

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
M A D R I D

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS
TOMO XXIII

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE
M A D R I D

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XXIII

CALEIDOSCOPIOS EN LA ALHAMBRA

POR

José María Montesinos Amilibia



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELEFONO 521 25 29
1 9 8 7

**ES PROPIEDAD DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID**

Depósito Legal: M. 25.259 - 1987

REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12, Tel. 442 99 84 - 28039 Madrid

CALEIDOSCOPIOS EN LA ALHAMBRA

En 1976 W. Thurston empleó el concepto de "orbifold", que yo traduzco por caleidoscopio, para expresar de modo eficaz resultados sobre grupos que actúan en variedades. Sus notas de Princeton [Th] son, junto con el trabajo [BS₁] de Bohannon y Siebemann, la fuente más adecuada para leer estas nuevas ideas, así como para hacerse cargo de sus aspectos históricos.

El fin de esta conferencia es introducir este concepto mediante los grupos cristalográficos planos utilizando ejemplos de alicatados procedentes de la Alhambra de Granada.

El plan de la conferencia es:

- I. Grupos cristalográficos planos
- II. Teselaciones
- III. Caleidoscopios
- IV. Epílogo.

I. Grupos cristalográficos planos

1. Denotaremos por E^2 al plano euclídeo y por $E(2)$ a su grupo de isometrías (ver, por ejemplo, [Mi]). Los elementos de $E(2)$ son traslaciones y rotaciones, entre los que preservan la orientación de E^2 , y reflexiones y reflexiones sesgadas, entre los que la invierten. Estas últimas son composición de reflexión y traslación:



La colección de haces de rectas paralelas y orientadas de E^2 es lo que apropiadamente llaman $[BS_1]$ esfera del horizonte, o simplemente horizonte. Está parametrizada por cualquier 1-esfera de E^2 .

La acción de $E(2)$ en el horizonte define un epimorfismo

$$h_\infty: E(2) \longrightarrow O(2)$$

sobre el grupo ortogonal $O(2)$, cuyo núcleo E_*^2 consta de las isometrías que no alteran dirección, es decir, de las traslaciones. Hay pues una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E_*^2 \longrightarrow E(2) \xrightarrow{h_\infty} O(2) \longrightarrow 0$$

Para cada $Q \in E^2$, E_*^2 puede identificarse con el grupo abeliano del espacio vectorial E_Q^2 , definido por Q , al igualar la traslación (Q,P) , que envía Q a P , con el punto P . También existe una sección

$$s_Q: O(2) \longrightarrow E(2)$$

de la sucesión exacta corta anterior, en donde $O(2)$ se identifica con el grupo ortogonal que actúa en el espacio vectorial E_Q^2 . La acción de $O(2)$ en E_*^2 :

$$t \longmapsto s_Q(Y) t s_Q(Y)^{-1}$$

se identifica entonces con la acción ordinaria de $s_Q(O(2))$ en E_Q^2 .

2. Dado un subgrupo G de $E(2)$ llamaremos G_∞ a $h_\infty(G)$ y G_* a $G \cap E_*^2$. Se tiene una sucesión exacta (no escindida en general):

$$0 \longrightarrow G_* \longrightarrow G \xrightarrow{h_\infty} G_\infty \longrightarrow 0$$

Al fijar un $Q \in E^2$, G_* se identifica con un subgrupo G_Q de E_Q^2 .

2.1. Proposición. $s_Q(G_\infty) \triangleleft E(2)$ deja invariante el conjunto G_Q .

Demostración. Sea $P \in G_Q$ y $\gamma \in G_\infty$. Existe $g \in G$ tal que $h_\infty(g) = \gamma$. Entonces existe $t \in E_*^2$ tal que $tg = s_Q(\gamma)$. Luego la traslación

$$(Q, s_Q(\gamma)P) = (s_Q(\gamma)Q, s_Q(\gamma)P) = (tgQ, tgP) = (gQ, gP)$$

es conjugada de la $(Q, P) \in G_*$ mediante $g \in G$, y por tanto pertenece a G_* . Luego $s_Q(\gamma)P \in G_Q$ \square

3. Se dice que G_* expande E^2 si está generado por dos traslaciones que fijan haces paralelos diferentes. Equivalentemente, G_Q está generado por dos vectores de E_Q^2 linealmente independientes. Se dice entonces que G_Q es una rejilla.

G se dice cristalográfico si G_* expande E^2 .

La proposición 2.1 dice que $s_Q(G_\infty)$ deja invariante la rejilla G_Q . Por tanto el orden del subgrupo $G_\infty \cap SO(2)$ no puede ser mayor que el nº de puntos de G_Q que yacen en una circunferencia de centro Q y que pasa por $P \in G_Q$. Se deduce que G_∞ es un subgrupo finito de $O(2)$. Por tanto G_∞ sólo puede ser cíclico C_m de orden $m \geq 1$, o diedral D_{2m} de orden $2m$, $m \geq 1$. Además E^2/G (=espacio de las órbitas) es el cociente del toro E^2/G_* por la acción del grupo finito G_∞ . Por tanto E^2/G es compacto y la órbita de cada punto de E^2 bajo la acción de G es discreta. El recíproco es también cierto (ver, por ejemplo, [HC]).

II. Teselaciones

4. Los grupos cristalográficos planos aparecen como grupos de simetría de ciertos conjuntos que "enlosan" el plano. Para los fines que nos proponemos en este trabajo, definiremos teselación como una epiyección, $f:S \rightarrow C$, en donde S es un subconjunto del plano y C es un conjunto finito (que identificaremos con $\{1,2,\dots,N\}$), tal que el grupo

$G(f) := \{g \in E(2) : g(S) \subset S, \exists \omega(g) \in S_C \text{ tal que } fg = \omega(g)f\}$ es cristalográfico, donde S_C es el grupo simétrico de C . Vemos así que los elementos de $G(f)$ inducen, vía f , una permutación de C , de modo que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & S \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{\omega(g)} & C \end{array}$$

El grupo $G(f)$ se llamará grupo de simetría completo de la teselación f , y la representación

$$\begin{aligned} \omega : G(f) &\longrightarrow S_C \\ g &\longmapsto \omega(g) \end{aligned}$$

se llamará la representación asociada a $G(f)$.

Esta definición de teselación carece de valor práctico. Más adelante veremos un procedimiento concreto de crear teselaciones. En la definición dada, S es la unión disjunta de los "motivos" $S_i := f^{-1}(i)$, y los elementos de $G(f)$ permutan estos motivos.

Además de $G(f)$ hay otros grupos importantes, asociados a f , que vamos a definir. El grupo $G(f)_i$ es el subgrupo de $G(f)$ que

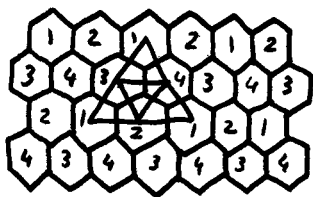
deja invariante S_i , o equivalentemente, $G(f)_i = \omega^{-1} \text{Est}(i)$, donde $\text{Est}(i)$ es la colección de permutaciones de S_C que dejan invariante el índice i . El grupo $G(f)_i$ se llama grupo de simetría de f que estabiliza S_i . La intersección de los grupos $G(f)_i$, $i \in C$, es el núcleo de ω ; se denota $K(f)$, y se llama grupo de simetría de f ; sus elementos estabilizan cada uno de los motivos S_i .

Una teselación $f:S \rightarrow C$ se denominará transitiva si la imagen de ω opera transitivamente en C . Esto significa que $G(f)$ opera transitivamente en los motivos S_i . En este caso, la representación

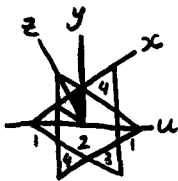
$$\omega: G(f) \rightarrow S_C$$

está determinada, a menos de conjugación en S_C , por cualquiera de los subgrupos $G(f)_i$. Pues, en efecto, ω coincide con la acción natural de $G(f)$ en las clases a derecha de $G(f)_i$. El par $(G(f), G(f)_i)$ se llama grupo de simetría de color de f (para más información ver [S]).

5. Como ejemplo consideremos la teselación $f:S \rightarrow C$, $N=4$, donde S es la reunión de los interiores de las baldosas hexagonales de la Figura (se entiende que hay infinitos



rojo=1
verde=2
azul=3
marrón=4



niveles de baldosas y que los colores alternan como en la Figura). El grupo $G(f)$ está generado por las reflexiones x, y, z ; ω es

$$\omega: G(f) \longrightarrow S_4$$

$$x \longmapsto (23)$$

$$y \longmapsto (34)$$

$$z \longmapsto (14)$$

La teselación es transitiva, y el grupo de simetría de color es el par $(G(f), G(f)_1)$, en donde $G(f)_1$ es el subgrupo de índice 4 que deja invariante el motivo rojo. Este subgrupo está generado por x, y, u y su dominio fundamental (*) es un triángulo rectángulo. El grupo de simetría de f , $K(f)$, tiene índice 24; su dominio fundamental es el triángulo equilátero grande dibujado en la primera figura. Está engendrado por rotaciones de 180° .

6. En la práctica, las teselaciones cubren regiones parciales del plano como ocurre con los alicatados de la Alhambra, por ejemplo. Conviene aquí formalizar esto definiendo el concepto de alicatado. Consideremos una epiyección

$$\ell: A \longrightarrow C = \{1, 2, \dots, N\}$$

en donde A es un subconjunto de un abierto P de E^2 cuya clausura es compacta. Una simetría de ℓ es una traslación t de $E(2)$ tal que

$$(i) \quad \phi \neq tA \cap P \subset A$$

$$(ii) \quad \ell t = \ell \text{ en } A \cap t^{-1}A$$

Diremos que ℓ es un alicatado si el grupo T generado por sus simetrías expande E^2 , y además, si cada $t \in T$ que cumpla

(*) Un dominio fundamental D para la acción de un grupo G es un cerrado que contiene un representante de cada órbita. Además, si dos representantes de una misma órbita están en D , necesariamente yacen en su frontera.

