UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Metodología Educativa (Didáctica)

SOBRE LA SIMBOLIZACIÓN EN EL ÁLGEBRA
APLICACIÓN AL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS DESIGUALDADES EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

M.ª Mercedes Díez Barrabés

Madrid, 1995

Colección Tesis Doctorales. N.º 256/95

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.
Madrid, 1995.
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-16.088-1995

La Tesis Doctoral de D. Mª Mercedes Díez Barrabés

Titulada Sobre la simbolización en el algebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en educación secundaria.

Director Dr. D. Félix González Jiménez

fue leida en la Facultad de Educación

de la UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, el día 17

de enero de 1992, ante el tribunal

constituido por los siguientes Profesores:

PRESIDENTE Antonio Monclús Estella

VOCAL Vicente Camarena Badía

VOCAL Félix Sepúlveda Barrios

VOCAL Victor Arenzana Hernández

SECRETARIO José Mª Ruiz Ruiz

habiendo recibido la calificación de

APTO CUM LAUDE UNANIMIDAD

Madrid, a 17 de ENERO de 1992.

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a mi director de tesis, profesor Félix E. González Jiménez, por su comprensiva y flexible dirección del trabajo; por sus aportaciones pedagógicas y didácticas, y por la seguridad y confianza que me *transmitió en los momentos difíciles; gracias a lo cual* esta tesis ha llegado a escribirse.

De una forma muy especial, quiero agradecer al profesor Guy Brousseau, como la persona que me dirigió en la realización del DEA (Diplôme d'études Approfondies) en Didáctica de las Matemáticas y que despertó mi interés por la consecución de esta tesis. Con su ayuda fué estructurada inicialmente, y su colaboración ha continuado, en repetidas ocasiones, cuando he acudido a él, como apoyo y referencia, durante el tiempo que ha durado la realización de la misma, *encontrando siempre la cariñosa acogida y el sabio consejo.*

Tengo que agradecer la desinteresada ayuda del profesor Jose Manuel Garcia Ramos en parte de los estudios estadísticos.

Agradezco al profesor Rafael Rodriguez Vidal su apoyo y ayuda para la localización de algunos libros a los que no hubiera tenido acceso de otro modo.

Mi agradecimiento al director y los profesores del Instituto Politécnico Virgen del Pilar, que me permitieron realizar la experimentación de las lecciones, y que colaboraron generosamente con sus sugerencias y buena disposición al desarrollo de la misma. De manera singular quiero nombrar a las profesoras Felisa Sánchez y Mª José Cenzano por su apoyo en el proyecto.

Del mismo modo agradezco cariñosamente al director y a mis compañeros del INB "Félix de Azara" su colaboración entusiasta, especialmente a los profesores Gonzalo Gonzalvo, Vicente Trigo y Ramón Herrero que, con su ayuda, hicieron posibles la grabación de las lecciones y la realización de análisis estadísticos por ordenador.

Doy las gracias a Carmen Magaña, Virginia, Bárbara y Angela Marqués Diez, por su ayuda en el trabajo técnico del ordenador.

Y, en general, a todas aquellas personas que me han animado y apoyado con su amistad desinteresada. A mi marido y mis hijos, particularmente, que han sufrido conmigo las tensiones propias de un trabajo como éste, y que han sido mi empuje y mi solidario soporte.

- * -

ÍNDICE

CAPÍTULO 1º

CAPÍTULO 4º

CAPÍTULO 5º

CAPíTULO 7º

-.-.-.-.-.-.-

CAPITULO 1º

Podríamos considerar que hay un campo previo, natural, que es la aritmètica, el campo primero. El àlgebra seria un medio de hablar de la aritmètica, de hablar de cosas aritmèticas que pedirian un contrato didàctico un poco especial con los alumnos.

Este es un punto de vista meta-aritmètico.

(Guy Brousseau)

/========================/

I. INTRODUCCIÓN: APROXIMACIÓN AL PROBLEMA

Las dificultades encontradas por los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas han movido a los profesores frecuentemente a modificar sus clases, pero a pesar de ello, la inadecuada apropiación de los conocimientos matemáticos ha continuado siendo un motivo de preocupación para enseñantes e investigadores en Didáctica. De este modo los últimos quince años han producido investigaciones importantes sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en general y sobre el Algebra en particular.

En la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas tenemos nombres tan prestigiosos como G. Brousseau en Burdeos, R. Douady y M. Artigue en París, Y. Chevallard en Marsella y tantos otros.

En la escuela inglesa: K. Hurt, L. Booth con el programa CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) seguido del SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics)

En la escuela italiana: P. Boero, E. Castelnuovo, M. Barra, L. Grugnetti, M. Pellerey.

En la escuela holandesa: H. Freudenthal, J. de Lange.

En la escuela canadiense: C. Gaulin, C. Kieran,

C. Janvier.

O como A. Sierpinska en la escuela polaca.

Y profesores ya desaparecidos que figurarán en la historia de la Didáctica de las Matemáticas como C. Gattegno, W. Servais, A.Z. Krygowska, junto con los españoles: Rey Pastor (Lo. 1888 - 1962 Arg.) y Puig Adam (B. 1900 - 1960 M.) pioneros en sentir los problemas derivados de la enseñanza de las Matemáticas y en buscar las soluciones más adecuadas.

En cuanto a mi personal interés en la Didáctica podría decir que de la inocente ambición de "enseñar matemáticas" he derivado a la más compleja intención de "ayudar a hacer matemáticas" a los alumnos, con el consiguiente cambio didáctico que supone pasar de: "enseñar el profesor" a "aprender el alumno".

De esta manera, he pasado también de intentar mejorar mi exposición a los alumnos, y buscar ejercicios y problemas adecuados e interesantes, a tratar de crear situaciones de aprendizaje en las que el conocimiento pudiera surgir por si mismo. Situaciones en las que el alumno, *con una mínima y muy especial ayuda del profesor*, pudiera crear, con sus propias potencialidades, el conocimiento que, como docente, yo hubiera intentado 'transmitirle' en mis etapas anteriores de enseñante.

Podría decir que ahora me siento "educadora en Matemáticas" en el sentido etimológico de la palabra "educar"(*). Para conseguir esta 'conducción' del alumno y este 'sacar afuera' de los alumnos (que yo llamaria en términos actuales: "que el alumno sea capaz de expresar") es para lo que acudí a la Didáctica.

Cuando me matriculé en el D.E.A.(Diploma de Profundización de Estudios) en Didáctica de las Matemáticas, en Burdeos, me sentía ya interesada por el problema de la simbolización algebraica. Por esto elegí el Algebra como tema para iniciarme en la investigación.

El empleo de las letras en Algebra siempre había ofrecido a mis alumnos más dificultades de las que yo hubiera considerado como normales en cualquier aprendizaje. Intentar hacer una demostración, una simplificación o un cálculo "con letras" eran actividades que producían un alto fracaso escolar. Mucho más alto que cuando se debían realizar con números expresados en forma directa.

Sin embargo y junto con esto, también había tenido una experiencia muy positiva en el empleo de las letras:

Durante el primer curso de Bachillerato los alumnos de 14-15 años, en España, deben estudiar Combinatoria: Variaciones, Permutaciones y Combinaciones, según el

---

(*) Educar: Tom. del lat. èdùcàre íd.(emparentado con 'dùcère' "conducir", 'educere' "sacar afuera", "criar")

(Corominas. Breve diccionario etimológico de la lengua castellana. 3ª edición) programa oficial y aunque el empleo de las fórmulas para calcular el número de variaciones, combinaciones o permutaciones no parecía presentar muchos inconvenientes en cuánto a la mecánica de aplicación, si encontraban los alumnos dificultades en cuánto a la elección de la fórmula adecuada a cada problema, de modo que hubo un momento en que decidí hacer un cambio en la manera de presentar el tema buscando que los propios alumnos fueran "descubriendo" estas fórmulas mediante la generalización progresiva de los casos particulares.

Comenzaba el aprendizaje con la presentación de cinco problemas de los "de contar" sin haber explicado la teoría previamente. La consigna era simplemente:"Resolver estos problemas" (al modo del solving-problems)

Se pretendía, con este proceder, que los alumnos enfrentaran la resolución de esos problemas usando sus anteriores conocimientos como estrategia de base, para que, modificando esa estrategia de acuerdo con las demandas de la situación, éstas fueran ayudando a articular un modo de actuación del alumno, para que fuera adquiriendo nuevos conocimientos y nuevas estrategias.

Los problemas eran del tipo habitual. Como ejemplo puede servir el siguiente:

> "Entre los cuarenta alumnos de una clase se va a elegir un equipo directivo para las actividades extraescolares formado por un coordinador, un secretario y un animador. ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?¿En cuántos equipos diferentes figurará Alfonso como secretario?"

Para la resolución se preparaba la clase en grupos

8 grupos de =============== 5 alumnos

Tiempo de resolución:

1 hora	2 problemas
1 hora	2 problemas
1 hora	1 problema y puesta en común

El primer día, a los 10 minutos de comenzar, se les iba sugiriendo, de grupo en grupo, la técnica de representar en un esquema gráfico las posibilidades, para "poder contarlas ordenadamente" -es decir lo que llamamos los diagramas en árbol-. Esta era la única indicación que se les hacía como ayuda para su trabajo.

Durante la tercera hora, al realizar la puesta en común en la pizarra, los alumnos iban obteniendo las secuencias numéricas de factores decrecientes:

40.39.38
39.38

o bien para otros ejercicios:

7.6.5.4.3.2.1
ó 5.4.3.2.1
...

En este punto se les pedía una fórmula que sirviera para resolver problemas del mismo tipo pero con un número distinto de elementos y se encontraban sin apenas dificultad las generalizaciones:

n(n-1)(n-2)....(n-p+1)   ó

n(n-1)......3.2.1

Las letras así aparecían naturalmente dando solución a una necesidad de expresión. A una generalización del método empleado.

De este modo las fórmulas eran obtenidas 'por ellos mismos' sin mayores dificultades. (Respecto al tema de la Combinatoria, se conseguía que el alumno asociara las fórmulas con sus respectivas situaciones, pues al ser creadas con la propia génesis del alumno, éste conocía "sus" fórmulas y sabía cuál era su dominio de aplicación).

Las letras ahora tenían un significado claro para ellos y su empleo, lejos de constituir una dificultad, se revelaba como una ayuda para expresar "la regla" y así preparar el cálculo.

Esto *me* hizo pensar que **ciertas formas de introducir las letras** podían ayudar a la *mejor comprensión* y manejo de ellas y decidí reflexionar e insistir en el análisis de los fenómenos que se producen al introducirlas.

Parecía ser un problema de Didáctica y ésto me estimulaba a estudiarlo más a fondo. Era realmente mi trabajo como profesora lo que estaba enfocando: ¿Cuál era la mejor manera de que los alumnos se familiarizaran con las letras, con su comprensión y su utilización? ¿En qué momento comenzaban las dificultades de los alumnos con el uso de las letras? ¿Cómo se hacían patentes estas dificultades?: ¿Por errores en el cálculo? ¿Por el rechazo, a veces consciente, ó, a veces inconsciente, de ellas? ¿Por su incorrecta utilización?

Por otra parte, las letras forman parte substancial de las ecuaciones, inecuaciones y funciones. Todos estos temas son tratados, en su iniciación, en los últimos años de Enseñanza General Básica y durante el Bachillerato, de modo que las deficiencias en el manejo de las letras repercuten claramente en la inadecuada adquisición de otros muchos conceptos relacionados con ellas.

El uso de las letras se encuentra fuertemente ligado al Álgebra elemental y a los razonamientos de tipo algebraico. Las letras son algunos de los símbolos que usamos en el Álgebra, aunque no sean los únicos. Son elementos muy importantes de un conjunto de símbolos, signos y reglas que se articulan para un modo de razonar y de obtener conclusiones.

De este modo me encontré investigando, no sólo los fenómenos didácticos producidos por el uso de las letras sino aquellos otros ligados al álgebra e incluso cuestionándome qué era realmente aquello que llamábamos Álgebra: ¿Era el Álgebra un objeto matemático susceptible de ser enseñado?. ¿Era el álgebra un lenguaje simbólico con una sintaxis propia? Si se trataba de un lenguaje, ¿no cabía la posibilidad de que los símbolos empleados tuvieran distintos significados según el conjunto de las relaciones entre las que se encontraran, del mismo modo que en el lenguaje natural las palabras pueden variar parcialmente su significado según el contexto en el que se escriben?

Y así surgieron más preguntas: ¿Qué es enseñar álgebra? ¿Se puede enseñar el álgebra? ¿Saber álgebra es saber calcular? ¿Cuál es en realidad el álgebra que se debe y se puede enseñar? ¿Estamos de acuerdo los matemáticos, investigadores o docentes, sobre lo que es el álgebra?

Empecé por investigar esta definición. Lo hice desde un punto de vista sociocultural y desde el punto de vista de los docentes. Después estudié el nacimiento del Algebra históricamente, su evolución de Algebra retórica a Algebra sincopada (término universalmente aceptado que quiere decir Algebra en abreviaturas) y posteriormente simbólica, observando en particular la aparición del uso generalizado de las letras.

Me interesó, también, recoger algunas posiciones actuales respecto a la enseñanza del álgebra, que incluyo en el apartado II.2, para mostrar algunos de los esfuerzos que se están haciendo para mejorar su introducción.

II.1. EL ALGEBRA ¿QUE ES?

Esta parte de las Matemáticas ha ido sufriendo esenciales transformaciones desde su aparición en el pensamiento humano hasta nuestros días.

No sólo el contenido del álgebra ha ido cambiando, como ha sucedido con otras partes de las matemáticas a consecuencia de la evolución de los conocimientos y el descubrimiento de otros nuevos, sino que la propia palabra Algebra ha ido variando su significado.

Desde referirse a un método de resolución de ecuaciones hasta llegar a ser un objeto de estudio matemático con definición y significado propios.

II.1.1. DEFINICION "CULTURAL" DE ALGEBRA

Si consultamos una enciclopedia, nos encontraremos ya con varias acepciones diferentes que reflejan un poco esta evolución; tomaremos solamente las referentes a la Matemática.

Algebra: Palabra latina. Derivada de la palabra árabe AL-YABR = reducción.

Acepción I. "Parte de las Matemáticas que trata de la cantidad en general, valiéndose para representarla de letras u otros símbolos. Su objeto es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números.

Simplificar: Usando letras para los números que se buscan.

Generalizar: Empleando números negativos. (Las reglas de cálculo relativas a ellos tienen algo de arbitrario, se han elegido de modo que posean las mismas propiedades que las aritméticas correspondientes, lo único a comprobar es que no conduzcan a conclusiones contradictorias, prescindiendo de su valor filosófico)"(*)

<u>Acepción II.</u>"Modernamente, se llama Algebra a un espacio vectorial V en el que se define una nueva ley de composición X, de modo que V sea un anillo y que para todo escalar a se verifique:

$$a.uXv = uXa.v = a(uXv)$$

De acuerdo con esta definición forman un <u>álgebra</u>: Los números complejos. Las matrices cuadradas de orden n. Los polinomios de una variable con coeficientes reales".

<u>Acepción III.</u>"En Lógica. Se conoce como "Algebra de la lógica" la aplicación de los métodos algebraicos a las relaciones lógicas. Boole trataba por este método de ampliar la lógica formal clásica. Sus investigaciones terminaron en la creación de la <u>lógica matemática</u>".

En la acepción II observamos que, "modernamente", ya se define como un <u>objeto matemático</u>: una estructura. Lo cual supone una variación importante respecto a la I y III en la que se define como un conjunto de métodos. Mientras en la acepción I el álgebra es una manera de tratar

---

(*)Ya entre los griegos se encontraba el germen de este "desprecio". Llamaban <u>Logística</u> al cálculo rutinario y mecánico que se encargaba a los esclavos y <u>Aritmética</u> al estudio más teórico y filosófico de las propiedades de los números. En nuestro caso encontramos en el ámbito socio-cultural esta comparación del álgebra con la Logística más que con la Aritmética. Así se dice:"...las reglas de cálculo relativas a ellos tienen algo de arbitrario..." o "...prescindiendo de su valor filosófico".

los "objetos matemáticos" y tiene como propósito simplificar y generalizar, en la acepción II "el objeto" es la propia algebra y su estudio.

Tenemos así un álgebra que pasa, de ser un "método de trabajo", a ser objeto, ella misma, de estudio como ente matemático propio, con su definición y sus propiedades.

¿Estas dos acepciones se mantienen en la actualidad, realmente, en el mundo de la enseñanza? Vamos a estudiarlo.

II.1.2. ALGEBRA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA SEGÚN LOS PROFESORES

¿Cuál es el álgebra que creemos los profesores estar enseñando? ¿Estamos de acuerdo sobre lo que consideramos como álgebra, de aquello que forma parte de los programas de enseñanza?

Para tratar de contestar a estas preguntas hemos elaborado una encuesta (Anexos I y II) tomada y transformada de otra semejante realizada en Francia (Chevallard, 1986).

Se trata de una sola pregunta que se presenta a los profesores encabezando una copia de los programas oficiales para los tres cursos de Bachillerato. Las instrucciones para contestar, que se entregan en folio aparte (Anexo II), solicitan del profesor que señale los temas que en su criterio pertenecen al Algebra.

La pregunta es la siguiente:

"Una persona que ha cursado una carrera de *Ciencias pero que ahora se encuentra ajena a la enseñanza, os pregunta qué es lo que se enseña, hoy, de Algebra a los alumnos de BUP ¿Qué responderías?"*

Entre los resultados obtenidos señalaremos los siguientes.

1. El ÚNICO tema que TODOS los profesores reconocen como perteneciente al álgebra es:

<u>Anillo de polinomios. Binomio de Newton</u>.

2. Los dos temas reconocidos como pertenecientes al álgebra, que siguen a éste en importancia, son:

<u>Divisibilidad de polinomios. Cuerpo de fracciones</u> y

<u>Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas</u>.

El *primero ha sido señalado por el 90% de los encuestados y el segundo por un 80%* Se trata pues de una mayoría importante que coincide en señalarlos.

Entrevistado un profesor de los que había incluido la Divisibilidad de polinomios y no la Resolución de ecuaciones, sobre los motivos de su respuesta nos explica que:

"La *resolución de ecuaciones*, inecuaciones y sistemas es simplemente CÁLCULO"

Este mismo profesor señala como álgebra el tema <u>Vectores en el plano y en el espacio. Estructura de espacio vectorial</u>. Vemos en estos profesores la evolución del concepto de álgebra desde la posición inicial histórica, de método para resolver ecuaciones, a la posición actual de estudio de las estructuras.

Otro profesor que no ha señalado el tema "Resolución de ecuaciones..." aclara:

"Hay temas que pertenecen al CÁLCULO y que se podrían incluir en Algebra, ó no, dependiendo de que consideremos el Cálculo como perteneciente al Algebra, o no. Yo no lo considero incluido por eso no lo señalo".

3. El tema <u>Cuerpo de los números complejos</u> con un 70% y el de <u>Vectores.Estructura de espacio vectorial</u> con el 60% son los siguientes. Parece indicar que el estudio de las estructuras de Cuerpo y de Espacio vectorial atraen estas respuestas al ámbito del álgebra. Podría ser la consecuencia del concepto actual del álgebra como estudio de las estructuras.

4. Luego se encuentran con un 40% de aceptación los siguientes temas:

<u>Introducción al número real</u>...

<u>Funciones polinómicas de variable real</u>...

Podríamos interpretar la inclusión del primero como la consecuencia lógica de la idea de que el álgebra trata con números, puesto que el 75% de los que responden "El número real", también responden "El número complejo". Sin embargo de las respuestas que han incluido al "número complejo", más de la mitad no incluyen al "número real".

Hemos apuntado antes, en el punto 3, la posible razón de considerar el álgebra como el estudio de las estructuras y para esos profesores el tema del número real no se incluiría pues se introduce tratándolo mediante aproximaciones decimales y ejercitando el cálculo con radicales.

El tema de Funciones polinómicas de variable real, incluido por algunos profesores, puede ser consecuencia de que el estudio de este tema se encuentra muy ligado al de las ecuaciones e inecuaciones y observamos que los profesores que han señalado este tema, incluyen también el de Resolución de ecuaciones de modo que podriamos aventurar la hipótesis de que sea esta relación la razón de su inclusión pues ninguno de ellos ha incluido además el estudio de otras funciones como las logaritmicas o las circulares.

5. Hay un profesor que es el único que incluye Límite de sucesiones, Concepto de derivada y Cálculo diferencial. Esto se puede interpretar entendiéndolo desde el punto de vista del cálculo pues estos temas se presentan con frecuencia como Cálculo, dándole apenas importancia a la introducción del concepto.

6. Se observan también dos tipos de opiniones diferentes respecto a la amplitud del concepto de álgebra:

a. Los que incluyen muy pocos temas. Cuatro es el número de temas escogido por el 40% de los profesores. En general son los temas: Anillo de polinomios. Divisibilidad de polinomios. Resolución de ecuaciones...y algún otro.

b. Los que incluyen muchos temas. Escogen entre 7 y 12 temas, de los 23 que forman el programa de los tres cursos de Bachillerato, un tercio de los profesores. En estos casos se ven incluidos temas como Limite de sucesiones, Función exponencial y logaritmica, Concepto de derivada, Distribuciones bidimensionales o Combinatoria. Casi se podria decir aquí: todo lo que no es geometria. Como en la antigua división de las matemáticas.

7. Comparando nuestros resultados con los obtenidos en la encuesta francesa se observan las siguientes diferencias:

a) Tema RESOLUCIÓN DE ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS.

En Francia obtiene la primacia de las respuestas (junto con el Cálculo algebraico)

En España, aunque importante (80% de respuestas), no es el tema principal pues le superan el "Anillo de polinomios" y la "Divisibilidad de polinomios que lleva también el Cuerpo de fracciones (algebraicas) con el 100% y el 90% respectivamente.

Parece darse una derivación hacia la teoria de las estructuras. (Incluso hay una respuesta marginal que solamente anota tres temas: CUERPO de los números complejos. ANILLO de polinomios y Divisibilidad de polinomios. CUERPO de fracciones).

b) respecto a los TEMAS NUMÉRICOS.

Estos temas, en Francia, representan la segunda *gran masa de respuestas*. Lo que, *en opinión del autor de la encuesta*, se produce como "manifestación del resultado de una evolución histórica reciente que, por medio de la importación en el sistema de enseñanza de las estructuras algebraicas, *ha permitido pensar el tema* de los sistemas de números como algo extraido del álgebra ("moderna")"(Chevallard, 1986)

En España el tema numérico que alcanza el porcentaje más alto es la Introducción al número real pero sólo llega a un 40% de respuestas.

8. En general, podemos ver la gran diversidad de respuestas *en número* y en especifidad.

La conclusión general que podemos extraer es que los enseñantes no coincidimos en lo que cada uno llamamos Algebra. El marco correspondiente al Algebra no está claramente identificado en el sistema de enseñanza.

II.1.3. EL ALGEBRA HISTÓRICAMENTE

¿ALGEBRA SIMBÓLICA? = ¿ARITMÉTICA CON INCÓGNITAS?

¿Pero históricamente, en 'le savoir savant, está claro qué es el Algebra?

¿Es el Algebra una aritmética con incógnitas?

¿Se trata de resolver las mismas cuestiones que en Aritmética pero de un modo más rápido, o más eficaz, usando letras para el cálculo?

¿Aparecen, en la matemática, las letras y el Algebra al mismo tiempo? ¿Es un álgebra simbólica la que aparece en Europa?

Para responder a estas preguntas comencé entonces a estudiar, históricamente, el inicio del Algebra, y la aparición de las letras representando números e incógnitas, intentando averiguar si su entrada en el trabajo matemático había sido simultánea o no. También me interesaba saber cuáles habían podido ser las necesidades que motivaron su aparición y también, como suele suceder en cada nuevo conocimiento que surge, las dificultades que habían tenido que ser vencidas.

Estos conocimientos esperaba que me dieran una pista sobre las dificultades que tenían que superar los alumnos para dominar el uso de las letras y el álgebra en general en la enseñanza secundaria.

Encontré que realmente las letras y el Algebra no habían aparecido de forma simultánea.

Vamos a verlo haciendo algunos apuntes históricos que nos parecen significativos:

EL ALGEBRA DE AL-KHOWARIZMI.

Sabemos ahora que los egipcios y babilonios habían conseguido resolver muchos problemas de ecuaciones con cálculos que incluían operaciones que ahora llamaríamos "transposición de términos" o "reducción de términos semejantes" pero la palabra Algebra como tal, con el sentido que prevaleció en Europa, llega a nosotros derivada del árabe:

Algebra es la transformación de una de las palabras del título del libro más famoso de Al-Khowarizmi: Al-jabr wa'l mugabalah (año 810 aproximado)

Los términos: "Al-jabr" y "muqabalah" no tienen una traducción clara.

Por ejemplo, en el primer libro de álgebra escrito por un español(*): "Diálogos de Arithmética Práctica y Especulativa" de Pérez de Moya (1562), hablando de "la regla de la cosa", en el capítulo I, se lee:

(*) Decimos el primer libro sobre álgebra escrito " por un español", porque se conoce otro primer libro escrito "en español" sobre este tema,el del alemán: Marco Aurel en 1552 y que llevaba el título de Arithmética Algebrática.

> "Diberſos nombres tiene eſta regla acerca de varios Autores. Vnos la llaman regla de algebra, que quiere dezir, reſtauratio, ó almucabala, que quiere dezir opoſición, ó abſolución porque por ella ſe hazen, y abſuelven infinitas queſtiones, (y las que ſon impoſsibles nos las demueſtra); afsi de Aritmetica, como de Geometria, como de las demás artes que dicen Matematicas. Otros la nombran regla de la coſa, porque obrando con ſus preceptos, con qualquier carácter, o caracteres que ſe propuſiere, ſiempre ſale el valor de una coſa. Otros, reglas reales, ó arte mayor. Llámeſe como cada uno quiſiere, ſu ſin no es otro, ſino moſtrar hallar alguo numero proporcional dudoso demandado..."
>
> (Libro séptimo. p. 129-detrás)

Ya vemos que Pérez de Moya nos dice que diferentes autores le dan "diversos nombres". Así aparecen como posibles traducciones: para 'algebra', restauración y para 'almucabala', oposición ó absolución (notemos que 'absolución' está empleada en el libro más adelante para significar 'resolución').

La raiz "algebr" mantiene además, a principios del s.XVII, en castellano, una acepción especial, en el sentido de "restauración de huesos", como se aprecia en "El Quijote" (Tomo 2, cap. XV):

> "En ésto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo dónde fué ventura hallar un algebrista con quién se curó el Sansón desgraciado"

Donde se alude a la reparación de los huesos del personaje Sansón. El algebrista era el reparador o restaurador de los huesos rotos. Así que la interpretación de "restauración" para las palabras formadas con la raiz árabe "aljbr" parece ser en esa época la más aceptada a nivel popular.

En la actualidad no podemos decir que se haya determinado una traducción única y unánimemente admitida.

Según Boyer (1):

> "No sabemos con toda seguridad lo que significan los términos "al-jabr" y "muqabalah", pero la interpretación usual es ..... La palabra "al-jabr" significa probablemente algo así como "restauración" o "completación", y parece querer referirse a la transposición de términos, que están restados, al otro miembro de la ecuación, sumándolos. La palabra "muqabalah" parece referirse a la "reducción" o "compensación", es decir, a la cancelación de términos iguales en los dos miembros de la ecuación".
>
> (p. 298)

Pero también a pie de página, Boyer advierte que esta interpretación ha sido discutida por Solomon Gandz (Boyer, p.298). Gandz opina que 'jabr' era una palabra asiria que quería decir ecuación, y que 'al-muqābalah' es la traducción árabe de 'al-jabr'.

Por otra parte, tenemos que según Colerus el título "Alshebr Valmukabala" significa aproximadamente "Sistematización y Comparación".

Como vemos, las traducciones que se aceptan entre los matemáticos no son, aún hoy, exactamente equivalentes.

Pero en lo que sí están de acuerdo los historiadores que he podido consultar, es en el contenido del libro. Tiene éste, al parecer, una introducción en la que trata de la escritura de los números con la notación india posicional y continúa con la resolución de ecuaciones clasificándolas en seis tipos. La exposición parece que es muy ordenada - probablemente a ésto debe la gran popularidad alcanzada- y exhaustiva pues se nos dice que incluye todas las posibilidades de ecuaciones de primer y segundo grado con una o dos raices positivas. En el texto está latente la idea de incógnita aunque no se represente mediante la letra "x" como en la actualidad.

Este tratado se introduce en Europa con éxito y llega a ser para el Algebra lo que los Elementos de Euclides han sido para la Geometria: una exposición elemental y clara que ha influido hasta nuestros días.

ALGEBRA-YA. PERO ALGEBRA RETÓRICA.

Ha nacido el Algebra, pero sin embargo no ha nacido todavía el simbolismo: La obra de Al-Khowarizmi es completamente retórica. Incluso los números vienen representados por palabras y la incógnita a calcular es llamada "la cosa" -nombre que al parecer proviene de los matemáticos indios.

En la obra citada de Boyer, éste nos transcribe un problema del libro de Al-Khowarizmi que es resuelto mediante "el álgebra" y que parece haber sido tomado de Heron (s.I a.d.C.) pues coincide, con el de éste, hasta en los valores de los segmentos:

"Se trata de inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles de base 12 unidades y lados iguales de 10 unidades .... preguntando el problema la medida del lado de dicho cuadrado. El autor del 'Algebra' calcula en primer lugar con ayuda del teorema de Pitágoras, la altura del triángulo, 8 unidades, así que el área del triángulo es 48. Llamando al lado del cuadrado «la cosa», se puede ver que se obtendrá el cuadrado de «la cosa» restándole al triángulo grande los tres triángulos pequeños que quedan fuera del cuadrado. La suma de las áreas de los dos triángulos menores inferiores es evidentemente el producto de «la cosa» por seis menos la mitad de «la cosa», y ..."

(Boyer, p.303)

En lo que respecta a la simbolización, esta obra de Al-Khowarizmi supone un cierto retroceso respecto a la escritura sincopada aparecida en las obras de Diofanto de Alejandria (aproximadamente s.III). Diofanto había usado 'sincopaciones' (dicho en el sentido de 'abreviaciones') para la incógnita, para las potencias de la incógnita hasta el grado seis, para la igualdad, para la substracción,... (Eves, p.128).

Por ejemplo: el signo usado para representar la incógnita era una letra que según unos autores puede haber sido una combinación de α (alfa) y ρ (rho) que son las primeras letras griegas de la palabra «arithmos» (de esta opinión es T.L.Heath) o según otros parecerse a ς (sigma cuando se escribe al final de palabra) que es la última letra de la misma palabra «arithmos» (Eves op.cit. pp.128-129). Las potencias de la incógnita eran representadas como sigue:

Actual	Signo	Griego	Transcripción	Traducción
x^2	Δ^Y	ΔΥΝΑΜΙΣ	dunamis	potencia
x^3	K^Y	ΚΥΒΟΣ	kubos	cubo
x^4	$\Delta^Y\Delta$	ΔΥΝΑΜΙΣ ΔΥΝΑΜΙΣ	dunamis-dunamis	cuadrado-cuadrado
x^5	ΔK^Y	ΔΥΝΑΜΙΣ ΚΥΒΟΣ	dunamis-kubos	cuadrado-cubo
x^6	$K^Y K$	ΚΥΒΟΣ ΚΥΒΟΣ	kubos-kubos	cubo-cubo
x^0	$\overset{o}{M}$	ΜΟΝΑΔΕΣ	monades	unidades (mónadas)

Empleaba también el signo ⋔ para "menos" y todos los términos negativos se escribían al final de la expresión precedidos por este signo.

Sin embargo la "suma" era expresada simplemente por **yuxtaposición** (*)

Este importante paso dado por Diofanto al emplear una escritura sincopada quedó aislado en el tiempo, pues después de él, y salvo en la India dónde también se dieron ciertas sincopaciones, permanece la escritura retórica hasta los matemáticos italianos del s.XV y principios del s.XVI.

Lo tosco de estas abreviaturas nos puede dar una idea de las primeras dificultades que el alumno va a tener con la simbolización y de cómo, si la ventaja no es muy evidente, puede aquella llegar a parecerle innecesaria.

No sabemos si Al-Khowarizmi conoció la obra de Diofanto ó no. En cualquier caso no usó la sincopación de aquella obra y permaneció en una escritura retórica.

Ésto no resta importancia a la obra de este autor, cuya influencia es patente en los tratados de Aritmética que se escriben después y que poco a poco van transformando sus titulos, pasando a ser libros en los que se habla de "La cosa" y posteriormente libros de "Algebra".

(*) Esta idea perdura en la escritura aritmética actual en los llamados "números mixtos" que tienen parte entera y parte fraccionaria, como $3\frac{1}{2}$ o $5\frac{1}{4}$ que representan $3+\frac{1}{2}$ y $5+\frac{1}{4}$ respectivamente.

Según las obras aparecidas hasta el momento, parece que el establecimiento de los símbolos algebraicos actuales se va a ir haciendo paulatinamente (salvo un momento especial con Jordano Nemorario), pasando por un álgebra sincopada, representada sobre todo por Chuquet y Pacioli en el s.XV y Viète en el s. XVI hasta que se consigue de un modo completo en el s.XVII con Descartes.

((Observemos además que en el tratado de Al-Khowarizmi no se tienen en consideración las soluciones negativas de las ecuaciones. No figuran como posibles soluciones. El hecho de aceptar los números negativos como posibles soluciones de las ecuaciones parece que viene favorecido por la representación de la incógnita mediante la letra "x". Es como si, al poder calcular con los números negativos representados por las letras, se eliminara el principal inconveniente para su aceptación.))

SIMBOLISMO PARA LA GENERALIZACIÓN.

En la Arithmetica de Jordano Nemorario o Jordano de Nemore (algunas historias de la matemática lo identifican con Jordano Teutónico, dominico que murió en el año 1237 pero esta identificación es rechazada por otros historiadores como Hoffmann) aparecen por primera vez las letras representando números y ésto posibilita la formulación de teoremas algebraicos generales, lo cual es un gran avance. En este libro se sugiere también la idea de 'parámetro' pero habrá que esperar a François Viète (1540,1603) para poder distinguir las cantidades conocidas de las desconocidas que hay que calcular.

En Boyer (1986, p.332) encontramos un ejemplo representativo de regla algebraica para determinar números extraido de la obra "De numeris datis" de Jordano Nemorario. En este ejemplo se trata de demostrar que las dos partes en que puede 'dividirse' un número dado, supuesto conocido el producto de ambas, están determinadas:

> "Sea 'abc' el número dado y divídasele en dos partes 'ab' y 'c', y sea 'd' el producto dado de las partes 'ab' y 'c'. Sea 'e' el cuadrado de 'abc' y sea 'f' igual a cuatro veces 'd', y sea 'g' el cuadrado de restar 'f' de 'e'. Entonces 'g' es el cuadrado de la diferencia entre 'ab' y 'c'. Sea 'h' la raiz cuadrada de 'g'; entonces 'h' es la diferencia entre 'ab' y 'c', y como 'h' es conocida, 'c' y 'ab' están determinados."

Se puede expresar el teorema anterior con un simbolismo actual, para comprobar su validez.

Si se llama "n" al número dado. Si se llaman "x" y "y" respectivamente a las dos partes que estamos buscando y "d", como dice el texto, al producto de ambas, se tendrán las expresiones siguientes que expresan la regla de Jordano Nemorario en términos actuales:

$$(abc)=n \;;\quad (ab)=x \;;\quad (c)=y$$

$$x + y = n \;;\quad x \cdot y = d$$

$$e = n^2 \;;\quad f = 4d = 4p \cdot q \;;\quad g = [n^2 - 4p \cdot q]^2$$

$$g = [(p + q)^2 - 4p \cdot q]^2 = [p^2 + q^2 + 2p \cdot q - 4p \cdot q]^2 =$$

$$= [p^2 + q^2 - 2p \cdot q]^2 = [p - q]^2$$

$$h = \sqrt{q} = \sqrt{[p - q]^2} = p - q$$

Se obtiene 'h', que es la diferencia de las dos partes del número, y, como la suma era conocida (el número dado), las partes están, efectivamente, determinadas.

Vemos pues que una de las primeras necesidades que vienen a cubrir las letras es la de la generalización de teoremas algebraicos, es decir la expresión general de ciertas propiedades algebraicas.

Se pueden observar aquí algunos titubeos en el empleo de las letras. Por un lado encontramos una parte del número representada por dos letras: "ab". Esto es, como un *segmento que viene dado por las dos letras de sus extremos*, al modo en que Euclides los representaba. Por otro lado, tenemos la otra parte "c" del número dado que viene representada por una sola letra, al modo actual, podríamos decir.

Otra expresión que hay que interpretar es la "abc", que está representando a la suma de las dos partes del número, "ab" y "c", pero expresada aquí por yuxtaposición simple. Conviene recordar que, en el punto anterior, se ha dicho que ya Diofanto escribía la suma de esta misma forma y, se verá, también, al estudiar las concepciones espontáneas de los alumnos, que éstos expresan la suma del mismo modo, en lo que se llamará "la letra usada como acompañamiento". Se encuentran, por tanto, los mismos titubeos de simbolización, en ambos casos.

El razonamiento seguido por Jordano para llegar a la conclusión de que ambas partes están determinadas es difícil de seguir, aun cuando se haga con una representación algebraica, como se puede comprobar. Además lo que llega a decir es que con la manipulación indicada se puede conocer la diferencia de las partes, de donde el lector debe deducir que conocida la diferencia y la suma (que es el número dado en un principio para 'dividir') se conocen éstas. Pero, a pesar de esto, se debe reconocer el gran mérito que supone para Jordano haber llegado a expresar reglas como ésta que son completamente generales y haber comenzado a expresar esta generalización con ayuda de las letras.

PRIMEROS PASOS SEGUROS. ALGEBRA SINCOPADA.

Es Viète quién da los primeros pasos seguros en el <u>álgebra simbólica</u> aunque su álgebra no se pueda todavía llamar así sino más bien <u>sincopada</u> pues todavía quedan en ella muchas palabras y abreviaturas. Viète pasa de representar las magnitudes por palabras-lo que se ha llamado álgebra <u>retórica</u>-, a representarlas por letras mayúsculas del alfabeto latino , usa los símbolos + y − que habían inventado los germanos y propone utilizar vocales para representar cantidades que se suponen desconocidas o indeterminadas y consonantes en cambio para representar magnitudes o números que se suponen conocidos **así aparece la idea de parámetro claramente establecida por primera vez diferenciándola de la de incógnita** (Boyer, p.387).

Vemos pues las letras aquí <u>substituyendo</u> a magnitudes.

Sin embargo frente a estos adelantos todavía aparecen palabras como **quadratus** o **cubus** para representar la segunda o tercera potencia de una magnitud; la partícula **in** para la multiplicación o el signo de igualdad que viene representado por una abreviatura de **aequalis**.

Pero la necesidad de la simbolización es sentida también por otros matemáticos y así:

Por la misma época en Inglaterra, Robert Recorde (1510-1558) hace aparecer el signo igual por primera vez. se trata de dos rectas paralelas -más largas que en la actualidad- elegidas según dice su autor:"porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales" (así lo anota Boyer p.347). Sin embargo su uso tardará en generalizarse.

Otro paso adelante lo da Thomas Harriot (1560-1621) al introducir los signos > y < para expresar "mayor que" y "menor que" y reducir las letras latinas mayúsculas a las minúsculas tal como las usamos hoy.

Volviendo a Viète, para terminar, digamos que fué el que distinguió el cálculo numérico, logística numerosa, del cálculo que razona sobre "especies", logística speciosa dándose cuenta de que la incógnita no tenía porqué ser un número o un segmento. En su obra Isagoge (1591) llega a producir verdaderas fórmulas simbólicas.

De este modo se entra en la simbolización que podríamos llamar actual pues es la que ha llegado hasta nuestros dias perfeccionada por sucesivas mejoras como el signo "x" para la multiplicación debido a William Oughtred (1574-1660) que lo introduce en su Clavis mathematicae publicada en 1631 (único de los signos introducidos por él que ha perdurado hasta nosotros)

La introducción de los exponentes también ha seguido un tortuoso camino de adelantos y retrocesos que merece un detenido estudio que no haremos aqui y una de cuyas etapas más interesantes se debe a Chuquet (1500 ?) cuya notación exponencial incluye exponentes negativos en su Triparty en la science des nombres (1484),obra que, aún siendo retórica, contiene importantes sincopaciones (Boyer,p.355):

Se usa "premier" para llamar a la incógnita.

Suma es "plus", resta es "moins"; que a veces aparecen escritas al modo medieval: $\bar{p}$, $\bar{m}$

Es importante resaltar que en ella aparece escrito un número negativo por primera vez:

"4 elevado a 1 egaulx a m 2º "

es decir: $4x = -2$

Y en cuanto a los exponentes aparece una notación exponencial importante en la que incluso se expresan las leyes que rigen las operaciones con los exponentes: 6 elevado a _ 2 expresa 6(x al cuadrado); 9º expresa 9 ó 9 elevado a 2m expresa 9/(x al cuadrado)

AL FIN: ALGEBRA SIMBÓLICA

El álgebra simbólica formal sigue un proceso bastante continuo desde la caída de Constantinopla, año 1453 hasta que culmina con Descartes (1596-1650) (Boyer op. cit. pág.427) y su obra La Géométrie (presentada como apéndice al Discours de la méthode)

Descartes emplea de forma sistemática ya:

Las letras a,b,c,... para los parámetros constantes
Las x,y z,... para las incógnitas o variables
Notación exponencial
Los signos + y -

Solamente mantiene como signo arcaico el ∞ para la igualdad.

La idea de Descartes es reducir los problemas geométricos a problemas algebraicos, dando valores a los segmentos y usando así la potencia del Álgebra. Simultáneamente quiere dar un marco geométrico al Álgebra, y así demuestra que las cinco reglas aritméticas tienen su representación geométrica mediante construcciones sencillas.

Su notación es ya muy parecida a la nuestra pero con una **importante diferencia: las letras para él representan segmentos,** mientras que para nosotros son **números**. Sin embargo rompe con la tradición griega de considerar "x al cuadrado" como un área y "x al cubo" como un volumen. Descartes los considera ya como segmentos también y esto le permite desprenderse del principio de homogeneidad y flexibilizar su álgebra geométrica.

Forzosamente en este breve apunte histórico es discontinuo pues no tratamos de hacer una historia del Algebra. Vamos ahora al momento de lo que llamaremos la **segunda ruptura**

ALGEBRA ABSTRACTA

Los matemáticos ingleses habian vivido muy aislados del continente y su "despegue" probablemente lo constituye la creación de la Analytical Society del Trinity College, en 1815 en Cambridge.

George Peacock (1791,1858) fué uno de sus fundadores (junto con J. Herschel (1792,1871) y Ch. Babbage (1792,1871)). En su Treatise on Algebra se propone dar al álgebra una estructura lógica. Intenta iniciar el pensamiento axiomático aplicado a la aritmética y al álgebra.

Aunque Peacock no realizó ninguna aportación nueva de importancia, contribuyó de forma definitiva al proceso de actualización de la enseñanza de las matemáticas y, en especial, del Algebra en Inglaterra. Este esfuerzo se hacía sobre la materia, pero no sobre el alumno. Se trataba, sobre todo, de profundizar en la fundamentación del Algebra pero se olvidaba el hecho de que la profundización en la abstracción no tiene que suponer desatender al alumno.

Augustus de Morgan (1806,1871) fué otro de los iniciadores de la que se podría llamar "Escuela Inglesa" (Boyer op. cit. pág 712). Apoyó alguno de los puntos de vista de Peacock. Podríamos decir que con de Morgan comienza el <u>Algebra Abstracta</u> pues considera sin significado concreto no sólo a las letras que utiliza sino también a los símbolos que representan operaciones: "así las letras tales como A,B,C, podían significar virtudes y vicios, y + y - podían representar premio y castigo", mientras que en el Algebra de Peacock los símbolos se entendían como números o magnitudes todavía. De modo que dice:

> "...con una sola excepción, ninguna palabra o símbolo de la aritmética ni del algebra tienen un ápice de significado a lo largo de este capítulo, cuyo objeto son los símbolos mismos y sus leyes de combinación, lo que da lugar a un álgebra simbólica que puede convertirse en adelante en la gramática de cien álgebras concretas distintas" (la excepción referida es la igualdad)
>
> (Boyer op. cit. p. 712)

Recuerda con esta aspiración otra parecida declarada por Leibniz (1646-1716), aproximadamente 150 años antes, cuando al entrar en contacto con el Algebra, ve en ella unas posibilidades de formalización que le ilusionan. Y adivinando una gran potencia en ese nuevo lenguaje y una abstracción y objetividad que le seducen, piensa que el álgebra puede convertirse en el modelo de su Característica Universal y así escribe:

> "Es ésta una especie de lenguaje simbólico que nos permitiría expresar sin ambigüedad todos los pensamientos humanos - consecuencia de su precisión-, aumentaría nuestro poder de deducción al permitir desarrollos más complejos o más largos y resolvería todas las controversias sin tener que llegar a enfrentamientos, utilizando sus "demostraciones""
>
> (Couturat, 1969)

Encontramos en Leibniz la atracción que el Algebra ejerce. Un gran cerebro universal e inteligente anticipa en ella un gran potencial de posibilidades. Se proponía así una tarea **esencial:** la Lógica simbólica. Lo que él llamaba el **Calculus Ratiocinator** que haría aumentar la armonía universal.

De hecho comenzó la tarea de desarrollarla asociando a cada término "primitivo" un número primo -esta idea fué posteriormente continuada con éxito por Gödel-. El término primitivo es el símbolo no deducible, la autorreferencia.(Couturat op.cit.1969)

Pero volvamos a De Morgan. Al vaciar de contenido los símbolos estaba preconizando la idea moderna de que el objeto del Álgebra son las funciones proposicionales más que las proposiciones, pero por otro lado creyó agotadas las álgebras con el paso del Álgebra Simple (Números reales) al Álgebra Doble (Números complejos).

En realidad todo el siglo XIX en Inglaterra fué prolífico en cantidad y calidad. Nombraremos solamente algunos de estos importantes personajes en el Algebra:

William Rowan Hamilton (1805-1865) que se encargó de demostrar que había "más álgebras" con su teoria de los cuaterniones.

J.J. Sylvester (1814-1897) y Arthur Cayley (1821-1895) que trataban la teoría de invariantes algebraicos. Hoy se conoce como método dialítico de Sylvester un método para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones polinómicas.

George Boole (1815-1864) que trabajó en el análisis de la Lógica. Decía que la Matemática no se reduce a la ciencia del número y la magnitud continua. La característica esencial de la Matemática es su forma: si un tema se presenta con símbolos y reglas precisas, únicamente, sujeto a una exigencia de consistencia interna, eso es Matemática. Según Russell, Boole fué el descubridor de la Matemática Pura.

Pero estamos en el s.XIX y nos falta nombrar a Evariste Galois (1811-1832) el joven y genial matemático de trágico destino. Le debemos el concepto de **Grupo** y también hacer de este concepto abstracto la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas. Con él se termina el álgebra clásica, es decir, el resolver ecuaciones en términos de radicales.

Después de Galois, más o menos desde 1850 los libros de álgebra comienzan a estudiar las estructuras algebraicas de modo que a partir de este momento el álgebra se convierte en la Teoria de las Estructuras

En la enseñanza, este cambio también ha tenido lugar hace unos años cuando irrumpió con fuerza la nueva corriente que preconizaba la introducción prematura de las estructuras como base del conocimiento matemático. Esta inversión de la génesis del conocimiento ha demostrado, como ya sabemos, su ineficacia en la enseñanza.

Surge, en este momento, la escuela alemana del s. XIX : Dirichlet, Dedekind (con la noción de <u>cuerpo</u>), Hilbert..., que desarrollan la teoría de los números algebraicos basándose en el estudio de Gauss de los números complejos (a+bi) con <u>a</u> y <u>b</u> racionales.

A partir de Galois se produce **LA RUPTURA.** En unos pocos años podremos hablar de lo que es **UN ALGEBRA.** Ha nacido el Algebra como **objeto de estudio matemático.**

A comienzos del siglo XX culmina, en el álgebra, un proceso de generalización creciente que había comenzado en la geometría y la topología.

La llamada "Algebra moderna" adquiere un fuerte desarrollo en la segunda mitad de este siglo.

Aumenta de nuevo el grado de abstracción en esta disciplina y así las letras "x" e "y" ya no representan solamente números desconocidos (reales o imaginarios) ni magnitudes (segmentos en Descartes), ahora las letras "x" e "y" pueden representar cualquier cosa: permutaciones, figuras geométricas, matrices, etc.

La palabra "cosa" usada para hablar de la incógnita durante el s. XVI designaba una magnitud, un número; pero ahora hablamos de "cosa" en el sentido literal español de "cualquier cosa". No hay condiciones para el posible elemento "x" o "y" (o cualquier otra letra) que va a manejar el álgebra abstracta.

En la "Logique Mathematique" de Kreisel-Krivine los elementos manejados son frases, sentencias, para formar nuevos lenguajes y nuevas posibilidades de expresión.

> "El álgebra abstracta en este período final del s. XX posiblemente será la parte de las matemáticas más investigada junto con la topología."
>
> (Boyer op. cit. p. 764)

Es quizá el momento de hacer una reflexión que reconozca el lento proceso de elaboración de la actual álgebra, los siglos de tentativas, avances y retrocesos que van configurándola que contrasta con el corto periódo de *tiempo en el que se espera que los alumnos lleguen a* asimilarla y dominarla.

II.1.4. ALGEBRA.ARTE ANALíTICA.

El ***razonamiento deductivo*** *es el que nos lleva de* los datos conocidos a través de su manipulación mediante unas reglas determinadas, con un razonamiento preciso, hacia *lo desconocido, que resulta como el producto de la manipulación*. Esquemáticamente:

razonamiento
Lo *conocido* --------------------> Lo *desconocido*

Lo *que Pappus y los antiguos habian nombrado* como **Análisis** (Ars Analiticae) era diferente. En vez de razonar desde lo conocido para demostrar lo desconocido, el analista va a partir de la hipótesis de que "conoce" lo desconocido y, manipulando eso como si fuera realmente conocido, llega a <u>una condición</u> que "eso" ("la cosa", "la incógnita") debe cumplir para satisfacer las condiciones dadas.

Pappus, en el libro VII de la **"Colección"** explica lo que es, para él, el análisis:

> "un método que consiste en considerar como conocido aquello que se busca, y obtener las consecuencias de ello hasta llegar a algo que se admite ya como un resultado de síntesis"
>
> (Boyer op. cit. p. 248)

Se reconoce que el análisis es pues un tipo de razonamiento "a la inversa".

Este mismo tipo de razonamiento es el que sigue el álgebra. Partiendo de lo desconocido que es "la cosa", "la incógnita", y haciéndolo cumplir las condiciones establecidas para el problema se llega a la condición ("ecuación") que, manipulada mediante las leyes algebraicas, permite el cálculo de "la cosa". Es decir, de un modo gráfico:

$$\text{Lo desconocido} \xrightarrow{\text{razonar}} \underset{\text{(ecuación)}}{\text{condición}} \xrightarrow[\text{calcular}]{\text{cumplirla}} \underset{\text{(incógnita)}}{\text{desconocido}}$$

F. Viète (1540-1603) en su importantisima obra "In artem analyticem Isagoge" (≈ 1591) (Introducción al método analitico) explica el **método analitico** de Proclo, definiendo el análisis como:

> "La suposición de que lo buscado es conocido y el paso, mediante deducciones, desde allí hasta algo efectivamente conocido"
>
> (Wussing-Arnold, p. 154)

Según Wussing-Arnold (pp. 154-155), para Viète había tres clases de análisis:

- El análisis para **buscar**, cuya idea se basa en **suponer lo buscado como conocido** y dar a la cantidad un nombre, un signo, un símbolo. (Encontramos aquí las nociones de signo y símbolo empleadas indistintamente, idea sobre la que profundizaremos en el capítulo 3º). Entonces con este símbolo como si se tratase de una cantidad conocida, esta*blecer (Viéte dice* **buscar***) para ella una ecuación matemática* conveniente.

- El análisis para **obtener**, que es el que se emplea para "conseguir" demostraciones de teoremas auxiliares, si son necesarias.

- Análisis exegético que es el que lleva a cabo el uso de transformaciones algebraicas y la resolución de ecuaciones.

IMPORTANCIA DEL ALGEBRA

La importancia del Algebra es algo que a lo largo de su historia ha estado en entredicho. Muchos científicos han observado su potencia y considerado su importancia, con entusiasmo y admiración ante sus posibilidades, y otros muchos la han despreciado, considerándola como cálculo exclusivamente, quizá antes de conocerla bien.

En la Didáctica de las Matemáticas nos encontramos con las consecuencias de esta controversia:

¿Es importante enseñar el Algebra como tal?

¿Es "simplemente" enseñar a calcular lo que debemos hacer?

En la encuesta a los profesores sobre lo que ellos entienden por Algebra, encontramos un profesor que había señalado como perteneciente al Algebra el tema de la Divisibilidad de Polinomios y como no perteneciente el de la Resolución de Ecuaciones y que en la entrevista correspondiente justificaba su respuesta porque: "La resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas es **simplemente** Cálculo" Vemos, pues, cómo aquí se desprecia al Cálculo como algo simple y mecánico y se ennoblece al Algebra como el estudio de las Estructuras.

Se puede suponer que este profesor hace de la enseñanza de esta parte de las matemáticas una enseñanza "calculística" con la que se enseñan y aprenden friamente unas técnicas para resolver determinados ejercicios que poco o nada tendrán que ver con otra cosa que no sean ellos mismos. Se trata, cuando la enseñanza se hace de este modo, de que el alumno domine algunas técnicas y que sea capaz de demostrar ese dominio resolviendo unos ejercicios preparados para ello.

Esas técnicas, efectivamente, nacen y mueren en ellas mismas. No es extraño que estos profesores las desprecien y consideren que su enseñanza no pertenece al álgebra.

Sobre todo si consideran el Algebra exclusivamente como el estudio de las estructuras.

El Cálculo, incluyendo en él la Resolución de Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas, se desgaja así de la parte "noble" del Algebra.

Sin embargo, históricamente, vemos cómo la idea de un Algebra Analítica es valorada magníficamente (por ejemplo por Descartes) y la idea de un Algebra Lenguaje forma parte del ideal buscado por mentes científicas como la de Leibniz. Para él la concepción de un "razonamiento matemático" universal, único e infalible era una aspiración ligada a la búsqueda de la Felicidad y de la Paz.

Veamos como consideraba Descartes al Algebra.

Podemos verlo a través de la clasificación que hace de las funciones:

```
                    algebraicas
                   /
      Funciones
                   \
                    no-algebraicas
```

división que correspondía a la geométrica de

```
                    geométricas
                   /
         curvas
                   \
                    mecánicas
```

llamando curvas mecánicas a todas <u>las que no son algebraicas</u>. De este modo pretendía hacer de las funciones algebraicas el único objeto de la Geometría, "midiendo" así las curvas por un "patrón algebraico".

Las curvas que entraban dentro de este patrón algebraico eran dignas de estudio. Eran interesantes.

Las funciones no-algebraicas de Descartes, son llamadas funciones trascendentes por Leibniz, quien comenta, sobre la clasificación de Descartes, que el apelativo de mecánicas que aquél emplea tiene un sentido despectivo. Así, Leibniz corrobora con su impresión el hecho de que Descartes consideraba únicamente importantes aquellas curvas "geométricas" que eran susceptibles de ser estudiadas a través del Algebra.

(Observemos, sin embargo, que Descartes aunque no puede aplicar su método algebraico a la cicloide, no por eso deja de estudiarla e inventa el centro de rotación).

Leibniz -a quién hemos nombrado más arriba en relación con su interés por el álgebra- fué también un enamorado de sus posibilidades. El Álgebra le ofrecía cómo concretar la idea de <u>la reducción de todo cuanto existe a un sistema de símbolos relacionados entre sí</u>. Cualquier descripción de la realidad podría, a través del Algebra, ser reducida a una unidad de elementos deducibles mediante cálculos.

Era el momento en que proliferaban las diferentes notaciones. Couturat (pp.82-83) nos explica el deseo de Leibniz en su "Carta a Oldenburg" y su confianza en el Álgebra como lenguaje universal para conseguir una formalización del lenguaje y del pensamiento.

Sin embargo ya hemos visto, en la nota al pié de la pág. 11, que de bien antiguo nos llega un "desprecio" hacia el cálculo "mecánico", y que este apelativo se mantiene como una sombra en la definición cultural de Algebra.

Entre los matemáticos actuales se da, también, este desprecio, como nos indica Chevallard (Chevallard,1986) cuando dice que en la actualidad "...al Algebra se la niega como herramienta de creación de conceptos" y más adelante en el mismo párrafo: "Así se tiende a rechazar al álgebra elemental de la parte viva de la actividad matemática, para reducirla, en el marco formal que hemos descrito, a una actividad "automática", y en cualquier caso autónoma, sin capacidad real de creación"

Si admitimos que la simbolización forma una parte substancial y, en cierto modo, definitoria del álgebra, observaremos que grandes progresos en matemáticas han estado marcados por el descubrimiento de buenas simbolizaciones que han hecho posible el manejo de conceptos incluso antes de su perfecto conocimiento. Estas simbolizaciones han ayudado a completar el conocimiento de esos mismos conceptos.

Podemos recordar como ejemplos:

1.- La introducción de las letras para representar los números coincide con el comienzo de la aceptación generalizada de los números negativos.

Aunque ya los chinos calculaban con la ayuda de varillas rojas para las cantidades positivas y varillas negras para las negativas, no aceptaban los números negativos como soluciones de ecuación.

En la India, sin embargo, Brahmagupta llegó a exponer soluciones generales de ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aunque una de ellas fuera negativa.

Pero recordemos que los árabes todavía (Al-Khowarizmi) rechazaban las soluciones negativas.

Fué Chouquet, en el s. XV, uno de los autores que empezaron a escribir los números negativos con ayuda del símbolo literal " $\bar{m}$ " para representar el "menos", y en sus reglas para calcular con exponentes negativos consiguió manejar una escritura que suponía un gran avance de simbolización, aunque no llegara a establecerse entre los matemáticos de la época, quizá porque no fuera bien conocida.

Stifel (s.XV,XVI), usó coeficientes negativos en las ecuaciones que, así, pudo reducir a una forma única, pero no admitía los números negativos como posibles raíces de una ecuación. Llamaba a estos números **numeri absurdi** a pesar de conocer bien sus propiedades.

Viète (s.XVI,XVII), a pesar de su indudable valía y su dedicación al estudio de las ecuaciones, no admitía coeficientes ni raíces negativas.

Es Girard (1629) el que, al permitir raíces tanto negativas como imaginarias, logró formular las relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación. Incluso pareció anticipar la idea de recta numérica al indicar que los números negativos son un retroceso y los positivos un avance.

Con Descartes (s.XVII) encontramos la admisión de las raíces negativas pero, llamándolas "falsas", frente a las raíces positivas, que denomina "verdaderas".

Hudde (s.XVII,XVIII), parece que fué el primero en utilizar **coeficientes literales** para representar números reales cualesquiera (positivos y negativos)

Tenemos, pues, que llegar al s. XVIII para encontrar establecida la expresión literal para los números y, con ella, la admisión, sin reservas, de los números negativos de una manera generalizada.

2.- La escritura de los números complejos en forma de binomios, con ayuda de la letra "i", en lugar de $\sqrt{-1}$, supuso un principio de aceptación de los mismos al hacer posible su manejo y el estudio de sus propiedades.

La fòrmula de Cardano - Tartaglia ($\approx$ 1550) para la resolución de la ecuación cúbica, cuando las tres raíces son reales y no nulas, conduce a la situación de raíces cuadradas de números negativos, es decir a los números "imaginarios". Se necesita comprender el comportamiento de estos números para poder obtener la raíz real y, a pesar de esto, solamente Bombelli se atrevió a expresar lo que él llamaba una "idea loca" que anticipaba la noción posterior de números complejos conjugados. El resto de los matemáticos de la época se limitaba ignorar la posibilidad de existencia de este tipo de números sin poder salir de la situación de perplejidad que producía el hecho de la aplicación de la fórmula de Cardano - Tartaglia, como hemos dicho.

Es Girard, aproximadamente en 1629, el que admite las raíces imaginarias, como ya hemos dicho, porque con ellas podía mostrar los principios generales de formación de la ecuación a partir de sus raíces.

Así, las reglas generales del Algebra, se imponen, como una necesidad que obliga a admitir la existencia de esos extraños entes matemáticos, que son los números "imaginarios".

II.2. ALGUNAS POSICIONES ACTUALES EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA

Yves Chevallard. Francia.

Sobre el álgebra y su enseñanza. Muestra una diferenciación entre "enseñanza funcional" y "enseñanza formal".

Él es partidario de que la enseñanza debe ser funcional. Pero ¿qué significa ésto?: Significa que el aprendizaje no debe hacerse "in vacuo" es decir, sin objetivo. Cuando enseñamos de esta manera (formal) estamos haciendo una enseñanza que no es inútil pero sí incompleta y por tanto fuente de errores y obstáculos.

En la Memoria de **J. Tonelle,** 1980 "El mundo cerrado de la factorización" se hace un estudio en este sentido sobre los desarrollos algebraicos elementales (*factorización, identidades notables*) y su *enseñanza*.

Algunas de las observaciones obtenidas por J. Tonelle son las siguientes:

I. Se producen en los alumnos interferencias entre los modelos aditivo y multiplicativo. (el uno debe usarse para los coeficientes y el otro para los exponentes). (Este tema de los campos conceptuales aditivo y multiplicativo se analiza en profundidad en un trabajo de Pellerey que figura en la bibliografía).

II. El esquema de factorización

$$O^2 - A^2 = (O + A)(O - A)$$

funciona realmente como un esquema de descodificación. El alumno no comprende, sólo adivina. Aprende cómo hacer la descodificación de las instrucciones que da el profesor.

III. El profesor presenta una doble "oferta" : **discursiva** *una (lo que el profesor dice)* y **ostensiva** *la otra* (lo que el profesor muestra). Se pide "Factorizar...", pero luego no sirven todas las factorizaciones; se muestran las que se pueden hacer y se prohiben otras. Hay que hacerlo de una manera especial. ¿Por qué? o ¿Para qué? No están claras las razones porque no hay un objetivo.

IV. Se realiza un aprendizaje formal pero no funcional.

En realidad lo que se hace no se sabe para qué sirve. "Se hace porque lo quiere así el profesor" y con eso basta.

V. La transacción didáctica impone un tratamiento **por ostensión** que ayuda a dejar el concepto en **preconstrucción**. No favorece por tanto la construcción de la noción de polinomio.

Entre estas observaciones destacaremos ahora la IV que denuncia la carencia de un aprendizaje funcional en los términos de los estudios de Y. Chevallard.

En su trabajo, Chevallard nos dice sobre ésto:

> "En ausencia de un empleo funcional, las peticiones de cálculo se hacen con consignas como "Factoriza..." que llevan añadidas un conjunto de sobredeterminaciones didácticas que el alumno tiene que interpretar para realizar el ejercicio correctamente".

Se puede añadir que en los actuales curricula no se podría hacer una enseñanza funcional pues, en general, el cálculo algebraico se enseña mucho antes de que se tenga que emplear. Por ejemplo los polinomios y su factorización, la simplificación de fracciones algebraicas, la resolución de ecuaciones de tercer o cuarto grado mediante factorizaciones, etc... no se revelan necesarias hasta que llegamos a querer estudiar una función y nos ayudamos de las derivadas y en general del cálculo diferencial para obtener sus máximos, mínimos, asíntotas, etc... y aún cuando eso llega, los ejercicios y problemas que se ofrecen para este estudio son evidentemente mucho más sencillos que los que servirían para provocar las complicadas simplificaciones que les "hemos enseñado" a calcular.

Vamos a ver algún ejemplo de como esto sucede en España:

Durante el 1º de Bachillerato se les enseña a resolver ecuaciones y a hacer simplificaciones como las siguientes:

1. Factoriza: $p(x) = 3x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 30x - 15$

2. Simplifica: $\dfrac{2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 12x - 6}{x^4 - 4x^2 + 3}$

3. Simplifica: $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} : \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

4. Resuelve: $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

Y dos años más tarde, cuando llegan a 3º de Bachillerato, practicando las aplicaciones de las derivadas, se les plantean los siguientes ejercicios:

1. Estudia las funciones siguientes calculando sus dominios, puntos de interés, asíntotas, etc... y dibuja la función correspondiente:

1.1: $f(x) = ¼\, x^4 - 2/3\, x^3 - 3/2\, x^2$

1.2: $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

1.3: $h(x) = \dfrac{10(x - 5)}{x^2 - 9}$

Como vemos no existe una correlación que pueda justificar la "inversión" de tiempo hecha en aprender unas técnicas que sólo servirán dos años más tarde y en menor grado que el aprendido. (Suponiendo que realmente se hayan aprendido)

Otra pérdida debida a la anticipación en el aprendizaje del cálculo algebraico es la pertinencia' El alumno no aprende cuando son pertinentes los cálculos que hace. ¿Es mejor desarrollar en este momento?, ¿O sería preferible factorizar?

Esto se puede observar en el ejercicio siguiente

2. Estudia y representa la función

$$m(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Al calcular la derivada segunda para estudiar la concavidad de la curva o los puntos de inflexión el alumno se encuentra con la expresión:

$$m'' = \frac{-4(x^2-1)^2 - (-4x)2(x^2-1)2x}{(x^2- 1)4}$$

Si realiza los cálculos que le han enseñado, formalmente, multiplicará y reducirá los términos semejantes del numerador hasta llegar a un polinomio en el numerador (y quizá también desarrolle el denominador) que deberá factorizar para intentar simplificar después.

Hacer la simplificación puede ser útil si tenemos que igualar el numerador a cero, pero si queremos estudiar el signo de la derivada segunda m'' será pertinente dejar el denominador en forma de cuarta potencia, pues sabemos que así es suficiente con estudiar el signo del numerador.

Estas **elecciones** de pertinencia son las que se pueden hacer cuando se ha enseñado a usar el álgebra funcionalmente, pero no cuando se usa formalmente. Sin embargo, no ha habido un momento para enseñar esta pertinencia. Cuando los profesores enseñan derivadas "dan por hecho" que el alumno ha de adquirir unos conocimientos y esperan de ellos que sepan "cómo" y "cuándo" deben hacer un tipo u otro de cálculo.

Un caso claro de esta carencia, asumido por los profesores correspondientes, es el de la **descomposición de fracciones** en otras más simples para cálculos de integración. La mayoría de los alumnos se sorprenden de tener que pasar UNA fracción a la forma de VARIAS fracciones cuando siempre han tenido que hacer lo contrario. Y es un hecho constatado: No saben cómo hacerlo y se les tiene que enseñar en ese momento. Esta es una circunstancia de aprendizaje funcional y pertinente.

Y. Chevallard, en su estudio "Teoria didáctica y estudio de la enseñanza del álgebra", hace una crónica de su introducción de los racionales en clase de 4º, en Francia (13-14 años), usando el álgebra como herramienta para la construcción de **lo numérico**.

Define alli los racionales positivos a partir de los naturales, como los números que satisfacen la ecuación ax=b (con a y b enteros positivos no nulos) y, trabajando algebraicamente (casi diriamos "ecuacionalmente"), se ven: la equivalencia de dos fracciones que "son" el mismo número, la suma de dos racionales,etc...

Éste seria un aprendizaje funcional del álgebra pues no se está enseñando en si misma sino con un objetivo: desarrollar una teoria.

Gérard Vergnaud. Francia.

En su articulo Introducción de l'algebre..., se señala que el Algebra supone una "ruptura epistemológica" respecto a la Aritmética; que muchos alumnos y, en general, los más 'flojos', no entran fácilmente en el juego de las manipulaciones simbólicas, y que, estudiando las dificultades y los errores de los alumnos, se clarifican algunas ideas importantes para esta introducción.

Se observa, también, que, en Algebra se deben plantear explicitamente las relaciones entre los datos y las incógnitas (plantear la ecuación), para manejar con un cálculo, relativamente automático, esa "explicitación"; mientras que en Aritmética el trabajo consiste en buscar las incógnitas intermedias, en un orden conveniente, eligiendo los datos y las operaciones adecuadas para calcular lo desconocido. Estos distintos modos de actuación obligan a un aprendizaje muy distinto en ambos casos.

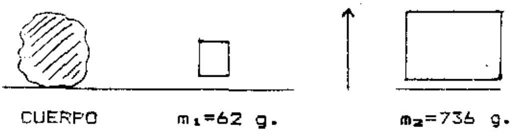
Se plantea, asimismo, la significación del signo de igualdad, con las diferencias entre su uso en aritmética y en álgebra y las dificultades de aprendizaje que crea. Los conceptos de función y variable que se presentan y que hacen surgir la dialéctica **Algebra instrumento / Algebra objeto** (Douady,1984).

Se apunta que, en el caso de la función y la variable, no se aprovechan las ejemplificaciones que prestan las fórmulas de la Geometría o de la Física.

Dada la "ruptura" considerada entre la aritmética y el álgebra, se deciden los autores por intentar una introducción del Algebra como "herramienta" que va a servir para resolver los problemas difíciles de aritmética.

En este trabajo se nos describen los fenómenos didácticos observados sobre una experiencia hecha, como la de Chevallard, en 4º curso, pero con alumnos "retrasados de nivel". Cada observador ha trabajado aquí con 2 o 3 alumnos solamente y la "modelización" (en el sentido de elección de un modelo como ejemplo para la enseñanza) escogida ha sido la de **la balanza**, en equilibrio, que representa la igualdad. En ella se colocan pesos conocidos y otros desconocidos que se deben calcular. El objetivo que se busca es el planteamiento de la ecuación y su posterior resolución.

Por ejemplo una situación didáctica es la siguiente: Se les da el dibujo



y se dice a los alumnos que deben poner el problema en ecuación y resolverlo explicitando la manipulación algebraica efectuada. (Lo que no dice es cúal es el enunciado que se les da realmente a los alumnos. Cuál es el enunciado **que reciben**) Previamente a la manipulación algebraica deben escribir "la manipulación física" correspondiente.

Se observa que la mitad de los alumnos llegan a escribir ecuaciones como: $A + 62 = 736$, pero la otra mitad hace la diferencia y se contenta con constatar por escrito:

$$\underline{674} + 62 = 736$$

de ésto último se obtiene como deducción que **el conocimiento del valor de la incógnita "tapa" el proceso de poner en ecuación.**

También se observa que la manipulación física de la balanza **no produce el efecto deseado** de "pasar" las pesas correspondientes a 62 grs. del platillo izquierdo de la *balanza al platillo derecho, y que sería lo que podría* provocar la escritura "que se busca", que es

$$(A + 62) - 62 = 736 - 62$$

porque los alumnos quitan de la balanza las pesas y vuelven a pesar el cuerpo. Esta escritura tiene que ser propuesta por el profesor y recopiada por los alumnos. Solamente la mitad de los alumnos logran escribirla.

Incluso la tercera línea que espera el profesor que sería:

$$A = 674$$

es escrita por la mayoría, pero algunos escriben: "736 - 62 = 674" o simplemente "=674" con lo que, para estos alumnos, el signo de igualdad **todavía guarda el significado de anuncio de un resultado"**

Se dice en el propio escrito que un elemento esencial en el contrato didáctico (en el sentido de la teoría de G. Brousseau) investigado por el enseñante, y que es lo que se busca que el alumno domine, es lo que llama el script-algoritmo que es la **escritura** de estas tres líneas:

$$A + 18 = 154$$
$$A + 18 - 18 = 154 - 18$$
$$A = 136$$

Esta escritura es aparentemente aceptada por los alumnos pero la linea segunda aparece , en la mitad de los casos,escrita de muy diferentes maneras "no esperadas". Por ejemplo:

$$8 + m = 13$$

$$8 + m - m = 13$$

$$m = 5$$

que hace ver que la respuesta, dice el articulo, es una respuesta al contrato didáctico exclusivamente, de modo que **"el contrato, que conlleva la petición de una escritura formal, interfiere, enojosamente, con la tarea de resolución propiamente dicha"**.

Por mi parte añadiría que, como en el articulo no se explicitan las consignas dadas por el enseñante, es muy dificil opinar sobre la experimentación hecha.

En este primer ejercicio se ve que la mitad de los alumnos seguro que no han aprendido lo esencial de la equivalencia del signo (=) (lo dice el articulista) ni el script-algoritmo. Sin embargo, se dice, que en la segunda y tercera experiencia, con igualdades de los tipos: $3x = 1305$ y $3y + 12 = 42$, todos los alumnos optan por la vía algebraica y tratan las ecuaciones con el script-algoritmo pedido.

Lo que no queda claro es cómo adquiere el alumno este conocimiento, pues la única diferencia es que la situación es descrita mediante un sistema de operadores. No se aclara si se efectúa alguna explicación, por parte del profesor, después de realizar el primer ejercicio; o simplemente son los ejemplos escogidos los que producen el aprendizaje.

Como no se deben olvidar los números negativos, se ponen ejercicios en los que se pide al alumno que invente situaciones semejantes pero con números negativos.

En mi opinión, esta petición aporta una gran dificultad, cuando la ejemplificación empleada ha sido la de la balanza, pues queda vacío de significado "un peso negativo". Tendrá el alumno que recurrir a otro tipo de imágenes mentales. Deberá imaginar "situaciones" diferentes. Y, en vez de servirse de la modelización, deberá **escapar** de ella, por lo que ésta resultará perjudicial, en lugar de beneficiosa.

Georges Glaeser, Francia.

Vamos a comentar un artículo de este autor, sobre las dificultades (el mismo autor observa, en nota a pié de página, que los términos "obstáculos, dificultades, umbrales" son usados ingenuamente, y que sólo tras numerosos trabajos se podrán hacer distinciones pertinentes entre *ellos) que ofreció el establecimiento de los números negati*vos entre la comunidad matemática a lo largo de la historia.

Ya hemos comentado que éste es un problema cuya resolución está muy ligada a la aparición de las letras.

*El trabajo está centrado sobre **la regla** de los* **signos,** y comienza con una cita inglesa que, según Glaeser, es una regla mnemotécnica y que, según Chevallard (1986), parece estar atribuida al poeta W.H. Auden:

> Minus times Minus equals Plus:
> The reason for this we need not discuss.

Este es un grave problema didáctico del álgebra. La regla encuentra su justificación en El tratado del Algebra de Mac Laurin (1648-1756) publicado en 1748. En este tratado, nos cuenta Glaeser, MacLaurin hace una "demostración" de la regla de los signos (multiplicando +a-a=0 por n positivo y por -n negativo) basándose en las propias reglas del álgebra. No es una casualidad que obtenga esta demostración de tipo formal pues este parece ser su punto de vista.

Es una demostración muy original para la época, pues aún se sentía la "necesidad" de que los objetos matemáticos tuvieran su "traducción" real. No hemos llegado todavía al álgebra abstracta y MacLaurin se adelanta, sin embargo, a los matemáticos del s.XIX diciendo en su Tratado de las fluxiones:

> "Il n'est pas nécessaire que les objets de nos théories foient décrits actuellement, ou qu'ils existent hors de nous; mais il est essentiel que leurs relations foient clairement conçues & évidemment déduites,& il est avantageux de s'appliquer particulierement à considérer celles qui répondent aux objets extérieurs ..."

Por la misma época Léonard Euler (1707,1783), en una obra para estudiantes, usa para justificar la regla de los signos, la imagen de una "deuda" y asi obtiene (+.+) y (+.-), después (-.+) por conmutatividad, y para (-.-) la única explicación sencilla que encuentra es que debe ser diferente de "-ab" luego debe (¡!) ser +ab.

Sin embargo Euler no vacila al usar números negativos e imaginarios en un polinomio. **El problema es la justificación de la regla para su enseñanza**. (Es aquí dónde el álgebra suministra una vía. Esta vía no ha pasado desapercibida para Chevallard que, en su artículo de 1986, presenta una sencilla demostración algebraíca de la regla).

Glaeser redacta una lista provisional de algunos obstáculos, en concreto seis, junto con una tabla de autores estudiados, en la que se consigna si el autor demuestra, en sus textos, haber superado cada tipo de obstáculo, o no.

Esta búsqueda de obstáculos epistemológicos se hace para poder compararlos después con los encontrados entre los alumnos, cuando deben empezar a trabajar con números negativos. Esta comparación no está hecha todavía y, aunque no sea directamente nuestro tema de trabajo, está tan relacionada con él que abogamos porque se intente lo antes posible.

El trabajo de esta tesis también tiene el propósito de seguir una linea semejante de búsqueda de dificultades históricas y de dificultades de los alumnos para obtener conclusiones didácticas.

En el trabajo de Glaeser, se observa que, desde el s. III, con Diofanto, hasta los s. XVI, XVII y XVIII, se encuentra la práctica de cálculo, con números negativos, en grandes matemáticos clásicos (Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y

Hankel) que, sin embargo, no han superado algunos de los obstáculos descritos, demostrando así una comprensión parcial de los números negativos, de lo que Glaeser concluye:

> Ainsi la pratique «clandestine» du calcul des nombres relatifs précède de 1600 ans sa compréhension. Voilà bien une leÇon que la didactique des mathématiques ne devrait pas oublier!

En verdad, existen nociones, en matemáticas, cuya elaboración ha sido costosa en el tiempo y que, una vez superadas, resultan tan aparentemente accesibles que olvidamos que los alumnos deben recorrer, individualmente, el proceso de su elaboración.

Lesley Booth, Inglaterra.

Para conseguir una introducción adecuada del álgebra es importante conocer las dificultades de los alumnos. Se estudian, a continuación, los aspectos más relevantes de un resumen de las observaciones extraídas de los resultados de un test preparado dentro del proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) continuador del proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Sciences) en matemáticas.

El proyecto SESM tenía dos objetivos principales: Identificar las causas de algunos errores específicos en matemáticas, en la enseñanza secundaria, y utilizar estas informaciones para desarrollar cortos programas de enseñanza que ayudaran a los alumnos modificar sus modos de razonar y así evitar esos errores.

Una de las áreas estudiadas fué el álgebra elemental o -como Booth la llama- "la aritmética generalizada", o, "en otros términos, la utilización de letras para representar números y la escritura literal para enunciados generales". Los resultados del test fueron completados con la realización de entrevistas individuales a algunos de los encuestados.

El test de que hablamos se pasó a 3.500 alumnos de edades comprendidas entre los 13 y los 15 años. Entre los alumnos que habían cometido errores significativos -en algunos casos se superó el 30 % de alumnos que contestaban erróneamente a algunos de ellos- se hicieron 72 entrevistas, de media hora de duración, con un total de 55 alumnos entrevistados.

Fueron encontradas tres áreas importantes de dificultad:

a). La significación de las letras

b). La comprensión de las notaciones.

c). La habilidad para analizar y simbolizar los métodos que utilizaban en aritmética.

En la significación de las letras encontraron dos cosas que consideraron interesantes:

a) Algunos alumnos no distinguían si las letras representaban números u objetos.

(Lo que hace pensar que esto puede deberse al uso de abreviaturas cotidianas como 4h que son cuatro horas o 35km que representan 35 kilómetros)

En las entrevistas era bastante general encontrar que:

6b eran 6 balones

4y eran 4 yogures o 4 yates

¡Por lo que uno se siente tentado de sugerir que una de las dificultades que tienen los alumnos con la x es que hay pocas cosas cuyo nombre comience por x!

b) Las letras, para muchos alumnos, no representan más que UN valor.

(Personalmente, yo diría que el alumno está más próximo a la noción de parámetro que a la de indeterminada)

Y además algunos alumnos tienen sus propias reglas para adivinar cuál es esa cifra. Veamos uno de los ejemplos:

Pregunta: ¿Qué puedes escribir a propósito del perímetro de una figura que tuviera "n" lados cada uno de *longitud 2? (Rodney, 14 años)*

R: 28

I: ¿Cómo has obtenido ésto?

R: Bueno... todos los lados miden 2 y hay 14.

I: ¿Cómo sabes que hay 14?

R: Hay n lados y n es 14.

I: ¿Cómo encuentras que n es 14?

R: Por el alfabeto. "a" es el número 1, "b" es el 2, y siguiendo así...

Encuentran a bastantes alumnos que parecen creer que n es SIEMPRE 14 porque "es lo más sensato teniendo en cuenta que no hay otra información".

Ante la pregunta: " x+y+z = x+p+z . Es verdad: siempre/nunca/algunas veces, cuando..." (Trevor, 15 años)

T: No será verdad jamás.

I: ¿Jamás?

T: No, jamás, porque éso tendrá siempre valores diferentes... porque p debe ser diferente de y y de los otros valores, así que éso no será jamás verdad.

I: Así que p debe tener un valor diferente... ¿Por qué dices éso?

T: Bueno, si no fuera diferente no tendría p tendría y .¡Ve, se tiene una letra diferente para cada valor diferente!

Se observa en el propio artículo que la idea de que letras diferentes representen el mismo valor no es muy fácil de admitir, pues en aritmética los símbolos numéricos no tienen nunca dos posibles interpretaciones: 7 es siempre siete, y nunca usaríamos el 7 para representar un número que no fuera siete. Entonces ¡p no debería usarse para valores de y! Incluso resulta difícil de creer que "2/3" sea lo mismo que "26/39". (Nosotros mismos, los profesores hacemos ver al alumno que una letra siempre vale lo mismo en un problema y, generalmente, olvidamos hacer notar que dos letras SI pueden valer lo mismo en un problema).

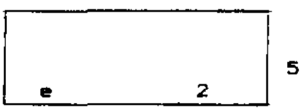
En la comprensión de las notaciones también fueron observadas dos dificultades especialmente:

a). Expresar la "reunión" en suma algebraica.

b). Colocar los paréntesis para marcar la prioridad en las operaciones.

a)La "reunión" en suma algebraica la han expresado algunos alumnos "juntando" las letras una al lado de otra simplemente.

Pregunta: ¿Qué puedes escribir a propósito de la superficie del rectángulo:



(Cristopher, 15 años, ha escrito 5 x e2)

I: ¿Por qué dices 5xe2?

C: 5 veces e2. Esto quiere decir la e más 2, el 2 y la e juntos multiplicados por 5...

En otros casos en que se trata de multiplicar 2 por 7, o 3 por "x", se dan las escrituras 27 o 3x demostrando una confusión entre la escritura decimal (2 decenas y 7 unidades) y la expresión de un producto "literal".

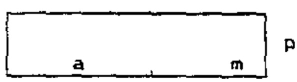
Por mi parte haré la observación de que esta manera de expresar la suma, por simple yuxtaposición, ha sido encontrada en Diofanto (punto II.1.3), en los inicios de la escritura simbólica. En España hemos tenido una reminiscencia de esta escritura en muchos libros de texto, en los que se explicaban los llamados "números mixtos" que eran los números

$$a\frac{b}{c} \quad \text{que representaban} \quad a + \frac{b}{c}$$

Estos números ya no se utilizan precisamente para evitar la duplicidad de símbolos, al usar la misma escritura para expresar la suma y el producto.

b) No se emplean los paréntesis para expresar el orden de las operaciones

Por ejemplo para expresar el área de la figura:



un alumno de 15 años escribe: **$p \times a + m$** y, en la entrevista, sabe que lo primero que debe efectuarse es la suma **($a + m$)**, antes de multiplicar por "p", pero no lo expresa con paréntesis.

En la conclusión del artículo se hace hincapié en que el álgebra es "una aritmética generalizada" pero que es claro que existen diferencias importantes entre ambas disciplinas y que se debe ser riguroso con las expresiones aritméticas y tener en cuenta la relación que los alumnos establecen entre el programa en aritmética y sus concepciones de los procesos algebraicos.

Añadiría yo, que se deberá profundizar en la experimentación buscando esas concepciones que forman obstáculo a la introducción del Algebra.

Miller,L. Diane. Estados Unidos.

En Budapest y durante el desarrollo del ICME 6 (Sixth International Congress on Mathematical Education, 1988) fué presentado un trabajo titulado "Writting to learn Algebra" de la Universidad de Louisiana.

El proyecto fué llevado a cabo por tres profesores voluntarios de secundaría y dos profesores de Universidad. En él se trataba de que los alumnos trabajaran, escribiendo durante cuatro de cada cinco días de clase. El tiempo dedicado a escribir sería de al menos cinco minutos al comienzo de la clase (por ser el periodo que mejor se presta a la reflexión), excepto para aquellos items que hicieran referencia al análisis de la clase misma, que serían realizados al final de ésta.

Los items (preparados por los miembros de la Universidad) serían aplicados por los profesores. Se guardaría todo el material escrito por los alumnos en paquetes semanales que se estudiarían durante un corto periodo de tiempo en los fines de semana y las sugerencias y conclusiones de los profesores de secundaria se comunicarían a los profesores de la Universidad.

Los items fueron de **cuatro categorías generales: ambientales, de instrucción, reflexivos y variados.**

Ejemplo de item "ambiental": "Cuéntame algo que creas que yo debo saber acerca de tí y del álgebra o acerca de tí y de la clase de Álgebra" o "Explícame como te sientes en esta clase hoy?" (Dichos afectivamente y tratando de orientar al alumno)

Ejemplo de item "de instrucción": "Explícame aquello que has entendido mejor en la clase de hoy" o "Dime lo que piensas de los objetivos propuestos en la clase de hoy"

Ejemplo de items "reflexivos": "Recuerda cuando aprendiste a __________ y trata de explicárselo a un amigo que tiene que aprenderlo y sólo te tiene a tí para que le ayudes" (Puede ser referido a algo de la semana anterior) Por ejemplo: "Un estudiante que ha aprendido la propiedad distributiva debe realizar mentalmente el producto:

$$6 \times 530$$

¿Puedes explicarle cómo ayudarse de esa propiedad para hacerlo?"

O este otro: "Para realizar el producto:

$$[(5+7*13-6):15] * (36-12*3)$$

un alumno invierte cinco segundos y dice que lo hace tan rápidamente porque ha empleado una de las propiedades del cero. Explica cuál es esa propiedad y cómo el alumno la ha aplicado"

Ejemplos de items "variados": Se incluyen los escritos libres o escritos solamente para diversión: "¿Cuál es tu digito preferido? ¿Cuántas razones puedes dar para esta preferencia? .

Después de realizar esta experiencia de escritura durante un año se han recogido los testimonios de los alumnos y de los profesores que la han realizado. En muchos aspectos parece que este proyecto ha sido más beneficioso para los profesores que para los mismos alumnos. De los tres profesores participantes, uno tenía 20 años de experiencia, otro 18 años, y el tercero dos años. Los profesores veteranos dijeron sentir que su compañero había aprendido, en un año, cosas, sobre los alumnos y la enseñanza, que a ellos les había costado varios años aprender.

Las conclusiones obtenidas han sido un poco ambiguas pero se van a anotar las más significativas:

a) Los alumnos pueden ser capaces de expresar reglas y propiedades que no saben cómo aplicar.

b) Escribiendo, al principio de la clase, se ha favorecido un "esquema mental" que les ha ayudado a hacer la transición desde la clase anterior a la actividad de la de

^[lgebra.

c) *Ha ayudado a los alumnos a "ordenar"* su pensamiento y ha favorecido la elección de los pasos a dar en los procesos de resolución de problemas.

d) Ha permitido a los alumnos liberar la tensión que les producía no entender ciertas cosas de álgebra.

e) Los estudiantes escriben más cuando se les pide que dirijan el escrito a alguien: otro alumno, un amigo,...

f) El profesor localiza mejor algunas áreas *problemáticas para* la comprensión o el desarrollo de la clase.

g) A través de los escritos, se han localizado errores e incomprensiones que se han podido corregir inmediatamente de forma más eficaz que después de un examen, que es cuando generalmente se descubre.

h) Los alumnos han mejorado su relación con el profesor a través de la confianza nacida al escribir sus inquietudes.

Debido a los escasos ejemplos, sobre los items que se han dado, hay que ser precavido en las expectativas de este proyecto, pero la relación de la escritura materna con el álgebra está desde luego comprobada en los trabajos de C.Laborde y algunos de los items que se expusieron parecían realmente muy interesantes.

-.-.-.-.-.-.-.-

Esta muestra de diferentes enfoques, para resolver los problemas que plantea la enseñanza del álgebra, que se ha expuesto, puede dar una idea de la variedad de los métodos empleados ante el problema reconocido del fracaso escolar en la adquisición de muchos de los conocimientos relacionados con ella.

La introducción de estos conocimientos se ha visto cómo provoca ensayos didácticos y genera estudios de dificultades, tanto de los alumnos como de tipo histórico, que intentan ayudar a clarificar la forma en que se producen los conocimientos para poder actúar eficazmente en su adquisición.

II.3. INCÓGNITAS EN ARITMÉTICA Y EN ALGEBRA

La letra puede tener un uso de incógnita, pero ¿sólo tenemos incógnitas cuando manejamos la letra x?

O, por el contrario: ¿Hay incógnitas en la aritmética?

La respuesta es: sí, ciertamente. Al leer a Stevin (1548-1620) tenemos la demostración. En realidad trabaja con los numéros pero cuando quiere demostrar una propiedad, toma un ejemplo numérico y trabajando con él, sin usar las propiedades específicas que tiene como número concreto, dice luego que se puede hacer lo mismo con otros números. De este modo lo que ha escrito no son números con el status de números, sino que son elementos genéricos de un conjunto.

Los números son así manejados como incógnitas.

Éste quizá sea un tratamiento intermedio de los problemas: medio aritmético medio algebraico. Debemos pues diferenciar incógnitas en situación aritmética y en situación algebraica.

Es interesante ver cómo los progresos en las transformaciones, *los progresos en "aljabra", matan los* procesos de comparación, "al-mucabalah". Al-mucabalah desaparece progresivamente porque aljabra permite transformar completamente el proceso y calcular de la misma manera con objetos matemáticos diferentes (magnitudes, números.., *incluso números negativos). En al-mucabalah sólo es evidente* el resultado al final, cuando hacemos la comparación.

II.3.1. TRATAMIENTO DE LAS INCÓGNITAS

El tratamiento que se da a las incógnitas es también diferente, pues los métodos de cálculo son distintos en uno *y otro caso.*

1. Aritmética. Veamos cómo se procede en aritmética *cuando se trata de encontrar* el *valor desconocido de una* incógnita.

Una *característica* del *pensamiento aritmético es* que se aplica para resolver problemas particulares. Es la intuición del matemático la que va marcando los pasos a seguir, en ausencia de unas reglas fijas de comportamiento.

Tomamos como ejemplo un problema de los que ahora llamamos de primer grado:

"Un comerciante adquiere una barrica de vino a razón de 50 pesetas el litro. Revende la tercera parte a 65 pesetas el litro, un cuarto a 70 pesetas el litro, y el resto a 60 pesetas el litro. Con esta venta obtiene una ganancia de 5.100 pesetas. ¿Cuántos litros de vino había en la barrica?"

La aritmética acude al método "regula falsi" para buscar la solución: Se elige un número cualquiera que representa el <u>falso valor</u> del número buscado -o "incógnita"- Aquí entrará en juego la habilidad del matemático , pues la elección de este número tendrá en cuenta las operaciones posteriores que se van a hacer con él, y así se elegirá un número cuyas condiciones faciliten esos cálculos (Si hay que dividir ese número por otro para calcular fracciones se buscará un múltiplo de los denominadores etc..). Después, con este valor se efectúan los cálculos numéricos que realizan las condiciones del problema y nos llevan al resultado "falso", que es el que hubiera salido si nuestro supuesto hubiera sido verdadero. Haciendo una "comparación" (valmukabala, según Colerus equivalente a "comparación"; o muqabalah, según Boyer equivalente a "compensación o reducción") de este valor falso obtenido con el valor verdadero se calcula por fin el dato pedido.

Para resolver el problema se elegiría un número múltiplo de 3 y de 4, que puede ser el 12. Supondríamos que la barrica tiene 12 litros de vino.

La tercera parte: 4 l. x 65 pts/l = 260 pts.

La cuarta parte: 3 l. x 70 pts/l = 210 pts.

El resto: (12 menos 7) 5 l. x 60 pts/l = 300 pts.

Suponen un total de 770 pts. que sería el precio total obtenido en la venta del vino.

Total de lo pagado en la compra:

12 l. x 50 pts/l = 600 pts.

El comerciante habría ganado:

770 - 600 = 170 pts.

Comparamos con la ganancia real que es 5100 pts. y mediante división (5.100 : 170 = 30) se ve que es 30 veces más de lo que se había obtenido con el resultado supuesto de 12 litros, por tanto, multiplicando (12 x 30) se obtiene el número buscado de litros comprados: **360 litros.**

El razonamiento "regula falsi" o "falsa posición" que hacemos actualmente es un razonamiento intermedio entre al-jabra y al-mucabalah: Se da un valor "falso" y se van haciendo transformaciones con él -al-jabra-, luego, cuando lo hemos transformado hasta obtener un resultado, usamos éste para, por comparación -al-mucabalah-, calcular el valor verdadero.

Se puede tratar de plantear ejercicios de falsa posición a los alumnos y buscar las trazas que han quedado de esos razonamientos intermedios para describir la desaparición de uno de esos procesos absorbido por el otro.

2.Algebra. Para resolver este problema por Álgebra se comienza del mismo modo: identificando la incógnita, que ahora llamaremos x. Después se escriben expresiones que representen las operaciones que habría que hacer con ella si se conociera, y se representan también las relaciones que ligan esta incógnita x con el resto de los datos conocidos.

Nº de litros : x

Un tercio: $x/3$; Precio de venta: $65x/3$

Un cuarto: $x/4$; " " $70x/4$

El resto: $x - x/3 - x/4$; " $60(x - x/3 - x/4)$

Esta representación forma la ecuación.

$$65\frac{x}{3} + 70\frac{x}{4} + 60\left(x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) - 50x = 5.100$$

Y ahora viene la gran diferencia: La manipulación: La transformación progresiva de esta ecuación es la que ahora nos llevará hasta el resultado. Esta manipulación tiene sus propios símbolos, sus reglas propias que usan de las propiedades de las operaciones y de las relaciones en vez de usar de las propiedades de los números.

Multiplicando por 12 los dos miembros de la igualdad, se tiene:

$$260\,x + 210\,x + 60\,(12\,x - 4\,x - 3\,x) - 600\,x = 61.200$$

Reduciendo los términos semejantes:

$$470\,x + 300\,x - 600\,x = 61.200$$

$$170\,x = 61.200$$

Dividiendo los dos miembros por 170:

$$\mathbf{x = 360 \text{ litros}}$$

En un texto francés de finales del s.XIX (F.J. 1895) se habla de "l'Algebre moderne de Viète" y se dice:*"...la potencia reside en estas combinaciones de los propios signos, que suplen al razonamiento de intuición y conducen por una vía misteriosa al resultado deseado"* (*)

En el método de "regula falsi", y en general en los cálculos que llamamos aritméticos, las operaciones se hacen <u>sobre los números</u> y en forma de <u>sucesión de operaciones</u>. Por ejemplo: se dividen dos números y se obtiene un resultado que luego se suma a otro o más números para obtener un nuevo resultado y con el que se obtiene se hace la siguiente operación, etc...(**)

(*) Avant lui (Viète) ... On ne faisait pas d'opérations avec les signes mémes, et si l'on se servait de lettres, le produit de deux quantités était reprèsenté par une autre lettre. On conçoit que cet état restreint d'imperfection ne *constituait pas la science algébrique de nos jours,* dont la puissance réside dans ces combinaisons des signes eux-mèmes, qui suppléent au raisonnement d'intuition et conduisent par une voix *mystérieuse* au *résultat désiré.*

(**) Esta forma de proceder -en sucesión de operaciones- crea, en el alumno habituado a resolver problemas aritméticos, un concepto del signo "igual" que se puede llamar "con dirección". *Es decir, lo que está a la izquierda es igual a* lo que se escribe a la derecha (——>), que es el resulta- *do. No se contempla el signo igual en sentido inverso,* es decir como símbolo de equivalencia. Respecto a esto hay numerosos estudios en didáctica. Vergnaud,1986. Kieran, 1980,1981.

Sin embargo en los cálculos algebraicos las operaciones se hacen como a un segundo nivel: son operaciones con las operaciones. Por ejemplo hay que multiplicar 3 por 2+x, ésto es: un número por una suma,o sea un número se debe multiplicar por una operación cuya clave de expresión es un símbolo(+). De este modo en muchos momentos del trabajo, se deben tener en cuenta, y aplicar, propiedades de las operaciones y de las relaciones establecidas, en vez de usar solamente de las propiedades de los números.

El paso de un modo de calcular al otro sufrió una evolución lenta. Para observarla vamos a exponer un ejemplo del s. XVI. En el libro de PÉREZ DE MOYA, p.164-164 bis se propone el ejercicio:

> "Vno compré 4. varas de paño por 12. ducados, y cofté la vara tantos ducados, como reales, y como tarjas, defta manera, que fi la vara cofté dos ducados, también coftaria dos reales, y otras dos tarjas, demando a cómo cofté la vara?

Y, a continuación, la manera de resolverlo:

> Pon que la vara cofté 1.co. de ducados y otra cofa de reales, y otra cosa de tarjas. Mira aora vna cofa de real, y otra de tarjas, qué parte es de 1.co. de ducado, lo cual fe haze fumando 34 maravedis que vale el real, con 9. que vale la tarja, y ferá 43. pánlos fobre 375. que fon los maravedis del ducado y ferán 43/375 abos y afi dirás que vna cofa de real y vna cofa de tarja es 43/375 abos de una cofa de ducado. Con lo qual juntarás una cofa de ducado, fumando (como fe moftró en el primer artículo, 8.cap.) y montará vno y 43/375 abos de co. lo qual, guardarás : defpués parte 12. ducados que gafté en las 4. varas, por las mifmas 4. varas, y vendrá al quociente 3. efto igualarás a la vna cofa y quarenta y

tres 375. abos de cosa que guardaste. Sigue la regla partiendo 3. que es lo que viene con el menor carácter por vno, y quarenta y tres 375. abos, que vienen con el mayor, y vendrán dos y doszientos y ochenta y nueve 418.abos, y tanto es el valor de la cosa, y respuesta es la demanda. *Quiero dezir, que cada vara costó a 2.* ducados y 289. quatrocientos y diez y ocho abos de ducados, y otros tantos reales, y otras tantas tarjas de a 9. La prueba es que multiplicando 4. varas a este precio, hazen doze ducados, que es lo que se gastó".

(Como nos recuerda el autor, al resolver el problema, las equivalencias de unidades vigentes eran:

1 ducado ---- 375 maravedis

1 real ------- 34 maravedis

1 tarja ------ 9 maravedis)

En nuestra nomenclatura la resolución propuesta tendría el siguiente aspecto:

$$34 + 9 = 43 \implies \frac{43}{375}$$ Esto es "una cosa de real y una cosa de tarja"

Dice que a esto se suma "una cosa de ducado", por lo que queda

$$\left(1 + \frac{43}{375} \right) x$$ ("vno y 43/375 abos de co.")

Después dice que se "parta" 12 por 4 , con lo que se tendrá de cociente "3" e igualando obtiene:

$$(1 \text{ cosa y } \frac{43}{375} \text{ de cosa}) = 3 \qquad (I)$$

Ahora dice: "partiendo 3. que es lo que viene con el menor carácter ..."

$$\frac{3}{\left(1+\frac{43}{375}\right)} = 2 + \frac{289}{418} \text{ ducados}$$

Y ésta es la respuesta obtenida: "2. ducados y 289.quatrocientos y diez y ocho abos de ducados, y otros tantos reales, y otras tantas tarjas de a 9"

Se puede observar que, aunque habla de "la cosa" la forma de resolver el problema es básicamente a través de los números y las fracciones. Es en la frase que representa la fórmula (I) cuando en verdad se plantea la ecuación. Después dice que hay que "seguir la regla", que es, en nuestros términos, "despejar la incógnita". El cálculo con las fracciones lo da por sabido, expresando directamente el resultado.

Vamos a resolver el problema con la actual teoría de ecuaciones:

Llamemos "x" al nº de ducados, que es igual al número de reales y al nº de tarjas.

34/375 es la fracción de ducado que vale un real.

9/375 es la fracción de ducado que vale una tarja.

12/4 = 3 es el nº de ducados pagados por cada una de las cuatro varas.

Ecuación:
$$x + \frac{34x}{375} + \frac{9x}{375} = 3$$

Resolución:

$$375x + 34x + 9x = 1125$$

$$418x = 1125$$

$$x = \frac{1125}{418} = (2 + \frac{289}{418}) \text{ nº ducados}$$

(igual al número de reales e igual al nº de tarjas)

,Se pueden reconocer los números empleados en la resolución de Pérez de Moya, salvo el 1125. En la resolución actual se parte inicialmente de la ecuación y ésta se va transformando en otras ecuaciones equivalentes. En la resolución de Pérez de Moya, se trabajan los números, mientras es posible, antes de llegar a la ecuación. Es una forma de resolución intermedia entre la forma aritmética, sobre los números, y la algebraica, sobre "la cosa".

Llama la atención la poca claridad del enunciado del problema, dónde la palabra ducados está empleada indistintamente para hablar de lo que costaría la vara si se pagara en moneda de ducados simplemente y para expresar la parte del precio en ducados que corresponde en el caso de que se pague con las tres clases distintas de moneda (ducados, reales y tarjas)

Además dice que "demando cuál es el precio de la vara", cuando "el precio de la vara" ha empezado diciendo que "es" 12. ducados para 4 varas. Debería, por tanto, aclarar, que quiere saber el precio expresado en los tres tipos de monedas.

También resulta sorprendente que se invente un problema cuya solución realmente es imposible, pues las fracciones resultantes (en 418 avos) no existian, en verdad, como moneda.

Un poco más adelante, en las páginas 169 bis y 170, podemos observar otro problema en el que se plantea y resuelve una ecuación de segundo grado.

> Artic. V deſte XIII. Cap. "En el cual ſe ponen demandas para declaración de la primera igualación, compueſta de tres cantidades".

Se trata de un ejercicio de aplicación de uno de los modos de resolución que ha explicado en el anterior Capitulo XII. El autor dice que en este capitulo XIII "ſe ponen demandas para declaración (¿quiere significar "aclaración"?) de todo lo que ſe ha tratado en los capitulos precedentes".

El ejercicio y la resolución propuesta son los siguientes:

> "Dame un número, que juntándole 5. y por otra parte quitándole 2. y multiplicando la ſuma por la reſta, monte 98.
>
> Pon que el número demandado es 1.co. ſi le juntares 5.n. ſerá 1.co.p.5.n. Si le quitas 2. quedará 1.co.m.2.n. mutiplicado 1.co.p.5.n. que es la ſuma por 1.co.m.2.n. qué es la reſta, como ſe moſtró en el 3, articulo del octabo capitul. monta 1.ce.p.3.co.m.10.n." lo qual igualarás a 98.n. que quiſieras que vinieran, deſta manera, 1.ce.p.3.co.m.10.n. ig. a 98.n. paſa los 10.n. que vienen menos en la vna parte de la balança (como manda el ſegundo abiſo del 10. cap.) y quedará la

igualación defta manera, 1.ce.p.3.co.ig. a 108.n. Sigue la regla partiendo los 3. y los 108. *que es lo que viene con los menores caracteres, por 1. que viene con el* ce. que en efte exemplo es el mayor, y vendrá a los quocientes lo mifmo : defpués faca la mitad del quociente del mediano, que es 3.co. y ferá vno y medio, quadra vno y medio, y ferán dos y vn quarto, júntalo con 108. que es el quociente del menor carácter, y monta 110. y vn quarto: faca la r. y ferá diez y medio, quita defto la otra mitad del quociente del mediano, que es vno y medio, y quedarán nueve. Eftos nueve es el valor de vna cofa, y refpuefta, a la demanda. Porque fi le *añades cinco haze 14. y fi le quitas 2. quedan 7. Multiplicando 14. que es la fuma* por 7. que es la refta, monta 98 como la demanda pide."

(Se observa que la letra "f" se usa para escribir la "s" en todos los casos, salvo cuando está al final de palabra o cuando es mayúscula. Así: "pafa" y "faca" son "pasa" y "saca" o "abifo" es "aviso". Las demás variaciones de la escritura se aprecian con facilidad)

La resolución explicada por Pérez de Moya en forma de **álgebra sincopada** puede ser "traducida" a nuestra **álgebra simbólica** teniendo en cuenta el significado de los siguientes términos:

caracteres: son el ce. ("censo" o "x^2"), la *co.* ("*cosa*" *o* "x") *y el n.* ("*número*", "x^0" *o símbolo del* término independiente).

mayor, mediano y menor carácter: Se refiere a los grados de los caracteres. El mayor es el de grado 2, o sea el "ce." El mediano es el de grado 1, es decir la "co." y el menor el número, "n."

$$(x + 5)(x - 2) = 98$$

$$x^2 + 3x - 10 = 98$$

$$x^2 + 3x = 108$$

La resolución que sigue es la misma que la fórmula que se emplea actualmente para estas ecuaciones. La alusión al término -10 para sumarlo en el segundo miembro de la ecuación, viene expresada por Pérez de Moya escribiendo "que viene menos en un lado de la balança"

Encontramos aquí la interpretación de la ecuación como una balanza con dos platillos que son los dos miembros. Esta concepción mental de la balanza, para la enseñanza, ha sido empleada recientemente, como hemos visto en el apartado II.2, por Vergnaud, en Francia, para enseñar las ecuaciones a grupos de alumnos considerados como flojos para las matemáticas, y parece que con buenos resultados. Vemos pues la coincidencia de imágenes mentales en la sociogenésis y en la psicogénesis del concepto de ecuación.

II.4. OBSTACULOS EN DIDACTICA

Cuando hablamos aqui de obstáculo lo hacemos en el sentido en el que fué acuñado por Bachelard para la fisica, y posteriormente analizado por Brousseau (1983,a), en relación con la Didáctica de las Matemáticas, es decir:

El obstáculo como conocimiento anterior, que se revela inadaptado en un momento determinado del aprendizaje.

Cuando el conocimiento se revela inadaptado ¿hay que rechazarlo?, ¿quiere decir ¿que hay que olvidarlo? ¿Es que la enseñanza ha sido mala en ese punto? ¿Podía haberse evitado ese obstáculo?¿Sería conveniente haberlo evitado, en el caso de que se hubiera podido?

Profundicemos un poco para aclarar estas preguntas.

En el libro de Bachelard se estudia la noción de obstáculo epistemológico, es decir obstáculo del conocimiento; sus tipos y características en la Física. Y preocupado como está por la formación del espíritu científico, nos habla del obstáculo pedagógico. Así en la página 18 nos dice: "En la educación, la noción de obstáculo pedagógico es igualmente desconocida. Me ha impresionado a menudo que los profesores no comprenden que no se comprenda. Son poco numerosos los que han reflexionado sobre la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión".

Los obstáculos se manifiestan por los errores, cuando estos no se deben al azar, sino que son persistentes y reproductibles. Errores que afloran cuando los alumnos son de nuevo enfrentados a situaciones similares a aquellas en las que se observaron por primera vez. Errores que se producen según una "lógica" del alumno.

Generalmente son conocimientos válidos en cierto dominio y que se tratan de adaptar a otro nuevo sin analizar sus posibilidades de éxito. Por ejemplo: Un alumno que comienza a estudiar los polinomios debe, normalmente, efectúar operaciones de desarrollo y producto de factores polinomios, para buscar la reducción de términos semejantes y dar el polinomio resultado final en forma reducida:

$$(x+4)(3x-2)^2 = 9x^3 + 24x^2 - 44x + 16$$

El hábito de desarrollar llega a formar parte del bagaje del alumno de forma arraigada y asi, ante la siguiente situacion de simplificación de fraccion algebraica,

$$(x+4)(3x-2)^2/(3x+12)$$

proceden desarrollando el numerador:

$$9x^3 + 24x^2 - 44x + 16/3x + 12$$

para realizar, después, el proceso de factorización necesario para simplificar:

$$(x+4)(9x^2 - 12x + 4)/3(x+4) = 9x^2 - 12x + 4/ 3$$

Trasplantando una técnica de cálculo, útil para realizar el producto, a otra situación diferente como es la de simplificación.

Aunque en este caso el "error" cometido puede pasar inadvertido ante la corrección del resultado, ha repercutido en la longitud de los cálculos, y ha aumentado, de este modo, las posibilidades de una equivocación.

Otro ejemplo de obstáculo es el que producen los números naturales y decimales, concebidos como una medida, cuando queremos introducir los enteros. Hay que concebir entonces medidas negativas y, así, se recurre a ejemplos como la temperatura, la longitud dirigida en un sentido o el opuesto,etc.Si pensamos en el ejemplo del dinero en el que interpretamos el número negativo como la pérdida de algo que no se poseía, es decir como una deuda, tendremos que explicar cómo multiplicando dos deudas obtenemos un resultado "positivo", es decir a nuestro favor.

Así, la concepción del número como medida, viene a suponer un obstáculo a la introducción de los números negativos. Este obstáculo didáctico coincide, históricamente, con la tardía aceptación de los números negativos que ha sido señalado en el breve apunte histórico hecho.

II.4.1. CARACTERISTICAS DE UN OBSTACULO

Vamos a precisar lo que se consideran características principales de un obstáculo (Brousseau,1983,a).

1. Es un conocimiento adquirido. No se trata de una falta de conocimiento sino de algo que se conoce. Positivamente. Es decir: está ahí constituyendo un conocimiento.

2. Tiene un dominio de eficacia. Hay un dominio en el que ese conocimiento es eficaz y adecuado.

3. Existe un dominio para el que este conocimiento resulta falso. Por ejemplo al ampliarse el dominio ese conocimiento puede revelarse inadecuado o incluso falso. El dominio puede ampliarse por el proyecto didáctico o por la evolución normal del conjunto de conocimientos.

4. Es resistente. Y será más resistente cuánto mejor adquirido esté, o cuánto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez.

II.4.2. ORIGEN DE LOS OBSTÁCULOS

Se aceptará (Brousseau, op. cit.) que los obstáculos pueden tener tres clases de origenes.

1. Origen ontogenético
2. Origen epistemológico
3. Origen didáctico

1. De origen ontogenético. Propios del sujeto

Neurofisiológicos

Estadios de desarrollo

Regulaciones: acomodaciones, asimilaciones (en el sentido piagetiano de estos términos)

2. De origen epistemológico. Propios del conocimiento

Conocimientos anteriores necesarios

Complejidad

Grados de abstracción

3. *De origen didáctico.* Propios de la enseñanza

Ligados a la elección del método de enseñanza

Unidos al proyecto del sistema educativo

Veámoslos ahora más detenidamente:

1. Los obstáculos ontogenéticos son objeto de consideración y observación por parte del profesor.

El profesor es, y debe ser, conocedor de los distintos estadios de desarrollo y de las acomodaciones y regulaciones que produce la asimilación de los conocimientos y usa de este conocimiento para crear las situaciones de aprendizaje en que va a colocar al alumno (Peres, 1987,a). La psicología puede aportar a la didáctica datos valiosos para la consecución del objetivo común del conocimiento y superación de los obstáculos de origen ontogenético.

2. Los obstáculos de origen epistemológico son de aparición inevitable. Son inherentes al saber mismo. Hay que contar con ellos para franquearlos porque forman parte del conocimiento. Un ejemplo de trabajo de búsqueda en la historia, de este tipo de obstáculos, es el reseñado, anteriormente, de Glaeser respecto a la regla de los signos.

3. Los obstáculos de origen didáctico son los que vamos a detenernos a estudiar en el caso de las inecuaciones.

II.4.3. ¿EVITAR LA APARICION DE OBSTACULOS DE ORIGEN DIDACTICO?

Aunque en algún caso pudieran haberse evitado, - porque los errores en la enseñanza de las matemáticas existen, como en cualquier otra ciencia humana; y tratar de evitarlos es no sólo licito sino eticamente deseable- no nos referiremos ahora a este punto, pues la aparición de estos obstáculos que estamos tratando puede, en ocasiones, ser inevitable.

No se trata pues aquí de que la enseñanza haya sido incorrecta. Nos interesan las inadaptaciones constituídas por el método de enseñanza, haya sido éste correcto ó no. Los conocimientos pueden haber sido adquiridos incorrectamente, o ser correctos y útiles hasta un determinado momento. Lo importante para la enseñanza es que una revisión es necesaria ante un nuevo campo de aplicación, ó ante un cambio de las condiciones didácticas a que está sometido el alumno.

Son los conocimientos adquiridos por el alumno, que responden a una "lógica personal" y que en este momento producen errores, los que nos interesa revelar. Se trata de superar ese obstáculo -franquearlo-, no como algo que no debiera haber aparecido, sino como algo cuya aparición es importante, ya que su superación nos va a permitir la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. De nuevo nos apoyamos en Bachelard para poder decir que es en la superación de ese obstáculo dónde vamos a conseguir el conocimiento nuevo.

Tomaremos pues como punto de partida la existencia de ese obstáculo cuando se empieza a manifestar por algunos errores.

II.4.4. ECUACIONES COMO OBSTACULO A LAS INECUACIONES.

Como una aplicación de lo que estamos diciendo a nuestro propósito particular de estudio de las dificultades con las inecuqaciones, vamos a observar la influencia del aprendizaje de las ecuaciones en el de las inecuaciones.

En las inecuaciones, en particular, se ha observado una adquisición de conocimientos inadecuada. éstas están formadas por desigualdades, que presentan unas características de simbolización completamente distintas de las igualdades, que forman parte de las ecuaciones. Sin embargo, en los programas de enseñanza, se introducen inmediatamente después de las ecuaciones. Incluso los modos de introducción favorecen que los alumnos las reciben como "ecuaciones deformadas" arrastrando, para su comprensión, todos los conceptos adquiridos en el aprendizaje de las ecuaciones y adaptándolos de una manera forzada. Eso crea muchos problemas de comprensión.

Vamos a ver si las ecuaciones producen obstáculo al aprendizaje de las inecuaciones.

Recordemos una caracteristica de las nociones que producen obstáculo:

"Si ella (la noción) tiene buen éxito durante bastante tiempo, entonces toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen más y más difícil su modificación, o su rechazo: ella viene a ser a la vez, para las adquisiciones ulteriores, un obstáculo y también un punto de apoyo" (G. Brousseau, 1983)

¿Es este tipo de apoyo, pero también de obs*táculo, el que forman las ecuaciones frente a las inecua*ciones?

La ecuación de segundo grado y su algoritmo de resolución son bien conocidos de los alumnos y han servido, *mucho antes de trabajar con las desigualdades, para resolver* multitud de ejercicios y también muchos problemas "de letra". En ambas cosas han demostrado su eficacia y su precisión. Todo alumno que ha trabajado con ecuaciones sabe que la fórmula "no falla"; que todo consiste en saber aplicarla para tener el "buen" resultado. Realmente es un poderoso instrumento de cálculo, de modo que como decíamos más arriba, cobra una consistencia que va a formar un obstáculo para el estudio de las inecuaciones.

Las siguientes observaciones han sido extraídas de un cuestionario realizado para el estudio de dificultades con las inecuaciones. El estudio completo del cuestionario figura en el capítulo 6º.

Podemos ver, en la observación de las respuestas de los alumnos al cuestionario, los fenómenos siguientes:

1. Para resolver la inecuación

$$2x^2-5x+2 \geqslant 0$$

un considerable porcentaje de alumnos aplica el algoritmo de resolución de la ecuación

$$2x^2-5x+2=0$$

pero substituyendo el signo (=) por el signo (>). Incluso *presentan las soluciones de forma análoga a las de las* ecuaciones:

$$x \geqslant 2 \quad ; \quad x \geqslant 1/2$$

Un ejemplo es el siguiente:

b/ $2x^2-5x+2 \geqslant 0$

$$x \geqslant \frac{b \pm \sqrt{25-16}}{4} = x \geqslant \frac{5 \pm 3}{4} \quad \begin{array}{l} \nearrow \boxed{x \geqslant 2} \\ \searrow \boxed{x \geqslant 1/2} \end{array}$$

Est la val

El pensamiento del alumno parece haber seguido *el siguiente razonamiento:*

Si en las ecuaciones había una igualdad y las soluciones se daban en forma de igualdad (x=2 ; x=1/2) pues ahora que hay una desigualdad las soluciones se darán con el signo correspondiente y en el mismo sentido de la inecuación planteada.

Realizan asi una **transposición total** de la técnica adquirida con el cálculo de ecuaciones y de las nociones: "ecuación de segundo grado" y "soluciones de una ecuación de segundo grado"; y aplican esta técnica de resolución y estas nociones al caso de las inecuaciones, sin analizar si en este nuevo campo siguen siendo válidas o no.

2. También encontramos en los alumnos, fuertemente arraigado, el hábito de terminar la resolución en cuanto han obtenido las soluciones de la ecuación de segundo grado. Haber llegado a obtener uno o dos números es el "fin natural de todo ejercicio".

Se puede observar en el ejercicio de Marta (15 años) y la entrevista siguiente. (Pr es el profesor). El ejercicio es el nº 5 (SEG):

"Resuelve la inecuación: $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$ "

La resolución de Marta figura a continuación.

b) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

$$2x^2 - 5x + 2 \geq \begin{matrix}(x-2) \\ (x-\frac{1}{2})\end{matrix} \quad //$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} =$$

$$\frac{5 \pm 3}{4} : \quad \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sobre la resolución, se hizo la siguiente entrevista:

Pr. ¿Cuál es la respuesta?

Marta. x = 2 y x = 1/2

Pr. ¿Estás segura?

Marta. Si, porque ya no se puede hacer nada más. Ya he terminado de resolver la ecuación.

Pr. Sin embargo, un poco más arriba sí que has *hecho algo más: has escrito (x-2)(x-1/2).*

Marta. Eso es porque en las inecuaciones se pone así.

Pr. ¿No sabes por qué?

Marta. Las soluciones se ponen asi porque son inecuaciones.

Para la alumna no hacen falta muchas razones especiales. Considera, de una manera "natural",que el problema ha finalizado. Simplemente dice: "Ya he terminado" Es la consecuencia del aprendizaje anterior. Ha sido en muchos casos el cálculo sin objetivo o con el único objetivo de *encontrar la solución o las soluciones que proporcionan las* ecuaciones. La alumna acepta que el cálculo con ecuaciones se hace para obtener ESOS NÚMEROS. No ha tenido que responder a situaciones que vayan más allá.

Ahora en las inecuaciones, la resolución de la ecuación correspondiente no es un fin en si misma. Puede tener como objetivo, o bien la factorización del polinomio dado

$$2(x-2)(x-1/2)$$

para estudiar el signo del producto a través del de los factores, o bien la localización de los puntos de corte con el eje de abscisas, para la representación de la parábola correspondiente a la función polinómica dada en el primer miembro de la inecuación; pero, en cualquiera de los dos casos, el objetivo final no es encontrar las soluciones de la ecuación sino usar esas soluciones para encontrar los intervalos solución de la inecuación.

3. Se identifica la instrucción "resolver" con una expresión que comporte el signo (=) y eventualmente (=0)

Con el ejercicio 7.c del cuestionario se intenta investigar esta identificación, concretamente con las preguntas: ¿Sabes qué quiere decir "resolver una inecuación"?. ¿Sabes "resolverla"?. Si respondes afirmativamente: Resuélvela.

De los 36 alumnos de 1º de BUP que realizan el cuestionario, 4 alumnos, es decir un 11%, escriben que Si saben lo que quiere decir "resolver", que Si SABEN resolverla y a continuación escriben

$$(5-2x)/3 = 0$$

y calculan el valor x = 5/2.

