{\mu_x})^2 + (\omega^2 - 2\lambda E) x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad (4.12)$$

donde, nuevamente, aparece la frecuencia Ω cuya expresión ya se definió en (3.4).

En este punto, solo habría que resolver la ecuación para el oscilador de Dunkl y reajustarla en función de la nueva frecuencia Ω como ya se hizo en la Sección 3.

Para resolver el caso del oscilador de Dunkl, se parte del hecho de que el hamiltoniano y el operador de reflexión conmutan, esto es, $[\hat{H}_D, R_x] = 0$. Así, las autofunciones se eligen de modo que tengan una paridad bien definida por un parámetro $e_x = \pm 1$ que muestra si la función es par ($e_x = 1$) o impar ($e_x = -1$) en x , de modo que $R_x f(x) = e_x f(x)$. Atendiendo a la expresión del operador de Dunkl al cuadrado:

$$(D_x^{\mu_x})^2 = \partial_x^2 + \frac{2\mu_x}{x} \partial_x - \frac{\mu_x^2}{x^2} (1 - R_x), \quad (4.13)$$

se puede deducir que este tendrá estructura diferente si la autofunción es par o impar gracias al último término. De este modo, el hamiltoniano de Dunkl toma dos formas según la paridad de la autofunción:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\partial_x^2 + \frac{2\mu_x}{x} \partial_x \right) + \omega^2 \right] \psi(x) = 0 \quad \text{para} \quad \psi(-x) = \psi(x), \quad (4.14)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\partial_x^2 + \frac{2\mu_x}{x} \partial_x - \frac{2\mu_x^2}{x^2} \right) + \omega^2 \right] \psi(x) = 0 \quad \text{para} \quad \psi(-x) = -\psi(x). \quad (4.15)$$

Así, las autofunciones del oscilador de Dunkl quedan condicionadas por la paridad, cuyo efecto se ve reflejado en su estructura. Estas autofunciones y las energías resultan de la forma:

$$f_{n_x}^{e_x}(x) = e^{-\frac{\omega^2 x^2}{2\hbar^2}} H_{n_x}^{\mu_x} \left(\frac{\omega}{\hbar} x \right), \quad \kappa_{n_x}^{e_x} = \hbar \omega \left(n_x + \mu_x + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad n_x = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

donde $H_{n_x}^{\mu_x} \left(\frac{\omega}{\hbar} x \right)$ representan unos polinomios de Hermite generalizados obtenidos para este caso particular. Su estructura es la siguiente:

$$H_{n_x}^{\mu_x} \left(\frac{\omega}{\hbar} x \right) = (-1)^n \sqrt{\frac{\omega n!}{\hbar \Gamma \left[n + \mu_x + q_x + \frac{1}{2} \right]}} x^{q_x} L_n^{(\mu_x + q_x - \frac{1}{2})} \left(\frac{\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right). \quad (4.17)$$

Estos polinomios generalizados se expresan en función de polinomios generalizados de Laguerre $L_n^{(\mu_x + q_x - \frac{1}{2})} \left(\frac{\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right)$ y de un parámetro $q_x = \frac{1 - e_x}{2}$ que depende de la paridad de las autofunciones.

Tanto las autofunciones como las energías son análogas al caso cuántico de un oscilador sin operadores de Dunkl en un espacio sin curvatura. Solo varían en la dependencia con el parámetro μ_x y la utilización de los polinomios generalizados de Hermite.

Con los resultados ya obtenidos, se puede hacer el cambio de la frecuencia ω por la dependiente de la energía Ω para así obtener las autofunciones y energías del oscilador de Dunkl-Darboux III. El resultado final es el siguiente:

$$f_{n_x}^{e_x}(x) = e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} H_{n_x}^{\mu_x}(\beta x), \quad E_{n_x}^{e_x} = \hbar \Omega \left(n_x + \mu_x + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{\frac{\Omega}{\hbar}}. \quad (4.18)$$

Para las energías se obtiene de nuevo una expresión en la que hay que desarrollar la nueva frecuencia para despejar la energía. El resultado es idéntico al de la ecuación (3.5) cambiando $n \rightarrow n_x + \mu_x$. Su expresión es la siguiente:

$$E_{n_x}^{e_x} = -\hbar^2 \lambda \left(n_x + \mu_x + \frac{1}{2} \right)^2 + \hbar \left(n_x + \mu_x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\hbar^2 \lambda^2 \left(n_x + \mu_x + \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2}. \quad (4.19)$$

El apunte más relevante de este caso reside en que, dado que la simetría de reflexión es clave en el oscilador de Dunkl, en el caso unidimensional, genera una separación entre las autofunciones pares, a las que la reflexión no afecta, y las impares, a las que la reflexión cambia el signo.

4.3. Conclusiones: aplicaciones de los operadores de Dunkl

Los operadores descritos en este trabajo, como se ha podido ver anteriormente, actúan como reflexiones respecto a los planos coordenados en el caso del oscilador de Dunkl-Darboux III. Es conveniente aclarar que estos operadores de Dunkl, en su definición más general (4.4) se construyen con cualquier conjunto de vectores, siempre y cuando las reflexiones asociadas generen un grupo de Coxeter.

Para poder ver alguna aplicación interesante de estos operadores se puede recurrir al trabajo de uno de los investigadores, ya mencionado, más relevantes en el campo de la superintegrabilidad, F. Calogero. Desarrolló un modelo de análisis de N partículas en una dimensión sometidas a un potencial cuadrático como el de un oscilador armónico y a otro dependiente inversamente con el cuadrado de la distancia entre partículas. El modelo de Calogero en su versión cuántica tiene un hamiltoniano [4] de la forma:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{4} m \omega^2 (x_i - x_j)^2 + g (x_i - x_j)^{-2} \right). \quad (4.20)$$

Este hamiltoniano es resoluble e integrable de forma exacta. Se ha tomado el caso cuántico ya que es al que se le puede aplicar el oscilador de Dunkl, pero el caso clásico también es resoluble como el cuántico. Atendiendo a que relaciona las partículas dispuestas de forma unidimensional dos a dos mediante un potencial que depende de la separación entre ambas, se pueden hacer numerosas variaciones.

