

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico I (Análisis Económico)



**VALORACIÓN DEL RIESGO UTILIZANDO
CÓPULAS COMO MEDIDA DE LA
DEPENDENCIA: APLICACIÓN AL SECTOR
FINANCIERO MEXICANO (2002-2008).**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

Tania Nadiezhda Plascencia Cuevas

Bajo la dirección del doctor

J. Javier Núñez Velázquez

Madrid, 2010

ISBN: 978-84-693-4791-1

© Tania Nadiezhda Plascencia Cuevas, 2009

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico I

(Análisis Económico)



**VALORACIÓN DEL RIESGO UTILIZANDO CÓPULAS
COMO MEDIDA DE LA DEPENDENCIA.
APLICACIÓN AL SECTOR FINANCIERO MEXICANO
(2002-2008)**

Tania Nadiezhda Plascencia Cuevas

*Memoria para optar al grado de Doctor
realizada bajo la dirección del
Dr. D. J. Javier Núñez Velázquez
Madrid, 2009*

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción general	IX
1. Aspectos metodológicos de la medida del riesgo	1
1.1. Introducción	2
1.2. La volatilidad como medida de riesgo	3
1.2.1. Principales tipos de volatilidad	4
1.2.2. Estimación de la volatilidad	5
1.3. Riesgos financieros	11
1.3.1. Riesgo de crédito	12
1.3.2. Riesgo de liquidez	12
1.3.3. Riesgo operacional	13
1.3.4. Riesgo legal	13
1.3.5. Riesgo de mercado	13
1.4. Medidas del riesgo	14
1.4.1. Medidas coherentes del riesgo	15
1.5. El modelo de Markowitz	17
1.6. Valor en riesgo	19
1.6.1. Antecedentes históricos	19

1.6.2.	Definición	21
1.6.3.	Metodos de estimación del VaR	23
1.6.4.	Comprobación y contrastación del VaR	33
1.6.5.	Ventajas e inconvenientes del VaR	38
1.7.	Valor en riesgo condicional	40
1.8.	Teoría de valor extremo	42
1.8.1.	Método block maxima	43
1.8.2.	Peak over threshold	46
1.9.	Dependencia	50
1.9.1.	Coefficiente de Correlación de Pearson	51
1.10.	Cóputas financieras	53
1.10.1.	Familia de cóputas elípticas	58
1.10.2.	Familia de cóputas arquimedianas	60
1.10.3.	Dependencia de las colas de la distribución	64
1.10.4.	Contrastes sobre la adecuación de cóputas	68
1.10.5.	Ventajas e Inconvenientes de las cóputas	71
1.11.	Estimación del VaR mediante cóputas	72
1.12.	Anexos	78
2.	Valoración del riesgo en una cartera de valores mexicanos, mediante cóputas	81
2.1.	Introducción	82
2.2.	Descripción y análisis de los datos	83
2.3.	Descripción de la metodología	92
2.4.	Valoración tradicional del riesgo	95
2.5.	Valoración del riesgo a través de cóputas elípticas	100

2.6. Extensiones	106
2.6.1. Incorporación de varianzas dinámicas en el modelo	106
2.7. Conclusiones	110
3. Valoración del riesgo a través de cópulas, para estimar el riesgo del IPC/Mexbol en comparación con otros índices bursátiles	115
3.1. Introducción	116
3.2. Descripción y análisis de los datos	118
3.2.1. Mexbol	122
3.2.2. Dow Jones	124
3.2.3. Ibex-35	126
3.3. Descripción de la metodología	130
3.4. Valoración tradicional del Mexbol	135
3.5. Relación Mexbol e Ibex-35	137
3.6. Relación Mexbol y Dow Jones	142
3.7. Extensiones	147
3.7.1. Relación Mexbol e Ibex-35	148
3.7.2. Relación Mexbol y Dow Jones	150
3.8. Conclusiones	152
3.9. Anexos	156
4. Valoración del riesgo mediante cópulas, utilizando mixturas nor- males y de valor extremo	157
4.1. Introducción	158
4.2. Descripción de la metodología	159
4.3. Relación Mexbol e Ibex-35	162
4.4. Relación Mexbol y Dow Jones	164

4.5. Cartera equiponderada	165
4.6. Cartera autoponderada	167
4.7. Conclusiones	168
Conclusiones generales y líneas abiertas de investigación	171

A mi madre

Agradecimientos

Para empezar, quiero agradecer al director de esta tesis, el profesor Dr. D. José Javier Núñez Velázquez, porque su dedicación y apoyo han sido decisivos en todo momento, ya que sin su orientación, la elaboración de ésta no hubiera sido posible. Además el trato personal que he recibido por su parte es inmejorable e inestimable para mí.

También agradezco a los profesores Pablo Alonso González e Irene Albarrán Lozano por aceptar ser los evaluadores de esta investigación y por la gran implicación demostrada. Del mismo modo, agradezco a todos los profesores que me han apoyado a lo largo de todo el proceso de doctorado, especialmente a Dr. Miguel Angel Martínez, Dra. Susan Orbe, Dr. Cruz Angel Echevarría, Dr. Emilio Cerdá y Dra. Eva Senra.

Asimismo, agradezco a todos los compañeros que han estado conmigo durante todo el trayecto: Ana Díaz, Laura Ballester, Ana González, Martín Lozano, Miguel Londoño y Jorge Herrera, porque ha sido un verdadero honor trabajar a su lado.

Mi más sincera gratitud a mis compañeras y amigas, Larraitz Aranburu, Maite García, Agueda Madoz y Aitziber Unzueta, por todos sus comentarios, soporte informático y matemático, ayuda en general y además, todo el apoyo emocional que me han brindado.

Por último, quiero agradecer a todas las personas que forman mi entorno personal, principalmente a mi madre, porque esta tesis es tan suya como mía y porque con su amor ha cimentado la base de una vida útil y feliz, siendo mi firme soporte. A Iñaki, porque su cariño y apoyo me han levantado en más de una ocasión estando siempre a mi lado y por su forma de enfrentar la vida, que merece toda mi admiración. A la familia Cuevas, por todo el apoyo, cariño y confianza que siempre me han dispensado; gracias por ser mi familia. Y a mis abuelos, Esperanza y Miguel, que aunque no están, siguen aquí.

Introducción general

Existen diversas investigaciones acerca de lo importante que es la medición de los riesgos financieros y de cómo una inadecuada medición puede ocasionar estragos y efectos nocivos en el sistema financiero internacional. Por ello, el mundo de las finanzas se ha preocupado por desarrollar un sistema de medición que cuantifique de forma apropiada y precisa los riesgos a los que se está expuesto, para así poder gestionarlos y predecirlos lo más acertadamente posible. Según Jorion (1997), algunas de las entidades financieras más grandes del mundo han perdido miles de millones de dólares en los mercados financieros, debido a que, en la mayoría de los casos, la alta dirección se preocupó muy poco de la exposición a los riesgos de mercado. Por este motivo, muchas empresas han sufrido pérdidas importantes o, en su defecto los acontecimientos han llevado a dichas empresas a sufrir agudos problemas financieros o incluso a la quiebra. Para Torrero (2008), una crisis financiera es un desorden agudo que altera el funcionamiento normal de los mercados y afecta de manera violenta a las valoraciones de los activos, pudiendo amenazar la existencia de instituciones financieras.

Ante la creciente volatilidad de las variables financieras, existe la necesidad de gestionar los riesgos de manera eficiente, ya que, debido a la inestabilidad existente en los sistemas financieros, se han producido acontecimientos que han afectado a los países de manera interna y global. Todo esto porque los eventos catastróficos fueron impredecibles por la rapidez con que se dieron los hechos. Según Jorion (1997), la administración del riesgo financiero proporciona una protección parcial

contra las posibles implicaciones generadas por esa incertidumbre. Para Peña (2002), los riesgos financieros no se pueden eliminar, sino que se transforman, y la estrategia óptima consistirá en elegir aquellos instrumentos financieros que puedan gestionarse mejor y tengan un balance coste/beneficio más apropiado.

Por lo dicho anteriormente, es posible decir que la medición y gestión de los riesgos financieros se pueden considerar como el factor determinante o la piedra angular dentro de las instituciones financieras, ya que brinda información de forma adecuada a las instituciones de supervisión de riesgos y permite tener un control que mejore la propia metodología de medición y gestión, además de disminuir la exposición que se tenga a los diferentes tipos de riesgos.

Cuando se trata de medir el riesgo de una cartera de instrumentos financieros, además de elegir la herramienta de medición apropiada, es necesario conocer si los instrumentos que componen la cartera están correlacionados de alguna manera y saber cómo de fuerte y de qué tipo es la dependencia existente entre ellos. Entonces, la medida de riesgo elegida debe incluir un tratamiento específico para la dependencia, porque, si no es tomada en cuenta, se puede llegar a subestimar el riesgo en que se pueda estar incurriendo, y con ello se estaría más expuesto a la vez que los pronósticos se encontrarían cada vez alejados de la realidad.

Cuando se habla de cobertura, es importante elegir activos que se comporten de manera diferente ante el mismo evento. Sin embargo, aún cuando se hayan cubierto todos los elementos que pueden añadir riesgo a una cartera, cabe la posibilidad de que existan, con cierta probabilidad de ocurrencia, valores extremos que pueden alterar los resultados. Estos valores extremos son generados por alteraciones en los mercados financieros, tales como cambios de política económica, monetaria, financiera, en los ciclos económicos, entre otros muchos acontecimientos que en la realidad pueden suceder con cierta frecuencia. Por ello, también se considera importante medir el riesgo tomando en cuenta dichos valores extremos, para así poder tener una mejor y mayor cobertura. Por lo tanto, una medición

del riesgo adecuada y precisa puede garantizar no sólo la estabilidad para instituciones financieras sino que también para todo el sistema financiero internacional.

La presente investigación pretende valorar el riesgo de mercado mediante diferentes metodologías de medición, tales como el VaR y el CVaR a través de cópulas financieras, para tratar de realizar una aproximación más precisa de los acontecimientos financieros y con ello, poder evaluar las máximas pérdidas que se puedan obtener, para así llevar a cabo una predicción más acertada y fidedigna.

Con lo que el objetivo de esta tesis es, además de valorar el riesgo de mercado, tratar de hacer la valoración del impacto que la crisis financiera actual está teniendo, especialmente, en la evaluación de los riesgos asociados a los activos financieros mexicanos. Este efecto se mide a través de la cuantificación de las pérdidas inesperadas realizadas, tanto en la muestra total como en dos subperiodos definidos en función de la evolución de los mercados que ha conducido a la situación actual de crisis financiera. Éstos se seleccionaron con la finalidad de valorar las pérdidas en dos periodos económicamente diferentes. La contribución de esta investigación es proponer una técnica práctica para estimar el VaR y el CVaR a través de cópulas, utilizando distribuciones combinadas, con el objetivo de dar a cada observación un tratamiento específico, y así poder comparar y evaluar las metodologías aplicadas con la aquí propuesta y, como ya se ha dicho, observar su ajuste en el mercado mexicano.

En la actualidad, la situación económica y financiera mundial es de inestabilidad e incertidumbre y esto hace que los países emergentes se vean afectados principalmente por la dependencia existente con los países desarrollados. En el caso específico de México, el estrecho vínculo que sostiene con Estados Unidos ha provocado que el impacto de la crisis sea inminente e inmediato.

La crisis en México involucra a todos los sectores económicos y financieros, ya que de manera interna, está experimentando una fuerte disminución de las fuentes de empleo, decrecimiento del consumo *per capita* y, además, las instituciones

bancarias han aumentado las condiciones de contratación de créditos y estos se han vuelto más caros.

De forma externa, este país se ha visto afectado por el deterioro del peso mexicano frente al dólar estadounidense y al euro, a su vez, la demanda externa se ha reducido, disminuyendo los ingresos que se derivan de las exportaciones, principalmente hacia Estados Unidos. Por tanto, los ingresos provenientes de la entrada de divisas han caído significativamente, porque no sólo las exportaciones disminuyeron, sino que también el turismo internacional y el envío de remesas se han visto reducidos constante y notablemente.

En el mercado financiero, ha aumentado la volatilidad, la incertidumbre y se han tomado posiciones más conservadoras, ya que no sólo se experimenta la inestabilidad propia del país, sino que se complementa con la volatilidad inyectada de los países desarrollados por la fuerte dependencia que existe. La dependencia, principalmente con Estados Unidos, se ha incrementado notablemente entre el 2007 y 2008, provocando un aumento a la exposición al riesgo y por tanto, mayor incertidumbre y volatilidad.

Así pues, esta investigación se desarrolla de la siguiente manera: en el capítulo siguiente se definen y describen los conceptos que han sido considerados más importantes porque serán útiles y facilitarán la comprensión durante toda la investigación, ya que estos estarán latentes en cada capítulo. El segundo capítulo se destina a la aplicación de las metodologías de valor en riesgo y valor en riesgo condicional a través de cópulas financieras como indicadores del grado de dependencia. Las metodologías se aplican a una cartera formada por las cinco empresas que presentan mayor volumen de negociación dentro del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores, ya que se considera que este índice, al igual que los índices Merval y Bovespa, es uno de los más importantes dentro de los denominados mercados emergentes. En el capítulo tercero se aplican semejantes metodologías a las del segundo capítulo, pero utilizando el índice Mexbol

frente al Dow Jones como representante del mercado estadounidense y frente al Ibex-35 como representante el mercado español de forma independiente, ya que el Mexbol muestra una conexión directa con los mercados desarrollados, y esta correlación puede ser relevante en el momento de llevar a cabo las predicciones y las valoraciones de las pérdidas. En el cuarto capítulo, se propone valorar el riesgo de la cartera expuesta en el capítulo dos y de los tres índices bursátiles, utilizando cópulas financieras y una combinación de distribuciones para dar un tratamiento específico a cada observación, y así poder cuantificar las pérdidas de manera más cercana a la realidad. Al final de esta investigación se encuentran las conclusiones generales, es decir, a lo que se ha llegado con la evidencia empírica mostrada y las líneas abiertas de investigación que se sugieren.