La palabra "resolver" ha quedado ligada a la palabra "ecuación" para estos alumnos. Esto también se aprecia en los ejercicios con inecuaciones de segundo grado, (los números 3,4 y 5 del cuestionario sobre desigualdades), en los que muchos alumnos (concretamente el 35 %) terminan la resolución al encontrar las soluciones de la ecuación correspondiente.

II.4.5. ¿SUPERACIÓN DE OBSTACULOS? .....

La superación de estos obstáculos, presentados por las *ecuaciones, puede venir por la comprensión de este* uso de las mismas para conseguir otros objetivos diferentes del mero cálculo de las soluciones.

Si *el alumno comprende* que las *ecuaciones* se usan en la resolución de las inecuaciones, está comprendiendo que son objetos matemáticos diferentes. ¿O seria mejor decir herramientas matemáticos diferentes (Douady, 1984)?

Esta comprensión además iniciará al alumno en la posibilidad constante en Matemáticas de emplear, en nuevos desafios, los conocimientos adquiridos. Las mismas inecuaciones, cuya resolución en este momento puede parecer al alumno *el "fin último del ejercicio", quedarán así abiertas* a otras utilizaciones posteriores, como pueden ser los cálculos de dominios de funciones irracionales o logaritmicas.

II.4.6. OTRAS DIFICULTADES PARA LA COMPRENSIÓN DE LAS DESIGUALDADES

1. El número cero, como origen, constituye una dificultad para el concepto de desigualdad, por el diferente sentido que origina -hacia la izquierda los negativos y hacia la derecha los positivos.

Los alumnos se acostumbran a dibujar la recta real situando, primero, el cero como origen y dibujando después las unidades positivas: +1, +2, etc...,para los números naturales, hacia la derecha y, (llamamos la atención sobre la secuencia seguida habitualmente), DESPUÉS las negativas: -1, -2, etc...,para los enteros negativos <u>hacia la izda</u>.

Esto "imprime" un doble sentido que surge del cero hacia la derecha y del cero hacia la izquierda, teniendo el cero como origen de ambos:

<——— 0 ———>
recta real --

Considerando que el sentido creciente de la representación es único, de la izquierda hacia la derecha, resulta que los números negativos los estamos escribiendo - si se nos permite decirlo así- <u>al revés</u>. Es decir,de mayor a menor, mientras que los naturales, por ser positivos, se dibujan de menor a mayor, o sea, en sentido creciente "natural", de izquierda a derecha.

Este doble sentido queda "impreso" en la recta y se transmite a todos los números que se emplazan en ella, es decir, a los números reales, problematizando el uso de la representación gráfica, sobre la recta real, para todas las cuestiones en las que interviene el orden.

En el trabajo de Glaeser, cuya referencia hemos hecho en el apartado II.2, se encuentra, en la lista provisional de obstáculos, "La dificultad de unificar la recta numérica", una de cuyas maneras de manifestarse es la descripción de la recta como una yuxtaposición de dos semirrectas opuestas, que llevan símbolos heterogéneos. De modo que esta dificultad encontrada entre los alumnos, viene a ser el reflejo actual de otra encontrada en la historia.

Es interesante observar que estas dificultades no se presentan sobre el eje OY, en el caso de la representación en los ejes coordenados. Es decir, el alumno no parece tener ninguna dificultad, o al menos no es patente en este caso, para situar los números negativos. Si pedimos a los alumnos realizar un ejercicio como el siguiente:

"Dibujar el punto (0, -3'7) en el plano coordenado"

es prácticamente seguro que la situación del valor -3'7 se hará correctamente entre -3 y -4 en el eje OY.

Esta diferencia no la he analizado todavía desde un punto de vista didáctico y experimental. Se trata por tanto de una simple observación que merece ser estudiada más a fondo.

Sin embargo quiero dejar constancia de otra observación respecto a la forma de "dibujar la recta real": Hay algunos alumnos que tienen pocas dificultades, a la hora de reconocer las desigualdades directas, entre números negativos. Por ejemplo:

$$-3{,}076 < -3{,}075$$

y ésto coincide, en algunos casos, con los que sitúan los números enteros sobre la recta real, siguiendo la secuencia siguiente:

0

+1 a la derecha a una unidad de distancia

−1 a la izquierda a una unidad de distancia

+2 a la derecha a dos unidades " "

−2 a la izquierda " " " "

y así sucesivamente.

Reflexionando sobre este hecho, pienso que quizá estos alumnos, al situar los puntos alternativamente a un lado y otro del origen no sufran tan fuertemente la influencia del doble sentido desde el origen, mientras que los otros están realmente reforzando esta dificultad cada vez que dibujan la recta real.

2. Una segunda dificultad es lo que llamaremos LA DOBLE INFORMACIÓN.

En la escritura de los números negativos se da una "doble información" al lector, la "información designativa" y la información "ostensiva" (Pascal).

La información designativa es la que realmente se pretende dar. Por ejemplo en el caso de escribir

$$-5 < -3$$

indicamos que el número −5 es menor que el número −3 ,que es lo que se pretende al escribir la expresión; pero existe, de forma implícita lo que llamamos:

La información ostensiva. Esta es la que muestran los números negativos en razón de su valor absoluto: Los números negativos más pequeños tienen el valor absoluto más grande y, así, la información ostensiva que aporta la relación es que "5" es mayor que "3". Esta información no es la que se quiere dar, evidentemente, pero está implicitamente contenida, porque es "mostrada" al lector que debe separarla de la información conveniente, y evitar la contradicción que supone con la información designativa.

-.-.-.-.-.-

CAPÍTULO 2º.

I. DE LAS LETRAS Y SU SIGNIFICACIÓN.

En Matemáticas, las letras pueden representar muy diversos objetos concretos y abstractos:

Magnitudes - Longitudes, Volúmenes, ...

Puntos - Vértices, Extremos de segmentos, ...

Números - Naturales, Enteros, Racionales, ...

Otros objetos matemáticos - Polinomios, Conjuntos, Funciones,...

Son elegidas convencionalmente, por tanto son símbolos en el sentido lingüístico del término pero no el sentido piagetiano pues no son *significantes* que presenten una relación de parecido con el *significado*, según vemos en el capítulo *¿Signos o Símbolos?*.

En concreto, por ejemplo, en álgebra, las letras "x, y, z,...", empleadas para representar las incógnitas, no presentan parecido alguno con los objetos matemáticos representados por ellas. Incluso, es más: no podrían presentarlo pues, cada una de ellas, puede servir, y de hecho sirve, para representar objetos matemáticos muy diferentes según el contexto en el que se encuentre empleada.

I.1. DIFERENTES USOS E INTERPRETACIONES DE LAS LETRAS

Vemos que el uso que se hace de las letras, en Matemáticas y en especial en álgebra es muy variado. Desde un punto de vista didáctico podemos atenernos a diferentes criterios para su estudio.

1. Según los distintos usos que han tenido desde su aparición y a lo largo de la historia.

2. Según los distintos usos para los que se emplean en clase, o en los textos escolares.

3. Según las concepciones que tienen de ellas los alumnos.

En el uso actual de las letras, empleamos éstas con status muy diferentes: Parámetros "conocidos", parámetros incógnita, incógnitas algebraicas, incógnitas geométricas, variables, etc...

Analizaremos estos distintos usos tratando de especificar las dificultades de enseñanza y aprendizaje que presentan.

I.2. PARAMETROS E INCóGNITAS.

Una de las primeras y más importantes diferenciaciones que aparecen en el uso de las letras, en álgebra, es la de parámetro e incógnita.

Estas dos formas de empleo habitual, conducen a dos conceptos que empezaron a diferenciarse ya claramente con Viète (Boyer p.387), quién contribuyó de este modo, de forma importante, al avance en la simbolización, proponiendo un método para distinguir las magnitudes que se suponen conocidas de las magnitudes desconocidas o incógnitas que se deben calcular: utilizar letras CONSONANTES para representar magnitudes o números que se suponen conocidos, o que se pueden conocer en cada caso, y letras VOCALES para las cantidades desconocidas o indeterminadas.

Con ésto se daba un importante paso en el camino hacia la generalización de los procesos algebraicos, pues mientras se había estado trabajando con coeficientes numéricos concretos, el proceso de encontrar la incógnita era siempre aplicado a "cada caso particular".

Con esta singularidad se multiplicaban los esfuerzos a la hora de resolver cualquier problema. Era importante, pues, buscar una generalización. Pero pronto se percibió que el uso de las letras para representar coeficientes cualesquiera producía más confusión que clarificación en el proceso. Mientras la diferenciación entre las letras utilizadas no fuera real no se conseguiría verdaderamente la generalización buscada.

Esta diferenciación es la que logró Viète proponiendo una formalización que distinguía ambos conceptos.

Sin embargo esta formalización no llegó a tomar fuerza entre los matemáticos de la época. Hubo que esperar hasta Descartes que fué el que logró imponer una formalización diferenciadora que, por otra parte, es la que ha llegado hasta nuestros días.

En la enseñanza, sin embargo, no está tan claramente constituida esta diferencia, como vamos a ver a continuación.

En los libros de texto veremos cómo van apareciendo las letras sin que claramente se distingan los usos diferentes que de ellas se van haciendo.

1.3. USO DE LA LETRA COMO PARAMETRO.

Quiero referirme aquí a las circunstancias matemáticas en que se emplea una letra para representar una cantidad constante.

En la actualidad, las letras que se emplean son las primeras del alfabeto: a,b,c,... y las intermedias: k,m,p,q,r,... como puede verse en el siguiente extracto de textos en uso actualmente:

Texto (Editorial)	Letras empleadas
Alhambra	k
Anaya	m, b y c
Santillana	m, a y b
S.M.	m, a y b
Tarrida y Prats	m, n, q, R, a, b y c
Vicens-Vives	m, p y a

El diccionario enciclopédico Sopena define el parámetro en Algebra como la "cantidad sujeta a determinarse satisfaciendo ciertos valores condicionales" y el parámetro en Geometría como la "cantidad constante que entra en la ecuación de algunas curvas ..."

La enciclopedia Larousse nos da como definición de parámetro en Matemáticas: "Valor que se presenta como una constante en una expresión o ecuación, pero que puede ser fijado a voluntad. 'El parámetro de una parábola es el coeficiente "2p" de la ecuación de la parábola $y^2 = 2px$'..."

En los libros de Matemáticas empleamos la noción de constante y la noción de parámetro sin que se haya hecho una definición de ellas o una introducción especial. Solamente en el texto de 1º BUP de Editorial Anaya, 1987 he encontrado una introducción del término "parámetro" en el tema de "Polinomios y funciones algebraicas":

> Las expresiones del tipo x+a ; (x+a)3 ; ax2+bx+c ; etc., se consideran polinomios en una indeterminada: la x. Las demás letras, a, b, c, representan constantes sin especificar y se llaman 'parámetros'.

En esta explicación aparecen las letras "a", "b" y "c", como contrapuestas a la "x" que aquí, por tratarse de polinomios, se denomina 'indeterminada'.

Nosotros vamos a hacer una especificación sobre el parámetro. Consideramos que es muy importante la función que desempeña éste a la hora de considerarlo y así haremos la siguiente división:

Un parámetro puede ser "parámetro constante", "parámetro incógnita" o "parámetro variable".

- El "parámetro constante" es aquél cuyo valor se supone determinado, o que se puede determinar, mediante condiciones ajenas al problema en el que se está utilizando.

Por ejemplo, en Física y, por tanto, en Matemática Aplicada, la fórmula que expresa la energía producida por un molino de viento nos dice que esa energía es proporcional al "cubo" de la velocidad de éste:

$$E = k \cdot v^3$$

El parámetro "k", es la constante de proporcionalidad, y su valor es distinto según las unidades empleadas en la fórmula. Este valor es "conocido" en cada caso. La energía "E" producida es función de la velocidad "v" del viento a través del parámetro conocido que es la constante "k".

En las fórmulas geométricas de áreas y volúmenes, éstos son funciones de algunas magnitudes lineales. Así en una fórmula semejante a la que acabamos de ver, como es el caso del área del círculo:

$$A = \pi r^2$$

La constante de proporcionalidad es el número π. El radio "r" representa un valor constante: el correspondiente al circulo particular del ejercicio que estemos resolviendo. Asi la fórmula generaliza los casos particulares.

Pero el *parámetro* puede convertirse en *parámetro incógnita* si *conocemos el área "A" del circulo y debemos usar la fórmula para calcular el radio "r" correspondiente.* De modo que en una misma fórmula puede una letra (en este caso la "r") tener un status de parámetro conocido o de parámetro incógnita de acuerdo con el uso que en cada momento podemos hacer de ella.

- *Veamos también el parámetro variable.* Si *tenemos la ecuación:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

las letras "a","b" y "r" son parámetros cuya variación (la de cada uno individualmente) nos dará las ecuaciones de las distintas circunferencias que pueden ser expresadas mediante ese tipo de ecuación. La variación de "r", dejando invariables "a" y "b", daria una familia de circunferencias concéntricas con centro en el punto (a,b). La variación de "a" nos daria una familia de circunferencias del mismo radio "r" y centro en la recta horizontal representada por la expresión "y=b". En estos casos el parámetro ha pasado a tener un status de variable y le llamaremos "parámetro variable".

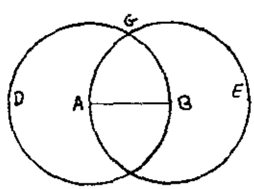
I.3.1. Históricamente.

Veamos algunos momentos del uso de las letras en la Historia de las Matemáticas.

En los **"Elementos"** de Euclides, los números vienen representados por segmentos rectilíneos, y éstos a su vez por letras.

Comienza usando las letras mayúsculas para representar puntos y, así, los segmentos vienen representados por dos letras que son sus extremos. En el libro I.Apartado IV. Proposiciones (Vera, 1970, p.705) encontramos, con el número "1", la siguiente:

> "1. 'Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado' (La nota 22 nos aclara que en los "Elementos" se dice recta limitada)
>
> Sea AB el segmento dado. Haciendo centro en A y en B, descríbanse los círculos BGD y AGE, y desde el punto G en que se cortan trácense hasta los puntos A y B los segmentos GA y GB. (En la nota 23 se nos explica que Euclides escribe A,B y ΓA,ΓB; pero que, puesto que la coma equivale también al signo de suma, el traductor empleará la copulativa 'y' cuando se trate de distintos elementos)"



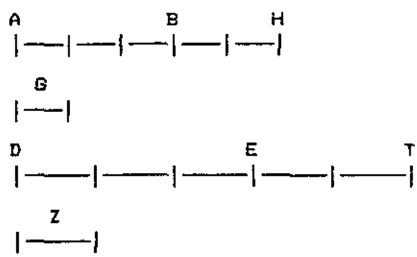
Vemos como las letras A, B y G representan los puntos respectivos, pero las letras D y E, no queda claro si, a su vez, representan otros puntos de las circunferencias o son letras de referencia de las propias circunferencias. En cualquier caso se aprecia que estas letras representan objetos geométricos para su generalización.

Más adelante, en la pág. 791, libro V. Apartado II.

Proposiciones, encontramos algunos segmentos representados por dos letras y otros por una sola letra. Así tenemos en la demostración de la proposición "2":

> "2. '......'
> Si AB es la primera magnitud múltiple de la segunda G el mismo número de veces que la tercera DE lo es de la cuarta Z y la ...."

Correspondiendo a la figura:



Y todavia más adelante, encontramos a las mismas letras mayúsculas representando números.

Así nos encontramos, en el libro VII, proposiciones como la número 13:

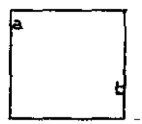
> "Si cuatro números son proporcionales, también lo son alternando.
> Si A es a B como G a D, es A el mismo múltiplo, parte alícuota o fracción de B como G de D,y, por consiguiente, la parte o partes de A en G son las mismas que las de B en D; luego A es a B como G a D, l.q.q.d."
>
> (*Francisco Vera*, 1970,pp.829-842)

Las letras representan aqui a los números pero cada letra representa un sólo número y cumplen una **función generalizadora** de la propiedad expuesta.

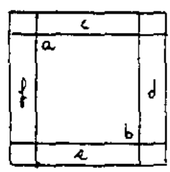
Al-Khowarizmi en su **"Algebra"** también utiliza figuras con letras, como se ve en la resolución de algunos problemas. (Tomado de Boyer, 1986. p. 300) Por ejemplo para demostrar geométricamente que es correcta la solución "$x=3$" encontrada para la ecuación:

$$x^2 + 10x = 39$$

traza un cuadrado "**ab**" con el que representa a "x^2":



Sobre cada uno de los lados del cuadrado construye un rectángulo de 2 unidades y media de ancho, a los que llama: **c**,**d**,**e** y **f**.



La suma de la superficie de estos rectángulos representa por tanto:

$$2\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2}x = 10x$$

Después construye el cuadrado que contiene a estos cuatro rectángulos. Cada uno de los cuatro cuadraditos que forman las esquinas del cuadrado mayor tienen por área:

$$2\tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{2} = 6\tfrac{1}{4}$$

Y la suma de estas áreas es por tanto 25 unidades.

El área total del cuadrado mayor es

$$39 + 25 = 64 \text{ unidades}$$

De lo cual se deduce que el lado del cuadrado mayor mide 8 unidades. Restando de este número dos veces $2\frac{1}{2}$ unidades obtenemos

$$8 - 5 = 3 \text{ unidades}$$

que es el lado del cuadrado pequeño, es decir: la incógnita.

La demostración es ingeniosa y nos da idea de la forma en que Al-Khowarizmi combinaba sus conocimientos aritméticos y geométricos, pero la utilización de las letras no tiene nada que ver con el uso que hemos visto en Euclides ni con el uso actual.

Las letras, en este caso minúsculas, sirven para representar al cuadrado -que se nombra "ab"- y a los rectángulos creados : "c","d", "e" y "f". Se trata de "nombres" elegidos para designar objetos geométricos a fin de abreviar la escritura de la demostración.

También en Al-Khowarizmi encontramos que los coeficientes de las ecuaciones que aparecen son números concretos y están representados por los correspondientes numerales o por palabras. De forma implícita se ve que los resultados algebraicos son generales, pero no hay una forma explícita de expresar esto. No aparecen aquí las letras como generalizadoras de propiedades algebraicas ni geométricas.

Jordano Nemorario (s.XIII) en su "Arithmetica" empieza a emplear letras para representar los números, en lugar de los numerales correspondientes, y así se encuentran formulados verdaderos teoremas algebraicos generales.

Sin embargo, tanto en esta obra como en otra del mismo autor: "De numeris datis", se observan en la escritura ciertas irregularidades, como la expresión de un número a veces con dos o tres letras y otras veces con una sola, que recuerdan la escritura de los segmentos rectilíneos que hace Euclides, como hemos visto más arriba, aunque aquí son letras minúsculas.

En el uso que hace de las letras está sugiriendo el concepto de 'parámetro;'pero esta idea no llega a cobrar fuerza entre sus sucesores.

Un ejemplo de Jordano para uso de las letras en las expresiones generalizadoras de propiedades numéricas se encuentra en Boyer (1986, p. 332). Se trata de demostrar la posibilidad de determinar dos números conociendo su producto y su suma. En el ejemplo se habla de "dividir" un número dado en dos partes, de las que se conoce además su producto.

> "Sea abc el número dado y divídasele en dos partes ab y c, y sea d el producto dado de las partes ab y c. Sea e el cuadrado de abc y sea f igual a cuatro veces d, y sea g el resultado de restar f de e. Entonces g es el cuadrado de la diferencia entre ab y c. Sea h la raíz cuadrada de g; entonces h es la diferencia entre ab y c, y como h es conocida, c y ab están determinados"

La regla de Jordano demuestra que esos dos *números están determinados*. Después, a *modo de aplicación*, resuelve un caso concreto en el que el número es X (los números están escritos en numerales romanos) y el producto XXI llegando a determinar que esas partes son III y VII.

En Bombelli (1526-1572), (manuscrito del libro IV publicado por Ettore Bortolotti en 1923, cuyo ejemplar de la Biblioteca Universitaria de París es citado por Paradís, Miralles y Malet,1989) se encuentra alguna expresión con parámetros como

$$x4 \div 4sx3 = 21$$

por lo que observamos que Bombelli había llegado a estados más avanzados del simbolismo algebraico que lo que revela en sus tres primeros libros.

Sin embargo, este manuscrito no llegó a ser publicado en vida de Bombelli y, no sabemos si éste hubiera mantenido esa misma escritura para su edición o si se trataba de una forma de expresión para su uso particular.

I.3.2. En los textos.

En la actualidad y en general para el uso como parámetros se emplean las letras iniciales del alfabeto: a, b, c,...y algunas de las intermedias: k, m, p, q,... Reservando para incógnitas las letras finales, la x, la y, la z,...

En general, en los textos de Bachillerato no hemos encontrado que se haga introducción del parámetro como tal, o de las constantes, explicando su significado.

Solamente en la editorial Anaya podemos ver alguna alusión al respecto en sus textos de 1º de BUP. En el texto del año 1975, en los ejercicios correspondientes a "Sistemas de ecuaciones" pág. 280 encontramos:

En este ejercicio la letra "a" representa un número real. La solución del sistema depende del valor de "a". La letra "a" se llama parámetro

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x - y = a \end{cases}$$

A continuación resuelve el sistema estudiando la soluciones que se obtienen en los distintos casos que se presentan según se cumpla:

$$1 + a \neq 0 \quad ó \quad 1 + a = 0$$

Después plantea seis ejercicios similares a éste con el enunciado:

"Resolver y discutir según el valor del parámetro"

En este caso el empleo de la palabra parámetro corresponde a lo que he llamado "parámetro variable". En el resto del texto no se vuelve a presentar el término.

En el tema de "Funciones polinómicas" cuando introduce la escritura:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

llama a los a_n, a_{n-1}, ... ,a_1, a_0 **coeficientes** de la función polinómica pero no alude para nada al término parámetro.

En el texto de 1º de BUP de la misma editorial pero del año 1987, en el tema "Polinomios y funciones algebraicas", encontramos la noción de parámetro más amplia, referida en general a las constantes que aparecen como *coeficientes de un polinomio*:

> "Las expresiones del tipo $x+a$; $(x+a)^n$; ax^2+bx+c; etc., se consideran polinomios en una indeterminada, la x. Las demás letras, a, b, c, representan constantes sin especificar y se llaman 'parámetros'".

Sin embargo, hay que advertir que, en la misma página 108, se dice también:

> Los polinomios en una indeterminada, x, son expresiones de la forma:
>
> $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$
>
> donde a_n, a_{n-1}, ... , a_2, a_1, a_o, son números reales, llamados 'coeficientes', "x" es la variable o indeterminada y "n" es un número natural.

Vemos, pues, que la definición de parámetro no está verdaderamente explicitada, con independencia del término coeficiente. *Parece desprenderse de lo anterior que cuando* tratemos la expresión algebraica como polinomio habrá que decir que estamos tratando con coeficientes y cuando consideremos la expresión algebraica "a secas" estaremos tratando con "parámetros".

En el aula, las letras, en sustitución de los números, aparecen inicialmente para expresar:

i) Las **propiedades de las operaciones**, por ejemplo la propiedad conmutativa de la suma

$$a + b = b + a$$

ii) Las **fórmulas** de áreas, después las de volúmenes, y en algunos textos otras fórmulas.

$$At = \frac{1}{2}\, a \cdot b$$

En el libro de matemáticas de 1º de BUP de Ed. Esla podemos ver reseñadas

> "Fórmulas de Física y Matemáticas como $v = e/t$ que da la velocidad media de un móvil; $V = I \cdot R$ que es la ley de Ohm para el voltaje de una corriente eléctrica; $L = 2\pi r$ que es la longitud de una circunferencia; $S = \frac{1}{2}\, p \cdot a$ que es la superficie de un polígono regular".

Añadiendo a continuación:

> "Todas estas fórmulas son ecuaciones con tantas incógnitas como letras variables aparezcan en ellas.
>
> (¡Ojo! π, aunque es una letra, no es una variable. Tú ya sabes que representa un número muy especial: $\pi \simeq 3'14$)"

Encontramos aquí, en el marco de las ecuaciones, ligada la idea de letra a la de **incógnita**.

iii) Los **elementos de un conjunto C**

$$C = \{ a, b, c, d \}$$

iv) Los **coeficientes de una ecuación**

$$a x + b = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En todas estas ocasiones las letras: a, b, c,... representan magnitudes o elementos fijos que se suponen conocidos, o conocibles, para cada caso particular, para cada ejercicio, problema o situación en los que se empleen las expresiones en que aparecen. Es el uso del parámetro constante. Es la letra usada para escribir expresiones generales o fórmulas generalizadoras de propiedades. En estos casos, vemos que, casi exclusivamente, se emplean las primeras letras del abecedario.

Para el caso de los parámetros incógnita existe mayor variedad de letras: Se encuentran las letras intermedias del abecedario como: k,m,p,.... Por ejemplo en textos de 1º de BUP tenemos:

"428.- Determina "k" en la ecuación $4x^2 - kx + 2k - 7 = 0$, para que tenga una raiz doble"

(Ed. Alhambra, 1985, p.192)

"4.4.- Una de las soluciones de $2x^2 - 9x + m = 0$ es el doble de la otra. Halla ambas soluciones y el valor de "a"".

(Ed. Vicens-Vives, 1988, p. 104)

En otras ocasiones se emplean las primeras del abecedario, como la "a" o la "b" en los ejemplos siguientes:

"25.19. Determina el valor que ha de tener "a" para que el módulo del cociente

$\frac{a+i}{2+i}$ sea $\sqrt{2}$. Calcula, después, dicho cociente."

(Ed. Edelvives, 1975, p. 291)

"25.11. Determina "b" en la ecuación $x^2 + bx + 21 = 0$, sabiendo que una raiz es cuádruple que la otra"

(Ed. Edelvives, 1975, p. 290)

I.3.3. En las concepciones de los alumnos.

¿Qué problemas de interpretación presenta este uso de las letras a los alumnos? ¿Usan éstos de las letras correctamente, en cada ejercicio, comprendiendo lo que ellas representan? ¿Saben los alumnos utilizar las operaciones algebraicas con las letras adecuadamente? ¿Llegan a comprender, por ejemplo, la diferencia que comporta la idea de parámetro con respecto a la idea de incógnita o la idea de variable?

Para buscar la respuesta a estos interrogantes hemos realizado un cuestionario sobre el uso de las letras cuyo análisis detallado está recogido más adelante y en el que se analizan distintas interpretaciones que los alumnos hacen de las letras. Se buscan las concepciones espontáneas que los alumnos pueden tener acerca de las letras.

Este cuestionario ha sido pasado a los alumnos durante el curso 1989-90. Lo han realizado alumnos de 7º de Enseñanza General Básica (EGB), de 8º EGB, de 1º de Reforma (REM) y de 1º de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP).

Los resultados obtenidos han sido confirmados y completados con la realización de entrevistas individuales llevadas a cabo después de pasar el cuestionario. A través de ellas se han obtenido datos sobre las estrategias, empleadas por los alumnos, para resolver las cuestiones planteadas.

Algunas interpretaciones observadas son las siguientes:

Se aprecian interpretaciones que coinciden con algunas de una investigación del CSMS ("Concepts in Secondary Mathematics and Science") hecha en Inglaterra.

I.3.3.1. La letra como objeto

Esta interpretación corresponde a las ocasiones en que el alumno "lee" la letra pensando que simboliza un objeto determinado.

- Puede ser en una expresión algebraica:

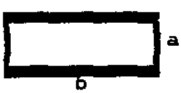
$$5m + 6p + 2m$$

en la que las letras se tomen como representantes de objetos cuyas iniciales son: (m) manzanas y (p) peras por ejemplo. Con esta interpretación se trata de sumar

5 manzanas + 6 peras + 2 manzanas

- Incluso puede pensar "simplemente" en 7 "emes" más 6 "pés", es decir cada letra como el objeto-letra con el que se escribe.

- Puede ser en una fórmula geométrica para un cálculo de áreas



$$S = a.b$$

"a" y "b" pueden ser interpretadas como lados del rectángulo, como segmentos, -"b" segmento base, "a" segmento altura- en lugar de interpretarlas como las longitudes de esos lados. La fórmula del área tiene sentido con la segunda interpretación ,pues se sabe realizar el producto de dos números, pero no con la primera, pues el alumno no ha realizado el producto de dos segmentos.

i. Posible origen y refuerzo de esta interpretación

Cuando escribimos en lenguaje de uso habitual, 50 metros o 35 litros lo hacemos en la forma 50m. o 35l.

Lo habitual de la escritura hace que muchas veces se omita el "punto" que marca la señal de la abreviatura, y 50m son 50 metros, o 35l son 35 litros. Así, cuando el alumno encuentra 3m o 5p puede interpretar "tres metros" o "tres manzanas" en vez de suponer que "m" representa un número que está multiplicado por 3.

Esto puede venir reforzado por los enseñantes, es decir, por el medio didáctico; pues cuando queremos enseñar a sumar polinomios, para justificar que solamente se reducen los términos semejantes, con frecuencia, y de manera metafórica, decimos al alumno que en una expresión como

$$3x + 5x^2 + 2x + \dots$$

solamente podemos sumar los términos 3x con 2x y no con $5x^2$ pues "no se suman manzanas con peras". Así la expresión 3x+2x puede quedar en el alumno como la idea de sumar 3 "algo" más 2 "algo", siendo ese "algo" la "x". Y así cuando, más adelante, éste vea una expresión como "3p" quizá le surja fácilmente la idea de "tres peras" o "tres pesetas" o algo semejante.

ii. Uso y eficacia de esta interpretación

Esta analogía empleada por el profesor favorecería dicha interpretación, que puede ser muy útil, si el alumno *la usa para realizar adiciones o sustracciones, pues* buscando "los objetos iguales" encontrará **los términos semejantes** *para operar* con ellos, como en el caso concreto que hemos puesto como ejemplo, en el que produciría un resultado correcto que sería:

$7m + 6p$ ("7 manzanas más 6 peras")

pero esta interpretación puede crear serias dificultades, como estudiamos en algunos ejercicios del cuestionario, por ejemplo, en el número 15.

Y, *además, aunque ésto sea útil como hemos* visto, para la adición o sustracción, no resulta eficaz para dar un sentido a expresiones como:

La *multiplicación:* $7m.6p$

La radicación: $\sqrt{3a}$

O la potenciación: a^{*}

pues, en estos casos, no suministra *ninguna imagen mental* correspondiente a la interpretación de "el producto de 7 objetos por otros 6 distintos", o para "la raiz cuadrada de tres objetos".

Todavia en el caso 1.1 de los segmentos podria el alumno llegar a interpretar hasta

a^2 como una superficie o a^3 como un volumen

pero la cuarta potencia de "a" tampoco tiene ya una posibilidad de interpretación en ese sentido.

Este tipo de dificultad, proveniente de la sujeción del álgebra a la geometría, se puede encontrar históricamente.

Toda la tradición griega se basaba en conceptos y demostraciones geométricas, lo cual traía serios problemas para la concepción de los números que llamamos irracionales y negativos. Todavía los árabes (Al-Khowarizmi) e italianos (Pacioli) y hasta los franceses (Viète) consideraban las demostraciones geométricas como necesarias para comprobar la veracidad de las demostraciones y cálculos algebraicos.

En este marco, uno de los principios a respetar era el de homogeneidad dimensional.

Viète encontraba esta dificultad epistemológica creada por la sujeción mental al cálculo con magnitudes. A pesar de que Viète hacia claramente la diferenciación entre "logística numerosa", que es la que calculaba sobre un número o un segmento, y "logística speciosa", que es la que calculaba sobre "especies", se daba cuenta del amplio campo del álgebra, y respetaba rigurosamente el principio de homogeneidad dimensional, lo que le llevaba a escribir:

$$x^3 + 2a = bx$$

expresión en la que "a" tendría que ser "solidum" (con tres dimensiones) y "b" seria "planum" (con dos dimensiones).

Encontramos un primer paso, en la superación de esta dificultad, con Bombelli (1526-1572) pues, en su **"Algebra"** (1572), no resuelve directamente los problemas geométricos, sino que se sirve del álgebra para su resolución como ciencia "autónoma", que sirve para justificar *la Geometría y no al contrario. (Paradís, Miralles y Malet,* 1989).

A pesar de Bombelli, esto supuso un freno en la libertad de operaciones necesaria para el desarrollo del álgebra, y hubo que esperar hasta Descartes y Fermat para que esta dificultad se superase y las letras fueran liberadas de la magnitud que se les asignaba (Boyer,1986, p. 388).

I.3.3.2. La letra con valor adjudicado

Se trata de un rechazo de la letra como desconocida. *El alumno desea eliminar la incertidumbre que le* produce trabajar con algo no conocido y adjudica a la letra un valor elegido por él de forma personal. Para ello acude a relaciones y conceptos como simetría, reparto equivalente, etc...

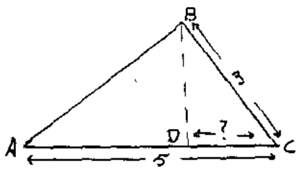
- El **valor repartido** se da por ejemplo, si debe trabajar con una expresión algebraica tal como

$$a + b = 12,$$

cuando asigna, inmediatamente, los valores: $a=6$, $b=6$. Se puede encontrar este proceder, con los errores que conlleva, en ejercicios de cálculo sobre figuras geométricas, como el siguiente:

"En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a=5cm y un cateto c=3cm ¿Cuànto vale la proyección de este cateto sobre la hipotenusa?"

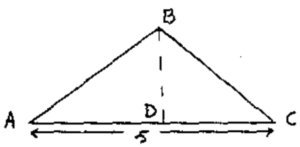
El ejercicio corresponde a la aplicación del "teorema del cateto", y sería:



$$\frac{\text{proy.}}{\text{cateto}} = \frac{\text{cateto}}{\text{hipot.}}$$

$$\frac{DC}{3} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \overline{DC} = \frac{9}{5} = 1'8 \text{ cm}$$

pero algunos alumnos que realizan un dibujo "un poco deformado"



escriben $\overline{AD} + \overline{DC} = 5$ cm

y "calculan": $\overline{DC} = 2'5$ cm

En los cuestionarios preparados, también se puede apreciar esta valoración en ejercicios como el siguiente:

"Si $b + d = 6$, ¿qué puedes decir de

$b + d + f = ...$?"

en el que hay alumnos que dan como respuesta: $b + d + f = 9$

En este caso es muy probable que haya asignado a cada letra el valor 3, usando la información inicial: b+d =

6 y repartiendo entre ambas letras el valor 6 de forma equitativa. (Esto se confirma con las entrevistas individuales en las que se han pedido las explicaciones de las respuestas).

- También se da un caso singular de valoración de la letra cuando el alumno le asigna el **valor de su lugar en el alfabeto:** la "a" valdrá 1, la "b" valdrá 2, etc..., como ya se ha comentado.

En el caso de un ejercicio como el anterior la respuesta obtenida será

$$b + d + f = 12$$

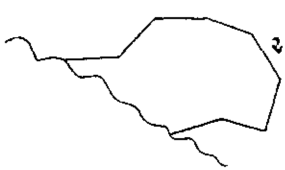
pues la "b" ocupa el segundo lugar , la "d" el cuarto y la "f" el sexto lugar, de modo que

$$b + d + f = 2 + 4 + 6 = 12$$

Este tipo de valoración ha sido también confirmado con las respuestas de las entrevistas individuales.

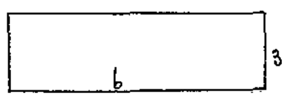
Otra ocasión de adjudicación de valor, en este caso **"visual geométrico"**, se puede observar en el cuestionario en el ejercicio nº 26:

"¿Cuál será el perímetro de este polígono cuya figura sólo vemos parcialmente si sabemos que tiene "n" lados y que todos miden 2 cm de longitud?"

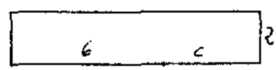


En lugar de la respuesta correcta: perímetro igual a 2n, algunos chicos responden 16 porque han contado los lados visibles que son 8, es decir han rechazado el uso de la letra "n" asignándole un valor calculado por la imagen visual que aporta la figura.

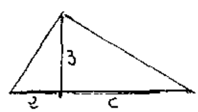
También en los ejercicios nº 23 y 24, en los que se dan las figuras



23 - 2º



23 - 3º



24 - 3º

muestran casos en que los alumnos han usado una aproximación "visual".

I.3.3.3. La letra "no tenida en cuenta"

En este caso casi resulta improcedente decir que es una "interpretación" de la letra, pues en realidad es un rechazo, haciendo precisamente una "no interpretación" de ella.

Los alumnos escriben expresiones como 5k sin tener en cuenta más que el número 5 y, acompañándolo de la k, simplemente porque "estaba escrito así". No conceden ningún sentido a la letra. Le "permiten" estar ahí simplemente.

Esta no-interpretación de la letra puede detectarse en ejercicios como:

"Añade 3 a 5n"

cuando se produce una respuesta como 8n.

Pero puede pasar desapercibida en ejercicios como:

"Multiplica 5 por 2n"

pues la respuesta 10n es correcta a pesar de la no-interpretación de la "n".

Cuando el alumno manifiesta este olvido de las letras inicia un proceso de incomprensión del álgebra elemental.

Al no dar un sentido correcto a las expresiones que debe utilizar, no comprende los procesos que se siguen con esas expresiones, ni su finalidad.

En una especie de vacío conceptual va "aprendiendo" lo que para él son manipulaciones sin sentido. Va mecanizando habilidades, creando automatismos cuyo control escapa por completo a sus posibilidades. El control de la eficacia o corrección de su trabajo queda traspasado completamente al profesor: "El profesor SABE si está bien y ya me lo dirá"

No toma las riendas de su aprendizaje. No toma contacto con el saber mismo en un intercambio de experiencias y actuaciones. Sus acciones no son fruto de una decisión personal, son ORDENADAS POR EL PROFESOR simplemente.

I.4. USO DE LA LETRA COMO INCÓGNITA

Las letras empleadas para este uso son, en el momento actual, preferentemente las últimas del alfabeto: x, y, z,...

La incógnita por excelencia es la x.

I.4.1. Históricamente.

Históricamente, esta simbolización logró alcanzarse tras muchos años de tentativas y vacilaciones.

La incógnita comenzó llamándose la "cosa" durante el nacimiento del álgebra árabe (comienzos del s. IX) en su forma "retórica". Durante los siglos XV y XVI fué reduciéndose mediante abreviaturas.

Luca **Pacioli** (1445-1514) en su obra **"Summa"**, considerada como la primera algebra impresa, usa las abreviaturas "co", "ce", "cece" y "ae" para "la cosa" (nuestra x), "el censo" (x^2), "el censo-censo" (x^4) y el "signo igual" (=). Pacioli creía que las ecuaciones cúbicas no se podían resolver algebraicamente, de aquí que no exprese la tercera potencia de la incógnita.

Michael **Stifel** (1487-1567) comienza, en su **"Arithmetica Integra"** (1544), usando abreviaturas para las distintas potencias de la incógnita, representadas por las palabras: coss, zensus, cubus y zenzizensus, y evoluciona hasta proponer después, en su obra "De algorithmi numerorum cossicorum", el uso de una única letra para representar la incógnita, repitiendo dicha letra, para las potencias, tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo:

AAAA representaría nuestro actual x^4

Rafael **Bombelli** (1526-1572) en los tres primeros libros de su "Algebra", utiliza el "tanto" y la "potenza", para simbolizar la incógnita "x" y su cuadrado "x^2". Sin embargo, en el manuscrito del libro IV, publicado por Bortolotti en 1923, se vuelven a encontrar los términos "cosa" y "censo" para estas expresiones. Apareciendo escrituras como

1 Z p. 5 R m. 4 (Que se lee: "1 zensus plus 5 res minus 4" o "1 censo más 5 cosa menos 4") para expresar $x^2 + 5x - 4$.

Nos parece razonable la conjetura de Paradis, Miralles y Malet, 1989, de que este manuscrito pudiera no estar preparado para la imprenta como los anteriores, ya que no fué publicado en vida de Bombelli, sino encontrado y recuperado por Bortolotti. Quizá Bombelli no conocía la obra de Diofanto en el momento de la escritura original de este texto y pudo ir cambiando la nomenclatura conforme preparaba las obras para su impresión quedando, en su estado original los libros IV y V.

De ser cierta esta conjetura, nos mostraría la evolución que se iba produciendo en la nomenclatura algebraica durante aquel período.

François **Viète** (1540-1603) ya propuso concretamente usar las VOCALES para representar las incógnitas y por fin, René **Descartes** (1596-1650) en su obra "La Géométrie" utiliza ya las primeras letras del alfabeto: a, b, c,... para los parámetros constantes y las últimas: x, y, ... para las incógnitas o variables, por lo que esta obra marca la forma de expresión actual en Álgebra.

Pierre **Fermat** (1601-1665), por la misma época que Descartes, utiliza la notación de Vieta:

"D in A aequetur B in E"

que traduce nuestra expresión: "Dx = By"

pues "in" es "por", "aequetor" es "igual" y las vocales son las incógnitas.

Estamos, por tanto, hablando de siete siglos aproximadamente, y del esfuerzo de muchos matemáticos experimentados. Personas capaces e interesadas en hacer avanzar el conocimiento, y que aportaban sus esfuerzos para lograr este avance, a pesar de los cuales hubo que esperar todo ese tiempo para llegar a la simbolización completa actual. ¿Es de extrañar que nuestros estudiantes necesiten un tiempo psicológico de adaptación escolar a las letras y a su uso?

Esta concreción, tan larga y dificultosa, del símbolo de la incógnita a lo largo de la historia puede orientarnos sobre la complicación que puede representar, para el alumno, llegar a asimilar una eficaz simbolización. Nos basamos, para este comentario, en las afirmaciones de Piaget y Garcia (*), que compartimos. A lo largo de este trabajo encontraremos, en distintos momentos, confirmaciones de estas tesis.

El uso de las letras como incógnitas en las ecuaciones, obliga a un doble ejercicio de abstracción: Primero, la letra (por ejemplo la x) representa "la cosa", "la desconocida", del mismo modo que en los origenes del álgebra; tratándola como si se conociera, se sigue con ella el proceso del problema en particular y, cuando este proceso culmina, queda "planteada" una condición, la ecuación, que tiene que cumplir la incógnita para que el problema esté bien resuelto. Después actuando sobre esa condición, mediante reglas pre-establecidas y generales, con una especie de proceso automático de reversibilidad, llegamos por fin a aislar y, de ese modo, a calcular la incógnita.

La incógnita representa algo preciso durante el proceso de planteamiento de la condición (ecuación o inecuación), pero cuando la condición está planteada, su manipulación posterior es independiente de lo que represente. Se

(*) "Psico-génesis e Historia de la Ciencia". Piaget y García. 1982 debe hacer una abstracción de su significado y pensar, únicamente, en las leyes algebraicas que se pueden aplicar para llegar a la solución.

En este proceso, lo primero es hacer una simbolización con la letra (simbolización en el sentido del profesor García Morente, es decir, emplear una figura real, en este caso la letra, para evocar o representar otra cosa distinta de ella), después trabajar con ese símbolo, pero haciendo abstracción de lo que representa, olvidando el simbolismo para elaborar la respuesta de una forma objetiva (proceso de cálculo algebraico), independientemente del contexto. Cuando se ha llegado al final del proceso de cálculo, se vuelve a retomar el símbolo, y lo que representa, para aceptar o no la respuesta obtenida.

Esta "abstracción de la simbolización hecha" para trabajar, teniendo en cuenta sólo el objeto matemático, es imprescindible para que el cálculo sea ágil.

En el trabajo de simbolización es importante **la primera expresión** (o las primeras expresiones), momento en el que se hace el planteamiento, y aquí cada detalle tiene que tener un claro sentido; y también es importante **la última**, pues a partir de ella se hace la "traducción" del simbolismo en sentido inverso, volviendo así a la situación "real". Es cuando se ejecuta la que se puede llamar des-simbolización.

I.4.2. En los textos.

Tomamos como textos representativos los de las editoriales: Santillana y S.M., que suponen las dos tendencias que se dan en la introducción de la letra "x" como incógnita de las ecuaciones.

Una tendencia es la que se preocupa de definirla aunque sea escuetamente:

Editorial Santillana, 7º EGB, p. 59:

> "La letra o letras desconocidas de una ecuación se llaman 'incógnitas'. En la ecuación x + 2 = 9 la incógnita es "x".
> La incógnita de una ecuación se puede designar con cualquier letra, pero en general se utiliza la letra "x"".

En la misma página se hace la distinción entre identidad y ecuación, planteando también ejercicios de sustitución de la "x", para resaltar el hecho de que la identidad se cumple para cualquiera de sus valores, mientras que la ecuación solamente se cumple para algunos valores de la incógnita.

En este libro vemos la forma en que se explica al alumno la nomenclatura que, a partir de ese momento, se va a utilizar, y se le llama la atención sobre la letra "x" particularmente, haciéndo hincapié en el papel de incógnita que va a jugar a partir de ese momento.

La otra tendencia es la que presenta a "la incógnita" sin detenerse a explicar la clase de papel que va a representar en las ecuaciones. La incógnita es introducida porque sí, como si su aparición fuera una cosa natural y no necesitara reflexión alguna.

Texto **Pitágoras** 7 de Ediciones S.M., p. 50. La primera pregunta de la lección 5 lleva por título "¿Qué es una ecuación?" y comienza así:

> "Alicia dice a Marta: He pensado un número; lo he multiplicado por 3 y luego he sumado 4. Como resultado he obtenido 10. ¿Qué número ha pensado Alicia?
> Llamaremos 'x' a ese número desconocido o 'incógnita'(en letra cursiva). Alicia ha procedido así:...."

Prosigue el ejemplo y, sobre él, se aclara que se llama ecuación a la condición: $3 \cdot x + 4 = 10$. Se señalan los miembros de la misma y se dice que el valor 2 es la solución de la ecuación.

Sin otras explicaciones, diez lineas más adelante, se da ya por aceptado el conocimiento del alumno sobre la nomenclatura introducida y se dice de modo natural:

> "Las ecuaciones, como $3 \cdot x + 4 = 10$; $2 \cdot x - 4 = 8$, se llaman 'ecuaciones de primer grado' porque la incógnita "x" está elevada a la potencia 1 : $x^1 = x$."

A partir de aquí, el libro de texto trata ya de las ecuaciones equivalentes, y de la manera de resolver ecuaciones de primer grado. Después de enseñar la resolución de estas ecuaciones, en la página 55, es decir cinco páginas adelante, aparece una pregunta que se titula "El lenguaje ordinario y el lenguaje matemático", donde se dice que el lenguaje matemático es más conciso que el lenguaje ordinario y que puede hacer más sencillos algunos problemas. Por tanto, dice el texto, es conveniente saber hacer la **traducción**. Pone a continuación algunos ejemplos como los siguientes:

Lenguaje ordinario	Lenguaje matemático
- Un número x aumentado en 2	$x + 2$
- El cuadrado de un número x aumentado en 3	$x^2 + 3$
- Dos enteros consecutivos	x, $x+1$
- Luis tiene 13 años. Su edad cuando pasen x años será	$13 + x$
-	.....

Después de esto vienen ya los ejercicios y problemas ordinarios "de letra", sin más alusiones a las mismas ni a su empleo.

Esta es la otra tendencia en la que, como vemos, se acepta como natural la aparición de la letra "x" representando a la incógnita, como si el concepto de incógnita no tuviera ninguna connotación especial que lo hiciera merecedor de explicaciones diferenciadas.

I.4.3. En las concepciones de los alumnos.

Surgen aqui otras interpretaciones de las letras:

I.4.3.1. Letra interpretada como un conjunto de números.

En el cuestionario se presenta el ejercicio:

"¿Qué puedes decir sobre "n" si sabes que n+p=20 y que "n" es menor que "p"?"

Para dar la respuesta correcta es necesario contemplar para "n" un conjunto de posibilidades. Encontramos que hay alumnos que responden: n=9. Otros dicen: n=2. Son alumnos que en el momento que encuentran UN valor que cumple la condición, ya les parece suficiente. Algunos, en las entrevistas individuales, aceptan la posibilidad de que tome un valor u otro, pero luego no dan los varios valores posibles, sino que eligen entre ellos EL ("único") que creen que debe ser LA RESPUESTA.

Es difícil, para el alumno, pasar de la interpretación de un único valor a la interpretación de varios valores posibles.

Vamos a comparar las respuestas dadas por los alumnos en el curso de 7º de EGB, el de 8º de EGB y los de 1º de BUP, en porcentajes de dos de los tipos de respuestas: La primera es la respuesta del tipo que llamaremos "valor único" (a veces es "2", otras veces "5" o "9", pero UN solo valor) y, la segunda, es la que llamaremos de "valor múltiple" (puede ser expresado como "n<10" ó indicando todos los valores del "1" al "10" ó del "0" al 10, pero varios valores). El cuadro es el siguiente:

	7ºEGB	8ºEGB	1ºREM A	1ºREM B	1ºBUP C	1ºBUP D
valor único	**41%**	**20%**	**12%**	**24%**	**5%**	**12%**
valor múltiple	**21%**	**26%**	**12%**	**20%**	**26%**	**30%**
sin respuesta	14%	24%	46%	32%	42%	22%
otras "	24%	30%	30%	24%	27%	35%

Como se puede apreciar, el mayor porcentaje de respuesta de "valor único" se da en los alumnos más jóvenes (41% en 7º EGB) y se reduce hasta el 12% y 5% en los cursos de 1º BUP (grupos C y D), con un porcentaje promedio de 8'5%. Se ve así como, progresivamente, se va abandonando la respuesta única en favor de la respuesta múltiple, que se da en el 21% de los casos en 7º EGB para pasar a 26% y 30%, con porcentaje promedio 28%, en BUP.

Quizá sea todavía más claro este cambio si se comparan los porcentajes de ambas respuestas por curso. Así en 7º EGB encontramos la relación

valor único/valor múltiple 41%/21%

mientras que en 1º BUP se dan las relaciones

5%/26% y 12%/30%

Es claro que la mayoría de las respuestas pasa a ser de "valor múltiple" en 1º BUP, pero observamos cómo quedan valores residuales importantes de la primera. Después de dos años de trabajo con las letras queda un número importante de alumnos que identifican la letra con UN valor único.

Esto se ve también en las relaciones obtenidas en los porcentajes de las respuestas de los alumnos de REM:

12%/12% y 24%/20%

Estos alumnos no han llegado a superar la concepción del "valor único" para la letra, en favor de la concepción del "valor múltiple".

En general esta interpretación, de "valor múltiple", es necesaria para las expresiones con desigualdades.

Por ejemplo, cuando escribimos

$$x < 5$$

estamos indicando un **conjunto de números**. Este conjunto puede variar desde: {0,1,2,3,4}, si trabajamos con números naturales, hasta conjuntos de infinitos elementos, cuando trabajamos con números enteros, racionales, reales o complejos.

En el ejercicio nº 6 del cuestionario: "¿Qué puedes decir de "p" si p=3q+7 y q<4 ?", el alumno debe hacer la interpretación de la "q" en la expresión de la desigualdad.

Encontramos un alumno (E1 nº 28 de 7º de EGB) que interpreta la letra como un conjunto de números pero en una forma muy especial que llamaré TOTALIZADORA:

" q < 4 quiere decir los TRES PRIMEROS NÚMEROS, así que tengo que multiplicar el "3" por los tres primeros números entre paréntesis:

$$3\ (1 + 2 + 3)$$

y luego sumarle "7" y me sale "25" "

Enmarcaremos esta respuesta entre los errores cometidos por el intento de CONSERVACIÓN DE LA INFORMACIÓN. (Pascal, 1980). El alumno ha conseguido una información de la expresión "$q < 4$" y desea conservarla en su totalidad, por eso crea un núevo número: (1 + 2 + 3) que la reúne.

En 7º curso de EGB, 6 alumnos de los 37 responden tomando UN solo valor para la letra "q", lo cual supone el 16%. En 8º de EGB, 3 alumnos de 33, que representa el 9%. Pero en 1º de REM se dan 8 casos en 49 alumnos encuestados (de nuevo el 16%); en 1º BUP, 7 alumnos de los 77 (9%), son los que toman UN solo valor.

Efectivamente, de 8º EGB a 1º BUP el número va descendiendo en porcentajes, pero si bien este porcentaje en 8º EGB podria considerarse como aceptable, un 9% en primer curso es todavía un porcentaje muy alto para unos alumnos que han estudiado desigualdades y, en ese estudio, tendrían que haber adquirido el concepto y el manejo de las mismas.

También en la resolución de una ecuación de grado mayor que "1" se obtienen, en la mayoria de los casos, más de una respuesta válida, por lo que en expresiones como:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

en realidad la "x" representa dos valores posibles: las dos soluciones $x=2$ y $x=-3$ de la ecuación. (Por supuesto salvo los casos de ecuaciones de solución única múltiple en que se *da un solo valor como solución doble, triple, etc.)*

La abstracción que, para el proceso de cálculo, se hace de la significación de la incógnita, debe incluir la posibilidad de que ésta represente a varios números.

La incógnita es, en cierto modo una variable. Podemos decir que es una variable con cierta **predeterminación.** Puede tomar uno o dos valores (o más, según el grado de la ecuación) pero no puede tomar cualquier valor dentro de su dominio, como sucede con la variable. Salimos del valor único para cada caso y entramos en el conjunto de los "valores posibles". Esto ya supone una bivalencia (o trivalencia, o polivalencia) que es un paso hacia la complejidad de la variable.

Pero aquí, en el caso de la incógnita, esos valores están predeterminados por la condición que supone la ecuación. Aunque no se conozcan, esos valores serán CONCRETOS al resolver ésta, y la "x" es como la envoltura o la caja dónde se encuentran. Están juntos en la "x", pero llevan implícita una cierta INDIVIDUALIDAD e independencia unos de otros, pues, por ejemplo, para comprobar si son válidos o no, cada uno debe cumplir por separado la ecuación propuesta. Son valores en cierto sentido SUCESIVOS pues su posibilidad de existencia, que es su ecuación, se verá cumplida por uno de ellos "u" otro, pero nunca lo será por dos valores SIMULTANEAMENTE.

El caso de la ecuación de primer grado con una incógnita no ofrece nuevos problemas de interpretación de la letra "x" pues, para el alumno, se trata del mismo concepto de parámetro incógnita. El hecho de que la letra empleada sea la "x", incluso sirve para aclarar la idea de que se trata de una ecuación, y de que "hay algo que calcular". El alumno ve que ese "algo" es la "x" y sus únicas dificultades pueden provenir de defectos de cálculo, pero no de comprensión distinta de las letras o incomprensión de la tarea a realizar.

En el caso de la ecuación de segundo grado ya encontramos cierta tendencia a calcular simplemente un valor. Este hecho es muy claro cuando la ecuación desemboca en $x^2 = K$.

Por ejemplo:

$$x^2=9$$

Su resolución, por parte de los alumnos, suele aportar como resultado solamente $x=3$. y una de las razones que creemos importante es porque tardan en llegar a la comprensión de que puede haber MáS DE UN VALOR de "x" que sea solución de la ecuación. Cuando el alumno ha calculado el valor 3, ya considera que es suficiente pues ha obtenido EL resultado, es decir el resultado se acepta fácilmente como único.

En el caso de la ecuación completa de segundo grado: $ax^2+bx+c = 0$, la resolución a través de la aplicación de la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

proporciona las dos soluciones sin que el alumno tenga opción a despreciar una de ellas y, entonces, vemos cómo acepta estas dos soluciones con naturalidad.

¿Qué hace que el alumno acepte aquí los dos valores de "x"?

En general el alumno ha sido adiestrado a aplicar la fórmula, y así lo hace aunque no comprenda bien las razones de este método. Por otra parte, las dos soluciones que se obtienen, se quedan ahí, como resultado sin nada más que hacer con ellas. El alumno traspasa, de forma mental, la responsabilidad al profesor, porque sabe que esas soluciones "son el resultado que hay que obtener", y normalmente no se plantea el significado de estos números en relación con la ecuación que ha resuelto.

Por otra parte es prácticamente inapreciable el número de los ejercicios en los que el alumno debe comprobar las soluciones de la ecuación, o plantearse el rechazo de algunas de ellas. En términos de técnicas de cálculo, solamente las ecuaciones irracionales de índice 2, o las ecuaciones fraccionarias (en las unas por tener que elevar al cuadrado, y las otras por reducir los denominadores comunes) exigen del alumno la comprobación de la validez de las soluciones. Los alumnos, por tanto, no están habituados a considerar la naturaleza de las respuestas que obtienen.

Estos casos últimos pueden ser de más de una solución, pero soluciones, en cierto modo, SUCESIVAS. Si el alumno se plantea comprobar las soluciones en la ecuación dada, para asegurar su validez, no encontrará la dificultad de calcular con el conjunto de las soluciones; cada solución deberá comprobarse individualmente y por tanto su utilización será siempre independiente.

La necesidad de manejar los conjuntos de números de manera SIMULTANEA puede darse para finalizar con éxito la resolución de un sistema de inecuaciones:

"Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3 > x \\ 5x - 1 < 0 \end{array}\right\}$ "

donde se llega respectivamente a las inecuaciones $x>-3$ y $x<1/5$ que es necesario interpretar como conjuntos de números.

Cada uno de estos conjuntos de números supone la solución individual de cada inecuación de las que forman el sistema y después de haberlos encontrado debemos hallar la solución conjunta del sistema. Esta solución es la que se obtiene de estos dos conjuntos mediante su intersección, es decir, mediante el cálculo del conjunto formado por los valores de "x" que pertenecen a los dos conjuntos obtenidos (o, lo que es lo mismo, que cumplen las dos desigualdades simultáneamente).

Esta operación de intersección de los dos conjuntos resulta extraña para muchos alumnos. Es muy difícil llegar a que la mayoría lo comprenda. Se dan muchos casos de alumnos que expresan la unión de las dos respuestas en lugar de la intersección, pues saben que hay que hacer algo con las dos soluciones, ya que las dos desigualdades forman un sistema,pero no entienden claramente "qué" es.

Se necesita aquí comprender cada expresión:

$$x>-3 \quad y \quad x<1/5$$

Cada una por sí misma representa un conjunto de números y esta comprensión es imprescindible para continuar la resolución, realizando la intersección de esos conjuntos.

Este uso de la letra "x" incluye la aceptación de un conjunto de valores, que llamaremos SIMULTANEOS, porque la expresión los incluye a todos juntos, no de uno en uno. Se trata ya de un uso muy próximo al de variable, pues aquí conlleva el simbolismo de la desigualdad (">" o "<") en la interpretación de la letra.

Este mismo uso se da en el planteamiento de los problemas sobre Programación Lineal, para expresar las condiciones o restricciones del problema. Sea, como ejemplo, el problema siguiente:

"Minimizar la función $z=12x+4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x+y &\geq 2 \\ x &\geq \text{[illegible]} \\ y &\leq 4 \\ x-y &\leq 0 \end{aligned}$$
"

En este ejercicio se deben hallar los valores de "x" e "y" que hacen mínima a la función "z", teniendo en cuenta las restricciones que suponen las cuatro desigualdades. Éstas restricciones son las condiciones que se dan en este problema.

Hay que interpretar estas restricciones de los valores de "x" e "y", porque los valores obtenidos como solución tienen que satisfacer, SIMULTÁNEAMENTE, estas restricciones expresadas por las desigualdades dadas. Las soluciones que encontremos deben cumplir todas estas condiciones.

La "letra como conjunto de números" es, pues, uno de los usos más interesantes, desde el punto de vista de las aplicaciones de las matemáticas a los problemas industriales de cálculo de costos, de cálculo de beneficios y, en general, de situaciones optimales.

Descendiendo a los ejemplos más sencillos de la vida real, el concepto de desigualdad se halla implícito en la mayor parte de las actividades diarias que están relacionadas con valores máximos o mínimos, o acotaciones en general. Los ejemplos abarcan un amplio espectro, que va desde la limitación de velocidad en las carreteras hasta las constantes de calidad de cualquier producto que se fabrica.

El ser humano hace uso del concepto de desigualdad, asociándolo con valores "límite" exclusivamente y de una forma intuitiva. La familiarízación del alumno con el concepto de desigualdad, a través de un correcto y formalizado aprendizaje, le facilitará el acceso a interpretaciones de análisis de procesos que la vida diaria le va a presentar.

Como ejemplos de estos análisis de procesos se pueden enumerar entre otros los siguientes:

Curvas de rentabilidad de empresas.

Curvas de control de calidad.

Interpretaciones estadísticas de todo tipo.

etc.

I.5. USO DE LA LETRA COMO VARIABLE

Hasta aquí el estudio que venimos haciendo se ha referido exclusivamente a la interpretación del "signo letra" (en sentido semiótico) en sí mismo.

En este uso que vamos a estudiar ahora, no sólo hay que comprender el significado de las letras sino, también, el de la relación que las une y, por tanto, comprender cómo los cambios en una de ellas hacen variar a la otra.

Se trata de lo que llamaremos una "comprensión de segundo orden".

Es, por ejemplo, el uso de las letras en las funciones. Son las expresiones "$y = f(x)$" o "$y < g(x)$".

Aquí cada letra representa más de un valor, pero tampoco es un conjunto fijo de valores, como en el caso anterior. Aquí no son importantes CADA UNO de los valores de la "x", ni su conjunto. Aquí lo importante es LA RELACIÓN que une los pares de valores. Y así es importante EL PAR de valores que se forma con un valor cualquiera de la "x" y su CORRESPONDIENTE de la "y".

Un ejemplo de este uso se encuentra en el ejercicio siguiente del cuestionario:

"Sabemos que $p = q + 7$. ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" es aumentada en 3?

Si el alumno comprende la expresión $p=q+7$ como que «"p" es SIEMPRE mayor que "q", en 7 unidades», responderá fácilmente que "p" TAMBIEN aumentará en 3 unidades. Pero si el alumno no tiene la idea de que "p" y "q" pueden tomar CUALQUIER valor y piensa que ESA "p" es 7 unidades mayor que ESA "q", entonces se pueden dar respuestas como:

$$p = q + 4$$

en la que las tres unidades que ha aumentado "q", han sido "compensadas" con la disminución del 7, para que el resultado "p" siga siendo "el mismo p" del principio, con SU valor dado. Es decir, el alumno sabe que "q" ha variado, que ha tomado un nuevo valor, pero no ve a "p" con la posibilidad de variar. No ha comprendido que lo importante del simbolismo no son las letras y sus valores sino LA RELACIÓN que las une. Que las letras están empleadas para expresar PARES DE VALORES y que cada valor de una de ellas ARRASTRA un nuevo valor para la otra.

También se puede dar la respuesta errónea:

$$p = q + 10$$

en la que tampoco se han interpretado AMBAS LETRAS como variables, pues esta nueva relación dada como respuesta indica que "q" no ha variado, es la misma "q" inicial. El aumento ha salido fuera para sumarse con 7 y aportar así la variación de 3 unidades para "p".

En esta respuesta el alumno sigue sin interpretar que la relación entre las letras (variables) no ha cambiado y que, precisamente esa relación es lo que hace que los cambios de "q" se vean REFLEJADOS en "p".

I.5.1. Históricamente

La idea de función, en un sentido parecido al que usamos en la actualidad, se debe a Leibniz (1646-1716) (Boyer,1986. p. 509), pero la notación que usamos:

$$y = f(x)$$

es debida a Euler, que la utilizó en sus **Commentarii** de San Petesburgo de 1734-1735 (Boyer, 1986. p.557).

La notación de Euler ha sido un logro importante en la teoría de las funciones, por lo clarificadora que resulta de la relación entre las dos variables "x" e "y".

Tan sólo unos años antes de Euler, se puede encontrar en un matemático tan prestigioso como Jean Bernoulli (1667-1748), que fué discípulo del mismo Leibniz, una idea vaga de lo que era una función. Idea que expone como: "una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias" (Boyer, 1986, p. 531).

La noción de función fué introducida durante el siglo XVII: "A finales de siglo se llegaria a decir que **y es función de x**;..." *(Dieudonné,1989. p.82) aunque un concepto* totalmente general de función (o aplicación, como ahora se prefiere) no se dió hasta Dedekind (1831-1916):

> "En vez de limitarse, como en las concepciones anteriores, a las funciones reales (o complejas) de una o varias variables reales, Dedekind generaliza al máximo y determina que, siendo E y F dos conjuntos cualesquiera, una aplicación de E sobre F es una ley ("Gesetz") que a todo elemento "x" de E le hace corresponder un elemento bien determinado de F, su 'valor' en "x", que se escribe de manera general f(x)."
>
> (Dieudonné, 1989, pp. 187-188)

I.5.2. En los textos.

La letra como variable hace su aparición con el estudio de las funciones en 7º de EGB, pero no es introducida de manera explícita. Solamente se presta un poco de atención al establecimiento de la diferencia entre variable **dependiente e independiente** pero no a la introducción de la variable como tal.

Veamos un par de textos donde se aprecia esta aparición: libros de Editorial Santillana y Editorial S.M., *que son dos de las editoriales más empleadas en EGB. Prime-*ramente tomamos el libro de Ed. Santillana para 7º de EGB en la p. 73. En él, después de definir y explicar Correspondencia y Aplicación, el autor pasa a introducir y definir el concepto de Función como caso particular de Correspondencia;

para ella define el dominio:

> Dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen o también el conjunto de valores que puede tomar la variable x"

Un poco más adelante, al definir la ecuación de una función, explicita:

> En este caso la ecuación de la función se designa por
>
> $$y = x + 3$$
>
> - La letra "x" representa cualquier número entero del dominio y se llama 'variable independiente'
>
> - Los valores que toma la letra "y" dependen de los valores que se dan a la letra "x"; por eso la letra "y" se llama 'variable dependiente'

En el libro correspondiente a 8º curso de la misma editorial, en la página 93 del texto, se repite, literalmente, este último párrafo, incluído el ejemplo. No se añade ninguna otra explicación.

En el libro de 8º curso de la Ed. S.M., en la página 86 y dentro del tema de Funciones, tenemos, en lo que llama primer ejemplo:

> Como el conjunto Q tiene infinitos elementos, no se pueden obtener todos los pares de f. Sin embargo, podemos obtener la imagen de cualquier número racional, utilizando
>
> $$f(x) = x^2 + \frac{3}{5}$$
>
> $x^2 + \frac{3}{5}$ es el 'criterio de f', y expresa las operaciones que hemos de realizar con un número cualquiera "x", para obtener su imagen.
>
> Al elemento genérico "x", se le suele llamar 'variable independiente' porque varía libremente en el conjunto original de la función f.
>
> f(x) también es variable, y su valor depende del que toma "x". Por eso, f(x) se llama 'variable dependiente' y suele simbolizarse por "y":
>
> $$y = f(x)$$

En el primer texto vemos que en el momento de definir el dominio de una función es cuando se nombra, por primera vez, a la letra x como **variable x**, pero sin hacer ninguna mención de la importante diferencia de concepto que supone respecto a la **incógnita x**, y del diferente uso que le vamos a dar a partir de este momento.

No se le advierte al alumno que ahora ya no debe calcular el valor de x y tampoco se le comunica que la ecuación $y = x+3$ no tiene por objeto calcular x o y. Del mismo modo no se le dice que lo importante ya no son los valores de x e y, *sino la relación que las une*: la ecuación misma.

Se está dando un nuevo uso a las letras x e y dentro del concepto, también nuevo, de función pero esto no se explicita en el aprendizaje, ni se realizan ejercicios para diferenciar, en la mente del alumno este uso como incógnita o como variable. Se presta toda la atención a la *introducción del concepto de función*, *pero obviando todo lo* referente a la nomenclatura empleada.

El concepto de **variable** es un concepto muy importante y muy rico en aplicaciones. Sin embargo, su introducción no se hace de forma especifica, ni cuidadosa. Se da por supuesto que el alumno va a *comprender toda* la riqueza del concepto de forma natural, sin que el medio didáctico haga nada especial por ayudar a esta comprensión.

Además, se utiliza para su expresión la misma letra x que se había empleado para expresar la incógnita. El alumno, que hasta ese momento ha usado la letra x como incógnita, y ha aprendido a calcular su valor aplicando una serie de reglas algebraicas, se ve introducido en unas manipulaciones completamente distintas, sin comprender el por qué. Sin una explicación adecuada, resulta que ya no es necesario calcular la x. Ahora hay que manejar expresiones completas (igualdades o desigualdades), representarlas gráficamente, compararlas, etc. Todas las técnicas han cambiado y, sin embargo, el símbolo usado (x) es el mismo.

I.5.3. En las concepciones de los alumnos.

Para el alumno, la idea de variable establece un concepto de difícil asimilación, pues los símbolos que ha usado en Aritmética -signos de operaciones, paréntesis y números- son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra.

Cuando las letras vienen a substituir a UN número, son aceptadas como letras desconocidas que en algún momento, se podrán calcular, como letras "incógnitas". Lo que resulta mucho más difícil, para el alumno, es imaginar que dentro de una misma letra existen distintas posibilidades; aceptar la idea de la letra como "variable".

Podemos comparar resultados en preguntas sobre el concepto de variable o sobre el concepto de incógnita.

Tomamos las preguntas que tienen el carácter de variable o carácter que llamamos "Var", que son las preguntas nº 6, 11, 17 y 18 del cuestionario sobre el uso de las letras; y las preguntas que tienen el carácter de incógnita, que llamamos "In", que son las preguntas nº 8, 10, 14 y 19 del mismo cuestionario, y anotamos los porcentajes de respuestas acertadas a cada una de ellas:

Preguntas	Porcentaje de aciertos	Promedio de aciertos
6ª	10.2 %	
11ª	28.1 %	
17ª	56.1 %	28.5
18ª	19.9 %	
	LETRA COMO VARIABLE	

8ª	62.8 %	
10ª	32.1 %	
14ª	62.2 %	43.75
19ª	17.9 %	
	LETRA COMO INCÓGNITA	

Comparando el promedio de aciertos a cada grupo de preguntas se ve que resultan acertadas, en mayor porcentaje, aquellas en que la letra es considerada como incógnita, con el 43.75 %.

Incluso, entre las preguntas de la letra como variable, se encuentra la pregunta nº 6 que, con el 10.2 % de aciertos, es la pregunta peor contestada de todo el cuestionario.

Vemos por tanto que, para los alumnos, estas preguntas en las que la letra se considera con un uso de variable, son más difíciles de contestar que las que consideran a la letra como incógnita.

I.5.3.1. Función constante.

El estudio de la letra como variable se hace preferentemente, durante el bachillerato, en el momento de estudiar las funciones y, más concretamente, las funciones reales de variable real.

En la noción de función existe un caso particular, que es la "función constante", cuya notación presenta serias dificultades de comprensión a los alumnos. Se trata en esta función de interpretar las expresiones

$$x = k \qquad e \qquad y = k$$

siendo "k" una constante.

Ejemplificando tendríamos:

$$x = 3 \qquad o \qquad y = -\tfrac{1}{4}$$

Pero cuando estas expresiones aparecen como funciones, ya han sido habituales para cualquier alumno escasamente iniciado en álgebra. Son expresiones que se han dado como terminación a cualquier problema en el que hayamos tenido que calcular un resultado desconocido. Los números "3" y "$-\tfrac{1}{4}$" son LAS SOLUCIONES buscadas. Las letras "x" e "y" toman en cada caso UN valor que es el resultado del problema.

Pero sucede que, cuando estudiamos funciones reales, estas expresiones, con la misma apariencia, tienen un significado totalmente distinto. Si pensamos en que deben ser expresiones que relacionen dos variables "x" e "y" nos encontramos con que la expresión

$$y = -\frac{1}{4}$$

no es propiamente una "función de x", pues no tiene la letra "x" por ninguna parte. Hay, sin embargo, que hacer comprender al alumno que los pares de valores:

(-1,-¼) , (3,-¼) , (0,-¼) , (3'7,-¼) , (102,-¼) , ...

satisfacen esa "función", porque todos cumplen "la condición" de tener su segundo valor (es decir su "y") igual a -¼.

De modo que, lo que antes era la expresión de un resultado único, se ha convertido ahora en la expresión de una función formada por infinitos pares de valores, que tiene una representación gráfica que es una linea recta (constituida por los infinitos puntos que corresponden a esos infinitos pares de números).

Observamos aqui, pues, expresiones que tomarán su significación del contexto en el que las estemos manejando. Se trata de igualdades, de doble significación, en las que, sin embargo, no se suele insistir para su comprensión y diferenciación.

El alumno deberá aprender a distinguir esta doble significación casi por si mismo.

Se trata de un problema más de enseñanza del simbolismo que deberá afrontar el profesor cuya aspiración sea que los alumnos lleguen a comprender las matemáticas.

I.6. EL CASO DEL NÚMERO COMPLEJO

Veamos algunos casos particulares de letras, representando objetos diferentes, y que pueden resultar ilustrativos de las dificultades que encuentran, tanto el alumno como el profesor que interviene en el aprendizaje.

Los números complejos se introducen, por primera vez para el alumno, en Primero de BUP. Se trata, pues, de un concepto nuevo de número, y es esperable que cause cierta extrañeza dadas sus especiales características. Se trata de números que, históricamente han sido llamados "imaginarios", dada la gran dificultad de concebirlos concretamente. Algunos profesores, de hecho, optamos por aplazar su presentación hasta Tercero de BUP por considerarla más adecuada.

En estas condiciones, veamos algunos problemas de simbolización que se presentan.

Pensemos en una sencilla ecuación de segundo grado como:

$$5x^2 - 2x + 1 = 0$$

cuyas soluciones son los <u>números complejos</u>:

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \qquad y \qquad x_2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

donde "i" es la unidad imaginaria: "raiz cuadrada de -1"

En esta ecuación, al observarla inicialmente sin *ayuda de otras indicaciones, no se aprecia cuál es el conjunto* de números en el que se está planteando, y conocerlo es muy interesante pues, dependiendo de él, la solución es diferente:

a) Si la ecuación se plantea en los conjuntos **N**,**Z**,**Q** o **R** (Naturales, enteros, racionales o reales) la respuesta debe ser: "No tiene solución"; pues ningún número de estos conjuntos la satisface.

b) Si la ecuación se plantea en el conjunto **C** (Cuerpo de los números complejos) las soluciones son las dos expresadas más arriba.

Es, por tanto, importante para que el alumno pueda resolver correctamente la ecuación, concretar, de alguna manera, cual es el conjunto en el que se plantea el ejercicio, pues la incógnita "x" puede representar en esta ecuación:

"Un número natural "x"" o

"Un número entero "x"" o

....

"Un número complejo "x""

Si la ecuación se produce en el contexto de un problema, este mismo contexto nos puede indicar en qué conjunto se está planteando la ecuación y, por tanto, qué tipo de número representa la "x" que estamos calculando, pero nos encontramos en la práctica que en la casi totalidad de los casos el ejercicio ha sido planteado "en el vacio", sin contexto alguno en el que apoyarse. El enunciado es: "Resuelve la ecuación ...".

En este caso, el alumno deberá buscar indicios exteriores al problema. Por ejemplo, darse cuenta de que el tema que se está estudiando es el de los <u>números complejos</u> y que, por lo tanto, la "x" puede ser uno de estos números. O ponerse a resolver la ecuación sin preguntarse nada y al encontrarse en el cálculo con la expresión

$$\sqrt{4 - 20} = \sqrt{-16}$$

optar, más o menos arbitrariamente, por decir que no tiene solución, recordando las primeras ecuaciones que aprendió a resolver, o por continuar expresando "$\sqrt{-16}$" en forma de <u>número complejo</u> imaginario puro: "4i".

A veces se da otro modo "externo al problema" de saber en qué conjunto se tiene que trabajar. Nos referimos a la advertencia expresa del profesor que puede pedir a los alumnos que resuelvan el problema "en el conjunto C". En este caso el profesor suple las deficiencias del enunciado con su actuación didáctica lógicamente derivada de su preparación como profesor.

Se ve, pues, que una misma letra, en nuestro caso la <u>incógnita</u> "x", puede, en una ecuación, representar a distintos tipos de números.

I.6.1. EN LOS TEXTOS DE BUP.

Hemos observado que en algunas presentaciones de la teoría de los números complejos se designa a éstos con la letra "z", que sirve así para distinguirlos de los números reales. Veamos como se presentan los números complejos en algunos textos habituales en el BUP actual. (Observados en sus capítulos correspondientes a los números complejos, en el nivel de 1º y 3º de BUP)(*):

Hemos encontrado efectivamente que, en todos los textos consultados (de los que hacemos una muestra con los que presentamos), se encuentran los números complejos expresados como números "z". *Así se puede ver:*

$z = 3+2i$; $z_1+z_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$;

$\bar{z} = (-5,7)$ (conjugado de "z" igual a ...)

Con ésto parece que los números complejos van a ser representados por la letra "z" de ahora en adelante. Por *tanto nos hace esperar que en el planteamiento de ecuaciones,* la incógnita, al menos en los primeros ejercicios,

---

(*) A nivel de 1º se tratan los números complejos con su escritura en forma binómica "a+bi", y en algunos textos también en forma "de par": "(a,b)". A nivel de 3º se recuerdan las notaciones anteriores y se completan con las escrituras en forma polar y en forma trigonométrica.

sea la "z". Pero luego, cuando llega el momento de plantear estas ecuaciones, en el conjunto de los números complejos, algunos textos mantienen la "z" para expresar la incógnita y otros vuelven a expresar las ecuaciones con la incógnita "x" que había sido empleada hasta ese momento para los números reales.

Exponemos en la TABLA I los datos de cuatro textos representativos de estas dos tendencias.

	Nº complejo	Incógnita	componentes reales del nº complejo
Ed. Anaya	z	x	x,y,a,b,p,q,...
Ed. S.M.	z	x	x,y,a,b,...
Tarrida y Prats	z	z	x,y,a,b,m,n,...
Ed. Libreria General	z	z	x,y,a,b,c,m,...

TABLA I

Vemos, pues, que lo que parecía que iba a ser una caracterización de los números complejos no se mantiene en todos los textos, cuando se trata del número complejo incógnita.

Pero sigamos observando la notación para otras incógnitas a ver si descubrimos alguna regularidad como, por ejemplo, que la incógnita se represente siempre por la letra "x" o que la "x" se reserve para las incógnitas reales y la "z" para las incógnitas complejas.

Observemos, en la TABLA I, la notación empleada para los ejercicios que plantean el cálculo de alguna de las componentes reales del número complejo. Para esta observación separamos los textos en dos tipos:

a. Los textos que usan la "x" para incógnita cuando esta incógnita es un número complejo. (Representados por los dos primeros de la Tabla I)

En ellos, se podía esperar que hubieran elegido la letra "x" para expresar SIEMPRE la incógnita y, por tanto, que expresaran con "x" e "y" estas componentes reales cuando son desconocidas. Así lo parece en el siguiente ejercicio:

"Calcular x e y para que se verifique

$$(2 + 5i)(x + 3i) = (y + 4i) \text{ "}$$

(Ed. Anaya, 3º BUP, pág. 51)

y en varios ejercicios posteriores.

Pero en la misma página encontramos otros ejercicios, como el siguiente, donde la componente real incógnita, está representada por otras letras:

"Calcular "a" para que el número complejo

$$z = (-a + i)/(2 - i)$$

tenga por módulo 2. Hacerlo de dos formas efectuando el cociente y sin efectuarlo."

De modo que no se reserva la "x" para la incógnita como habíamos creído. Parece apreciarse un uso indistinto de las letras sin mantener una regularidad. Se encuentra, así, una gran variedad de ellas:

"x,y,a,b,p,q,..." para representar a las incógnitas.

Se puede comprobar, pues, en concreto en los textos de este tipo (tipo a), que:

1º. La letra "x" representa, en un mismo capítulo a <u>números reales</u> y a <u>números complejos.</u>

2º. Que la letra "x" no es la única (ni aún con la letra "y") que se usa como <u>incógnita.</u> Se usan asimismo como <u>incógnitas</u> las letras: a,b,c,m,n,p,etc.

Por tanto, se ve que no existe una regularidad en la nomenclatura utilizada.

Veamos el otro tipo (tipo b) de textos.

b. Los textos, como el de Tarrida y Prats o el de Ed. Librería General, que emplean la letra "z" para la <u>incógnita</u> cuando ésta es un <u>número complejo.</u>

Parece en un principio que estos textos podrían reservar la "x" y la "y" para expresar las incógnitas en el caso de las componentes <u>reales,</u> pero encontramos que, al igual que los anteriores, usan de una gran variedad de letras indistintamente. Veámoslo en algunos de los ejercicios que plantean:

"Hallar <u>m</u> y <u>n</u> para que se verifique:

$$\frac{m + 2i}{3 - i} : (1 - 2i) = ni \text{ "}$$

(Tarrida y Prats, 1º BUP, pág.82)

"Hallar x con la condición de que el producto

$(3+2i)(x+6i)$ sea imaginario puro"

(Ed. Librería General, 1º BUP, pág.93)

"En el cociente de complejos:

$(a, 19)/(-5,b) = (3,-2)$, hallar a y b"

(Ed. Librería General, 1º BUP, pág.101)

Asimismo la letra "x" se encuentra empleada, junto con la "y", unas veces como variable y otras como incógnita.

Como variable en la definición de número complejo en forma binómica:

"Un número complejo en forma binómica es un número de la forma:

$$x + yi$$

dónde "x" e "y" son dos números reales cualesquiera".

Y podemos ver su uso como incógnita cuando es empleada, junto con la "y", como ejemplo en la descripción del cálculo de la raiz cuadrada de un número complejo en forma binómica, en el que se dice:

"Para calcular la raiz cuadrada del número $z = 5 + 12i$ se procede del siguiente modo. Llamemos a la raiz $x + yi$. Deberá cumplirse que:

$$(x + yi)^2 = 5 + 12i$$

y desarrollando..."

Así vemos como la letra "x" pasa de un tipo de empleo a otro sin que se haga ninguna advertencia respecto a los distintos significados matemáticos que se le están atribuyendo. Por otro lado, un mismo empleo, como es el de <u>incógnita</u>, es expresado por diferentes letras.

I.6.2. EN LOS TEXTOS UNIVERSITARIOS.

¿Y qué sucede al pasar a la Universidad? Al estudiar las funciones de <u>variable compleja</u> utilizamos los <u>números complejos</u>. ¿Cuál es la notación empleada? ¿Se mantiene la "z" que es tan general en BUP?

Si se toman dos textos clásicos:

1. <u>Curso de variable compleja.</u> LEVINSON Y REDHEFFER.
2. <u>Variable compleja y sus aplicaciones.</u> CHURCHILL.

El primero comienza, en la página 2, definiendo:

"Se define un número complejo α por dos números reales "a" y "b", y se designa por:

$$\alpha = a + ib \text{"}$$

Y para definir la suma toma dos números:

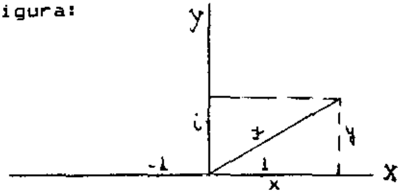
$$\alpha = a + ib \quad \text{y} \quad \beta = c + id$$

Utilizando por tanto las letras griegas "α" y "β" en lugar de la "z".

Pero, ya en la página nº 3 aparece "z" como incógnita en la ecuación:

$$\alpha + z = \beta$$

cuya solución es la diferencia "$\beta - \alpha$". Y sigue en la página nº 11 con la figura:



donde se repite la notación encontrada en BUP: $z = x + iy$.

A partir de este momento, la letra "*z*" *representa* al número complejo tanto en su uso como incógnita como en su uso como variable. Esto se aprecia muy claramente en los ejercicios.

Como ejemplos tenemos el Problema nº 1 en la página nº 36,

a) ¿Para qué valores de z no son continuas las funciones siguientes?

$$z, \ \frac{1}{z}, \ \frac{z^2 + 1}{z + 1}, \ldots$$

b) ¿Cuáles de las funciones anteriores poseen singularidades evitables en algún punto, o puntos del plano complejo finito y, ...?

Tenemos asimismo el problema nº 6 en la página 57,

Demostrar apoyándose en (2.5) que la igualdad $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ sigue siendo válida cuando z es complejo.

O el problema nº 2 en la página 359,

Haciendo $z = r e^{i\theta}$ en la serie geométrica de suma $\dfrac{1}{1 - z}$ e igualando las correspondientes partes reales, deducir que ...

En la teoría se compatibilizan las letras "α" y "β" con la "z" cuando es necesario expresar más de un número complejo. Por ejemplo, en la página 12 tenemos,

> Si substituimos z por z'= αz, donde α es un número complejo cualquiera de módulo 1, entonces ...

Pero, en general, se prefiere utilizar la letra "z" aunque sea necesaria la ayuda de subíndices, como se ve en el problema nº 3 de la página nº 266,

> Si todos los puntos z_i son distintos, demostrar que la razón simple
>
> $$(z_1 - z_3) / (z_1 - z_2)$$
>
> es invariante en las transformaciones lineales

Veamos en el texto de Churchill.

Aquí parece que la nomenclatura está clara desde el principio y en el mismo sentido que en BUP. En la página nº 1 encontramos la definición de número complejo:

> "Un número complejo z se define como un par (x,y) de números reales x e y dados en un cierto orden,
>
> $$z = (x,y)$$
>
> y sujetos a las reglas y leyes operativas que se especifican a continuación.

En las páginas siguientes desarrolla la teoría sobre los tipos de números complejos que pueden darse y sobre las formas de operación entre ellos manteniendo la escritura que ha usado en la definición.

Vemos, pues, que se emplea la letra "z" para el número complejo y las letras "x" e "y" para los números reales que constituyen las componentes de este número.

Nos parece importante resaltar que la nomenclatura se afianza, clarificadora, en la Universidad y que sería de desear que en BUP, cuando el alumno mantiene los primeros contactos con los números complejos, se empleara este mismo procedimiento, pues es el momento en que más se *precisa de una ayuda para la comprensión de los nuevos* números.

Una notación inequívoca creemos que ayudaría al estudiante a mejorar la comprensión de la noción de número complejo.

En apoyo de esta tesis, de que la introducción de nuevas notaciones puede favorecer o perjudicar el aprendizaje de una nueva noción, recordemos que la noción de número complejo comenzó su auténtico despegue cuando Leonhard Euler en 1779 introdujo la "unidad imaginaria i" en lugar de la simbolización $\sqrt{-1}$ empleada hasta entonces. Con esa notación se evitaban las paradojas surgidas de la *notación anterior* (*).

(*) La raiz cuadrada producia paradojas como las siguientes:

$$\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2\sqrt{1} \quad (I)$$

$$(\sqrt{-1})^2 = 1 \quad y \quad (\sqrt{-1})^2 = -1 \quad (II)$$

La primera (I), porq ue el primer miembro $\sqrt{1} + \sqrt{1}$ puede tomar los valores -2, 0 y 2 según tomemos para $\sqrt{1}$ los valores $+1$ o -1 mientras que el segundo miembro solamente puede tomar los valores -2 y $+2$.

El <u>número complejo</u> es un objeto matemático cuya aparición se ve retardada históricamente durante siglos por falta de una buena comprensión de sus posibilidades de existencia.

Teniendo en cuenta que esas dificultades de alguna forma se van a presentar en los alumnos para la comprensión de estos números (Piaget, 1982), todo esfuerzo encaminado a mejorar esa comprensión será interesante y, en particular, nosotros apoyamos el de emplear una nomenclatura clara y precisa que diferencie el <u>número complejo</u> del <u>número real</u> en cada momento.

Esta escritura podría ser la de emplear la letra "z" para los <u>números complejos</u> y las letras "r_1" y "r_2" para las componentes <u>reales</u> de ese número <u>complejo</u> reservando la "x" y la "y" como <u>incógnitas</u> en <u>números reales.</u>

Incluso sería importante, didácticamente hablando, intentar diferenciar la <u>variable</u> de la <u>incógnita</u> mediante una escritura que así lo permitiera.

La segunda (II), porque podemos realizar los cálculos de las dos formas siguientes:

$$(\sqrt{-1})^2 = (\text{"el cuadrado de una raiz cuadrada"}) = -1$$

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

En la segunda paradoja (II), que es el caso que ahora estamos considerando, la notación de Euler subsanaba la dificultad pues $i^2 = -1$ pero no se puede confundir

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{con} \quad -i = -\sqrt{-1}$$

Respecto al uso de unas letras u otras, recordemos que hemos visto cómo los alumnos han asimilado la letra "x" como representante de la incógnita en las ecuaciones con números reales, hasta tal punto, que en su trabajo con las inecuaciones, al aparecer la letra "x", muchos alumnos convierten la inecuación en ecuación y se aprestan a resolverla para calcular el valor de la "x".

En la enseñanza de los números complejos nos encontramos con otra dificultad: El alumno debe abrir el campo de su pensamiento para comprender el conjunto que representan, como una ampliación del conjunto de los números reales. Pero la noción de número real es todavía reciente pues se incluye en los programas oficiales durante el mismo curso de 1º de BUP. En este curso de 1º de BUP se le exige al alumno de nuevo la comprensión y el dominio de la noción de número complejo.

Observamos que en ambas introducciones (la de número real y la de número complejo) se está pidiendo al alumno un CAMBIO DE ETAPA en el desarrollo del conocimiento. Me refiero a los CAMBIOS DE ETAPA en la formación y desarrollo del conocimiento, expresados por Piaget-Garcia, p.134, y que requieren del alumno un salto cualitativo en la formación de su conocimiento.

Por esto, y en beneficio de esa formación y desarrollo, creemos que se debe hacer el esfuerzo de unificar la nomenclatura desde el inicio de cada noción, procurando evitarle al alumno cualquier posibilidad de confusión.

I.7. EL CASO DE LA VARIABLE ALEATORIA

Vamos a ver ahora otro tipo de dificultad creada en torno al concepto de "variable", y más concretamente de <u>variable aleatoria.</u>

La noción de <u>variable</u> se usa en las Matemáticas de Bachillerato pero únicamente se encuentra teorizada en el estudio de las Probabilidades como <u>variable aleatoria.</u>

En el estudio de la probabilidad se usan las <u>variables aleatorias.</u> Podemos leer en un libro de 3º de BUP (Taniguchi. Ed. Eunibar. p.242):

> "Sea Ω el suceso total o espacio muestral de un experimento aleatorio. Se llama <u>variable aleatoria</u> (v.a.) a toda aplicación de la forma:
>
> $$X: \Omega \longrightarrow R \quad (R: \{\text{números reales}\})$$
>
> (Obsérvese que X aplica a cada suceso elemental en un punto de la recta real y que con un mismo Ω se pueden definir infinitas v.a. distintas)"

Esta definición de <u>variable aleatoria,</u> con ligeras modificaciones, es la normal en los textos de Bachillerato.

Ahora imaginemos una <u>variable aleatoria</u> "X" correspondiente a un espacio muestral o espacio de sucesos y tomemos un suceso que puede producirse (1), o no (0), con probabilidad "p" y "q" respectivamente. Por ejemplo: "Obtener un 5 al lanzar un dado"

	valores de x		probabilidad
X	1	"Obtener un 5"	p = 1/6
	0	"No obtener un 5"	q = 5/6

Supongamos que queremos trabajar ahora con la variable 2X que es una forma de expresar X+X, y, según las reglas de álgebra que conocemos, podríamos esperar que fuese, por ejemplo:

2X	2	"Obtener dos veces 5"
	0	"No obtener dos veces 5"

Es decir, que si la variable aleatoria "X" podía tomar los valores del conjunto {0,1}, la variable aleatoria X+X = 2X podría tomar los del conjunto {0,2}.

Pero, sin embargo, si pensamos en la variable aleatoria "Z", que podemos estudiar cuando el experimento anterior se realiza *dos veces consecutivas* y de forma independiente, tendríamos otro modo de entender X+X. Así:

Z	2	"Obtener dos veces 5"
	1	"Obtener una vez 5"
	0	"No obtener ningún 5"

y comparando con la variable aleatoria "2X" del experimento imaginado, comprobamos que

$$Z \neq 2X$$

o expresado de otra manera más sorprendente. Podemos ver que en este caso:

$$X + X \neq 2X$$

Se trata aquí de un ejemplo para comprobar que el cálculo habitual asociado a las variables puede resultar FALSO para un caso particular del uso de las mismas.

De modo que debemos considerar el dominio teórico dónde trabajamos para poder diferenciar los distintos tratamientos que vamos a poder darles a "las variables".

I.8. VARIABLE EN INECUACIONES

Vamos a ver ahora el uso de las variables en relación con las inecuaciones ya que éste es nuestro campo de estudio principal.

Por ejemplo, cuando escribo

$$y = g(x)$$

expreso que "y" es una función del tipo "g" de "x". Esto también quiere decir que existe cierta expresión

$$f(x,y) = 0$$

Estas dos relaciones son equivalentes porque corresponden a la misma función. Si se tiene una equivalencia entre estas dos expresiones, tengo una relación entre "f" y "g".

Es decir, yo puedo definir "y" como una variable función o variable dependiente: g(x), y estudiar cúales son los valores de "y" que cumplen, por ejemplo

$$y < 0$$

es decir: $$g(x) < 0$$

en este caso se trataría de resolver una inecuación con una <u>incógnita</u>. Se trata de encontrar los valores de la <u>variable</u> "x" que hacen negativa a la <u>variable función</u> "y"; o, como decimos abreviadamente, a la "función y". Pero también puedo definir la función "f(x,y)" como otra <u>variable</u> "z" y puedo estudiar, por ejemplo, para qué valores de "x" e "y" se cumple que

$$z < 0$$

es decir, para qué valores se cumple que

$$f(x,y) < 0$$

o incluso todavía, volviendo a la escritura inicial, calcular para qué valores de "x" e "y" se cumple que:

$$y < g(x)$$

ahora se trataría de "resolver" una inecuación con dos <u>incógnitas</u>.

El concepto de <u>variable</u> en inecuaciones tiene unas caracteristicas que la hacen más dificil de aprehender, por los alumnos, que la <u>variable</u> en las ecuaciones.

Así como, en el tratamiento de la <u>incógnita</u>, las inecuaciones tienen una forma de resolverse que reproduce en muchos de sus pasos el trabajo que se debe hacer para resolver las ecuaciones, cuando tenemos que interpretar y trabajar con una desigualdad con dos <u>variables</u> nuestras manipulaciones son muy diferentes que las que hubiéramos hecho con una igualdad con dos variables.

En el caso de una función real de variable real, que es un caso de igualdad, sabemos que para cada valor de la variable independiente "x", tenemos un valor único de la variable dependiente "y", que es la imagen de ese valor "x" y que, junto con él, forma un par que es la escritura de un punto que pertenece a la gráfica de esa función.

Esta situación gráfica, derivada de la escritura simbólica de la igualdad, no tiene su correspondiente en el caso de la desigualdad. Aquí para cada valor de la "x" pueden corresponder infinitos valores de la "y", lo cual es desconcertante para el alumno que ante una expresión simbólica muy parecida encuentra una situación gráfica tan diferente. No se trata aquí de realizar pequeños retoques en el tratamiento que se daba a las ecuaciones, es que la situación ha cambiado de tal manera que aquellas técnicas no sirven ya, ni aunque se pretendan transformar.

II. NECESIDAD DE UN APRENDIZAJE SISTEMATICO DEL USO DE LAS LETRAS

El uso de las letras en Algebra no "cae por su peso", no "va de soi". Son muchas las interpretaciones posibles para ellas y, también, como hemos visto, los diferentes usos que de ellas se pueden hacer. No se puede esperar que estas concepciones se establezcan espontáneamente y de forma correcta en los alumnos.

En el análisis que se acaba de exponer, asi como en el análisis del cuestionario y a través de las entrevistas individuales, se han presentado algunas de las importantes deficiencias observadas en los alumnos.

En pocos casos se han intentado introducciones especiales para las letras (p. ej.: "Thinking with letters" del libro de Algebra del Shell Center for Mathematical Education - University of Nottingham o "Writting to learn Algebra" Universidad de Louisiana, 1988) y, aun en estos casos, no se conocen estudios sistemáticos de los resultados obtenidos con su aplicación.

En mi opinión, el uso de las letras necesita una toma de conciencia por parte de los profesores. Un reconocimiento de las dificultades que comporta, y una toma de postura ante esta situación.

No se trata tanto de una enseñanza sistemática de los distintos usos de las letras, como de la reflexión y, eso si, de la discusión sistemática de la función de cada letra en cada momento.

Cuando el profesor y el alumno se encuentran en la situación de usar de una letra, deben dejar clara constancia de cual es la función que esa letra está desempeñando en ese momento. Esa función debe ser explicitada (predeterminada y concordada) de un modo sistemático. Hasta nos atreveríamos a decir "insistente".

.II.1. FAMILIARIDAD.

El uso de las letras queda inscrito en el uso del lenguaje matemático y como tal debe llegar a ser, en cierto modo, "familiar" al alumno.

Esta familiaridad debe ser tanto más buscada cuanto que no es espontánea.

El lenguaje materno disfruta de esta familiaridad gracias a la reafirmación de lo cotidiano. El lenguaje matemático debe luchar contra esa falta de cotidianeidad. Al no sufrir su exigencia, no va corrigiéndose diariamente y pierde cierto rigor en la precisión, que, sin embargo, es necesario que exista.

Los matemáticos, en general, pero ante todo los profesores de matemáticas debemos estar vigilantes para que la pureza y el rigor no resulten inútiles ante la falta de buena comprensión del instrumento empleado (en nuestro caso, de la base de ese instrumento, que son las letras).

.II.2. INDEFORMABILIDAD

La matemática, como lenguaje, es un instrumento genérico que debe mantener su precisión ya que ésta es una de las bases de su potencia de razonamiento: La no-ambigüedad, la "indeformabilidad" como dice R. Barthes (1957) en "Mythologies" (citado por Y. Chevallard (1980):

> "C'est ce qui arrive au langage mathématique. En soi, c'est un langage indéformable, qui a pris toutes les précautions possibles contre 'l'interprétation': aucune signification parasite ne peut s'insinuer en lui".

Es el viejo sueño de Leibniz con su Característica Universal: el lenguaje como instrumento objetivo de razonamiento imparcial que encuentra su expresión en el lenguaje matemático, precisamente posible porque es "una lengua bien hecha", en palabras de D'Alembert.

Así, el prestigio del razonamiento matemático, se basa en su "buena hechura", en su "indeformabilidad" y por tanto en su falibilidad rigurosamente determinable.

Estas caracteristicas hacen deseables las conclusiones obtenidas a través de ese razonamiento. Se "puede confiar" en el lenguaje matemático y en sus conclusiones porque ofrece esa garantía, es fiable.

Pero, simultáneamente, el lenguaje matemático exige de quién lo emplea un perfecto conocimiento de las reglas de juego y del significado preciso de cada uno de los términos empleado en cada una de las situaciones.

.II.3. CONDICIONES DEL ALUMNO PARA ESTE APRENDIZAJE. ORDEN DE APARICIÓN DE LAS DISTINTAS CONCEPCIONES

.II.3.1. VALOR ÚNICO

El alumno, cuando usa las letras espontáneamente (como se verá en el capítulo del análisis del cuestionario sobre el uso de las letras) comienza por la utilización de éstas representando a UN SOLO valor. Considera que la letra está sustituyendo a UN número no conocido hasta ese momento.

Tiende a estimar la presencia de la letra como algo PROVISIONAL o CIRCUNSTANCIAL. Esta presencia es considerada necesaria, en tanto en cuanto que TODAVÍA no se conoce su valor, pero será sustituida, lo más pronto posible, por el número "que le corresponda". El alumno intenta encontrar ese único número con urgencia, empleando todos los recursos posibles, incluso recursos paramatemáticos como es el caso de usar el orden alfabético en isomorfismo con el conjunto de los números naturales (sin el cero) para averiguar el valor de la letra que se está empleando.

Hay una importante resistencia a considerar la letra como representante de varios valores posibles. La primera tendencia, espontánea, que se observa en los alumnos, y que permanece durante años en algunos, es la de que cada letra representa SU (propio) valor.

Cuando comienza a comprenderse la posibilidad de varios valores, éstos son concebidos como valores posibles sucesivos.

.II.3.2. VALORES "SUCESIVOS"

En el caso de las desigualdades. En el ejercicio nº 6 del cuestionario, el alumno tiene que interpretar por ejemplo:

$$q < 4$$

y para muchos alumnos de 7º de EGB la letra "q" representa UN número que, al ser "menor que 4", es traducido por el "primer menor que 4" de modo que la primera representación que nos encontramos es "q=3".

Como ejemplo de estas posturas iniciales, espontáneas, tenemos la entrevista individual con Rebeca (12 años):

Prof.: ¿Qué crees que significa "q<4"?

R.: Que "q" es mayor que "4".

Prof.: ¿Por ejemplo?

R.: "q" puede ser "5". ¡No! ¡"q" es menor que "4"!

Prof.: ¿Entonces?

R.: "q" es "3".

Prof.: ¿"q" es un número?

(La pregunta se hace usando el verbo "ser" pues es el usado por el alumno para responder: "q es 3")

R.: No, es una letra, pero puede representar a UN número.

Prof.: ¿Puede "q" ser otro número?

R.: (Duda casi un minuto) A lo mejor, "q" puede ser "2" ó "1", no sé.

Cuando se le insiste, Rebeca piensa en la posibilidad de otros números, pero no a la vez que el primero, formando un conjunto con él, sino en sustitución de él: "2 ó 1... NO SE". Ella cree que HAY QUE SABER. Cree que el número que está detrás (o dentro) de "q" es único y puede ser "3" ó "2" ó "1" pero que no lo sabe ahora. La expresión "q < 4" no alcanza, para Rebeca, un sentido en sí misma. "q" es "UN algo" (un número porque estamos en Matemáticas) del que ella sabe solamente que es menor que "4", y como esto no basta para conocer ese número, solo puede intentar adivinarlo.

Cabe la posibilidad de que sea, o bien "3", o bien "2" o "1", es decir, uno u otro, pero la alumna no considera la posibilidad de que "q < 4" represente a TODOS los números que son menores que "4".

Los números posibles se le presentan de forma "sucesiva". Piensa en ellos, uno tras otro, tratando de averiguar el motivo que puede ayudarle a seleccionar uno u otro, y al no encontrarlo dice QUE NO SABE.

Falta, para estos alumnos, el paso conceptual que lleva a considerar la expresión "q < 4" como un CONJUNTO DE NúMEROS. Se trata de considerar el CONJUNTO DE NúMEROS como un ente matemático, y susceptible de ser manejado como tal.

Analizando los datos del estudio estadístico se puede deducir cómo evoluciona esta concepción desde Séptimo y Octavo de EGB hasta Primero de REM y BUP respectivamente.

En la tabla siguiente se consignan los porcentajes de alumnos que han interpretado la expresión dada, en el ejercicio citado, como un conjunto de números.

7º y 8º de EGB	17 % de alumnos
1º de REM	22 % "
1º de BUP	57 % "

Se aprecia que no se trata de una concepción espontánea, pues solamente el 17 % de alumnos logra alcanzarla en los dos primeros años de enseñanza del álgebra.

Asimismo la evolución hasta 1º de REM, aunque positiva, es muy pequeña, pues sólo la llegan a alcanzar el 22 % de los alumnos encuestados.

Solamente en 1º de BUP tenemos un aumento algo significativo, al conseguir el 57 % de los alumnos demostrar su comprensión adecuada.

.II.3.3. VALORES SIMULTANEOS.

La letra como "conjunto de números" es una de las concepciones que más tardan en ser adquiridas por los alumnos.

La pregunta nº 6, comentada en el punto anterior y que lleva la desigualdad, es, considerando a los alumnos globalmente, la peor contestada de todas.

Se trata en ella, como ya hemos dicho, de que los alumnos comprendan la significación de "q" en expresiones como "q < 4" en las que "q" representa a TODOS los números que son "menores que cuatro" y que forman, por tanto, un CONJUNTO.

Como una muestra más de la dificultad de comprensión de estas letras se expone el caso de Juan Antonio que resulta opuesto a los alumnos como Rebeca, cuyo ejemplo se acaba de ver. éstas son sus respuestas en la entrevista individual:

Prof.: ¿Qué quiere decir q < 4 ?

J.A.: Que "4" es mayor que "q"

Prof.: ¿Puedes decir algo de "p"?

J.A.: Que vale "25".

Prof.: ¿Cómo es eso?

J.A.: Los números menores que "4" son "3", "2" y "1". Tendría que multiplicar "3" por los tres primeros números entre paréntesis y luego sumarle el "7". Me sale "25".

La operación que ha hecho es:

$$3\ (1 + 2 + 3) + 7 = 25$$

Los alumnos como éste, consideran la expresión "q < 4" como un CONJUNTO de números, pero diríamos que en forma excesiva, la hemos llamado TOTALIZADORA, pues en el *momento de usar esta interpretación para una igualdad no* saben separar los distintos valores y hacen la substitución, TAMBIéN, de todos a la vez.

El caso de Juan Antonio nos muestra una *interpretación de la expresión "q < 4" próxima a la* interpretación correcta de la letra como conjunto de números, pues él ve diferentes posibilidades para el valor de "q". El *error de Juan Antonio es que, en el momento de* calcular, considera esos valores como "simultáneos" y realiza el cálculo con todos los números que cree posibles, el 1, el 2 y el 3 pero, insisto, tomándolos de manera simultánea con lo que, en realidad, está operando con el número "suma" de ellos.

CAPITULO 3º

I. ¿SIGNOS O SIMBOLOS?

En cualquier estudio que emprendamos y en el que queramos comunicarnos con los demás, la precisión de la terminología empleada es necesaria si no queremos arriesgarnos a no ser comprendidos.

En el estudio que nos ocupa nos encontramos con cierta dificultad de terminología, pues las Didácticas específicas son parte de una ciencia, la Didáctica, en la que repercuten de manera especial las sucesivas ampliaciones y profundizaciones de los distintos ámbitos del conocimiento y en la que se está creando terminología o se está adaptando de otras ciencias a sus propias necesidades.

Queremos estudiar las dificultades que los alumnos encuentran con el uso y la interpretación de las letras, lo que llamamos **dificultades de simbolización** y por tanto nos interesa saber si al hablar aqui de simbolización estamos usando los mismos términos que emplean otras ciencias que están en relación con el tema, pero que quizá los usan con distintas significaciones que nosotros.

Además de los análisis propiamente didácticos, como las "observaciones didácticas" de clases, "entrevistas de diagnóstico" con alumnos, cuestionarios etc., queremos estudiar la conexión con estas otras ciencias como la Psicología, la Lingüística, la Semiología, la Teoría de la Comunicación, etc., y conocer el tratamiento que hacen del tema por si tienen algo que decir respecto a nuestro objetivo.

Especialmente queremos profundizar en el conocimiento de algunos términos básicos empleados intentando que ésto sirva para clarificar algunos aspectos como: formas de adquisición de los conocimientos, aprendizaje y desarrollo del individuo,interacción escolar, y otros, que serán de interés en el tema de este trabajo.

Los términos "símbolo" y "signo" son usados en Didáctica pero no han tenido su origen en ella. Vamos a ver cómo son empleados en otros campos de estudio.

Comenzaremos por formar una opinión sobre su significado de acuerdo con su uso común. Para ello consultaremos algunos diccionarios tomando solamente aquellas acepciones más importantes o que más nos interesan para nuestro tema.

Concretamente nos interesa saber si lo que estamos manejando en álgebra son signos o símbolos pues, para conseguir su asimilación, pondremos distintos mecanismos en juego, en uno u otro caso.

Conocer estos mecanismos facilitará la labor didáctica y clarificarlos es la tarea que comienza con la distinción de la terminología empleada.

I.1. DEFINICIONES COMUNES.

Las reproducciones que siguen tienen como objeto facilitar más cómodamente su análisis.

I.1.1. SÍMBOLO

- Diccionario de la Real Academia Española. (Vigésima edición) (D.R.A.E.) y Diccionario de la editorial Sopena prácticamente coincidente con él.

1. Imagen, figura o divisa con que materialmente o de palabra se representa un concepto moral o intelectual, por alguna semejanza o correspondencia que el entendimiento percibe entre este concepto y aquella imagen.

4. (Química) Letra o letras convenidas con que se designa un cuerpo simple. Así O es el símbolo del oxígeno; Hg del mercurio, etc.

(Símbolo) __*algébrico*__. *Letra o figura que representa un número variable o bien cualquiera de los entes para los que se ha definido la igualdad y la suma.*

- Enciclopedia de la editorial Larousse.

1. Cosa sensible que se toma como signo figurativo *de otra por razón de una analogía que el entendimiento percibe* entre ellas o de una convención: 'Símbolo es una figura real [...] que, además de lo que ella es en sí y por sí misma, desempeña la función de descifrar y evocar algo distinto de ella' (García Morente).

3. Representación convencional, generalmente unificada de una operación o una relación matemática, de una magnitud física, de una unidad de medida, de un componente de un circuito eléctrico o electrónico, de una operación efectuada por una calculadora, de un elemento de notación lingüística, etc.

5. (Química) Nombre dado a las letras adoptadas para designar abreviadamente los elementos: 'El símbolo del hierro es Fe'

- Diccionario María Moliner.

1. Cosa que representa convencionalmente a otra: 'El olivo es el símbolo de la paz'. 'El papel moneda es un símbolo del valor de las cosas'.

2. Letra o letras con que se representa cada cuerpo simple en la notación química.

I.1.2. COMENTARIOS A LAS DEFINICIONES DE SÍMBOLO.

Respecto a las definiciones de "símbolo" se puede ver que:

Primero. El diccionario de la Real Academia Española reconoce una acepción de **símbolo algébrico** en la que se le define como **letra [...] con que se designa un número variable...**

Es éste el único caso en que encontramos una alusión directa a las letras usadas como símbolos en el álgebra.

Segundo. Se observan opiniones diferentes respecto a la relación existente entre el símbolo y lo que es representado por él.

En algunos diccionarios se habla de "relación convencional" entre el símbolo y lo que representa. (Por ejemplo: Enciclopedia Larousse en la primera acepción o Diccionario María Moliner, primera acepción) mientras en otros se habla de "analogía, semejanza o correspondencia que el entendimiento percibe" entre el símbolo y lo representado (Enciclopedia Larousse, también primera acepción, que ofrece asimismo esta segunda opción; y Diccionario de la Real Academia Española, primera acepción).

Estos dos tipos de relación, concretamente para Piaget, determinan un cambio de nombre: En el caso de la relación por analogía, semejanza o correspondencia se le llama 'símbolo', pero en el caso de una relación convencional, se habla de 'signo'.

Tercero. En el apartado de Química hay un acuerdo total en la denominación de 'símbolos químicos' para los nombres de los elementos (Diccionario de la Real Academia Española, acepción cuarta; Enciclopedia Larousse, acepción quinta y Diccionario María Moliner, acepción segunda), la mayoría de los cuales son abreviaturas o iniciales, dándose por tanto una cierta correspondencia que se percibe como tal.

Cuarto. En el apartado de Matemáticas, cuando se alude, se habla exclusivamente de "representación convencional" (Acepción tercera de la Enciclopedia Larousse) pues en los otros dos textos ni se hace alusión a la posible relación existente.

I.1.3. SIGNO.

- Diccionario de la Real Academia Española. (Vigésima edición)

1. Objeto, fenómeno o acción material que, natural o convencionalmente, representa o substituye a otro objeto, fenómeno o acción.

2. Indicio o señal de algo. 'Su rubor me pareció signo de culpa'

3. Cualquiera de los caracteres que se emplean en la escritura y en la imprenta.

9. (Matemáticas) Señal o figura de que se usa en los cálculos para indicar, ya la naturaleza de las cantidades, ya las operaciones que se han de ejecutar con ellas.

10. (Música) Cualquiera de los caracteres con que se escribe la música.

lingüístico. Unidad mínima de la oración, constituida por un significante y un significado.

natural. El que nos hace venir en conocimiento de una cosa por la analogía o dependencia natural que tiene con ella.

negativo (Matemáticas) "menos", "signo" de la resta

positivo (Matemáticas) "más", "signo" de la suma.

- Diccionario de la editorial Sopena.

1. Cosa que evoca en el entendimiento la idea de otra.

2. Cualquiera de los caracteres de la escritura.

7.(Matemáticas) Señal para indicar las operaciones o la naturaleza de las cantidades. **Signo negativo:** Menos, signo de substracción o resta que se representa por una rayita horizontal (−).**Signo positivo:** Más, signo de suma o adición, que se representa por una crucecita (+).

9. (Música) Cualquiera de los caracteres con que se escribe la música.

- En la enciclopedia Larousse.

1. Cualquier cosa que evoca o representa la idea de otra.

2. Cualquiera de los caracteres usados en la escritura o imprenta.

3. Dibujo que es símbolo, señal o representación convencional de algo. 'La cruz es un signo del cristianismo'.

5. **Signo natural,** el que da a conocer una cosa por la dependencia directa que tiene con ella.

6. **Signo por costumbre,** aquel que, debido al uso

continuado, pasa a significar algo diverso a su naturaleza.

7. (Matemáticas) Símbolo que representa una operación o caracteriza a una magnitud determinada. **Regla de los signos**, regla que establece el signo del producto, en virtud de la cual + por + y - por - dan +, + por - y - por + dan -.

9. (Música) Convención gráfica con que los músicos representan las distintas características de los sonidos musicales: altura, duración e intensidad.

- En el diccionario María Moliner.

1. <Señal> Cualquier cosa, acción ó suceso que, por una relación natural o convencional, evoca otra o la **representa:** 'Estrechar la mano es un signo de amistad'

* Particularmente,"dibujo con que se indica o representa convencionalmente algo; como las letras, los números y demás dibujos que se emplean en matemáticas para indicar las operaciones, los dibujos del Zodiaco etc.

* (Música) Cualquiera de los dibujos que representan sonidos o cualquier indicación para la ejecución.

I.1.4. COMENTARIOS A LAS DEFINICIONES DE SIGNO.

Primero. El número de acepciones del término "signo" es, en todos los diccionarios, mucho mayor que el del término "símbolo" lo que nos llevaría a considerarlo un término más amplio.

Segundo. Existe cierta confusión del término "signo" con el término "símbolo" en las acepciones tercera y séptima de la Enciclopedia Larousse. Sobre todo en esta última se define el signo como un tipo especial de símbolo. El "símbolo" sería aquí el término genérico y el "signo" una clase particular de él.

Tercero. Respecto a la relación entre el signo y *lo que representa*, se alude con *más frecuencia* a la *relación* natural (acepción primera del D.R.A.E; quinta de la Enciclopedia Larousse; y primera del Diccionario María Moliner) o convencional (acepción primera del D.R.A.E; acepciones tercera y novena de la Enciclopedia Larousse; y primera del Diccionario María Moliner) que a la relación por analogía o correspondencia, (que se da sólo en el D.R.A.E. en dos acepciones: una, implícitamente, en la segunda acepción, en el caso del "indicio", observando el ejemplo, y otra en el explícito caso particular del "signo natural").

Cuarto. En el caso de la Música hay un total acuerdo en los cuatro diccionarios al denominarlos como "signos" en vez de "símbolos" (y en la Enciclopedia Larousse como "signos convencionales").

Quinto. En el caso de las Matemáticas se observa que el término "signo" se IDENTIFICA, con mucha frecuencia, con los casos particulares: "signo negativo y signo positivo" pues en tres de los cuatro diccionarios se definen claramente como "signos" el más (+) y el menos (-) (usados como signos de operación o como caracterización de los números positivos o negativos) y solamente en el Diccionario María Moliner se pone como ejemplo de signos matemáticos a "las letras, números y demás dibujos que se emplean para indicar las operaciones"

RESUMIENDO: 1. En el conocimiento popular los **"signos matemáticos"** por excelencia son el (+) y el (-).

Se ve así una cierta contradicción entre el carácter más amplio del término "signo" y la denominación muy concreta de "signos matemáticos" para el (+) y el (-). Algo semejante observaremos que sucede con el "signo lingüístico".

2. Las **letras en matemáticas**, en varios casos, no aparecen consideradas ni como signos ni como símbolos (no se las nombra ni en la Enciclopedia Larousse ni en el Diccionario Sopena) y en los casos en que aparecen no lo hacen en el mismo status: En el D.R.A.E. aparecen como **"símbolos** algébricos" y en el María Moliner aparecen como **"signos"** en una acepción general junto con "los números y demás dibujos".

Vemos pues cómo son consideradas en un caso como "signos" en sentido general y en otro como "símbolos" en una forma particular.

3. Las **operaciones o relaciones matemáticas**, por fin, tampoco son tenidas en consideración, salvo en la Enci-

clopedia Larousse, donde se dice que se pueden representar convencionalmente mediante "símbolos".

I.2. EN LA SEMIOLOGíA.

La Semiología según Saussure es "la ciencia que estudia la vida de los signos", de modo que nos interesa saber cuáles son los conceptos de "signo" y "símbolo" con los que trabaja pues, digamos, que pueden aportarnos una determinación científica básica.

I.2.1. SIGNO.

Según la idea general de las definiciones que acabamos de ver: Signo es cualquier cosa que sirva para evocar o representar a otra.

También según el diccionario de Filosofía de Abbagnano (Eco,1976 p.7): "Cualquier objeto o acontecimiento, utilizado como señal de otro objeto o acontecimiento"

Pero para la Semiología actual (o Semiótica como prefieren llamarla los filósofos americanos) las cosas no son tan sencillas.

Según Morris (1938):

> "...una cosa es signo solamente porque es interpretado como signo de algo por un intérprete"]...["...por ello, La Semiótica no tiene nada que ver con el estudio de un tipo particular de objetos, sino que se refiere a los objetos ordinarios en cuanto (y solamente en cuanto) participan en el proceso de semiosis ".

Según Eco (1976, p.20), la palabra semiosis puede ser tomada como "proceso de comunicación, uso e interpretación de los signos"

De este modo, según Morris, el signo solo cobra existencia en la medida en que haya un **observador intérprete**. Es decir, el signo es un elemento de comunicación por excelencia.

Se dice, en Eco (1976, p.33):

> "Las corrientes más recientes de la Semiótica intentan incluir en la categoria de signo todos los tipos de señales que comunican de alguna manera, y que el hombre y los demás seres reciben de otros seres, o de la misma materia inorgánica, incluso clasificando como signos las señales atribuidas al código genético (Grassi, 1972) y las posibles comunicaciones astrales. Siguiendo esta dirección se estudian también los sistemas de comunicación animal en la disciplina denominada Zoosemiótica (Sebeok, 1968), que incluye cualquier tipo de comunicación comprendiendo la comunicación quimica y olfativa, ..."

En los intentos de sistematización del estudio de los signos se han establecido clasificaciones atendiendo a distintas caracteristicas, por ejemplo:

- Fuente de los signos (objetos orgánicos, objetos inorgánicos,...)(Sebeok)

- Caracteristicas del signo (artificiales, naturales). [Ockham (1290,1349) en la obra "Summa totius logicae"]

Entre los artificiales, o "con emitente", se incluyen las palabras, los simbolos gráficos, los dibujos, las notas musicales etc. y entre los naturales se incluirian los síntomas e indicios: Manchas en la piel, ruido de pasos, nubes negras etc.

- Canales de transmisión (materia, energía,...) (Sebeok)

- Por el receptor humano del signo (vista, oído, olfato,...)

- Por el tipo de vínculo que les une al referente.

Vamos a ver esta última con más detalle por considerarla representativa a la hora de comparar los términos "signo" y "símbolo".

En este caso, Peirce (1974) ha hecho una clasificación de los signos teniendo en cuenta (como él mismo *dice en la pág. 65) "las diferentes relaciones posibles de* un Signo con su Objeto Dinámico" , es decir la que llama segunda tricotomía; o como dice Bobes (1989, p.145) la relación entre significante y denotatum; y así cataloga tres clases fundamentales:

SIGNOS
- a. Los símbolos
- b. Los índices
- c. Los iconos

que se explican a continuación.

a. **Símbolos.** Según Peirce son signos en los que no existe similitud entre el "vehículo del signo" (el significante de Saussure) y su "denotatum" (objeto concreto al que se refiere).

