

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Teoría de Funciones



TESIS DOCTORAL

Espacios de funciones debilmente diferenciables

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Javier Gómez Gil

Madrid, 2015

Javier Gómez Gil

TP
1982
158



X-52-126829-6

ESPACIOS DE FUNCIONES DEBILMENTE DIFERENCIABLES

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº 158/82

© Javier Gómez Gil
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-24652-1982

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Teoría
de Funciones

ESPACIOS DE FUNCIONES DEBILMENTE
DIFERENCIABLES

Memoria presentada para optar al
Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Javier Gomez Gil

Madrid, Julio de 1981

Agradezco al Profesor José Luis González Llavona, director de este trabajo, sus valiosas orientaciones y la ayuda que continuamente me ha prestado.

También quiero expresar mi agradecimiento a los compañeros del Departamento de Teoría de Funciones que tanto me han ayudado y animado durante su realización.

INDICE

	Págs.
INTRODUCCION	i
CAPITULO I: Definiciones, notaciones y resultados previos	1
CAPITULO II: La topología b_{ω}	18
CAPITULO III: El espacio de las funciones debilmente diferenciables sobre los acotados de un espacio de Banach. El espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$	26
CAPITULO IV: La propiedad de aproximación débil acotada y débil compacta. Densidad de subálgebras polinomiales	47
CAPITULO V: Estructura del espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ como espacio localmente convexo	62
CAPITULO VI: Sobre el completado del espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$. La propiedad de aproximación	69
CAPITULO VII: Estructura del espacio $C_{\omega b}^p(E)$ como álgebra localmente multiplicativamente convexa. Espectro. Teorema de Whitney	90
REFERENCIAS	106

INTRODUCCION

Se puede afirmar que el estudio de ciertas clases de funciones diferenciables, definidas en dominios de dimensión finita, juega un papel fundamental en la teoría de funciones de variable real y en el análisis funcional. Citemos como ejemplos relevantes a las distribuciones de Schwartz [52], completadas con las distribuciones generalizadas de Roumieu [48] y con las ultradistribuciones de Sato [49], y a los teoremas de extensión de Whitney [61] y Calderón [8].

La descripción de subálgebras densas en álgebras topológicas de funciones diferenciables, sobre variedades finito dimensionales, fue establecida en 1949 por Nachbin [39], siendo de destacar, en esta misma línea, los trabajos de Reid [45] y Glaeser [17].

En los últimos años se aprecia un considerable interés por la teoría de funciones en espacios infinito dimensionales. Así aparecen trabajos como los de Moulis [38] y Wells [57], sobre propiedades de las funciones diferenciables sobre C_0 , y de Whitfield [59], sobre funciones diferenciables con soporte acotado sobre espacios de Banach.

En cuanto al problema de la aproximación de funciones "complicadas" definidas sobre un espacio de Banach real E , por funciones "simples" o "regulares" merecen, a nuestro juicio, destacarse los trabajos de Goodman [18], aproximación uniforme de funciones acotadas uniformemente continuas sobre E por funciones cuasi-diferenciables acotadas, de Nemirovskij y Semenov [41], aproximación uniforme de funciones "regulares" por polinomios, y de Kurzweil [29], [30], aproximación de funciones continuas sobre E por funciones analíticas

reales en la topología fina.

El problema de la aproximación de funciones de clase C^p sobre E , en varias topologías, por polinomios ha sido estudiado por Restrepo [46], Lesmes [31], Llavona [34], Prolla [43], Aron [3] y otros.

La búsqueda de un teorema "tipo Nachbin", sobre la densidad de subálgebras de funciones de clase C^p sobre E , conduce a Llavona [34] a la introducción de la topología τ_c^p , compacta-compacta de orden p , sobre la clase $C^p(E)$ de las funciones de clase C^p sobre E en el sentido usual de Fréchet.

Determinar subclases de funciones, de clase C^p sobre E , que verifiquen el teorema de Nachbin para las topologías τ_b^p , acotada-acotada de orden p , y τ_u^p , compacto-acotada de orden p , lleva a Aron y Prolla [5] a la definición de las subclases, de $C^p(E)$, $C_{\omega bu}^p(E)$ y $C_c^p(E)$.

El estudio sobre los espacios de funciones debilmente continuas sobre E , realizado por Ferrera [15], junto con el planteamiento de su posible extensión al caso diferenciable nos ha llevado al interés por considerar la topología $\tau_{\omega c}^p$, debilmente compacta-debilmente compacta de orden p , y al concepto de función debilmente diferenciable sobre los acotados de E , definición que dará lugar a la subclase $C_{\omega b}^p(E)$ motivo principal de estudio en esta memoria.

El concepto de función debilmente diferenciable sobre los acotados de E , que introducimos en el capítulo tercero, está directamente relacionado con la topología $b\omega$ en E , topología más fina en E que coincide con la topología débil $\sigma(E, E')$ sobre los subconjuntos

acotados de E , estudiada ya por Ferrera en [15]. En esta memoria se resuelve el problema de dar una caracterización total del carácter localmente convexo de dicha topología, dando así respuesta a un problema clásico ya planteado por Day [10] y parcialmente resuelto por Wheeler [58].

En el estudio que efectuamos de la clase $C_{\omega b}^P(E)$ es preciso destacar, en nuestra opinión, como para dicha clase se obtiene un teorema "tipo Nachbin", sobre densidad de subálgebras, introduciendo lo que llamamos "propiedad de aproximación débil acotada", lo que nos permite por un lado extender una parte de los resultados que aparecen en [5] y por el otro efectuar un estudio comparativo entre esta propiedad y las propiedades de aproximación clásicas, contribuyendo así a un mejor conocimiento de este tipo de propiedades.

Las clases usuales de funciones de clase C^P , en dominio finito dimensionales, son en general espacios de Fréchet. Por tanto su estructura, como espacios localmente convexos, está bien determinada. Esta cuestión, en dominios infinito dimensionales, por el contrario, está lejos de ser resuelta. Obtener teoremas, similares a los teoremas de Nachbin-Shirota para funciones continuas (véase [6]), para la clase $C^P(E)$ es hoy uno de los problemas que presenta más dificultad en esta teoría. En esta memoria se consigue una caracterización del carácter tonelado y bornológico de la clase $C_{\omega b}^P(E)$, clase "suficiente grande" como se prueba en el capítulo tercero de la memoria, obteniéndose así el primer resultado que se consigue, en esta dirección, para subclases de $C^P(E)$ que no sean metrizables.

Finalmente diremos que la clase $C_{\omega b}^P(E)$ también se comporta

bien desde el punto de vista de álgebra topológica, consiguiéndose, para ellas teoremas tipo Whitney sobre caracterización del cierre de ideales, como se pone de manifiesto en el último capítulo de esta memoria.

El estudio de clases de funciones diferenciables, en espacios infinito dimensionales, adquiere ya hoy relevancia en cuanto al campo de las aplicaciones, dentro de lo que podríamos llamar análisis "infinito dimensional". En esta línea podemos citar los trabajos de P. Krée [28] y [29], sobre operadores diferenciables lineales sobre espacios vectoriales y soluciones débiles de ecuaciones en derivadas funcionales con aplicaciones a los procesos aleatorios, y de Abuabara [1] y Meise [35], sobre teoría de "distribuciones" en espacios de dimensión infinita. También es importante señalar el auge que están adquiriendo las técnicas de diferenciabilidad en dimensión infinita en el estudio de diversas propiedades geométricas de los espacios de Banach, principalmente en cuestiones de convexidad, super-reflexividad, etc.

Terminamos la introducción de esta memoria haciendo una síntesis del contenido de cada capítulo.

El primer capítulo lo hemos dedicado a hacer una revisión de las definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo de la memoria. En este aspecto, queremos resaltar el importante papel que juega, dentro del estudio que realizamos, el conocimiento en profundidad de la estructura interna de los espacios de Banach; ello motiva el que hagamos bastante hincapié, dentro del primer capítulo, en los resultados referentes a la teoría de espacios de Banach.

El capítulo segundo está dedicado por completo al estudio de la topología b_ω . En concreto resolvemos el problema de cuando dicha topología es localmente convexa o lo que es equivalente cuando es vectorial. Este problema surge al afirmar Day en la segunda edición de su libro "Normed Linear Spaces" [10] publicado en 1962, que la topología b_ω siempre era localmente convexa. Durante diez años esta afirmación pareció darse como válida hasta que Wheeler publicó en 1972 en Studia [58] un ejemplo en el que mostraba que la topología b_ω en c_0 no era localmente convexa. A raíz de este ejemplo, surge la cuestión de caracterizar la clase de espacios para los que es cierto que la topología b_ω es localmente convexa. Nosotros probamos que la topología b_ω en un espacio de Banach es una topología localmente convexa si y solamente si el espacio de Banach es reflexivo.

En el capítulo tercero se introduce la definición de diferenciabilidad débil y los espacios de funciones debilmente diferenciables de clase p asociados. Dedicamos la primera parte de este capítulo a hacer un estudio detallado de la definición de diferenciabilidad débil, obteniéndose diversas reformulaciones equivalentes de la definición. Estos resultados, unidos a los recientes trabajos de Aron, Herves y Valdivia [4] sobre polinomios, nos permiten probar que la clase de funciones debilmente diferenciables de clase p , $C_{\omega b}^p(E, F)$, es una clase intermedia entre las clases $C_{\omega bu}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$ introducidas por Aron y Prolla en [5]. Como consecuencia de este hecho, surge la cuestión de si efectivamente dichas clases son diferentes o no. Nosotros probamos, en primer lugar, que las clases $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_{\omega bu}^p(E, F)$ solo coinciden cuando el espacio E es reflexivo. Para

probar este resultado nos es preciso dar antes un teorema "tipo Valdivia" para caracterizar los subconjuntos debilmente compactos mediante funciones debilmente diferenciables. Es de resaltar aquí que las técnicas que nosotros utilizamos son técnicas esencialmente reales, como lo prueba el hecho de que un problema análogo para clases de funciones holomorfas permanece aún abierto (ver [4]). También probamos en este capítulo que las clases $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$ son distintas siempre que el espacio E sea de dimensión infinita.

El capítulo cuarto está dedicado al estudio de problemas de densidad de subálgebras polinomiales. En la obtención de teoremas de este tipo, es muy importante el poder aproximar la identidad en el espacio dominio por operadores de rango finito de forma que podamos controlar los rangos de estos operadores. Esto es lo que nos lleva a introducir y estudiar dos tipos de propiedad de aproximación, la propiedad de aproximación débil acotada y la propiedad de aproximación débil compacta. La primera parte del capítulo está dedicada a un estudio detallado de estas propiedades, relacionandolas con otras propiedades de aproximación conocidas. En este aspecto queremos señalar como resultado más interesante el siguiente: si un espacio de Banach E es tal que su dual tiene la propiedad de aproximación acotada entonces E tiene la propiedad de aproximación débil acotada. Si además E' es separable se puede precisar aún que E tiene la propiedad de aproximación débil compacta. Estos resultados tienen interés, aparte de porque nos permiten relacionar estas propiedades con otras ya conocidas, porque nos muestran que estas dos propiedades son, en principio, más débiles que las que habitualmente aparecen en la literatu

ra relacionadas con este tipo de problemas (ver, por ejemplo, [5], [20], [46] etc.).

La última parte de este capítulo la dedicamos a dar un teorema tipo Nachbin para los espacios $C_{\omega b}^p(E, F)$ cuando el espacio dominio verifica la propiedad de aproximación débil acotada.

El quinto capítulo está dedicado al estudio de la estructura como espacio localmente convexo del espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$. Se prueba que para este espacio son equivalentes el ser tonelado, infratonelado, bornológico o Fréchet y el que el espacio dominio E sea reflexivo. Creemos que este es un resultado muy interesante ya que en general la estructura de los espacios de funciones diferenciables, salvo en aquellos casos en que el espacio es de Fréchet, es poco conocida debido a las grandes dificultades que suele plantear su estudio. Finalizamos este capítulo dando algunos ejemplos que muestran que en general el espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ no es completo. En concreto vemos que para cualquier espacio de Banach F , $C_{\omega b}^p(\ell^1, F)$ y $C_{\omega b}^p(\ell^\infty, F)$ no son completos.

La última parte del capítulo quinto motiva el que dediquemos parte del capítulo sexto a obtener una representación del completado del espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$. Para obtener dicha representación, basándonos en una idea de Bombal y Llavona (ver [7]), consideramos un espacio análogo al $C_{\omega b}^p(E, F)$ pero cambiando la diferenciabilidad en sentido de Fréchet por diferenciabilidad en sentido de Hadamard para la topología débil. Hacemos para este espacio un estudio paralelo al desarrollado en los capítulos anteriores para el espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ y concluimos probando que efectivamente nos da una representación del

completado de $C_{\omega b}^P(E, F)$ en el caso de que E posea la propiedad de aproximación débil compacta. A continuación, mediante la técnica del ε -producto, demostramos que si el espacio E posee la propiedad de aproximación débil compacta, el espacio $C_{\omega b}^P(E, F)$ posee la propiedad de aproximación. Como corolario de este último resultado obtenemos algunos resultados referentes a la propiedad de aproximación débil compacta, en particular destacamos el siguiente resultado: si E es un espacio de Banach con dual separable, E posee la propiedad de aproximación débil compacta si y solamente si E' tiene la propiedad de aproximación. Este resultado nos permite dar un ejemplo de un espacio de Banach que tiene la propiedad de aproximación de Grothendieck pero no tiene la propiedad de aproximación débil compacta.

Por último el capítulo sexto está dedicado integralmente al estudio de la estructura de álgebra de $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ (complexificado de $C_{\omega b}^P(E)$). Hacemos un repaso de los principales tópicos de la teoría de álgebras, probando que $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ es un álgebra localmente m -convexa regular con unidad, fuertemente semi-simple que no es una Q -álgebra. Se da también una caracterización de su espectro. Por último obtenemos un teorema "tipo Whitney" sobre adherencia de ideales, aplicando dicho resultado a la caracterización de los ideales primarios minimales del álgebra.

I. DEFINICIONES, NOTACIONES Y RESULTADOS PREVIOS.

Este primer capítulo lo vamos a dedicar a hacer un repaso de los principales conceptos y resultados que utilizaremos en los capítulos sucesivos. A lo largo de toda la memoria haremos uso de las definiciones y notaciones básicas de la teoría de espacios localmente convexos, así como de sus resultados más elementales sin explicitarlos, tomando como referencias [50] y [21] este último principalmente en todo lo referente al tema de la polaridad.

Aunque bastantes resultados de esta memoria, y así lo hacemos constar en algunos, son válidos también para espacios de Banach complejos, nosotros a lo largo de todo el trabajo denotaremos por E y F espacios de Banach reales.

Ya vimos en la introducción que este trabajo se presenta como continuación del estudio que realizó J. Ferrera en [15] sobre espacios de funciones debilmente continuas sobre los acotados de un espacio de Banach. Recordemos que una función $f : E \rightarrow F$ se dice que es debilmente continua sobre los subconjuntos acotados (resp. debilmente compactos) de E si para cada acotado (resp. debilmente compacto) $B \subset E$ la restricción de f a B es continua cuando en B consideramos la topología débil de E restringida y en F su topología original.

Al espacio de las funciones de E en F debilmente continuas sobre los subconjuntos acotados (resp. debilmente compactos) se le denota por $C_{\omega b}(E, F)$ (resp. $C_{\omega c}(E, F)$).

Si en las anteriores definiciones cambiamos la condición de con

tinuidad por continuidad uniforme, tenemos el espacio $C_{\omega bu}(E, F)$ de todas las funciones de E en F debilmente uniformemente continuas sobre los subconjuntos acotados de E .

Un estudio detallado de los espacios $C_{\omega b}(E, F)$ y $C_{\omega bu}(E, F)$ puede verse en [15]. La técnica empleada en el citado trabajo para estudiar esos espacios consiste en dotar a E de una cierta topología que permite considerar el espacio $C_{\omega b}(E, F)$ como un espacio de funciones continuas sobre todo E . Dicha topología viene definida por:

DEFINICION I.1: La topología $b\omega$ sobre un espacio de Banach E es la topología más fina que coincide con la topología débil en los subconjuntos acotados de E .

Esta topología en general no es localmente convexa [58]. Nosotros en la presente memoria vamos a caracterizar en que casos dicha topología es localmente convexa. Para hacer esto nos va a ser muy útil el introducir una nueva topología:

DEFINICION I.2. Si E es un espacio de Banach, la topología $e\omega^*$ sobre E' es la topología más fina que coincide con la topología $\sigma(E', E)$ sobre los subconjuntos acotados de E' .

Esta topología, contrariamente a la $b\omega$, siempre es localmente convexa.

TEOREMA I.3. (Banach-Dieudonné). Si E es un espacio de Banach, la topología $e\omega^*$ sobre E' es la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de E .

Demostración: Ver [21] teorema 1 p. 245. #

En el estudio que hacemos de la topología $b\omega$, nos resulta conveniente considerar dos casos, primeramente el caso en que el espacio no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 y en segundo lugar el caso de ℓ^1 . Para el primer caso, resulta fundamental el siguiente teorema que caracteriza los espacios de Banach separables que no contienen subespacios isomorfos a ℓ^1 .

TEOREMA I.4. Sea E un espacio de Banach separable. Son equivalentes:

1. E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 .
2. Cada subconjunto acotado de E'' es $\sigma(E'', E')$ -secuencialmente denso en su $\sigma(E'', E')$ -adherencia.

Demostración: Ver [47] y las referencias allí citadas. #

Probaremos en el capítulo II haciendo uso de I.4 que la topología $b\omega$ de un espacio de Banach separable que no contenga ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 es localmente convexa si y solamente si el espacio es reflexivo. Para poder suprimir la condición de separabilidad es necesario que la topología $b\omega$ tenga ciertas condiciones de hereditaria, es decir:

PROPOSICION I.5. Si E es un espacio de Banach y F un subespacio vectorial cerrado de E , entonces la topología $b\omega$ de F es la restricción a F de la topología $b\omega$ de E .

Demostración: Ver [15] proposición 2.10. pg. 23. #

En el capítulo tercero, empezamos el estudio de espacios de funciones diferenciables. Vamos a introducir los conceptos que utilizaremos.

Denotaremos por $P({}^n E, F)$ el espacio de los polinomios n -homogéneos continuos de E en F . Estos polinomios son de la forma $A \circ \Delta_n$ con A una aplicación n -lineal de E en F y

$$\Delta_n : E \longrightarrow E^n$$

el operador diagonal.

Así cada polinomio n -homogéneo tiene una aplicación n -lineal simétrica asociada. El método para recuperar la aplicación n -lineal asociada conocido el polinomio es lo que se llama fórmula de polarización que viene dada por:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_n x_n) \cdot \epsilon_1 \dots \epsilon_n$$

para todos los $x_1, \dots, x_n \in E$.

Si dotamos a $P({}^n E, F)$ de la norma:

$$\|P\| = \sup \{ \|P(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$$

obtenemos que $P({}^n E, F)$ es un espacio de Banach.

Por $P_f({}^n E, F)$ denotaremos el espacio de los polinomios n -homogéneos de tipo finito, que es el subespacio de $P({}^n E, F)$ generado por las funciones $\phi^n \otimes y$ y con $\phi \in E'$ e $y \in F$ definidas por $(\phi^n \otimes y)(x) = (\phi(x))^n y$.

Se define el espacio de los polinomios de E en F , $P(E, F)$, por $P(E, F) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P({}^n E, F)$. Análogamente, el espacio de los polinomios

de tipo finito de E en F , $P_f(E, F)$, será la suma directa

$$P_f(E, F) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_f({}^n E, F).$$

Análogas definiciones se pueden dar en el caso de espacios localmente convexos.

DEFINICION I.6. $P_{\omega bu}({}^m E, F)$ denotará el subespacio de $P({}^m E, F)$ formado por aquellos polinomios que son debilmente uniformemente continuos sobre los acotados, es decir $P_{\omega bu}({}^m E, F) = P({}^m E, F) \cap C_{\omega bu}(E, F)$.

PROPOSICION I.7. $P_{\omega bu}({}^m E, F)$ dotado de la norma inducida por $P({}^m E, F)$ es completo.

Demostración: Ver [5] pág. 6. Proposición 2.4.2. #

PROPOSICION I.8. $P_f({}^m E, F)$ es el espacio de los polinomios m -homogéneos debilmente continuos de E en F .

Demostración: Ver [5] págs. 6-7. #

DEFINICION I.9. $P_{\omega b}({}^m E, F)$ denotará el subespacio de $P({}^m E, F)$ formado por aquellos polinomios que son debilmente continuos sobre los acotados, es decir $P_{\omega b}({}^m E, F) = P({}^m E, F) \cap C_{\omega b}(E, F)$.

Recientemente Aron, Hervés y Valdivia han probado:

PROPOSICION I.10. Para cada $m \in \mathbb{N}$, los espacios $P_{\omega bu}({}^m E, F)$ y $P_{\omega b}({}^m E, F)$ coinciden.

Demostración: Ver [4]. #

En todo lo anterior, para el caso $F = \mathbb{R}$, se omite la letra \mathbb{R} ,

quedando $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}_f(E)$, $\mathcal{P}_{\omega_{bu}}(E)$, etc...

Una propiedad importante de las funciones de $\mathcal{C}_{\omega_{bu}}(E, F)$, en particular de los polinomios de $\mathcal{P}_{\omega_{bu}}(E, F)$ ($=\mathcal{P}_{\omega_b}(E, F)$) es la siguiente:

PROPOSICION I.11. Toda función $f : E \rightarrow F$ debilmente uniformemente continua sobre los acotados de E es compacta, es decir, transforma acotados en relativamente compactos.

Demostración: Ver [5], pg. 5, lema 2.2. #

PROPOSICION I.12. Sea $P = A \circ \Delta_m \in \mathcal{P}_{\omega_{bu}}({}^m E, F)$, donde A es una aplicación m -lineal continua. Se define $C : E \rightarrow \mathcal{P}({}^{m-1} E, F)$ por $C(x)(z) = A(x, z, \dots, z)$ ($x, z \in E$). Entonces C es una aplicación compacta cuyo rango está contenido en $\mathcal{P}_{\omega_{bu}}({}^{m-1} E, F)$.

Demostración: Ver [5] pg. 8, lema 2.6. #

Denotaremos para cada $p \geq 1$ por $\mathcal{C}^p(E, F)$ el espacio de todas las funciones que son diferenciables con continuidad hasta el orden p , en el sentido usual de Fréchet. Para cada j , $0 \leq j \leq p$, la derivada de orden j de una función en un punto es una aplicación j -lineal simétrica y por tanto tiene un polinomio j -homogéneo asociado. En todo este trabajo, si $f \in \mathcal{C}^p(E, F)$, $0 \leq j \leq p$ y $x \in E$ nosotros por $D^j f(x)$ entenderemos el polinomio j -homogéneo asociado a la derivada de orden j de f en x .

Denotaremos por $\mathcal{C}_c^p(E, F)$ el espacio de todas las funciones $f \in \mathcal{C}^p(E, F)$ tales que para cada $x \in E$ y cada j , $1 \leq j \leq p$, $D^j f(x) \in \mathcal{P}_{\omega_b}({}^j E, F)$.

Para cada $p \geq 1$, τ_u^p va a ser la topología en $C^p(E, F)$ inducida por la familia de seminormas

$$r_K : f \longrightarrow \sup \{ \|D^j f(x)\| : x \in K, 0 \leq j \leq p \} \quad (f \in C^p(E, F))$$

cuando K recorre la familia de todos los subconjuntos compactos de E .

PROPOSICION I.13. $(C^p(E, F), \tau_u^p)$ y $(C_c^p(E, F), \tau_u^p)$ son espacios localmente convexos completos.

Demostración: Ver [5], pg. 27 proposición 4.2. #

Para cada $p \geq 1$, $C_{\omega bu}^p(E, F)$ será el espacio de todas las funciones $f \in C^p(E, F)$ tales que:

- i) para cada $x \in E$ y cada j , $1 \leq j \leq p$, $D^j f(x) \in P_{\omega b}({}^j E, F)$
- ii) para cada j , $0 \leq j \leq p$, $D^j f \in C_{\omega bu}(E, P_{\omega b}({}^j E, F))$.

En $C_{\omega bu}^p(E, F)$ consideramos la topología inducida por la familia de seminormas:

$$q_B : f \longrightarrow \sup \{ \|D^j f(x)\| : x \in B, 0 \leq j \leq p \} \quad (f \in C_{\omega bu}^p(E, F))$$

cuando B varía en la familia de todos los subconjuntos acotados de E . Denotaremos a esta topología por τ_b^p .

PROPOSICION I.14. $(C_{\omega bu}^p(E, F), \tau_b^p)$ es un espacio de Fréchet.