Capítulo 1

Aspectos metodológicos de la medida del riesgo

1.1. Introducción

La historia del sistema financiero internacional se ha visto envuelta en un sinfín de movimientos tales como auges, crisis, depresiones, recuperaciones, desaceleraciones, etcétera. Sin embargo, de estos movimientos ha sido posible aprender y estudiar las causas, consecuencias y errores cometidos, y esto ha conducido a que continuamente se desarrollen herramientas que permitan suavizar y anticipar las consecuencias que estos movimientos puedan causar a los mercados financieros y, en general, a toda la economía mundial.

En el siglo XX, el sistema financiero internacional se ha visto envuelto en diversas crisis financieras, entre las que se pueden destacar el *crack* de 1929, el *crash* de octubre de 1987, la crisis mexicana entre 1994 y 1995, la crisis asiática de 1997, los problemas del fondo *Long Term Capital Management* en 1998 y la lista continúa incrementándose con la crisis financiera actual. Además, la utilización de los instrumentos derivados¹ disparó la volatilidad en los mercados y los gestores se vieron incapaces de evaluar de forma precisa y oportuna la exposición a los diversos riesgos a los que se enfrentaban.

Según Torrero (2008), los detonantes de una crisis financiera son muy variados: una caída de la bolsa, el alza de los precios de las materias primas, la quiebra inesperada de una gran empresa, etcétera. Por tanto, es posible decir que la inestabilidad de los tipos de cambio, los tipos de interés, de precios y de los mercados bursátiles, además del desarrollo de los mercados de derivados y la importancia que han alcanzado los mercados emergentes han sido los principales factores que, directa o indirectamente, han contribuido a incrementar los riesgos en los mercados financieros.

Finalmente, es posible comprobar a través de la historia que los acontecimientos mundiales, ya sean de tipo gubernamental o de política económica, guerras

¹Un derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende o se deriva del valor de otro activo o instrumento llamado generalmente activo o variable subyacente.

o devaluaciones, pueden tener como consecuencia el aumento de la volatilidad de las principales variables económicas y financieras, y a esto le seguiría una mayor exposición a los diferentes tipos de riesgo. Así pues, se puede constatar que medir, cuantificar, gestionar y evaluar activamente los diferentes tipos de riesgos financieros se ha convertido en una prioridad para el mundo financiero.

Así pues, este capítulo será destinado a definir y estudiar los principales conceptos de medición y análisis de riesgos, ya que serán de gran utilidad para comprender y analizar todos los capítulos posteriores. La revisión y estudio de dichos conceptos se inicia definiendo brevemente la volatilidad y los tipos de volatilidad más usuales, debido a la importancia que estos tienen en esta investigación, en el análisis y en la Teoría General de Riesgos.

1.2. La volatilidad como medida de riesgo

A lo largo de la literatura, diversos autores han brindado múltiples formas de interpretar el significado de la volatilidad. Entre otros, para Aragonés y Blanco (2000), la volatilidad es «una medida estadística de dispersión de la distribución esperada de los rendimientos de un activo; cuanto mayor es la variabilidad, mayor es la dispersión de la distribución de los rendimientos esperados y viceversa». De acuerdo con Hull (2007), la volatilidad de una variable se define como «la desviación estándar del rendimiento proporcionado por la variable por unidad de tiempo cuando el rendimiento se expresa de forma continua». Generalizando y para facilitar la comprensión, se define la volatilidad como la desviación estándar del cambio relativo en el valor de un instrumento financiero con un horizonte temporal determinado. A menudo se usa para cuantificar el riesgo del instrumento financiero dentro de un horizonte temporal determinado.

Cabe mencionar que el concepto de volatilidad debe ser tratado con mucha cautela, ya que existen varios tipos de volatilidad, tales como la implícita, histórica

y prevista. Al mismo tiempo, se debe tomar en cuenta que no existe una única metodología que permita aproximar la estimación de la volatilidad, ya que siempre se debe estimar porque generalmente no viene determinada, debido a que no es una variable directamente observable. Por ello, es necesario definir a qué tipo de volatilidad se hace referencia, el periodo de estudio y las necesidades que se presentan. Por lo que, a continuación, se definen brevemente los tipos de volatilidad más utilizados y las formas de estimación más relevantes, relacionadas con ellas.

1.2.1. Principales tipos de volatilidad

Se presentan y se definen, a manera de resumen, los principales tipos de volatilidad para poder continuar con la exposición de los métodos de estimación relacionados con los conceptos.

a) Volatilidad Histórica

La volatilidad histórica indica qué variabilidad ha sufrido una variable en el pasado, es decir, está basada en rendimientos históricos de un instrumento financiero. El rendimiento periódico de una variable X se calcula en base a la expresión

$$r_t = \ln (P_t/P_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.1)$$

donde r_t es el rendimiento de la variable de $t - 1$ a t , P_t es el precio de cierre de la variable en el instante t , P_{t-1} representa el precio de cierre de la variable en el periodo anterior, y T denota el número total de observaciones.

La volatilidad histórica de los rendimientos de la variable X , expresada a través de su desviación típica, puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (1.2)$$

donde σ_x es la desviación típica de la serie, \bar{r} es la media de los rendimientos de la variable y n es el número de observaciones que se incluyen en la muestra.

c) Volatilidad Implícita

La volatilidad implícita se refiere a la volatilidad asumida a los precios negociados por los agentes económicos y financieros, ya que incorpora las previsiones realizadas de los operadores de mercado sobre la volatilidad futura. También se le conoce como volatilidad de mercado, ya que refleja las expectativas del mercado sobre la volatilidad del subyacente hasta la fecha de vencimiento del correspondiente activo derivado. Es posible conocer la volatilidad implícita a través de modelos de valoración a partir de los precios de instrumentos derivados. Por ejemplo, para la estimación se utiliza, de forma habitual, el modelo de Black-Scholes o alguno similar. La aproximación de la volatilidad dependerá, principalmente, de la correcta especificación que se realice del modelo de valoración que se elija para calcularla. La variación de la volatilidad implícita de una opción como función de su precio de ejercicio o *strike price* es conocida como "sonrisa de volatilidad"².

d) Volatilidad Prevista

La volatilidad prevista es la que determinados modelos pueden anticipar como consecuencia de la utilización de técnicas de predicción econométrico-financieras. Esta puede diferir de la histórica y de la propia del mercado. La volatilidad prevista al igual que la implícita trata de aproximarse a la volatilidad futura de un activo.

1.2.2. Estimación de la volatilidad

A continuación se presentan formas de estimar la volatilidad, ya que de ello depende la buena especificación y, por lo tanto, el resultado que se utilizará para la valoración de los riesgos.

²Para obtener mayor detalle acerca de la sonrisa de volatilidad, veáse Hull (2006).

a) Medias Móviles

Las medias móviles son indicadores que calculan el promedio de una variable aleatoria en un determinado periodo temporal y para cualquier secuencia de datos³. De manera concreta son medias calculadas sobre un conjunto de valores (precios, volúmenes, etc.), que tienen la particularidad de que su cálculo se efectúa usando un número concreto de datos (n días) que marcan un periodo que va desplazándose en el tiempo. La expresión matemática de las medias móviles es,

$$MA_t^n(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{t-i+1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.3)$$

donde T es el número total de observaciones.

Así pues, son indicadores de cambio, en el sentido de que, una vez que el cambio de tendencia ha tenido lugar, la media móvil reacciona y lo confirma. A medida que se incorpora una nueva observación desaparece la primera, con el objetivo de mantener siempre la misma amplitud en el periodo de cálculo. Lo que se consigue con las medias móviles es seguir la pista de la tendencia. El cálculo de medias móviles se realiza generalmente con los precios de cierre del activo considerado.

Estas se emplean para suavizar la curva de precios, sirviendo de amortiguador para variaciones bruscas y con esto observar mejor la tendencia de una variable. Generalmente, cuando las medias móviles se encuentran por debajo de la serie de datos original (precios) indica que el mercado es alcista, mientras que el mercado es bajista cuando las medias móviles se encuentran por encima de los precios.

Según Borrell et al. (1997), en el entorno bursátil, las medias móviles son consideradas como líneas de soporte y resistencia, con lo que una penetración de las mismas, brinda al analista una señal de alerta frente a un cambio de tendencia

³Secuencias de datos tales como precios de cierre, de apertura, volumen de negociación, precios máximos y mínimos, etcétera.

y, cuanto mayor es el número de observaciones mayor será la importancia de la señal que genere.

Estas medias móviles se pueden generalizar admitiendo diferentes ponderaciones para las observaciones que intervienen, dando lugar a las medias móviles ponderadas⁴ y exponenciales⁵.

b) Modelos GARCH

A continuación se presentan diferentes modelos basados en procesos estocásticos que tratan de modelizar la evolución de las variables financieras en el tiempo utilizando como datos series temporales.

Supóngase que se quiere estimar una variable Y de la siguiente manera:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.4)$$

donde α es una constante, β representa los parámetros del modelo y ε es un proceso de ruido blanco o término de error estocástico con desviación típica residual σ_ε . En este caso, se dice que Y sigue un proceso de medias móviles de primer orden o MA(1).

Expresando a continuación su forma más general,

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.5)$$

donde esta expresión equivale a un proceso de medias móviles de orden q o MA(q).

A efectos prácticos, la utilización de esta metodología presenta la crítica de que solamente se tiene en cuenta el periodo determinado sobre el que se calcula,

⁴En los análisis financieros, las medias móviles ponderadas suelen otorgar más importancia a las observaciones más recientes, de tal forma que las últimas observaciones tienen más influencia que las primeras. Para mayor información, véase Borrell et al. (1997).

⁵La media móvil exponencial incluye todos los datos históricos, aplicándoles una ponderación de tipo exponencial (la media exponencial del primer día es el cierre de dicho día) y asigna más importancia a las observaciones más próximas, restando importancia a las más alejadas. Para mayor información, véase Borrell et al. (1997).

y concede o asigna la misma importancia al primer día de la serie que al último. Además no se anticipa a los posibles cambios de tendencia. Respecto a la importancia o peso que se le da a los datos, se puede corregir el problema mediante las medias móviles ponderadas, o a través de las medias móviles exponenciales.

Según Kisacik (2006), la volatilidad puede estimarse utilizando un proceso de medias móviles, ya que las varianzas históricas de las medias móviles se usan para estimar la volatilidad de los rendimientos, cuya expresión es la siguiente:

$$\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2 (\beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_q^2) \quad (1.6)$$

donde σ^2 representa las varianzas históricas. Además se supone que $\varepsilon_{t-i} \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ para $i = 0, 1, \dots, q$, y que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Este método se puede utilizar para estimar la volatilidad prevista en la expresión 1.6. Otra forma más sofisticada de llevar a cabo la estimación de la volatilidad es mediante el uso de los modelos de la familia ARCH⁶. La autocorrelación en la volatilidad es modelada permitiendo que el término de error de la varianza condicional dependa de los valores anteriores de los residuos al cuadrado (retardos). La serie de rendimientos Y_t sigue una ecuación de la forma:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \sigma_t \rightarrow \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (1.7)$$

donde μ_t recoge la media condicionada hasta el momento $t - 1$ de la serie y σ_t representa la desviación típica.

Por simplicidad, se supone que la serie no presenta evolución en media, cuando $u_t = Y_t - \mu_t = \varepsilon_t \sigma_t$, se formula el modelo ARCH en el cual la varianza condicional es una función lineal del cuadrado de la variable u_t (rendimientos, observaciones)

⁶ *Autoregressive Conditional Heterocedasticity*. Para más detalle de los modelos ARCH, véase Engel (1982).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \quad (1.8)$$

siendo σ_t^2 la varianza condicional para el periodo t o varianza actual, y u_{t-m}^2 son los intervalos de los residuos al cuadrado (retardos de residuos). Agrupando:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 \quad (1.9)$$

Estos deben cumplir dos condiciones fuertes: una de positividad y otra de estacionariedad (Bollerslev, 1986):

Positividad:

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0; i \geq 1$$

Estacionariedad:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$$

Reescribiendo el modelo de la siguiente manera:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + v_t \quad (1.10)$$

donde u_t^2 es el valor actual de los residuos al cuadrado, siendo éste un estimador insesgado de la volatilidad, u_{t-i}^2 representan los intervalos pasados de los residuos al cuadrado, y $v_t = (u_t^2 - \sigma_t^2)$ es impredecible, por lo que se considera como una innovación.

El modelo ARCH es un modelo autorregresivo para el cuadrado de la variable u_t , de modo que éste es una generalización de la volatilidad histórica. Bajo el supuesto de que u_t es ruido blanco, se puede reescribir como:

$$u_t = \sigma_t \epsilon_t$$

y, por lo tanto, los ϵ_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según $N(0, 1)$.

Los modelos de la familia ARCH utilizan una función que describe la evolución de la volatilidad, y pueden ser estimados mediante máxima verosimilitud. Este tipo de modelos generan agrupamiento de la volatilidad; sin embargo, no captan los efectos asimétricos, ocasionan problemas en la estimación cuando están incluidas las restricciones de positividad y estacionariedad y los valores extremos producen saltos bruscos en la volatilidad estimada⁷.