$tA \cap P \neq \emptyset$ es una simetría de ℓ .

6.1. Proposición. Sea $\ell: A \rightarrow C$ un alicatado con grupo T . Sea $S = \bigcup_{t \in T} tA$ y $f: S \rightarrow C$ definido mediante $f(x) = \ell(tx)$ para $x \in S$, en donde $t \in T$ envía x a A . Entonces f es una teselación.

Prueba. f está bien definida, pues si $tx \in A$, $t'x \in A$, para $t, t' \in T$, entonces $\hat{t} := t't^{-1} \in T$ cumple $\hat{t}A \cap P \neq \emptyset$. Como ℓ es un alicatado, \hat{t} es entonces una simetría de ℓ y se tiene

$$\ell(t'x) = \ell \hat{t}(tx) = \ell(tx), \text{ pues } tx \in A \cap \hat{t}^{-1}A$$

por la propiedad (ii) de las simetrías de ℓ .

Sea r una traslación tal que $r(S) \subset S$ y $fr = f$. Sea $a \in A$. Existen entonces $t \in T$, $a' \in A$ tales que $r(a) = t(a')$; es decir $\hat{t} = t^{-1}r$ cumple $\hat{t}(A) \cap P \neq \emptyset$. Además, si para algún $b \in A$, $\hat{t}b \in P$, $\Rightarrow rb \in tP \cap t'A$, para algún $t' \in T$. Luego $t^{-1}rb \in P \cap t^{-1}t'A$ con $t^{-1}t' \in T$. Se deduce que $t^{-1}t'$ es una simetría de ℓ , y como tal se tiene

$$t^{-1}rb \in t^{-1}t'A \cap PCA$$

es decir, $\hat{t}b \in A$. Resumiendo $\hat{t} = t^{-1}r$ cumple (i).

\hat{t} también cumple (ii). Sea $x \in A \cap \hat{t}^{-1}A$. Se tiene

$$\ell \hat{t}x = \ell t^{-1}(rx) = fr(x) \text{ pues } t^{-1}(rx) = \hat{t}x \in A, t^{-1} \in T$$

por tanto

$$\ell \hat{t}x = fr(x) = f(x) = \ell(x) \text{ pues } x \in A.$$

Concluimos que $\hat{t} = t^{-1}r$ es una simetría de ℓ . Por tanto, como $t \in T$, $r \in T$.

Recíprocamente, si $t \in T$ y $x \in S$ se tiene

$$(a) \quad tS = t \bigcup_{t' \in T} t'A = S$$

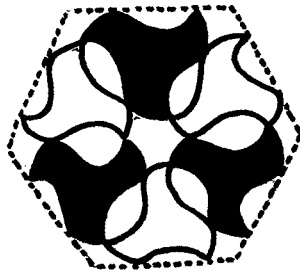
(b) si $x \in S$, $ft(x) = ft(t'a)$, siendo $x = t'a$, $a \in A$, $t' \in T$.

Luego $ft(x) = f(tt'a) = \ell(a) = \ell(t'^{-1}x) = f(x)$.

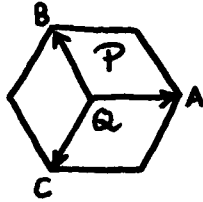
Por tanto el subgrupo de traslaciones de $K(f)$ es T . Así pues, $K(f)$ es cristalográfico. Como $K(f)$ tiene índice finito en $G(f)$, T tiene índice finito en el subgrupo de traslaciones de $G(f)$. Se deduce que $G(f)$ es también cristalográfico y que f es una teselación. \square

Si $\ell: A \rightarrow C$ es un alicatado, nos referiremos a los grupos asociados a su extensión $f: S \rightarrow C$, como "grupos del alicatado". Así el grupo de simetría de ℓ es $K(f)$, que representaremos por $K(\ell)$, etc,...

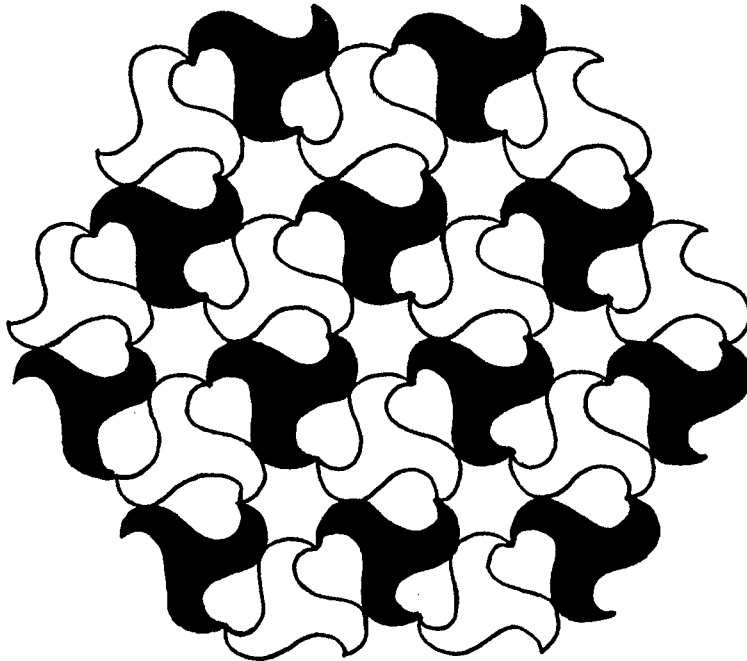
7. El ejemplo siguiente, tomado de la Alhambra de Granada, ilustra la definición de teselación local. Se conserva en el Museo de Arte Hispano-Musulmán de Granada la baldosa 1295 siguiente (ver la fotografía 19).



Si P es el interior de la baldosa y A es la unión de los interiores de las pajaritas blancas y azules, $\ell: A \rightarrow \{1,2\}$ envía los puntos blancos a 1 y los azules a 2. Las simetrías de ℓ son las traslaciones $\underline{+}(Q,A)$, $\underline{+}(Q,B)$, $\underline{+}(Q,C)$:



El grupo T , generado por $\{(Q,A), (Q,B)\}$ expande E^2 . Además si $t \in T$ cumple $tA \cap P \neq \emptyset$, t es una de las seis simetrías. Por tanto ℓ es un alicatado que define la teselación siguiente (en la que se supone que hay infinitos niveles).



Aquí $G(\ell)$ está generado por las reflexiones r, s, t



en las aristas del triángulo equilatero que contiene a una paja rita.

$$\begin{aligned} \omega: G(\ell) &\longrightarrow S_2 \\ r &\longmapsto (12) \\ s &\longmapsto (12) \\ t &\longmapsto (12) \end{aligned}$$

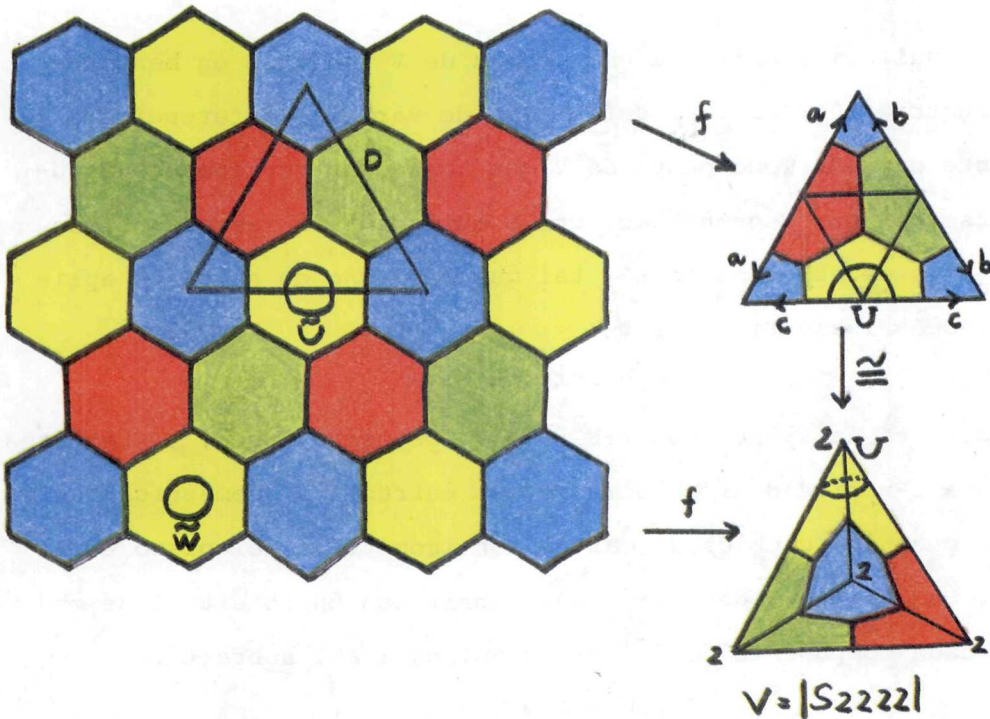
Entonces $G(\ell)_1 = G(\ell)_2 = K(\ell)$ es el subgrupo de índice dos generado por las rotaciones $\{rs, rt\}$. Se tiene la simetría de color $(G(\ell), K(\ell))$.

8. Se podría haber dado una definición más fuerte de alicatado que la introducida en el n°6, definiendo como simetría cualquier $g \in E(2)$ que satisface (i), (ii), e imponiendo que el grupo G generado por las simetrías fuera cristalográfico. Se podía también haber añadido la condición de que P debería contener un dominio fundamental para G . De hacer las cosas así habríamos definido S como $\bigcup_{g \in G} gA$. Sin embargo, nos hemos decidido por la definición dada, por sencillez, y porque en la práctica una teselación se obtiene por traslación de un motivo original, aunque no siempre es así. Esta relativa arbitrariedad en la definición de alicatado (y de la teselación correspondiente) es un ejemplo de cómo el estudio de los grupos cristalográficos que aparecen en la práctica depende del proceso de abstracción empleado por el observador.