Demostración: Ver [5] pág. 13, proposición 3.3. #

Antes de continuar con los resultados referentes a densidad de subálgebras vamos a hablar brevemente de un tipo de propiedades que van a jugar un papel relevante en lo que sigue.

DEFINICION I.15. ([19]) Un espacio localmente convexo X se dice que tiene la propiedad de aproximación si para cada $K \subset X$ precompacto, y cada entorno de 0 en X , V , existe un operador $T : X \rightarrow X$ de rango finito tal que $Tx - x \in V$ para cada $x \in K$.

DEFINICION I.16. Sea E un espacio de Banach y $1 \leq \lambda < \infty$. Diremos que E tiene la λ -propiedad de aproximación si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada compacto $K \subset E$, existe un operador de rango finito $T : E \rightarrow E$ tal que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ para cada $x \in K$, y $\|T\| \leq \lambda$. Un espacio de Banach se dice que tiene la propiedad de aproximación acotada si tiene la λ -propiedad de aproximación para algún λ . Un espacio de Banach se dice que tiene la propiedad de aproximación métrica si tiene la 1-propiedad de aproximación.

Veamos algunas propiedades hereditarias de estas propiedades.

PROPOSICION I.17.

(1) Si un espacio localmente convexo tiene la propiedad de aproximación también la tiene cada subespacio cerrado complementado.

(2) Si E es un espacio de Banach y E' tiene la propiedad de aproximación, entonces E también tiene la propiedad de aproximación. En particular, un espacio de Banach reflexivo E tiene la propiedad de aproximación si y solamente si E' la tiene.

(3) Si E es un espacio de Banach y E' tiene la λ -propiedad de aproximación, entonces E también la tiene. En particular, si E es reflexivo, E tiene la λ -propiedad de aproximación si y solamente si E' la tiene.

Demostración: Ver [25] págs. 244, 247 y 261. #

El siguiente resultado precisa más el apartado (3) de la proposición anterior.

PROPOSICION I.18. Sea E un espacio de Banach. E' tiene la propiedad de aproximación acotada si y solamente si satisface la siguiente condición: Existe una constante $C > 0$ tal que para cada par de compactos $K \subset E$ y $L \subset E'$ y cada $\varepsilon > 0$, existe una aplicación lineal $\pi : E \rightarrow E$ de rango finito tal que

$$\|\pi\| \leq C$$

$$\|\pi x - x\| \leq \varepsilon \quad (x \in K)$$

$$\|\phi \circ \pi - \phi\| \leq \varepsilon \quad (\phi \in L)$$

Demostración: Sale utilizando el principio de reflexividad local [23]. #

Es evidente a partir de las propias definiciones que todo espacio de Banach con la propiedad de aproximación acotada tiene la propiedad de aproximación. En general el recíproco no es cierto (ver [16]), sin embargo existen bastantes casos donde si se da.

PROPOSICION I.19. Sea E un espacio de Banach separable e isométrico a un dual. Si E tiene la propiedad de aproximación entonces E tiene la propiedad de aproximación métrica.

Demostración: Ver [33] pág. 39, teorema 1.e.15. #

Una técnica de gran utilidad en el estudio de la propiedad de aproximación es la del ε producto de Schwartz.

Si X es un espacio localmente convexo separado, denotaremos por X'_c al espacio dual de X dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos y compactos de X . Si Y es otro espacio localmente convexo, $L_e(X'_c; Y)$ denotará el espacio de todas las aplicaciones lineales continuas de X'_c en Y , dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontínuos de X' .

DEFINICION I.20. (|52|) Se define el ε producto de X e Y por

$$X \varepsilon Y = L_e(Y'_c ; X)$$

Puede probarse (ver |43|) que $L_e(Y'_c ; X)$ y $L_e(X'_c ; Y)$ son espacios isomorfos y por tanto podemos identificar $X \varepsilon Y$ e $Y \varepsilon X$.

PROPOSICION I.21. Si X e Y son espacios localmente convexos separados casi-completos con la propiedad de aproximación, $X \varepsilon Y$ también tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Ver |52|. #

La propiedad que más nos va a interesar del ε -producto es la siguiente.

PROPOSICION I.22. Sea X un espacio localmente convexo casi-completo y separado. Entonces son equivalentes:

- (1) X tiene la propiedad de aproximación.
- (2) $X \otimes Y$ es denso en $X \varepsilon Y$, para todo espacio localmente convexo Y .
- (3) $X \otimes F$ es denso en $X \varepsilon F$, para todo espacio de Banach F .

Demostración:

(1) \Leftrightarrow (2): Ver [52], proposición 11.

(2) \Leftrightarrow (3): Ver [43] pág. 144, teorema 8.7. #

Continuamos ahora con los resultados sobre densidad de subálgebras. Primeramente vamos a recordar el teorema clásico de Nachbin que resuelve el problema en dimensión finita.

TEOREMA I.23. (Nachbin). Sean E un espacio vectorial real, finito-dimensional y a una subálgebra del espacio $C^p(E)$, $p \geq 1$. Entonces a es densa en $(C^p_u(E), \tau_u^p)$ si y solamente si a verifica las condiciones siguientes:

(1) Para cada $x \in E$, existe una $g \in a$ tal que $g(x) \neq 0$.

(2) Para cada $x, y \in E$, con $x \neq y$, existe una $g \in a$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

(3) Para cada $x \in E$, y cada $v \in E$, $v \neq 0$, existe una $g \in a$ tal que $Dg(x)(v) \neq 0$.

Demostración: Ver [39]. #

El primer paso para extender este teorema consiste en pasarlo al caso vectorial, para ello necesitaremos el siguiente resultado:

PROPOSICION I.24. Si E es un espacio vectorial real de dimensión finita, y $p \geq 1$, $C^p(E) \otimes F$ es τ_u^p -denso en $C^p(E, F)$ para todo espacio de Banach F .

Demostración: Ver [54], pág. 449, teorema 44.1. #

Vamos a ver ahora un concepto que juega un papel muy importante en esta teoría y que será fundamental para poder dar una extensión del teorema de Nachbin al caso infinito-dimensional. Este concepto

es el de álgebra polinomial que generaliza de forma natural el concepto de álgebra.

DEFINICION I.25. Un subconjunto $\alpha \subset C^p(E, F)$ se dice que es un álgebra polinomial si dados $g \in \alpha$ y $P \in P_f(F, F)$, la composición $P \circ g \in \alpha$.

DEFINICION I.26. Un álgebra polinomial α se dice que es un álgebra polinomial de Nachbin si se verifican las siguientes condiciones:

- (1) Para cada $x \in E$, existe $g \in \alpha$ tal que $g(x) \neq 0$.
- (2) Para cada $x, y \in E$, $x \neq y$, existe $g \in \alpha$ tal que $g(x) \neq g(y)$.
- (3) Para cada $x \in E$ y $v \in E$, $v \neq 0$, existe $g \in \alpha$ tal que $Dg(x)(v) \neq 0$.

Ejemplos de álgebras polinomiales de Nachbin son $P_f(E, F)$, $P(E, F)$, $C^\infty(E, F) = \bigcap_{p=1}^{\infty} C^p(E, F)$ y $C^p(E, F)$.

Para álgebras de este tipo verificando una cierta condición de estabilidad Aron y Prolla dan sendos teoremas del tipo del teorema de Nachbin (I.23) para los espacios $C_{\omega bu}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$.

TEOREMA I.27. Sean E y F espacios de Banach reales, con E' teniendo la propiedad de aproximación acotada, y sea $p \geq 1$. Un álgebra polinomial $\alpha \subset C_{\omega bu}^p(E, F)$ es τ_b^p -densa si, y solamente si, se verifica:

- (1) α es un álgebra polinomial de Nachbin.
- (2) Para cada $\pi : E \rightarrow E$ de rango finito con $\|\pi\| \leq C$, y $c\alpha$

da $g \circ \alpha$, la composición $g \circ \pi$ pertenece a la τ_b^p -clausura de a .

(La constante C es la que nos dá la proposición I.18).

Demostración: Ver [5] pág. 22, teorema 3.12. #

Un teorema totalmente análogo se obtiene cambiando $C_{\omega bu}^p(E, F)$ por $C_c^p(E, F)$ y τ_b^p por τ_c^p en I.26, (Véase [5] pág. 28, teorema 4.3).

Por último vamos a dedicar dos pequeñas secciones de este capítulo a algunos tópicos de la teoría de espacios localmente convexos y de álgebras localmente m -convexas.

Suponemos al lector familiarizado con los conceptos de espacio localmente convexo tonelado, bornológico e infratonelado. De no ser así le remitimos a [50]. La siguiente proposición los relaciona entre sí.

PROPOSICION I.28. Sea X un espacio localmente convexo.

- (1) Si X es tonelado o bornológico, X es infratonelado.
- (2) Si X es bornológico y casi-completo, es tonelado.
- (3) Si X es infratonelado y casi-completo, es tonelado.

Demostración:

- (1) Es inmediata.
- (2) Ver [50], pág. 66, corolario 8.4.
- (3) Ver [50] pág. 148, corolario 5.3. #

PROPOSICION I.29.

(1) Todo espacio localmente convexo de Baire es tonelado. En particular todo espacio de Fréchet es tonelado.

(2) Todo espacio localmente convexo metrizable es bornológico.

Demostración:

(1) Ver [50] pág. 63, 7.1.

(2) Ver [50] pág. 64, 8.1. #

Todas estas propiedades se heredan por cocientes:

PROPOSICION I.30.

(1) Sea X un espacio localmente convexo tonelado y M un subespacio de X . Entonces el cociente X/M es tonelado.

(2) Sea X un espacio localmente convexo infratonelado y M un subespacio de X . Entonces el cociente X/M es infratonelado.

(3) Sea X un espacio localmente convexo bornológico y M un subespacio de X . Entonces el cociente X/M es bornológico.

Demostración: Ver [21] págs. 215, 218 y 222. #

Una consecuencia de la anterior proposición es que las tres propiedades se heredan por subespacios cerrados complementados.

PROPOSICION I.31. Sea X un espacio localmente convexo separado, X es semireflexivo si, y solamente si, $(X', \tau(X', X))$ es tonelado.

Demostración: Ver [50] pág. 150, 5.5. #

Vamos a ver ahora algunos resultados relacionados con las topologías débiles.

PROPOSICION I.32. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Existe una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, de vectores de norma 1 y $\sigma(E', E)$ -convergente a 0.

Demostración: Ver [24] ó [42]. #

Este resultado nos dice que la convergencia en norma y en la topología $*$ -débil de un dual, no son equivalentes para sucesiones en el dual de un espacio de Banach de dimensión infinita. (Comparese este resultado con el lema de Schur [22] ó [13]).

TEOREMA I.33. (Banach-Grothendieck). Sea E un espacio de Banach. Una forma lineal u sobre E' es continua para la topología $\sigma(E', E)$ si, y solamente si, su restricción a la bola unidad cerrada $B' = \{x' \in E' : \|x'\| \leq 1\}$ es continua para $\sigma(E', E)$.

Demostración: Ver [21] pág. 250, corolario 4. #

Por último vamos a ver que en un espacio de Banach coinciden la compacidad débil y la compacidad secuencial débil.

TEOREMA I.34. (Eberlein). Sea E un espacio de Banach. Un subconjunto cerrado A de E es debilmente compacto si y solamente si es secuencialmente debilmente compacto.

Demostración: Ver [50], pág. 193, corolario 2. #

Para concluir este capítulo vamos a hacer un pequeño resumen de los conceptos y resultados de que haremos uso en el capítulo VII. "

Recordemos que un álgebra topológica es un álgebra dotada con

una topología τ que es compatible con la estructura vectorial y tal que la aplicación multiplicación es continua.

DEFINICION I.35. Un álgebra topológica se dice que es localmente m -convexa (multiplicativamente convexa) si existe una base de entornos de 0 del álgebra formada por conjuntos equilibrados m -convexos. (Un conjunto U se dice m -convexo si U es convexo y $U \cdot U \subset U$).

Un estudio de las propiedades básicas de las álgebras m -convexas puede verse en [37] o en [6].

Si a es un álgebra con unidad e y $x \in a$, el espectro de x , $\sigma(x)$, es el conjunto de todos los escalares λ tales que $x - \lambda e$ no es inversible.

Si a es un álgebra compleja, denotaremos por M (resp. M_c) al conjunto de todos los ideales maximales (resp. maximales cerrados) de a y denotaremos por $\Delta(a)$ al conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos no nulos. A $\Delta(a)$ le llamaremos espectro del álgebra. Puede probarse (ver [6], pág. 223, 4-10-4) que si $M \subset X$, $M \in M_c$ si y solamente si M es el núcleo de un elemento de $\Delta(a)$. Esto nos permite identificar M_c con $\Delta(a)$. A este espacio, que es un subconjunto del dual, le dotaremos de la topología $\sigma(a', a)$ restringida, que es la que llamaremos topología de Gelfand. La transformada de Gelfand de un elemento $x \in a$ es la aplicación $\hat{x} : M_c = \Delta(a) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ ($\phi \in \Delta(a)$).

Un álgebra a , se llama semi-simple (resp. fuertemente semi-simple) si $\bigcap M = \{0\}$ (resp. $\bigcap M_c = \{0\}$).

DEFINICION I.36. Un álgebra localmente m -convexa se dice que es regular si para cada subconjunto cerrado de M_c , F , y cada $M \notin F$ existe x perteneciente al álgebra tal que $\hat{x}(M) = \{1\}$ mientras que $\hat{x}(F) = \{0\}$.

Un ideal I de un álgebra localmente m -convexa se dice que es primario si I está contenido en un único ideal maximal. En el caso clásico del álgebra $(C^P(E), \tau_u^P)$, donde E es un espacio vectorial de dimensión finita, el teorema de Whitney nos dice que todo ideal cerrado es intersección de los ideales cerrados primarios que lo contienen. Una reformulación de este teorema es la siguiente:

TEOREMA I.37. (Whitney). Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, e I un ideal de $C^P(E)$. Una función f pertenece a la τ_u^P -adherencia de I , si para cada $a \in E$ existe una función $g \in I$ tal que $f(a) = g(a)$.

Demostración: Ver [35] pág. 22. Ver también [60].

II. LA TOPOLOGIA $b\omega$

En este capítulo vamos a completar el estudio que J. Ferrera hizo en su Tesis Doctoral [15] de la topología $b\omega$ (Def. I.1), resolviendo un problema que allí aparecía propuesto y que había surgido a raíz de la publicación en el año 1972 por Wheeler [58] de un ejemplo en el que mostraba que la topología $b\omega$ en un espacio de Banach no siempre era localmente convexa, en contra de lo que había afirmado con anterioridad M.M. Day en la segunda edición de su libro "Normed Linear Spaces" [10]. Nosotros, en este capítulo, vamos a caracterizar cuando la topología $b\omega$ es localmente convexa.

Recordemos que la topología $b\omega$ en un espacio de Banach E es la topología más fina que coincide con la topología débil, $\sigma(E, E')$, en los subconjuntos acotados de E . Es conocido ([9] p. 266) que la topología $b\omega$ siempre es una topología semi-lineal, es decir las aplicaciones suma y multiplicación por escalares son separadamente continuas. También es conocido (véase [15]) que para la topología $b\omega$ son condiciones equivalentes ser vectorial y ser localmente convexa.

Si E es un espacio localmente convexo metrizable, el Teorema de Banach-Dieudonné (teorema I.3), nos dice que la topología $e\omega^*$ de E' , topología más fina que coincide con la topología débil $\sigma(E', E)$ en los subconjuntos equicontínuos de E' , es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de E . Por consiguiente en este caso la topología $e\omega^*$ de E' es una topología localmente convexa.

En Wheeler ([58], teorema 4.6 y 4.7), se prueba:

PROPOSICION II.1. (Wheeler). Si E es un espacio de Banach, la restricción de la topología ew^* de E'' a E es la topología localmente convexa más fina en E que coincide con la topología débil $\sigma(E, E')$ en los subconjuntos acotados de E .

Si denotamos por cbw a la restricción de la topología ew^* de E'' a E , comenzaremos demostrando que, en una clase particular de espacios de Banach, las topologías cbw y bw son distintas. Por consiguiente, en este caso, la topología bw no es localmente convexa.

LEMA II.2. Sea E un espacio de Banach separable, no reflexivo. Si E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 , existe un subconjunto A de E , cerrado para la topología bw , que no es cerrado en la topología cbw .

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n = \{x \in E : \|x\| = n\}$ la esfera de centro 0 y radio n en E . Veamos primero que S_n es $\sigma(E'', E')$ -denso en B_n'' , bola cerrada de radio n y centro 0 de E'' . Por el teorema de separación, sabemos que $B_n = \{x \in E : \|x\| \leq n\}$ es $\sigma(E'', E')$ -densa en B_n'' . Por tanto nos es suficiente probar que S_n es $\sigma(E, E')$ -densa en B_n . Sea pues $x \in B_n$, que lo podemos suponer con $\|x\| < n$ pues en el otro caso es inmediato, y sean $x'_1, \dots, x'_m \in E'$. Existe un $y \in \bigcap_{j=1}^m \ker x'_j$ y como $\|x\| < n$, existirá un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\|x + \lambda y\| = n$. Ahora si $1 \leq j \leq m$ se tiene $x'_j(x + \lambda y) = x'_j(x)$ y por tanto $S_n \cap [x + \{x'_1, \dots, x'_m\}^\circ] \neq \emptyset$. Por tanto S_n es $\sigma(E, E')$ -denso en B_n .

Como E es separable y no contiene ningún subespacio isomorfo

a ℓ^1 , por (I.4) resulta que S_n es $\sigma(E'', E')$ -secuencialmente denso en B_n'' . Así si $\phi \in E'' \setminus E$ y $\|\phi\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá una sucesión $(x_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ contenida en S_n y convergente a $\frac{1}{n} \phi$ en la topología $\sigma(E'', E')$.

Sea $A = \{x_{k,n} : n, k \in \mathbb{N}\}$, Para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$A \cap B_m = \{x_{k,n} : k \in \mathbb{N}, n \leq m\} = (\{x_{k,n} : k \in \mathbb{N}, n \leq m\} \cup \{\frac{1}{n} \phi : n \leq m\}) \cap B_m$$

y como $\{x_{k,n} : k \in \mathbb{N}, n \leq m\} \cup \{\frac{1}{n} \phi : n \leq m\}$ es un conjunto $\sigma(E'', E')$ -compacto, por ser una unión finita de sucesiones convergentes con sus respectivos límites, resulta que cada uno de esos conjuntos es $\sigma(E'', E')|_{B_m} = \sigma(E, E')|_{B_m}$ cerrado. Como esto es cierto para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que A es cerrado en la topología $b\omega$.

Veamos ahora que no es cerrado en la topología $cb\omega$. Sea V un entorno de 0 en la topología $e\omega^*$ de E'' . Sea U otro $e\omega^*$ -entorno de 0 en E'' tal que $U+U \subset V$. Como U es absorbente, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \phi \in U$. Por otra parte, por la propia definición de la topología $e\omega^*$, existe W , entorno de 0 en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$ tal que $U \cap B_{2n_0}'' = W \cap B_{2n_0}''$. Como $(x_{k,n_0})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\frac{1}{n_0} \phi$ en $\sigma(E'', E')$, existirá un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{k_0, n_0} - \frac{1}{n_0} \phi \in W.$$

En resumen, tenemos

$$x_{k_0, n_0} = x_{k_0, n_0} - \frac{1}{n_0} \phi + \frac{1}{n_0} \phi \in (W \cap B_{2n_0}'') + U \subset U + U \subset V.$$

Esto prueba que 0 es un punto adherente a A para la topología $e\omega^*$ de E'' , pero como $0 \in E$ resulta que 0 es adherente a A en la

topología cbw de donde se deduce que A no es cbw -cerrado pues $0 \notin A$. #

PROPOSICION II.3. Sea E un espacio de Banach separable tal que ningún subespacio suyo sea isomorfo a ℓ^1 . La topología bw en E es una topología localmente convexa si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Demostración: Si E es reflexivo, las topologías bw y e_{ω}^* coinciden y basta aplicar el teorema de Banach-Dieudonné (I.3).

Si E no es reflexivo, el lema anterior (II.2) y el teorema de Wheeler (II.1) prueban que la topología bw en E no es localmente convexa. #

Vamos a probar a continuación que la hipótesis de separabilidad se puede suprimir en la proposición anterior. Sin embargo en la demostración del lema II.2 la hipótesis de separabilidad no se puede suprimir ya que el resultado de Rosenthal (I.4), que juega un papel fundamental en la demostración del lema, no es válido sin la hipótesis de separabilidad.

PROPOSICION II.4. Sea E un espacio de Banach tal que ningún subespacio suyo sea isomorfo a ℓ^1 . La topología bw en E es una topología localmente convexa si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Demostración: Si E es reflexivo, el razonamiento es el mismo que en la proposición anterior.

Si E no es reflexivo, existe un subespacio de E , F , separa-

ble y no reflexivo. Por la proposición II.3 resulta que la topología bw de F no es localmente convexa. Como la topología bw de F es la restricción a F de la topología bw de E (ver (I.5)), se obtiene que la topología bw de E no puede ser localmente convexa. #

PROPOSICION II.5. Existe un subconjunto de ℓ^1 que es cerrado en la topología bw pero no es cerrado en la topología cbw .

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n la sucesión de ℓ^1 cuyos términos valen todos ceros salvo el de lugar n que vale 1.

Sea $A_0 = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Cada punto de A_0 es $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -aislado pues para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$V_n = \{x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^1 : |x_n - 1| < \frac{1}{2}\}$$

es un $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -entorno de e_n que únicamente interseca a A_0 en e_n . Por tanto A_0 es un conjunto $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -cerrado que no es $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -compacto. En consecuencia A_0 tampoco es $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -cerrado pues si lo fuese, como es acotado, sería $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -compacto y por tanto $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -compacto ya que A_0 está contenido en ℓ^1 y en los subconjuntos de ℓ^1 las topologías $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ y $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ coinciden.

Como A_0 no es $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -cerrado, existe una forma lineal ϕ , $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -adherente a A_0 que no pertenece a A_0 . Obviamente $\phi \in (\ell^1)'' \setminus \ell^1$ y $\|\phi\| \leq 1$.

Sea ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$A_n = \{n(e_p - e_q) + \frac{1}{n} e_k : p, q, k \in \mathbb{N}, p \neq q, p, q < k\}$$

El conjunto A_n está contenido en la esfera de radio $2n + \frac{1}{n}$. Dados $p, q, k \in \mathbb{N}$ con $p \neq q$ y $p, q < k$, es claro que el conjunto

$$W = \{x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^1 : |x_j - n| < \frac{n}{2} \quad j=p, q, \quad |x_k - \frac{1}{n}| < \frac{1}{2n}\}$$

es un entorno de $n(e_p - e_q) + \frac{1}{n} e_k$ en la topología $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$. Es claro que W corta a A_n únicamente en $n(e_p - e_q) + \frac{1}{n} e_k$. Así resulta que cada punto de A_n es aislado en la topología $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ y por tanto A_n es $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -cerrado pero no es $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -compacto.

Sea V un $\sigma((\ell^1)''', \ell^\infty)$ -entorno de cero, absolutamente convexo. Como ϕ es un $\sigma((\ell^1)''', \ell^\infty)$ -punto de acumulación de A_0 , el conjunto $\phi + \frac{1}{3n} V$, que es un $\sigma((\ell^1)''', \ell^\infty)$ -entorno de V , contiene una cantidad infinita de elementos de A_0 . Sean e_p, e_q, e_k tres elementos distintos de $(\phi + \frac{1}{3n} V) \cap A_0$. Podemos suponer $p < q < k$. Se tiene

$$\begin{aligned} n(e_p - e_q) + \frac{1}{n} e_k - \frac{1}{n} \phi &= n(e_p - \phi) + n(\phi - e_q) + \frac{1}{n}(e_k - \phi) \in \\ &\in \frac{1}{3} V + \frac{1}{3} V + \frac{1}{3n} V \subset V. \end{aligned}$$

De esta forma $(\frac{1}{n} \phi + V) \cap A_n$ es no vacía. Hemos probado, en consecuencia, que $\frac{1}{n} \phi$ pertenece a la $\sigma((\ell^1)''', \ell^\infty)$ -adherencia de A_n .

Definimos $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, si B_m es la bola cerrada de radio m , centrada en el origen, en ℓ^1 , se tiene que

$$A \cap B_m = \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}, \quad 2n + \frac{1}{n} \leq m\}$$

que es una unión finita de conjuntos $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ -cerrados. De aquí se deduce que A es un subconjunto cerrado para la topología $b\omega$.