El modelo GARCH⁸ postula que la varianza condicional actual depende de m intervalos de los residuos al cuadrado y s intervalos de la varianza condicional. Este generaliza al modelo ARCH del mismo modo que el modelo ARMA generaliza el modelo AR.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \quad (1.11)$$

donde σ_t^2 representa la estimación de la varianza condicional en el periodo t , σ_{t-s}^2 son los retardos de la varianza condicional o varianzas pasadas, y u_{t-m}^2 son los retardos de los residuos al cuadrado. Agrupando se obtiene

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (1.12)$$

Este debe cumplir las dos condiciones fuertes antes expuestas: la de positividad y la de estacionariedad⁹. En ese caso, se reescribe el modelo de la siguiente manera:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) u_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^n \beta_i (u_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2) + v_t \quad (1.13)$$

⁷Para una explicación más exhaustiva, véase Novales (1993).

⁸*Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Este modelo fue propuesto por Bollerslev en 1986.

⁹Para mayor detalle, véase Bollerslev (1986).

donde n es el máximo entre m y s , $v_t = (u_t^2 - \sigma_t^2)$ es la innovación en el periodo t . Por su forma, el modelo GARCH es un modelo ARMA para u_t^2 . La estimación del modelo en su forma ARMA es ineficiente, debido a que las innovaciones son heterocedásticas.

Estos modelos generan agrupamientos o conglomerados de la volatilidad y colas anchas (leptocurtosis). El modelo más habitual suele ser el GARCH (1,1), ya que converge a un proceso de difusión en tiempo continuo cuando la frecuencia de las observaciones es alta¹⁰, y además incorpora más estructura dinámica a la ecuación de la varianza¹¹. Proporciona una representación más parsimoniosa de la volatilidad, es decir, soluciona el problema de los saltos bruscos del modelo ARCH. Además, cuando la frecuencia de las observaciones es alta, el valor estimado de $\alpha_1 + \beta_1$ es muy próximo a 1. Existen diferentes modelos desarrollados a partir del GARCH tradicional¹².

Después de haber definido la volatilidad y de exponer las formas de aproximación a ésta, se considera muy importante abordar el concepto de riesgos financieros y presentar los diferentes tipos que existen, ya que el riesgo se puede mostrar de diferentes formas. Debe tenerse en cuenta que si no se consideran las posibles combinaciones de diferentes tipos de riesgos, se pueden ocasionar pérdidas importantes para todo el sistema financiero.

1.3. Riesgos financieros

En un principio, el riesgo¹³ puede definirse como la volatilidad o dispersión de los flujos financieros inesperados o, en términos generales, como la incertidumbre que se tiene sobre resultados futuros. Según Artzner et al. (1999), la definición de riesgo está relacionada con la variabilidad del valor futuro de una posición, debido

¹⁰Nelson, 1990.

¹¹Novalés, 1993.

¹²Para un estudio más detallado de este tipo de modelos, véase Brooks (2002).

¹³Para mayor detalle de la definición de riesgo, véase Jorion (1997).

a cambios en el mercado o por eventos con incertidumbre. Es decir, los riesgos financieros son diversos y están relacionados con las pérdidas que puedan tener lugar en los mercados. Existen diferentes fuentes de riesgos y se pueden manifestar de muchas formas, debido a que el riesgo puede medirse como la dispersión de los resultados posibles, por lo que la variabilidad o movimientos de las variables financieras¹⁴ constituyen una fuente de riesgo de gran importancia, ya que estas variables suelen estar expuestas a cambios constantes. Los tipos de riesgos pueden ser clasificados y definidos de la siguiente forma¹⁵.

1.3.1. Riesgo de crédito

Este riesgo se presenta cuando las contrapartes están imposibilitadas para cumplir o hacer frente a sus obligaciones contractuales. Su efecto se mide por el coste de la reposición de flujos de efectivo si la otra parte incumple. En términos generales, el riesgo de crédito también puede conducir a pérdidas cuando los deudores ven reducida su calificación por las agencias crediticias, generando así una caída en el valor de mercado de sus obligaciones. La administración y gestión del riesgo de crédito tiene tanto aspectos cuantitativos como cualitativos, siendo la determinación de la credibilidad de una contraparte el componente cualitativo.

1.3.2. Riesgo de liquidez

Este riesgo se deriva de la necesidad de cerrar una posición en un cierto instante de tiempo. Este tipo de riesgo asume dos formas: liquidez mercado/producto y flujo de efectivo/financiación. La primera forma se presenta cuando una transacción no puede ser cerrada a los precios vigentes en el mercado debido a un bajo nivel de operaciones en éste. La segunda forma se refiere a la incapacidad de conseguir financiación necesaria, lo cual puede llevar a forzar una liquidación

¹⁴Variables tales como tipos de interés y tipos de cambio, entre otras.

¹⁵Para una clasificación más exhaustiva y desglosada de los tipos de riesgos financieros, veáse la OCC Banking Circular (1993) sobre la administración del riesgo de los derivados financieros.

anticipada, transformando las pérdidas potenciales en pérdidas reales.

1.3.3. Riesgo operacional

Este tipo de riesgo se refiere a las pérdidas potenciales que se dan como resultado de procesos internos inadecuados o fallidos, ya sea por personas o por sistemas. Algunos ejemplos del riesgo operacional pueden ser fallos en la tecnología, errores en el procesamiento de datos, controles defectuosos, errores humanos, fraude, etcétera. El riesgo más habitual es debido a operadores que toman posiciones importantes sin el conocimiento de las directrices de la institución.

1.3.4. Riesgo legal

Es el riesgo que supone la realización de una pérdida cuando una operación no se puede ejecutar por no existir una formalización clara o no ajustarse al marco legal establecido, bien sea de ámbito financiero, civil o legal. Éste también incluye el riesgo regulatorio¹⁶ y fiscal¹⁷.

1.3.5. Riesgo de mercado

Se deriva de cambios que se dan en los precios de los activos y pasivos financieros y no financieros, tales como inmuebles. Este riesgo se genera como consecuencia de la inestabilidad de los precios y la imposibilidad de predecir los cambios con tiempo suficiente.

Desde la década de los setenta, los mercados financieros han estado gobernados por una gran inestabilidad en la evolución de las variables económicas y financieras, por lo que para llevar a cabo una correcta medición cuantitativa de los riesgos se han desarrollado un gran número de herramientas que permiten una

¹⁶Hace referencia a actividades que podrían quebrantar regulaciones gubernamentales, como manipular el mercado, expropiaciones, etcétera.

¹⁷Es el que se deriva de los posibles cambios en la normativa fiscal.

gestión activa de éstos. Es posible decir que la gestión de riesgos es una disciplina teórica y aplicada, porque define y mide las diferentes fuentes de volatilidad y a su vez gestiona la cobertura y optimización de una cartera.

Por todo lo descrito hasta ahora, se advierte que las instituciones financieras han reconocido que es de suma importancia identificar y medir con precisión y veracidad los riesgos a los que se está expuesto, para después ser capaz de gestionarlos, controlarlos y evaluarlos. En efecto, una medición incorrecta puede conducir a estimaciones muy alejadas de los objetivos preestablecidos, pudiendo causar grandes pérdidas. Así pues, a continuación, se definen las medidas de riesgo y sus características, las cuales deben ser tratadas con especial énfasis.

1.4. Medidas del riesgo

Como ya se ha señalado, en el mundo financiero y/o en la industria de seguros se puede incurrir en grandes pérdidas, por lo que las medidas del riesgo juegan un papel de gran importancia en lo que se refiere a optimización bajo incertidumbre. Por ello, sería muy necesario adoptar métodos que permitieran medir el riesgo con la mayor exactitud y precisión posibles para garantizar una mayor estabilidad en el sistema financiero y, además, con esto protegernos de los riesgos o poder especular con ellos.

Sea $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \sigma_\Omega, P)$, donde Ω es un espacio de variables aleatorias en el que se encuentran todos los factores de riesgo. Se dice que ρ es una medida de riesgo si existe una función de distorsión, $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que es creciente donde, para cada variable aleatoria X , la medida de riesgo asociada a la función g viene dada por (Manistre, 2003)

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dg[F(x)] \quad (1.14)$$

siendo $F(x) = P(X \leq x)$, es decir, representa la función de distribución.

El riesgo en general es parte inevitable en un proceso de toma de decisiones, y más concretamente en finanzas donde el concepto de riesgo está relacionado con el grado de incertidumbre en los rendimientos esperados futuros. Es por ello que la medición cuantitativa de los riesgos viene determinada por la probabilidad asociada a las pérdidas potenciales. La gestión de riesgos consiste en medir esas probabilidades en un contexto de incertidumbre. A continuación, se definen las propiedades que hacen que una medida de riesgo pueda ser considerada como coherente. A estas propiedades se debe prestar especial atención porque serán de gran ayuda para proponer medidas que cumplan condiciones ideales o deseables en cuanto a medición de riesgos, además de que pueden brindar información acerca de posibles pérdidas extremas.

1.4.1. Medidas coherentes del riesgo

Según Arzner et al. (1999), deben satisfacerse algunas propiedades para que una medida de riesgo pueda ser considerada como coherente. En concreto, cualquier medida de riesgo que satisfaga las propiedades de monotonicidad, relevancia, homogeneidad positiva, invarianza ante translaciones y subaditividad puede considerarse como coherente. A continuación se exponen estas propiedades.

Sea ρ una medida de riesgo, se dice que ρ es una medida de riesgo coherente si satisface las siguientes propiedades:

a) Monotonicidad:

$$\rho(X) \leq \rho(Y), \quad \forall X, Y \in \Omega : X \leq Y \quad (1.15)$$

es decir, si una posición es mejor que la otra, el riesgo en la mejor es menor o igual que el riesgo en la peor.

b) Homogeneidad positiva:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \forall \lambda \geq 0, \forall X \in \Omega \quad (1.16)$$

es decir, si una posición aumenta proporcionalmente, el riesgo en ella aumentará en la misma proporción.

c) Invarianza ante translaciones:

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha, \quad \forall X \in \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

es decir, sumando o restando una determinada cantidad α a una posición o cartera X , se altera el capital requerido exactamente en esa cantidad y, por tanto, su medida de riesgo es determinista.

d) Relevancia:

$$\rho(X) > 0, \quad \forall X \in \Omega : X \leq 0 \text{ y } X \neq 0 \quad (1.18)$$

es decir, si no hay posibilidad de riesgo, entonces no existirá la posibilidad de pérdida.

e) Subaditividad:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \quad \forall X, Y \in \Omega \quad (1.19)$$

es decir, que la diversificación ayuda a disminuir el riesgo.

Según Acerbi y Tasche (2001), la subaditividad captura la esencia de la forma en que una medida de riesgo debe comportarse bajo la composición o incorporación de carteras. En gestión de riesgos, la subaditividad está asociada con el principio de diversificación, que es esencial para el planteamiento y solución de problemas de optimización de carteras, puesto que posee relación con la con-

vexidad de la medida de riesgo, lo que garantiza que se pueda encontrar una combinación óptima dentro de una cartera que minimice el riesgo. Puede interpretarse que la convexidad refleja la aversión al riesgo por parte del inversor. La convexidad es un efecto de segundo orden que describe la forma en que el riesgo cambia, a medida que varía el rendimiento.

Se han desarrollado diversos modelos para la gestión de riesgos, siendo tres los que se consideran fundamentales. En 1952, Harry Markowitz desarrolló la Teoría de Carteras y el concepto de que ha medida en que se añaden activos a una cartera de inversión, el riesgo disminuye como consecuencia de la diversificación. También propuso los conceptos de correlación y covarianza como elementos clave en el análisis. En 1973, Fisher Black y Myron Scholes proponen un modelo para valorar y cubrir opciones financieras, que se conoce como modelo de Black-Scholes, aunque Merton (1973) desarrolló un modelo similar de manera independiente. Y en 1993, JP Morgan desarrollo el concepto de Valor en Riesgo como modelo para cuantificar los riesgos de mercado basándose en la Teoría de la Probabilidad. Según Jorion (1997), los avances en la teoría financiera moderna han permitido a las instituciones la creación de nuevos instrumentos y un mejor entendimiento de la administración dinámica de los riesgos financieros. En seguida se describen brevemente los modelos mencionados, porque son de gran importancia en la evolución histórica de las herramientas de análisis de riesgos. Además permitirán introducir con mayor claridad el concepto de Valor en Riesgo, que es uno de los conceptos clave de esta investigación.

1.5. El modelo de Markowitz

H. Markowitz desarrolló el modelo de optimización de carteras que lleva su nombre, basándose en el comportamiento racional de los inversores; es decir, el inversor desea obtener la mayor rentabilidad y es adverso al riesgo. Para Markowitz,

una cartera se considera eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un nivel de riesgo determinado, o equivalentemente, si proporciona el menor riesgo posible para un nivel fijado de rentabilidad.

En concreto, el modelo de Markowitz parte de las siguientes hipótesis:

a) Se supone conocido el rendimiento esperado de cada uno de los instrumentos financieros considerados.

b) Se supone que las varianzas y las covarianzas entre instrumentos financieros son conocidas, además se supone que el análisis es estático, por lo que el periodo t se mantiene fijo.

c) Los rendimientos de los instrumentos financieros se distribuyen de manera normal.

d) La forma de actuar de los inversores es racional.

e) El modelo optimiza la cartera de manera estática.

