VARIEDADES ALGEBRAICAS TOTALES

por

PEDRO ABELLANAS

PUBLICADO EN

«ACTAS DEL COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE GEOMETRÍA ALGEBRAICA»

Madrid, septiembre 1965

VARIEDADES ALGEBRAICAS TOTALES

por

PEDRO ABELLANAS

Introducción.

En el estudio de las correspondencias algebraicas entre dos variedades algebraicas V y V', se consideran únicamente subvariedades irreducibles de la variedad original o uniones de variedades irreducibles y las transformadas o transformadas totales [1] son también uniones de variedades irreducibles. No obstante, en algunas cuestiones interesaría conocer la transformada de una subvariedad de V definida por un ideal que no fuese un radical. Esto implica generalizar el concepto de variedad algebraica, considerando como elementos de ella no las subvariedades representadas por radicales, sino las definidas por cualquier ideal. A estas variedades se les denomina variedades algebraicas totales. En el presente trabajo se exponen algunos primeros resultados en este sentido.

En el párrafo primero se construye el espectro total de un anillo en el sentido de ZARISKI-GROTHENDIECK [2.] En el párrafo 2 se establecen las primeras propiedades de dicho espectro. En el párrafo 3 se definen los módulos y anillos parciales de fracciones. En el párrafo 4 se estudian algunas propiedades de estos módulos y anillos parciales y en el párrafo 5 se obtiene el prehaz y el haz asociados a un anillo. El anillo de partida se supone conmutativo y con elemento unidad. Sucesivamente se imponen condiciones de no existencia de elementos nilpotentes y de ser anillo entero. En la exposición se adopta la notación usada en [2].

§ 1. Espectro total de un anillo.

Sea A un anillo conmutativo y con elemento unidad. Sea X = Spec. (A) el conjunto de todos los ideales de A, excluido el ideal unidad A. Representaremos por R(A) y R(X) a los retículos de las partes de A y X, respectivamente.

Definición 1. Se llama V a la aplicación:

$$\mathbb{R}(A) \xrightarrow{V} \mathbb{R}(X)$$

definida por:

$$\forall\, E \in \mathbb{R}(A); \quad x \in V(E) \Leftrightarrow E \subset j_x \tag{1}$$

Si se representa por A(E) al ideal engendrado por E, se verifica:

1. $V(E) = V\Big(A(E)\Big)$
2. $A(E) = \bigcap\limits_{x \in (V)E} j_x$
3. Si I es un conjunto arbitrario de índices se verifica que

$$V(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i); \qquad E_i \in \mathbb{R}(A); \qquad i \in I \tag{2}$$

4. $V(0) = X$. $V(1) = \varnothing$. Esta última igualdad es consecuencia de $1 \notin X$.
5. $V(E) \cup V(E') \subset V(E \cap E') \subset V(E\,E')$.

Definición 2. Un sistema S de partes de un conjunto X se llama un *sistema débil de cerrados* de X si se verifican las siguientes condiciones:

I. $X \in S$; $\varnothing \in S$.

II. Para todo conjunto de índices I: $\bigcap\limits_{i \in I} C_i \in S$; $C_i \in S$; $\forall i \in I$.

A la topología definida por un sistema débil de cerrados le llamaremos *topología débil.*

6. X es un espacio topológico débil respecto del sistema de cerrados $S = \Big\{V(E)\Big\}_{E \in \mathbb{R}(A)}$

Definición 3. Se llama *adherencia débil* de una parte $Y \subset X$, y se representa por $\overline{Y}$, a

$$\overline{Y} = \bigcap_{Y \subset V(E)} V(E) \tag{3}$$

De (2) y (3) resulta que $\overline{Y}$ es un cerrado débil.

Definición 4. Se define la aplicación $\mathbb{R}(X) \xrightarrow{j} \mathbb{R}(A)$ del siguiente modo:

$$f \in j(Y) \Leftrightarrow f \in j_x \;\; ; \;\; \forall\, x \in Y \Leftrightarrow f \in \bigcap_{x \subset Y} j_x \tag{4}$$

7. $j(Y) = \bigcap_{x \in Y} j_x$.

8. $Y \subset Y' \Rightarrow j(Y) \supset j(Y')$.

9. $j(\bigcup_i Y_i) = \bigcap_i j(Y_i),\ i \in I$.

10. $j(Y \cap Y') \supset j(Y) \cup j(Y')$.

11. $j\left(\{x\}\right) = j_x$.

12. $j\left(V(E)\right) = A(E)$.

13. $\overline{Y} = V\left(j(V)\right).\ \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$.

14. Representando por *Adh* la aplicación $Y \rightarrow \overline{Y}$, las proposiciones 12 y 13 equivalen a la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}(A) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "A"'] & & \mathbb{R}(X) \arrow[dl, "j"] \\ & \mathbb{R}(A) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}(X) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "Adh."'] & & \mathbb{R}(A) \arrow[dl, "V"] \\ & \mathbb{R}(X) & \end{tikzcd}$$

Como la aplicación A deja invariantes los ideales y la aplicación Adh. deja invariantes los cerrados V es una biyección del conjunto formado por los ideales de $\mathbb{R}(A)$ sobre el conjunto de los cerrados débiles de X, cuya inversa es j.

15. $x \in X$ y $\overline{\{x\}}$ es cerrado débil $\Leftrightarrow j_x$ es maximal.

16. *X es un espacio de Kolmogoroff débil.* $x \neq y \Leftrightarrow j_x \neq j_y$, luego $j_x \not\subset j_y$ o $j_y \not\subset j_x$.

Definición 5. $\forall\ f \in A,\quad D(f) = X - V(f) = \mathbf{c}\ V(f)$.
$\forall\ E \in \mathbb{R}(A),\quad D(E) = X - V(E)$.

17. El sistema $\left\{D(E)\right\}_{E \in \mathbb{R}(A)}$ es el sistema de abiertos de la topología débil de X.

18. $\forall\ E \in \mathbb{R}(A),\quad D(E) = D(\bigcup_{f \in E} f) = \bigcup_{f \in E} D(f)$.

19. Consecuencia de 18: $\left\{D(f)\right\}_{f \in A}$ es una base de la topología de X.

20. $\forall\ f \in A$. $D(f)$ es quasi-compacto. $X = D(1)$ es quasi-compacto.

21. Si $\mathfrak{A}$ es un ideal arbitrario de A y $A \xrightarrow{\varphi} A/\mathfrak{A}$, el homomorfismo, natural, φ^{-1}, define una aplicación biyectiva entre los ideales de $A/\mathfrak{A}$ y los ideales de A que contienen a $\mathfrak{A}$, luego se puede establecer la identificación:

$$\text{Spect.}\ (A/\mathfrak{A}) = V(\mathfrak{A})$$

En particular,

$$\text{Spect.}\ (A/\mathfrak{N} = V(\mathfrak{N})$$

siendo $\mathfrak{N}$ el nil radical de A. En el caso de las variedades totales no se verifica que $V(\mathfrak{N})$ sea igual a Spect. (A).

§ 2. Propiedades del espectro total de un anillo.