Solo nos queda probar que A no es $cb\omega$ -cerrado. Sea U entorno absolutamente convexo de 0 en la topología $e\omega^*$ de $(\ell^1)'''$. Exis

te un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \phi \in \frac{1}{2} U$ y existe W , $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -entorno de 0, tal que

$$W \cap B''_{3n_0} = \frac{1}{2} U \cap B''_{3n_0},$$

siendo B''_{3n_0} la bola cerrada de centro 0 y radio $3n_0$ en $(\ell^1)''$. Hemos probado anteriormente que $\frac{1}{n_0} \phi$ es $\sigma((\ell^1)'' , \ell^\infty)$ -adherente a A_{n_0} luego existe un $x_{n_0} \in A_{n_0}$ tal que

$$x_{n_0} - \frac{1}{n_0} \phi \in W$$

En resumen se tiene

$$x_{n_0} = x_{n_0} - \frac{1}{n_0} \phi + \frac{1}{n_0} \phi \in (W \cap B''_{3n_0}) + \frac{1}{2} U \subset \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} U \subset U$$

Hemos probado así que 0 es un punto $e\omega^*$ -adherente a A y como $0 \in \ell^1$, también será $cb\omega$ -adherente a A . Además es evidente que $0 \notin A$ luego A no puede ser $cb\omega$ -cerrado. #

PROPOSICION II.6. Si E es un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 , entonces la topología $b\omega$ en E no es localmente convexa.

Demostración: La proposición II.5 junto con el teorema de Wheeler (II.1) prueban que la topología $b\omega$ en ℓ^1 no es una topología localmente convexa. Ahora si E es un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 , teniendo en cuenta que la topología $b\omega$ de un subespacio es la restricción de la topología $b\omega$ del total, se tiene que la topología $b\omega$ de E no puede ser localmente convexa. #

Podemos reunir los resultados obtenidos en las proposiciones II.4 y II.6 en el siguiente teorema que caracteriza totalmente cuan-

do la topología bw es localmente convexa (o equivalentemente vectorial).

TEOREMA II.7. Sea E un espacio de Banach. La topología bw en E es una topología localmente convexa si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Nota: Aunque en toda esta memoria E denota un espacio de Banach real, los resultados de este capítulo siguen siendo válidos si E es un espacio de Banach complejo.

III. EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DEBILMENTE DIFERENCIABLES SOBRE
LOS ACOTADOS DE UN ESPACIO DE BANACH. EL ESPACIO $C_{\omega b}^p(E, F)$.

En este capítulo, introducimos el concepto de diferenciabilidad débil sobre los acotados de un espacio de Banach y los espacios de funciones continuamente diferenciables asociados. Estos espacios surgen de forma natural en el contexto actual de la Teoría de la aproximación, por una parte como respuesta al problema de la densidad de subálgebras polinomiales para un cierto tipo de convergencia uniforme sobre subconjuntos debilmente compactos, planteado a partir del estudio que realizaron Aron y Prolla en aproximación sobre compactos y sobre acotados [5], por otro lado, también aparecen estos espacios como paso natural al caso diferenciable del espacio de las funciones debilmente continuas sobre los acotados de un espacio de Banach que estudió J. Ferrera en su Tesis Doctoral [15].

DEFINICION III.1. Una función $f : E \rightarrow F$ se dice que es debilmente diferenciable en un punto $a \in E$ si verifica:

(i) Para cada acotado $B \subset E$ tal que $a \in B$, la aplicación

$$f|_B : (B, \sigma(E, E')|_B) \longrightarrow (F, \| \cdot \|)$$

es continua en a .

(ii) f es diferenciable en sentido Fréchet en a .

Diremos que $f : E \rightarrow F$ es debilmente diferenciable si es debilmente diferenciable en cada punto de E .

Obsérvese que si f es debilmente diferenciable, entonces $f \in C_{\omega b}^p(E, F)$.

OBSERVACION III.2. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, existen funciones debilmente diferenciables que no son debilmente continuas. Veamos un ejemplo:

Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ una sucesión de formas lineales sobre E , linealmente independientes y de norma 1. Definimos la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\phi_n(x)|^2 \quad (x \in E)$$

La función f es un polinomio 2-homogéneo, debilmente diferenciable y sin embargo no es debilmente continuo. En efecto, si f fue se debilmente continua, existirían $\psi_1, \dots, \psi_m \in E'$ tales que para cada $x \in E$ con $|\psi_j(x)| \leq 1$, $1 \leq j \leq m$, se tiene que $|f(x)| < 1$. Así si $x \in \bigcap_{j=1}^m \ker \psi_j$, resulta que $f(x) = 0$ y por tanto $\phi_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, cada ϕ_n sería combinación lineal de ψ_1, \dots, ψ_m , lo que es absurdo pues los $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son linealmente independientes.

Veamos que f es debilmente diferenciable. Sean $x_0 \in E$ y $B \subset E$ un acotado tal que $x_0 \in B$; podemos suponer que B está contenido en una bola $B_M = \{x \in E : \|x\| \leq M\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{2M^2}$$

Así si $x \in E$ es tal que $|\phi_j(x)| \leq \left| \frac{\epsilon}{2n_0} \right|^{1/2}$, $1 \leq j \leq n_0$, resulta que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\phi_n(x)|^2 \right| = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2} |\phi_n(x)|^2 + \\ &+ \sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} |\phi_n(x)|^2 \leq n_0 \frac{\epsilon}{2n_0} + \sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} \|\phi_n\|^2 \|x\|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n > n_0} \frac{M^2}{n^2} \leq \varepsilon$$

Por tanto $f|_B$ es debilmente continua en x_0 .

Por último, si $x_0 \in E$, $t \in \mathbb{R}$ y $\|h\| \leq 1$ ($h \in E$), se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left| f(x_0 + th) - f(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \phi_n(x_0) \phi_n(th) \right| = \\ &= \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\phi_n^2(x_0 + th) - \phi_n^2(x_0) - 2\phi_n(x_0)\phi_n(th)) \right| = \\ &= \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\phi_n(2x_0 + th)\phi_n(th) - 2\phi_n(x_0)\phi_n(th)) \right| = \\ &= \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \phi_n^2(th) \right| \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left| f(x_0 + th) - f(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \phi_n(x_0) \phi_n(th) \right| &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \phi_n^2(h) = 0 \end{aligned}$$

uniformemente en $h \in B_E$, bola unidad cerrada de E .

Hemos probado así que f es debilmente diferenciable y que su diferencial en un punto $x_0 \in E$ vale $Df(x_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \phi_n(x_0) \phi_n$.

El siguiente resultado nos va a permitir posteriormente, establecer la conexión existente entre la clase de funciones diferenciables aquí definidas y las que aparecen en [5].

PROPOSICION III.3. Sea $f : E \rightarrow F$. Si f es debilmente diferenciable en un punto $a \in E$ entonces $Df(a) \in P_{\omega b}^1(E, F)$.

Demostración: Sea $B \subset E$ un disco acotado y sea $\varepsilon > 0$. Sea $r > 0$ tal que $B \subset rB_E$. Como f es diferenciable Fréchet en a , existe

un $\delta > 0$ ($\delta < 1$) tal que si $\|x-a\| < \delta$ entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| < \frac{\epsilon}{2r} \|x-a\| \quad (1)$$

Sea B_1 un disco acotado que contenga a $a+B_1$; existe un entorno débil de 0 , W , absolutamente convexo y tal que si $x-a \in W$ y $x \in B_1$ entonces

$$\|f(x) - f(a)\| < \frac{\delta}{2r} \epsilon \quad (2)$$

Sea $y \in W \cap B$, aplicando (1) se obtiene

$$\|Df(a)y\| = \frac{r}{\delta} \|Df(a)\left(\frac{\delta}{r} y\right)\| < \frac{r}{\delta} \left\| f\left(a + \frac{\delta}{r} y\right) - f(a) \right\| + \frac{\epsilon}{2r} \frac{\delta}{r} \|y\|$$

y por (2)

$$\|Df(a)y\| < \frac{r}{\delta} \left| \frac{\delta}{2r} \epsilon + \frac{\delta}{2r} \epsilon \right| = \epsilon \neq$$

OBSERVACION III.4. Si f es una función diferenciable Fréchet en un punto $a \in E$ tal que $Df(a) \in P_w^1(E,F)$, no necesariamente para cada acotado B con $a \in B$, la restricción de f a B ha de ser debilmente continua. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definida por $f((x_n)) = (x_n^2)$. Para los elementos e_n de la base canónica se tiene $f(e_n) = e_n$ y por tanto f no es compacta. Como además f es un polinomio 2-homogéneo resulta por (I.10) y (I.11) que f no puede ser debilmente continua al restringirla a los acotados. Por otra parte si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, consideramos la aplicación $u : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definida $u((x_n)) = 2(x_n a_n)$, obviamente u es lineal y

$$\begin{aligned} \|f(a+x) - f(a) - u(x)\|^2 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} |(a_n+x_n)^2 - a_n^2 - 2x_n a_n|^2 \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^4 \leq \|x\|^4 \end{aligned}$$

que prueba que f es diferenciable Fréchet en a y su diferencial en a es u . Por último es evidente que u es débilmente continua en a .

Vamos a dar ahora una serie de condiciones equivalentes a las de la definición III.1. que nos serán de gran utilidad en el desarrollo posterior.

PROPOSICION III.5. Sean $f : E \rightarrow F$ y $a \in E$. Si f es diferenciable Fréchet en a , consideramos las proposiciones siguientes:

(a) Para cada acotado B , con $a \in B$, $f : (B, \sigma(E, E')|_B) \rightarrow (F, \|\cdot\|)$ es continua en a .

(b) $Df(a) : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal compacta.

(c) Para cada acotado B , con $a \in B$ y para cada $\epsilon > 0$, existe W entorno débil de 0 en E tal que si $x-a \in W$ y $x \in B$ entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| < \epsilon \|x-a\|$$

Entonces (a) \Leftrightarrow (a) + (b) \Leftrightarrow (b) + (c) \Leftrightarrow (c) + (a).

Demostración:

(a) \Rightarrow (b) es consecuencia de la proposición III.3 y de que toda aplicación lineal débilmente (uniformemente) continua sobre los acotados es compacta (I.11).

(a) + (b) \Rightarrow (c) : Sean $B \subset E$ disco acotado con $a \in B$, y $\epsilon > 0$. Como f es diferenciable Fréchet en a , existe δ , $0 < \delta < 1$, tal que si $\|x-a\| < \delta$ entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| < \varepsilon \|x-a\| \quad (1)$$

Por la hipótesis (a), existen $\phi_1, \dots, \phi_n \in E'$ tales que si $|\phi_j(x-a)| \leq 1$, $1 \leq j \leq n$, y $x \in B$ entonces

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{2} \quad (2)$$

Además $Df(a) : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal continua, considerando en E y F las topologías inducidas por sus respectivas normas, luego $Df(a) : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow (F, \sigma(F, F'))$ también es continua y por tanto, si B_E es la bola unidad cerrada de E , la aplicación $Df(a)|_{B_E} : (B_E, \sigma(E, E')|_{B_E}) \longrightarrow (\overline{Df(a)(B_E)}, \sigma(F, F')|_{\overline{Df(a)(B_E)}})$ es continua. Por la hipótesis (b), $\overline{Df(a)(B_E)}$ es un subconjunto compacto, luego en él coinciden las topologías débil y fuerte y por tanto existirán $\psi_1, \dots, \psi_m \in E'$ tales que si $|\psi_j(x)| \leq 1$ ($1 \leq j \leq m$) y $x \in B_E$ entonces

$$\|Df(a)(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

En resumen tenemos que si $x \in B$ y $|\phi_j(x-a)| \leq 1$ ($1 \leq j \leq n$) y $|\psi_j(x-a)| \leq \delta$ ($1 \leq j \leq m$) entonces

i) si $\|x-a\| \geq \delta$, por (2) y (3) resulta que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| &\leq \|f(x) - f(a)\| + \|Df(a)(x-a)\| \leq \\ &\leq \varepsilon \delta / 2 + \|x-a\| \|Df(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\|x-a\| + \|x-a\|). \end{aligned}$$

ii) si $\|x-a\| < \delta$, basta considerar (1).

(c) + (b) \Rightarrow (a): Consideremos la aplicación

$$T_f : x \rightarrow f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \quad (x \in E)$$

De (c) se deduce que para cada acotado $B \subset E$, con $a \in B$, la

restricción de T_f a B es debilmente continua en a .

Por otra parte, un razonamiento análogo al del apartado anterior prueba que si $Df(a)$ es una aplicación lineal compacta, entonces $Df(a)|_{B+a}$ es debilmente continua en 0 y por tanto la aplicación

$$L_f : x \longrightarrow Df(a)(x-a) \quad (x \in E)$$

al restringirla a B es debilmente continua en a . Por último, para obtener (a) basta observar que $f = T_f + f(a) + L_f \cdot \#$

Obsérvese que las condiciones (b) y (c) de la proposición anterior no están relacionadas entre sí. Por ejemplo, si $f : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal no compacta, es claro que f verifica (c) pero no verifica (b). Por otro lado, si (b) implicase (c), de la proposición anterior resultaría que (a) y (b) serían equivalentes, cosa que no es cierta (ver observación III.4 y I.11).

De forma totalmente análoga puede verse que la condición (c) no implica la condición (a).

DEFINICION III.6. Sean $f : E \rightarrow F$ y p un entero $p > 1$. Diremos que f es p veces debilmente diferenciable en un punto $a \in E$ si f es $p-1$ veces debilmente diferenciable y la aplicación

$$D^{p-1}f : E \longrightarrow \mathcal{P}(^{p-1}E, F)$$

es debilmente diferenciable en a .

Una función se dice p veces debilmente diferenciable en E si lo es en cada punto.

Obsérvese que por III.3 podemos considerar $D^{p-1}f$ como una aplicación de E en $\mathcal{P}_{\omega b}(^{p-1}E, F)$. En lo que sigue lo consideraremos así.

DEFINICION III.7. Sea p un entero, $p \geq 1$. Diremos que una función $f : E \rightarrow F$ es una función debilmente diferenciable de clase p si f es p veces debilmente diferenciable y $D^p f \in C_{\omega b}^p(E, P_{\omega b}^p(E, F))$.

Denotaremos por $C_{\omega b}^p(E, F)$ al espacio de todas las funciones de E en F debilmente diferenciables de clase p .

Cuando $F = \mathbb{R}$, denotaremos a $C_{\omega b}^p(E, F)$ simplemente por $C_{\omega b}^p(E)$.

OBSERVACION III.8. Una función $f : E \rightarrow F$ pertenece a $C_{\omega b}^p(E, F)$ si y solamente si verifica las condiciones siguientes:

- (1) $f \in C^p(E, F)$
- (2) $D^j f(x) \in P_{\omega b}^j(E, F) \quad (x \in E, 1 \leq j \leq p)$
- (3) $D^j f \in C_{\omega b}^j(E, P_{\omega b}^j(E, F)) \quad (0 \leq j \leq p)$

Obviamente, en el caso en que E sea de dimensión finita, el espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ es el espacio de todas las funciones diferenciables Fréchet de clase p .

El espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ está contenido en el espacio $C_c^p(E, F)$ y contiene al espacio $C_{\omega b u}^p(E, F)$ (ver preliminares). En particular $C_{\omega b}^p(E, F)$ contiene a las funciones diferenciables cilíndricas de orden p (véase [26]) y a las funciones infinitamente diferenciables nuclearmente (véase [40]).

Obsérvese también que si E tiene dimensión infinita y $f \in C_{\omega b}^p(E, F)$ no es idénticamente nula, el soporte de f es no acotado. En efecto, si $f \in C_{\omega b}^p(E, F)$ tiene soporte acotado, sea B un disco acotado conteniendo al soporte de f ; para cada $a \in B$ y cada $\epsilon > 0$, existe W entorno débil de 0 en E tal que si $x-a \in W$,

$x \in 2B$, se tiene

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Sea $x \in 2B \setminus B$ tal que $x-a \in W$, se tiene que $\|f(a)\| < \varepsilon$ y como esto se puede hacer para cada $\varepsilon > 0$, necesariamente ha de ser $f(a) = 0$. En consecuencia f es idénticamente nula. (Nótese que en realidad lo único que se utiliza es que f es debilmente continua sobre los acotados).

La siguiente proposición, nos proporciona una amplia clase de funciones que pertenecen al espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$.

PROPOSICION III.9. Para cada j , $1 \leq j < \infty$ el espacio $P_{\omega b}^{(j)}(E, F)$ está contenido en $C_{\omega b}^p(E, F)$.

Demostración: Sea $P \in P_{\omega b}^{(j)}(E, F)$. Denotamos por A la aplicación j -lineal simétrica asociada a P , es decir $P = A \circ \Delta_j$ donde $\Delta_j(x) = (x, \dots, x) \in E^j$ ($x \in E$).

En primer lugar, se comprueba facilmente que para cada $x, y \in E$
 $DP(x)y = jA(y, x, \dots, x) = jA(yx^{j-1})$.

Sea $x \in E$ y sean $B \subset E$ un conjunto acotado y $\varepsilon > 0$. Si B_1 es un subconjunto acotado de E , absolutamente convexo, que contiene a $B \cup \{x\}$, existe V entorno débil de 0 en E tal que si $y, z \in B_1$, y $y-z \in V$ entonces

$$\|Py - Pz\| \leq \varepsilon \tag{1}$$

Entonces, por la fórmula de polarización, si $y, z \in jB_1$ y $z-y \in V$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \|DP(x)y - DP(x)z\| &= j \|A(y, x, \dots, x) - A(z, x, \dots, x)\| = \\ &= j \frac{1}{2^j j!} \left\| \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq j}} \epsilon_1 \dots \epsilon_j [P(\epsilon_1 y + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x) - \right. \\ &\quad \left. - P(\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x)] \right\| \leq \frac{1}{2^j (j-1)!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq j}} \|P(\epsilon_1 y + \epsilon_2 x + \dots \\ &\quad \dots + \epsilon_j x) - P(\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x)\| \leq \frac{2^j \epsilon}{2^j (j-1)!} \leq \epsilon \end{aligned}$$

aplicando (1).

Por tanto $DP(x) \in P_{\omega_b}({}^1E, F)$.

Por otra parte, dados $B \subset E$ disco acotado y $\epsilon > 0$, existe W entorno débil de 0 en E absolutamente convexo tal que si $x, y \in B$ con $x-y \in W$ entonces

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \frac{j!}{j^j} \epsilon \quad (1)$$

Así resulta, aplicando otra vez la fórmula de polarización, que si $x, y \in B$ y $x-y \in W$ se tiene para cada $z \in E$ con $\|z\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|DP(x)z - DP(y)z\| &= \|A(y, x, \dots, x) - A(z, y, \dots, y)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^j j!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq j}} \|P(\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x) - P(\epsilon_1 z + \epsilon_2 y + \dots + \epsilon_j y)\| = \\ &= \frac{j^j}{2^j j!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq j}} \left\| P\left(\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x}{j}\right) - P\left(\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 y + \dots + \epsilon_j y}{j}\right) \right\| \end{aligned}$$

y como $\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x}{j}$ y $\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 y + \dots + \epsilon_j y}{j}$ pertenecen a B y su diferencia vale $\frac{1}{j} (\epsilon_2(x-y) + \dots + \epsilon_j(x-y))$, que pertenece a W ,

se tiene por (1) que $\|P(\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 x + \dots + \epsilon_j x}{j}) - P(\frac{\epsilon_1 z + \epsilon_2 y + \dots + \epsilon_j y}{j})\| \leq$
 $\leq \epsilon \frac{j!}{j^j}$ de donde resulta que

$$\|DP(x)z - DP(y)z\| \leq \epsilon$$

para cada z con $\|z\| \leq 1$ y por tanto

$$\|DP(x) - DP(y)\| \leq \epsilon$$

Hemos probado pues, que P es debilmente diferenciable y $DP \in C_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^1(E, F))$. Razonemos ahora por inducción:

Sea m un entero tal que $1 \leq m < j$, y supongamos que $D^m P \in C_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^m(E, F))$. El razonamiento anterior nos permite probar que $D^m P$ es debilmente diferenciable y $D^{m+1} P$ pertenece a $C_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^m(E, F)))$. Ahora bien por (I.12) resulta que $P_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^m(E, F)) = P_{\omega b}^{m+1}(E, F)$, y por tanto $D^{m+1} P \in C_{\omega b}^1(E, P_{\omega b}^{m+1}(E, F))$. #

Como consecuencia de este resultado y de (I.8) sale que el espacio $C_{\omega b}^P(E, F)$ contiene a los polinomios de tipo finito $P_f(E, F)$.

Vamos ahora a pasar a estudiar las relaciones existentes entre los espacios de Aron y Prolla $C_{\omega bu}^P(E, F)$ y $C_c^P(E, F)$ y el espacio $C_{\omega b}^P(E, F)$.

Primeramente vamos a ver la relación que hay entre $C_{\omega bu}^P(E, F)$ y $C_{\omega b}^P(E, F)$. Sabemos que $C_{\omega bu}^P(E, F)$ siempre está contenido en $C_{\omega b}^P(E, F)$. También sabemos que si E es reflexivo ambos espacios coinciden. Vamos a ver que recíprocamente si $C_{\omega b}^P(E, F)$ y $C_{\omega bu}^P(E, F)$ son iguales necesariamente E ha de ser reflexivo. La demostración de esto está basada en los trabajos de M. Valdivia sobre conjuntos debilmente compac-

tos (156|).

DEFINICION III.10. Dado un espacio de Banach E diremos que un elemento $z \in E''$ es separablemente continuo en $(E', \sigma(E', E))$ si es continuo en cada subespacio separable de $(E', \sigma(E', E))$.

Un conjunto $M \subset E''$ se dice separablemente continuo en $(E', \sigma(E', E))$ si cada elemento de M es separablemente continuo en $(E', \sigma(E', E))$.

LEMA III.11. (Valdivia). Sea E un espacio de Banach tal que $(E', \sigma(E', E))$ es separable. Sea $x_0 \in E''$. Si F es el subespacio vectorial engendrado por $E \cup \{x_0\}$ entonces $(E', \sigma(E', F))$ es separable.

Demostración: Véase |55|.

PROPOSICION III.12. Sea A un subconjunto de un espacio de Banach E . Si cada $f \in C_{\omega b}^p(E)$ está acotado en A , entonces la adherencia de A en $(E'', \sigma(E'', E'))$ es separablemente continua en $(E', \sigma(E', E))$.

Demostración: Supongamos que existe un punto z adherente a A en $\sigma(E'', E')$ que no es separablemente continuo en $(E', \sigma(E', E))$. Existirá un subespacio vectorial cerrado y separable, F , de $(E', \sigma(E', E))$ tal que z no es continuo en F . Sea $i : F \rightarrow E'$ la inclusión canónica e $i^* : E'' \rightarrow F'$ la traspuesta de i .

Como F es isomorfo algebraicamente al dual $(E/F^\circ)'$ y la topología inducida en F por $\sigma(E', E)$ se corresponde mediante dicho isomorfismo con la topología $\sigma((E/F^\circ)', E/F^\circ)$, aplicando el lema III.11 resulta que si H es el subespacio vectorial engendrado

por $i^*(E) \cup \{i^*(z)\}$, existirá un subconjunto $\sigma(F,H)$ -denso y numerable $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos la función real

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \|u_n\|)^p} \frac{1}{2^n} \phi(\langle u_n, x - i^*(z) \rangle) \quad (x \in H) \quad (1)$$

donde ϕ es una función real no negativa, infinitamente derivable, que solo se anula en 0 y que verifica que ella y sus derivadas están acotadas. Un ejemplo de una función con estas características lo constituye la función $\phi(t) = e^{-1/t^2}$.

Sea para cada $x \in E$, $g(x) = \frac{1}{\tilde{f}(i^*(x))}$; g está bien definida porque $\tilde{f}(i^*(x)) = 0$ si y solamente si $\phi(\langle u_n, x - i^*(z) \rangle) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir si y solamente si $\langle u_n, x \rangle = \langle u_n, i^*(z) \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y esto pasa solo si $x = i^*(z)$ ya que el conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es $\sigma(F,H)$ -denso. Por tanto \tilde{f} solo se anula en $i^*(z)$, pero es claro que $z \notin E$.

Veamos ahora que $g \in C_{\omega b}^p(E)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $x \in E$, sea $S_N(x)$ la suma parcial N -ésima de la serie (1). Obviamente $S_N \in C^p(E)$ y además si $0 \leq j \leq p$

$$D^j(S_N \circ i^*)(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{1}{(1 + \|u_n\|)^p} D^j \phi(\langle u_n, i^*(x-z) \rangle) \cdot (i(u_n))^j, \quad (x \in E)$$

Como las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(1 + \|u_n\|)^p} D^j \phi(\langle u_n, i^*(x-z) \rangle) (i(u_n))^j$$

convergen uniformemente sobre los subconjuntos compactos de E , aplicando que $C^p(E)$, con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de E de la función y sus derivadas, es comple

to (I.13), resulta que la sucesión $(S_N \circ i^*|_E)_{N \in \mathbb{N}}$ converge en $C^p(E)$ y su límite es la función $\tilde{f} \circ i^*$ restringida a E . Por tanto $\tilde{f} \circ i^*|_E \in C^p(E)$. Además es evidente que tanto la función como sus derivadas son debilmente continuas. Por último, solo falta ver que para cada $x \in E$, $D^j(\tilde{f} \circ i^*)(x) \in P_{\omega b}^j(E)$ ($0 \leq j \leq p$). Ahora bien, por lo visto anteriormente se tiene

$$D^j(\tilde{f} \circ i^*)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(1 + \|u_n\|)^p} D^j \phi(\langle u_n, i^*(x-z) \rangle)(i(u_n))^j$$

que es un límite (para la topología de la norma) de polinomios de tipo finito, luego por (I.7), (I.8) y (I.10) resulta que $D^j(\tilde{f} \circ i^*)(x) \in P_{\omega b}^j(E)$.