En estas condiciones, el conjunto de carteras que son consideradas eficientes pueden obtenerse resolviendo el siguiente problema:

$$\text{mín } \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (1.20)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) = V^* \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde x_i ¹⁸ es la proporción del presupuesto que el inversor destina al activo financiero i , R_p es el rendimiento de toda la cartera, y $\sigma^2(R_p)$ representa la varianza de la cartera p y σ_{ij} es la covarianza de los rendimientos de los valores i y j . $E(R_p)$ representa el rendimiento esperado de la cartera p , de forma que si se

¹⁸Un planteamiento más amplio es que x_i sea negativo, lo cual implica endeudamiento.

varia el parámetro V^* se obtiene el conjunto de proporciones x_i que minimizan el riesgo y su correspondiente valor.

El conjunto de combinaciones de rentabilidad y riesgo $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ de todas las carteras eficientes se denomina frontera eficiente¹⁹; una vez que ésta es conocida, el inversor, según sus preferencias, elegirá la cartera óptima²⁰. Así pues, se puede decir que la cartera óptima es aquella combinación de instrumentos financieros que representa la relación riesgo-rendimiento que maximiza la satisfacción del inversor. Por lo tanto, cualquier decisión que sea considerada como racional debe escoger siempre carteras que esten dentro de la frontera eficiente.

1.6. Valor en riesgo

Esta herramienta juega un papel central en la evaluación de riesgos y su estudio constituye uno de los objetivos de este trabajo. Por ello, se va a presentar con mayor detalle.

Ante la situación de inestabilidad de los mercados financieros y la necesidad de un forma de medición adecuada del riesgo, se ha adoptado el valor en riesgo (VaR, *Value at Risk*²¹), como herramienta estándar para la medición del riesgo de mercado, cuyo principal atractivo es su simplicidad de interpretación, ya que se puede estimar cuánto se puede perder con determinada probabilidad y el resultado se resume en un sólo número.

1.6.1. Antecedentes históricos

Para Aragonés y Blanco (2000), el Consejo de Administración del Grupo de los Treinta (G-30) encabezado por JP Morgan, llegó a la conclusión de que era

¹⁹La frontera eficiente puede definirse como el conjunto de carteras que para cada rendimiento tienen la mínima varianza o, de forma equivalente, el conjunto de carteras que para cada varianza dada, tienen el máximo rendimiento.

²⁰Para estudiar el modelo con mayor detalle, véase Markowitz (1952).

²¹Por su denominación anglosajona.

necesario que existiera un mayor control de los riesgos, más información por parte de las instituciones sobre las posiciones tomadas y una medida consistente para calcular el riesgo de mercado. Para Jorion (2003), la revolución VaR se inició en 1993 cuando fue aprobado por el G-30 como parte de "las mejores prácticas" para hacer frente a los productos derivados, además se popularizó por el interés de los reguladores en el VaR como medida de riesgo. Según Peña (2002), la primera recomendación pública del uso de medidas tipo VaR apareció en julio de 1993 en un informe del *Global Derivatives Study Group* (1993), que recomendaba a los agentes «(...) el uso de medidas consistentes para el cálculo diario del riesgo de mercado de sus posiciones en derivados (...)». En 1995, el comité de supervisión bancaria permitió que los bancos calcularan sus propios requerimientos de capital con modelos basados en la metodología VaR. Y según Jorion (1997), la recompensa del VaR es que ha llevado el debate del riesgo en torno a los derivados a un sendero más constructivo.

A partir del desarrollo del VaR, han ido apareciendo diversas publicaciones, en las cuales se aplica esta metodología, además de utilizar los diferentes métodos de estimación²² pertinentes, como por ejemplo Peña (2002), Embrechts et al. (2005) o Jorion (1996) y (1997), que ha utilizado técnicas de simulación histórica y de Monte Carlo en el marco de instrumentos financieros no lineales, tales como las opciones. En Christoffersen et al. (2001), se argumenta que el VaR ha emergido como una herramienta estándar para medir y reportar el riesgo del mercado financiero. Las medidas VaR se calculan utilizando datos históricos para la valoración de opciones. Estas valoraciones se basan en medidas de volatilidad tipo GARCH. El VaR es esencialmente el percentil de la distribución condicional de los rendimientos de un activo, pudiendo aplicarse tanto a uno individual como a una cartera.

²²Las diferentes formas de estimación del VaR se describen posteriormente.

1.6.2. Definición

Más en detalle, debe destacarse que la valoración de los riesgos es mayormente utilizada para reducir la probabilidad de incurrir en grandes pérdidas. Por ello, el Valor en Riesgo (VaR) es ampliamente utilizado para medir el riesgo de mercado en la administración o gestión de riesgo, puesto que permite asegurar que las instituciones financieras continúen en el negocio después de un evento catastrófico. En general, puede definirse²³ como la cantidad máxima probable que puede perder una cartera o instrumento financiero, en un horizonte temporal determinado, bajo unas circunstancias normales de los mercados y para un nivel de confianza dado, como consecuencia de movimientos adversos de los precios. De esta manera, el VaR combina la exposición a una fuente de riesgo con la probabilidad de un movimiento extraordinario en el mercado.

Supóngase que una cartera de inversión presenta un VaR de Y unidades monetarias para un nivel de confianza de α y un horizonte temporal de T meses. Puede interpretarse que, en el $100(\alpha)\%$ de los casos, no existirá una pérdida superior a Y unidades monetarias en los próximos T meses, es decir, en $100(1 - \alpha)\%$ de los casos la pérdida será inferior a Y unidades monetarias en los próximos T meses²⁴.

Con mayor precisión, el VaR de una cartera, activo o, en general, de cualquier instrumento financiero, se puede definir de la siguiente forma: dado un nivel de confianza, α , es la mayor pérdida que se puede sufrir en un intervalo de tiempo determinado $[t_0, t]$. Es decir,

$$P[\Pi(t_0) - \Pi(t) < VaR] = \alpha \tag{1.22}$$

$\Pi(t_0)$ denota el valor de la cartera o del instrumento financiero inicial, mientras

²³Existen diferentes definiciones del VaR según diferentes puntos de vista. Para mayor detalle del concepto, véase Jorion (1997).

²⁴Es decir, el VaR es el resultado menos malo de los $100(1 - \alpha)\%$ peores casos de la distribución de pérdidas y ganancias. En este contexto, los peores casos indican pérdidas más grandes.

que $\Pi(t)$ representa el valor del instrumento financiero en el instante t . Debe recordarse que el horizonte temporal puede expresarse en días, semanas, meses y hasta un año. El nivel de confianza también puede variar, siendo lo usual un valor entre 95 % y 99 %, es decir, un valor muy próximo al 100 %. Por lo tanto, el VaR es una estimación estadística y como tal requiere que se establezcan ciertos parámetros como el horizonte temporal, el nivel de confianza y la moneda de referencia. A partir de un contexto probabilístico, sea t el instante en el que se adquiere una posición financiera y se desea analizar el riesgo para los siguientes n periodos. $\Delta V_{t,t+n}$ representa el cambio de t a $t+n$ del valor del activo en una posición financiera, $F_n(x)$ es la función de distribución acumulada de $\Delta V_{t,t+n}$. Por tanto, es posible definir el VaR para una posición larga en el horizonte de tiempo n con una probabilidad p como:

$$p = P(\Delta V_{t,t+n} \leq VaR) = F_n(VaR) \quad (1.23)$$

El poseedor de la posición larga incurrirá en una pérdida cuando $\Delta V_{t,t+n} < 0$, ya que, se suponen valores negativos cuando p es pequeña. El poseedor de una posición corta sufre una pérdida cuando el valor de un activo crece, por lo que el VaR se define como:

$$p = P(\Delta V_{t,t+n} \geq VaR) = 1 - F_n(VaR) \quad (1.24)$$

para una p pequeña, el VaR de una posición corta supone un valor positivo. Para una posición larga la cola izquierda de la distribución $F_n(x)$ es la más importante, mientras que en una posición corta se da más énfasis en la cola derecha $F_n(x)$. La función de distribución acumulada en la práctica es desconocida y las investigaciones del VaR tienen que ver principalmente con la estimación de esta función $F_n(x)$ o sus cuantiles.

Así pues, el objetivo principal del VaR es cuantificar el riesgo de mercado,

y por tanto, fijar límites al riesgo asumido por los gestores; esta metodología permite que la administración de riesgos pueda tomar medidas correctivas de forma oportuna en caso de pérdidas o de eventos extraordinarios.

Es importante hacer hincapié en que el VaR debe expresarse dentro de un contexto, en concreto, un horizonte temporal, un nivel de confianza, una moneda de referencia y una metodología de cálculo. La metodología de cálculo dependerá del modelo que se le aplique a los datos. Así pues, a continuación se describen diferentes métodos de estimación de VaR, para valorar su adecuación a los diversos conjuntos de datos que puedan presentarse.

1.6.3. Métodos de estimación del VaR

Para llevar a cabo la estimación del VaR existen diferentes métodos. Entre los más difundidos, están los métodos delta-normal, de simulación histórica y de simulación de Monte Carlo, proporcionando este último una base de datos para evaluar el VaR. Por la importancia y utilidad que estas formas de aproximación han llegado a tener, se describen a continuación.

Métodos de valoración local

Estos métodos miden el riesgo realizando la valoración de un activo o una cartera en la posición inicial. Usualmente, estos se basan en la hipótesis de normalidad de los factores de riesgo, por lo que muestran, que si una cartera está compuesta por activos normalmente distribuidos, la cartera también seguirá dicha distribución. En concreto se presenta el método Delta-Normal y sus ampliaciones.

a) Método Delta-Normal

Este es un método analítico que se basa en utilizar la matriz de varianzas y covarianzas de los factores de riesgo implicados para representar el riesgo global

de una cartera o instrumento de inversión. El objetivo es calcular la varianza del instrumento financiero, asumiendo que sus rendimientos siguen una distribución normal²⁵, para luego estimar el VaR con un nivel de confianza y un horizonte temporal determinado. El valor en riesgo de un instrumento financiero i , VaR_i , en concreto puede escribirse como:

$$VaR_i = \lambda_\alpha S_i \sigma_i \sqrt{t} \quad (1.25)$$

donde λ_α es el factor que determina el nivel de confianza del cálculo, S_i es el monto total de la inversión en el instrumento i , σ_i es la desviación típica de los rendimientos y, t es horizonte temporal en que se desea calcular el VaR. El VaR de una cartera se puede obtener agregando el VaR de cada instrumento en función de las correlaciones observadas entre los cambios relativos de los precios,

$$VaR_p = \sqrt{VaR' C VaR} \quad (1.26)$$

siendo C la matriz de correlaciones de dimensión $n \times n$, VaR el vector de los VaR_i por instrumento de dimensión $n \times 1$ y VaR' su traspuesta.

Así pues, en el caso más general de una cartera, se asume que la cartera consta de instrumentos financieros con distribuciones conjuntamente normales, así que se definen sus rendimientos para el próximo periodo como la suma ponderada de los rendimientos que componen la cartera,

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1} \quad (1.27)$$

donde R_p representa el rendimiento de la cartera, $R_{i,t+1}$ son los rendimientos de los activos que conforman toda la cartera, N representa el número total de activos y, $w_{i,t}$ son las ponderaciones en el instante actual. Como el rendimiento de

²⁵En este método la distribución normal es asumida por las pérdidas y ganancias de una cartera o instrumento financiero. También es llamado método de varianzas y covarianzas

la cartera es una combinación lineal de variables que se asumen como normales, dicho rendimiento también se distribuirá normalmente. Si se utiliza notación matricial, la varianza de la cartera viene determinada por la siguiente expresión:

$$\sigma^2 (R_{p,t+1}) = w'_t \Sigma_{t+1} w_t \quad w'_t = (w_{1t}, \dots, w_{Nt}) \quad (1.28)$$

siendo Σ_{t+1} la predicción de la matriz de covarianzas.

Uno de los principales inconvenientes que presenta es que el VaR debe medirse para carteras grandes y complejas que se desarrollan a lo largo del tiempo, y entonces no mide correctamente el riesgo de instrumentos no lineales tales como opciones. Este método simplifica el proceso, ya que transforma los factores de riesgo a su forma lineal básica para calcular el VaR a partir de la matriz de varianzas y covarianzas, esto es, se produce un conjunto de exposiciones $x_{i,t}$, agregadas a través de todos los instrumentos para cada factor de riesgo. Por lo tanto, el VaR de la cartera es:

$$VaR = \sqrt{\lambda_\alpha x'_t \Sigma_{t+1} x_t}, \quad x'_t = (x_{1t}, \dots, x_{Nt}) \quad (1.29)$$

siendo λ_α el factor relacionado al nivel de confianza especificado.

Un caso particular de este método es el denominado *Riskmetrics*, el cual es un sistema de medición de riesgos que fue desarrollado por J. P. Morgan. Probablemente es el sistema de medición de riesgo más conocido y que más llamó la atención de los que se desarrollaron en la última parte del siglo pasado, cuando numerosas instituciones financieras empezaron a preocuparse por llevar a cabo este tipo de mediciones. *Riskmetrics* se creó con el objetivo de incrementar la transparencia de las instituciones participantes en los mercados de derivados y para establecer un sistema homogéneo de medición de riesgos de mercado que pudiera ser utilizado por la mayoría de instituciones que participan en los mercados financieros.

En Christoffersen et al. (2001) se afirma que una importante contribución de *Riskmetrics* es la introducción del VaR, que resume los resultados de una cartera de rendimientos en un único número, y que los inversores han encontrado útil y fácil de interpretar. Se puede decir que *Riskmetrics* es un conjunto de herramientas que permiten a los participantes en el mercado financiero estimar su exposición al riesgo de mercado bajo el marco de valor en riesgo. *Riskmetrics* cuenta con tres componentes básicos:

- 1) Conjunto de metodologías que esbozan cómo los gestores de riesgos pueden computar el VaR de una cartera de instrumentos financieros.
- 2) Datos que permiten a los gestores llevar a cabo la aplicación del conjunto de metodologías anteriores.
- 3) Cálculo del VaR e informe de resultados²⁶.