A todo homomorfismo (se supone siempre que el elemento unidad se transforma en el elemento unidad)

(1) $$A' \xrightarrow{\varphi} A$$

se le puede asociar una aplicación:

(2) $$X' \xleftarrow{{}^a\varphi} X$$

entre sus espectros, definida por:

(3) $${}^a\varphi(x) = \varphi^{-1}(j_x)$$

1. El homorfismo φ determina una aplicación de $\mathbb{R}(A')$ en $\mathbb{R}(A)$, que designaremos también por φ y a la aplicación inversa por φ^{-1}. Análogamente, ${}^a\varphi$ determina una aplicación de $\mathbb{R}(X)$ en $\mathbb{R}(X')$, que seguiremos designando por ${}^a\varphi$, y a su inversa por ${}^a\varphi^{-1}$.

Se verifica que el diagrama siguiente es conmutativo

(4) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}(A') & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}(A) \\ V'\downarrow & & \downarrow V \\ \mathbb{R}(X') & \xrightarrow{{}^a\varphi^{-1}} & \mathbb{R}(X) \end{array}$$

2. ${}^a\varphi^{-1}\Big(D(f')\Big) = D\Big(\varphi(f')\Big)$.

3. Consecuencia de 2: ${}^a\varphi$ es una aplicación débilmente continua.

4. Restringiendo la aplicación φ de (4), así como su inversa, a las partes X′ y X de $\mathbb{R}(A')$ y $\mathbb{R}(A)$, respectivamente, lo que puede hacerse, puesto que tanto φ como φ^{-1} transforman ideales en ideales, y representando por Adh(X) y Adh(X′) a las partes de $\mathbb{R}(X)$ y $\mathbb{R}(X')$, respectivamente, formadas por los conjuntos cerrados débiles, se verifica que el diagrama

(5) $$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & X \\ V'\downarrow & & \downarrow V \\ \mathrm{Adh}(X') & \xleftarrow[{}^a\varphi]{} & \mathrm{Adh}(X) \end{array}$$

es conmutativo en donde las aplicaciones son las restricciones de las designadas con las mismas letras.

DEMOSTRACIÓN.—1.°) $\forall\ \mathfrak{A} \in X \Rightarrow V'\varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \subset {}^a\varphi\, V(\mathfrak{A})$. En efecto, $x' \in V'\varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow j_{x'} \supset \varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} = \varphi\, \varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \subset \varphi j_{x'} \Rightarrow \varphi j_{x'} \in V(\mathfrak{A}) \Rightarrow x' \in {}^a\varphi(V(\mathfrak{A}))$. 2.°) $x' \in {}^a\varphi\, V(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow x' = {}^a\varphi(\mathfrak{B}),\ \mathfrak{B} \in V(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A} \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{B}) \supset \varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \Rightarrow j_{x'} = \varphi^{-1}(\mathfrak{B}) \supset \varphi^{-1}(\mathfrak{A}) \Rightarrow x' \in V'\,\varphi^{-1}(\mathfrak{A})$.

5. Restringiendo (4) a las partes X′ y X de $\mathbb{R}(A')$ y $\mathbb{R}(A)$, respectivamente, y teniendo en cuenta (5) se obtiene la conmutatividad de los dos diagramas superpuestos siguientes:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[d, "V'"'] & X \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "V"] \\
\mathrm{Adh}(X') \arrow[r, shift left, "{}^a\varphi^{-1}"] & \mathrm{Adh}(X) \arrow[l, shift left, "{}^a\varphi"]
\end{tikzcd}$$

6. La aplicación Spec. total es un functor contravariante de la categoría de los anillos en la de los espacios topológicos débiles.

7. *Si* φ *es tal que* $\forall\ f \in A$ *se verifica que* $f = h\varphi(f')$, $f' \in A'$ *siendo* h *invertible en* A, *se verifica que* ${}^a\varphi$ *es un homeomorfismo débil de* X *sobre* ${}^a\varphi(X)$.

§ 3. Anillos parciales y módulos parciales de fracciones.

DEFINICIÓN 1. Llamaremos *sistema de denominadores,* S, del anillo conmutativo A con elemento unidad, a una parte S de A tal que: 1.°) $1 \in S$. 2.°) $\forall\ s_1, \ldots, s_r \in S$ se verifica que $s_1 \ldots s_r \neq 0$. En $A \times S$ se define la siguiente relación:

$$(a_1, s)\, R(a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists\ t_1, \ldots, t_r \in S \,|\, T(s_2a_1 - s_1a_2) = 0, \quad T = t_1 \ldots t_r. \tag{1}$$

1. R *es una relación de igualdad.*—En virtud de la condición segunda de la definición de S, R no es trivial. La demostración es inmediata.

Al conjunto cociente de $A \times S$ respecto de R lo representaremos del siguiente modo:

$$S^{-1}A = A \times S/R$$

y le denominamos *anillo parcial de fracciones de* A *respecto del sistema de denominadores* S. A la clase cuyo representante es (a_1, s_1), la designaremos por $\frac{a_1}{s_1}$ y se le llama *fracción.*

DEFINICIÓN 2. Dos fracciones, $\frac{a_1}{s_1}$ y $\frac{a_2}{s_2}$, se llaman *reducibles a común denominador* cuando existen otras dos fracciones, $\frac{b_1}{s}$ y $\frac{b_2}{s}$, tales que $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{s}$, $\frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{s}$. Dos fracciones, $\frac{a_1}{s_1}$ y $\frac{a_2}{s_2}$, se llaman *multiplicables* cuando se verifica: $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{t_1}$, $\frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{t_2}$, $t_1 t_2 \in \mathrm{S}$. Si $\frac{a_1}{s_1}$ y $\frac{a_2}{s_2}$ son reducibles a común denominador, se llama *suma* de ambas, y se representa por $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}$ a la fracción.

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{b_1 + b_2}{s}, \quad \frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{s}, \quad \frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{s} \tag{2}$$

Si $\frac{a_1}{s_1}$ y $\frac{a_2}{s_2}$ son multiplicables, se llama *producto* a la fracción:

$$\frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} = \frac{b_1 b_2}{t_1 t_2}, \quad \frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{t_1}, \quad \frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{t_2}, \quad t_1 t_2 \in \mathrm{S} \tag{3}$$

2. PROPIEDADES. — 1. *Uniformidad de la adición.* — Sea $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{s} = \frac{b'_1}{s'}$, $\frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{s} = \frac{b'_2}{s'}$. Se verificará: $\mathrm{T}(s' b_1 - s b'_1) = 0$, $\mathrm{T}'(s' b_2 - s b'_2) = 0$. (Se representa por una letra mayúscula, T, T′, ..., a un producto de elementos de S.) Por tanto, $\mathrm{TT}'(s'(b_1 + b_2) - s(b'_1 + b'_2)) = 0 \Leftrightarrow \frac{b_1 + b_2}{s} = \frac{b'_1 + b'_2}{s'}$.

2. *Asociatividad.*—Si existen $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}$, $\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}$, $\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3}$ y $\frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_2}\right)$, se verifica que $\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}\right)$. En efecto, sea $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{s} = \frac{c_1}{v}$, $\frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{s} = \frac{c_2}{u}$, $\frac{a_3}{s_3} = \frac{b_3}{t} = \frac{c_3}{u}$, $\frac{b_1 + b_2}{s} = \frac{b'}{t}$, $\frac{c_2 + c_3}{u} = \frac{c'}{v}$. Será: $\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3} = \frac{b' + b_3}{t}$ y $\frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}\right) = \frac{c_1 + c'}{v}$. Ahora bien, las relaciones $\mathrm{T}_1(sa_1 - s_1 b_1) = 0$. $\mathrm{T}_2(sa_2 - s_2 b_2) = 0$. $\mathrm{T}_3(t(b_1 + b_2) - sb') = 0$, $\mathrm{T}_4(ta_3 - s_3 b_3) = 0$, $\mathrm{U}_1(ua_2 - s_2 c_2) = 0$, $\mathrm{U}_2(ua_3 - s_3 c_3) = 0$, $\mathrm{U}_3(v(c_2 + c_3 - uc') = 0$, $\mathrm{U}_4(va_1 - c_1 s_1) = 0$, implican:

$$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3\mathrm{T}_4 \; \mathrm{U}_1\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3\mathrm{U}_4 \; u \; s \; s_1 \; s_2 \; s_3(v(b' + b_3) - t(c_1 + c')) = 0$$

3. *Conmutatividad.*—Si existe $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}$ se verifica que $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1}$.