En resumen, hemos probado que la restricción a E de la función $\tilde{f} \circ i^*$ pertenece a $C_{\omega b}^p(E)$. Además $\tilde{f} \circ i^*$ vimos que no se anula en E , luego la función $g = \frac{1}{(\tilde{f} \circ i^*)|_E}$ también pertenece a $C_{\omega b}^p(E)$.

Veamos que esto nos lleva a una contradicción con la hipótesis.

Sea $\{z_d\}_{d \in D}$ una red en A que converge a z en la topología $\sigma(E'', E')$. Como $\tilde{f} \circ i^*$ es evidentemente $\sigma(H, F)$ -continua, resultará que la red $\{\tilde{f}(i^*(z_d))\}_{d \in D}$ habrá de converger a $\tilde{f}(i^*(z))$ que vale cero y por tanto como $g(z_d) = \frac{1}{\tilde{f}(i^*(z_d))}$ la red $\{g(z_d)\}_{d \in D}$ no puede estar acotada, en contra de la hipótesis. #

Obsérvese que en la demostración de la proposición anterior es fundamental que el cuerpo base sea R pues no es posible encontrar una función entera que verifique las propiedades que le hemos exigido a ϕ .

PROPOSICION III.13. Sea E un espacio de Banach y A un subconjunto de E . Si cada $f \in C_{\omega b}^p(E)$ está acotada en A , entonces A es debilmente relativamente compacto.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A . Sea F el subespacio vectorial cerrado engendrado por el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en E . Sea z un punto adherente a $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\sigma(E'', E')$ y sea B la bola unidad cerrada de E' . Sea $i: F \rightarrow E$ la inclusión canónica e $i^*: E' \rightarrow F'$ su traspuesta. Como F es separable, la bola unidad de su dual, que es precisamente $i^*(B)$, es $\sigma(F', F)$ -metrizable. Supongamos que z no es debilmente continuo en $i^*(B)$. Existirán una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ y un $\varepsilon > 0$ tales que $(i^*(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a 0 y $|\langle z, u_n \rangle| = |\langle z, i^*(u_n) \rangle| \geq \varepsilon \quad n=1, 2, \dots$. Sea u_0 un punto adherente a $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ en B para la topología $\sigma(E', E)$. Aplicando la proposición (III.12), z es separablemente continuo en $(E', \sigma(E', E))$ luego $|\langle z, u_0 \rangle| \geq \varepsilon$. Por otra parte $(i^*(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a 0, luego $i^*(u_0) = 0$ y por tanto $|\langle z, u_0 \rangle| = |\langle z, i^*(u_0) \rangle| = 0$. De esta contradicción resulta que z es debilmente continuo en $i^*(B)$ y por tanto z es $\sigma(F', F)$ -continuo por el teorema de Banach-Grothendieck (I.33), e identificando F con su imagen canónica en F'' resulta que $z \in F$. Por último aplicando el teorema de Eberlein (I.34) se obtiene que A es debilmente relativamente compacto. #

TEOREMA III.14. Los espacios $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_{\omega b u}^p(E, F)$ coinciden si y solamente si E es reflexivo.

Demostración: Si E es reflexivo es claro que $C_{\omega b}^p(E, F)$ y

$C_{\omega bu}^p(E, F)$ coinciden. Veamos el recíproco.

a) Vamos a probarlo primeramente en el caso particular $F = \mathbb{R}$.

Ya observamos anteriormente que $C_{\omega bu}^p(E)$ siempre está contenido en $C_{\omega b}^p(E)$. Por otra parte, por (I.11), sabemos que toda función de $C_{\omega bu}^p(E)$ está acotada sobre los acotados, en particular en la bola unidad de E , B_E . Así si $C_{\omega bu}^p(E)$ y $C_{\omega b}^p(E)$ coincidiesen, resultaría que toda función de $C_{\omega b}^p(E)$ estaría acotada en B_E y por (III.13) B_E tendría que ser $\sigma(E, E')$ -compacto y por tanto E sería reflexivo.

b) Sea ahora F un espacio de Banach arbitrario. Podemos identificar $C_{\omega b}^p(E)$ con un subespacio de $C_{\omega b}^p(E, F)$ y razonando como en a) llegaríamos a que E habría de ser reflexivo. #

Vamos ahora a estudiar la relación entre los espacios $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$. Necesitaremos algunos lemas previos.

LEMA III.15. Sean $\psi \in E'$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión acotada. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ tal que:

(1) el conjunto $\{\psi(x_n) : n \in A\}$ tiene signo constante

(2) $\sup_{n \in A} |\psi(x_n)| - \inf_{n \in A} |\psi(x_n)| < \varepsilon$.

Demostración: Sea $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Existen $m, N \in \mathbb{N}$ tales que $\|\psi\| < \frac{m}{M}$ y $N\varepsilon > 2$.

Para cada j , $-m \leq j < m$ y cada k , $1 \leq k \leq N$, sea

$$A_{j,k} = \{n \in \mathbb{N} : j + \frac{k-1}{N} \leq \psi(x_n) < j + \frac{k}{N}\}.$$

Es claro que $\mathbb{N} = \bigcup_{j=-m}^{m-1} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{j,k}$ y por tanto alguno de los conjuntos será infinito. #

COROLARIO III.16. Sean $\psi_1, \dots, \psi_p \in E'$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión acotada. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ tal que:

(1) para cada j , $1 \leq j \leq p$, el conjunto $\{\psi_j(x_n) : n \in A\}$ tiene signo constante.

(2) para cada j , $1 \leq j \leq p$,

$$\sup_{k \in A} |\psi_j(x_k)| - \inf_{k \in A} |\psi_j(x_k)| < \varepsilon.$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del lema III.16. #

LEMA III.17. Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ una sucesión $\sigma(E', E)$ -convergente a 0 de vectores de norma 2. Si $\psi_1, \dots, \psi_n \in E'$, existe un $\alpha > 1$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$ y $x \in E$ con $|\psi_j(x)| \leq 1$, $1 \leq j \leq p$ y $\|x\| \leq 1$, tales que $\phi_p(x) \geq \alpha$.

Demostración: Sea $M = \max\{\|\psi_j\| : j=1, \dots, n\}$ y sea $\alpha' = \frac{1}{2} \left(\frac{M+3}{M+2}\right)$. Es claro que $\frac{1}{2} < \alpha' < 1$. Sean $\gamma > 0$ tal que $\frac{1}{2\alpha'} + \gamma < 1$ y $\alpha = 1 + \alpha'\gamma$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ y $\phi_n(x_n) \geq 1 + \frac{1}{2\alpha'} + \gamma$. Aplicando el corolario III.16 a la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y a $\varepsilon = \frac{4}{M+3}$, resulta que existe un conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ tal que:

(1) para cada j , $1 \leq j \leq n$, el conjunto $\{\psi_j(x_m) : m \in A\}$ tiene signo constante (podemos suponer $\psi_j(x_m) \geq 0$ para cada $m \in A$

y cada j , $1 \leq j \leq n$, pues en caso contrario razonaríamos con $-\psi_j$)

(2) para cada j , $1 \leq j \leq n$

$$\sup_{m \in A} |\psi_j(x_m)| - \inf_{m \in A} |\psi_j(x_m)| \leq \frac{4}{M+3}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $q_0 \in A$, $q_0 \geq k$. Como $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en $\sigma(E', E)$, existe un $p \in A$, $p \geq k$ tal que

$$|\phi_p(x_{q_0})| \leq \frac{\alpha'}{1-\alpha'} \left(1 - \frac{1}{2\alpha'}\right) = \frac{2\alpha'-1}{2(1-\alpha')}.$$

Sea $x = \alpha' x_p - (1-\alpha') x_{q_0}$. Veamos que este x cumple las condiciones requeridas:

$$\|x\| \leq \alpha' \|x_p\| + (1-\alpha') \|x_{q_0}\| = 1$$

Además

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \alpha' \phi_p(x_p) - (1-\alpha') \phi_p(x_{q_0}) \geq \alpha' \left(1 + \frac{1}{2\alpha'} + \gamma\right) - \\ &- \frac{\alpha'}{1-\alpha'} \left(1 - \frac{1}{2\alpha'}\right) (1-\alpha') = \alpha' \frac{1}{\alpha'} + \alpha' \gamma = 1 + \alpha' \gamma = \alpha \end{aligned}$$

Por último, para cada j , $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &= \alpha' \psi_j(x_p) - (1-\alpha') \psi_j(x_{q_0}) \leq \alpha' \sup_{k \in A} \psi_j(x_k) - \\ &- (1-\alpha') \inf_{k \in A} \psi_j(x_k) \leq \alpha' \left(\inf_{k \in A} \psi_j(x_k) + \frac{4}{M+3}\right) - \\ &- (1-\alpha') \inf_{k \in A} \psi_j(x_k) = (2\alpha'-1) \inf_{k \in A} \psi_j(x_k) + \frac{\alpha' 4}{M+3} = \\ &= \frac{1}{M+2} \inf_{k \in A} \psi_j(x_k) + \frac{4}{2(M+2)} = \frac{1}{M+2} \left(\inf_{k \in A} \psi_j(x_k) + 2\right) \leq 1 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &= \alpha' \psi_j(x_p) - (1-\alpha') \psi_j(x_{q_0}) \geq \alpha' \inf_{k \in A} \psi_j(x_k) - \\ &- (1-\alpha') \sup_{k \in A} \psi_j(x_k) \geq \alpha' \left(\sup_{k \in A} \psi_j(x_k) - \frac{4}{M+3} \right) - \\ &- (1-\alpha') \sup_{k \in A} \psi_j(x_k) = \frac{1}{M+2} \sup_{k \in A} \psi_j(x_k) - \frac{4\alpha'}{M+3} = \\ &= \frac{1}{M+2} \left(\sup_{k \in A} \psi_j(x_k) - 2 \right) \geq \frac{-2}{M+2} \geq -1. \end{aligned}$$

Por tanto, para cada j , $1 \leq j \leq n$ $|\psi_j(x)| \leq 1$. #

Estos lemas técnicos junto con el teorema de Josefson-Nissenzweig (I.32) nos permiten probar que $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$ solo coinciden cuando E es de dimensión finita.

TEOREMA III.18. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita.

El espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ es un subespacio vectorial propio de $C_c^p(E, F)$.

Demostración: Bastará verlo para $C_{\omega b}^p(E)$, pues si existe una función $f \in C_c^p(E)$ y $f \notin C_{\omega b}^p(E)$, es claro que si $y \in F$, y $y \neq 0$, la función $f \otimes y \in C_c^p(E, F)$ y $f \otimes y \notin C_{\omega b}^p(E, F)$.

Sabemos por el teorema de Josefson-Neissenzweig (I.32) que existe una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de formas lineales sobre E , que converge a 0 en $\sigma(E', E)$ y tales que $\|\phi_n\| = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)|^{2n} \quad (x \in E)$$

Se comprueba fácilmente que para todo p , $f \in C_c^p(E)$. Veamos que $f \notin C_{\omega b}^p(E)$. Si f perteneciese a $C_{\omega b}^p(E)$, al restringirla a la bola unidad de E , sería debilmente continua en 0 y por tanto dado un $\epsilon > 0$, existiría un entorno débil de cero, que podemos supo-

ner sin pérdida de generalidad que es de la forma $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}^\circ$ con $\psi_1, \dots, \psi_n \in E'$, tal que si $x \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}^\circ$ y $\|x\| \leq 1$ entonces $|f(x)| \leq \epsilon$.

Aplicando el lema (III.17) tenemos que existe un $\alpha > 1$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un $p' \geq m$ y un $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$ y $x \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}^\circ$ tal que $\phi_{p'}(x) \geq \alpha$. Así para ese x se tendría $f(x) - f(o) = f(x) \geq (\phi_{p'}(x))^{2p'} \geq \alpha^{2p'} \geq \alpha^{2m}$ que, eligiendo m suficiente grande, es mayor que ϵ .

Los teoremas (III.14) y (III.18) prueban que conjuntamente en la mayoría de los casos los espacios $C_{\omega bu}^p(E, F)$, $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_c^p(E, F)$ son diferentes lo que justifica plenamente la introducción del segundo de los espacios.

Hasta ahora hemos considerado $C_{\omega b}^p(E, F)$ únicamente desde el punto de vista conjuntista. Vamos a dotarlo ahora de forma natural de una estructura topológica, que veremos en capítulos posteriores, resuelve satisfactoriamente los problemas típicos de aproximación.

DEFINICION III.19. Consideramos sobre $C_{\omega b}^p(E, F)$ la topología $\tau_{\omega c}^p$, inducida por la familia de seminormas

$$f \longrightarrow p_K(f) = \sup \{ \|D^j f(x)y\| : x, y \in K, 0 \leq j \leq p \}$$

donde K recorre la familia de todos los subconjuntos debilmente compactos de E .

A partir de ahora, siempre que hagamos mención del espacio $C_{\omega b}^p(E)$ le consideraremos dotado de la topología $\tau_{\omega c}^p$.

Si el espacio E es reflexivo, es evidente que no solo $C_{\omega b}^p(E, F)$ y $C_{\omega bu}^p(E, F)$ coinciden sino que también sus topologías usuales τ_{wc}^p y τ_b^p respectivamente, coinciden. En general, para un espacio de Banach arbitrario tendremos que la inclusión

$$(C_{\omega bu}^p(E, F), \tau_b^p) \longrightarrow (C_{\omega b}^p(E, F), \tau_{wc}^p)$$

es continua.

IV. LA PROPIEDAD DE APROXIMACION DEBIL ACOTADA Y DEBIL COMPACTA.
DENSIDAD DE SUBALGEBRAS POLINOMIALES.

Este capítulo está dedicado al estudio del problema de la densidad de subálgebras polinomiales de tipo Nachbin en $C_{wb}^p(E, F)$. Para la resolución de este problema, con las técnicas que nosotros utilizamos, es de gran interés que el espacio donde las funciones estén definidas verifique algún tipo de propiedad de aproximación para la topología débil de forma que en cada conjunto débilmente compacto, la red que aproxime a la identidad sobre dicho conjunto no lo transforme en un conjunto demasiado grande, en algunos casos nos interesará que dicho conjunto sea débilmente compacto, en otros nos bastará con que sea acotado. Con este fin, nosotros vamos a definir dos tipos de propiedad de aproximación con estas características. Para contrastar la utilidad y validez de los resultados que vamos a dar más adelante, vamos a ver previamente una serie de proposiciones que nos garantizan que la clase de espacios que verifican cada una de aquellas propiedades es suficientemente amplia.

DEFINICION IV.1. Un espacio de Banach E se dice que tiene la propiedad de aproximación débil acotada (P.A.D.A.) si para cada subconjunto K de E débilmente compacto, existe una red $(U_i)_{i \in I} \subset C(E) \otimes E$ que verifica:

1. $U_i(x) \rightarrow x$ débilmente uniformemente en $x \in K$.
2. $\bigcup_{i \in I} \{U_i(x) : x \in K\}$ es un subconjunto acotado de E . "

También nos será de gran utilidad, principalmente en el capítulo VI,

la siguiente propiedad de aproximación, que es un poco más fuerte que la anterior.

DEFINICION IV.2. Un espacio de Banach E se dice que tiene la propiedad de aproximación débil compacta (P.A.D.C.) si para cada subconjunto K de E débilmente compacto, existe una red $(U_i)_{i \in I} \subset E' \otimes E$ verificando:

1. $U_i(x) \rightarrow x$ débilmente uniformemente en $x \in K$
2. $\bigcup_{i \in I} \{U_i(x) : x \in K\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E .

Es obvio que todo espacio de Banach con la P.A.D.C. posee la P.A.D.A. También es evidente que para espacios de Banach reflexivos ambas propiedades son equivalentes.

EJEMPLO: El espacio ℓ^1 posee la P.A.D.C. y por tanto la P.A.D.A. En efecto, como ℓ^1 posee la propiedad de aproximación, para cada compacto $K \subset E$, existe una sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\ell^1)' \otimes \ell^1$ tal que $\pi_n(x) \xrightarrow{n} x$ uniformemente en $x \in K$, para la topología inducida por la norma y por tanto también para la topología débil $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$. Además, puede comprobarse sin dificultad que el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(K)$ es relativamente compacto en ℓ^1 . Por último basta observar que en ℓ^1 los subconjuntos compactos y los débilmente compactos son los mismos (lema de Schur, véase, por ejemplo, [22] o [13]) para probar que ℓ^1 posee la P.A.D.C.

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente resultado, que nos va a permitir dar un ejemplo de un espacio que no posee la P.A.D.C.

PROPOSICION IV.3. Si E es un espacio de Banach en el que los subconjuntos compactos y los debilmente compactos son los mismos, entonces E tiene la P.A.D.C. si y solamente si E tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Si E tiene la propiedad de aproximación, un razonamiento idéntico al del ejemplo anterior nos probaría que E posee la P.A.D.C.

Recíprocamente, si E posee la P.A.D.C., dado K subconjunto compacto de E , existe una red $(U_i)_{i \in I} \subset E' \otimes E$ tal que $(U_i(x))_{i \in I}$ converge a x debilmente uniformemente en $x \in K$. Además $\bigcup_{i \in I} \{U_i(x) : x \in K\}$ es un subconjunto debilmente relativamente compacto en E . Sea

$$K_1 = \overline{\bigcup_{i \in I} \{U_i(x) : x \in K\}} - K$$

El conjunto K_1 es un subconjunto debilmente compacto de E , y por tanto, de acuerdo con la hipótesis, K_1 es compacto; es decir, en K_1 coinciden la topología débil y la inducida por la norma. Ahora es inmediato que $u_i(x) \rightarrow x$ (para la topología de la norma) uniformemente en $x \in K$. Por tanto E tiene la propiedad de aproximación. #

Recientemente Szankowski [53] ha probado que existen subespacios cerrados de ℓ^1 que no poseen la propiedad de aproximación. Esto nos permite dar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO: Sea E un subespacio cerrado de ℓ^1 que no posea la propiedad de aproximación. Como en cada subespacio cerrado de ℓ^1 , los subconjuntos compactos y los debilmente compactos coinciden, la proposi-

ción (IV.3) nos muestra la existencia de subespacios cerrados de ℓ^1 que no poseen la P.A.D.C.

Este ejemplo nos dice que existen espacios que no poseen la P.A.D.C., pero no sabemos si esos espacios poseen la P.A.D.A. Caso de que alguno de esos espacios tuviese la P.A.D.A. tendríamos un ejemplo de un espacio con la P.A.D.A. que no posee ni la P.A.D.C. ni la propiedad de aproximación. Hasta el momento no conocemos ningún ejemplo de un espacio con la P.A.D.A. que no tenga la P.A.D.C. o la propiedad de aproximación.

El siguiente resultado, nos muestra que las clases de espacios con las propiedades de las definiciones (IV.1) y (IV.2) son suficientemente amplias.

PROPOSICION IV.4. Si E es un espacio de Banach tal que su dual E' tiene la propiedad de aproximación acotada, entonces E tiene la P.A.D.A. Además si E' es separable, E tiene la P.A.D.C.

Demostración:

a) Sea $K \subset E$ un subconjunto debilmente compacto. Por (I.18) existe una constante $c > 0$ tal que para cada familia finita $F \subset E'$ existe una $\pi_F \in E' \otimes E$ tal que $\|\pi_F\| \leq c$ y

$$\|\phi \circ \pi_F - \phi\| < \frac{1}{M} \quad (\phi \in F)$$

donde M es una constante positiva tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in K$.

Dotando al conjunto de las partes finitas de E' de la relación de orden natural de contenido de conjuntos, obtenemos una red $(\pi_F)_F \subset E' \otimes E$ que verifica:

i) Si $x \in K$ y $\phi \in F$,

$$|\langle \pi_F(x) - x, \phi \rangle| = |\langle \pi_F(x), \phi \rangle - \langle x, \phi \rangle| = |\langle x, \phi \circ \pi_F - \phi \rangle| \leq 1$$

es decir, para cada $x \in K$

$$\pi_F(x) - x \in F^\circ$$

Esto prueba que $(\pi_F(x))_F$ converge a x , debilmente uniformemente en $x \in K$.

ii) Para cada $x \in K$, $\|\pi_F(x)\| \leq \|\pi_F\| \cdot \|x\| \leq c.M$ y por tanto

$$\bigcup_F \{\pi_F(x) : x \in K\}$$

está acotado.

Hemos probado pues que E tiene la P.A.D.A.

b) Supongamos ahora que E' es separable. Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión densa en E' y sea T la topología inicial de E para las aplicaciones $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se comprueba facilmente que las topologías $\sigma(E, E')$ y T coinciden al restringirlas a la bola de E de centro 0 y radio $c.M$, que denotaremos por B .

Como en a) construimos una sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E' \otimes E$ tal que $\|\pi_n\| \leq c$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\|\phi_j \circ \pi_n - \phi_j\| < \frac{1}{M} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Un razonamiento análogo al de (a.i) prueba que la sucesión $(\pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a x en K , para la topología T , pero como $\pi_n(x)$ y x pertenecen a B y en B las topologías T y $\sigma(E, E')$ coinciden, resulta que $(\pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x , debilmente

te uniformemente en $x \in K$.

Solo nos resta probar que el conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\pi_n(x) : x \in K\}$ es debilmente relativamente compacto. Por el teorema de Eberlein (I.34) nos basta con ver que A es debilmente relativamente secuencialmente compacto.

Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A ; cada y_n será de la forma $y_n = \pi_{k_n}(x_n)$ con $x_n \in K$. Pueden darse dos casos:

i) Existen un $k \in \mathbb{N}$, y una subsucesión $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{n_j} = \pi_k(x_{n_j})$. Aplicando que K es debilmente compacto, tenemos que existe una subsucesión de $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, que seguiremos denotando igual, que converge debilmente a un $x \in K$.

Es claro en este caso que la correspondiente subsucesión $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $\pi_k(x)$ debilmente.

ii) Existe una subsucesión de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, creciente. Denotamos a dicha subsucesión también por $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como antes, por ser K debilmente compacto, existirá una subsucesión $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debilmente convergente a algún $x \in K$. Tendremos entonces para cada $\phi \in E'$

$$\begin{aligned} |\langle y_{n_j} - x, \phi \rangle| &= |\langle \pi_{k_{n_j}}(x_{n_j}) - x, \phi \rangle| \leq |\langle \pi_{k_{n_j}}(x_{n_j}) - x_{n_j}, \phi \rangle| + \\ &+ |\langle x_{n_j} - x, \phi \rangle| \end{aligned}$$

y como los dos sumandos del último término tienden a cero, resulta que la subsucesión $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a x .

COROLARIO IV.5. Si E es un espacio de Banach tal que su dual E' es separable y tiene la propiedad de aproximación entonces E tiene la propiedad de aproximación débil compacta (P.A.D.C.).

Demostración: Si E' es separable y tiene la p.a. entonces E' tiene la propiedad de aproximación métrica (I.19).

Estos dos últimos resultados prueban que la mayoría de las propiedades de aproximación que aparecen en la literatura en cuestiones relacionadas con problemas de aproximación en espacios de funciones diferenciables, están incluidas en las clases que nosotros introducimos aquí. Así por ejemplo, si E tiene la propiedad (B) que introduce Restrepo (ver [46]) y juega un importante papel en el trabajo de Guerreiro sobre adherencia de ideales [20], o si E tiene la propiedad (B') introducida por Guerreiro [20], entonces E' es separable y tiene la propiedad de aproximación y por tanto (corolario IV.4) E verifica la P.A.D.C. En particular si E tiene una base de Schauder reductora, (ver [33]), como por ejemplo c_0 , ℓ^p con $1 < p < \infty$, $L^p|0,1|$ con $1 < p < \infty$ o en general cualquier espacio de Banach con una base incondicional y que no contenga a ℓ^1 (véase [33]), entonces E posee la P.A.D.C.

Por otra parte en el trabajo de Aron y Prolla [5] la propiedad de aproximación que allí utilizan es que el dual de E , E' , posea la propiedad de aproximación acotada que hemos probado en la proposición (IV.3) es una condición, en principio, más fuerte que el que E posea la P.A.D.A.