> "Es un signo que perdería el carácter que lo convierte en un signo si no hubiera interpretante. Es tal, cualquier emisión de habla que significa lo que significa sólo en virtud de poder ser entendida como poseedora de esa determinada significación"
>
> (Peirce."La ciencia de la semiótica" p.58)

Según U. Weinreich podría añadirse que se tiene una relación "convencional" entre el significante y el significado.

b. **Indices.** Son signos que actúan por una relación "existente" entre el vehiculo y su denotatum.

Los indices pueden ser una muestra física del "denotatum".

> "Es un signo que perdería al instante el carácter que hace de él un signo si su objeto fuera suprimido, pero que no perdería tal carácter si no hubiera interpretante. Tal es, por ejemplo un pedazo de tierra que muestra el agujero de una bala como signo de un disparo; porque sin el disparo no habría habido agujero; pero hay un agujero ahí, independientemente de que a alguien se le ocurra o no atribuirlo a un disparo"
>
> (Peirce."La ciencia de la semiótica" p.58)

c. **Iconos** Son signos en los que existe una similitud geométrica entre el vehiculo y su denotatum. Esta similitud puede estar establecida por "convención", por normas (por ejemplo la perspectiva).

En Matemáticas serian un ejemplo las figuras que se emplean en Geometria.

> "Es un signo que poseería el carácter que lo vuelve significativo aun cuando su objeto no tuviera existencia; tal como un trazo de lápiz en un papel representa una línea geométrica."
>
> (Peirce."La ciencia de la semiótica" p.58)

Estudiando estas clasificaciones, U. Eco (1976, p.59) opone observaciones y ejemplos que le llevan a afirmar que:

> "... todo signo puede ser considerado como un índice y como un icono, o como un símbolo, según las circunstancias en que aparece y el uso significativo a que se ha destinado"

de modo que se relativizan las definiciones de éstos.

Hasta aquí hemos anotado algunas de las clasificaciones que nos han interesado pero hay autores que añaden otros tipos de signos que nos interesan también:

Son los signos **quasi-símbolos**. No tienen un "status" completo de símbolos pero comportan alguna función simbólica.

Por ejemplo las señales que pueden ser signos que muestran la existencia de algo: "Daba señales de dolor". O son representación de algo: "La bandera a media asta es señal de duelo". Pero también pueden ser signos establecidos convencionalmente para avisar de algo o dar una orden: "Un *grito fué la señal de ataque", "El director dió la señal de* entrada a los violines".

Los síntomas. Signos que revelan el estado del sujeto. En general son signos que muestran estados subjetivos (enfado, alegría, ira,..) pero que también pueden ser objetivados. Por ejemplo, en Medicina: la fiebre es un síntoma de infección.

Recogiendo gran parte de estos análisis Eco (1976, p.64) propone una nueva articulación que califica de provisional y que incluimos a continuación (Tabla I)

```
                         signos
             ________________|________________________
             naturales                       artificiales
 ____________|__________          _________________|_____________
 síntomas        índices      productivos          substitutivos
           ________|________        |                   |
           huellas  indicios        |                   |
                                    |                   |
                          __________|__________         |
                          homo-         hetero-         |
                            | substanciales |           |
                            |        _______|_____      |
                            |        proyec-  carac-    |
                            |        tivos    terizantes|
             _______________|_________________          |
             intrínsecos traslativos ostensivos         |
                     ___________________________________|_____
                     símbolos    índices   signos  emblemas  otros
                   lingüísticos  vectores  visuales
                                           abstractos
```

TABLA I

Podemos ver en estas clasificaciones, de Peirce, de Eco, y en las definiciones de Weinrich y de Morris, la enorme amplitud del término "signo" que es considerado como un término genérico cuyo estudio es la base de la Semiología. También vemos que los términos "símbolo" e "índice" no son otra cosa que casos específicos de un concepto más general que es el de "signo".

I.2.2. SIGNO LINGÜÍSTICO.

En el estudio de los signos, el lingüístico ha sido estudiado de forma especial debido a su importancia para la comunicación humana. En nuestro tema de investigación resulta también esencialmente interesante pues, en el trabajo algebraico, hay que "traducir" muchas veces de la lengua materna, o común, a la lengua algebraica o viceversa, de modo que vamos a profundizar un poco más en él.

El signo lingüístico según Saussure se compone de dos partes: significante y significado.

El significante, según él, es la parte sensible, lo que percibimos, la "imagen acústica" (o visual ...), en tanto que fenómeno psiquico. Distinto del fenómeno fisico que seria la forma fónica.

El significado, siempre según Saussure, es la idea del objeto o del concepto que es representado. Es, al igual que el significante un fenómeno psiquico, como nos recuerda Ullmann (1986, pp.22-23):

> "En la fórmula de Saussure, la lengua es homogénea: "es un sistema de signos en el que sólo es esencial la unión del significado y de la imagen acústica y en el que las dos partes del signo son igualmente psiquicas"."
>
> [Ullmann nos dice que la cita es del "Curso" de Saussure (pp. 56-59 de la traducción de A.Alonso)]

Según la semiótica americana, representada por Ch. S. Peirce y Morris, las componentes del signo (ahora ya en sentido más amplio, no solamente lingüístico) serían cuatro:

a. El intérprete. Individuo para quien la asociación de significante y significado funciona como un signo.

b. El interpretante. Reacción, o disposición para responder, que el signo produce en el intérprete.

"Hábito" adquirido a partir de un proceso estímulo-reacción.

c. La significación. esto es, el significado, que, para Morris se desdobla en dos aspectos: 2.a. **el significatum** o clase de objetos a que se refiere el signo y 2.b. **el denotatum** que es el objeto concreto referido por el signo.

d. El sign-vehicle o vehículo del signo. Este es equivalente al significante de Saussure. Es el impacto perceptible por uno de los sentidos del receptor. No debe confundirse con un fenómeno físico sino con un fenómeno psicológico.

I.2.3. SIGNO ALGEBRAICO.

En el caso de lo que llamamos el "signo algebraico" podemos considerar, como en el "signo lingüístico", la existencia de un significante que sería el número, la letra, etc., y un significado que sería el concepto de número, los distintos conceptos representados por la letra, etc.

Según Ullmann (trad. 1986):

> "La comprensión de todo signo convencional presupone experiencias pasadas. Únicamente los signos "simbólicos", aquellos que recuerdan a la cosa designada, pueden dirigir espontáneamente la atención a ella desde su primera aparición.
>
> La interpretación de los signos lingüísticos depende, pues, de un juego delicado: la actualización de los elementos virtuales."
>
> ("Introducción a la semántica francesa" p.18)

La lengua algebraica no sería una lengua simbólica desde el punto de vista de la analogía, pues los signos empleados no recuerdan "por analogía" a los conceptos que representan.

De hecho, incluso hay en ella signos unívocos y otros que no lo son. Por ejemplo una "x" es un signo no unívoco, aún en álgebra elemental, pues puede representar objetos matemáticos diversos: Puede ser una incógnita con uno o varios valores posibles, pero fijos, en una ecuación y puede ser una variable en la expresión algebraica de una función.

Por tanto, podríamos decir, con Ullmann, que es una lengua de signos convencionales y que la comprensión de los signos algebraicos, su utilización y su interpretación dependen, pues, de un juego delicado.

Esto debe ser tenido en cuenta, por la Didáctica de la Matemática, cuando se trate de introducir las letras y las expresiones en las que se utilizan. Se tendrán que considerar las experiencias anteriores de los alumnos, y saber que la complejidad del sistema que se quiere introducir exige toda la atención del profesor para conseguir que el aprendizaje sea significativo.

Pero cambiemos el enfoque hacia la Lingüística y veamos algunos otros autores.

I.3. EN LINGÜISTICA.

Según el lingüista Saussure (ed.1987):

"La lengua es un sistema de signos que expresan ideas, y por éso comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc. Sólo que es el más importante de todos esos sistemas.]...[Se puede, pues, concebir 'una ciencia que estudie la vida de los signos en el seno de la vida social'. Tal ciencia sería parte de la psicología social, y por consiguiente de la psicología general. Nosotros la llamaremos 'semiología' (del griego sēmeîon "signo").]....[La lingüística no es más que una parte de esta ciencia general."

(Curso de lingüística general. p. 32)

De esta definición ya parece desprenderse que el término "signo" corresponde para Saussure a algo de tipo general, más amplio que lo que se entiende por "símbolo" o "índice". Pero veamos de modo más preciso los términos que nos interesan.

Desde el punto de vista de la Lingüistica puede haber dos clases de signos:

- los indicios y
- las señales.

Los **indicios** son signos sin intención de comunicar y las **señales** son signos con intención comunicativa.

Los **indicios** pueden ser: naturales (trueno, oscurecimiento del cielo,...) o producidos por el hombre (huellas, rastros,...) cuando no tiene intención de comunicar.

Las **señales** a su vez se pueden dividir en:

- iconos y
- *símbolos*

En los **iconos** el significante guarda alguna relación con el significado. Pueden ser ejemplos de iconos, *según esta definición, los sarcófagos, las imágenes, etc.*

En los **símbolos** existe solamente una relación convencional que confiere al símbolo un principio de racio*nalidad.*

Los símbolos, en esta clasificación, son una creación racional representativa de una realidad. A través de ellos se convierte la realidad en algo accesible y manejable por la mente humana.

Se trata pues de una realidad interpretada a través de la razón, de una "traducción" de una realidad a la realidad mental.

La clasificación que acabamos de expresar podría representarse mediante el esquema siguiente, que, por supuesto, es parcial, pero sintetiza los comentarios anteriores:

```
             Indicios
SIGNO (                    Iconos
             Señales   (                  "signo lingüístico"
                           Símbolos (     .....
                                          .....
```

El "signo lingüístico" queda clasificado entre las señales, porque se produce con intención de comunicar, y dentro de ellas entre los símbolos. (Cuando hablamos de la intención de comunicar, desde luego no estamos hablando del lenguaje interior, según la terminología piagetiana, sino del lenguaje exterior, social, del lenguaje entre un emisor y un receptor empleando unos signos lingüísticos)

Según esta clasificación, **la lengua algebraica** sería considerada como **simbólica** ya que, por una parte, se utiliza con intención de comunicar y, por otra, no presenta analogía inmediata entre el representante y lo representado: una letra que representa a un número, a una función, a un conjunto, etc; una combinación de letras y números que representan una ecuación o una función, etc.

Pero aquí también surge cierta controversia. Aunque en general acabamos de decir que el símbolo se acepta como una creación convencional, hay ciertos autores llamados "simbolistas" que siguen hablando del lenguaje como un símbolo, pero empleando la palabra "símbolo" como un término que se aplica cuando existe una cierta relación de analogía entre el representante y el representado. Estos autores esgrimen como argumentos aquellas palabras que imitan sonidos (por ejemplo, en español, las palabras onomatopéyicas como "cucú" o "tam-tam"). Respecto a la consideración de este problema leemos en Hjemslev (trad. 1976 p. 180)

> "Podemos, por tanto, decir que el signo lingüístico es inmotivado, arbitrario, que nunca es necesario, y sostener al tiempo la existencia de palabras expresivas e imitativas"

Y en la página 182:

"Pero, una vez establecida la diferencia de semantemas expresivos, el término "símbolo", para designar el signo lingüístico, no nos parece tan mal escogido como creía F. de Saussure. Sin duda hay inconvenientes en admitirlo, pues no todos los signos son expresivos. Pero no cabe duda de que el signo lingüístico puede ser, y lo es a veces, un símbolo. No es que deje de ser siempre convencional, sino que el *significante puede comportar una cierta combinación fónica asociable de suyo* y fácilmente con lo que debe expresar"

Observamos pues, en este último párrafo, cómo el término "símbolo" está empleado en su acepción de término "asociable" a lo que expresa y opuesto al término "signo" que es el que se considera verdaderamente arbitrario y convencional.

I.2.1. ARTICULACIONES.

El signo lingüístico posee una gran diferencia con otros signos y es que presenta una doble articulación, esto es:

Primera articulación: Cuando lo estudiamos como una combinación de unidades provistas de significado. La unidad mínima provista de significante y significado puede llamarse monema según algunos autores o morfema según otros. Estos *monemas* o *morfemas* se clasifican en

monemas (o morfemas)	lexemas: (o morfemas léxicos)	raíz o núcleo de la palabra
	morfemas: (o morfemas gramaticales)	desinencias, indicativos de género y número ...

y a la vez se puede considerar una:

Segunda articulación: Cuando se interpreta como combinación de unidades desprovistas de significado: fonemas, que se reunen para dar lugar a un monema.

El fonema es una abstracción que se emplea para identificar los distintos sonidos implicados en una lengua y que no coinciden biunívocamente con las letras del abecedario ("j" y "g" con sonido fuerte coinciden en un mismo fonema, "c" tiene dos sonidos diferentes según la vocal que le siga, etc.)

Las unidades de la primera articulación se pueden componer e ir formando:

- Sintagmas. Son palabras o conjuntos de palabras que desempeñan una misma función (sujeto, predicado...) y tienen un núcleo que es un lexema.

- Oraciones. Que son las unidades máximas dentro de la Gramática.

La lengua matemática simbólica tiene únicamente la primera articulación pues todas sus unidades poseen significado.

Aunque ya están surgiendo autores que han declarado que los números digitales pueden ser descompuestos en unidades desprovistas de significado, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Esto es un ocho:  pero quitándole un palito se convierte en un nueve: 

o quitándole dos palitos se convierte en un tres: 

De este modo los "palitos" con los que se construyen los números podrían ser considerados como los componentes desprovistos de significado que los formarían.

Pero de momento aceptaremos que la lengua simbólica matemática tiene una sola articulación ya que todas sus "unidades" están provistas de significado.

Esas unidades también se agrupan en "expresiones algebraicas", "relaciones" etc. que son equivalentes a los sintagmas y oraciones del lenguaje.

I.4. EN PSICOLOGÍA.

Veamos los términos usados en Psicología por Piaget.

El símbolo en el niño, para Piaget, se incluye en una tríada de adquisiciones progresivas que sería:

ÍNDICE → SÍMBOLO → SIGNO

Vamos a entrar en estos conceptos:

I.4.1. El "ÍNDICE SENSORIO MOTOR".

Dice Piaget, (Piaget, 1984 p. 137):

"El índice no es sino una parte o un aspecto del objeto del proceso causal cuya asimilación él permite" [...] "Como parte del objeto, el índice permite entonces anticipar a éste sin representación mental y por simple activación del esquema interesado".

El "índice" es usado como indicio anticipador.

"... así, un niño de 8 ó 9 meses sabrá ya encontrar un juguete bajo una tela cuando la forma abombada de ésta le sirva de índice de la presencia del objeto".

El abombamiento es utilizado como el "indicio" de la presencia del objeto.

El término "índice" es usado por Piaget para designar una anticipación del TODO por una parte de él, pero cuando aún no se ha producido una representación distinta del TODO; no implica, por tanto, representación mental todavía.

Este "índice" sensorio-motor, nos dice Piaget (op. cit. p.137), "sirve de instrumento a la inteligencia de los estadios anteriores" (anteriores se refiere a previos a la formación de los esquemas simbólicos -hablando siempre en términos de Piaget)

I.4.2. EL SÍMBOLO.

Este término sobrepasa en complejidad al índice sensorio-motor. La característica principal que lo diferencia del índice, en los escritos de Piaget,(Piaget, 1984) es la DISOCIACIÓN clara entre significante y significado.

Seguimos con Piaget en la pág. 137:

"Por el contrario, el símbolo se basa en el simple parecido entre el objeto presente que juega el papel de "significante" y el objeto ausente "significado", lo cual implica una representación: una situación no dada es evocada mentalmente y no sólo anticipada como un todo en función de alguna de sus partes".

El símbolo lleva en su constitución una representación mental. Constituye una "evocación" de un objeto no presente.

En una de las experiencias que narra Piaget, una niña de un año y medio toma un trozo de tela y se acuesta de lado sobre él, succionándose el dedo pulgar, haciendo "como si" durmiera. Incluso, en otra experiencia, el mismo hecho se hace presente al colocarse de lado con las manos cogidas "como si" tuviera la almohada y permanecer con los ojos abiertos, sonriendo.

En estas experiencias se está observando la formación de lo que Piaget llama los "esquemas simbólicos", que siguen a los esquemas sensorio-motores, en una progresión hacia la representación conceptualizada. Estos esquemas simbólicos aparecen en la última etapa del nacimiento del juego en el niño, la que Piaget denomina VI estadio del nacimiento del juego, pero se van preparando durante los dos estadios anteriores. Siempre según Piaget, (op.cit. p.141)

"Durante los estadios IV y V, hay un progreso en la dirección del símbolo correspondiente al desarrollo de la asimilación lúdica que conduce a una diferenciación un poco más avanzada entre el significante y el significado"

estos esquemas simbólicos suponen un progreso después de la ritualización de algunos movimientos lúdicos.

En la asignación de este término de símbolo el mismo Piaget (op. cit. p. 92) nos dice:

> "Anotemos, además, lo cual es fundamental, que, de acuerdo con la terminología de los lingüistas, nos es necesario reservar el término de 'símbolo' a los significantes 'motivados', es decir que presentan una relación de parecido con el significado, por oposición a los 'signos' que son 'arbitrarios' (es decir, convencionales o socialmente impuestos)".

Esta alusión a la terminología de los lingüistas viene a coincidir con la acepción que hemos anotado de Hjemslev (en el punto 3 de este capítulo) donde se habla del "signo" diciendo que es inmotivado y arbitrario. Sin embargo, hemos visto, en el comienzo de ese mismo punto, que en algunos autores, en Lingüística actual, se consideran las "señales" divididas en "iconos" y "símbolos" correspondiendo a estos últimos los significantes convencionales (no "motivados" por una relación de parecido, sino establecidos por una relación convencional, arbitraria).

Así, pues, comparando con la Lingüística vemos que el término "símbolo" para Piaget, corresponde al "icono" de algunos lingüistas.

I.4.3. EL SIGNO.

El **signo** es, para Piaget (1984 pp. 137-138), un significante "arbitrario" o "convencional" y por tanto necesita (o supone) una relación social del sujeto que le permita llegar a esa convención. Esto resulta evidente en el caso del lenguaje o sistema de los signos verbales. Por el contrario el **símbolo es** considerado como un significante "motivado", es decir, que presenta un parecido con el "significado" y por tanto podría ser resultado del pensamiento individual. Como una creación personal del niño.

El "signo" no es aquí, como era para la Semiótica, el término general que engloba a los otros como casos particulares sino que supone un perfeccionamiento del símbolo, según la dicha secuencia progresiva: indice-símbolo-signo, en el sentido de que ya no es necesario que significante y significado se parezcan, ahora el significante puede no tener nada que ver con el significado, simplemente lo representa por una convención social. Esta representación supone parte del sentido del símbolo.

Vemos así que su concepción del signo está próxima a la definición de símbolo de Weinrich (en el apartado I.2.1) que hablaba de una contigüidad "convencional" entre el significante y el significado.

Respecto a los signos verbales y por lo que puede ser aplicable a los signos matemáticos, no podemos pasar en este momento por alto dos observaciones.

Primera: Tanto Vygotsky (1896, 1934) como Whorf (1897,1941) consideraban el desarrollo del lenguaje como el vehículo primordial para el funcionamiento cognitivo de orden superior.

Así podemos leer en Vygotsky (1983, p.90):

> "La formación del concepto es el resultado de una actividad compleja en la cual intervienen las funciones intelectuales básicas. El proceso, sin embargo, no puede ser reducido a la asociación, la atención, la imaginación, la inferencia o las tendencias determinantes. Todas son indispensables, pero, al mismo tiempo, insuficientes sin el uso del signo o la palabra, como el medio a través del que dirigimos nuestras operaciones mentales, controlamos su curso y las canalizamos hacia la solución de la tarea con la cual nos enfrentamos"

Segunda: Anotamos de Piaget (1984, pp.138-139) una observación semejante:

> "El efecto más característico del sistema de los signos verbales sobre el desarrollo de la inteligencia es el de permitir la transformación de los esquemas sensorio-motores en conceptos. En efecto, el destino normal del esquema es el de desembocar en concepto, puesto que los esquemas como instrumentos de adaptacion a situaciones cada vez más variadas, son sistemas de relaciones susceptibles de abstracción y generalización progresivas. Pero para adquirir la condición fija de significación de conceptos y sobre todo su grado de generalidad, que sobrepasa a la inteligencia individual, los esquemas deben dar lugar a una comunicación inter-individual y, por consecuencia, ser expresados por signos"

Aunque, evidentemente, Piaget no ha tomado en cuenta otros aspectos de sus propios estudios, se ve cómo estos autores parecen resaltar la importancia del manejo de los signos (en su caso verbales pero que nosotros hacemos extensivo a los signos matemáticos) para el desarrollo de la inteligencia en general y para la representación conceptualizada en particular.

I.5. EN MATEMÁTICAS.

Los términos "signo" y "símbolo" en Matemáticas no son estudiados explícitamente. Aparecen en la terminología usada cuando se habla de las "notaciones" que se emplean. Podemos ver, a este respecto, por ejemplo en Dieudonné, que escribiendo a propósito de Diofanto de Alejandría (s.III d.d.C.) expresa:

"Sin duda, Diofanto fué el primer algebrista que utilizó abreviaturas; en un problema con una incógnita, utilizó unos signos especiales para designar sus 6 primeras potencias".

(Dieudonné, 1989, p.74)

Los "signos" a los que se refiere Dieudonné son letras griegas empleadas en lugar de la incógnita y de las distintas potencias de ésta. Diofanto usaba letras diferentes para las distintas potencias de la incógnita, a diferencia de la notación actual que emplea la letra "x" para la incógnita y, simplemente, añade los exponentes para representar las distintas potencias de ella.

En este texto de Dieudonné se califica como "signos" a las letras empleadas por Diofanto.

Pero, refiriéndose a estas mismas letras, Boyer,1986 las califica de símbolos como podemos apreciar en el texto siguiente, en el que comenta la "Arithmética" de Diofanto:

"Un número desconocido o incógnita se representa por un símbolo que se parece a la letra griega "s" (quizá recordando la última letra de ,la palabra "arithmos"), su cuadrado se representa por

$$\Delta^{\Upsilon}$$

el cubo por K^{Υ}, la cuarta potencia, llamada cuadrado-cuadrado ..."

(Boyer, 1986, p.239)

y, más adelante, Boyer nos vuelve a designar como símbolo la letra latina "M", traducción de lo usado por Diofanto para la diferencia:

"... la resta venía representada por un único símbolo situado inmediatamente antes de los términos que había que restar"

(p.239)

Este "único símbolo", que es la letra "M" representando a "menos", lo explicita Boyer en un ejemplo que incluye a continuación.

En Morris Kline, 1976 volvemos a encontrar la acepción de símbolo para las letras:

"En un texto tradicional una variable puede definirse como un símbolo o letra que puede tomar cualquiera de los valores de una colección o conjunto".

(Morris Kline, 1976, p. 74)

Pero no son solamente las letras las que reciben esta caracterización de símbolos, por parte de Morris Kline, pues también llama símbolos a "->", "U", "€" y a otros muchos:

"...usando el símbolo ->, que significa implicación"

"... se escribe 1 € {1,2,3}, dónde el símbolo € significa "pertenece a"."

(Morris Kline, 1976, p.83)

Sin embargo, de nuevo volvemos a encontrar la confusión entre los términos símbolo y signo que son usados como sinónimos en la página 84:

"Los autores modernos disfrutan con los símbolos. ... los símbolos de unión e intersección, el signo de pertenencia y muchos otros símbolos."

También encontramos en G. Polya, 1979, cuando trata el planteo de ecuaciones, una terminología en la que emplea indistintamente "símbolos" y "signos":

"Plantear una ecuación significa expresar en símbolos matemáticos una condición formulada con palabras;..."

(El mundo de las Matemáticas. Tomo V, p.371)

Pero, continuando, en la página siguiente nos dice:

> "Escribamos a un lado la expresión verbal dividida en partes adecuadas. Al otro lado, escribamos los signos algebraicos, enfrente de la parte correspondiente a la expresión verbal. El original está a la izquierda; la traducción, en símbolos, a la derecha"
>
> (El mundo de las Matemáticas. Tomo V, p.372)

Lo que sí se aprecia es una diferencia sustancial en la frecuencia de uso de ambos términos. En las dos páginas y media que dedica la enciclopedia Sigma a exponer el planteo de cuaciones de G. Polya encontramos siete veces el término "símbolo" y una vez el término "signo algebraico". Notamos pues, de nuevo, en el caso de Polya, que parece que ha considerado más apropiado hablar de "símbolos" que de "signos", cuando se trata de las ecuaciones.

Comprobamos como para los matemáticos no es interesante hacer una clara distinción entre ambos términos. Se usan prácticamente como sinónimos en algunos casos. En cuánto al término "simbolización", se aplica en cualquier caso en el que se hable de notaciones que supongan una esquematización de la escritura materna.

En lo que parece que estamos de acuerdo los matemáticos es en que los símbolos (o los "signos") no son fáciles de comprender ni de manejar. A este respecto dice el mismo Kline:

> "... (para los estudiantes) los símbolos son como banderas enemigas flotando sobre una ciudadela aparentemente inexpugnable.El mismo hecho de que el simbolismo no comenzara a ser usado habitualmente en Matemáticas hasta los siglos XVI y XVII indica que no es fácilmente accesible para la gente"
>
> (Morris Kline, 1976, p.84)

I.6. EN EL MEDIO DIDACTICO.

Si empleáramos la terminología de Piaget, en Matemáticas, tendríamos que hablar de signos más que símbolos, pues los que se adoptan, lo son en virtud de una aceptación "social" entre la comunidad matemática y en cuanto a la similitud con el original, en general no existe. Solamente algunas figuras en geometría tienen alguna cualidad que les hace asemejarse a los originales representados.

Pero si empleamos la terminología lingüística, tendríamos que hablar de "signos algebraicos", del mismo modo que se habla de "signo lingüístico", es decir, considerándolos como un tipo particular de signos comprendidos en la categoría precisa de los SÍMBOLOS.

Refiriéndonos, en concreto, a los términos usados en las lecciones de Aritmética y Algebra elemental. Los términos "signo" y "símbolo" no están aquí claramente diferenciados. A modo de hipótesis podemos anticipar que el término "símbolo" representa, para un profesor, la idea de algo mucho más abstracto que el término "signo".

También es frecuente, entre los profesores, considerar el signo como la mera "grafia" correspondiente a un tipo de símbolos.

Pero vamos a ver que a menudo ambos términos se confunden en el lenguaje profesoral y también en el lenguaje de los textos.

I.6.1. EN LOS TEXTOS DE ENSEÑANZA.

En los libros de texto no encontramos el término "indice". Este término no tiene un sentido en la representación matemática. Vamos, entonces, a observar el uso de los términos "signo" y "símbolo".

USO DEL TéRMINO "SIGNO".

En general observamos que se usa la palabra "signo" para indicar:

A. OPERACIONES en Aritmética y Cálculo:

"El SIGNO de la suma es +", "el SIGNO x (se lee "por") se usa para escribir de forma abreviada una suma de sumandos iguales".

(Ed. Dossat S.A. 3º EGB. p.92)

"El SIGNO √ se lee: raiz de..."

(6º curso EGB)

"Es decir, Los SIGNOS d y ∫ se anulan mutuamente. O dicho de otra forma, pueden considerarse operadores recíprocos, salvo la constante de integración"

(Ed. SM. 3º BUP. p. 311)

B. Para indicar RELACIONES en Aritmética y en Algebra. Por ejemplo refiriéndose a la relación de pertenencia:

"Para señalar que un elemento está en un conjunto se escribe el SIGNO « ∈ » entre ellos. Este SIGNO se lee «pertenece a» ..."

(Ed. Dossat S.A. 3º EGB p.13)

O refiriéndose a igualdades o desigualdades:

"Se llama primer miembro de la ecuación a la expresión que se encuentra a la izquierda del SIGNO = "

"La relación mayor o igual, entre números enteros, se expresa usando el SIGNO ≥"

(Ed. Santillana 7º. p.25)

C. Para indicar los caracteres " + " y " - ":

"Los números enteros positivos se pueden expresar con un SIGNO más delante:

+1, +2, +3, ... "

(Libro del profesor. Aziaut. 7º EGB. Ed.Anaya p. 16)

Podemos decir que, en general, parece que los textos se ponen de acuerdo para emplear el término SIGNO cuando se trata de UN SóLO carácter que representa algo, bien sea una operación o una relación.

USO DEL TéRMINO "SíMBOLO".

Vamos a ver las ocasiones en que se usa el término SIMBOLIZAR.

A. En general cuando se trata de expresar conjuntos:

"El conjunto de los números naturales SE SIMBOLIZA por N y ...."

(Aziaut. Ed. Anaya 7º EGB p.5)

"Al conjunto de los múltiplos de "a" LO SIMBOLIZAMOS por (à) y lo escribimos entre llaves: ..."

(Op. cit. p.47)

B. También cuando la expresión incluye más de un carácter, por ejemplo:

"El valor absoluto de un número entero "a" SE SIMBOLIZA así: |a| y ..."

(Op. cit. p. 13)

En otra parte del texto, para los números negativos, dice:

"Los SIMBOLIZAREMOS así:

(-1), (-2), (-3), ... y se leen ..."

(Idem, p.14)

Pero no todo está tan claro pues también se usa el término "símbolo" para algunos de los casos en que antes hemos observado el uso del término "signo".

En el caso de expresar operaciones, habíamos visto que se llamaba "signo +", "signo -", etc. pero encontramos también:

"La resta de enteros se expresa con el SíMBOLO - "

(Idem, p.27)

O, por ejemplo, respecto a la expresión de las relaciones "mayor que" o "menor que" encontramos, por una parte, en las orientaciones metodológicas del libro de 6º de EGB de Ed.Santillana se plantea como objetivo: "Lograr la correcta utilización de los SIGNOS ≥ y ≤", usando el término "signo" del mismo modo que lo hemos observado ya y, sin embargo, en un ejemplo del mismo texto encontramos que, al antes llamado signo "≤", ahora le llama SíMBOLO. Veámoslo:

"En el conjunto:

$M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

se establece la relación «... es menor o igual que...» que se representa por el SíMBOLO « ≤ » "

(Santillana, 6º EGB)

También en 7º EGB en Ed. Anaya volvemos a ver:

"En ocasiones se utiliza el SíMBOLO ' ¿ ' que significa ..."

(Azimut. 7º EGB)

También encontramos el uso del término "símbolo" en la relación de divisibilidad, lo que vuelve a contradecir nuestra observación anterior, en la que habíamos constatado el uso del término "signo" en el caso de estas relaciones.

"Si b es divisor de a SE SIMBOLIZA así: b|a"

(Azimut.7º EGB, p. 48)

Encontramos ya la confusión completa de los términos "símbolo" y "signo" en los siguientes ejemplos:

"Al SíMBOLO $\int$ se le denomina SIGNO de integración..."

(Ed. Librería General. 3º BUP p.175)

"El SíMBOLO $\int$ que se llama SIGNO INTEGRAL fué introducido por el matemático y filósofo Leibniz en 1675"

(Ed. Anaya. 3º BUP p. 186)

En estos ejemplos observamos lo que parece ser una identificación entre ambos términos que lleva a usarlos indistintamente.

Sin embargo en el caso de la integración está muy extendido el uso del término "símbolo" como podemos comprobar en los ejemplos siguientes:

"Aunque $\int f$ es el SíMBOLO para el conjunto de las primitivas de f, nosotros ..."

(Ed. Anaya. 3º BUP p.212)

"... integral indefinida... y la designaremos con el SíMBOLO $\int f(x)$, $\int f$ ó $\int f(x)dx$"

(Ed. SM. Funciones-3 p.311)

Veamos algunos casos en los que se habla de EXPRESAR SIMBóLICAMENTE o en FORMA SIMBóLICA:

"Para indicar que los elementos d, 5, e y 1 forman el conjunto A se escribe SIMBóLICAMENTE: d∈A; 5∈A; e∈A; 1∈A"

(Ed. Dossat, 3º EGB, p.13)

"Lo expresamos SIMBóLICAMENTE:

$$a > n \quad \text{si} \quad a = n + p$$

siendo p un número natural distinto de cero"

(Azimut. Ed. Anaya 7º EGB p.5)

"Forma SIMBóLICA de expresar una correspondencia f entre N y N

$$f: N \longrightarrow N$$ "

(6º EGB)

O simplemente pasa a hablar de SIMBOLIZAR en el caso de la potencia:

"Cuando tenemos un producto de factores iguales 5.5.5.5.5.5 se escribe SIMBóLICAMENTE

$$5^6$$

y se lee: cinco elevado a 6"

(Guía didáctica.Ed. Santillana. 6º EGB p.191)

Aquí no se dice: "...se escribe con los signos...". Es decir parece que **se pasa a hablar de simbolización cuando se gana en complejidad de escritura.** Cuando se escribe una expresión con dos o más caracteres.

Sin embargo con un único carácter también encontramos que se usa el término "símbolo" para la letra "x" en los polinomios:

"Sea R el cuerpo de los números reales, x un símbolo tal que x ∉ R y al que llamaremos 'indeterminada' "

(Ed. Santillana. 1º de BUP, p. 116)

Para la letra "i" en los números complejos:

"Tenemos así que el SíMBOLO i utilizado ..."

(Ed. Anaya 3º BUP, p.47)

Para la letra "sigma" mayúscula:

"Sería una deformación de la letra griega Σ que se utiliza habitualmente como SíMBOLO de suma"

(Ed. Anaya 3º BUP, p.187)

O como en el libro que nos dice:

"Para escribir la palabra 'metro' se usa abreviadamente el SíMBOLO m"

(Ed. S.M. 3º de EGB)

Según lo que hemos observado sobre el uso en Matemáticas del término "signo", podría esperarse que dijera el "signo m" ya que se trata de un sólo carácter.

¿Quizá el término que mejor se adaptaría sería el de íNDICE según la teoría semiótica y según Piaget, pues "m" es la inicial de "metro", es decir "una parte" del nombre representado?.

¿Pero puede ser que la justificación de esta calificación de SíMBOLO se encuentre en que "esto" es una letra y todas las letras se consideran SíMBOLOS en Matemáticas?. Parece que las letras son reconocidas como caracteres SIMBóLICOS aunque se las encuentre aisladas. Sin embargo, en el resto de los caracteres, encontramos que es la complejidad la que hace que se hable de simbolizar.

Veamos un ejemplo más de este cambio de terminología, ligado en este caso a la aparición de las ecuaciones, en un libro de 7º de EGB de la Editorial Santillana.

Comienza hablando, en la p.51 de **lenguaje algebraico** que dice que es "cuando en las operaciones se utilizan números y letras". Después plantea el ejercicio siguiente:

"Expresa usando SIGNOS:

Usando palabras	Usando signos
Cinco multiplicado por, n más tres	5(n+3)
Seis multiplicado por ocho, menos n	_ _ _
El doble de x, más uno es quince	2·x+1 = 15
El triple de x, menos uno es veintiseis	_ _ _
....	.....

Observemos que en ningún momento habla de igualdades aunque empieza a plantearlas, y que no realiza cálculo alguno con las expresiones planteadas. Se trata sólo de transcribir expresiones con palabras a expresiones con "signos".

Y unas páginas más adelante (p. 58), cuando pasa al tema de Ecuaciones y empieza a definir lo que es una igualdad dice:

"Observa las siguientes frases y sus expresiones mediante SíMBOLOS.

Frases	Expresiones mediante símbolos
Cinco igual a siete menos dos	$5 = 7 - 2$
La suma de un número con su doble es igual a su triple	$x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$
La suma de un número y dos es igual a nueve	$x + 2 = 9$ "

O un poco más abajo en la misma página:

"Escribe las siguientes frases mediante SíMBOLOS:

a) La mitad de un número es igual a 8

b) El triple de un número más ese número es igual a cuatro veces ese número.

c) Un número menos 6 da 13".

En esta página 58, TODAS las expresiones ya son IGUALDADES y se plantean como iniciación a la resolución de ecuaciones. En ellas se reserva la palabra SIGNO para la igualdad. Así se dice que se "emplea el SIGNO =".

Pero no se hace la caracterización de SíMBOLO. ¿Cuáles se debe interpretar que son los símbolos? ¿Las letras?, ¿los números?, ¿Es un símbolo la expresión completa? ¿Por qué, en este momento, se cambia el término "signo" por el término "símbolo"?

Podemos observar que ha aparecido la palabra SíMBOLO cuando hemos entrado de lleno en las ecuaciones. Hasta este momento, el texto ha estado hablando de EXPRESIONES ALGEBRAICAS y EXPRESIONES LITERALES, pero en ningún momento de EXPRESIONES SIMBÓLICAS. El texto comienza a hablar de SIMBOLIZACIÓN cuando aparece la expresión de la ecuación.

Y, así, nos surge una pregunta clave:

¿Es la ecuación la que marca el comienzo de la "simbolización" en el medio didáctico?

Al menos por lo que hemos visto, así parece desprenderse de las presentaciones de los textos.

Lo que habría que añadir a estas observaciones es que, solamente en el caso de una editorial, se han encontrado ejercicios exclusivamente dirigidos a la introducción de la simbolización.

No queremos decir que esta editorial sea el único caso en que se realice esta introducción pues, evidentemente, no hemos pretendido hacer un estudio exhaustivo de textos, pero es significativo que, entre los usados con más frecuencia, sea uno sólo el que considera la simbolización como tema objeto de estudio y, aún asi, dedicándole menos de dos páginas.

En general son incluso escases las explicaciones breves que tratan de aclarar la introducción de algún término simbólico. Simplemente alguna alusión como "esto es un símbolo que expresa ..." (o "esto es un símbolo que quiere decir...") acompaña a la introducción de alguno de ellos.

Se olvida por completo que la simbolización supone, históricamente, la culminación de un proceso de generalización y que se logra como solución a una necesidad científica solamente sentida tras el alcance de un dominio de técnicas de cálculo particularizado.

I.6.2. SOBRE LAS LETRAS.

¿Son símbolos o signos, las letras para el medio didáctico? En realidad no es la nomenclatura el problema que más nos interesa aquí, sino como se considera su uso y en razón de qué criterios se eligen.

En Matemáticas, las letras pueden representar muy diversos objetos concretos y abstractos: magnitudes (longitudes, volúmenes,...), puntos (vértices, extremos de segmentos), números y otros objetos o entidades matemáticos (polinomios, conjuntos,...). Son elegidas convencionalmente, por tanto son símbolos en el sentido lingüístico del término aunque en el sentido piagetiano no lo sean, pues no son significantes que presenten una relación de parecido con el significado. En este sentido piagetiano deberemos decir que son signos.

En concreto, en álgebra, las letras "x,y,z,..." que representan las incógnitas, no presentan parecido alguno con los objetos matemáticos representados por ellas. Incluso, es más: no podrían presentarlo pues cada una de ellas puede servir y de hecho sirve para representar objetos matemáticos muy diferentes en concordancia con el contexto en el que se encuentren empleadas. Según ésto, algunos tratadistas de Lingüística y de Semiótica dirían que se trata de "símbolos" y no de "iconos" (ambos dentro de la clase de las "señales" y éstas dentro de la categoría general de "signos"); los psicólogos dirían que se trata de "signos" y no de "símbolos".

En lo esencial, existen pocas letras que tengan alguna similitud con lo que representan (Σ como "suma" o f como "función"). En la mayoría, se trata por tanto, de convenciones adoptadas respecto a su uso. Esto es lo importante y lo que debemos tener en cuenta a la hora de introducirlas y de emplearlas. Llamémoslas "símbolos" o "signos" pero seamos conscientes de la dificultad que entraña su aprendizaje. No se trata de simples sincopaciones, o abreviaturas de los términos correspondientes. Por el contrario, se manejan como auténticas representaciones de conceptos o entes matemáticos de diversa dificultad.

Históricamente, siguen una prolongada gestación, con implantaciones y retrocesos sucesivos en su empleo. Las letras, representando a segmentos constantes, ya fueron empleadas por los griegos en tiempos de Euclides; su uso por Viète, como incógnita y como parámetro, marca un gran paso adelante en el método de "análisis" y por tanto en el Álgebra; su empleo como variable y función necesita de un nuevo periodo de elaboración que pasa por Leibniz y Euler y en éste, como en todos los casos, la llegada a la notación satisfactoria, marca la culminación de un proceso de concreción del concepto.

I.6.3. SOBRE LOS NúMEROS.

En cuánto al número, cuando decimos que un niño ha adquirido el concepto de número, estamos indicando que se ha formado un SíMBOLO ABSTRACTO en su mente.

Cuando el alumno trabaja con el dígito 5 para representar 5 elementos de un conjunto, por ejemplo "5 manzanas" puede que no haya comprendido todavía el simbolismo implicado. Cuando sea capaz de sumar: 5 manzanas + 4 peras y sepa que da 9 "algo", que no son ni manzanas ni peras, sino una abstracción diferente, entonces diremos que ha adquirido el concepto de número. el SíMBOLO número.

Los números son considerados como "símbolos" en aritmética pero, desde luego, actualmente se trata de símbolos convencionales, es decir, de símbolos que representan lo que representan gracias a una convención establecida socialmente, en este caso por la comunidad científica.

Este no ha sido el caso de todos los sistemas de numeración. En el caso de los sistemas de numeración anteriores al sistema posicional decimal, podía hablarse de cierto "parecido" de los números con lo que representaban, como en el caso de los números romanos:

uno I

dos II

tres III

cuatro ..... IV (uno antes de cinco)

cinco ..... V (recuerda una mano)

diez ..... X (pueden ser dos V, una de ellas invertida);

en que cada "palito" empezaba representando una unidad y el número de palitos, hasta el tres, coincidía con el número a representar. Después al aumentar el número de los palitos necesarios para la representación ya se establecían reglas convenidas, como la de que un símbolo de valor menor que otro y escrito delante de él restaba su valor del de éste.

O en el sistema maya de numeración en el que cada punto representaba una unidad, y así del 1 al 4 se representaban por igual número de puntos.

Pero, en el caso del sistema posicional decimal actual, las cifras no recuerdan el valor del número sino que han llegado a ser lo que son a través de transformaciones convencionales.

Aunque en lo que se refiere a "convención" los números son iguales a las letras, gozan de una ventaja en la enseñanza y es que cada cifra es unívoca. Es decir, cada cifra aislada representa una sola cosa, y la diferencia constituida por las distintas posiciones posibles de las cifras en un número se explica, cuidadosa y progresivamente al alumno, en el momento de su introducción. Esta introducción cuidadosa y progresiva es la que no se hace habitualmente con las letras.

La introducción de los números naturales y de la numeración es muy importante y eficaz, pero existen también problemas con el empleo de otros números. Por ejemplo cuando tratamos de emplear los números racionales, pueden surgir dificultades con la notación, derivadas de confundir el nombre del número con el número mismo.

Un ejemplo de confusión de este tipo podria ser:

> Tomemos el número 3/5 que es igual al número 21/35. Sabemos que 4 es mayor que 3/5. Substituyendo 3/5 por " su igual" 21/35 podemos decir que 4 es mayor que 21/35 y esto es cierto. Siguiendo un razonamiento "parecido", sin embargo, podemos crear la siguiente deducción incorrecta: "9 es múltiplo del numerador de 3/5 y substituyendo 3/5 por "su igual" 21/35 podemos decir que 9 es múltiplo del numerador de 21/35, es decir, 9 es múltiplo de 21"

Evidentemente esta conclusión es errónea. En esta última deducción estamos confundiendo el "nombre del número" (que es lo que usamos en las frases "el numerador de 3/5" y "el numerador de 21/35") con el número mismo. El número 3/5 y el número 21/35 son iguales pero los dos nombres no son realmente idénticos y cuando decimos "el numerador de ..." estamos refiriéndonos al nombre "3/5" o al nombre "21/35".

Para intentar evitar este tipo de errores se trató de hacer algo cuando se introdujeron las "matemáticas modernas". Se intentó *conseguir que el alumno distinguiera* entre "el número" y "el numeral", que era el nombre de ese número. Sin embargo, como nos hace observar, con alegre sutileza, M. Kline (1976, p.5), no resulta muy fácil conseguir que un alumno, cuando comienza a conocer los números naturales, sienta la necesidad de semejante distinción.

Pero *no debemos olvidar* que conocer *las* dificultades que se esconden tras una determinada notación, si es tarea primordial de los profesores. Este es el caso que nos ocupa en cuanto a la notación con letras se refiere.

I.6.4. En la "TEORIA DE SITUACIONES".

Situación de acción.

En la situación de acción no se tiene necesidad de utilizar más que "los índices", (no los símbolos, ni los signos) de una cierta manera, directamente para las acciones que se van a emprender. Es cierto que cuando se va a tomar una decisión nos vamos a servir del lenguaje, de los símbolos, de los conceptos que se han adquirido anteriormente y que forman el bagaje cultural, pero ésto simplemente supone la *recuperación* de otras cosas que se han *desarrollado* previamente en otras actividades distintas del momento de la acción.

La acción sóla no puede ir mucho más allá de poner en juego los índices, no puede producir otros usos, como el de los símbolos o el de los signos.

Situación de comunicación.

Sin embargo nosotros podemos fabricar los instrumentos necesarios para la acción, por ejemplo, cuando queremos comunicar algo a otro.

Entonces podemos mostrar algún signo que exista ya; igual que, por ejemplo, para informar a un interlocutor, en la calle, se puede indicar una "señal" de dirección prohibida; pero también podemos crear códigos de comunicación a base de signos convencionales ya existentes (como los números) y/o signos creados por nosotros en razón de una similitud entre ellos y el objeto real (como un círculo para representar un balón, un dibujo del objeto, como se usa en los pictogramas de Estadística, o un plano de una ciudad).

Es posible, también, organizar intencionalmente el medio con el fin de restringir las posibilidades futuras de acción, produciendo señales de advertencia, como los intermitentes en un coche que comunican a otros conductores la información que ellos no pueden conocer por sí mismos, como puede ser nuestra intención de girar o parar.

Dicho de otro modo, los índices pueden llegar a ser condiciones que no se pueden transgredir, o bien pueden ser índices intencionales que producen una huella, como las señales que se producen "para" que otro las use como indicios.

En una situación de comunicación se puede llegar a confeccionar un código que permita informar al receptor de lo que nos interesa comunicarle. Según cuáles sean las condiciones que se establezcan para esa comunicación, se puede crear una "situación de formulación" en la que se genera una *producción de signos símbolos*.

Un "índice" como el color blanco de las camisetas del equipo de fútbol del Real Zaragoza, puede pasar a ser un "símbolo" del Real Zaragoza cuando se usa en lugar del nombre del equipo, al decir "los blancos". Es decir, que el uso puede hacer llegar a "símbolo" lo que en principio no era más que un "índice".

I.6.5. CONSIDERACIONES SOBRE EL USO EN DIDACTICA DE ESTOS TéRMINOS.

El símbolo en principio, si quiere tener alguna analogía con el significante, quedará restringido en su uso, pues no podrá ser completamente arbitrario.

Por el contrario, si el símbolo es convencional, no tendrá que parecerse a nada y estará disponible para cualquier actividad de significación.

Si tomamos un concepto o un objeto matemático y tenemos necesidad de designarlo, los medios de designación nos interesa que sean "libres", porque hay muchas cosas que no queremos designar de forma definitiva, determinante. No queremos tomarlas como cosas absolutamente precisas.

De forma parecida, en el lenguaje común tenemos designaciones generales que, en una cierta situación ambiental, se vuelven designaciones particulares. Por ejemplo, decimos " el perro" y es una palabra general que designa a todos los animales de unas determinadas caracteristicas, pero en una familia, cuando van a salir a dar un paseo, alguien puede hablar de "el perro" y entonces se refiere al perro que está en la familia, a "su" perro en particular.

De este modo es el contexto y, dentro de él, la función que cumple, lo que determina la generalidad o particularidad del término. Lo que marca a éste como un "signo" de determinadas características es nuestra relación con ese término, en una cierta institución.

En Algebra tenemos también las letras: "x", "y", "a", "A", etc., que son términos de designación general, pero que, en un problema determinado, sirven como una designación particular: La letra "x", en el planteamiento de una ecuación, puede designar "el número de personas que ..." y, en ese caso, indica un número natural (entero positivo) que es el cardinal del conjunto (número de personas). En otro problema puede designar la distancia, medida por ejemplo en metros, que hay entre dos puntos A y B y, en este caso, designa un número real.

En la institución de enseñanza en que nos encontramos: Las Matemáticas, nosotros tenemos necesidad de trabajar con representantes de los objetos matemáticos, con cosas que sirvan para evocar a esos objetos o conceptos.

Si usamos términos muy precisos para cada concepto, términos de significación extremadamente local, puede ser que tengan cierta analogía, cierto parecido con lo que deben representar (términos de tipo icono), pero cada uno de estos términos ya no será útil para otras determinaciones. Diremos que hay que pagar un precio muy alto para este tipo de designaciones, porque, además, tendríamos que llegar a convenciones sobre un número prácticamente infinito de términos especificos.

Hay muchos objetos para los que no hay necesidad de un término tan especifico. Con poseer un término que se pueda asignar a "la clase de esos objetos", tenemos suficiente, y se produce una cierta "economía".

Si usamos de términos que posean una cierta analogía o semejanza, no necesitaremos una convención previa para que la comunicación sea efectiva, pero si usamos de signos arbitrarios, será necesaria una información complementaria que produzca la convención que se necesita para que la comunicación resulte eficaz.

Si movemos nuestros brazos y manos, no hará falta una convención para transmitir la idea de "vuelo", porque existe todo un fondo de cultura que aporta la información complementaria para entender este gesto. ésta forma de expresión que parece tan sencilla es, en cierto modo, muy costosa, pues harían falta una infinidad de gestos si cada uno debiera parecerse a lo que debe representar.

Interesará, por tanto, una designación arbitraria. Pero habrá que tener en cuenta que **cuanto más arbitraria sea la designación, más será necesaria una convención para hacerla funcionar.** Si la convención cuesta cara, y el uso es muy limitado, no tendrá mucho sentido hacer aparecer un signo así.

Existen palabras vacías de significado como "cosa" o "éso" que entran muy bien en relación con los objetos en ambientes de contextos muy concretos. Se tiene así una economía en el aprendizaje de las palabras. Estas palabras no tienen significado fuera del contexto, pero en él tienen una utilidad innegable. Sucede lo mismo con algunas letras en álgebra. Las letras en álgebra son como estas palabras. La "x" es el "éso", o como se decía en los comienzos del álgebra, hasta los s. XV y XVI: "La cosa".

Cuando escribo en matemáticas

$$a \cdot x + b$$

puedo estar estudiando las ecuaciones diofánticas y, entonces, yo sé que las letras son números enteros (Z). Si estoy haciendo álgebra, y considero esta expresión como un polinomio, puedo decir que elijo los coeficientes "a" y "b" en el conjunto de los números racionales (Q), y trabajo con polinomios de coeficientes racionales; o puedo elegir el conjunto "R" *como campo de definición de los coeficientes y de* la "indeterminada x", para trabajar con polinomios reales de variable real. El conjunto que yo elija va a suponer la estructura de soporte que va a dar un contexto a la significación de las letras.

Es una necesidad el disponer de signos que se puedan rápidamente poner en contexto sin transportar nada con ellos, sin arrastrar ninguna significación propia, o la *menor significación semántica posible. Así utilizamos estos* signos en un contexto determinado que permite mantener, durante un cierto tiempo, la significación, y destruirla después rápidamente. Su aprendizaje no produce un coste de memoria. Con estos signos la asociación depende, en un momento dado, de la persona y no de la cultura.

Pero tenemos también otros caracteres unívocos, que podrían considerarse como "símbolos", en el sentido de una analogía, al menos de cierta falta de arbitrariedad en *la convención. Como si fueran de algún modo determinados, no* totalmente arbitrarios. Por ejemplo, la letra griega mayúscula "Σ", que es utilizada para representar "la suma de". O el carácter "$\int$" que se asemeja a una "s" (inicial de "suma") alargada y que se usa para otra suma, en este caso de infinitos sumandos, que es la integral.

Se trata de pequeñas excepciones a los signos convencionales, como sucede con algunas palabras del lenguaje común que son *onomatopéyicas* y cuyo sonido presenta analogía con el sonido que representa.

I.7. TERMINOLOGÍA QUE USAREMOS.

Nos vamos a adherir a un uso de los términos basado en el que hemos identificado como habitual en los textos matemáticos. El uso de los términos que adoptaremos resultará familiar a los profesores de Matemáticas.

La terminologia que vamos a usar es la siguiente:

SÍMBOLO. Denominaremos así cualquier grafo (letra o dibujo) de los empleados para representar DE FORMA CONVENCIONAL una relación o un concepto matemáticos.

El símbolo podrá estar constituido por una o varias letras, uno o varios números, combinaciones de letras con números o dibujos.

SIGNO. Alguno de estos símbolos recibirá, por costumbre, el nombre de signo, como:

- Los que denotan las cuatro operaciones aritméticas: (+,-,x,:). Así escribiremos: "signo 'más'", "signo 'menos',"signos de multiplicación, '·' y 'x'", y "signo de división, ':' "

- Los que denotan las relaciones: "=", "∈", "<",... y asi escribiremos: "signo 'igual'", "signo de pertenencia", "signos de desigualdad ' < ', ' > ', etc.

I.7.1. PRECISIÓN Y AMBIGÜEDAD.

Precisión

En la elección de los significantes matemáticos se busca la mayor precisión posible, a la vez que también interesa la concisión.

El significante debe contener la mayor información posible sobre el significado, de modo conciso e inequívoco.

Así se usan pequeñas diferencias en la escritura para aportar información sobre el significado. Por ejemplo, **diferencias entre mayúsculas y minúsculas.**

En Geometría se usan las letras mayúsculas: A, B,C,... para representar puntos o vértices de una figura y las letras minúsculas: a, b, c, ...para los segmentos correspondientes a los lados (en el caso del triángulo, además, se escriben con la misma letra el vértice y el lado opuesto a él).

En Algebra las letras mayúsculas se usan para *representar conjuntos y las minúsculas para representar los* elementos de esos conjuntos.

La posición de los símbolos en la escritura es otra característica fundamental que se usa para representar distintos significados.

Ejemplo 1: La fracción algebraica:

$$\frac{-\,3x^2 + 5}{x + 2}$$

es distinta de

$$-\,\frac{3x^2 + 5}{x + 2} = \frac{-3x^2 - 5}{x + 2}$$

La colocación del "-", que varía solo ligeramente, en ambas expresiones produce una simbolización diferente.

Ejemplo 2: Sub-índices o super-índices tienen significados completamente distintos.

a^2 representa el producto $a \cdot a$

a_2 " una diferenciación, es decir, a_2 es diferente de a_1 y, a veces, una relación de orden:

a_2 "sigue" a a_1

Ambigüedad

Pero esta precisión que se busca encuentra dificultades para su concreción, por la ambigüedad que llevan implícita algunos significantes matemáticos.

Por ejemplo.

El símbolo "x". (Igualmente el "y" y el "z")

La "x" representa distintos objetos matemáticos según el contexto en que se halle. (Esto se verá con más detalle en el apartado Variaciones con la posición).

En el cálculo y resolución de Ecuaciones representa el **número incógnita** que hay que calcular.

En los Polinomios representa **la indeterminada** en *la que se encuentra expresado el polinomio. Aquí puede, o* no, ser un número.

En las Funciones representa a **la variable independiente** (en el caso de la "y", y = f(x), sería **la variable dependiente**; en el caso de la "z", depende de la función establecida, sería una de las dos variables).

Además la "x" arrastra una serie de significados procedentes del contexto social en el que el alumno se encuentra.

Por ejemplo, en el juego de las quinielas significa resultado de "empate", en vez de resultado "desconocido".

En las respuestas de un cuestionario, o en un test, indica "respuesta afirmativa", pero no, "respuesta desconocida".

El signo "-".

En Matemáticas puede indicar:

Operación diferencia o substracción: 7 - 3

El opuesto de un número: -5. En este caso sirve para indicar un número negativo.

El opuesto de una letra: $-a$. En este caso el signo "menos" puede indicar una cantidad negativa siempre que "a" sea positiva, o positiva si "a" es negativa.

En Química, situado en la parte superior derecha de un elemento o de un grupo, indica **ionización negativa**:

$$OH^{-} \quad , \quad Cl^{-}$$

En Lengua o en escritura teatral indica **comienzo de párrafo**

Juan.- ¡No quiero acudir cada vez que llame!

Toda esta variedad de significados se encuentra asociada al símbolo, e interviene de una forma u otra en el momento de efectúar la interpretación necesaria para captar el significado en un contexto concreto.

El profesor debe ser consciente de que está introduciendo significados diferentes para los símbolos que maneja y que su atenta vigilancia es necesaria para conseguir que el alumno asimile las nuevas interpretaciones que tiene que utilizar.

I.7.2. VARIACIONES CON LA POSICIÓN.

Hay símbolos cuya significación varía según la posición que ocupen en la escritura, de modo que exigen una escritura delicada y cuidadosa y una interpretación atenta.

Punto

El "punto" es uno de los símbolos que cambia su significado según la posición que ocupa en la escritura.

- *Entre dos números o letras significa* **"producto"**

$7 \cdot 4 \qquad a \cdot d$

- Sobre un número o una letra indica **"múltiplo de"**

$\dot{7} \qquad \dot{a}$

- Entre dos *vectores quiere decir* **"producto escalar"**

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

- Dos puntos (uno sobre otro) indica

$:$ { *(entre dos letras o números)*, **"división"**
(en una secuencia de escritura), **"aviso de aparición"**

- Varios seguidos indica **"siguiendo así"**

.....

/--------------/

Coma

,

- Entre números o letras (en la parte inferior de la escritura (y a veces en la superior) indica **"parte decimal"**

1,7   2'5   a'bc

- Entre números o letras (dentro de llaves) indica **"separación"** entre éstos (**"conjunción"**, como en lenguaje)

{ a,3,f,15 }

- Entre dos números o letras (dentro de paréntesis o corchetes) toma alguna de las siguientes significaciones:

(2,5)
- **"intervalo de números reales (abierto)"**
- **"o número complejo escrito en forma de par"**
- **"o vector en el plano"**

[2,5]   **"intervalo de números reales (cerrado)"**

- En la parte superior derecha de un número quiere decir **"minutos de grado"**

52' = 52 minutos

- En la parte superior derecha de una letra (a veces una coma, otras veces dos o tres) sirve para distinguir unas letras de otras

a   a'   a''

- En la parte superior derecha de una letra que represente a una función indicará **"función derivada"**

y'   f'

/-------------/

Guión

$-$

- Delante de un número indica que **"éste es negativo"**

$$-7$$

- Delante de una letra o paréntesis quiere decir **"el opuesto de ..."**

$-a$ **el opuesto de "a"**

$-(a+b+3)$ **el opuesto de "a+b+3"**

En este caso, y a pesar de su apariencia, puede tratarse de una expresión positiva.

- Entre dos números o letras puede representar diferentes cosas:

$a - b, \; x - 4$ **"operación diferencia o substracción"**

$\frac{7}{3}, \; \frac{p}{q}$ **"operación cociente"** o **fracción** o **"número racional"**

- Sobre un número o una expresión (considerados como números complejos) sirve para indicar **"el conjugado"**.

$$\bar{7} \qquad \bar{z} \qquad \overline{3 - i}$$

- Sobre la x (o la y) sirve, en Estadística y en Geometría Analítica, para indicar **"el valor medio"** o "la *media*"

$$\bar{x}$$

- Sobre el símbolo de un conjunto indica **"el complementario"** de éste.

$\bar{A}$ el conjunto complementario de A

- Sobre dos letras mayúsculas, en Geometría, indica **"segmento"**

$\overline{PQ}$ segmento que empieza en el punto "P" y acaba en el punto "Q".

- En la parte superior derecha de un conjunto quiere decir **"subconjunto de éste formado por los elementos negativos"**

Q^- = (Números racionales negativos)

Z^- = (Números enteros negativos)

/-------------/

Más
+

- Delante de un número indica **signo positivo de dicho número**

+17

- Delante de una letra quiere decir **con el mismo signo de la letra** y por tanto la expresión completa puede ser negativa o positiva según lo que represente la letra.

+m

- Entre dos números, un número y una letra, dos letras o dos expresiones indica **la operación suma o adición**

a + b,   p + 4,   7'5 + 1

- En la parte superior derecha de un conjunto de números indica el **subconjunto formado por los elementos positivos de ese conjunto**

R^+ = (Números reales positivos)

/---------------/

Paréntesis

()

- En operaciones aritméticas indica el **"orden de preferencia de las operaciones"**

$$3 \cdot (4 - 1)$$

Esto es, que debe ejecutarse antes la diferencia y luego el producto.

- En expresiones algebraicas elementales sirve para dejar **"una cantidad indicada"**

$$5x(x-3)$$

$(x-3)$ es la cantidad tres unidades inferior a "x".

- Con un número y un punto sobre él puede indicar **"conjunto de múltiplos de ..."**

$(\dot{3})$ = conjunto de múltiplos de 3

- Con un término general, en su interior, indicará **"una sucesión"**

$$(a_n) \qquad (n+4)$$

- Con dos números o dos letras, en vertical, puede indicar **"número combinatorio"** o **"matriz"**

$$\binom{5}{3} \qquad \binom{a}{b}$$

pero, en horizontal, también **"intervalo abierto"** o **"par"** o **"vector en el plano"**

$$(a,b) \qquad (4,6)$$

- Con el símbolo ∞ indica **"intervalo abierto"**

$$(3,+\infty) \qquad (-\infty,+\infty)$$

- Con tres números o tres letras puede indicar **"terna"** o **"vector en el espacio"** o **"matriz"**

(a,b,c)   (3,1,2)

- Con varios números o letras, en una disposición por filas y columnas indicará **"matriz"**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

/-------------/

Flecha
$\longrightarrow$

- Sobre números o letras indica **"vector"**

$\vec{v}$ $\overrightarrow{(7,3)}$

- Entre "x" e "y" u otras parejas de letras o números puede indicar: **"función"**, **"correspondencia"** o **"aplicación"**

x ---> y

3 ---> 4

0 ---> 5

a ---> b

...   ...

- Entre dos letras mayúsculas que indiquen proposiciones puede significar **"implicación"**

A ---> B   A implica B

- Entre dos letras mayúsculas que indiquen conjuntos puede significar **"el segundo contenido en el primero"** *que es otro modo de implicación.*

A —> B   B contenido en A

/-------------/

Asterisco
*

- Entre dos elementos cualesquiera puede indicar **"operación"**

a * b   2 * 5

- En la parte superior derecha de un conjunto de números indica "el conjunto sin el elemento 'cero'"

N^* Números naturales sin el cero.

/-------------/

Números pequeños

- Sub-índices. Cuando están colocados en la parte inferior derecha de la escritura de una letra indican una distinción de otras letras semejantes. En general indican una ordenación que se corresponde con la de los números naturales

$a_1 \quad a_2 \ldots a_n$

- Super-índices. Colocada una "n" en la parte superior derecha de una letra, un número o una expresión indican **"potencia de grado "n""**

$$7^n \qquad a^n \qquad (3xy)^n$$

- Escritos debajo y encima de un sumatorio "Σ" indican los extremos de éste.

$$\sum_{1}^{7} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_7$$

- Escritos en la parte inferior derecha y superior derecha de la integral "∫" indican los valores de la variable que son origen y extremo de la integral.

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$$ "Integral desde x =-1 hasta x = +1"

- Escritos en la parte inferior derecha (m) y superior derecha (p) de las letras mayúsculas V o C, indican "Número de variaciones o de combinaciones de 'm' elementos de orden 'p'"

$$C_5^3$$ "Número de combinaciones de 5 elementos tomadas de 3 en 3"

- Escritos en la parte inferior derecha de la letra mayúscula P indica el número de elementos en que se toman esas permutaciones.

$$P_h$$ "Número de permutaciones de h elementos"

/--------------/

I.7.3. LA LETRA "X".

- En una ecuación representa **lo desconocido, lo que se debe calcular: la incógnita**

$$7\ x^3 - 5\ x = \tfrac{1}{4}$$

$$P_x = 120$$

- En una expresión simbólica representa a **la variable**

$\tfrac{1}{4}\ x^4 + 5x^2$ expresión algebraica

$\cos x$ coseno de x

- En un polinomio representa a **la indeterminada**

$$7x^7 + \tfrac{1}{4}\ x^4 - 5\ x + 2$$

- *En una expresión funcional representa a* **la variable independiente**

$y = \operatorname{tag} x$ "y" (variable dependiente) es igual a tangente de "x" (variable independiente).

/--------------/

En el caso concreto de esta letra "x" empleada como incógnita (desconocida), es conveniente tratar de averiguar algo sobre ella y su origen, para matizar así, en lo posible, su ambigüedad.

Vamos a intentar bucear en su nacimiento como concepto matemático.

DIOFANTO. (c. siglo III)

Quizá el primer momento en que se haya utilizado la "incógnita" expresada como tal, y del que tengamos constancia histórica, sea en la "Arithmetica" de Diofanto (c. 250 d.d.C).

Diofanto es considerado como el precursor del álgebra, no porque su sincopación haya llegado hasta nosotros y la utilicemos actualmente, que no ha sido asi, sino porque es la primera constancia escrita que tenemos de una sincopación para expresar la incógnita y sus potencias.

De Diofanto se han conservado los seis primeros libros de su Arithmetica y en ellos, según Eves (1980), utiliza abreviaturas para las potencias de la incógnita:

Desconocida al cuadrado, (x^2): Δ^{Y} que son las dos primeras letras de la palabra griega "ΔΥΝΑΜΙΣ" (potencia).

Desconocida al cubo, (x^3): K^{Y} que son las dos primeras letras de la palabra griega "ΚΥΒΟΣ" (cubo).

Y abreviaturas semejantes para las siguientes potencias hasta la sexta, como ya hemos dicho en el primer capítulo.

Pero recordemos que la **"desconocida"** estaba expresada por un símbolo que, observando la confección de los anteriores a base de abreviaturas estenográficas, podría resultar formado por la combinación de las dos letras "α" (alfa) y " " (rho) que son las dos primeras letras de la palabra griega "arithmos" que significa "número". Aunque hay autores que dicen que asemeja más a la letra " " (sigma cuando es final de palabra) que es la última letra de la misma palabra y que equivale a nuestra "s" actual, en español. Se ve, pues, que la incógnita se representa con distintos símbolos dependiendo del exponente a que esté elevada.

Esta obra de Diofanto de Alejandría muestra una gran habilidad matemática y en este punto se puede comparar con los grandes clásicos de la época Alejandrina pero se aparta de los métodos tradicionales griegos que eran métodos geométricos y recuerda más a la matemática babilónica. Sin embargo también difiere de ésta pues en los problemas babilónicos se buscaban soluciones aproximadas de ecuaciones <u>determinadas</u> y, sin embargo, Diofanto se dedica a estudiar soluciones <u>exactas</u> de ecuaciones <u>determinadas</u> e <u>indeterminadas</u>.

De las tres grandes etapas que se reconocen actualmente en la simbolización del álgebra: retórica, sincopada y simbólica formal, la Arithmetica de Diofanto pertenece, sin duda, a la segunda, pero desgraciadamente es un momento históricamente aislado, aunque hay que reconocer con Eves que es "un gran momento en Matemáticas".

BRAHMAGUPTA. (s.VII)

También entre los hindúes se encuentra un álgebra sincopada y entre los signos de producto o raiz cuadrada aparece la expresión de la desconocida en forma abreviada, (Eves, 1980):

desconocida (x) yā que son las dos primeras letras de la palabra "yāvattāvat".

números enteros conocidos llevaban el prefijo "rū", letras iniciales de la palabra "rūpa" que quiere decir "el número absoluto"

otras desconocidas eran indicadas por la sílaba inicial de diferentes colores. Por ejemplo, una segunda desconocida podía ser expresada como

kā de "kālaka" que se traduce por "negra"

Se podían encontrar,asimismo, expresiones como las siguientes:

yā kā 8 bha que sería: 8xy (pues bha, tras los factores, indicaba "producto", de la palabra equivalente india "bhavita")

ka 10 que sería: $\sqrt{10}$ (pues "ka" de la palabra "karana", que quiere decir "irracional", se utilizaba para indicar la raiz cuadrada).

En este autor, no se puede saber si las potencias de la incógnita seguían una nomenclatura básicamente igual, para la incógnita, o no. Pero sigamos observando.

CHUQUET. (s. XV)

En su *obra manuscrita* Triparty en la science des nombres aparecida en 1484, Nicolás Chuquet utiliza un simbolismo bastante avanzado. La obra está escrita en un estilo esencialmente retórico, pero con importantes sincopaciones (Boyer, 1986, p. 355).

En la tercera parte de esta obra trata de la Regle des premiers. Llama "premier" a la incógnita, lo cual es original en su tiempo, pues lo común durante los siglos XV y XVI era llamarle "la cosa", derivada de res del latín, pero en sus traduciones, como chose en francés, cosa en italiano y coss en alemán.

Los nombres empleados por Chuquet eran

premier	la incógnita
champs	la segunda potencia
cubiez	la tercera "
champs de champ	la cuarta "

Empleaba los exponentes para expresar simbólicamente las distintas potencias de "x", e incluso, escribia con exponentes negativos, como se ve en los ejemplos que insertamos a continuación (Flegg-Hay.-Moss, 1984, pp. 155,156)

96^3	dividido	por	6^0	se	obtiene	16^{3-0}	16^3
72^0	"	"	8^3	"	"	9^{0-3}	9^{3m}
84^{2m}	"	"	7^3	"	"	12^{-2-3}	12^{5m}

Estas escrituras corresponden a las escrituras actuales

$$\frac{96x^3}{6} = 16x^3 \qquad \frac{72}{8x^3} = 9x^{-3} \qquad \frac{84}{x^2} : 7x^3 = 12^{-5}$$

Se vuelve a encontrar una expresión diferente para una potencia diferente de la incógnita, a pesar de que se trata de un simbolismo muy avanzado en otros aspectos.

PACIOLI. (s. XV)

En la "Summa" (1494) de Luca Pacioli encontramos la siguiente sincopación:

co Sílaba inicial de "cosa" para la x

ce Letras iniciales de "censo" para x^2

cu Sílaba inicial de "cuba" para x^3

ce ce Que viene de "censo de censo" para x^4

y formaciones de éstas abreviaturas para las siguientes potencias.

DESCARTES (s.XVII)

Es Descartes el que alcanza una notación matemática para la incógnita (y las variables) usando las últimas letras del alfabeto, como en la actualidad; reservando las primeras letras para los parámetros, y adoptando también la notación exponencial.

Todo lo cual habla de la cierta ambigüedad con que nace el uso de la incógnita y de sus potencias.

-.-.-.-.-.-.-.-.-

II. TABLA DE SíMBOLOS MATEMATICOS

Que se ofrecen con el fin de evidenciar la diversidad que presentan y el esfuerzo necesario, por parte de los profesores, para su correcta introducción; así como la variada dificultad que presentan para su dominio, por parte de los alumnos.

NúMEROS

0, 1, ... , 9	Una cifra
Dos cifras o más	
2^3 , 7^0, ...	Operación de potencia
45	Numeración
7_{30°	Nº complejo en forma polar

SíMBOLOS VARIADOS

$+$, $-$, $\pm$, $\times$, $:$, $\cdot$, $\perp$, $\sqrt{}$, $!$, $\int$, $*$	Operaciones
$\neq$, $\equiv$, $<$, $>$, $=$, $\approx$, $\sim$, $\leq$, $\geq$	Relaciones
$\frown$	Periódo
$\vert\ \vert$	{ Valor absoluto { Determinante
%	Tanto por ciento
‰	Tanto por mil
$\perp$	"Perpendicular a"
$\vert$	{ "Divisor de" { "Tal que"

//	"Paralelo a"
( )	Paréntesis
[ ]	Corchete
{ }	Llave
$\forall$	Cuantificador: "Para todo"
∞	Infinito
$\subset$	"Contenido en"
$\not\subset$	"No contenido en"
$\in$	"Pertenece a"
$\notin$	"No pertenece a"
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\longrightarrow$	{ "Tiende a" / "Cuya imagen es"
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\Longleftrightarrow$	{ "Si y sólo si" / "Equivalente a"
$\circ$	Composición
$\hat{}$	Angulo
$\Vert\ \Vert$	Norma

LETRAS

Mayúsculas

A, B, ...	{ Conjuntos / Sucesos (Probabilidad) / Puntos (Geometría)
M.C.D.	Máximo común divisor
M.C.M.	Mínimo común múltiplo

M	Mediana (Estadística) Máximo
A, S V	Magnitudes { Superficie Volumen
N, Q, R, Z, C	Conjuntos de números
P	Perímetro (también minúscula)
S	Suma (Progresiones)
L	Límite Logaritmo

<u>Minúsculas</u>

a	Apotema
a, b, ... , x, ...	Número cualquiera
d	Diámetro Diferencia (Progresiones)
e	Número irracional
i	Interés (Aritmética Comercial) Unidad imaginaria: $\sqrt{-1}$
m	Mínimo
m.c.d.	Máximo común divisor
m.c.m.	Mínimo común múltiplo
n	Número natural
p	Perímetro (también semiperímetro) Probabilidad
r	Radio Regresión } (Estadística) Coef. correlación Razón (Progresiones
x, y, z	Incógnitas, indeterminadas, variables

Mayúsculas griegas

Σ	Suma
Δ	{ Discriminante: $b^2 - 4ac$ Incremento: Δx
Γ	Función
β	Ley binomial

Minúsculas griegas

$\alpha, \beta, \tau, \delta, \ldots$	Angulos (Trigonometría)
ϵ, δ	Pequeñas cantidades positivas
σ, δ	Desviación típica (Estadística)
$\pi = 3'14\ldots,\ \xi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	Números irracionales
μ	{ Media Momento central } (Estadística)
ρ	Módulo (Números complejos)
γ, ν, η	Parámetros, coeficientes
ξ	Variable Aleatoria

REUNIÓN DE LETRAS

a^m	Potencia de "a", de grado "m"
$a_n, b_n, \ldots$	{ Coeficientes polinómicos Sucesiones
C_m , $C_{m,n}$	Combinaciones
dx	Diferencial de "x"
f_r	Frecuencia relativa

m_α	*Complejo en forma polar*
P_m	Permutaciones
V_m , $V_{m,n}$	Variaciones
x^m	Polinomios

REUNIÓN DE LETRAS CON NÚMEROS

a^3	Potencia: a.a.a
a^{-1}	Potencia: 1/a
a_1, a_2, ...	Términos de sucesiones
A^{-1}	Matriz inversa de "A"
m^3	{ Potencia: m.m.m Metros cúbicos
6°	Grados
$-5x$	Producto
$C_{7,3}$	Combinaciones de 7 elementos, tomados de tres en tres
F^{-1}	Función inversa de "F"
χ^2	Parámetro "gi cuadrado" (Estadist.)
R^2 , R^3	Espacio vectorial de dimensión 2,3
x_1 , x_2 , ...	Soluciones de una ecuación (raices)

REUNIÓN DE LETRAS Y SÍMBOLOS

$f(x)$	Función de "x"
$p(x)$	Polinomio en "x"
$p(A)$	Probabilidad del suceso "A"
(a,b)	{ Intervalo "ab" Nº complejo en forma de par

$a \mid b$	"a" es divisor de "b"
$\binom{a}{b}$	Número combinatorio
$d(A,B)$	Distancia del punto "A" al punto "B"
$\dot{a}$	Múltiplo de "a"
$(\dot{a})$	Conjunto de los múltiplos de "a"
$a \cdot b$	"a" multiplicado por "b"
$a:b$	"a" dividido por "b"
$\frac{a}{b}$	{ "a" dividido por "b" Proporción
$\sqrt[n]{a}$	Raíz enésima de "a"
$\int_a^b$	Integral definida entre "a" y "b"
$\xrightarrow{f}$	Función "f"
$D(f)$	Dominio de la función "f"
y'	Derivada de la función "y"
N^* , Z^* , ...	Conjuntos de números sin el cero
M^*	Matriz ampliada de "M"
$\vec{a}$	Vector "a"
$a \pm bi$	Nº complejo en forma binómica
$m(\cos\alpha \pm i \cos\alpha)$	Nº complejo en forma trigonométrica

ABREVIATURAS

arcsen a	Arcoseno de "a"
arcos a	Arcocoseno de "a"
arctg a	Arcotangente de "a"

cos a	Coseno de "a"
cotg a	Cotangente de "a"
det (A)	Determinante de la matriz "A"
Div (a)	Conjunto de los divisores de "a"
Dom	Dominio
exp (x)	Exponencial de "x": e^x
lim	Límite
log	Logaritmo decimal
ln } Ln	Logaritmo neperiano
máx	Máximo
min	Mínimo
Mo	Moda (Estadística)
Pot (P)	Potencia del punto "P" respecto de una circunferencia
Rec	Recorrido
sen a	Seno de "a"
sec a	Secante de "a"
tg a	Tangente de "a"

CAPÍTULO 4º

I. CUESTIONARIO SOBRE EL USO Y LA INTERPRETACIÓN DE LAS LETRAS

De todo lo precedente, como ya se prevé, mi interés se ha ido canalizando hacia la exploración de la comprensión, por parte de los alumnos, de las letras, de su interpretación, uso y posibilidades de expresión; de ahí nació la posibilidad de un cuestionario especifico que pudiera mostrar las concepciones y comportamientos así como algunas de las dificultades más específicas de su uso.

A lo largo de estos años de experiencia docente he observado por parte de los alumnos comportamientos con el uso de las letras que he deseado estudiar de una forma cuantificada estadisticamente, para medir mejor su importancia. Asimismo he recogido estudios hechos en España y en el extranjero sobre estos comportamientos y su incidencia en el aprendizaje (Artigue, 1986,1989a,b, Balacheff, 1987, Booth, 1987, Brousseau, 1983, 1987, 1989, Chevallard,1986, 1989, 1990, Freudenthal, 1983, Grupo Cero de Valencia, 1984, Kieran, 1981, 1988, etc.) De todo ello ha surgido el presente cuestionario que voy a explicar a continuación.

Este cuestionario pretende facilitar datos para el análisis de los **comportamientos espontáneos** de los alumnos con las letras, empleadas de modo algebraico, y su comparación con los **comportamientos adquiridos** después de una enseñanza tradicional de álgebra durante dos-tres años.

Es el periódo de tiempo que media desde el principio del curso 7º de Enseñanza General Básica al final del 1er curso de Bachillerato Unificado Polivalente o del 1er curso de R.E.M.(Reforma de Enseñanzas Medias).

I.1 ANALISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO SOBRE EL USO Y LA INTERPRETACIÓN DE LAS LETRAS.

Este análisis a priori se realiza para clarificar las metas que se persiguen al realizar el cuestionario y las expectativas que se tienen ante los resultados.

El análisis "a priori" tiene un doble objetivo:

Primero: Describir el cuestionario. En esta parte descriptiva se presenta el cuestionario, se explican las preguntas, cuestiones o problemas planteados y las razones, a nivel local, que han llevado a su planteamiento. Se especifican las características que poseen las preguntas, cuál es su relación con el conocimiento que estamos analizando. Como resultado de estas razones se hace una previsión de las respuestas de los alumnos, es decir, se trata de hacer una relación de las respuestas esperadas en función de las caracteristicas de las preguntas.

Se incluyen, para cada ejercicio del cuestionario, dos aspectos diferentes:

A. Las características de las preguntas con expresión del objetivo que se pretende con ellas.

B. Los comportamientos esperados de los alumnos y lo que creemos que esos comportamientos indican sobre las concepciones de los alumnos.

El objetivo de esta descripción es dejar claro lo que realmente se está poniendo en juego con estas preguntas. Cúales son las concepciones, o los conocimientos, que esperamos que el alumno va a tener que movilizar para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Segundo: Esta explicitación y esta previsión de *comportamientos va a iniciar la validación del proceso.* Esta validación se va a obtener confrontando este análisis "a priori" con el análisis "a posteriori" que a su vez vendrá sustentado por el análisis de los resultados del cuestionario, por el estudio de las preguntas que hayan podido hacer los alumnos durante su realización y por el estudio de las entrevistas individuales hechas a propósito del cuestionario y, en general, por todos los datos que durante su realización, o posteriormente, se hayan recogido.

El cuestionario completo figura como Anexo III.

Análisis de los ejercicios 1,2 y 3.

Diferencias del ejercicio 1 con los ejercicios 2 y 3:

Ejercicio Nº1

1.- Rellena los puntos suspensivos:

z -----> z + 5	z -----> 4z
4 ----->	5 -----> ......
p ----->	q -----> ......

Con el ejercicio nº1 se quiere investigar CUÁL ES EL COMPORTAMIENTO ESPONTÁNEO que los alumnos tienen con una expresión en la que aparece una letra escrita junto con un número. Se plantea en las dos posibilidades iniciales de suma (z+5) y producto (4z).

Por esta razón, la "tarea a realizar" no está explicada. A través de un ejemplo se busca que el alumno descubra lo que se le pide.

El alumno tiene que interpretar la expresión z+5 para la suma (y, después, 4z para el producto), para identificar la tarea que debe realizar. Se le da un ejemplo en el que se muestra que a "z" le corresponde la expresión "z+5" y, según como la interprete, se espera que va a producir distintas respuestas.

a) Si el alumno interpreta que se trata de "sumar 5 unidades a lo que tenemos" (que es "z" en el ejemplo), entonces se espera para el caso:

4 -----> ......

que responda: "9" (resultado de sumar 4+5).

Y como segunda respuesta para el caso:

p -----> ......

que escriba: "p+5" (sumar 5 unidades a "p").

En el caso del producto, si interpreta que 4z es "multiplicar "z" por 4" (o 4 veces "z"), las respuestas serían:

"20" (multiplicar 4 por 5), para el caso: 5 -----> ......
"4q" ("q" multiplicada por 4), para el caso: q ----> ......

b) Si interpreta que se trata de "escribir UNA letra "con" (este "con" será "sumando" o "multiplicando" *según el caso) UN número", la primera respuesta podría ser:*

4 + z, 4 + q, etc ...

pues ya que tiene el número "4" pensará que debe añadir una letra cualquiera.

En la segunda respuesta podrían aparecer variadamente:

p+5, p+4, etc...

pues, en ella, tiene la letra "p" y creerá que debe añadir un número cualquiera.

En el caso del producto, con esta interpretación, correspondería "escribir UN número con UNA letra al lado" y podrían darse las respuestas:

Primera: 5z, 5p, ...
Segunda: 3q, 7q, ... (incluso 4q),

pues entre éstas últimas se podría encontrar la respuesta

"4q" (correcta, pero) surgida de esta interpretación. Las entrevistas individuales servirán para diferenciar cuál de las interpretaciones ha sido usada.

c) También puede darse una AUSENCIA DE INTERPRETACIÓN. La escritura puede sorprender al alumno y éste no sabe cómo interpretarla, ni puede por tanto identificar la "tarea".

La actuación del alumno en este caso suponemos que será dejar la cuestión en blanco, o responder al azar.

La respuesta al azar sólo se puede comprobar con las entrevistas "a posteriori", pero hay que realizarlas con cuidado pues incluso a veces el propio alumno no es consciente de los motivos que le han llevado a una determinada respuesta y puede dar la impresión de que ha respondido al azar.

En algunos casos, las respuestas incompletas (algunos apartados se responden y otros, no) resultan ser indicios de respuestas al azar, en las que la falta de seguridad en un tipo de razonamiento concreto ha impedido continuar con respuestas aleatorias.

d) Se esperan también en algunos alumnos respuestas de tipo SECUENCIAL. Esto es, que al tener que responder a varios apartados, creemos que pueden darse respuestas como:

$$z + 5$$

$$4 + 6$$

$$p + 7$$

en las que, a falta de un indicio más claro, el alumno realiza su tarea de una forma correlativa. Es un tipo de respuesta al azar.

La posibilidad de esta respuesta nos la han sugerido los estudios de Hart, 1984.

<u>Ejercicios Nºs 2 Y 3</u>:

2.- "2 sumado con x" se puede escribir como: x + 2. Suma 2 en cada uno de los casos siguientes:

a) 15 ——> .... ; b) x + 6 ——> ..... ; c) 3x ——> ....

3.- "x multiplicado por 3" se puede escribir como 3x" Multiplica por 3 en cada uno de estos casos

a) 7 ——> .... ; b) x + 4 ——> ..... ; c) 5x ——> ....

En estos ejercicios queremos medir la CAPACIDAD *DE EXPRESIÓN de estas operaciones por parte de los alumnos.*

Para los alumnos de 7º de EGB será una capacidad ESPONTANEA y, para los alumnos de 1º BUP, deberá ser una capacidad ADQUIRIDA a lo largo de la enseñanza del álgebra.

En estos ejercicios la "tarea" está explicitada. En el ejercicio nº 2 se trata de "sumar 2" y en el nº 3 hay que "multiplicar por 3" y el alumno debe expresar su respuesta en tres apartados en cada ejercicio.

Posibles respuestas a las cuestiones 2.a y 3.a

Las cuestiones 2.a y 3.a tienen por objeto el cálculo numérico exclusivamente, e indicarán también si el alumno ha comprendido la tarea o no. Las respuestas que se esperan son:

a) "17 (para 15+2) y **21"** (para 7x3)

que indicarán una correcta interpretación de la tarea y que se supone que serán dadas por una mayoría de los alumnos, ya que la instrucción está dada en lenguaje materno, y las operaciones a realizar son exclusivamente con números.

b) "15+2 y **7·3".**

éstas respuestas dejan la operación indicada. Las señalamos como **respuestas ambigüas.** Con ello indicamos que esta respuesta puede provenir de un alumno que interprete "15+2" como una suma (aunque la deje indicada), o de un alumno que no se atreve a realizar la operación porque no sabe cómo interpretar lo que quiere decir el ejemplo "x+2" que le han dado, y en el que la operación le parece que "tampoco está realizada". Y entonces deja una expresión escrita, que es semejante a la dada, por no tener una idea nítida de lo que representan las expresiones: "x+2 y 3x".

Posibles respuestas a las cuestiones 2.b y 3.b

En estas respuestas creemos que influirán las distintas interpretaciones que los alumnos se hagan de las expresiones x+6 y x+4.

i) **Un tipo de respuestas numéricas exclusivamente: "8 y 12."**

Corresponden a lo que llamaremos "D" (o DEP): "letra desaparecida".

Aquí, el alumno, ante la falta de información que para él aporta la letra "x", la hará desaparecer en la respuesta. La "x" no le representa nada a nivel numérico y tampoco sabe cómo sumarle el "2", de modo que suma las dos unidades al número que tiene y, para él, la respuesta a la operación de suma es simplemente "8".

En el ejercicio 3.b esta misma actuación corresponderá a la respuesta: **"12"** , como resultado de multiplicar por el número 3 la expresión x+4 en la que "x" desaparecerá.

ii) **Otro tipo de respuestas numéricas.**

Corresponden al comportamiento que llamaremos "V" (o VAP): "letra valorada".

Son respuestas en las que se asigna a las letras un valor, determinado por el alumno, de forma personal, siguiendo criterios o indicios ajenos a la propuesta del ejercicio.

Por ejemplo en el apartado 3.b:

x + 4 ----> ..... contesta "7"

substituyendo la "x" por el valor "3" del enunciado.

iii) **Respuesta en la que no se tiene en cuenta la "x" (pero se escribe).**

Son respuestas como: 8x y 12x

Es el comportamiento que llamaremos "N" (o NP): "letra no tenida en cuenta".

Se producirán estas respuestas cuando las operaciones indicadas se realicen solamente con los números y se añada la letra "x" a la escritura porque "antes también estaba", pero sin haberla tenido en cuenta en el momento de hacer el cálculo. Será así una LETRA DE ACOMPAÑAMIENTO.

Este añadido de la letra se podrá hacer de distintas formas. Primero: Añadiéndola como estaba. Si estaba sumando se la puede añadir sumando.

De "x+6" más "2" se obtendrá: x+8

y de "x+4" por "3" se obtendrá: x+12

Segundo: Poniéndola "al lado". Con ésto quedará como si estuviera multiplicando:

De "x+6" obtendrá: 8x

y de "x+4" por "3": 12x

Como acabamos de ver, esta forma de operar con la letra "x" puede generar respuestas correctas en unos casos e incorrectas en otros. Correctas como la primera: "x+8", que enmascaran lo erróneo de la concepción, que está detrás del procedimiento seguido, o incorrectas como "x+12".

éste será también el caso en que se emplee para multiplicar, por ejemplo, "5x" por "3", en el apartado 3.c.

En este ejercicio, esta forma de realizarlo daria como resultado 15x, que coincidiria con el resultado correcto que se obtiene al interpretar "5x" como un producto de dos factores.

Para distinguir esta concepción errónea de la correcta, en la respuesta "x+8", podemos usar uno de estos dos métodos:

1. *La comparación de esta respuesta del alumno* con la que haya dado al item 3.b: "multiplica por 3 (la expresión) x+4". Si en este caso ha respondido "x+12" es que el alumno ha usado la "x" como LETRA DE ACOMPAÑAMIENTO ó letra "no tenida en cuenta, pero escrita"

Si éste no es el caso, emplearemos el procedimiento

2. La entrevista individual con el alumno en la que éste explique el procedimiento que ha seguido para obtener la respuesta.

iv) **Respuesta ambigüa: "x+6+2 y x+4x3"**

No diremos que sea incorrecta, pero es una respuesta ambigüa. También podríamos llamarla "tímida". Se dará en los alumnos que, al saber que hay que sumar 2, también saben que hay que poner +2, pero luego no se atreven a continuar.

En realidad, a partir de esta expresión indicada, caben muchos comportamientos diferentes. No sabemos si ese 2 lo podria sumar usando una especie de propiedad distributiva, en la que realizaría la suma del 2 a la "x" (expresándolo en diferentes formas, como 2x o x^2) y también al "2", o lo podría sumar solamente al 2 terminando en una respuesta del tipo "x+8" u "8x".

Respuestas a las cuestiones 2.c y 3.c

Ante la cuestión 2.c, en la que se trata de "sumar 2 a 3x" esperamos respuestas en la forma:

i) "3x + 2"

que puede provenir de una interpretación de "3x" como un número producto de otros dos o, también, de una interpretación ambigüa de "3x".

ii) "5"

También se puede encontrar, como se ha visto más arriba, la **respuesta exclusivamente numérica**: **5** es decir, con la letra "x" desaparecida.

iii) "5x"

Esta respuesta corresponderia a la letra "no tenida en cuenta, aunque escrita"

En el apartado 3.c en el que se pide "multiplicar por 3 la expresión 5x" esperamos algunas respuestas del tipo:

i) "15"

que es la respuesta que corresponde a "letra desaparecida" (o eliminada).

ii) "15x"

respuesta que englobaría a **la "x" no tenida en cuenta** (o de acompañamiento) y a la interpretación de "5x" como producto al que se aplica la propiedad asociativa para multiplicarlo por "3".

<u>Ejercicio Nº 4</u>

4.- Dadas las expresiones:

p + 1 , p + 7 , p − 2 , p − 5 , 2p

¿Puedes contestar?:

La menor de ellas es ......

La mayor de ellas es ......

O, no puedes contestar porque ....

...

Este ejercicio está pensado para analizar cómo razona el alumno ante una cuestión de ordenación con expresiones que incluyen una letra de valor desconocido.

Se quiere ver si emplean una estrategia de sustitución, considerando a la "p" susceptible de tomar un valor cualquiera dentro de un CONJUNTO DE VALORES POSIBLES.

Puede ser que el alumno responda:

i) "La menor de ellas es p−5

La mayor de ellas es p+7 (ó 2p)"

(Las respuestas de "la mayor es p+7" ó "la mayor es 2p" se considerarán *equivalentes*) ésto indicaría un incompleto análisis de las expresiones, basado, ó bien en la sustitución de "p" por ALGÚN valor numérico (en general un único valor entero positivo) ó por la comparación ingenua de una parte de la expresión (la parte numérica): +1, +7, -2,... y "el doble de". (La distinción entre los dos métodos se hará con las entrevistas individuales).

También puede responder:

ii) "ésta pregunta no se puede contestar porque":

i_1: "No se conoce el valor de "p"".

Si el alumno da esta respuesta, resulta AMBIGÜA, pues puede provenir de un RECHAZO de todo análisis ante el desconocimiento de la parte literal ("p") de la expresión o de un análisis de las expresiones algo más completo que el que hemos nombrado más arriba, incluyendo la sustitución de "p" por varios números. Esto habría dado a "p+7" como mayor para algunos valores de "p" y para otros mayor a "2p".

ésto se intentará aclarar, como siempre, a través de las entrevistas.

O porque:

i_2: "Para valores de "p" menores que 7 la expresión mayor es "p+7" y para valores de "p" mayores que 7 la mayor es "2p"".

Esta respuesta sería correcta en el conjunto **N**, en el conjunto **Z** y en el conjunto **R**. Las entrevistas individuales permitirán saber en qué conjunto han trabajado los alumnos, si nos interesa estudiarlo.

Ejercicio Nº 5

5.- Rellena los puntos suspensivos:

a) Si $p + q = 37$, entonces $p + q + 2 =$ ....

b) Si $x - 134 = 672$, entonces $x - 135 =$ ....

c) Si $b + d = 6$, entonces $b + d + f =$ ....

Los apartados 5.a y 5.b. Son semejantes en el sentido de que, en ambos, se puede hacer un cálculo "con los números" solamente, aunque su grado de dificultad creemos que difiere mucho.

El primero se presenta más sencillo, pues 37 representa a TODA la expresión "p+q", que puede ser vista por el alumno como UN TODO INVARIANTE y, entonces, lo que se debe hacer es sumar 2 a "p+q", es decir sumar "37+2" ó sea 39.

En el ejercicio 5.b, por el contrario, la expresión dada, "x-134", que aporta el punto de apoyo numérico: 672, para el cálculo, varía convirtiéndose en x-135", y la operación que se debe hacer con "672", para lograr el resultado, no es obvia. Debe analizarse cuál es la repercusión del aumento de "134" a "135" sobre la diferencia "x-134" y ésto supone un trabajo mental de tipo "secundario", pues hay que calcular la variación sobre una operación, no sobre un número.

Se espera que los alumnos obtendrán mejores resultados en la 5.a que en la 5.b.

El apartado 5.c.

Aunque ofrece un esquema gráfico semejante al de 5.a, en este caso, lo que se debe sumar es "f", algo desconocido: ¡una letra!.

i) Puede que surjan respuestas que revelen la letra con valor adjudicado, o "letra valorada", como:

i_1) "b+d+f = 9" valorando b=d=3 ==> f=3,

en que se ha repartido el valor de "6" entre "b" y "d", y luego se le ha asignado el mismo valor a "f".

i_2) "b+d+f = 12"

valorando las letras según el número de orden que ocupan en el alfabeto. esto es, "b" (la segunda) b=2; "d" (la cuarta) d=4, y "f" (la sexta) f=6.

i_3) "b+d+f = 7" valorando simplemente f = 1.

ii) También puede darse la respuesta "6f" que corresponde a la "letra no tenida en cuenta pero escrita" o "letra de acompañamiento"

<u>Ejercicio Nº 6</u>

6.- ¿Qué puedes decir de "p" si p = 3q + 7 y q < 4?

En este ejercicio se trata de manejar las letras "p" y "q" como VARIABLES. Queremos ver si el alumno interpreta "p" como una variable dependiente de los valores de "q", siendo "q" un CONJUNTO DE VALORES: "q < 4".

Se piensa que pueden darse las siguientes respuestas:

i) "La "p" puede ser 10, 13 o 16"

Esta respuesta corresponderá a elegir para q<4 los valores del conjunto {1,2,3}. Respuesta que sería correcta en N*.

ii) "La "p" puede ser 7,10,13 o 16"

Esta respuesta sería correcta en N pues corresponderá a haber elegido el conjunto {0,1,2,3} para interpretar la relación q<4.

iii) "p ≤ 16" [o "p<16" que la consideraremos equivalente]

Esta respuesta se considera diferente de la anterior, pues en ella hay una **simbolización** de la condición que cumple "p".

En esta respuesta se aprecia que han sido considerados los números naturales, o, como mucho, los números enteros (negativos y positivos menores que "4") pues se ha obtenido como valor superior de "p" el 16 que corresponde a $p = 3 \cdot 3 + 7 = 16$.

iv) "p < 19"

ésta sería la respuesta en la que se habría interpretado la "p" como **variable** dependiente de "q" y se habría considerado a "q" como un CONJUNTO DE NÚMEROS REALES.

Ejercicio Nº 7

7.- Si "p" representa el número de pepinos comprados y "t" el número de tomates comprados, y sabemos que cada pepino cuesta 15 pts. y cada tomate 10 pts.

¿Qué representa 15p + 10t ? ....

Cuál es el número total de vegetales comprados? .....

En la primera pregunta de este ejercicio los alumnos deben interpretar la expresión

$$15p + 10t$$

en la que "p" y "t" son "el número de pepinos" y "el número de tomates comprados".

Las respuestas esperadas son las siguientes:

Respuesta i) Si los alumnos interpretan correctamente "p" y "t" como números dirán que esta expresión es:

el precio total de lo comprado

pues comprenderán que se trata de la suma de los productos de cada número de vegetales por su precio.

Respuesta ii) **15 pepinos y 10 tomates**

Esta respuesta corresponde a aquellos alumnos que interpretan "p" y "t" como las iniciales de las palabras "pepino" y "tomate". Es lo que llamaremos la interpretación de "la letra como OBJETO", que será representada por "O" (u OP). Se trata de lo que consideramos como una respuesta primaria.

Es una respuesta que podríamos llamar "de indicio", siguiendo la terminología de Piaget. Lo que se reconoce como "indicio" es algo que forma parte del objeto representado: la inicial tomada como representante de la palabra.

El segundo apartado tiene, a su vez, dos posibles respuestas, correspondientes a las dos interpretaciones que han dado lugar a las dos respuestas anteriores:

Respuesta i) "p + t"

que es la suma de los números de los dos vegetales.

Respuesta ii) "15 + 10" o "25"

que es la respuesta correspondiente a la interpretación de las letras como iniciales, pues entonces "15p" son "quince pepinos" o sea "quince vegetales".

<u>Ejercicio Nº 8</u>

¿Qué puedes decir de "m" si t = 4m + 3 y t = 23?

En el ejercicio se trata de ver si el alumno usa *de la igualdad como una verdadera información.*

En este caso la relación le dirá algo de las letras "t" y "m" y esperamos que substituyendo "t" por 23, aunque sea mentalmente obtenga la igualdad

$$23 = 4m + 3$$

que le permitirá calcular el valor m=5 usando "la letra como INCÓGNITA". Esta es la *respuesta* esperada.

Se ha preparado una expresión sobre la que "se pueda leer", directamente, el resultado, después de haber substituido "t" por 23, pues no se trata de que el alumno demuestre su capacidad de calcular sino su capacidad de relacionar las dos igualdades, usando luego la letra "m" como incógnita.

Ejercicio Nº 9

9.- Sabiendo que a + 4a se puede escribir de forma más simple como 5a. Escribe de forma más simple, cuando se pueda:

3b + 5b = ...

3b + 5c = ...

3b + 5c + b = ...

5 + c + 5 - c = ...

5b + (2a - 5b) = ...

En esta pregunta se incluyen cinco apartados de manipulación de expresiones algebraicas. Se trata de observar algunos comportamientos específicos como

Respuesta i) La CONSERVACIÓN DE LA INFORMACIÓN. Este comportamiento ha sido observado por Pascal, 1980 y consiste en que el alumno se resiste a perder cualquier tipo de información. Por ejemplo, ante "3b+5b" responde "8b²", pues quiere conservar las "dos b-es", o, en el apartado "3b+5c+b", realiza como respuesta "8b²c", o, en el caso "5b+(2a-5b)", escribe "2a+b", pues se resiste a dejar de escribir algún término.

Respuesta ii) También esperamos que se puedan dar respuestas de "letra valorada" para intentar obtener resultados numéricos en los distintos apartados.

Respuesta iii) Igualmente esperamos algunas respuestas del tipo "letra no tenida en cuenta" (letra de acompañamiento):

$$3b + 5c = 8bc \quad ; \quad 3b + 5c + b = 9bc$$

$$5b + (2a - 5b) = 2ab$$

<u>Ejercicio Nº 10</u>

10.- Si sabes que

$$m = n + p$$

y que

$$m + n + p = 60$$

¿Qué puedes decir de "m"? ....

Se trata de un ejercicio donde esperamos comportamientos:

Respuesta i) Con resultado m=30, substituyendo "n+p" por "m" en la segunda igualdad y deduciéndolo.

Respuesta ii) Con VALORACIóN de letras como por ejemplo: m=n=p=20 o, m=30 y n=p=15 o algún otro valor elegido, siguiendo criterios personales y no justificables aparentemente.

<u>Ejercicio Nº 11</u>

11.- ¿Qué puedes decir de "n" si sabes que n + p = 20 y que "n" es menor que "p"? ....

Se trata de un ejercicio que, en cuanto a las posibilidades de VALORACIóN de las letras, es semejante al anterior. Admite respuestas:

Respuesta i) "n < 10" o alguna respuesta en la que se consideran las letras como CONJUNTOS DE NÚMEROS posibles. Para este tipo de respuestas, el alumno ha hecho uso de la letra como VARIABLE, pues ha calculado "n" en función de "p", a través de la relación '"n" es menor que "p"'.

Respuesta ii) Respuestas en la que se da a "n" un valor único, es decir respuestas del tipo n=k. Puede ser "n=10" si se reparte el valor 20, o "n=14" si se hace una VALORACIóN de la letra siguiendo el orden alfabético o algún otro valor.

<u>Ejercicio Nº 12</u>

12.- Elige un número, halla su doble, súmale 10, divide por 2 y réstale 5. a)¿Qué observas? (Puedes probar con otros números)

..

b)¿Puedes explicar ésto?

..

c)Intenta expresarlo simbólicamente

..

a) Se trata de una primera parte de cálculo de una secuencia numérica de operaciones. Está dada en "lenguaje materno" (que caracterizaremos como lenguaje "LEN"). Se espera una respuesta mayoritaria.

b) Es una pregunta de reflexión sobre el resultado sorpresa: sale el mismo número que se ha tomado como número inicial. Con esta reflexión se prepara al alumno para el siguiente apartado.

c) Aquí se les pide que expresen mediante una fórmula el proceso seguido. En esta fórmula la letra va a representar a un número cualquiera del CONJUNTO DE NÚMEROS posibles.

<u>Ejercicio Nº 13</u>

13.-Si al cuadrado de un número le quitamos 3 unidades obtenemos 78. ¿Cuál era ese número?

Es un ejercicio de cálculo con el enunciado en lenguaje materno. Este tipo de enunciados los caracterizaremos como "LEN". El resultado que se busca es un resultado numérico. Esto será caracterizado como "NUM". Es un ejercicio que se puede hacer mentalmente.

<u>Ejercicio Nº 14</u>

14.- El doble de un número más su mitad es igual a 20. ¿Sabes cuál es ese número?

....

Explica cómo lo calculas ....

Se trata también de un ejercicio de cálculo en lenguaje materno "LEN" y con resultado pedido numérico "NUM", pero este ejercicio es más dificil que el anterior para realizarlo mediante una deducción lógica.

i) Una solución esperada, es el planteamiento y resolución de la ecuación que dará el resultado: "8". La letra habrá sido empleada como incógnita.

ii) También esperamos algún tipo de razonamiento aritmético deductivo. Por ejemplo, basado en las fracciones, tenemos el siguiente: Se dice en el problema que se suma "el doble de" más "la mitad de". Si se toma como unidad "la mitad de", esta unidad debe aparecer 5 veces en el total (4 veces por "el doble del número" y una vez por "la mitad del número"). Este total es 20. La unidad debe ser la quinta parte de 20, es decir, 4. Esta unidad es "la mitad del número", luego el número es 8.

__Ejercicio Nº 15__

15.- Si sabemos que un dólar equivale a 100 pts y llamamos "d" al número de dólares y "p" al número de pesetas. Escribe una ecuación que relacione "d" con "p".

....

Si cambio 2.000 pts. ¿Cuántos dólares me darán? .....

Este ejercicio está planteado, al igual que el nº 7 y el nº 22, para dar la oportunidad de usar de las letras "como objetos". Las respuestas esperadas son:

i) $p = 100d$

Esta es la igualdad que indica que el número de dólares "d" se tiene que multiplicar por el número 100 para obtener el número de pesetas "p" equivalente.

ii) 1d = 100p

Esta respuesta corresponde a una lectura de la expresión: "Un dólar es igual a cien pesetas", donde "d" y "p" son tomadas como iniciales de las palabras respectivas. Es lo que llamamos tomar la letra "como objeto".

El segundo apartado del ejercicio es un caso práctico de conversión de pesetas a dólares, para comprobar si existen alumnos que saben realizar el cálculo, aunque no expresen correctamente la relación.

Ejercicio Nº 16

16.- En un vagón de tren hay "h" compartimentos de 4 plazas y "f" compartimentos de 6 plazas. ¿Cómo expresarías el número de plazas que tiene ese vagón?

....

¿Cuántos compartimentos tiene el vagón? **............**

En este ejercicio el alumno debe escribir expresiones con algunas letras que le damos y, por tanto, tiene oportunidad de demostrar la interpretación que hace de las mismas. Puede VALORARLAS (VAL) o incluso HACERLAS DESAPARECER (D) si no sabe cómo interpretarlas.

En el primer apartado, concretamente, el alumno puede HACER DESAPARECER las letras tomando los números que aparecen en el enunciado y sumándolos con lo que obtendrá el resultado:

4 + 6 = 10 (En lugar de "4h + 6f")

Este mismo resultado puede darse en el segundo apartado. En este caso se trataría de una VALORACIÓN de las letras, pues se habría substituido cada letra por el número correspondiente del enunciado, escribiendo

$$4 + 6 = 10 \qquad \text{(En lugar de "}h + f\text{")}$$

Se parece al ejercicio 5.c porque el alumno tiene que escribir expresiones con letras, por eso decimos que las dos preguntas tienen carácter SIMBÓLICO (S), pero se diferencia en el tipo de enunciado. El enunciado en la pregunta 5.c es con letras, lo que llamamos de carácter LITERAL (LI) y en ésta es del tipo LENGUAJE MATERNO (LEN).

Ejercicios Nº 17 Y Nº 18

17.- Si sabemos que $p = q + 7$. ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" aumenta en 3 unidades? ....

18.- Si $b = 3c + 1$. ¿Qué le sucede a "b" cuando "c" aumenta en 2 unidades?

Estos ejercicios están preparados para que el alumno trabaje las letras como VARIABLES (VAR). Consideramos que el enunciado es de tipo LITERAL (LI), porque en él se dan expresiones algebraicas que el alumno debe considerar:

"$p = q + 7$" ; "$b = 3c + 1$"

i) El alumno que interprete las letras como variables responderá

"que "p" aumenta en 2 unidades" y

"que "b" aumenta en 6 unidades"

ii) El alumno que no interprete las letras como variables, sino como representantes de un valor fijo, nos puede contestar a la pregunta nº 17 diciendo

"que "p" aumenta en 10"

pues sumará 3 al 7 de la expresión.

Ejercicio Nº 19

La ecuación $(x + 2)^3 - x^2 = 116$ tiene como solución "x=3". *¿Qué solución crees que tendrá la ecuación:*

$(3x + 2)^3 - (3x)^2 = 116$? ....

Este ejercicio está preparado para estudiar la "x" *como INCóGNITA (I) de una ecuación.*

Se trata de ver si el alumno usa la substitución en la ecuación para buscar la solución al problema.

Por supuesto, no se pide que hagan una resolución algebraica de la ecuación, como en el caso de las ecuaciones de segundo grado, pues el alumno no sabe resolver ecuaciones de tercer grado en general. Se les pide un razonamiento basado en la comprensión de la "x" como solución de una ecuación.

Ejercicio Nº 20

20.- El kilómetro y la milla inglesa se encuentran en la proporción de 5 a 8. ¿A cuántos kilómetros equivalen 56 millas?

A ....km

Este ejercicio fué anulado por un error en el enunciado. Debía haber dicho: "La milla inglesa y el kilómetro se encuentran ...."

EJERCICIO Nº 21

El Sr. Pérez es viajante y cobra 100.000 pts al mes de sueldo base. Además por cada viaje que hace recibe 5.000 pesetas.

Si "v" es el número de viajes realizados en un mes y "T" representa el SUELDO TOTAL, escribe una fórmula que relacione "T" con "v" mensualmente..........................

¿Cuánto cobrará en total un mes en el que haya realizado 4 viajes? ....

En la primera parte de este ejercicio se trata de ver si los alumnos pueden escribir una expresión SIMBÓLICA y, en la segunda, se trata de un cálculo numérico sobre la misma relación que antes se les ha pedido escribir.

Queremos comparar, al igual que en el número 15, los resultados "simbólicos" con los resultados "numéricos".

Ejercicio Nº 22

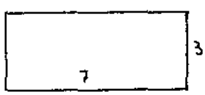
22.- Si compro 3 bombones y 5 caramelos y sabiendo que los bombones cuestan "b" pesetas cada uno y los caramelos "c" pesetas cada uno, ¿Qué representa la expresión 3b + 5c?

Este ejercicio es semejante a los ejercicios nº 7 y nº 15. Se trata de estudiar la interpretación de la "letra como objeto" (O). La diferencia con los anteriores es que aqui hay un enunciado "más familiar" al alumno.

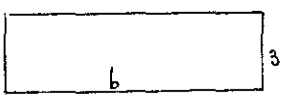
Se quiere observar si aumenta o disminuye el *tratamiento de la letra como OBJETO al variar la "familiaridad"* del enunciado.

<u>Ejercicios Nº 23, Nº 24, Nº 25 Y Nº 26</u>

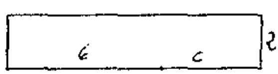
23.- Sabemos que el área de un rectángulo es: Area = base x altura. ¿Cuáles son las áreas de los rectángulos siguientes?:

1º: 

....

2º: 

....

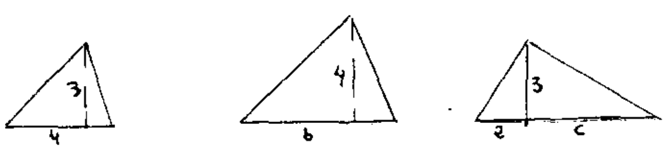
3º: 

....

24.- Sabemos que el área de un triángulo es:

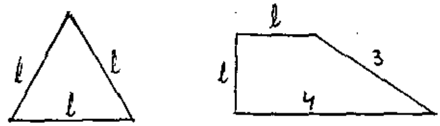
$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

¿Cuál es el área de los triángulos siguientes?:



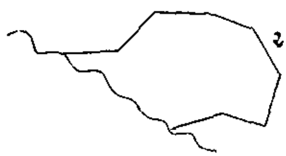
....

25.- El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. ¿Cuál es el perímetro de los siguientes polígonos?



. . . .

26.- ¿Cuál será el perímetro de este polígono, cuya figura solo vemos parcialmente, si sabemos que tiene "n" lados y que todos miden 2 cm. de longitud?



. . . .

Todos ellos tienen en común el enunciado de tipo GRáFICO (G).

Los números 23 y 24 tienen un primer apartado de solución numérica y los otros dos apartados deben dar lugar a expresiones con letras. Las que llamamos expresiones SIMBóLICAS (S). Se trata de ver el tratamiento que los alumnos dan a las diversas letras que aparecen. Se espera obtener resultados que revelen tratamientos del tipo VALORACIóN de las letras ("VAL"), letra NO TENIDA EN CUENTA ("N") o letra DESAPARECIDA ("D").

El número 25 es semejante, pero en la primera parte sólo se puede dar un error del tipo "VAL", ya que no se presta a ahacer desaparecer la letra ("D") o a no tenerla en cuenta ("N"), pues no hay números que lo propicien.

El ejercicio número 26 es un ejercicio ya clásico en los tests sobre uso de letras. Aquí está pensado para resultado correcto o error de "VALORACIÓN" ("VAL") exclusivamente.

i) resultado "2n"

ii) resultados como:

"16" . *Que se obtendría contando el número de lados visibles.*

"18" . Contando la parte ondulada como UN lado más.

I.2. CARACTERES DE LAS PREGUNTAS

Las preguntas del cuestionario han sido elegidas como tales en virtud de algunas caracteristicas especificas. Estas caracteristicas son las que vamos a llamar 'CARACTERES' de las preguntas.

Vamos a trabajar con distintos tipos de 'caracteres'.

A. Por ejemplo están los 'caracteres' que afectan al enunciado de las preguntas. En nuestro cuestionario hemos considerado tres de este tipo:

- A.1. Carácter 'LEN':

Este carácter es el que poseen las cuestiones que tienen el enunciado en lenguaje materno.

Son de este tipo los enunciados de los llamados "problemas de letra" como el de la cuestión nº 13:

"Si al cuadrado de un número le quitamos 3 unidades obtenemos 78, ¿Cuál era ese número?"

También se consideran así las cuestiones del tipo de la nº 21.A:

"Si 'v' es el número de viajes realizados en un mes y 'T' representa el SUELDO TOTAL, escribe una fórmula que relacione 'T' con 'v' mensualmente"

Porque, aunque en su enunciado figuren las letras 'v' y 'T', no lo hacen formando parte de una expresión simbólica que el alumno deba interpretar.

- **A.2. Carácter "LI":**

Carácter 'literal'. Este carácter es el que tienen las cuestiones en cuyo enunciado interviene algún simbolismo con letras como, por ejemplo, la pregunta nº 10:

"Si sabes que

$$m = n + p$$

y que

$$m + n + p = 60$$

¿Qué puedes decir de "m"? ...."

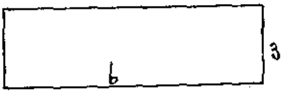
En el enunciado de esta cuestión entran dos igualdades de cuya relación debe ser deducida la respuesta. Es decir, hay que "leer" y relacionar estas igualdades para responder.

- A.3. Carácter "G".

Carácter gráfico. Diremos que tienen este carácter aquellas cuestiones en las que el enunciado contenga alguna información de tipo gráfico, es decir, en las que el enunciado contenga alguna figura.

Tiene, por ejemplo, este carácter el apartado 2º de la pregunta nº 23:

"Sabemos que el área de un rectángulo es: Area = base x altura. ¿Cuál es el área del rectángulo siguiente:



?"

Se podrian tener en cuenta otros caracteres de los enunciados, como, por ejemplo: "Lenguaje familiar", "lenguaje social" y "lenguaje imaginario". O "Enunciado con una sola información" y "enunciado con varias informaciones", etc.

B. Otro tipo de caracteres que se han tenido en cuenta en el cuestionario son los que marcan el tipo de tratamiento que se puede dar a las letras que intervienen en la cuestión:

- B.1. CARACTER "VAL" (o "VAP"): "LETRA CON VALOR ADJUDICADO".

Una cuestión, diremos que tiene el carácter "Val", cuando es tal que pide al alumno responder utilizando una letra (o varias), de modo que el alumno tiene la oportunidad de substituirla (o substituirlas) por un valor (o valores) adjudicado por él siguiendo un criterio personal (sin que esta substitución sea solicitada o necesaria).

Un ejemplo de cuestión que tiene este carácter es la nº 5.C:

"Si b + d = 6, entonces b + d + f = ...?

El alumno puede responder "6+f", pero también puede, llevado por su deseo de dar una respuesta numérica, elegir un valor para la letra "f" y escribir resultados como "9" o "12", valorando la letra "f" como "3", siguiendo el criterio de que todas las letras valen lo mismo y, como sabe que la suma de "b" y "d" es "6", deduciendo que b=d=3 y, como consecuencia, f=3; o valorando la letra "f" como "6", por ser la "sexta" letra del abecedario.

Por permitir estas posibilidades en la respuesta, se considerará que la cuestión nº 5.C. tiene el carácter "Val".

- B.2. CARACTER "N" (o "NP"):

Se trata, en este caso, de escribir la letra pero "NO TENERLA EN CUENTA A LA HORA DE CALCULAR". Escribirla simplemente "al lado". También llamamos a la letra usada de este modo, "letra DE ACOMPAÑAMIENTO"

Se dirá que una cuestión tiene el carácter "N" cuando permite que el alumno pueda hacer este uso de la letra.

Por ejemplo, la cuestión nº 5.C, de nuevo.

En esta cuestión se puede dar una respuesta como "6f", que la interpretamos como "letra de acompañamiento". En esta respuesta el alumno tiene en cuenta la letra "f", pero no sabe qué hacer con ella y decide ponerla simplemente "al lado" del número "6".

Del mismo modo para la cuestión nº 3.A:

"Suma 2 a x+6"

puede obtenerse como resultado: "8x", en vez del resultado "x+8".

Por tanto, también diremos que la pregunta 3.A. tiene el carácter "N".

- B.3. CARáCTER "D" (o "DEP"):

Se trata de la letra DESAPARECIDA o ELIMINADA por el alumno.

Diremos que tienen el carácter "D" aquellas cuestiones en las que puede darse este tipo de tratamiento a la letra. Por ejemplo, la cuestión nº 3.A. que acabamos de escribir:

"Suma 2 a x+6"

en la que una respuesta posible es:

8

donde el alumno ha hecho desaparecer la letra "x"; la ha eliminado de la respuesta.

La cuestión nº 5.C. nombrada más arriba, sin embargo, consideramos que NO tiene este carácter "D", pues no creemos que pueda darse, por parte del alumno, la eliminación de ninguna de las tres letras ("b", "d" o "f").

- **B.4. CARACTER "C":**

La letra como CONJUNTO DE NÚMEROS.

Se trata de que la letra sea interpretada como representante de más de un número y que esa interpretación, hecha por el alumno, sea perceptible en alguna de las respuestas esperadas.

Diremos que tienen ese carácter "C" las cuestiones como la número "4":

"Dadas las expresiones:

$p + 1 \quad , \quad p + 7 \quad , \quad p - 2 \quad , \quad p - 5 \quad , \quad 2p$

¿Puedes contestar?:

La menor de ellas es ....

La mayor de ellas es ....

O, no se puede contestar porque ...."

En esta cuestión, la respuesta: "No se puede contestar porque depende de los distintos valores posibles de "p"" (o respuestas semejantes), incluye que el alumno ha considerado a "p" como representante genérica de un conjunto de valores posibles. Si el alumno, para intentar contestar, hubiera substituido "p" por un sólo valor, habría obtenido respuestas como:

"La menor de ellas es p-5

La mayor de ellas es P+7"

o

"La menor de ellas es p-5

La mayor de ellas es 2p "

dependiendo del valor que hubiera substituido.

Así pues, las respuestas nos permiten estudiar si el alumno ha considerado a la letra con un solo valor fijo o como representante de un conjunto de números y, por tanto, decimos que la cuestión tiene el carácter "C".

- B.5. CARACTER "O":

La letra como OBJETO.

Se trata en este caso de que la letra es tomada, por el alumno, como la inicial de una palabra que designa un objeto.

Se puede dar esta interpretación en cuestiones como la nº 15:

"Si sabemos que un dólar equivale a 100 pts y llamamos "d" al número de dólares y "p" al número de pesetas. Escribe una ecuación que relacione "d" con "p""

En ella se puede dar la respuesta:

$$1d = 100p \qquad (I)$$

que correspondería a la "lectura" que hemos dicho:

"Un dólar es igual a 100 pts",

donde las letras "d" y "p" han sido tomadas como las iniciales de las palabras "dólar" y "pesetas", respectivamente, produciendo la escritura de la ecuación inversa de la que debería ser:

$$100d = p$$

pues el número de dólares "d" debe ser multiplicado por 100 para obtener el número de pesetas "p".