4. *Elemento cero.* $\frac{0}{s_1} = \frac{0}{s_2}$ es el elemento neutro de la adición.

5. Toda fracción, $\frac{a}{s}$, posee una *opuesta*, $-\frac{a}{s}$, siendo $-\frac{a}{s} = \frac{-a}{s}$.

6. *Uniformidad de la multiplicación.*—Si $\frac{a_1}{s_1}$ y $\frac{a_2}{s_2}$ son multiplicables, y $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_2}{t_1} = \frac{c_1}{u_1}$, $\frac{a_2}{s_2} = \frac{b_2}{t_2} = \frac{c_2}{u_2}$, $t_1 t_2 \in S$, $u_1 u_2 \in S$, las relaciones $T(u_1 b_1 - s_1 c_1) = 0$. $U(u_2 b_2 - c_2 t_2) = 0$ implican $TU(u_1 u_2 b_1 b_2 - t_1 t_2 c_1 c_2) = 0$.

7. *Asociatividad.* — Si existen $\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2}$, $\frac{a_2}{s_2}\frac{a_3}{s_3}$, $\left(\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2}\right)\frac{a_3}{s_3}$ y $\frac{a_1}{s_1}\left(\frac{a_2}{s_2}\frac{a_3}{s_3}\right)$, se verifica que $\left(\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2}\right)\frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1}{s_1}\left(\frac{a_2}{s_2}\frac{a_3}{s_3}\right)$. Las relaciones $s_1 s_2 \in S$; $\frac{a_2}{s_2} = \frac{a'_2}{s'_2}$, $\frac{a_3}{s_3} = \frac{a'_3}{s'_3}$, $s'_2 s'_3 \in S$; $\frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} = \frac{b}{t}$, $\frac{a_3}{s_3} = \frac{b'}{t'}$, $tt' \in S$; $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a}{u}$, $\frac{a'_2 a'_3}{s'_2 s'_3} = \frac{a'}{u'}$, $uu' \in S$, implican:

$$T_1 T_2, \ldots, T_6\, s_1\, s_2\, s_3\, s'_2\, s'_3(tt'aa' - uu'bb') = 0.$$

8. *Conmutatividad.* — Si existe $\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2}$ se verifica que $\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{a_1}{s_1}$.

9. Las fracciones $\frac{s_1}{s_1}$ y $\frac{s_2}{s_2}$ son iguales $\forall s_1, s_2 \in S$ y son el *elemento unidad* de la multiplicación.

10. *Distributividad.* — Si existen $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}$, $\frac{a_1}{s_1}\frac{a_3}{s_3}$, $\frac{a_2}{s_2}\frac{a_3}{s_3}$, $\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right)\frac{a_3}{s_3}$, se verifica la propiedad distributiva.

Análogamente se define el *módulo parcial de fracciones* $S^{-1}M$, siendo M un A-módulo y S un sistema de denominadores de A, respecto del sistema de denominadores S.

La adición y la multiplicación por elementos de $S^{-1}A$ se definen para los módulos parciales de fracciones de modo análogo a los anillos. Ambas operaciones son uniformes cuando existen. La asociatividad de la adición se verifica cuando existen las cuatro sumas, la conmutatividad cuando existe una de las sumas. El elemento cero es la fracción $\frac{0}{s}$, $s \in S$, $0 \in M$. Todo elemento de $S^{-1}M$ posee opuesto.

a) Si existen $\frac{a}{s} + \frac{b}{s'}$, $\frac{a}{s}\frac{m}{t}$, $\frac{b}{s'}\frac{m}{t}$ y $\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s'}\right)\frac{m}{t}$;

$\frac{a}{s} \frac{b}{s} \in S^{-1}$ A, $\frac{m}{t} \in S^{-1}$ M, se verifica: $\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s}\right)\frac{m}{t}$ $= \frac{a}{s}\frac{m}{t} + \frac{b}{s'}\frac{m}{t}$.

b) Si existen $\frac{a}{s}\frac{m}{t}$, $\frac{a}{s}\frac{n}{u}$ $\frac{m}{t} + \frac{n}{u}$ y $\frac{a}{s}\left(\frac{m}{t} + \frac{n}{u}\right)$; $\frac{a}{s} \in S^{-1}$ A, $\frac{m}{t}$ $\frac{n}{u} \in S^{-1}$ M, se verifica: $\frac{a}{s}\left(\frac{m}{t} + \frac{n}{u}\right)$ $= \frac{a}{s}\frac{m}{t} + \frac{a}{s}\frac{n}{u}$.

c) Si existen $\frac{a}{s}\frac{b}{t}$, $\frac{b}{t}\frac{m}{u}$, $\left(\frac{a}{s}\frac{b}{t}\right)\frac{m}{u}$, $\frac{a}{s}\left(\frac{b}{t}\frac{m}{u}\right)$, se verifica: $\left(\frac{a}{s}\frac{b}{t}\right)\frac{m}{u} = \frac{a}{s}\left(\frac{b}{t}\frac{m}{u}\right)$. Finalmente,

d) $\frac{1}{1}\frac{m}{s} = \frac{m}{s}$.

DEFINICIÓN 3. Un *anillo parcial (conmutativo)* es un conjunto A y dos correspondencias unívocas de A $\times$ A en A (no necesariamente aplicaciones) $+$, $\cdot$, llamadas *adición y multiplicación*, tales que: 1) Si existen $a + b$ $b + c$, $(a + b) + c$ y $a + (b + c)$, se verifica que $a + (b + c) = (a + b) + c$. 2) Si existe $a + b$, existe $b + a$ y $a + b = b + a$. 3) Existe un elemento, llamado *cero*, tal que, para todo elemento de A existe $a + 0$ y $a + 0 = a$. 4) A todo elemento a de A le corresponde otro único, llamado su *opuesto*, y representado por $-a$, tal que existe la suma $a + (-a) = a - a$, y es igual a cero, y si existe la suma $b + a$ existe también la suma $b + (-a)$. 5) Si existen ab, bc, $(ab)c$, $a(bc)$, se verifica que $a(bc) = (ab)c$. 6) Si existe ab, existe ba y $ab = ba$. 7) Si existen $b + c$, ab, ac, $a(b + c)$, se verifica que $a(b + c) = ab + ac$. 8) Si, además, se verifica: 9) Existe un elemento 1 tal que existe el producto de 1 por cualquier elemento y $1a = a$, a este elemento se le llama *elemento unidad*, y el anillo parcial se dice que posee elemento unidad.