COROLARIO IV.6. Si E es un espacio de Banach reflexivo, entonces E posee la P.A.D.A. (o equivalentemente la P.A.D.C.) si y solamente si E tiene la propiedad de aproximación acotada.

Demostración: Si E tiene la propiedad de aproximación acotada y es reflexivo, E' tiene la propiedad de aproximación acotada (I.17) y por la proposición (IV.4) E tiene la P.A.D.A.

Recíprocamente, si E tiene la P.A.D.A., existirá una red $(\pi_i)_{i \in I}$ tal que $\pi_i(x) \rightarrow x$ debilmente uniformemente en la bola unidad cerrada de E , B_E , y además el conjunto $\bigcup_{i \in I} \pi_i(B_E)$ está acotado en E , y por tanto existirá una constante positiva M tal que para cada $i \in I$, $\|\pi_i\| \leq M$.

Por otra parte, sean $K \subset E'$ un conjunto compacto (para la topología inducida por la norma) y $\varepsilon > 0$. Como la topología $\sigma(E, E')$ y la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos coinciden en los subconjuntos acotados de E , resulta que existe un entorno débil de 0 en E , V , tal que

$$V \cap (1+M)B_E = \varepsilon K^\circ \cap (1+M)B_E$$

Ahora bien como E tiene la P.A.D.A. existe un $i \in I$ tal que

$$\pi_i(x) - x \in V \quad (x \in B_E)$$

y por tanto para cada $\phi \in K$ y cada $x \in B_E$

$$|\langle x, \phi \circ \pi_i - \phi \rangle| = |\langle \pi_i(x) - x, \phi \rangle| \leq \varepsilon$$

luego

$$\|\phi \circ \pi_i - \phi\| \leq \varepsilon$$

Hemos probado entonces que E' tiene la propiedad de aproximación acotada y por tanto E también tiene la propiedad de aproximación acotada (I.17.(3)). #

COROLARIO IV.7. Si E es un espacio de Banach reflexivo, E tiene la P.A.D.A. (o equivalentemente la P.A.D.C.) si y solamente si E tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Es conocido que en un espacio de Banach reflexivo, la propiedad de aproximación y la propiedad de aproximación acotada son equivalentes (ver [33] proposición 1.e.15 y comentarios posteriores a su demostración, pp. 39-40). Basta aplicar entonces (IV.6). #

Este último resultado nos permite dar un ejemplo de un espacio de Banach que no posee la propiedad de aproximación débil acotada.

EJEMPLO: Sea E un subespacio cerrado de algún ℓ^p con $2 < p < \infty$ que no posea la propiedad de aproximación (véase [33], p. 90). Como E es un subespacio cerrado de un reflexivo, E es reflexivo y por tanto por (IV.6) no puede poseer la P.A.D.A.

En el capítulo VI obtendremos otros resultados referentes a estas propiedades. También veremos allí un ejemplo de un espacio de Banach con la propiedad de aproximación que no tiene la P.A.D.C.

Por último, observemos que aunque nosotros suponemos siempre que E es un espacio de Banach real, todo lo dicho hasta aquí referente a la P.A.D.A. y la P.A.D.C. sigue siendo igualmente válido si E es un espacio de Banach complejo. "

Vamos a pasar ahora a estudiar el problema de la densidad de sub

álgebras polinomiales que motivó la introducción de los anteriores conceptos. El primer problema que se nos plantea, y de ahí nuestro interés en las propiedades de aproximación, es el de aproximar funciones del espacio $C_{\omega b}^p(E)$ por funciones de la forma $f \circ u$ con $u \in E' \otimes E$, que nos permite reducir el problema al caso finito-dimensional.

LEMA IV.8: Sea $1 \leq j \leq p$. Si $A_j \subset P_{\omega b}({}^j E, F)$ es un conjunto precompacto, entonces para cada $\epsilon > 0$ y para cada $B \subset E$ acotado, existe W , entorno débil de 0 en E , tal que para cada $x, y \in B$, $x-y \in W$ se verifica

$$\|p(x) - p(y)\| \leq \epsilon \quad (p \in A_j)$$

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que para cada $x \in B$, $\|x\| \leq \delta$. Consideremos $H = \{p \in P_{\omega b}({}^j E, F) : \|p\| < \frac{\epsilon}{4\delta^j}\}$. Como A_j es precompacto, existen p_1, \dots, p_s elementos de A_j , tales que

$$A_j \subset \bigcup_{r=1}^s (p_r + H)$$

Para cada p_r ($1 \leq r \leq s$) existe W_r entorno débil de cero en E tal que para cada $x, y \in B$, $x-y \in W_r$ se tiene

$$\|p_r(x) - p_r(y)\| \leq \epsilon/2$$

Sea $W = \bigcap_{r=1}^s W_r$. Entonces como para cada $p \in A_j$, existe un r , $1 \leq r \leq s$ tal que $\|p - p_r\| < \frac{\epsilon}{4\delta^j}$, resulta que si $x, y \in B$, $x-y \in W$ se verifica:

$$\begin{aligned} \|p(x) - p(y)\| &\leq \|p(x) - p_r(x)\| + \|p_r(x) - p_r(y)\| + \|p_r(y) - p(y)\| \leq \frac{\epsilon}{4\delta^j} (\|x\|^j + \|y\|^j) + \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \# \end{aligned}$$

LEMA IV.9. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.A. Si

$f \in C_{\omega b}^p(E, F)$ y $A_f = \{f \circ u : u \in E' \otimes E\}$, entonces f pertenece a la $\tau_{\omega c}^p$ -clausura de A_f en $C_{\omega b}^p(E, F)$.

Demostración: Dado K subconjunto debilmente compacto de E , existe una red $(u_i)_{i \in I}$ contenida en $E' \otimes E$, tal que $(u_i)_{i \in I}$ converge a la identidad de E debilmente uniformemente sobre K y además $B_1 = K \cup \{u_i(K) : i \in I\}$ está acotado en E . Sea B un subconjunto absolutamente convexo y acotado de E que contenga a B_1 y al conjunto $\{z - u_i(x) : z \in B_1, x \in K, i \in I\}$.

La función f es debilmente uniformemente continúa sobre K y debilmente continua sobre B , luego:

(i) Existe U_1 , entorno débil de 0 en E , tal que si $x \in K$, $y \in B$ y $x-y \in U_1$ entonces $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Sea $1 \leq j \leq p$. La función $D^j f : E \longrightarrow P_{\omega b}^j(E, F)$ es debilmente continua sobre los acotados de E , luego el conjunto $\{D^j f(x) : x \in K\}$ es compacto en $P_{\omega b}^j(E, F)$ y por tanto precompacto. Aplicando ahora el lema (IV.8) tenemos:

(ii) Existe U_2 , entorno débil de 0 en E , tal que:

$$\|D^j f(x)y - D^j f(x)z\| \leq \varepsilon/2$$

para cada $x \in K$ y cada $y, z \in B$, $y-z \in U_2$.

Además la aplicación $D^j f : E \longrightarrow P_{\omega b}^j(E, F)$ es debilmente uniformemente continua sobre K , y debilmente continúa sobre B , luego:

(iii) Existe U_3 , entorno débil de 0 en E tal que si $x \in K$, "
y $\in B$ y $x-y \in U_3$ entonces

$$\|D^j f(x)z - D^j f(y)z\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } z \in B.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Existe un $i \in I$ tal que para cada $x \in K$

$$x - u_i(x) \in U.$$

Denotamos $u = u_i$.

Si $x, y \in K$, resulta:

$$\text{a) } \|f(x) - f(u(x))\| < \epsilon \quad \text{por (i)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|D^j f(x)y - D^j(f \circ u)(x)y\| &= \|D^j f(x)y - D^j f(u(x))u(y)\| \leq \\ &\leq \|D^j f(x)y - D^j f(x)(u(y))\| + \|D^j f(x)(u(y)) - \\ &- D^j f(u(x))(u(y))\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{por (ii) y (iii).} \end{aligned}$$

TEOREMA IV.10. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.A. Si $A \subset C_{\omega b}^p(E)$ es un álgebra de Nachbin tal que para cada $f \in A$ y cada $u \in E' \otimes E$, $f \circ u$ pertenece a la $\tau_{\omega c}^p$ -clausura de A , resulta que A es $\tau_{\omega c}^p$ -densa en $C_{\omega b}^p(E)$.

Demostración: Sean $f \in C_{\omega b}^p(E)$, $u \in E' \otimes E$, K subconjunto debilmente compacto de E y $\epsilon > 0$. Sea $E_1 = u(E)$. Si denotamos por g la restricción de f a E_1 y por $A|_{E_1}$ al conjunto de las restricciones a E_1 de los elementos de A , resulta que $g \in C^p(E_1)$ y $A|_{E_1}$ es un álgebra de Nachbin en $C^p(E_1)$. Aplicando el teorema de Nachbin (I.23) resulta que existe $a \in A$, tal que si $b = a|_{E_1}$, se tiene

$$|D^j g(x)y - D^j b(x)y| < \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para cada $x, y \in u(K)$. Es decir, si $x, y \in K$, se verifica

$$\begin{aligned} |D^j(f \circ u)(x)y - D^j(a \circ u)(x)y| &= |D^j f(u(x))u(y) - D^j a(u(x))(uy)| = \\ &= |D^j g(u(x))u(y) - D^j b(u(x))u(y)| < \epsilon \end{aligned}$$

Ahora basta aplicar el lema (IV.9) para concluir la demostración. #

El siguiente lema nos permitirá pasar del caso escalar al vectorial.

LEMA IV.11. Sea E un espacio de Banach que verifica la P.A.D.A. Para cada espacio de Banach F , se verifica que $C_{\omega b}^p(E) \otimes F$ es denso en $C_{\omega b}^p(E, F)$ para la topología $\tau_{\omega c}^p$.

Demostración: Sean $f \in C_{\omega b}^p(E, F)$, $u \in E' \otimes E$, $K \subset E$ subconjunto de bilmente compacto y $\epsilon > 0$. Sea $E_1 = u(E)$. Si denotamos por g la restricción de f a E_1 , resulta que $g \in C_{\omega b}^p(E_1, F)$. Como $C_{\omega b}^p(E_1, F)$ y $C_{\omega b}^p(E_1)$ coinciden con los espacios usuales de Fréchet, por (I.24) resulta que $C_{\omega b}^p(E_1) \otimes F$ es denso en $C_{\omega b}^p(E_1, F)$ con la topología $\tau_{\omega c}^p$ y por tanto existe $b \in C_{\omega b}^p(E_1) \otimes F$ tal que

$$\|D^j g(x)y - D^j b(x)y\| < \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para $x, y \in u(K)$. Es decir:

$$\begin{aligned} \|D^j(f \circ u)(x)y - D^j(b \circ u)(x)y\| &= \|D^j f(u(x))u(y) - \\ &- D^j b(u(x))u(y)\| < \epsilon \quad (0 \leq j \leq p), \text{ si } x, y \in K. \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que $b \circ u$ es un elemento de $C_{\omega b}^p(E) \otimes F$, basta aplicar el lema (IV.9) para concluir la demostración. #

TEOREMA IV.12. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.A. Si $A \subset C_{\omega b}^P(E, F)$ es un álgebra polinomial de Nachbin tal que para cada $a \in A$ y cada $u \in E' \otimes E$, $a \circ u$ pertenece a la $\tau_{\omega c}^P$ -adherencia de A , entonces A es densa en $C_{\omega b}^P(E, F)$ para la topología $\tau_{\omega c}^P$.

Demostración: Sea $M = \{u' \circ a : a \in A, u' \in F'\}$. Claramente M es un subálgebra de $C_{\omega b}^P(E)$. Además como A es un álgebra polinomial de Nachbin, M es un álgebra de Nachbin. Entonces por el teorema (IV.10) M es $\tau_{\omega c}^P$ -densa en $C_{\omega b}^P(E)$ y por tanto la $\tau_{\omega c}^P$ -adherencia de $M \otimes F$ en $C_{\omega b}^P(E, F)$ es $C_{\omega b}^P(E) \otimes F$. Por otra parte por [44] sabemos que $M \otimes F \subset A$ luego A es $\tau_{\omega c}^P$ -densa en $C_{\omega b}^P(E) \otimes F$. Ahora basta aplicar el lema IV.11 para obtener que A es $\tau_{\omega c}^P$ -densa en $C_{\omega b}^P(E, F)$. #

COROLARIO IV.13. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.A. Entonces para cada espacio de Banach F , se verifica que los polinomios de tipo finito son $\tau_{\omega c}^P$ -densos en $C_{\omega b}^P(E, F)$.

Demostración: Vimos en el capítulo III que los polinomios de tipo finito estaban contenidos en $C_{\omega b}^P(E, F)$. Además $P_f(E, F)$ forman un álgebra polinomial de Nachbin y por tanto basta aplicar el Teorema IV.12. #

OBSERVACION: Hicimos notar en el capítulo anterior que si E era reflexivo, los espacios $C_{\omega b}^P(E, F)$ y $C_{\omega bu}^P(E, F)$ coincidían, incluso topológicamente. Es de resaltar también, que en este caso, a la vista del corolario IV.6, los teoremas de densidad que dan Aron y Prolla [5] para $C_{\omega bu}^P(E, F)$ son idénticos a los que aquí damos para $C_{\omega b}^P(E, F)$

(teorema IV.12) aunque los puntos de partida de ambos trabajos son diferentes. Esto creemos resalta una vez más la idoneidad de la P.A.D.A. para el estudio de problemas de aproximación en el álgebra $C_{\omega b}^P(E, F)$.

V. ESTRUCTURA DEL ESPACIO $C_{\omega b}^p(E, F)$ COMO ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO.

En la mayoría de los espacios de funciones diferenciales sobre un espacio de Banach, el estudio de la estructura como espacio localmente convexo suele presentar grandes dificultades. Así, por ejemplo, un problema todavía abierto es el de caracterizar cuando el espacio $C^p(E, F)$ de funciones de clase p en el sentido usual de Fréchet, es tonelado o bornológico. En contraste con esto, es fácil estudiar la estructura localmente convexa de $C_{\omega b}^p(E, F)$. En este capítulo, vamos a estudiar cuando el espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ es tonelado, infratonelado, bornológico o de Fréchet. Los resultados obtenidos contrastan, en algunos casos de forma muy notable, con el caso del espacio $C_{\omega b}(E, F)$ de funciones debilmente continuas sobre los acotados de E . Por último, veremos, también en este capítulo, algunos ejemplos que muestran que, en general, el espacio $C_{\omega b}^p(E, F)$ no es completo, lo que motivará que estudiemos su completado en el siguiente capítulo.

A lo largo de este capítulo nos será de gran utilidad el siguiente lema.

LEMA V.1. Para cada $p \geq 1$, el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ contiene a E' como subespacio complementado.

Demostración: Es claro que E' está contenido en $C_{\omega b}^p(E)$. Además para cada $K \subset E$ débilmente compacto y cada $x' \in E'$

$$\begin{aligned} P_K(x') &= \sup \{ |D^j x'(x)y| : x, y \in K, 0 \leq j \leq p \} = \\ &= \sup \{ |x'(x)| : x \in K \}. \end{aligned}$$

Luego la topología inducida en E' por la topología $\tau_{\omega c}^p$ de $C_{\omega c}^p(F)$ es la topología de Mackey $\tau(E', E)$.

Por otra parte, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \pi : C_{\omega b}^p(E) & \longrightarrow & E' \\ f & \longrightarrow & Df(0) \end{array}$$

es una aplicación lineal, que se comprueba inmediatamente que es una proyección. Además, si consideramos en $C_{\omega b}^p(E)$ la topología $\tau_{\omega c}^p$ y en E' la $\tau(E', E)$, π es continua. Por tanto E' es un subespacio complementado de $C_{\omega b}^p(E)$. #

TEOREMA V.2. Para cada $p \geq 1$, el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ es tonelado si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Demostración: Ya observamos que si E era reflexivo, el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ coincidía, incluso topológicamente, con el espacio $C_{\omega bu}^p(E)$. Como este último espacio es completo ([5] proposición 3.3.) y su topología viene definida por una familia numerable de seminormas, es un espacio de Fréchet (I.14) y por tanto tonelado (I.29).

Recíprocamente, si $C_{\omega b}^p(E)$ es tonelado por (I.30) y el lema V.1 resulta que $(E', \tau(E', E))$ es tonelado y por tanto (ver (I.31)) E es reflexivo. #

TEOREMA V.3. $C_{\omega b}^p(E)$ es infratonelado si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Demostración: Si E es reflexivo, hemos visto en el teorema anterior que $C_{\omega b}^p(E)$ es tonelado y por tanto infratonelado.

Recíprocamente, si $C_{\omega b}^p(E)$ es infratonelado, por el lema V.1 y (I.30) resulta que $(E', \tau(E', E))$ es infratonelado. Además como E es un espacio de Banach, $(E', \tau(E', E))$ es casi-completo ([21] p. 218). Ahora por (I.28) como $(E', \tau(E', E))$ es infratonelado y casi-completo, es tonelado y por tanto E es reflexivo (I.31). #

COROLARIO V.4. $C_{\omega b}^p(E)$ es bornológico si y solamente si el espacio E es reflexivo.

Demostración: Si $C_{\omega b}^p(E)$ es bornológico, es infratonelado luego por V.3. E es reflexivo.

Si E es reflexivo, vimos en (V.2) que $C_{\omega b}^p(E)$ es Fréchet, luego, por (I.29), $C_{\omega b}^p(E)$ es bornológico. #

Ahora para pasar a estudiar el caso vectorial necesitaremos el siguiente lema:

LEMA V.5. Para cada espacio de Banach F , el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $C_{\omega b}^p(E, F)$.

Demostración: Sea $\phi \in F'$ una forma lineal no nula y sea $y \in F$ tal que $\phi(y) = 1$. Si denotamos por G al subespacio vectorial de F engendrado por el vector y , sea $\pi : C_{\omega b}^p(E, F) \rightarrow C_{\omega b}^p(E, G)$ la aplicación definida por $\pi(f) = (\phi \otimes y) \circ f$ ($f \in C_{\omega b}^p(E, F)$). Es claro que π es una proyección. Además

$$\begin{aligned} & \sup \{ \|D^j(\pi f)(x)z\| : x, z \in K, 0 \leq j \leq p \} = \\ & = \sup \{ \|(\phi \otimes y)D^j f(x)z\| : x, z \in K, 0 \leq j \leq p \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup \{ |\phi(D^j f(x)z)| \|y\| : x, z \in K, 0 \leq j \leq p \} \leq \\ &\leq \|\phi\| \cdot \|y\| \sup \{ \|D^j f(x)z\| : x, z \in K, 0 \leq j \leq p \}. \end{aligned}$$

Esto prueba que π es continua. Por tanto $C_{\omega b}^p(E, G)$ es un subespacio complementado de $C_{\omega b}^p(E, F)$. Por último es evidente que $C_{\omega b}^p(E, G)$ es isomorfo a $C_{\omega b}^p(E)$. #

Teniendo en cuenta este lema y los resultados anteriores, podemos dar el siguiente teorema resumen:

TEOREMA V.6. Para cada espacio de Banach F las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) E es reflexivo.
- (b) $C_{\omega b}^p(E, F)$ es Fréchet
- (c) $C_{\omega b}^p(E, F)$ es tonelado
- (d) $C_{\omega b}^p(E, F)$ es infratonelado
- (e) $C_{\omega b}^p(E, F)$ es bornológico.

Demostración:

a) \Rightarrow b) Si E es reflexivo, $C_{\omega b}^p(E, F)$ coincide con $C_{\omega b u}^p(E, F)$ y este espacio es completo (5) proposición 3.3) y su topología viene inducida por una familia numerable de seminormas, por tanto es Fréchet.

b) \Rightarrow c) Ver (I.29)

c) \Rightarrow d) Es inmediato a partir de las definiciones.

d) \Rightarrow a) Si $C_{\omega b}^p(E, F)$ es infratonelado, por el lema V.5 y (I.30) resulta que $C_{\omega b}^p(E)$ es infratonelado, luego, por V.3, E es reflexivo.

b) \implies e) Ver (I.29)

e) \implies a) Si $C_{\omega b}^p(E, F)$ es bornológico, (I.30) y V.5 implican que $C_{\omega b}^p(E)$ es bornológico luego, por (V.4), E es reflexivo. #

Es de resaltar el contraste de este resultado con el correspondiente para el espacio de funciones debilmente continuas sobre los acotados. Así por ejemplo mientras $C_{\omega b}(E, F)$ es siempre tonelado [15], para $p \geq 1$ $C_{\omega b}^p(E, F)$ es tonelado si y solamente si E es reflexivo.

Vamos ahora a dar algunos ejemplos que muestran que en general el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ no es completo. Antes de dar estos ejemplos, observemos que como consecuencia del lema V.5 si el espacio $C_{\omega b}^p(E)$ no es completo entonces para cada espacio de Banach F , $C_{\omega b}^p(E, F)$ no es completo. Por tanto los ejemplos que damos para un $C_{\omega b}^p(E)$ serán válidos también para cualquier $C_{\omega b}^p(E, F)$ con F espacio de Banach.

EJEMPLOS

1. Sea E un espacio de Banach en el que existe una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ tal que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en la topología $\tau(E', E)$ y $\|\phi_n\| = 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_{\omega b}^p(E)$ no es completo.

Demostración: Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea $f_N(x) = \sum_{n=1}^N |\phi_n(x)|^{2n}$ ($x \in E$). Es claro que para cada $N \in \mathbb{N}$, $f_N \in C_{\omega b}^p(E)$.

Dado $K \subset E$, debilmente compacto, sea $\epsilon > 0$; ($\epsilon < 1$); existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $N \geq N_0$, $|\phi_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Así si $N, N' \in \mathbb{N}$ son tales que $N > N' > N_0$ se tiene para cada j , $0 \leq j \leq p$,

$$\begin{aligned}
 |D^j f_N(x)y - D^j f_{N'}(x)y| &= \left| \sum_{n>N'}^N 2n \dots (2n-j+1) [\phi_n(x)]^{2n-j} [\phi_n(y)]^j \right| \leq \\
 &\leq \sum_{n>N'}^N 2n \dots (2n-j+1) \varepsilon^{2n}
 \end{aligned}$$

y este último término tiende a cero cuando N y N' tienden a infinito. Así $\{f_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(C_{\omega b}^p(E), \tau_{\omega c}^p)$. En cambio $\{f_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ no converge, pues si convergiera lo haría puntualmente y el límite puntual de $\{f_N\}$ es la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)|^{2n}$ que vimos en la demostración del teorema III.18 no pertenecía a $C_{\omega b}^p(E)$. #

2. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita en el que los debilmente compactos y los compactos en norma son los mismos, entonces $C_{\omega b}^p(E)$ no es completo.

Si en E los debilmente compactos y los compactos en norma son los mismos, se comprueba facilmente que en E' los $\sigma(E', E)$ -compactos y los $\tau(E', E)$ -compactos son los mismos. El teorema de Josefson-Nissenzweig (I.32) muestra que existe en E' una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores de norma 2 y $\sigma(E', E)$ -convergente a 0. Por lo dicho anteriormente $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también convergerá a 0 en $\tau(E', E)$ y basta tener en cuenta 1.

Un caso particular de este ejemplo se tiene para $E = \ell^1$. También si E es un subespacio con la propiedad de Dunford-Pettis ([14] p. 633) del dual de un espacio F que no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 (ver [47]), E está en las hipótesis del ejemplo. "

3. Si E es un espacio de Grothendieck ([11]) con la propiedad

de Dunderford-Pettis, $C_{\omega b}^P(E)$ no es completo. .

Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ tal que $\|\phi_n\| = 2$ y $\phi_n \rightarrow 0$ en $\sigma(E', E)$ (ver (I.32)). Como E es un espacio de Grothendieck, las sucesiones $\sigma(E', E)$ -convergentes son $\sigma(E', E'')$ -convergentes, luego $\phi_n \rightarrow 0$ en $\sigma(E', E'')$ y como E tiene la propiedad de Dunderford-Pettis, $\phi_n \rightarrow 0$ en $\tau(E', E'')$ (ver [14] p. 636) y por tanto $\phi_n \rightarrow 0$ en $\tau(E', E)$. Ahora basta tener en cuenta 1 para ver que $C_{\omega b}^P(E)$ no es completo.

Ejemplos de espacios en las hipótesis de 3 son todos los espacios P_1 ó inyectivos ([33], pg. 105) como por ejemplo, ℓ^∞ , $L^\infty([0,1])$ ó $C(K)$ con K compacto extremadamente desconexo ([12] p. 178).