La escritura de la ecuación (I) nos descubre los alumnos que han hecho la interpretación de la letra que consideramos "como objeto".

Del mismo modo en la cuestión nº 7 se dice, en el enunciado, que la letra "p" representa "el número de pepinos" y como cada pepino se dice que cuesta 15 pts, un alumno que interprete "la letra como objeto" nos dirá que la expresión "15p" representa "quince pepinos" en lugar de interpretarlo como el producto:

$15 \times p$ (precio x nº de pepinos = nº total de pts. que han costado los "p" pepinos).

Diremos por tanto que las cuestiones nº 15 y nº 7 poseen el carácter "O".

- B.6. CARACTER "VAR":

La letra como VARIABLE DEPENDIENTE de otra. Es el uso para el que empleamos frecuentemente la letra "y".

Se encuentra este carácter "Var" en la cuestión nº 17:

"Si sabemos que p=q+7 ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" AUMENTA en 3 unidades?"

Diremos que se hace la interpretación de la letra como "variable dependiente" en respuestas como:

"Que "p" aumenta en 3 unidades" o:

"Que "p" aumenta", o incluso:

"Que "p" varía".

Se dirá que NO se ha dado esta interpretación en respuestas como:

"Que p = q + 4"

que se podría llamar "respuesta de compensación", porque el alumno trata de compensar el aumento de "q" con la disminución del número "7". Aquí se supone que "p" NO VARíA con "q". El alumno en esta respuesta asignaría a "p" un valor fijo y de ahí nacería la necesidad de la compensación.

- B.7. CARACTER "I":

La letra como INCÓGNITA.

Se trata del uso que se da a las letras en las ecuaciones, cuando una letra o varias son desconocidas y se deben calcular.

Por ejemplo, encontramos este uso en la cuestión nº 8:

"Qué puedes decir de "m" si t=4m+3 y t=23?

En ella se solicita el cálculo de "m" que será, así, tratada como incógnita. Diremos que esta cuestión tiene el carácter "I".

C. Además de éstos, tendremos en cuenta otro tipo de caracteres que tienen que ver con el tipo de respuesta solicitada. Son los caracteres "NUM" y "S".

- **C.1. CARACTER "NUM":**

Carácter de RESPUESTA NUMÉRICA.

Diremos que lo poseen aquellas cuestiones en las que se pide directamente una respuesta en números. Por ejemplo, la cuestión nº 5.A:

"Si $p+q=37$, entonces $p+q+2=$ ......"

donde la respuesta pedida es el número "39".

O la cuestión nº 21.B:

"Cuánto cobrará en total un mes en el que haya realizado 4 viajes?"

donde la respuesta pedida es 120.000 pts.

- **C.2. CARACTER "S":**

Carácter de RESPUESTA SIMBÓLICA.

Diremos que tienen este carácter aquellas cuestiones en las que se pide al alumno que responda con una simbolización de una o varias letras.

Por ejemplo, la cuestión nº 23.C. cuya respuesta es una expresión que debe incluir la letra "c":

"¿Cuál es el área del rectángulo siguiente:

?"

donde la respuesta requerida sería:

área = (6+c)2

decimos por tanto que esta cuestión tiene el carácter "S".

-.-.-.-.-.-.-.-

I.3. CLASIFICACIÓN DE LAS CUESTIONES

Ahora vamos a hacer una clasificación de las cuestiones que figuran en el cuestionario atendiendo a los **caracteres** que acabamos de describir, y que son los que nos interesa estudiar.

A.1. CARACTER LEN.

ENUNCIADO EN LENGUAJE MATERNO

Cuestiones que tienen este carácter:

2, 12.A, 12.C, 13, 14, 15.A, 15.B, 16, 20, 21.A, 21.B

A.2. CARACTER LI.

ENUNCIADO LITERAL

Cuestiones que tienen este carácter:

1.A, 1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 4, 5, 5.C, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 22

A.3. CARACTER G.

ENUNCIADO GRAFICO

Cuestiones que tienen este carácter:

23.A, 23.B, 23.C, 24.A, 24.B, 24.C, 25.A, 25.B, 26

B.1. CARACTER VAL.

LETRA CON VALOR ADJUDICADO

Cuestiones con el "carácter Val":

1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 5.C, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 22, 23.B, 23.C, 24.B, 24.C, 25.A, 25.B, 26.

B.2. CARACTER N.

LETRA ESCRITA PERO NO TENIDA EN CUENTA. (LETRA DE ACOMPAÑAMIENTO)

Cuestiones con el "carácter N":

1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 5.C, 9, 22, 23.B, 23.C, 24.B, 24.C, 25.B.

B.3. CARÁCTER D.

LETRA DESAPARECIDA. ELIMINADA.

Cuestiones con el "carácter D":

1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 9, 16, 22, 23.C, 24.C, 25.B.

B.4. CARÁCTER C.

LETRA COMO CONJUNTO DE NÚMEROS

Cuestiones con el "carácter C":

4 , 6, 11, 12.C

B.5. CARÁCTER O.

LETRA COMO OBJETO

Cuestiones que poseen el "carácter O":

7, 15.A, 22

B.6. CARÁCTER VAR.

LETRA COMO VARIABLE

Cuestiones que lo tienen:

6, 11, 17, 18

B.7. CARÁCTER I.

LA LETRA COMO INCÓGNITA

Cuestiones que lo tienen:

8, 10, 14, 19

C.1. CARACTER NUM.

Carácter de RESPUESTA NUMERICA

Tienen este carácter las cuestiones:

1.A, 2, 5, 8, 10, 12.A, 13, 14, 15.B, 19, 20, 21.B, 23.A, 24.A.

C.2. CARACTER S.

Carácter de RESPUESTA SIMBOLICA

Cuestiones con este carácter:

1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 5.C, 6, 7, 9, 11, 12.C, 15.A, 16, 21.A, 23.B, 23.C, 24.B, 24.C, 25.A, 25.B, 26

Esta clasificación se encuentra completamente reflejada en la MATRIZ A PRIORI.

-.-.-.-.-.-.-.-

I.4.MATRIZ A PRIORI (ANEXO IV)

La "matriz a priori" es un instrumento de análisis didáctico.

Cuando se elabora la **matriz a priori**, se hace en función de los intereses y expectativas particulares del estudio que se quiere llevar a cabo.

En la matriz a priori quedan reflejadas las preguntas, asociadas al objetivo específico que con ellas se pretende. Este objetivo viene representado por los CARACTERES A PRIORI.

Los caracteres a priori identifican aquellas propiedades de las cuestiones que las hacen interesantes para el estudio que se pretende, y por las que han sido elegidas precisamente en este cuestionario.

Para elaborar la matriz a priori coloco las cuestiones en el encabezamiento de las columnas (separando los apartados, si los hubiera: 1.A, 1.B, etc.). Esta separación tiene por objeto dejar en cada casilla una opción binaria: si o no para cada columna. Como el cuestionario tiene 26 cuestiones y algunas de ellas divididas en varios apartados, la primera matriz a priori que hemos confeccionado tiene 39 columnas.

En el encabezamiento de las filas figuran cada uno de los caracteres que queremos estudiar de las cuestiones. Por ejemplo:

VAL: (Carácter de las cuestiones en las que puede aparecer una respuesta con valoración de la letra hecha por el alumno y siguiendo, en general, criterios exógenos al ejercicio o cuestión)

O : (Carácter de las cuestiones en las que puede darse la interpretación de la letra como objeto)

.... etc.

En este cuestionario se plantean 12 caracteres.

En cada columna y debajo de cada cuestión (o apartado) aparecerán uno o varios "1" según el carácter o los caracteres que posea esa cuestión.

Así, por ejemplo, la cuestión nº 15A posee tres caracteres solamente: "O", "Len" y "S". En su columna aparecen tres "1", a la altura de los caracteres correspondientes, lo cual quiere decir que, en el cuestionario, hemos preparado esta cuestión para estudiar esos tres caracteres.

Sin embargo, el apartado "24.C" tiene cinco "1". Los tres primeros corresponden a los caracteres: Val, N y D. Estos caracteres revelan posibles comportamientos con las letras y son excluyentes entre sí, pues cuando en un alumno se da el tipo de comportamiento "VAL", no aparecen, ni "N", ni "D", y recíprocamente. El siguiente "1" corresponde al carácter G, que señala que el enunciado de la cuestión lleva algún componente gráfico. Y, por fin, el último "1", el del carácter "S", nos indica que la respuesta solicitada en esa cuestión incluye alguna letra o expresión de tipo simbólico.

Esta "matriz a priori" constituye un elemento esencial dentro del estudio a priori de un cuestionario. Sobre ella podemos ver las posibilidades de información que éste ofrece.

Puede ser una clasificación de las cuestiones altamente clarificadora, en la que podemos observar:

- I. Analogías y

II. Diferencias entre ellas.

Siguiendo las analogías, podemos extraer SUB-MATRICES que nos interesen en un momento determinado.

Estudiando las diferencias, podemos buscar la explicación de conclusiones del estudio del cuestionario que, en un principio, se hayan presentado como sorprendentes.

I.4.1. ANALOGÍAS.

Observando, en la matriz a priori, las cuestiones *que tienen un carácter común, puede interesarnos* formar una SUB-MATRIZ.

Tomemos, por ejemplo, el carácter "N". Las preguntas que lo poseen son:

1.B, 3.A, 3.B, 3.C, 3.D, 5.C, 9, 22, 23.B, 23.C, 24.B, 24.C, 25.B.

Con estas preguntas se puede formar una sub-matriz de trece columnas que llamaré "sub-matriz del carácter N" (que figura en la página siguiente).

Analizando esta sub-matriz se pueden observar distintas posibilidades de estudio. Por ejemplo, que el grupo de las trece cuestiones está dividido en dos bloques,

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'N'

PREGUNTAS / CARACTERES	1B	3A	3B	3C	3D	5C	9	22	23B	23C	24B	24C	25B
VAL	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1			1		1		1	1
Q								1					
C													
VAR													
I													
LEN													
LI	1	1	1	1	1	1	1	1					
G									1	1	1	1	1
NUM													
S	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1

uno de ocho y otro de cinco cuestiones. Las ocho primeras tienen "carácter LI", es decir, están preparadas con enunciados en los que intervienen "letras": x,b,d,... en expresiones que el alumno debe interpretar, y las cinco últimas tienen "carácter G", es decir, están planteadas con la ayuda de figuras gráficas. A través de estos dos grupos se ve que se podrian estudiar:

<Influencias del tipo de enunciado en la aparición del carácter "N".>

Es decir en el uso, por parte de los alumnos, de las letras como "letras de acompañamiento".

Comparando la frecuencia de aparición del carácter "N" en las ocho primeras cuestiones con la frecuencia de aparición en las cinco últimas, deduciriamos si el empleo de enunciados del tipo "G" favorece (o perjudica), más que el enunciado del tipo "LI", al uso de las letras como "letras de acompañamiento". Si la frecuencia fuera más o menos la misma, deduciriamos que no hay diferencias importantes en la incidencia de estos tipos de enunciados.

Por esta sub-matriz también podemos saber que, en este cuestionario, NO podriamos estudiar:

<La influencia que el enunciado en "lenguaje materno" tiene en la aparición del comportamiento "N">

porque ninguna de las cuestiones de la sub-matriz que tienen el carácter "N", posee además el carácter "LEN" (carácter de enunciado en lenguaje materno).

" Otra observación que podemos hacer en la sub-matriz, es que todas las cuestiones que se han preparado para estudiar el carácter "N", tienen también el carácter "S" (preguntas en las que se pide una respuesta que incluye alguna letra), porque se ve que todas tienen un "1" en la línea de dicho carácter. Por otra parte, esto era esperable, pues si se pide una respuesta "con letras", se podrá apreciar como trata el alumno a esas letras y, por tanto, si las usa "de acompañamiento".

En la sub-matriz del "carácter VAR" (que aparece en la página siguiente),se aprecia que las cuatro cuestiones del cuestionario, seleccionadas para estudiar este "carácter", tienen el enunciado "literal LI". No hemos preparado cuestiones de este "carácter" con otros tipos de enunciados porque no nos ha interesado estudiar la influencia de ellos en el "carácter VAR".

En la sub-matriz del "carácter LEN" (que figura a continuación de la anterior), vemos que, de las once cuestiones que la forman, siete piden una respuesta numérica "NUM" y cuatro una respuesta simbólica "S". Vamos a poder estudiar, dentro del enunciado en lengua materna "LEN", los dos tipos de respuesta exigida.

I.4.2. PREGUNTAS SEMEJANTES.

Al observar las sub-matrices se aprecian mejor aquellas cuestiones que tienen los mismos "caracteres" y que

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'VAR'

PREGUNTAS / CARACTERES	6	11	17	18
|VAL|	1	1		
|N|				
|D|				
|Q|				
|C|	1	1		
|VAR|	1	1	1	1
|I|				
|LEN|				
|LT|	1	1	1	1
|G|				
|NUM|				
|S|	1	1		

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'LEN'

PREGUNTAS

CARACTERES	2	12A	12C	13	14	15A	15B	16	20	21A	21B
|VAL|								1			
|N|											
|D|								1			
|O|						1					
|C|											
|VAR|											
|I|					1						
|LEN|	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
|LI|											
|G|											
|NUM|	1	1		1	1		1		1		1
|S|			1			1		1		1	

llamaremos SEMEJANTES, porque ofrecen las mismas posibilidades frente a nuestro tipo de estudio a priori.

El reconocimiento de esta SEMEJANZA puede llevarnos a prescindir de alguna de ellas en siguientes cuestionarios ya que, si ofrecen idénticas posibilidades de estudio, pueden suponer una sobrecarga innecesaria.

Sin embargo no haremos una eliminación automática de cuestiones SEMEJANTES, pues es posible, y de hecho sucede con frecuencia, que las que han sido consideradas como tales en el estudio a priori, no resultan contestadas por los mismos alumnos, como sería de esperar, y esto nos ayuda a descubrir, a posteriori, determinados "caracteres" en los que no habíamos pensado previamente.

Cuando las sub-matrices son de pequeño tamaño (hasta siete cuestiones) se reconocen con más facilidad estas semejanzas. Por ejemplo, en la sub-matriz del "carácter C" (que se incluye en la página siguiente), destaca la semejanza de las cuestiones nº 6 y nº 11 que tienen ambas los "caracteres": VAL, C, VAR, LI y S. Esto puede apreciarse también en la sub-matriz del "carácter VAR".

Igualmente, en la sub-matriz del "carácter I" (que figura a continuación de la anterior), tenemos a la vista la semejanza entre las cuestiones nº 8 y nº 19 que tienen los "caracteres" comunes: I, LI y NUM.

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'C'

PREGUNTAS / CARACTERES	4	6	11	12C
$\overline{\text{VAL}}$		1	1	
$\overline{\text{N}}$				
$\overline{\text{D}}$				
$\overline{\text{Q}}$				
$\overline{\text{C}}$	1	1	1	1
$\overline{\text{VAR}}$		1	1	
$\overline{\text{I}}$				
$\overline{\text{LEN}}$				1
$\overline{\text{LI}}$	1	1	1	
$\overline{\text{G}}$				
$\overline{\text{NUM}}$				
$\overline{\text{S}}$		1	1	1

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'I'

<table>
<tr><th></th><th>PREGUNTAS</th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><th>CARACTERES</th><th>8</th><th>10</th><th>14</th><th>19</th></tr>
<tr><td>|VAL|</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>| N |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>| D |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>| O |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>| C |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|VAB|</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>| I |</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>|LEN|</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>|LI |</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>| G |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|NUM|</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>| S |</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Cuando la sub-matriz es de tamaño intermedio (entre 8 y 11 cuestiones) se aprecian más semejanzas. En la sub-matriz del "carácter G" (página siguiente), se aprecian las semejanzas siguientes entre cuestiones:

La cuestión 23B es semejante a la 24B pues ambas tienen los "caracteres" VAL,N,G y S.

Las cuestiones 25A y 26 son semejantes pues tienen los "caracteres" comunes VAL,G y S.

En la sub-matriz del "carácter D" (a continuación de la anterior), se destacan como semejantes la cuestión nº 1B con las cuestiones nº 3A,3B,3C y 3D que tienen los "caracteres" VAL,N,D LI y S. Y también las 23C, 24C y 25B que tienen los "caracteres" VAL,N,D,G, y S.

Cuando las sub-matrices son grandes (12 o más preguntas) se pueden, igualmente, buscar las semejanzas pero ya no son tan evidentes. Por ejemplo en la sub-matriz del "carácter VAL" (a continuación de las anteriores), se encuentran cuatro semejanzas ya descritas, y además, se puede ver otra entre las cuestiones 5C y 9 que coinciden en los "caracteres" VAL,N,LI y S.

De este modo, tanto la matriz a priori como las sub-matrices obtenidas de ella, proporcionan información sobre el cuestionario y sus posibilidades.

No hemos prescindido de ninguna de las cuestiones semejantes pues nuestra investigación va encaminada,

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'G'

CARACTERES \ PREGUNTAS	23A	23B	23C	24A	24B	24C	25A	25B	26
|VAL|		1	1		1	1	1	1	1
|N|		1	1		1	1		1	
|D|			1			1		1	1
|O|									
|C|									
|VAR|									
|I|									
|LEN|									
|LI|									
|G|	1	1	1	1	1	1	1	1	1
|NUM|	1			1					
|S|		1	1		1	1	1	1	1

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'D'

PREGUNTAS

CARACTERES	1B	3A	3B	3C	3D	16	22	23C	24C	25B
|VAL|	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
|N|	1	1	1	1	1		1	1	1	1
|D|	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
|O|							1			
|C|										
|VAR|										
|I|										
|LEN|						1				
|LI|	1	1	1	1	1		1			
|G|								1	1	1
|NUM|										
|S|	1	1	1	1	1	1		1	1	1

SUB-MATRIZ DEL CARACTER 'VAL'

CARACTERES \ PREGUNTAS	1B	3A	3B	3C	3D	5C	6	7	9	10	11	16	22	23B	23C	24B	24C	25A	25B	26
VAL	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N	1	1	1	1	1	1			1				1	1	1	1	1		1	
D	1	1	1	1	1							1	1		1		1		1	
O								1					1							
C							1													
VAR							1				1									
I										1										
LEN												1								
LI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1							
G														1	1	1	1	1	1	1
NUM										1										
S	1	1	1	1	1	1	1		1		1	1		1	1	1	1	1	1	1

precisamente, al estudio de estas cuestiones y a la comprobación de la exactitud o no de los "caracteres" elegidos por nosotros. Las cuestiones semejantes pueden aportar una información importante si, al ser respondidas por los alumnos, se destacan como diferentes entre sí.

I.4.3. DIFERENCIAS.

Podemos estudiar también las diferencias entre unos "caracteres" y otros.

Comparando las tres primeras filas de la matriz, llama la atención que, entre los tres primeros "caracteres", hay pocas diferencias. Se encuentran en muchas cuestiones simultáneamente. Pero observamos que el carácter "Val" se encuentra en algunas como las nº 10, 11 o 26 en las que no se encuentran los otros dos caracteres.

Si nos interesa la uniformidad de condiciones entre estos "caracteres", podemos formar una sub-matriz eliminando las cuestiones que los diferencian, que son: las nºs 6, 7, 10, 11, 25.A y 26, porque faltan los caracteres "N" y "D", la cuestión nº 16 porque falta el "N" y las nº 5.C, 23.B, 24.B porque falta el "D".

Toda esta información la podemos obtener de la matriz a priori, pero también es muy clara y todavía más patente en la sub-matriz del carácter "VAL".

Siguiendo con la observación de la matriz inicial, vemos que las dos últimas filas, correspondientes a los caracteres "NUM" y "S", son CASI COMPLEMENTARIAS, pues si en una columna figura un "1" en "Num", no figura en "S" y viceversa, pero no lo son, exactamente, porque hay cuestiones que no tienen "1" en ninguna de las dos (son las columnas correspondientes a las cuestiones nºs 4, 17, 18, y 22), por tanto no podemos decir que "Num" y "S" sean CARACTERES COMPLEMENTARIOS.

Sin embargo, estos caracteres, son complementarios en la sub-matriz del carácter "G", porque, observando esta sub-matriz, se ve que todas las cuestiones planteadas con el carácter "G", se responden, o bien con números (carácter "Num"), o simbólicamente (carácter "S"), pero no en lenguaje materno, ni con dibujos, ni con otros tipos de respuestas.

Las cuestiones que acabamos de nombrar un poco más arriba, piden tipos de respuestas que no están catalogadas como caracteres a estudiar. Se deduce que el análisis de esos tipos de respuestas no es un objetivo de este cuestionario.

Los caracteres "Len", "LI" y "G" si que son COMPLEMENTARIOS. Cada cuestión tiene un "1" en uno de los tres y no lo tiene en los otros dos. De este modo, estos tres caracteres, sirven para distribuir la totalidad de las cuestiones en tres grupos: Las que poseen el carácter "Len", que son 11 cuestiones (o apartados), las que poseen el carácter "LI", que son 19 y las que poseen el carácter "G", que son 9.

Esto nos indica que los tipos de enunciados empleados han sido de tres clases y que esas tres clases figuran en el estudio como caracteres que interesan.

Sobre la sub-matriz del carácter "Val" podemos hacer otra observación interesante de diferencias:

"Todas las cuestiones tienen el carácter "S", menos una. La nº 10 es la única que, teniendo el carácter "Val", no tiene el carácter "S", sino el carácter "Num""

Releyendo el enunciado de esta cuestión, vemos que efectivamente, tiene el carácter "Num", pues la respuesta que se pide es "30", y que tiene el carácter "Val", porque permite valorar las letras y obtener resultados como "20", que se obtendría valorando equitativamente las tres letras que intervienen.

Se trata de una cuestión original, pues no es frecuente encontrar un ejercicio cuya respuesta , por un lado no exija ser expresada con letras, y, por otro, permita al alumno hacer la "Valoración" de éstas.

I.5. MATRIZ DE DATOS.

Esta es una matriz a posteriori. Se trata de la matriz de resultados que recoge toda la información aportada por las respuestas de los alumnos.

La matriz de datos está confeccionada disponiendo los alumnos por filas y las respuestas a las cuestiones por columnas.

Cada cuestión se extiende en varias columnas. *Cada columna corresponde a una respuesta específica. En* general la primera de cada pregunta corresponde a la no contestación a la misma, ya que es un modo de 'responder'; hay una columna para la respuesta "correcta" y, en caso de varias respuestas correctas, una para cada una de las posibles. También hay una columna por cada respuesta incorrecta esperada. En muchas preguntas, además, incluimos una columna para acoger en ella todas las respuestas inesperadas que puedan surgir.

En este cuestionario se incluyen, como se puede observar, preguntas abiertas. Como consecuencia el número de columnas para cada una es variable. Algunas tienen tres o cuatro y otras seis e incluso siete respuestas posibles distintas y por tanto otras tantas columnas.

Se va a formar una matriz de datos para cada uno de los cursos a los que se ha pasado el cuestionario. Habrá, por tanto, seis matrices: Una de 7º EGB, una de 8º EGB, dos de 1º BUP y dos de 1º REM.

El número de columnas de la matriz de datos se corresponde con el número de respuestas posibles. Por tanto, es un número muy superior al de preguntas. En nuestro caso el número total de respuestas recogidas es de 128, por lo que son 128 los items que figuran y, cada uno de ellos, tiene una opción binaria cuyas dos posibilidades corresponden a si esa modalidad de respuesta ha sido elegida o no.

La matriz de datos recoge, sintéticamente, en el encabezamiento de cada columna, la respuesta que esa columna representa. En el apartado "Elementos para elaborar la matriz de datos", que expondremos a continuación, figuran las explicaciones concretas de los tipos de respuestas estudiados en cada columna.

En el encabezamiento de las filas figuran los alumnos numerados correlativamente y a la derecha del número, en algunos casos, las iniciales del nombre para facilitar la asociación con las entrevistas individuales realizadas después.

Estas matrices de datos son la base para los estudios estadísticos que se han llevado a cabo. De ellas se han obtenido las matrices que cada uno ha requerido.

I.5.1. ELEMENTOS PARA ELABORAR LA MATRIZ DE DATOS O MATRIZ DE COMPORTAMIENTOS.

En este apartado se explicitan los tipos de respuestas que se recogen en la matriz de datos.

Aunque se ha hecho un análisis previo de los objetivos que nos proponemos con las preguntas, y de cómo pensamos que las respuestas de los alumnos nos van a dar la información que buscamos, nos hemos encontrado, a veces, respuestas inesperadas.

Cuando estas respuestas inesperadas han sido muy dispersas las hemos reunido en una columna única con encabezamientos como: "Otras" o "Dix" (de "diferentes expresiones"), pero si se han presentado con una frecuencia que nos ha parecido interesante, hemos creado una nueva columna para recoger esa respuesta específica y estudiar la información que nos pudiera aportar.

Se describen a continuación las respuestas representadas por cada uno de los encabezamientos de las columnas.

<u>Pregunta nº 1.</u>

No-1 Sin respuesta en la primera pregunta.

9, 20 (1 BIEN) Son las respuestas numéricas correspondientes al alumno que ha interpretado correctamente las tareas *"sumar 5"* y *"multiplicar por 4"*. *Va acompañada de* las respuestas "p+5" y "4q" a semejanza de la que se ha dado como muestra.

4+z con p+z y 5z (en el último apartado: q ----> ..... respuestas variadas)

Es una respuesta que ha aparecido inesperadamente. Por las entrevistas sabemos que el alumno interpreta que debe escribir "un número y la letra "z"".

4+z" Es una variación de la respuesta anterior. Son aquellos casos en que la "z" se añade en dos apartados, como por ejemplo: "z+4, p+3, 5z, 6q", que es la respuesta del alumno nº 17 de B-3.

4+5 con p+5, 4.5 y 4q

Son las respuestas que identifican las tareas pero no las realizan. Solamente las dejan indicadas y las anotamos separadamente, porque en algunos casos provienen de un simple mimetismo de escritura sin que exista una interpretación de lo que se escribe.

4+q Son las respuestas en las que el alumno ha identificado la tarea como: "hay que escribir UN número (cualquiera) y UNA letra (cualquiera)". Se incluyen también, por tanto, respuestas como: "4+b, p.3, 5p, qz". Respuesta del alumno nº 12 de 7º EGB o "x+4, p+6, 5x, 6q". Respuesta del alumno nº 5 de B-4.

Preguntas nº 2 y 3.

Los dos primeros apartados de estas preguntas se recogen juntos por ser, en ambos, una tarea numérica la que se debe realizar: "Sumar 2 al número 15" "Multiplicar por 3 al número 7"

No-2 Sin respuesta en el primer apartado de los dos ejercicios.

17,21 (2 BIEN) Es la respuesta: 17 en el primer apartado y 21 en el segundo.

15+2 con 7.3

Se trata de la respuesta indicada pero no realizada. Se conserva esta respuesta separadamente de la anterior, porque supone un "deseo de permanencia en la simbolización".

Los apartados segundo y tercero de estas preguntas han sido recogidos conjuntamente (en este primer estudio).

No-3 Sin respuesta en tres o en cuatro de los apartados.

x+6+2 con (x+4).3

Respuesta solamente indicada. Muestra el "deseo de permanencia en la simbolización".

8,12 Respuesta que corresponde a "letra DESAPARECIDA" o eliminada.

8x,12x Respuesta que corresponde a "letra DE ACOMPAÑAMIENTO" o "no tenida en cuenta, pero escrita".

x+8 (3 BIEN) con 3x+2, 3x+12 y 15x

Respuesta que realiza completamente la tarea propuesta.

Pregunta nº 4.

No-4 Sin respuesta

p+7,p-5 Respuestas que dicen:

"La menor de ellas es ... p-5

La mayor de ellas es ... p+7"

p+7,p-5* Corresponde a respuestas ligeramente distintas de la anterior. En la mayoría de ellos es la respuesta:

"La menor de ellas es ... p-5

La mayor de ellas es ... 2p"

Pero también hay algunas incluidas del tipo:

"La menor de ellas es ... p-2

La mayor de ellas es ... p+7"

No se puede (4 BIEN) Es la respuesta que dice: "No se puede responder porque depende del valor de "p"".

No el > Es la respuesta que da:

"La menor de ellas es ... p-5

La mayor de ellas es ...."

y dice que la mayor de ellas "no se puede porque depende del valor de "p"" o "puede ser 2p o p+7"

Pregunta nº 5.

Se recogen juntas las respuestas a los dos primeros apartados , a) y b), de la pregunta, por ser ambos de respuesta numérica.

No-5 Sin respuesta en algún apartado.

39,671 (5 BIEN) Respuesta que da "39" en el primer apartado y "671" en el segundo.

39,671* Son las respuestas que dan un resultado correcto y otro no: 39, 673 o 39, 706 o 35, 671 o 39, 403, etc.

Después se recoge la respuesta al tercer apartado:5.c)

6+f (5.c BIEN) Es la respuesta simbólica: 6+f

6+f^{L} Es la respuesta:"Según el valor de f"

5 Val Respuesta con "letra VALORADA". Anoto, también, el resultado de la valoración (6 para el valor f=2, 9 para el valor equitativo f=3, 12 para el valor alfabético f=6, ...)

6f Respuesta con "letra DE ACOMPAÑAMIENTO". Incluye también la respuesta "bdf".

Pregunta nº 6.

En esta pregunta se han dado gran variedad de respuestas y, aunque se ha creado una columna con el encabezamiento "Otras" (que recoge las respuestas esporádicas), he considerado interesante conservar algunas de ellas cuya caracterización se expone a continuación.

No-6 Sin respuesta.

6 VAL Se señala con un número situado en la columna 10-16. Es la respuesta que corresponde a UN solo valor de "q", elegido por el alumno, y luego substituido para calcular el valor de "p". Es una forma de letra VALORADA.

$p>q$ Respuesta que indica que el alumno relaciona "p" como VARIABLE DEPENDIENTE de "q" pero nada más.

$p>q^{L}$ Respuesta en lengua materna: "p es mayor que q"

$p>q^{m}$ Respuesta: "$p<q$"

Otras Respuestas variadas. Por ejemplo:

"Que p contiene a q". Alumno nº 9 de 1º E.

"Que p = 3x-4 = 7". Alumno nº 12 de 1º E.

" p > 4 ". Alumno nº 13 de 1º E.

" P = 3(<4) + 7". Alumnos nº 17 de 1º E, nº 29 de 1º F, nº 1 de B.3, nº 20 de B.4.

"Que p es múltiplo o divisor de 2". Alumno nº33 de 1º F.

"Que siempre será múltiplo de 4". Al. nº40 de 1º F.

"Que "p" no se puede hallar". Alumno nº 7 de B.4.

$10-16^{m}$ Son las respuestas en que "q" se ha substituido por varios valores pero con errores.

$10-16^{z}$ Respuesta que escribe: q = 0,1,2,3 o q = 1,2,3 etc., pero que no llega a substituir para calcular "p". Es decir, el alumno "ve" el CONJUNTO de valores pero "no ve" la VARIABLE DEPENDIENTE.

$p<19$ (6 BIEN) Es la respuesta: "$p<19$"

$p<19^{16}$ Indico así las respuestas: "$p<16$" y "$p\leq16$"

$p<19^{m}$ Son las respuestas: "$p>19$"

$p<19^{L}$ Son las respuestas: "p es mayor que 19"

Las dos columnas siguientes han sido elaboradas para estudiar especificamente los caracteres "Var" y "C".

6 VAR La letra como VARIABLE DEPENDIENTE de otra.

Son las respuestas que obtienen un valor de "p" a partir de "q", aunque el valor obtenido no sea la única solución o, incluso, cuando sea erróneo.

CONJ Son las respuestas que revelan que el alumno considera "q", y por tanto "p", con más de un valores posibles. Anoto esta interpretación siempre que *se dé más de un valor en la respuesta.* Se incluyen las respuestas que dan valores "emtre 10 y 16".

<u>Pregunta nº 7.</u>

No-7 Sin respuesta en la séptima pregunta.

71 (7 BIEN) Si la respuesta es: "El total de la compra" o "El precio total" o alguna expresión semejante.

7V Letra VALORADA. Se contabilizan así los siguientes casos de valoración:

-Cuando la respuesta es: 225 o 325. Corresponde a valoraciones de p=15; t=10.

-Se incluyen valoraciones como: "Es 1 pepino y 1 tomate"

(Estos casos van acompañados de las respuestas: 25 o 2, respectivamente, para la segunda pregunta: ¿Cuál es el número total de vegetales comprados?)

-Cuando en la segunda respuesta aparecen resultados como: 30, 10, 250, etc.

70 Letra como OBJETO.

Cuando la respuesta es : "15 pepinos y 10 tomates" (y/o 25 en la segunda).

Pregunta nº 8.

No-8 Cuando no hay respuesta.

m=5 (8 BIEN) Cuando la respuesta es "5".

15 Si la respuesta es algún valor numérico distinto de "5": 15, 23, 4, 11, 20,...

Pregunta nº 9.

Esta pregunta no se incluye en algunas partes del estudio general. Sin embargo, es una de las preguntas estudiadas especialmente en las entrevistas personales con los alumnos, porque es más interesante seguir las estrategias que los resultados.

Conserva CONSERVACIÓN de la información. Son respuestas como: $3b+5b = 8b^2$ o $3b+5c = 8(b+c)$.

Acomp. Letra DE ACOMPAÑAMIENTO. Son respuestas como: $3b+5c = 8bc$.

Arbitr. Respuestas con errores variados no clasificados.

8b Cuando el alumno, en la primera, responde "8b" y da dos respuestas correctas más.

8b¹ (9 BIEN) Esto indica que hay solamente una respuesta incorrecta (de las cinco), es decir cuatro respuestas correctas.

Solo 8b Sólo responde "8b" o las demás respuestas son todas incorrectas.

Pregunta nº 10.

No-10 Sin respuesta.

30 (10 BIEN) Son las respuestas: "m = 30, porque m = n+p"

EQU Letra VALORADA.

Corresponde esta columna a las valoraciones siguientes:

-Reparto equitativo. Respuesta "20" (m=n=p=20). Incluida la respuesta "m=30", cuando va acompañada de: n=p=15.

-Respuesta "60".

-Elección arbitraria o sin justificar:

m=12, n=17 y p=31

o m=18, n=19 y p=23

....

-Respuesta "m=58". Valorando: n=p=1.

DIX Diversas expresiones. Por ejemplo:

-"Que "m" es más o menos la principal". Alumno nº 4 de 7º EGB.

-"Que "m" es el doble de n+p". Alumno nº 8 de 7º de EGB.

-"Que "m" se puede sumar con cualquier letra". Alumno nº 18 de 7º EGB.

-"Que m < 60". Alumno nº 33 de 7º EGB.

-"Que m = 60-n+p". Alumno nº 17 de B.3.

-"Que es una letra". Alumno nº 21 de B.4.

Pregunta nº 11.

No-11 Sin respuesta.

011 (11 BIEN) Letra como VARIABLE y letra como CONJUNTO DE NÚMEROS. Se trata de respuestas del tipo de: "0, 1,2, ... , 9" o "n < 10"

Se incluye la respuesta: "Puede ser un número cualquiera" pues, aunque es incorrecta, estimamos que se ha asimilado la idea fundamental de VARIABLE en la posibilidad de múltiples respuestas.

n=k Letra VALORADA.

Se refiere esta columna a las respuestas de valor único como "n=5", "n=9",etc.

DIF Respuestas variadas diferentes como, por ejemplo:

-"Que p es mayor que n". Alumnos nº 5 y nº 18 de 7º EGB.

-"Que el valor de "n" y "p" es el mismo": (10)

-"Que n = 20-p". Alumno nº 18 de B.4.

Pregunta nº 12.

No-12 Sin respuesta

MNS (12 BIEN) Manipulación numérica y simbólica.

Calificaremos así aquellas respuestas en que se ha hecho la manipulación numérica y se ha intentado (aunque no sea correctamente) la formalización con letras, usando éstas para los números desconocidos y relacionándolas con los números que se conocen.

NUM Numérica.

Calificaremos así aquellas respuestas en que se ha hecho la manipulación numérica, pero NO se ha intentado una escritura simbólica.

LIT Señalaremos así aquellas respuestas simbólicas en las que todo son letras, incluso los números *conocidos*.

COP Los que intentan una expresión sincopada, es decir con palabras en abreviaturas.

Las columnas MNS+COP se toman como una columna única cuando se estudia la letra como "conjunto de números".

Pregunta nº 13.

No-13 Sin respuesta.

9 (13B) Es la respuesta: "9".

MAL (13M) Cualquier respuesta distinta de "9".

Pregunta nº 14.

No-14 Sin respuesta

CN Comportamiento Numérico.

CN_1 El alumno hace manipulaciones con el nº 20 (por ejemplo, multiplicándolo por 2 y restándole la mitad: 10, responde: "30", o dividiéndolo por 2 y restándole 10, responde: "0")

CN_2 O bien lo hace "probando", como aclaran en entrevista los alumnos nº 7 y nº 14 de 7º EGB.

CSN Comportamiento pseudonumérico.

Son las respuestas en las que el alumno ha elaborado un razonamiento lógico y deductivo para buscar la solución:

"Es como si fuera el triple de ese número, porque si 1º es el doble y luego su mitad y como el doble es el mismo, su mitad es la misma". Alumno nº 15 de 7º EGB.

Dejando aparte la confusión del enunciado, se aprecia el esfuerzo razonador que explica las operaciones:

$$\left.\begin{array}{r} n \longrightarrow 2n \longrightarrow 2n+n = 3n \\ 3n = 20 \end{array}\right\} \longrightarrow n = \frac{20}{3} = 6'\hat{6}$$

CE Comportamiento con ecuaciones.

Es el alumno que, para buscar la solución, plantea la ecuación y la resuelve.

Pregunta nº15.

No-15 Es la respuesta en blanco a la primera cuestión que es la de relacionar, mediante una ecuación las letras "d", dólares y "p", pesetas, independientemente de la respuesta del segundo apartado.

COR (15B) Sería la relación correcta: "p = 100d"

OBJ Es la respuesta que "lee" "d" como dólares y "p" como pesetas:

"1d = 100p" o "d = 100p"

LEX La "ecuación" que plantean incluye una "x". Son las respuestas de los alumnos que ligan la palabra ecuación con la letra "x".

REL Que relacionan las letras "d" y "p" mediante una igualdad diferente de las recogidas en "COR y OBJ".

Pregunta nº 16.

No-16 Sin respuesta.

161 (16B) Respuesta correcta al primer apartado: 4h+6f incluyendo aquellas respuestas incorrectas pero que usan las letras "h" y "f".

162 (16D) Respuesta numérica. Letra DESAPARECIDA. Incluye el "10" calculado de "6+4", o el "24" calculado de "6 por 4"

163 (16V) Respuestas de letra VALORADA.

Pregunta nº 17.

Pregunta preparada para estudiar la "letra como variable".

No-17 Sin respuesta.

171 (17B) Respuesta: "Que "p" AUMENTA en 3 unidades". Incluye las respuestas en las que se dice simplemente: "Que "p" aumenta".

172 Respuesta: p = q + 10. Respuesta de manipulación NUMÉRICA exclusivamente. Las letras se consideran "invariables".

173 Respuesta: "Que "p" varía" o "Que "p" ya no vale igual". En esta respuesta el alumno sabe que algo ha cambiado, aunque no reconoce que el aumento de "q" es causa directa de un aumento igual en "p". Se incluye la respuesta incorrecta:"Que "p" disminuye en 3 u."

174 Respuesta: "p=q+4". Respuesta DE COMPENSACIÓN para que se mantenga la igualdad: "Si "q" aumenta, entonces el "7" debe disminuir". Esta respuesta considera a "p" invariable. Incluyo aquí los que dicen: "Que ya no se cumple la igualdad", pues estos alumnos también suponen fijo el valor de "p".

Pregunta nº 18.

No-18 Sin respuesta.

181 (18B) Respuesta: "Que "b" queda aumentada en 6 u.".

182 Respuestas del tipo: "b=5c+1" , "b=6c+1". Se considera en ellas que las letras "b" y "c" tienen un sólo valor posible (no se ven como variables) y, por tanto, las variaciones se tienen que expresar en los números que las acompañan. Manipulación NUMÉRICA exclusivamente.

Se incluye la respuesta:"b=3c+3" dada, por ejemplo, por el alumno nº 34 de 7º EGB.

183 Respuesta: "Que el resultado VARíA". Incluye: "Que aumenta en 2 u." o "Que varía disminuyendo".

184 Respuesta del tipo: "b=3c+(-1)". Es una respuesta DE COMPENSACIÓN. Aquí "b" se considera invariable. Incluye la respuesta: "b=1c+1" dada por el alumno nº 19 de 7º EGB.

Pregunta nº19.

No-19 Sin respuesta.

191 (19B) Es la respuesta: "x=1". Hay cuatro casos incluidos de respuesta "x=9" porque estos alumnos han encontrado la relación, aunque la hayan aplicado al revés. Son los alumnos: nº 16 de B4 de REM y nº 17,21 y 25 de B3 de REM.

192 Es la respuesta: "x+3", es decir: "La misma solución".

193 Soluciones diversas. Obtenidas mediante cálculos erróneos, pues no tienen ningún método para resolver una ecuación de tercer grado. Son soluciones como:

x=38	Al. nº 33 de 7º EGB
x=108	Al. nº 7 de B4 de REM
x=6	Al. nº 15 de B4 " "
x=2	Al. nº 13 de " " "

<u>Pregunta nº 20.</u> No se incluye en el estudio.

<u>Pregunta nº 21.</u>

No-21 Sin respuesta.

211 (21B) Respuesta en la que se escribe una igualdad con "T" y "v" (aunque no sea correcta), y calcula bien en la segunda parte, que es la respuesta numérica.

212 (Num) Respuesta en la que NO PLANTEAN la escritura simbólica, pero hacen bien el cálculo numérico.

213 Respuesta en las que INCLUYEN UNA X en la "fórmula" (ligando la idea de fórmula con la presencia de la "x")

214 Resultados varios como los siguientes elegidos como ejemplos:

300.000 pts	Al. nº 8 de 7º EGB
420.000 pts	Al. nº 13 " "
402.000 pts	Als. nº 16 y 19 de 7º EGB
38.750 pts	Al. nº 18 " "
20.000 pts	Al. nº 37 de 7º EGB y Al. nº 17 de 1ºE de BUP

Pregunta nº 22.

No-22 Sin respuesta.

221 (22B) Respuesta que dice: "El número de pesetas" o "El precio total".

22O Respuesta que dice: "Tres bombones y cinco caramelos", tomando la letra COMO OBJETO.

22V Respuesta en la que SE VALORAN las letras "b" y "c" y se calcula así un resultado numérico.

22N Respuesta: "8bc". De letra "no tenida en cuenta". Es la letra "de acompañamiento".

22D Respuestas como: "8 pts" ("3b+5c=8" respuesta del Al. nº 37 de 7º de EGB). Es la letra DESAPARECIDA.

Pregunta nº 23

No-23 Sin respuesta. Sólo se ha dado en tres alumnos de B4 de REM. En los demás casos han respondido, al menos, en el apartado numérico.

231 (23B) Es la respuesta correcta (o casi). Es decir, expresando las respuestas con ayuda de las letras "b" y "c".

232 *(Num)* Es la *respuesta numérica exclusivamente*; es decir, el primer apartado solamente, que es el cálculo numérico.

23V Es la respuesta donde la letra ha sido VALORADA.

23N Es la respuesta donde la letra es "NO TENIDA EN CUENTA". Escrita pero solamente "de acompañamiento"

23D Es la respuesta en la que se elimina la letra. Es la letra DESAPARECIDA.

Pregunta nº24.

No-24 Sin respuesta.

241 (24B) Respuesta correcta. Se incluyen las respuestas que emplean las letras "b" y "c', aunque las operaciones que se deben hacer con ellas no estén muy bien indicadas.

242 (Num) Respuesta al primer apartado únicamente; es decir, respuesta NUMéRICA.

24V Respuesta en la que la letra ha sido VALORADA.

24N Respuesta en la que la letra es "NO TENIDA EN CUENTA". Escrita, pero solamente "de acompañamiento"

24D Respuesta con la letra eliminada. Es la letra "DESAPARECIDA".

Pregunta nº 25

No-25 Sin respuesta.

251 (25B) Respuesta correcta: "31" o "1+1+1" en el primer apartado y "21+7" o "1+1+3+4" en el segundo.

25V Respuesta con letra VALORADA. (Por ejemplo: l=2 o l=1).

25N Respuesta con la letra NO TENIDA EN CUENTA, pero escrita. Incluyo aquí las respuestas que "añaden" una "x" como, por ejemplo: "3x, 7x".

25D Letra DESAPARECIDA. Letra que ha sido eliminada.

Pregunta nº 26.

No-26 Sin respuesta.

261 (26B) Respuesta correcta: "2n"

262 Respuesta simbólica, "personal": "16 + ττττ"

26V Respuesta con la letra VALORADA. Respuestas como "16" (contando ocho lados) o "18" (contando nueve lados), o "29", o incluso "30".

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Hasta aquí, el análisis a priori sobre los ejercicios del cuestionario, y la preparación para los análisis estadísticos que vamos a hacer sobre él.

Sobre la base de los resultados obtenidos de estos análisis estadísticos elaboraremos la técnica y metodologia didácticas que expondremos en el último capitulo de esta tesis.

CAPITULO 5º

I.- ESTUDIO ESTADISTICO CON LA HOJA DE CALCULO OPEN ACCESS II PLUS.

El objeto de este estudio es evaluar, cuantitativamente, la frecuencia con que se cometen determinados errores, que ya hemos descrito anteriormente, en el tratamiento de las letras, a lo largo de la enseñanza, desde los últimos cursos de Enseñanza General Básica, 7º y 8º de EGB, hasta los primeros cursos de Reforma y Bachillerato, 1º de REM y 1º de BUP.

Esta evaluación es importante pues dará un indicio sobre la evolución de esos errores a lo largo de los primeros años escolares de enseñanza del álgebra. Esto permitirá decidir actuaciones a nivel didáctico si la progresión encontrada no parece la más conveniente.

Previamente a la utilización de la Hoja de Cálculo de este programa, ha sido necesario crear un fichero de base de datos sobre el que se ha usado el Gestor de Bases de Datos, que ha servido para calcular los valores necesarios para la utilización de la Hoja.

Todo este proceso ha sido realizado con el programa Open Access II Plus, en un ordenador compatible PC-640 X, que permite obtener los gráficos a través de la Hoja de Cálculo.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

I.1. COMPARACIÓN DE ERRORES.

Esta comparación de errores ha sido hecha con los datos que ha proporcionado el cuestionario sobre "el uso de las letras" descrito en el capitulo 4º.

Los errores estudiados han sido:

D: Letra "desaparecida" (no escrita, eliminada)

N: Letra "no tenida en cuenta" (aunque escrita pero usada como letra simplemente de acompañamiento)

O: Letra "como objeto" (tomada como una inicial)

Val: Letra "valorada" (substituida por un número elegido con criterios personales)

En esta comparación se han considerado tres grupos de alumnos.

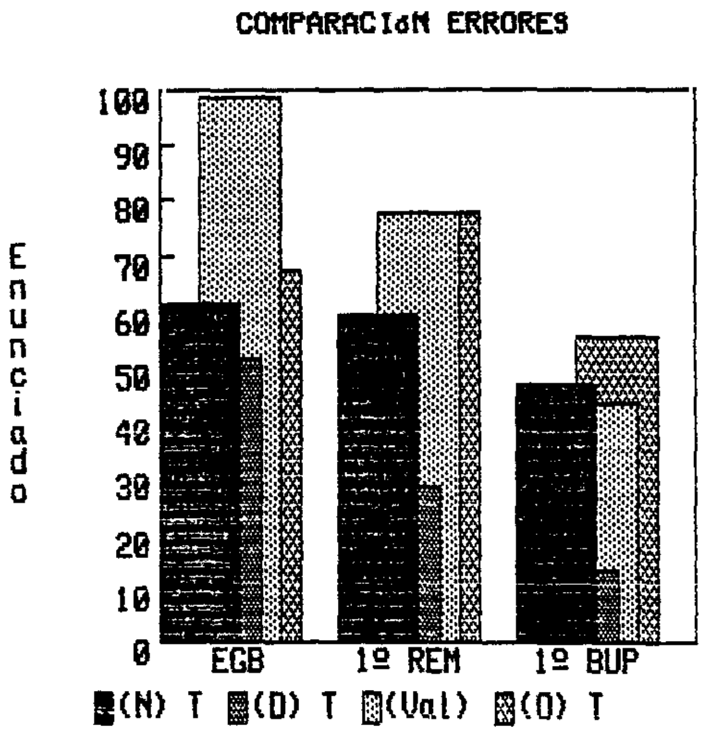
1er grupo: Alumnos de 7º y 8º de EGB.

2º grupo: Alumnos de 1º de Reforma (REM).

3er grupo: Alumnos de 1º de Bachillerato (BUP).

Se han reunido los cursos de EGB para que el número de alumnos por grupo fuera comparable en los tres casos. Aún así, se trabaja con porcentajes para la elaboración de las gráficas.

Como se puede ver en el diagrama de barras del gráfico obtenido, tres de los errores sufren una disminución en su aparición desde EGB hasta 1º de BUP pasando por 1º de REM. Son los errores: N, D y VAL.



Se ve que aparecen con más frecuencia en EGB, que disminuyen en 1º de REM y que todavía disminuyen más en 1º de BUP; pero de todos ellos, a pesar de la disminución, quedan suficientes manifestaciones, en 1º de BUP, como para constituir un problema digno de ser estudiado en profundidad.

Se van a estudiar los errores separándolos de uno en uno.

I.1.1. ERROR "VAL"

El error que sufre la mayor disminución al pasar de EGB a BUP es el error de "letra valorada" o error "Val". Su disminución, cuantificada en porcentaje, se puede calcular de la tabla siguiente:

V1	A	B	C	D	E
1	CURSO	(N) Todos	(D) Todos	(Val) Todos	(O) Todos
2	EGB	61,50	51,25	98,50	67,00
3	1º REM	59,00	28,60	77,50	77,50
4	1º BUP	46,50	13,00	43,50	55,50
5					

Tabla A

Vemos que pasa de ser cometido por el 98.5% de los alumnos de EGB, al 43.5% de los alumnos de BUP con un porcentaje de **disminución** del error del **55%**.

También sufre disminución de EGB a REM, pero en este caso la "mejoria" de los alumnos no es tan notable. Podemos calcular el porcentaje de disminución de la misma manera:

$$77.50 - 98.50 = - 21\%$$

que queda valorado en un **21%** de disminución frente al 55% producido para los alumnos de BUP.

Podemos decir que este error de asignar a la letra un valor arbitrario es el más afectado por la madurez de los alumnos y la enseñanza del álgebra en general. Los alumnos de 1º de BUP reciben mayor número de clases de

^[lgebra que los de 1º de REM y se aprecia que el error disminuye de forma más rápida. El mayor número de horas de clase significa más reflexión, quizá, de la lengua matemática.

Sin embargo, hay que hacer notar que, con la actual enseñanza, no se produce su desaparición, ni mucho menos, pues todavia, en 1º de BUP, encontramos un 43.5% de alumnos que siguen cometiéndolo.

I.1.2. ERROR "D"

El error de "letra desaparecida" o error "D" es el siguiente en porcentaje de disminución. Tomando los datos de la tabla anterior encontramos que la **disminución** de este error, de EGB a BUP, es de un 38.25% que se obtiene:

$$13 - 51.25 = -38.25\%$$

Y la disminución de EGB a REM, aunque menor, también se produce, como se ve en el anterior gráfico de comparación de errores y se comprueba de manera cuantificada:

$$28.60 - 51.25 = -22.65\%$$

El error de "letra desaparecida" es un error que sorprende, en cierto modo, porque los alumnos tienen una tendencia a la conservación de cualquier dato de un problema. Esta caracteristica ha sido revelada por Pascal, 1980 y catalogada como la conservación de la información.

Por esto decidimos realizar entrevistas con alumnos individualmente y, al interrogarles sobre esta desaparición, obtuvimos respuestas como:

"La letra no significa nada" o "la letra no vale nada".

Se ve, por tanto, que el alumno no recibe información con la letra. Así se explica que no sienta ningún deseo de conservarla.

Entre los errores estudiados, vemos que éste es el que más se aproxima a su desaparición total (Ver la anterior Tabla A). Encontramos en 1º de BUP la tasa más baja de alumnos: el 13% que lo cometen. También, comparando con los alumnos de REM, encontramos que es el error que da un porcentaje más bajo: 28.6%

Esto nos muestra que en este momento determinado del aprendizaje, es decir en 1º, bien sea de REM o de BUP, las letras comienzan a tener un sentido para el alumno. Si su manejo se hace dificil por no haber comprendido bien su función se cometen errores, pero no de hacerlas desaparecer sin más.

I.1.3. ERROR "N"

Este error de la letra "no tenida en cuenta pero escrita" -error que también llamamos "de acompañamiento"- disminuye con mucha más lentitud que los anteriores.

Tomando las cifras de la columna C de la Tabla A calculamos el porcentaje de disminución de EGB a 1º de BUP:

46.50 - 61.50 = -15%

Y el porcentaje de disminución de EGB a 1º de REM:

59.00 - 61.50 = -2.5%

Vemos que es un tipo de error que disminuye muy poco en comparación con los otros. Incluso de EGB a 1º de REM la disminución es casi imperceptible.

Este tipo de error tiene un refuerzo en la actual escritura del producto de un número (coeficiente) por una letra (parte literal), usada en los Polinomios. Esta escritura:

$3x$, $5x^2$, $12ab$, ...

expresa el producto por simple yuxtaposición, sin un signo explícito que así lo exprese. De este modo cuando un alumno debe escribir, por ejemplo,

$6(2+x)$

puede elegir, erróneamente, la forma: $12x$
escribiendo, simplemente, la "x" al lado del número resultante, lo que hará evidente el error, pero si tiene que expresar,

$6(3x)$

la forma: $18x$ será la correcta, aunque haya sido elegida con el mismo criterio erróneo de "escribirla al lado". El alumno, pues, puede escribir correctamente usando criterios equivocados cuya aparición sólo se manifestará en algunas ocasiones, no en todas.

Esta considero que es una de las razones de la persistencia de este error.

I.1.4. ERROR "O"

El cuarto error estudiado es el de "la letra como objeto" o error "O". Este error es el que menos disminuye con el paso de EGB a 1º de BUP. Se ve así en el gráfico de Comparación de Errores y vamos a cuantificarlo tomando las cifras de la columna F de la Tabla A:

$$55.50 - 67.00 = -11.50\ \%$$

En este error se ha producido una disminución también, pero menor que en cualquiera de los anteriores. Parece ser más arraigado que los otros. Incluso, en el paso de EGB a 1º de REM, encontramos que ha habido un aumento del error. Tomando las cifras correspondientes obtenemos:

$$77.5 - 67.0 = +10.5\%$$

En los errores observados anteriormente, siempre ha habido una disminución al pasar de EGB a 1º de REM y a 1º de BUP, aunque fueran de mayor o menos grado. Solamente en este caso encontramos un incremento positivo al pasar de EGB a REM.

Esta persistencia del error deberá ser tenida en cuenta a la hora de plantear ejercicios y tareas que deban combatirlo especificamente.

I.2. COMPARACIóN DE CONCEPCIONES

Hay tres "caracteres" de las preguntas que me ha interesado comparar. Son los "caracteres" "C", "VAR" e "IN". Se trata de tres concepciones de las letras importantes para su comprensión y uso.

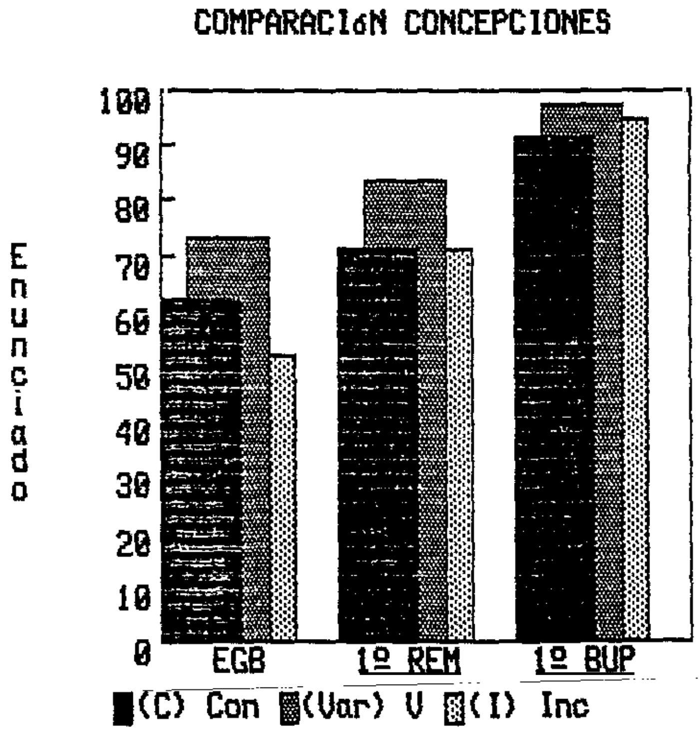
"C": Es la letra como CONJUNTO DE NúMEROS. En el análisis del cuestionario vemos que es una concepción difícil de alcanzar. Los errores son muy numerosos en los ejercicios propuestos para estudiarla, pues inicialmente vemos que los alumnos tienden a concebir la letra como UN número. Pueden aceptar que, al ser desconocido ESE úNICO número, se represente por una letra, pero no aceptan fácilmente que esa letra pueda tomar cualquier valor, dentro de un conjunto determinado de números.

"VAR": Es la letra como VARIABLE. Se trata de que la letra puede VARIAR su valor y, como resultado de esa variación, hay otra letra, que llamamos FUNCIóN de la primera, que también VARíA. La comprensión de esta concepción es fundamental en el estudio de las Funciones y en su representación gráfica.

"IN": Es la letra como INCóGNITA. Se trata de una concepción de la letra que suponemos más sencilla de adquirir que las anteriores, por el deseo espontáneo de los alumnos de conceder un valor a las letras, tal y como hemos visto al estudiar el carácter "Val".

Las operaciones que los alumnos deben hacer en las preguntas nº 8, 10, 14 y 19, que son las elegidas para estudiar el "carácter" "IN", se ha buscado que sean sencillas, con el fin de evitar dificultades de cálculo que pudieran ensombrecer los resultados del cuestionario.

El gráfico obtenido es el siguiente:



Vemos en él la evolución positiva de estas concepciones desde EGB a 1º de REM y, todavía más pronunciada la evolución de EGB a 1º de BUP.

Podemos cuantificar esa evolución con ayuda de las cifras de la Tabla B

V1	A	B	C	D
1	CURSO	(C) Conj.	(Var) Vrble.	(I) Incógn.
2	EGB	62,00	73,00	51,70
3	1º REM	71,00	83,40	71,15
4	1º BUP	91,50	97,35	94,80
5				

TABLA B

Vamos a hallar las diferencias entre cursos para cada una de las concepciones:

	C (Conjunto)		Var (Variable)		In (Incógnita)	
	Diferencias		Diferencias		Diferencias	
EGB						
	) 9		) 10.4		) 19.45	
1º REM		) **29.5**		) **24.35**		) **43.1**
	) 20.5		) 13.95		) 23.65	
1º BUP						

La concepción que sufre una <u>variación positiva más fuerte es la de Incógnita,</u> con un 43.1%.

Las otras dos concepciones varian también positivamente, pero en un 29.5% y 24.95%.

Esto merece un estudio más a fondo en el que se investiguen las razones de estas diferencias de evolución.

Yo apunto, como posible, que la enseñanza del álgebra elemental en 8º de EGB y en 1º de BUP hace mucho hincapié en el planteamiento y la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Lo que potencia y refuerza la concepción de la letra como incógnita.

Esto, que puede ser bueno a priori, se llega a convertir para muchos alumnos en un grave inconveniente. El alumno llega a identificar la aparición de una letra, "x" o "y", con la aparición de una ecuación y con la necesidad de resolverla, y se puede ver en clase con frecuencia, cómo un alumno, al que se le ha pedido la simplificación de una expresión algebraica en "x", la iguala a cero y la convierte en una ecuación a resolver, en la que la "x" ha quedado convertida en incógnita.

En la resolución de inecuaciones se puede ver un fenómeno semejante, derivado de un abuso de las ecuaciones, mediante el cual un alumno convierte cualquier relación, o expresión en "x", en una ecuación que intenta, con mejor o peor éxito, resolver.

Así, encontramos que la teoria de resolución de ecuaciones, se convierte en un **obstáculo didáctico**, en el sentido de G. Brousseau, para la enseñanza y aprendizaje de los polinomios, de las inecuaciones, etc.

I.3. ANALISIS SOBRE ENUNCIADOS GRAFICOS

Nos interesa saber si el tipo de enunciados, empleados para presentar los problemas a los alumnos, influye en el hecho de que éstos cometan más o menos errores, o si favorece algún tipo de error en particular.

Importan, sobre todo, los enunciados de tipo gráfico, pues la presentación de las letras con figuras constituye un caso muy diferente de la presentación de las letras sobre un texto.

Vamos pues a analizar los diferentes errores que se pueden cometer comparando los resultados obtenidos en ejercicios de enunciado gráfico, con los obtenidos en ejercicios enunciados en lengua materna o en lengua literal, que serán englobados en ejercicios de enunciado "no-gráfico", por oposición a los anteriores.

I.3.1. COMPARANDO EN EL ERROR "VAL"

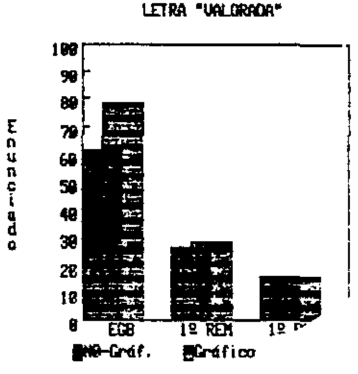
Comenzamos con el error de letra valorada, el que llamamos error "Val".

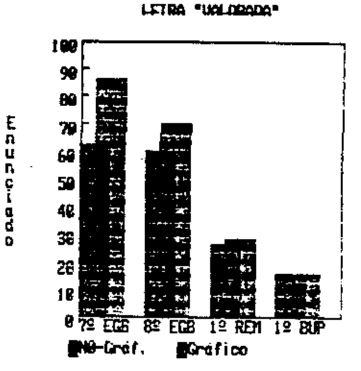
Para esta comparación se han elegido las preguntas nº 3, 6, 10 y 16, de enunciado no-gráfico y las preguntas nº 23, 24, 25 y 26, de enunciado gráfico. En la matriz de comportamientos ha sido reservada una columna, en cada pregunta, para recoger el comportamiento de letra valorada. A través de esta columna podemos saber cuántos alumnos han seguido este tipo de comportamiento en cada curso y en cada ejercicio.

Los datos han sido procesados a través del Open Access II plus y los gráficos obtenidos figuran en la página siguiente.

En ellos se observa que se dan más casos de letra "valorada" con enunciado gráfico que en otros

enunciados, en prácticamente todos los cursos. Solamente en 1º de BUP consiguen igualarse estos valores.





Se observa, también, que este comportamiento erróneo, de "letra valorada", va disminuyendo en su aparición desde 7º de EGB hasta 1º de BUP, tanto en enunciado gráfico como no-gráfico. Desde el momento en que vemos que los resultados, en ambos enunciados, llegan a igualarse en 1º de BUP, se comprende que disminuye con más rapidez en enunciados gráficos que en los otros enunciados.

En el gráfico en el que se encuentran separados 7º y 8º de EGB, se aprecia que la disminución más rápida se da después de 8º de EGB. Aquí se produce una fuerte disminución, tanto en comparación con 1º de REM como con 1º de BUP. Esto nos hace pensar que una componente importante para la superación de este error es la edad de los alumnos, es decir su madurez. La otra componente es, evidentemente, la enseñanza recibida, que se aprecia más eficaz en BUP que en REM.

Las tablas numéricas C y D que figuran a continuación, corresponden a las frecuencias que han dado lugar a los diagramas de barras que acabamos de analizar.

V1	A	B	C
1	CURSO	NO-Gráf.	Gráfico
2	EGB	61,00	78,10
3	1º REM	26,50	28,50
4	1º BUP	15,60	15,60
5			

TABLA C

V1	A	B	C
1	CURSO	NO-Gráf.	Gráfico
2	7º EGB	62,00	86,50
3	8º EGB	60,00	69,70
4	1º REM	26,50	28,50
5	1º BUP	15,60	15,60

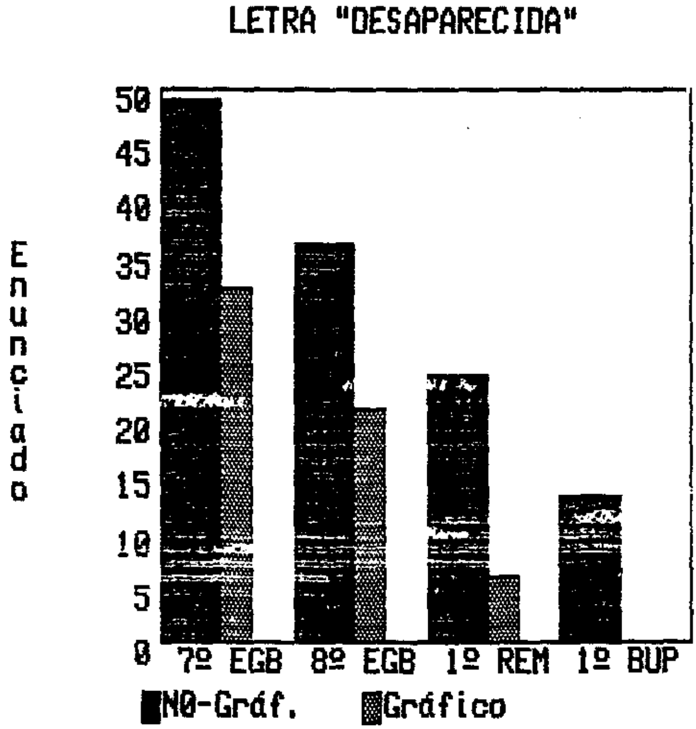
TABLA D

I.3.2. COMPARANDO EN EL ERROR "D"

Vamos a comparar la frecuencia de aparición del error "letra desaparecida", el llamado error "D", entre cuestiones de enunciado gráfico y cuestiones de enunciado no-gráfico.

Para esto hemos tomado las preguntas nº 3, 16, y 22, de enunciado no-gráfico y las preguntas nº 23, 24 y 25, de enunciado gráfico. También, como en el caso anterior, el recuento inicial se ha hecho a través de la columna especial preparada para ello en la matriz de comportamientos de los alumnos.

El gráfico obtenido en este caso es el que figura en la página siguiente, y nos muestra que el **error de** "letra desaparecida" se da con menos frecuencia en los enunciados gráficos que en los enunciados no-gráficos.



También se aprecia que el error de "letra desaparecida" ha ido disminuyendo, hasta el punto de no presentarse en el caso de enunciados de tipo gráfico en los alumnos de 1º de BUP.

El hecho de que este error aparezca con menos frecuencia en los enunciados de tipo gráfico, parece indicar que la entidad del dibujo confiere, a su vez, cierta realidad a las letras, que de este modo adquieren un significado que evita que el alumno las haga desaparecer.

La tabla de frecuencias relativas correspondiente al gráfico anterior es la TABLA E

V1	A	B	C
1	CURSO	NO-Gráf.	Gráfico
2	7º EGB	49,00	32,00
3	8º EGB	36,00	21,00
4	1º REM	24,00	6,00
5	1º BUP	13,00	0,00
6			

TABLA E

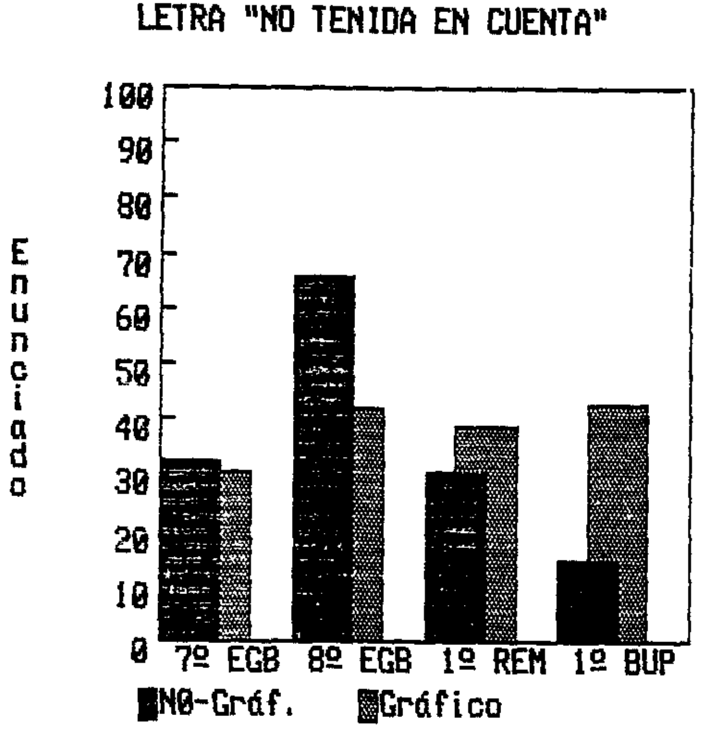
En ella se observa que el mayor valor es 49,00 lo que nos hace fijar la atención en que el máximo valor del gráfico en el eje de ordenadas es 50. Se ve, pues, que este gráfico se encuentra ampliado respecto a los otros que hemos estado manejando, cuya escala era sobre 100. A pesar del aspecto aparentemente semejante del gráfico, se aprecia que el error de "letra desaparecida" se presenta con menor frecuencia que los otros errores que estamos estudiando.

I.3.3. COMPARANDO EN EL ERROR "N"

Compararemos aquí los enunciados gráficos y no-gráficos en su influencia sobre la comisión del error "letra no tenida en cuenta", que llamamos error "N".

Para esto hemos elegido las preguntas nº 3, 5 y 22 del cuestionario, como preguntas de enunciado no-gráfico, y las preguntas nº 23, 24 y 25, de enunciado gráfico.

Como en los dos casos anteriores, el recuento de alumnos se ha hecho a través de una columna especialmente preparada para recoger este dato en la matriz de comportamientos de los alumnos. Después de introducidos los datos en el programa Open Access II plus el gráfico obtenido correspondiente es



En general, se observa una distribución muy irregular. Este *error* es el de escribir las letras al lado de los números correspondientes, pero sin tenerlas en cuenta a la hora de hacer los cálculos. Por esto también le llamamos error de "letra de acompañamiento".

La tabla de frecuencias correspondiente al gráfico es la siguiente

V1	A	B	C
1	CURSO	NO-Gráf.	Gráfico
2	7º EGB	32,00	30,00
3	8º EGB	66,00	42,00
4	1º REM	30,50	38,50
5	1º BUP	14,20	43,00

TABLA F

En las preguntas de enunciado no-gráfico, que son las primeras columnas y más obscuras, vemos que los alumnos que cometen este error con más frecuencia son los de *8º curso de EGB (66%). Y, sin embargo, los alumnos de 7º de* EGB la cometen en mucho menor grado (32%). Esto nos hace pensar que **este tipo de error no se produce siguiendo el pensamiento espontáneo del alumno sino inducido por la enseñanza que los alumnos reciben** en 8º curso.

A través de la enseñanza saben que deben manejar las letras; que estas letras son elementos matemáticos que tienen un sentido. *Pero no saben todavía cómo hacer las* manipulaciones correspondientes, y colocan las letras al lado de los números, como si fueran letras de acompañamiento.

Poco a poco el error se va reduciendo después hasta llegar, en *1º de BUP*, a ser cometido solamente por el

14% de los alumnos. De este modo, la asimilación de la enseñanza recibida parece actuar produciendo esta reducción.

En los enunciados de tipo gráfico, la comisión del error sigue un proceso completamente diferente, como se puede apreciar por las segundas columnas, más claras.

Después de un primer aumento en 8º de EGB, semejante al anterior, aunque no tan fuerte y de una disminución en 1º de REM, también semejante, pero menor que en el caso anterior, tenemos un sorprendente aumento de este error entre los alumnos de Bachillerato, que llega hasta el 43% de ellos, que lo cometen.

Aqui parece que la enseñanza vuelve a contribuir, en primera instancia, a la producción del error (en 8º de EGB). Por otra parte, y al contrario que en el caso anterior, no tiene una acción suficiente como para irlo disminuyendo progresivamente.

En estos enunciados de tipo gráfico vemos que el error de "letra no tenida en cuenta" persiste e, incluso, se comete con más frecuencia en 1º de BUP (43%) que en 8º de EGB (42%).

En nuestra opinión ésto puede deberse a, por un lado, la superación de los otros tipos de errores, y, por otro, a que no se ha aprendido el manejo correcto de las letras.

Este manejo puede ser obstaculizado por la persistencia de la concepción de la letra como segmento:

concepción que se hace presente en los enunciados de tipo geométrico. Con esta concepción de las letras, resulta particularmente difícil expresar operaciones simbólicamente, pues algunas de ellas carecen de sentido geométrico. Por *ejemplo,* $\sqrt{x}$, *potencias de x superiores a tres, o expresiones* como $2x^2+3x/x^2$.

Esta concepción de la letra, como segmento, tiene su tradición en la matemática griega y, encontrar entre los alumnos este tipo de dificultad, supone el reconocimiento de un obstáculo encontrado históricamente, como hemos visto en el capitulo 1º. Recordemos que allí se ha visto cómo Viète respetaba la homogeneidad de las fórmulas, lo cual, presumiblemente, era consecuencia de la sujeción a la concepción geométrica.

I.4. CONCLUSIONES PARCIALES.

A.- El error que hemos llamado VAL, "de valoración de las letras", es el que más disminuye al pasar de EGB a BUP, pero aún así no llega a desaparecer pues en BUP todavía lo cometen el 43.5 %

Este error, "VAL", se comete con mayor frecuencia en enunciados de tipo gráfico que en enunciados no gráficos.

En los dos tipos de enunciados, la disminución del error es continua desde 7º de EGB, a 8º de EGB ,a 1º de REM y a 1º de BUP; siendo más fuerte de 8º de EGB a 1º de BUP.

B.- El siguiente error que más disminuye es el de "letra desaparecida", "D". Además es el que más se aproxima a su desaparición total en BUP; lo cometen el 13 % de los alumnos.

Este error se da con menos frecuencia en enunciados gráficos que en los otros. Parece que la entidad del dibujo confiere consistencia a las letras, y así sucede que NO desaparecen.

C.- El error de "letra de acompañamiento", "N", adquiere su mayor valor en 8º de EGB, con lo que sugiere que NO se trata de un error ESPONTANEO, sino inducido por la enseñanza, en su iniciación al uso de las letras.

Este error disminuye con mucha más lentitud que otros. Hay que tener en cuenta que viene reforzado por algunos modos de escritura: el producto (3x).

Además, en 1º de BUP se mantiene con mucha fuerza, en los enunciados gráficos. Puede ser una reminiscencia de un obstáculo reconocido históricamente. Viète tenía dificultades de homogeneidad de fórmulas por su concepción geométrica de las letras.

D.- El error que menos disminuye es "la letra como objeto", "O". Incluso aumenta al pasar de EGB a 1º de REM. Una posible causa es la insistencia en sustentar el aprendizaje en entidades concretas, en lugar de favorecer la simbolización y la abstracción.

E.- Las concepciones: "la letra como conjunto de números", "la letra como variable" y "la letra como incógnita" evolucionan positivamente al paso de EGB a REM y, aún más, a BUP. La que más evoluciona es "I". Yo apunto como posibilidad que, durante la enseñanza, en 8º de EGB y en 1º de BUP se insiste mucho en el dominio de las ecuaciones.

II. UTILIZACIÓN DE TESTS NO-PARAMÉTRICOS: TEST DE χ^2 Y TEST DE ALEATORIEDAD.

Es interesante saber si un resultado del estudio estadístico es significativo o no. En concreto, se trata de analizar si la diferencia en el número de respuestas del tipo: "letra valorada", entre preguntas que tienen enunciado "gráfico" -carácter G-, o "no-gráfico" -caracteres L o LEN-, es significativa o no.

Se van a observar las respuestas a 12 preguntas, que dan ocasión de cometer ese error que hemos calificado como "valoración de letra"; 8 de las cuales corresponden al enunciado "no gráfico" y 4 de ellas al enunciado "gráfico".

En las 8 preguntas de enunciado "no gráfico", "No-G", se engloban los enunciados en lenguaje materno o enunciados de carácter LEN, y los enunciados que contienen alguna letra o enunciados de carácter L. En las 4 preguntas de enunciado "gráfico", "G", aparecen también letras pero representando a segmentos y expresados mediante un dibujo, bien sean triángulos, rectángulos u otras figuras.

II.1. TEST DE χ^2.

Lo primero que se va a hacer es un rápido "test de χ^2".

Se hace la siguiente hipótesis, H_0: No hay una diferencia significativa. Y se pasa a estudiar esta hipótesis.

El número total de alumnos que ha respondido con "letra valorada" a ALGUNA DE LAS OCHO CUESTIONES, de carácter no gráfico, es 124.

El número total de alumnos que ha respondido con "letra valorada" a ALGUNA DE LAS CUATRO CUESTIONES de carácter gráfico, es 81.

Estos números representan la contingencia, V_o. Se calcula cuáles serían los valores teóricos, V_t esperables si el reparto de respuestas hubiera sido uniforme.

Los valores teóricos se calculan sobre el total de alumnos: 124 + 81 = 205, obteniendo la proporción correspondiente a 8 preguntas sobre 12:

$$8/12 = 2/3 \quad ; \quad 2/3 \text{ de } 205 \approx 136'6$$

y la proporción de 4 preguntas sobre 12:

$$4/12 = 1/3 \quad ; \quad 1/3 \text{ de } 205 \approx 68'3$$

El cuadro quedaría como sigue:

æ^{2}			
V_o	124	81	205
V_e	136'6	68'3	205

Calculando ahora æ^{2}:

$$\text{æ}^2 = \Sigma \frac{|V_e - V_o|^2}{V_e} = \frac{12'6^2}{136'6} + \frac{12'7^2}{68'3} = \frac{158'76}{136'6} + \frac{161'29}{68'3} =$$

$$= 1'16 + 2'36 = 3'52$$

Mirando en la tabla de valores de æ^{2} para ver si 3'52 es significativo o no, se encuentra que nuestro valor está en la fila 1 (con dos preguntas hay 1 grado de libertad, por ser n-1, es decir, 2-1), entre las columnas ".10" y ".05"

Tabla de valores críticos de la æ^{2} de Pearson

n	.99	.98	....	.10	.05	...
1	.00016	.00063	...	2'71	3'84	...

Está justo en el límite del 5 y no nos permite decidir sobre la significación o no de la distribución de respuestas obtenida. No es suficiente para aceptar o rechazar la hipótesis cero (H_o). Es decir, no sabemos si la diferencia es significativa o no.

A continuación se hace, pues, un test de aleatoriedad tratando de "afinar" nuestro criterio de significación.

II.2. TEST DE ALEATORIEDAD.

El número total de alumnos es 196. Se agrupan las preguntas en dos "clases": "Clase A" con las 8 preguntas de carácter "no gráfico" y "Clase B" con las 4 preguntas de carácter "gráfico". El número de alumnos que han producido la respuesta "letra valorada" según cada una de las preguntas es el siguiente:

Clase A								Clase B			
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
9	43	25	55	27	40	15	4	30	27	28	63

Se calcula la suma de los alumnos de cada "clase" de preguntas.

Clase A = 9 + 43 + 25 + 55 + 27 + 40 + 15 + 4 = **218**

Clase B = 30 + 27 + 28 + 63 = **148**

Se ordenan según orden creciente dentro de cada "clase":

Clase A								Clase B			
h	a	g	c	e	f	b	d	j	i	k	l
4	9	15	25	27	40	43	55	27	28	30	63

Esta es la distribución que proviene de la contingencia.

Si estos números se repartieran aleatoriamente, sobre las 12 preguntas, podriamos tener muchas particiones posibles. Ordenándolas entre sí, en orden creciente, la primera distribución seria:

4, 9, 15, 25, 27^-, 27^+, 28, 30, 40, 43, 55, 63

En la primera clase, la suma de los ocho números más pequeños es:

4+9+15+25+27+27+28+30 = 165

y la suma de los ocho mayores sería:

63+55+43+40+30+28+27+27 = 313

nuestra suma: 218, de los ocho números de la clase A está naturalmente comprendida entre ambas.

Ahora debemos saber cuál es el número de particiones que dan menos de 218.

Si el número de ellas es menor del 5%, querrá decir que la que suma 218 (nuestra partición) cae dentro de ese 5% y por tanto que se trata de una partición extremadamente pequeña y esto supondria tener que rechazar la hipótesis cero (H_o: "No hay una diferencia significativa"). Querría decir, pues, que la diferencia era significativa.

Para calcular esto vamos a ver cuántas parti-

ciones forman el 5% del número de particiones total.

Empezamos por calcular el número de particiones posibles:

$$C_{12,8} = C_{12,4} = \frac{12.11.10.9}{4!} = \frac{11880}{24} = 495$$

Calculando ahora el 5% de este número:

$$\frac{495.5}{100} = 24'75$$

Buscamos ahora las 25 particiones que forman ese 5% para ver si la nuestra se encuentra entre ellas. Pero las vamos a buscar a través de la clase B, pues en ella va a ser más sencillo, ya que hay solamente 4 números para formar las combinaciones, frente a los 8 que deberiamos manejar en la clase A. En este caso, al igual que lo hemos analizado para la clase A, en la clase B también habrá un 5% de particiones cuyas sumas serán las mayores posibles y así vamos a comprobar si la suma correspondiente a nuestro caso:

$$27+28+30+63 = 148$$

se encuentra entre las 25 correspondientes a ese 5% o no.

La primera combinación de números sería la correspondiente a los cuatro números mayores:

	63, 55, 43, 40	cuya suma es		201
La segunda sería:	63, 55, 43, 30	"	"	191 (−10)
y siguiendo así:	63, 55, 43, 28	"	"	189 (−12)

63, 55, 43, 27+	"	"	188 (-13)
63, 55, 43, 27-	"	"	188 (-13)
63, 55, 40, 30	"	"	" "
...			
...			

Obtenemos que la nº 25 es: 55, 43, 40, 28 cuya suma es 166 y, continuando con la búsqueda, encontramos "nuestra partición" en el lugar 40º de las particiones posibles.

Se ve, por tanto, que no está dentro de las 25 que forman ese 5%, lo cual indica que la diferencia de respuestas no es significativa.

II.3. TEST DE HOMOGENEIDAD.

Con ayuda de χ^2 podemos también hacer un test de homogeneidad a los grupos de preguntas, según el número de respuestas dadas por los alumnos.

Tomemos, primero, las 8 preguntas de la clase A, que eran las preguntas enunciadas con lenguaje materno (LEN) o con lenguaje literal (L) y vamos a estudiar si han *resultado homogéneas o no.*

Recordemos que el número de alumnos que habia cometido el error de "valorar" la letra en esas preguntas era en total 218.

El valor teórico que habría que esperar en las 8 preguntas para la homogeneidad sería por tanto:

$$V_t = \frac{218}{8} = 27'25$$

El cálculo de χ^2 sería el siguiente:

$$\chi^2 = \frac{(9-27)^2}{27} + \frac{(43-27)^2}{27} + \frac{(25-27)^2}{27} + \frac{(55-27)^2}{27} +$$

$$+ \frac{(27-27)^2}{27} + \frac{(40-27)^2}{27} + \frac{(15-27)^2}{27} + \frac{(4-27)^2}{27} =$$

$$= \frac{18^2+16^2+2^2+28^2+0+13^2+12^2+23^2}{27} = \frac{2210}{27} \approx 81'8$$

Comparando con la tabla de χ^2 para 7 grados de libertad (fila 7, por haber ocho preguntas):

	.99	.98	.95	...	...	.05	.02	.01	.001
7	1'24	1'56	...	...	...	...	16'62	18.48	24'32

nos encontramos una gran diferencia con los valores de la tabla, por tanto, la diferencia es significativa y no hay **homogeneidad** entre las 8 preguntas.

Del mismo modo se puede estudiar la homogeneidad de las 4 preguntas que tienen el enunciado "gráfico":

El valor teórico de homogeneidad se obtendrá dividiendo el número suma de las respuestas (30+27+28+63), 148 por el número de preguntas, 4.

$$148/4 = 37$$

El cálculo de χ^2 será:

$$\chi^2 = \frac{(27-37)^2}{37} + \frac{(28-37)^2}{37} + \frac{(30-37)^2}{37} + \frac{(63-37)^2}{37} =$$

$$= \frac{10^2+9^2+7^2+26^2}{37} = \frac{906}{37} \approx 24'48$$

Ahora existen 3 grados de libertad pues con cuatro preguntas, n−1=3. Buscando en la tabla de χ^2:

	.99	.98	.95	...	.10	.05	.02	.01	.001
3	.12	.18	.35	...	6'25	7'82	9'84	11'34	16'27

Se aprecia que nuestro valor supera ampliamente la tabla y, por tanto, **tampoco hay homogeneidad entre estas 4 preguntas.**

II.4. CONCLUSIONES PARCIALES.

De los dos primeros tests, el de χ^2 y el de aleatoriedad, se ha extraído la misma conclusión: La diferencia de resultados obtenida en la comisión del error "VAL", entre enunciados gráficos y no gráficos, no es significativa. A esta conclusión se llega afinando mucho el tipo de análisis, pero hace que utilicemos con precaución ese resultado, tratando de confirmarlo con los otros análisis que vienen a continuación.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

III. ESTUDIO CON EL STATITCF DEL CUESTIONARIO: EL USO DE LAS LETRAS.

Con este estudio se trata de valorar el método, desde el punto de vista didáctico, comparando sus resultados con los obtenidos mediante los otros estudios estadísticos que se han empleado.

Interesa hacer un estudio de la utilidad del método, para enjuiciar el propio cuestionario, los tipos de preguntas y sus características así como las relaciones entre ellas, lo cual es primordial. Comprobar si se puede analizar, también, qué preguntas son más relevantes para el análisis global; qué preguntas son semejantes a otras y si esa semejanza es tan fuerte que hace inútil el empleo de alguna de ellas.

En general, conviene estudiar las preguntas del cuestionario desde el punto de vista del didáctico, análisis "a priori"; y desde el punto de vista de la contingencia, comparándolos.

Se combina el estudio de los alumnos con el estudio de las preguntas. Se trata de un enfoque nuevo del análisis estadístico para un aprovechamiento didáctico de los resultados.

Se estudian los datos estadísticos, obtenidos de las respuestas de los alumnos por medio de la matriz Acierto y Fracaso, y se comparan con los obtenidos de una matriz, creada por nosotros antes de pasar el cuestionario, que se llama "matriz a priori". De esta comparación se obtienen conclusiones sobre los alumnos y, lo que es muy importante, sobre las preguntas del cuestionario que asi se ven analizadas desde el punto de vista de la contingencia.

Aplicando estas conclusiones se corrigen los cuestionarios, eliminando aquellas preguntas coincidentes o ampliándolos con preguntas diferenciadoras de los "caracteres" que no están perfectamente definidos.

Para hacer este estudio vamos a utilizar un paquete estadístico para ordenador compatible (PC) cuyo nombre es STATITCF.

Este estudio se inicia, como hemos dicho, sobre la "matriz a priori". Con ella se hace un Análisis en Componentes Principales, ACP y un Análisis Factorial de Correspondencias, AFC.

Después, sigue el estudio de los resultados de los alumnos. Para esto usamos una "matriz Acierto Fracaso" en la que figuran los alumnos y las preguntas. Para cada pregunta se anota, únicamente, si la respuesta es acertada o no. También sobre ella se hacen los dos tipos de análisis: ACP y AFC.

Una parte importante del estudio global consiste en la comparación y combinación de los resultados obtenidos sobre estas dos matrices.

El concepto de "matriz a priori" está explicado en el "ANALISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO SOBRE EL USO DE LAS LETRAS". A continuación describiremos la que hemos empleado aquí.

III.1. MATRIZ A PRIORI. DESCRIPCIÓN.

La "matriz a priori-2" (Anexo VI y pág. sig.), que vamos a describir, y luego a estudiar, con estos análisis estadísticos ha sido elaborada tomando 25 preguntas del cuestionario "El uso de las letras", que forman otras tantas columnas, y 12 "caracteres" de esas preguntas, que constituyen las filas de la matriz, y que representan aquello que queremos estudiar a través de las preguntas.

Tenemos 25 preguntas, aunque el cuestionario tiene 26, porque la pregunta nº 5 ha sido dividida en dos apartados, y las preguntas nº 1 y nº 20 no han sido incluidas debido a sus especiales características.

En la pregunta nº 1 la tarea a realizar está enunciada implícitamente, y el alumno debe interpretar las expresiones dadas para reconocerla. Este tipo de enunciado produce respuestas muy diversas que no es interesante reducir hasta convertirlas en una opción que pueda formar parte de este tipo de estudio.

El enunciado de la pregunta nº 20 se ha planteado para analizar diferencias entre la capacidad comprensiva y la capacidad lectora como ya hemos dicho en el análisis

"CARACTÉRES"

VAP - S_1	IN - S_7
NP - S_2	LEN - S_8
DEP - S_3	LI - S_9
OP - S_4	G - S_{10}
C - S_5	NUM - S_{11}
VAR - S_6	S - S_{12}

PREGUNTAS

2ª NU1	3ª LE1	4ª ORD	5ª NU2
5ª C LE2	6ª DES	7ª OB1	8ª IN1
9ª EXP	10ª IN2	11ª VA2	12ª CAD
13ª NU3	14ª IN3	15ª OB2	16ª TRE
17ª VA3	18ª VA4	19ª IN4	21ª VJ
22ª OB3	23ª GE1	24ª GE2	25ª GE3
26ª GE4			

MATRIZ A PRIORI - 1

CARACTERES \ PREGUNTAS	1A	1B	2	3A	3B	3C	3D	4	5	5C	6	7	8	9	10	11	12A	12C	13	14	15A	15B	16	17	18	19	20	21A	21B	22	23A	23B	23C	24A	24B	24C	25A	25B	26
VAL Letra con valor adjudicado		1		1	1	1	1			1	1	1		1	1	1							1							1		1	1		1	1	1	1	1
N Letra escrita (pero no tenida en cuenta) letra de acompañamiento		1		1	1	1	1			1				1																1		1	1		1	1		1	
D Letra desaparecida		1		1	1	1	1																1							1			1			1		1	
O Letra como objeto												1									1									1									
C Letra como conjunto de numeros								1			1					1		1																					
VAR Letra como variable											1					1								1	1														
I Letra como incognita													1		1					1						1													
LEN Enunciado en lenguaje materno			1														1	1	1	1	1	1	1				1	1	1										
LI Enunciado con letras	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								1	1	1				1									
G Enunciado gráfico																															1	1	1	1	1	1	1	1	1
NUM Respuesta numerica	1		1						1				1		1		1		1	1		1				1	1		1		1			1					
S Respuesta simbolica		1		1	1	1	1			1	1	1		1		1		1			1		1					1				1	1		1	1	1	1	1

previo. Pueden darse dos tipos de respuestas reveladoras de esas capacidades. El análisis de la aparición de esos dos tipos de respuestas se hace independientemente de este análisis estadístico pues aquí vamos a usar el dato de acierto o error en las preguntas.

Se han escogido, para cada pregunta, nombres significativos de dos o tres letras, con el fin de facilitar su identificación en los gráficos que se obtengan. Los nombres son los siguientes:

Pregunta	Nombre	Pregunta	Nombre	Pregunta	Nombre
2ª	NU1	9ª	EXP	17ª	VA3
3ª	LE1	10ª	IN2	18ª	VA4
4ª	ORD	11ª	VA2	19ª	IN4
5ª	NU2	12ª	CAD	21ª	VJ
5ª c	LE2	13ª	NU3	22ª	OB3
6ª	DES	14ª	IN3	23ª	GE1
7ª	OB1	15ª	OB2	24ª	GE2
8ª	IN1	16ª	TRE	25ª	GE3
				26ª	GE4

Estos números de identificación de las preguntas *corresponden al cuestionario (Anexo VII) ya preparado para* el estudio estadístico STATITCF. La diferencia con el cuestionario pasado a los alumnos es una distinta organización de los apartados de las preguntas 2ª , 3ª y 5ª, para diferenciar los apartados de respuesta numérica de los de respuesta simbólica; y una división de la pregunta nº 5 en

"5ª", con los dos apartados de respuesta numérica, y "5ªc" con el apartado de respuesta "con letras".

CARACTERES

Los "caracteres" que vamos estudiar en las preguntas son los siguientes:

VAP, NP, DEP, OP, C, VAR, IN, LEN, LI, G, NUM y S.

Se ha modificado un poco la nomenclatura de los "caracteres".

- Los cuatro primeros son caracteres de error. Representan cuatro tipos de errores que se pueden cometer con las letras y que me interesa estudiar. Para que se asemejen en la escritura, he usado la letra "P" que he añadido a los caracteres "N" y "O". Para los caracteres "VAL" y "D" he optado por las transformaciones "VAP" y "DEP" respectivamente. De esta manera la "P" final indica algún tipo de error.

Conviene recordar, brevemente, las característi- cas de cada uno de ellos.

VAP. Es el error de "valoración de la letra". Diremos que tienen este carácter aquellas preguntas en las que sea posible que el alumno substituya alguna letra por un número elegido por él siguiendo criterios personales.

NP. Es el error de "letra no tenida en cuenta pero escrita" o "letra de acompañamiento". Tienen este carácter aquellas preguntas en las que es posible que el alumno cometa el error de escribir la letra, poniéndola simplemente al lado de los números, y sin tenerla en cuenta a la hora de efectuar los cálculos.

DEP. Es el error de "letra desaparecida". Tienen este carácter las preguntas en las que el alumno tiene la posibilidad de cometer el error de hacer desaparecer la letra, y quedarse solamente con los números en la respuesta.

OP. Este carácter lo tienen aquellas preguntas en las que sea posible cometer el error de tomar "la letra como objeto". Llamamos así al error de considerar la letra como inicial de algún objeto. Por ejemplo: 6t se lee como "seis tomates" en lugar de interpretar: "el número seis multiplicado por el número t".

- Después vienen los <u>caracteres de interpretación correcta.</u>

C. Las cuestiones que tienen este carácter son aquellas en las que la letra se usa como un "conjunto de números".

VAR. Carácter que asignamos a las preguntas en las que una letra es empleada como "variable" que actúa para otra letra.

IN. Diremos que tienen este carácter aquellas preguntas en las que la letra es usada como "incógnita" de valor único a calcular.

- Los siguientes son <u>caracteres de enunciado.</u>

LEN. Asignamos este carácter a las preguntas preparadas con un enunciado en "lengua materna", es decir, frases de uso habitual.

LI. Decimos que tienen este carácter las preguntas presentadas con un enunciado en el que intervienen expresiones simbólicas o relaciones con letras, que el alumno debe interpretar.

G. Diremos que tienen este carácter las preguntas en cuyo enunciado aparecen figuras o representaciones gráficas.

- Por último tenemos los dos <u>caracteres de respuesta</u>.

NUM. Tienen este carácter asignado aquellas preguntas cuya respuesta debe ser uno o varios números.

S. Diremos que tienen este carácter aquellas preguntas cuya respuesta deba ser escrita mediante letras o expresiones simbólicas.

Con estos 12 "caracteres" y las 25 preguntas formamos la "matriz a priori-2". El paquete de análisis SATITCF nos va a permitir hacer un estudio de ella y, después, compararla con la matriz de Acierto y Fracaso de los alumnos.

La introducimos en el ordenador con el nombre de CARPRE (Caracteres de las preguntas).

Como esta matriz ha sido confeccionada con los "caracteres" elegidos por mí, el hecho de que las preguntas resulten coincidentes, o muy próximas, en este análisis, querrá decir que están ligadas por esos "caracteres" o que, según esos "caracteres", las preguntas son semejantes y deberían ser contestadas de la misma forma por los alumnos.

Al estudiar después los datos estadísticos provenientes de las respuestas de los alumnos, es decir de la matriz Acierto y Fracaso, podemos encontrar que estas preguntas aparecen igualmente ligadas, lo cual querrá decir que la explicación que suponen nuestros "caracteres" es correcta; o, podría ser que las preguntas no aparecieran ligadas del mismo modo, con lo que veríamos que nuestros caracteres no daban una buena explicación para ese hecho y habría que buscar otra justificación para esas diferencias.

Comenzamos el análisis de la matriz.

III.2. ESTUDIO ACP DE LA MATRIZ A PRIORI.

Con este ACP vamos a estudiar:

Primero.- Las relaciones de dependencia o independencia entre las preguntas. Es decir, las ligaduras existentes entre ellas. Las preguntas son las "variables" en el análisis estadístico. Estudiaremos, por tanto, las relaciones de dependencia entre estas "variables".

Segundo.- Las relaciones existentes entre los "caracteres" de las preguntas, que son los "individuos" en el análisis. Veremos si estos "caracteres" son muy diferentes entre sí o son semejantes. Si se agrupan o son muy independientes.

Después, con el AFC de la misma "matriz a priori", vamos a analizar:

Primero: En qué medida los "caracteres" que hemos elegido contribuyen a la formación de los grupos de preguntas.

Segundo: Cuáles son las ligaduras principales entre los "caracteres" y las preguntas.

Estas observaciones, sobre la "matriz a priori", tienen como objetivo el perfeccionamiento de ésta a través de posibles modificaciones. Por ejemplo, pueden ser eliminados algunos "caracteres", si se aprecia que resultan coincidentes con otros, pues esto querría decir que iban a darnos la misma información que aquellos y que, por tanto, resultan superfluos.

También, sobre las preguntas, pueden darse situaciones semejantes con preguntas coincidentes (superpuestas en los gráficos). Dos preguntas resultan coincidentes cuando tienen los mismos "caracteres".

En este caso, no siempre es aconsejable optar por la eliminación de alguna pregunta, pues puede ser que parejas de ellas, coincidentes en el análisis a priori, resulten luego distanciadas en el estudio de los datos de los alumnos, y esto es interesante descubrirlo, pues indica que la previsión de "caracteres" realizada no explica totalmente los resultados experimentales. Lo que conduce a la revisión *de los "caracteres" y a la búsqueda de otros "caracteres"* explicativos posibles.

Vemos, pues, que las observaciones sobre la "matriz a priori" pueden ayudar a simplificar los cuestionarios demasiado amplios, descubriendo preguntas coincidentes que pueden ser eliminadas.

También pueden ayudar a completar aquellos cuestionarios en los que interese mayor diferenciación entre algunos "caracteres", añadiendo preguntas que representen variaciones o diferencias entre ellos.

Pueden darse proximidades entre preguntas y caracteres. ¿Qué quiere decir que una pregunta se encuentre próxima a un "carácter" en los gráficos?

La explicación a este hecho no es única. Por ejemplo, cuando un "carácter" se encuentra localizado en pocas preguntas y, a su vez, alguna de esas preguntas tiene pocos "caracteres" asociados, se produce una casi identificación del "carácter" con la pregunta y aparecen juntos en el gráfico.

El caso extremo sería un "carácter" que estuviera representado por una sola pregunta y, a la vez, esa pregunta no representara ningún otro "carácter". La pregunta y el "carácter" aparecerian identificados en todos los planos. Las respuestas a esa pregunta identificarian a los alumnos que habían actuado según ese "carácter".

Pero esta situación extrema no es frecuente. En general tenemos "caracteres" representados en varias preguntas y preguntas que representan a varios "caracteres", con lo que se dan con más frecuencia situaciones de proximidad que situaciones de identificación.

Empezamos por observar la importancia relativa de los ejes leyendo la CONTRIBUCIÓN A LA VARIACIÓN TOTAL (Gráfico 2) que es la siguiente:

Eje 1	Eje 2	Eje 3	Eje 4	Eje 5
28.4%	23.5%	15%	11.2%	5.9%

Se ven dos primeros ejes importantes con una contribución que, entre los dos, llega casi al 50% del total. Después dos ejes, el tercero y el cuarto, de menor importancia. Y, por fin, un quinto eje que, prácticamente, puede ser ignorado, pues lo que nos dé como información será casi irrelevante.

Observaremos por tanto las gráficas en las que intervengan alguno de los cuatro primeros ejes, aunque dando más valor a la información proveniente del primero y el segundo.

NOMBRE DE VARIABLES PRISES EN COMPTE DANS L'ANALYSE : 25
NOMBRE DE VARIABLES SUPPLEMENTAIRES : 0

GRAFICO 1

NOMBRE D'AXES DEMANDES : 5

ATTENTION : Toute représentation plane est une image déformée et contractée du nuage des points représentant les observations. Les contributions vous permettront d'en juger.

STATISTIQUES ELEMENTAIRES

VARIABLES	MOYENNES	ECARTS-TYPES DE LA SERIE
NU1	0.167	0.3727
LE1	0.417	0.4930
ORD	0.167	0.3727
NU2	0.083	0.2764
LE2	0.333	0.4714
DES	0.417	0.4930
OB1	0.333	0.4714
IN1	0.250	0.4330
EXP	0.333	0.4714
IN2	0.333	0.4714
VA2	0.417	0.4930
CAD	0.333	0.4714
NU2 NV3	0.167	0.3727
IN3	0.250	0.4330
OB2	0.333	0.4714
TRE	0.333	0.4714
VA3	0.167	0.3727
VA4	0.167	0.3727
IN4	0.250	0.4330
VJ	0.250	0.4330
OB3	0.417	0.4930
GE1	0.500	0.5000
GE2	0.500	0.5000
GE3	0.417	0.4930
GE4	0.250	0.4330

CORRELATIONS

	NU1	LE1	ORD	NU2	LE2	DES	OB1	IN1	EXP	IN2	VA2	CAD	NU2	IN3	OB2	TRE	VA3	VA4
NU1	1.000																	
LE1	-0.378	1.000																
ORD	-0.200	0.076	1.000															
NU2	-0.135	0.357	0.674	1.000														
LE2	-0.316	0.837	0.158	0.426	1.000													
DES	-0.378	0.314	0.529	0.357	0.478	1.000												
OB1	-0.316	0.478	0.158	0.426	0.625	0.478	1.000											
IN1	0.258	-0.098	0.258	0.522	0.000	-0.098	0.000	1.000										
EXP	-0.316	0.837	0.158	0.426	1.000	0.478	0.625	0.000	1.000									
IN2	0.158	0.120	0.158	0.426	0.250	0.120	0.250	0.816	0.250	1.000								
VA2	-0.378	0.314	0.529	0.357	0.478	1.000	0.478	-0.098	0.478	0.120	1.000							
CAD	0.632	-0.239	0.158	-0.213	-0.125	0.120	-0.125	0.000	-0.125	-0.125	0.120	1.000						
NV3 NU2	1.000	-0.378	-0.200	-0.135	-0.316	-0.378	-0.316	0.258	-0.316	0.158	-0.378	0.632	1.000					
IN3	0.775	-0.488	-0.258	-0.174	-0.408	-0.488	-0.408	0.556	-0.408	0.408	-0.488	0.408	0.775	1.000				
OB2	0.632	-0.239	-0.316	-0.213	-0.125	-0.239	0.250	0.000	-0.125	-0.125	-0.239	0.625	0.632	0.408	1.000			
TRE	0.158	0.478	-0.316	-0.213	0.250	0.120	0.250	-0.408	0.250	-0.125	0.120	0.250	0.158	0.000	0.250	1.000		
VA3	-0.200	0.076	0.400	0.674	0.158	0.529	0.158	0.258	0.158	0.158	0.529	-0.316	-0.200	-0.258	-0.316	-0.316	1.000	

GRAFICO 2

VA4	-0.200	0.076	0.400	0.674	0.158	0.529	0.158	0.258	0.158	0.158	0.529	-0.316	-0.200	-0.258	-0.316	-0.316	1.000	1.00
IN4	0.258	-0.098	0.258	0.522	0.000	-0.098	0.000	1.000	0.000	0.816	-0.098	0.000	0.258	0.556	0.000	-0.408	0.258	0.22
VJ	0.775	-0.098	-0.258	-0.174	0.000	-0.098	0.000	0.111	0.000	0.000	-0.098	0.816	0.775	0.556	0.816	0.408	-0.258	-0.22
OB3	-0.378	0.657	0.076	0.357	0.478	-0.029	0.478	-0.098	0.478	0.120	-0.029	-0.598	-0.378	-0.488	-0.239	0.120	0.076	0.00
GE1	0.000	0.507	-0.447	-0.302	0.354	-0.169	0.000	-0.192	0.354	0.000	-0.169	0.000	0.000	-0.192	0.000	0.354	-0.447	-0.44
GE2	0.000	0.507	-0.447	-0.302	0.354	-0.169	0.000	-0.192	0.354	0.000	-0.169	0.000	0.000	-0.192	0.000	0.354	-0.447	-0.44
GE3	-0.378	0.657	-0.378	-0.255	0.478	-0.029	0.120	-0.488	0.478	-0.239	-0.029	-0.239	-0.378	-0.488	-0.239	0.478	-0.378	-0.33
GE4	-0.258	0.293	-0.258	-0.174	0.408	0.293	0.408	-0.333	0.408	0.000	0.293	0.000	-0.258	-0.333	0.000	0.408	-0.258	-0.22

	IN4	VJ	OB3	GE1	GE2	GE3	GE4
IN4	1.000						
VJ	0.111	1.000					
OB3	-0.098	-0.488	1.000				
GE1	-0.192	0.192	0.169	1.000			
GE2	-0.192	0.192	0.169	1.000	1.000		
GE3	-0.488	-0.098	0.314	0.845	0.845	1.000	
GE4	-0.333	0.111	-0.098	0.577	0.577	0.683	1.000

DIAGONALISATION

1E LIGNE : VALEURS PROPRES (VARIANCES SUR LES AXES PRINCIPAUX)
2E LIGNE : CONTRIBUTION A LA VARIATION TOTALE (POURCENTAGES EXPLIQUES PAR LES AXES PRINCIPAUX)

7.0921	5.8716	3.7413	2.8011	1.4683
28.4 %	23.5 %	15.0 %	11.2 %	5.9 %

VECTEURS PROPRES (COEFFICIENTS DES VARIABLES CENTREES REDUITES DANS L'EQUATION LINEAIRE DES AXES PRINCIPAUX)

NU1	-0.2966	-0.0219	-0.2431	0.0358	-0.1064
LE1	0.2845	-0.1161	-0.1989	-0.1112	-0.1597
ORD	0.1089	0.2659	-0.0480	0.1399	0.0571
NU2	0.1587	0.2766	-0.1992	-0.0843	-0.1500
LE2	0.2790	-0.0535	-0.2821	-0.0304	-0.0672
DES	0.2297	0.1280	-0.1273	0.3508	0.2284
OB1	0.2180	0.0138	-0.2294	0.0914	-0.2839
IN1	-0.0883	0.2477	-0.2484	-0.3133	0.1651
EXP	0.2790	-0.0535	-0.2821	-0.0304	-0.0672
IN2	0.0111	0.1633	-0.3004	-0.3071	0.2030
VA2	0.2297	0.1280	-0.1273	0.3508	0.2284
CAD	-0.1937	-0.0616	-0.2420	0.3426	0.1066
- NU3 NU2	-0.2966	-0.0219	-0.2431	0.0359	-0.1064
IN3	-0.3150	0.0499	-0.1767	-0.1340	0.0553
OB2	-0.2017	-0.1015	-0.2328	0.1885	-0.3313
TRE	0.0435	-0.2439	-0.1774	0.1644	-0.1797
VA3	0.1355	0.3063	-0.0143	0.0907	-0.0040
VA4	0.1355	0.3063	-0.0143	0.0907	-0.0040
IN4	-0.0883	0.2477	-0.2484	-0.3133	0.1651
VJ	-0.2032	-0.1192	-0.3490	0.1989	-0.0288
OB3	0.2246	-0.0203	0.0081	-0.2536	-0.5064
GE1	0.0800	-0.3224	-0.1269	-0.1898	0.2158
GE2	0.0800	-0.3224	-0.1269	-0.1898	0.2158
GE3	0.1952	-0.3291	0.0064	-0.1093	0.1187
GE4	0.1519	-0.2362	-0.1118	0.0954	0.3399

ETUDE DES VARIABLES

1E COLONNE : CORRELATIONS ENTRE LES VARIABLES ET LES AXES PRINCIPAUX
2E COLONNE : CORRELATIONS AU CARRE

III.2.1. ESTUDIO DE PREGUNTAS (VARIABLES).

Círculos de correlaciones

Las "variables", como sabemos, son, en este estudio, las preguntas. En nuestro caso hay 25 (Gráfico 1).

Observando el primer círculo de correlaciones, (Gráfico 3) que es el correspondiente al plano 1-2, vemos que se presenta bastante bien, pues no nos interesa que haya muchas preguntas coincidentes y se observa cierta especialización en las preguntas sin ser excesiva.

Se perfilan tres grupos de preguntas, pues la proximidad marca la relación entre ellas:

I^er grupo: EXP, GE1, GE2, GE3, GE4 LE1, LE2, OB1, OB3 y TRE.

IIº grupo: CAD, IN1,IN2, IN3, IN4, NU1, NU3, OB2 y VJ.

III^er grupo: DES, NU2, ORD, VA2, VA3 y VA4.

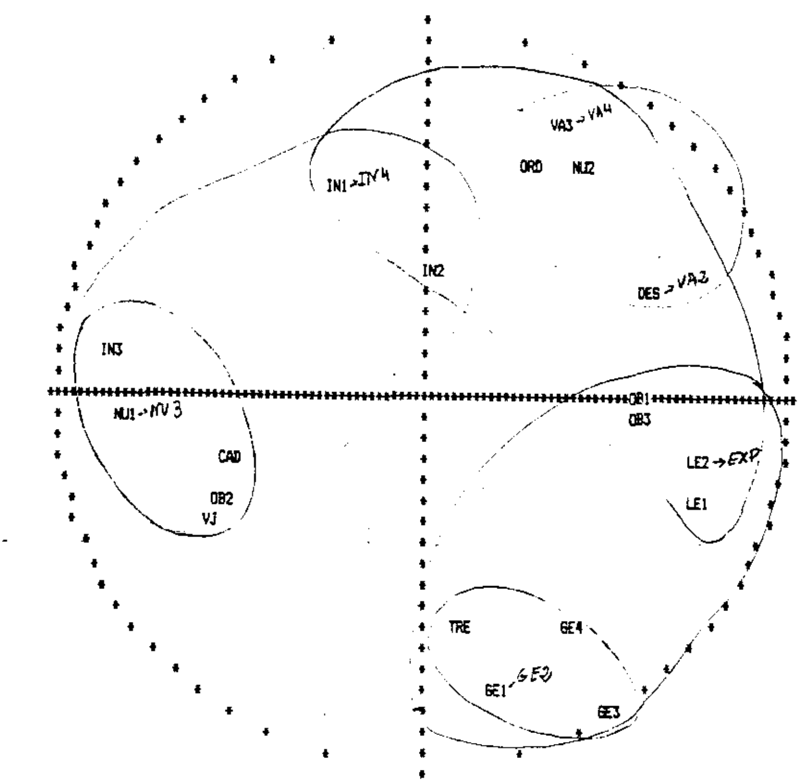
Hay preguntas como GE1 y GE2 o NU1 y NU3 que se sitúan exactamente en el mismo punto del plano, lo cual indica que están completamente ligadas por nuestros "caracteres"; que estudiando estas preguntas no podremos esperar ver diferencias entre ellos, porque una pregunta es como un refuerzo de la otra y proporcionan, por tanto, la misma información.

Que estas preguntas poseen los mismos "caracteres" o muy parecidos, se puede comprobar en la "matriz a priori-2" en la que se ven las preguntas y sus "caracteres".

CERCLE DES CORRELATIONS

GRAFICO 3

PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL



POINT VU : LE2	POINT CACHE : EXP
POINT VU : DES	POINT CACHE : VA2
POINT VU : NU1	POINT CACHE : NU2
POINT VU : VA3	POINT CACHE : VA4
POINT VU : IN1	POINT CACHE : IN4
POINT VU : GE1	POINT CACHE : GE2

Las preguntas que se identifican en el plano 1-2 del AFC, y que tienen exactamente los mismos "caracteres" son las siguientes:

Preguntas	Caracteres (coincidentes)
DES y VA2	VAP, C, VAR, LI y S
GE1 y GE2	VAP, NP, DEP, G, NUM y S
IN1 e IN4	IN, LI y NUM
LE2 y EXP	VAP, NP, LI y S
NU1 y NU3	LEN y NUM
VA3 y VA4	VAR y LI

Además de éstas, las preguntas OB2 y VJ se encuentran superpuestas en plano 1-4 (Gráfico 5), pero no en los otros, y es porque tienen tres "caracteres" coincidentes y uno no.

En el I^er grupo se ven otras ligaduras menores como la que une a OB1 y OB3. Se ve una proximidad, lo que indica que están un poco ligadas, pero no una coincidencia, como entre GE1 y GE2. Además, esta proximidad no se mantiene en los siguientes planos.

Los "caracteres" elegidos discrimiman relativamente bien a las preguntas, pues se ve que producen una dispersión bastante clara de éstas.

En la gráfica siguiente, correspondiente al plano 1-3 (Gráfico 4), vemos que, respecto al eje 3, el vertical, no se produce esa diferenciación, pues las preguntas se encuentran reunidas en el semicirculo inferior.

GRAFICO 4

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

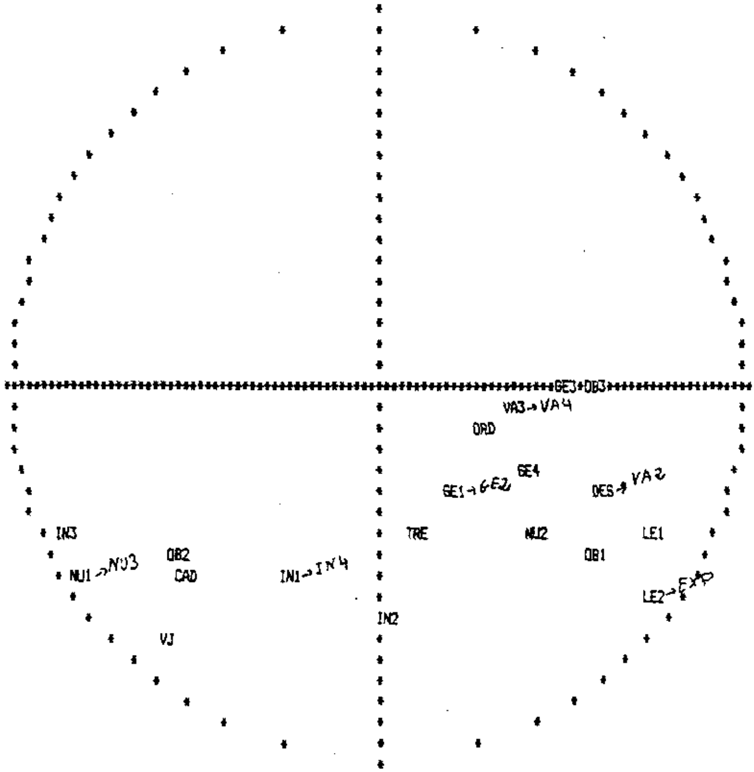
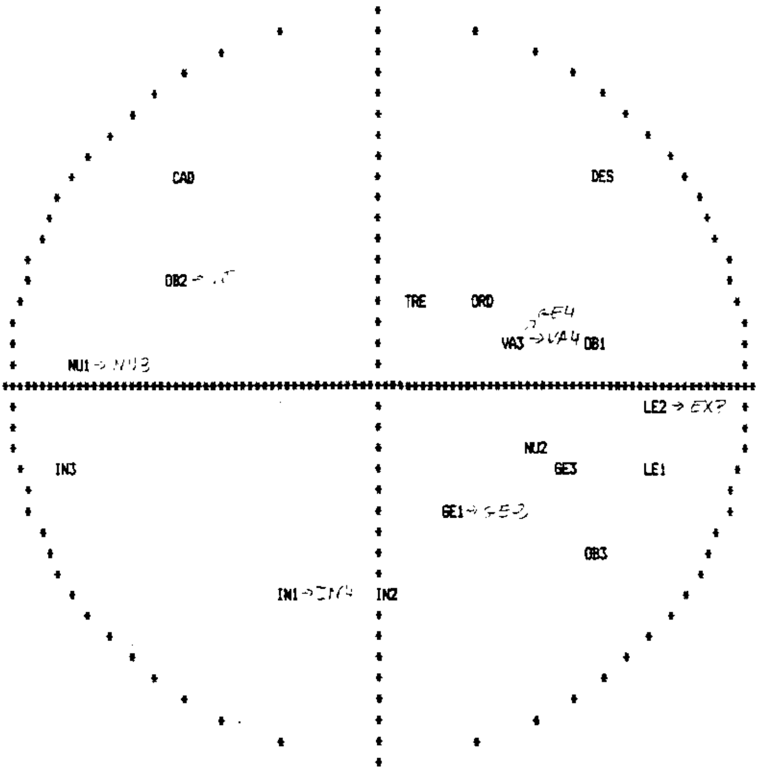


GRÁFICO 5

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 4 AXE 1 HORIZONTAL AXE 4 VERTICAL



POINT VU : LE2	POINT CACHE : EXP
POINT VU : DES	POINT CACHE : VA2
POINT VU : NU1	POINT CACHE : [redacted] NU3
POINT VU : VA3	POINT CACHE : VA4
POINT VU : IN1	POINT CACHE : IN4
POINT VU : OB2	POINT CACHE : VJ
POINT VU : GE1	POINT CACHE : GE2
POINT VU : VA3	POINT CACHE : GE4

Sin embargo, en el plano correspondiente a los ejes 1-4 (Gráfico 5), vuelve a verse la separación pues se distribuyen bien por el circulo.

III.2.2. ESTUDIO DE LOS "CARACTERES" (INDIVIDUOS)

Los llamados "individuos", en el análisis a priori, son los "caracteres" que yo he elegido estudiar, y son 12.

Estos "caracteres" son también las filas de la MATRIZ A PRIORI-2.

En este estudio de los individuos, en el análisis estadístico ACP de la matriz a priori, vamos a ver si los "caracteres" están suficientemente separados como para ser analizados con nitidez.