Un A-*módulo parcial*, siendo A un anillo parcial con elemento unidad, es un conjunto M y dos correspondencias unívocas (no necesariamente aplicaciones) de M $\times$ M en M y de A $\times$ M en M, llamadas *adición* y *multiplicación por elementos de A*, tales que: I. Respecto de la adición se verifican las propiedades 1) a 4) de la adición de anillos parciales. II. La multiplicación por elementos de A posee las siguientes propiedades: a) Si existen ab, bm, $a(bm)$ y $(ab)m$, se verifica que $(ab)m = a(bm)$. b) Si existen $a + b$, am, bm y $(a + b)m$, se verifica que $(a + b)m = am + bm$. c) Si existen am, an, $m + n$ y $a(m + n)$ se verifica que $a(m + n) = am + an$. d) Existe el producto $1m$, $\forall m \in$ M y $1m = m$.

Se llama *ideal parcial* de un anillo parcial A, a toda parte $\mathfrak{a}$ de A, tal que: 1) $x, y \in \mathfrak{a}$ y son sumables en A $\Rightarrow x - y \in \mathfrak{a}$. 2) $x \in \mathfrak{a}$, $y \in$ A y x e y

son multiplicables en A $\Rightarrow yx \in \mathfrak{a}$. Un ideal de A se llama *primo* cuando $\forall x, y \in$ A y multiplicables, $xy \in \mathfrak{a}$, $x \notin \mathfrak{a} \Rightarrow y \in \mathfrak{a}$.

Se llama *submódulo parcial* de un A-módulo parcial M, a toda parte N de M tal que: 1) $m, n \in$ N y m, n sumables en M $\Rightarrow m - n \in N$. 2) $a \in A$, $m \in$ N y a, m multiplicables en M $\Rightarrow am \in$ N.

Se llama *homomorfismo* de un anillo parcial A en un anillo parcial B a toda aplicación $A \xrightarrow{\varphi} B$, tal que: 1) a, a' son sumables en A $\Rightarrow \varphi(a), \varphi(a')$ son sumables en B y $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$. 2) a, a' son multiplicables en A $\Rightarrow \varphi(a)$ y $\varphi(a')$ son multiplicables en B y $\varphi(aa') = \varphi(a)\, \varphi(a')$. Análoga definición vale para los homomorfismos entre dos A-módulos parciales. Las definiciones de imagen y de núcleo de un homomorfismo entre anillos parciales (módulos parciales) son análogas a las correspondientes para anillos (módulos). Un homomorfismo inyectivo y suprayectivo se llama *isomorfismo*.

El núcleo de un homomorfismo entre anillos parciales es un ideal parcial y el núcleo de un homomorfismo entre dos módulos parciales es un submódulo parcial. No vale lo mismo para las imágenes.

3. Sea M un A-módulo, S un sistema de denominadores de A, y $S^{-1}M$ el módulo parcial de fracciones correspondiente. $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo parcial.

4. La aplicación canónica: $A \longrightarrow S^{-1}A : i(a) = \dfrac{a}{1}$ es un homomorfismo de A en $S^{-1}A$ y se verifica que im (i) es un subanillo (no parcial) de S^{-1} A. El núcleo de este homomorfismo es un ideal $\mathfrak{A}$ de A. La aplicación $A/\mathfrak{A} \xrightarrow{\psi}$ im (i) definida por $\psi(x + \mathfrak{a}) = \dfrac{x}{1}$ es un isomorfismo.

5. Si A y B son dos anillos y u un homomorfismo del primero en el segundo, y si S es un sistema de denominadores contenido en $u^{-1}(I)$, siendo I el conjunto de los elementos inversibles en B, existe una factorización única:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & S^{-1}A \arrow[ur, "u^*"'] & \end{tikzcd}$$

Basta poner $u^*\left(\dfrac{a}{s}\right) = u(a)[u(s)]^{-1}$

6. Siendo la intersección conjuntista de cualquier número de ideales parciales de un anillo parcial A′ un ideal parcial, si B′ es una parte de A′, al ideal

$$A'(B') = \bigcap_{B' \subset I} I$$

en donde I recorre todos los ideales parciales que contienen a B′, se le llama ideal parcial engendrado por B′. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A y si $S^{-1}A$ es un anillo parcial de fracciones, llamaremos *ideal ampliado* de $\mathfrak{a}$ al ideal $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big)$. Si $\overline{S}$ es el sistema multiplicativamente cerrado formado por todos los productos de un número finito de elementos de S, se verifica que:

La condición necesaria y suficiente para que $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big) \neq S^{-1}A$ es que $\mathfrak{a} \cap \overline{S} = \emptyset$.

7. Si $\mathfrak{a}'$ es un ideal parcial de $S^{-1}A$ y representamos por $i^{-1}(\mathfrak{a}')$ a $i^{-1}\Big(\mathfrak{a}' \cap i(A)\Big)$, se verifica que $i^{-1}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$ es un ideal de A, que se llama *ideal contraído de* $\mathfrak{a}'$.

8. Si $\mathfrak{a}$ es ideal contraido de $\mathfrak{a}'$ se verifica que $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big) = \mathfrak{a}'$. En efecto, $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big)$ es el conjunto de todos los elementos de $S^{-1}A$ que se obtienen efectuando operaciones de adición y de multiplicación por elementos de $S^{-1}A$, en cualquier orden, y sucesivamente a partir del conjunto de elementos $\left\{\frac{a}{1}\right\}_{a \varepsilon \mathfrak{a}}$ y como todos estos elementos pertenecen a $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{a}'$ es un ideal, aquéllos también pertenecen a $\mathfrak{a}'$ luego $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big) \subset \mathfrak{a}'$. Si $\frac{a}{s} \in \mathfrak{a}'$, como se verifica que $\frac{s}{1}$ es multiplicable por $\frac{a}{s}$, será: $\frac{s}{1}\,\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \in \mathfrak{a}'$, luego $a \in \mathfrak{a}$ y, por tanto, $\frac{1}{s}\,\frac{a}{1} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{a})\Big)$.

9. Si $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de $S^{-1}A$, $i^{-1}(\mathfrak{p}')$ es un ideal primo de A. En efecto si $a\,b \subset \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{p}')$, $a \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \frac{ab}{1} \in \mathfrak{p}'$. Además $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{p}'$. En efecto, si $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}' \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}'$ es primo, $\frac{a}{1}\,\frac{b}{1} \in \mathfrak{p}'$, $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{p}' \Rightarrow \frac{b}{1} \in \mathfrak{p}' \Rightarrow b \in \mathfrak{p}$.

10. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \cap \overline{S} = \emptyset$, se verifica que $S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$ es un ideal primo. En efecto $\frac{ab}{st} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$, $\frac{a}{s} \notin S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$ $\Rightarrow \frac{st}{1}\left(\frac{a}{s}\,\frac{b}{t}\right) \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big) \Leftrightarrow \frac{ab}{1} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big) \Rightarrow Tab \in \mathfrak{p}$ siendo T un producto de denominadores. Si $a \in \mathfrak{p}$ sería $\frac{a}{1} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$ y $\frac{1}{s}\,\frac{a}{1} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$, contradicción; luego, $a \notin \mathfrak{p}$ y, por tanto, $Tb \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \cap \overline{S} = \emptyset$ y $T \in \overline{S}$, será $T \notin \mathfrak{p}$, luego $b \in \mathfrak{p}$ y, por tanto, $\frac{b}{t} \in S^{-1}A\Big(i(\mathfrak{p})\Big)$.