VI. SOBRE EL COMPLETADO DEL ESPACIO $C_{\omega b}^P(E, F)$. LA PROPIEDAD DE APROXIMACION.

Hemos visto en el capítulo V que en general el espacio $C_{\omega b}^P(E, F)$ no es un espacio completo. Por tanto tiene interés estudiar como es el completado de dicho espacio. En este capítulo, por un procedimiento totalmente paralelo al seguido por Bombal y Llavona en [7], vamos a obtener una representación del completado de $C_{\omega b}^P(E, F)$. Dicha representación se construye de forma totalmente análoga a la seguida en el caso de $C_{\omega b}^P(E, F)$ pero considerando de partida en vez de diferenciabilidad en sentido de Fréchet, en sentido compacto de Hadamard para la topología débil. El poder obtener una representación del completado como un espacio de funciones diferenciables nos va a permitir, mediante la técnica del ϵ -producto, estudiar la propiedad de aproximación en los espacios $C_{\omega b}^P(E, F)$.

Primeramente introduciremos el concepto de diferenciabilidad que vamos a utilizar en este capítulo.

DEFINICION VI.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $P_{\omega c}^n(E, F)$ como el espacio de todos los polinomios n -homogéneos que son debilmente continuos al restringirlos a los subconjuntos debilmente compactos de E .

Dotamos a este espacio de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E .

Este espacio coincide con el espacio de los polinomios n -homogéneos debilmente secuencialmente continuos $P_{\omega sc}^n(E, F)$ (véase [4]) y contiene a $P_{\omega b}^n(E, F)$. Si E' es separable o si $E = c_0(\Gamma)$ o

$\mathcal{L}^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) para alguna familia de índices Γ , entonces $P_{\omega_{sc}}({}^n E, F) = P_{\omega_b}({}^n E, F)$. ([2] ejemplo 2.1) y por tanto también coinciden con $P_{\omega_c}({}^n E, F)$. En general $P_{\omega_c}({}^n E, F)$ contiene estrictamente a $P_{\omega_b}({}^n E, F)$; por ejemplo el polinomio $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ para $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1$ es de $P_{\omega_c}({}^2 \mathcal{L}^1)$ (nótese que $P_{\omega_c}({}^2 \mathcal{L}^1) = P({}^2 \mathcal{L}^1)$) y no es de $P_{\omega_b}({}^2 \mathcal{L}^1)$ ya que no es compacto.

PROPOSICION VI.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_{\omega_c}({}^n E, F)$ es completo.

Demostración: Sea $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red de Cauchy en $P_{\omega_c}({}^n E, F)$. Para cada $x \in E$, la red $\{P_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ es de Cauchy en F y por tanto existe $P(x) \in F$ tal que $\{P_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ converge a $P(x)$. Más aún, la anterior convergencia es uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E . Se comprueba facilmente que P es un polinomio n -homogéneo de E en F y como los $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ convergen uniformemente sobre los debilmente compactos y cada uno de ellos es debilmente continuo sobre los compactos débiles resulta que $P \in P_{\omega_c}({}^n E, F)$. #

DEFINICION VI.3. Sea X un espacio localmente convexo. Diremos que una función $f : E \rightarrow X$ es diferenciable en sentido compacto débil en $a \in E$ si verifica:

- a) Para cada $K \subset E$ debilmente compacto con $a \in K$, $f|_K : (K, \sigma(E, E')|_K) \rightarrow X$ es continúa en a .
- b) Existe una aplicación lineal $u : E \rightarrow X$ tal que para cada $K \subset E$ disco debilmente compacto se verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a) - u(th)}{t} = 0, \text{ uniformemente en } h \in K$$

Se dice entonces que u es la diferencial en sentido compacto débil de f en a y la denotaremos por $Df(a)$. Diremos que $f : E \rightarrow X$ es diferenciable en sentido compacto débil si f es diferenciable en sentido compacto débil en todos los puntos de E .

La condición b) de la anterior definición la podíamos haber enunciado diciendo que f es diferenciable en el sentido de Hadamard para la topología débil de E , [62].

PROPOSICION VI.4. Si $f : E \rightarrow X$ es diferenciable en sentido compacto débil en $a \in E$ entonces $Df(a)$ es debilmente continua al restringirla sobre los debilmente compactos de E .

Demostración: La demostración es totalmente análoga a la de la proposición (III.3). #

En todo lo que sigue, al hablar de las diferenciales de orden mayor que 1, $D^p f(a)$ designará no a la diferencial de orden p de f en a , sino al polinomio p -homogéneo asociado. Con este convenio y a la vista de la proposición VI.4 se tiene que las derivadas sucesivas tendrán como rango los espacios de polinomios que introdujimos en (VI.1).

DEFINICION VI.5. Sea X un espacio localmente convexo. Diremos que una función $f : E \rightarrow X$ es p -veces diferenciable en sentido compacto débil si f es $(p-1)$ -veces diferenciable en sentido compacto débil y la aplicación $D^{p-1}f : E \longrightarrow P_{\omega c}(P^{p-1}E, X)$ es diferenciable en sentido compacto débil, donde $D^0 f = f$.

Diremos que f es una función de clase p , si f es p veces

diferenciable en sentido compacto débil y la aplicación

$D^p f : E \longrightarrow P_{\omega c}(^p E, X)$ es debilmente continua sobre los subconjuntos debilmente compactos de E .

Denotaremos por $C_{\omega c}^p(E, X)$ al conjunto de todas las aplicaciones de clase p de E en X . Si $X = \mathbb{R}$, simplemente lo denotaremos $C_{\omega c}^p(E)$.

De la propia definición se obtiene que toda función diferenciable en sentido compacto débil es continua. También es inmediato a partir de la definición que toda función diferenciable en sentido compacto de Hadamard, para la topología de la norma ($\|\cdot\|$), verifica VI.3.(b), y además Df coincide con la diferencial en sentido compacto.

Necesitaremos más adelante las siguientes propiedades de la diferencial en sentido compacto débil:

PROPOSICION VI.6. Sean E, F, G tres espacios de Banach.

a) Si $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$ y $u : G \rightarrow E$ es una aplicación lineal debilmente continua sobre los subconjuntos debilmente compactos de G , entonces $f \circ u \in C_{\omega c}^p(G, F)$ y

$$D^j(f \circ u)(x)(y) = D^j f(u(x))(u(y)) \quad (x, y \in G, \quad 1 \leq j \leq p)$$

b) Si $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$ y u es una aplicación lineal de F en G , entonces $u \circ f \in C_{\omega c}^p(E, G)$ y

$$D^j(u \circ f)(x)(y) = u(D^j f(x)(y)) \quad (x, y \in E, \quad 1 \leq j \leq p)$$

c) Si $f \in C_{\omega c}^1(E, F)$ y $g \in C_{\omega c}^1(F, G)$ entonces $g \circ f \in C_{\omega c}^1(E, G)$ y

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \quad (x \in E)$$

d) Teorema del valor medio: Si f es una aplicación diferenciable en sentido compacto débil de E en un espacio localmente convexo X , y $a \in E$ entonces

$$f(a+x) - f(a) \in |\overline{co}| (\{Df(y)(x) : y \in [a, a+x]\})$$

donde $|\overline{co}|$ designa la envoltura absolutamente convexa.

Demostración: La demostración de estos resultados puede verse en [62].

DEFINICION VI.7. Consideramos en $C_{\omega_c}^p(E, F)$ la topología $\tau_{\omega_c}^p$ inducida por la familia de seminormas

$$f \longrightarrow p_K(f) = \sup \{\|D^j f(x)y\| : x, y \in K, 0 \leq j \leq p\}$$

cuando K varía en la familia de los subconjuntos debilmente compactos de E .

PROPOSICION VI.8. El espacio $C_{\omega_c}^p(E, F)$ dotado de la topología $\tau_{\omega_c}^p$ es completo.

Demostración: Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de Cauchy en $C_{\omega_c}^p(E, F)$. Para cada $x \in E$ y cada j ($0 \leq j \leq p$), $(D^j f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ es una red de Cauchy en $P_{\omega_c}(^j E, F)$. Como $P_{\omega_c}(^j E, F)$ es completo (Proposición VI.2) resulta que existen

$$f^j(x) \in P_{\omega_c}(^j E, F) \quad (0 \leq j \leq p)$$

tales que cada red $(D^j f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ converge a $f^j(x)$ en $P_{\omega_c}(^j E, F)$. " Esta convergencia es uniforme sobre cada $\sigma(E, E')$ -compacto, luego ca

da f^j es debilmente continua sobre cada $\sigma(E, E')$ -compacto.

Por otro lado, para cada $x \in E$ y cada j , $0 \leq j \leq p$

$$f^j(x) = D^j f(x),$$

donde $f = f^\circ$. En efecto, para $j = 0$, el resultado es trivial. Supongámoslo cierto para $j = n < p$ y probémoslo para $j = n+1$. Sea $x \in E$ y $K \subset E$ $\sigma(E, E')$ -compacto. Sean L un subconjunto de E , debilmente compacto y $\varepsilon > 0$. Aplicando el teorema del valor medio a la función de variable real

$$v(t) = D^n f_\alpha(x + th) - D^n f_\beta(x + th)$$

resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} [D^n f_\alpha(x + th) - D^n f_\alpha(x) - (D^n f_\beta(x + th) - D^n f_\beta(x))] = \\ & = \frac{1}{t} [v(t) - v(0)] \in \frac{1}{t} |\overline{co}| (\{Dv(s)(t) : s \in [0, t]\}) = \\ & = |\overline{co}| (\{D^{n+1} f_\alpha(x + sh)(h) - D^{n+1} f_\beta(x + sh)(h) : s \in [0, t]\}). \end{aligned}$$

($[0, t]$ designa el conjunto $\{t\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$).

Por ser $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de Cauchy en $C_{\omega c}^p(E, F)$, existe un $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ e $y \in x + |K|$ entonces

$$\|D^{n+1} f_\alpha(y)z - D^{n+1} f_\beta(y)z\| \leq \varepsilon/3 \quad (z \in K \cup L)$$

por lo que si $\alpha, \beta \geq \alpha_0$

$$\|\frac{1}{t} (v(t) - v(0))(z)\| \leq \varepsilon/3 \quad (z \in L)$$

Como consecuencia se tiene

$$(1) \quad \|\frac{1}{t} [D^n f(x+th) - D^n f(x) - D^n f_\alpha(x+th) - D^n f_\alpha(x)](z)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (z \in L)$$

siempre que $\alpha \geq \alpha_0$, $|t| \leq 1$ y $h \in K$.

Por otro lado si \hat{D}^{n+1} denota la diferencial como aplicación (n+1)-lineal, se tiene

$$(2) \quad \left\| \frac{1}{t} [\hat{D}^{n+1} f_\alpha(x)(th) - \hat{f}^{n+1} f(x)(th)](z) \right\| \leq \epsilon/3 \quad (z \in L^n)$$

para $h \in K$ y algún $\alpha \geq \alpha_0$. Para este α , existe un δ , $0 < \delta < 1$, tal que si $|t| < \delta$ y $h \in K$ se cumple

$$(3) \quad \left\| \frac{1}{t} [D^n f_\alpha(x+th) - D^n f_\alpha(x) - D^{n+1} f_\alpha(x)(th)](z) \right\| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (z \in L).$$

Por último, si $\hat{f}^{n+1}(x)$ es la aplicación (n+1)-lineal asociada a $f^{n+1}(x)$, ($x \in E$) si consideramos la aplicación lineal $u : E \rightarrow P_{\omega c}({}^n E, F)$ definida por $u(y)(z) = \hat{f}^{n+1}(x)(y, z, \dots, z)$ se tiene:

$$\left\| \frac{1}{t} [D^n f(x+th) - D^n f(x) - u(th)](z) \right\| \leq \epsilon \quad (z \in L)$$

si $|t| < \delta$ y $h \in K$, aplicando (1), (2) y (3). #

LEMA VI.9. Sea $p \geq 1$. Si $F \subset P_{\omega c}({}^p E, F)$ es un conjunto precompacto, entonces dados $\epsilon > 0$ y $H \subset E$ débilmente compacto, existe W entorno débil de 0 en E tal que para cada $x, y \in H$, $x-y \in W$

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \epsilon \quad (y \in F)$$

Demostración: La demostración es totalmente análoga a la del lema IV.8. #

LEMA VI.10. Sea E un espacio de Banach con la propiedad de aproximación débil compacta. Si $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$ y $A_f = \{f \cdot u : u \in E' \otimes E\}$ entonces f es adherente a A_f en $C_{\omega c}^p(E, F)$.

Demostración: Sean $\epsilon > 0$ y $K \subset E$ un subconjunto débilmente compacto de E . Como el espacio de Banach E posee la P.A.D.C., existe una red $(U_i)_{i \in I} \subset E' \otimes E$ tal que $U_i(x) \rightarrow x$ débilmente uniformemente en $x \in K$ y tal que $L = K \cup \overline{\{U_i(K) : i \in I\}}$ es débilmente compacto en E .

Por ser f uniformemente débilmente continua en L , existe W_1 entorno débil de 0 en E , tal que

$$(1) \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \quad \text{si } x, y \in L \quad \text{y} \quad x-y \in W_1.$$

Por otro lado, si $1 \leq n \leq p$, como $D^n f(K)$ es compacto en $P_{wc}({}^n E, F)$, aplicando el lema anterior, resulta que existe W_2 , entorno débil de 0 en E , tal que

$$(2) \quad \|D^n f(x)y - D^n f(x)z\| \leq \epsilon/2 \quad \text{si } x \in K \quad \text{y} \quad y, z \in |(K-L) \cup L|, \quad y-z \in W_2 \\ (1 \leq n \leq p)$$

Finalmente, por ser $D^n f$ uniformemente débilmente continua sobre L , existe W_3 , entorno débil de 0 en E , tal que

$$(3) \quad \|D^n f(x)z - D^n f(y)z\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } x, y \in L, \quad x-y \in W_3 \quad \text{y} \quad z \in L, \\ (1 \leq n \leq p)$$

Sea $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$; existe un $i_0 \in I$ tal que para cada $i \geq i_0$, si $x \in K$, $x - U_i(x) \in W$.

Sea $u = u_{i_0}$. Entonces:

a) $\|f(x) - f(u(x))\| \leq \epsilon \quad \text{si } x \in K \quad \text{por (1)}$

b) Teniendo en cuenta que si $u \in E' \otimes E$, $u : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow E$ es continua y por tanto débilmente continua sobre los débilmente com-

factos, podemos aplicar el apartado a) de la proposición VI.6, resulta

$$\begin{aligned} \|D^n f(x)y - D^n f(u(x))(u(y))\| &\leq \|D^n f(x)y - D^n f(x)(u(y))\| + \\ &+ \|D^n f(x)(u(y)) - D^n f(u(x))(u(y))\| \leq \epsilon \end{aligned}$$

por (2) y (3) para cada $x, y \in K$ y $1 \leq n \leq p$. #

TEOREMA VI.11. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Si $A \subset C_{\omega c}^p(E)$ es un álgebra de Nachbin tal que para cada $a \in A$ y cada $u \in E' \otimes E$, $a \circ u$ pertenece a la adherencia de A en $C_{\omega c}^p(E)$ entonces A es densa en $C_{\omega c}^p(E)$.

Demostración: La demostración es análoga a la del teorema IV.10. #

TEOREMA VI.12. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Para todo espacio de Banach F , $C_{\omega c}^p(E) \otimes F$ es denso en $C_{\omega c}^p(E, F)$.

Demostración: La demostración es análoga a la del lema IV.11. #

TEOREMA VI.13. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Si $A \subset C_{\omega c}^p(E, F)$ es un álgebra polinomial de Nachbin tal que para cada $a \in A$ y cada $u \in E' \otimes E$, $a \circ u$ pertenece a la adherencia de A en $C_{\omega c}^p(E, F)$, entonces A es densa en $C_{\omega c}^p(E, F)$.

Demostración: La demostración es análoga a la del teorema IV.12. #

COROLARIO VI.14. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Entonces para cada espacio de Banach F , se verifica que los polinomios de tipo finito $P_f(E, F)$ son densos en $C_{\omega c}^p(E, F)$.



TEOREMA VI.15. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Entonces para cada espacio de Banach F , el completado de $C_{\omega b}^P(E, F)$ es $C_{\omega c}^P(E, F)$.

Demostración: Teniendo en cuenta que la inclusión $P_{\omega b}({}^n E, F) \hookrightarrow P_{\omega c}({}^n E, F)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, es inmediato comprobar que el espacio $C_{\omega b}^P(E, F)$ es un subespacio de $C_{\omega c}^P(E, F)$. Además como $C_{\omega b}^P(E, F)$ contiene a los polinomios de tipo finito, basta aplicar VI.14 para obtener que $C_{\omega b}^P(E, F)$ es denso en $C_{\omega c}^P(E, F)$. #

A continuación vamos a estudiar la propiedad de aproximación en $C_{\omega c}^P(E, F)$. Para ello, siguiendo la técnica empleada por Bombal y Llavora en [7], representaremos $C_{\omega c}^P(E, F)$ como el ε -producto de $C_{\omega c}^P(E)$ y F .

PROPOSICION VI.16. Sea L un k -espacio, M un espacio semi-métrico y F una familia en $C(L, M)$. Entonces son condiciones necesarias y suficientes para que F sea relativamente compacto en $C(L, M)$ con la topología compacto-abierta, las siguientes:

- a) Para cada compacto K de L , $F|_K$ es equicontinuo en $C(K, M)$
- b) Para cada $x \in L$, el conjunto

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

es relativamente compacto en M .

Demostración: Para probar este resultado basta realizar unas sencillas modificaciones en la demostración del teorema de Ascoli que aparece en [51] p. 312. #

OBSERVACION: Si E es un espacio de Banach, denotamos por L al espacio E con la topología final para las inclusiones $(K, \sigma(E, E')|_K) \rightarrow E$ cuando K recorre los $\sigma(E, E')$ -compactos, obviamente L es un k -espacio. Además un conjunto K es un compacto en L si y solamente si K es débilmente compacto. Por tanto $C(L, M) = C_{\omega c}(E, M)$.

PROPOSICION VI.17. Si F es una familia en $C_{\omega c}^p(E, F)$, entonces F es relativamente compacto si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

(VI.17.1) Para cada j , $0 \leq j \leq p$ y cada $K \subset E$, $\sigma(E, E')$ -compacto, el conjunto

$$\{D^j f|_K : f \in F\} \subset C_{\omega c}(K, P_{\omega c}^j(E, F))$$

es equicontinuo.

(VI.17.2) Para cada $x \in E$ y cada j , $0 \leq j \leq p$, el conjunto

$$\{D^j f(x) : f \in F\}$$

es relativamente compacto en $P_{\omega c}^j(E, F)$.

Demostración: Consideramos la aplicación

$$\theta : C_{\omega c}^p(E, F) \longrightarrow \prod_{j=0}^p C_{\omega c}(E, P_{\omega c}^j(E, F))$$

definida por $\theta(f) = (D^j f)_{0 \leq j \leq p}$.

De la definición de la topología en $C_{\omega c}^p(E, F)$, se deduce que la aplicación θ es un isomorfismo topológico entre $C_{\omega c}^p(E, F)$ y su imagen por θ . En consecuencia F es relativamente compacto en $C_{\omega c}^p(E, F)$ si y solamente si $\theta(F)$ es relativamente compacto en

$\theta(C_{\omega c}^p(E, F))$. Como $C_{\omega c}^p(E, F)$ es completo (proposición VI.8), $\theta(C_{\omega c}^p(E, F))$ es cerrado en el producto $\prod_{j=0}^p C_{\omega c}(E, P_{\omega c}^j(E, F))$. Por tanto, aplicando el teorema de Tychonov resulta que F es relativamente compacto en $C_{\omega c}^p(E, F)$ si y sólo si cada proyección

$$\pi_i (\theta(C_{\omega c}^p(F)))$$

es relativamente compacta en $C_{\omega c}(E, P_{\omega c}^i(E, F))$. El resultado se deduce de la proposición VI.16 y de la observación posterior. #

LEMA VI.18. Sea $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$. Para cada j , $1 \leq j \leq p$, la aplicación de $E \times E$ en F definida por

$$(x, y) \longrightarrow D^j f(x)(y)$$

es debilmente continua sobre los debilmente compactos de $E \times E$.

Demostración: Sea $K \subset E$ un subconjunto debilmente compacto y sea $\epsilon > 0$. Dados $x_0, y_0 \in K$, como $D^j f(x_0) \in P_{\omega c}^j(E, F)$, existe W_1 en torno débil de 0 en E tal que para cada $z \in K$ con $y_0 - z \in W_1$ se verifica

$$(1) \quad \|D^j f(x_0)z - D^j f(x_0)y_0\| \leq \frac{1}{2} \epsilon$$

Por otro lado $D^j f \in C_{\omega c}(E, P_{\omega c}^j(E, F))$ y por tanto existe W_2 , entorno débil de 0 en E tal que

$$(2) \quad \|D^j f(x)z - D^j f(y)z\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para cada $z \in K$ y cada $x, y \in K$ con $x - y \in W_2$.

Por último si $W = W_1 \cap W_2$ se tiene de (1) y (2) que si $x, y \in K$ con $x - x_0 \in W$, $y - y_0 \in W$, entonces

$$\|D^j f(x)y - D^j f(x_0)y_0\| \leq \|D^j f(x)y - D^j f(x_0)y\| + \|D^j f(x_0)y - D^j f(x_0)y_0\| \leq \epsilon.$$

TEOREMA VI.19. El espacio $C_{\omega c}^p(E, F)$ es isomorfo al ϵ -producto $C_{\omega c}^p(E) \in F$.

Demostración: Sea $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$. Definimos

$$\phi(f) : F' \longrightarrow C_{\omega c}^p(E)$$

por $\phi(f)(y') = y' \circ f \in C_{\omega c}^p(E)$ (proposición VI.6.b) para cada $y' \in F'$.

Evidentemente $\phi(f)$ es lineal. Veamos que $\phi(f) \in L(F'_c, C_{\omega c}^p(E))$. Dados $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$, sabemos por el lema anterior que $L_j = D^j f(K)(K)$ es un compacto en F y por tanto $L = \bigcap_{j=0}^p L_j^o \in L_j^o$ es un entorno de 0 en F'_c . Entonces si $y' \in L$

$$|D^j(\phi(f)y')(x)y| = |D^j(y' \circ f)(x)y| = |y'(D^j f(x)y)| \leq \epsilon$$

para todo $x, y \in K$.

La aplicación $\phi : C_{\omega c}^p(E, F) \longrightarrow L_e(F'_c, C_{\omega c}^p(E))$ es evidentemente lineal. Veamos que es continua. Dados $M > 0$, $K \subset E$ compacto débil y $\epsilon > 0$, tenemos que si $f \in C_{\omega c}^p(E, F)$ es tal que

$$\|D^j f(x)y\| \leq \epsilon M^{-1} \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $x, y \in K$, entonces

$$|D^j(\phi(f)y')(x)y| = |D^j(y' \circ f)(x)y| = |y'(D^j f(x)y)| \leq \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $y' \in F'$ con $\|y'\| \leq M$ y para todo $x, y \in K$.

Así pues, la aplicación ϕ es lineal y continua. Además, si f, g son dos funciones de $C_{\omega_c}^p(E, F)$ tales que $\phi(f) = \phi(g)$, resulta que para cada $y' \in F'$, $y' \circ f = y' \circ g$ de donde se tiene que necesariamente $f = g$. Por tanto ϕ también es inyectiva.

Por otro lado, dados $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$, tenemos que si

$$|D^j(\phi(f)y')(x)y| \leq 1 \quad (0 \leq j \leq p), \quad (x, y \in K)$$

para toda $y' \in F'$ con $\|y'\| \leq \frac{1}{\epsilon}$, entonces

$$\|D^j(f(x))y\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} |y'(D^j f(x)y)| = \sup_{\|y'\| \leq 1} |D^j(\phi(f)y')(x)y| \leq \epsilon$$

para todo $x, y \in K$. Esto prueba que ϕ es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Para concluir la demostración bastará probar que ϕ es suprayectiva.

Sea $u \in L(F'_c, C_{\omega_c}^p(E))$. Para cada j , $0 \leq j \leq p$ y cada $x, y \in E$, la aplicación

$$(*) \quad y' \longrightarrow D^j(uy')(x)y$$

es una forma lineal sobre F' . Además existe un $H \subset F$ compacto tal que para toda $y' \in H^\circ$ se tiene

$$(1) \quad |D^j(uy')(x)y| \leq 1 \quad (0 \leq j \leq p),$$

por la continuidad de la aplicación u . Pero (1) nos dice también que la aplicación de (*) es continua. Como el dual de F'_c es F , existe un único $f^j(x)(y)$ de F tal que

$$(**) \quad \langle f^j(x)(y), y' \rangle = D^j(uy')(x)y \quad (x, y \in E, y' \in F')$$

Si se prueba que $f^\circ = f \in C_{\omega_c}^p(E, F)$, entonces $\phi(f) = u$ y habremos

probado que ϕ es suprayectiva.

En primer lugar observemos que como el segundo miembro de (**)
es un polinomio j -homogéneo, $f^j(x)$ es un polinomio j -homogéneo.