III. Caleidoscopios

9. Consideramos ahora el cociente E^2/G , en donde G es un grupo cristalográfico, y queremos saber cuánta estructura de E^2/G es necesario capturar para poder reconstruir la acción de G en E^2 . El siguiente ejemplo (inspirado en un ejercicio de Thurston [Th]) nos dará la clave.

Tomemos el grupo cristalográfico $K(\ell)$ del alicatado $\ell:S \rightarrow \{1,2,3,4\}$ considerado en el n° 5: $K(\ell)$ consta de traslaciones y de rotaciones de 180° en los centros de los hexágonos:



Para hallar $E^2/K(\ell)$ tomemos el triángulo equilátero de la Figura como dominio fundamental D para la acción de $K(\ell)$. Así $E^2/K(\ell)$ es el resultado de identificar ∂D consigo mismo como indica la Figura. Las identificaciones pueden realizarse en E^3 pliegando D a lo largo de tres líneas, obteniéndose así $E^2/K(\ell)$ como la frontera V de un tetraedro regular en E^3 .

El tetraedro V es un espacio métrico y contiene toda la información necesaria para reconstruir la teselación ℓ . En efecto, basta "desarrollar" el tetraedro sobre el plano: colocando una cara de V sobre el plano y haciéndolo rodar. (Puede pensarse también en E^2 "envolviendo" a V).

Ejercicio (Thurston). - Una geodésica de V nunca se corta a sí misma.

Analicemos ahora la estructura de V teniendo en mente su estructura métrica y la definición de variedad diferenciable mediante cartas. Todo punto de V que no sea un vértice puede cubrirse con un "pequeño" abierto U tal que $f^{-1}U$ es una unión disjunta de abiertos de E^2 , tal que cada uno de ellos se aplica isométricamente sobre U :

$$f|_{\tilde{U}: \tilde{U}} \xrightarrow{1:1} U$$

donde f es la aplicación $f: E^2 \rightarrow V$. De hecho, pues, $V \setminus \{\text{vértices}\}$ es una 2-variedad diferenciable con estructura geométrica euclídea, pues los cambios de cartas son isometrías del plano euclídeo. Un vértice v de V se puede cubrir con un abierto U de modo que cada componente de $f^{-1}(U)$ se aplica 2 a 1 sobre U :

$$f|_{\tilde{U}: \tilde{U}} \xrightarrow{2:1} U$$

Esto refleja el hecho de que los vértices de V son singulares (la medida de un círculo de radio r en torno a un vértice es πr , es decir el ángulo en el vértice es de 180°). Por otro lado si $f: \tilde{W} \xrightarrow{2:1} W$ es otra "carta" (carta plegada la llamaremos) que cubre a v , la relación entre \tilde{U} y \tilde{W} viene dada por una isometría.

Al igual que se hace en el caso de variedades ordinarias introducimos primero un concepto más general (el de caleidoscopio, correspondiente al concepto de "variedad diferenciable") y luego precisaremos el concepto de caleidoscopio "con geometría".

10. Un caleidoscopio M de dimensión n (sin frontera) es un espacio metrizable $|M|$ dotado de un atlas de cartas plegadas

$$p_i: \tilde{U}_i \longrightarrow U_i$$

en donde U_i , $i \in I$, es un cubrimiento por abiertos de $|M|$; \tilde{U}_i es un abierto de una n -variedad diferenciable X (sin frontera); p_i es topológicamente equivalente al cociente de \tilde{U}_i por un grupo finito de difeomorfismos que actúa en \tilde{U}_i . Hay una condición de compatibilidad de cartas que se expresa así: si $x_i, x_j \in \tilde{U}_i, \tilde{U}_j$ cumplen $p_i x_i = p_j x_j$, existen entornos abiertos V_i, V_j de x_i, x_j y un difeomorfismo $f: V_i \longrightarrow V_j$ tal que

$$p_j f(x) = p_i(x), \text{ para todo } x \in V_i$$

Dos atlas definen la misma estructura de caleidoscopio en $|M|$ si su unión es un atlas. Nótese que la misma variedad X es un caleidoscopio.

Un isomorfismo $M \cong M'$ entre caleidoscopios es un homeomor-

fismo $|M| \cong |M'|$ que hace a los atlas compatibles.

Un caleidoscopio es compacto si $|M|$ es compacto, y es orientable si los difeomorfismos locales y las acciones de grupos empleados en la definición de su atlas preservan la orientación.

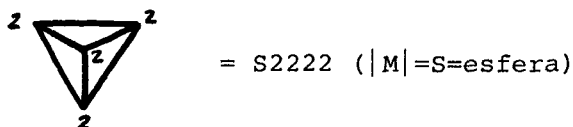
Un caleidoscopio tiene una (G, X) -estructura si los difeomorfismos locales y las acciones de grupos empleados en la definición de su atlas son restricciones de elementos de un grupo G de difeomorfismos de X a abiertos de X . Así, por ejemplo, el cociente de E^2 por la acción de un grupo cristalográfico es un caleidoscopio con $(E(2), E^2)$ -estructura, o caleidoscopio euclídeo.

Sea $\{p_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_i\}$ un atlas para un caleidoscopio M . Una métrica Riemanniana en \tilde{U}_i define otra métrica Riemanniana en \tilde{U}_i , para cada $g \in G_i$. La media de todas (G_i es finito) es una métrica invariante para G_i . Si G_i es el grupo de isotropía de $x \in \tilde{U}_i$, G_i actúa (linealmente) en $T_x \tilde{U}_i$ por la diferencial. La función exponencial define un difeomorfismo ψ entre un entorno W de 0 en $T_x \tilde{U}_i$ y uno V de x en \tilde{U}_i y como G_i pasa geodésicas a geodésicas es fácil ver que $\psi: W \rightarrow V$ puede tomarse equivariante con respecto a G_i . Esto prueba que las cartas $\tilde{U}_i \rightarrow U_i$ pueden tomarse de modo que $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ ó \mathbb{R}_+^n y $G_i \subset O(n)$ (pero los cambios de cartas vienen todavía dados por difeomorfismos locales).

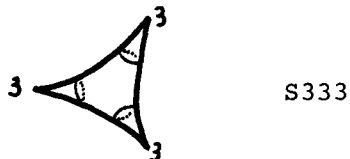
Para $n=2$, G_i es cíclico C_m ó diedral D_{2m} , $m \geq 1$, y $|M|$ es una 2-variedad. Todo punto de $|M|$ puede dotarse de un símbolo que indique su grupo de isotropía. Habitualmente un número i asociado a un punto aislado de $\text{Int}|M|$ indica grupo de isotropía C_i para

tal punto. Los puntos con isotropía D_{2m} están en $\partial|M|$ (aunque no necesariamente componen todo $\partial|M|$); aquellos con $m>1$ se indican por \bar{m} y aquellos con $m=1$ se "platean" (se marcan en la frontera de $\partial|M|$ con trazo grueso). Usaremos como notación, siguiendo a $[BS_1]$, el poner $|M|$ seguido de los símbolos m de los grupos cíclicos y de los símbolos \bar{m} de los diedrales.

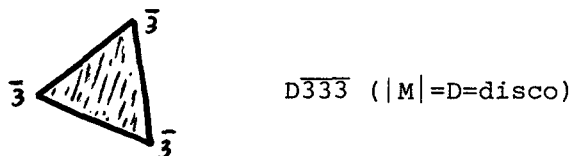
Así el caleidoscopio euclídeo V del n°9 tendría un caleidoscopio (diferenciable) subyacente representado por



El caleidoscopio correspondiente al grupo cristalográfico $K(\ell)$ definido en el n°7 es



y el correspondiente al grupo $G(\ell)$ es



Tomando $\ell': A \xrightarrow{\ell} C \xrightarrow{c} C'=\{1\}$, en donde ℓ es el alicatado definido en el n°7 y c es constante, obtenemos un alicatado cuyo grupo $K(\ell')=G(\ell')$ tiene asociado el caleidoscopio



11. Es pues posible dar una lista de los 2-caleidoscopios (diferenciables) ¿Cuáles de ellos admiten estructura geométrica?

Puede verse que salvo unos pocos, que llamaremos "malos" en el n° 15, todos son geométricos. Concretamente admiten una de las tres (G, X) -estructuras siguientes

- (i) esférica: $X=S^2$, $G=O(3)$
- (ii) euclídea: $X=E^2$, $G=E(2)$
- (iii) hiperbólica: $X=H^2$ (plano hiperbólico), G =grupo de isometrías hiperbólicas,

12. Volvamos a nuestra pregunta inicial sobre qué estructura era necesario capturar en el cociente $E^2/G(f)$ para reconstruir f .

Análogamente al caso de una variedad (que por lo demás es un caso particular de caleidoscopio), un caleidoscopio diferenciable tiene una cubierta universal y un grupo de superposiciones. Si el caleidoscopio M es geométrico puede usualmente verse que la cubierta universal es el espacio X sobre el que está modelado el caleidoscopio y que el grupo de superposiciones es un grupo de isometrías. Esto se hace exactamente igual que con nuestro ejemplo inicial del tetraedro V : haciendo rodar (o "desarrollando") el caleidoscopio sobre X . Si pensamos en nuestro caleidoscopio M como provisto de cierta pintura no completamente seca, al rodar sobre X irá describiendo una teselación sobre el camino rodado, que no es sino una aplicación de un entorno de cierto camino en M sobre un entorno de cierto camino en X . Esto es realmente una aplicación de la cubierta universal de M sobre X , y en muchos casos es un homeomorfismo. De este modo M tesela X , del mismo modo en que, en la figura del n°9, $M=V$ tesela E^2 . En este sentido podemos decir que a partir de M recobra-

mos nuestra teselación en X y por tanto su grupo de simetría.