DEFINICIÓN 4.—Sea f un elemento no nilpotente de A. Representaremos por S_f al siguiente conjunto de elementos de A:

$$S_f = \{h \mid hk = f\} \tag{4}$$

11. S_f es un sistema de denominadores. En efecto, $1 \in S_f$. Si $s_1, \ldots, s_r \in S_f$, será $s_i s'_i = f$, de donde $(s_1 \ldots s_r)(s'_1 \ldots s'_r) = f^r \neq 0$.

12. $f = gh \Leftrightarrow g \in S_f \Leftrightarrow S_g \subset S_f \Leftrightarrow A(g) \supset A(f)$, siendo $A(g)$ el ideal engendrado por g.

DEFINICIÓN 5.—Llamaremos *soporte* de un ideal $\mathfrak{a}$ a la unión conjuntista de todos los divisores primos mínimos de $\mathfrak{a}$:

$$\operatorname{sop}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} \text{ mínimo}$$

Si C es el conjunto de todos los divisores de cero más el cero, se verifica:

13. Sop $(\mathfrak{a})$ y C son conjuntos multiplicativamente cerrados, y

$$\delta = \operatorname{sop}(\mathfrak{a}) \cap C \tag{5}$$

es multiplicativamente cerrado.

14. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, $\mathfrak{a} \neq 1$, el conjunto:

$$S_{\mathfrak{a}} = A - (\mathfrak{a} \cup \delta) \tag{6}$$

es un sistema de denominadores.

DEMOSTRACIÓN.—a) 1 no pertenece a $\mathfrak{a}$ ni a ninguno de sus d.m.p., luego $1 \notin \mathfrak{a} \cup \delta$.

b). b₁) Si $s_1, \ldots, s_\alpha$ no son divisores de cero, $s_1 \ldots s_\alpha$ no es divisor de cero.

b₂) Sean $s_1, \ldots, s_r \in S_{\mathfrak{a}}$ y $s_1 \ldots s_r = 0$. Alguno de los s_i será divisor de cero. Si una parte de ellos no fuese divisor de cero, su producto (b₁) tampoco sería divisor de cero, luego el producto de los restantes factores sería cero. Por consiguiente, se puede suponer que todos los factores de $s_1, \ldots, s_r$ sean divisores de cero. Sea n el menor de los números tales que $s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_n} = 0$, siendo $\{s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}\} \subset \{s_1, \ldots, s_r\}$. Como $s_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, es $n > 1$. Supongamos, por tanto, $n = r$. Por la condición de mínimo será $s_1, \ldots, s_{r-1} \neq 0$. Como $s_r \notin \delta$, si $\mathfrak{p}$ es uno cualquiera de los d.m.p. de $\mathfrak{a}$, será $s_r \notin \mathfrak{p}$; luego $s_1, \ldots, s_{r-1} \in \mathfrak{p}$ y, como $\mathfrak{p}$ es primo, uno por lo menos de los factores $s_1, \ldots, s_{r-1}$ pertenecerá a $\mathfrak{p}$ y, por tanto a δ, contradicción.

15. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A, se verifica que

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow S_{\mathfrak{a}} \supset S_{\mathfrak{b}} \tag{7}$$

Demostración.—De $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ se deduce que todo d.m.p. de $\mathfrak{a}$ está contenido en uno, al menos, de los d.m.p. de $\mathfrak{b}$, luego, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow$ sop $\mathfrak{a} \subset$ sop $\mathfrak{b}$, luego, $\delta_{\mathfrak{a}} =$ sop $\mathfrak{a} \cap C, \subset \delta_{\mathfrak{b}} =$ sop $\mathfrak{b} \cap C$ y $\mathfrak{a} \cup \delta_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{b} \cup \delta_{\mathfrak{b}}$, de donde (7).

Definición 6.—Al anillo parcial de fracciones correspondiente al sistema de denominadores S_f lo representamos por A_f:

$$A_f = S_f^{-1}A \tag{8}$$

Al anillo parcial de fracciones correspondiente a $S_{\mathfrak{a}}$ lo representamos por $A_{\mathfrak{a}}$:

$$A_{\mathfrak{a}} = S_{\mathfrak{a}}^{-1}A \tag{9}$$

y le llamamos *anillo local parcial* correspondiente al ideal $\mathfrak{a}$.

16. $f \in S_{\mathfrak{a}} \Rightarrow S_f \subset S_{\mathfrak{a}}$. En efecto, $h \in S_f \Rightarrow h\,k = f \notin \mathfrak{a} \cup \delta$.

$h \in \mathfrak{a} \cup \delta \Rightarrow h \in \mathfrak{a}$, o $h \in \delta$. Si $h \in \mathfrak{a}$, sería $f \in \mathfrak{a}$, contradicción. Si $h \in \delta$, $f = h\,k \in \delta$, por ser $\delta =$ sop$(\mathfrak{a}) \cap C$, luego $h \notin \mathfrak{a} \cup \delta$.

17. $S_{\mathfrak{a}} = \bigcup\limits_{f \in S_{\mathfrak{a}}} S_f$.

§ 4. Propiedades de los anillos y módulos parciales de fracciones.

Sean M y N dos A-módulos y sea u un A-homomorfismo: $M \xrightarrow{u} N$. Si S es un sistema de denominadores de A, se verifica:

1. La aplicación $S^{-1}u$:

$$S^{-1}u\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{u(m)}{s} \tag{1}$$

es un homomorfismo de $S^{-1}M$ en $S^{-1}N$.

2. Si M, N y P son tres A-módulos, la conmutatividad del diagrama de la izquierda implica la conmutatividad del diagrama de la derecha:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & N \arrow[dl, "v"] \\ & P & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^{-1}M \arrow[rrrr, "S^{-1}u"] \arrow[rrddd, "S^{-1}w"'] & & & & S^{-1}N \arrow[llddd, "S^{-1}v"] \\ & M \arrow[lu, "i"'] \arrow[rr, "u"] \arrow[rd, "w"'] & & N \arrow[ru, "i_N"'] \arrow[ld, "v"] & \\ & & P \arrow[d, "i_P"] & & \\ & & S^{-1}P & & \end{tikzcd}$$

3. Si A y S son fijos, S^{-1} es un functor covariante de la categoría $\mathbf{C} = \{M, u\}$ de los A-módulos en la $S^{-1}\mathbf{C} = \{S^{-1}M, S^{-1}u\}$ de los $S^{-1}A$-módulos parciales de fracciones respecto del sistema de denominadores S.

4. Si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ es una sucesión nula ($vu = 0$), la sucesión $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}v} S^{-1}P$ es también nula.

5. Si S y T son dos sistemas de denominadores tales que $S \subset T$, se puede definir la siguiente correspondencia:

$$S^{-1}A \xrightarrow{\rho^{TS}} T^{-1}A \quad ; \quad \rho^{TS}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{s} \in T^{-1}A \tag{2}$$

la correspondencia (2) es un *homomorfismo,* que llamaremos *natural.*

6. Una definición análoga sirve para módulos. Si M y N son A-módulos y $S \subset T$ sistemas de denominadores, se verifica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}u} & S^{-1}N \\ \rho^{TS}\downarrow & & \downarrow\rho^{TS} \\ T^{-1}M & \xrightarrow{T^{-1}u} & T^{-1}N \end{array}$$

7. Si S y T son dos sistemas de denominadores, $S \cap T$ es un sistema de denominadores, ya que $1 \in S \cap T$, luego $S \cap T$ no es vacío. Por consiguiente, si se ordena el conjunto $\{S\}$ formado por todos los sistemas de denominadores mediante la relación $\subset$ de inclusión, se verifica que $\{S\}$ *es un sistema filtrante inferiormente.* En particular, el conjunto $\{S_f\}_{f\in A}$ es subconjunto del anterior y posee el mismo mínimo, S_1. Si $fg \neq 0$, se verifica que $S_f \subset S_{fg}$, $S_g \subset S_{fg}$.