Probemos ahora que para cada $x \in E$, $f^j(x) \in P_{\omega_c}^j(E, F)$. Sean
 $K \subset E$ un subconjunto debilmente compacto y $\epsilon > 0$. Como la bola uní-
dad de F , B_F , es compacta en F_c (recuerdese que las topologías
*-débil y la de la convergencia uniforme sobre los compactos, coinci-
den sobre los acotados de un Banach), el conjunto $u(B_F)$ es un con-
junto compacto en $C_{\omega_c}^p(E)$. Por tanto, aplicando la proposición VI.17,
resulta que para cada $x \in E$ el conjunto

$$\{D^j(uy')(x) : y' \in B_F\}$$

es relativamente compacto en $P_{\omega_c}^j(E)$. Aplicando el lema VI.9 tene-
mos que existe W , entorno débil de 0 en E , tal que para cada j ,
 $1 \leq j \leq p$ se tiene para cada $y' \in B_F$,

$$|D^j(uy')(x)y - D^j(uy')(x)z| \leq \epsilon$$

si $x, y, z \in K$ y $z-y \in W$. Es decir

$$| \langle f^j(x)y - f^j(x)z, y' \rangle | \leq \epsilon \quad \text{para todo } y' \in B_F,$$

si $x, y, z \in K$ y $z-y \in W$.

Por tanto $f^j(x) \in P_{\omega_c}^j(E, F)$ para cada j , $0 \leq j \leq p$.

Veamos ahora que para cada j , $0 \leq j \leq p$, la aplicación

$$f^j : E \longrightarrow P_{\omega_c}^j(E, F)$$

es debilmente continua sobre los debilmente compactos. Sean $\epsilon > 0$ y "
 K y H subconjuntos debilmente compactos de E . Vimos anteriormente
que $u(B_F)$ es un compacto en $C_{\omega_c}^p(E)$. Aplicando la proposición

VI.17 resulta que el conjunto

$$\{D^j(uy')|_K : y' \in B_{F'}\}$$

es un conjunto equicontinuo en $C(K_\sigma, P_{\omega C}^j(E))$, donde K_σ designa al conjunto K con su topología débil; por tanto, existirá W , entorno débil de 0 en E tal que si $x, y \in K$ y $x-y \in W$ entonces

$$|D^j(uy')(x)z - D^j(uy')(y)z| \leq \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $y' \in B_{F'}$ y todo $z \in H$. Es decir

$$\|f^j(x)z - f^j(y)z\| \leq \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $z \in H$.

Finalmente, probemos que para cada $x \in E$ y cada j , $0 \leq j \leq p$,

$$D^j f(x) = f^j(x)$$

Para $j=0$ no hay nada que probar. Supongámoslo cierto para $j = k < p$ y probémoslo para $j = k+1$. Sea $x \in E$ y $K \subset E$ un compacto débil. Bastará probar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{D^k f(x+th) - D^k f(x) - \hat{f}^{k+1}(x)(th)}{t} = 0$$

uniformemente en $h \in K$, donde $\hat{f}^{k+1}(x)$ es la aplicación lineal construida mediante el proceso siguiente: si A es una aplicación $(k+1)$ -lineal y P es su polinomio asociado, denotamos por \hat{P} la aplicación lineal definida por $x \mapsto \hat{P}(x)$, siendo $\hat{P}(x)(z) = A(x, z, \dots, z)$.

Sean $\epsilon > 0$ y $L \subset E$ un compacto débil. Para cada $y' \in F'$ se tiene

$$(2) \quad y' \circ [D^k f(x+th) - D^k f(x) - \hat{f}^{k+1}(x)(th)] \frac{1}{t} = \\ = \frac{1}{t} [D^k(uy')(x+th) - D^k(uy')(x) - \hat{D}^{k+1}(uy')(x)(th)]$$

que es un polinomio k-homogéneo en E. Apliquemos el teorema del valor medio a la función de variable real

$$v(t) = D^k(uy')(x+th) - \hat{D}^{k+1}(uy')(x)(th)$$

Entonces

$$(3) \quad \frac{1}{t} [v(t) - v(0)] \in |\overline{co}| (\{Dv(s)(t) : s \text{ entre } 0 \text{ y } t\}) \frac{1}{t} = \\ = |\overline{co}| (\{D^{k+1}(uy')(x+sh)(h) - D^{k+1}(uy')(x)(h) : s \text{ entre } \\ 0 \text{ y } t\}).$$

Si $\Delta = [-1, 1]$, $\Delta K + K$ es debilmente compacto en E. Por la proposición VI.17. el conjunto

$$\{D^{k+1}(uy')|_{\Delta K + K} : y' \in B_{F'}\}$$

es equicontinuo en $C((\Delta K + K)_{\sigma}, P_{\omega_c}^{k+1}(E))$; luego existe W, entorno débil de 0 en E tal que si $x, y \in \Delta K + K$ y $x - y \in W$, se verifica:

$$|\hat{D}^{k+1}(uy')(x)(z, z') - \hat{D}^{k+1}(uy')(y)(z, z')| \leq \epsilon$$

para todo $y' \in B_{F'}$, y todo $z, z' \in K \cup L$. Así resulta que

$$|\hat{D}^{k+1}(uy')(x)(h)z - \hat{D}^{k+1}(uy')(y)(h)z| \leq \epsilon$$

para todo $h \in K$, $z \in L$ e $y' \in B_{F'}$.

Como K es debilmente compacto, es acotado y por tanto existe un $\delta > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \delta$ entonces $\lambda K \subset W$. De esta forma si $|t| < \delta$ y s está entre 0 y t, $sh \in W$ para todo $h \in K$ y por tanto

$$|\hat{D}^{k+1}(uy')(x)(h)z - \hat{D}^{k+1}(uy')(x+sh)(h)(z)| \leq \varepsilon$$

para cada $h \in K$, $z \in L$, $y' \in B_F$, y s entre 0 y t . Ahora teniendo en cuenta (3) se obtiene que

$$\left| \frac{1}{t} [D^k(uy')(x+th)(z) - D^k(uy')(x)z - \hat{D}^{k+1}(uy')(x)(th)z] \right| \leq \varepsilon$$

para cada $y' \in B_F$, $h \in K$, $z \in L$ y $t \in R$ con $|t| < \delta$. Aplicando (2) resulta que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} [D^k f(x+th)z - D^k f(x)z - \hat{f}^{k+1}(x)(th)z] \right\| = \\ & = \sup_{y' \in B_F} \left| \left\langle \frac{1}{t} [D^k f(x+th)z - D^k f(x)z - \hat{f}^{k+1}(x)(th)z], y' \right\rangle \right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $h \in K$ y todo $z \in L$ siempre que $|t| < \delta$.

Hemos probado así que $D(D^k f)(x) = \hat{f}^{k+1}(x)$ y por tanto que $D^{k+1}f = f^{k+1}$. #

TEOREMA VI.20. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.C. Para cada espacio de Banach F con la propiedad de aproximación, $C_{\omega_c}^p(E, F)$ verifica la propiedad de aproximación.

Demostración: Si G es un espacio de Banach, el teorema VI.12 prueba que $C_{\omega_c}^p(E) \otimes G$ es denso en $C_{\omega_c}^p(E, G)$ y como según hemos visto en VI.20. $C_{\omega_c}^p(E, G)$ es siempre isomorfo a $C_{\omega_c}^p(E) \otimes G$ resulta que $C_{\omega_c}^p(E) \otimes G$ es denso en $C_{\omega_c}^p(E) \otimes G$ para todo espacio de Banach G . Podemos aplicar entonces (I.22) de donde obtenemos que $C_{\omega_c}^p(E)$ verifica la propiedad de aproximación.

También sabemos que si dos espacios localmente convexos completos tienen la propiedad de aproximación, su ε -producto también la tiene.

ne (I.21) luego $C_{\omega c}^p(E) \in F$ verifica la propiedad de aproximación y por tanto, teniendo en cuenta el teorema VI.19, resulta que $C_{\omega c}^p(E, F)$ verifica la propiedad de aproximación. #

COROLARIO VI.21. Si E es un espacio de Banach con la P.A.D.C. entonces para cada espacio de Banach F verificando la propiedad de aproximación, $C_{\omega b}^p(E, F)$ verifica la propiedad de aproximación.

Demostración: Es conocido que un espacio localmente convexo posee la propiedad de aproximación si su completión también la tiene ($|25|$, p. 233). Así el corolario se sigue sin más que observar los teoremas VI.15 y VI.20. #

PROPOSICION VI.22. Si E es un espacio de Banach tal que $C_{\omega c}^p(E)$ ó $C_{\omega b}^p(E)$ tienen la propiedad de aproximación para algún $p > 0$, entonces $(E', \tau(E', E))$ tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Ya probamos en el capítulo anterior que $(E', \tau(E', E))$ era un subespacio complementado de $C_{\omega b}^p(E)$ y análogamente se probaría que también lo es de $C_{\omega c}^p(E)$. Ahora el resultado se sigue del hecho de que la propiedad de aproximación se hereda por subespacios complementados (I.17.(1)). #

Este resultado nos permite establecer una conexión entre la propiedad de aproximación débil compacta con la propiedad de aproximación en el dual con la topología de Mackey.

COROLARIO VI.23. Si E es un espacio de Banach con la P.A.D.C. entonces $(E', \tau(E', E))$ tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Es consecuencia del teorema VI.20 y de la proposición VI.22. #

COROLARIO VI.24. Si E es un espacio de Banach con la P.A.D.C. entonces E' tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Si E es un espacio de Banach, es conocido que $(E', \tau(E', E))$ es completo (véase [25] p. 143). Entonces según (I.22), $(E', \tau(E', E)) = E'_\tau$ tendrá la propiedad de aproximación si y solamente si para cada espacio de Banach F , $E' \otimes F$ es denso en $E'_\tau \otimes F$. Así por el corolario VI.23 resultará que para cada espacio de Banach F , $E' \otimes F$ es denso en $E'_\tau \otimes F$.

Por otra parte, como $L(F'_c, E')$ está contenido en $L(F'_c, E'_\tau)$ resultará que $E' \otimes F \subset L(F'_c, E') \subset L(F'_c, E'_\tau)$ y como $E' \otimes F$ es denso en $L_e(F'_c, E'_\tau) = E'_\tau \otimes F$, resulta que $E' \otimes F$ es denso en $L(F'_c, E') = E' \otimes F$. Aplicando otra vez (I.22) llegamos a que E' tiene la propiedad de aproximación. #

Este resultado nos permite dar un ejemplo de un espacio que tiene la propiedad de aproximación y no tiene la P.A.D.C.

EJEMPLO: Sea E un espacio de Banach con la propiedad de aproximación tal que su dual E' no tiene la propiedad de aproximación [32]. E es un ejemplo de espacio con la propiedad de aproximación que no tiene la P.A.D.C.

COROLARIO VI.25. Si E es un espacio de Banach cuyo dual E' es separable, entonces E tiene la P.A.D.C. si y solamente si E' tiene la propiedad de aproximación.

Demostración: Basta tener en cuenta los corolarios IV.5 y VI.24. #

Este último resultado no se puede mejorar en el sentido de cambiar la condición de que E' posee la propiedad de aproximación por que la posea E , puesto que existen espacios de Banach con la propiedad de aproximación tales que su dual es separable y no posee la proiedad de aproximación [32].

VII. ESTRUCTURA DEL ESPACIO $C_{\omega b}^P(E)$ COMO ALGEBRA LOCALMENTE MULTIPLICATIVAMENTE CONVEXA. ESPECTRO. TEOREMA DE WHITNEY.

En este capítulo vamos a hacer un estudio de los principales tópicos de la estructura de álgebra localmente m -convexa de $C_{\omega b}^P(E)$. Para hacer este estudio, será conveniente considerar, en vez de $C_{\omega b}^P(E)$, su complexificación $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$. Este álgebra veremos que conserva la mayor parte de las propiedades que se tienen en el caso finito dimensional. Una vez visto esto, dedicaremos la última parte del capítulo a un estudio de la estructura de los ideales del álgebra, obteniendo una caracterización del espectro así como una extensión del teorema clásico de Whitney sobre adherencia de ideales a nuestro álgebra.

Aplicando las propiedades usuales de las funciones diferenciables en sentido de Fréchet (ver [62]), se obtiene fácilmente que $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$, dotado de las operaciones habituales, es un álgebra. También es una comprobación inmediata el ver que $(C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C}), \tau_{\omega c}^P)$ tiene estructura de álgebra localmente multiplicativamente convexa.

PROPOSICION VII.1. $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ es un álgebra localmente m -convexa, con unidad y fuertemente semi-simple.

Demostración: Es obvio que la unidad en $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ es la función que vale idénticamente uno. La denotaremos por 1.

Para cada $x \in E$, la evaluación en x , δ_x , definida por $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$, es un funcional multiplicativo, no nulo. Por tanto, la intersección de todos los ideales maximales cerrados es el conjunto $\{0\}$, es decir, $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ es fuertemente semi-simple y

por tanto semisimple. #

PROPOSICION VII.2. Para cada $f \in C_{\omega b}^P(E, E)$, el espectro de f , $\sigma(f)$, es justamente el rango de f .

Demostración: $\sigma(f) = \{\lambda \in E : f - \lambda 1 \text{ no es inversible}\}$. Ahora bien, se comprueba inmediatamente que un elemento de $C_{\omega b}^P(E, E)$ es inversible si y solamente si no se anula en ningún punto de E , luego $f - \lambda 1$ no es inversible si y solamente si existe un $x \in E$ tal que $f(x) = \lambda$. Por tanto $\sigma(f) = f(E)$. #

Un álgebra topológica, se dice que es un Q -álgebra si el conjunto de sus elementos inversibles es abierto. En [6] p.206, se prueba que en toda Q -álgebra el espectro de cada elemento es acotado, lo que a la vista de la proposición VII.2 nos dice que $C_{\omega b}^P(E, E)$ no es un Q -álgebra ya que existen elementos de $C_{\omega b}^P(E, E)$ cuya imagen no es acotada, por ejemplo cada forma lineal no nula.

Vamos a dar a continuación, algunos resultados que nos van a servir de preparación para el teorema que caracteriza el espectro del álgebra $C_{\omega b}^P(E, E)$.

DEFINICION VII.3. Si $K \subset E$ es un subconjunto debilmente compacto de E , definimos $C_{\omega b}^P(K)$ como el espacio de todas las funciones $f : E \rightarrow E$ para las que existe V , abierto en la topología $b\omega$, $V \supset K$ y existe $g \in C_{\omega b}^P(E, E)$ tales que f y g coinciden en V .

En particular $C_{\omega b}^P(E, E)$ está contenido en $C_{\omega b}^P(K)$.

Si dos funciones g y h de $C_{\omega b}^P(E, E)$ coinciden en un abierto V de la topología $b\omega$, como la topología $b\omega$ es menos fina que la

inducida por la norma, resulta que para cada $x \in V$ y cada j , $0 \leq j \leq p$, se tiene que $D^j g(x) = D^j h(x)$. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos definir, sin ambigüedad lo que vamos a entender por derivadas sucesivas de una función de $C_{\omega b}^p(K)$: si $f \in C_{\omega b}^p(K)$, $x \in K$ y $0 \leq j \leq p$, definimos $D^j f(x) = D^j g(x)$ donde $g \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ es tal que existe un abierto de la topología $b\omega$, V , tal que $V \supset K$ y $f|_V \equiv g|_V$.

Dotamos a $C_{\omega b}^p(K)$ de la topología inducida por la única seminorma

$$f \longrightarrow q_K(f) = \sup \{|D^j f(x)y| : x, y \in K, 0 \leq j \leq p\} \quad (f \in C_{\omega b}^p(K))$$

se comprueba sin dificultad que $C_{\omega b}^p(K)$ es un álgebra topológica.

LEMA VII.4. Para cada Φ , forma lineal multiplicativa, no nula y continua, sobre $C_{\omega b}^p(K)$, existe un elemento x de K tal que $\Phi(f) = f(x)$ para cada función f de $C_{\omega b}^p(K)$.

Demostración: Para cada $x \in K$, denotaremos por δ_x la evaluación en x , es decir, $\delta_x(f) = f(x)$ para cada $f \in C_{\omega b}^p(K)$. Vamos a probar primeramente que existe un $x \in K$ tal que $\ker \Phi \subset \ker \delta_x$. Supongamos que esto no ocurre, existirá para cada $x \in K$ una función $f_x \in \ker \Phi$ tal que $\delta_x(f_x) = f_x(x) \neq 0$. Se comprueba inmediatamente, que si una función f pertenece a $C_{\omega b}^p(K)$, también pertenece su conjugada, \bar{f} , luego, teniendo en cuenta que $\Phi(|f_x|^2) = \Phi(f_x \cdot \bar{f}_x) = \Phi(f_x) \cdot \Phi(\bar{f}_x) = 0$, resulta que tomando, si es necesario, $|f_x|^2$ en vez de f_x , podemos suponer para cada $x \in K$ que f_x es una función real no negativa y tal que $f_x(x) > 0$. Además de la propia definición de $C_{\omega b}^p(K)$, resulta que a cada f_x hay asociada una función

$g_x \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ y un abierto V_x de $b\omega$, $V_x \supset K$, tales que $f_x|_{V_x} \equiv g_x|_{V_x}$. El mismo razonamiento de más arriba nos dice que también podemos tomar para cada $x \in K$, g_x que sea real y no negativa.

Como para cada $x \in K$, $f_x(x) \neq 0$, se tiene

$$K = \bigcup_{x \in K} \{y \in K : f_x(y) > 0\}.$$

Además cada función f_x coincide con su correspondiente g_x en K , y g_x es debilmente continua sobre los acotados, luego para cada $x \in K$, el conjunto $\{y \in K : f_x(y) > 0\}$ es un subconjunto abierto de K , para la topología débil restringida. Entonces, teniendo en cuenta que K es un conjunto debilmente compacto, existirán $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K = \bigcup_{j=1}^n \{y \in K : f_{x_j}(y) > 0\}$$

Consideramos las funciones $f = \sum_{j=1}^n f_{x_j}$ y $g = \sum_{j=1}^n g_{x_j}$. Ambas funciones, coincidirán al menos en el conjunto $V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$ que es un abierto de $b\omega$. Además la función g no se anula en K , y por tanto, como K es debilmente compacto y g debilmente continua en K , existirá un $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha = \min \{g(x) : x \in K\}$$

Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase p tal que ϕ es estrictamente positiva y $\phi(t) = t$ para todo $t \geq \alpha/2$. Entonces, la función $h = \phi \circ g$ pertenece a $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$, h no se anula nunca y coincide con g en el conjunto $W = \{x \in E : g(x) > \frac{\alpha}{2}\}$ que es un abierto de $b\omega$ que contiene a K . En resumen, tenemos que $h \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ coincide en $V \cap W$ con f . Además como h no se anula nunca, h es inversi

ble, luego existirá $h^{-1} \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$ tal que $h^{-1}|_{V \cap W} = f^{-1}|_{V \cap W}$.

Por último como Φ es continua, existe $M > 0$ tal que

$$|\Phi(f)| \leq Mq_K(f) \quad (f \in C_{\omega b}^p(K))$$

Así se tiene que

$$|\Phi(f-h)| \leq Mq_K(f-h) = 0$$

luego $\Phi(f) = \Phi(h)$. Por otra parte $1 = \Phi(1) = \Phi(h \cdot h^{-1}) = \Phi(h) \cdot \Phi(h^{-1})$

luego $\Phi(h) \neq 0$, y por tanto $\Phi(f) \neq 0$. Esto contradice el que

$f = \sum_{j=1}^n f_{x_j}$ ya que cada $f_{x_j} \in \ker \Phi$.

Hemos probado que $\ker \Phi \subset \ker \delta_x$ para algún $x \in K$. Como $\ker \Phi$ y $\ker \delta_x$ son ideales maximales necesariamente son iguales y por tanto existe un $\lambda \in \mathbb{E}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\Phi = \lambda \delta_x$. Teniendo en cuenta que $1 = \Phi(1) = \lambda \delta_x(1) = \lambda$, se obtiene que $\Phi = \delta_x$.

Este lema nos va a permitir dar una caracterización del espectro del álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$.

TEOREMA VII.5. Para cada Φ , forma lineal continua, multiplicativa y no nula sobre el álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$ existe un $x \in E$ tal que $\Phi(f) = f(x)$ para cada $f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$.

Demostración: Sea Φ una forma lineal continua, multiplicativa y no nula sobre $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$. Por la continuidad, existe una constante $M > 0$ y un subconjunto K de E debilmente compacto, tales que

$$(1) \quad |\Phi(f)| \leq M p_K(f) \quad (f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})).$$

Definimos una forma lineal Φ_K sobre $C_{\omega b}^p(K)$ por $\Phi_K(f) = \Phi(g)$,

$f \in C_{\omega b}^p(K)$, siendo g una función de $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ que coincide con f en un abierto de ωb que contiene a K . La condición (1) nos dice que no hay ambigüedad en la definición de ϕ_K . Se comprueba fácilmente que ϕ_K es una forma lineal multiplicativa, no nula sobre $C_{\omega b}^p(K)$. Además

$$|\phi_K(f)| \leq Mq_K(f) \quad (f \in C_{\omega b}^p(K))$$

luego ϕ_K también es continua. Entonces, por el lema VII.4, existirá un $x \in K$ tal que $\phi_K(f) = f(x)$ para cada $f \in C_{\omega b}^p(K)$. En particular, para cada $f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$, $\phi_K(f) = f(x)$ y como $\phi_K(f) = \phi(f)$ queda probado lo que queríamos. #

A partir de ahora identificaremos el espectro del álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ con E . Esto nos permite probar fácilmente que el álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ es regular.

PROPOSICION VII.6. El álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ es regular.

Demostración: Si F es un subconjunto cerrado del espectro del álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ para la topología de Gelfand y $x \notin F$, existen $f_1, \dots, f_n \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ tales que si $y \in E$ verifica $|f_j(y) - f_j(x)| \leq 1$ para cada j , $1 \leq j \leq n$, entonces $y \in F$. Consideramos la función

$$g(y) = \sum_{j=1}^n |f_j(y) - f_j(x)|^2 \quad (y \in E).$$

Obviamente la función $g \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ y además $g(x) = 0$ y $g(y) \geq 1$ para cada $y \in F$. Por tanto g separa x y F . #

Si consideramos el ideal $I(x) = \{f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C}) : D^j f(x) = 0, 0 \leq j \leq p\}$, tenemos que $I(x)$ es un ideal cerrado, que está conte-

nido en un único ideal maximal, el núcleo de la evaluación en x . Además si $p \geq 1$, toda forma lineal $x' \in E'$ que se anula en x , pertenece a $\ker \delta_x$ y no pertenece a $I(x)$. Por tanto $I(x)$ no es maximal. Esto nos muestra que el álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ no tiene síntesis espectral, en el sentido de que todo ideal cerrado sea intersección de los ideales maximales que lo contienen.

Vamos a estudiar, por último, como son las adherencias de los ideales en $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$. Para ello necesitaremos algunos lemas.

LEMA VII.7. Si I es un ideal de $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$, E_1 un subespacio vectorial de E de dimensión finita y R la aplicación restricción de $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ en $C^p(E_1, \mathbb{C})$ entonces la adherencia de $R(I)$ en $C^p(E_1, \mathbb{C})$ es un ideal.

Demostración: Si denotamos por a a la imagen de la aplicación R , es claro que a es una subálgebra de $C^p(E_1, \mathbb{C})$.

Además a verifica las hipótesis del teorema de Nachbin (I.23):

- i) La función idénticamente 1, pertenece a a
- ii) Si $x, y \in E_1$, $x \neq y$, existe una forma lineal $x' \in E'$ tal que $x'(x) \neq x'(y)$ y como cada $x' \in E'$ pertenece a $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$, resulta que a separa puntos de E_1 .
- iii) Si $x \in E_1$, y $v \in E_1$ es distinto de cero, existe una forma lineal $x' \in E'$ tal que $x'(v) \neq 0$ luego

$$D(Rx')(x)(v) = Rx'(v) = x'(v) \neq 0$$

- iv) Si $f \in a$ es claro que $\bar{f} \in a$.

Por tanto α es un álgebra de Nachbin y en virtud de (I.23) resulta que α es densa en $C^P(E_1, E)$.

Ahora, por la continuidad de la aplicación producto, se tiene que

$$\begin{aligned} C^P(E_1) \cdot \overline{R(I)} &= \overline{\alpha \cdot R(I)} \subset \overline{\alpha \cdot R(I)} = \overline{R(C_{\omega b}^P(E, E)) \cdot R(I)} = \\ &= \overline{R(C_{\omega b}^P(E, E) \cdot I)} = \overline{R(I)} \end{aligned}$$

Además $\overline{R(I)}$ es un subespacio vectorial de $C^P(E_1)$, luego es un ideal de $C^P(E_1, E)$.