Una extensión de este hamiltoniano a un caso cuántico de interés es aplicarlo a partículas en una cadena con posiciones fijas y espín, de este modo la interacción entre ellas se reduce a la producida por el espín. Para que esto ocurra, la disposición de las partículas se encuentra en los puntos de equilibrio del potencial. Así, se puede establecer un análisis de cadenas unidimensionales de espines. Como se comentaba en la introducción, este es un claro ejemplo en el que se encuentra un sistema superintegrable y se pretende utilizar de modelo para numerosas situaciones alternativas.

Para poder hacer el estudio de este caso, es posible la aplicación de operadores de Dunkl al hamiltoniano. Si bien es cierto que ya se ha dado una definición asociada a la reflexión, se puede establecer otra asociada al intercambio entre partículas [8]. Su estructura es la siguiente:

$$T_i = \frac{\partial}{\partial z_i} + a \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} (1 - K_{ij}) \quad \text{con } i = 1, \dots, N. \quad (4.21)$$

En este caso no aparece R_x que era la reflexión unidimensional, sino que aparece K_{ij} que es el operador de intercambio entre las partículas i y j . Este operador de Dunkl permite reescribir el hamiltoniano del modelo de Calogero como una combinación cuadrática de los operadores T_i , análogo al caso del oscilador de Dunkl, pero con un tratamiento ligeramente más complejo. Hay estudios que han aplicado dichos operadores a cadenas de espines para simplificar el trabajo con ellas y deducir propiedades de forma notablemente más sencilla [9].

Con este desarrollo queda clara la importancia de los sistemas superintegrables en la física clásica y cuántica. Tener la posibilidad de resolubilidad exacta de forma sencilla hace que su estudio sea crucial para poder avanzar en la modelización de sistemas más complejos. Del mismo modo, ser capaces de explotar las simetrías presentes en estos es clave para su tratamiento.

Si bien es cierto que no todos los sistemas superintegrables presentan simetrías con una interpretación geométrica evidente sobre las que construir nuevos modelos y teorías, es necesario aprovecharlas cuando se pueden identificar. Estos operadores de Dunkl son un caso de cómo se pueden aprovechar las simetrías de algunos sistemas superintegrables para construir nuevos modelos. Gracias a ellos se abre la puerta a estudiar con mayor sencillez, y en profundidad, casos como el de las cadenas de espines.

Finalmente, con este trabajo se pueden comprender de forma clara las implicaciones de la superintegrabilidad y sus características principales. Se puede apreciar cómo estos sistemas no son muy numerosos, y lo delicados que son frente a variaciones dentro del mismo tipo de sistema como se vió en la Sección 2.2. Asimismo, queda claro cómo se pueden usar para modelizar casos diferentes con mayor interés físico.

Referencias

- [1] Á. Ballesteros, A. Enciso, F. J. Herranz, and O. Ragnisco. A maximally superintegrable system on an N -dimensional space of nonconstant curvature. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(4):505–509, 2008.
- [2] Á. Ballesteros, A. Enciso, F. J. Herranz, and O. Ragnisco. Superintegrability on N -dimensional curved spaces: Central potentials, centrifugal terms and monopoles. *Annals of Physics*, 324(6):1219–1233, 2009.
- [3] Á. Ballesteros, A. Najafizade, H. Panahi, H. Hassanabadi, and S.-H. Dong. The Dunkl oscillator on a space of nonconstant curvature: An exactly solvable quantum model with reflections. *Annals Phys.*, 460:169543, 2024.
- [4] F. Calogero. Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):419–436, 1971.
- [5] F. Calogero. Exactly Solvable One-Dimensional Many Body Problems. *Lett. Nuovo Cim.*, 13:411–416, 1975.
- [6] C. F. Dunkl. Reflection groups and orthogonal polynomials on the sphere. *Mathematische Zeitschrift*, 197(1):33–60, 1988.
- [7] C. F. Dunkl. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311(1):167–183, 1989.
- [8] C. F. Dunkl. Orthogonal polynomials of types A and B and related Calogero models. *Communications in Mathematical Physics*, 197(2):451–487, 1998.
- [9] F. Finkel, D. Gómez-Ullate, A. González-López, M. A. Rodríguez, and R. Zhdanov. A_N -type Dunkl operators and new spin Calogero-Sutherland models. *Communications in Mathematical Physics*, 221(3):477–497, 2001.
- [10] A. Galajinsky, A. Nersessian, and A. Saghatelian. Superintegrable models related to near horizon extremal Myers-Perry black hole in arbitrary dimension. *Journal of High Energy Physics*, 2013(6), 2013.
- [11] E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Miller, and P. Winternitz. Superintegrable systems in Darboux spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 44(12):5811–5848, 2003.
- [12] Ş. Kuru, J. Negro, and S. Salamanca. Demkov-Fradkin tensor for curved harmonic oscillators. *Eur. Phys. J. Plus*, 140:144, 2025.
- [13] W. Miller Jr., S. Post, and P. Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(42):423001, 2013.
- [14] N. N. Nehorošev. Action-angle variables and their generalizations. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 26:181–198, 1972.
- [15] S. Wojciechowski. Superintegrability of the Calogero-Moser system. *Physics Letters A*, 95(6):279–281, 1983.