8. El sistema $\mathbf{A} = \{A_f, \rho_{fg}\}$, en donde, para todo $A_f \subset A_g$ es

$$A_f \xrightarrow{\rho_{gf}} A_g, \qquad \rho_{gf}\left(\frac{a}{f}\right) = \frac{a}{f} \in A_g \tag{3}$$

el homomorfismo natural, es un sistema inductivo. Ya que, para todo $A_f \subset A_g \subset A_h$ se verifica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[rr, "\rho_{gf}"] \arrow[dr, "\rho_{hf}"'] & & A_g \arrow[dl, "\rho_{hg}"] \\ & A_h & \end{tikzcd} \tag{4}$$

9. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal arbitrario de A, el sistema $\mathbf{A}_\mathfrak{a} = \{A_f, \rho_{gf}\}_{f,g \in S_\mathfrak{a}}$ es un sistema inductivo. Sea $\mathbf{C} = \{A_S; \rho_{TS}\}$ la categoría de los anillos parciales de fracciones de A. Se verifica el siguiente:

TEOREMA 1:

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ f \in S_\mathfrak{a}}} A_f = A_\mathfrak{a} \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $T^{-1}A$ un anillo arbitrario de $\mathbf{C}$ y τ_f, $f \in S_\mathfrak{a}$ una familia de homomorfismos:

$$A_f \xrightarrow{\tau_f} T^{-1}A,$$

tales que, $\forall A_f \subset A_g$; $f, g \in S_\mathfrak{a}$, se verifique que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d, "\rho_{gf}"'] & T^{-1}A \\ A_g \arrow[ur, "\tau_g"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Sea $\tau: A_\mathfrak{a} \longrightarrow T^{-1}A$, la correspondencia definida del siguiente modo: $\forall x \in A_\mathfrak{a}$, si $x \in A_f$, $f \in S_\mathfrak{a}$, se pone:

$$\tau(x) = \tau_f(x) \tag{6}$$

1) *La correspondencia τ es una aplicación.* a) Como todos los homomorfismos considerados transforman el elemento unidad en el elemento unidad, si $h \in S_f$, se verifica que $\frac{h}{1}$ y $\frac{1}{h}$, pertenecientes a A_f, son multiplicables, siendo $\frac{h}{1}\frac{1}{h} = \frac{1}{1}$. Por consiguiente:

$$\frac{1}{1} = \tau_f\left(\frac{1}{1}\right) = \tau_f\left(\frac{h}{1}\frac{1}{h}\right) = \tau_f\left(\frac{h}{1}\right)\tau_f\left(\frac{1}{h}\right) \in T^{-1}A$$

que prueba que $\tau_f\left(\frac{h}{1}\right)$ es invertible en $T^{-1}A$.

b) Todo elemento invertible en $T^{-1}A$ posee un único inverso. En efecto, si $y, z, t \in T^{-1}A$ y $yz = 1$, $yt = 1$, por ser 1 multiplicable por t es $(yz)\,t = t$, de donde $(zy)t = t$. Por existir yt, $z(yt)$, zy y $(zy)t$, resulta que $(zy)t = z(yt)$, luego, $z = t$.

c) De $A_1 \subset A_h$, para todo $h \in A$, resulta la conmutatividad del diagrama:

(7)
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\rho_{h1}"'] & T^{-1}A \\ A_h \arrow[ur, "\tau_h"'] & \end{tikzcd} \quad ; \qquad \forall\ h \in S_\alpha$$

y de esta conmutatividad se deduce que $\tau_1\left(\frac{f}{1}\right) = \tau_h\rho_{h1}\left(\frac{f}{1}\right)$, de donde resulta que la imagen en τ_h de $\frac{f}{1}$, considerado como perteneciente a A_h, cualquiera que sea $h \in S_\alpha$, es el mismo elemento que la imagen de $\frac{f}{1}$ considerado como perteneciente a A_1. Como $\tau_f\left(\frac{f}{1}\right)$ posee inverso único en $T^{-1}A$, resulta que $\tau_1\left(\frac{f}{1}\right) =$ $= \tau_h\left(\frac{f}{1}\right)$ posee inverso único en $T^{-1}A$, cualesquiera que sean h y f.

d) Supongamos que $x \in A_\alpha$, perteneciese a dos anillos parciales, A_f y A_g: $x = \frac{y}{f}$, $x = \frac{z}{g}$, $\frac{y}{f} = \frac{z}{g}$ en A_α. Por consiguiente, $T(gy - fz) = 0$, $T =$, $s_1 \ldots s_r$, $s_i \in S_\alpha$, $i = 1, \ldots, r$. De donde: $(s_1 \ldots s_r)gy = (s_1 \ldots s_r)fz \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(s_1 \ldots s_r)(gy)}{1} = \frac{(s_1 \ldots s_r)(fz)}{1}$, en $A_1 \Leftrightarrow \frac{s_1}{1}\ \frac{s_2 \ldots s_r gy}{1} =$ $= \frac{s_1}{1}\ \frac{s_2 \ldots s_r fz}{1}$ en A_{s_1}. Ahora bien, como $\frac{1}{s_1}$ es multiplicable (en A_{s_1}) por $\frac{s_1}{1}$ y por $\frac{(s_1 \ldots s_r)(gy)}{1}$, y como $\frac{(s_2 \ldots s_r)gy}{1}$ es multiplicable por $\frac{s_1}{1}$ y por $\frac{1}{s_1}\ \frac{s_1}{1} = \frac{1}{1}$ y análogo razonamiento sirve para el segundo miembro de la igualdad precedente, se puede aplicar, a la igualdad que resulta al multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{s_1}$, la ley asociativa, y resulta:

$$\frac{s_2 \ldots s_r gy}{1} = \frac{s_2 \ldots s_r fz}{1} \text{ en } A_{s_1} \tag{8}$$

En virtud de (7), resulta de (8) que

$$\tau_1\left(\frac{s_2 \ldots s_r gy}{1}\right) = \tau_1\left(\frac{s_2 \ldots s_r fz}{1}\right) \text{ en } T^{-1}A$$

y, en virtud de (7)

$$\tau_{s_2}\left(\frac{s_2 \dots s_r g y}{1}\right) = \tau_{s_2}\left(\frac{s_2 \dots s_r f z}{1}\right)$$

de donde

$$\tau_{s_2}\left(\frac{1}{s_2}\right)\ \tau_{s_2}\left(\frac{s_2 \dots s_r g y}{1}\right) = \tau_{s_2}\left(\frac{1}{s_2}\right)\ \tau_2\left(\frac{s_2 \dots s_r f z}{1}\right)$$

y procediendo como para s_1,

$$\tau_2\left(\frac{s_3 \dots s_r g y}{1}\right) = \tau_{s_2}\left(\frac{s_3 \dots s_r f z}{1}\right)$$

de donde, en virtud de (7)

$$\tau_1\left(\frac{s_3 \dots s_r g y}{1}\right) = \tau_1\left(\frac{s_3 \dots s_r f z}{1}\right)$$