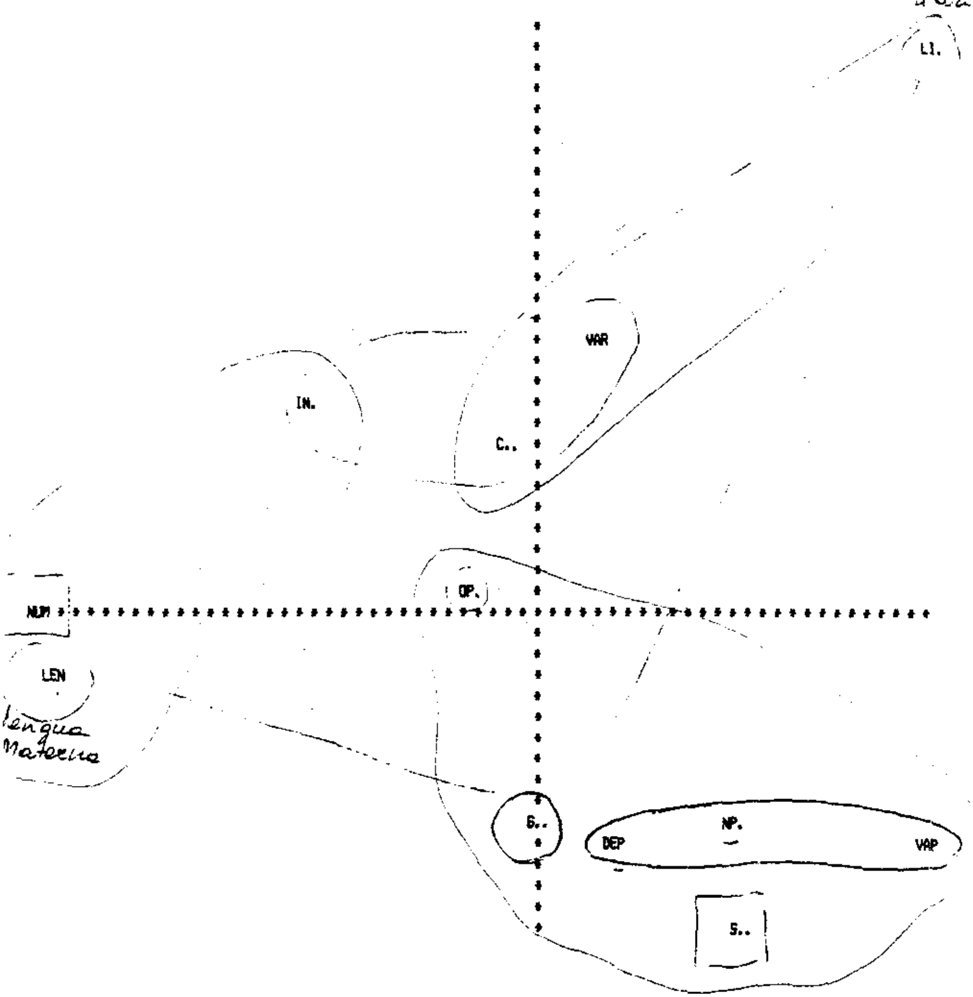
Lo primero que observamos, satisfactoriamente, es que no existen "caracteres" coincidentes. Esto quiere decir que los "caracteres" están definidos sobre distintas preguntas. De todas formas, vamos a analizar las proximidades.

Veamos primero los "caracteres" por clases.

En el plano 1-2 del estudio de individuos (Gráfico 6) apreciamos que los primeros caracteres: **VAP**, **NP**, **DEP** y **OP**, los que marcan los errores, están reunidos por las preguntas, formando un conjunto con los "caracteres" "G" y "S". Esto quiere decir que no hay muchas preguntas diferen-

REPRESENTATION PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL

GRÁFICO 6



ciadoras y preparadas para poder revelar un error separadamente de otro.

De todos modos se aprecia una diferencia. En la representación del plano 1-3 (Gráfico 7) y en la del plano 1-4 (Gráfico 8) se encuentran OP y VAP bastante separadas, pero DEP y NP continúan estando muy próximas.

También el carácter OP está un poco más separado que los otros, pero no supone suficiente distancia como para independizarse del conjunto. Estos cuatro caracteres se encuentran tan próximos que hace suponer que el estudio de los resultados de los alumnos, en la forma tradicional Acierto Fracaso, no nos dará una información relevante sobre cada uno de los errores. Este estudio deberá hacerse con un análisis de los comportamientos de los alumnos y no solamente del Acierto Fracaso.

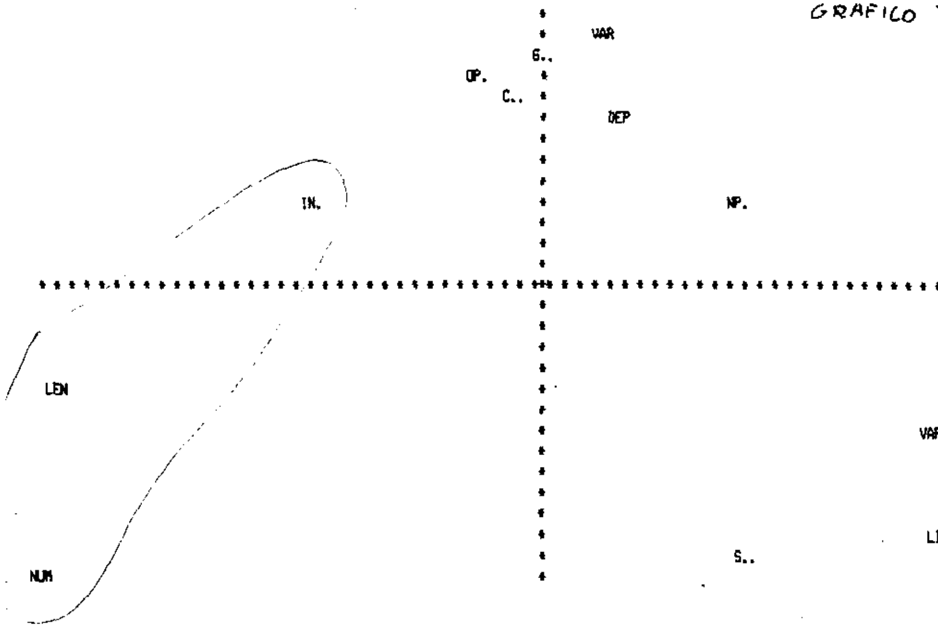
Decimos que las preguntas "ligan" estos "caracteres", lo que por otra parte es lógico, ya que se trata de tipos de errores que, en general, se producen sobre un tipo de preguntas semejante.

Sucede lo mismo con los "caracteres de interpretación correcta": "C", "VAR" e "IN" que se encuentran formando un conjunto que nos permite decir que están ligados por las preguntas.

Los "caracteres de enunciado" "LEN", "LI" y "G", sin embargo, se encuentran muy distanciados, formando un

REPRESENTATION PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

GRÁFICO 7



REPRESENTATION PLAN 2 3 AXE 2 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

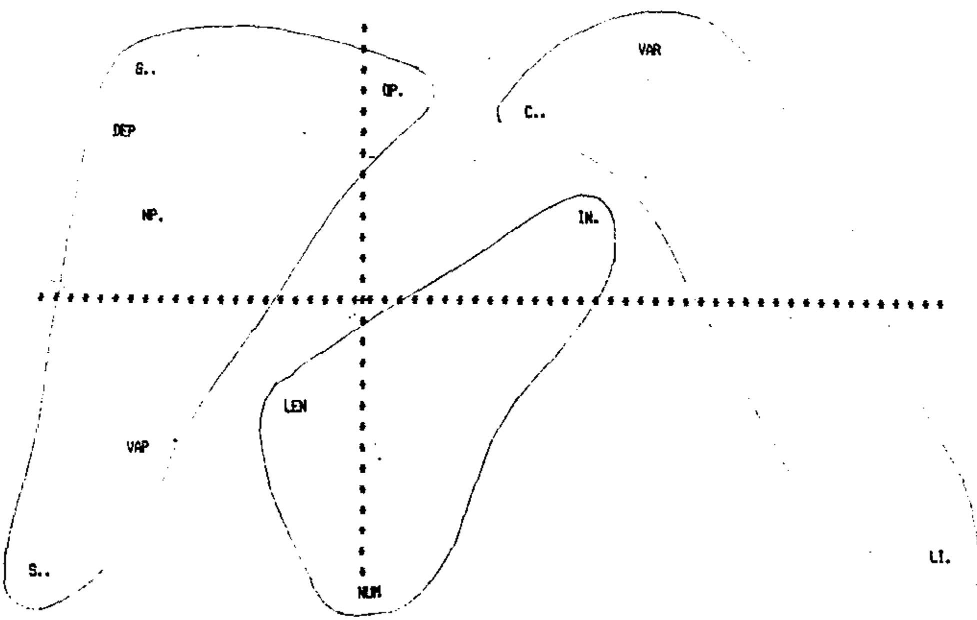
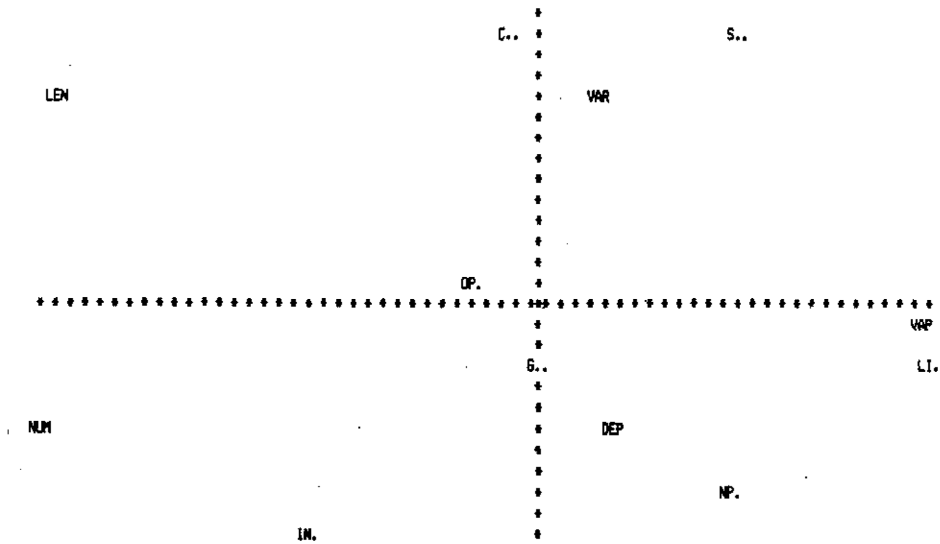
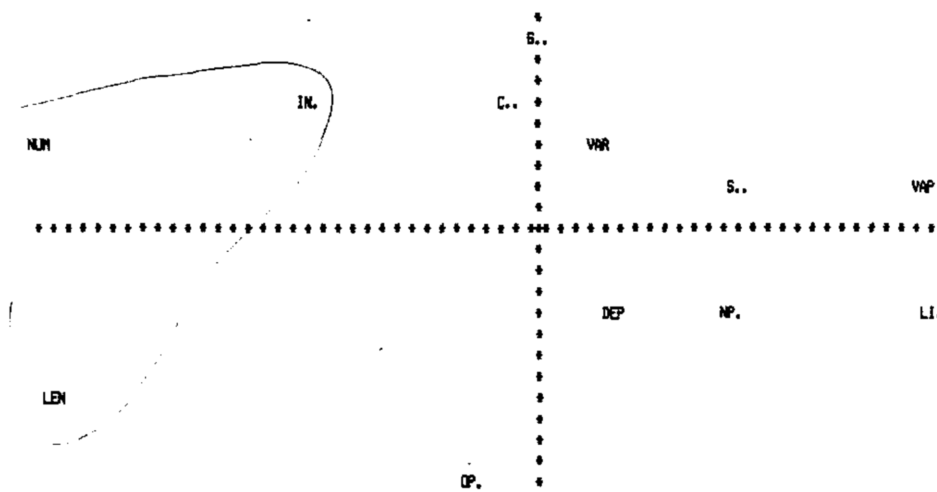


GRÁFICO 8

REPRESENTATION PLAN 1 4 AXE 1 HORIZONTAL AXE 4 VERTICAL



REPRESENTATION PLAN 1 5 AXE 1 HORIZONTAL AXE 5 VERTICAL



amplio triángulo; es decir que las preguntas separan muy bien el tipo de enunciado: en lengua materna, en lengua literal o en lengua gráfica. Tendremos en cuenta esto cuando saquemos conclusiones sobre los enunciados, porque podremos darles mucho valor.

También los "caracteres de respuesta" "S" y "NUM" se encuentran bien separados por las preguntas, como se aprecia en los gráficos 1-2 y 1-3. Incluso en el plano 1-4 quedan diametralmente opuestos.

Estudiando los "caracteres" en su conjunto, pueden observarse en el plano 1-2 (Gráfico 6) y en los planos 1-3 y 2-3 (Gráfico 7), tres grupos:

1er Grupo: VAP, DEP, NP, OP G y S.

2º Grupo: IN, LEN y NUM.

3er Grupo: C, VAR y LI.

que resultan así ligados por las preguntas.

Vamos a pasar a ver el Análisis Factorial de Correspondencias, AFC, de la matriz a priori.

III.3. ESTUDIO AFC DE LA MATRIZ A PRIORI

En este análisis veremos la proximidad entre los caracteres y las preguntas. Este análisis "a priori" permite saber a qué preguntas están ligados los caracteres, de manera general, y, después, se observa para comprobar si estas ligaduras se mantienen, o no, en las indicaciones hechas sobre los alumnos.

Un cuestionario es óptimo cuando los "caracteres a priori" separan al máximo las preguntas, porque en ese caso, al observar los ejes, éstos se encuentran determinados por los caracteres que les corresponden.

Se puede dar el caso de que algunas preguntas aparezcan "ligadas" por los caracteres que hemos elegido estudiar. ¿Qué puede pasar al estudiar los resultados de los alumnos?.

Puede ser que esas "ligaduras" se traduzcan en otras ligaduras o que no. Si al estudiar la matriz de la experiencia con los alumnos aparecen las mismas "ligaduras", querrá decir que los "caracteres" elegidos por nosotros son una buena explicación para los hechos revelados por la experiencia.

Por el contrario, si esas ligaduras no aparecen, querrá decir que la experimentación no confirma el estudio a priori y habrá que buscar nuevos "caracteres" explicativos y quizá rechazar alguno de los "caracteres a priori". En cualquier caso nos servirá para saber si la explicación que habíamos dado a través de los "caracteres" es válida o no.

A veces las ligaduras, aunque se mantengan, no se pueden tener en cuenta porque aparecen en ejes de inercia baja, es decir en planos de proyección de poca importancia. En este caso diremos que nuestro carácter no actúa o no es buena explicación para lo que sucede.

Otras veces aparecen estas ligaduras sobre el eje principal y, en este caso, quiere decir que el carácter escogido por nosotros es realmente activo.

Cuando al analizar los resultados de la matriz de los alumnos, ésos no coinciden con lo que sería esperable, por las conclusiones obtenidas de la "matriz a priori", quiere decir, como ya hemos observado, que los "caracteres" no resultan una explicación satisfactoria para todo lo que sucede y, entonces, debemos estudiar las preguntas con cuidado, tratando de encontrar otros posibles caracteres explicativos. Estos serán llamados "caracteres a posteriori", pues es el estudio a posteriori el que los hace emerger como una explicación de las "ligaduras", o distanciamientos *surgidos de la realidad contingente y recogidos en la matriz* de los alumnos. Hablaremos de estos "caracteres" en el estudio AFC de la matriz Acierto Fracaso.

Comenzaremos por observar los valores de inercia que comportan cada uno de los ejes, para saber la importancia relativa que cada uno de ellos tiene en el análisis.

La inercia que observamos es la siguiente (Gráfico 9):

Eje 1	Eje 2	Eje 3	Eje 4	Eje 5
25.6%	23.3%	14.8%	10.8%	9.0%

Entre los dos primeros ejes llegan casi al 50%. Esto muestra que hay agrupamiento entre algunas preguntas,

GRÁFICO 9

TITRE DE L'ANALYSE : A PRIORI

UTILISATEUR : M DIEZ

DATE : 18/4/91

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:CARPRE
TITRE : MATRIZ A PRIORI

NOMBRE D'OBSERVATIONS (Lignes) : 12 - NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) : 25

NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) ACTIVES DU TABLEAU : 25
NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) SUPPLEMENTAIRES : 0

NOMBRE D ' AXES DEMANDES : 5

VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

1RE LIGNE : VALEURS PROPRES (VARIANCES SUR LES AXES PRINCIPAUX)
2E LIGNE : CONTRIBUTION A L'INERTIE TOTALE (POURCENTAGES EXPLIQUES PAR LES AXES PRINCIPAUX)

0.5810	0.5303	0.3366	0.2452	0.2051
25.6 %	23.3 %	14.8 %	10.8 %	9.0 %

VECTEURS PROPRES (COEFFICIENTS DES VARIABLES DANS L'EQUATION LINEAIRE DES AXES PRINCIPAUX)

NU1	-2.2839	0.0766	1.3394	0.0728	-1.0468
LE1	0.7056	0.5834	-0.4027	-0.1355	0.1098
ORD	0.6718	-1.8192	1.1179	0.7335	3.8836
NU2	0.7019	-1.5392	-1.2474	-1.0683	0.5785
LE2	0.7068	0.2954	-0.3951	-0.2399	0.3441
DES	0.8609	-1.1562	0.8895	0.5248	0.3247
OB1	0.4679	0.1040	0.0029	-2.5076	0.5291
IN1	-1.2172	-1.0219	-2.1974	0.2882	0.4402
EXP	0.7068	0.2955	-0.3951	-0.2400	0.3512
IN2	-0.7139	-0.6048	-1.7334	0.2215	0.4298
VA2	0.8609	-1.1562	0.8895	0.5248	0.3247
CAD	-0.8968	-0.3260	1.7954	0.6968	1.3557
NU3 NU2	-2.2839	0.0766	1.3394	0.0728	-1.0468
IN3	-2.3047	-0.4320	-0.8303	0.4851	-0.2796
OB2	-1.0481	0.3645	1.0693	-2.2112	-0.2392
TRE	-0.1821	0.8143	0.7813	-0.0127	-0.4206
VA3	1.2658	-2.4871	0.1410	-0.0266	-3.1433
VA4	1.2658	-2.4871	0.1410	-0.0266	-3.1433
IN4	-1.2172	-1.0219	-2.1974	0.2882	0.4402
VJ	-1.4108	0.2664	1.2342	0.0890	-0.5866
OB3	0.6462	0.5866	-0.4893	-1.9803	0.2028
GE1	0.2761	1.1010	-0.2351	0.8317	-0.3183
GE2	0.2761	1.1010	-0.2351	0.8317	-0.3183
GE3	0.7328	1.3365	-0.2471	0.8727	-0.2786
GE4	0.6566	1.1728	0.0659	1.3736	-0.2084

lo que ya habiamos observado. También muestra que los dos primeros ejes se destacan en importancia respecto a los otros, ya que, en el tercero, la inercia se reduce casi a la mitad que en ellos, y el cuarto menos de la mitad.

Estudiando el primer plano principal, el plano 1-2 (Gráfico 10) se observa que los caracteres y las preguntas a las que se encuentran ligados se agrupan en tres zonas.

Llamaremos GI, GII y GIII a los agrupamientos que aparecen.

El **grupo GI** está formado por:

Los caracteres VAP,NP,DEP,OP,G y S.

Las preguntas EXP,GE1,GE2,GE3,GE4,LE1,LE2,OB1,OB3 y TRE.

El **grupo GII** está formado por:

Los caracteres IN,LEN y NUM.

Las preguntas CAD,IN1,IN2,IN3,IN4,NU1,NU3,OB2 y VJ.

*El **grupo GIII** está formado por:*

Los caracteres C,LI y VAR.

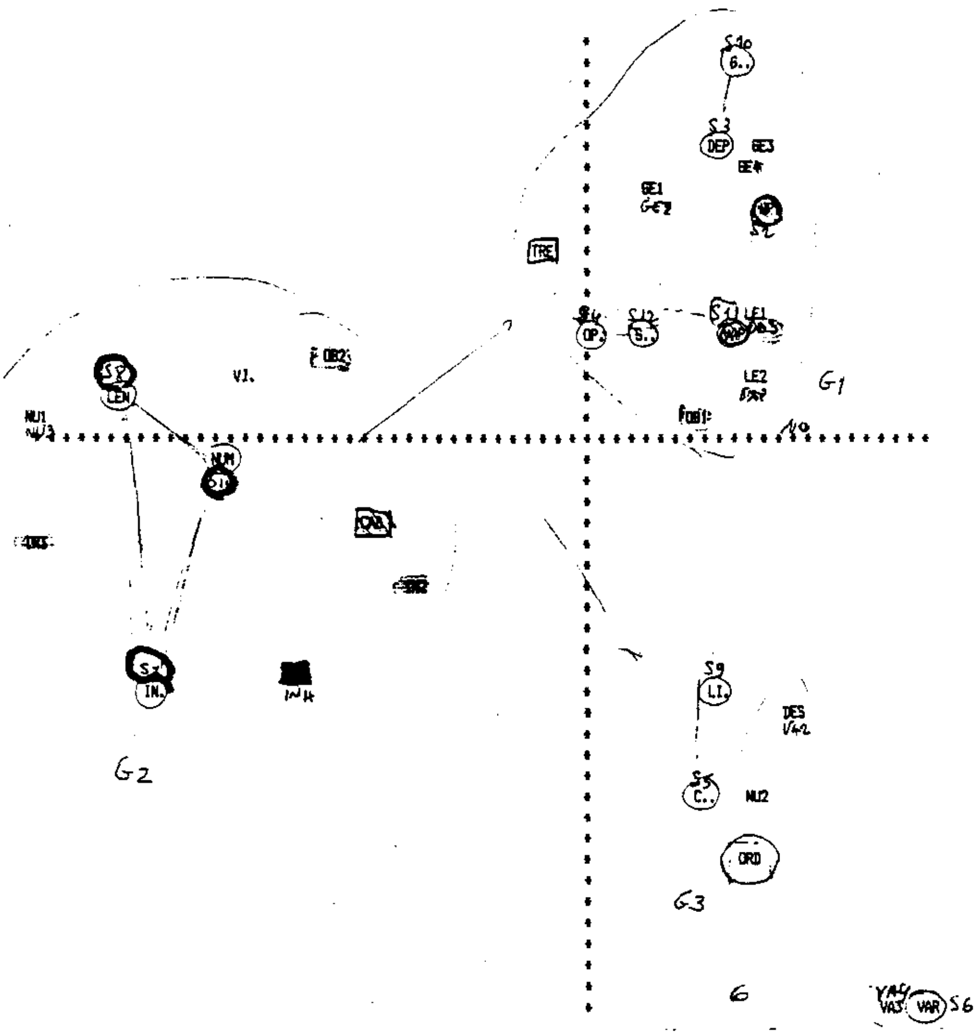
Las preguntas DES,NU2,ORD,VA2,VA3 y VA4.

En el grupo III tenemos una situación de casi identificación de un "carácter" y dos preguntas: el "carácter" VAR y las preguntas VA3 y VA4.

Para investigar sobre este posicionamiento vamos

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ***
PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL

GRAFICO 10



POINT VU : LE2	POINT CACHE :	EXP
POINT VU : DES	POINT CACHE :	VA2
POINT VU : NU1	POINT CACHE :	NU2 NU3
POINT VU : VA3	POINT CACHE :	VA4
POINT VU : IN1	POINT CACHE :	IN4
POINT VU : LE1	POINT CACHE :	OB3
POINT VU : GE1	POINT CACHE :	GE2

a ver la "matriz a priori-2". Se ve que VA3 (y su pregunta coincidente VA4) solamente se asocian a los "caracteres" VAR y LI, de modo que van a estar fuertemente atraidas por ellos. Por otra parte, el "carácter" VAR solamente se encuentra en cuatro preguntas: DES, VA2, VA3 y VA4 y, como consecuencia, se identifica con ellas también de manera fuerte. Diremos que es más atrayente para esas preguntas que el "carácter" LI. Esto justifica la proximidad entre el "carácter" VAR y las preguntas VA3 y VA4.

Las preguntas DES y VA2 son también coincidentes en sus "caracteres", lo que hace que aparezcan superpuestas en los gráficos, pero se alejan del "carácter" VAR, pues los otros "caracteres" que poseen (C,LI,S y VAP) las atraen *hacia sus posiciones; sobre todo los más alejados de VAR*, que son S y VAP y que tiran de ellas hacia arriba.

Vamos a ver ahora los resultados que se obtienen de la experiencia estudiando la matriz Acierto Fracaso.

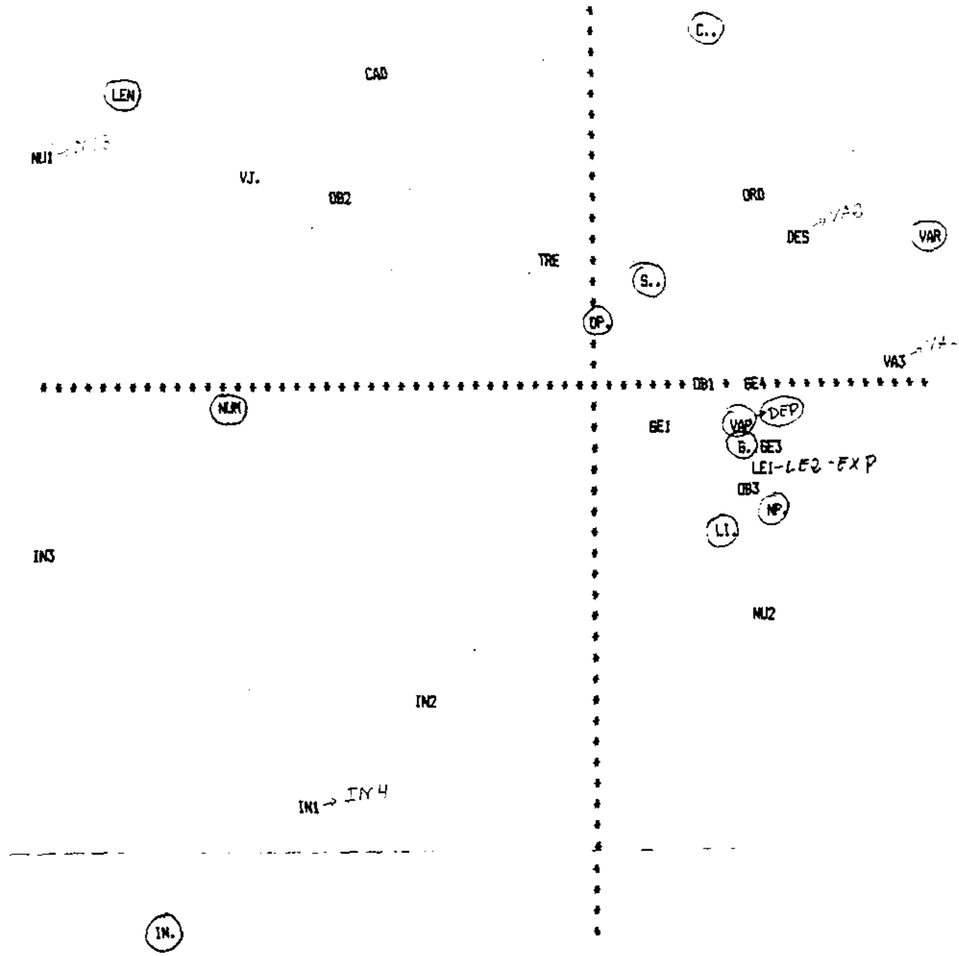
III.4. ESTUDIO ACP DE LA MATRIZ ACIERTO/FRACASO

Esta matriz, que hemos llamado matriz ÉXITO, incluye 194 alumnos y 25 preguntas. Sobre el análisis los *alumnos son denominados "individuos" y las preguntas son las* "variables".

Originalmente los alumnos eran 196, pero han quedado reducidos a 194 en este estudio, pues dos de ellos

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) +++
PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

GRÁFICO 11



POINT VU : LE1 POINT CACHE : LE2
POINT VU : LE1 POINT CACHE : EXP
POINT VU : DES POINT CACHE : VA2
POINT VU : NU1 POINT CACHE : NU2 NU3
POINT VU : VA3 POINT CACHE : VA4
POINT VU : IN1 POINT CACHE : IN4
POINT VU : GE1 POINT CACHE : GE2
POINT VU : VAP POINT CACHE : DEP

(el nº 16 y el nº 34) habían tenido todo "ceros" en la fila correspondiente de la matriz, lo cual no permitía aplicar el análisis estadístico, pues el programa no admite esta circunstancia. Después de la eliminación, el programa re-numera, automáticamente, los alumnos restantes.

III.4.1. INDIVIDUOS SUPLEMENTARIOS

Para que el estudio sea más fructífero se usa un dispositivo del programa estadístico que consiste en situar en los gráficos a los <u>alumnos suplementarios</u>.

Estos <u>alumnos suplementarios</u> representan, en el análisis, a unos alumnos imaginarios que hubieran respondido de una determinada manera. Por ejemplo, se puede crear un alumno suplementario que haya respondido bien a todas las preguntas. Este alumno tendrá un "1" de acierto en todas las casillas, y, con su colocación en el gráfico, marcará la posición del <u>éxito</u>. En nuestro análisis hemos creado un alumno suplementario para cada uno de los "caracteres" que vamos a estudiar en las preguntas.

Cada uno de ellos, tiene un "1" en las casillas correspondientes a las preguntas que lo tienen como "carácter". El conjunto de todos ellos ya sabemos que forma la "matriz a priori-2", que llamamos matriz CARPRE. Esta matriz se añade como "suplementaria" a la matriz ÉXITO para hacer el análisis ACP y el análisis AFC.

En estos análisis, el propio programa nombra los

STATISTIQUES ELEMENTAIRES

GRAFICO 12

VARIABLES	MOYENNES	ECARTS-TYPES DE LA SERIE
NU1	0.686	0.4643
LE1	0.309	0.4622
ORD	0.278	0.4482
NU2	0.789	0.4083
LE2	0.557	0.4968
DES	0.103	0.3041
OB1	0.356	0.4787
IN1	0.634	0.4817
EXP	0.469	0.4990
IN2	0.325	0.4683
VA2	0.284	0.4507
CAD	0.361	0.4802
NU3	0.732	0.4429
IN3	0.629	0.4831
OB2	0.108	0.3107
TRE	0.521	0.4996
VA3	0.567	0.4955
VA4	0.201	0.4008
IN4	0.180	0.3845
VJ	0.299	0.4578
OB3	0.675	0.4683
GE1	0.423	0.4940
GE2	0.387	0.4870
GE3	0.521	0.4996
GE4	0.515	0.4998

CORRELATIONS

	NU1	LE1	ORD	NU2	LE2	DES	OB1	IN1	EXP	IN2	VA2	CAD	NU3	IN3	OB2	TRE	VA3	VA4
NU1	1.000																	
LE1	0.309	1.000																
ORD	0.173	0.207	1.000															
NU2	0.057	0.237	0.152	1.000														
LE2	0.044	0.373	0.114	0.224	1.000													
DES	0.084	0.287	0.205	0.134	0.268	1.000												
OB1	0.039	0.155	0.211	0.226	0.381	0.244	1.000											
IN1	0.016	0.300	0.138	0.288	0.334	0.187	0.229	1.000										
EXP	-0.053	0.488	0.131	0.208	0.381	0.361	0.208	0.328	1.000									
IN2	0.019	0.131	0.036	0.143	0.154	0.054	0.152	0.298	0.208	1.000								
VA2	0.155	0.099	0.069	0.242	0.078	0.088	0.082	0.169	0.142	0.199	1.000							
CAD	0.023	0.287	0.036	0.231	0.303	0.063	0.159	0.192	0.197	0.075	0.123	1.000						
NU3	0.091	0.229	0.116	0.257	0.327	0.205	0.231	0.410	0.196	0.196	0.097	0.188	1.000					
IN3	0.031	0.029	-0.023	0.177	0.217	0.050	0.103	0.192	0.081	0.168	0.152	0.155	0.258	1.000				
OB2	-0.086	0.054	0.043	0.140	0.144	0.046	0.192	0.161	0.105	0.077	0.112	0.084	0.173	0.130	1.000			
TRE	0.039	0.263	0.112	0.261	0.369	0.190	0.260	0.213	0.220	0.159	0.100	0.227	0.328	0.138	0.069	1.000		
VA3	0.036	0.247	0.195	0.159	0.393	0.159	0.258	0.243	0.259	0.117	0.042	0.202	0.199	0.147	0.171	0.369	1.000	
VA4	0.118	0.249	0.148	0.197	0.189	0.338	0.218	0.248	0.276	0.037	0.113	0.105	0.275	0.146	0.074	0.327	0.360	1.000
IN4	0.000	0.237	-0.022	0.177	0.230	0.150	0.071	0.162	0.150	0.104	0.092	0.262	0.163	0.194	0.139	0.236	0.248	0.166
VJ	-0.019	0.148	0.097	0.117	0.311	0.297	0.220	0.192	0.311	0.100	0.189	0.142	0.141	0.082	0.099	0.221	0.230	0.234
OB3	-0.067	0.202	0.111	0.180	0.245	0.199	0.400	0.273	0.255	0.175	0.045	0.154	0.177	0.128	0.206	0.348	0.216	0.156
GE1	0.018	0.263	0.097	0.136	0.406	0.225	0.345	0.303	0.283	0.031	0.064	0.183	0.282	0.053	0.105	0.299	0.305	0.196
GE2	-0.055	0.270	0.121	0.126	0.389	0.218	0.383	0.252	0.272	0.037	0.064	0.197	0.218	0.040	0.166	0.274	0.288	0.183
GE3	-0.050	0.196	0.043	0.160	0.286	0.257	0.239	0.213	0.323	0.203	0.192	0.119	0.305	0.117	0.201	0.339	0.286	0.250
GE4	0.054	0.314	0.211	0.281	0.464	0.261	0.289	0.255	0.250	0.232	0.175	0.149	0.321	0.088	0.271	0.350	0.235	0.229

	IN4	VJ	OB3	GE1	GE2	GE3	GE4
IN4	1.000						
VJ	0.309	1.000					
OB3	0.068	0.164	1.000				
GE1	0.060	0.216	0.304	1.000			
GE2	0.123	0.221	0.279	0.821	1.000		
GE3	0.262	0.356	0.238	0.257	0.296	1.000	
GE4	0.294	0.273	0.341	0.370	0.325	0.308	1.000

"caracteres", automáticamente, como S1, S2, ..., y hasta S12 en nuestro caso, y los sitúa, con el resto de los alumnos, en las gráficas. Sirven así como puntos de referencia para el estudio.

La correspondencia de la nomenclatura de alumnos suplementarios (S_n), que hace el programa, con los nombres que tenían los "caracteres", es la siguiente:

S_1	VAP	S_5	C	S_9	LI
S_2	NP	S_6	VAR	S_{10}	G
S_3	DEP	S_7	IN	S_{11}	NUM
S_4	OP	S_8	LEN	S_{12}	S

III.4.2. ESTUDIO ACP

Observamos, para empezar, en la página correspondiente a la DIAGONALIZACIÓN (Gráfico 13), los valores que marcan la contribución de los ejes a la variación total, lo que determina la importancia que va a tener cada uno de esos ejes.

Se observa que hay un primer eje muy importante, pues está marcado con un 24% del total, mientras que los siguientes se rebajan ya a 6.5%, 5.9%, 5.2% y 4.8%, que, comparando con el primero, supone una reducción grande. Esto quiere decir que las observaciones, referidas al primer eje, que podamos hacer, tendran mucha importancia y, sin embargo, las conclusiones que se puedan obtener, referidas a los otros ejes, tendrán muy poca.

GRÀFICO 13

DIAGONALISATION

1E LIGNE : VALEURS PROPRES (VARIANCES SUR LES AXES PRINCIPAUX)
2E LIGNE : CONTRIBUTION A LA VARIATION TOTALE (POURCENTAGES EXPLIQUES PAR LES AXES PRINCIPAUX)

5.9907	1.6369	1.4837	1.2901	1.1932
24.0 %	6.5 %	5.9 %	5.2 %	8 %

VECTEURS PROPRES (COEFFICIENTS DES VARIABLES CENTREES REDUITES DANS L'EQUATION LINEAIRE DES AXES PRINCIPAUX)

NU1	0.0365	0.2200	0.5184	0.2048	-0.1447
LE1	0.2256	0.0828	0.3845	-0.0177	-0.2032
ORD	0.1133	-0.0143	0.3868	0.2298	0.2269
NU2	0.1815	0.2558	-0.0055	0.2188	-0.0558
LE2	0.2767	-0.0692	-0.0187	-0.0231	-0.1997
DES	0.1931	-0.0413	0.2783	-0.2256	0.3131
OB1	0.2221	-0.1927	-0.0405	0.2216	0.1500
IN1	0.2339	0.1281	-0.0601	0.2305	0.0299
EXP	0.2360	0.0034	0.1272	-0.1892	0.1374
IN2	0.1282	0.2841	-0.1773	0.2115	0.2265
VA2	0.1093	0.3309	-0.0035	0.0999	0.2040
CAD	0.1622	0.1167	-0.0507	-0.0375	-0.5096
NU3	0.2204	0.1427	-0.0645	0.1879	-0.0763
IN3	0.1146	0.3083	-0.2560	0.0922	-0.1800
OB2	0.1240	0.0230	-0.3302	0.1254	0.1653
TRE	0.2396	0.0106	-0.0323	-0.0540	-0.1206
VA3	0.2244	-0.0473	0.0145	-0.1459	-0.1393
VA4	0.1997	0.0789	0.2068	-0.1871	0.0956
IN4	0.1617	0.2424	-0.1389	-0.4106	-0.2291
VJ	0.1965	0.0238	-0.0339	-0.4281	0.2272
OB3	0.2069	-0.1505	-0.1590	0.2018	0.1710
GE1	0.2480	-0.4449	-0.0056	0.1218	-0.1621
GE2	0.2433	-0.4584	-0.0463	0.0698	-0.1405
GE3	0.2263	0.0245	-0.1658	-0.2642	0.2285
GE4	0.2636	0.0093	-0.0486	0.1030	0.1010

Círculos de correlaciones

Mirando en los dos primeros planos de los *círculos de correlaciones* (Gráficos 14 y 15), observamos que hay una cierta uniformidad entre las preguntas pues todas ellas se encuentran en la parte derecha del eje horizontal.

Tomando como referencia este eje horizontal, que es el eje 1, destaca un poco la pregunta NU1, que se sitúa más al centro del plano que las demás, y algo separada del resto. Por el lado derecho, las preguntas situadas más al extremo son GE4 y LE2.

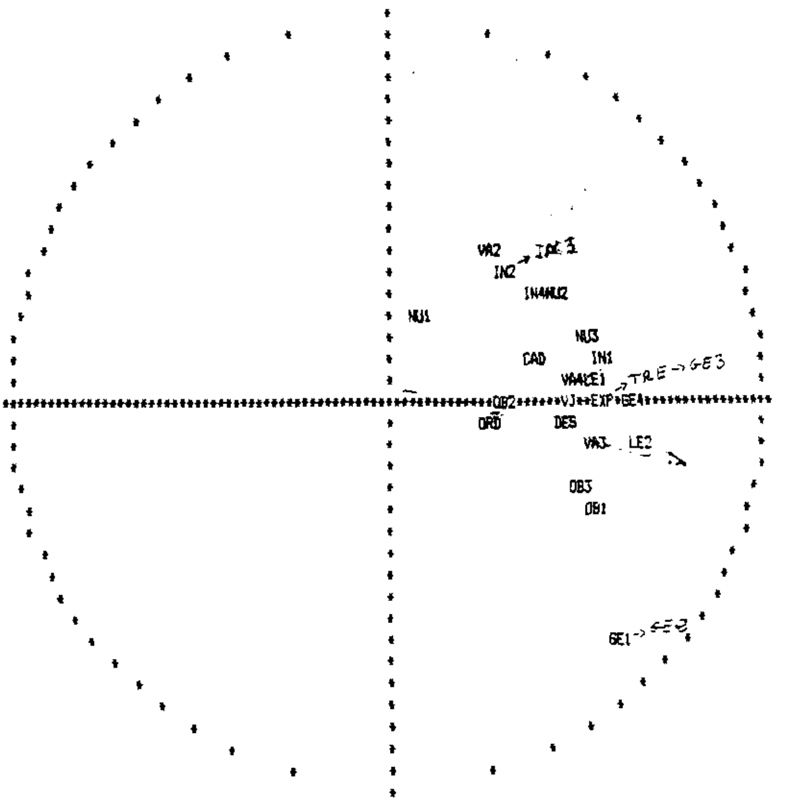
Estas situaciones extremas respecto al eje 1, nos indican que son preguntas originales respecto al conjunto. *Como estas posiciones* las *estamos estudiando en el* análisis ACP de la matriz ÉXITO, que es la matriz de la experimentación, y, por tanto, están determinadas por las respuestas de los alumnos, quiere decir que estas preguntas son respondidas de modo especial por los alumnos, bien por la cantidad de alumnos que las responden o, porque los alumnos que responden éstas, no responden a la mayoría de las preguntas, o a la inversa.

Trataremos de distinguir en qué consiste la "especialidad" de estas preguntas continuando con nuestro estudio.

GRÀFIC 14

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL

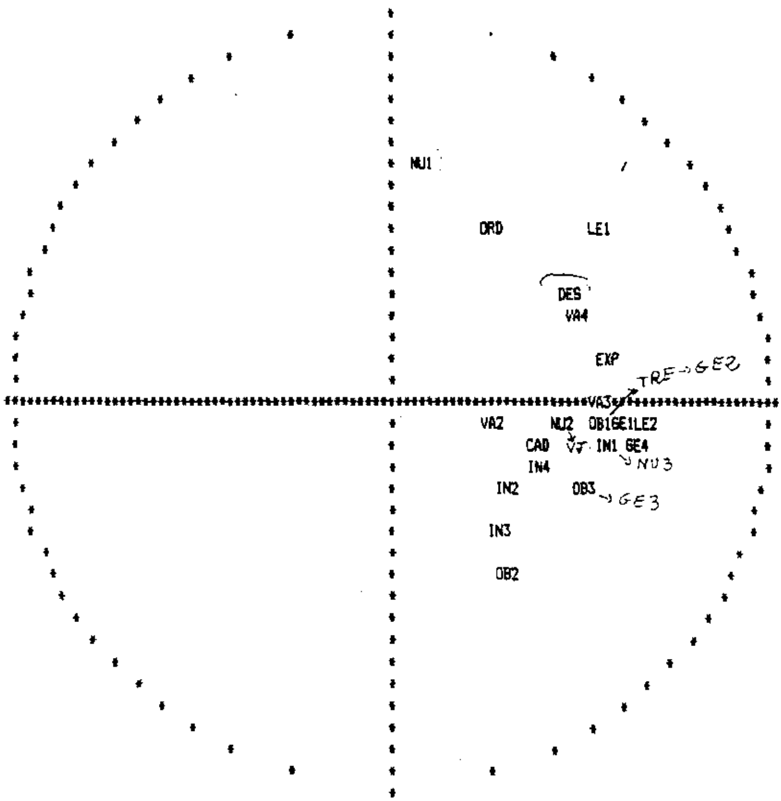


POINT VU : IN2 POINT CACHE : IN3
POINT VU : EXP POINT CACHE : TRE
POINT VU : GE1 POINT CACHE : GE2
POINT VU : EXP POINT CACHE : GE3

GRÁFICO 15

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL



POINT VU : IN1 POINT CACHE : NU3
POINT VU : OB1 POINT CACHE : TRE
POINT VU : NU2 POINT CACHE : VJ
POINT VU : OB1 POINT CACHE : GE2
POINT VU : OB3 POINT CACHE : GE3

Estudio de "individuos"

La segunda parte de este análisis consiste en el estudio de los "individuos", que son los alumnos. Los gráficos muestran la posición en que quedan los alumnos según sus respuestas (Gráficos 16 y 17). Cuando dos alumnos, representados por su número de orden, coinciden, y uno está oculto por el otro, quiere decir que sus respuestas son de las mismas caracteristicas.

Las posiciones próximas indican respuestas semejantes.

En estos planos quedan situados los <u>alumnos suplementarios</u> como alumnos que hubieran respondido solamente a aquellas preguntas en las que figura un "1" en la "matriz a priori-2".

En el estudio de la matriz a priori habiamos visto que se formaban tres grupos de "caracteres". Estos "caracteres" son aqui los alumnos suplementarios. Vamos a ver si en los gráficos 16 y 17 quedan definidos esos mismos grupos.

Los grupos de "caracteres" de los gráficos 6 y 7 con la nueva nomenclatura de <u>alumnos suplementarios</u> quedan:

1er Grupo: $S_1, S_2, S_3, S_4, S_{10}$ y S_{12}

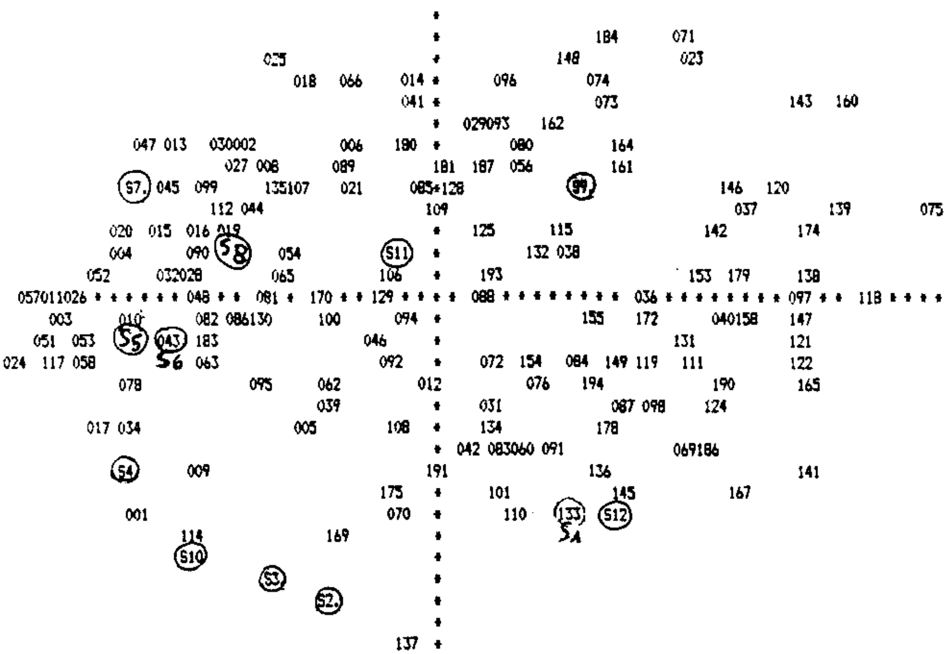
2º Grupo: S_7, S_8 y S_{11}

3er Grupo: S_5, S_6 y S_9

Estos tres grupos se aprecian separados en el gráfico 17. El primer grupo en una franja casi horizontal.

GRAFICO 16

REPRESENTATION PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL

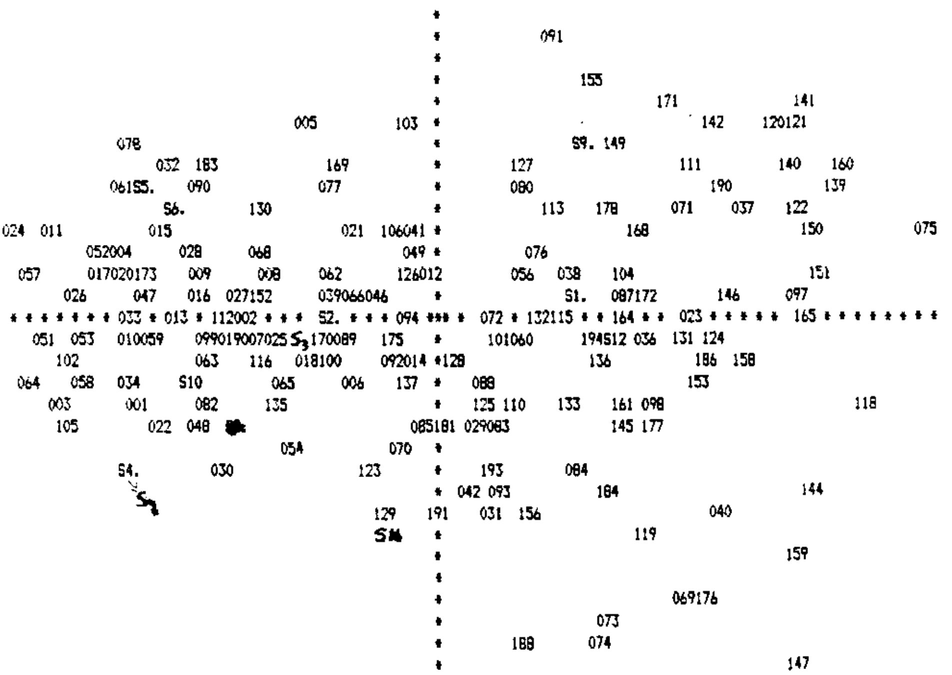


S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8 S_9 S_{10} S_{11} S_{12}

VAP NP DEP OP C VAR IN LEN LI G NUM S

GRÁFICO 17

REPRESENTATION PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL



El segundo grupo en el cuadrante inferior izquierdo. El tercer grupo en la parte superior del plano gráfico. Como este plano tiene el eje 3 como eje vertical diremos que este eje 3 discrimina los tres grupos.

En el gráfico 16, que representa al plano 1-2, se aprecia la separación muy clara del primer grupo en la parte inferior, y del segundo grupo en el cuadrante superior izquierdo, pero el grupo tercero queda poco diferenciado pues el elemento S_4 se separa completamente de los otros dos de su grupo.

Esta separación de los <u>alumnos suplementarios</u> en los mismos grupos que habíamos visto en el análisis de la matriz a priori nos confirma que el planteamiento de "caracteres" que hemos hecho en aquella matriz tiene sentido de acuerdo con la realidad de los alumnos pues se confirma en la matriz ÉXITO (o matriz Acierto/Fracaso) que es la matriz de los resultados de los alumnos.

III.5. ESTUDIO AFC DE LA MATRIZ ACIERTO/FRACASO.

Ya hemos dicho en el ACP que esta matriz ha sido llamada ÉXITO, y que comprende 194 alumnos en las "lineas", que el Análisis Factorial llama "observaciones", y 25 preguntas en las "columnas", que el Análisis llama "variables".

Al igual que en el ACP, se añade la "matriz a priori" que se introduce como "observaciones suplementarias" con el nombre de matriz CARPRE. Los "caracteres" salen en los gráficos numerados automáticamente como S1,S2,..., hasta S12 en nuestro caso. Los conocemos como "alumnos suplementarios" y el Análisis Factorial los sitúa, como el resto de los alumnos, sobre los planos gráficos, pero no los tiene en cuenta a la hora de calcular la inercia, las medias, las desviaciones tipicas etc.

Ya hemos dicho en el apartado anterior que al quedar situados sobre las gráficas nos ayudan a interpretar el análisis, pues sirven como puntos de referencia.

Primero, vamos a ver las caracteristicas generales. El porcentaje de inercia explicado por cada uno de los ejes (Gráfico 18). Nos encontramos con:

Eje 1	Eje 2	Eje 3	Eje 4	Eje 5
10 %	7.9 %	6.7 %	6 %	6 %

El primer eje, que es el más importante, tiene un 10% de inercia. Para valorar un poco su importancia pensemos que, teniendo 25 variables como tenemos, si todas tuvieran el mismo porcentaje de inercia, habria un 4% por variable. El 10% del primer eje equivale a dos veces y media el porcentaje de cada una de las preguntas. Es poco importante.

Son necesarios los tres primeros ejes para alcanzar una contribución acumulada del 24.6 %. Esto quiere decir que vamos a encontrar pequeñas explicaciones, pero no una explicación fuerte y única de todos los fenómenos que observemos.

GRÁFICO 18

VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

1RE LIGNE : VALEURS PROPRES (VARIANCES SUR LES AXES PRINCIPAUX)
2E LIGNE : CONTRIBUTION A L'INERTIE TOTALE (POURCENTAGES EXPLIQUES PAR LES AXES PRINCIPAUX)

10	17,9	24,6			
0.1168	0.0916	0.0785	0.0700	0.0695	6%
10.0 %	7.9 %	6.7 %	6.0 %	6.0 %	

VECTEURS PROPRES (COEFFICIENTS DES VARIABLES DANS L'EQUATION LINEAIRE DES AXES PRINCIPAUX)

NU1	-1.7955	1.1596	0.9531	0.1116	0.5968
LE1	0.8364	0.0069	0.3452	1.2722	-1.5579
ORD	-0.3942	3.4806	1.0418	-0.9053	-2.8888
NU2	-0.9979	0.1750	0.1885	-0.1925	0.1236
LE2	0.6388	-0.0634	-0.0844	0.6118	0.0626
DES	2.3610	0.0730	2.8122	-0.5320	-2.4338
OB1	0.8772	0.6256	-0.2705	-1.3168	0.6780
IN1	-0.2912	-0.0649	-0.6969	-0.1451	-0.3093
EXP	0.8227	-0.4709	-0.0856	0.3114	-1.2385
IN2	-0.7861	-1.8720	-2.6169	-1.3987	-2.7660
VA2	-1.7052	-1.9628	1.8210	-2.8201	0.9747
CAD	-0.2941	-1.0341	-0.3830	2.4274	0.4340
NU3	-0.4692	0.1703	-0.4742	0.2546	0.2296
IN3	-1.4493	-0.1764	-0.6482	1.0668	0.7538
OB2	0.8355	-0.9229	-2.1268	-3.9677	0.7667
TRE	0.2507	0.0886	0.1549	0.6923	0.0310
VA3	0.2834	0.4666	0.2771	0.4559	-0.2295
VA4	1.0501	0.0022	2.1917	0.1290	-1.0557
IN4	0.5309	-2.9769	1.1714	2.2215	-0.8060
VJ	0.7863	-1.6521	2.8601	-0.6961	0.6341
OB3	-0.0594	0.5489	-0.8196	-0.2074	0.3282
GE1	1.6980	0.8509	-0.6261	-0.0902	1.4933
GE2	2.0485	0.7165	-0.6975	-0.3396	1.6863
GE3	0.3743	-0.7909	0.2463	-0.5628	0.4005
GE4	0.5205	-0.1722	-0.3727	-0.4321	-0.3104

III.5.1. ACIERTO Y FRACASO.

Si cierto aspecto a estudiar, representado por un "carácter" elegido, está incluido en preguntas fáciles y otro aspecto a estudiar lo está en preguntas difíciles, esta condición (fácil, difícil) puede enmascarar los verdaderos resultados. Por eso hace falta observar el acierto y el fracaso que, a menudo, aparecen representados a lo largo de un eje que denominaremos <u>eje acierto-fracaso.</u>

Antes de mirar los planos del AFC vamos a identificar las preguntas mejor y peor respondidas. Para eso miramos en el ACP de la matriz ÉXITO (Gráfico 12) y observamos las "medias" que nos indican los índices de éxito de cada una de las preguntas. Multiplicándolos por 100 tenemos "el porcentaje de aciertos" a cada una de ellas.

Las preguntas PEOR contestadas serán las que marcarán la dirección del ERROR y las MEJOR contestadas la dirección del ACIERTO.

Las preguntas PEOR contestadas son:

Pregunta	Media	% aciertos
DES	0.103	10.3 %
OB2	0.108	10.8 %
IN4	0.180	18 %
VA4	0.201	20.1 5%
ORD	0.278	27.8 %

GRÁFICO 19

ETUDE DES VARIABLES (Colonnes) DU TABLEAU

POUR CHAQUE AXE :
1RE COLONNE:COORDONNEE
2E COLONNE:COSINUS CARRES (QUALITE DE LA REPRESENTATION)
3E COLONNE:CONTRIBUTION RELATIVE A L'INERTIE EXPLIQUEE PAR L'AXE

24 4%

COLONNES AXES PRINCIPAUX

COLONNES		AXE 1			AXE 2			AXE 3			AXE 4			AXE 5		
NU1	**	-0.614	0.379	20.3 *	0.351	0.124	8.5 *	0.267	0.072	5.7 *	0.030	0.001	0.1 *	0.157	0.025	2.2 *
LE1	**	0.286	0.056	2.0 *	0.002	0.000	0.0 *	0.097	0.006	0.3 *	0.337	0.078	4.6 *	-0.411	0.116	6.9 *
ORD	**	-0.135	0.007	0.4 *	1.053	0.421	30.9 *	0.292	0.032	2.8 *	-0.240	0.022	2.1 *	-0.762	0.220	21.3 *
NU2	**	-0.341	0.212	7.2 *	0.053	0.005	0.2 *	0.053	0.005	0.3 *	-0.051	0.005	0.3 *	0.033	0.002	0.1 *
LE2	**	0.218	0.082	2.1 *	-0.019	0.001	0.0 *	-0.024	0.001	0.0 *	0.162	0.045	1.9 *	0.017	0.000	0.0 *
DES	**	0.807	0.131	5.3 *	0.022	0.000	0.0 *	0.788	0.125	7.5 *	-0.141	0.004	0.3 *	-0.642	0.083	5.6 *
OB1	**	0.300	0.066	2.5 *	0.189	0.026	1.3 *	-0.076	0.004	0.2 *	-0.349	0.089	5.7 *	0.179	0.023	1.5 *
IN1	**	-0.100	0.019	0.5 *	-0.020	0.001	0.0 *	-0.195	0.072	2.8 *	-0.038	0.003	0.1 *	-0.082	0.012	0.6 *
EXP	**	0.281	0.081	2.9 *	-0.143	0.021	1.0 *	-0.024	0.001	0.0 *	0.082	0.007	0.4 *	-0.327	0.109	6.6 *
IN2	**	-0.269	0.033	1.8 *	-0.566	0.146	10.4 *	-0.733	0.245	20.4 *	-0.370	0.062	5.8 *	-0.729	0.242	22.8 *
VA2	**	-0.583	0.138	7.6 *	-0.594	0.143	10.0 *	0.510	0.106	8.6 *	-0.746	0.226	20.7 *	0.257	0.027	2.5 *
CAD	**	-0.101	0.006	0.3 *	-0.313	0.059	3.5 *	-0.107	0.007	0.5 *	0.642	0.249	19.5 *	0.114	0.008	0.6 *
NU3	**	-0.160	0.057	1.5 *	0.052	0.006	0.2 *	-0.133	0.039	1.5 *	0.067	0.010	0.4 *	0.061	0.008	0.4 *
IN3	**	-0.495	0.262	12.1 *	-0.053	0.003	0.2 *	-0.182	0.035	2.4 *	0.282	0.085	6.6 *	0.199	0.042	3.3 *
OB2	**	0.286	0.014	0.7 *	-0.279	0.013	0.8 *	-0.596	0.060	4.5 *	-1.050	0.187	15.6 *	0.202	0.007	0.6 *
TRE	**	0.086	0.009	0.3 *	0.027	0.001	0.0 *	0.043	0.002	0.1 *	0.183	0.041	2.3 *	0.008	0.000	0.0 *
VA3	**	0.097	0.013	0.4 *	0.141	0.028	1.1 *	0.078	0.008	0.4 *	0.121	0.020	1.1 *	-0.061	0.005	0.3 *
VA4	**	0.359	0.048	2.0 *	0.001	0.000	0.0 *	0.614	0.142	8.9 *	0.034	0.000	0.0 *	-0.278	0.029	2.1 *
IN4	**	0.181	0.010	0.5 *	-0.901	0.248	14.7 *	0.328	0.033	2.3 *	0.588	0.106	8.2 *	-0.213	0.014	1.1 *
VJI	**	0.269	0.033	1.7 *	-0.500	0.115	7.5 *	0.802	0.295	22.4 *	-0.184	0.016	1.3 *	0.167	0.013	1.1 *
OB3	**	-0.020	0.001	0.0 *	0.166	0.043	1.9 *	-0.230	0.083	4.2 *	-0.055	0.005	0.3 *	0.087	0.012	0.7 *
GE1	**	0.580	0.342	11.2 *	0.257	0.067	2.8 *	-0.175	0.031	1.5 *	-0.024	0.001	0.0 *	0.394	0.158	8.6 *
GE2	**	0.700	0.405	14.9 *	0.217	0.039	1.8 *	-0.195	0.032	1.7 *	-0.090	0.007	0.4 *	0.445	0.163	10.1 *
GE3	**	0.128	0.019	0.7 *	-0.239	0.066	3.0 *	0.069	0.005	0.3 *	-0.149	0.025	1.5 *	0.106	0.013	0.8 *
GE4	**	0.178	0.046	1.3 *	-0.052	0.004	0.1 *	-0.104	0.016	0.7 *	-0.114	0.019	0.9 *	-0.082	0.010	0.5 *

Y las preguntas MEJOR contestadas son:

Pregunta	Media	% aciertos
NU2	0.789	78.9 %
NU3	0.732	73.2 %
NU1	0.686	68.6 %
OB3	0.675	67.5 %

Con estos resultados vamos al plano 1-2 del AFC (Gráfico 20) y localizamos dónde están el Acierto y el Error. Es frecuente encontrarlos en oposición respecto al origen formando un eje acierto fracaso.

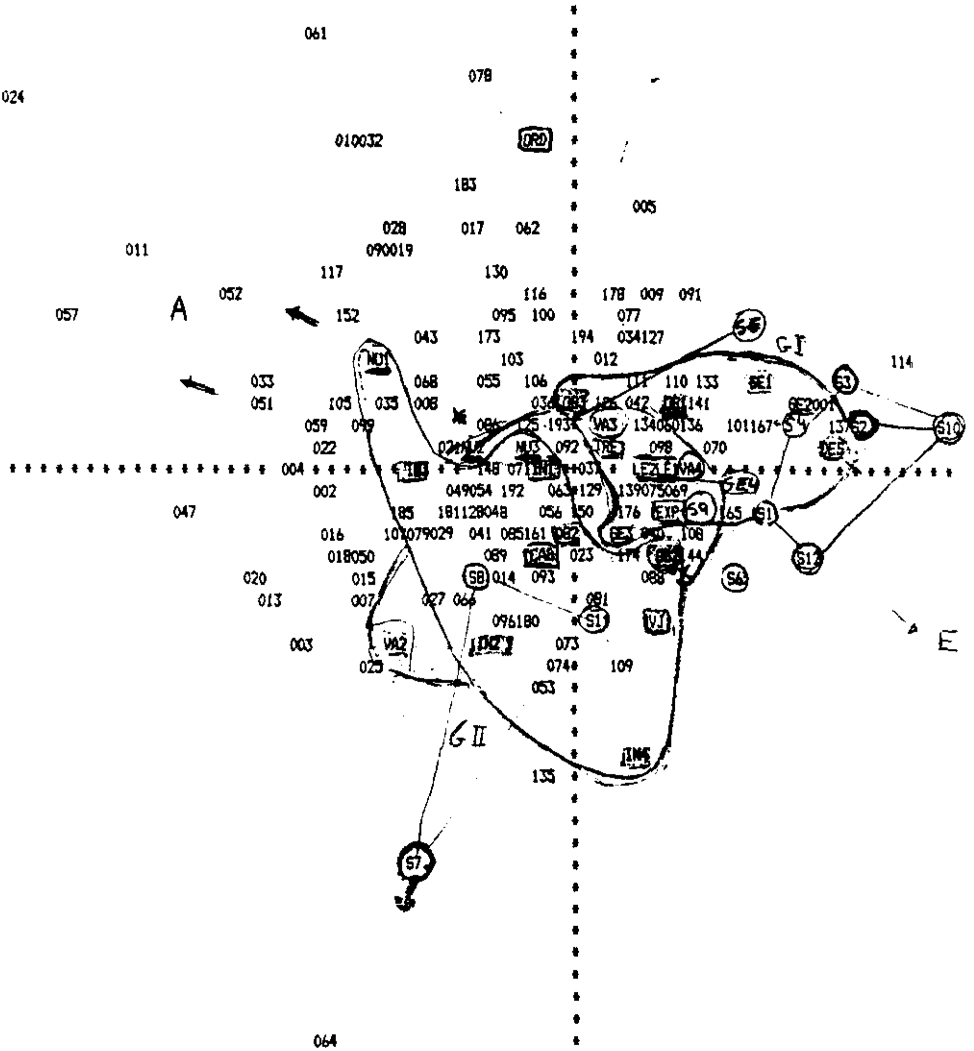
Tomamos las tres primeras preguntas de cada serie y localizamos esas seis preguntas viendo que, efectivamente, marcan un eje oblicuo del segundo al cuarto cuadrante, que tiene la dirección del Acierto en el 2º cuadrante y la dirección del Error en el 4º cuadrante.

La pregunta DES junto con IN4 y OB2 señala un frente en la dirección del Error y la pregunta NU1 señala el otro extremo en la dirección del Acierto.

Observando la pregunta ORD vemos que, respecto a este eje, se presenta en una posición intermedia. Cabe esperar para ella un nivel de aciertos del 50% aproximadamente. Lo miramos en la tabla de la página anterior y encontramos 27.8%, que es mucho más bajo de lo que esperábamos. Esto nos hace pensar que hay más de una dirección de error.

GRÀFICO 20

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ***
PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL



Pasamos al plano siguiente, plano 1-3 (Gráfico 21) y vemos que las preguntas PEOR respondidas, que son DES y OB2, señalan dos direcciones de error. La dirección de la pregunta DES, casi en la bisectriz del primer cuadrante, se ve reforzada por la posición de las preguntas VA4 e IN4 que son también de las PEOR respondidas del cuestionario.

Si miramos en el Gráfico 22 veremos, en el plano 2-3, que las preguntas DES y OB2 se encuentran sorprendentemente opuestas respecto al eje 3, pero no vamos a conceder importancia a este posicionamiento, pues los ejes 2 y 3 tienen solamente un 7.9% y un 6.7% de contribución a la inercia total, lo cual nos indica que las observaciones surgidas sobre ellos no son muy importantes.

Este eje Acierto Fracaso se encuentra fuertemente ligado al eje 1 como se observa en el Gráfico 20. El Error del lado positivo y el Acierto del lado negativo.

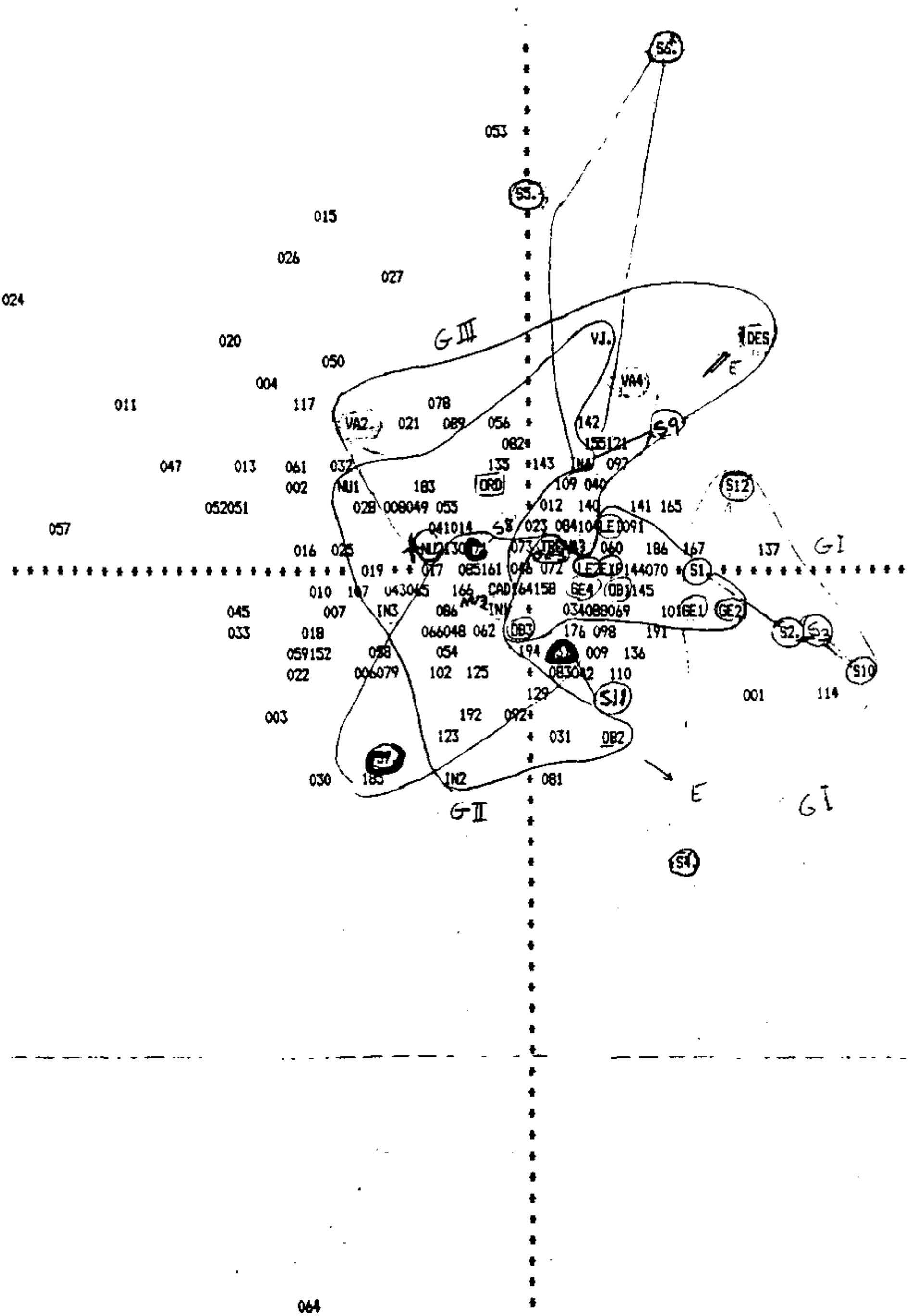
III.5.2. CARACTERES A POSTERIORI

Durante el estudio del Análisis Factorial de Correspondencias surgen, en algunas ocasiones, posicionamientos de las preguntas o de los "caracteres" que no tienen una justificación en el análisis a priori.

Al intentar buscar una explicación a esos posicionamientos, aparecen, como posibles, nuevos "caracteres", diferentes de los "caracteres a priori", que llamaremos "caracteres a posteriori", porque su aparición se produce

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ***
PLAN 1 3 AXE 1 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

GRÁFICO 21



después y como consecuencia del Análisis Factorial.

Estos "caracteres a posteriori" suponen una posibilidad de explicación de los hechos encontrados a través del Análisis Factorial. Es la aparición de esos hechos la que exige que encontremos una explicación didáctica, que es la que se intenta a través de esos nuevos "caracteres a posteriori".

Para comprobar su validez, estos "caracteres a posteriori" se incorporan a los que ya teniamos, formando una nueva matriz a priori, y, a continuación, se hacen nuevos análisis de esa matriz a priori y de la matriz de los datos experimentales, la que hemos llamado éXITO. Los alumnos suplementarios, que se añaden ahora, incluyen todos los "caracteres" que tenemos, que son los "a priori" y los "a posteriori" y con esos análisis se prosigue la investigación.

En esta linea de buscar explicaciones para situaciones surgidas del Análisis Factorial, vamos a indagar sobre las razones que provocan el bajo nivel de aciertos de la pregunta DES, que es la peor respondida. Se trata de la pregunta 6ª del cuestionario:

"¿Qué puedes decir de "p" si $p=3q+7$ y $q<4$?"

Hago notar que es la única pregunta en la que se incluye, junto con las letras, una desigualdad. Las desigualdades se trabajan muy poco en los ejercicios de clase en estas edades, por lo que es esperable que cause extrañeza en los alumnos y que ésta influya en las posibilidades de resolución.

Esto nos hace pensar que se podría considerar la "familiaridad escolar" como un "carácter a posteriori", además de los ya descritos. Las preguntas se podrían clasificar en "familiares" o "no-familiares", según la experiencia de clase que hayan pasado los alumnos.

Este "carácter" pertenece a los "caracteres a posteriori", pues es el análisis de los resultados el que hace surgir su posibilidad. El Análisis Factorial de Correspondencias se convierte, así, en una fuente de sugerencias que se deben estudiar con detenimiento para no desaprovechar las oportunidades de estudio que surgen.

Es importante hacer un tratamiento riguroso de nuestras opiniones "a priori", vertidas en los "caracteres a priori", pero debemos estar atentos a las posibilidades nuevas que surjan del Análisis, pues esto enriquece nuestra visión previa.

Vamos a continuar investigando sobre la "familiaridad escolar", para ver si es un "carácter" explicativo de la situación descubierta.

Las preguntas que se oponen a DES en el plano 1-2 que estamos estudiando (Gráfico 20) son NU1, IN3 y NU2.

NU1 es la pregunta que pide "sumar 2" y "multiplicar por 3" dos números. Se trata de operaciones entre números que, efectivamente, son "familiares" escolarmente hablando.

IN3 se trata de la pregunta:

"El doble de un número más su mitad es igual a 20. ¿Sabes cuál es ese número?"

También se trata de una pregunta con enunciado habitual al alumno, en la forma materna (LEN). Con una incógnita a calcular (IN) y en la que la respuesta pedida es un número (NUM). Podemos decir que estos tres "caracteres" son "familiares", en términos de enseñanza, a este nivel.

NU2 es la pregunta 5ª. Aunque el enunciado es de tipo literal (LI) se trata de expresiones con igualdades, sumas y diferencias, que también son "familiares" en el aula a este nivel. Además la respuesta pedida es numérica (NUM), que es la más frecuente y habitual para los alumnos.

Por el extremo de la pregunta DES tenemos también a OB2, IN4 y VJ. Vamos a seguir investigando este nuevo "carácter" de la "familiaridad escolar", para ver si su falta encaja con la mala respuesta dada a estas preguntas.

Tanto OB2 (pregunta 15ª) como VJ (pregunta 21ª) son preguntas en las que es necesario escribir una expresión simbólica como respuesta. Esto, efectivamente, no es habitual en términos escolares. Lo "familiar", en estos términos, sería dar una expresión simbólica y pedir un cálculo que terminase con un resultado numérico. Parece pues que este nuevo "carácter" da una explicación para estos fracasos.

La pregunta IN4 (nº 19 en el cuestionario) es también una pregunta **inhabitual**, pues, aunque el resultado pedido sea numérico (NUM), la forma de llegar a obtenerlo no *se basa en el cálculo, sino en un razonamiento fundado* en la estructura de la ecuación y en el concepto de "solución" de una ecuación.

III.5.3. ESTUDIO DE LOS EJES

En el Gráfico 20 podemos observar que el *eje* 1, que es el horizontal viene definido por el grupo de "caracteres": S_1 (VAP), S_2 (NP), S_3 (DEP), S_4 (OP), S_{10} (G) Y S_{12} (S), que hemos llamado grupo GI, ya que éstos se sitúan en las posiciones extremas, a la derecha. Aparece como intrusa, en este grupo GI, la pregunta DES, que en el análisis "a priori" estaba incluida en el grupo GIII (llamado G3 en el Gráfico 10).

Hay que seguir estudiando la posición de esta pregunta DES en otros planos, aunque el haberla encontrado desplazada en éste, que es el principal, ya nos mueve a observarla en particular, pues quiere decir que los "caracteres", con los que la hemos definido en la "matriz a priori", no nos explican esta posición en el plano 1-2. La seguiremos al estudiar las preguntas.

El eje 1 se encuentra ligado fuertemente al eje Acierto Fracaso aunque no identificado con él. El Acierto del lado negativo del eje 1 y el Fracaso del lado positivo.

El eje 2, que es el vertical, viene definido por la pregunta ORD (pregunta 4ª del cuestionario) y por los alumnos 061 y 078 como se ve en la figura (Gráfico 20). Estos tres elementos marcan superiormente el eje 2.

La pregunta ORD se muestra como una pregunta original pues, en el estudio "a priori", no se encontraba aislada de las demás preguntas y, sin embargo, aqui aparece con características propias que la desmarcan del resto y que nosotros no habiamos previsto.

En el plano 1-2 del AFC de la matriz a priori (Gráfico 10) se encontraba situada en el grupo que hemos denominado G3 junto con otras preguntas como VA2, VA3 y VA4 y ligada a los "caracteres" LI($S_{\heartsuit}$), C($S_{\blacksquare}$) y VAR($S_{\spadesuit}$) pero en el plano 1-2 (Gráfico 20) del AFC de la matriz ÉXITO, que es el estudio de los alumnos, no sólo aparece separada de las preguntas VA2, VA3 y VA4, sino que se encuentra opuesta a los "caracteres" suplementarios VAR($S_{\spadesuit}$), y LI($S_{\heartsuit}$) y muy alejada del C($S_{\blacksquare}$).

La situación de la pregunta ORD, definiendo el eje 2, se ve de nuevo confirmada en el gráfico del plano 2-3 (Gráfico 22) en el que el eje 2 es el horizontal y la pregunta ORD queda situada en posición extrema, a la derecha. Podemos observar también que los dos alumnos que "tiraban" del eje 2 se encuentran aquí, otra vez, fuertemente ligados a esta pregunta.

Estos alumnos son el 061 (de 8º de EGB) y el 078 (de 1º de REM). Voy a estudiar las respuestas de ellos en el análisis descriptivo, para ver el por qué de esa ligadura. Veo que son alumnos que han tenido un bajo nivel de respuestas (4 correctas de las 25 posibles) pero han respondido bien a la pregunta ORD que, por otra parte, es una pregunta que se encuentra respondida sólo por el 27.6% de los alumnos. Posiblemente por eso, en la gráfica están tan próximos a la pregunta, porque en el conjunto de su comportamiento, la respuesta positiva a la pregunta ORD, tiene mucha importancia.

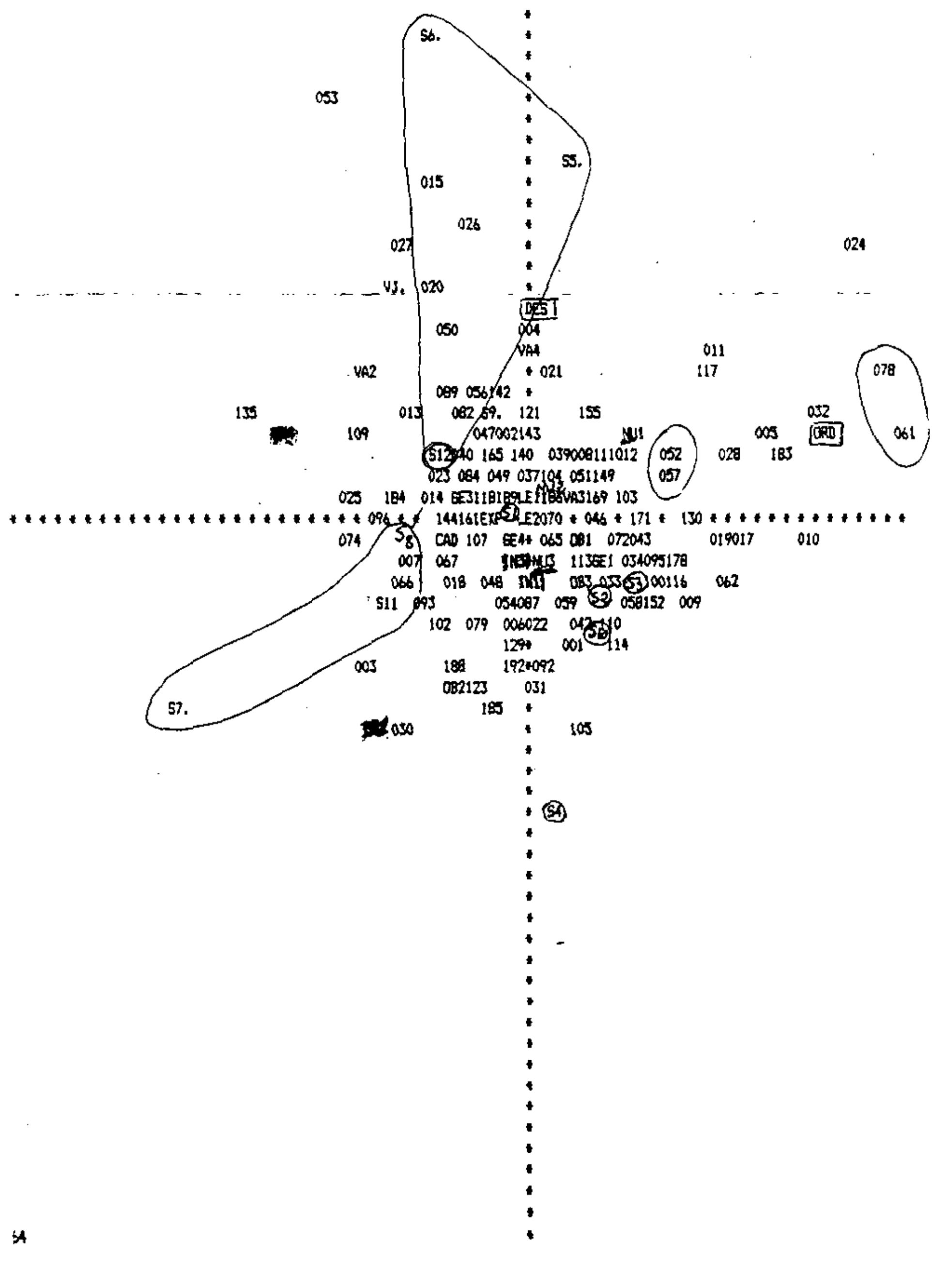
En el otro extremo de este eje 2 está la pregunta IN4 opuesta, por tanto, en el gráfico, a la pregunta ORD. Mirando el índice de aciertos en el apartado V.1 se observa que la pregunta ORD tiene un 27.8% y la pregunta IN4 un 18%. *Ambas están con un índice muy bajo, por tanto no* es el nivel de aciertos lo que las opone. Debe existir un "carácter" que pueda explicar este posicionamiento.

El eje 2 está definido por un "carácter", no encontrado todavía, que opone ORD a IN4 y que habrá que descubrir.

El eje 3 se puede analizar en el Gráfico 21 y en el Gráfico 22 donde es el eje vertical, y se ve que viene definido por los "caracteres" suplementarios VAR(S_a) y C(S_e)

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ###
PLAN 2 3 AXE 2 HORIZONTAL AXE 3 VERTICAL

GRÁFICO 22



y un poco menos por LI(S_9), que son los que forman el grupo G3 del Gráfico 10. Se ve que estos "caracteres" "tiran" de las preguntas del mismo grupo: DES, NU2, ORD, VA2, VA3 y VA4 y se aprecian ahí dos preguntas intrusas, que son IN4 y VJ, ambas del grupo G2. En esta parte del plano se entremezclan las preguntas del grupo G2 y el grupo G3.

Estas dos preguntas ya hemos tenido ocasión de observarlas al describir su posición respecto al eje Acierto Fracaso, con relación al "carácter a posteriori" de la "familiaridad escolar". Esto puede explicar su posición fuera de lo que esperábamos con el estudio de los "caracteres a priori".

En la parte negativa, el eje 3 se encuentra *definido por el "carácter" OP* (S_4) y la *pregunta* OB2 *que*, por otra parte, es una de las peor respondidas. Tanto el "carácter" como la pregunta tienen que ver con el que llamamos error de la letra como objeto.

III.5.4. ESTUDIO DE LAS PREGUNTAS

Vamos a comparar las posiciones relativas de las *preguntas en los análisis de la "matriz a priori" y* sus posiciones en el AFC de la matriz ÉXITO. Con esto comparamos nuestro estudio "a priori" con el estudio de la realidad experimental de los alumnos, ya que, como hemos dicho, la matriz ÉXITO recoge las respuestas de los alumnos a las 25 preguntas.

- Las preguntas NU1, NU2 y NU3 protagonizan una situación interesante, porque no responden a la previsión que habíamos hecho para ellas.

Las preguntas NU1 y NU3 están ligadas (superpuestas) en el Gráfico 10 que analiza "la matriz a priori" y alejadas de la pregunta NU2. Esto es, que según nuestros "caracteres a priori", las preguntas NU1 Y NU3 son semejantes y deberían ser respondidas por el mismo tipo de alumnos, mientras que la NU2 , al encontrarse separada de aquellas, está catalogada como una pregunta diferente.

Aquí, en el plano 1-2 (Gráfico 21) del AFC de la matriz de los alumnos (matriz ÉXITO) se encuentran las tres bastante próximas, pero NU1 y NU3 ya no aparecen tan "ligadas", pues no se encuentran superpuestas. Esto quiere decir que los "caracteres" con los que las hemos identificado en la "matriz a priori" no son significativos aquí.

- Las preguntas IN1 e IN4 también sufren un desplazamiento respecto de sus posiciones "a priori".

La posición relativa de las preguntas IN1 e IN4 cambia, puesto que se encuentran superpuestas en todo el estudio de la "matriz a priori", tanto en el ACP como en el AFC y en todos los planos de ambos análisis, lo cual se interpreta diciendo que las dos preguntas están "ligadas" por los "caracteres" escogidos. Sin embargo, al estudiar el AFC de la matriz proveniente de las respuestas de los alumnos (matriz ÉXITO), las encontramos muy separadas. En el primer plano 1-2 (Gráfico 20), se sitúan con las coordenadas (Gráfico 19):

	Coordenadas	
	Eje 1	*Eje 2*
IN1	-0.100	-0.020
IN4	0.181	-0.901

que producen la posición del gráfico, en la que IN1 está casi en el origen de los ejes mientras que IN4 se encuentra en el cuarto cuadrante, en una posición de las más bajas de la representación.

Esta distanciación se confirma en los planos 1-3 (Gráfico 21) y 1-4 (Gráfico 23) con la posición de IN1 en el tercer cuadrante, mientras IN4 se encuentra en el primero, como vemos que corresponde según las coordenadas de ambas preguntas (Gráfico 19):

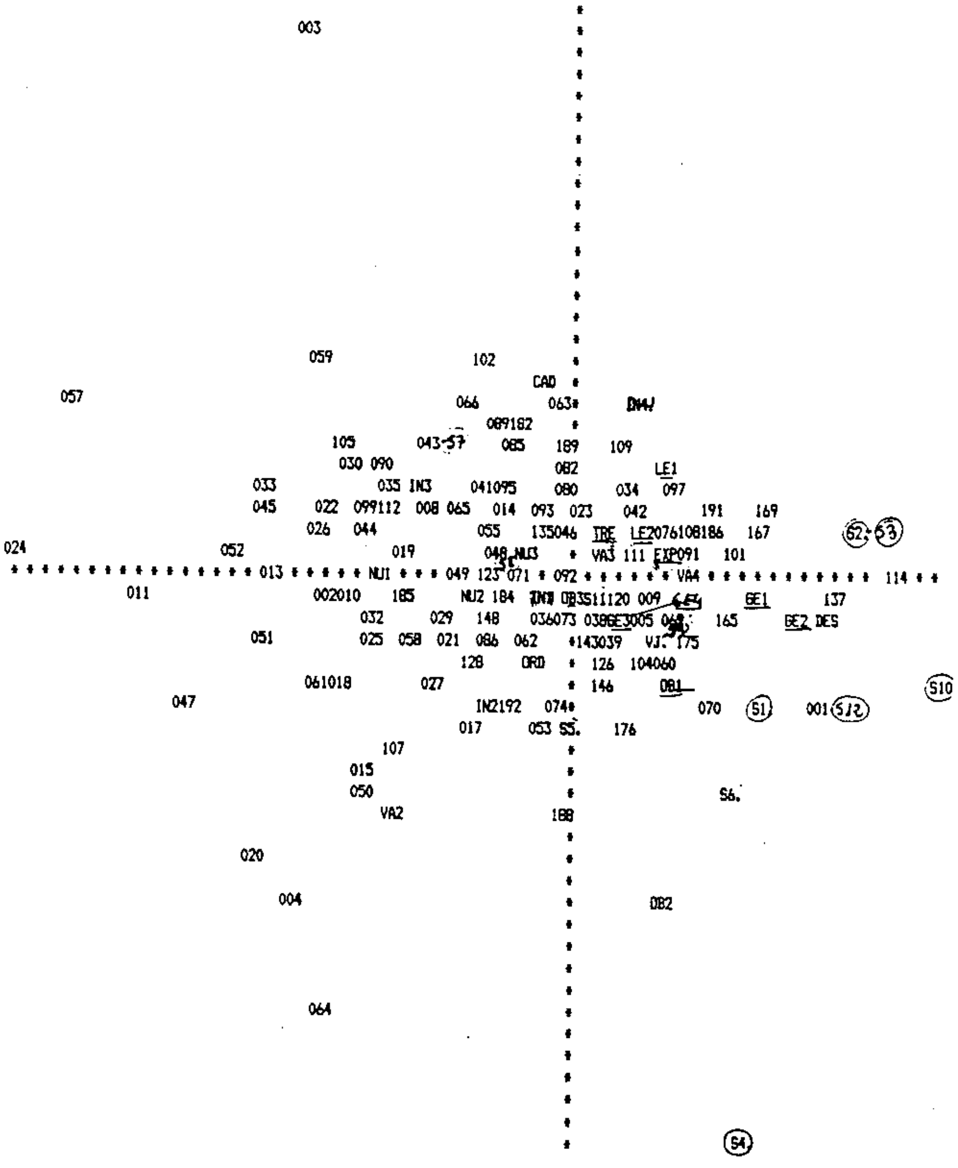
		Coordenadas	
	Eje 1	*Eje 3*	*Eje 4*
IN1	-0.100	-0.195	-0.038
IN4	0.181	0.328	0.588

Quiere esto decir que estas preguntas no están "ligadas" por los alumnos, pues en ese caso aparecerían próximas; así que deberemos explicar esta separación por alguna razón distinta de la explicación de los "caracteres" *que habíamos buscado en la "matriz a priori".*

- Las preguntas LE1 ,LE2 y EXP responden en el AFC del plano experimental a las expectativas que teníamos

GRÀFICO 23

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ***
PLAN 1 4 AXE 1 HORIZONTAL AXE 4 VERTICAL



según nuestro planteamiento "a priori".

Las preguntas LE2 y EXP se encontraban superpuestas en el análisis "a priori" y muy próximas a la pregunta LE1. Se apreciaba esta posición en el plano 1-2 (Gráfico 3) y en el plano 1-3 (Gráfico 4) del ACP; y en el plano 1-2 (Gráfico 10) y en el plano 1-3 (Gráfico 11) del AFC. Incluso, en este último, se encontraban superpuestas las tres. Es decir se encontraban claramente "ligadas".

Cuando , con la matriz ÉXITO, paso al estudio de los alumnos, encuentro confirmada la situación de "ligadura", pues, aunque LE2 y EXP no se encuentren superpuestas, lo cual sería muy difícil teniendo en cuenta que el volumen de individuos es de 194, se encuentran muy próximas en los planos principales: plano 1-2 (Gráfico 20) y plano 1-3 (Gráfico 21) del AFC de la matriz ÉXITO.

Para estas preguntas resulta eficaz nuestra previsión de "caracteres". Decimos que nuestros "caracteres a priori" son una buena explicación para lo que sucede en la experiencia con estas preguntas.

Estas preguntas pertenecen al primer grupo de los observados al estudiar la "matriz a priori-2" y recordemos que este grupo se encuentra bien representado en la experimentación, por eso no es de extrañar que la posición de estas preguntas que pertenecen al primer grupo encuentren a su vez confirmada su posición con la experimentación.

- La pregunta ORD se nos muestra muy especial, pues aparece aislada de las demás en el plano 1-2 (Gráfico 20). Lo que llama la atención ella es que su posición no era esperada, ya que en el estudio ACP de la "matriz a priori-2" y en el AFC de la misma matriz (Gráfico 10) se encontraba relacionada con grupos de preguntas como NU2, VA2, DES, VA3 y VA4.

Esta posición otorgada por la elección de "caracteres" no se mantiene con los resultados de la experimentación, pues en este plano 1-2 (Gráfico 20) la encontramos aislada y lejana de VA3, VA4 y NU2; más alejada todavía de la pregunta DES y mucho más alejada de VA2 a la que, incluso, se opone respecto a este eje 2.

Debe haber una explicación para este hecho. Los "caracteres" elegidos no explican lo que sucede en el AFC. Esta posición de la pregunta ORD nos sugiere estudiar las características de la pregunta desde algún otro punto de vista distinto al que hasta ahora habíamos aceptado. El AFC nos da así un indicio para el análisis de esta pregunta.

Otra pregunta que tiene un posicionamiento especial es la IN4. Ya hemos observado un poco más arriba, comparándola con la IN1, con la que se identifica en el análisis "a priori", cómo su posición respecto a IN1, en el AFC, es del todo inesperada. Ahora vamos a observarla desde el punto de vista del eje 2, en el AFC (Gráfico 20). El eje 2 queda definido por las preguntas ORD e IN4, que se encuentran en oposición respecto a él. Pero ambas preguntas tienen un bajo nivel de respuesta: 27.8% y 18%, respectivamente. Por tanto la oposición no está marcada por el nivel de aciertos.

La oposición, en el gráfico, indica que los alumnos que responden correctamente a una, fracasan en la otra. ***El AFC, de nuevo, nos aporta aquí un indicio que nos marca una dirección de investigación.*** *Se tratará de buscar respuesta a la pregunta: ¿qué es lo que hace que estas preguntas, ORD e IN4, sean tan diferentes para los alumnos?.*

Si no dispusiéramos del AFC como elemento de investigación no habríamos sabido que estas preguntas habían sido respondidas por distinto tipo de alumnos y que, en consecuencia, para los alumnos, habían resultado ser preguntas muy distintas.

III.5.5.ESTUDIO DE LOS "CARACTERES"

Observaremos ahora la relación entre el AFC de la "matriz a priori-2" en el plano 1-2 (Gráfico 10) y el AFC de la "matriz Acierto Fracaso", de los alumnos, en el plano 1-2 (Gráfico 20).

Esta *última matriz, como ya se sabe, es el resultado de la experimentación y comparándola con la "matriz a priori-2" sabré si la experiencia confirma aquello que yo había previsto con los "caracteres" en el estudio* a priori.

- Se observa, pues, el grupo GI del Gráfico 10 de la "matriz a priori" para estudiar su posición, comparada, en el Gráfico 20 de la "matriz Acierto Fracaso".

Los "caracteres" que forman ese grupo son VAP, NP, DEP, OP, G y S, que corresponden a los alumnos suplementarios: S_1(VAP), S_2(NP), S_3(DEP), S_4(OP), S_{10}(G), S_{12}(S) y las preguntas que están atraidas o ligadas por ellos son:

EXP, GE1, GE2, GE3, GE4, LE1, LE2, OB1, OB3 y TRE

Volviendo con estos datos al Gráfico 20 vemos que, efectivamente, la experimentación confirma el grupo de "caracteres" en el lado positivo del eje 1 (horizontal) y próximas a ellos las diez preguntas que hemos señalado que se muestran así atraidas por esos "caracteres".

Solamente aparece aqui una pregunta extraña al grupo, la pregunta DES, que en el análisis a priori se encontraba formando parte del grupo GIII. Pero esta pregunta no se encuentra muy atraida por este grupo GI pues en el Gráfico 21 (en el plano 1-3) ya la encontramos alejada del grupo.

Volviendo a nuestro grupo GI. Su posición en el Gráfico 20 confirmando el grupo formado en el Gráfico 10 nos dice que en nuestro análisis a priori hay algo que tiene sentido pues la experimentación comprueba la misma agrupación que habíamos previsto antes.

Vamos a comprobar si en el plano 1-3 (Gráfico 21) continúa clara la conjunción de este grupo GI. Vemos que también, en este plano, los "caracteres" del grupo GI se *agrupan en la parte positiva del eje 1 que es el horizontal* y se encuentran atrayendo a las diez preguntas: EXP, GE1, GE2,GE3,GE4,LE1,LE2,OB1,OB3 y TRE que forman en este grupo.

En este plano, también hay una pregunta extraña al grupo, la pregunta VA3, que se encuentra escondida tras la pregunta TRE, y que no pertenecía al grupo GI en el, *análisis a priori, sino al grupo GIII. Por lo demás el grupo* GI se encuentra bien representado en los resultados experimentales. Estos resultados corroboran así los <u>análisis a priori</u>.

- Veamos ahora el grupo GII.

Este se encuentra formado, según el análisis a priori, por los "caracteres" IN,LEN y NUM según se ve en el Gráfico 10. Estos "caracteres" corresponden a los alumnos suplementarios

S_7(IN), S_8(LEN) y S_{11}(NUM)

y atraen hacia sí el grupo de preguntas

CAD,IN1,IN2,IN3,IN4,NU1,NU3,OB2 y VJ

Con esta información vamos al plano 1-2 de la experimentación (Gráfico 20) para ver si estas posiciones se corresponden en la experiencia.

Y en la parte inferior del plano, ligeramente a la izquierda, encontramos también los tres "caracteres" efectivamente agrupados.

Vemos que este grupo II de "caracteres" se confirma con el estudio de la matriz de los alumnos.

Al buscar las nueve preguntas que corresponden a este grupo, las encontramos muy orientadas en la proximidad de los tres "caracteres".

Solamente la pregunta VA2 queda como extraña en este grupo pues pertenecía al grupo GIII del análisis a priori.

Vamos a ver qué sucede en el plano siguiente, plano 1-3 (Gráfico 21). También los tres "caracteres" se encuentran formando un grupo que confirma el grupo GII, pero el conjunto de preguntas ahora no es tan nítido. Algunas como VJ parecen alejarse demasiado de la zona de influencia y otras, como NU2 próxima a S_8, no pertenecen al grupo inicial. Salvo estas excepciones, se confirma también el grupo.

- Veamos, por fin, el grupo GIII.

En el Gráfico 10 del AFC de la matriz a priori se observan los elementos que forman el grupo GIII. Son los "caracteres" C, VAR y LI que corresponden a los alumnos suplementarios:

$$S_5(C),\ S_6(VAR),\ S_7(LI)$$

y las preguntas atraídas por ellos que son:

DES,NU2,ORD,VA2,VA3 y VA4

Pasando ahora al plano 1-2 (Gráfico 20) de la matriz Acierto Fracaso, o matriz de la experimentación, se observa que los "caracteres" se pueden considerar cercanos entre sí, y también que algunas de las preguntas correspondientes, como NU2,VA3 y VA4, están en la zona de influencia de estos "caracteres"; pero también se aprecian las preguntas VA2 (abajo a la izquierda), ORD (arriba en el centro) y DES (centro a la derecha) que aparecen completamente desplazadas de esta zona de influencia de los "caracteres" del grupo.

Interesa ver, en el plano 1-3 (Gráfico 21), si el grupo se mantiene mejor cohesionado. Los "caracteres" $C(S_8)$, $VAR(S_4)$ y $LI(S_7)$ aparecen efectivamente formando un grupo en la parte superior y central que se ve además que define el eje 3, como se puede comprobar también en el plano siguiente, plano 2-3 (Gráfico 22).

Se ve, por tanto, que este grupo III de los "caracteres", observado en el estudio de la "matriz a priori-2", se *confirma*, también, con el estudio de la "matriz éXITO" o matriz de la experimentación.

En cuanto a las preguntas que formaban parte de este grupo, vamos a identificarlas en el plano 1-3, y vemos que la mayoría se encuentran bien situadas: DES,ORD,VA2,VA3 y VA4. Unicamente NU2, sin estar demasiado alejada, sucede que está muy próxima al "carácter" LEN(S_a) del grupo GII. Es ésta una pregunta de respuesta numérica y el "carácter" S_a representa el enunciado en lengua materna. Se aprecia que, tanto la pregunta como el "carácter", están alejados del simbolismo, el uno por el enunciado y la otra por la respuesta.

En el grupo se observan dos preguntas intrusas, la VJ y la IN4 que forman parte del grupo GII en el análisis a priori.

Estas dos preguntas resultan diferentes, para los alumnos, de lo que nosotros habíamos previsto en el análisis a priori.

Si volvemos al plano 1-2 (Gráfico 20) encontramos estas preguntas en oposición a la pregunta ORD con relación al eje 2. Habiamos observado esto al estudiar la pregunta ORD. En ese momento vimos que IN4 y ORD se encontraban en oposición, y ahora, añadimos a esta observación la pregunta VJ.

Resumiendo este estudio de los "caracteres", podemos decir que los tres grupos que se habian formado por nuestra elección de "caracteres" y que se habian hecho patentes en el estudio <u>a priori</u> (estudio de la matriz a priori-2"), quedan confirmados por el análisis AFC de la experiencia (estudio de la matriz ÉXITO de los alumnos). **Esto nos dice que la elección de "caracteres" es ajustada a la realidad del alumnado en el que hemos hecho la experiencia.**

Pero, a la vez, este estudio nos muestra algunas preguntas del cuestionario cuya posición no responde adecuadamente a las previsiones que habiamos hecho y que por tanto son preguntas que nos interesa estudiar desde otros puntos de vista.

III.6. CONCLUSIONES PARCIALES.

- Los caracteres escogidos no coinciden entre sí, esto es, están definidos sobre distintas preguntas. Estos caracteres discriminan bastante bien a las preguntas.

- Los caracteres de error (VAP, NP, DEP y OP) forman un conjunto (que tiene próximos a los caracteres "G" y "S"), y esto es lógico porque se pueden producir sobre un tipo de preguntas semejante.

- Los caracteres de enunciado (LEN, LI y G) se encuentran muy distanciados, lo cual quiere decir que las preguntas del cuestionario los definen muy bien.

- Se encuentra determinado un eje **Acierto Error** oblicuo, del segundo al cuarto cuadrante, que ayuda a discernir los alumnos que responden mejor de los que peor responden.

- El análisis ayuda a descubrir algunas preguntas que se catalogaban con unas caracteristicas y que luego han resultado originales respecto a esas previsiones.

Son de este tipo las preguntas NU1 y NU3 que están ligadas en la matriz a priori, y separadas de la pregunta NU2; y que después en el análisis de la matriz de alumnos, es decir de la contingencia, aparecen próximas las tres, pero no superpuestas.

También son de ese tipo las preguntas IN1 e IN4. Aparecen primero "ligadas" y después separadas por la contingencia.

La pregunta ORD se muestra muy especial pues su posición sobre el gráfico de la contingencia es completamente separada del resto y en una posición que no había sido prevista.

Las preguntas VJ e IN4 se revelan, también, como diferentes a lo que habíamos previsto.

La pregunta GE4 resulta original respecto a las otras, quizá porque los alumnos que la responden no responden bien a las demás, o al contrario.

- Algunas preguntas responden muy bien a las previsiones hechas. Son de este tipo LE1, LE2 y EXP que confirman sus posiciones iniciales.

- Los caracteres escogidos forman tres grupos en la matriz a priori, de los cuales, dos, son confirmados claramente por la contingencia, y el tercero, queda un poco desdibujado en algunos planos. En general la contingencia confirma los agrupamientos previstos con la matriz a priori. Esto afirma que la elección de caracteres es correcta.

- El análisis ayuda a descubrir caracteres no previstos, que llamamos caracteres "a posteriori" como por ejemplo, la **familiaridad escolar**.

-.-.-.-.-.-.-.-

IV. ESTUDIO ESTADÍSTICO "BMDP" SOBRE EL CUESTIONARIO: EL USO DE LAS LETRAS

Este análisis estadístico da muchas posibilidades de estudio de un cuestionario empleando las distintas modalidades que ofrece.

El análisis descriptivo general, BMDP-2D, permite hacer un estudio detenido de aciertos y fracasos. Este análisis ayuda a identificar cuáles son las preguntas del cuestionario que, al ser respondidas por casi todos los alumnos o por prácticamente ninguno, se revelan inútiles para discriminar entre ellos; también localiza las preguntas que resultan más difíciles a los alumnos, que no siempre son las que se esperaba. O sirve para determinar cuál es el carácter preponderante entre las preguntas mejor y peor respondidas.

Con este análisis descriptivo general, 2D, también se pueden estudiar, en toda la muestra, distintos tipos de enunciado representados por los caracteres LEN, LI y G, como haremos en el apartado I.5, y su influencia en la comisión de los distintos tipos de error. Esto se hará en los apartados I.7, I.8 e I.9.

Los análisis BMDP-3D y 1D, combinados, dan, desde la perspectiva de los distintos cursos, los contrastes entre enunciados en lengua literal, lengua materna y lengua gráfica. Dan también la comparación de las medias por cursos, lo que permite analizar el efecto de la enseñanza en la comprensión de preguntas con distintos tipos de lenguaje.

Del mismo modo, con los análisis BMDP-3D y 1D se estudian los contrastes entre respuestas de tipo numérico y respuestas de tipo simbólico en toda la muestra y por cursos. Esto se hace en el apartado I.6.

El análisis BMDP-7D, consiste en un análisis de varianza que permite saber si entre las respuestas a las preguntas del cuestionario existen diferencias significativas según el curso al que pertenece el alumno. Con ello se pueden deducir los efectos producidos por la enseñanza en los diferentes niveles y estudiar posibles diferencias entre Reforma (REM) y Bachillerato (BUP).

Para algunas preguntas del cuestionario es preferible emplear el análisis BMDP-4F que es un análisis de frecuencias que utiliza el parámetro χ^2 y que resulta más eficaz que el anterior pues proporciona el número de alumnos de cada curso que han respondido de un modo determinado, el porcentaje que ese número representa respecto al total de los alumnos del curso, el porcentaje sobre el número total de alumnos encuestados y el porcentaje sobre el número de respuestas de cada tipo.

Hemos empezado por un análisis descriptivo general, 2D.

IV.1. ANÁLISIS DESCRIPTIVO.

IV.1.1. SOBRE LOS ALUMNOS.

Sobre el total de alumnos encuestados la proporción de cada curso es la siguiente:

7º EGB	18.9 %
8º EGB	16.8 %
1º BUP	39.3 %
1º REM	25 %

Se ve, por tanto que la muestra está un poco sobrecargada en 1º BUP en detrimento de los alumnos de 7º y 8º de EGB.

Si se consideran juntos éstos últimos suponen un 32.1 % que ya es equiparable al porcentaje de alumnos de Bachillerato y de Reforma.

Tendremos esto en cuenta cuando tratemos de valorar el "peso" de algunas de nuestras conclusiones.

IV.1.2. SOBRE LAS PREGUNTAS.

Aunque el cuestionario consta de 26 preguntas, este análisis estadístico no las incluye todas. Han sido eliminadas las preguntas nº 1 y nº 20. La pregunta nº 1 porque las caracteristicas de su enunciado la hacian dificilmente equiparable al resto de las preguntas y la pregunta nº 20 debido a un error de transcripción en el enunciado como ya se ha dicho.

La pregunta nº 5 se ha desdoblado en dos. La primera parte, que se sigue llamando "pregunta nº 5", incluye los dos primeros apartados, porque son de respuesta numérica (NUM), y la segunda parte, que se llamará "pregunta nº 5.c", que está formada por el tercer apartado, que es de respuesta simbólica (S).

Las preguntas nº 2 y nº 3 han sido reagrupadas, para el estudio estadístico, de la siguiente forma: Con el nombre de "pregunta nº 2" se incluirán los dos primeros apartados de las preguntas 2ª y 3ª, que son los dos apartados de cálculo numérico. Con el nombre de "pregunta nº 3" se incluirán el resto de los apartados de ambas preguntas, que comprenden cálculos "con letras".

Con estas correcciones, el número total de preguntas queda ahora en 25. Corresponden a las "variables estadísticas" que van de la nº 4 a la nº 28, ambas inclusive.

IV.1.3. SOBRE LOS ACIERTOS Y LOS FRACASOS.

Se va a realizar un estudio sistemático de todas las preguntas desde el punto de vista acierto y fracaso. En primer lugar ordenamos las preguntas según el criterio de "porcentaje de alumnos que responden correctamente" (Tabla en la página siguiente)

IV.1.3.1. Fracasos.

Las preguntas con **más baja respuesta** son las números **6 y 15** que corresponden a las variables nº 9 y nº 10 respectivamente. Tienen un 10.2 % de aciertos; o dicho de otra manera, tienen casi un 90 % de fracaso.

Nº de Pregunta	Nº de Variable estadística	% Aciertos
5ª A,B	7	78.1
13ª	16	72.4
2ª	4	67.9
22ª	24	66.8
8ª	11	62.8
14ª	17	62.2
17ª	20	56.1
5ª C	8	55.1
16ª	19	52
25ª	27	51.5
26ª	28	51
9ª	12	46.4
23ª	25	41.8
24ª	26	38.8
12ª	15	35.7
7ª	10	35.2
10ª	13	32.1
3ª	5	30.1
21ª	23	29.6
11ª	14	28.1
4ª	6	27.6
18ª	21	19.9
19ª	22	17.9
15ª	18	10.2
6ª	9	10.2

TABLA ACIERTOS

Vamos a analizar las caracteristicas de estas preguntas.

- La pregunta nº 6 combina dos expresiones algebraicas: "$p=3q+7$" y "$q<4$". Una desigualdad y una igualdad.

Para responder correctamente es necesario que el alumno capte la idea de <conjunto de números> menores que 4 de la desigualdad, para poder obtener con ella la respuesta correcta que es otro conjunto de números.

Es por tanto una comprensión de segundo nivel. No se trata solamente de comprender el significado de la relación de desigualdad, sino de utilizar esta comprensión en la otra relación, en la igualdad.

Esto supone una complejidad de la tarea que se hace patente en el bajo nivel de respuestas obtenido.

Por otro lado, es la única relación de desigualdad, escrita en forma simbólica, que los alumnos deben interpretar.

Pero existe, además, una dificultad añadida en este ejercicio: Ya hemos dicho que en la expresión "$q < 4$" hay que interpretar la letra "q" como un <conjunto posible de valores> y esta interpretación es tardía entre las interpretaciones espontáneas de las letras. Tanto histórica como escolarmente, las primeras interpretaciones que se hacen de las letras, ven a éstas como representantes de un valor único, que puede ser un número o un segmento, al que substituyen momentáneamente, porque se trata de un valor desconocido.

Para el estudiante, lo que es difícil de asimilar es que una letra pueda representar más de un valor para un mismo ejercicio.

Esta dificultad es la que marca la diferencia entre este ejercicio nº 6 y el ejercicio nº 8 del cuestionario (variable nº 11 del análisis estadístico): ¿Qué puedes decir de "m" si $t = 4m + 3$ y $t = 23$?

En este ejercicio nº 8, que se presenta con una estructura análoga al nº 6, la única diferencia de planteamiento es la igualdad "$t = 23$" en lugar de la desigualdad "$q < 4$".

Esta diferencia supone el valor ÚNICO "23" para la "t", y TODOS los valores menores que "4" para la "q". La aceptación natural, para la letra "t" del valor único "23", hace que su empleo resulte inmediato y fácil en la igualdad "$t = 4m + 3$", mientras que la dificultad de comprensión de la expresión "$q < 4$" arrastra diversos errores para el ejercicio nº 6.

La gran diferencia de dificultad, entre ambos ejercicios, queda reflejada en el porcentaje de aciertos recogido en el análisis general global:

	Pregunta nº 6 (Variable nº 9)	Pregunta nº 8 (Variable nº 11)
Porcentaje de alumnos que responden correctamente (Aciertos)	10.2 %	62.8 %

- La otra pregunta que tiene este mismo bajo nivel de aciertos (10.2%), es la pregunta nº 15 (variable nº

18): "Si sabemos que un dólar equivale a 100 pts. y llamamos "d" al número de dólares y "p" al número de pesetas. Escribe una ecuación que relacione "d" con "p"."

Ha sido una sorpresa encontrar, en esta pregunta, este bajo nivel de aciertos. Había sido preparada para observar el comportamiento de la letra COMO OBJETO. Esperábamos que este comportamiento, por considerarlo un "comportamiento espontáneo", se daría entre los alumnos de 7º y 8º de Enseñanza General Básica y que, prácticamente, habría desaparecido entre los alumnos de primer curso tanto de Bachillerato como de Reforma.

Estamos estudiando los resultados globales, es decir de todos los alumnos, y no era esperable que esta pregunta resultara tan mal respondida como para quedar la última en el estudio de respuestas.

- La siguiente pregunta con más baja respuesta ha sido la pregunta nº 19 (cuya variable estadística correspondiente es la nº 22) que tiene un 17.9 % de porcentaje de aciertos.

Se trata de la expresión de una ecuación:

$$(x + 2)^3 - x^2 = 116$$

a la que se imprime una variación:

$$(3x + 2)^3 - (3x)^2 = 116$$

y, conociendo que la solución de la primera ecuación es "3", se pide la solución de la segunda.

La respuesta implica la noción de solución de una ecuación y la idea de que una solución, substituida en la ecuación, la convierte en una identidad.

Al saber que los primeros miembros de las expresiones deben ser iguales a 116 y reconocer que la estructura de la expresión no ha cambiado, el alumno descubre que la variación de "x" a "3x" es la clave para encontrar la solución de la segunda ecuación. Sin embargo, se ve que son pocos los alumnos que han optado por esta forma de resolución, basada en la semejanza de las estructuras algebraicas.

Una mayoría de alumnos intenta "resolver" la ecuación cúbica, siguiendo los métodos aprendidos, realizando los desarrollos del cubo y el cuadrado, pero no lo consiguen pues no se producen simplificaciones, ni hay una fórmula que puedan aplicar. Algunos llegan a resultados erróneos como consecuencia de simplificaciones incorrectas.

- La cuarta pregunta entre las peor respondidas es la **nº 18** (cuya variable estadística correspondiente es la nº 21).

Se trata aquí también de una expresión con letras, de una igualdad, la expresión es: "b = 3c + 1" y hay que responder como variará "b" al aumentar "c" en 2 unidades. Es decir, como variará la expresión "3c + 1" al alterar uno de sus términos.

Esta pregunta exige del alumno una aplicación de la propiedad distributiva, bien sea mental o escrita explícitamente: Al variar "c" en dos unidades se convierte en "c+2". De este modo la expresión se convierte en :

$$3(c + 2) + 1$$

aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$$3c + 6 + 1$$

que evidencia que el cambio producido en la expresión es el aumento (+6) en seis unidades.

La falta de dominio de la propiedad distributiva puede acarrear errores en esta pregunta.

IV.1.3.2. Aciertos.

Las tres preguntas con mayor nivel de aciertos han sido:

	Pregunta 2ª (Variable nº4)	Pregunta 5ª (Variable nº7)	Pregunta 13ª (Variable nº16)
Porcentaje de alumnos que responden correctamente	67.9 %	78.1 %	72.4 %

La pregunta mejor respondida de la tres es la nº 5 en sus apartados a) y b), que se han recogido juntos. En las entrevistas individuales se ha preguntado a los alumnos cuál había sido el proceso seguido para calcular las respuestas.

Entre la muestra que se había entrevistado se encontraron 97 alumnos que habían respondido a estos apartados de la pregunta y, de ellos, 63 habían realizado los cálculos mentalmente. El resto, 34 alumnos, habían buscado la respuesta al apartado b) escribiendo algún tipo de cálculo. Es decir, en una buena mayoria, concretamente en el 65 % de los casos, la respuesta había sido encontrada mentalmente.

Conviene retener esta circunstancia, pues también los ejercicios nº 13 y nº 2 son de los que la respuesta se ha buscado mentalmente.

Este carácter de las preguntas: "cálculo mental", no ha sido considerado en el estudio a priori del cuestionario; ha surgido como carácter a posteriori, revelado por el análisis estadístico de Acierto y Fracaso.

Para poder asegurar que este carácter es interesante desde el punto de vista del análisis que se realiza del cuestionario, tendremos que incluirlo en la matriz a priori y realizar los análisis del tipo ACP (Análisis en Componentes Principales) y AFC (Análisis Factorial de Correspondencias) de la nueva matriz.

Por otra parte, se trata de tres preguntas de respuesta numérica (carácter NUM), como se puede ver en la Matriz a Priori, lo cual parece confirmar, una vez más, que las preguntas de carácter numérico se responden correctamente con más facilidad que las preguntas de carácter simbólico.

Nos llama, sin embargo, la atención que algunas preguntas con este carácter, como la nº 15 o la nº 19, figuran entre las peor respondidas por los alumnos.

Decidimos controlar todas las preguntas que tienen ese carácter y añadimos en la tabla de Aciertos el carácter NUM a las preguntas que lo poseen:

Nº de Pregunta	Nº de Variable estadística	% Aciertos	Carácter
5ª A,B	7	78.1	NUM
13ª	16	72.4	NUM
2ª	4	67.9	NUM
22ª	24	66.8	
8ª	11	62.8	NUM
14ª	17	62.2	NUM
17ª	20	56.1	
5ª C	8	55.1	
16ª	19	52	
25ª	27	51.5	
26ª	28	51	
9ª	12	46.4	
23ª	25	41.8	NUM/S
24ª	26	38.8	NUM/S
12ª	15	35.7	NUM/S
7ª	10	35.2	
10ª	13	32.1	NUM
3ª	5	30.1	
21ª	23	29.6	NUM/S
11ª	14	28.1	
4ª	6	27.6	
18ª	21	19.9	
19ª	22	17.9	NUM
15ª	18	10.2	NUM/S
6ª	9	10.2	

TABLA DE ACIERTOS CON CARACTER "NUM"

Observamos que entre las seis preguntas mejor contestadas se encuentran cinco de carácter numérico, lo que parece favorecer nuestra hipótesis de que las preguntas de carácter numérico (NUM) se responden mejor que las preguntas de carácter simbólico o de respuesta literal (S).

Pero no todas las preguntas de carácter numérico figuran entre las mejor respondidas, como ya se anticipó; existe un grupo de tres preguntas (la nº 23, la nº 24 y la nº 12) que figuran con un porcentaje de respuestas inferior al 50 %; la pregunta nº 10 y la nº 21, con porcentajes de aciertos alrededor del 30 %, y todavia aparecen la pregunta nº 19 y la nº 15, con porcentajes de aciertos del 17.9 % y 10.2 % respectivamente, que son los más bajos de la tabla.

Tratando de hallar una explicación a estos hechos, observamos con atención la Matriz a Priori y vemos que el carácter numérico de algunas de estas preguntas no es exclusivo, por tener varios apartados dentro de ellas. Asi, algunos de los apartados son de carácter numérico (NUM) y otros son de carácter simbólico (S), poseyendo las preguntas, por tanto, ambos caracteres. Hemos señalado este hecho en la tabla de aciertos con la escritura NUM/S (Numérico y Simbólico) al lado de las preguntas correspondientes.

Puesto que la respuesta acertada solamente figurará así cuando se hayan respondido bien todos los apartados, los de tipo simbólico, o de respuesta literal, harán que las preguntas no sean correctamente contestadas en su totalidad.

Estas preguntas son:

La nº 23, la nº 24, la nº 12, la nº 21 y la nº 15.(*)

Tienen carácter simbólico en los apartados:

23 b,c , 24 b,c , 12c , 21a y 15a.

La dificultad de las respuestas de tipo literal puede explicar el bajo resultado en estas preguntas, pero todavía restan, sin explicación, las preguntas nº 10 y nº 19.

Como estamos estudiando las dificultades producidas por la aparición de las letras, vamos a ver cómo quedan clasificadas, en la tabla de aciertos, las preguntas que han sido planteadas con enunciados con letras (carácter "LI"). Volvemos a la Matriz a Priori y recogemos este carácter, anotándolo en las preguntas que lo tienen, obteniendo la tabla que aparece en la página siguiente.

Vemos, en ella, que hay una mayoría de preguntas con carácter "LI" que se encuentran entre las peor respondidas, concentrándose en la parte inferior de la escala que hemos confeccionado. Entre éstas se encuentran la nº 10 y la nº 19 que eran las preguntas para cuyos bajos resultados no teníamos explicación.

(*) Nota: Se debe observar que, aunque en la "matriz a priori" aparece también la pregunta nº 5 con dos partes, una numérica (apartados a y b) y otra simbólica (apartado c), esta pregunta se ha estudiado en el análisis estadístico empleando dos variables diferentes: La variable nº 7 (pregunta 5ª a,b) de carácter numérico y la variable nº 8 (5ª c) de carácter simbólico.