13. Para realizar lo anterior precisamos primero del concepto de cubierta. Una cubierta del caleidoscopio M es un caleidoscopio N junto con una aplicación continua

$$f: |N| \longrightarrow |M|$$

tal que cada punto $x \in |M|$ tiene una carta plegada

$$p: \tilde{U} \longrightarrow U$$

con grupo G , tal que cada componente V_i de $f^{-1}(U)$ tiene una carta plegada

$$p_i: \tilde{U} \longrightarrow V_i$$

con grupo $G_i \leq G$ y tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & V_i \\ & \nearrow p_i & \downarrow f \\ \tilde{U} & \xrightarrow{p} & U \end{array}$$

En el ejemplo de la Figura del n°9, la función $f: |E^2| \longrightarrow |V|$ define una cubierta entre el caleidoscopio E^2 y el V . Los grupos G_i , en este caso, son todos el grupo trivial. En este ejemplo $f: |E^2| \longrightarrow |V|$ es una cubierta ramificada. En general si

$$f: |N| \longrightarrow |M|$$

es una cubierta entre los 2-caleidoscopios M y N y M es orientable, f es una cubierta de $|M|$ ramificada^(*) sobre el conjunto B de puntos de M con isotropía no trivial. Además si la isotropía de $b \in B$ es C_m , los puntos de $|N|$ que yacen sobre b tienen isotropía $C_n \leq C_m$ y por tanto tienen índice de ramificación $n|m$.

El ejemplo anterior es caso particular del siguiente. Sean

(*) Para lo esencial sobre cubiertas ramificadas y ejemplos ver [M]

$G' \triangleleft G$ dos grupos cristalográficos que actúan en E^2 . Entonces la aplicación natural $E^2/G' \rightarrow E^2/G$ es una cubierta entre caleidoscopios. El índice de G' en G es el número de hojas de la cubierta. Así, en el ejemplo del número 9, $K(f) \triangleleft G(f) \triangleleft G(f)$ da lugar a las cubiertas

$$S2222 \xrightarrow{6:1} D\overline{632} \xrightarrow{4:1} D\overline{632}$$

En general los grupos de color $(G(f), G(f)_1)$ corresponden a cubiertas entre caleidoscopios.

He aquí otro ejemplo. Tomemos un caleidoscopio de dimensión 2 no orientable y sin frontera M . Existe entonces un caleidoscopio N orientable y una cubierta doble $f:|N| \rightarrow |M|$. En efecto $|N|$ es el resultado de doblar $|M|$ a lo largo de $\partial|M|$, y $f:|N| \rightarrow |M|$ es el cociente mediante la involución natural. Es sencillo construir cartas para M y comprobar que f es una cubierta doble. Basta tomar $G_1 = C_n$ si $G = D_{2n}$. Aquí, $f:|N| \rightarrow |M|$ es un despliegue ("spread") en sentido de Fox [F].

14. Una cubierta \tilde{M} de un caleidoscopio M se dice universal si cubre a toda otra cubierta de M . Si M es un 2-caleidoscopio no orientable, tomando el doble de M podemos reducir la construcción de \tilde{M} al caso en que M sea orientable. Supongámoslo pues así y llamemos B al conjunto de puntos singulares de M . Sabemos que $|\tilde{M}|$ es una cubierta de $|M|$ ramificada sobre B , y tal que si la isotropía de $b \in B$ es C_p entonces los puntos de $|\tilde{M}|$ que yacen sobre b tienen índice de ramificación divisor de p . Si $*$ es un punto base de $|M|$ toda cubierta f de ese tipo corresponde a una representación

$$\omega: \pi_1(|M| \setminus B, *) \longrightarrow S_N$$

donde S_N es el grupo simétrico de la fibra $N=f^{-1}(*)$, tal que el meridiano $\mu(b)$ de b se aplica en un producto de ciclos de longitudes divisores de p . La cubierta f corresponde al subgrupo

$$\omega^{-1}(\text{Stab}(1))$$

donde 1 es un índice de N y $\text{Stab}(1)$ es el subgrupo de S_N que lo estabiliza. Todo tal subgrupo $\omega^{-1}(\text{Stab}(1))$ de $\pi_1(|M| \setminus B, *)$ contiene al subgrupo H normalmente generado por la p -potencia del meridiano $\mu(b)$ para cada $b \in B$; pues

$$\omega(\mu(b)^p) = \text{identidad}.$$

Así que \tilde{M} es el caleidoscopio definido por la cubierta ramificada

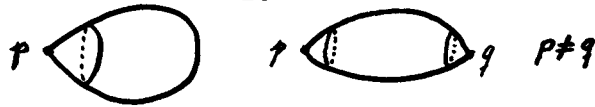
$$\tilde{f}: |\tilde{M}| \longrightarrow |M|$$

asociada a H . Así pues \tilde{M} siempre existe.

15. Un caleidoscopio M determina pues una cubierta ramificada regular $|\tilde{M}|$ con grupo de superposiciones $K = \pi_1(|M| \setminus B, *) / H$ que actúa en $|\tilde{M}|$ de modo que $|M| = |\tilde{M}| / K$. Además la cubierta ramificada $f: |\tilde{M}| \longrightarrow |M|$ es la cubierta universal del caleidoscopio M .

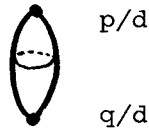
Desafortunadamente aquí \tilde{M} no tiene porqué ser un caleidoscopio sin puntos singulares. Thurston llama a un caleidoscopio bueno si \tilde{M} es una variedad. En este caso M determina una variedad \tilde{M} y un grupo de difeomorfismos K actuando en \tilde{M} tal que el caleidoscopio M está definido por K .

He aquí dos ejemplos de 2-caleidoscopios malos:



$$\pi_1(|M| \setminus B) = 1 \quad \pi_1(|M| \setminus B) \cong \mathbb{Z}$$

En el primer ejemplo $\tilde{M} = M$. En el segundo, si llamamos μ al meridiano común a $\{b_1, b_2\} = B$, el subgrupo que define $|\tilde{M}|$ está generado por $\{\mu^p, \mu^q\}$. Si $d = \text{m.c.d.}(p, q)$, el tal subgrupo es $\langle \mu^d \rangle$. Así que el caleidoscopio \tilde{M} es



Thurston observa que éstos son los únicos 2-caleidoscopios orientables malos. Los correspondientes caleidoscopios no orientables están cubiertos doblemente por algunos de éstos y necesariamente son el cociente de los anteriores por una involución que invierte orientación. Son pues:



A continuación probaremos que un caleidoscopio euclídeo es bueno. La siguiente demostración se debe a R.H. Fox y R.B. Kershner: Duke Math. J. 2 (1936) 147-150^(*). Se dobla M si es necesario para conseguir M orientable. Si B es la colección de puntos singulares, tomamos un punto base $*$ en $|M| \setminus B$ y un vector base v tangente a M , en $*$. Si desplazamos v paralelamente a sí mismo a lo largo de una curva γ cerrada de $|M| \setminus B$, basada en $*$, v retorna a $*$ adoptando únicamente un n° finito de posiciones $C = \{v = v_1, v_2, \dots, v_h\}$. La razón es que γ es homótopa en $|M| \setminus B$ a un producto de meridianos en torno a los puntos de B , y cada meridiano cambia la dirección de v en un ángulo de la forma $\frac{2\pi}{m}$. De este

(*) Este artículo pertenece a la "protohistoria" de la teoría de caleidoscopios.

modo queda definida una representación transitiva

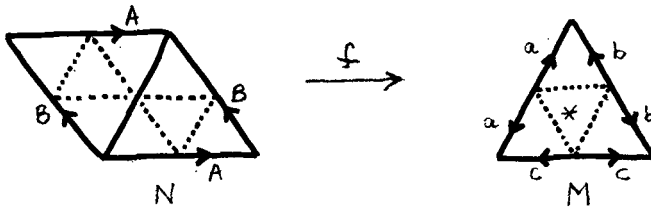
$$\omega: \pi_1(|M| \setminus B, *) \longrightarrow S_C$$

cuya cubierta ramificada asociada de h hojas

$$f: |N| \longrightarrow |M|$$

define un caleidoscopio N euclídeo. Si $\tilde{*}$ cubre $*$, y \tilde{v} cubre v , al desplazar \tilde{v} paralelamente a lo largo de cualquier curva cerrada de $|N| \setminus f^{-1}B$, \tilde{v} retorna a $\tilde{*}$ coincidiendo consigo mismo. Esto prueba que el caleidoscopio N no tiene puntos singulares; es decir, N es una 2-variedad euclídea (un toro).

Por ejemplo, tomando como M el caleidoscopio V del n° 9, resulta que $h=2$ y que N es un toro:



El argumento anterior no puede emplearse cuando el caleidoscopio tiene curvatura distinta de cero. En este caso el transporte paralelo de v a lo largo de un camino de $|M| \setminus B$ que bordea un disco no devuelve v a su posición original.

16. Podemos ahora definir la función desarrolladora $D: |\tilde{M}| \rightarrow E^2$ mencionada en el n° 12, en donde \tilde{M} es la 2-variedad cubierta universal del caleidoscopio euclídeo compacto y sin frontera M .

Si $f: |\tilde{M}| \longrightarrow |M|$ es la cubierta universal, todo punto $x \in |M|$ tiene una carta plegada

$$p: \tilde{U} \longrightarrow U$$

con grupo G , tal que cada componente V_i de $f^{-1}U$ tiene una carta plegada

$$p_i: \tilde{U} \rightarrow V_i$$

con el grupo $G_i \triangleleft G$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{p_i} & V_i \\ & \searrow p & \downarrow f \\ & & U \end{array}$$

Como \tilde{M} es una 2-variedad, G_i es trivial y por tanto p_i es un homeomorfismo.