Así siguiendo, se llega a

$$\tau_1\left(\frac{gy}{1}\right) = \tau_1\left(\frac{fz}{1}\right) \Rightarrow \tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{y}{1}\right) = \tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{z}{1}\right) \tag{9}$$

Ahora bien,

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} \tau_f\left(\frac{y}{f}\right) &= \tau_f\left(\frac{y}{1}\ \frac{1}{f}\right) = \tau_f\left(\frac{y}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{1}{f}\right) = \tau_1\left(\frac{y}{1}\right)\ \left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\right]^{-1} \\ \tau_g\left(\frac{z}{g}\right) &= \tau_g\left(\frac{z}{1}\ \frac{1}{g}\right) = \tau_g\left(\frac{z}{1}\right)\ \tau_g\left(\frac{1}{g}\right) = \tau_1\left(\frac{z}{1}\right)\ \left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \right.$$

De (9) se deduce, en virtud de (7):

$$\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_f\left(\frac{f}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{z}{1}\right),$$

y, de la existencia de los productos (en A_f): $\frac{1}{f}\ \frac{f}{1} = \frac{1}{1}$, $\frac{f}{1}\ \frac{z}{1} = \frac{fz}{1}$, $\frac{1}{f}\ \frac{fz}{1} = \frac{z}{1}$, $\left(\frac{1}{f}\ \frac{f}{1}\right)\ \frac{z}{1} = \frac{z}{1}$, se deduce la existencia de sus transformados mediante τ_f y, por tanto, se puede aplicar la ley asociativa, con lo que resulta:

$$(11)\quad \left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\right]^{-1}\left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{z}{1}\right)\right] = \tau_f\left(\frac{1}{f}\right)\left[\tau_f\left(\frac{f}{1}\right)\cdot\tau_f\left(\frac{z}{1}\right)\right] =$$

$$= \tau_f\left(\frac{1}{f}\,\frac{f}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_f\left(\frac{1}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_f\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_1\left(\frac{z}{1}\right)$$

De (9) y (11) se deduce:

$$(12)\quad \left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{y}{1}\right)\right]\left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\right]^{-1} = \tau_1\left(\frac{z}{1}\right)$$

De la existencia de los productos:

$$\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{y}{1}\right),\quad \left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{y}{1}\right)\right]\left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\right]^{-1}$$

$$\tau_1\left(\frac{y}{1}\right)\left[\tau_1\left(\frac{f}{1}\right)\right]^{-1} = \tau_f\left(\frac{y}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{1}{f}\right) = \tau_f\left(\frac{y}{f}\right)$$

y

$$\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\left[\tau_1\left(\frac{y}{1}\right)\ \tau_1\left(\frac{f}{1}\right)^{-1}\right] = \tau_f\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{y}{f}\right) = \tau_f\left(\frac{gy}{f}\right)$$

se deduce que se puede aplicar la ley asociativa al primer miembro de (12), y se obtiene:

$$(13)\quad \tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{y}{f}\right) = \tau_1\left(\frac{z}{1}\right)$$

De $\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1}\ \tau_1\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_g\left(\frac{1}{g}\right)\ \tau_g\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_g\left(\frac{z}{g}\right)$, se deduce la existencia del producto $\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1}\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\ \tau_f\left(\frac{y}{f}\right)\right]$. Como también existen los productos: $\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1} \tau_1\left(\frac{g}{1}\right) = \frac{1}{1}$, $\tau_1\left(\frac{g}{1}\right) \ \tau_f\left(\frac{y}{f}\right) = \tau_f\left(\frac{gy}{f}\right)$ y $\left[\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1} \tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right] \tau_f\left(\frac{y}{f}\right) = \tau_f\left(\frac{y}{f}\right)$, se puede aplicar la ley asociativa al siguiente producto, y se obtiene:

$$\left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1} \left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right) \ \tau_f\left(\frac{y}{f}\right)\right] = \tau_f\left(\frac{y}{f}\right)$$

y de (13) resulta:

$$\tau_f\left(\frac{y}{f}\right) = \left[\tau_1\left(\frac{g}{1}\right)\right]^{-1} \tau_1\left(\frac{z}{1}\right) = \tau_g\left(\frac{z}{g}\right). \tag{14}$$

2) *La aplicación* τ *es un homomorfismo.* Sean $\frac{x}{f}$ e $\frac{y}{g}$ dos elementos de A_α sumables. Esto significa que $\frac{x}{f} = \frac{x'}{h}$, $\frac{y}{g} = \frac{y'}{h}$, $h \in S_\alpha$, luego:

$$\tau\left(\frac{x}{f} + \frac{y}{g}\right) = \tau\left(\frac{x'+y'}{h}\right) = \tau_h\left(\frac{x'+y'}{h}\right) =$$

$$= \tau_h\left(\frac{x'}{h}\right) = \tau_h\left(\frac{y'}{h}\right) = \tau\left(\frac{x'}{h}\right) + \tau\left(\frac{y'}{h}\right) = \tau\left(\frac{x}{f}\right) + \tau\left(\frac{y}{g}\right).$$

Sean $\frac{x}{f}$ e $\frac{y}{g}$ multiplicables en A_α. Por consiguiente, $\frac{x}{f} = \frac{x'}{f'}$, $\frac{y}{g} = \frac{y'}{g'}$, $f'g' \in S_\alpha$. Luego, $\frac{x}{f} \in A_{f'g'}$, $\frac{y}{g} \in A_{f'g'}$, y, por tanto,

$$\tau\left(\frac{x}{f} \ \frac{y}{g}\right) = \tau\left(\frac{x'}{f'} \ \frac{y'}{g'}\right) = \tau\left(\frac{x'y'}{f'g'}\right) = \tau_{f'g'}\left(\frac{x'y'}{f'g'}\right)$$

$$= \tau_{f'g'}\left(\frac{x'}{f'}\right) \ \tau_{f'g'}\left(\frac{y'}{g'}\right) = \tau\left(\frac{x'}{f'}\right) \ \tau\left(\frac{y'}{g'}\right) = \tau\left(\frac{x}{f}\right) \ \tau\left(\frac{y}{g}\right)$$

3) Los diagramas

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "\tau"] & T^{-1}A \\ A_f \arrow[u, "\rho_f"] \arrow[ur, "\tau_f"'] & \end{tikzcd} \qquad ; \qquad f \in S_\alpha$$

son conmutativos para todo $f \in S_\alpha$.

4) τ es único, en virtud de su construcción.

§ 5. Prehaz asociado a un anillo o a un módulo.

1. Se verifican las siguientes equivalencias:

$$(1)\qquad f = gh \Leftrightarrow S_g \subset S_f \Rightarrow \exists\ \rho_{fg} : A_g \xrightarrow{\rho_{fg}} A_f \Leftrightarrow D(g) \supset D(f).$$

DEMOSTRACIÓN.—Queda únicamente por probar la última equivalencia. $\Rightarrow$ Sea $x \in V(g) \Leftrightarrow g \in j_x \Rightarrow f = gh \in j_x \Rightarrow x \in V(f)$. Luego $V(g) \subset V(f)$ y $D(g) \supset D(f)$.