Nº de Pregunta	Nº de Variable estadística	% Aciertos	Caracteres	
5ª A,B	7	78.1	NUM	
13ª	16	72.4	NUM	
2ª	4	67.9	NUM	
22ª	24	66.8		LI
8ª	11	62.8	NUM	LI
14ª	17	62.2	NUM	
17ª	20	56.1		LI
5ª C	8	55.1		
16ª	19	52		
25ª	27	51.5		
26ª	28	51		
9ª	12	46.4		LI
23ª	25	41.8	NUM/S	
24ª	26	38.8	NUM/S	
12ª	15	35.7	NUM/S	
7ª	10	35.2		LI
10ª	13	32.1	NUM	LI
3ª	5	30.1		LI
21ª	23	29.6	NUM/S	
11ª	14	28.1		LI
4ª	6	27.6		LI
18ª	21	19.9		LI
19ª	22	17.9	NUM	LI
15ª	18	10.2	NUM/S	
6ª	9	10.2		LI

TABLA DE ACIERTOS CON CARACTERES "NUM" Y "LI"

Sin embargo, el análisis a través del carácter "LI", crea tres nuevas excepciones: las preguntas 8ª, 17ª y 22ª que, a pesar de su carácter "LI", se encuentran bien respondidas por más de un 50 % de los alumnos.

Vamos a estudiarlas detenidamente.

Pregunta nº 8.

Esta pregunta tiene un nivel de aciertos del 62.8 %, que es superior a lo que parece esperable en un enunciado de tipo literal (LI), según hemos visto más arriba. Una explicación puede ser que la respuesta que se pide es numérica (NUM), lo cual hemos visto que favorece los aciertos; pero además observamos otra característica:

Las dos expresiones que figuran en el enunciado piden una comprensión de las letras que es de VALOR ÚNICO. El alumno tiene una igualdad que le dice directamente que "t" es igual a "23". Esta expresión "t = 23" empuja de forma ESPONTÁNEA a la substitución de "t" por el valor "23", para, así, hacer desaparecer una de las letras y convertir a la otra en una incógnita habitual y sencilla de despejar: "23 = 4m + 3".

Así, aunque se trata de dos expresiones con letras, se pide al alumno un uso de éstas que es el que consideramos espontáneamente el primero y, por tanto, el más sencillo.

Pregunta nº 17.

Esta pregunta tiene un nivel de aciertos del 56.1 %.

Hemos repasado los "Elementos para elaborar la matriz de datos" y vemos que hemos considerado como válida la respuesta que dice "que 'p' aumenta en 3 unidades", pero también la respuesta que dice "que 'p' aumenta" porque nos interesaba saber si 'p' era considerada como VARIABLE directamente dependiente de 'q' y ambas respuestas lo indicaban. Esto ha aumentado el número de respuestas "correctas" y puede ser el motivo de su exagerado resultado.

Pregunta nº 22.

La pregunta nº 22 ha sido respondida acertadamente por un 66.8 % de los alumnos. Es la cuarta mejor respondida a pesar de su carácter ("LI") en el enunciado.

El comentario que nos merece esta circunstancia es que, en este ejercicio, influye el tipo de **enunciado más familiar** al alumno, pues comparándolo con el ejercicio nº 7 que es semejante en el enunciado aunque menos familiar al alumno, vemos que el nivel de respuestas en aquél es solamente del 35.2 %.

Los ejercicios nº 7 y nº 22 han sido precisamente preparados para notar la existencia de esta diferencia.

IV.1.4. SOBRE EL USO DE LAS LETRAS.

Preguntas 2ª y 3ª (variables estadísticas nº 4 y nº 5).

En estas preguntas se pueden comparar los resultados obtenidos en la realización de tareas semejantes con números y con letras.

La página nº 4 del análisis contiene la variable nº 4, que corresponde a la pregunta 2ª, en la que se pide la tarea numérica: "Suma 2 a 15" y "Multiplica 3 por 7". Se ve que el número de respuestas acertadas supone un 67.9 %.

En la página nº 5 tenemos la variable nº 5, que corresponde a la pregunta 3ª y que pide la misma tarea, pero para las expresiones literales: "x+6 y 3x" y "x+4 y 5x". En este caso el número de respuestas acertadas es solamente de un 30.1 %.

La tarea a realizar es exactamente la misma y, tal como está presentado el ejercicio, no cabe la posibilidad de que el alumno interprete equivocadamente el enunciado en el segundo caso, pues éste está expresado una sola vez para ambas tareas. Las diferencias se deben, exclusivamente, a la introducción de las letras en el ejercicio. El alumno demuestra, en la primera parte del ejercicio, que sabe lo que se le pide y, en la segunda parte, sin embargo, no sabe como realizar esa tarea con letras.

Vemos que el porcentaje de aciertos se ha reducido a menos de la mitad del anterior.

IV.1.5. DISTINTOS TIPOS DE ENUNCIADO.

En la variable nº 37 se estudian los aciertos a las preguntas del cuestionario que están enunciadas en lenguaje materno (LEN).

En la variable nº 38 se estudia lo mismo para las preguntas enunciadas en el que llamamos lenguaje literal (LI), es decir, que incluye expresiones con letras.

En la variable nº 39 se estudian los aciertos a las preguntas enunciadas en lenguaje gráfico (G), o sea aquellos en los que figura algún dibujo.

Los porcentajes de alumnos que responden a la mitad o menos de las preguntas en cada caso son:

LEN - Variable 37	LI - Variable 38	G - Variable 39
54.6 %	68.4 %	65.8 %

como se puede ver en las páginas 37, 38 y 39 del estudio estadistico BMDP-2D.

De estos resultados, y por simples diferencias hasta 100, se deduce que los porcentajes de alumnos que contestan a más de la mitad de las preguntas en cada uno de esos tipos son:

LEN - Variable 37	LI - Variable 38	G - Variable 39
45.4 %	31.6 %	34.2 %

Se observa que son mejor respondidas las preguntas con lenguaje materno (LEN), después las preguntas con lenguaje gráfico (G) y por último las preguntas en lenguaje literal (LI).

Este resultado confirma las observaciones espontáneas y las hipótesis, hechas por los profesores, en el sentido de que, los enunciados literales (con expresiones con letras: x+6, 5p+10t,... o con expresiones simbólicas como igualdades o desigualdades), aportan una dificultad superior a la de los enunciados en lenguaje materno.

Sin embargo, la diferencia no es muy grande y esto puede ser imputable a que entre las siete preguntas que tienen el carácter de enunciado (LEN), hay cuatro que tienen también el carácter simbólico de respuesta (S) y ésto, como veremos al estudiar las variables nº 40 y nº 41 supone una dificultad añadida.

Las preguntas de enunciado gráfico (G) suponen un valor intermedio de dificultad, más próximo al de los enunciados de tipo literal (LI) que al de los enunciados de tipo materno (LEN), es decir, porcentaje de aciertos bastante bajo. Esto puede ser explicado porque los enunciados de tipo gráfico estimulan alguna forma de error como es el caso del cometido con laletra valorada (VAL). Esto se comprueba al estudiar las variables nº 42 y nº 43, un poco más adelante, en el apartado nº 7.

También más adelante, en el apartado II, se hacen análisis comparativos por cursos para poder opinar sobre la atención didáctica prestada a esta dificultad percibida por los profesores.

IV.1.6. EJERCICIOS DE RESPUESTA NUMéRICA Y DE RESPUESTA SIMBóLICA.

IV.1.6.1. Para cualquier enunciado.

En primer lugar, se hace un estudio de todas las preguntas con respuestas de carácter numérico "NUM" y de todas las de carácter simbólico "S".

En la variable nº 40 se estudian los aciertos obtenidos en los doce apartados que tienen respuesta numérica en el cuestionario, y se encuentra que el 43.9 % de los alumnos (porcentaje acumulado en el 6) responde entre 1 y 6 de los doce apartados. De ésto se deduce que el **56.1 % de los alumnos** responden a 7 o más apartados, es decir a <u>más de la mitad</u> de las cuestiones planteadas.

En la variable nº 41 se estudian las cuestiones de tipo simbólico. Respecto a éstas, se encuentra que, el 65.8 % de los alumnos responden entre 1 y 6 de los apartados totales, y de ello se deduce que **solamente el 34.2 % de los alumnos** responden a 7 o más de estos apartados.

Recogidos los resultados mediante una tabla quedan como sigue:

	Variable nº 40 Carácter NUM	Variable nº 41 Carácter S
Nº de alumnos (%) que responden correctamente a 7 preguntas o más	56.1 %	34.2 %

Se aprecia una diferencia notable entre los porcentajes a favor de las cuestiones de respuesta numérica. Este resultado evidencia, cuantitativamente, una de las dificultades más importantes del aprendizaje del álgebra: la del uso de las letras en la escritura simbólica. Esta dificultad ya ha sido subrayada de un modo cualitativo por los profesores que impartimos esta materia.

Posteriormente, en el punto IV.2.4. profundizaremos por cursos en esta cuestión de comparación de respuestas numéricas y simbólicas.

IV.1.6.2. Separando los tipos de enunciado.

Vamos a estudiar, pormenorizadamente, estas diferencias en relación con el tipo de enunciado empleado.

Tomaremos, por parejas, las variables nº 52, nº 53, nº 54, nº 55, nº 56 y nº 57 para comparar los resultados obtenidos en preguntas en "lengua materna (LEN)", en "lengua literal (LI)" y en "lengua gráfica (G)".

La variable nº 52 estudia las preguntas de caracteres "LEN-NUM", esto es: las preguntas cuyas respuestas se han contabilizado en ella son cuestiones con enunciado en "lengua materna", y con respuesta pedida de uno o varios números. Se trata de las preguntas números 2, 12A, 13, 14, 15B y 21B (*), como se puede ver en la MATRIZ A PRIORI - 1 (Anexo IV) o en las hojas preparatorias del análisis BMDP (Anexo V)

La variable nº 53 tiene el carácter "LEN-S"; esto es, se ha confeccionado con los aciertos obtenidos en las preguntas con enunciado en "lengua materna", y con "respuesta de tipo simbólico"; son las preguntas números 12C, 15A, 16 y 21A del cuestionario.

(*) La pregunta nº 20 no figura entre ellas por haber sido eliminada de este estudio, como hemos explicado al principio de este capitulo.

Comparando estas dos variables en las páginas correspondientes del análisis BMDP-2D encontramos que el número de alumnos que ha respondido a **la mitad o menos** de las preguntas es, en cada caso:

	Variable nº 52 LEN-NUM	Variable nº 53 LEN-S
Porcentaje de alumnos que fracasan	39.3 %	86.7 %

Restando estas cifras a 100 obtenemos el porcentaje de alumnos que ha respondido a **más de la mitad** de las preguntas planteadas y que resulta en cada caso:

	Variable nº 52 LEN-NUM	Variable nº 53 LEN-S
Porcentaje de alumnos que aciertan	60.7	13.3 %

Se puede comprobar que, en "lengua materna", las preguntas con "respuesta numérica" tienen un índice de aciertos mucho mayor que aquellas que piden "respuesta simbólica", es decir, con letras.

Esto coincide con lo encontrado en el punto anterior, y con lo que habíamos anticipado, intuitivamente, siguiendo nuestra experiencia en el aula.

Se comprueba que este resultado no es tan claro en otro tipo de lenguas. Veamos las variables nº 54 y nº 55.

Estas variables corresponden a preguntas en "lengua literal". Recordemos que hemos llamado "lengua literal" a la lengua en la que se emplean expresiones simbólicas con letras, como "p+q=37" o "t=4m+3", que el alumno deberá interpretar y manejar para responder.

La variable nº 54 está compuesta con los resultados a las preguntas nº 5, 8, 10 y 19 del cuestionario, que son preguntas con el carácter LI-NUM. Esto es, enunciado en "lengua literal" y respuesta pedida en "forma numérica". Y la variable nº 55 ha sido elaborada con las respuestas a las preguntas números 3, 5C, 6, 7, 9, y 11 del cuestionario, que tienen el carácter LI-S. Es decir, enunciado en "lengua literal", también, pero respuestas de "tipo simbólico", es decir, aquellas en las que intervienen letras, también.

El número de alumnos que ha respondido a **la mitad o menos** de las preguntas no difiere tanto en estos dos casos:

	Variable nº 54 LI-NUM	Variable nº 55 LI-S
Porcentaje de alumnos que responden la mitad o menos	67.9 %	79.6 %

Hay un 12 % de diferencia aproximadamente pero, en ambos casos, es un índice de fracaso muy alto.

Reducido a porcentaje de aciertos resulta:

	Variable nº 54 LI-NUM	Variable nº 55 LI-S
Porcentaje de alumnos que responden a más de la mitad	32.1 %	20.4 %

Que nos muestra un porcentaje de aciertos muy bajo en ambos casos, imputable al enunciado de tipo literal, como hemos visto al estudiar los distintos tipos de enunciado en el punto anterior. De todas maneras, se sigue apreciando que el número menor de respuestas se tiene en las preguntas de respuesta literal (S).

Vamos a ver, por último, lo que se aprecia con la tercera pareja de variables.

Las variables nº 56 y nº 57 son equivalentes a las anteriores, pero ahora están formadas por preguntas en "lengua gráfica". Con este carácter queremos indicar que en el enunciado se dan figuras con letras, y tenemos los dos tipos de respuestas pedidas: numéricas y simbólicas. Las primeras corresponden a las preguntas nº 23a y nº 24a y las segundas a las preguntas nº 23b y c, 24b y c, 25 y 26.

Recogiendo de las páginas nº 56 y º 57 los datos correspondientes se encuentra:

	Variable nº 56 G-NUM	Variable nº 57 G-S
Porcentaje de alumnos que responden a la mitad o menos	62.8 %	65.8 %

Que, reducido a indice de aciertos, corresponde:

	Variable nº 56 G-NUM	Variable nº 57 G-S
Porcentaje de alumnos que responden a más de la mitad	37.2 %	34.2 %

Por tanto el porcentaje de aciertos es bastante bajo - ligeramente superior a los resultados en "lengua literal"- y, sorprendentemente, no hay apenas diferencia entre las preguntas con "respuesta numérica" (*NUM*) y las preguntas con "respuesta simbólica" (S).

Esta ausencia de diferencia hace pensar que, en lengua gráfica, el alumno acepta las letras como respuesta, con bastante naturalidad. Quizá esto sea debido a que, en EGB, desde el primer momento en que aparecen, las figuras van acompañadas de letras que permiten nombrar a los segmentos, puntos o figuras correspondientes.

Un poco más adelante insistiremos con la investigación de los tipos de error con "enunciado gráfico", como profundización de este último resultado.

IV.1.7. INFLUENCIA DEL TIPO DE ENUNCIADO EN LA COMISIÓN DEL ERROR "VAL".

IV.1.7.1. Enunciados de tipo "G" y de tipo "No-G".

Comenzamos comparando los "enunciados de tipo gráfico, (G)" con los otros dos tipos de enunciados que llamamos, en conjunto, "enunciados de tipo no-gráfico, (No-G)".

En la variable nº 42 se calcula el número de errores, de este tipo, cometidos en las preguntas de enunciado con lengua gráfica (VAL y G), y en la variable nº

43 los cometidos en las preguntas que tienen los enunciados con otros tipos de lenguas: materna o literal [VAL y (LEN o LI)].

Haciendo un cálculo semejante al de las comparaciones anteriores obtenemos:

	Variable nº 42 VAL y G	Variable nº 43 VAL y (LEN o LI)
Porcentaje de alumnos que "valoran" en más de la mitad de los ejercicios posibles	10.7 %	3.6 %

Se observa mayor porcentaje de "valoración" en cuestiones con enunciado de tipo gráfico.

Nuestra interpretación de este hecho es que la visualización de un segmento favorece la comparación con otros segmentos de la figura, y estimula la asignación espontánea de un valor numérico -la mayor parte de las veces calculado por aproximación- a la letra, cuyo valor se desconoce.

IV.1.7.2. Enunciados de tipo "LEN" y de tipo "LI".

Vamos a comparar ahora este mismo error diferenciando entre "enunciados en lengua materna (LEN)" y "enunciados en lengua literal (LI)".

En la variable nº 48 se estudia el número de alumnos que han cometido error de tipo "VAL" en la pregunta nº 16, que tiene el carácter de lengua materna (LEN). El análisis estadístico descriptivo nos da un porcentaje de alumnos del **7.7 %.**

En la variable nº 49 se contabilizan los alumnos que han cometido ese tipo de error en las preguntas del cuestionario nºs 3, 5C, 6, 7, 9, 10, 11 y 12, que son las tienen los caracteres (VAL y LI).

Los alumnos que NO han cometido el error, es decir, los que han cometido "0 errores", son el 39.8 % del total. Esta cifra, restada de 100, nos da **60.2 %** que han cometido AL MENOS UNA VEZ el error.

Por tanto, se observa que este tipo de error de "letra valorada (VAL)" se comete con mucha mayor frecuencia en los ejercicios de enunciado LITERAL o simbólico que en los ejercicios de enunciado en lengua MATERNA..

IV.1.8. INFLUENCIA DEL TIPO DE ENUNCIADO EN LA COMISIÓN DEL ERROR "N".

El error "N" es la letra "no tenida en cuenta", pero escrita a un lado de los números, como si se tratara de una letra "de acompañamiento".

En la variable nº 44 se encuentran estudiadas las preguntas nº 23, nº 24 y nº 25 desde el punto de vista de los caracteres "N - G".

En la variable nº 45 se encuentran recogidos los resultados obtenidos en la comisión de este error en las preguntas nº 3, nº 5C, nº 9 y nº 22, de caracteres [N y (LI o LEN)]. De las páginas 44 y 45 correspondientes hemos extraido la siguiente tabla resumen:

	Variable nº 44 N y G	Variable nº 45 N y (LEN o LI)
% de alumnos que NO cometen el error "N" (cometen en "0" casos)	61.2 %	64.8 %
% de alumnos que cometen el error "N" en UN sólo caso	10.2 %	25.5 %
% de alumnos que cometen el error "N" en 2 o 3 casos	28.6 %	9.7 %

El porcentaje de alumnos que NO cometen el error es semejante, en enunciado gráfico (61.2%) y en enunciados maternos o literales (64.8%), pero, en cuanto pasamos a la comisión del error en 2 o 3 casos, tenemos mayor porcentaje (28.6%) en enunciado "G" que en enunciados "LEN" o "LI" (9.7%).

Interpretamos esto diciendo que, en un enunciado "G", cuando se comete el error UNA VEZ, existe una propensión a cometerlo 2 o 3 veces, como si el alumno estuviera muy seguro de que la respuesta es correcta. Podemos decir que **es un error sistemático** en este tipo de enunciado.

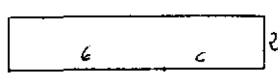
Esto no sucede con los enunciados "LEN" o "LI". Tampoco en este último caso hay alumnos que lleguen a cometer 4 errores. Parece que aquí se cometen de manera más accidental y aleatoria y, por tanto, no llega a repetirse de modo sistemático. La tabla resumen siguiente, de la variable nº 45, nos muestra que hay un número importante (25.5%) de alumnos que cometen el error "N" una sola vez; pero luego hay muy pocos (9.7%) que lo cometan 2 o 3 veces y NINGUNO llega a cometerlo 4 veces.

Nº de errores "N" cometidos	0	1	2	3	4
Nº de alumnos en porcentaje que los cometen	64.8	25.5	9.2	0.5	0

IV.1.9. INFLUENCIA DEL TIPO DE ENUNCIADO EN LA COMISIÓN DEL ERROR "D".

El error "D" consiste en que el alumno HACE DESAPARECER las letras, no escribiéndolas, como si estuvieran carentes de toda representatividad o valor.

Por ejemplo, en el apartado tercero del ejercicio nº 23,



Para calcular el área de este rectángulo, el alumno toma los números "6" y "2" y calcula solamente con ellos. El resultado es simplemente "12". La "c" "ha desaparecido".

IV.1.9.1. Enunciados de tipo "G" y "No-G".

Estudiamos primero las diferencias en la comisión de este error entre los "enunciados de tipo gráfico (G)" y los enunciados en otros tipos de lenguaje, que de modo general llamaremos "no gráficos (No-G)".

En la variable nº 46 se estudia este error en las preguntas con enunciado gráfico (G). Hemos tomado para ello las preguntas nº 23, nº 24 y nº 25 del cuestionario.

En la variable nº 47 se estudian las preguntas nº 3, nº 16 y nº 22 que son de carácter no-gráfico, o sea de carácter "LEN" o "LI".

De las páginas nº 46 y nº 47, correspondientes, obtenemos el siguiente extracto que nos dice el número de preguntas en que los alumnos han cometido ese error.

	Nº de preguntas con letra "desaparecida"			
	0	1	2	3
Nº Alumnos en % acumulado para preguntas de carácter "G" (variable nº 46)	88.3	97.4	99.5	100
Nº Alumnos en % acumulado para preguntas de carácter "No-G" (Variable nº 47)	74	94.9	100	

Restando de 100 los porcentajes correspondientes a los alumnos que han hecho desaparecer las letras en "0" preguntas encontramos el número de alumnos que "han hecho desaparecer" las letras AL MENOS UNA VEZ:

	Carácter "G" (Variable nº 46)	Carácter "NO-G" (Variable nº 47)
Nº Alumnos en porcentaje	11.7 %	26 %

Se puede observar que hay mayor tendencia (26%) a "hacer desaparecer" las letras en los ejercicios con enunciados no-gráficos, es decir, enunciados "literales" o "maternos", que en los enunciados gráficos (11.7%).

Una interpretación de este hecho puede ser que las figuras dan, con su imagen, una cierta realidad a las letras y, así, el alumno percibe una existencia de éstas que impide que las haga desaparecer en las respuestas.

Se dan contestaciones equivocadas por errores en el cálculo y otros tipos de faltas como la de "valorarlas", según hemos visto más arriba al estudiar la influencia del tipo de enunciado en el error "VAL"; pero el alumno no comete con tanta frecuencia el error de hacerlas desaparecer probablemente porque las letras ESTáN AHí, y "se ven" en los segmentos que representan. Por tanto, existen para el alumno y éste las tiene en cuenta.

IV.1.9.2. Enunciados de tipo "LEN" y "LI".

Comparamos ahora las diferencias producidas por los enunciados de tipo "materno (LEN)" y "literal (LI)", en la comisión del error de "letra desaparecida (D)".

Esto se hace estudiando las variables nº 50 y nº

51. En la variable nº 50 se estudia el número de alumnos que lo han cometido en la pregunta nº 16, que tiene los caracteres (D y LEN) y encontramos que el error ha sido cometido por el 17.3 % de los alumnos, de modo que hay un 82.7 % de los alumnos que NO lo han cometido. En la variable nº 51 se describe el número de alumnos que han "hecho desaparecer la letra" en las preguntas nº 3 y nº 22, que tienen los caracteres (D y LI). La cifra, en este caso, es 13.3 %, con lo que se obtiene que un 86.7 % NO han cometido el error.

Se aprecia pues una diferencia muy ligera entre ambos resultados. Aún así conviene tener en cuenta que esa diferencia apunta a que la comisión del error de "letra desaparecida" está favorecida por el enunciado de tipo "materno (LEN)".

La explicación posible a este hecho es que **dentro de una frase en lenguaje materno**, el alumno encuentra **las letras**, no sólo sin significación clara, sino incluso **sin sentido**. Para él es como algo inútil y que, por tanto, puede dejarse de escribir.

Es la situación en la que la letra no aporta para el alumno significado alguno. No se trata ni siquiera de un objeto matemático extraño que representa a un número o a un segmento. Se convierte en un añadido inútil al que conviene perder de vista lo antes posible. El alumno, en ese caso, se limita a calcular con los números que tiene a su alcance y "hace desaparecer" las letras en sus respuestas.

IV.1.10. INFLUENCIA DEL ENUNCIADO MAS O MENOS FAMILIAR AL ALUMNO.

Este estudio se ha hecho comparando dos preguntas semejantes del cuestionario, la nº 7 que es la menos familiar y la nº 22 de enunciado más familiar.

El término "familiar" está aquí empleado con un sentido social. Me refiero a la familiaridad que resulta de *un entorno social conocido*.

Los objetos a los que alude el enunciado del ejercicio nº 7 (pepinos y tomates) no son desconocidos socialmente hablando pero el alumno no ha mantenido con ellos una relación habitual de compra-venta y menos aún por *unidades*. *Sin embargo en el ejercicio nº* 22 los *objetos son* dulces (bombones y caramelos) que los chicos de esta edad compran por unidades habitualmente en las tiendas.

Vamos a hacer la comparación de estas dos preguntas a través de varias variables estadísticas para analizarlas desde dos puntos de vista diferentes.

Primero. Desde el punto de vista del número de *aciertos, es decir del número de alumnos que han respondido* acertadamente.

Segundo. Desde el punto de vista del comportamiento seguido por el alumno.

Del análisis estadístico he tomado las variables *nº 10 y nº 24* que me dan el *nivel* de aciertos y fracasos para cada pregunta y las variables nº 63 y nº 74 que me dan los distintos comportamientos seguidos por los alumnos.

IV.1.10.1. Aciertos y fracasos.

Comparando los aciertos obtenidos en cada pregunta, a través de las variables números 10 y 24, obtengo:

	Variable nº 10 Pregunta nº 7	Variable nº 24 Pregunta nº 22
Nº Alumnos que aciertan	69	131
$I_D = \frac{Nº\ A}{N}$	0.352	0.668

Siendo I_D el indice de aciertos obtenido, que se calcula dividiendo el número de aciertos por el número total de individuos, N=196.

Esto nos muestra que el indice de aciertos aumenta de forma clara cuando el enunciado es más familiar al alumno, hasta casi duplicarse.

IV.1.10.2. Letra "valorada".

Comparando, por otra parte, las variables nº 63 y nº 74, podemos estudiar el comportamiento de "letra valorada" (VAL), identificado a través del valor "2" en la variable correspondiente. Las cifras nos dan el número de alumnos que han respondido con el comportamiento erróneo de "letra valorada" en cada una de las preguntas.

	Variable nº 63 Pregunta nº 7	Variable nº 74 Pregunta nº 22
Nº de alumnos que cometen el error VAL	55	4
% correspondiente	28.1 %	2 %

Esto nos indica que se comete el error en un **28%** de los casos para la pregunta 7ª y que este porcentaje **se reduce al 2%** cuando el enunciado es más familiar al alumno en la pregunta 22ª.

Mi análisis de este hecho es que existen conocimientos, exógenos a los estrictamente matemáticos, que se derivan del enunciado y que favorecen o dificultan la resolución del ejercicio.

Cuando estos conocimientos crean dificultades, como es el caso de un enunciado poco familiar al alumno, éste comete errores en su intento de resolver la, para él difícil, cuestión planteada.

IV.1.10.3. Letra como objeto.

Desde el punto de vista del comportamiento nos interesa también estudiar aquellos alumnos que han seguido el de usar de la letra como inicial de un objeto, es el comportamiento que hemos llamado "la letra como objeto".

Podemos estudiarlo, a través de las variables estadísticas nº 63 y nº 74, en las que lo hemos identificado con la referencia "6". Tenemos:

	Variable nº 63 Pregunta nº 7	Variable nº 74 Pregunta nº 22
Nº de alumnos que cometen el error "O"	60	33
% correspondiente	**30.6%**	**16.8%**

Esto nos indica una reducción del error "O" de casi a la mitad cuando el enunciado es más familiar al alumno. Vemos, pues, que también en este error tiene una influencia manifiesta la "familiaridad" del tipo de enunciado en que esté expresada la pregunta.

Hay que observar que este tipo de error, aunque disminuye notoriamente, no lo hace de una forma tan drástica como el estudiado anteriormente de "letra valorada", "VAL"; diremos que **el error de "la letra como objeto" es un error más PERSISTENTE** que el error "VAL" en cuanto a la "familiaridad" del enunciado se refiere.

IV.1.11. ERRORES CON ENUNCIADO GRAFICO.

Otro estudio que nos interesa hacer es el de los tipos de error que se cometen con más frecuencia con el enunciado gráfico.

Para ésto se comparan las variables estadísticas nº 42, nº 44 y nº 46. Se comienza por los errores "N" y "D".

IV.1.11.1. Comparación de errores "N" y "D".

Las preguntas nº 23, nº 24 y nº 25 tienen los caracteres "N", "D" y "G" según se puede observar en la MATRIZ A PRIORI-2 (Anexo VI). Esto nos ha permitido preparar las variables nº 44 y nº 46 para poder estudiar los errores de "letra de acompañamiento", "N" y de "letra desaparecida", "D", *en preguntas de "enunciado gráfico"*, "G".

Podemos resumir la información pertinente de las *variables nº 44 y nº 46 en la tabla:*

Nº de errores cometidos	0	1	2	3
Variable nº 44. Error "N"	61.2%	10.2%	27.6%	1%
Variable nº 46. Error "D"	89.3%	9.2%	2 %	0.5%

PORCENTAJES DE ALUMNOS
QUE COMETEN EL ERROR

En ella vemos que el porcentaje de alumnos que cometen el error "N" ("letra de acompañamiento") es *superior, en todos los casos, (columnas 1, 2 y 3) al* porcentaje de los que cometen el error "D" ("letra desaparecida") y, sobre todo, es manifiesta esta diferencia en el caso de dos errores cometidos en que se pasa del 27.6% en el error "N" al 2% en el caso del error "D".

IV.1.11.2. Comparación de errores "VAL, N y D".

Se pueden añadir a la tabla los datos de la variable nº 42 en la que se recogen los resultados obtenidos del error "VAL" en enunciado gráfico "G". Las preguntas que han sido tomadas aquí son las nº 23, nº 24, nº 25 y nº 26. Como son cuatro preguntas se da el caso de cierto número de alumnos que han llegado a cometer cuatro errores.

Nº de errores cometidos	0	1	2	3	4
Variable nº 42. VAL-G	59.7%	19.4%	10.2%	7.7%	3.1%
Variable nº 44. N-G	61.2%	10.2%	27.6%	1 %	
Variable nº 46. D-G	89.3%	9.2%	2 %	0.5%	

PORCENTAJES DE ALUMNOS
QUE COMETEN EL ERROR

Si tomamos los datos de la columna de "0 errores cometidos" y los restamos de 100 obtendremos los porcentajes de alumnos que han cometido "al menos un error":

	Var. nº 42 VAL-G	Var. nº 44 N-G	Var. nº 46 D-G
Porcentaje de alumnos que cometen al menos un error	40.3%	38.8%	10.7%

Vemos asi que el error "VAL" es el que más se ha producido en este tipo de lenguaje "G". En el apartado I.7.1. habíamos constatado que este error de "valoración", "VAL" se producía en mayor medida en los enunciados de tipo "G" que en otros tipos de enunciado.

También se ve que el error cometido por menos alumnos es el de "letra desaparecida" (D).

Mi interpretación de este hecho es que, en los enunciados gráficos, el alumno identifica las letras con segmentos y por tanto la letra *ESTÁ AHÍ* aunque no sepa qué hacer con ella. De este modo, no la hace desaparecer y, por tanto, no comete el error "D".

Si le desconcierta mucho la "valoriza" (VAL), o simplemente la escribe como "letra de acompañamiento" (N) pero en muy pocos casos (10.7%) la "hace desaparecer" (D) de la escritura, porque la esta VIENDO gráficamente.

Esta resistencia a "hacer desaparecer" las letras en preguntas de "enunciado gráfico" ha sido puesta de manifiesto ya en el punto I.9.1.

IV.2. ANALISIS COMPARATIVOS.

Nos interesa hacer algunas comparaciones entre los resultados obtenidos.

El paquete estadístico BMDP tiene la posibilidad de hacer los ANAVA (Análisis de varianza) o los análisis con χ^2 (chi-cuadrado) que nos permiten estudiar esas comparaciones.

La primera de estas comparaciones es entre los enunciados que hemos llamado de "lengua materna" y "lengua literal".

IV.2.1. CONTRASTE ENTRE ENUNCIADOS EN LENGUA MATERNA Y EN LENGUA LITERAL.

Para efectuar esta comparación es necesario crear tres nuevas variables en el análisis estadístico BMDP, las variables, nº 79, para la lengua materna, nº 80, para la lengua literal y nº 81, para las diferencias entre ambas.

La variable nº 79 se calcula hallando la media de las variables correspondientes a las preguntas que tienen enunciado en lengua materna y que son las preguntas 2, 12, 13, 14, 15, 16 y 21.

La variable nº 80 se calcula hallando la media de las variables correspondientes a las preguntas de enunciado literal y que son las preguntas 3, 4, 5, 5C, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17, 18 19 y 22.

La variable nº 81 es la diferencia entre las medias de la variable nº 79 y la variable nº 80.

Se realiza un análisis del tipo 3D usando la "T de Student" como estadístico y averiguamos que existen diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos entre los enunciados de lengua materna y lengua literal. Esto se comprueba porque el valor de la probabilidad asociada resulta ser menor que el valor de $\alpha = 0.05$ elegido. Nos interesa saber ahora a favor de cual de los dos enunciados es esta diferencia.

Para ésto se hace un análisis descriptivo (1D) de las variables nº 79 y nº 80 y obtenemos las <u>medias</u> para todo el grupo de 196 alumnos.

	Lengua materna	Lengua literal
Media	0.472	0.405

Con lo que se comprueba que **el rendimiento es más elevado en lengua materna.**

Este resultado se ha obtenido para el grupo completo de 196 alumnos y podría haber surgido debido a una compensación entre los alumnos de los diferentes cursos por lo que se procede ahora a comparar los resultados independientes por cursos.

Volviendo a hacer el análisis 3D, para cada uno de los cursos 7º de EGB, 8º de EGB, 1º de Reforma y 1º de BUP obtenemos que **hay diferencias significativas** en los cursos 7º, 8º y 1º de REM y que **no hay diferencias significativas** en 1º de BUP.

	Media en lengua materna	Media en lengua literal
Toda la muestra	0.472	0.405
Séptimo de EGB	0.347	0.216
Octavo de EGB	0.364	0.286
Primero de Reforma	0.481	0.375
Primero de Bachillerato	0.571	0.565

TABLA DE MEDIAS : $\bar{x}$

Se aprecia, comparando las <u>medias</u> en lengua materna y en lengua literal para cada curso, (TABLA DE MEDIAS) que el nivel de rendimiento es *mejor* en lengua materna en los tres casos en los que la diferencia es significativa, 7º, 8º y 1º de REM.

Comparando los valores de la probabilidad asociada al estadistico, en los tres casos en que la diferencia es significativa, tenemos una medida de la importancia de las diferencias encontradas. Y así,

	Probabilidad asociada	
Séptimo de EGB	0.0001	< 0.05
Octavo de EGB	0.0098	
Primero de Reforma	0.0001	

vemos que en Octavo, la probabilidad, sube un poco respecto a Séptimo pero que en Primero de Reforma vuelve a bajar al mismo nivel que en éste. Esto indica que las diferencias entre el rendimiento en lengua materna y en lengua literal, como también se comprueba en la TABLA DE MEDIAS, son mayores en Séptimo y en Primero de Reforma que en Octavo.

Es interesante constatar este resultado en los alumnos de Primero de Reforma pues resulta sorprendente ya que, siendo un año mayores que los de Octavo, han recibido un año más de enseñanza y esto, añadido a la mayor madurez que se supone que tienen por tener un año más, hacía esperar que las diferencias fueran menos importantes que en Octavo.

A efectos de la enseñanza, es como si lo aprendido en octavo de EGB se hubiera olvidado en primero de REM de modo que se volviera a la situación que había en séptimo de EGB.

En 1º de BUP hemos dicho ya que **las diferencias *no son significativas*** *aunque son diferencias siempre a favor* de la lengua materna como se puede ver en la TABLA DE MEDIAS. Esto *nos indica que la enseñanza ha conseguido* compensar las diferencias iniciales existentes, al menos tanto como para que dejen de ser significativas.

IV.2.1.1. Comparación de medias por cursos.

Observando la columna de las medias en lengua materna, en la TABLA DE MEDIAS escrita en el apartado anterior, apreciamos que desde 7º de EGB (0.347) hasta 1º de Reforma (0.481) y 1º de Bachillerato (0.571), pasando por 8º *de EGB (0.364), la media va aumentando. El mayor aumento lo* tiene desde 8º de EGB a 1º de Bachillerato (207 milésimas) aunque también hay un aumento fuerte *desde 8º* de EGB a 1º de Reforma.

Esto, en mi criterio, responde a la enseñanza en general y a la maduración de los alumnos que se produce como consecuencia. Se aprecia, en este caso de lengua materna, un *aumento más fuerte en BUP que en Reforma aunque en ambos* casos tenemos unas medias superiores a la media total que es 0.472.

Comparando ahora las medias de la columna de lengua literal tendremos un indice de la enseñanza del álgebra en general y del simbolismo en particular.

Se observa un aumento, desde 7º de EGB hasta 1º de BUP, en cierta forma semejante al anterior. Los aumentos de 7º a 8º y de 8º a 1º de REM son parecidos entre sí, 70 milésimas y 89 milésimas respectivamente, e inferiores al que se produce de 8º de EGB a 1º de BUP, 279 milésimas; pero, en otra forma, muy diferente por dos razones.

Primera. El aumento de la media producido al pasar de 7º a 8º y a 1º de BUP es mucho mayor en lengua literal que en lengua materna. De 7º a 8º, 70 frente a 17. De 8º a 1º de BUP, 279 frente a 207. Sin embargo, de 8º a 1º de REM aumenta más la media en lengua materna que en lengua literal, 117 frente a 89.

Segunda. La media de 1º de REM, 0.375, en lengua literal, no supera a la media de toda la muestra, 0.405, mientras que en lengua materna sí que la superaba.

Como comentario a la primera diferencia diré que se aprecia que **la enseñanza en EGB y BUP produce** un claro **aumento del rendimiento de los alumnos en los ejercicios de enunciado en lengua literal**. También que este aumento del rendimiento, en el caso de 1º de BUP, llega a hacer equivalente la media en lengua literal a la media en lengua materna pues aunque se observa una pequeña diferencia **no es significativa**. Esto es tanto más apreciable cuanto que en 7º de EGB se parte de una diferencia importante de medias. La media en lengua materna es 0.347 y la media en lengua literal es 0.216. En cuanto a la enseñanza en REM produce mayor aumento del rendimiento en lengua materna que en lengua literal.

Como comentario a la segunda diferencia creo que se debe observar que el hecho de que esta media no supere a la media de toda la muestra nos indica que en el caso de la Reforma, la enseñanza no ha conseguido aumentar los niveles de rendimiento de los alumnos en los ejercicios de enunciado en lengua literal tanto como en los enunciados en lengua materna.

IV.2.2. CONTRASTE ENTRE ENUNCIADOS EN LENGUA LITERAL Y EN LENGUA GRAFICA.

Para efectuar esta comparación se utiliza el mismo instrumento estadístico y en la misma forma que se ha descrito en el apartado anterior. Los resultados son ahora los que aparecen en la tabla de la página siguiente.

Respecto a la significatividad de estas diferencias, que se mide por el valor de la probabilidad asociada, se obtiene que:

Para toda la muestra - Es significativa la diferencia.
Para séptimo de EGB - No es significativa la diferencia.
Para octavo de EGB - No es significativa la diferencia.
Para primero de REM - Es significativa la diferencia.
Para primero de BUP - Es significativa la diferencia.

	Media en lengua literal	Media en lengua gráfica
Toda la muestra	0.405	0.457
Séptimo de EGB	0.216	0.155
Octavo de EGB	0.286	0.242
Primero de REM	0.375	0.474
Primero de BUP	0.565	0.682

Observando estos valores se ve que:

1º: En toda la muestra, resulta superior el rendimiento en lengua gráfica que en lengua literal y esa diferencia ES SIGNIFICATIVA.

2º: Para séptimo y octavo de EGB, el rendimiento resulta superior en lengua literal que en lengua gráfica, pero la diferencia NO ES SIGNIFICATIVA. Además este rendimiento es muy bajo comparado con el que se tiene en lengua materna, estudiado en el punto anterior.

3º: Para primero de REM y primero de BUP, el rendimiento es superior en lengua gráfica que en lengua literal y esta diferencia si que ES SIGNIFICATIVA, lo cual señala que tanto la enseñanza recibida por los alumnos en REM como en BUP resulta eficaz para aumentar el rendimiento en enunciados de tipo gráfico que llega a equipararse e incluso a superar al rendimiento en enunciados en lengua materna. Este último resultado está corroborado en el apartado siguiente.

IV.2.3. CONTRASTE ENTRE ENUNCIADOS EN LENGUA MATERNA Y EN LENGUA GRAFICA.

Empleando, de nuevo, el mismo tipo de análisis *estadístico que en los dos apartados anteriores comparamos*, ahora, los rendimientos de los alumnos en enunciados con lengua materna y con lengua gráfica obteniendo:

	Medias en lengua materna	Medias en lengua gráfica
Toda la muestra	0.472	0.457
Séptimo de EGB	0.347	0.155
Octavo de EGB	0.364	0.242
Primero de REM	0.481	0.474
Primero de BUP	0.571	0.682

Se aprecia que en todos los casos menos en 1º de BUP se obtiene mayor media en lengua materna que en lengua gráfica pero para valorar estas diferencias adecuadamente vamos a ver cuáles de ellas son significativas. Esto se estudia a través de la probabilidad asociada al estadístico y se obtiene que:

Para toda la muestra - La diferencia NO es significativa
Para séptimo de EGB - La diferencia ES significativa
Para octavo de EGB - La diferencia ES significativa
Para primero de REM - La diferencia NO es significativa
Para primero de BUP - La diferencia ES significativa

Reuniendo toda esta información se obtienen las siguientes conclusiones:

1º: Para toda la muestra, **el rendimiento de los alumnos con los enunciados en lengua materna y en lengua gráfica es equiparable** pues se ve que las diferencias no son significativas.

2º: Para séptimo y octavo de EGB, **el rendimiento es mayor en lengua materna que en lengua gráfica y la diferencia ES SIGNIFICATIVA**. Se aprecia que en octavo la diferencia es menor por haber aumentado la media en lengua gráfica más que la media en lengua materna. Este efecto se puede imputar a la enseñanza impartida sobre geometría.

3º: Para primero de REM, **no existen diferencias significativas entre lengua materna y lengua gráfica.**

Ambas medias son superiores a las correspondientes de octavo de EGB lo que supone un progreso aunque no tan grande como el que se aprecia en las medias de primero de BUP. La media en lengua gráfica sufre un aumento tan importante que llega a equipararse a la media en lengua materna a pesar de que ésta ha aumentado también.

4º: Para primero de BUP, aumentan las medias en los dos casos, desde octavo de EGB. Es un aumento muy superior al encontrado para primero de REM y, **en el caso de la lengua gráfica, es tan grande que llega a superar a la media en lengua materna, y con una diferencia SIGNIFICATIVA,** a pesar de que ésta tiene un fuerte aumento de 207 milésimas. Este resultado ya había sido avanzado en el apartado anterior.

IV.2.4. CONTRASTE ENTRE RESPUESTAS NUMÉRICAS Y RESPUESTAS SIMBÓLICAS.

Desde el punto de vista del profesorado las preguntas de respuesta numérica parecen más fáciles de responder que las de respuesta simbólica. Los profesores hemos percibido que los alumnos, de modo espontáneo, dan como terminado un problema cuando obtienen una respuesta numérica y creemos que esto contribuye a que las respuestas simbólicas aparezcan para ellos como resultados incompletos. Así cuando un ejercicio exige una respuesta simbólica se convierte en un ejercicio "extraño".

Vamos a estudiar en nuestro cuestionario esta caracteristica.

Comenzamos creando unas nuevas variables estadisticas nº 79, nº 80 y nº 81.

La nº 79 que es la <u>media</u> de las variables correspondientes a las preguntas que piden respuesta numérica y que son las preguntas número 2, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15B, 19, 21, 23 y 24.

La variable nº 80 que es la <u>media</u> de las variables correspondientes a las preguntas de respuesta simbólica y que son las preguntas número 3, 5C, 6, 9, 11, 12, 15A, 16, 21, 23, 24, 25 y 26.

Y la variable nº 81 que es ahora la diferencia entre las dos medias anteriores.

Volvemos a realizar un análisis 3D sobre la variable nº 81, con el estadístico T de Student y obtenemos *un valor, 0.0000, de la probabilidad asociada para toda la* muestra (N=196) inferior al parámetro $\alpha = 0.05$ elegido (incluso si α fuera elegido igual a 0.01) lo cual nos indica que EXISTEN DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS entre los dos tipos de respuestas.

Para saber ahora cuál es el tipo de respuesta que da el mejor rendimiento calculamos las medias con un análisis descriptivo 1D de las nuevas variables nº 79 y nº 80, para toda la muestra obteniendo

	Respuesta Numérica (Var.nº 79)	Respuesta simbólica (Var. nº 80)
media, $\bar{x}$	0.457	0.369

Que es superior para la variable nº 79 marcando por tanto **el mejor rendimiento para la respuesta numérica.**

Después de averiguar esto, me interesa saber cómo se distribuye por cursos este resultado así que, realizo un análisis del tipo 3D para cada uno de los cursos, 7º de EGB, 8º de EGB, 1º de REM y 1º de BUP, obteniendo que

existen en todos ellos diferencias significativas según indica el valor de la probabilidad asociada que resulta *siempre inferior a* α= 0.05

	Probabilidad asociada
Séptimo de EGB	0.0000
Octavo de EGB	0.0000
Primero de REM	0.0013
Primero de BUP	0.0043

Y **siempre a favor de la respuesta numérica** como se ve por la comparación de las <u>medias</u> del análisis descriptivo 1D,

	Respuesta Numérica	Respuesta simbólica
7º EGB	0.320	0.139
8º EGB	0.338	0.217
1º REM	0.449	0.385
1º BUP	0.580	0.535

TABLA DE MEDIAS : $\bar{x}$

que nos da siempre más alta la <u>media</u> correspondiente a la respuesta numérica.

Comparando la probabilidad asociada al estadístico T, vemos que va aumentando de valor desde 7º de EGB hasta 1º de BUP aunque en ningún caso, ya lo hemos señalado, llega a ser tan alta como para que deje de haber diferencias significativas.

Esto nos muestra un fallo en la enseñanza recibida por estos alumnos pues después de tres años de aprendizaje del álgebra vemos que todos los alumnos, tanto los de 1º de REM como los de 1º de BUP, **tienen grandes dificultades** a la hora de escribir como respuesta una respuesta simbólica.

IV.2.5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LOS ALUMNOS "FLOJOS" Y DE LOS ALUMNOS "FUERTES" CON LOS RESULTADOS DE TODOS LOS ALUMNOS.

Para identificar los alumnos "flojos" nos servimos de la puntuación total obtenida en el cuestionario. Denominaremos alumnos "flojos" al tercio de alumnos que hayan obtenido puntuación más baja.

Observando la variable nº 29 -puntuación total- del Análisis Descriptivo General podemos notar que el porcentaje acumulado, de alumnos, 32.7 % -el más aproximado al 33,3 % que sería el tercio teórico- corresponde a los alumnos que han puntuado con un "7". De este modo tomaremos como el <u>tercio de alumnos flojos</u> aquellos que responden a siete o menos de las preguntas del cuestionario.

El número de alumnos que corresponde a <u>este tercio</u> es de 64 frente a los 65 que supondrían el 33.3 % de toda la muestra. Consideramos que es una buena aproximación.

La distribución de estos alumnos por cursos ha resultado ser la siguiente:

	7º EGB	8º EGB	1º REM	1º BUP	TOTAL
Nº de alumnos de cada curso que componen el <u>tercio de alumnos flojos</u>	26	19	14	5	64
	40.6%	29.7%	21.9%	7.8%	100 %

Esta distribución es bastante homogénea y esperable en lo que a 7º, 8º y 1º de BUP se refiere, ya que los porcentajes van disminuyendo de forma progresiva. Pero debemos notar que en 1º de REM hay 14 alumnos <u>flojos</u> que suponen un 21.9 % del total que es un porcentaje más próximo al de Octavo de EGB, 29.7%, que al de Primero de BUP, 7.8 %. Se ve pues que la disminución se retiene en 1º de REM para volver a acelerarse en 1º de BUP.

Sobre los 64 alumnos hemos hecho dos análisis, el Análisis Descriptivo 2D y el Análisis de χ^2 (chi-cuadrado), llamado 4F, por cursos.

Del mismo modo, para identificar los alumnos <u>fuertes</u> tomaremos el <u>tercio de alumnos</u> que han puntuado más alto en el cuestionario. Para esto, miraremos en la variable nº 29 -puntuación total- del Análisis Descriptivo General y vemos que se alcanza el 66.3 % de alumnos con los que han respondido bien hasta 13 preguntas del cuestionario, de modo que el 33.7 % son los que han contestado correctamente a 14 o más preguntas del cuestionario. Este 33.7 % de 196 alumnos supone 66 alumnos que forman nuestro <u>tercio de alumnos fuertes</u>. Es un valor que aceptamos por su buena aproximación a N=65 que sería el 33.3 % de 196.

Como distribución de estos alumnos por cursos se ha obtenido la siguiente:

	7º EGB	8º EGB	1º REM	1º BUP	TOTAL
Nº de alumnos en cada curso que componen el <u>tercio</u> de alumnos <u>fuertes</u>	1	4	12	49	66
	1.5%	6.1%	18.2%	74.2%	100%

En esta distribución nos llama la atención que está sobrecargada a favor de los alumnos de BUP, lo que en cierto sentido es normal por ser los alumnos mayores y que han recibido mayor instrucción, pero simultáneamente en 1º de REM destaca un bajo porcentaje de alumnos <u>fuertes</u> teniendo en cuenta que estos alumnos son del mismo nivel de edad que los alumnos de BUP.

Esta distribución está de acuerdo con la obtenida un poco más arriba para los alumnos <u>flojos</u> donde el porcentaje de Reforma también llamaba la atención por ser más parecido al de Octavo de EGB que al de Primero de BUP.

Para estos 66 alumnos se hace también el Análisis Descriptivo, 2D y el Análisis de χ^2, 4F por cursos.

Vamos a comparar los análisis descriptivos del <u>tercio</u> de alumnos <u>flojos</u> y <u>fuertes</u> con el Análisis Descriptivo General para identificar aquellas preguntas de respuesta especial.

El comportamiento esperado es que los alumnos flojos respondan peor que la media y los alumnos fuertes mejor pero queremos ver si estas expectativas se cumplen.

Elaboramos una tabla con el porcentaje de aciertos a cada una de las preguntas que estudiamos. Es la tabla que figura en la página siguiente.

En esta tabla observamos que en todas las variables, que corresponden a cada una de las preguntas, se *cumple el comportamiento esperado: los alumnos flojos tienen* peor rendimiento, que el rendimiento general, y los alumnos fuertes lo tienen mejor.

En algunas preguntas las diferencias del rendimiento del tercio de alumnos flojos con el rendimiento *general y del tercio de alumnos fuertes con el rendimiento* general son particularmente grandes. Llamando

Diferencia A = Porcentaje general menos Porcentaje de alumnos flojos.

Diferencia B = Porcentaje de alumnos fuertes menos Porcentaje general.

	% general	% alumnos <u>flojos</u>	% alumnos <u>fuertes</u>
Var. 4. 2ª Preg.	67.9	60.9	77.3
Var. 5. 3ª Preg.	30.1	1.6	60.6
Var. 6. 4ª Preg.	27.6	15.6	42.4
Var. 7. 5ª Preg.	78.1	53.1	98.5
Var. 8. 5ªC Preg.	55.1	12.5	95.5
Var. 9. 6ª Preg.	10.2	0.0	28.8
Var. 10. 7ª Preg.	35.2	3.1	66.7
Var. 11. 8ª Preg.	62.8	28.1	90.9
Var. 12. 9ª Preg.	46.4	14.1	80.3
Var. 13. 10ª Preg.	32.1	7.8	43.9
Var. 14. 11ª Preg.	28.1	15.6	45.5
Var. 15. 12ª Preg.	35.7	14.1	60.6
Var. 16. 13ª Preg.	72.4	43.8	97.0
Var. 17. 14ª Preg.	62.2	46.9	83.3
Var. 18. 15ª Preg.	10.2	0.0	21.2
Var. 19. 16ª Preg.	52.0	12.5	83.3
Var. 20. 17ª Preg.	56.1	21.9	87.9
Var. 21. 18ª Preg.	19.9	3.1	45.5
Var. 22. 19ª Preg.	17.9	1.6	36.4
Var. 23. 21ª Preg.	29.6	9.4	59.1
Var. 24. 22ª Preg.	66.8	35.9	92.4
Var. 25. 23ª Preg.	41.8	6.2	75.8
Var. 26. 24ª Preg.	38.3	4.7	69.7
Var. 27. 25ª Preg.	51.5	21.9	81.8
Var. 28. 26ª Preg.	51.0	14.1	86.4

TABLA DE % DE ACIERTOS

Las cuatro preguntas, con diferencias más elevadas, clasificadas según estas diferencias, son:

	Diferencia A	Diferencia B
Pregunta 5ªC	42.6	40.4
Pregunta 16ª	39.5	31.3
Pregunta 26ª	36.9	35.4
Pregunta 23ª	35.6	34.0

Todas estas preguntas son de respuesta simbólica, "S". Estas preguntas son particularmente interesantes para discriminar los alumnos <u>flojos</u> de los alumnos <u>fuertes</u>. Si un alumno ha respondido bien a alguna de estas preguntas tiene una gran probabilidad de ser un alumno <u>fuerte</u>.

IV.2.5.1. Preguntas mejor y peor contestadas.

- Alumnos <u>flojos</u>.

Las preguntas mejor contestadas por los alumnos <u>flojos</u> no coinciden con las mejor contestadas por toda la muestra. Los alumnos <u>flojos</u> aparecen asi como alumnos de comportamiento especial.

Pregunta mejor contestada en alumnos <u>flojos</u>	2ª Preg.	60.9%
" " " en general	5ª Preg.	78.1%
2ª mejor contestada en alumnos <u>flojos</u>	5ª Preg.	53.1%
" " " en general	13ª Preg.	72.4%

3ª mejor contestada en alumnos <u>flojos</u> 14ª Preg. 46.9%

" " " en general 2ª Preg. 67.9%

Sin embargo hay cierta semejanza pues vemos que hay dos preguntas comunes a ambos grupos, la 2ª y la 5ª aunque es en distinto orden.

En las preguntas peor contestadas sí que existen coincidencia entre el grupo de alumnos <u>flojos</u> y el conjunto de toda la muestra. Las preguntas de más alto fracaso son las mismas:

Preguntas peor contestadas en alumnos <u>flojos</u> { 6ª Preg. 15ª Preg. } 0%

" " " en general { las mismas } 10.2%

3ª peor contestada en alumnos <u>flojos</u> { 3ª Preg. 19ª Preg. } 1.6%

" " " en general 19ª Preg. 17.9%

Vemos que aunque el número de aciertos (10.2% y 17.9%) es naturalmente mayor en toda la muestra que en los alumnos <u>flojos</u>, las preguntas peor contestadas coinciden en ambos casos.

Se ve, por tanto, que, en cuanto a las preguntas peor respondidas, los alumnos <u>flojos</u> tienen un comportamiento normal, entendiendo por normal el marcado por toda la muestra.

Alumnos <u>fuertes</u>.

Vamos a ver si el comportamiento de los alumnos <u>fuertes</u> responde al comportamiento de la muestra total en cuanto a preguntas mejor y peor contestadas se refiere.

Anotamos las preguntas mejor contestadas tomando los datos de la TABLA DE % DE ACIERTOS

Pregunta mejor contestada por *alumnos* fuertes	5ª Preg.	98.5%
" " " en general	" "	78.1%
2ª mejor contestada en alumnos fuertes	13ª Preg.	97.0%
" " " en general	" "	72.4%
3ª mejor contestada en alumnos fuertes	5ªC Preg.	95.5%
" " " en general	2ª Preg.	67.9%

Vemos que las dos primeras preguntas mejor contestadas coinciden en este caso. *Por lo tanto, podemos decir* que el comportamiento de los alumnos fuertes es semejante al comportamiento de toda la muestra.

Comprobemos ahora si el comportamiento con las preguntas *peor contestadas es también semejante al de* la muestra completa.

Pregunta peor contestada por alumnos fuertes	15ª Preg.	21.2%
2ª peor contestada por alumnos fuertes	6ª Preg.	28.8%
Preguntas peor contestadas en general	{ 6ª Preg. / 15ª Preg. }	10.2%
3ª peor contestada por alumnos fuertes	19ª Preg.	36.4%
" " " en general	" "	17.9%

Comprobamos efectivamente que el comportamiento de los alumnos <u>fuertes</u> es también semejante al de toda la muestra en las preguntas peor contestadas.

IV.2.5.2. Comparaciones por cursos.

Nos interesa saber si la pertenencia a cada uno de los cursos influye para la proporción de aciertos y errores cometidos. Esto es, si el rendimiento del alumno está afectado por el curso al que pertenece. Dicho de otro modo, si hay alguna pregunta para la que se da un número de respuestas significativamente mayor en los alumnos de algún curso en particular. Por ejemplo, si los alumnos de 1º de BUP responden a alguna pregunta significativamente mejor que el resto, o si los alumnos de 8º de EGB responden significativamente peor que los demás a alguna pregunta del cuestionario.

Para esto realizamos un Análisis BMDP-4F siempre sobre las dos sub-muestras por separado, el <u>tercio</u> de alumnos <u>flojos</u> y el <u>tercio</u> de alumnos <u>fuertes.</u>

Observando la probabilidad asociada al estadístico χ^2 (chi-cuadrado) de Pearson y comparándolo con el valor α=0.05 elegido veremos para qué preguntas del cuestionario el pertenecer a un curso o a otro influye en el rendimiento.

Alumnos <u>flojos.</u>

En el <u>tercio</u> de alumnos <u>flojos</u> encontramos que la probabilidad asociada es menor que 0.05 en las variables y preguntas correspondientes siguientes:

	Probabilidad < α
Var. 12. Preg. 9ª	0.0034 < 0.05
Var. 22. Preg. 19ª	0.0074 < 0.05
Var. 24. Preg. 22ª	0.0186 < 0.05
Var. 28. Preg. 26ª	0.0054 < 0.05

Lo cual nos dice que en estas preguntas hay diferencias significativas en las respuestas según que el alumno pertenezca a un curso o a otro. Vamos a estudiar las preguntas una a una.

<u>Variable nº 12. Pregunta 9ª.</u>

En esta pregunta ha salido que existen diferencias significativas en las respuestas por cursos de modo que vamos a analizar esto en detalle observando una de las tablas de la variable nº 12 en el Análisis 4F de los alumnos <u>flojos</u>. Así tenemos:

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	100.0	84.2	78.6	40.0	85.9
ACIERTO	0.0	15.8	21.4	60.0	14.1
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Esta tabla me dice que hay más error que acierto entre los alumnos de Séptimo, Octavo y Reforma pero que hay más acierto que error en Bachillerato (BUP).

Se trata de una pregunta de manipulación de sencillas expresiones algebraicas con letras y vemos que, como era de esperar. los alumnos de Séptimo tienen un 100 % de error y un 0 % de acierto pues, aunque sencillas, se trata de manipulaciones que todavia no han sido enseñadas en las clases.

En cuanto a 1º de BUP vemos que, aún tratándose del <u>tercio</u> de alumnos <u>flojos</u>, un 60 % de ellos responden correctamente.

Sin embargo, en los alumnos de Reforma, vemos que, aunque responden un poco mejor (21.4 % de alumnos aciertan la respuesta) que los de Octavo (15.8 % de aciertos), el porcentaje de alumnos que yerran es muy superior al porcentaje de los que aciertan.

La manipulación de expresiones algebraicas sencillas vemos que es una adquisición progresiva que en Octavo y 1º de Reforma tiene todavía un porcentaje muy elevado de errores y que recibe un refuerzo importante al pasar a 1º de BUP.

<u>Variable nº 22. Pregunta 19ª.</u>

En esta pregunta también hemos encontrado que hay diferencias significativas entre pertenecer a un curso o a otro. Vamos a analizar la pregunta con una de las tablas correspondientes a la variable nº 22.

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	100.0	100.0	100.0	80.0	98.4
ACIERTO	0.0	0.0	0.0	20.0	1.6
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Se trata de una pregunta con una ecuación cúbica en la que se debe reconocer la similitud de estructura ecuacional para deducir el resultado.

Se ve que entre estos alumnos <u>flojos</u> solamente algunos de BUP (el 20 %) alcanzan el acierto. El resto de los cursos tienen un 100 % de error.

Una vez más resulta importante observar que los alumnos de Reforma no siguen una pauta parecida a los alumnos de BUP que son los de su nivel. Los resultados de este curso son iguales que los de los cursos inferiores, Séptimo y Octavo.

<u>Variable nº 24. Pregunta 22ª.</u>

Como en esta pregunta también han resultado significativas las diferencias de respuestas por cursos tomamos la tabla de porcentajes por cursos de la variable nº 24 para estudiarla en detalle

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	80.8	47.4	71.4	20.0	64.1
ACIERTO	19.2	52.6	28.6	80	35.9
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Vemos que el porcentaje de aciertos es mayor del 50 % en Octavo de EGB y en 1º de BUP, mientras que en Séptimo de EGB y en 1º de Reforma es muy inferior.

Llama la atención que en 1º de Reforma se da un porcentaje más bajo de acierto que en Octavo de EGB cuando hubiéramos esperado que aumentara aunque no hubiera sido tanto como en 1º de BUP. En lugar de ello encontramos que disminuye.

Esta pregunta se ha preparado para estudiar el error de "la letra como objeto". **Esta concepción espontánea errónea vemos que se mantiene con mucha fuerza en los alumnos <u>flojos</u> de 1º de Reforma.** También vemos que remite, aunque no desaparezca completamente, en 1º de BUP.

<u>Variable nº 28. Pregunta 26ª.</u>

Esta es la cuarta pregunta para la que hemos sabido que había diferencias significativas entre los alumnos <u>flojos.</u>

Esta pregunta tiene enunciado gráfico y se trata de calcular el perímetro de una figura con un número desconocido de lados, "n".

Vamos a observar la tabla correspondiente de porcentajes de acierto y error por cursos:

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	100.0	89.5	64.3	60.0	85.9
ACIERTO	0.0	10.5	35.7	40.0	14.1
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Vemos que el nivel de aciertos va aumentando de manera progresiva desde Séptimo, pasando por Octavo y 1º de

Reforma hasta 1º de BUP donde alcanza el 40 % de aciertos como valor máximo. Es un nivel muy bajo de aciertos para todos los cursos.

Como ocho lados del polígono quedan a la vista del alumno parece que el error de "valoración de la letra" es cometido con mucha facilidad, sobre todo por los alumnos flojos que aquí estamos analizando.

Se observa también que el porcentaje de aciertos en 1º de Reforma, 35.7%, se mantiene por debajo del de 1º de BUP aunque en esta pregunta se encuentran más próximos que en cualquiera de las anteriores.

Alumnos fuertes.

Ejecutamos el análisis BMDP-4F que es un análisis de χ^2 (chi-cuadrado) y observando el valor de la probabilidad asociada y comparándola con el valor $\alpha = 0.05$ encontramos dos casos de variables con diferencias significativas.

	Probabilidad $< \alpha$
Variable nº 10. Pregunta 7ª.	$0.0111 < 0.05$
Variable nº 12. Pregunta 9ª.	$0.0121 < 0.05$

La pregunta 9ª (Variable nº 12) ya había sido obtenida como especial un poco más arriba cuando hemos estudiado las diferencias por cursos en alumnos flojos.

Vamos a analizar en qué consisten esas diferencias significativas en estas dos preguntas.

Variable nº 10. Pregunta 7ª.

Esta pregunta está puesta para estudiar el error de "*la letra como objeto*". *Recordemos ahora que otra* pregunta del cuestionario, la nº 22, que también estudia "la letra como objeto" ha salido produciendo diferencias significativas de respuestas por cursos en el tercio de alumnos flojos. Veamos la tabla de porcentajes de acierto.

	SEPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	100.0	50.0	66.7	22.4	33.3
ACIERTO	0.0	50.0	33.3	77.6	66.7
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Efectivamente se trata de una distribución irregular, donde el porcentaje de aciertos en 1º de Reforma, 33.3 % es inferior al porcentaje en Octavo de EGB que es el *mismo fenómeno que el observado en la pregunta 22ª en los* alumnos flojos. Por tanto obtenemos la misma conclusión, ahora reforzada, de que el error de "la letra como objeto" es un error fuertemente arraigado entre los alumnos de Reforma y que sin embargo mejora con la enseñanza del álgebra como se aprecia en Octavo de EGB -50% de aciertos frente al 0% de Séptimo de EGB- y en 1º de BUP -77.6% de aciertos.

Variable nº 12. Pregunta 9ª.

Es la pregunta de manipulación de expresiones algebraicas sencillas. Analizando la tabla de porcentajes,

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	0.0	75.0	0.0	20.4	19.7
ACIERTO	100.0	25.0	100.0	79.6	80.3
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

sorprende el alto nivel de aciertos en 7º de EGB y en 1º de Reforma, en contra de los resultados obtenidos hasta el momento.

Para precisar esta información vamos a consultar con la tabla de Número de Aciertos:

	SÉPTIMO	OCTAVO	REFORMA	BUP	TOTAL
ERROR	0	3	0	10	13
ACIERTO	1	1	12	39	53
TOTAL	1	4	12	49	66

Lo primero que nos llama la atención es que en Séptimo de EGB hay un sólo alumno fuerte y, aunque ha coincidido que ha respondido bien a esta pregunta, su respuesta no resulta representativa pues puede ser simplemente un alumno excepcional.

En 1º de Reforma las cosas son diferentes pues el porcentaje es consecuencia de 12 alumnos que responden todos acertadamente. Resulta sorprendente, aunque pensemos que se trata de alumnos del tercio de alumnos fuertes, pues también pertenecen a este tercio los alumnos de BUP y sin embargo solamente el 79.6% contestan acertadamente.

Este resultado de Reforma deberá ser investigado a través de entrevistas individuales con los alumnos. En ellas se profundizará sobre las estrategias que han seguido para obtener las respuestas y se buscará la explicación de este hecho.

IV.3. CONCLUSIONES PARCIALES.

Sobre toda la población en conjunto

A. Los enunciados literales son peor respondidos que los enunciados gráficos; y éstos, peor que los enunciados en lengua materna.

B1. Los ejercicios de respuesta numérica son mejor respondidos que aquellos que exigen "respuesta literal".

B2. Separando el resultado anterior por los distintos tipos de enunciado, se encuentra que la diferencia es más grande en los casos de enunciados en lengua materna; en los enunciados en "lengua literal" resulta un poco menos clara; y en los casos de "lengua gráfica" la diferencia apenas existe, respondiéndose con, casi, el mismo acierto los ejercicios de respuesta numérica que los de "respuesta literal".

C1. El error de "letra valorada", "VAL", se produce CON MAS FRECUENCIA en los ejercicios de enunciado de tipo gráfico, "G", que en los enunciados en lengua materna "LEN" o en "lengua literal", "LI".

C2. El error "VAL" se comete CON MAS FRECUENCIA que los errores "N" o "D" en los ejercicios de enunciado gráfico.

D. El error de "letra de acompañamiento", "N", es un error SISTEMATICO en los ejercicios de enunciado gráfico. Se ve que hay más alumnos que lo cometen 2 o 3 veces que solamente una.

E. El error de "letra desaparecida", "D", es MENOS FRECUENTE en ejercicios de enunciado tipo gráfico que en los de otros enunciados.

F. Un ejercicio que tenga un enunciado más "familiar" (en sentido social) que otro, resulta respondido con doble número de aciertos que éste.

Sobre los grupos de alumnos en particular.

1. El error de "la letra como objeto" se mantiene muy arraigado en los alumnos de REM, tanto entre los alumnos "flojos" como entre los alumnos "fuertes".

2. En 1º de REM desaparecen las diferencias significativas entre respuestas, de los alumnos, a cuestiones con enunciado materno y con enunciado gráfico. Se ve que ha aumentado la comprensión de enunciados en lengua gráfica.

3. En 1º de REM se mantienen diferencias significativas entre los enunciados en "lengua literal" (peor respondidos) y los enunciados en lenguas materna y gráfica. Se ve que ha aumentado muy poco la comprensión en "lengua literal".

4. En 1º de BUP desaparecen las diferencias significativas entre enunciados en lengua materna y en "lengua literal". Esto hace deducir que la enseñanza, en 1º de BUP hace aumentar la comprensión de enunciados en "lengua literal".

5. En 1º de BUP existen diferencias significativas del rendimiento en enunciados en lengua gráfica respecto a enunciados en lengua materna y en "lengua literal", con mejor rendimiento a favor de la primera. Se deduce, por tanto, que la enseñanza, en este nivel, mejora la comprensión de enunciados en lengua gráfica.

6. Las preguntas que más discriminan entre alumnos "flojos" y "fuertes" son : 5ª C, 16ª, 23ª y 26ª. Se puede observar que todas son de respuesta simbólica.

7. En las preguntas peor contestadas existe coincidencia entre los alumnos "flojos" y toda la muestra. En las mejor respondidas no se da esa coincidencia.

8. Entre los alumnos "fuertes" y toda la muestra, hay coincidencia tanto en las preguntas peor contestadas como en las mejor respondidas.

9. La manipulación de expresiones algebraicas es una adquisición progresiva que se aprecia claramente entre los alumnos "flojos" en 1º de BUP.

10. El uso del razonamiento, para resolver una ecuación (caso de la ecuación cúbica de la pregunta 19ª), es

conseguido únicamente por un 20 % de alumnos de 1º de BUP, en los demás cursos se da un porcentaje del 0 %. Los alumnos están acostumbrados a un cálculo mecánico de las ecuaciones y, si éste les falla, no responden adecuadamente.

-.-.-.-.-.-.-.-

V. ENTREVISTAS INDIVIDUALES

V.1. VALOR ÚNICO.

Hay una tendencia a mantener la invariabilidad de la letra. El alumno debe vencer una tendencia espontánea a mantener la letra con un valor fijo y único.

Aunque el alumno acepte que una letra puede tomar distintos valores tiene una resistencia espontánea que se manifiesta claramente cuando la ocasión lo permite. La siguiente entrevista, a propósito de la pregunta nº 17 es una muestra de ello. Se trata de **César**, alumno nº 22 de 7º de EGB.

La pregunta es:

17.- Si sabemos que $p = q + 7$. ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" AUMENTA en 3 unidades?

La entrevista se desarrolló como sigue:

César: Que ya no es igual a q+7, porque si, por ejemplo, "q" representara a 3, "p" resultaría 10; pero si "q" aumenta 3 sería igual a 13. No seria "p", 10.

Profesora: O sea, que si "q" aumenta, ¿"p" no seria igual a q+7?

César: No, porque para ser igual tendria también que aumentar "p".

Profesora: Ajá. ¿Y no podría ser eso? ¿Que "p" aumentara también?

César: No sé. El ejercicio no dice nada.

Profesora: Si "p" tiene un valor...¿Te parece raro que cambie? ¿Crees que tiene un valor más o menos fijo? ¿O cómo?

César: (Piensa un poco) Si no me dijeran nada ... Tengo que "q" podria aumentar 3 unidades, pues "p" también podría aumentar 3 unidades, a lo mejor, pues no es un número fijo, representa una letra. Lo que pasa es que el ejercicio dice solamente la "q" así que ya no puede ser la "p".

Profesora: Pero te pregunta ¿Qué le sucede a "p"? No te dice que no pueda aumentar.

César: Si se mira eso, podria ser que aumentara 3. Pero si no ... Existen esas dos posibilidades.

Finalmente César, guiado por las preguntas de la *profesora, admite la posibilidad de que "p" pueda variar*, pero inicial y espontáneamente ni la considera.

Se ve que admite que una letra puede tomar distintos valores pero en el mismo ejercicio se resiste a considerar esa <u>variabilidad.</u> Unicamente la admite si el profesor (o el enunciado del ejercicio) así lo indican: es el caso de la "q" porque se dice que aumenta en 3 unidades.

V.1.1. Valoración de la letra.

Como una consecuencia de considerar la letra con valor único y, en un momento dado, desconocido, se da con frecuencia el caso de que los alumnos encuentran métodos personales y originales para calcular ese valor.

Hay testimonios de algunos de estos procedimientos recogidos a continuación.

Ricardo. Nº 13 de 7º de EGB. (A la pregunta nº 5c ha respondido: 10).

La pregunta era:

5.c.- Si $b + d = 6$, entonces $b + d + f = ...$

Cuando le preguntamos la razón de su respuesta nos explica:

Ricardo: **Cada letra es un número.** Si b+d=6 y como de la "d" a la "f" hay 4, pues 6+4=10. Era "más 4" además de lo que habia.

Encontramos aquí una forma de valorar la letra usando el orden alfabético. De este modo puede dar un resultado numérico que es el tipo de resultado al que está habituado y, por tanto, el único que le parece válido. A continuación completa su explicación diciendo,

Ricardo: No es dificil calcular con letras si **sabes la equivalencia.**

Ricardo considera que las letras tienen que tener siempre una "equivalencia" con los números y él la busca a través del orden alfabético.

José. Nº 23 de 7º de EGB. También valora la letra pero en este caso usando otro criterio: Cada letra como es UNA LETRA tiene que valer "1".

En el ejercicio nº 1 responde:

4 ----> **3 + a** 5 ----> **4 + b**

Y en la entrevista individual explica:

José: "Porque creo que las letras valen un punto y por eso

$$3 + a = 3 + 1 = 4 \quad y \quad 4 + b = 4 + 1 = 5"$$

De la misma forma vemos que responde al ejercicio nº 5c:

5c.- Si $b + d = 6$, entonces $b + d + f =$ 7

José: "Porque creo, como en el primero, que la letra "f" vale "1" y entonces 6+1 = 7"

Es curioso que no se plantea la paradoja que supone la relación "b + d = 6" en la que las letras "b" y "d" evidentemente no valen un punto cada una. Simplemente asigna ese valor de "1" a las letras de las que no ha recibido ninguna información para valorarlas pero que forman parte de una respuesta pedida.

Vuelve a valorar como "1" las letras "n" y "p" en el ejercicio nº 10,

10.- Si sabes que

$$m = n + p$$

y que

$$m + n + p = 60$$

¿Qué puedes decir de "m"?

Respuesta: **Que "m" vale 58 unidades**

La explicación que nos da es:

José: "Porque "n" y "p" valen "1".

Para él no hay contradicción en que la letra "m" valga 58 unidades. Las letras desconocidas "deben tener un valor" y en su criterio el valor más natural, a falta de indicación en contra, es el "1". Esto no impide que "otra letra pueda representar un valor diferente" pero entonces "lo dirá el anunciado del problema".

V.2. IDENTIFICACIÓN DE "LETRA" CON "ECUACIÓN"

Hay alumnos que al encontrar letras en el cálculo creen que están trabajando con ecuaciones. Son los alumnos que identifican la aparición de las letras, con la necesidad de calcularlas. Consideran las letras como provisionales en la escritura matemática, como una solución transitoria a la espera de conocer el valor de ese número.

Así tenemos testimonios recogidos en las entrevistas individuales que confirman este comentario.

Laura. Nº 31 de 7º de EGB. (No realiza el ejercicio nº 1). En la entrevista explica,

No sabia lo que era "p" porque no sabia hacer ecuaciones.

Como se ve, en el ejercicio nº 1 no hay ecuaciones para calcular el valor de "p". Es Laura la que asocia la aparición de la letra con la, para ella necesaria, existencia de alguna ecuación.

David. Nº 7 de 7º de EGB.

David: Me siento mejor cuando hay números.

Profesora: ¿Qué es lo que te va mal de las letras?

David: No sé. Las ecuaciones y todo eso.

Profesora: ¿Has trabajado alguna vez con fórmulas de áreas con letras?

David: No. Sólo con números.

En esta entrevista David nos hace patente su poca familiaridad con el uso de las letras. El dice que no se siente muy bien con ellas y solamente recuerda haberlas empleado con las ecuaciones.

V.2.1. DISTINCIÓN DE LA "X" COMO INCÓGNITA.

Algunos alumnos identifican la "x" como incógnita de las ecuaciones, pero la diferencian de las letras iniciales del alfabeto que usan para otras ocasiones.

Jorge. Nº26 de 7º de EGB. En el ejercicio nº 12 en el que se le pide que exprese simbólicamente una propiedad, responde

$$a \cdot b = c + d = e : b = \ldots.$$

y en la entrevista nos dice:

Jorge: Simbólicamente quiere decir con letras, con letras iniciales que quieran significar algún valor incluso, por ejemplo, π = 3,1416.

Profesora: ¿Cuando dices iniciales, a qué te refieres?

Jorge: A las primeras letras.

Profesora: ¿Podrías usar la "x"?

Jorge: Es que "x" es un valor desconocido, una incógnita, y aquí se conoce el valor.

En el ejercicio se le habia pedido que tomara un valor *cualquiera* y se ve que como puede elegir el valor lo considera conocido.

V.3. APRENDIZAJE POR INDICIOS.

En el capítulo Ingeniería Didáctica hablamos también de esta forma de aprendizaje que los alumnos emplean a falta de indicaciones didácticas provenientes de la experiencia o de la teoría matemática empleada.

En algunas entrevistas individuales quedan patentes estos comportamientos para los que el alumno usa como apoyo los indicios captados de las indicaciones implícitas del profesor o de instrucciones didácticas aplicables en contextos diferentes.

En este ejemplo se trata de un comportamiento en el que el alumno aplica indicaciones didácticas aprendidas para otro contexto y que han quedado memorizadas con tanta fuerza que afloran como intuiciones de ayuda en momentos de incertidumbre.

Laura. Nº 31 de 7º de EGB. Para contestar a la pregunta nº 5c, que ha dejado en blanco, nos dice en la entrevista:

Laura: Pondria 6-f.

Profesora: ¿Por qué?

Laura: Porque lo que está sumando pasa restando al otro lado.

En primer lugar es improbable que el profesor que ha tenido Laura le haya dado esa instrucción directamente pues aunque, en las ecuaciones, la transposición de términos de un miembro de la ecuación al otro, produce ese efecto, este comportamiento no es una regla matemática a aplicar. Laura, por tanto, ha captado esta instrucción por algún indicio implícito.

En segundo lugar, esta seudorregla solamente puede funcionar en las ecuaciones y en el ejercicio planteado se trata de una expresión algebraica con letras pero no de una ecuación.

-.-.-.-.-.-.-.-

CAPíTULO 6º

I. TIPOS DE CUESTIONARIOS SEGúN LOS OBJETIVOS Y USOS

En Didáctica de las Matemáticas, cuando nos proponemos preparar un cuestionario, lo primero que tenemos que pensar es en el objetivo que queremos conseguir.

Los cuestionarios serán distintos según los objetivos que nos propongamos o el uso que vayamos a hacer de ellos.

Hablemos de tres tipos de cuestionarios:

1. De calificación.
2. De estudio de concepciones.
3. Pre-cuestionarios.

Vamos a estudiar qué características deberán tener y cuáles son las diferencias a tener en cuenta a la hora de su elaboración.

I.1. CUESTIONARIOS DE CALIFICACIóN.

Estos cuestionarios se pueden a su vez subdividir en dos modalidades.

I.1.a. Para calificar a los alumnos individualmente.

I.1.b. Para evaluar la marcha de la enseñanza o del grupo de alumnos.

En la modalidad I.1.a. encontramos el tipo de cuestionario que es usado habitualmente por el profesor para dar las calificaciones a sus alumnos a lo largo del curso escolar o al fin de un periódo determinado.

En este cuestionario interesa hacer una evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos, desde el punto de vista de la calificación -este alumno sabe responder a éstas preguntas o, a tantas preguntas de este tipo; este otro alumno no ha llegado a responder un minimo de preguntas,etc...

En la modalidad I.1.b. nos interesa evaluar la marcha de la clase globalmente -hay cierto número de alumnos que han sabido responder a esta pregunta y estos porcentajes de éxitos y de fracasos indican si se ha comprendido bien, o no tan bien, este concepto determinado. O esta pregunta ha sido respondida por un escaso porcentaje de alumnos, lo cual indica que no ha sido correctamente asimilado lo que la pregunta incluia como concepto o técnica clave, y por tanto habrá que buscar el motivo del fracaso, etc...

En ambos casos para elegir las preguntas tenemos unos condicionamientos comunes:

1º. Se trata de evitar repeticiones inútiles.

Las preguntas se eligen de forma variada intentando que en cada una de ellas se pueda analizar una característica determinada del conocimiento que nos interesa y que estas caracteristicas sean distintas de una a otra pregunta. Así evitamos plantear preguntas que vayan a servir para el análisis de una misma característica.

2º. **Interesa obtener la mayor cantidad de información** usando un mínimo de tiempo de los alumnos.

La longitud de las preguntas debe controlarse para que, conteniendo éstas todo lo que nos interesa estudiar, sean por otra parte lo más breves posible.

3º. Las preguntas deben tener el **máximo de independencia posible.**

Con ésto queremos decir:

Que no haya implicaciones entre las preguntas, que la respuesta correcta a una pregunta no implique necesariamente la respuesta correcta a otra, pues en ese caso la primera pregunta sería inútil.

Que no haya preguntas equivalentes. Es decir que no haya preguntas que sean contestadas o falladas simultáneamente por los alumnos, pues ésto haría inútil una de las dos preguntas planteadas.

Hay que decir que no siempre se pueden plantear preguntas totalmente independientes, pero insistamos en que para este tipo de cuestionarios es conveniente el máximo de *independencia posible.*

En el punto 1.3 veremos cómo los pre-cuestionarios nos pueden ayudar en este problema.

I.2. CUESTIONARIOS COMO PARTE DE UN ESTUDIO DE CONCEPCIONES

La concepción es lo que liga al alumno con el conocimiento.

Generalmente una concepción es más eficaz en cierto dominio y puede producir errores en otro dominio diferente. Hacemos un estudio "a priori" de las concepciones y sus posibles dominios de eficacia.

Si identificamos, por ejemplo dos concepciones C_1 y C_2, y preparamos un cuestionario con un conjunto de ejercicios de cierto tipo E_1, que se adaptan mejor a C_1, y otros ejercicios E_2 que se adaptan a C_2, un alumno que tenga la concepción C_1, al resolver los ejercicios E_2 cometerá más errores que al plantearse los E_1 y viceversa, de modo que las diferencias en el número de errores cometidos en cada uno de los tipos E_1 y E_2 puede decirnos si se usa una u otra de esas concepciones.

No se trata aquí de distinguir si una concepción es correcta o no, se trata de dos concepciones que pueden ser correctas las dos pero que una de ellas en ciertos dominios produce más errores. Esto puede ser, por ejemplo, porque implique una actividad -intelectual o mecánica- más complicada o más larga. De modo que no se trata de separar concepciones incorrectas o correctas, sino de estudiar las distintas concepciones que hayamos podido plantear como hipótesis.

Las concepciones, y sus dominios de eficacia, deben estar estudiados a priori; y si aparecen alumnos que son mejores en E_1 **que en** E_2, y otros al revés, se podría explicar esto por las distintas concepciones, pero, con esto sólo, no se debe dar como segura esta interpretación. Después se trataría de verificar esta hipótesis a través de entrevistas individuales con los alumnos, tratando de averiguar **el por qué** de sus respuestas, la razón de sus comportamientos. Se estudiarían los tipos de errores cometidos etc. Todo ello formaría parte del estudio de concepciones.

I.3. PRECUESTIONARIOS

Para elegir las preguntas del *mejor modo* posible se puede hacer una investigación previa mediante un pre cuestionario. Con el estudio de los resultados obtenidos se puede tener información sobre las preguntas y sobre las condiciones óptimas de planteamiento de esas preguntas. Los pre cuestionarios nos pueden servir para:

- **Reducir el número de preguntas** necesarias para un estudio determinado.

Esto podría consistir en plantear a un grupo de alumnos un gran número de preguntas -supongamos de manera ideal que se plantearan 300 o 400 preguntas. A continuación haríamos un análisis factorial de los resultados y si se encontraba que por ejemplo 20 preguntas suponían un 90% de la inercia del análisis estadístico, ésto querría decir que esas 20 preguntas representaban muy bien al conjunto de las 300 y que conociendo las respuestas de un alumno a estas 20 podríamos prever con un mínimo de error las respuestas de ese alumno a las demás.

Este, se puede decir, que es un uso hipotético pues el costo para los alumnos encuestados sería muy alto en horas de trabajo, y tendría que estar muy justificado el uso de un cuestionario así; pero, estudiando un precuestionario, pueden seleccionarse las preguntas que más nos interesan; bien seleccionando las preguntas que aportan mayores valores a la inercia del estudio estadístico, bien desechando aquellas preguntas que han sido respondidas por todos los alumnos -o prácticamente todos-, o aquellas otras que no han sido respondidas por casi ninguno, ya que la información que aportan no nos ayuda a calificar a los alumnos.

Un segundo uso de los precuestionarios sería tratar de estudiar relaciones entre las preguntas. Haciendo comparaciones entre aquellas que a priori se han planteado como independientes. Tratando de encontrar cúales son las preguntas cuya respuesta correcta implica la correcta respuesta a otras. O aquellas preguntas ligadas por el éxito en ambas o el fracaso en ambas que serían preguntas equivalentes etc...

Este estudio de implicaciones y de equivalencias se puede hacer en Estadística con el cruzado de preguntas dos a dos. (Gráficos 6.10, 6.11 y 6.12)

Existe, también ,una forma de estudiar las implicaciones que es el **árbol implicativo de Grass.** La formación del árbol implicativo lleva al reconocimiento de las preguntas clave de un cuestionario; es decir, nos lleva a una selección de preguntas representativas de todo el cuestionario. De este modo, planteando a los alumnos esta selección, podemos conseguir la misma información con menor número de preguntas.

II. ANALISIS CR¡TICO DEL CUESTIONARIO. PLANTEAMIENTO.

¿Por qué me planteo yo la necesidad de un cuestionario sobre las inecuaciones? ¿Cuáles son las preguntas que el cuestionario creo que me va a responder?

Algunas de ellas se exponen a continuación.

1.¿Cuáles son los comportamientos más frecuentes usados por los alumnos al resolver un problema de inecuaciones?

(Los tipos de comportamientos esperados se especifican más adelante en el estudio directo del cuestionario).

Respecto a ésto me gustaría saber si el aprendizaje actual del álgebra -que estimo "formal" en el sentido que le da Chevallard- prepara de forma adecuada para el uso "funcional" del álgebra (Chevallard, 1986).

2. ¿Cuáles son los errores y dificultades de los alumnos en álgebra al trabajar con inecuaciones?.

2.1. Desearía saber si los errores de cálculo detectados en numerosas investigaciones, como los errores producidos por el manejo del cero (Pascal, 1980), o los debidos a la "extensión de la distributividad" (Vergnaud), etc. estudiados sobre igualdades, se revelan del mismo modo, o con mayor o menor frecuencia en las desigualdades.

2.2. Deseo investigar los errores inherentes al uso de las letras en sus diferentes posibilidades: incógnita, parámetro, función,...; y cuáles de estos usos, de las letras, ofrecen mayores dificultades al alumno en el caso de las inecuaciones.

3. ¿Cuál es la influencia del uso de esquemas lineales (llamo así a las representaciones sobre la recta real de los intervalos solución), o de representaciones gráficas en coordenadas cartesianas (esto es, representar las rectas y parábolas), en el éxito de las respuestas?.

4. ¿Se dan diferencias de éxito en el cálculo de dominios de funciones (irracionales de índice par o logarítmicas o de otro tipo) dónde se requiera resolver una inecuación como por ejemplo:

$$f(x)= \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \text{ó} \quad g(x)= \log\,(1/x^2 - 3x + 2)$$

entre alumnos que están habituados a resolver inecuaciones mediante el uso de las gráficas correspondientes (estos alumnos no conocerán la representación en el caso de la irracional del ejemplo indicado), y los habituados a descomponer en factores binomios y estudiar el signo del producto de estos factores? (alumnos que son los que usan el esquema lineal para terminar el ejercicio).

De acuerdo con esto también quedan planteadas, como interrogantes, algunas hipótesis:

¿Tener un dominio del cálculo algebraico favorece el uso de un tipo algebraico de razonamiento? o por el contrario:

¿Haber adquirido un dominio del cálculo algebraico favorece el uso de procedimientos sintácticos de razonamiento?

O todavía hipótesis de este otro tipo:

Los alumnos que usan las gráficas cartesianas para el estudio de las soluciones de las inecuaciones ¿son los que eligen razonamientos de tipo sintáctico?

II.1. ELECCIÓN DE PREGUNTAS

La elección de las preguntas es quizá la parte más delicada del cuestionario.

Acabamos de decir que muchas veces usamos de un precuestionario precisamente para poder perfeccionar su planteamiento, observar posibles efectos no previstos, estudiar el orden de presentación o corregir la longitud del cuestionario etc...

Para elegir las preguntas hay que tener en cuenta <u>el tipo de cuestionario</u> que queremos hacer.

Por ejemplo si tenemos una pregunta que a priori parece que debe ser contestada por todos o casi todos los alumnos esta pregunta podrá servir para un cuestionario de evaluación de alumnos del tipo 1 o para ver si se ha cumplido efectivamente el objetivo de enseñanza, pero no servirá para estudiar las preguntas en el tipo de cuestionario 2 o 3 pues no nos ayudará a discernir diferencias que es lo que necesitamos.

O si por ejemplo planteamos preguntas para observar un caracter determinado deberemos estar seguro de que entre dos preguntas semejantes la única diferencia es realmente ese carácter a observar y que esas preguntas son realmente independientes respecto a él, aunque ya hemos dicho más arriba que a veces no es posible plantear preguntas independientes. Por ejemplo cuando se estudia la influencia del tamaño de los números en las operaciones, "lo que se lleva", es decir las unidades del orden superior al que estamos trabajando y que se arrastran, aparece ligado al empleo de los números grandes y no lo podemos independizar del uso de esos números.

II.2. PRESENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

Este cuestionario (Anexo VIII) que presentamos quiere servir al tipo 3 de los enumerados más arriba, es decir se trata de un precuestionario del que intentamos sacar conclusiones para elaborar otros cuestionarios.

La elección de preguntas, en el cuestionario (Anexo VIII) que vamos a estudiar, se ha hecho buscando una primera parte de cálculo:

Son **las cinco primeras preguntas (SOL, SIS, PAR, FAC y SEG)**, que han sido elegidas para la observación de algunos fenómenos y errores habituales en álgebra, como:

- La incorrecta interpretación de las notaciones (primera pregunta: SOL)

- El error que se puede cometer al multiplicar una desigualdad por un número negativo (preguntas SOL y SIS)

- El empleo del cálculo ecuacional en las desigualdades (preguntas PAR y SEG).

- *La manipulación exclusivamente formal de expresiones algebraicas* (cuarta pregunta: FAC)

Analizados en el caso de las inecuaciones de dos maneras distintas:

- Sobre el éxito (bien o mal, éxito o fracaso) y

- Sobre los comportamientos

Posteriormente se quiere comparar estos resultados con los de otro cuestionario similar a éste pero con ecuaciones.

Con la comparación de ambos se quiere observar si los errores habituales en álgebra, al trabajar con igualdades, disminuyen, aumentan o cambian de carácter en los ejercicios con desigualdades. Se trata de analizar la hipótesis de que el tratamiento de las inecuaciones se realiza como si se tratara de ecuaciones, simplemente, "un poco diferentes".

Cuatro de las cinco cuestiones de cálculo se han planteado con la palabra "Resuelve...". Este es el modo habitual en que los profesores plantean estas preguntas a los alumnos, y no se ha querido modificar para estudiar, precisamente, cúal es el tipo de respuesta que provoca en ellos.

Solamente en una pregunta de las de cálculo, concretamente la número 2 **(SIS)**, se pide "Compara entre sí los conjuntos solución de ambas" en vez de emplear el enunciado habitual. Con ello se trata de observar si disminuye el número de respuestas correctas o varía el comportamiento del alumno para buscar la respuesta al no encontrar exactamente la palabra "mágica": Resolver..."

La pregunta 6 (NUM):

"Demuestra que la suma de dos números impares consecutivos es mayor que el doble del primero de ellos"

es semejante a un ejemplo con igualdades propuesto por Y. CHEVALLARD para la presentación funcional del álgebra.

Ha sido escogida para:

Observar las formas de respuesta empleadas por los alumnos. Razonamientos: "algebraico", "verbal" o "pseudoalgebraico".

La pregunta número 7 (FUN) del cuestionario es una pregunta sobre el uso de las letras en el status de función y de incógnita.

Se trata de comparar las respuestas de los alumnos en el caso de la igualdad y la desigualdad. Como, normalmente, el alumno ha trabajado ya mucho con las expresiones del tipo:

$$y = (5-2x)/3$$

y, probablemente, hubiera identificado la recta y los infinitos pares de valores, hemos preferido empezar por la expresión

$$y < (5-2x)/3$$

tratando de obtener unas respuestas "virgenes" evitando una <u>analogia espontánea</u> e irreflexiva, con el caso de la relación de igualdad, sí ésta era analizada en un momento inmediatamente anterior.

La pregunta número 8 (FRA) es especial. En primer lugar se observa que no se trata de un simple ejercicio mecánico de resolución de inecuaciones. Se pide realizar una verdadera **demostración**. Nos encontramos ante un uso **funcional** del álgebra, en este caso a través de la desigualdad.

En segundo lugar los alumnos van a encontrarse con "el ogro" de las letras. Tenemos dos posibilidades de enunciado (Posibilidad A y posibilidad B) y según cuál escojamos variaremos el efecto sobre los alumnos. Las estudiaremos en el punto siguiente.

II.3. ESTUDIO PREVIO DE POSIBLES RESPUESTAS

En los cinco primeros ejercicios, que son de cálculo, se espera descubrir algunos errores frecuentes en el cálculo de ecuaciones, como ya hemos dicho.

En el ejercicio número 6, los modos de respuesta esperados en el estudio previo de posibilidades son los siguientes:

a. **Plantear la inecuación.** Se trata de un ejercicio "de letra" dónde se puede hacer un planteamiento algebraico de la proposición dada.

Aunque sea de forma sencilla, el alumno debe hacer una simbolización para deducir de ella la certeza de la afirmación. Debe plantear:

$$(2x+1)+(2x+3) > 2(2x+1)$$

y tratar de resolver para obtener **la demostración:**

$$2x+1+2x+3 > 4x+2$$

$$4x+4 > 4x+2$$

$$4 > 2$$

esta desigualdad equivalente a la primera demuestra el enunciado.

Esto es lo que vamos a llamar un método de **razonamiento algebraico** o **formal**.

b. **Elegir un razonamiento en térmimos de orden**, bien sea **verbal**: "Tengo un número impar que es anterior, es decir menor que otro impar que le sigue...." etc., es decir, mediante palabras y oraciones; o bien sea **seudoalgebraico**: "Si tengo que:

$$2x+1 < 2x+3$$

y sumo a los dos miembros de la desigualdad el número menor: $(2x+1)$ tendré:

$$\underbrace{(2x+1)+(2x+1)}_{\text{"el doble"}} < \underbrace{(2x+3)+(2x+1)}_{\text{"la suma"}}$$

es decir: el doble del pequeño es menor que la suma de los dos con lo que queda probado".

A estos tipos "b" de razonamiento les llamaremos **verbal** y **seudoalgebraico**

Con ésto, como hemos dicho más arriba, se quería ver si el trabajo con inecuaciones favorece, o revela, más que las ecuaciones este uso funcional del álgebra ya que en las ecuaciones este tipo de razonamiento verbal prácticamente ha desaparecido por la fuerza de la simbolización algebraica y del automatismo de cálculo.

Este razonamiento verbal sería una pervivencia del razonamiento aritmético, dónde el matemático lleva las riendas de los cálculos que va haciendo, sin abandonarse, o abandonándose muy ligeramente, a los métodos numéricos.

En el ejercicio número 7, se espera que los alumnos, al encontrarse con una desigualdad que no presenta el aspecto de ninguna de las inecuaciones, o sistemas de inecuaciones, "normales", reflexionen de forma más libre, y encuentren que la desigualdad no establece una función, en el sentido conocido de que a cada valor de "x" le corresponde uno determinado y único de "y", sino que esa relación determina un conjunto de pares de valores mucho más amplio, en el que a cada valor de "x" le corresponden a su vez infinitos valores de "y".

En el apartado c)¿Sabes que quiere decir "resolver una inecuación"?¿Sabes resolverla? Si has respondido afirmativamente, resuélvela

Se intenta comprobar si, el alumno asocia, automáticamente, la palabra "resolver" con el concepto de ecuación. Si lo hace realizará una de las posibilidades siguientes:

1. Forzar una ecuación, por ejemplo igualando a cero en la forma

$$(5-2x)/3 = 0$$

2. Responder que no se puede "resolver" porque "no hay una ecuación".

Por último en el apartado d) se les pide el mismo estudio, con la igualdad, para hacerlos volver sobre sus respuestas anteriores y ver si establecen las diferencias pertinentes.

En el ejercicio número 8, vamos a analizar dos posibilidades de enunciado.

Posibilidad A :

Enunciado: "De las fracciones F/N y F+1/N+1 , ¿cuál es la mayor, con la condición $0 < F < N$?"

Posibilidad B:

Enunciado: "De las fracciones c/a y $\frac{c+1}{a+1}$ con $a>0$ y $c>0$ ¿Cuál crees que es mayor? Demuéstralo"

Vamos a estudiar posibles respuestas:

<u>Posibles respuestas a la posibilidad "A":</u>

R1.**Resolución semántica**

Imaginemos en un colegio una clase con la siguiente composición:

F : número de niñas

N : número total de alumnos en la clase

Entonces: **F/N** = proporción de niñas en esa clase

Si llega una nueva niña tendremos:

F+1 : número de niñas

N+1 : número total

Proporción: **F+1/N+1** que desde luego es mayor que la anterior. Es decir la proporción ha aumentado:

$$\frac{F+1}{N+1} > \frac{F}{N}$$

R2. **Resolución teniendo en cuenta el orden y los límites**

Sabemos que $0 < F/N < 1$

Si calculo el límite: $\lim\limits_{n \Rightarrow \infty} \dfrac{F+n}{N+n} = 1$

Pero de este resultado no se puede deducir que la sucesión sea monótona y monótona creciente, es decir que para todo "n" se cumpla:

$$\frac{F+n+1}{N+n+1} - \frac{F+n}{N+n} > 0$$

O sea que en particular: $\dfrac{F+1}{N+1} > \dfrac{F}{N}$

De manera que este modo de resolución no será válido.

R3. **Resolución algorítmica o algebraica**

Supongamos por ejemplo que: $\dfrac{F}{N} < \dfrac{F+1}{N+1}$ (I)

Como $N>0$ y $N+1>0$, tendremos:

$$F(N+1) < N(F+1)$$
$$FN + F < NF + N$$
$$F < N$$

Desigualdad equivalente a la primera. Esta se cumple precisamente porque es la condición dada, luego la desigualdad (I), de la página anterior, es cierta.

R4. **Forma de resolución "aritmética mixta"**

Se realiza en pasos sucesivos:

a) Tomo F/N y aumento el numerador en una unidad. La fracción aumenta.

$$\frac{F}{N} < \frac{F+1}{N}$$

b) Si en esta segunda fracción aumento el denominador la fracción disminuye:

$$\frac{F+1}{N} > \frac{F+1}{N+1}$$

c) Para llegar a la última fracción hemos aumentado, en el primer paso, y luego disminuido, en el segundo, de modo que lo que tengo que saber es si el aumento ha sido mayor o menor que la disminución.

Aumento en el primer paso:

$$\frac{F+1}{N} - \frac{F}{N} = \frac{1}{N}$$

Disminución en el segundo paso:

$$\frac{F+1}{N+1} - \frac{F+1}{N} = \frac{N(F+1)}{N(N+1)} - \frac{(N+1)(F+1)}{N(N+1)} = \frac{NF+N-NF-N-F-1}{N(N+1)} =$$

$$= \frac{-F-1}{N(N+1)} = - \frac{F+1}{N(N+1)} = - \frac{1}{N} \frac{F+1}{N+1}$$

Teniendo en cuenta la condición $F<N$ tenemos por consiguiente: $F+1<N+1$, es decir que la fracción:

$$(F+1)/(N+1)$$

es menor que la unidad y multiplica al factor de cambio $(1/N)$, es decir que lo disminuye. Por lo cual la cantidad que se disminuye en el segundo cambio es más pequeña que la que se aumenta en al primero y en la sucesión de los dos se produce como resultado un aumento, es decir;

$$\frac{F}{N} < \frac{F+1}{N+1}$$

<u>Posibles respuestas a la posibilidad "B":</u>

R1.Resolución semántica

Aquí caben las tres posibilidades: $a=c$, $a>c$ y $a<c$, lo cual hace que no sea fácil pensar en la fracción a/c como parte de un todo unidad c/c. Creo que en este planteamiento es mucho más difícil encontrar esta respuesta.

R2.Resolución teniendo en cuenta el orden y los límites.

Ya hemos visto que no es posible.

R3. Resolución algorítmica o algebraica

Esta quizá sea la que mejor se ajusta a este planteamiento, pues al llegar a la expresión:

$$a < c$$

se pueden estudiar los dos casos:

$$\text{Si} \quad c<a \quad \text{----------}> \quad \frac{c}{a} < \frac{c+1}{a+1}$$

$$\text{Si} \quad c>a \quad \text{----------}> \quad \frac{c}{a} > \frac{c+1}{a+1}$$

R.4. Resolución "aritmética"

Esta forma de resolver también se adapta bien a los dos casos (no triviales) posibles ya que en la conclusión entra la desigualdad $a<c$ o $a>c$.

En el cuestionario se ha optado por el enunciado en la posibilidad B. Esperamos observar mejor el caso de la letra con valor único o valor múltiple. Solamente se limita al caso "$a > 0$" y "$c > 0$".

III. <u>ESTUDIO ESTADÍSTICO</u>.

La Estadística informática proporciona unas posibilidades de tratamiento de datos que son muy interesantes desde el punto de vista de la Didáctica.

Uno de los momentos más necesarios para su empleo es, como hemos visto en el capítulo 5º, cuando el número de datos recogidos es muy elevado. Entonces la Informática aporta toda una tecnología que desarrolla y simplifica el tratamiento de datos estadísticos; pero, aunque el número de datos no sea excesivamente grande, siempre supone una ayuda para su interpretación.

Con el programa STATITCF, hemos empleado, en el punto III del capítulo 5º, diferentes análisis:

Análisis factorial de correspondencias
Análisis en componentes principales
Clasificación automática
etc.

En ellos, se han utilizado dos posibilidades: hacer el estudio <u>sobre las filas</u> o <u>sobre las columnas</u>. Esta doble posibilidad permite hacer estudios sobre la población -las observaciones efectuadas, en nuestro caso los alumnos- y estudios sobre las variables -preguntas, caracteres de esas preguntas etc.

También hemos visto cómo existe la posibilidad de introducir ALUMNOS SUPLEMENTARIOS, que figuran colocados en las gráficas, como referencia, pero cuyos datos no son tenidos en cuenta a la hora de calcular los índices y relaciones. Esto sirve para introducir "alumnos tipo". Por ejemplo un alumno que ha respondido bien a las primeras cinco preguntas y no ha respondido a las tres últimas se introduce como:

S_1 11111000

Y su posición sobre la gráfica marcará la "nube" de alumnos que han respondido de forma análoga a ésta.

Las posibilidades son muy numerosas y en este ejercicio hemos empleado algunas de ellas.

Se estudiarán, ahora, las respuestas de los alumnos desde el punto de vista éxito y Fracaso.

Se obtiene, a través del ordenador, la matriz de datos (Gráfico 6.1)

Hacemos un análisis factorial de correspondencias (El principio de este análisis es el Gráfico 6.2) y empezamos a estudiar los resultados obtenidos. Este gráfico nos da la contribución a la inercia total de cada uno de los ejes. Esto márca la "importancia" de cada uno de ellos. Entre los tres primeros se consigue una inercia de

26.0 + 20.8 + 16.8 = 63.6 %

que es bastante importante. Si entre los dos o tres primeros ejes se consiguen inercias del 80 % o más, el análisis sobre esos ejes sin tener en cuenta los demás es muy fiable.

En el Gráfico 6.3. tenemos varias columnas para cada eje. En la primera los valores de las coordenadas, correspondientes a cada pregunta, en la representación que

GRÁFICO 6.1

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D'OBSERVATIONS : 36   NOMBRE DE VARIABLES : 8

coinc. {1,1 - 5 al; 0,0 - 22 al} 27
1,1: 6
0,0: 16

FICHIER DE DONNEES : B:TOTALR

	1 SOL	2 SIS	3 PAR	4 FAC	5 SEG	6 NUM	7 FUN	8 FRA	Σ éxitos
1	1	0	1	0	0	1	1	1	5
2	0	0	0	0	1	0	0	0	1
3	1	0	0	1	1	0	1	0	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	1	0	2
6	1	0	0	1	1	1	1	0	5
7	1	1	0	1	0	1	1	1	6
8	1	0	0	0	1	1	0	1	4
9	0	0	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	0	1	1	1	1	0	4
11	0	0	0	0	0	1	1	0	2
12	0	0	0	0	0	1	0	1	1
13	0	0	0	1	0	0	1	1	3
14	0	0	0	0	0	1	0	0	1
15	0	1	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	1	1	1	0	0	3
17	1	0	1	0	0	0	0	0	2
18	0	0	0	0	0	1	1	0	2
19	0	0	0	1	0	1	0	0	2
20	0	1	0	0	0	1	1	0	3
21	0	0	0	0	1	1	1	1	4
22	0	0	0	0	0	0	0	1	1
23	1	0	1	0	0	1	1	0	4
24	0	0	0	0	0	1	0	0	1
25	0	0	0	0	0	0	0	1	1
26	0	0	0	0	0	1	1	0	2
27	0	1	0	0	0	1	0	0	2
28	0	1	0	0	0	1	0	1	3
29	0	0	0	0	1	1	0	0	2
30	0	0	0	0	0	0	1	0	1
31	1	0	0	1	1	1	1	1	6
32	0	0	0	1	0	1	0	0	2
33	0	1	0	0	0	0	0	0	1
34	0	1	0	0	0	1	1	0	3
35	0	0	0	0	0	1	0	0	1
36	0	0	0	1	0	1	0	1	3
	8	7	3	10	9	27	16	11	91

KHI-2 = 181,59   D.D.L = 245   Probab = 99.91%

***** ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES *****

TITRE DE L'ANALYSE : TOTAL 2

UTILISATEUR : M. DIEZ

DATE : 2-06-88

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D'OBSERVATIONS (Lignes) : 36 - NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) : 8

NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) ACTIVES DU TABLEAU : 8
NOMBRE DE VARIABLES (Colonnes) SUPPLEMENTAIRES : 0

NOMBRE D ' AXES DEMANDES : 5

VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

1RE LIGNE : VALEURS PROPRES (VARIANCES SUR LES AXES PRINCIPAUX)
2E LIGNE : CONTRIBUTION A L'INERTIE TOTALE (POURCENTAGES EXPLIQUES PAR LES AXES PRINCIPAUX)

0.5187	0.4149	0.3359	0.2804	0.2038
26.0 %	20.8 %	16.8 %	14.1 %	10.2 %

VECTEURS PROPRES (COEFFICIENTS DES VARIABLES DANS L'EQUATION LINEAIRE DES AXES PRINCIPAUX)

SOL	0.8697	-1.4318	0.0800	-0.8239	-0.0310
SIS	-3.1619	-0.7163	0.0624	-1.2005	0.0112
PAR	1.3539	-4.0611	0.2761	0.0483	-1.1112
FAC	0.4817	0.8699	0.0620	-0.5299	0.3748
SEG	0.0332	1.0359	0.5920	-2.0947	-0.4468
NUM	-0.1470	0.3792	0.4086	0.9714	-1.0252
FUN	0.0742	-0.0911	0.6336	0.6784	1.8615
FRA	0.1435	0.1628	-2.6384	0.1755	0.1543

ETUDE DES VARIABLES (Colonnes) DU TABLEAU

GRAFICO 6.3

POUR CHAQUE AXE :
1RE COLONNE:COORDONNEE
2E COLONNE:COSINUS CARRES (QUALITE DE LA REPRESENTATION)
3E COLONNE:CONTRIBUTION RELATIVE A L'INERTIE EXPLIQUEE PAR L'AXE

COLONNES AXES PRINCIPAUX

	AXE 1			AXE 2			AXE 3			AXE 4			AXE 5		
SOL	0.626	0.215	6.6	-0.922	0.467	18.0	0.046	0.001	0.1	-0.436	0.105	6.0	-0.014	0.000	0.0
SIS	-2.277	0.892	76.9	-0.461	0.037	3.9	0.036	0.000	0.0	-0.636	0.070	11.1	0.005	0.000	0.0
PAR	0.975	0.110	6.0	-2.616	0.795	54.4	0.160	0.003	0.3	0.026	0.000	0.0	-0.502	0.029	4.1
FAC	0.347	0.068	2.6	0.560	0.178	8.3	0.036	0.001	0.0	-0.281	0.045	3.1	0.169	0.016	1.5
SEG	0.600	0.139	6.9	0.667	0.172	10.6	0.343	0.045	3.5	-1.109	0.474	43.4	-0.202	0.016	2.0
NUM	-0.106	0.018	0.6	0.244	0.098	4.3	0.237	0.092	5.0	0.514	0.434	28.0	-0.463	0.351	31.2
FUN	0.053	0.003	0.1	-0.059	0.003	0.1	0.367	0.130	7.1	0.359	0.124	8.1	0.840	0.681	60.9
FRA	0.103	0.004	0.2	0.105	0.005	0.3	-1.529	0.970	84.1	0.093	0.004	0.4	0.070	0.002	0.3

luego se imprime, eligiendo los ejes de dos en dos. En la segunda el valor de los cosenos cuadrados y en la tercera la contribución de cada pregunta a la inercia del eje.

En el Gráfico 6.5. tenemos lo mismo pero aquí para las lineas, es decir para los alumnos.

Sobre el gráfico de ejes: 1 horizontal, 2 vertical del análisis factorial de correspondencias (Gráfico 6.4), se estudia la posición de las preguntas del cuestionario -quizá mejor dicho: **precuestionario.**

Comentario 1: SIS se opone, respecto al eje 1, a PAR y SOL que están próximas entre sí.

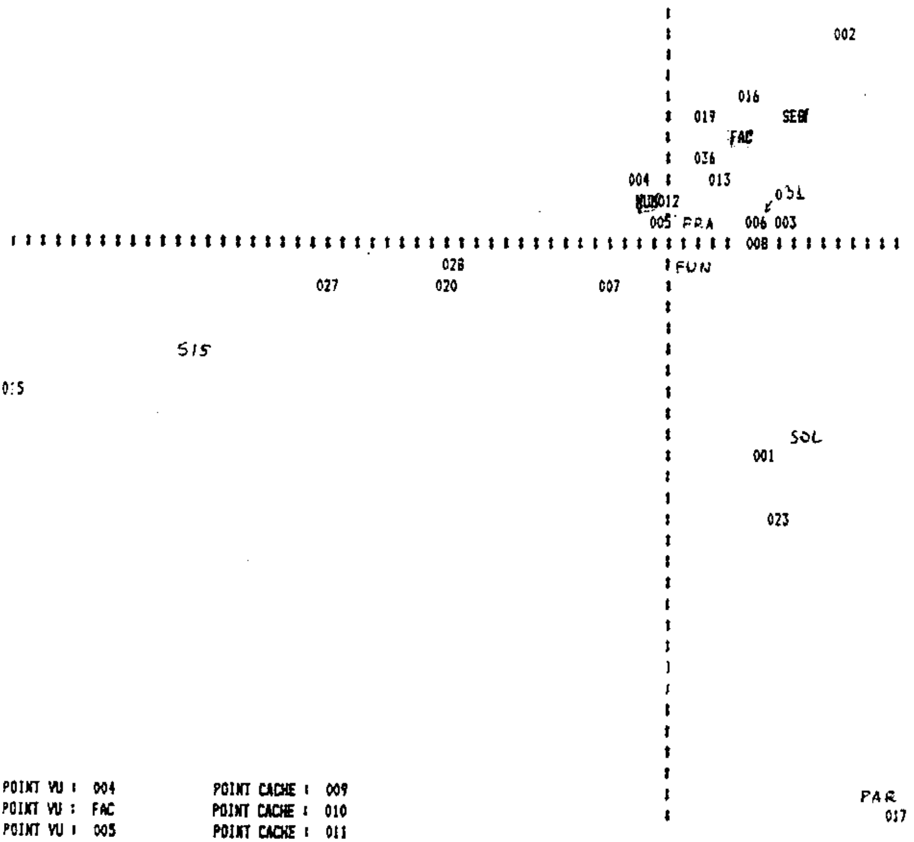
Sobre la matriz de datos (Gráfico 6.1) se comprueba esta proximidad de las preguntas PAR y SOL porque los tres alumnos que han respondido a la pregunta PAR han, también, respondido a la pregunta SOL y 28 alumnos no han respondido a ninguna de las dos, de modo que hay 31 alumnos que han respondido de la misma forma a las dos preguntas. Estas preguntas están ligadas por los alumnos.

Sobre la representación gráfica del plano 1-2 (en el Gráfico 6.4) se ven los tres alumnos de que hablamos (el 001, el 017 y el 023) en la misma zona que las preguntas PAR y SOL, a las cuales ligan.

Los alumnos que han respondido bien a SOL y mal a PAR son cinco, los números 003,006,007,008 y el 031 (que se encuentra escondido en el gráfico detrás del 006).Estos

GRÁFICO 6.4

REPRESENTATION SIMULTANEE DES LIGNES (Observations) ET COLONNES (Variables) ***
PLAN 1 2   AXE 1 HORIZONTAL   AXE 2 VERTICAL



POINT VU : 004	POINT CACHE : 009
POINT VU : FAC	POINT CACHE : 010
POINT VU : 005	POINT CACHE : 011
POINT VU : 004	POINT CACHE : 014
POINT VU : 005	POINT CACHE : 018
POINT VU : 013	POINT CACHE : 021
POINT VU : FRA	POINT CACHE : 022
POINT VU : 004	POINT CACHE : 024
POINT VU : FRA	POINT CACHE : 025
POINT VU : 005	POINT CACHE : 026
POINT VU : 016	POINT CACHE : 029
POINT VU : FUN	POINT CACHE : 030
POINT VU : 006	POINT CACHE : 031
POINT VU : 019	POINT CACHE : 032
POINT VU : 015	POINT CACHE : 033
POINT VU : 020	POINT CACHE : 034
POINT VU : 004	POINT CACHE : 035

GRÁFICO 6.5

ETUDE DES LIGNES (Observations) DU TABLEAU

'OUR CHAQUE AIE
RE COLONNE:COORDONNEE
E COLONNE:COSINUS CARRES (QUALITE DE LA REPRESENTATION)
E COLONNE:CONTRIBUTION RELATIVE A L'INERTIE EIPLIQUEE PAR L'AIE

IGNES AIES PRINCIPAUI

	AIE 1			AIE 2			AIE 3			AIE 4			AIE 5		
001	0.459	0.1546	2.2	-1.008	0.7468	13.5	-0.248	0.0452	1.0	0.210	0.0324	0.9	-0.030	0.0007	0.0
002	0.833	0.0762	1.5	1.036	0.1178	2.8	0.592	0.0385	1.1	-2.095	0.4816	17.2	-0.447	0.0219	1.1
003	0.565	0.2517	2.7	0.096	0.0072	0.1	0.342	0.0922	1.5	-0.693	0.3785	7.5	0.440	0.1525	4.2
004	-0.147	0.0091	0.0	0.379	0.0606	0.4	0.409	0.0704	0.5	0.971	0.3981	3.7	-1.025	0.4434	5.7
005	-0.036	0.0010	0.0	0.144	0.0164	0.1	0.521	0.2147	1.8	0.825	0.5381	5.3	0.418	0.1383	1.9
006	0.422	0.3046	1.9	0.152	0.0397	0.3	0.355	0.2154	2.1	-0.360	0.2209	2.5	0.147	0.0367	0.6
007	-0.290	0.2044	1.1	-0.138	0.0462	0.3	-0.232	0.1308	1.1	-0.122	0.0359	0.3	0.224	0.1223	1.6
008	0.425	0.1686	1.5	0.037	0.0012	0.0	-0.389	0.1417	2.0	-0.443	0.1832	3.1	-0.337	0.1062	2.5
009	-0.147	0.0091	0.0	0.379	0.0606	0.4	0.409	0.0704	0.5	0.971	0.3981	3.7	-1.025	0.4434	5.7
010	0.311	0.1258	0.8	0.548	0.3923	3.2	0.424	0.2345	2.4	-0.244	0.0774	0.9	0.191	0.0476	0.8
011	-0.036	0.0010	0.0	0.144	0.0164	0.1	0.521	0.2147	1.8	0.825	0.5381	5.3	0.418	0.1383	1.9
012	-0.002	0.0000	-0.0	0.271	0.0384	0.4	-1.115	0.6505	8.1	0.573	0.1721	2.6	-0.435	0.0992	2.0
013	0.233	0.0348	0.3	0.314	0.0631	0.8	-0.648	0.2685	4.1	0.108	0.0075	0.1	0.797	0.4065	10.3
014	-0.147	0.0091	0.0	0.379	0.0606	0.4	0.409	0.0704	0.5	0.971	0.3981	3.7	-1.025	0.4434	5.7
015	-3.162	0.8331	21.2	-0.716	0.0428	1.4	0.062	0.0003	0.0	-1.200	0.1201	5.6	0.011	0.0000	0.0
016	0.389	0.1004	1.0	0.762	0.3844	4.6	0.354	0.0831	1.2	-0.551	0.2012	3.6	-0.366	0.0886	2.2
017	1.112	0.1311	5.2	-2.746	0.8001	40.0	0.178	0.0034	0.2	-0.388	0.0160	1.2	-0.571	0.0346	3.5
018	-0.036	0.0010	0.0	0.144	0.0164	0.1	0.521	0.2147	1.8	0.825	0.5381	5.3	0.418	0.1383	1.9
019	0.167	0.0132	0.1	0.625	0.1842	2.1	0.235	0.0261	0.4	0.221	0.0230	0.4	-0.325	0.0500	1.1
020	-1.078	0.8013	7.4	-0.143	0.0140	0.2	0.368	0.0934	1.3	0.150	0.0155	0.3	0.283	0.0550	1.3
021	0.226	0.0714	0.4	0.372	0.1932	1.5	-0.251	0.0881	0.8	-0.067	0.0063	0.1	0.136	0.0258	0.4
022	0.143	0.0028	0.0	0.163	0.0036	0.1	-2.638	0.9571	22.8	0.175	0.0042	0.1	0.154	0.0033	0.1
023	0.538	0.1331	2.5	-1.301	0.7792	17.9	0.350	0.0562	1.6	0.219	0.0220	0.7	-0.076	0.0027	0.1
024	-0.147	0.0091	0.0	0.379	0.0606	0.4	0.409	0.0704	0.5	0.971	0.3981	3.7	-1.025	0.4434	5.7
025	0.143	0.0028	0.0	0.163	0.0036	0.1	-2.638	0.9571	22.8	0.175	0.0042	0.1	0.154	0.0033	0.1
026	-0.036	0.0010	0.0	0.144	0.0164	0.1	0.521	0.2147	1.8	0.825	0.5381	5.3	0.418	0.1383	1.9
027	-1.654	0.8851	11.6	-0.169	0.0092	0.2	0.236	0.0179	0.4	-0.115	0.0042	0.1	-0.507	0.0831	2.8
028	-1.055	0.6405	7.1	-0.058	0.0019	0.0	-0.722	0.3003	5.1	-0.018	0.0002	0.0	-0.287	0.0473	1.3
029	0.343	0.0497	0.5	0.708	0.2112	2.7	0.500	0.1056	1.6	-0.562	0.1331	2.5	-0.736	0.2285	5.8
030	0.074	0.0012	0.0	-0.091	0.0018	0.0	0.634	0.0856	1.3	0.678	0.0982	1.8	1.862	0.7393	18.7
031	0.376	0.4268	1.8	0.154	0.0718	0.4	-0.144	0.0624	0.4	-0.271	0.2211	1.7	0.148	0.0661	0.7
032	0.167	0.0132	0.1	0.625	0.1842	2.1	0.235	0.0261	0.4	0.221	0.0230	0.4	-0.325	0.0500	1.1
033	-3.162	0.8331	21.2	-0.716	0.0428	1.4	0.062	0.0003	0.0	-1.200	0.1201	5.6	0.011	0.0000	0.0
034	-1.078	0.8013	7.4	-0.143	0.0140	0.2	0.368	0.0934	1.3	0.150	0.0155	0.3	0.283	0.0550	1.3
035	-0.147	0.0091	0.0	0.379	0.0606	0.4	0.409	0.0704	0.5	0.971	0.3981	3.7	-1.025	0.4434	5.7
036	0.159	0.0195	0.2	0.471	0.1697	1.8	-0.723	0.4002	5.1	0.206	0.0324	0.5	-0.165	0.0210	0.4

se encuentran atraidos por SOL y rechazados por FAR de modo que no están opuestos al grupo SOL,FAR pero tampoco demasiado próximos.