Definiendo $D|_{V_i}$ como p_i^{-1} puede ahora sin dificultad extenderse a todo \tilde{M} :

$$D: |\tilde{M}| \rightarrow E^2$$

empleando el hecho de que las isometrías son funciones analíticas reales, y la idea de prolongación analítica. Los detalles pueden verse en [Th].

La función D es una cubierta y siendo E^2 simplemente conexo es un homeomorfismo. Hay además un grupo $G \triangleleft E(2)$ que actúa en E^2 tal que si $h \in K$ (grupo de transformaciones cubrientes de $f: |\tilde{M}| \rightarrow |M|$) existe $g \in G$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} |\tilde{M}| & \xrightarrow{h} & |\tilde{M}| \\ D \downarrow & & \downarrow D \\ E^2 & \xrightarrow{g} & E^2 \end{array}$$

Puede pues identificarse \tilde{M} con E^2 y K con G . Este es obviamente un grupo cristalográfico. Esto prueba que el caleidoscopio euclídeo contiene la información necesaria para reproducir el grupo cristalográfico G .

El mejor ejemplo de la construcción de D lo proporciona el tetraedro V del n°9 rodando sobre E^2 . Otro ejemplo lo proporciona el caleidoscopio $D\overline{333}$ realizado como un triángulo equilátero con caras plateadas: las reflexiones sucesivas en sus caras tejerían E^2 (*).

17. Finalmente, queremos dar la lista de 2-caleidoscopios (diferenciales) que admiten estructura euclídea. Con este fin Thurston introdujo una característica de Euler $\chi(M)$ de un caleidoscopio que tiene la siguiente propiedad:

"Si $|M| \rightarrow |N|$ es una cubierta, entre caleidoscopios, de h hojas, $\chi(M) = h \chi(N)$ ".

No es difícil adivinar entonces cuál ha de ser la definición de $\chi(M)$: si un punto x en \tilde{U}_i tiene grupo de isotropía de orden m (bajo la acción de G_i que define la carta plegada $p_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$) entonces $p_i(x)$ debe valer como $\frac{1}{m}$. Definimos con Thurston [Th] la característica de Euler de M , celulando $|M|$ de modo que los puntos de cada célula c (abierta) tengan igual grupo de isotropía G_c . Si el orden de G_c lo representamos por $|G_c|$ ponemos

$$\chi(M) = \sum_c (-1)^{\dim c} \frac{1}{|G_c|}$$

(*) Este es el "verdadero" caleidoscopio de juguete.

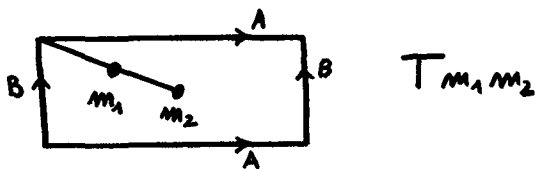
Si M es euclídeo, M es el cociente de E^2 por un grupo cristalográfico G y tenemos la siguiente sucesión de cubiertas entre caleidoscopios

$$E^2 \longrightarrow E^2/G_* \xrightarrow{f} E^2/G=|M|$$

Aquí E^2/G_* es un toro cuya característica de Euler es cero. Por tanto una condición necesaria para que M sea euclídeo es que $\chi(M)=0$. La condición es suficiente porque los 17 caleidoscopios con $\chi(M)=0$ pueden descomponerse en piezas euclídeas al igual que el tetraedro subyacente a 32222 del n° 9. Daremos ejemplos de 17 alicatados (procedentes de la Alhambra) que definen grupos cristalográficos cuyos cocientes son los 17 caleidoscopios de la lista.

1. Primero listamos los caleidoscopios M con $\chi(M)=0$ y orientables.

$|M|$ es una superficie orientable de género g . Hay k puntos singulares con isotropías cíclicas de órdenes m_1, \dots, m_k . Celulando como en el siguiente ejemplo:



obtenemos

$$\chi(M) = 2 - 2g + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{m_i} - 1 \right) = 0$$

Aquí $m_i \geq 2$, luego $\frac{1}{m_i} - 1 \leq -\frac{1}{2}$ implica $\{g=1, k=0\}$ ó $\{g=0\}$. En el primer caso M es simplemente un toro sin puntos singulares que representaremos por T . El segundo caso da $|M|=S^2$ y como $g(S^2)=0$ es:

$$k-2 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} \Rightarrow 2 < k=2 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} < 2 + \frac{k}{2} \Rightarrow 3 \leq k \leq 4$$

Un cálculo sencillo proporciona los siguientes casos (*):

k=3	m ₁	m ₂	m ₃	F
S333	3	3	3	5
S442	4	4	2	3
S632	6	3	2	4



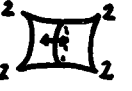
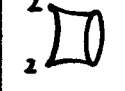



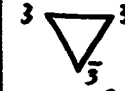


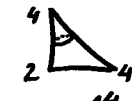
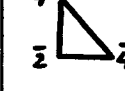
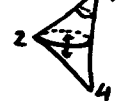

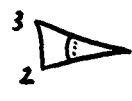

k=4	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	F
S2222	2	2	2	2	2

2. Listamos ahora los caleidoscopios M con $\chi(M)=0$, M no orientable.

Como indicamos en el n°13, tal M tiene una cubierta doble orientable con $\chi=0$. Así pues los posibles M no orientables se obtienen de los 5 caleidoscopios orientables al hallar involuciones que invierten orientación. Las involuciones naturalmente respetan los grupos de isotropía de los puntos singulares. Los casos posibles son entonces, teniendo en cuenta que T admite tres involuciones que invierten orientación y S^2 únicamente dos:

M orientable	M/involución	Representación	Fotografía
T=	Anillo	A	7
T=	Banda de Mobius	M	8
T=	Botella de Klein	K	6
S2222=	Disco	$\overline{D2222}$	9

(*) La columna F indica el número de la fotografía que reproduce un alicatado de la Alhambra con el correspondiente grupo. La fotografía para T es la primera. Ver el apéndice A para la explicación de las fotografías.

M orientable	M/involución	Representación	Fotografía
S2222= 	 Disco	$D\overline{222}$	10
S2222= 	 Disco	$D\overline{22}$	11
S2222= 	 Plano Proyectivo	$P\overline{22}$	12
S333= 	 Disco	$D\overline{333}$	13
S333= 	 Disco	$D\overline{33}$	14
S442= 	 Disco	$D\overline{442}$	15
S442= 	 Disco	$D\overline{42}$	16
S632= 	 Disco	$D\overline{632}$	17

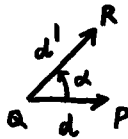
Vemos pues, en resumen, que hay 17 caleidoscopios (diferenciabiles) que admiten estructura euclídea.

18. Todavía cabe preguntar cuántas estructuras euclídeas admite cada caleidoscopio. Pero un isomorfismo entre dos caleidoscopios euclídeos se levanta a un isomorfismo entre sus cubiertas

universales. Es decir si M y N son caleidoscopios euclídeos (con cubierta universal E^2) y grupos cristalográficos de superposiciones G y H, M y N son isomorfos si y sólo si G y H son conjugados mediante una isometría de $E(2)$. Debemos pues resolver el problema de clasificar grupos cristalográficos a menos de isometría.

Caso 1. Grupos cristalográficos con $G_\infty=C_1$

El problema aquí es clasificar rejillas a menos de isometría. Si G_Q es una rejilla, la distancia d de Q al punto P de G_Q más cercano a Q es un invariante por isometrías. Sea R un punto de G_Q cuya distancia d' a Q es menor que la de cualquier otro punto de G_Q exceptuado P . Elijo R de modo que el ángulo $0 < \alpha \leq \pi/2$ QPR contado en sentido positivo sea el menor posible. Este ángulo es también un invariante. Así (d, d', α) es un sistema completo de invariantes:



Hay pues una familia triparamétrica de grupos (y caleidoscopios) tipo T a menos de isometría.

Nótese que dos rejillas G_Q, H_R son afinmente equivalentes. Esto indica que dos grupos tipo T son conjugados dentro del grupo más amplio de afinidades de \mathbb{R}^2 . Igualmente dos caleidoscopios euclídeos cuyo caleidoscopio diferenciable es T son isomorfos como caleidoscopios afines.

Caso 2. Grupos cristalográficos con $G_\infty=C_2$

Un grupo G de este tipo tiene rejilla G_Q invariante por C_2 (ver proposición 2.1). Toda rejilla es de este tipo. Se aplica aquí lo dicho en el n° anterior. Son los grupos correspondientes al caleidoscopio diferenciable $S2222$.

Caso 3. Grupos cristalográficos con $G_\infty=D_2, D_4$

La rejilla es invariante por reflexión. Es pues rectangular o romboidal. Dos rejillas de cada tipo son afinmente equivalentes. Se aplica lo dicho en el Caso 1 aunque aquí la familia de grupos es biparamétrica. Los grupos son $K, A, M, D\overline{2222}, D\overline{222}, D22, P22$.

Caso 4. Grupos cristalográficos con $G_\infty=C_3$ ó D_6

La rejilla G_Q es invariante por C_3 . Es pues hexagonal. El único invariante métrico es su área. Así cada grupo abstracto $S333, D\overline{333}, D\overline{33}$ tiene una familia uniparamétrica de representantes en $E(2)$ dos a dos no conjugados por isometrías, aunque sí por semejanzas. Así pues dos caleidoscopios euclídeos con caleidoscopio diferenciable $S333$ (resp. $D\overline{333}, D\overline{33}$) son isomorfos como caleidoscopios con (Σ, \mathbb{R}^2) -geometría, donde Σ es el grupo de semejanzas de \mathbb{R}^2 .