Riskmetrics supone que el rendimiento diario de una cartera sigue una distribución normal condicional²⁷. Se denota como r_t al logaritmo de los rendimientos diarios y como I_{t-1} al conjunto de información disponible en tiempo $t - 1$. Entonces, *Riskmetrics* supone que:

$$r_t | I_{t-1} \rightarrow N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad (1.30)$$

siendo μ_t y σ_t^2 la media y varianza condicional de r_t respectivamente. Además el método supone que las dos cantidades evolucionan a través del tiempo según el modelo simple.

$$\begin{cases} \mu_t = 0 \\ \sigma_t^2 = \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) r_{t-1}^2 \end{cases} \quad (1.31)$$

²⁶Para más detalle del funcionamiento de la metodología Riskmetrics, véase J.P. Morgan (1996).

²⁷Esto es debido a que el sistema Riskmetrics está basado en un enfoque paramétrico, es decir, se pretende ajustar una distribución paramétrica, como la normal, a un conjunto de datos. Este enfoque es muy similar al método de varianzas y covarianzas, sólo que tiene como diferencia que cuenta con una base de datos actualizada de factores de riesgos, por lo que no es necesario especificarlos.

donde $0 < \alpha < 1$, es más, a menudo se encuentra en el intervalo $(0,9, 1)$, siendo este parámetro el factor de caída o amortiguamiento, *Riskmetrics* utiliza un único valor del parámetro α que es 0,94 para datos diarios²⁸. Se debe remarcar que la ecuación de la varianza sigue un proceso sin deriva IGARCH $(1, 1)$ ²⁹.

Por último, el método Delta-Normal, se basa en datos distribuidos normalmente y, en la realidad, casi nunca se observan rendimientos de activos financieros que sigan una distribución normal. Se puede decir que este método tiene como principal indicador a la matriz de covarianzas, por lo que un mínimo error en la estimación y/o predicción de dicha matriz puede hacer que falle toda la precisión de la medición del riesgo y que el VaR sea incorrecto. Además no cuenta con un adecuado tratamiento de eventos extraordinarios o extremos y no considera la leptocurtosis, lo que puede conducir a infravalorar el riesgo. Una posible solución puede ser incorporar el riesgo gamma³⁰ o cualquier otra letra griega³¹ al cálculo de VaR.

b) Ampliaciones del método Delta-Normal

El método Delta-Gamma puede considerarse como una extensión del método Delta-Normal, ya que éste toma en cuenta riesgos adicionales, siendo más adecuado para carteras que contienen opciones. Por lo tanto, para una cartera

²⁸Este parámetro determina las ponderaciones relativas que son aplicadas a las observaciones (rendimientos) y a la cantidad efectiva de días usados para la estimación de la volatilidad. Para más detalle, véase J. P. Morgan (1996).

²⁹Modelo GARCH con una raíz unitaria en el polinomio autorregresivo. Para más detalle ver Engle y Bollerslev (1986).

³⁰El riesgo gamma está basado en fenómenos no lineales. Para mayor aclaración ver Hull y White (1987 y 1990) para el cálculo del VaR en condiciones no normales.

³¹Las “Griegas”, llamadas así porque las 5 letras son del alfabeto griego, se usan para cuantificar las exposiciones de las carteras que contienen opciones. Cada una de ellas, mide cómo el valor de mercado de la cartera debería responder a un cambio de alguna variable, un subyacente, volatilidad implícita, tanto de interés como de tiempo. Hay 5 griegas, “Delta” medida de primer orden (lineal) y representa la sensibilidad al precio subyacente; “Gamma” medida de segundo orden (cuadrática), representa la sensibilidad a los cambios del precio subyacente; “Kappa o Vega” medida de primer orden (lineal), representa la sensibilidad a la volatilidad implícita de un subyacente; “Theta” medida de primer orden (lineal) representa la sensibilidad al paso del tiempo; y “Rho” medida de primer orden (lineal) representa la sensibilidad a un determinado tipo de interés. Las Griegas se definen en primeras derivadas; sólo el caso de gamma se define en las segundas derivadas parciales.

de opciones, el cambio en el precio, sobre el mismo subyacente, puede estimarse usando una aproximación de segundo orden³²,

$$dc = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 \quad (1.32)$$

donde las griegas son valores netos para la cartera de opciones³³ y S es el precio de ejercicio o *strike*. Para una posición simple, el VaR es,

$$VaR = |\Delta| (\alpha\sigma S) - \frac{1}{2}\Gamma (\alpha\sigma S)^2 \quad (1.33)$$

El problema es que cuando se pierde la linealidad, el VaR puede llegar a ser muy complejo, no pudiendo relacionarse con el VaR del subyacente. Entonces, hay que hacer uso de simulaciones numéricas para la evolución de dS y así obtener el VaR. Por lo tanto, este método puede generalizarse a múltiples factores de riesgo³⁴, ya que se pueden introducir otros elementos, tales como la volatilidad con vega, la variación del tiempo con theta y el tipo de interés con rho. En concreto, la generalización utilizando vega es:

$$dc = \Delta' dS + \frac{1}{2} (dS)' \Gamma dS + \Lambda' d\sigma \quad (1.34)$$

donde dS y $d\sigma$ ahora son vectores de N cambios en los precios de mercado y en su volatilidad, Δ y Λ son vectores de N posiciones y Γ es una matriz de gammas $N \times N$ con respecto a los diversos factores de riesgo.

El problema de este método es que deja de ser práctico cuando se tienen múltiples factores de riesgo, ya que la cantidad de datos se incrementa geométricamente y con ellos el número de parámetros, añadiéndose los errores computacionales en que se puede incurrir en la estimación.

³²Desarrollo en serie de Taylor.

³³Posición global de la cartera.

³⁴Para mayor detalle y ampliación del modelo de Black y Scholes, véase Hull (2006).

Métodos de valoración global

Estos métodos miden el riesgo haciendo la valoración total de un activo o una cartera sobre un rango de escenarios posibles. Por ello, se considera que estos son superiores debido a que toman en cuenta instrumentos no lineales. Sin embargo, se requiere una cantidad amplia de información, lo que puede llevar a dificultar la implementación, especialmente cuando se utilizan carteras grandes.

a) Método de simulación Histórica

La simulación histórica es un método relativamente simple, fácil de implementar y tiene la ventaja de que no es necesario asumir que las rentabilidades siguen una distribución normal, por lo que es posible reflejar la distribución de rentabilidades completa, tal y como se habría producido con anterioridad. Este modelo consiste en retroceder en el tiempo durante un periodo de tiempo suficientemente amplio, en la práctica, Peña (2002) y Jorion (1997) muestran que lo usual es tomar los últimos 250 días aproximadamente³⁵, y aplicar ponderaciones actuales a una serie temporal de rendimientos históricos de activos:

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,k}, \quad k = 1, 2, \dots, t \quad (1.35)$$

Siguiendo la notación anterior, $R_{p,k}$ es el rendimiento de la cartera en el instante k , se observa que las ponderaciones $w_{i,t}$ toman valores actuales y, por tanto, este rendimiento no representa el de una cartera real sino que reproduce el pasado de una cartera hipotética utilizando las ponderaciones de hoy; este enfoque en ocasiones se denomina “*bootstrapping*” porque supone la utilización de la distribución real de los datos históricos recientes (sin reemplazamiento).

Este método implica el uso de datos pasados en una forma muy directa como una guía para ver lo que sucede en el futuro, o de otra manera, este modelo se

³⁵Elegir el tamaño de la muestra es muy importante, debido a que está puede tener una gran influencia en la valoración y la predicción de este método.

basa en el comportamiento de la cartera suponiendo que se producen los cambios pasados del mercado en una base de datos histórica. La distribución de pérdidas y ganancias de una cartera se genera empíricamente, calculando la diferencia entre el valor V para diferentes niveles de precios P_t ,

$$\Delta V = V(P_t) - V(P_{t-h}) \quad (1.36)$$

siendo h el horizonte temporal elegido. El VaR para un nivel de confianza determinado es directamente el percentil de la distribución de probabilidad de los cambios de valor de la cartera. La elección del período muestral refleja un balance entre el uso de tamaños muestrales más largos y más cortos; los intervalos más grandes incrementan la precisión de la estimación, pero se podrían utilizar datos irrelevantes, omitiéndose cambios importantes en el proceso subyacente (cambios de tendencia).

La valoración global requiere un conjunto de precios completos, como pueden ser las curvas de rendimientos, en lugar de solamente los rendimientos. Los hipotéticos precios futuros para k escenarios se obtienen aplicando los cambios históricos en los precios sobre el nivel actual de los precios:

$$P_{i,k}^* = P_{i,k_0} + \Delta P_{i,k} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.37)$$

siendo k_0 el precio de hoy, obteniéndose un nuevo valor de la cartera $P_{i,k}^*$ con el conjunto completo de precios hipotéticos. Se debe observar que, para capturar el riesgo vega, el conjunto de precios puede incorporar mediciones de volatilidades implícitas. Generando el rendimiento hipotético correspondiente a la observación k ,

$$R_{p,k} = \frac{P_{i,k}^* - P_{i,k_0}}{P_{i,k_0}} \quad (1.38)$$

entonces, el valor en riesgo se obtiene a partir de la distribución completa de los rendimientos hipotéticos.

Este método ofrece como ventaja que los escenarios sobre los que se evalúa la cartera ya han sido observados, por lo que se pueden tomar como posibles. Además utiliza correlaciones «condicionales» en el sentido de que pueden ajustarse al comportamiento pasado de los factores de riesgo bajo cada escenario en lugar de tomar la correlación media. El método permite no linealidades, distribuciones no normales y capta riesgos gamma, vega si la cartera esta compuesta de opciones o productos derivados, cuantifica las colas anchas, es robusto e intuitivo; además facilita información no sólo del VaR sino también sobre la pérdida histórica máxima del período de observación.

Entre sus inconvenientes, se encuentra que es necesario disponer de una amplia base de datos que permita volver a valorar todos los instrumentos de la cartera, ignora completamente cambios futuros del mercado distintos al pasado, ya que el pasado representa sólo al futuro inmediato. La simulación histórica omite situaciones con volatilidad temporalmente elevada, es decir, muestra debilidad en cuanto a la predicción de eventos extremos, y además se puede volver incómodo para carteras grandes con complicadas estructuras. Para concluir, puede decirse que la simulación histórica supone que la distribución asumida no cambia con el tiempo por lo que el tamaño de la muestra puede cambiar drásticamente el resultado.

b) Método de simulación de Montecarlo

A través de este método, se obtiene una aproximación del comportamiento de la rentabilidad esperada de una cartera o instrumento, utilizando simulaciones informáticas que generan trayectorias aleatorias de los rendimientos de la cartera o instrumento financiero, basados en ciertos supuestos iniciales sobre las volatilidades y correlaciones de los factores de riesgo.

La simulación de Monte Carlo se basa en la generación de escenarios aleatorios futuros y se requieren conocimientos de la distribución probabilística de dichos escenarios, que se suelen suponer normales o lognormales, con matrices de covarianzas Σ estimadas a partir de series históricas de rendimientos. El movimiento geométrico Browniano³⁶ es un modelo de comportamiento de los precios habitualmente utilizado en la práctica para valorar instrumentos tales como opciones.

El proceso de generación de los escenarios para el caso normal es el siguiente: considérese la cartera $\Pi(S)$, función de n factores de riesgo S distribuidos de acuerdo a la matriz de covarianzas Σ y sea S_0 su valor actual o inicial. Sea Q la matriz de Choleski asociada a Σ , y sea $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un vector aleatorio, cuyos componentes son variables independientes e idénticamente distribuidas en \mathbb{R} , normales cada una de ellas, con media cero y varianza unitaria. Entonces las simulaciones de escenarios futuros vienen determinados por $Q\xi$, por lo que los posibles valores de la cartera en el futuro vendrán definidos por:

$$\Pi = \Pi(S_0, Q\xi) \tag{1.39}$$

Es posible calcular el VaR de dos formas, la primera es el VaR paramétrico, en el cual se ajusta la distribución de Π a una distribución paramétrica, esta distribución paramétrica puede ser la normal, donde su media es muy próxima a cero³⁷ y se estima su desviación típica. La segunda forma es la no paramétrica, donde se ordenan los valores de Π , siendo el VaR el percentil al $(1 - \alpha)$ %.

La simulación de Monte Carlo es similar a la simulación histórica, sólo que en este caso los cambios hipotéticos de los precios se crean como realizaciones de un proceso estocástico propuesto. El estimador del VaR por el método de

³⁶ $dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dB_t$, donde el primer término de la derecha es componente determinístico o de tendencia, afectado del coeficiente de la media μ y el segundo término es el componente estocástico afectado del coeficiente de difusión σ , a través del movimiento Browniano $\{B_t, t \geq 0\}$, tal que $\Delta B_t \sim N(0, \sqrt{dt})$.

³⁷Para el caso en el que se utilizan rendimientos diarios.

simulación de Monte Carlo siempre tiene un error que se debe a la variabilidad de la muestra; conforme el número de simulaciones aumenta, el estimador converge a su valor verdadero, normalmente a una velocidad equivalente a la raíz cuadrada del número de escenarios³⁸. Sin embargo, el uso de un mayor número de escenarios puede hacer excesivamente lentos los cálculos, con mínimos beneficios marginales en términos de precisión.