El alumno 007 de este grupo se encuentra un poco separado de los otros, incluso con coordenada negativa respecto al eje 1, porque vemos que es el único de entre ellos que ha respondido a la pregunta SIS y por tanto se encuentra atraido también por ella. Esta atracción produce su desplazamiento hacia la izda.

Se ve así cómo la representación simultánea de alumnos y preguntas es un gráfico dónde se pueden "leer" las relaciones que aparecen entre ambos conjuntos de elementos: los alumnos y las preguntas del cuestionario.

Comentario 2: La pregunta SIS es la más significativa, es decir la que más discrimina.

Esto puede apreciarse de varias maneras en el estudio estadístico.

a. Por su posición aislada y opuesta respecto a las demás preguntas en el gráfico. Opuesta a SOL y FAR respecto al eje 1 y opuesta a NUM, FRA, FAC y SEG respecto al eje 2.

b. Por los valores de sus coordenadas. Estos valores vienen dados (Gráfico 6.3) por las primeras columnas de cada eje. En el caso de SIS y en el gráfico de ejes 1-2 es la única pregunta que tiene las dos negativas y una de ellas de valor absoluto muy grande (-2.277, -0.461).

c. Por los valores de los cosenos cuadrados que se miden en las segundas columnas de cada eje (Gráfico 6.3). En el eje 1 SIS tiene el valor que más se separa delos otros (0.892). Después en el eje 2 le siguen PAR con (0.795) y SOL con (0.467) que también son bastante representativas según estamos viendo.

d. Por su contribución a la inercia de los ejes. Se puede ver en las terceras columnas del mismo Gráfico. La pregunta SIS contribuye al primer eje con una inercia de 76.9, frente a una inercia de 54.4 para PAR o 18.0 para SOL en el segundo, que son las que le siguen en importancia.

Comentario 3: Las preguntas SOL y PAR forman otro polo discriminatorio de los alumnos

El alumno 017 sólo ha respondido a esas dos preguntas bien.

Los alumnos 003, 006 y el 031 (escondido por el 006) se encuentran en *la misma posición* respecto a SOL y PAR por un lado, pues han respondido del mismo modo a esas preguntas (los tres bien a SOL, y los tres mal a PAR) y respecto a FAC y SEG por otro (éstas han sido respondidas bien por los tres).

Comentario 4: Los alumnos 015 y 033 tienen marcada su posición por la pregunta SIS ya que es la única que han respondido y por tanto la única que ejerce atracción sobre ellos (Gráfico 6.4).

Por otra parte, si hacemos el ANALISIS EN COMPONENTES PRINCIPALES y estudiamos en concreto los alumnos (los individuos) solamente (Gráfico 6.6) podemos ver juntos alumnos que han respondido de la misma forma a algunas preguntas que son más caracteristicas que otras. Si rodeamos con un circulo los alumnos que han respondido mejor (6 preguntas bien), con un cuadrado los que han respondido 5 preguntas y con un triángulo los que han respondido 4 bien, encontramos una linea que separa a los alumnos y que podemos llamar **linea Exito-Fracaso.**

También en este Análisis en componentes principales podemos estudiar los gráficos de los **circulos de correlaciones** (Gráficos 6.7, 6.8 y 6.9) también es posible extraer algunas conclusiones interesantes.

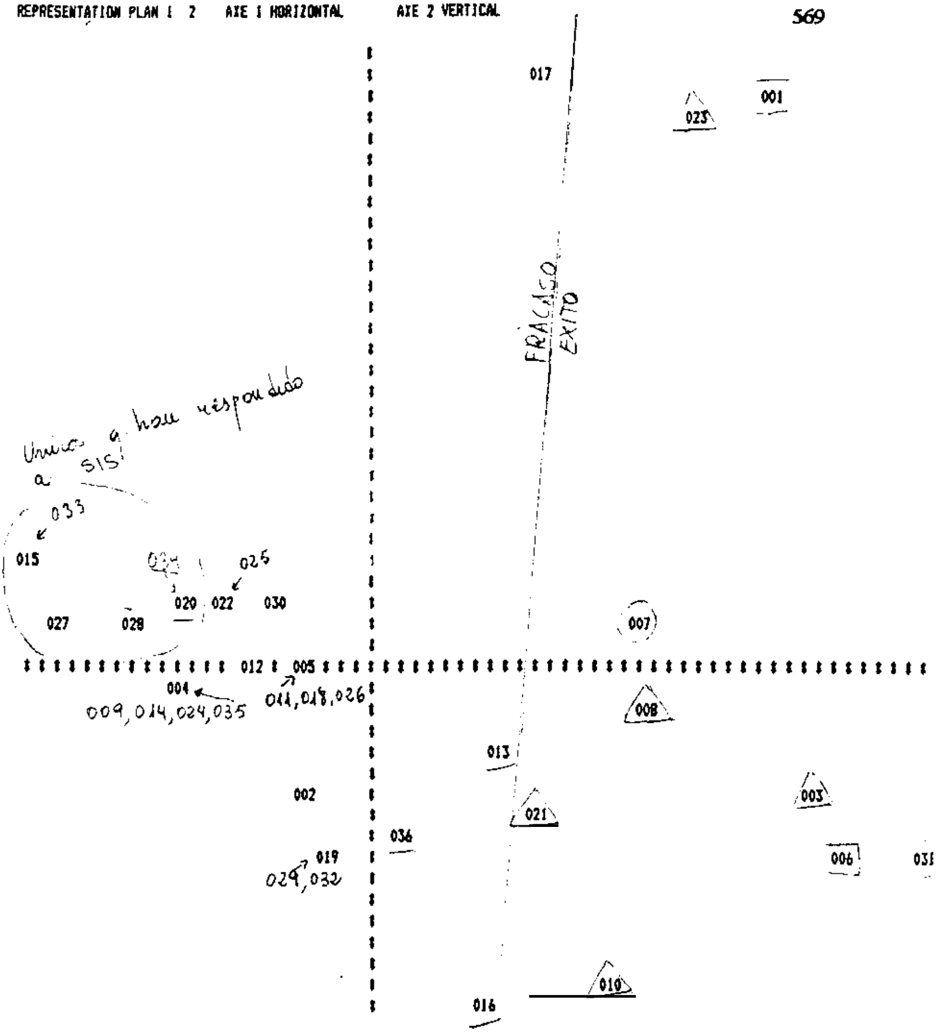
Comentario 5: Las preguntas FAC y SEG en los Gráficos 6.7 y 6.9 aparecen superpuestas

Se ven como si fueran preguntas semejantes. Se podria decir que existe una dependencia. Esta dependencia se comprueba en la tabla de datos (Gráfico 6.1) pues un total de 27 alumnos de los 36 las han respondido de la misma forma (5 de ellos las dos bien, 22 de ellos, las dos mal).

Y lo que pasa es que, realmente, son preguntas muy parecidas. (La razón de haber incluido ambas era para observar los comportamientos, es decir, la manera de resol-

GRÀFICO C.6

REPRESENTATION PLAN 1 2   AXE 1 HORIZONTAL   AXE 2 VERTICAL

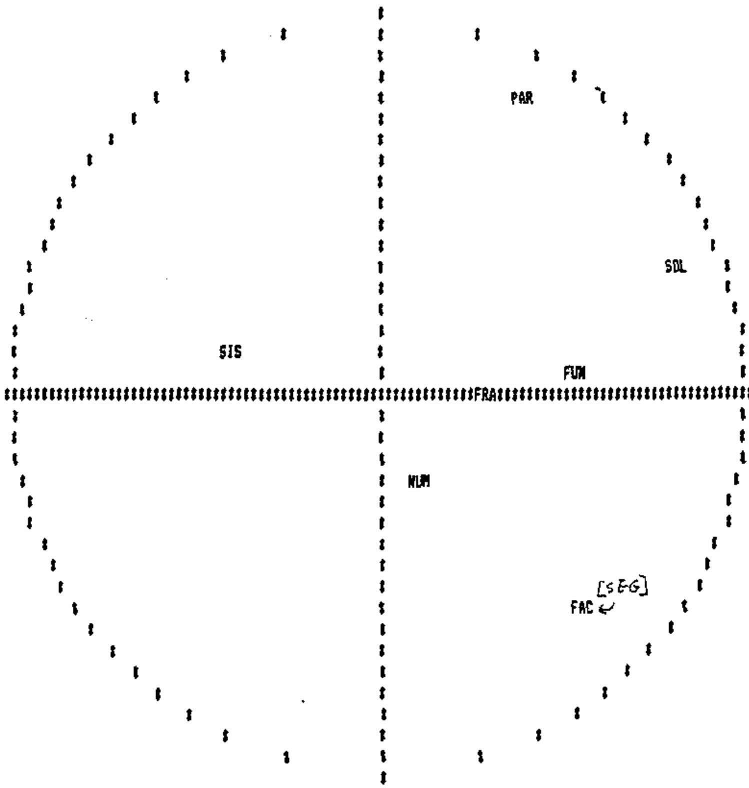


POINT VU : 004	POINT CACHE : 009
POINT VU : 005	POINT CACHE : 011
POINT VU : 004	POINT CACHE : 014
POINT VU : 005	POINT CACHE : 018
POINT VU : 004	POINT CACHE : 024
POINT VU : 022	POINT CACHE : 025
POINT VU : 005	POINT CACHE : 026
POINT VU : 019	POINT CACHE : 029
POINT VU : 019	POINT CACHE : 032
POINT VU : 015	POINT CACHE : 033
POINT VU : 020	POINT CACHE : 034
POINT VU : 004	POINT CACHE : 035

GRÀFICO 6.7

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 2 AXE 1 HORIZONTAL AXE 2 VERTICAL



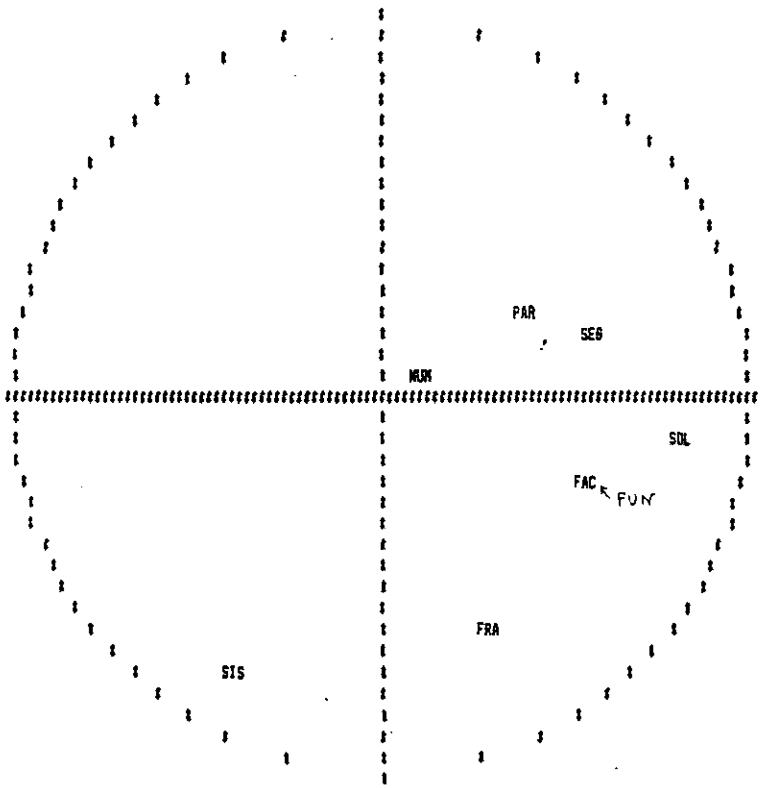
Coinciden 27/36

POINT VU : FAC POINT CACHE : SEG

GRÁFICO 6.8

CERCLE DES CORRELATIONS

PLAN 1 4 AXE 1 HORIZONTAL AXE 4 VERTICAL



Coinciden
0,0 16 veces
1.1 6 "

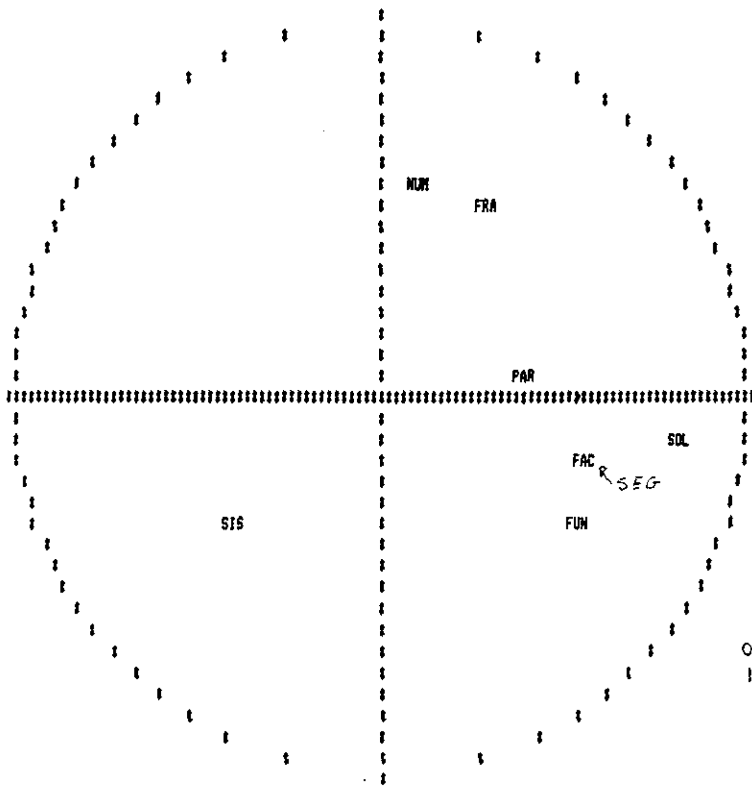
22/36

POINT VU : FAC POINT CACHE : FUN

GRÁFICO 6.9

CERCLE DES CORRELATIONS

.AN 1 5 AXE 1 HORIZONTAL AXE 5 VERTICAL



Coincidencia
0,0 22 veces
1,1 5 " 27/36

POINT VU : FAC POINT CACHE : SEG

ver, no el éxito o fracaso). La dependencia que se comprueba no es una dependencia creada por las respuestas de los alumnos, sino por los caracteres comunes a priori de ambas preguntas.

Comentario 6: <u>También la pregunta FUN se encuentra escondida detrás de la pregunta FAC en el circulo de correlaciones del Gráfico 6.8</u>, pero solamente en ése. De nuevo se observa que salen 22 coincidencias entre los 36 alumnos.

Entre estas dos preguntas ya puede ser más interesante esta coincidencia pues los caracteres de ambas no son coincidentes a priori. Es decir, se trata a priori de preguntas independientes que aparecen ligadas ahora por los alumnos.

En el análisis factorial de correspondencias estas preguntas están efectivamente bastante próximas en el gráfico 6.4 y en los gráficos de las otras parejas de ejes (que no figuran en el texto por no sobrecargarlo)

Por tanto seria bueno hacer un cruzamiento de estas preguntas para asegurar su relación de dependencia o independencia.

El cruzamiento (Gráfico 6.10) nos dice efectivamente que hay 22 coincidencias de respuesta (16 respuestas del tipo "0,0" y 6 respuestas del tipo "1,1") pero no hay un "cero" en ninguna de las otras dos posiciones, así que la implicación no es muy clara. El número más bajo es el 4 que corresponde a 0 en FUN y 1 en FAC; es decir, "alumnos que

GRÁFICO 6.10

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO FUN / FAC

VARIABLE EN LIGNES = FUN VARIABLE EN COLONNES = FAC

EFFECTIFS OBSERVES

	0	1	TOTAL
0	16	4	20
1	10	6	16
TOTAL	26	10	36

KHI-2 AVEC FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 0.625 D.D.L. = 1
roba = 43.50%
KHI-2 SANS FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 1.357 D.D.L. = 1
roba = 24.24%

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO FUN / FAC

VARIABLE EN LIGNES = FUN VARIABLE EN COLONNES = FAC

EFFECTIFS THEORIQUES

	0	1	TOTAL
0	14.44	5.56	20.00
1	11.56	4.44	16.00
TOTAL	26.00	10.00	36.00

KHI-2 AVEC FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 0.625 D.D.L. = 1
roba = 43.50%
KHI-2 SANS FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 1.357 D.D.L. = 1

sin saber FUN puedan responder a FAC" sólo hay 4, pero de los 10 que han respondido bien a FAC hay 6 que saben responder a FUN. La situación es la siguiente:

VARIABLE EN LINEAS = FUN   VARIABLE EN COLUMNAS = FAC

Efectivos observados

	0	1	TOTAL
0	16	4	20
1	10	6	16
TOTAL	26	10	36

hay una implicación pero débil de FAC => FUN.

Comentario 7: Existe un caso de implicación claro entre las preguntas SOL y PAR (Gráfico 6.11). Se ha notado porque aparece un cero en el lugar: 0 para SOL y 1 para PAR , ésto quiere decir que no hay alumnos que sin responder a SOL hayan respondido a PAR, es decir: todos los que saben PAR saben SOL. O dicho de otra manera: "saber PAR" implica "saber SOL"

PAR => SOL

Pero hay una dificultad para aceptar este resultado directamente y es que el cuestionario está pasado a tan pocos alumnos que hay un número en la tabla (el 3, que corresponde a 1 en SOL y 1 en PAR) que resulta ser menor que 5 que parece ser el minimo admitido para que el resultado sea representativo.

En el caso del cruzamiento PAR/SEG (Gráfico

GRÁFICO 6.11

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

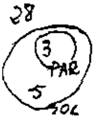
NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO SOL/PAR

VARIABLE EN LIGNES = SOL VARIABLE EN COLONNES = PAR

EFFECTIFS OBSERVES

SOL \ PAR	0	1	TOTAL
0	28	0	28
1	5	3	8
TOTAL	33	3	36



PAR ⇒ SOL

KHI-2 AVEC FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 7.071 D.D.L. = 1 Proba = 0.77%
KHI-2 SANS FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 11.455 D.D.L. = 1 Proba = 0.09%

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO SOL/PAR

VARIABLE EN LIGNES = SOL VARIABLE EN COLONNES = PAR

EFFECTIFS THEORIQUES

	0	1	TOTAL
0	25.67	2.33	28.00
1	7.33	0.67	8.00
TOTAL	33.00	3.00	36.00

KHI-2 AVEC FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 7.071 D.D.L. = 1 Proba = 0.77%
KHI-2 SANS FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 11.455 D.D.L. = 1 Proba = 0.09%

6.12) **se observa una tendencia a la equivalencia** *pues hay* más alumnos en la diagonal 24 - 0 que en la otra diagonal 3 - 9, pero sin embargo hay más alumnos que contestan a SEG (9 alumnos) que los que contestan a PAR (3 alumnos) de modo que no son equivalentes.

Hay otra parte del programa de estadística que se llama CLASIFICACIÓN AUTOMATICA y que también aporta información que se analiza a continuación.

El estudio se puede hacer **sobre las lineas** *(alumnos) (Gráficos 6.13 y 6.14) o* **sobre las columnas** *(pre*guntas) (Gráficos 6.15 y 6.16). En ambos casos se ha hecho sobre la distancia euclidiana que es la que mejor se corresponde con los estudios hechos antes. (Hemos hecho también el estudio sobre la distancia de Jaccard pero no nos ha dado resultados interesantes)

El árbol jerárquico se puede formar **eligiendo en la partición el número de clases que nos interese.** Aquí se han elegido 5 después de ver las cortaduras formadas por 4, 6 y 7 clases porque nos ha parecido la más equilibrada.

Estudiándola se pueden ver reflejadas algunas de las observaciones ya efectuadas. Por ejemplo **a la clase uno (Gráfico 6.14) pertenecen los tres alumnos (001,** 017,023) *que estaban ligados con las preguntas* SOL *y* PAR. Estas preguntas son las que más contribuyen a la formación de la clase 1:SOL con 292 y PAR con 917 frente a 32 que es el número siguiente en contribución a esta clase.

GRÁFICO 6.12

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO PAR/SEG

VARIABLE EN LIGNES = PAR VARIABLE EN COLONNES = SEG

EFFECTIFS OBSERVES

PAR \ SEG	0	1	TOTAL
0	24	9	33
1	3	0	3
TOTAL	27	9	36

KHI-2 AVEC FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 0.121 D.D.L. = 1
roba = 72.78%
KHI-2 SANS FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 1.091 D.D.L. = 1
roba = 29.67%

************ TABLEAUX CROISES/TEST KHI-2 ************

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : B:TOTAL
TITRE : RESULTADOS TOTALES

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 36 NOMBRE DE VARIABLES : 8

TITRE DU DOSSIER : CRUZAMIENTO PAR/SEG

VARIABLE EN LIGNES = PAR VARIABLE EN COLONNES = SEG

EFFECTIFS THEORIQUES

	0	1	TOTAL
0	24.75	8.25	33.00
1	2.25	0.75	3.00
TOTAL	27.00	9.00	36.00

C FACTEUR DE CORRECTION DE CONTINUITE = 0.121 D.D.L. = 1

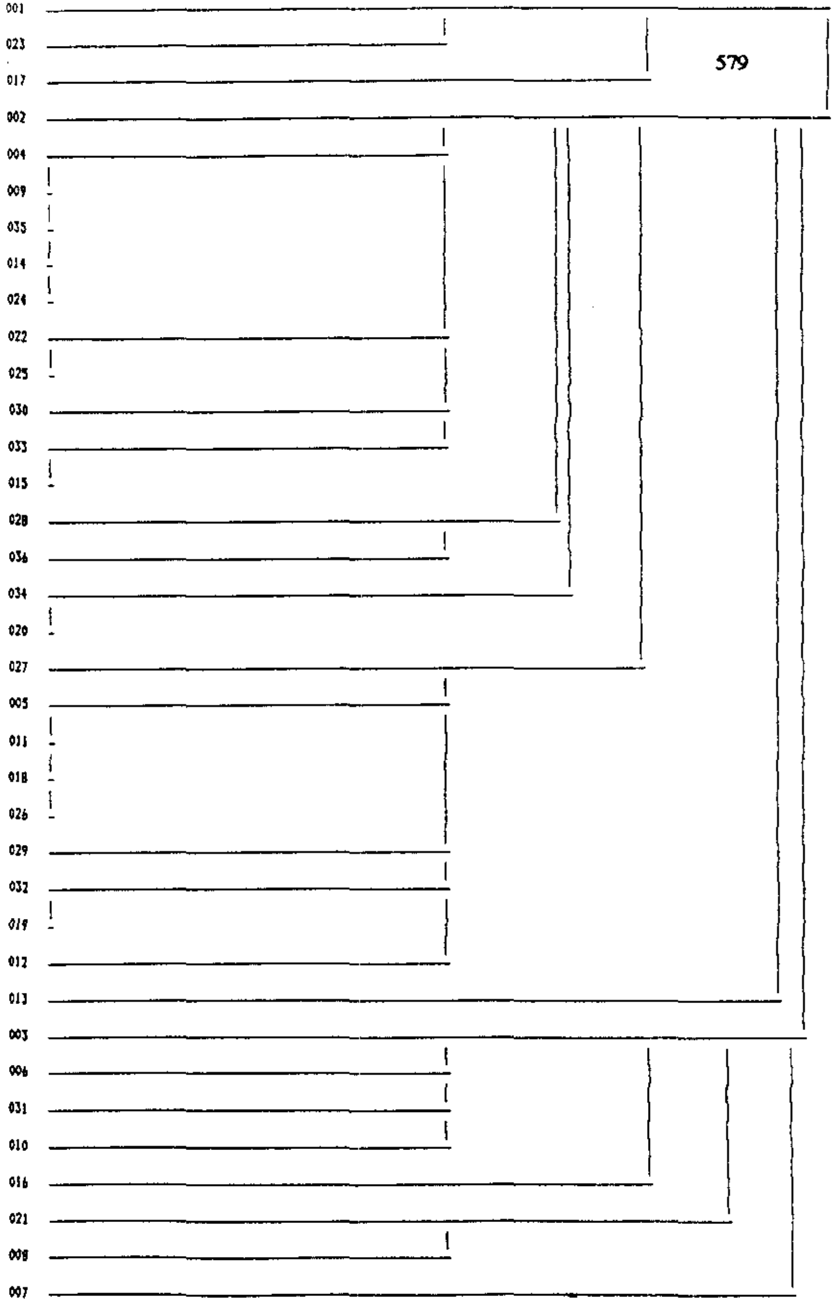

001
023
017
002
004
009
035
014
024
022
025
030
033
015
028
036
034
020
027
005
011
018
026
029
032
019
012
013
003
006
031
010
016
021
008
007

GRÁFICO 6.14

********** INTERPRETATION DE LA HIERARCHIE **********

TRONCATURE DE LA HIERARCHIE

HIERARCHIE DECOUPEE EN 5 CLASSES

N°CLAS	EFFECTIF	DESCRIPTION DES CLASSES
1	3	001 017 023
2	24	002 004 005 009 011 012 014 015 018 019 020 022 024 025
		026 027 028 029 030 032 033 034 035 036
3	7	003 006 008 010 016 021 031
4	1	007
5	1	013

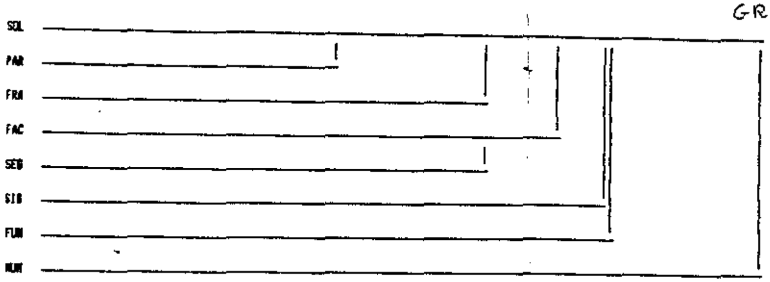
********** INTERPRETATION DE LA PARTITION **********

CONTRIBUTION DE VARIABLES QUALITATIVES AUX CLASSES

CLASSE	CL1	CL2	CL3	CL4	CL5	TOTAL
SOL	292	190	137	97	8	724
SIS	20	13	47	115	7	202
PAR	917	61	18	3	3	1000
FAC	32	78	185	72	72	439
SEG	28	99	583	9	9	728
NUM	3	0	12	9	83	108
FUN	17	63	57	35	35	206
FRA	0	30	14	63	63	170

ARBRE HIERARCHIQUE

GRÁFICO 6.15



********** INTERPRETATION DE LA HIERARCHIE **********

CONTRIBUTIONS DES VARIABLES QUALITATIVES AUX NOEUDS DE LA HIERARCHIE

NOEUDS	MA9	MA10	MA11	MA12	MA13	MA14	MA15
001	0	0	0	1000	200	125	86
002	0	0	1000	375	40	28	20
003	1000	250	0	444	200	125	143
004	0	0	0	0	0	0	1000
005	0	0	0	0	0	1000	429
006	1000	250	0	444	200	125	86
007	1000	250	1000	28	100	67	48
008	1000	250	1000	28	200	125	143
009	0	0	0	0	0	0	1000
010	0	0	0	1000	100	222	143
011	0	0	0	0	0	1000	429
012	0	1000	0	167	40	28	429
013	0	1000	1000	28	100	222	86
014	0	0	0	0	0	0	1000
015	0	0	0	0	1000	28	20
016	0	0	0	1000	100	67	238
017	0	1000	0	444	100	67	48
018	0	0	0	0	0	1000	429
019	0	0	1000	375	40	28	429
020	0	0	0	0	1000	417	238
021	0	1000	1000	28	100	222	143
022	0	1000	0	167	40	28	20
023	0	1000	0	444	100	222	143
024	0	0	0	0	0	0	1000
025	0	1000	0	167	40	28	20
026	0	0	0	0	0	1000	429
027	0	0	0	0	1000	28	429
028	0	1000	0	167	400	67	238
029	0	0	1000	375	40	28	429
030	0	0	0	0	0	1000	20
031	1000	250	0	167	400	67	48
032	0	0	1000	375	40	28	429
033	0	0	0	0	1000	28	20
034	0	0	0	0	1000	417	238
035	0	0	0	0	0	0	1000
036	0	1000	1000	28	100	67	238

GRÁFICO 6.16

########## INTERPRETATION DE LA HIERARCHIE ##########

TRONCATURE DE LA HIERARCHIE

HIERARCHIE DECOUPEE EN 5 CLASSES

N°CLAS	EFFECTIF	DESCRIPTION DES CLASSES
1	3	SOL PAR FRA
2	1	SIG
3	2	FAC SEV
4	1	MUR
5	1	FUN

########## INTERPRETATION DE LA PARTITION ##########

CONTRIBUTION DE VARIABLES QUALITATIVES AUX CLASSES

CLASSE	CL1	CL2	CL3	CL4	CL5	TOTAL
001	225	208	417	75	75	1000
002	54	18	321	18	18	429
003	42	125	250	125	125	667
004	54	18	36	875	18	1000
005	125	42	83	375	375	1000
006	136	208	150	75	75	644
007	14	42	83	42	42	222
008	42	125	0	125	125	417
009	54	18	36	875	18	1000
010	375	125	250	125	125	1000
011	125	42	83	375	375	1000
012	14	42	83	375	42	556
013	3	75	17	75	208	378
014	54	18	36	875	18	1000
015	54	875	36	18	18	1000
016	225	75	417	208	75	1000
017	347	42	83	42	42	556
018	125	42	83	375	375	1000
019	125	42	83	375	42	667
020	225	208	150	208	208	1000
021	42	125	0	125	125	417
022	149	18	36	18	18	238
023	42	125	250	125	125	667
024	54	18	36	875	18	1000
025	149	18	36	18	18	238
026	125	42	83	375	375	1000
027	125	375	83	375	42	1000
028	3	208	150	208	75	644
029	125	42	83	375	42	667
030	54	18	36	18	875	1000
031	14	375	83	42	42	556
032	125	42	83	375	42	667
033	54	875	36	18	18	1000
034	225	208	150	208	208	1000
035	54	18	36	875	18	1000
036	3	75	17	208	75	378

Habíamos visto que el alumno 007 estaba separado de su grupo por ser de entre ellos el que había respondido a la pregunta SIS y aquí se encuentra separado en la clase 4 y esta clase está precisamente marcada por la pregunta SIS con un valor de 115 según se aprecia en la tabla de contribución.

También en los Gráficos 6.15 y 6.16 podemos **comprobar** algunos de nuestros asertos anteriores.

Por ejemplo la pregunta SIS se encuentra aislada en la clase 2 (Gráfico 6.16), y esta clase está marcada sobre todo por la contribución 875 de los alumnos 015 y 033 que en el Gráfico 6.4 se localizan "tirando" de la pregunta SIS, realmente.

IV. RESULTADOS DIDACTICOS SOBRE LOS COMPORTAMIENTOS.

Sobre la cuestión "SOL", que estaba planteada para estudiar la incorrecta interpretación de notaciones, en particular, la del signo "-" ante la fracción, se obtiene una respuesta de fracaso de 11 alumnos sobre 36:

30 %

El error de no cambiar de sentido la desigualdad, al multiplicar por un número negativo, lo cometen 17 alumnos, lo que representa el

47 %

La cuestión solamente ha sido respondida satisfactoriamente por 11 alumnos, Esto es, el 30 % del total.

Sobre la cuestión "SIS", que se planteaba para estudiar el cambio de sentido de la desigualdad, se contabilizan 7 alumnos que cometen el error, lo que supone un

19 %

Esto contrasta con el resultado de la cuestión "SOL", en la que el mismo error es cometido por el 30 %. La valoración que se hace de este hecho, es que parte del error cometido anteriormente se debía al cálculo con fracciones, que favorece la producción de errores.

Sobre las cuestiones "PAR" y "SEG", en las que se investigaba el comportamiento ecuacional en las desigualdades.

En la cuestión "SEG" se encuentran 11 alumnos que resuelven la inecuación empleando la "fórmula":

$$x \geq \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este 30 % de alumnos hace una conversión de la fórmula de resolución de las ecuaciones, a las inecuaciones, con el simple artificio de sustituir el signo "=" por el "≥". Trasplantan, así, una técnica aprendida para las ecuaciones a estas otras relaciones que interpretan como ecuaciones deformadas.

En la cuestión "PAR" son solamente 5 (14 %), los alumnos que realizan el cálculo con la fórmula adaptada, y, sin embargo, de una a otra cuestión solamente cambia el sentido de la desigualdad y el valor de los coeficientes.

Se dan DOS alumnos que cometen el error de cálculo: $\sqrt{25 - 16} = 5 - 4$ y $\sqrt{100 - 36} = 10 - 6$. Este error es una extensión del $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ estudiado por Tonelle y que también se llama "extensión de la distributividad".

Sobre la cuestión "FAC", en la que se estudia la utilización exclusivamente "formal" de las técnicas de cálculo.

Se pedía: "Resolver la inecuación: $(x-3)(x-2) \geq 0$" y se encuentran 17 alumnos, (47 %), que multiplican los binomios para reconstruir el polinomio $(x^2 - 5x + 6)$ que luego vuelven a factorizar demostrando así un uso mecánico de las técnicas adquiridas, que es lo que llamo un uso "formal".

Sobre la cuestión "NUM", en la que se pide un uso funcional del álgebra.

Se encuentran 18 alumnos (50 %) que siguen una demostración de tipo algebraico, planteando uno de los dos tipos de desigualdades:

a) $x + (x + 2) > 2x$

b) $(2x + 1) + (2x + 3) > 2(2x + 1)$

Y transformándolas en otras equivalentes hasta llegar a la desigualdad que lo demuestra.

Hay 4 alumnos (11 %) que siguen un razonamiento "verbal", y 5 alumnos (14 %) que siguen un razonamiento seudoalgebraico.

Se observa, por tanto, que es preponderante el uso de expresiones algebraicas sobre los otros tipos de razonamiento.

Aparecen, también, 6 alumnos (16 %) que simplemente hacen una comprobación de la propiedad con algún ejemplo.

Sobre la cuestión "FUN", en la que se pedia establecer la idea de función y reflexionar lo que quiere decir "resolver".

Los alumnos que logran establecer la idea de función son 20 (55 %), en el caso de la desigualdad, y 17 (49 %), en el caso de la igualdad. Estas cantidades equivalentes, hacen ver que, para el alumno, no existe diferencia notable entre la desigualdad y la igualdad. Incluso le resulta ligeramente más fácil reconocer la idea de función en la desigualdad.

En cuanto a la cuestión de "resolver la inecuación", se encuentra el caso de alumnos que identifican la palabra *resolver* con la palabra *ecuación* y, aún más, con la "expresión igual a cero". Aparece, en este caso, la expresión

$$\frac{5 - 2x}{3} = 0$$

que se resuelve con el correspondiente resultado. Se tienen

7 alumnos en los que se produce esta identificación de términos, lo que representa un 19 % del total. Se confirman, así, las previsiones hechas en el análisis a priori.

Se había previsto, también, la posible respuesta: "No se puede resolver porque no hay una ecuación" pero no se ha presentado en ningún alumno. Aquellos que identificaban *resolver* con *ecuación* han optado por crearla igualando a cero, como hemos visto.

Sobre la cuestión "FRA", en la que se pide una comparación de fracciones expresadas con letras:

$$\frac{c}{a} \quad y \quad \frac{c+1}{a+1}$$

De las resoluciones previstas solamente hemos encontrado la R3: **algoritmica o algebraica**. Responden utilizándola 6 alumnos, el 17 %.

Hay DOS alumnos que intentan un razonamiento "verbal" pero lo dejan incompleto.

Hay, también, DOS alumnos que cometen el error de confundir la expresión

$$\frac{c+1}{a+1} \quad \text{con la expresión} \quad \frac{c}{a} + 1$$

por lo que responden que ésta es mayor que la fracción c/a.

Pero la mayoria de las respuestas son del tipo de la

Resolución con un ejemplo:

El alumno opta por elegir un ejemplo numérico y "demostrar" así cuál es la mayor (que, claro está, depende de los números elegidos)

Esta demostración se inscribe dentro de la concepción de la letra con valor único y se encuentra en 17 alumnos; esto es, el 47 % de ellos. Es la respuesta más importante en número.

Una de ellas, la de Laura, se incluye a continuación.

5/ es mayor $\frac{c}{a}$

si le damos a c el valor de 9

$a = 3$

$\frac{c}{a} = \frac{9}{3} = 3$ $\qquad$ $\frac{c}{a} > \frac{c+1}{a+1}$

$3 > 2'5$

$\frac{c+1}{a+1} = \frac{9+1}{3+1} = \frac{10}{4} = 2'5$

Resolución de Laura

IV.I. ECUACIONES E INECUACIONES

Las inecuaciones se escriben algebraicamente como las ecuaciones -salvo el signo <u>igual</u>. Se enseñan a calcular usando propiedades de las desigualdades, que son muy semejantes a las de las igualdades, salvo los productos y cocientes por expresiones o números negativos.

Pero, sin embargo, no tratamos con <u>el mismo objeto matemático</u> en uno y otro caso. ¿Qué tipo de pregunta podria hacer ver que ésto cambia el modo de razonar o de calcular?.

Si planteamos preguntas sobre el orden y hay alumnos que quieren razonar, es decir obtener el control semántico de lo que hacen, pueden tener dificultades que no tendrán los alumnos que calculan. Tendrán que ver qué ocurre en un intervalo, tendrán que estudiar casos y aparecerán cuestiones sobre números negativos. Estas cuestiones no aparecen con las igualdades pues la mecánica del cálculo las ha eliminado.

Así, las inecuaciones plantean a los alumnos dificultades nuevas que no se podrían presentar en el cálculo con ecuaciones.

El trabajo, que se incluye en el capitulo siguiente, intenta dar una respuesta didáctica a la introducción de las desigualdades y, por tanto, a la resolución de las inecuaciones.

-.-.-.-.-.-.-.-

CAPÍTULO 7º

I. ELEMENTOS DE TÉCNICA Y METODOLOGÍA DIDACTICAS (INGENIERÍA DIDACTICA.

Ingeniería didáctica es un término, acuñado en Francia al principio de los años 80, mediante el cual se intenta etiquetar un modo de trabajo didáctico comparable al de un ingeniero (*) que para realizar un proyecto preciso se apoya "en los conocimientos científicos de su especialidad pero que al mismo tiempo se ve obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos puros de la ciencia y a abordarlos con todos los medios que ésta le proporciona".(**)

El término ingeniería didáctica designa a la vez un método de investigación didáctica y las producciones realizadas para la enseñanza. Las características de estas producciones dependerán del buen hacer del "ingeniero".

Me he inclinado por llamar Técnica y Metodología Didáctica a lo que, actualmente, se conoce en la Didáctica francesa como Ingeniería Didáctica, si bien he mantenido,

---

(*) (Dicc. Sopena: facultativo que profesa la ciencia y el arte de construir y manejar ingenios ó máquinas. Enciclopedia Larousse: La misión del ingeniero es transformar los resultados de la investigación científica en procedimientos tecnológicos y relacionar la economía con la tecnología calculando los costos en relación con las exigencias del mercado)

(**) M. Artigue, 1989

las traducciones literales, entre paréntesis, a lo largo del capitulo, para enriquecer, en lo posible, la comprensión de estos términos.

Sucede con frecuencia que una lección, preparada y estudiada de manera un poco general parece que va a producir en el alumno la adquisición del conocimiento deseado, pero se revela completamente inútil en cuanto a las posibilidades efectivas. De hecho se pueden preparar lecciones con mucho esfuerzo teórico y aparentemente con grandes garantías de éxito y cuando se presentan en clase, a veces, se fracasa estrepitosamente pese al buen hacer de los profesores. O al contrario, clases cuyo contenido se prepara con cierta desconfianza, resultan eficaces e interesantes a la hora de su realización. Voy a intentar estudiar estas diferencias.

Trataré de hacer una breve exposición de algunos de los principios, de los que personalmente me sirvo, para que, una vez conocidos, se entienda mejor la raíz de mis inquietudes y el sentido del trabajo práctico que aquí voy a exponer.

I.1. EPISTEMOLOGíA Y DIDACTICA. FORMACIóN DEL CONOCIMIENTO.

La Epistemología trata de los fundamentos y métodos del conocimiento. La comunicación del conocimiento y su transformación durante la clase son objeto de la Didáctica que. estudia cuáles son las condiciones para que se comunique ese conocimiento y para que se creen, en los alumnos, nuevos conceptos.

Es en realidad una Epistemología experimental.

Para ayudar a la formación del conocimiento en nuestros alumnos, podríamos aceptar algún método establecido (constructivismo, empirismo,etc...) o buscar y experimentar tratando de formar el nuestro personal; o bien -como posición intermedia- aceptar inicialmente aquél que nos parezca más adecuado y someterlo a vigilancia constante realizando las observaciones - estudios didácticos en el más amplio sentido de la palabra- y experiencias didácticas necesarias para su comprobación y aceptación o, en caso contrario para su modificación o rechazo.

La primera pregunta que viene ahora a nuestra mente es:

¿Cómo se crea un conocimiento? Es decir ¿De qué forma progresa un individuo -en nuestro caso un alumno- de un estado de conocimiento a otro más elevado?

Vamos a aceptar en principio que la situación es la siguiente:

Un individuo se encuentra en un estado de conocimiento que podemos representar por S_1 y lo colocamos, o se coloca ante una situación nueva, ante un problema que le interesa resolver y, entonces, se produce una confrontación. Ante esta confrontación el individuo "reacciona" de una u otra forma y esta reacción produce una modificación de su estado de conocimiento, de modo que pasa a otro estado S_2.

Si la acción emprendida, como reacción ante esa situación, fracasa ante algún obstáculo, se produce una nueva confrontación del individuo con la situación, que le lleva a una nueva reacción, y así va pasando a posiciones de conocimiento diferente y mejor. Así va progresando.

De forma esquemática tenemos:

$$S_1 \underset{\text{confrontación}}{\text{---------------}} Obs \underset{\text{modificación}}{\text{---------------}} S_2 \text{-----}> \ldots$$

Este proceso, en el cual basaremos nuestra actuación, se explica bien con la teoria constructivista de Piaget. Con la teoría piagetiana de la <u>equilibración</u> (Peres, 1987,a). Lo que Piaget utiliza para explicar el desarrollo cognitivo del niño, fuera del aprendizaje de la escuela, creemos que puede ser utilizado para comprender los procesos que se producen en las situaciones de aprendizaje escolar.

Consideramos que este proceso puede ser favorecido y estimulado, por lo que las creaciones de este trabajo de Didáctica van precisamente a tratar de propiciar esa estimulación.

Cuando el alumno se encuentra en una <u>situación de acción</u> y, actuando sobre el problema, el conocimiento espontáneo fracasa, entonces se produce una retroacción del medio que actúa sobre ese conocimiento y lo modifica. Si la <u>situación</u> provoca interés en el alumno, éste volverá sobre el problema, actuando de una forma diferente. Esta modificación ha sido producida por la interacción entre el alumno y el problema. Si todavía no hay éxito, se producirá una nueva acción del medio sobre el alumno y continuará el proceso.

Queremos preparar situaciones (situaciones a-didácticas (*)) para propiciar esta confrontación del alumno con el medio didáctico.

En una situación a-didáctica se observa que, poco a poco, la estrategia empleada por el alumno va variando, sin que el profesor intervenga; y si la situación está bien preparada, se llega a la adquisición del conocimiento deseado, es decir al aprendizaje.

I.2. PREPARACIÓN DE LECCIONES. FASES.

La preparación de lecciones constituye un proceso delicado y fundamental en la organización del aprendizaje y, por tanto, también en nuestro trabajo.

La lección es un objeto de comunicación y como tal debe ser tenido en cuenta.

En el proceso de elaboración, ¿existe una separación constitutiva desde el punto de vista didáctico? Intentaremos hacer una división usando como criterio el cambio de responsabilidad en la comunicación y el "a quién" concierne esa responsabilidad.

(*) Término usado en el sentido de la teoría del profesor GUY BROUSSEAU. Thèse de Doctorat d'Etat. 1986

Vamos a considerar la preparación de clases dividida en dos fases, que constituirán dos etapas diferentes, atendiendo a la comunicación.

Fase 1. "Lo que es necesario comunicar" para que una lección esté inicialmente definida.

Fase 2. "Lo que **no** es necesario comunicar" porque el profesor lo va a realizar de acuerdo con las necesidades surgidas durante la realización de la clase. Es la parte contingente de la lección.

Podriamos llamar "diseñador" a la persona que debe actúar y comunicar en la Fase 1, y "realizador" a la persona que debe hacerlo en la Fase 2.

Esto es: en la fase 1 estaría "lo que **debe** comunicar el diseñador de la lección" -por ejemplo el autor de un texto de bachillerato. En la fase 2 estaría lo que se queda para la gestión personal del profesor mismo. "Lo que queda a su responsabilidad".

Estudiar esta comunicación es saber quién tiene la responsabilidad en cada momento. ¿Quién genera la lección? ¿Quién la describe? ¿Quién define? ¿Quién corrige?.

Cuando a un profesor se le pide realizar en clase una lección, es evidente que se le hace un traspaso de responsabilidad de forma semejante al que se puede hacer al alumno durante el desarrollo de la clase. En el nivel del alumno se han estudiado (Brousseau, 1987. Brousseau, 1989,d.

Brousseau, 1989,f.) las distintas posibilidades de tener una situación didáctica o a-didáctica, con las distintas formas de comunicación que se generan, mientras que en el caso del profesor está sin estudiar suficientemente.

En un tiempo, este tipo de comunicación no fué necesaria: Nos referimos a la que ahora se debe establecer entre el "diseñador" y el "realizador". El "diseñador" de la lección y el "realizador" eran la misma persona y no era necesaria la explicitación en términos precisos. En muchos casos el profesor realizaba una improvisación en cada momento según su inspiración. La enseñanza se impartía desde UN profesor a UN alumno (o pocos alumnos) y el profesor iba creando y adaptando la secuencia de enseñanza a las necesidades específicas del momento y del futuro de cada uno de sus alumnos.

Después, la enseñanza se ha convertido en un derecho social de todo individuo, los alumnos en clase, para cada profesor, son numerosos y la enseñanza impartida debe adaptarse a las nuevas necesidades de la sociedad. Ha nacido la especialización del profesor y lo que podríamos llamar **la técnica de la enseñanza** como una parte de la Didáctica.

Para esta técnica se van definiendo "términos", "condiciones", "variables". Se ponen en marcha verdaderos "teoremas" y, mediante ellos, empezamos a poder controlar el alcance de cada una de nuestras actuaciones en clase. Esta previsión, este conocer los teoremas y, actúar a través de ellos, debe ser compartido por el "diseñador" y el "realizador" mediante <u>términos</u> y <u>expresiones</u> bien definidas.

Aunque ambas personas sean la misma, perdura una diferenciación de momentos. Una parte de la lección podrá ser preparada, pero otra parte de la lección será siempre generada por el uso. Se partirá de una previsión de desarrollo de la lección, de acuerdo con unas consignas elaboradas para el funcionamiento de la <u>situación</u> elegida, y la realización de la clase irá marcando un proceso, cada vez renovado y distinto.

Estas consignas se prepararán de acuerdo con la experiencia adquirida en ocasiones anteriores, pero el <u>medio didáctico</u> no será siempre el mismo. Existe una parte contingente que el profesor va a resolver en cada momento. Creo que es importante definir y diferenciar estas partes de la lección, estudiarlas, describirlas, etc.

Respecto a la preparación de una lección, diré que: Preparar significa reflexionar, y normalmente no se escribe todo lo que uno ha pensado antes de..., en el transcurso de..., después de....Si ésto se hiciera se podría tener netamente una comunicación de la información. Para esta comunicación harían falta reglas de explicitación que fueran conocidas simultáneamente por el que escribe y por el que 'descodifica' la lección. Estas reglas no están establecidas y así una misma lección escrita puede producir, en distintas ocasiones, desarrollos de clase completamente distintos. Nos interesa mucho tratar de conocer estas diferencias.

En los libros de texto de educación secundaria, y todavía más en los de enseñanza superior, se incluyen solamente los temas que hay que enseñar, se ponen los problemas, los ejemplos, algunas explicaciones, a veces algún dibujo... y, después, en la clase pasan cosas muy diferentes. Un profesor que ha escrito un libro puede hacer leerlo a los alumnos y seguirlo fielmente, en extensión y en orden. Otro profesor, explica la lección estructurada de forma muy distinta, y sólo toma del libro los ejemplos o algún problema. El resultado es que la clase se imparte de muchas formas diferentes aunque la lección escrita sea la misma.

Aparte de estas diferencias producidas por los distintos tratamientos de un mismo texto, hay que recordar que la clase es una cosa viva y el desarrollo de la misma puede hacer funcionar los conocimientos y su adquisición por parte de los alumnos de formas muy diferentes, según cuáles sean las variables didácticas que se estén modificando. Sería importante que fuéramos conscientes de cuáles son las variables que se están activando en un momento dado de la clase, aun en el caso de que no pudiéramos hacer nada por modificarlas.

En general se aprecia que no se especifica el modo de ejecución de la lección. No se dice cuáles son las motivaciones que han conducido a tales o cuales decisiones. Cuáles son los códigos que van a ponerse en juego. Qué es lo esencial y qué es lo importante o menos importante,...No hay una buena articulación entre el que ha concebido la lección y el que la realiza en clase con los alumnos. No existen las reglas y los términos precisos que deberían ser conocidos y empleados, sin excepción, por estos dos elementos básicos del quehacer didáctico.

A este respecto debemos reconocer que alguna editorial elabora el llamado "Libro del profesor" donde se dan consejos didácticos y ejercicios complementarios para el desarrollo de las lecciones correspondientes con expresión del objetivo que se persigue con cada una de ellas pero lo que aquí proponemos es la elaboración de un código de comunicación en el que, además de expresar el conocimiento que se quiere transmitir se diga, por ejemplo, cuáles son los conocimientos anteriores del alumno que van a entrar en juego, a través de qué variables didácticas nos estamos moviendo y cuáles son las diversas posibilidades de desarrollo de la clase que se pueden esperar.

I.2.1. AUTOESTABILIDAD.

Remarquemos un concepto que nos interesa aclarar en este tema: la "autoestabilidad".

Diremos que son autoestables aquellas lecciones que son fácilmente asumidas por distintos profesores y producen realizaciones de clase semejantes entre sí; por el contrario, hay otras en las que no se puede asegurar, con anticipación, si van a tener éxito ó no, porque ésto depende en gran parte, de la puesta "en escena" que se realice. En el primer caso se trata de lecciones en las que la "fase 1" ha producido un resultado muy estable y, por tanto, poco sujeto a las contingencias de la segunda fase.

Sería útil conocer el grado de autoestabilidad de una lección. ¿Se puede conocer "a priori"?. La autoestabilidad ¿es predecible?. Nos interesa mucho buscar las respuestas a estas preguntas.

¿Son más autoestables las lecciones en las que el trabajo del profesor lo constituye la lección magistral y el trabajo del alumno se limita a la comprensión y aprendizaje de la misma?. Esto sucede, en general, con las presentaciones de tipo axiomático de cualquier teoría. Pero cuando la lección está constituída por la presentación de una situación a-didáctica y el trabajo del alumno consiste en *interaccionar con aquella situación ¿es más variado* el grado de autoestabilidad de la lección?. Es entonces cuando se vuelve importante conocer este grado de autoestabilidad.

Esta característica está relacionada con el envejecimiento de las situaciones de enseñanza que ha sido estudiado por Brousseau (1981, pp.37-128) (1986, p. 293) (1989,g, p.9), con la obsolescencia y el tiempo didáctico estudiados por Chevallard y Mercier (1987, p.2-3) y con la *reproductibilidad estudiada por Artigue (1986)*.

En este sentido tendríamos que analizar cuatro realidades que se dan en la realización de una lección y que son:

Respecto al profesor:

a. Lo que declara que va a realizar durante la clase.

b. Lo que realiza -en la pizarra o a través de sus respuestas a las preguntas que surgen de los alumnos.

Respecto a la situación didáctica:

c. Lo que permite en cuanto a movilización de los conocimientos.

Y respecto a los alumnos:

d. Lo que llegan a captar o aprehender de esos conocimientos puestos en juego.

Estas cuatro realidades pueden no coincidir y es necesario ser conscientes de ello.

Como consecuencia de esto se plantea, para la autoestabilidad, una diferenciación clarificadora. Tenemos que distinguir entre autoestabilidad interna y externa.

La autoestabilidad externa concierne a las posibilidades de reproductibilidad de las consignas del profesor, y a la presentación de las situaciones de trabajo para los alumnos; a las secuencias organizadas durante la clase y a los tiempos dedicados a cada una de ellas. En general a aquellos aspectos visibles y observables durante la clase. Se trata del punto a) del profesor y parte del punto b).

La autoestabilidad interna hace referencia a los apartados c) y d) y, como hemos dicho, a parte del apartado b) en la medida en que algunas de las declaraciones del profesor producen en los alumnos efectos de aprendizaje que no están totalmente controlados (*).

I.3. ADECUACIÓN INICIAL DE LAS LECCIONES.

Otro punto que está relacionado con la preparación de las lecciones es la adecuación de las mismas.

Existen exigencias de las clases debidas a la evolución de los saberes, ó a las demandas sociales para las que es importante tener posibilidad de respuesta didáctica.

Por ejemplo, en un momento dado, las nuevas tendencias de enseñanza de las Matemáticas nos dicen que hay que sacar partido de la vida corriente para presentar las lecciones.

Entonces un profesor toma una lección que estaba preparada e intenta transformarla para hacerla "surgir" de la vida corriente. En esta transformación se producen alteraciones que, al poner en marcha la lección, pueden hacer aparecer funcionamientos no previstos inicialmente y que hacen que los conocimientos se organicen de manera diferente. Como consecuencia, pueden dejar de lograrse muchos objetivos de la lección, de tal modo que el profesor se dé cuenta de que no queda casi nada de los objetivos esenciales previos.

(*) Ya hemos hablado de las indicaciones, provenientes del lenguaje empleado por el profesor, y que son utilizadas por el alumno como indicios didácticos en ausencia de auténticas indicaciones provenientes del problema o la situación planteada.

¿Qué ha sucedido? ¿Era posible haber hecho una adecuación de la lección original sin perder de vista los objetivos iniciales? Quizá los elementos conceptuales básicos puestos en juego, y su funcionamiento, no estaban claramente explicitados. Y de haberlo estado, ¿hubiera sido posible salvaguardarlos?

En cada caso tendremos una respuesta diferente y particular a estas preguntas, pero si inicialmente hubieran estado explicitados estos funcionamientos, habría estado el profesor en mejores condiciones para intentar conservarlos, o para reconocer la imposibilidad de mantenerlos; y, entonces se podía haber tomado una dirección completamente independiente de la inicial para crear una nueva lección.

En cualquier caso, la explicitación de los funcionamientos de los conocimientos que van a movilizarse, creemos que siempre será sustancialmente útil a la hora de estudiar la realización de una clase ó, en su caso, la adecuación de una lección. Ésto entendemos que pertenecería a la que hemos denominado "Fase 1: Lo que es necesario comunicar".

I.3.1. FASE PRIMERA

En esta primera fase vamos a distinguir dos tipos de trabajo didáctico diferentes, que separaremos en dos etapas: una, la etapa de un trabajo "previo" que consiste en reconocer y preparar el cuadro teórico didáctico sobre el que se va a apoyar la construcción y, otra, la etapa del trabajo de diseño propiamente dicho.

Dentro de ésto que llamamos "trabajo previo" se incluyen:

- El análisis epistemológico del conocimiento que se desea "enseñar".

- El estudio de los modos de enseñanza que han sido empleados hasta el momento y de sus resultados.

- El repaso a las investigaciones didácticas realizadas a propósito de este campo de conocimiento o, concretamente, de ese conocimiento particular en el que queremos profundizar.

- El estudio de las concepciones previas de los alumnos y de los profesores y de las dificultades anteriormente encontradas por ambos.

- El estudio de las dificultades históricas seguidas por ese conocimiento hasta llegar a su estado actual ó, al menos, la evolución histórica del conocimiento.

A continuación viene la <u>etapa de diseño</u> en la que se deben tomar decisiones basadas en el estudio "previo".

Durante esta etapa:

- Se busca una <u>situación fundamental.</u>
- Se determinan las <u>variables didácticas</u> sobre las que se va a actúar.
- Se realiza un análisis "a priori" de cómo y por qué se cree que la modificación de esas variables va a producir determinados modos de funcionamiento del conocimiento.

- Se tratan de describir los comportamientos esperados de los alumnos.

- Se analizan las respuestas que el profesor va a poder dar para que el alumno pueda seguir interactuando con la situación propuesta.

- Se hace el análisis de cuáles son las situaciones didácticas y a-didácticas que se prevé que se van a desarrollar, bien sean creadas o surgidas de otras situaciones.

- Después se tiene que reflexionar sobre estas situaciones. Las variables didácticas que aparecen en ellas y cómo se puede actúar sobre esas variables.

- Es también el estudio directo de las directrices iniciales. El estudio del lenguaje que se empleará en ellas.

- El análisis de los conocimientos anteriores (memoria de la clase), que se pueden usar en las acciones subsiguientes y del lenguaje que se va a utilizar para las mismas.

Hay algunos estudios que pueden pertenecer por igual a ambas fases. O que siendo establecidos en la primera fase pueden ser modificados en la segunda, según las exigencias del grupo de alumnos o de las condiciones particulares de la clase - entendiendo por clase el conjunto de alumnos, profesores y entorno. De este tipo son:

- El estudio del número de alumnos por "grupo de acción".

- El estudio de los tiempos empleados en cada secuencia.

- *El tipo de intervenciones del profesor.*

Estas variables se pueden establecer en la primera fase pero también pueden ser modificadas en la segunda a criterio del profesor que imparte la clase.

I.3.2. FASE SEGUNDA.

Esta fase la consideramos constituída por la realización de la lección en clase y por la observación didáctica de esta realización.

La realización incluye la puesta en funcionamiento *de las acciones de los alumnos a través de la emisión* de las directrices iniciales, el mantenimiento de estas acciones mediante el uso de respuestas en las que se devuelva la responsabilidad de la acción al alumno, la vigilancia del efecto producido por el uso de las variables didácticas y su alteración cuando se considere necesario o conveniente y, en general, la supervisión del desarrollo de la clase.

La observación didáctica de la realización de la lección constituye el punto de partida y el fundamento del análisis que hará una revisión de las lecciones.

La observación tiene una parte descriptiva en la que se anotan los tiempos de la secuencia didáctica, las intervenciones de los alumnos y sus preguntas, las actividades del profesor y, en general, todo cuánto sucede durante el tiempo de la clase.

Para elaborar esta observación se comparan los datos obtenidos a través de profesores que participan en ella y los obtenidos mediante grabaciones magnetofónicas y grabaciones filmadas, cuando sea posible.

Posteriormente, el estudio de todo el material recogido en esa descripción, junto con las observaciones personales del profesor realizador supondrán el complemento imprescindible de la experiencia, para el reajuste y adaptación necesarios en cada momento.

I.4. MODOS DE ACTUACIÓN (MODELIZACIÓN)

Si existen situaciones didácticas, ¿por qué buscar otras nuevas? ¿Cómo utilizar esta búsqueda para mejorar las situaciones de enseñanza? ¿Por qué buscar las variables didácticas y actuar sobre ellas? ¿Qué conseguiremos con ésto?

Estas son las preguntas fundamentales y las respuestas justifican el trabajo hecho para la construcción de lecciones.

Las previsiones nos van a servir para estudiar la forma en que el conocimiento aparece en los alumnos. Actuando sobre las variables didácticas veremos cómo estas variaciones influyen en la aparición del conocimiento.

Buscar un modo de facilitar el aprendizaje es buscar una <u>situación</u> (situación fundamental) en la que el conocimiento que queremos enseñar se ofrezca como la solución óptima a la situación problema planteada.

La concepción de un modo de actuación en una situación de enseñanza aprendizaje (situación fundamental) puede hacerse a partir de:

1. Un concepto dado. Un conocimiento.
2. Una actividad efectiva.

1. Cuando hablamos de un conocimiento tenemos que aclarar que nos referimos a los conocimientos que están incluidos en la lección y que algunas veces no son los que el profesor piensa, porque en *la* enseñanza activa le damos un titulo a una lección y luego, a veces, las cosas van por otro camino diferente del marcado. El análisis didáctico "a priori" y las conclusiones obtenidas de la observación didáctica, pueden mostrar diferencias entre el conocimiento que el profesor proyectaba enseñar -el conocimiento que el profesor **cree** que va a enseñar- y el conocimiento efectivamente enseñado, que no tiene que ser forzosamente el mismo.

Para buscar una situación fundamental se puede *empezar* el análisis partiendo del **conocimiento que estamos proyectando enseñar.** Se intenta concebir una <u>situación</u> que haga funcionar ese conocimiento en todas las formas que nos interesa.

¿Cuándo se dirá que esta construcción teórica es una **situación fundamental**? ¿Qué queremos decir con este término? *Una situación fundamental es aquella que posee unas* variables tales que, actuando sobre ellas, la situación se concreta en otras situaciones que hacen funcionar el conocimiento que se desea enseñar. Así se tiene que poder decir: "fijando tales o cuales variables en esta situación fundamental obtengo esta otra situación que hace funcionar este conocimiento particular".

Es decir, se busca poder crear todas las situaciones posibles correspondientes al conocimiento que proyecto enseñar e intento, a partir de la situación inicial, engendrar todas esas situaciones actuando sobre las variables que se encuentran en ella.

La situación fundamental es una especie de ideal. Puede que en algunos casos no se pueda encontrar; simplemente que no exista.

Puede darse el caso de que, aunque no se encuentre la situación fundamental, podamos hallar situaciones concretas que hagan funcionar el conocimiento deseado en algunas facetas interesantes. Estas situaciones darán lugar a lecciones que permitirán poner en juego algunas de las formas de ese conocimiento.

2. En el caso de una actividad efectiva la búsqueda se inicia a partir de la observación didáctica de la actividad. Y cuando he encontrado una situación que considero fundamental, puedo tomar la situación observada y compararla con esta situación que revela los objetivos de enseñanza, para ver si el modelo es adecuado o no, o para

ver lo más claramente posible los errores cometidos o el carácter inadecuado de ese modelo.

Hacer un trabajo de técnica y metodología didáctica (ingeniería didáctica) quiere decir estudiar y tratar de resolver los problemas técnicos, es decir específicamente didácticos, de la situación de aprendizaje que estamos tratando.

Este estudio y resolución de los problemas didácticos cabe la posibilidad de hacerlo en dos momentos: ANTES de realizar la lección con los alumnos y DESPUéS.

ANTES. Ya hemos visto lo que hemos denominado "fase primera" que incluye un estudio previo de: condiciones de presentación, de objetivos, de hipótesis de desarrollo; un <u>presupuesto de posibilidades</u> y un <u>presupuesto de secuenciación.</u>

Es decir, nosotros deberemos intentar conocer cuáles son los problemas que se pueden presentar y deberemos observarlos con anticipación si es posible.

DESPUéS. Haciendo una <u>observación didáctica</u> del desarrollo de la lección y comprobando si se han producido los efectos previstos. Es decir vigilando el uso de la misma.

Veamos éste ANTES y DESPUéS en los dos casos que hemos hablado antes.

1. En el caso de partir de un concepto dado se

hace primero la parte que hemos llamado ANTES, es decir se hace un trabajo de creación de una situación concreta.

Se trata de establecer su relación con el conocimiento que deseamos que sea asimilado. Se estudian las variables y cómo las vamos a utilizar, las indicaciones que vamos a dar y cuáles serán las posibles respuestas de los alumnos y los consiguientes comentarios que se harán, etc... Luego, al desarrollar la lección se realiza la parte que hemos llamado DESPUÉS, observando este desarrollo y comparándolo con las previsiones hechas. Así se revelan los posibles desajustes o aciertos de esas previsiones.

2. En el caso de operar sobre una actividad efectiva, se hace primero el DESPUÉS, pues empezamos por la "observación didáctica", tratando de localizar qué variables actúan y buscando un modo de actuar que se adapte a este funcionamiento, viendo si lo que pasa estaría explicado por ese modo de acción. Vamos observando para descubrir qué conocimiento está implicito en la lección; en qué momentos actúa el alumno tomando la responsabilidad de su trabajo. Es pues un trabajo de investigación que tiene un efecto de retroacción para mejorar "el ANTES".

II. <u>ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES.</u>

Vamos a explicar aquí algunos hechos observados sobre el aprendizaje y la enseñanza de las inecuaciones, tal y como se imparte esta materia en el momento actual en los

Institutos de Bachillerato.

Se puede ver que al final del primer curso los alumnos saben resolver, en general, las inecuaciones que se les plantean, al menos tan bien como cualquier otro tema de los correspondientes a ese año escolar.

Resulta pues que con la enseñanza actual los alumnos consiguen superar los errores de cálculo y alcanzar una eficacia razonable. Pero ¿adelantan algo en sus concepciones?, o logran solamente una adaptación "mecánica". Y, por otro lado, ¿permanece en el tiempo la técnica adquirida?, o se olvida demasiado pronto y no se adquiere un conocimiento permanente.

Cuando a lo largo de los cursos 2º o 3º se necesita emplear los conocimientos sobre inecuaciones observamos situaciones como las siguientes:

1: Sea el caso de tener que calcular el dominio de una función como, por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt[4]{(x-3)(x+2)}$$

En este momento se puede apreciar que los alumnos no llegan, por sí mismos, a plantear la inecuación correspondiente, es decir a escribir la condición:

$$(x-3)(x+2) \geq 0$$

Sin embargo saben que, para que existan

soluciones en R (conjunto de los números reales), el radicando debe ser positivo. pero no relacionan ésto con las inecuaciones estudiadas el año anterior.

Se hace necesario realizar en clase alguno de los ejercicios propuestos y que el profesor "explique" que el cálculo del dominio pasa por la resolución de la inecuación correspondiente, en este caso:

$$(x-3)(x+2) \geq 0$$

para que algunos alumnos recuerden que "èso" lo sabian resolver el año pasado y traten de traer a su memoria "cómo se hacía".

El **planteamiento** de la inecuación no es espontáneo como nos parecería previsible. No se encuentra ni en los alumnos más capaces.

2: Pasada esta primera dificultad del planteamiento, algunos alumnos intentan resolver la inecuación pero solamente tres o cuatro alumnos, de una clase de 40, suelen ser capaces de resolverla por sí mismos. La mayoría no pueden repetir lo que "sabían hacer" un año antes. Intentan "recordar" y así lo manifiestan: "Es que no me acuerdo como se hacía", "Me suena algo, pero no lo recuerdo", etc,...

La mecanización que habían conseguido no ha dejado la huella necesaria para permitir su traída a escena un año más tarde, y el alumno no ha aprendido a movilizar recursos que le permitan "entrar" en el problema.

3: Este aprendizaje que habían hecho de unas técnicas de cálculo parece que pertenece más a la **memoria retentiva**, es decir a la que permanece durante un cierto periodo de tiempo solamente. Así se observa que aún cuando el profesor ya ha planteado la inecuación necesaria para resolver el problema:

$$(x+3)(x-2) \geq 0,$$

la mayoría de los alumnos no "recuerdan" cuál era el método, y se han comprobado porcentajes de hasta el 85% de este "olvido". Saben que estudiaron éso pero son incapaces de recrear el cálculo. Simplemente buscan en su memoria el recuerdo de la estrategia empleada, pero en su memoria ya ha desaparecido.

Como la única estrategia que han aprendido es la de memorizar, cuando esta memoria les ha fallado han quedado completamente extraviados.

Al no haber aprendido a desarrollar sus propias estrategias dependen absolutamente de su memoria. Si quieren resolver el problema tendrán que recordar lo que "les enseñaron" un día.

El profesor deberá realizar algún ejercicio completo, en la pizarra, para que los alumnos "recuerden" la técnica.

II.1. APRENDIZAJE POR INDICIOS

En este aprendizaje que estamos comentando nos encontramos ante una situación que podría ser consecuencia de un modo de aprendizaje ya estudiado por Tonnelle, 1980, en el que los alumnos enfocan la resolución de los problemas tratando de reconocer algunos **indicios** que les permitan averiguar lo que el profesor quiere que hagan. Es una situación en la que los alumnos no se enfrentan directamente al problema, sino a través de la pantalla del profesor. No importa tanto el problema como lo que el profesor quiere que hagamos con este problema.

Los alumnos están pendientes de las indicaciones explícitas o implícitas del profesor para saber lo que éste espera de ellos.

Así, la enseñanza queda vacía de contenido intrínseco. Y cuando el profesor falta, falta la guía necesaria, el enlace entre el conocimiento y el alumno, falta el punto de referencia. El alumno no encuentra los indicios a los que está acostumbrado y no sabe cómo iniciar la resolución del problema. No sabe cómo emprender la acción. De hecho queda paralizado.

Mientras al alumno se le han planteado los **problemas tipo** no ha encontrado grandes dificultades, ha obtenido bastante buenos resultados y ha quedado con la ilusión de haber aprendido. Pero veamos lo que puede suceder cuando no aparecen los indicios que el alumno ha aprendido a reconocer. Por ejemplo si se modifica el texto y en lugar de plantear una inecuación como:

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

se le plantea la inecuación de esta otra forma:

$$(x-4)(x+3) \leq 0$$

Si el indicio que tenía el alumno para poner en marcha la resolución, era: "una inecuación planteada con polinomio de segundo grado", no aplicará la estrategia correspondiente de reconocer las "raices" 4 y -3. En este caso reconocerá otro indicio, que probablemente tiene adquirido, que es el de "en un producto de binomios se realiza el producto" y pasará a efectuar la multiplicación llegando a la expresión:

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

para después buscar las "raices" del polinomio y seguir con la estrategia "aprendida".

Esto es lo que sucederá en el mejor de los casos, pues también es posible que no relacione el producto de binomios como correspondiente a esta parte del aprendizaje y entonces quede desconcertado ante la "nueva" situación y, sencillamente, no haga nada.

Ante estas situaciones intentamos reaccionar con otro tipo de enseñanza-aprendizaje. Por eso creemos que puede ser interesante introducir las inecuaciones de una forma diferente.

II.2. CONSTRUCCIÓN DE LECCIONES SOBRE INECUACIONES

Se van a construir unas lecciones de acuerdo con la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1987) buscando una situación fundamental a partir de la cual podamos producir situaciones a-didácticas en las que, colocado el alumno, pueda entrar en contacto con el conocimiento que deseamos que adquiera, interactuar con él, e ir generando estrategias de trabajo que le permitan adquirir este conocimiento.

Uno de los propósitos fundamentales es precisamente la generación de esas estrategias propias, de esos recursos que permitan al alumno enfrentarse a problemas o situaciones nuevas e interactuar con ellas sin necesidad de un entrenamiento específico para cada uno de los tipos que se puedan presentar.

Se usa la hipótesis de que el conocimiento adquirido de este modo es más estable por haber sido generado por el propio alumno en lugar de ser asimilado a través del profesor.

También se desea obtener datos sobre el funcionamiento de la adquisición del conocimiento por parte de los alumnos y, para ésto, nos parece interesante estudiar una manera diferente de provocar esta adquisición generando una actividad de los alumnos. Observando esta actividad esperamos estudiar ese funcionamiento.

Se preparará un modo de acción para estudiar las posibles actividades de los alumnos en las situaciones planteadas, las posibles preguntas al profesor y respuestas de éste a los alumnos (devoluciones), y en fin, lo que nosotros pensamos que puede ser el desarrollo de la lección.

II.2.1. MARCOS DE TRABAJO

Al trabajar con desigualdades nos podemos mover en los siguientes marcos:

= marco aritmético (comparación de números...)

= marco algebraico (escritura de expresiones, manipulación de las mismas, expresiones equivalentes, búsqueda de soluciones...)

= marco lógico (conectando las expresiones mediante símbolos de unión o intersección, negando desigualdades...se realizan secuencias de razonamiento)

= marco geométrico (representación de funciones, zonas del plano, incidencia, programación lineal...)

= marco gráfico (esquemas de interpretación de soluciones de sistemas de inecuaciones...)

= marco analitico (entornos, aproximaciones, acotaciones...)

En el caso de los alumnos de 14 años es interesante investigar cuáles de esos marcos son más adecuados para la iniciación.

Al plantear ejercicios que hagan pasar de un marco a otro, se estimula la actividad del alumno. Esto aumentará también su capacidad para abordar dificultades que no sean simples ejercicios de aplicación, sino auténticas investigaciones en el mejor y más amplio sentido de la palabra. Estas afirmaciones están basadas en los estudios de Regine Douady (1984).

Concretamente, respecto al marco algebraico y al marco geométrico recordemos las palabras de Dieudonné:

> "La sustitución del lenguaje algebraico por el lenguaje geométrico casi siempre aporta considerables simplificaciones y hace aparecer propiedades insospechadas, escondidas bajo una montaña de cálculos.
>
> Así, los modelos matemáticos de la programación lineal y la optimización se comprenden y se manejan mejor cuando se interpretan las desigualdades que contienen en términos de propiedades de conjuntos convexos en un espacio de un número de dimensiones elevado"
>
> (Dieudonné, p.228).

Estas palabras, que compartimos, nos hacen reafirmar en el criterio de que el estudio de las desigualdades y las inecuaciones debe estar regido por un intercambio de los marcos de trabajo posibles, en especial el algebraico y el geométrico.

Veamos estos marcos de trabajo con respecto a las desigualdades.

En el **marco aritmético** las desigualdades tienen poco interés. Entre números las desigualdades aportan poca información. La expresión

$$34 > 18$$

no añade ningún dato importante al conocimiento de 34 y 18 pues ya sabemos cuál es el mayor de los dos números desde el momento en que los escribimos.

Solamente comienza a interesar cuando trabajamos con números enteros pues entonces expresiones como

$$-58 < -7$$

nos aportan una información interesante porque, la comparación, no es tan evidente, en función de la información "ostensiva" que se recibe de los valores absolutos de estos números:

$$|-58| > |-7|$$

El valor absoluto de -58 es mayor que el de -7 y esta información visual: (58 > 7) es recibida por el lector, contradiciendo la verdadera relación entre los valores reales de éstos.

También puede tener un interés para comparar valores de números racionales como en el caso de dos fracciones de numeradores y denominadores diferentes (p. ej: 7/8 y 21/25), pero en realidad cuando la desigualdad se vuelve interesante es en el

Marco algebraico. Al escribir la relación:

$$x < 19$$

se está dando una información importantisima respecto al valor de "x". Al ser "x" desconocida, la información:

"x es menor que 19"

supone realmente un dato interesante.

Por éso el **marco algebraico** va a ser uno de los que se hará entrar en juego en nuestro procedimiento pues creemos que, para el alumno, es interesante aprender a manejar este tipo de informaciones.

Se quiere conseguir que el alumno llegue a comprender cuál es la expresión más sencilla que está detrás de una información como

$$x^2 - x - 6 > 0$$

o qué es lo que representa

$$y < x^2 - x - 6$$

El **marco geométrico** es, pues, otro de los campos que se quiere que intervengan en el modelo de forma prioritaria pues en este campo el alumno va a tener que trabajar con la representación de funciones, con la programación lineal, con la representación de zonas del plano, etc...

La combinación en el uso de estos marcos se utiliza para que produzca en el alumno un estímulo de la capacidad creadora de estrategias y un aumento de la comprensión del tema.

Para usar el juego entre estos dos marcos como una <u>variable didáctica</u> elegida nos hemos basado en los estudios de R. Douady (1984) y de M. Artigue (Curso de doctorado, 1990 sobre didáctica de las ec. diferenciales).

El **marco lógico** es otro de los que esperamos que sea manejado por el alumno, pues creemos que la conexión de desigualdades surgirá como estrategia en el desarrollo de uno de los juegos.

II.3. LECCION PRIMERA SOBRE DESIGUALDADES

Se expondrá ahora una lección en la que se trata de introducir las desigualdades del tipo

$$y > k \quad ; \quad x < p \quad ; \quad a < y < c \quad \text{y} \quad y < x + b$$

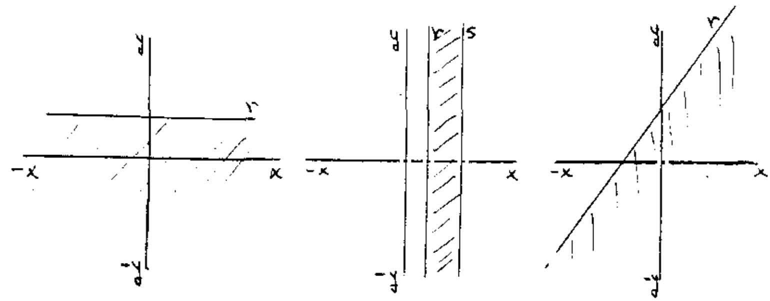
como expresión, respectivamente, de un semiplano marcado por una linea horizontal, vertical, de una zona del plano comprendida entre dos rectas horizontales "y=a" e "y=c" con "a<c" para llegar a la última desigualdad que es la expresión de un semiplano definido por una recta de inclinación 45°, es decir, definido por la recta: "y = x+b" que tiene el coeficiente de la "x" igual a "1".

La presentación se va a hacer en <u>forma de juegos didácticos.</u> Se juegan entre dos contrincantes. Pueden ser equipos o parejas de alumnos.

Material necesario: Hojas de papel cuadriculado, regla y lápiz.

Comienza la clase. El profesor podrá, si lo considera conveniente, explicar el objetivo de la lección:

Profesor: "Queremos llegar a expresar, mediante una condición algebraica, las distintas zonas del plano con ayuda de los ejes coordenados". Y realiza los dibujos siguientes:



9h 30m. El profesor M comenzará dando a los alumnos las siguientes instrucciones.

M: "Para realizar las siguientes actividades, nos organizaremos por equipos. Llamaremos A a un equipo (o a una parte de la pareja) y B al equipo (o parte de pareja) que va a competir con él".

"Cada equipo debe preparar dos hojas dibujando los ejes coordenados una para su control y otra para poder enseñar al otro equipo".

"Ya sabeis representar algebraicamente puntos del plano mediante pares de números. Vamos a recordarlo":

PRIMERA INDICACIóN: "El primer juego consistirá en que cada equipo A dibujará un punto en el plano coordenado propio con la escritura coordenada correspondiente y el mismo punto en el plano que va a mostrar, PERO AQUI SIN LA

ESCRITURA COORDENADA. Simplemente lo marcará con un 1 para saber que es el primero que ha puesto y lo mostrará al equipo B correspondiente. Este deberá escribir de qué punto se trata; a continuación a la inversa.(ésto se puede hacer, por ejemplo, seis veces para cada equipo)".

"El equipo que ha elegido el punto confirmará el éxito o fracaso de la respuesta".

"Anotareis los aciertos con un "*" y los errores con un "Ø" en una hoja de resultados (Cada equipo irá rellenando la suya) semejante a ésta":

Juego	1	2	3	4	5	6	7 ...
Equipo A	*		*		Ø		...
Equipo B		Ø		*		...	

9h 40m. M: "Conservad los resultados. Vamos ahora al **segundo juego.**

SEGUNDA INDICACIÓN: "Vamos a jugar a los barcos. Cada equipo debe dibujar sobre su hoja una recta horizontal dónde prefiera. Esa recta es su divisoria protectora. Así ha dividido el plano en dos zonas que llamamos semiplanos y ahora elige una de esas zonas para situar sus barcos. Son cuatro barcos cada equipo situados en puntos determinados cualesquiera".

"Efectuareis una tirada cada equipo alternadamente y, si se acierta la zona, el equipo contrario dirá que **ha entrado**, si no se ha acertado dentro de la zona dirá **fuera** y si acierta justo en la divisoria dirá "divisoria". El juego consiste en localizar exactamente CUÁL ES LA ZONA que ha dibujado el otro equipo, expresándola de la forma más clara posible".

"El equipo que localice antes la zona del contrinccante ha ganado".

"El equipo que haya quedado en segundo lugar puede pedir la "revancha" para intentar empatar. Seguiremos el juego mientras haya tiempo y el equipo que acabe de quedar segundo lo pida".

"Anotaremos una estrella como resultado de cada juego, cuando éste haya finalizado, en el panel de control, llamándolos 13º juego, 14º juego,etc...(o los números que correspondan)"

10h 10m. **TERCERA INDICACIÓN:** "Ahora vais a dibujar un muro protector, es decir, una divisoria vertical. Se trata de situar vuestros tres edificios: la casa, el almacén y la caseta del pozo, en los puntos que deseeis en una de las dos zonas creadas por "el muro". De nuevo, se trata de LOCALIZAR su zona de protección para haber vencido al contrincante".

"Se efectúan tiradas alternativamente. Contestareis:"ha entrado, fuera o tocado" según que la tirada entre en la zona de protección, no entre o toque el muro".

"Cuando un equipo quede primero debe conceder la revancha al otro, si aquél se la pide. Proseguiremos como antes mientras haya tiempo y alguien que haya quedado segundo lo pida".

10h 20m. **CUARTA INDICACIÓN":** "Ahora deseais levantar un muro por delante y otro por detrás, que delimiten vuestra zona. Pueden ser los dos horizontales o los dos verticales. Dibujadlos y comenzaremos de nuevo a jugar".

"Quedará primero también el que logre averiguar la zona de protección elegida por el otro"

10h 40m. **"QUINTA INDICACIÓN":** "Ahora sabeis que vuestras divisorias horizontales o verticales crean una zona bastante sencilla de localizar por el otro. Vais a escoger una oblicua cualquiera con la única condición de que sea diagonal de todos los cuadraditos que atraviese. Elegid la recta y la zona a vuestro gusto igual que antes. Jugamos de nuevo"

Ésta es, por ahora, la última indicación.

-.-.-.-.-.-.-.-

II.4. REALIZACIÓN Y OBSERVACIÓN DE LA LECCIÓN.

Veamos ahora la realización de la lección y las observaciones que se han podido hacer.

Se ha elegido una pareja de niñas, una de 13 años que acaba de terminar 8º de E.G.B. y otra de 14 años que acaba de terminar 1º de B.U.P. Es decir: una alumna que no ha recibido enseñanza sobre las inecuaciones y otra que acaba de recibirla durante este último año escolar.

La lección fué grabada en cinta magnetofónica y posteriormente estudiada para analizar los comentarios y las situaciones. A13 es la alumna más joven y B14 la de 14 años.

(Lo primero que hay que decir es que las pocas diferencias de intuición que hubo, fueron a favor de la más joven, es decir, a favor de la que no había recibido enseñanza sobre este toma. Hacia la mitad del juego se notó una reacción positiva de la mayor, como si su madurez le ayudará un poco a establecer relaciones y obtener conclusiones.)

9h 30m. Comienza la lección.

1ª INDICACIÓN. (Se les da la 1ª indicación)

(Lo primero que preguntan es cuál es la unidad y se les responde que un cuadradito del papel):

A13: ¿No hay números? ¿A qué corresponde, pues, un cuadradito?

M: A una unidad.

A13: ¿Se pueden poner negativos y todo?. ¿No muy altos, verdad?

(OBSERVACIÓN 1: La alumna A13 dibuja primero el punto y luego cuenta los cuadraditos para saber cuál ha elegido, y la alumna B14 escribe primero las coordenadas y dibuja el punto correspondiente después.)

B14: Que aburrido, lo acertamos todo.

A13: (Le pone el (0,-8) en el quinto caso).

B14: (Lo piensa más que antes) ¿Es el (0,-8)?

A13: Si

B14: ¡Uf! Con eso me armo mucho lio. (Se pone a pensar un punto y tarda también un poco. Ha elegido el (-8,0) y le dice:) ¡Vas a ver ahora!

A13: ¡No te pases!

(OBSERVACIÓN 2: Después de poner el (0,-8) A13 ha visto que B14 se queja de su complicación y que le ha puesto a continuación el (-8,0) y, aunque A13 lo acierta, parece darle miedo volver a elegir "algo demasiado difícil" y, así, el siguiente que elige es el (1,1). B14 sin embargo sigue poniendo puntos de los ejes coordenados como el (0,4).)

9h 50m

2ª INDICACIÓN. (Se les da.)

(OBSERVACIÓN 3: La primera indicación ha durado más de lo previsto, y se comienza la segunda indicación con 10 minutos de retraso. Se suponia a las 9h 40m y se da a las 9h 50m.)

(OBSERVACIÓN 4: Creemos que para un juego futuro será mejor NO NOMBRAR EL JUEGO DE BARCOS porque les trae a la memoria el juego habitual en el que los barcos se sitúan dentro de un plano cuadrado que representa al primer cuadrante y les cuesta mucho desprenderse de esa imagen para colocar los ejes de forma arbitraria y elegir luego una divisoria horizontal cualquiera. Esto quizá tenga una explicación en que las experiencias primeras pueden crear obstáculos al desarrollo y progreso del espíritu científico como escribe Bachelard (pp. 23 y sig.)

M: Dibujad una recta horizontal (B14 la había dibujado oblicua y el profesor ha preferido intervenir, pues una oblicua crearía confusión en A13)

B14: ¡Ay!(Con disgusto)¡Ay! (La rompe y dibuja en otro papel).

A13: ¿Puede ser dónde no haya ejes?

(Se refiere a una zona extrema de la hoja hasta dónde no ha dibujado la prolongación de los ejes OX y OY)

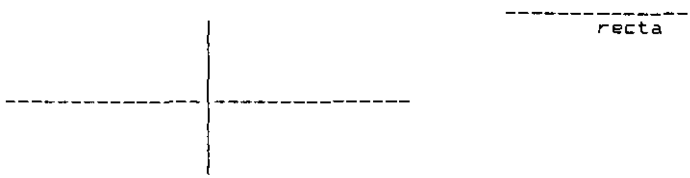
M: (Responde a la cuestión con otra pregunta que favorece la reflexión) ¿No habrá ejes ahí?

A13: ¡Ah! Sí. ¿Puedo poner encima y debajo de la recta?

M: No. Debeis elegir a UNO U OTRO LADO DE LA RECTA. No a los dos. teneis DOS ZONAS y hay que elegir una.

(OBSERVACIÓN 5: Sólo se sienten capacitados para dar coordenadas si han dibujado "las rayitas" es decir, las divisiones por unidades. Debe ser un hábito adquirido.

Se ve también cómo al dibujar los ejes coordenados tienden a considerarlos como segmentos limitados. Es decir, con una longitud exactamente igual al segmento dibujado, de modo que en un dibujo como el que ponemos a continuación:



La recta puede parecerles que ha quedado "fuera" de los ejes.)

A13: La recta cuánto más pequeña la hagas mejor, para que no te acierte.

M: ¿Las rectas tienen tamaño?

B14: No, pero en este juego sí.

M: Pero ¿dividirás en dos zonas con una "recta pequeña"?

B14: No, no, que no tienen tamaño, que son infinitas.

A13: ¡Ah, claro!

(OBSERVACIÓN 6: Hay que advertir que el juego "ha cambiado de sentido". Esto es, ahora es más importante guardar la información de los propios disparos que la de los disparos del contrario. La información que quiero obtener la voy a conseguir con MIS disparos. No he elegido la recta que está dibujada en el papel del contrario. MI RECTA no me

interesa, MI RECTA interesa sólo al otro.)

A13: Pero si es una linea sin limites da igual el horizontal ¿no?

M: Parece.

El cuarto disparo de A13 da en la divisoria (10,14).

B14: De lleno en la divisoria.

A13: ¡Ah. Ya lo sé!

M: ¿Puedes identificar su zona?

A13: Sí, desde infinito ...así (señala la horizontal), hasta 14. (Duda) ¡Ah, no! porque está abajo, entonces es -14.

M: ¿Tú puedes decir un punto que esté seguro en su zona?

A13: Si, el (6,7)

(Es correcto pues está debajo de la linea y=14 que es la elegida por B14)

M: ¿Puedes decir otro? ¿Cómo los eliges? ¿Con qué condición o condiciones los eliges?

A13: Que el segundo sea menor que 14 y luego el horizontal da igual.

M: ¿Si el segundo es menor que 14 aciertas? ¿Y tú Angela estás de acuerdo? Teneis que estar de acuerdo en la condición ahora.

B14: No estoy segura.

M: Debes demostrarle que conoces su zona. Dispárale uno fuera ahora.

A13: (-5, 15)

B14: Estoy de acuerdo en que la conoce.

M: ¿Quieres la revancha?

B14: No. Otro juego. Otra cosa. (Está un poco contrariada)

A13: (Escribe) Que el número vertical sea menor que 14.

(Pero no escribe: y < 14)

(OBSERVACIÓN 7: Inmediatamente después del comentario de A13, diciendo que "el horizontal da igual", se puede ver que la sucesión de puntos que eligen ambas alumnas tiene una abscisa "x" constante pues han comprendido que la "x" no influye, aunque no la llamen todavía "x" o "abscisa".)

A13:	...	(10,13)	(10,15)	(10,14)	--> fin
B14:	...	(6,7)	(6,11)		

10h 10m

3ª INDICACIÓN. Se les da. (Recordemos brevemente: Es lo mismo que antes pero con un muro vertical).

(OBSERVACIÓN 8: La 2ª Indicación ha durado menos tiempo del previsto. Se calculaban 30m y ha durado sólo 20m)

B14: ¿Es lo mismo que antes? Entonces es como una revancha.

Comienza ahora B14 y la sucesión de tiradas es la siguiente, dónde D y F son "Dentro" y "Fuera":

B14:	(18,14)D	(0,10)F	(0,15)F	(0,17)F
A13:		(20,5)F	(15,5)F	(0,5)F

B14: Lo estoy haciendo mal. Es la "x" la que se mueve.

(OBSERVACIÓN 9: No queda claro si se da cuenta al observar los fallos propios o al observar la estrategia de A13. Siguen las tiradas, ahora más rápidas.)

B14:	(10,0)D	(24,0)D	(30,0)D
A13:	(-20,5)F	(-45,5)F	

B14: ¡Claro! Si es que soy imbécil.

A13: Estoy alucinada de lo que haces.

B14: ¡Ay que tonta soy! Es que además te llevo ventaja y al final perderé.

(Y siguen jugando:)

B14:		(5,0)D	(3,0)D	(2.0) Divisoria
A13:	(45,5)D	(30,5)D	(25,5)D	

M: Vamos a ver, Angela (es B14) *¿Cómo representarias la zona que has descubierto?*

B14: ... (pensando) Cómo la represento.

M: ¿Tú sabes cuál es?

B14: (Sin dudar) Sí. A partir del (2,0) hacia adelante.

M: ¿Qué quiere decir hacia adelante?

B14: Hacia la derecha. Todas las "y-es" y "x=2". A partir de x=2, todas las x a la derecha.

A13: La condición es que el número horizontal sea mayor o igual que 2.

(Ahora comienza la integración del conocimiento adquirido, entre el conjunto de los saberes adquiridos anteriormente), (institucionalización).

M:¿Podeis usar algún símbolo para representar al número horizontal?

A13: "x". "x" mayor que 2.

B14: "x" mayor o igual que 2: $x \geq 2$

M : Esa es la condición que ha elegido Mª Mar (es A13) y que tú Angela has acertado. Y ahora, Mª Mar que ya sabes que ella había elegido "la 23". ¿Cómo simbolizarías la condición?

A13: "x" mayor o igual que 23: $x \geq 23$

M: Ahora ya sabeis representar una zona del plano. ¿Cómo representaríais la zona contraria?

A13: Pues... x menor que 2.

B14: x < 2

(A13 tampoco quiere revancha así que prosigue el juego con la siguiente indicación)

10h 15m.

4ª INDICACIÓN. Se les da. (Recordemos brevemente que es lo mismo pero con dos rectas que determinan entre ellas una zona vertical)

(OBSERVACIÓN 10: El desarrollo de la 3ª Indicación también ha sido más breve de lo previsto. Se calculaban 10 m y ha durado solamente 5m)

B14: Será largo ahora.

M: Podeis rayar un poco la zona elegida, si quereis. Empezad cuando esteis listas.

B14:		(20,0)F	(-20,0) Divisoria	(-22,0)D
A14:	(25,5)F	(3,5)F		(-25,5)F

B14:		(-30,0)D	(-45,0)F	(-40,0)F
A14:	(-45,5)F	(45,5)F	(-100,5)F	

B14:		(-35,5) Divisoria
A14:	(-10,5)F	

M: ¿Qué estrategia seguíais? ¿Qué estrategia *seguías Angela? (es B14)*

B14: Yo iba todo el rato con la "y=0", porque era la que menos importaba. La que importaba era la x. Y probaba con x positivos y x negativos alternando.

M: ¿Cómo se simbolizaría?

B14: "x" entre -20 y -35: x < -20 y x > -35

A13: No quiero revancha.

(OBSERVACIÓN 11: Ahora ya saben cómo va. No les importa ganar o perder porque son amigas. Ha tenido interés el juego hasta que han descubierto "el truco". La situación <u>a-didáctica</u> ha funcionado consiguiendo su atención mientras competían por entender el fondo del juego)

10h 25m

5ª INDICACIÓN. Se les da. (Recordemos que esta es una recta oblicua de inclinación igual a 45º)

(OBSERVACIÓN 12: El tiempo empleado para la 4ª *Indicación ha sido sólo de 10m frente a los 20m que se* habían calculado. Se ve realmente que han comprendido el juego y que les interesa.)

(Cambian de recta varias veces. Les cuesta un poco dibujar una recta que sea diagonal porque la cuadricula es de pequeño tamaño. No saben cuál será más difícil de localizar. No se les ha pedido que centren los ejes en el papel y no se les ocurre hacerlo.)

A13: ¡Pero ahora cortará a los dos (ejes)! Puede haber por aquí y por aquí. ¡Habrá más puntos!

M: ¿Es que es más grande que antes la zona?

A13: No ¡ja, ja! Pero ahora van a importar las x y las y. Las dos.

B14: (Para sí misma) No encuentro la diagonal. ¡Ya! Veo que pasa una cosa cuando es diagonal.

(Pero no dice nada más)

(OBSERVACIÓN 13: La próxima vez que se realice la lección se les indicará que centren los ejes en un origen dado, para evitar que los puntos se salgan fuera de la hoja de papel, pues hace perder mucho tiempo en mediciones)

B14:	(20,0)D		(10,0)D	
A13:		(20,10)F		(30,10)

(Con este (30,10) tiene que medir fuera de la hoja, de forma aproximada)

A13: Pero es que ahora es horrible, con los negativos.

(Comienzan a realizar sus tiradas con los resultados siguientes:)

B14:	(0,0)D		(40,0)F		(30,0)D	
A13:		(-20,-10)F		(40,0)D		(50,0)D

B14:	(35,0)D	(37,0)F	(36,0) Divisoria
A13:	(-70,0)F	(63,0)D	

B14:¿El otro punto en que toca a los ejes es el (0,-36), a que si?

A13: Sí.

B14: Gané. Ya sé cuál es.

M: Sabremos si has ganado cuando todos los puntos que le digas estén dentro de la zona. Dile alguno.

B14: (37,-2)

A13: ¡Fuera!

(B14 se ha equivocado. ¿Es que no puede acertar los puntos con la información que ha conseguido?)

B14: A ver. A ver. Es que me he equivocado. Es al revés: (34,-2).

A13: En la divisoria.

B14: Encima es (34,-1)

A13: Y el (-5,30) ¿está o no?

B14: (Duda un poco. Al fin dice:) Sí

A13: ¿Y el 25, -36)

B14: No, fuera.

M: Asegúrate porque parece que duda. Busca algún punto cerca de la recta que será más difícil.

A13: ¿Y el (36,2)?

B14: Está dentro.

M: Está visto que lo sabe. ¿Qué operaciones haces Angela (B14)?

B14: No hago operaciones. He puesto: Si el 36 es 0 el 35 es -1, 34 es -2, 33 es -3 y así sucesivamente. Estos son todos los puntos de la recta. Cuando me dice uno lo miro. ¡Más vale maña que fuerza!.

(OBSERVACIÓN 14: Al expresar el refrán: "Más vale maña que fuerza" nos revela que cree haber conseguido la solución por un método "no regular", "no matemático". Quizá este convencimiento le viene porque, como ella misma dice: no ha hecho operaciones. La regla que ha encontrado le parece como un truco, es decir, algo no permitido matemáticamente hablando. Esta sensación, en el alumno, de que lo que ha descubierto no es muy importante en el sentido matemático es muy frecuente y desaparecerá cuando se llegue a la integración del conocimiento entre los ya adquiridos anteriormente).

M: ¿Puedes establecer una condición que simbolice la zona del plano que ha elegido Mª Mar? Ahora ya sabes cuál es la recta. Los dos equipos sabeis cuál es la recta.

Los dos: Sí.

M: Ganará ahora quién logre simbolizar la condición.

B14: $x \leq 36$ con $y \geq -36$

M: A ver. Probad.

A13: ¡Sí que está bien!. ¡Que sí, que sí!

M: Pero, ¿Hay algún punto con "$x \geq 36$" en la zona?.

A13: ¡Si! ¡Mira! ¡Todos éstos! y ¡menores que -36 todos estos otros!

M: ¿Cómo has hecho tu tabla Angela?

B14: Si a "x" le resto 1 a "y" le resto 1...

M: *¿Puedes calcular la "y" de la recta si te doy* la "x" un poco difícil?

B14: Creo que sí.

M: $x = 140$

B14: Pues a 140 le resto 36 y ya tengo el punto que es: (140, 104) pues como le he ido sumando 1.

M: ¿Entonces la y que acabas de calcular a quién es igual?

B14: La y es igual a x menos 36.

M: Con ésto teneis la recta y ¿la zona?

A13: Todo lo que sea menor que la operación.

M: ¿Que quiere decir éso de "menor que la operación"?

A13: Todo lo que sea menor que: y=x-36.

(OBSERVACIÓN 15: Se ve que la alumna A13 ha entendido lo que debe hacer pero todavía no puede expresar la desigualdad. Se ve que le falta muy poco pero no da el paso ella sola.)

M: ¿Podemos expresar esa frase con una relación matemática?

B14: Yo tengo una idea. « y < y = x-36 ». Pero creo que no está bien poner « y < y ». Quizá sea mejor « y ≤ y = x-36 ».

B13: Podemos poner: « y_2 < y_1 = x-36 »

B14: Más sencillo. Poner solamente « y < x-36 ». Con el valor de "x" calculas "x-36" y la "y" tiene que ser menor que toda esa operación.

(OBSERVACIÓN 16: Han llegado a una expresión en la que están de acuerdo. Ahora hace falta que esa expresión se integre, es decir que pase a formar parte del conjunto de conocimientos de los alumnos

/-----------\

Después de la observación del funcionamiento de la primera lección he hecho algunas correcciones en las consignas de modo que la lección queda de la forma siguiente:

II.5. LECCIóN PRIMERA CORREGIDA.

Los alumnos se distribuirán por parejas de equipos A y B. Cada equipo podrá estar formado por 3, 4 o 5 alumnos.

Cada equipo dispondrá de tres hojas de papel de tamaño folio. Dos de ellas, por lo menos, serán de papel cuadriculado: el plano PROPIO y el plano PARA MOSTRAR. Estos dos planos llevarán marcado el sistema de ejes coordenados sin escribir los nombres, XX'e YY', de los ejes; solamente las dos lineas perpendiculares. La tercera hoja llevará el ESQUEMA para el CONTROL DE RESULTADOS (Pág. siguiente).

El profesor irá diciendo las indicaciones:

Prof: PRIMERA INDICACIóN: "El <u>primer juego</u> consistirá en que cada equipo A dibujará un punto en el plano coordenado PROPIO con la escritura coordenada correspondiente y el mismo punto en el plano que VA A MOSTRAR al equipo contrario, PERO AQUí SIN LA ESCRITURA COORDENADA. Simplemente lo marcará con un 1 para saber que es el primero que ha puesto y lo mostrará al equipo B correspondiente. Este deberá dar la escritura que cree que corresponde. A continuación, a la inversa. Asi hasta cuatro veces cada equipo.

El equipo que ha elegido el punto confirmará el éxito o fracaso de la respuesta.

Anotareis los aciertos con un "*" y los errores con un "Ø" en el esquema de control de la hoja de resultados (Cada equipo irá rellenando la suya) semejante a ésta":

Juego	1	2	3	4	5	6	7 ...
Equipo A_n	*		*		∅		...
Equipo B_n		∅		*		...	

ESQUEMA DE CONTROL DE RESULTADOS

"Conservad los resultados".

Prof: SEGUNDA INDICACIóN: "Vamos ahora al segundo juego. Vamos a jugar a la pesca. Cada uno de los equipos A_n y B_n debe dibujar, sobre su hoja propia, una recta horizontal dónde prefiera. Esa recta es la divisoria. Así ha dividido el plano en dos zonas que llamamos semi-planos y ahora elige una de esas zonas como su zona de pesca, rayándola.

El otro equipo debe adivinar la zona rayada, SIN QUE AHORA LE HAYA SIDO MOSTRADA; solamente sabe que la divisoria es horizontal.

Para localizar la zona se efctuarán tiradas diciendo las coordenadas de los puntos "que se lanzan". Cada punto que se lance se considera una tirada.

Efectuareis una tirada cada equipo alternadamente y, si la tirada ha acertado dentro de la zona, el equipo contrario dirá que **ha entrado**; si no ha acertado dentro de la zona, se dirá **fuera**; y si acierta justo en la divisoria dirá 'divisoria'.

El juego consiste en localizar, exactamente, CUAL ES LA ZONA DE PESCA que ha dibujado el otro equipo, expresándola de la forma más clara posible. El equipo que localice antes la zona del contrario ha ganado. Diremos que la zona ha sido localizada cuando el equipo contrario lo reconozca asi.

El equipo que haya quedado en segundo lugar puede pedir la "revancha" para intentar empatar. Seguiremos el juego mientras haya tiempo y el equipo que quede segundo lo pida.

Anotaremos una estrella al equipo vencedor en el panel de control, como resultado de cada juego, cuando éste haya finalizado. Estos juegos se numerarán: 9º, 10º, etc..."

Prof: TERCERA INDICACIÓN: "Ahora vais a dibujar una valla protectora, representada por una divisoria VERTICAL. Se trata de situar vuestra casa en una de las dos zonas creadas por "la valla". De nuevo se trata de LOCALIZAR su zona de protección para haber vencido al contrario.

Se efectúan tiradas alternativamente, empezando por el equipo que haya perdido en el último juego. Contestareis:"ha entrado", "fuera" o "en la valla" como respuesta a cada tirada del equipo contrario.

Cuando un equipo quede primero debe conceder la revancha al otro, si aquél se la pide. Proseguiremos como antes mientras haya tiempo y alguien que haya quedado segundo lo pida".

Prof: CUARTA INDICACIÓN: "Ahora deseais levantar un muro por delante y otro por detrás que delimiten vuestra zona. Pueden ser los DOS HORIZONTALES o los DOS VERTICALES. Dibujadlos y comenzaremos de nuevo a jugar.

También quedará primero el que logre averiguar la zona de protección elegida por el otro"

"QUINTA INDICACIÓN": "Ahora sabeis que vuestras divisorias horizontales o verticales crean una zona bastante sencilla de localizar por el otro. Vais a escoger una oblicua cualquiera con la única condición de que sea diagonal de todos los cuadraditos que atraviese. Elegid la recta y la zona a vuestro gusto, igual que antes, y jugaremos de nuevo"

-.-.-.-.-.-.-.-

Nota para el profesor

En las consignas figura la exigencia de que los equipos tengan que ponerse de acuerdo para dar el juego por "ganado".

Esto se hace con un doble objetivo:

Primero: Evitar todo lo posible la intervención del profesor en el juego, que tendría, en caso contrario, que decidir en qué momento y bajo qué forma se había producido la declaración ganadora. Esto podría imponer a los alumnos distintos niveles de exigencia en el rigor de la escritura-solución.

Por ejemplo, un profesor podría exigir que se escribiera la desigualdad correspondiente, mientras que otro podría conformarse con la escritura de la recta, (la igualdad), añadiéndole la explicación: "a la derecha" o la que correspondiera. Además en ambos casos estaría marcándose la exigencia por parte del profesor y queremos que sea la "situación" misma la que marque esa necesidad.

Segundo: Favorecer, entre los alumnos, los intercambios de opiniones sobre cuál es la mejor forma de determinar, sin dudas, la zona.

Con ello esperamos favorecer la aparición de la escritura simbólica, que es lo que deseamos obtener en el aprendizaje, pero no imponerla.

Queremos que se llegue a un lenguaje aceptado por todos los alumnos y que sea útil para la descripción inequívoca de las zonas. Este lenguaje suponemos que será el de las desigualdades.

II.6. COMENTARIOS A LA CONSTRUCCIÓN DE LA PRIMERA LECCIÓN

Observando la primera lección construida vamos a dejar constancia del estudio que se ha hecho "a priori".

La situación se plantea como una situación de acción en forma de juego entre parejas de alumnos o parejas de equipos.

La primera decisión que habia que tomar fué sobre si nos convenía seguir una progresión de dificultad creciente en las consignas que les planteábamos. O, por el contrario, sería mejor organizar una situación más abierta.

Se optó por la progresión de dificultades, pues se intentaba que el alumno se sintiera seguro alcanzando pequeños logros personales. Se consideró importante evitar el desconcierto inicial, sobre todo en alumnos poco habituados a estas técnicas de trabajo.

Como se trataba de conseguir que el alumno llegara a expresar zonas del plano en forma de desigualdades, con dos incógnitas "x" e "y", se decidió seguir una secuencia de dificultades progresivas. Para las primeras zonas se eligió poner la condición de que las divisorias fueran horizontales; después verticales y así se esperaba que surgieran las condiciones (las desigualdades) con más facilidad, al tratarse sólo de una incógnita: la "y" en el caso de las rectas horizontales, y la "x" en el caso de las verticales.

Se intentaba que los alumnos llegaran a expresar estas condiciones sin dificultades y que con este ejercicio estuvieran mejor preparados para el caso de las rectas oblicuas, que iba a representar una complejidad diferente, al hacer intervenir las dos incógnitas relacionadas entre si.

La segunda duda que se planteó fué: ¿Cómo escribirían los alumnos la respuesta cuando la descubrieran?

Se trataba de anticipar posibilidades.

Los alumnos podian escribir la respuesta de muy diferentes maneras. Podian expresarla mediante el lenguaje materno o mediante diferentes simbolizaciones:

a) Lenguaje materno: "La linea está en el 6 y la zona está debajo de esa linea" (Referido a un semiplano situado por debajo de la recta horizontal y=6).

Se considera esta expresión como lenguaje materno pues en ella no aparece ninguna relación simbolizada. Parece una respuesta calificable como "primaria", en el sentido de que el alumno ha comprendido la situación que su compañero ha dibujado y lo expresa con un lenguaje "primario", exento de simbolización.

b) Primeras simbolizaciones:

"La linea está en x+6 y es la zona de debajo"

(Referido a la misma zona de antes)

En este caso el alumno habria tomado como referencia el eje X, al que simbolizaría erróneamente con la "x" y, al querer escribir que está 6 unidades por encima, habria llegado a la expresión x+6.

En esta expresión no aparecen todavia simbolos que expresen la condición que deben cumplir los puntos para pertenecer a la zona, pero aparece una expresión algebraica con letras y números que, aunque errónea, ya manifiesta un deseo de simbolización.

c) Simbolizaciones incompletas:

"La linea es y=6 y la zona es la inferior"

Aquí habría ya una simbolización correcta de la linea divisoria, aunque mezclada con una frase materna para expresar la zona.

d) Simbolización "interna":

"La zona es cualquier punto que tenga la "y" menor que 6"

Esta expresión, a pesar de estar en lengua materna, ya mostraría que el alumno domina la condición expresada. Podríamos decir que hay una "pre-simbolización" o una simbolización "interna", es decir una simbolización no-expresada. Desde esta expresión es más fácil que pase a escribir la desigualdad $y < 6$.

e) Simbolización completa:

"La zona son los puntos que cumplen la condición « $y < 6$ » ".

Con esta respuesta se habría conseguido la simbolización que se persigue.

Para estimular esta expresión se podía hacer constar en las indicaciones que era mejor expresarla de la forma MAS BREVE POSIBLE. Pero se decidió admitir, durante el ejercicio, cualquier respuesta que representara, sin lugar a dudas, la zona de que se trataba y por tanto la única condición que pondríamos era que no planteara objeciones de los alumnos contrincantes correspondientes.

(Más adelante, en la quinta cuestión, se estudiaron distintas posibilidades de llegar a la expresión más simbólica, la forma de desigualdad, mediante debates o mediante la creación de la necesidad de conectar unas condiciones con otras).

La tercera cuestión que se planteó fué: Cómo favorecer un sistema de control que queríamos que los propios alumnos tuvieran sobre el proceso.

Así se estableció que en el comienzo del juego se les darían instrucciones para que, además de la hoja visible, llevaran su propia hoja de control, en la que deberían anotar los puntos y las zonas que habían elegido y que el contrario debía adivinar, así como las sucesivas apuestas que el contrario iba haciendo.

Entre los conocimientos que se supone que poseen los alumnos está la expresión de los puntos del plano mediante pares de números y la expresión de rectas cualesquiera, y parábolas de eje vertical, mediante relaciones de igualdad. Esto pertenece a lo que los alumnos y el profesor saben que se ha estudiado ya (lo que se conoce como memoria de la clase). Se espera pues que los alumnos representen los puntos por pares y que se apoyen en estos conocimientos para iniciar sus estrategias.

Sin embargo, los alumnos no tienen expresión conocida para los semiplanos, así que éstos deberán concretarse a base de elementos identificables. Estos elementos deberán ser aceptados como tales por todos los alumnos. Si los alumnos lo llegan a proponer, podria llegarse a acuerdos previos.

Por ejemplo, podía surgir el acuerdo de que: "un semiplano, de divisoria horizontal o vertical, quedará localizado en cuanto se conozca un punto de la divisoria" (si los alumnos llegaran a ese acuerdo previo apreciarían que debian añadir: "la parte superior", o "la parte inferior", o "la parte izquierda", etc..., pero ésto, en general, dejaremos que surja como una necesidad a lo largo del juego). Otro acuerdo al que pueden llegar es que: "conocidos dos puntos de la divisoria ésta quedará determinada". También podrían exigirse mutuamente que el semiplano elegido debiera sombrearse.

Otra forma admitida podría ser determinar la recta divisoria dando su ecuación $y=f(x)$. Desde el punto de vista de la enseñanza esta elección de identificación seria muy ventajosa, pues, desde ella, es más fácil llegar a la expresión del semiplano mediante la desigualdad, pero en ningún momento se debe forzar a los alumnos a que la elijan. Esto es muy importante. Se deben respetar las decisiones de los alumnos, cuando hemos dejado la elección en sus manos.

También podrían ponerse de acuerdo en que, cuando uno crea que ha localizado el semiplano del contrario, lo "demuestre" haciendo tres disparos (o "n" disparos) que acierten realmente en la zona.

Conviene observar que durante la elaboración de los acuerdos se realiza una actualización de conocimientos anteriores. El establecimiento de estas reglas del juego, por parte de los alumnos, ayuda a actualizar los conocimientos previos que deben tener y favorece, por tanto, la equiparación de condiciones de partida para los contendientes.

Al final de cada juego, ambos equipos, pueden comprobar si las respuestas que han recibido, al hacer sus tiradas, eran correctas comparando su control con la hoja de control oculta por el otro hasta entonces. De este modo queda, en todo momento, clara la limpieza del juego.

<u>La cuarta pregunta</u> que se presentó fué: ¿qué pasaría si los alumnos no usaban números enteros?. Pensamos incluso llegar a aconsejar su uso.

La razón de esta decisión era eliminar las dudas o confusiones en las respuestas para el caso de la linea oblicua diagonal. (Más adelante se levantaría esta restricción para el caso de una oblicua de cualquier inclinación).

Sin embargo, se vió que esta condición se cumplió sin necesidad de ponerla, pues los alumnos, al poder elegir, y aqui podian hacerlo, eligieron números enteros. Se limitaron a ellos e, incluso, en el primer momento usaron los números naturales, apareciendo los negativos solamente "en caso de necesidad", es decir cuando querían efectúar una tirada "por la izquierda" o "por abajo".

La quinta cuestión fué que no queríamos imponer muchas restricciones y, por tanto, ya que estábamos dispuestos a aceptar cualquier expresión (lingüística, simbólica, etc...) que determinara, sin lugar a dudas, la zona buscada, ésto podía suponer la respuesta antes de haber llegado a la expresión simbólica de la desigualdad. ¿Cómo podíamos llegar a perfeccionar el lenguaje en este caso? ¿Cómo crear una situación en la que la expresión debiera simbolizarse de forma más abstracta? Quizá **crear una situación de formulación.**

Esto no debía hacerse por una solicitud directa del profesor. Hubiera sido muy fácil decir: "Se debe encontrar un lenguaje más conciso ó mas preciso". Pero lo que se quería es que esta necesidad viniera dada por la propia situación creada, debía ser una exigencia de esta situación, una exigencia "espontánea".

Podiamos hacer pues, tres cosas diferentes:

- Crear una **situación de debate**
- Crear una **situación de comunicación**
- Crear **un nuevo juego**

Estudiamos estas posibilidades una por una.

II.7. CREAR UNA SITUACIÓN DE DEBATE

Este debate tendria por objetivo discutir cuál es el mejor lenguaje para expresar las respuestas. Se trataría de conseguir entre los alumnos lo más parecido a un debate científico con la exposición ordenada de declaraciones, defensa y ataque de las mismas; obtención de conclusiones. Todo ello realizado con un moderador para la petición y turnos de palabras.

En el debate se expondrian, por parte de los equipos participantes, los lenguajes empleados con expresión de las opiniones sobre las ventajas e inconvenientes de la utilización de unos u otros.

Esto tendría como resultado una reflexión sobre la utilidad de perfeccionar el lenguaje. Los alumnos que no hubieran participado mucho en la elección de la expresión, podrían ahora encontrar su sentido, pues se esperaba que surgieran preguntas o afirmaciones como: "Esto quiere decir que...", ¿Esto qué significa? o "Esto significa que...", que irian aclarando el sentido de las expresiones empleadas.

Se suponia que este debate llevaría a escoger la expresión simbólica, por varias razones: es más concisa y menos ambigua (es decir, más precisa) y también se esperaba que algún alumno la calificaría de más "matemática", pero independientemente de si se producia la elección ó no, el debate, en sí mismo tendria que aportar un enriquecimiento para cada uno de los alumnos.

II.7.1. ¿CÓMO CREAR UNA BUENA SITUACIÓN DE DEBATE?

Para lograr una buena situación de debate es necesario tener en cuenta que la mayoría de los alumnos no han participado nunca en una experiencia de este tipo. Incluso la propia mecánica del debate es desconocida en cuanto a las formas de intervención, petición del turno de palabra, atención a las otras intervenciones para evitar repetición de razonamientos, expresión de razonamientos correctos que apoyen nuestras intervenciones, o que sirvan para rebatir otras.

Es aconsejable comenzar con una exposición, aunque sea somera, de la forma en que se va a desarrollar el debate. Explicar la utilidad de un moderador que otorgará el turno de palabra, por orden, a cada uno de los participantes que lo solicite, y la necesidad de pedir ese turno de palabra para poder intervenir. Exponer la conveniencia de tomar notas para que las intervenciones sean adecuadas.

Cuando el debate se inicie, el profesor debe procurar intervenir lo menos posible. Su actuación debe ir encaminada a estimular y canalizar las intervenciones de los alumnos para que éstas sean numerosas y fructíferas. El objetivo debe ser llegar a obtener "buenas respuestas" como conclusiones del debate.

En cuanto a aceptar "la buena respuesta" deberemos hacer algunas precisiones. El hecho de que, la respuesta que queremos alcanzar, haya sido pronunciada, no debe tentarnos a aceptarla "como buena", públicamente. La aceptación de "la buena respuesta" debe venir del resultado del debate y de la aceptación, por parte del grupo de alumnos, no del profesor.

Por parte del profesor, será suficiente que favorezca la contra argumentación. Solamente en el momento de la síntesis final, es interesante la opinión magistral en apoyo de los argumentos más pertinentes desarrollados, contraponiéndolos a los argumentos que se les hayan opuesto. A veces, añadiendo complementos epistemológicos y didácticos.

La discusión sobre las respuestas supondrá una revalorización de las mismas al poner en marcha los argumentos que apoyan a cada una de ellas. Esto irá suponiendo aclaraciones y reafirmaciones, para aquellos participantes que no han comprendido bien o que, simplemente, estaban equivocados, e irán integrando las respuestas "vencedoras".

Por otra parte, una "buena respuesta" lo será realmente, cuando haya tenido en cuenta las respuestas "erróneas" de los otros participantes, y haya conseguido que evolucionen hacia ella mediante argumentos adecuados.

También es muy importante dejar que las respuestas menos correctas o erróneas se produzcan, pues, al salir a la luz, se consigue identificarlas, lo que forma parte de un proceso de reconocimiento, análisis y rechazo, que ayudará a evitar su reproducción.

Para que un debate alcance la condición de tal, debe obtener la respuesta como resultado final del proceso.

La parte del profesor en ese proceso es la de avivar los intercambios en las comunicaciones y facilitar que todas las opiniones sean tenidas en cuenta en los razonamientos colectivos. Evitar que una opinión sea rechazada, simplemente, por otra opinión. Evitar que el prestigio personal de algún alumno pueda imponer una respuesta, sin el análisis pertinente de la misma. etc,.

Si el grupo de alumnos que participa en el debate lo hace por primera vez, o lo ha hecho pocas veces, es necesario explicitar las reglas lógicas que deben ser respetadas y también las consecuencias de situaciones como la aparición de un contraejemplo. El hecho de que un contraejemplo invalida un razonamiento no es evidente para la mayoría de los alumnos y estas reglas del debate deben ser aceptadas antes de que éste comience (Artigue, 1990).

Para éso puede ser interesante realizar un debate de prueba, en el que se den a conocer algunas de las reglas de inferencia lógicas más sencillas y las que corresponden a su negación; las reglas de validación. Un debate dónde se vean situaciones con contraejemplos, etc...

También puede ser interesante aprender el modo material de participar en un debate, en el sentido de escuchar todas las aserciones, anotar algún punto de la discusión al que se desea contestar, pedir la palabra, esperar el turno de respuesta, etc...

Es muy importante que los alumnos conozcan la mecánica del debate, antes de empezarlo, porque así se potencia la participación de la mayoría y es más fácil conseguir que el debate sea rico en aprendizaje y en conclusiones.

Un proceso como el debate logra, fuertemente, la integración de los conocimientos que se manejan. Además, es muy interesante para el alumno aprender a participar en un debate, pues éste se puede realizar en otros momentos. Esta participación obliga a poner atención sobre cómo y dónde situar significantes y significados, y dominar el uso de los signos para que no traicionen a los símbolos.