Caso 5. Grupos cristalográficos con $G_\infty=C_6$ ó D_{12}

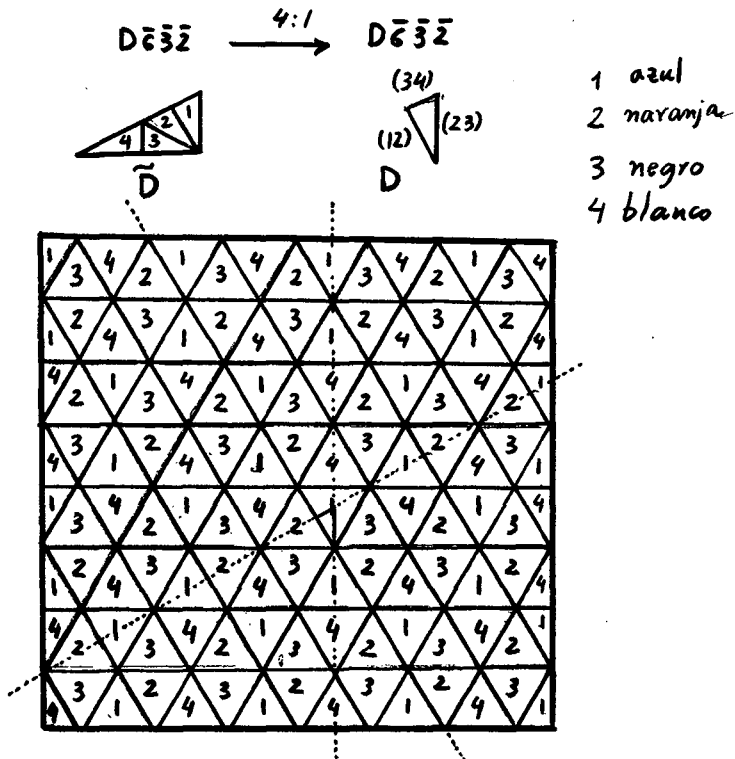
Vale lo dicho en el n° anterior. Son los grupos correspondientes a caleidoscopios euclídeos tipo $S632, D\overline{632}$.

Caso 6. Grupos cristalográficos con $G_0=C_4, D_8$

La rejilla G_0 es un cuadrado. Vale lo dicho en el Caso 4.
Son los caleidoscopios $S442, D44\bar{2}, D4\bar{2}$.

19. El lector puede divertirse ahora listando los grupos de color $(G(\ell), G(\ell)_1)$ con n colores. Basta que halle las posibles cubiertas de n hojas entre caleidoscopios euclídeos. Una vez hallada una $|M| \xrightarrow{n:1} |N|$, debería dibujar una teselación correspondiente. El siguiente ejemplo contiene la clave para ello (el espejo refleja permutando colores)

Ejemplo



Ejercicio. Empiece el lector coloreando D con los otros 3 colores.

IV. Epílogo

Los 2-caleidoscopios buenos M con $\chi(M) > 0$ son esféricos. Corresponden a "grupos cristalográficos" que actúan en la 2-esfera S^2 . El lector puede hallar una lista y buscar teselaciones esféricas correspondientes.

Los 2-caleidoscopios M con $\chi(M) < 0$ son todos buenos e hiperbólicos. Corresponden a "grupos cristalográficos" que actúan en el plano hiperbólico H^2 . Estos grupos se llaman fuchsianos y sobre ellos hay una vasta bibliografía. El lector interesado en ellos así como en teselaciones de H^2 podría consultar [Ma].

La teoría de los 3-caleidoscopios es el objeto de un gran número de investigaciones en la actualidad. Los lectores interesados en conocer los resultados básicos de la teoría (resultados que generalizan aquéllos de las 3-variedades) deberían consultar [BS₂] en donde se prueba el análogo para 3-caleidoscopios del teorema de descomposición de 3-variedades a lo largo de una familia característica de toros. Uno de los toros de esta descomposición para 3-variedades es una variedad de Seifert. En el caso de 3-caleidoscopios, el papel de estas variedades de Seifert lo juega una generalización de las mismas, que de paso las pone en su verdadera perspectiva: S^1 -fibrados sobre 2-caleidoscopios. El lector interesado en estos S^1 -fibrados debería leer [BS₂]. Un subproducto de este estudio es una eficaz clasificación de los 3-caleidoscopios euclídeos, o equivalentemente de los grupos cristalográficos en dimensión tres (ver [BS₃]).

Una importante conjetura de Thurston (probada en muchos ca

sos) es que un sistema característico de toros parte un 3-calei-
 doscopio en piezas con geometría. De las ocho posibles geometrías
 la más difícil e interesante es la hiperbólica. Es pues un tema
 de intensa investigación el estudio de los 3-caleidoscopios con
 geometría modelada en el espacio hiperbólico H^3 y su grupo de
 isometrías. En este contexto finalizará nuestra conferencia men-
 cionando el siguiente sorprendente teorema (ver [HLMW]):

Teorema. Toda 3-variedad compacta y orientable $|M|$ es el espa-
 cio subyacente de un 3-caleidoscopio hiperbólico M que cubre el
 3-caleidoscopio hiperbólico:



Corolario. Hay un grupo U de isometrías de H^3 tal que toda 3-va-
 riedad compacta y orientable M es el cociente de H^3 por la acción
 de un subgrupo de U de índice finito.

Corolario. M es simplemente conexa si y sólo si Γ está generado
 por rotaciones.

El último Corolario proporciona un nuevo medio (geométrico)
 de atacar la Conjetura de Poincaré.

Apéndice A. Descripción de las Fotografías

1.T. Alicatado. Arte nazarí; segunda mitad del s. XIV. Patio de los Arrayanes (La Alhambra)

Notas. Si el alicatado se piensa en blanco y negro, su grupo es S333. También es S333 tomando S como el complemento de los intersticios entre baldosas y $1:S \rightarrow C=\{1\}$ (simetría básica; ver nota al final del Apéndice A).

2.S2222. Yesería. Arte nazarí, primera mitad del s. XIV. Pabellón norte del Generalife (La Alhambra).

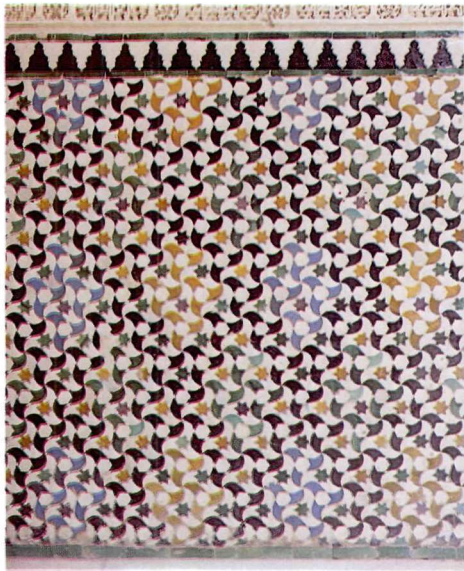
Notas. (i) La cubierta plana de madera policromada de la habitación situada en la entrada derecha de la fachada de Comares tiene exactamente el mismo diseño que la pieza de la fotografía 2. Es también arte nazarí del s. XIV. Debe pues clasificarse como S2222.

(ii) El alicatado MA 1361 (*) de la Alhambra, es arte nazarí del siglo XIV. Si se prescinde de los colores (aparentemente puestos desordenadamente) el diseño es S2222. Se aplica aquí lo que se dice en la nota (i) a S333; pero con más fuerza: pues, en efecto, la "simetría básica" de este alicatado es S2222 (ver el último párrafo del Apéndice A).

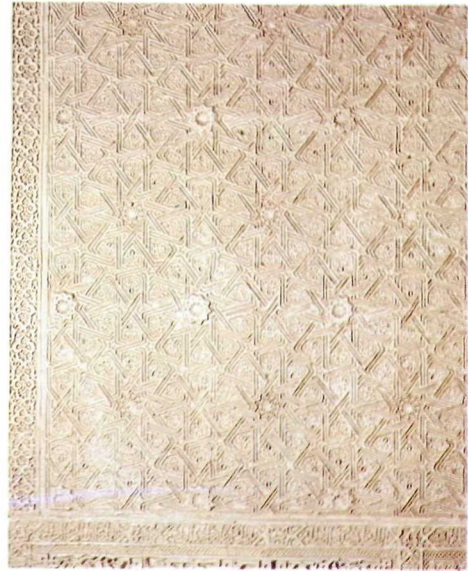
(iii) El azulejo MA 3774 del almacén de MA, pertenece al Convento de San Francisco de la Alhambra. Es arte nazarí del siglo XIV y se clasifica como S2222.

3.S442. MA 1359 . Alicatado. Arte nazarí; s. XIII. Generalife (La Alhambra).

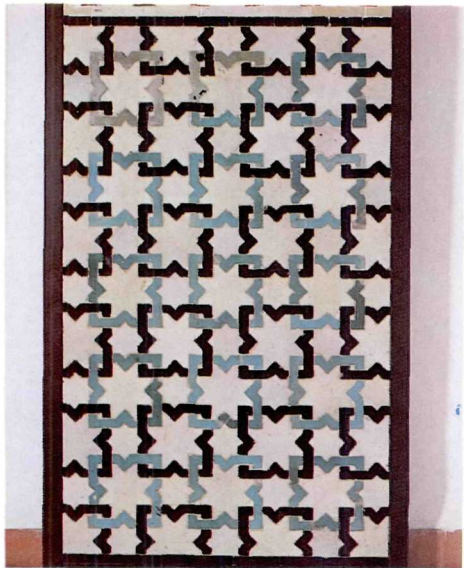
(*) MA significa "Museo Nacional de Arte Hispano-Musulmán", Palacio de Carlos V, La Alhambra (Granada). El número tras MA es el número de la pieza en el Museo.