Este es el método más poderoso para calcular el VaR, ya que trata posiciones con comportamiento no lineal, considera el riesgo de volatilidad e incluso el riesgo del modelo, y facilita la información respecto a casos extremos. Por todo ello, se puede considerar que este es el método más completo para medir el riesgo de mercado, es más atractivo cuanto mayores sean las dimensiones del problema, puede tener en cuenta una amplia gama de riesgos y puede incorporar variación temporal en los parámetros, colas gruesas y escenarios extremos. Tiene como inconveniente que su cálculo es más complejo y muestra mayor coste computacional, siendo esto un riesgo para el modelo.

1.6.4. Comprobación y contrastación del VaR

Después de estudiar y analizar los métodos de estimación del VaR, es conveniente comprobar y contrastar los resultados. Por ello, se exponen el *Backtesting* y el *Stress Testing*, que son dos métodos extensamente utilizados para llevar a cabo la verificación de la estimación del VaR, ya que el primero es un análisis retrospectivo y el segundo es un análisis de escenarios supuestos. Así pues, el primero en ser definido es el *Backtesting* (prueba retrospectiva) y se muestra a continuación.

³⁸Peña (2002) y Jorion (1997).

a) Backtesting

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BSC)³⁹ ha recomendado el *Backtesting* con el fin de verificar la precisión del VaR obtenido. Dicha verificación también es de gran interés para los gestores y analistas de riesgos, ya que requieren contrastar y corroborar que su modelo pronostique de forma acertada y anticipada el número de ocasiones en que se ha excedido el VaR.

Es un proceso basado únicamente en observaciones pasadas, que sirve para confirmar si el cálculo del VaR es acertado con respecto a los resultados de pérdidas y ganancias observadas. Esta prueba consiste en contabilizar cuantas veces las pérdidas observadas exceden el VaR o, dicho de otra manera, *Backtesting* es una contrastación empírica que se lleva a cabo comparando los resultados obtenidos cada día frente al VaR estimado para determinar el número de ocasiones en que las pérdidas son superiores a él. El cálculo es el siguiente:

- 1) Se tiene una muestra de rendimientos r con N observaciones.
- 2) Se cogen subconjuntos de m elementos de la siguiente forma:

$$[r_1, r_m], [r_2, r_{m+1}], \dots, [r_i, r_{m+i-1}], \dots, [r_{N-m}, r_{N-1}]$$

- 3) Para cada subconjunto $[r_i, r_{m+i-1}]$ se calcula el VaR para el periodo $m + i$.

Por un lado, se obtiene la serie formada por los VaR calculados como se ha descrito anteriormente. De esta forma, se realiza la comparación con la serie de rendimientos reales históricos, calculando así el número de veces, e , que se ha sobrepasado el VaR. Por otro lado, se obtiene el número máximo de excepciones, p , que debería tener un buen modelo: $(N - m) * \alpha$.

³⁹El Comité de Basilea fue establecido como el Comité de Regulación Bancaria y Prácticas Supervisoras. Los países miembros son: Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Alemania, Italia, Japón, Luxemburgo, Holanda, Suecia, Suiza, el Reino Unido y, desde 2001, España. Su principal objetivo es mejorar el entendimiento y la calidad de la supervisión bancaria en el mundo.

A partir de aquí se realiza un contraste donde las hipótesis son las siguientes:

$$H_0 : e \leq p$$

$$H_a : e > p$$

Teniendo en cuenta la distribución binomial, la probabilidad de que en el límite el VaR se excediera en e o más días X , es:

$$P(X \geq e) = \sum_{k=e}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \quad (1.40)$$

Particularmente, supóngase que se está calculando el VaR a un día y con un nivel de confianza de 99%. El *Backtesting* podría examinar cuantas veces la pérdida excede el nivel de confianza del 99%. Si esto sucede cerca del 1% de los días se podrá seguir con la metodología actual para calcular el VaR, pero si sucede por ejemplo, el 7% de los días, se debe sospechar que la metodología empleada no es la adecuada, ya que probablemente el VaR esté subestimado. Si por el contrario, los excesos suceden el 0,2% de los días, es posible decir que la metodología estará sobrestimando el VaR.

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BSC) examina el número de veces que las pérdidas son superiores al VaR y, dependiendo del número de excepciones, existe un sistema de penalización para aquellas instituciones que utilicen un modelo que subestime el riesgo de mercado de forma consistente.

Sin embargo, este contraste deja en segundo lugar el tamaño que puedan tener las pérdidas, ya que se basa en la frecuencia con que las pérdidas son superiores al VaR estimado, por lo que quizá, no ofrezca información suficiente para validar la fiabilidad de los modelos utilizados por los gestores.

b) Stress Testing

Otra prueba recomendada es *Stress Testing*, ya que examina el efecto de grandes movimientos simulados en variables financieras de gran importancia en una cartera de inversión.

Puede decirse que la técnica *Stress Testing* analiza cómo se comporta una cartera o instrumento financiero bajo algunos de los movimientos más extremos del mercado vistos en los últimos 10 ó 20 años. Se centra, principalmente, en el estudio de acontecimientos extremos en los mercados que, si se produjeran, causarían grandes pérdidas en las carteras o en los instrumentos financieros. Así, con frecuencia, las volatilidades históricas calculadas a partir de series de precios pueden infravalorar la probabilidad de que se produzcan movimientos extremos en los mercados, ya sea por cambios en la situación política y/o por cambios en la situación macroeconómica.

También se denomina análisis de escenario, ya que examina el efecto de grandes movimientos simulados (escenarios) en variables financieras relevantes sobre la cartera o instrumento financiero. Esta prueba consiste en analizar uno o varios escenarios específicos en el que las condiciones de mercado son extremas y nada favorables. Por ejemplo, se puede simular un escenario partiendo de la base de que una moneda se ha devaluado un 20 por ciento de forma súbita o que la curva de rendimientos de un instrumento financiero se desplaza hacia abajo 150 puntos básicos.

Los escenarios de estrés y sensibilidad son pruebas no estadísticas, debido a que la forma de elegir los escenarios a utilizar es muy subjetiva. Se toma en cuenta que los modelos de valor en riesgo por simplicidad funcionan sólo bajo condiciones normales. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de los activos financieros, con especial énfasis los negociados en mercados emergentes y energéticos, se caracterizan por tener distribuciones con colas más anchas (leptocurtosis) que las que

sugiere la distribución normal⁴⁰. Por lo tanto, es necesario valorar el modelo bajo condiciones en donde los supuestos se incumplan o se colapsen, es decir, valorar el modelo en situaciones extremas. La ventaja de este contraste es que es posible cubrir situaciones completamente ajenas a los datos históricos. Las principales debilidades de este contraste son las siguientes:

- 1) Los resultados del análisis dependen en su totalidad de los escenarios elegidos por el gestor, por lo tanto, este puede ser un componente subjetivo.
- 2) Es necesario comprobar la consistencia de los posibles escenarios de precios.
- 3) Con carteras con un alto grado de complejidad, puede tener un alto grado de dificultad el determinar los factores de riesgo que deben tratarse con especial énfasis.
- 4) La elección de los escenarios para el análisis es un problema, ya que existe una amplia gama de escenarios posibles, por lo que si se eligen escenarios poco probables, se llegará a mediciones erróneas del VaR.
- 5) No está preparado para la sensibilidad de las carteras ante pequeñas fluctuaciones en los precios, éstas no se encuentran cubiertas y pueden generar grandes pérdidas.
- 6) No especifica la probabilidad de situaciones en el peor de los casos posibles.
- 7) Hace un tratamiento débil de las correlaciones, y según se ha demostrado⁴¹, las correlaciones son un componente esencial para cuantificar el riesgo de una cartera de inversión.

Según Jorion (1997), las implementaciones más sofisticadas de la prueba *Stress Testing* se realizan en dos pasos. Primero, hacer fluctuar hacia arriba y hacia abajo todas las variables asociadas a factores de riesgo individualmente, por ejemplo, 1,65 desviaciones estándar, para cuantificar los cambios a la cartera. Segundo, evaluar un escenario en el peor de los casos, donde todas las variables sean pre-

⁴⁰ Aragonés y Blanco (2000).

⁴¹ Véase Jorion (1997).

sionadas en la dirección que se considere la peor pérdida. Así pues, este tipo de contrastes deberían de considerarse como información complementaria y adicional al método de estimación que sea utilizado para aproximar el VaR.

1.6.5. Ventajas e inconvenientes del VaR

Una de las principales ventajas que ofrece el VaR es que proporciona un valor único⁴², es decir, el valor de la máxima pérdida posible para una cartera o instrumento financiero con cierto nivel de confianza y, de la misma manera, se puede obtener de forma individual la máxima pérdida posible para cada activo de una cartera. También es útil para tomar decisiones de negociación y contratación de un activo y para la gestión activa de carteras, sirve de apoyo para evaluar resultados (“*performance benchmarking*”), además de ser muy útil para fijar límites al riesgo y asignar recursos (“*capital allocation*”). Es posible decir que el VaR es una cifra que resume la exposición de un instrumento financiero al riesgo de mercado, expresada en unidades monetarias⁴³.

Por otro lado, el VaR tiene ciertas limitaciones y este método es útil en la medida que los usuarios las dominen. Estos inconvenientes se presentan por el hecho de que no existe una única forma de estimar el VaR y, por lo tanto, depende de la forma de estimación utilizada y de la forma en que se implemente en el mundo real. Debido a lo anterior, algunos autores⁴⁴ señalan que “el VaR es sólo una estimación subjetiva del riesgo de mercado”, aunque no por ello se disminuyen las aplicaciones del procedimiento. Para Jorion (1997), el VaR debería ser visto como un procedimiento necesario pero no suficiente para el control de riesgos, ya que son necesarios diversos elementos para incurrir en el menor riesgo posible.

Esta medida de riesgo tampoco tiene en cuenta la falta de liquidez y, es-

⁴²El VaR es mucho más que un número, y la metodología puede ser utilizada no sólo para medir el riesgo sino también para gestionarlo.

⁴³Las unidades monetarias dependen de la moneda de referencia que se esté utilizando para la estimación.

⁴⁴Véase, Jorion (1997).

ta carencia, puede ser una fuente importante de riesgos en algunos mercados⁴⁵. El VaR es una medida de riesgo coherente siempre y cuando esté basado en la desviación típica de una distribución normal o lognormal. Se ha demostrado⁴⁶ que, en un contexto de distribuciones elípticas⁴⁷, el VaR es subaditivo porque es proporcional a la desviación típica y esta es subaditiva. Además el VaR, en un contexto de normalidad, puede subestimar el riesgo, debido a que los rendimientos financieros suelen presentar distribuciones con colas anchas. Sin embargo, si la distribución no es elíptica, el VaR no cumple con la propiedad de subaditividad, por lo que el VaR para distribuciones generales no se puede considerar una medida de riesgo coherente.

Lo dicho anteriormente puede conducir a obtener resultados contradictorios, además de infravalorar el impacto que se pueda dar como consecuencia de conclusiones imprecisas. Al mismo tiempo, el VaR ignora, por definición, las pérdidas cuya probabilidad de ocurrencia sea menor que la elegida como nivel de confianza de la estimación. Por estas razones, Bali (2007) afirma que el VaR estándar proporciona una estimación inadecuada de las pérdidas durante periodos de alta volatilidad como los correspondientes a crisis financieras.

Las desventajas que se observan en el VaR han llevado a que se propongan medidas de riesgo alternativas que sean subaditivas y convexas, ya que se considera necesario utilizar medidas que tengan en cuenta toda la distribución de pérdidas extremas esperadas, tal es el caso del Valor en Riesgo Condicional (*Conditional Value at Risk*⁴⁸, CVaR). Artzner et al. (1999) mencionan que, aunque el VaR es muy utilizado en el área financiera, no tiene todas las características deseables, ya que carece de subaditividad y convexidad, además de ser difícil su optimización cuando se calcula para escenarios. Por tanto, si el VaR no tiene una distribución normal, no se puede considerar como medida de riesgo coherente, donde la cohe-

⁴⁵Para mayor detalle, véase Peña (2002).

⁴⁶Véase Embrechts et al. (1997).

⁴⁷Para más detalle de las distribuciones, véase David (1980).

⁴⁸Por su denominación anglosajona.

rencia de las medidas de riesgo se justifica con las cuatro propiedades deseables que ya han sido descritas.

En Artzner et al. (1999), se considera el CVaR como una alternativa al problema de la falta de subaditividad y de convexidad que presenta el VaR, porque además de tener mejores propiedades deseables con respecto al VaR, también demuestra la universalidad de métodos basados en escenarios para brindar medidas coherentes.

1.7. Valor en riesgo condicional

El Valor en Riesgo Condicional (CVaR) se deriva de tomar el promedio de las observaciones cuyas pérdidas exceden el VaR. De forma general, se puede decir que el CVaR proporciona las expectativas condicionales de pérdida por encima del VaR. El CVaR también es conocido como *Expected Shortfall*, *Tail Conditional Expectation*, *Conditional Loss* y *Expected Tail Loss*⁴⁹.

Esta medida de riesgo fue propuesta como una modificación o extensión del *Value at Risk* tradicional. El CVaR puede ser definido como el tamaño esperado de una pérdida que excede al VaR:

$$CVaR = E(X|X > VaR) \tag{1.41}$$

siendo X la pérdida y donde la esperanza condicionada viene determinada por la siguiente expresión:

$$CVaR = E(X|X > VaR) = \frac{\int_{VaR}^{+\infty} x dF(x)}{\int_{VaR}^{+\infty} dF(x)} \tag{1.42}$$

⁴⁹Para más detalle, véase Jorion (2003).