En el caso de nuestra Lección Primera se puede pedir a los equipos que escriban la expresión de la última zona que cada uno de ellos ha acertado.

Que un representante de cada equipo exprese la escritura de la solución que ese equipo propone.

El profesor no dirá nada y simplemente anotará en la pizarra las distintas respuestas que vayan surgiendo.

Después se puede hacer una votación individual para "ver que escritura tiene más partidarios". El objetivo de esta votación es que todos los alumnos se sientan implicados en el debate, pues ya han tomado partido y están interesados en saber si la respuesta que ellos han elegido "vence, o no".

Luego da comienzo el debate. El profesor puede actuar de moderador y dar la palabra a los representantes de las distintas opciones, para que apoyen con su defensa la respuesta que han dado.

Es aconsejable comenzar por debatir las soluciones que parezcan menos correctas, pues así surgirá pronto la polémica, es decir el verdadero debate.

Durante el debate el profesor deberá tener un exquisito cuidado de no dejar traslucir su propia opinión, pues ésto condicionaría las opciones de los alumnos.

II.7.2. EXPERIENCIA DE UNA SITUACIÓN DE DEBATE

Durante el desarrollo de la Lección Primera en distintos grupos de alumnos se alcanzaron expresiones diversas para determinar las zonas del plano. El debate se organizó para discutir sobre ellas, comparándolas para perfeccionar el lenguaje, esperando que quedaran integradas aquellas que resultaran más precisas y adecuadas al trabajo posterior que se tuviera que hacer con ellas.

El desarrollo de estos debates fué registrado en video y en cintas magnetofónicas para observarlo y estudiarlo con posterioridad. La <u>observación didáctica</u> realizada incluye este estudio de comparación de las cintas magnetofónicas y el video, así como la discusión posterior entre los profesores que estuvieron presentes en la experiencia.

La indicación que se dió a cada equipo para preparar el debate fué la siguiente:

INDICACIÓN: Tomad la expresión de la última zona del plano acertada en el juego de la Lección Primera y escribidla de la forma más breve posible, codificándola, para enviar un mensaje a un equipo que está en otra clase y que tiene que conocer cúal es la zona. Competiremos para ver qué equipo consigue la mejor expresión.

Tiempo de reflexión: De 10 a 15 minutos. (El tiempo se marca en función del número de alumnos que forman los equipos. Si en una clase se han formado equipos de 1,2 o 3 alumnos marcaremos 10 minutos y si son equipos de 4 o más alumnos dejaremos 15 minutos de reflexión).

Al cabo de este tiempo el profesor desde la pizarra, dondc iba a escribir los resultados, se dirigió a los alumnos.

<u>En la clase B-10 de R.E.M. (Reforma de Enseñanzas Medias)</u>

Profesor: Veamos cómo habeis expresado vuestra zona. Empezamos por el grupo nº 4 (Se ha elegido éste, para empezar, por ser uno de los más flojos)

El profesor va escribiendo en la pizarra el texto que va dictando cada equipo. En la segunda clase en la que se hizo la experiencia fueron los propios equipos, a través de un representante, los que iban escribiendo sus expresiones correspondientes.

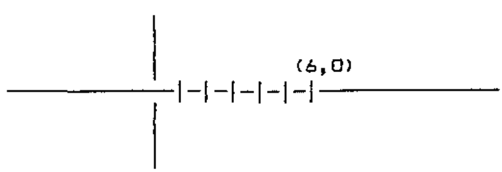
La pizarra, en la clase B-10 correspondiente a un curso de Reforma, quedó como sigue:

GRUPOS	EXPRESIONES
1	(-20,0) vertical derecha
2	y = 12 horizontal arriba
3	(6,0) izquierda
4	Por los puntos de la divisoria: (1,3)(3,3) derecha

Profesor: A continuación vamos a establecer una discusión para elegir la mejor expresión. Grupo nº 4 ¿Cúal es tu voto?

(Este grupo votó por la primera expresión. El grupo nº 3 por la tercera, que es la suya. El grupo nº 2 por la suya y el grupo nº 1 por la suya también).

Profesor: La más votada es la primera, pero la más breve es la tercera. Vamos a ver si la expresión del tercer grupo nos permite dibujar la zona. El punto (6,0)



Profesor: ...a la izquierda...

Un alumno del grupo nº 4 interrumpe.

Alumno: No basta con un punto porque puede ser vertical u horizontal.

Contesta un alumno del grupo nº 3.

Alumno: Al decir izquierda ya queremos decir que la recta divisoria es vertical sino diriamos arriba o abajo.

El profesor añade.

Profesor: Entonces, la información "izquierda" quiere decir: vertical izquierda. Son dos informaciones en una (y añade en la pizarra):

3	(6,0) izquierda: (vertical izquierda)

Interviene un alumno del grupo nº 2.

Alumno: Nosotros vamos a tachar "horizontal" porque la expresión "y=12" , a través de la "y", ya dice que es horizontal.

El profesor pregunta a los otros grupos si están de acuerdo en que se puede tachar "horizontal". Los otros grupos aceptan y se tacha:

2	y = 12 ---------- arriba

El profesor hace una pregunta, al grupo nº 2, para estimular la precisión de la escritura.

Profesor: ¿Se puede encontrar una forma de abreviar la expresión tachando la palabra "arriba" pero manteniendo la información que da?

Un alumno contesta: Poniendo "y=12" y una flecha.

El profesor le pide que salga a la pizarra y lo escriba. El alumno sale y escribe:

2	y = 12 ↑

Profesor: ¿Estais de acuerdo en que esta escritura es la más breve y que contiene toda la información necesaria para conocer la zona?

Todos los alumnos están de acuerdo.

Profesor: Pero esta escritura no es una escritura aceptada entre la comunidad matemática. En ningún texto se encuentra una expresión como ésta. ¿Habria alguna forma de eliminar la flecha?

No responde nadie. El profesor pide a un equipo que le diga un punto de la zona.

Alumno: El (7,13)

A continuación pide a otro equipo que diga otro punto de la zona.

Alumno: El (-1,13)

Profesor: ¿Cúal es el criterio que estais empleando para elegir los puntos?

Un alumno: Que tiene que tener la "y" mayor que 12.

Este conocimiento estaba implícito y ahora se hace explícito al conjunto de alumnos. En este momento interviene un alumno del equipo nº 1.

Alumno: Hay un signo matemático "así" [señala en el aire el signo de desigualdad].

El profesor interviene pidiendo al alumno que escriba ese signo en la pizarrra. El alumno sale y escribe el signo " > ".

Profesor: ¿Se puede usar este signo en nuestras expresiones?

Contesta un alumno del grupo nº 2: Se puede poner " y > 12 " porque todos los puntos de la zona lo cumplen.

Profesor: ¿Puede servir esta expresión para representar la zona?

Todos están de acuerdo y termina la clase.

/---------------/

<u>En la clase B-4 de R.E.M. (Reforma de Enseñanzas Medias).</u>

Empieza la segunda clase dada a este grupo repitiendo, a los alumnos, como indicación que cada equipo elija una zona de pesca, correspondiente a un semiplano rayado, marcado por una linea horizontal o vertical según deseen, y que repitan el juego del día anterior. Con esto se pretende que dispongan de expresiones recientes que determinan las zonas de pesca (semiplanos) y con las que se puede iniciar el <u>debate.</u> Después de realizar esta actividad, propone:

Profesor: "Ahora os propongo jugar por grupos. Cada dos equipos A_n y B_n formarán un grupo. (Así se reduce a la mitad el número de contrincantes y se duplica el número de alumnos que van a participar en las discusiones internas de cada grupo). Se trata de discutir la forma en que expresariais la zona del contrario para enviar un mensaje de información en clave a otro compañero que está en otra clase para que él pueda pescar en esa zona. Teneis 15 minutos de reflexión y luego elegiremos la mejor expresión".

Después de ese tiempo, el profesor, desde la pizarra, va pidiendo a los distintos equipos que escriban las expresiones que han utilizado, para seleccionar aquella que, de forma más breve y precisa, represente a una zona.

El primer equipo propone:

Grupo	Expresión
1	Vertical del (16,1)

Profesor: ¿Con eso es suficiente?

Un alumno contesta: Hay que añadir la palabra Este (para indicar la zona derecha).

Otros alumnos dicen que no es necesario. El profesor la añade con una interrogante.

1	Vertical del (16,1) ESTE (?)

Profesor: ¿Cuál es la expresión del segundo grupo? (Un alumno sale y escribe)

2	(3,6) ESTE

Profesor: Y, ¿la del tercer grupo? (Otro alumno sale a escribir)

3	(17,1) arriba y abajo

Un alumno pregunta qué quiere decir "arriba y abajo" y un representante del grupo nº 3 aclara que quiere decir "vertical". El profesor pregunta al equipo nº 3 si quieren cambiar la expresión y los alumnos que lo forman *deciden que sí porque resulta más breve.*

El grupo nº 4 anota: (3,5)(-3,5) NORTE. El grupo nº 5 empieza escribiendo "x 25"; luego completan "x,25"; luego "(x,25)" y, por fin, se deciden por "x=25" y el sexto equipo escribe: (1,1) NORTE.

La pizarra queda asi:

Grupo	Expresión
1	Vertical del (16,1) ¿ESTE?
2	(3,6) ESTE
3	(17,1) vertical
4	(3,5)(-3,5) NORTE
5	x = 25
6	(1,1) NORTE

Profesor: Vamos a elegir la mejor de las seis expresiones que tenemos. (Pregunta al primer equipo por cúal votaria y éste dice que por la 5ª ya que "es la más breve").

Un alumno dice que la expresión del grupo nº 5 no da toda la información necesaria para conocer la zona.

Profesor: ¿Cuáles son las dudas ante un mensaje como éste?

Con esta pregunta, el profesor hace una <u>devolución</u> de responsabilidad al propio grupo de alumnos.

Alumno: Yo creo que "x = 25" no se entiende, no da ninguna información. Es un punto. No, no es ni tan siquiera un punto.

Profesor: Alguien del grupo nº 5 que defienda la expresión ...

Alumno$_b$ del grupo nº 5: Sí, es un punto ... pero como la linea recta es infinita. ¿Qué punto vas a poner?

Profesor: Conviene que os pongais de acuerdo sobre lo que es "x = 25"

Alumno$_a$: Es un valor. Para un punto hay que dar además otro valor.

Alumno$_b$: No hace falta porque la linea recta es infinita.

Profesor: Según el grupo nº 5. ¿Qué significa "x = 25"? ¿Es algún punto?

Alumno$_c$ del grupo nº 5: Es el punto del eje. El punto (25,0).

Profesor: ¿Es el único punto que tiene "x" igual a 25?

Alumno$_b$: No, también es el punto (25,1)

Profesor: Entonces, "x = 25" ¿Sobre qué punto da información?

Alumno$_b$: Informa sobre el de abajo y también sobre el de arriba.

Otro alumno: Informa sobre TODOS.

Profesor: Entonces, ¿"x = 25" contiene una información más amplia? ¿Qué información contiene?

Alumno$_b$: La de la linea.

El profesor dibuja la linea "x = 25" y pregunta de nuevo.

Profesor: ¿Esta linea? ¿Estais de acuerdo?

Alumno$_a$: No, porque "x = 25" es un valor. No es una linea. No es un punto tampoco.

[Hay un inciso a propósito del punto (25,0) que un alumno ha nombrado como el (0,25) y entonces no cumple la condición "x = 25". Se aclara ésto y se prosigue. **(Se ve aquí una de las virtudes del <u>debate</u>: que consigue reafirmar conocimientos anteriores)**]

Profesor: ¿Los puntos (25,0) y (25,1) cumplen la condición "x = 25"?

Todos los alumnos están de acuerdo.

Profesor: En ese caso. ¿Qué es "x = 25"?

Alumno$_d$: Es una igualdad.

Profesor: ¿Y, desde el punto de vista geométrico tiene algún significado?

El profesor trata de aclarar con los alumnos el lenguaje simbólico que constituye la expresión "x = 25" en el plano R^2.

Alumno$_e$: Es una información de la recta.

El profesor resalta la <u>integración del conocimiento</u> de la expresión "x = 25" que se está produciendo.

Profesor: "x = 25" es, pues, una información sobre muchos puntos en una pequeña expresión. El grupo nº 5 ha enviado un mensaje que contiene la recta. ¿Con eso es suficiente?

Alumno del grupo nº 2: No se sabe qué zona es.

Profesor: ¿Está incompleta la información?

Alumno del grupo nº 1: Sí, falta decir la zona.

Profesor: A ver el grupo nº 4. ¿Cúal es su opinión?

Alumno del grupo nº 4: Esa expresión nos da la recta pero no la zona.

Profesor: ¿Habría que añadir alguna información?

Alumno del grupo nº 4: Hay que añadir la palabra "izquierda" o "derecha".

El profesor se dirige al grupo nº 5 para preguntarles si están de acuerdo.

Profesor: ¿Estais de acuerdo en que hay que *añadir una palabra?*

Alumno del grupo nº 5: Sí, hay que añadir la palabra "ESTE".

El profesor la escribe y hace observar a los alumnos que ahora las informaciones de los grupos 2º, 3º, 5º, y 6º han quedado en la pizarra igualmente breves.

Grupo	Expresión
1	Vertical del (16,1) ESTE
2	(3,6) ESTE
3	(17,1) vertical
4	(3,5)(-3,5) NORTE
5	x = 25 ESTE
6	(1,1) NORTE

Profesor: Las expresiones 2ª, 3ª y 6ª son muy semejantes. Todas ellas incluyen un punto. Vamos a comparar una de ellas con la expresión 5ª que se presenta un poco distinta de ellas. Por ejemplo la 5ª y la 6ª. Vais a votar por la expresión que os parezca mejor.

Los grupos efectúan su votación y se alcanza el siguiente resultado:

5	x = 25 ESTE	4 votos
6	(1,1) NORTE	2 votos

Profesor: Vamos a dar una oportunidad al grupo nº 6 para que defienda su expresión.

Alumno del grupo nº 6: La expresión del punto (1,1) indica la recta divisoria.

Alumno del grupo 3º: Pero la recta podría tener distintas inclinaciones.

Alumno del grupo 6º: La palabra "NORTE" ya indica que es horizontal y arriba.

Se desarrolla una discusión sobre la información que aporta la palabra "NORTE". Se vota para decidir si la palabra "NORTE" informa, o no, que la recta que pasa por (1,1) es horizontal. Se obtienen 4 votos en contra y 2 a favor y como hay más rechazo que aceptación, el profesor propone cambiar a trabajar con la expresión 5ª, "x = 25 ESTE", para ver si se puede reducir.

Alumno del grupo 2º: Podríamos poner un signo "más" y quitar la palabra "ESTE". (El profesor lo hace)

5	x = 25 +

Con este signo "+" parece empezar a mostrarse el **conocimiento de que la zona coincide con "x mayor que 25". El profesor hace ahora unas peticiones encaminadas a que se manifieste ese conocimiento que parece estar implícito.**

Profesor: Decid un punto de la zona.

Alumno del grupo 3º: (26,7)

Profesor: Otro punto más.

Alumno del grupo 1º: (28,2)

Profesor: ¿Cómo lo has elegido? (Y sugiere) ¿Es necesario pensar en las dos direcciones?

Alumno del grupo 1º: No. Es solo necesario pensar en una. Solamente hay que pensar que "x" SEA MAYOR QUE 25.

Encontramos aquí, expresado explícitamente, el CONOCIMIENTO IMPLíCITO que queriamos que apareciera y ahora prosigue la clase tratando de escribir con símbolos la frase "que « x » sea mayor que 25".

Profesor: Entonces. ¿Ya no es importante el hecho de que "x = 25"?

Alumno del grupo 1º: Si que es importante para saber que la zona empieza en 25.

Profesor: ¿Qué es más importante: "« x » es igual a 25" o "« x » es mayor que 25"?

Alumno del grupo 2º: Es más completa "« x » es mayor que 25".

Profesor: (Directamente) ¿Podeis encontrar una expresión para esa frase?

Alumno del grupo 6º: Sí. " $x > 25$ " (Sale a la pizarra y la escribe)

II.7.3. EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE DEL PLANO π

Se ve, en el desarrollo del <u>debate</u>, que, para el alumno, existen dos lenguajes diferentes. Uno para el plano gráfico π y otro diferente para las expresiones simbólicas del plano R^2.

En la Lección Primera se encuentra una situación a-didáctica que pide a los alumnos la escritura según el lenguaje del plano π y cuyo perfeccionamiento sucesivo se realiza a lo largo del debate.

Se puede estudiar la evolución progresiva de las expresiones empleadas:

1.- Pondríamos, en primer lugar, las expresiones que traducen el proceso seguido para la localización de la divisoria dando importancia a un punto, que es el que ha producido la localización, y a la recta misma haciéndola constar de alguna forma. Por ejemplo, la expresión del grupo nº 3 en la clase B-4:

(17,1) arriba y abajo

Para expresar la orientación de la recta se usan aquí términos muy intuitivos: arriba y abajo. Incluso en algún alumno las palabras van acompañadas del gesto de la mano que, subiendo y bajando, expresa lo mismo.

El grupo nº 1 de la clase B-4 escribe una expresión semejante a ésta:

Vertical del (16,1)

En estas escrituras falta la expresión de la zona propiamente dicha quizá porque esta determinación de la zona se hace dentro del mismo proceso de una forma implícita y no queda reconocido como separado del resto.

2.- En segundo lugar vendrían las expresiones que, traduciendo también el proceso seguido, exponen el punto que ha determinado a la divisoria pero añadiendo ahora "derecha" (o "arriba" o lo que corresponda) con lo que localizan la zona de que se trata. Por ejemplo, la expresión del grupo nº 3 de la clase B-10:

(6,0) izquierda

O la expresión del grupo nº 6 de la clase B-4:

(1,1) Norte

Estas expresiones consiguen, sobre las anteriores, el adelanto de que ya señalan la zona y no solamente la recta divisoria. Esta diferencia es muy importante pues supone el reconocimiento de la zona como objeto de identificación aunque la determinación sea incompleta todavía.

3.- Después vendrían las expresiones como la siguiente, escrita por el grupo nº 1 de la clase B-10:

(-20,0) vertical derecha

en las que los alumnos anotan un punto de la divisoria (el que ha servido para localizarla) y dos palabras. Una que sitúa la posición de la recta ("vertical"), y otra que sitúa la zona ("derecha").

Algunos alumnos la califican de complicada e innecesaria. Son aquellos que dicen que los términos "izquierda" y "derecha" aportan además la información de la verticalidad de la recta.

A lo largo del debate, sin embargo, esta expresión es apreciada como más completa que la anterior ya que, al hacer constar la posición de la recta, sirve indistintamente para expresar zonas determinadas por rectas en cualquier posición.

4.- Un poco más elaboradas aparecen las expresiones que sitúan la recta divisoria por dos de sus puntos y escriben después una palabra que marca la zona elegida. Así, por ejemplo, la escritura del grupo nº 4 de la clase B-4:

(3,5)(-3,5) Norte

Aquí interviene el conocimiento: "Una recta queda determinada por dos puntos" lo que supone un adelanto en el proceso de expresión pues refleja un esfuerzo de codificación independiente del proceso seguido para la localización de la zona.

5.- Las expresiones que incluyen la escritura de la divisoria mediante una igualdad. Por ejemplo, la expresión del grupo nº 2 de la clase B-10:

$$y = 12 \ \textbf{arriba}$$

Estas expresiones entran ya en la simbolización propia del plano R^2 trasponiendo la barrera del lenguaje que hemos llamado del plano π.

A partir de ésta, en concreto, se llega, en el <u>debate</u> a conseguir expresar la zona del plano con la escritura habitual de una desigualdad:

$$y > 12$$

A esta expresión se ha llegado cuando el conocimiento "implícito" se ha explicitado a lo largo del <u>debate</u>. Lo más remarcable de la experiencia es que la expresión ha llegado a surgir de los propios alumnos que son los que finalmente la han aceptado como la mejor expresión.

Es muy interesante señalar también que para estos alumnos esta expresión tendrá realmente un sentido pues representa simbólicamente un semiplano geométrico que ha sido reconocido como tal antes de lograr su expresión simbólica. La expresión simbólica ha sido alcanzada como una necesidad de expresión matemática.

En las siguientes lecciones se tratará de afianzar este conocimiento con la <u>integración</u> del mismo entre los conocimientos que ya posee el alumno.

II.8. CREAR UNA SITUACIÓN DE COMUNICACIÓN

Otra forma de estimular la adquisición de un conocimiento puede ser la creación de una situación de comunicación.

En nuestro caso se puede pensar en crear una situación de comunicación que exija la formulación de la zona simbólicamente.

Podría ser crear dos equipos, equipo A y equipo B y el juego siguiente:

"El equipo A debe trazar una recta y sombrear uno de los semiplanos en que ha quedado dividido el plano por la recta en su papel de control; copiar de nuevo la recta y marcar la zona en un papel y mostrarla a una parte de los alumnos del equipo B.

Este grupo de alumnos del equipo B, llamémosle equipo B_1, tiene que transmitir la información de cuál es la zona representada, por escrito, pero sin repetir el dibujo, al resto de su equipo, llamémosle B_2. La información debe estar codificada en lenguaje algebraico o mediante algún otro código imaginado por el alumno. El equipo B_2 debe descodificar el mensaje para saber cuál es la zona representada por el equipo A y poderla dibujar. Se tendrá éxito si el equipo B_2 logra dibujar la misma zona".

Ésta sería una situación de comunicación. ¿En ella los alumnos se verían obligados a buscar una expresión simbólica de la zona?.

Veamos lo que puede suceder.

Supongamos que la zona representada por el equipo A es

$$y < 3$$

¿Cuáles pueden ser los mensajes enviados por el equipo B_1?

Estos mensajes pueden ser:

1. Frases en lenguaje materno.

2. Distintas codificaciones.

3. Expresiones en lenguaje algebraico.

¿Qué codificaciones algebraicas podriamos esperar? Quizá algunas como éstas:

a) $y = 3$ (y una flecha hacia abajo)

b) $y < 3$

c) $(0,3)$ $(3,3)$ (y una flecha hacia abajo)

d) Otras expresiones

¿Se podria mejorar la situación planteada, para que los alumnos necesitaran emplear las codificaciones algebraicas con preferencia sobre las otras, sin necesidad de exigirlo explicitamente?

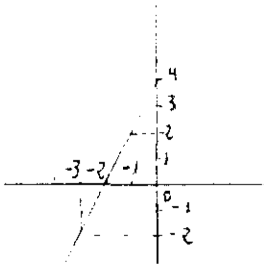
No es una situación como la que seria deseable. Deberia ser tal que la codificación algebraica se presentara como óptima ante las otras formas de expresar la zona.

Parece que las modificaciones de esta situación son muy forzadas. Es más interesante una situación más abierta.

II.B.1. VARIANTE DE LA SITUACIÓN DE COMUNICACIÓN

Se va a buscar otra situación de comunicación en la que el alumno deba expresar la zona para enviar el mensaje, pero dándole nosotros la zona que deseamos.

Imaginemos que le damos la figura siguiente:



(Figura 4.2)

El equipo B_1 podría escribir, por ejemplo: "La recta que pasa por los puntos (0,4) y (-2,0) y su parte de arriba"

Si la situación de comunicación tuviera una variable que pidiera que el mensaje fuera LO MÁS BREVE POSIBLE, quizá consiguiéramos que el alumno dijera:

"La recta que pasa por (-2,0) y lleva dirección $\vec{d}$ (1,2)".

Se podría preguntar a los alumnos: "¿Podemos codificarlo más? o ¿Esta expresión permite saber de cada punto si está dentro o fuera de la zona? Por ejemplo, el punto (0'5,4'8) ¿puedo saber si está dentro de la zona?"

Como con las expresiones que están manejando no están seguros de la respuesta, necesitarán otro tipo de expresión que les permita averiguarlo sin dudas.

"Cuando se tiene la ecuación de una recta, por ejemplo:

$$y = 3x + 5$$

y se da un punto P(0'5,6'8), se puede saber si pertenece a la recta o no, sin más que substituir en su ecuación y ver si la verifica":

$$6'8 \stackrel{?}{=} 3.0'5 + 5$$

$$6'8 \stackrel{?}{=} 1'5 + 5 = 6'5$$

6'8 NO es igual a 6'5

"De este modo se ve que el punto NO PERTENECE a la recta. ¿Se puede conseguir una "ecuación" también para el caso de la zona que me han dado? ¿Es posible encontrar una FÓRMULA que dé esa SEGURIDAD?"

Podemos hacerle al alumno éstas o parecidas preguntas, pero estas preguntas no se las puede hacer el alumno sólo. Estas preguntas no surgen de la <u>situación.</u> Son simplemente exigencias del profesor para conseguir la formulación deseada, así que seguiremos buscando.

Además, aún con esa condición, no parece sencillo obtener la expresión de la recta $y = 2x + 4$ como divisoria de la zona y la expresión $y > 2x + 4$ para la zona misma.

A continuación se va a estudiar la tercera posibilidad de las que apuntábamos.

II.9. CREAR UN NUEVO JUEGO

Para perfeccionar el lenguaje se podría pensar en un nuevo juego que implicara una <u>situación de comunicación.</u>

Una posibilidad sería un juego en el que se debieran usar las expresiones algebraicas unidas entre sí, mediante conectores lógicos.

Se podía aprovechar para que los alumnos tuvieran que hacer intercambios de información entre los marcos algebraico y geométrico, pues se sabe (Douady, 1984) que estos intercambios favorecen grandemente el aprendizaje, como ya hemos dicho.

Además las desigualdades van a ser utilizadas en ambos marcos con posterioridad:

En el marco algebraico, cuando se deban calcular los dominios de algunas funciones irracionales o logarítmicas, como

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \qquad \text{o} \qquad f(x) = \ln (x + 3)$$

que desembocan en la resolución de las inecuaciones:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x + 3 > 0$$

Y en el marco geométrico, cuando se trate de resolver problemas de programación lineal en los que se debe optimizar funciones con dos y más variabloes, sujetas a determinadas condiciones como:

$$x + y \geq 70$$
$$2x + 2y \geq 130$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

De modo que el conocimiento, en ambos marcos, resultará aplicable posteriormente de forma directa.

Se tratará, al crear la <u>situación,</u> de dar sentido a los conocimientos que se quieren enseñar, de forma que sean necesarios para actuar en esa situación o, al menos, que produzcan una economía de esfuerzos notable sobre otras formas de actuación.

Además, nos basamos en que es imprescindible que la situación permita al alumno:

1º. Una actuación inmediata.

Es decir, que el alumno pueda empezar a actuar sin demasiado esfuerzo.

2º. Que esta actuación se deba ir mejorando para continuar la acción.

Esto es, que deba modificar su proceder para poder continuar. Esta modificación de su acción es en realidad "la adaptación" del alumno a la situación propuesta. Este perfeccionamiento de la acción es el aprendizaje propiamente dicho. La situación debe ser tal que facilite esta modificación de la acción.

Se va a crear un: **Juego de navegación.**

Opción 1.

La "situación" es la siguiente: « Queremos navegar libremente y sin peligro, pero no disponemos de una carta de navegación. Sabemos que debemos evitar las zonas de *arrecifes*. En el *"centro de navegación" pueden ayudarnos*, pues poseen planos donde está marcada la zona de arrecifes. Nos dicen que tiene *forma* de cuadrilátero irregular (Figura 4.3). Los jugadores deben evitarla en todo momento.

El juego consiste en ir conociendo la mayor zona posible de navegación ».

Para ésto, los jugadores deben ir pidiendo información al <u>centro de navegación</u> que conoce la situación de los arrecifes. Este centro de navegación puede estar formado por otro grupo de alumnos, o por el propio profesor (Se pueden analizar aparte las ventajas y desventajas de esta variación).

Estas informaciones se solicitan por escrito describiendo una zona y preguntando si se halla libre de arrecifes. Cada información solicitada vale por UNA "I" (una información). Además, la concisión de las informaciones se valora, pues cada palabra y cada simbolización de zona se cuenta como UNO y cada vez que se llega a 10 de ellas se añade un recargo de UNA "I". Por ejemplo: si, con dos informaciones, se alcanza un total de once "palabras" (palabras o simbolizaciones) se contabiliza:

2 I   por 2 informaciones

\+ 1 I   por pasar de 10 "palabras"

igual a "TRES I" y queda UNA "palabra" que se suma a la siguiente petición de información. Cuando se alcancen las 20 palabras (o simbolizaciones), se añadirá otra "I" a las que se contabilicen en ese momento, y así sucesivamente.

Por ejemplo si se solicita la información:

¿Está libre la zona: "y" mayor que 4?

Se contabilizarán UNA "información" y OCHO "palabras".

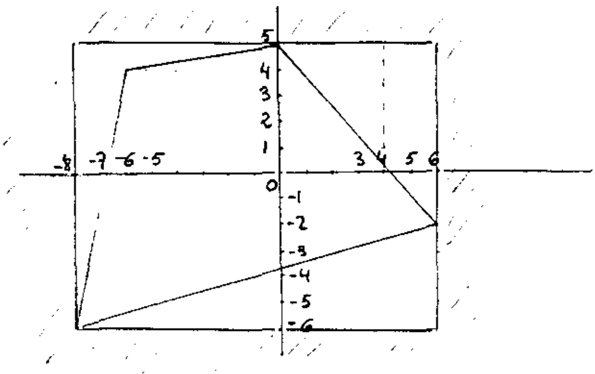
Sin embargo, la pregunta: "¿Libre zona y>4?".

Se contabilizará UNA "información" y TRES "palabras".

«El equipo que haya conseguido la zona más grande, después de "k" informaciones, habrá ganado.

Quedan descalificados aquellos equipos cuya zona de navegación incluya parte de la zona de arrecifes.»

(Si se les da un papel cuadriculado del mismo tamaño a los dos equipos, tendremos un **limite implicito.** Con esta elección evitaremos que las preguntas de un equipo escapen al control del equipo contrario).



(Figura 4.3)

Si los alumnos usan solamente las desigualdades del tipo

$x > p$; $x < q$; $y > r$; $y < t$

conseguirán, en el mejor de los casos, encuadrar simplemente mediante un rectángulo la zona de arrecifes. (Es decir la zona rayada en la figura 4.3)

Para conseguir mayor zona de navegación, los jugadores podrían "conectar" dos zonas, así expresadas, usando de la unión (U) o de la intersección (∩). P.ej:

$(x < -6) \cap (y > 4)$ ó $(x > 4) \cap (y > 1)$

Con éstas lograrian aumentar la zona de navegación en una superficie igual a la de esos cuadrados o rectángulos.

Con la unión de dos zonas, podrian intentar conseguir mayor información a "menor precio".

Pero nos interesa ver si es posible conseguir la solución óptima, es decir cómo se puede llegar a conseguir toda la zona exterior al cuadrilátero irregular; toda la zona marcada por los cuatro segmentos que forman sus lados.

El problema vuelve a centrarse en expresar un semiplano definido por una recta cualquiera.

Se trata de que el alumno logre "dar el salto" de las relaciones: "x<p" o "y<q", etc... a la relación general y < ax + b.

Para lograr ésto creemos que seria preferible organizar una actividad diferente poniendo en relación el marco geométrico con el marco algebraico del siguiente modo:

II.10. JUEGO DE IDENTIFICACIÓN

Este juego de identificación tiene por objeto conseguir que los alumnos se familiaricen con las expresiones de desigualdades representando a zonas del plano de diferentes contornos. En la Lección Primera se habían logrado representar semiplanos (determinados por rectas) horizontales, verticales y oblicuos (solamente los inclinados 45°) y aquí se trata de ampliar ese conocimiento a zonas determinadas por cualquier tipo de recta y por algunas curvas sencillas de ecuación algebraica (parábolas de eje horizontal o vertical y curvas con un punto de inflexión).

II.10.1. DOBLE ENSAYO.

En el primer momento se elaboró un folio con siete gráficas para identificar y otro folio con las siete expresiones correspondientes pero en distinto orden. La elaboración se hizo teniendo en cuenta las siguientes <u>variables didácticas:</u>

<u>Variables didáctico algebraicas:</u>

Son aquellas características de la situación, cuya variación produce un efecto didáctico que afecta a la jerarquía de las estrategias empleadas por los alumnos.

En el juego de identificación se usan las siguientes:

1- El empleo de expresiones con una variable o con dos: "$y = 3$" o "$x \leq y$".

2- Las expresiones con igualdades o desigualdades.

3- El grado de las expresiones (ecuaciones o inecuaciones) empleadas.

4- La expresión se satisface, o no, para el origen de coordenadas, punto (0,0).

5- El empleo de fórmulas con coeficientes enteros, o no.

6- Expresiones con una sola fórmula, o con más de una.

7- Expresiones que se satisfacen, o no, para números enteros.

8- Expresiones conocidas, o no, en "la historia de la clase".

Muchas de estas variables didáctico algebraicas tienen su correspondiente variable didáctico geométrica

Variables didáctico geométricas

1- Lineas paralelas a los ejes coordenados o lineas oblicuas o curvas. (Correspondiente a la 1ª de las anteriores)

2- Lineas del plano o zonas del plano. (Correspondiente a la 2ª de las anteriores)

3- Rectas o curvas parábolas o curvas no parábolas. (Correspondiente a la 3ª de las anteriores)

4- Las gráficas contienen, o no, al origen de coordenadas. (Correspondiente a la 4ª de las anteriores)

5- Lineas conocidas en "la historia de la clase", o no. (Correspondiente a la 8ª de las anteriores).

Analizando, según estas variables, los siete ejercicios incluidos en el juego, observamos que cinco de ellos podian resultar mucho más fáciles que los otros dos. Como consecuencia se podía dar lo que en la didáctica francesa se conoce como una ruptura del contrato que es una no aceptación por parte de algunos alumnos de la responsabilidad de actuación. A causa de esta ruptura del contrato podía darse el caso de que el alumno no hiciera el esfuerzo suficiente para resolver los ejercicios difíciles.

Esta reacción puede darse cuando se han presentado muchos ejercicios fáciles y pocos difíciles pues el alumno, al realizar los fáciles, ha conseguido contestar a una mayoria de los ejercicios propuestos y puede pensar que ya es suficiente pues son muy pocos los que quedan por contestar. En consecuencia reduce el esfuerzo que coincide además con la mayor dificultad de los que le faltan y asi se da el caso de que no consigue resolverlos por falta de una motivación suficiente.

También puede suceder, al aparecer un ejercicio mucho más difícil que el resto, que un número importante de alumnos no trate de resolverlo porque crean que se han equivocado o que no conocen lo necesario para intentarlo ya que, en relación con el resto de los ejercicios, no lo encuentran correspondiente en dificultad.

En cualquier caso, se produce así un punto de <u>ruptura del contrato didáctico.</u> Se deben evitar las rupturas de contrato no deseadas. Para evitar esta ruptura se puede buscar una graduación de los ejercicios. De este modo, el juego de identificación que constaba inicialmente de siete ejercicios se vió transformado en una serie de 20 ejercicios graduados con diversos grados de dificultad aunque no ordenados en progresión creciente, sino mezclados entre sí.

II.10.2. EXPERIENCIA DEL JUEGO DE IDENTIFICACIÓN.

Esta lección fué realizada con los alumnos, como Lección Segunda después de la Primera Lección y del Debate que le siguió. Se formaron nueve equipos de alumnos, cada uno de los cuales trabajó, en principio, por separado de los demás. Después se pusieron en común los resultados obtenidos, creando debates en cuanto existieron divergencias de opinión, pidiendo a los alumnos que expresaran los razonamientos seguidos para llegar a las conclusiones que exponían.

Material empleado:

Se entregaron, a cada equipo de alumnos, dos folios: uno con 20 dibujos numerados de rectas y de curvas, algunas de las cuales determinaban zonas sombreadas en el plano (Figura 4.4), y otro donde figuraban 23 expresiones (igualdades y desigualdades) entre las que se encontraban las correspondientes a esas lineas y zonas (Figura 4.5) pidiéndoles que identificaran las fórmulas que se correspondían con las gráficas adecuadas.

Tiempo de ejecución:

La duración de una clase: 60 minutos. De ellos, 45 minutos se dedicaron a la búsqueda, por parte de cada equipo, de la correspondencia pedida. Los 15 minutos restantes se ocuparon con la puesta en común de los resultados con debate de los mismos.

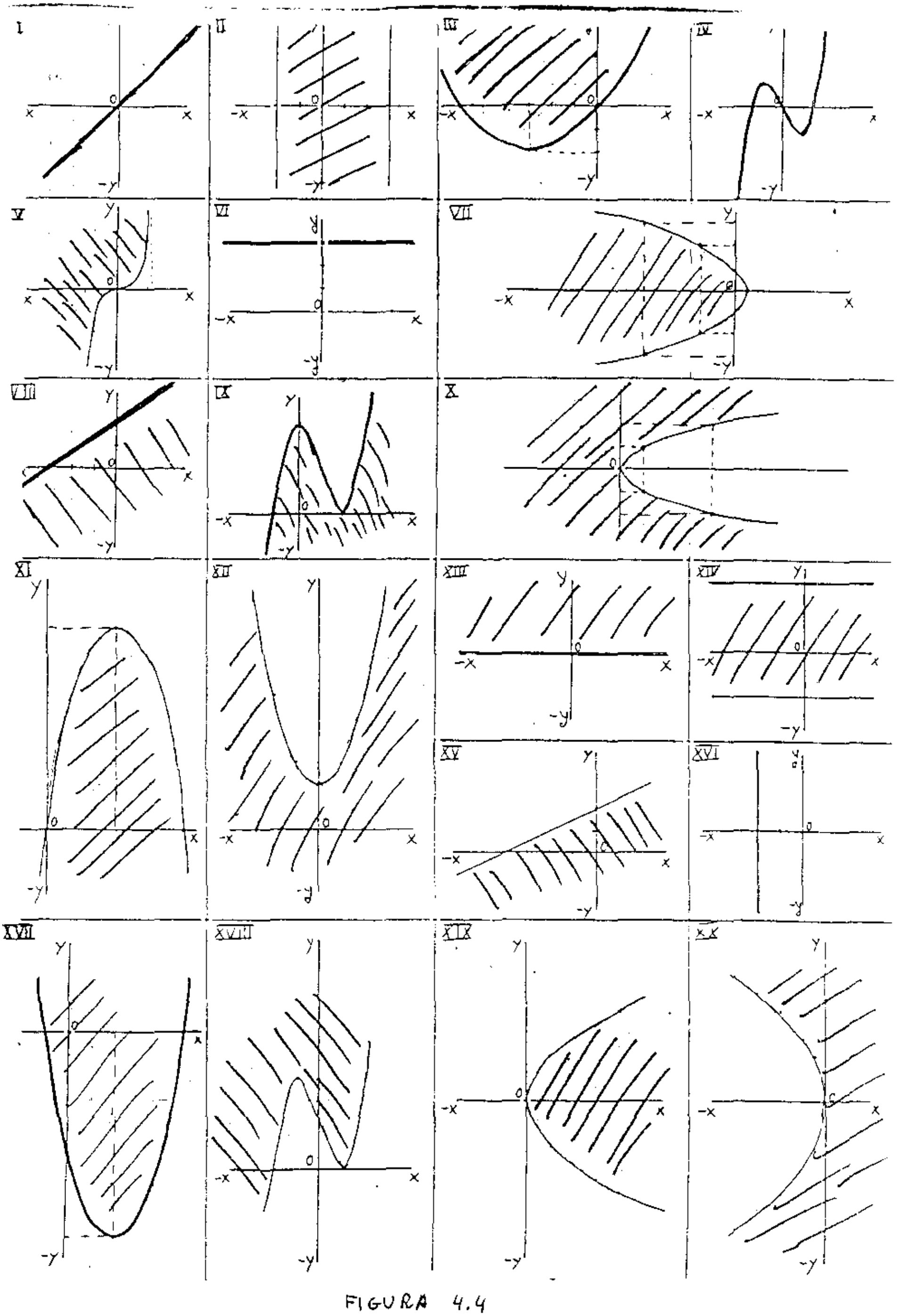

I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
XVI
XVII
XVIII
XIX
XX

FIGURA 4.4

FÓRMULAS CORRESPONDIENTES AL JUEGO DE IDENTIFICACIÓN

1. $y = x^3 - 2x$
2. $y = x$
3. $y = 3$
4. $x = 3$
5. $x = -2$
6. $y^3 < -2x + 1$
7. $y < -x^2 + 6x$
8. $y < x^2 + 2$
9. $2y < x + 4$
10. $y^2 < 4x$
11. $-2 < x < 3$
12. $-2 < y \leq 3$
13. $3y \leq 2x + 6$
14. $y \leq x^3 - 3x^2 + 4$
15. $y > 0$
16. $y > x^2 + 2$
17. $y > x^3$
18. $y > x^3 - 3x + 2$
19. $y^2 > x$
20. $y^2 > -8x$
21. $y \geq x^2 - 4x - 5$
22. $y > x^2 - 4x - 5$
23. $9y > 2x^2 + 12x$

FIGURA 4.5

Puesta en común.

Durante la puesta en común de los resultados obtenidos por los diferentes grupos, los alumnos tienen que justificar, ante las preguntas de sus compañeros, las correspondencias encontradas. Algunas de estas justificaciones son explicitadas a continuación. Se observan justificaciones basadas directamente en la memoria de la clase (Brousseau y Centeno), otras elaboradas haciendo intervenir algunos conocimientos anteriores, relacionándolos entre sí, y otras, que surgen como conocimientos nuevos deducidos de la experimentación hecha con el propio ejercicio.

a) Justificaciones basadas en la memoria de la clase. Son las primeras que se expresan. Creemos que los alumnos se sienten más seguros de estas respuestas que con otros tipos de justificaciones y por eso las emplean en primer lugar:

Grupo nº 1 de alumnos: "La fórmula « y = 3 » se corresponde con la gráfica nº VI porque ésta es paralela al eje XX' y está a 3 unidades de distancia del origen"

Grupo nº 2: " La fórmula « y = x » corresponde a la gráfica nº I porque la fórmula « y = x » es la bisectriz del 1er-3er cuadrante"

Grupo nº 3: "La fórmula « x = -2 » es la correspondiente a la gráfica nº XVI porque es una linea paralela al eje de las y-es"

Grupo nº 4: "La gráfica nº XVI tiene como fórmula « $-2 < x < 3$ » porque tiene la misma forma que la del ejercicio del último dia"

Se aprecia que los alumnos que forman estos cuatro grupos conocían por experiencia anterior la correspondencia entre la fórmula y la gráfica.

b) Justificaciones elaboradas usando, **en parte**, conocimientos anteriores y, en parte, con la elaboración de nuevos conocimientos:

Grupo nº 5: "La expresión « $y > 0$ » corresponde a la gráfica nº XIII pero solo parcialmente pues debería ser « $y \geq 0$ » ".

La apreciación de la diferencia entre estas dos expresiones se debe a un conocimiento elaborado a lo largo de la realización del ejercicio.

Grupo nº 6: "La gráfica nº XIV se corresponde con la expresión « $-2 < y \leq 3$ » porque lo hemos comprobado dando valores a la « y » y con distintos valores de « x » y hemos encontrado puntos".

Han empleado, con las desigualdades, una técnica semejante a las técnicas que conocían para las expresiones de igualdad adaptándola, a la vez, a la doble expresión.

Grupo nº 7: "Hemos encontrado correspondencia entre la gráfica nº V y la expresión « $y < -x^2 + 6x$ » haciendo una tabla de valores".

El uso de la tabla de valores, en las expresiones de desigualdad, supone una modificación de la técnica que, en este caso, necesita hacer una comparación de los valores obtenidos mediante el cálculo, con los varios valores que pueden cumplir la desigualdad. Esto supone un progreso de conocimiento por parte de los alumnos.

Grupo nº 8: (Se opone a la correspondencia encontrada por el grupo nº 7) "Hemos encontrado correspondencia entre la gráfica nº V y la expresión « $y > x^3$ » porque la gráfica no es una parábola, es una curva desconocida, luego la fórmula debe ser también desconocida, y en las expresiones de parábola la « x » está al cuadrado, así que aquí no puede estar al cuadrado".

Este grupo ha encontrado la base de un conocimiento importante, que es la relación que existe entre el grado de la expresión y la forma de la gráfica.

En este momento de la lección se establece un debate entre los grupos para elegir la expresión adecuada a la gráfica nº V y así aparecen expresados "teoremas" como los siguientes:

Grupo nº 2: "La gráfica nº V corresponde a la fórmula « $y > x^3$ » porque se parece a la fórmula « $y > x^2$ » y pasará por el vértice (se refieren al origen de coordenadas) porque cuando « x » es igual a cero, « y » es igual a cero".

También aquí se usa un conocimiento anterior adquirido al estudiar las funciones, es decir las expresiones con igualdades, y se adapta a la nueva exigencia que plantean las desigualdades. Sin embargo la última parte del razonamiento, aunque es necesaria, no es suficiente y serviría del mismo modo para apoyar la otra respuesta.

Grupo nº 8: "La gráfica nº VIII tiene como fórmula: « $3y \leq 2x + 6$ ». Eso se comprueba buscando los puntos de corte con los ejes".

Se usa el conocimiento anterior de que la igualdad: « $3y = 2x + 6$ » representa una recta y, de que se puede determinar por dos puntos, y se aplica para localizar la zona gráfica pedida, que corresponde a una expresión de desigualdad completamente nueva pues contiene dos incógnitas.

Grupo nº 9: "La gráfica nº XVII corresponde a la fórmula: « $y \geq x^2 - 4x - 5$ ». Se comprueba <u>resolviendo</u> la parábola, hallando el vértice y los puntos de corte".

Los conocimientos, que ya se poseen para las igualdades, se combinan con la noción de desigualdad adquirida en la lección anterior.

Grupo nº 9: (Continúa) "La gráfica nº XV corresponde a la fórmula « $2y < x + 4$ ». Se sabe hallando los puntos de corte con los ejes".

Pero es rebatido por el grupo nº 5.

Grupo nº 5: "La gráfica nº XV tiene como fórmula la expresión « $y < x^2 + 2$ » "

Interviene el grupo nº 8.

Grupo nº 8: "La gráfica nº XV no es una parábola y no puede corresponderle una expresión de parábola como la expresión « $y < x^2 + 2$ » "

En este momento se produce un debate, sobre las dos expresiones, en el que se discute la posibilidad de que dos expresiones distintas correspondan a la misma gráfica. Esta posibilidad es rechazada y se acepta como definitiva la expresión propuesta por el grupo nº 9 (que es la correcta).

c) Justificaciones que surgen como conocimientos nuevos nacidos de la propia experiencia.

Estas justificaciones se expresan como teoremas originales que los alumnos emiten.

Grupo nº 3: "La expresión « $y = x^3 - 2x$ » se corresponde con la gráfica nº IV porque tiene dos vértices y tres puntos de corte con los ejes por lo que será de mayor grado (Se refiere al grado dos de las parábolas). Si es de tercer grado tendrá tres soluciones".

Este razonamiento, que se emite como un teorema sin demostración, ha surgido espontáneamente y nosotros le concedemos un gran valor didáctico porque demuestra la posibilidad de que el Juego de Identificación produzca la aparición de conocimientos nuevos.

Grupo nº 8: "La gráfica nº XVIII se corresponde con la fórmula: « $y > x^3 - 3x + 2$ » porque la fórmula está elevada al cubo y la gráfica tendrá dos vértices".

Aquí encontramos otro "teorema" interesante desde el punto de vista didáctico pues este grupo de alumnos emplea un razonamiento que ha surgido en esta misma clase en un momento anterior y que es adoptado como un conocimiento establecido.

Se observa que las correspondencias más difíciles de establecer han sido las de las parábolas de eje horizontal cuya identificación habría sido posible si hubieran pensado en la posibilidad de intercambiar el eje XX' con el eje YY'. Este giro pondría la parábola de eje horizontal como parábola de eje vertical y se vería que se trata de fórmulas del mismo tipo pero cambiando la "x" por la "y".

Este razonamiento nos había parecido más sencillo de hacer que el correspondiente a las curvas no parábolas, las que los alumnos han identificado como curvas de dos vértices, sin embargo han sido las parábolas de eje horizontal las más difíciles de identificar.

Interpretamos esta dificultad como ligada a la inmovilidad de los ejes. Los alumnos no piensan que los ejes de coordenadas son un instrumento de control del plano que ha sido elegido por ellos y que, por tanto, ofrece posibilidades de cambio sino que los conocen como algo estático e inamovible. Este conocimiento de los ejes creemos que establece la dificultad fundamental para la identificación de estas gráficas del ejercicio.

II.11. CONSIDERACIONES SOBRE LA PRESENTACIÓN DE UN JUEGO DE REFUERZO DEL CONOCIMIENTO.

II.11.1. CONSIDERACIONES GENERALES.

En la presentaciòn de un juego de refuerzo podemos identificar cuatro puntos esenciales.

$\boxed{1}$.- Descripción del juego.

Es la presentación del AUTÓMATA o esquema con los estados sucesivos por los que pueden pasar los jugadores. El autómata puede ser finito o infinito, según que el juego sea de un número de posiciones finito o ilimitado. En este último caso estará controlado solamente por el tiempo empleado.

Se presentan las diversas variantes que se pueden establecer para que se entienda bien de qué se trata. Con la explicación de estas variantes se trata solamente de mostrar que hay cosas que podrian variar y que se deben fijar. Las razones que aconsejan fijarlas se explicarán en el análisis "a priori".

En este punto se hace solamente una descripción del sistema cuya justificación vendrá en el punto 4 que será el análisis "a priori". Aquí hacemos simplemente una presentación del juego.

Se presentan las variables didácticas del juego con sus valores. Esto es decir, **ya**, cuáles son los puntos "sensibles" en el juego. Aquellos que se preparan para que aparezca un conocimiento en un momento determinado.

2.- Explicar y prever los movimientos de cada jugador.

Es presentar el funcionamiento del juego. Es decir, los estados de conocimiento de cada jugador. Señalar los momentos importantes del juego. Describir si un jugador puede, por ejemplo, actúar **al azar** o según **modelos implícitos de acción**.

Analizar los **modelos implicitos de acción** en cada caso. Ver cuáles son las **motivaciones** de la elección para actúar de determinadas formas. Se puede ver qué interés tiene, para el jugador, realizar determinadas elecciones o movimientos. Explicar lo que puede pasar si actúa de determinadas maneras.

Describir cuáles son las **retroacciones** que el juego produce sobre el jugador. Estas retroacciones del juego que son las motivaciones de las decisiones siguientes.

$\boxed{3}$.- Evolución de las estrategias.

En particular describir cuál es la **estrategia de base** con los conocimientos requeridos previamente, cuál es la **estrategia óptima**, y, si las hay, **estrategias intermedias o alternativas.**

Describir las condiciones de evolución e interrelación de las estrategias del juego. En determinados momentos del mismo puede haber razones que hagan que una estrategia sea mejor que otra pero puede ser que los alumnos que usan cierta estrategia no lleguen a tener suficiente información como para optar por ese cambio. Estos momentos se deben analizar.

También por eso es interesante la **identificación de los conocimientos** que permitan el cambio de estrategia.

Decir si hay momentos con ciertas condiciones que permiten la evolución de la estrategia, con la consiguiente adaptación del alumno, porque se han favorecido las condiciones para esa evolución. Por ejemplo, si con dos o tres tentativas el alumno puede ver que lo que sucede es ...

También puede ser que digamos: el alumno no puede inventar la solución, PERO EN ESTE MOMENTO LAS CONDICIONES favorecen que, al darle la solución, el alumno la comprenda y vea el porqué es una buena solución, pudiendo hacerla funcionar a partir de ese momento.

Así las condiciones de evolución pueden ser:

- Condiciones de aprendizaje ESPONTANEO

- Condiciones de aprendizaje SIGNIFICATIVO

Las condiciones de **aprendizaje espontáneo** son muy deseables y se dan en las situaciones a-didácticas por excelencia. Son las condiciones que permiten la adaptación del alumno a la situación con la consiguiente reacción ante ella.

Las condiciones de **aprendizaje significativo** son aquellas en las que el alumno no llega espontáneamente al nuevo conocimiento, pero el estado de asimilación en que se encuentra permite que, al serle comunicado el conocimiento, éste sea aprendido **significativamente**. Es decir, que tenga un sentido claro para el alumno, porque viene a dar solución a un problema claramente planteado en su mente debido, precisamente, a esas condiciones creadas por el juego desarrollado.

Es importante la **verificación** del hecho de que las indicaciones o la estrategia de base no implican ya la solución: el conocimiento que queremos enseñar.

En el caso de las indicaciones esta verificación es importante aunque, de todas formas, si este hecho se produce no debe llevarnos a rechazar el juego. Ya hemos visto cómo puede haber aprendizaje significativo aun en el caso de que la estrategia no sea constructible por el alumno, la "situación" puede PERMITIR la introducción del conocimiento a través de las indicaciones y, así, el juego propuesto puede tener propiedades didácticas, al permitir la sugerencia.

Sin embargo, en el caso de la estrategia de base, si PARA COMPRENDER el juego, es necesario tener el conocimiento, ese juego no podria servir para introducirlo. Es el caso en que el juego no funciona como situación <u>a-didáctica</u>. En este caso podria servir como ejercicio de aplicación, adiestramiento o refuerzo. De este tipo es el Juego del Taco.

$\boxed{4}$.- Análisis "a priori" del sistema.

Este análisis es la justificación de la elección del juego. Explicación de cómo se sitúa este juego respecto a las demás posibilidades.

Es un razonamiento. Se puede hacer como una génesis del juego. En realidad es una génesis falsa pues es deducida por la razón DESPUÉS de la génesis verdadera, o "histórica"; pero reproduce lo que se ha hecho en la construcción del juego, explicando: Tal posibilidad fué rechazada porque nos llevaba a estas consecuencias o a estos efectos que no queriamos, o tal otra posibilidad es la que se ha aceptado por éstas y éstas razones.

Se trata de una **génesis racional** que sigue los pasos de la verdadera génesis "histórica". Es la discusión de la NECESIDAD de este juego.

Se debe intentar mostrar la solución alcanzada en comparación con las otras soluciones posibles e interesantes -interesantes en apariencia pues no han convenido después de la discusión.

Se incluye aqui el estudio de las variables, presentadas anteriormente en el punto 1, y de sus efectos.

Se puede estudiar aqui también el **carácter general** de la "situación fundamental", es decir, la propiedad de que puede generar las **situaciones** propuestas. Esto es, colocar la situación propuesta en relación con una "situación fundamental" y, por tanto, que pueda generar todas las situaciones didácticas que se usan habitualmente.

II.11.2. ANTECEDENTES

Antes de organizar "el juego del taco" habiamos estudiado una posibilidad diferente que era el **"juego de escritura formal"**. Se trataba de un juego **para desarrollar el lenguaje simbólico.**

Este juego consistia en dar a cada jugador un punto fijo del plano. Sea el (0,1) para el jugador A y el (0,-1) para el jugador B.

En un montón, y boca abajo, se tienen cartas con simbolos lógicos ($\cup, \cap, \subset, \Rightarrow, \ldots$) mezcladas con cartas con relaciones ($x \geq -2$, $x \leq -2$, $x \leq y$, $x \geq y$, $y > 0$, $3x-4y+12>0$, $y < \frac{1}{4} x + 3, \ldots$).

Durante el juego se trata de conseguir expresiones que representarán zonas en las que cada jugador tiene que tener su punto comprendido.

Por ejemplo: Supongamos que A extrae la carta con la relación " $x \geq y$ ". Con esta relación solamente no podrá jugar, pues su punto, que es el (0,1) no estará comprendido en esa zona. Tendrá que esperar el turno siguiente.

A continuación se puede suponer que el jugador B extrae la carta con la relación " $y<0$ ", podrá jugar con ella, pues su punto, (0,-1), sí que estará comprendido en la zona representada por esta carta.

$$(0,-1) \in \{ x \mid y < 0 \}$$

Si, a continuación, el jugador A extrae un símbolo de "complementario": "C", podrá componer la expresión " $C(x \geq y)$ " (complementaria de $x \geq y$) que será en realidad: " $x < y$ ", pues ahora su punto , (0,1), sí que estará comprendido en el conjunto de los puntos:

$$(0,1) \in \{ x \mid x < y \}$$

Y extrayendo cartas del montón proseguirá el juego.

Pero **esta idea inicial planteaba algunos problemas didácticos.** Uno era: Las reglas de utilización de los *símbolos deberían conocerse antes de jugar, con lo que el* juego no serviría para enseñarlas. Nos interesaría transformar el juego para que estas reglas de utilización de los símbolos fueran una consecuencia del propio juego.

Otro problema era la falta de una retroacción del juego que dijera a los alumnos cuándo había un error y cuándo no.

Buscando esta retroacción empezamos a idear un juego en el que el alumno tuviera que "demostrar", a su contrincante, sus afirmaciones para ganar, de modo que éste censurara las respuestas del primero.

Así empezó a crearse "el juego del taco".

II.11.3. JUEGO DEL TACO.

Vamos a ver ahora nuestra presentación del "Juego del Taco".

II.11.3.1. Descripción del juego.

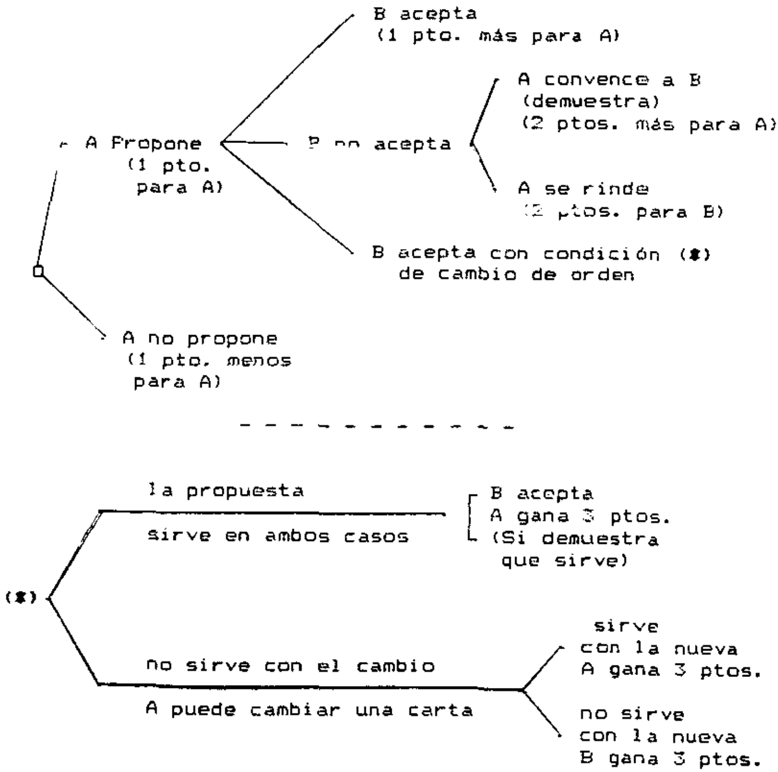
El juego consiste en el enfrentamiento de dos jugadores (o dos equipos de jugadores), que representamos por A y B.

Ante ellos, dos tacos con tarjetas boca abajo. En un taco, las tarjetas de tipo "N" llevan UN número cada una. En el otro taco, las tarjetas del tipo "D", que llevan escrita una desigualdad con UNA o DOS variables ("x", o "x" e "y").

Cada jugador comienza tomando cuatro tarjetas del tipo "N" que no muestra al otro jugador. Estas son sus cartas.

Uno de ellos levanta una tarjeta del taco "D", con una desigualdad que queda sobre la mesa. Ambos jugadores jugarán la primera partida (dos tiradas), usando esta primera desigualdad.

Vamos a esquematizar los posibles estados del juego mediante lo que hemos llamado un **autómata** o esquema representativo. En nuestro juego se trata de un **autómata finito o limitado:**



AUTÓMATA DEL JUEGO

El primer movimiento lo realiza el jugador A, haciendo una "propuesta" que consiste en poner sobre la mesa una o dos de sus cartas con números, según necesite. Con este gesto "propone" esos números como solución de la desigualdad. Con esta propuesta ya anota 1 punto a su favor.

(En caso de no apostar, el jugador A perderá 1 punto y pasará el turno al otro jugador).

En ese momento el jugador B puede:

a) Aceptar la propuesta.

b) Rechazarla.

c) Aceptarla con la condición de cambiar el orden de las cartas (siempre que sean dos), o cambiar la carta, si es una.

Vamos a ver cómo se desarrolla la partida en cada uno de estos casos.

a) Si el jugador B acepta la propuesta, el jugador A gana esta apuesta y, con ella 1 punto más a su favor.

A continuación cambian los papeles. En la segunda apuesta es el jugador B quien propone, y A el que debe aceptar o no la propuesta.

El jugador A deshechará las cartas que haya usado colocándolas en el fondo del taco y en su lugar tomará otras tantas de la parte superior del taco, para que tenga de nuevo cuatro cartas en la mano.

b) Si el jugador B rechaza la propuesta se crean dos posibilidades: A se rinde (1) y, entonces, el jugador B gana 2 puntos, o A convence a B (demuestra) de que su proposición era correcta y, entonces, A gana 2 puntos (1).

> [Cada vez que escribo la señal (1) quiero indicar que termina la primera apuesta hecha por el jugador A y comienza la segunda apuesta en la que es el jugador B quien propone. Así se repite el ciclo.]

c) Si B acepta con cambio de orden, se cambia el orden de las tarjetas y puede suceder:

- Que A demuestre que el nuevo orden satisface también y entonces A gana 2 puntos (1).

- O que A, al ver que con el cambio no se satisface la desigualdad, decida cambiar UNA carta por otra de las suyas (este cambio se permite). Si con la nueva carta demuestra que sirve, el jugador A ganará 2 puntos (1) y si no sirve será B quién gane los 2 puntos (1).

Terminados los movimientos correspondientes a la propuesta de A, momentos señalados con (1), se invierten los papeles, y es el jugador B el que propone.

Cada vez que los dos jugadores han hecho una apuesta cada uno, se retira la carta de la mesa, se coloca al final del taco "D" y se extrae una nueva carta de éste, para seguir jugando.

Existen variantes del juego:

1ª.- Poner dos jugadores o dos equipos de *jugadores.*

2ª.- Que le demos al jugador B opción doble: aceptar o rechazar, o que tenga opción triple: la del "cambio de orden", además.

Las variables didácticas que podemos utilizar son:

1ª.- Que las expresiones del taco sean con una variable ("x"), con dos ("x" e "y") o con más variables.

2ª.- Que las expresiones tengan las variables en un solo miembro o en los dos.

II.11.3.2. Explicar y prever los movimientos de los jugadores.

En el inicio, el juego invita al jugador A a proponer alguna de sus cartas porque es la única forma de ganar algunos puntos pues si no propone pierde 1 punto ya de entrada. La propuesta puede efectuarse aunque el alumno no esté seguro de que sea correcta, es decir aunque el alumno no posea el conocimiento necesario para comprobar la corrección de su propuesta. Puede ser una propuesta al azar.

Hay un **momento importante** en el juego:

Cuando el jugador B debe responder a la "propuesta" del jugador A. En este momento B tiene tres opciones: aceptar, no aceptar o aceptar con cambio de orden.

Si B acepta, le da a ganar un punto al jugador A, y si rechaza, impide que el jugador A gane un punto pero, a la vez, entra en la dialéctica del juego. El jugador B puede ahora ganar 2 puntos, si el jugador A se rinde, pero también puede dar a ganar 2 puntos al jugador A, si éste le "demuestra" que sus cartas eran válidas.

Para el jugador B la primera opción que se le ofrece le permite también actuar usando el azar como estrategia pero en cuanto realice dos o tres veces el juego comprenderá que su elección es más segura si puede controlar la corrección, o no, de la propuesta de A.

En este momento, de la primera respuesta de B al jugador A, el jugador B deseará saber si la propuesta hecha por A es correcta o no. Si sabe que es correcta, tendrá la posibilidad de intentar arrebatarle algún punto a A eligiendo la opción de aceptar con cambio de orden. Si sabe que no es correcta, será mejor rechazar la propuesta y así ganar dos puntos. El tener ese conocimiento se convertirá en una gran ventaja para continuar el juego.

Un **momento importante de retroacción** del juego, sobre el jugador A, se produce cuando el jugador B no le acepta la propuesta. El jugador A se ve forzado a "demostrar" la validez de ésta, para ganar dos puntos, o a rendirse con lo que será B quien los gane. En este momento habrá una estimulación para conseguir esta "demostración", que en algunos casos puede ser gráfica, y en otros será decididamente analítica (substituyendo los valores de las coordenadas del punto en la desigualdad).

Hay otro momento del juego que nos interesa resaltar, la tercera opción del jugador B: Aceptar con condición de cambio de orden. Esta opción es interesante para el jugador B porque le da la posibilidad de la mayor ganancia (tres puntos). Se ha establecido así para estimular que se produzca su elección, pues pone en evidencia, para los alumnos, el hecho de que una desigualdad se satisface para más de un valor (o de una pareja de valores). Este hecho constituye una de las diferencias principales entre ecuaciones e inecuaciones y constituye un conocimiento que deseamos que sea adquirido.

II.11.3.3. Respecto a las estrategias.

Una estrategia de base, empleada por los alumnos, puede ser el azar.

Veamos lo que sucede **si se emplea el azar:**

Supongamos que A y B lo usan.

El jugador A comienza el juego y tiene, por tanto, 50% de posibilidades (½ de probabilidad) de proponer y otro tanto de no proponer. Si no propone perderá un punto. Veamos que es lo que puede ganar si propone.

Cuando el jugador A hace una propuesta, el jugador B puede jugar al azar, y entonces hay 2/3 de probabilidad de que se entable "el diálogo", pues dos opciones, de las tres posibles para B, llevan al intercambio de opiniones, ya que los dos jugadores deben ponerse de acuerdo sobre quién ha ganado. Solamente en una de estas tres posibilidades (probabilidad 1/6 del total) podrá A ganar 1 punto, directamente, si suponemos que B también juega al azar.

En caso de que B no acepte, A tendrá que demostrar (lo cual ya no es al azar), que su propuesta es válida, para ganar dos puntos. Si ha jugado al azar y no puede demostrar la validez de su propuesta, perderá dos puntos.

En caso de que B acepte con condición de cambio, se entra en una fase del juego en que es necesario demostrar la validez, o no, de la propuesta, y en la que ya no se puede proseguir al azar.

Vamos a expresar cuáles son las probabilidades de que se produzcan cada uno de los distintos desarrollos del juego, suponiendo que éste se realice al azar. Así, observaremos, que esta estrategia no es la ganadora y que, **si el alumno quiere ganar, debe desarrollar otras distintas.**

El esquema con las probabilidades se encuentra en la página siguiente.

Los números que están a la derecha y entre paréntesis en el diagrama anterior son los valores de la probabilidad de que suceda cada uno de los desarrollos posibles del juego.

B acepta (1/6)
A (+1)

A convence a B
A (+2) (1/12)

A Propone (1 pto. para A) — B no acepta

A se rinde
B (+2) (1/12)

B acepta con condición (*)
de cambio de orden

O

A no propone (1/2)
(1 pto. menos
para A)

- - - - - - - -

la propuesta
sirve en ambos casos

B acepta
A (+3 ptos.) (1/12)
(Si demuestra
que sirve)

(*)

no sirve
A cambia carta

Se demuestra
que sirve
con la nueva (1/24)
A (+3 ptos.)

no sirve
con la nueva (1/24)
B (+3 ptos.)

ESQUEMA CON LAS PROBABILIDADES

Se ve que los tres desarrollos que terminan con la mayor ganancia, 3 puntos para alguno de los jugadores, son precisamente los que tienen menor probabilidad de aparecer, si el juego se realiza al azar. Por tanto, los jugadores que intenten obtener más puntos, deberán desarrollar otras estrategias que les ayuden a ganar.

Si B usa la estrategia de buscar la obtención del mayor número de puntos posible, intentará aplicar cualquiera de las dos opciones en las que no se acepta directamente la propuesta del jugador A, pues, en la opción de aceptar la propuesta de A, el jugador B no va a ganar nada. Así provocamos que al alumno le interese que se produzcan las etapas del juego en las que hay que demostrar la validez de la jugada.

Los dos jugadores en cada apuesta deben conocer, lo antes posible, si la "propuesta" es correcta o no, para decidir su estrategia; de modo que si alguno ha empezado jugando al azar, intentará evolucionar a formas más seguras de controlar el juego.

Estamos creando las condiciones para la evolución del alumno hacia una **estrategia óptima**, que será la de sustituir los valores y comprobar si se cumple la desigualdad numérica que resulta.

II.11.3.4. Justificación de la elección del juego.

El "juego del taco" está pensado para que el alumno se familiarice con el manejo de las desigualdades y sus características diferenciadoras de las igualdades.

Los alumnos, en general, piensan en las inecuaciones como expresiones "que tienen UNA SOLUCIÓN". La similitud aparente con las ecuaciones favorece este pensamiento. Deseamos que los alumnos comprendan las desigualdades como relaciones.

Con "el juego del taco" se busca un uso del lenguaje de las desigualdades como relaciones.

(Las desigualdades son "símbolos relacionales" del lenguaje algebraico, en el sentido de Kreisel-Krivine)

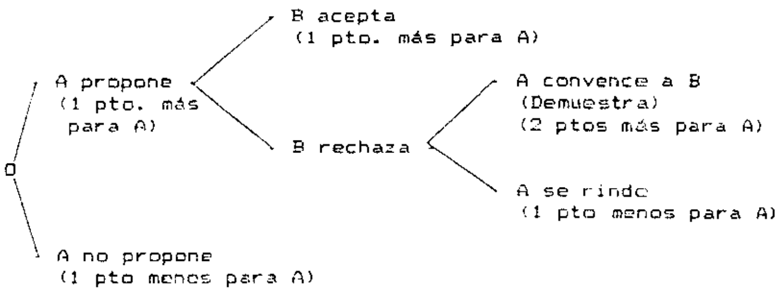
Como se trata de un lenguaje vamos a crear una comunicación, pero lo que estoy planteando no es un problema de formulación. La escritura de las desigualdades es dada a los alumnos. Las "frases" o desigualdades están construidas. Se trata pues, exactamente, de una situación de comunicación en la que habría que producir un mensaje inicial.

Queremos organizar el juego de modo que haya unos alumnos "que propongan" y otros que "opongan su criterio" y que ambos deban llegar a un acuerdo. Así, condicionamos al jugador A a la aceptación o rechazo de su propuesta, por parte del jugador B.

Hubo un momento en que, para realizar en el juego esto que deseábamos, concebimos unos movimientos que formaron un primer autómata. En él se resumían las posibilidades de desarrollo del juego tal y como fué concebido en un primer momento.

Este esquema de realización del juego está expuesto a continuación.

PRIMER AUTÓMATA CREADO.



AUTÓMATA I

Para que el juego ejerciera una <u>retroacción</u> sobre el alumno "que propone", pensamos, simplemente, en un principio en que el jugador B pudiera aceptar o rechazar, tal y como se observa en este primer autómata, pero pronto vimos la ventaja de añadir una tercera posibilidad de control por parte del jugador B: la de aceptar con la condición que llamaremos "de cambio de orden", pues de este modo se hacía más patente, para los jugadores, la idea de que la pareja de números (o el número) posible para cada desigualdad no era única.

[Creemos que esta es una idea clave y que es importante asegurarnos de que el alumno la adquiera. Con este mismo objetivo establecemos que se deban realizar dos apuestas sobre cada relación de desigualdad (ambos jugadores deben hacer una propuesta sobre la misma desigualdad).

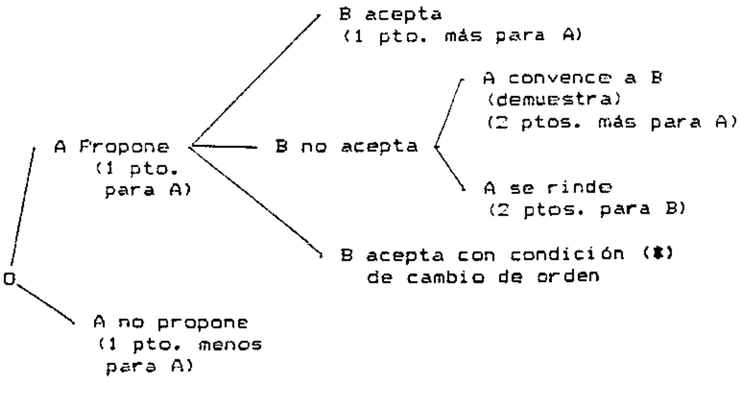
Para el alumno hay una estrategia de base que es "buscar la solución", pero hay un obstáculo de conocimiento (en el sentido en el que el profesor Brousseau utiliza este término) que es que el alumno cree que "la solución es única" y queremos intentar que lo supere.]

Cuando el jugador B observa que la propuesta hecha por A es correcta, tiene una posibilidad de intentar evitar que A gane: Aceptar la propuesta pero "con cambio de orden".

Con esta opción se entra en una fase del juego que exige de uno de los dos jugadores la demostración de la validez (en el caso del jugador A) o la no-validez (en el caso del jugador B) de la propuesta.

Estas nuevas posibilidades de desarrollo del juego que aparecen con la tercera opción de B tienen la ventaja, desde el punto de vista didáctico, de que provocan esa demostración y se encuentran representadas en un autómata que ponemos a continuación y que queda como sigue.

SEGUNDO AUTóMATA CREADO:



- - - - - - - - -

(El esquema continúa en la página siguiente)

(*)

la propuesta sirve en ambos casos — B acepta A gana 3 ptos. (Si demuestra que sirve)

no sirve con el cambio A puede cambiar una carta

- Si demuestra que sirve con la nueva A gana 3 ptos.
- Si demuestra que no sirve con la nueva B gana 3 ptos.

AUTÓMATA II

Queda así organizada una <u>situación de acción</u> en la que hay que escoger los números para proponerlos, pero que también es una especie de <u>situación de prueba</u> pues la necesidad de "convencer" al contrario de que la propuesta es válida (o no-válida) deberá hacer explicitar los "teoremas" que empleen.

La <u>situación</u> sanciona la acción del jugador y eventualmente, le exige crear "un teorema" que demuestre la validez de su propuesta.

Hemos decidido que "la demostración" sea primada con "+2 puntos" para estimular su producción. Si un alumno consigue que su propuesta sea aceptada, después de un rechazo inicial, recibirá 2 puntos, frente al único punto que conseguiría si fuera aceptada en el primer momento.

-.-.-.-.-.-.-.-

III. CONCLUSIONES.

Con esta creación de lecciones se ha intentado desarrollar un tipo de trabajo teórico que pudiera crear unas buenas condiciones de adquisición de los conceptos inherentes al uso de las letras, y de la simbolización, en general, de las desigualdades.

éstas, como concepto matemático, no tienen un lugar de aprendizaje claramente definido, ni en los programas oficiales, (solamente se habla, en ellos, de las inecuaciones), ni en el tiempo real de la clase. Sin embargo son usadas frecuentemente, y su conocimiento, como objeto matemático, y su manipulación correcta, se hacen necesarios para el estudiante de Bachillerato.

La enseñanza activa que aquí se ha propuesto, se encuentra en la linea del aprendizaje por equilibración de Piaget y del aprendizaje por asimilación de Ausubel (Novak p. 69). El verdadero aprendizaje significativo será aquél que ponga en marcha un proceso por el que se relacione la nueva información con algun conocimiento ya establecido en la estructura cognitiva del alumno.

Por otra parte creo que los nuevos caminos de la Reforma tienen que recorrerse con una eficaz preparación teórica de las lecciones, que, al tratarse de lecciones abiertas, plantean gran número de variables didácticas. El conocimiento de estas variables didácticas y su manejo en la teorización y en la práctica de las lecciones nos hará conscientes de los procesos que se desarrollan en la clase y que deben traer como consecuencia la creación de un ambiente, *entorno*, *medio*, o *nicho ecológico*, que favorezca la real adquisición de los nuevos conocimientos.

/-/-/-/-/-/-/-/

A N E X O S

I. Encuesta a los profesores.

II. Carta adjunta a la encuesta.

III. Cuestionario: El uso de las letras.

(III.1., III.2., III.3., III.4 y III.5.)

IV. Matriz a priori - 1

V. Hojas preparatorias para el BMDP.

(V.1.,V.2. y V.3.)

VI. Matriz a priori - 2

VII. Cuestionario preparado para el estudio con el análisis STATITCF.

(VII.1., VII.2., VII.3., VII.4. Y VII.5.)

VIII. Cuestionario de desigualdades.

727

E N C U E S T A

Una persona que ha cursado una carrera de Ciencias pero que ahora se encuentra ajena a la enseñanza, os pregunta que es lo que se enseña, hoy, de Algebra a los alumnos de BUP ¿Qué responderías?

Primer curso

- Combinatoria. Probabilidad.
- Introducción al número real. Aproximación decimal. Radicales.
- Variable estadística. Medidas de posición central y dispersión.
- Cuerpo de los números complejos.
- Anillo de polinomios. Binomio de Newton.
- Divisibilidad de polinomios. Divisibilidad. Cuerpo de fracciones.
- Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica.
- Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
- Sucesiones. Progresiones. Interés compuesto y anualidades.

Segundo curso

- Límite de sucesiones. El número "e". Cálculo de límites.
- Función real de variable real. Límite. Continuidad.
- Funciones exponencial y logarítmica. Representación gráfica y propiedades.
- Funciones circulares. Representación gráfica y propiedades.
- Concepto de derivada. Función derivada. Primitivas de una función.
- Vectores en el plano y en el espacio. Estructura de espacio vectorial.
- El plano afín. Introducción del espacio afín. Geometría afín plana.

Tercer curso

- Producto escalar. El plano euclideo. El plano métrico. Trigonometría plana.
- Estudio del número complejo en forma polar. Operaciones.
- Geometría métrica plana. Cónicas.
- Cálculo diferencial. Aplicaciones.
- Cálculo integral. Aplicaciones.
- Variable aleatoria. Distribución binomial y normal.
- Distribuciones bidimensionales. Rectas de regresión. Correlación.

Querido compañero:

El folio que acompaña a esta carta forma parte de un trabajo que estoy realizando sobre Didáctica del Algebra.

Agradeceré tu interés en responder con el mayor cuidado posible. Las respuestas son tratadas anónimamente.

Este es el temario oficial. Se trata de recoger la *opinión de los profesores sobre la clasificación de los temas de* Bachillerato por áreas, en este caso del área de Algebra.

Te ruego que subrayes los temas que , a tu juicio, pertenezcan a esta área.

Si crees oportuno especificar algún tema o algún subtema que, a tu juicio, sea relevante o más representativo que otros, explícalo también por favor.

Muchas gracias por tu colaboración.

C U E S T I O N A R I O

1.- Rellena los puntos suspensivos:

z ----> z + 5	z ----> 4z
4 ---->	5 ----> ......
p ---->	q ----> ......

2.- "2 sumado con x" se puede escribir como: x + 2. Suma 2 en cada uno de los casos siguientes:

15 ----> ...... ; x + 6 ----> ...... ; 3x ----> ......

3.- "x multiplicado por 3" se puede escribir como 3x". Multiplica por 3 en cada uno de estos casos:

7 ----> ...... ; x + 4 ----> ...... ; 5x ----> ......

4.- Dadas las expresiones:

p + 1 , p + 7 , p - 2 , p - 5 , 2p

¿Puedes contestar?:
La menor de ellas es ....

La mayor de ellas es ....

O, no se puede contestar porque ....

....

5.- Rellena los puntos suspensivos:

Si p + q = 37 , entonces p + q + 2 = ...

Si x - 134 = 672, entonces x - 135 = ...

Si b + d = 6, entonces b + d + f = ...

6.- ¿Qué puedes decir de "p" si p = 3q + 7 y q < 4 ?

....

7.- Si "p" representa el número de pepinos comprados y "t" el número de tomates comprados, y sabemos que cada pepino cuesta 15 pts. y cada tomate 10 pts.

¿Qué representa $15p + 10t$? ....

¿Cuál es el número total de vegetales comprados? ....

8.- ¿Qué puedes decir de "m" si $t = 4m + 3$ y $t = 23$?

....

9.- Sabiendo que $a + 4a$ se puede escribir de forma más simple como $5a$. Escribe de forma más simple, cuando se pueda:

$3b + 5b =$ ....

$3b + 5c =$ ....

$3b + 5c + b =$ ....

$5 + c + 5 - c =$ ....

$5b + (2a - 5b) =$ ....

10.- Si sabes que

$$m = n + p$$

y que

$$m + n + p = 60$$

¿Qué puedes decir de "m"? ....

11.- ¿Qué puedes decir de "n" si sabes que $n + p = 20$ y que "n" es menor que "p" ?

....

12.- Elige un número, halla su doble, súmale 10, divide por 2 y réstale 5. ¿Qué observas? (Puedes probar con otros números)

....

¿Puedes explicar ésto?

....

Intenta expresarlo simbólicamente

....

13.- Si al cuadrado de un número le quitamos 3 unidades obtenemos 78. ¿Cuál era ese número?

....

14.- El doble de un número más su mitad es igual a 20. ¿Sabes cuál es ese número?

....

Explica cómo lo calculas ....

....

15.- Si sabemos que un dólar equivale a 100 pts. y llamamos "d" al número de dólares y "p" al número de pesetas. Escribe una ecuación que relacione "d" con "p".

....

Si cambio 2.000 pts. ¿Cuántos dólares me darán? ....

16.- En un vagón de tren hay "h" compartimentos de 4 plazas y "f" compartimentos de 6 plazas. ¿Cómo expresarías el número de plazas que tiene ese vagón?

....

¿Cuántos compartimentos tiene el vagón? ....

17.- Si sabemos que $p = q + 7$. ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" AUMENTA en 3 unidades?

....

18.- Si $b = 3c + 1$.¿Qué le sucede a "b" cuando "c" aumenta en 2 unidades?

....

19.- La ecuación $(x + 2)^3 - x^2 = 116$ tiene como solución $x=3$.¿Qué solución crees que tendrá la ecuación:

$(3x + 2)^3 - (3x)^2 = 116$?   Solución:..............

20.- El kilómetro y la milla inglesa se encuentran en la proporción de 5 a 8. ¿A cuántos kilómetros equivalen 56 millas?

A...........km

21.- El Sr. Pérez es viajante y cobra 100.000 pts. al mes de sueldo base. Además por cada viaje que hace recibe 5.000 pts.

Si "v" es el número de viajes realizados en un mes y "T" representa el SUELDO TOTAL, escribe una fórmula que relacione "T" con "v" mensualmente.

....

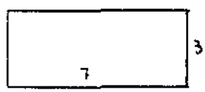
¿Cuánto cobrará en total un mes en el que haya realizado 4 viajes?

....

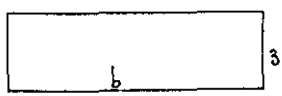
22.- Si compro 3 bombones y 5 caramelos y sabiendo que los bombones cuestan "b" pesetas cada uno y los caramelos "c" pesetas cada uno. ¿Qué representa la expresión $3b + 5c$?

....

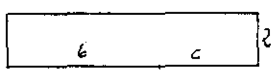
23.- Sabemos que el área de un rectángulo es:
Area = base x altura. ¿Cuáles son las áreas de los rectángulos siguientes?:

1º: 

....

2º: 

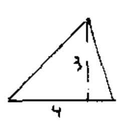
....

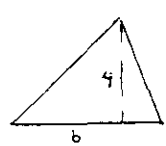
3º: 

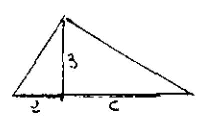
....

24.- Sabemos que el área de un triángulo es: $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

¿Cuál es el área de los triángulos siguientes?:

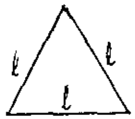


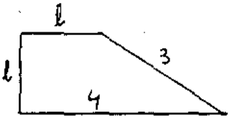




....　.............　.............

25.- El perimetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. ¿Cuál es el perimetro de los siguientes polígonos?:





....

26.- ¿Cuál será el perimetro de este polígono, cuya figura solo vemos parcialmente, si sabemos que tiene "n" lados y que todos miden 2 cm. de longitud?

....

/-------------------------/

ALUMNO: ____

CURSO: ________

MATRIZ A PRIORI - 1

PREGUNTAS / CARACTERES	1A	1B	2	3A	3B	3C	3D	4	5	5C	6	7	8	9	10	11	12A	12C	13	14	15A	15B	16	17	18	19	20	21A	21B	22	23A	23B	23C	24A	24B	24C	25A	25B	26
|VAL| Letra con valor adjudicado		1		1	1	1	1			1	1	1		1	1	1							1							1		1	1		1	1	1	1	1
|N| Letra escrita (pero no tenida en cuenta) letra de acompañamiento		1		1	1	1	1			1				1																1		1	1		1	1		1	
|D| Letra desaparecida		1		1	1	1	1																1							1			1			1		1	
|O| Letra como objeto												1									1									1									
|C| Letra como conjunto de números								1			1					1		1																					
|VAR| Letra como variable											1					1								1	1														
|I| Letra como incognita													1		1					1						1													
|LEN| Enunciado en lenguaje materno			1														1	1	1	1	1	1	1				1	1	1										
|LI| Enunciado con letras	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								1	1	1				1									
|G| Enunciado grafico																															1	1	1	1	1	1	1	1	1
|NUM| Respuesta numerica	1		1						1				1		1		1		1	1		1				1	1		1		1			1					
|S| Respuesta simbolica		1		1	1	1	1			1	1	1		1		1		1			1		1					1				1	1		1	1	1	1	1

HOJA PREPARATORIA PARA EL B.MDP. $\boxed{1}$ V.1

Nº DE VARIABLE	NOMBRE	VALOR MIN.	VALOR MAX	C INICIAL	C FINAL	OBSERVACIONES
1	Nº ALUMNO (IDENTIF.)	001	196	1	3	001 - 037 (7º) 071 - 119 REM 038 - 070 (8º) 120 - 196 BUP
2	CURSOS	1	4	4	4	1 = 7º EGB , 2 = 8º EGB , 3 = REM ; 4 = BUP
3	REF / NO REF	0	2	5	5	0 = 7º , 8º ; 1 = REM , 2 = BUP (N c R)
4	2ª PREGUNTA	0	1	6	6	LOS DOS 1º APARTADOS DE LAS PREGUNTAS 2ª y 3ª { 0 - ERR / 1 - AC
5	3ª PREGUNTA	0	1	7	7	LOS CUATRO APARTADOS RESTANTES DE LAS PREGUNTAS 2ª y 3ª
6	4ª PREGUNTA	0	1	8	8	EXPRESIONES $p+1$, $2p$ MAYOR, MENOR
7	5ª PREGUNTA (a y b)	0	1	9	9	DOS EJERCICIOS NUMÉRICOS
8	5ª PREGUNTA (c)	0	1	10	10	$b+d=6 \rightarrow b+d+f = ..$
9	6ª PREGUNTA	0	1	11	11	$p=3q+7$ y $q<4 \rightarrow$ ¿p?
10	7ª PREGUNTA	0	1	12	12	PEPINOS Y TOMATES
11	8ª PREGUNTA (INCOG.)	0	1	13	13	$t=4m+3$, $t=23 \rightarrow$ ¿m?
12	9ª PREGUNTA	0	1	14	14	MANIPULACIÓN EXPRESIONES ALGEBRAICAS
13	10ª PREGUNTA (INCOG.)	0	1	15	15	INCOGNITA CON SIMBOLISMO
14	11ª PREGUNTA	0	1	16	16	"n MENOR QUE p" y $n+p=20 \rightarrow$ ¿n?
15	12ª PREGUNTA	0	1	17	17	CADENA DE NUMEROS
16	13ª PREGUNTA	0	1	18	18	PEQUEÑO PROBLEMA NUMÉRICO
17	14ª PREGUNTA (INCOG.)	0	1	19	19	PROBLEMA CON INCOGNITA.
18	15ª PREGUNTA	0	1	20	20	DOLARES Y PESETAS
19	16ª PREGUNTA	0	1	21	21	COMPARTIMENTOS Y PLAZAS DEL TREN
20	17ª PREGUNTA	0	1	22	22	$p=q+7$; q AUMENTA
21	18ª PREGUNTA	0	1	23	23	$b=3c+1$; c AUMENTA
22	19ª PREGUNTA (INCOG.)	0	1	24	24	ECUACIÓN CÚBICA
23	21ª PREGUNTA	0	1	25	25	VIAJANTE EXPRESIONES SIMBÓLICA Y NUMÉRICA.
24	22ª PREGUNTA	0	1	26	26	BOMBONES Y CARAMELOS
25	23ª PREGUNTA	0	1	27	27	AREAS DE RECTANGULOS
26	24ª PREGUNTA	0	1	28	28	AREAS DE TRIÁNGULOS

HOJA PREPARATORIA PARA EL B.M.D.P. 2 V.2.

Nº DE VARIABLE	NOMBRE	VALOR MIN	VALOR MAX	C. INICIAL	C. FINAL	OBSERVACIONES
27	25ª PREGUNTA	0	1	29	29	PERÍMETRO EN FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS
28	26ª PREGUNTA	0	1	30	30	PERÍMETRO EN FIGURA INCOMPLETA
29	PUNTUACIÓN Nº TOTAL DE ACIERTOS	0	25	31	32	SIN LAS PREGUNTAS 1ª y 20ª
30	PUNTUACIÓN VAL	0	13	33	34	3,5,6,7,9,10,11,16,22,23,24,25,26
31	PUNTUACIÓN N	0	7	35	35	3,5C,9,22,23,24,25
32	PUNTUACIÓN D	0	6	36	36	3,16,22,23,24,25
33	PUNTUACIÓN O	0	3	37	37	7,17,22
34	PUNTUACIÓN C	0	3	38	38	4,6,12
35	PUNTUACIÓN VAR	0	4	39	39	6,11,17,18
36	PUNTUACIÓN I	0	4	40	40	8,10,14,19
37	Nº RESPUESTAS LEN	0	7	41	41	2,12,13,14,15,16,21 (Ac)
38	Nº RESPUESTAS LI	0	14	42	43	3,4,5,5C,6,7,8,9,10,11,17,18,19,22 (Ac)
39	Nº RESPUESTAS G	0	4	44	44	23,24,25,26 (Ac)
40	Nº RESPUESTAS NUM	0	12	45	46	2,5,8,10,12,13,14,15B,19,21,23,24 SE SUMAN LOS QUE RESPONDEN BIEN Y LOS QUE SÓLO RESPONDEN NUM
41	Nº RESPUESTAS S	0	13	47	48	3,5C,6,9,11,12,15A,16,21,23,24,25,26 (Ac)
42	PUNTUACIÓN VAL-G	0	4	49	49	23,24,25,26 PREG CON CARACT. VAL Y G
43	PUNTUACIÓN VAL-(LI o LEN)	0	9	50	50	3,5C,6,7,9,10,11,16,22 PREG. CON CARACT. VAL Y (LI o LEN)
44	PUNTUACIÓN N-G	0	3	51	51	23,24,25 PREG CON CARACT N y G
45	PUNTUACIÓN N-(LI o LEN)	0	4	52	52	3,5C,9,22 PREG CON CARACT N y LI
46	PUNTUACIÓN D-G	0	3	53	53	23,24,25 PREG CON CARACT. D y G
47	PUNTUACIÓN D-(LI o LEN)	0	3	54	54	3,16,22 PREG CON CARACT. D y (LI o LEN)
48	PUNTUACIÓN VAL-LEN	0	1	55	55	16 PREG CON CARACT. VAL Y LEN
49	PUNTUACIÓN VAL-LI	0	8	56	56	3,5C,6,7,9,10,11,22
50	PUNTUACIÓN D-LEN	0	1	57	57	16
51	PUNTUACIÓN D-LI	0	2	58	58	3,22
52	PUNTUACIÓN LEN-NUM	0	6	59	59	2,12A,13,14,15B,21B

HOJA PREPARATORIA PARA EL BMDP. 3 V.3

Nº DE VARIABLE	NOMBRE	VALOR MIN	VALOR MAX	C INICIAL	C FINAL	OBSERVACIONES
53	PUNTUACIÓN LEN-S	0	4	60	60	12C,15A,16,21A (Ac)
54	PUNTUACION L-NUM	0	4	61	61	5,8,10,19
55	PUNTUACION L-S	0	6	62	62	5 5C,6,7,9,11 (Ac)
56	PUNTUACIÓN G-NUM	0	2	63	63	23A,24A (SOBRE COLUMNAS)
57	PUNTUACION G-S	0	4	64	64	23BC,24BC,25,26 (Ac)
58	TERBIS (1TB)	0	4	65	65	0-Nc 1-Ac 2-EV 3-EN 4-ED
59	CUAR BIS	0	5	66	66	0-Nc 1-Ac/Cons 5-Cons
60	QUIC BIS	0	3	67	67	0-Nc 1-Ac 2-EV 3-EN
61	SEX BIS	0	5	68	68	0-Nc 1-Ac 2-EV 5-CONS
62	SEX TRIS	0	7	69	69	0-Nc 1-Var
63	SEP BIS	0	6	70	70	0-Nc 1-Ac 2-EV 6-OBJ
64	DEC BIS	0	2	71	71	0-Nc 1-Ac(I) 2-EV
65	ONC BIS	0	2	72	72	0-Nc 1-Ac(Voz) 2-EV
66	DOCE BIS	0	9	73	73	0-Nc 1-(Ac/CONS) 5-CONS 9-NUM
67	CAT BIS	0	9	74	74	0-Nc 8-I 9-NUM(I)
68	QUIN BIS	0	6	75	75	0-Nc 1-Ac 6-OBJ
69	DSEI BIS	0	4	76	76	0-Nc 1-Ac 2-EV 4-ED
70	DSTE BIS	0	9	77	77	0-Nc 1-Ac(VAR) 9-NUM
71	DOCHO BIS	0	9	78	78	0-Nc 1-Ac(VAR) 9-NUM
72	DINUE BIS	0	1	79	79	0-Nc 1-Ac(I)
73	VENTI BIS	0	9	80	80	0-Nc 1-Ac(NUM) 9-NUM
74	VENTDOS BIS	0	6	81	81	0-Nc 1-Ac 2-EV 3-EN 4-ED 6-OBJ
75	VTRES BIS	0	9	82	82	0-Nc 1-Ac(NUM) 2-EV 3-EN 4-ED 9-NUM
76	VCUA BIS	0	9	83	83	0-Nc 1-Ac(NUM) 2-EV 3-EN 4-ED 9-NUM
77	VCIN BIS	0	4	84	84	0-Nc 1-Ac 2-EV 3-EN 4-ED
78	VSEI BIS	0	2	85	85	0-Nc 1-Ac 2-EV

NUEVOS HOMBRES

PREGUNTAS

CARACTERES O ALUMNOS SUPLEMENTARIOS

MATRIZ A PRIORI - 2

CARPRE

	2a NU1	3a LE1	4a ORD	5a NU2	5aC LE2	6a DES	7a OB1	8a IN1	9a EXP	10a IN2	11a VA2	12a CAO	13a NU3	14a IN3	15a OB2	16a TRE	17a VA3	18a VA4	19a IN4	21a VJ	22a OB3	23a GE1	24a GE2	25a GE3	26a GE4
S1 (VAP) - Letra valorada		1			1	1	1		1	1	1					1					1	1	1	1	1
S2 (NP) - Letra acompañamiento		1			1				1												1	1	1	1	
S3 (DEP) - Letra desaparecida		1														1					1	1	1	1	
S4 (OP) - Letra como objeto							1								1						1				
S5 (C) - Letra como conjunto de números			1			1					1	1													
S6 (VAR) - Letra como variable						1					1						1	1							
S7 (IN) - *Letra como incógnita*								1		1				1					1						
S8 (LEN) - Enunciado en lenguaje materno	1											1	1	1	1	1				1					
S9 (LI) - Enunciado en lenguaje literal		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1		1				
S10 (G) - Enunciado en lenguaje grafico																						1	1	1	1
S11 (NUM) - Respuesta numerica	1			1				1		1		1	1	1	1				1	1		1	1		
S12 (S) - Respuesta simbólica		1			1	1	1		1		1	1			1	1				1		1	1	1	1

↑

CARPREI

VI

739 ×'

C U E S T I O N A R I O

1.- Rellena los puntos suspensivos:

z ----> z + 5   z ----> 4z

4 ----> ......   5 ----> ......

p ----> ......   q ----> ......

2.- "2 sumado con x" se puede escribir como: x + 2. Suma 2 en cada uno de los casos siguientes:

LE1

NU1 15 ----> ...... ; x + 6 ----> ...... ; 3x ----> ......

3.- "x multiplicado por 3" se puede escribir como 3x". Multiplica por 3 en cada uno de estos casos:

7 ----> ...... ; x + 4 ----> ...... ; 5x ----> ......

CRD 4.- Dadas las expresiones:

p + 1 , p + 7 , p - 2 , p - 5 , 2p

¿Puedes contestar?:

La menor de ellas es ....

La mayor de ellas es ....

O, no se puede contestar porque ....

....

5.- Rellena los puntos suspensivos:

NU2 Si p + q = 37 , entonces p + q + 2 = ...

Si x - 134 = 672, entonces x - 135 = ...

LE2 Si b + d = 6, entonces b + d + f = ...

6.- ¿Qué puedes decir de "p" si p = 3q + 7 y q < 4 ?

DES

....

OB1 7.- Si "p" representa el número de pepinos comprados y "t" el número de tomates comprados, y sabemos que cada pepino cuesta 15 pts. y cada tomate 10 pts.

¿Qué representa 15p + 10t ? ....

¿Cuál es el número total de vegetales comprados? ....

IN1 8.- ¿Qué puedes decir de "m" si t = 4m + 3 y t = 23 ?

....

EXP 9.- Sabiendo que a + 4a se puede escribir de forma más simple como 5a. Escribe de forma más simple, cuando se pueda:

3b + 5b = ...

3b + 5c = ...

3b + 5c + b = ...

5 + c + 5 - c = ...

5b + (2a - 5b) = ...

IN2 10.- Si sabes que

m = n + p

y que

m + n + p = 60

¿Qué puedes decir de "m"? ....

VA2 11.- ¿Qué puedes decir de "n" si sabes que n + p = 20 y que "n" es menor que "p" ?

....

CAD 12.- Elige un número, halla su doble, súmale 10, divide por 2 y réstale 5. ¿Qué observas? (Puedes probar con otros números)

....

¿Puedes explicar ésto?

....

Intenta expresarlo simbólicamente

....

NU3 13.- Si al *cuadrado de un número le quitamos 3 unidades* obtenemos 78. ¿Cuál era ese número?

....

IN3 14.- El doble de un número más su mitad es igual a 20. *¿Sabes cuál es ese número?*

....

Explica cómo lo calculas ....

....

CB2 15.- Si sabemos que un dólar equivale a 100 pts. y llamamos "d" al número de dólares y "p" al número de pesetas. Escribe una *ecuación que relacione "d" con "p".*

....

Si cambio 2.000 pts. ¿Cuántos dólares me darán? ....

TRE 16.- En un vagón de tren hay "h" compartimentos de 4 plazas y "f" compartimentos de 6 plazas. ¿Cómo expresarías el número de plazas que tiene ese vagón?

....

¿Cuántos compartimentos tiene el vagón? ....

VA3 17.- Si sabemos que $p = q + 7$. ¿Qué le sucede a "p" cuando "q" AUMENTA en 3 unidades?

....

VA4 18.- Si $b = 3c + 1$.¿Qué le sucede a "b" cuando "c" aumenta en 2 unidades?

....

IN4 19.- La ecuación $(x + 2)^3 - x^2 = 116$ tiene como solución $x=3$.¿Qué solución crees que tendrá la ecuación:

$(3x + 2)^3 - (3x)^2 = 116$? Solución:..............

NO EMPLEADA 20.- El kilómetro y la milla inglesa se encuentran en la *proporción de 5 a 8. ¿A cuántos kilómetros equivalen 56 millas?*

A...........km

VJ 21.- El Sr. Pérez es viajante y cobra 100.000 pts. al mes de sueldo base. Además por cada viaje que hace recibe 5.000 pts.

Si "v" es el número de viajes realizados en un mes y "T" representa el SUELDO TOTAL, escribe una fórmula que relacione "T" con "v" mensualmente.

....

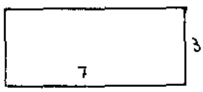
¿Cuánto cobrará en total un mes en el que haya realizado 4 viajes?

....

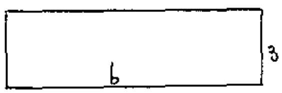
OB3 22.- Si compro 3 bombones y 5 caramelos y sabiendo que los bombones cuestan "b" pesetas cada uno y los caramelos "c" pesetas cada uno. ¿Qué representa la expresión 3b + 5c ?

....

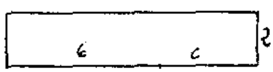
GE1 23.- Sabemos que el área de un rectángulo es:
Area = base x altura. ¿Cuáles son las áreas de los rectángulos siguientes?:

1º: 

....

2º: 

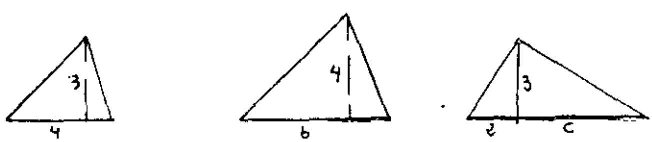
....

3º: 

....

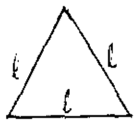
GE2 24.- Sabemos que el área de un triángulo es: $\dfrac{\text{base x altura}}{2}$

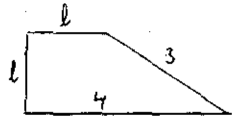
¿Cuál es el área de los triángulos siguientes?:



....

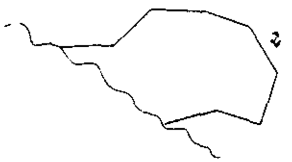
GE3 25.- El *perimetro* de un *poligono* es la suma de las longitudes de sus lados. ¿Cuál es el perimetro de los siguientes poligonos?:





....

GE4 26.- ¿Cuál será el perimetro de este poligono, cuya figura solo vemos parcialmente, si sabemos que tiene "n" lados y que todos miden 2 cm. de longitud?



....

/--------------------------/

ALUMNO: ____

CURSO: ________

A N E X O VIII

Cuestionario (Pre-cuestionario)

SOL 1.- Resuelve la inecuación: $\frac{x-2}{4} - \frac{x+3}{2} \leq 1$

SIS 2.- Dadas las inecuaciones: i) $2x + 5 > 3x - 2$; ii) $\frac{1}{6}x \leq \frac{4}{3}$
Compara entre sí los conjuntos-solución de ambas.

PAR 3.- Resuelve, expresando las soluciones, la inecuación:

$$3x^2 - 10x + 3 \leq 0$$

FAC 4.- Resuelve la inecuación: $(x-3)(x-2) \geqslant 0$

SEG 5.- Resuelve la inecuación: $2x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$

NUM 6.- Demuestra que la suma de dos números impares consecutivos es mayor que el doble del primero de ellos.

FUN 7.- a) Expresa dos soluciones que cumplan la desigualdad:

$$y < \frac{5-2x}{3}$$

b) ¿Hay más soluciones? Razona tu respuesta.

c) ¿Sabes qué quiere decir "resolver una inecuación"? ¿Sabes "resolverla"?. Si has respondido afirmativamente, resuélvela.

d) Contesta a las mismas preguntas sustituyendo el signo "<" por el signo "=".

FRA 8.- De las fracciones $\frac{c}{a}$ y $\frac{c+1}{a+1}$ ¿Cuál creesque es mayor? Demuéstralo. (Puedes hacerlo mediante cualquier razonamiento pero debes justificar tu respuesta de alguna forma). Ten en cuenta que $a > 0$ y $c > 0$.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

B I B L I O G R A F Í A

ARTIGUE, Michèle ,1986 "Étude de la dynamique d'une situation de classe: Une approche de la reproductibilité". *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol.7 (1) pp.5-62.

ARTIGUE, Michèle ,1989 "Epistémologie et Didactique" (Fotocopia del IREM, Université. París 7).

ARTIGUE, Michèle ,1989 "Ingéniérie didactique". *Actes de la Veme école d'été*. pp. 124-128.

ASCOLI Y BRENCI ,1983 "Premiers contacts avec l'algébre de Boole avec de petits problemes de logique". *Compte rendus de la 33eme. Rencontre de la CIEAEM*. Lisbonne.p.33.

BACHELARD, Gaston ,1983 *La Formation de l'Esprit scientifique.* J.Vrin, París

BAILS, ,1805 *Principios de Matemáticas.* Tomo II. Se encuentra en el Seminario García Galdeano de la Facultad de Matemáticas de Zaragoza.

BALACHEFF, Nicolas ,1987 "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematiques*, 18.pp.147-176.

BOBES NAVES, Mª c.,1989 *La Semiología*. Ed. Síntesis. Madrid

BOOTH, Lesley R. ,1984 "Erreurs et incomprehensions en Algebre Elementaire". *Petit X*, nº 5 pp 5 à 17.

BOOTH, Lesley R. ,1987 "Equations revisited". *Proceedings of th IX PME* (Psychology Mathematics Education). pp.282-288.

BOURBAKI, Nicolas ,1976 *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Ed. Alianza Universidad. Madrid.

BOYER, Carl B. ,1986 *Historia de la Matemática.* Ed. Alianza Universidad Textos.Madrid

BROUSSEAU, Guy ,1981 "Problèmes de didactique des décimaux". *Recherches en didactique des Mathématiques.* Vol.2.1. pp.37-128.

BROUSSEAU, Guy , 1983, a "Les Obstacles epistemologiques et les problemes en Mathematiques". *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Vol.4 nº2, pp. 165-198.

BROUSSEAU, Guy , 1983, b "Quelques phénomènes de Didactique susceptibles d'expliquer les échécs de la réforme des mathematiques modernes". *Compte rendus de la 33eme Rencontre de la CIEAEM*. Lisbonne. pp.55-61.

BROUSSEAU, Guy , 1986 *Fondéments et méthodes de la Didactique des Mathématiques*. Thèse d'Etat. Bordeaux, I

BROUSSEAU, Guy , 1987 *Fondements et Mèthodes de la Didactique des Mathèmatiques (Partie I)* I.R.E.M. Bordeaux.

BROUSSEAU, N. et G. , 1987 *Rationnels et Dècimaux dans la scolarité obligatoire*. I.R.E.M. Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, a "Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collége". *Études en didactique des mathématiques*. Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, b "La tour de Babel". *Études en didactique des mathématiques*. IREM Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, c "Obstacles epistémologigues et conflits socio-cognitifs. Relations". *Études en didactique des mathématiques*. IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, d "La relation didactique: Le milieu" *Études en didactique des mathématiques*. IREM Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, e "Les obstacles epistémologiques et la didactique des mathematiques". IREM Bordeaux.

BROUSSEAU, Guy , 1989, f "Le contrat didactique et le concept de milieu". *Actes de la V^{eme} école d'été*. pp.95-101.

BROUSSEAU, Guy , 1989, g *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Publicaciones del Seminario Matemático Garcia de Galdeano. Serie II. Universidad de Zaragoza.

BROUSSEAU, Guy , 1990 "Le contrat didactique: Le milieu" *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 9.3. pp.308-336

BROUSSEAU Y CENTENO ,1989 "Necessité de l'analyse de la *mémoire* du systeme didactique et de son fonctionnement pour résoudre les problèmes didactiques interniveaux scolaires" (Fotocopia) Budapest. VI International Congress on Mathematical Education.

BYERS Y ERLWANGER ,1984 "Content and form in Mathematics". *Educational Studies in Mathematics*. 15 pp. 259-275.

CAJORI, Florian ,1928-29 *A history of mathematical notations*. Open Court. La Salle. Illinois. 2 vol.

CAUZINILLE-MARMECHE et autres ,1987 "Explicitation et representation des connaissances des élèves de Collége en Algébre". Greco 87, pp. 198-211.

CENTENO, Julia ,1990 "El concepto de «memoria didáctica» del maestro en la organización escolar de secuencias de aprendizaje" (Fotocopia) I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla

CHEVALLARD,Yves , s/f "Théorie didactique et étude de l'enseignement de l'algèbre .Chronique d'une recherche".(Fotocopia)

CHEVALLARD,Yves ,1980 "Mathématiques, langage, enseignement: la réforme des années soixante" *Recherches en Didactique des Mathématiques*. nº41 (Sep. 1980) pp.71-99.

CHEVALLARD,Yves ,1985,a "Le Passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. (*Première partie*) L'évolution de la transposition didactique". *Petit X*, nº5, pp. 51 à 94

CHEVALLARD, Yves ,1986 "Enseignement de l'algèbre et transposition didactique". Marseille-Luminy

CHEVALLARD, Yves ,1989,a "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collége (Deuxième Partie) Perspectives curriculaires: la notion de modélisation". *Petit X*, 19, pp.43-75.

CHEVALLARD, Yves ,1990 "Le passage de l'arithmétique à l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au collége. (Troisiéme partie). Voies d'attaque et problemes didactiques". (Fotocopia del IREM d Aix-Marseille).

CHURCHILL, Ruel V.,1948 *Complex variables and Applications* Ed. Mc Graw-Hill Book Company, INC.

COLERUS, Egmont ,1972 *Breve historia de las matemáticas. I.* Ed. Doncel. Libro joven de bolsillo.

COUTURAT, Louis ,1969 *La Logique de Leibniz.* Ed. Georg Olms Verlagsbuchhandlung. Hildesheim. Germany.

DEL VILLAR, A.A. ,1892 *El Cálculo Analítico.* Ed. El Riojano. Logroño.

DIEUDONNÉ, Jean ,1989 *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy* Ed. Alianza Universidad.

DOUADY, Régine ,1984 *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse d'Etat. Univ. Paris VII.

DOUADY, Régine ,1986 "Jeux de cadres et dialectique outil-objet". *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol.7.2. pp.5-31.

ECO, Umberto ,1976 *Signo.* Ed. Labor. Barcelona

ENGEL, Arthur ,1977 *La Enseñanza de las Probabilidades y de la Estadística.* Trad. F. Villarroya. CEDIC. Paris.

EVES, Howard ,1980 *Great moments in mathematics.* Ed. The Mathematical Association of América. The Dolciani mathematical expositions nº 5.

FILLOY Y ROJANO ,1985 "Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies". *Proceedings of IX Psychology of Mathematiques.* pp.154-158.

F.J. ,1886 *Complements Trigonomètrie.* Tours-Paris. Se encuentra en el Seminario García Galdeano. Facultad de Matemáticas de Zaragoza.

F.J. ,1895 *Exercices d'algebre.* Tours-Paris. Se encuentra en el Seminario García Galdeano de la Facultad de Matemáticas de Zaragoza.

FILLOY Y ROJANO	,1985	"Obstructions to the acquisition of Elemental Algebraic Concepts and teaching stretegies". *Proceedings of the IX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.I.
FILLOY. Eugenio	,1988	"Results of recent Research into Problems of Learning Algebra". Papers of the VI ICME. (International Congress on Mathematical Education). Budapest.
FLEGG, HAY., MOSS	,1984	*Nicolas Chuquet, REnaissance Mathematician*. Ed. D. Reidel Publishing Co.
FORTUNY, GALDóN, DOMINGUEZ Y OTROS	,1990	*Aspectos Didácticos de Matemáticas III*. Ed. ICE. Zaragoza.
FREUDENTHAL,Hans	,1983	*Didactical phenomenology of mathematical structures*. D.Reidel Publishing Co. pp. 461-490.
GIMéNEZ, Joaquim	,1990	"Elementos de álgebra que se conocen en la escuela. Una investigación en el marco de la formación del profesorado" (Fotocopia) I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla.
GLAESER,Georges	,1981	"Epistemologie des nombres relatifs". *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 2, nº3, pp.303-346.
GROUPE RECHERCHE I.R.E.M. FORMATION EN DIDACTIQUE		"Quelques mots clés sur le processus d'apprentissage". Bordeaux. (Fotocopia del IREM de Burdeos)
GRUPO CERO DE VALENCIA	,1984	*De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas*. Ed. Grupo Cero.
GIMENO, GUZMAN, ALONSO Y OTROS	,1985	*Aspectos Didácticos de Matemáticas*. Ed. ICE. Zaragoza.
GONZALEZ JIMéNEZ, Félix. E.	,1990	"Sobre la situación y el significado de la Didáctica". *Revista Complutense de Educación*. Vol.I.(1).31-54. Ed. Univ. Complutense.Madrid
GONZALEZ JIMéNEZ, Félix. E.	,1990	"Sobre la fundamentación y el valor de la Didáctica". *Revista Complutense de Educación*.Vol.I.(2).241-266. Ed. Univ. Complutense de Madrid.

HART, K. y otros ,1984 "Chelsea Diagnostic Mathematics Tests". Teacher's Guide. (Fotocopias) Ed. NFER-NELSON. Great Britain.

HJEMSLEV, Louis ,1976 *Principios de Gramática General*. Ed. Gredos.

INTERNATIONAL COMISSION OF MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI) ,1973 *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. Vol. III. Ed. Unesco. Montevideo.

JANVIER Y OTROS ,1987 *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics*. Ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Hillsdale. New Jersey.

KAPUT, James J. ,1987a "A Representational Framework". *Proceedings of the XI PME* (Psychology of Mathematics Education) Conference.

KIERAN, Carolyn ,1979 "Childrens operational thinking within the context of bracketing an the order of operations". *Proceedings of III Psychology of Mathematics Education*. Warwick.

KIERAN, Carolyn ,1981 "Concepts Associated with the Equality Symbol". *Educational Studies in Mathematics*. nº12 pp 317-326.

KIERAN - FILLOY ,1988 "The learning of school algebra from a psychological perspective". (Fotocopia. Junio 1988)

KLINE, MORRIS ,1976 *El fracaso de la Matemática Moderna*. Ed. Siglo XXI. Madrid.

LABORDE, Colette ,1982 *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction*. Thése d'état. Grénoble.

LEVINSON Y REDHEFFER ,1975 *Curso de variable compleja*. Ed. Reverté S.A.

LURIA, A.R. ,1985 *Lenguaje y Pensamiento*. Trad. Mateo Merino. Ed. Martinez Roca S.A. Barcelona.

LURIA, LEONTIEV, VIGOTSKY ,1986 *Psicologia y Pedagogia*. Trad. del italiano: M.E. Benitez. Ed. Akal.

LURIA, A.R. ,1987 *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*. Trad. A. Villa. Ed. Akal.

MALET Y PARADIS ,1984 *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1478-1545)*. Vol.I. ICE. Universitat de Barcelona.

MARGOLINAS, Claire ,1989 *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Université de Grenoble I

MARGOLINAS, Claire ,1985 *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4eme, le nombre dans tous ses états*. I.R.E.M. Bordeaux.

MATHEMATICS CENTER ,1988 *Mathematics for Investigative Coursework*. W. Foulsham & Co. Limited. Yeovil Road, Slough, Berks., England.

MATHEMATICS CENTER ,1988 *Beginning Investigations and small changes in my classroom*. W.Foulñsham & Co. Limited. Yeovil Road, Slogh, Berk., England.

MIALARET, Gaston ,1977 *Las Matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan*. Editorial Pablo del Rio. Madrid.

MILLER, DIANE L. ,1988 "Writing to learn algebra". Paper presented to IV International Congress on Mathematical Education. Budapest.

MORRIS, Ch. ,1962 *Signos, lenguaje y conducta*. Ed. Losada

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS ,1980 *A sourcebook of applications of school mathematics*. Prepared by a Joint Commitee of the Mathematical Association of America and the N.C.T.M.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. ,1989 *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Vol.4. Editors Wagner-Kieran. Univ. of Georgia and Québec à Montréal.

NEWMAN, James.R. ,1979 *El mundo de las matemáticas*. Ed.Grijalbo S.A. (1ª Ed. 1956)

NOVAK, JOSEPH D. ,1988 *Teoria y práctica de la educación*. Trad. Del Barrio-Gonzalez. Ed. Alianza Universidad.

PARADÍS-MIRALLES Y MALET ,1989 *El álgebra en el periodo renacentista. La recuperación de los clásicos griegos* Ed. PPU Barcelona.

PASCAL, Denise ,1980 *Le problème du zéro*. D.E.A. I.R.E.M. d'Aix Marseille.

PAPP, Desiderio ,1975 *Ideas Revolucionarias en la Ciencia*. Tomos I, II y III. Editorial Universitaria. Santiago de Chile.

PEIRCE, Ch. S. ,1974 *La ciencia de la Semiótica*. Ed. Nueva Visión. Buenos Aires.

PELLEREY, Michel ,1983 "Pensee algoritmique et memoire semantique". *Compte rendus de la 33eme Rencontre de la CIEAEM*. Lisbonne.p.191.

PERES, Jacques ,1987 *La théorie piagetienne de l'equilibration*. I.R.E.M. de Bordeaux.

PERES, Jacques ,1987 *Sur l'utilisation de la tortue de sol logo a l'école maternelle*. I.R.E.M. de Bordeaux.

PEREZ DE MOYA, Juan ,1562 *Diálogos de Arithmética Práctica y Especulativa*. (Fotocopia del original) Se encuentra en el Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas. Zaragoza.

PIAGET, Jean ,1975 *Seis estudios de Psicologia*. Editorial Seix Barral, S.A. Barcelona.

PIAGET, Jean ,1977 *Lógica y Psicología*. Impreso en Argentina.

PIAGET, Jean ,1984 *La formación del símbolo en el niño* (1ª Ed. 1959) Fondo de Cultura Económica. México.

PIAGET, Jean ,1986 *La epistemología genética*. Editorial Debate. Madrid.

PIAGET Y GARCÍA ,1982 *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Ed. Siglo XXI. México

POLYA, G ,1979 "Cómo resolverlo". *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. Tomo V pp. 366-379.

REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO ,1816 *Principios de Matemática.* Tomo II. Madrid. Se encuentra en el Seminario García Galdeano de la Facultad de Matemáticas de Zaragoza.

SAUSSURE, F. de ,1987 *Curso de Lingüística General.* Edición crítica de Tullio de Mauro. Ed. Alianza. Mdrid.

SAVERIEN, ,1775 *Historia de los progresos del entendimiento humano en las Ciencias Exactas.* Traducción Rubin de Celis. Madrid.

SCHNEIDER,Odile ,1979 *Le Passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de Seconde.* I.R.E.M. Aix-Marseille,-I.R.E.M.Bordeaux.

TONELLE,Jacques ,1980 *Le mond clos de la factorisation au premier cycle.* D.E.A. I.R.E.M. Aix-Marseille, I.R.E.M. Bordeaux.

ULLMANN, S. ,1986 *Introducción a la Semántica francesa.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Filologia Española

VERA,Francisco ,1970 *Cientificos griegos.* 2 tomos. Ed.Aguilar

VERGNAUD,CORTES,FAVRE--ARTIGUE ,1986 "Introduction de l'algèbre auprés de débutants faibles. Problèmes epistemologiques et didactiques". (Fotocopia) Actes.IVéme Ecole d'été. Orleans. Ed. IREM. Paris VII.

VIGOTSKY, LEV.S. ,1983 *Pensamiento y Lenguaje.* (Comentarios críticos de J. Piaget. Trad. M.M. Rotger. Ed. La Pléyade. Buenos Aires.

VILLARROYA, BLESA, ELIPE Y OTROS ,1987 *Aspectos Didácticos de las matemáticas. II.* Ed. ICE. Zaragoza.

WUSSING Y ARNOLD ,1989 *Biografias de grandes matemáticos* Prensa Universitaria de Zaragoza. (1ª Ed. Berlin 1979)

-.-