Fotografía 1. T



Fotografía 2. S 2922



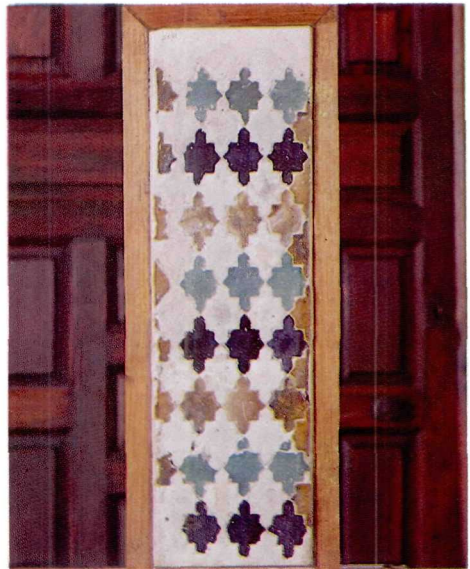
Fotografía 3. S 442



Fotografía 4. S 632



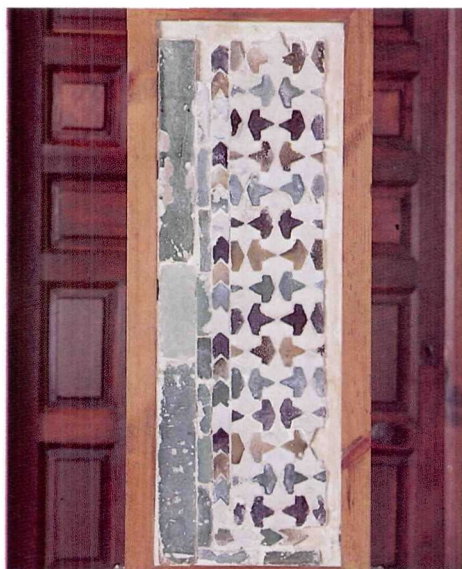
Fotografía 5. S 333



Fotografía 7. A



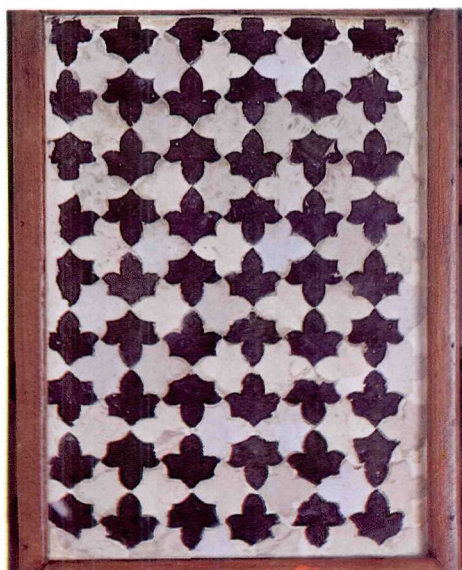
Fotografía 6. K



Fotografía 8. M



Fotografía 9. D 2222



Fotografía 10. D 222



Fotografía 11. D 22



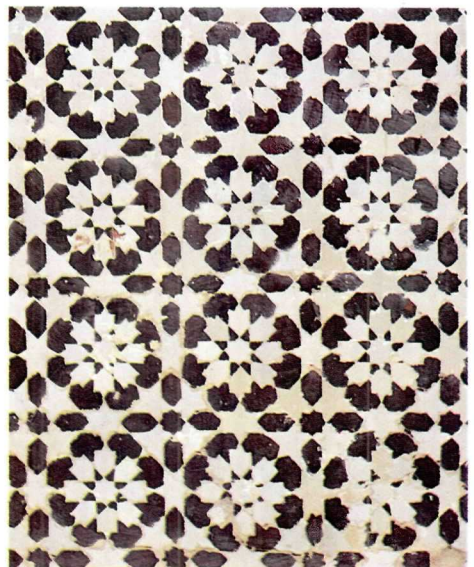
Fotografía 12. P 22



Fotografía 13. D 3 3 3



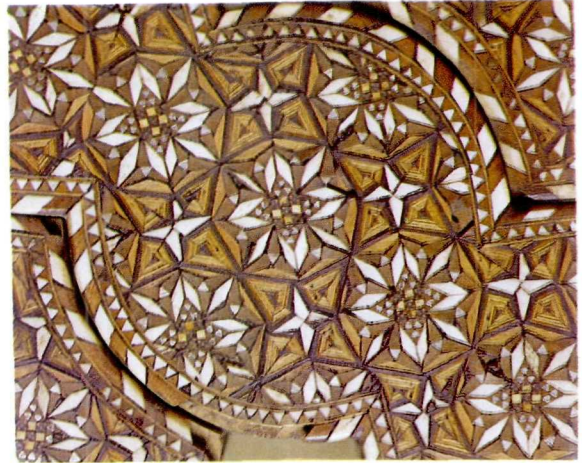
Fotografía 14. D 3 3



Fotografía 15. D 4 4 2



Fotografia 16. D 4 2̄



Fotografia 18. D 3̄ 3̄ 3̄



Fotografia 19. S 333



Fotografia 17. D 3̄ 3̄ 2̄

Nota. Si S es el interior de las piezas coloreadas tenemos un alicatado $1:S \rightarrow C=\{1,2\}$. El grupo $K(1)$ es $S442$; el $G(1)$ es $S442$. El grupo de color es $(S442, S442)$.

4.S632. MA 4610. Alicatado. Arte nazarí; siglo XV. La Alhambra.

Notas. (i) Todos los azulejos tienen aquí el mismo color melado, pero claramente la intención del artista fue distinguir los azulejos entre sí, resaltando las curvas de separación; en otro caso habría usado azulejos con lados rectos, más sencillos de fabricar.

(ii) Este es un grupo muy frecuente en la Alhambra.

5.S333. Alicatado. Arte nazarí; s. XIV, Primer tepidario, baños (La Alhambra).

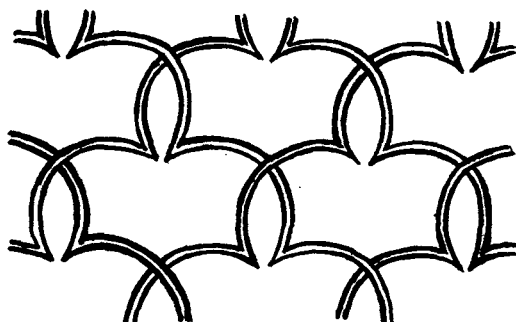
Notas. (i) Para la clasificación de este ejemplo hemos supuesto que S es la unión de los interiores de las pajaritas y que $1:S \rightarrow C=\{1,2\}$ envía pajaritas blancas (resp. coloreadas) a 1 (resp. 2). La razón de esta elección es que los colores se han distribuido de manera que reducen la simetría del dibujo al grupo de simetría trivial. En casos como éste no es aventurado pensar que el artista poseía el concepto de simetría dado por el diseño en blanco y negro, y que la distribución de colores o bien se hizo al azar o se buscó algún tipo de armonía difícil de matematizar. Por otra parte si —como pasa en la Fotografía 4— sólo hubiera llegado hasta nosotros una región del alicatado de la Foto 1, reducida y uniformemente coloreada no hubieramos dudado en clasificarla como si la pieza original estuviera uniformemente coloreada. Este tipo de observaciones justifican la liberalidad de abstracciones adopta

das. El grupo $K(1)$ es $S333$; el $G(1)$ es $S632$ y el grupo de colores es $(S632, S333)$.

(ii) Un ejemplo de $S333$ en el que no existe problema de colores (¡sólo un azulejo ha llegado hasta nosotros!) es MA 1295 (foto y dibujos en el n° 7). Ver también nota a la fotografía 1.

6.K. Pintura. Arte nazarí, s. XIV. Puerta del vino (La Alhambra).

Nota. Este es un grupo común en La Alhambra, pero la simetría está casi siempre reducida a T por la presencia de adornos florales o letras árabes (comparar nota (ii) a D22).



7.A. MA1375. Alicatado. Arte nazarí; s. XIV (La Alhambra).

Nota. Si S es el interior de las baldosas coloreadas y $l:S \rightarrow C=\{N, V, M\}$ donde l envía baldosas a sus colores N =Negro, V =Verde, M =Melado, $K(1)$ es A ; $G(1)=\overline{D2222}$ y el grupo de color es $(\overline{D2222}, \overline{D2222})$. Si S' es el interior de las baldosas y $l':S' \rightarrow C'=\{1, 2\}$ envía baldosas blancas (resp. coloreadas) a 1 (resp. 2), $K(1)=\overline{D2222}$ y $G(1)=\overline{D222}$.

8.M. MA 1694. Alicatado. Arte nazarí; s. XV (La Alhambra).

Nota. Definiendo l y l' como en el ejemplo anterior, $K(l)=M$, $G(l)=D\overline{222}$ y el grupo de color $(D\overline{222},M)$; $K(l')=D\overline{222}$, $G(l')=D4\overline{2}$.

9. $\overline{D2222}$. MA 1362. Solería de cerámica. Arte nazarí, s. XIV. Entre la Sala de la Barca y el Salón de Embajadores (La Alhambra).

Nota. Este es un grupo muy común (Ver, por ejemplo, MA 4587 y MA 1330). El pavimento ha perdido casi completamente los colores originales. En casos como éste, olvidamos completamente los colores y clasificamos lo que queda, pues no cabe duda de que la disposición de ladrillos o azulejos es un diseño perfectamente conocido del artista (comparar con la nota (i) a la foto 5).

10. $\overline{D222}$. MA 188. Alicatado. Arte nazarí; s. XIV. Sala de la Barca (La Alhambra).

Nota. Este es uno de los grupos más comunes de la Alhambra. Aquí $K(l)=D\overline{222}$, $G(l)=D4\overline{2}$.

11. $\overline{D22}$. Pintura. Arte nazarí; s. XIV. Sala de los Reyes (La Alhambra).

Notas. (i) El autor ha encontrado en la Alhambra únicamente dos diseños de este grupo. Uno es un zig-zag como el de la fotografía; otro aparece en 12 capiteles del Patio de los Leones y por tanto debe de ser antiquísimo. Copias de este último diseño aparecen pintadas en el piso alto de los Baños de la Casa real. Hay una vasija (MA 1462) que posee el mismo diseño.