Artzner et al. (1999) argumenta que el CVaR es una expectativa de pérdida condicionada a que se supere el nivel indicado por el VaR y que, a diferencia del VaR, es una medida coherente de riesgo, ya que cumple con las propiedades descritas previamente, presenta ventajas significativas en comparación con el típico VaR y, además es una herramienta excelente y útil para la administración y gestión de riesgos, siendo aplicable en distribuciones con saltos.

El CVaR brinda mejor ajuste y consistencia en las medidas de riesgo respecto al VaR, ya que complementa la información que proporciona el VaR, tornándose muy útil cuando se presentan distribuciones asimétricas y, además calcula la cantidad del exceso de pérdida.

En Rockafellar y Uryasev (2001), se exponen las propiedades fundamentales del CVaR y se muestran las ventajas significativas de esta metodología respecto al VaR tradicional y, se prueba que el CVaR puede cuantificar situaciones arriesgadas o de peligro más allá que el VaR y además comprueban su coherencia. En Rockafellar y Uryasev (1999), se introduce una aproximación para optimizar una cartera con el fin de reducir el riesgo de grandes pérdidas. Se dice que por definición, el VaR nunca es mayor que el CVaR, por lo que carteras con un CVaR bajo indican que también tienen un VaR bajo.

Según Kibzun y Kuznetsov (2006), el CVaR, bajo condiciones normales, es una función convexa con respecto a las posiciones tomadas, permitiendo la construcción de un algoritmo eficiente de optimización; es decir, si la función de pérdida es convexa en una estrategia financiera para todas las realizaciones de un vector aleatorio, el CVaR es también convexo en la estrategia⁵⁰. Siendo esta propiedad conveniente para la optimización de carteras. El CVaR puede ser aplicado a cualquier instrumento y a cualquier fuente subyacente de riesgo, además produce una valoración de las carteras expuestas a diferentes tipos de riesgos⁵¹. Según Acerbi et al. (2008), el CVaR es un excelente candidato para reemplazar

⁵⁰Véase Rockafellar y Uryasev (2001)

⁵¹Acerbi y Tasche (2001).

al VaR en administración de riesgos, teniendo la precaución que se tiene con el VaR pero con la seguridad de que el resultado habrá sido estimado de forma más correcta y quizá más acertada.

A pesar de las buenas propiedades que puede brindar esta medida de riesgo, resulta evidente que tanto el VaR como el CVaR son medidas complementarias. Es importante plantear que las dos metodologías anteriores se complican a medida que se va aumentando el número de activos o instrumentos financieros. El uso de medidas tipo CVaR puede considerarse como un complemento de las medidas de VaR, es decir, si el objetivo del VaR es controlar el riesgo de mercado en condiciones normales, el objetivo del CVaR es controlar los riesgos de mercado en condiciones extremas⁵². Para Peña (2002), puede establecerse una relación entre el VaR y el CVaR si se asume una distribución paramétrica concreta, para el caso concreto de normalidad, el VaR y el CVaR son similares, ya que pueden ser multiples escalares de la desviación típica.

Otro concepto importante que se utiliza en la gestión de riesgos es la denominada teoría de valor extremo⁵³, debido a que es muy útil conocer, cuantificar y modelizar los casos raros, acontecimientos catastróficos o eventos con menor frecuencia que se presentan en una distribución, es decir, analizar los valores extremos observados en una distribución y predecir mas allá.

1.8. Teoría de valor extremo

La teoría de valor extremo juega un papel fundamental a la hora de describir la estimación de las colas de la distribución, es decir, estudia el comportamiento de las colas de la distribución y por ello es un concepto indispensable en cuanto a minimizar riesgos. Gilli y Küllezi (2006) definen varias medidas de riesgo, entre

⁵²Peña (2002).

⁵³*Extreme Value Theory* (EVT) por su denominación anglosajona.

otras el VaR y el CVaR, además expone la teoría de valor extremo y las formas en que se pueden tratar los extremos.

Se basa en el análisis y cuantificación de acontecimientos desfavorables o de fuertes movimientos en los mercados, tales como crisis bursátiles, devaluaciones, tormentas monetarias, etcétera. Esta teoría identifica y modeliza los máximos y los mínimos de una variable aleatoria, además es una forma apropiada de estudiar el comportamiento de las colas de la distribución ya que trata, principalmente, de caracterizar dichas colas. Se concentra en resultados asintóticos acerca de la distribución límite hacia la cual converge la distribución del valor máximo de una variable aleatoria, habitualmente con la restricción de que los rendimientos sean independientes y sigan una misma distribución. La teoría de valor extremo se centra únicamente en las rentabilidades negativas extremas, y parte de la hipótesis de que éstas pueden ser modeladas. Para analizar los extremos de la distribución, es necesario contar con la información disponible sobre fuertes movimientos de precios en el pasado e intentar ajustar dichas observaciones a través de una función. Pueden citarse dos métodos versátiles para trabajar con eventos extremos⁵⁴: *The Block Maxima* y *Peak Over a Threshold* (POT). El primero es un método tradicional de la teoría del valor extremo, es muy útil para el estudio de la estacionalidad, aunque también modeliza directamente los máximos y los mínimos de la distribución, mientras que el segundo método trata únicamente con aquellas observaciones que han excedido un umbral seleccionado.

1.8.1. Método block maxima

Considerese r_t como el rendimiento de un activo medido en un instante de tiempo fijo, se denota (r_1, r_2, \dots, r_n) como la colección ordenada de n rendimientos;

⁵⁴Para mayor detalle, véase Gilli y Këllezi (2006).

siendo r_1 el rendimiento mínimo y r_n el máximo, específicamente:

$$\begin{aligned} r_1 &= \min_{1 \leq j \leq n} (r_j) \\ r_n &= \max_{1 \leq j \leq n} (r_j) \end{aligned}$$

El rendimiento mínimo⁵⁵, r_1 , tiene gran relevancia para el cálculo del VaR en una posición larga, y el rendimiento máximo, r_n , tiene gran importancia en una posición financiera corta. Supóngase que los rendimientos r_t son independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución $F(x)$ y que el rango de los rendimientos es $[l, u]$. Para los logaritmos de los rendimientos se tiene que $l = -\infty$ y $u = \infty$, de manera que la función de distribución de r_1 está denotada por $F_{n,1}(x)$ y viene determinada por:

$$F_{n,1}(x) = P(r_1 \leq x) = 1 - P(r_1 > x) \quad (1.43)$$

Como r_1 es el mínimo de los rendimientos, si $r_1 > x$ implica que $r_j > x \forall j \in \{1, n\}$, por tanto

$$F_{n,1}(x) = 1 - P(r_1 > x, r_2 > x, \dots, r_n > x) \quad (1.44)$$

Teniendo en cuenta la independencia de los rendimientos

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n P(r_j > x) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P(r_j \leq x)] \quad (1.45)$$

Puesto que los rendimientos tienen la misma distribución:

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F(x)] = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (1.46)$$

⁵⁵Para mayor detalle de las propiedades del rendimiento mínimo y máximo, véase Tsay (2005).

En la práctica la función de distribución $F(x)$ es desconocida, por ello $F_{n,1}(x)$ de r_1 será desconocida. Cuando n tiende a infinito, $F_{n,1}(x)$ llega a degenerarse, esto es $F_{n,1}(x) \rightarrow 0$ si $x \leq l$ y $F_{n,1}(x) \rightarrow 1$ si $x > l$. Esta función de distribución degenerada carece de valor práctico; por lo tanto, Fisher y Tippett (1928), cuyo teorema llevó al desarrollo de la distribución asintótica para modelizar máximos o mínimos, han demostrado que r_t es independiente y tiene la función de distribución, $H(\cdot)$, no degenerativa tal que la teoría del valor extremo trata de encontrar dos sucesiones μ_n y σ_n , donde $\sigma_n > 0$, tal que la distribución de

$$r_{1*} \equiv \frac{(r_1 - \mu_n)}{\sigma_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H \quad (1.47)$$

converge a una función no degenerativa $H(\cdot)$ cuando n tiende a infinito. La sucesión μ es el parámetro de localización y σ es el parámetro escalar. Bajo el supuesto de independencia, la distribución límite del mínimo normalizado, denotado como r_{1*} viene dada por

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- (1 + kx)^{1/k} \right] & \text{si } k \neq 0 \\ 1 - \exp \left[- \exp(x) \right] & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

para $x < -1/k$ si $k < 0$ y $x > -1/k$ si $k > 0$, donde el subíndice * significa que es el mínimo. Si $k = 0$ se toma como el límite cuando k tiende a cero ($k \rightarrow 0$).

En cuanto a los parámetros, $\sigma = -1/k$ se denomina índice de la cola de la distribución, k es el conocido como parámetro de forma de la distribución generalizada de valor extremo, el cual rige el comportamiento de la cola de la distribución en el límite⁵⁶, generando así colas medias, suaves o gruesas. La ecuación 1.48 es la distribución generalizada de valor extremo⁵⁷ en el límite. Se dice que es generalizada en el sentido que la forma paramétrica asuma tres tipos de distribuciones límite según el valor que tome k .

⁵⁶También conocido como parámetro de *shape*.

⁵⁷*Generalized extreme value distribution*, según aportación de Jenkinson (1995).

Tipo I: Familia de Gumbel, es la que representa las colas medias. En este caso $k = 0$ y la función de distribución es

$$F_*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \quad -\infty < x < \infty \quad (1.49)$$

Tipo II: Familia de Fréchet, que representa las colas gruesas, siendo $k < 0$ y la función de distribución es

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1+kx)^{1/k}\right] & \text{si } x < -1/k \\ 1 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (1.50)$$

Tipo III: Familia de Weibull, que representa las colas suaves, donde $k > 0$ y la función de distribución es

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1+kx)^{1/k}\right] & \text{si } x > -1/k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (1.51)$$

El signo del parámetro de forma k determina el comportamiento de la cola de la distribución y por lo tanto, el comportamiento de la cola de la distribución original. Gnedenko (1943) dio condiciones necesarias y suficientes para que la función de distribución $F(x)$ de r_t se asociará con uno de los tres tipos de las distribuciones anteriores.

1.8.2. Peak over threshold

Este método trata únicamente con aquellos valores que han excedido un umbral determinado. La función de distribución $F_u(\cdot)$ se denomina función de distribución de excesos condicionales y se define como la probabilidad condicional,

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (1.52)$$

siendo X una variable aleatoria, u el umbral determinado, $y = x - u$ corresponde al valor que excede u y x_F es el último punto de la función de distribución $F(\cdot)$. Se verifica que F_u puede reescribirse en términos de F ,

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (1.53)$$

Para una amplia clasificación de funciones de distribución subyacentes F , la función de distribución condicional de los excesos $F_u(y)$, para una u grande, se aproxima mediante⁵⁸,

$$F_u(y) \approx G_{k,\sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty \quad (1.54)$$

$$G_{k,\sigma}(y) = \begin{cases} [1 - (1 + \frac{k}{\sigma}y)]^{-\frac{1}{k}} & \text{si } k \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

para $y \in [0, (x_F - u)]$ si $k \geq 0$ e $y \in [0, -\frac{\sigma}{k}]$ si $k < 0$. El parámetro k es el que refleja el comportamiento de la cola, sirviendo como indicador de su peso y la función $G_{k,\sigma}$ es la denominada función de distribución generalizada de Pareto. Asumiendo una función de distribución generalizada de Pareto para las colas, una expresión analítica para el VaR y CVaR puede definirse como función de los parámetros de la distribución generalizada de Pareto,

$$F(x) = (1 - F(u)) F_u(y) + F(u) \quad (1.56)$$

La función $F(u)$ puede ser estimada no paramétricamente por $\frac{n - N_u}{n}$, donde n representa el número total de observaciones y N_u representa al número de veces que se excede el umbral u .

⁵⁸Para mayor detalle del procedimiento, véase Pickands (1975), Balkema y de Haan (1974).

Utilizando la aproximación 1.56, se obtiene la estimación de $F(x)$:

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\hat{k}}{\hat{\sigma}} (x - u) \right)^{-\hat{k}} \right) + \left(1 - \frac{N_u}{n} \right) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{k}}{\hat{\sigma}} (x - u) \right)^{-\hat{k}} \quad (1.57)$$

Invirtiéndolo la ecuación 1.57 para una probabilidad determinada, p , se obtiene

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{k}} - 1 \right) \quad (1.58)$$

Además se puede escribir el CVaR como:

$$\widehat{CVaR}_p = \widehat{VaR}_p + E \left(X - \widehat{VaR}_p | X > \widehat{VaR}_p \right) \quad (1.59)$$

Este concepto tiene gran importancia en esta investigación, debido a que el VaR, como se observa en la expresión 1.58, se aproxima mediante la teoría del valor extremo⁵⁹. Para realizar la estimación del VaR aplicando la teoría del valor extremo tradicional es necesario seleccionar la longitud del periodo y subperiodo y obtener el mínimo, además se deben conseguir las estimaciones de los parámetros, después se encuentra un modelo que se ajuste a las necesidades y si el modelo es adecuado se estima el VaR relacionando las probabilidades de interés asociadas con diferentes intervalos de tiempo.

Existe un gran número de investigaciones en la literatura financiera que tratan el tema del valor extremo. En Longin y Solnik (2001) se utiliza la teoría de valor extremo para modelizar las colas de la distribución y se deriva la distribución de las correlaciones extremas para una amplia clase de distribuciones de los rendimientos. Los mismos autores rechazan empíricamente la hipótesis nula de normalidad multivariante para la cola negativa pero no se rechaza para la cola positiva, las estimaciones las realizan usando el método de máxima verosimilitud

⁵⁹Para ver detalles más a fondo, véase Tsay (2005) y Gilli y Kellezi (2006).

y utilizan la teoría de valor extremo para estudiar la estructura de dependencia. En el mismo trabajo de investigación, se encontró evidencia de que los rendimientos de los activos se presentan más correlacionados en mercados volátiles y a la baja, además muestran en sus conclusiones que las correlaciones incrementan en mercados *bear* pero no en mercados *bull*.