Para cada $x \in E$, $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$, definimos

$$I(x, K, \epsilon) = \{f \in C_{\omega b}^P(E, E) : |D^j f(x)y| \leq \epsilon, \text{ y } y \in K, 0 \leq j \leq p\}$$

Si I es un ideal, denotaremos por \check{I} al conjunto

$$\check{I} = \bigcap \{I + I(x, K, \epsilon) : x \in E, K \text{ debilmente compacto y } \epsilon > 0\}$$

LEMA VII.8. Si I es un ideal de $C_{\omega b}^P(E, E)$, \check{I} es un ideal $\tau_{\omega c}^P$ -cerrado de $C_{\omega b}^P(E, E)$, que contiene a I .

Demostración: Que \check{I} es un ideal se comprueba facilmente. Además también es claro que $I \subset \check{I}$.

Sea $f \in \check{I}$, dados $x_0 \in E$, $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$, existe una función $g \in \check{I}$ tal que

$$|D^j f(x)y - D^j g(x)y| \leq \epsilon/2$$

para todo $x, y \in K \cup \{x_0\}$ y todo j , $0 \leq j \leq p$.

Como $g \in \check{I}$, existe una función $h \in I$ tal que

$$|D^j g(x_0)y - D^j h(x_0)y| \leq \epsilon/2 \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $y \in K$.

Reuniendo las dos relaciones anteriores, tenemos

$$|D^j f(x_0)y - D^j h(x_0)y| \leq \epsilon \quad (0 \leq j \leq p)$$

para todo $y \in K$, y por tanto $f \in I + I(x_0, K, \epsilon)$. Como esto vale para cualquier $x_0 \in E$, $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$, resulta que $f \in \check{I}$ y por tanto $\overline{\check{I}} = \check{I}$.

LEMA VII.9. Sean I un ideal de $C_{\omega b}^p(E, E)$, E_1 un subespacio vectorial de E de dimensión finita y R la aplicación restricción de $C_{\omega b}^p(E, E)$ en $C_{\omega b}^p(E_1, E)$. Si $f \in \check{I}$ entonces $R(f) \in \overline{R(I)}$.

Demostración: Sea B_1 la bola unidad cerrada de E_1 , es claro que B_1 es un subconjunto compacto de E . Si $a \in E_1$, como $f \in \check{I}$, resulta que para cada $\epsilon > 0$, $f \in I(a, B_1, \epsilon) + I$ luego $Rf \in R(I(a, B_1, \epsilon)) + R(I)$.

Veamos quien es $R(I(a, B_1, \epsilon))$. Si $g \in I(a, B_1, \epsilon)$ entonces

$$\sup \{ |D^j g(a)x| : x \in B_1, 0 \leq j \leq p \} \leq \epsilon$$

Como $D^j(Rg)(a)x = D^j g(a)x$, pues a y $x \in E_1$, resulta que

$$\|D^j(Rg)(a)\| = \sup \{ |D^j g(a)x| : x \in B_1, 0 \leq j \leq p \} \leq \epsilon$$

Por tanto $R(I(a, B_1, \epsilon)) \subset I_{E_1}(a, \epsilon) = \{f \in C^p(E_1, E) : \|D^j f(a)\| \leq \epsilon, 0 \leq j \leq p\}$.

Tenemos entonces que $R(f) \in R(I) + I_{E_1}(a, \epsilon)$ para cada $a \in E_1$ y $\epsilon > 0$ luego $R(f) \in \bigcap \{R(I) + I_{E_1}(a, \epsilon) : a \in E_1, \epsilon > 0\}$. Ahora,

podemos aplicar el teorema clásico de Whitney (I.37) para obtener el resultado que queríamos probar. #

TEOREMA VII.10. Sea E un espacio de Banach con la P.A.D.A. Si I es un ideal de $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C})$ verificando que para cada $u \in E' \otimes E$ el conjunto $\{f \circ u : f \in I\}$ está contenido en la adherencia de I en $(C_{\omega b}^p(E), \tau_{\omega c}^p)$ entonces $\bar{I} = \check{I}$.

Demostración: Sea $f \in \check{I}$ y sean $K \subset E$ un subconjunto debilmente compacto y $\varepsilon > 0$. Por el lema IV.9, existe una aplicación $u \in E' \otimes E$ tal que

$$(1) \quad |D^j f(x)y - D^j(f \circ u)(x)y| \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

para $x, y \in K$ y $0 \leq j \leq p$.

Sea $E_1 = u(E)$ y sea $R : C_{\omega b}^p(E, \mathbb{C}) \longrightarrow C^p(E_1, \mathbb{C})$ la aplicación restricción. Por el lema VII.9, existe una función g de I tal que

$$(2) \quad |D^j(Rf)(x)y - D^j(Rg)(x)y| \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

para $x, y \in u(K)$ y $0 \leq j \leq p$.

Por hipótesis, existe una función $h \in I$ tal que

$$(3) \quad |D^j h(x)y - D^j(g \circ u)(x)y| \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

para $x, y \in K$ y $0 \leq j \leq p$.

En resumen, tenemos para $x, y \in K$ y $0 \leq j \leq p$

$$\begin{aligned} |D^j(f-h)(x)y| &= |D^j f(x)y - D^j(f \circ u)(x)y + D^j(f \circ u)(x)y - \\ &- D^j h(x)y| \leq |D^j f(x)y - D^j(f \circ u)(x)y| + |D^j(f \circ u)(x)y - \\ &- D^j(g \circ u)(x)y| + |D^j(g \circ u)(x)y - D^j h(x)y| \leq \frac{\varepsilon}{6} + \end{aligned}$$

$$+ |D^j(f \circ u)(x)y - D^j(g \circ u)(x)y| + \frac{\epsilon}{6}$$

por (1) y (3).

Además $D^j(f \circ u)(x)y = D^j f(u(x))u(y) = D^j(Rf)(u(x))u(y)$ luego podemos escribir, a partir de (2),

$$(4) \quad |D^j(f \circ u)(x)y - D^j(g \circ u)(x)y| = |D^j(Rf)(u(x))u(y) - D^j(Rg)(u(x))u(y)| \leq \frac{\epsilon}{6}$$

para cada $x, y \in K$, $0 \leq j \leq p$.

Uniendo (4) a lo que teníamos anteriormente, nos queda

$$|D^j f(x)y - D^j g(x)y| \leq \epsilon$$

para $x, y \in K$ y $0 \leq j \leq p$.

Esto prueba que $f \in \bar{I}$ y por tanto que $\hat{I} \subset \bar{I}$. Como además $I \subset \hat{I}$ e \hat{I} es cerrado (lema VII.8) resulta que $\hat{I} = \bar{I}$.

La versión clásica del teorema de Whitney puede darse también en forma de igualdad, es decir, una función $f \in \bar{I}$ si y solamente si para cada a existe una función $g \in I$ tal que

$$D^j f(a) = D^j g(a) \quad 0 \leq j \leq p$$

Si denotamos por $I(a, K) = \{f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E}) : D^j f(a)x = 0, x \in K, 0 \leq j \leq p\}$ y por \hat{I} al conjunto $\hat{I} = \bigcap \{I + I(a, K) : a \in E, K \subset E \text{ debilmente compacto}\}$, el teorema de Whitney como igualdad podría enunciarse así: Si I es un ideal, $\bar{I} = \hat{I}$. Sin embargo, vamos a ver que esto no es cierto, en general, en $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$.

EJEMPLO: Sea $E = \ell^p$ con $1 < p < \infty$. Sea p' tal que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n la sucesión cuyos términos va len todos cero salvo el de lugar n que vale 1. El conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ considerado como un subconjunto de $\ell^{p'} = (\ell^p)'$ es a su vez un subconjunto de $C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E})$. Sea I el ideal en $C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E})$ engendrado por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si denotamos por B la bola unidad de ℓ^p , se tiene que para cada $f \in I + I(0, B)$, existe una $g \in I$ tal que $f(0) = g(0)$ y $Df(0)|_B = Dg(0)|_B$. Ahora, si $g \in I$, g será de la forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \langle x, e_i \rangle \quad (x \in E)$$

donde $f_1, \dots, f_n \in C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E})$. Por tanto $g(0) = 0$ y $Dg(0)x = \sum_{i=1}^n f_i(0) \langle x, e_i \rangle$. Luego $I + I(0, B) = \{f \in C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E}) : f(0) = 0 \wedge Df(0) = u \text{ para algún } u \in F\}$ donde F es el subespacio vectorial engendrado por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\ell^{p'}$.

Para cualquier otra bola, B' , se tiene que $I + I(0, B') = I + I(0, B)$ razonando igual que antes.

Sea ahora $a \neq 0$. Si $f \in C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E})$, será $f(a) = \lambda \in \mathbb{E}$ y $Df(a) \in \ell^{p'}$. Como $a \neq 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a, e_n \rangle \neq 0$. Sea $h \in C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E})$ tal que

$$h(a) = \frac{\lambda}{\langle a, e_n \rangle} \quad \text{y} \quad Dh(a) = \frac{1}{\langle a, e_n \rangle} (Df(a) - \frac{\lambda e_n}{\langle a, e_n \rangle}). \quad \text{Entonces}$$

$g = h \cdot e_n \in I$ y $g(a) = \lambda$, $Dg(a) = Dh(a) \cdot e_n(a) + h(a) e_n'(a) = Df(a)$.

Luego $f \in I + I(a, L)$ para cualquier conjunto L . Por tanto

$C_{\omega b}^1(\ell^p, \mathbb{E}) = I + I(a, L)$ si $a \neq 0$, para cada $L \subset E$.

Así $\hat{I} = \bigcap \{I + I(a, K) : a \in E, K \text{ debilmente compacto}\} =$
 $= I + I(0, B).$

Veamos que $I + I(0, B)$ no es $\tau_{\omega c}^1$ -cerrado. Sea $f \in C_{\omega b}^1(\mathcal{L}^p, \mathbb{E})$ tal que $f(0) = 0$. Existe una sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tal que $S_n \rightarrow Df(0)$. Consideremos las funciones

$$f_n(x) = f(x) - \langle x, Df(0) - S_n \rangle \quad (x \in \mathcal{L}^p)$$

Tenemos $f_n(0) = 0$ y $Df_n(0) = S_n \in F$ luego $f_n \in I + I(0, B)$ para cada $n \geq 1$. Además

$$|f_n(x) - f(x)| = |\langle x, Df(0) - S_n \rangle| \leq \|Df(0) - S_n\| \cdot \|x\|$$

que converge uniformemente a 0 en los acotados de \mathcal{L}^p , y

$$|Df_n(x)y - Df(x)y| = |(Df(0) - S_n)(y)| \leq \|Df(0) - S_n\| \|y\|$$

que también tiende a 0 uniformemente en los acotados. Por tanto

$f_n \rightarrow f_0$ en $C_{\omega b}^1(\mathcal{L}^p, \mathbb{E})$.

Hemos probado por tanto que $I + I(0, B)$ es denso en el ideal $I_0 = \{f \in C_{\omega b}^1(\mathcal{L}^p, \mathbb{E}) : f(0) = 0\}$.

Por otra parte sea $v \in \mathcal{L}^p \setminus F$. La función $f(x) = \langle x, v \rangle$ ($x \in \mathcal{L}^p$) es de I_0 , pero como $Df(0) = v$, entonces $f \notin I + I(0, B)$. Esto prueba que $I + I(0, B)$ no es cerrado.

Este ejemplo se debe a C. Guerreiro [20].

Por último vamos a estudiar los ideales cerrados primarios minimales del álgebra $C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E})$.

Para cada $x \in E$, definimos

$$J(x) = \{f \in C_{\omega b}^p(E, \mathbb{E}) : f \text{ se anula en un entorno de Gelfand de } x\}$$

Es claro que para cada x , $J(x) \subset I(x) \subset \ker \delta_x$.

LEMA VII.11. Para cada $x \in E$, $\overline{J(x)}$ es un ideal primario. Además si I es otro ideal cerrado primario, existe un $x \in E$ tal que $I \supset \overline{J(x)}$.

Demostración: Veamos primeramente que $J(x)$ es primario. Sea $y \in E$, $y \neq x$, existe una función $f \in C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ tal que $f(y) = 1$ y f vale cero en un entorno de Gelfand de x (por ejemplo, si $x' \in E'$ es tal que $x'(y) = 1$ y $x'(x) = 0$, sea $f = g \circ x'$ donde g es una función real de clase infinito que vale 0 en el intervalo $(-1/2, 1/2)$ y 1 en 1; entonces $f = g \circ x'$ cumple las condiciones deseadas).

Vamos a probar ahora que $\overline{J(x)}$ es minimal en el sentido del enunciado del teorema. Sea $f \in J(x)$ y sea $F = \{x' \in E' : f(x') = 0\}$. Por hipótesis x es un punto interior (para la topología de Gelfand) de F y así $x \notin F'$, complementario del interior (en la topología de Gelfand) de F . Sea I un ideal cerrado primario contenido en $\ker \delta_x$. Denotamos por I_1 el ideal

$$I_1 = I + \{f \in C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C}) : f \text{ vale } 0 \text{ en } F'\}.$$

Si I_1 está contenido en un ideal maximal cerrado, necesariamente este ha de ser $\ker \delta_x$. Sin embargo, como $x \notin F'$ y $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ es regular (proposición VII.6), existe una $f \in C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ tal que f se anula en F' y vale 1 en x ; esto contradice el que $I_1 \subset \ker \delta_x$ luego I_1 no puede estar contenido en ningún ideal maximal cerrado, y por tanto I_1 es denso (ver [6] p. 231) o $I_1 = C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$.

En ambos casos, existe una red $(f_\alpha + g_\alpha)_{\alpha \in A}$ con $f_\alpha \in I$ y

$g_\alpha|_F \equiv 0$ ($\alpha \in A$), tales que $(f_\alpha + g_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a la función 1. Entonces la red $(f \cdot f_\alpha + f \cdot g_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a la función f y como

$$f \cdot f_\alpha = f \cdot f_\alpha + f \cdot g_\alpha \quad (\alpha \in A)$$

y $f \cdot f_\alpha \in I$, resulta que $f \in \bar{I} = I$.

Hemos probado pues que $J(x) \subset I$ y por tanto $\overline{J(x)} \subset I$. #

PROPOSICION VII.12. Si E es un espacio de Banach con la P.A.D.A. y $x \in E$, el ideal $I(x)$ es el mínimo ideal entre todos los ideales cerrados primarios de $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ contenidos en el ideal maximal $\{f \in C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C}) : f(x) = 0\}$.

Demostración: En vista del lema anterior solo habrá que probar que $\overline{J(x)} = I(x)$, para ello vamos a aplicar el teorema VII.10.

Veamos primeramente que para cada $u \in E' \otimes E$ el conjunto $\{f \circ u : f \in J(o)\}$ está contenido en $\overline{J(o)}$. Ahora bien, si $f \in J(o)$, existe un entorno de Gelfand de o , V , tal que f se anula en V . Sea $W = u^{-1}(V)$ que es un entorno de Gelfand de o . Si $y \in W$, se tiene $u(y) \in V$ luego $f(u(y)) = 0$. Por tanto $f \circ u$ se anula en W y así $f \circ u \in J(o)$.

Podemos aplicar entonces el teorema VII.10 que nos prueba que $\overline{J(o)} = \check{J}(o)$. Ahora es inmediato ver que $\overline{J(x)} = \check{J}(x)$ si $x \in E$.

Solo nos falta probar que $I(x) \subset \check{J}(x)$. Sea $f \in I(x)$ y sean $y \in E$, $K \subset E$ debilmente compacto y $\epsilon > 0$. Vamos a estudiar dos casos:

i) Si $y \neq x$, vamos a probar que $J(x) + I(y, K, \epsilon) = C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$. En efecto, dada $f \in C_{\omega b}^P(E)$, si g es una función de $C_{\omega b}^P(E, \mathbb{C})$ que

vale cero en un entorno de Gelfand de x y uno en un entorno de Gelfand de y se tiene

$$f = f.g + (f - fg)$$

y $f.g \in J(x)$ y $f - fg \in J(y) \subset I(y, K, \epsilon)$.

ii) Si $y = x$, es obvio que $I(x) \subset I(x, K, \epsilon)$.

En resumen queda que $I(x) \subset I(y, K, \epsilon) + J(x)$ para todo $y \in E$, K debilmente compacto y $\epsilon > 0$, y por tanto $I(x) \subset \check{J}(x)$. #

Un estudio totalmente análogo al que hemos realizado en este capítulo se puede hacer para el álgebra $C_c^p(E, \mathbb{C})$ de Aron y Prolla, con la única salvedad de que en todos los sitios donde nosotros utilizamos la P.A.D.A. habría que cambiar esta propiedad por la propiedad de que el dual de E tenga la propiedad de aproximación acotada.

En el caso del espacio $C_{\omega bu}^p(E, \mathbb{C})$ también permanecen siendo válidos la mayor parte de los resultados, con la variación indicada más arriba para $C_c^p(E, \mathbb{C})$. Sin embargo, existen algunos resultados, como por ejemplo el teorema VII.5, cuya demostración no se puede emplear en el caso de $C_{\omega bu}^p(E, \mathbb{C})$.

REFERENCIAS

1. ABUABARA, T.: A version of the Paley-Wiener-Schwartz theorem in finite dimensions. Advances in Holomorphy (Editor: J.A. Barroso), Mathematics Studies 34 (1979), 1-29, North-Holland.
2. ARON, R.M.: Weakly uniformly continuous and weakly sequentially continuous entire functions. Advances in Holomorphy (Editor: J.A. Barroso), Mathematics Studies 34 (1979), 47-66, North-Holland.
3. ARON, R.M.: Approximation of differentiable functions on a Banach spaces. Infinite Dimension Holomorphy, Mathematics Studies 12 (Editor: M.C. Matos) (1977), 1-17, North-Holland.
4. ARON, R.M., HERVES, C., VALDIVIA, M.: Weakly continuous mappings on Banach Spaces (por aparecer).
5. ARON, R.M., PROLLA, J.B.: Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 313 (1980), 195-216.
6. BECKENSTEIN, E., NARICI, L., SUFFEL, C.: Topological algebras. Mathematics Studies, 24 (1977), North-Holland.
7. BOMBAL, F., LLAVONA, J.G.: La propiedad de aproximación en espacios de funciones diferenciables. Rev. Real Acad. Ciencias, Madrid, LXX, 4^o (1976), 727-741.
8. CALDERON, A.P.: Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. Proc. Symp. in Pure Math. 5 (1961), 33-49.
9. COLLINS, H.S.: Completeness and compactness in linear topological spaces. Trans. A.M.S. 79 (1955), 256-280.

10. DAY, M.M.: Normed Linear Spaces. Berlin, 1962.
11. DIESTEL, J.: Geometry of Banach spaces-Selected topics. Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag, 1975.
12. DIESTEL, J., UHL, J.J.: Vector Measures. Mathematical Surveys, 15, (1977), A.M.S.
13. DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T.: Linear Operators I. Interscience (1958).
14. EDWARDS, R.E.: Functional Analysis. Holt-Rinehart-Winston (1965).
15. FERRERA, J.: Espacios de funciones debilmente continuas sobre espacios de Banach. Tesis Doctoral. Universidad Complutense, Madrid. (1980).
16. FIGIEL, T., JOHNSON, W.B.: The approximation property does not imply the bounded approximation property. Proc. Amer. Math. Soc. 41, 197-200 (1973).
17. GLAESER, G.: Algèbres et sous-algèbres de fonctions différentielles. Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 37 (1965), 395-406.
18. GOODMAN, V.: Quasi-differentiable functions on Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 367-370.
19. GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
20. GUERREIRO, C.: Whitney's spectral synthesis theorem in infinite dimensions. Approximation theory and Functional Analysis (Editor: J.B. Prolla), Mathematics Studies, 35, (1978), 159-185, North-Holland.
21. HORVATH, J.: Topological Vector Spaces and Distributions I. Addison-Wesley (1966).

22. JAMESON, G.J.O.: Topology and normed spaces. Chapman and Hall. (1974).
23. JOHNSON, W.B., ROSENTHAL, H.P., ZIPPIN, M.: On bases, finite-dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israel J. Math. 9, 488-506 (1971).
24. JOSEFSON, B.: Weak* sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence. Arkiv for Math., 13, N° 1 (1975), 79-89.
25. KOTHE, G.: Topological Vector Spaces II, Springer-Verlag (1980).
26. KRÉE, P.: Utilization des distributions pour l'étude des équations aux dérivées partielles en dimension infinie. II^{eme} Coll. Anall. Fonct. (1973), Bordeaux, 371-388.
27. KRÉE, P.: Linear differential operators on vector spaces. Functional Analysis, Holomorphy, and Approximation Theory, Lecture Notes in Math. 843, Springer-Verlag (1981).
28. KRÉE, P.: Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles. Seminaire P. Lelong I, Lecture Notes in Math. 410, 142-181, Springer-Verlag.
29. KURZWEIL, J.: On approximation in real Banach spaces. Studia Math. 14 (1954), 214-231.
30. KURZWEIL, J.: On approximation in real Banach spaces by analytic operations. Studia Math. 16 (1957), 124-129.
31. LESMES, J.: On the approximation of continuously differentiable functions in Hilbert spaces. Rev. Colombiana de Matemática, 8 (1974), 217-223.
32. LINDENSTRAUSS, J.: On James' paper "separable conjugate spaces". Israel J. Math. 9, 279-284. (1971).

33. LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L.: Classical Banach Spaces I. Springer-Verlag (1977).
34. LLAVONA, J.G.: Approximation of differentiable functions. Advances in Mathematics Supplementary Studies 4 (1979), 197-221.
35. MALGRANGE, B.: Ideals of differentiable functions. Oxford University Press (1966).
36. MEISE, R.: Spaces of differentiable functions and the approximation property. Approximation theory and functional analysis (Ed.: J.B. Prolla), Math. Studies 35 (1979), 263-307. North-Holland.
37. MICHAEL, E.A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Memoirs of A.M.S. N° 11 (1952).
38. MOULIS, N.: Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach. Ann. Inst. Fourier 21 (1971), 293-345.
39. NACHBIN, L.: Sur les Algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 228 (1949), 1549-1551.
40. NACHBIN, L., DINEEN, S.: Entire functions of exponential type bounded on the real axis and Fourier transform of distributions with bounded support. Israel J. Math. Vol. 13 (1972), 321-326.
41. NEMOROVSKIJ, D.M., SEMENOV, S.M.: On polynomial approximation of functions on a Hilbert space. Sbornik (Math. of the U.S.S.R.) 21, (1978), 255-277.
42. NISSENZWEIG, A.: ω^* sequential convergence. Isr. J. Math., 22 (1975), 266-272.

43. PROLLA, J.B.: Approximation of vector valued functions. Mathematics Studies 25 (1977), North-Holland.
44. PROLLA, J.B., MACHADO, S.: Weighted Grothendieck subspaces. Trans. A.M.S., 186 (1973), 247-258.
45. REID, G.: A theorem of Stone-Weierstrass type. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 62 (1966), 649-666.
46. RESTREPO, G.: An infinite dimensional version of a theorem of Bernstein. Proc. A.M.S. 23 (1969) 193-198.
47. ROSENTHAL, H.P.: Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces. Bull. A.M.S. 84-5 (1978) 803-831.
48. ROUMIEU: Sur quelques extensions de la notion de distribution. Ann. Ecole Norm. Sup. 77 (1960), 41-121.
49. SATO: Theory of hiperfunctions. J.F. Sc. Univ. Tokyo, vol. 8 (1959), 139-194.
50. SCHAEFER, H.H.: Espacios vectoriales topológicos. Teide (1974).
51. SCHWARTZ, J.: Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris.
52. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions a valeurs vectorielles I. Annales de l'Institute Fourier (1957), 1-141.
53. SZANKOWSKI, A.: Subspaces without approximation property. Israel J. Math. 30, (1978), 123-129.
54. TREVES, F.: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press (1967).
55. VALDIVIA, M.: On weak compactnes. Studia Math. 49 (1973), 35-40.
56. VALDIVIA, M.: Some new results on weak compactness. Journal of Funct. Analysis 24, 1-10, (1977).

57. WELLS, J.: Differentiable functions on c_0 . Bull. A.M.S. 75 (1969) 117-118.
58. WHEELER, R.F.: The equicontinuous weak* topology and semi-reflexivity. Studia Math. XLI (1972), 243-256.
59. WHITFIELD, J.H.M.: Differentiable functions with bounded nonempty support on Banach spaces. Bull. A.M.S. 72 (1966), 145-146.
60. WHITNEY, H.: On ideals of differentiable functions. Amer. Journ. Math., 70 (1948), 635-658.
61. WHITNEY, H.: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. A.M.S. 36 (1934), 63-89.
62. YAMAMURO, S.: Differential calculus in topological linear spaces. Lecture Notes in Math. 374, Springer-Verlag. 1974.