(ii) La sala de Abencerrajes posee solerías con diseños de cerámica en zig-zag. En este caso (y en contraste con la Fo

to 5, nota (i)) deben de eliminarse las líneas de contacto de azulejos de igual color a la hora de clasificar el grupo de simetría, pues claramente el deseo del artista fue ocultar la simetría de baldosas subyacente y mostrar un zig-zag. Si no se hace esto, es decir, se distinguen entre sí las baldosas (y se mantienen los colores), el grupo es K, pero esto lo consideramos un hecho accidental, no deseado por el artista. No nos resistimos a citar las siguientes palabras de Antonio Prieto Vives ("La simetría y la composición de los tracistas musulmanes" Investigación y Progreso, año IV, n° 3, marzo de 1932, pp. 33-35): "... con frecuencia las exornaciones y el colorido sólo obedecen a una parte de la simetría de las líneas, llegando a una verdadera ocultación de la labor geométrica realizada, como si se tratase de proponer un enigma, y esto hace sospechar que los dilettanti de la época se complacían en la dificultad de comprensión, y ésta es, sin duda, la causa del atractivo que aún hoy ejerce este arte sobre los que han penetrado, aunque en mínima parte, en sus secretos".

12.P22. Espina de pez. Arte nazarí, comienzo del s. XIV. Bóveda de la Puerta del vino (La Alhambra).

Nota. Este diseño es el único que el autor ha hallado con grupo P22. Aparece en el arco de entrada de la Puerta de la Justicia, así como en muchas solerías.

13.D333. Yesería. Arte nazarí, s. XIV. Decoración del arco de entrada a la Sala de Abencerrajes (La Alhambra).

Notas. (i) Este parece ser el único ejemplo de este grupo que se hallaría en el edificio de la Alhambra. Sin embargo MA 3113 — una silla de Taracea del s. XIV— que es parte del mobilia-

rio de la Alhambra, posee pequeños círculos con triángulos equiláteros blancos y negros alternando (Foto 18).

(ii) Este mismo diseño aparece en la pared exterior de la Capilla de San Miguel en la Seo de Zaragoza. Allí es arte mudéjar del s. XIV realizado por artistas sevillanos.

(iii) El mismo diseño está en una ventana de Taracea de MA; procede de un palacio de Granada del s. XIV. Hay también dos cajas de Taracea, una en MA y otra en el Museo Arqueológico de Granada, mostrando igual diseño, pero no se sabe su procedencia.

(iv) $K(1)$ es $D\overline{333}$, $G(1)=D\overline{632}$.

14.D $\overline{33}$. Pintura. Arte nazarí; 1362. Bóveda de la Puerta del vino (La Alhambra).

Nota. Sólo aparece un diseño con este grupo. Otro ejemplo es el dibujo en pág. 13, está entre la sala de Comares y el Patio de Arrayanes; parece un diseño de friso (lineal), pero es suficientemente grande como para contener dos translaciones independientes. Sin embargo, si los colores de la pieza de la Foto 19 (MA 1295) no se tuvieran en cuenta, tendríamos un diseño diferente de $D\overline{33}$.

15.D $\overline{442}$. Alicatado. Arte nazarí; s. XIV. Torre de las damas (La Alhambra).

16.D $\overline{42}$. Alicatado. Arte nazarí; s. XIV. Torre de las damas.

Nota. Aquí aplicamos el criterio de colores indicado en Foto 5, nota (i). Sin embargo hay en la Alhambra muchos ejemplos de $D\overline{42}$ sin problema de colores; por ejemplo, las puertas de Co-

mares, o las yeserías en la Torre de las Damas. Aunque éste podría haber perdido sus colores originales (compárese con la nota en Foto 9).

17.D632. Celosía de yeso. Arte nazarí; s. XIV o XV. Patio de los Arra-
yanes (La Alhambra).

18.D333. Ver comentario a la foto 13.

19.S333. Ver comentario a la foto 5.

Comentario final

En la visita realizada al taller de restauración de la Alhambra, Antonio Molina Gualda explicó que actualmente siguen la misma técnica que usaron los artistas hispano-musulmanes en sus procesos de fabricación de alicatados o yeserías. El proceso incluye dibujos previos, preparación de azulejos y cocción de los mismos tras haber sido tratados adecuadamente con objeto de obtener los colores deseados.

Quedó claro entonces que la pregunta de qué grupos conocían virtualmente los artistas de la Alhambra, no debe contestarse atendiendo únicamente al resultado final del trabajo realizado en torno a un ornamento, sino que debería tenerse en cuenta también el trabajo previo: dibujos, azulejos sin colores, etc...

El autor piensa que la simetría básica (eliminando colores, ornamentos florales, letras árabes, etc...) representa la simetría más profundamente asimilada. Esta simetría se define considerando S como el subconjunto de E^2 obtenido quitando los intersticios entre baldosas o las líneas del trazado geométrico, y poniendo $\ell: S \rightarrow C = \{1\}$. Nótese cómo $D\overline{333}$ no aparece en la simetría básica de la Alhambra, denotando un desarrollo incipiente de este grupo.

Apéndice B. Sobre la detección de los 17 grupos en la Alhambra.

Se ha escrito recientemente que sólo 13 grupos están presentes en la Alhambra (ver, por ejemplo, B. Grünbaum, Z. Grünbaum y C.G. Shepard, "Symmetry in Moorish and other ornaments", *Comp. and Maths. with Appls.* 12B (1986) 641-653). Sin embargo no es difícil encontrar 16. El crédito por la búsqueda del elusivo decimoséptimo $D\overline{333}$ se debe a Rafael Pérez Gómez (fotografía 13). El ejemplo de la fotografía 18, me fue indicado por el Prof. D. Antonio Fernández Puertas. Sin embargo el ejemplo de Pérez Gómez es mejor, ya que está en la fábrica de la Alhambra.

Rafael Pérez-Gómez: "The recognition of the plane crystallographic groups, $p2$, pg , pgg , $p3m1$, in the Alhambra", *Abstracts - Amer. Math. Soc.* 8 (1987) 263.

Apéndice C. Tabla. Equivalencia de notaciones

G	Notación Internacional (abreviada)	G_{∞}
T	p1	0
K	pg	D_2
A	p1m1 (pm)	D_2
M	cm	D_2
S2222	p211 (p2)	C_2
D22	pmg	D_4
P22	pgg	D_4
$D\overline{222}$	cmm	D_4
$D\overline{2222}$	pmm	D_4
S333	p3	C_3
$D\overline{33}$	p31m	D_6
$D\overline{333}$	p3m1	D_6
S442	p4	C_4
$D\overline{42}$	p4gm (p4g)	D_8
$D\overline{442}$	p4mm (p4m)	D_8
S632	p6	C_6
$D\overline{632}$	p6mm (p6m)	D_{12}

Agradecimientos

Agradezco a los Profesores Antonio Fernández Puertas y Pura Marinetto por su inestimable ayuda en los aspectos históricos y artísticos relacionados con los ejemplos de la Alhambra presentados en este artículo. También por darme todo género de facilidades en mis visitas al Museo de Arte Hispano-Musulmán del que son Director y Subdirector, respectivamente. Mi agradecimiento también va a Don Rafael Pérez Gómez por mostrarme "in situ" un ejemplo de K y otro de D333, y al Patronato de la Alhambra por facilitar a Don Manuel Valdivieso su excelente labor de fotógrafo.

Nota bibliográfica

En esta exposición hemos seguido muy de cerca Bonahon-Siebenmann [BS₁] y Thurston [Th]. La clasificación hecha de los grupos cristalográficos planos se ha tomado así para introducir el concepto de caleidoscopio. El lector interesado en una prueba elemental puede ver H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry, Wiley, o [HC]. Los conceptos de cubierta ramificada usados están en Seifert-Threlfall: Lecciones de Topología o en [M]. Finalmente también recomendamos Scott [Sc] :

Referencias.

- [BS₁] F. Bonahon y L. Siebenmann: "Seifert orbifolds and their role as natural crystalline parts of arbitrary compact irreducible 3-orbifolds", 1982, Sussex conference LMS Lecture notes #95, pp.18-85, Cambridge Univ. Press 1985.
- [Sc] P. Scott: "The geometries of 3-manifolds", Bull LMS 15 (1983) 401-487.
- [Th] W. Thurston: "The geometry and topology of 3-manifolds", Princeton Univ. Press (aparecerá).
- [Mi] W. Miller, Jr.: "Symmetry groups and their applications". Academic Press, New York & London 1972.
- [HC] Hilbert-Cohn Vossen: "Geometry and Imagination", Academic Press, 1952.
- [S] R.L.E. Schwarzenberger: "Colour symmetry", Bull. London Math. Soc. 16 (1984) 209-240.
- [M] J.M. Montesinos: "Lectures on 3-fold simple coverings and 3-manifolds". A symposium in honor of A. Stone. Contemporary Math. 44 (1985) 157-177.

- [Ma] J.W. Magnus: "Non-euclidean tessellations and their groups", Academic Press, New York 1974.
- [BS₂] F. Bonahon y L. Siebenmann: "The characteristic toric splitting of irreducible compact 3-orbifolds" (aparecerá)
- [BS₃] F. Bonahon y L. Siebenmann: "A do-it-yourself crystal classification", Appendix Y to "Geometric splittings of classical knots, and the algebraic knots of Conway" (aparecerá en LMS notes series).
- [HLMW] H.Hilden, M. Lozano, J.M. Montesinos, W. Whitten: "Universal groups and three-manifolds" *Inventiones Math.* 87 (1987) 441-456.
- [F] R.H.Fox: "Covering spaces with singularities". En "Algebraic Geometry and Topology", Editor: R.H.Fox et al. Princeton University Press.