$\Leftarrow$, $D(g) \supset D(f) \Leftrightarrow V(g) \subset V(f) \Leftrightarrow V\big(A(g)\big) \subset V\big(A(f)\big) \Rightarrow A(g) \in V\big(A(f)\big) \Rightarrow A(f) \subset A(g) \Rightarrow f \in A(g) \Rightarrow f = gh.$

2. Sea $D(E)$ un abierto débil arbitrario de X. Se verifica que $f \in A(E) \Leftrightarrow D(f) \subset D(E)$.

En efecto, $D(f) \subset D(E) \Leftrightarrow V(f) \supset V(E) \Leftrightarrow A(E) \in V(f) \Leftrightarrow f \in A(E)$.

3. Dado un ideal $A(E)$ arbitrario de A, representaremos por A'_E al producto directo de los anillos parciales de fracciones:

$$(2)\qquad A'_E = \prod_{f \in A(E)} A_f$$

Respecto de las definiciones usuales de adición y de multiplicación, A'_E es un anillo parcial. Sea A_E la parte de A'_E formada por aquellos elementos $\left(\frac{a_f}{f}\right)_{f \in A(E)}$ tales que, para todo par (f, g) de elementos pertenecientes a $A(E)$ tales que $S_g \subset S_f$ se verifique que $\rho_{fg}\left(\frac{a_g}{g}\right) = \frac{a_f}{f}$. Si $\left(\frac{a_f}{f}\right)_{f \in A(E)}$ y $\left(\frac{b_f}{f}\right)_{f \in A(E)}$ son sumables (multiplicables) en A'_E, para todo par (f, g), tal que $S_g \subset S_f$, se verificará que $\rho_{fg}\left(\frac{a_g}{g} + \frac{b_g}{g}\right) = \rho_{fg}\left(\frac{a_g}{g}\right) + \rho_{fg}\left(\frac{b_g}{g}\right) = \frac{a_f}{f} + \frac{b_f}{f}$ (análogamente para el producto). El elemento cero de A'_E pertenece a A_E. El opuesto a todo elemento de A_E pertenece a A_E, y el elemento unidad de A'_E pertenece a A_E. Por consiguiente, A_E es un subanillo de A'_E .

4. Para todo elemento $f \in A$ se verifica que:

$$A_{\{f\}} \approx A_f$$

Como consecuencia de este isomorfismo, identificaremos estos dos anillos parciales.

DEFINICIÓN 1. Al anillo parcial A_E le llamaremos *anillo parcial asociado a E*.

DEFINICIÓN 2. Designaremos por $\mathbf{C}$ la categoría formada por todos los anillos parciales de fracciones de A y todos los anillos asociados a los elementos de $\mathbb{R}(A)$, como objetos, y a sus homomorfismos, como morfismos.

DEFINICIÓN 3. Si A no posee elementos nilpotentes, a la base $\mathbb{B} = \{D(f)\}_{f\in A}$ del espacio topológico débil X, le asociaremos el prehaz $\mathfrak{F}$, definido del siguiente modo:

$$\mathfrak{F}(D(f)) = A_f$$

$$D(f) \supset D(g) \Rightarrow \mathfrak{F}(D(f)) \xrightarrow{\rho_{gf}} \mathfrak{F}(D(g))$$

5. $\mathfrak{F}$ es un prehaz sobre $\mathbb{B}$ con valores en $\mathbf{C}$.

Es consecuencia de (1) y de (4) § *4*, ya que, por no poseer A elementos nilpotentes todos los anillos A_f son anillos parciales de fracciones.

6. TEOREMA 2.—*Al prehaz $\mathfrak{F}$ sobre $\mathbb{B}$ son valores en $\mathbf{C}$ le corresponde un único prehaz $\mathfrak{F}'$ sobre X con valores en $\mathbf{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea D(E) un abierto débil arbitrario de X. El sistema $\mathbf{A} = \{\mathfrak{F}(D(f)), \rho_{gf}\}_{D(f)\subset D(E)}$ es un sistema proyectivo, ya que para todo

$$D(E) \supset D(h) \supset D(g) \supset D(f)$$

se verifica que

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(D(h)) \arrow[rr, "\rho_{gh}"] \arrow[dr, "\rho_{fh}"'] & & \mathfrak{F}(D(g)) \arrow[dl, "\rho_{fg}"] \\ & \mathfrak{F}(D(f)) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se verifica que $A_E = \varprojlim_{D(f)\subset D(E)} \mathfrak{F}(D(f))$. En efecto, sea

$$(3) \qquad A_E \xrightarrow{\rho_f} \mathfrak{F}(D(f)); \qquad \rho_f\left(\left\{\frac{a_f}{f}\right\}_{f\in A(E)}\right) = \frac{a_f}{f}$$

ρ_f es un homomorfismo y se verifica que

(4)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(D(f)) \arrow[rr, "\rho_{gf}"] & & \mathfrak{F}(D(g)) \\ & A_E \arrow[ul, "\rho_f"] \arrow[ur, "\rho_g"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ D(f) \supset D(g)$$

es conmutativo. Sea B un anillo arbitrario de $\mathbf{C}$ y v_f un sistema de homomorfismos tal que, $\forall\ D(f) \supset D(g)$ se verifique que

(5)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v_f"] \arrow[dr, "v_g"'] & \mathfrak{F}(D(f)) \arrow[d, "\rho_f"] \\ & \mathfrak{F}(D(g)) \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Sea $v(z) = \{v_f(z)\}_{D(f)\subset D(E)}$, $\forall\ z \in B$. En virtud de (5) se verifica que $v(z) \in A_E$. Además de la definición resulta que todos los diagramas

(6)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_f"'] & A_E \arrow[d, "\rho_f"] \\ & A_f \end{tikzcd} \qquad D(f) \subset D(E)$$

son conmutativos, luego:

(7)
$$\varprojlim_{D(f)\subset D(E)} \mathfrak{F}(D(f)) = A_E$$

El teorema es, por tanto, consecuencia de (3.2.1). Cap. 0 de [2.]

Poniendo $\mathfrak{F}'(E) = \varprojlim_{D(f)\subset D(E)} (\mathfrak{F}(D(f))$, resulta que si D(E) y D(E′) son dos abiertos débiles arbitrarios tales que $D(E) \subset D(E')$, para todo $D(f) \subset D(E)$ existe el homomorfismo canónico

(8)
$$\mathfrak{F}'(D(E')) \xrightarrow{\rho_f} \mathfrak{F}(D(f))$$

y como se verifica que, para todos D(f) y (D(f)), tales que $D(E) \supset D(f) \supset D(g)$, son conmutativos los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}'(D(E')) \arrow[r, "\rho_f"] \arrow[dr, "\rho_g"'] & \mathfrak{F}(D(f)) \arrow[d, "\rho_{gf}"] \\ & \mathfrak{F}(D(g)) \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo único $\rho_{D(E),\,D(E')}$:

$$\mathfrak{F}'(D(E')) \xrightarrow{\rho_{D(E),\,D(E')}} \mathfrak{F}'(D(E))$$

7. TEOREMA 3.—*Si el anillo* A *es entero, el prehaz* $\mathfrak{F}'$ *es un haz.* Basta aplicar la condición (F_0) de (3.2.2.). Cap. 0 de [2].

LITERATURA

[1] P. ABELLANAS: *Théorie arithmétique des correspondences algébriques,* "Rev. Mat. Hisp. Am." (1948).

[2] A. GROTHENDIECK: *Eléments de Géométrie Algébrique,* I, (1960), I. H. E. S. (n.º 4)

Madrid, 15 de agosto de 1965.
Instituto Jorge Juan del C. S. I. C.
Universidad de Madrid.