Bali (2007) desarrolla una aproximación de la teoría de valor extremo condicional e incondicional para calcular el VaR, en la aproximación que emplea la distribución de rendimientos extremos en lugar de utilizar la distribución de todos los rendimientos, proporcionando buenas predicciones en momentos de catástrofe y en periodos extraordinarios. Su principal aportación fue desarrollar una nueva forma de aproximación para calcular el VaR y muestra que la teoría del valor extremo mejora los resultados del VaR tradicional, ya que la aproximación propuesta da mayor énfasis a las colas de la distribución de la frecuencia observada, por lo que afirma que dicha propuesta basada en la teoría de valor extremo proporciona una aproximación natural, más exacta y robusta para calcular el VaR.

Las principales ventajas⁶⁰ de la teoría del valor extremo son las siguientes:

1) Es un método que se ajusta a los objetivos del análisis: extremos de la distribución.

2) Se puede desarrollar una forma funcional *a priori* incorporando la información disponible sobre el comportamiento de los activos en situaciones extremas.

Esta metodología presenta algunas desventajas, dentro de las principales se encuentra que estos modelos solo usan parcialmente la información, ya que se concentran únicamente en las observaciones extremas. Los supuestos en este tipo de modelos no siempre se cumplen en la práctica y los resultados se basan en derivaciones asintóticas, por lo que no se pueden tomar como precisos cuando se manejan con muestras finitas.

Otra metodología que emergió a partir de la combinación de *Riskmetrics* y

⁶⁰Para mayor detalle, véase Christoffersen P. F., Diebold F. X., y Schuermann T. (1998).

la teoría de valor extremo es la denominada *Crashmetrics*, que fue desarrollada por el matemático inglés Paul Wilmott y se fundamenta en que los mercados se comportan de una manera totalmente distinta cuando se produce un *shock* o se está en condiciones de desplome. *Crashmetrics* trata de medir el riesgo de mercado en circunstancias extremas; su base de cálculo radica en estimar las pérdidas potenciales de la cartera bajo el supuesto del “peor escenario”, la única hipótesis inicial es que los movimientos de mercado tienen un límite y el número de *shocks* también son limitados.

Se recomienda la aplicación de esta metodología para protegerse de pérdidas extremas y quizá tomar precauciones o reducir posiciones que experimenten pérdidas importantes bajo escenarios determinados. De acuerdo con Wilmott, se resumen los supuestos fundamentales de la metodología *Crashmetrics*:

- a) Se supone que el desplome no ha sido cubierto, ya que normalmente, las coberturas no incorporan los extremos.
- b) Se ignoran la volatilidad y la correlación de los activos.
- c) Se asumen hipótesis mínimas acerca de la distribución de probabilidad de los rendimientos de los activos.
- d) No es necesario conocer qué ocurrirá por término medio o con una cierta probabilidad, sino que sólo se requiere el peor escenario⁶¹.

Los beneficios de este análisis pueden ser limitados, porque sólo se toma en cuenta el peor escenario, por lo tanto, es posible que los resultados que se obtengan sean demasiado extremos.

1.9. Dependencia

En los mercados financieros, se pueden encontrar diversos factores de riesgo que interactúan con los instrumentos financieros de una cartera de inversión, por

⁶¹Para obtener más información, véase Wilmott, P. (1998).

esto se han desarrollado herramientas que permitan identificar y modelizar esa interacción. Así que, es necesario aclarar el concepto de dependencia y los métodos de aproximarla, ya que una estructura de dependencia identificada y tratada de forma idónea ayudará a llevar a cabo una medición de riesgos con mayor precisión. También cabe advertir que en el contexto financiero la estructura de dependencia varía con la volatilidad que presenta el mercado.

Por lo que, modelar la dependencia es clave para la administración y gestión de riesgos, ya que la inapropiada descripción y un mal tratamiento de la dependencia puede acarrear una valoración inadecuada de la exposición al riesgo. Como se ha dicho, un factor importante que debe ser tomado en cuenta a la hora de medir riesgos, es la relación que puedan tener las variables o instrumentos financieros, una forma muy conocida y extensamente utilizada para medir el grado de relación existente entre variables es la correlación lineal, que a efectos prácticos y en un mundo elíptico suele dar buenos resultados.

1.9.1. Coeficiente de Correlación de Pearson

Las correlaciones lineales han sido utilizadas de forma tradicional en la comunidad financiera para describir la dependencia lineal existente entre dos variables, es decir, indican una relación lineal entre dos o más variables aleatorias, por lo tanto, la estructura de correlaciones mide la tendencia de las variables cuantitativas a moverse conjuntamente. Las correlaciones pueden ser consideradas como una medida base para las distribuciones elípticas.

Se tienen dos variables aleatorias X_1 y X_2 que podrían ser los rendimientos de dos activos financieros, su coeficiente de correlación es:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{(\sigma_{X_1}\sigma_{X_2})} \quad (1.60)$$

donde $\text{cov}(X_1, X_2)$ es la covarianza de las dos variables aleatorias y σ_{X_1} , σ_{X_2}

son sus desviaciones típicas. Como es bien conocido, el coeficiente de correlación, ρ , varía en el intervalo $[-1, +1]$. Si el coeficiente de correlación es igual a 1 ambas variables aleatorias se mueven conjuntamente en la misma dirección (relación directa) y existe correlación positiva perfecta, si el coeficiente de correlación es igual a -1 , significa que los activos se mueven en dirección opuesta (relación inversa) y existe correlación negativa perfecta. Cuando el coeficiente de correlación es igual a cero, los cambios de uno de los activos están incorrelacionados de los cambios del otro, y viceversa. Si tomara cualquier otro valor dentro del intervalo existiría dependencia lineal imperfecta.

Las correlaciones tienen buenos resultados en cuanto a dependencia lineal, sin embargo, al ser una medida de dependencia escalar⁶², no dice nada acerca del grado de dependencia asimétrica o no lineal, por lo que no es una medida apropiada cuando hay existencia de colas anchas y asimetría.

Las correlaciones pueden tener errores cuando son utilizadas para capturar dependencia en situaciones extremas o anormales, es decir, las correlaciones presentan problemas con dependencia no lineal existente de forma muy frecuente en el mundo financiero, esto se debe a que dichas correlaciones se pueden considerar una medida de dependencia únicamente en el caso de distribuciones normales multivariadas (Bouyé et al. 2000).

En conclusión se puede decir que el coeficiente de correlación supone variables distribuidas de forma normal, no es invariante ante transformaciones de la variable y esta definida si la media y la varianza son finitas.

Actualmente, al considerar las correlaciones como una medida de dependencia imperfecta y poco satisfactoria, por el hecho de que una medida apropiada debe caracterizar la estructura de dependencia de manera completa, se ha desarrollado una nueva herramienta que permita capturar la dependencia en un escenario anormal y este es el caso de la cópulas financieras⁶³.

⁶²Resume toda la información de dependencia en un sólo número.

⁶³La palabra cópula aparece por primera vez en 1959, para mayor detalle, véase Sklar (1959).

Debido a que uno de los objetivos primordiales de esta investigación es cuantificar y gestionar el riesgo de un índice bursátil en un país emergente, se ha considerado necesario definir el concepto de cópulas y así poder aplicarlo como herramienta de identificación y medición de dependencia en los siguientes capítulos y con esto hacer una aproximación a la valoración del riesgo apropiada y más acertada. Aunque las cópulas son parte de las medidas de dependencia, se ha decidido dedicarles un apartado especial por la importancia que tienen a lo largo de toda la investigación.

1.10. Cópulas financieras

Una cópula es una función de distribución multivariante definida en una unidad cúbica n -dimensional $[0, 1]^n$ tal que, cada distribución marginal es uniforme en el intervalo $[0, 1]$, es decir, una cópula es una función que enlaza una distribución de probabilidad multivariante a una colección de funciones de probabilidad marginal univariantes y, así determinar la estructura de dependencia tanto de la distribución conjunta como de sus marginales. Se considera como una herramienta útil que permite modelizar la estructura de dependencia de un conjunto de factores de riesgos.

Definición 1 *La cópula n -dimensional es una función de distribución n -dimensional restringida a $[0, 1]^n$ teniendo marginales uniformes estándar. Sea \mathbb{C}^n la familia de cópulas n -dimensionales. Dada una cópula $C \in \mathbb{C} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{C}^n$ y un conjunto de marginales univariantes F_1, F_2, \dots, F_n se puede definir una función de distribución F en \mathbb{R}^n teniendo estas marginales mediante:*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.61)$$

Sin embargo, la aplicación de las cópulas en la teoría financiera es relativamente nueva y fue introducida por Embrechts et al. (1999).

dadas n funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_n , se tiene que $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es el vector aleatorio en \mathbb{R}^n tal que la cópula satisface la ecuación 1.61.

Por lo que es posible decir que las cópulas son funciones uniformes marginales, crecientes y no negativas⁶⁴.

El teorema propuesto por Sklar está detrás de muchas aplicaciones de las cópulas; este teorema muestra que cada función de distribución puede ser descompuesta en sus distribuciones marginales y al menos una cópula, dicha cópula será única si las distribuciones marginales y la multivariante son continuas.

Teorema 2 (Sklar, 1959, versión bivalente). Sea $H(u, v)$ una función de distribución conjunta con marginales $F(u)$ y $G(v)$. Entonces existe una cópula C tal que $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$H(u, v) = C(F(u), G(v)). \quad (1.62)$$

Si F y G son continuas, entonces C es única, es decir, C está determinada por $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ ⁶⁵. De manera recíproca, si F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por la expresión 1.62 es una función de distribución conjunta con marginales F y G .

Este resultado admite un generalización inmediata al campo multivariante, tal y como se presenta a continuación.

Teorema 3 (Sklar, 1959, versión multivariante). Sea H una función de distribución multivariante con marginales $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$, entonces existe una función de distribución conjunta multivariante C tal que:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.63)$$

⁶⁴Para más detalle de las propiedades de las cópulas, véase Torres y Olarte (2007) y Cherubini et al. (2004).

⁶⁵ $\text{Ran}F$ se refiere al rango de la función F .

Se ha demostrado en diversas investigaciones, tales como Embrechts et al. (1999), Nelsen (1999), Embrechts et al. (2001), entre otros; que la función cópula es superior en cuanto a modelar y cuantificar la dependencia, ya que ofrece mayor flexibilidad en comparación con las correlaciones y principalmente, se usa en medición y/o valoración del riesgo de mercado y de crédito porque captura la relación no lineal entre los mercados. Frey y McNeil (2003), Hamerle y Rosch (2005) y Goorbergh et al. (2005) utilizan la metodología de cópulas para la valoración de opciones financieras.

Las cópulas financieras, son una herramienta relativamente nueva y útil. Según Nelsen (1999), las cópulas contienen toda la información acerca de la estructura de dependencia de un vector de variables aleatorias. Son utilizadas para describir la dependencia entre dos o más variables aleatorias con una distribución marginal arbitraria. Una cópula es una distribución de variables aleatorias cuyas marginales son distribuciones uniformes, siendo esta un instrumento excelente para la simulación de variables aleatorias con distribuciones marginales definidas, solo se habrán de simular variables uniformes con estructuras de dependencia determinadas por su cópula. Estas pueden capturar dependencia no lineal, mientras que las correlaciones solo son medidas de dependencia lineal. A pesar de que las cópulas han sido utilizadas recientemente para la aplicación en las finanzas, se pueden encontrar numerosas investigaciones que ayudan a entender mejor su funcionamiento y sobre todo su aplicación. Tal es el caso de Embrechts et al. (2002) y Embrechts et al. (2003) que presentan ejemplos generales de aplicación de las cópulas en contexto financiero. Además Joe (1997), Nelsen (1999) y Cherubini et al. (2004), en sus libros presentan una amplia introducción acerca de la teoría de cópulas.

En los artículos de Embrechts et al. (1999) y (2003), se presenta la definición de las correlaciones lineales, se detallan los errores en los que se incurre con el uso inapropiado de éstas, al mismo tiempo se muestran los inconvenientes que éstas

presentan a la hora de aplicarlas. Además, se dice que la correlación lineal es muy usada en la práctica como medida de dependencia, sin embargo, al no estar basada en dependencia no lineal, a menudo puede arrojar resultados engañosos, siendo posible malentender la medición de la dependencia, por lo que no puede tomarse como medida de dependencia canónica. Como medida de dependencia alternativa, se proponen las cópulas, las cuales se definen brevemente. Opinan que las cópulas representan una útil aproximación para entender y modelizar la dependencia, también se menciona que una interesante propiedad de las cópulas es que son invariantes a transformaciones bajo un crecimiento estricto de las variables aleatorias subyacentes. Se señala que existe una numerosa variedad de cópulas⁶⁶ para aplicarlas en diferentes ámbitos de la gestión de riesgos.

Del mismo modo, Bundi (2004) muestra que la función cópula describe una forma de separar el comportamiento marginal de riesgos individuales y su estructura de dependencia de una variable aleatoria multivariante. La aproximación de las cópulas es particularmente útil cuando la función de distribución multivariante cuenta con funciones continuas de distribución marginal y la transformación es invariante. Continuando con el mismo autor, se encuentra que las correlaciones tienen limitaciones como medida de asociación, se les considera una medida imperfecta, ya que es una medida razonable sólo en el contexto normal multivariante. Las cópulas suelen utilizarse adjuntamente con herramientas de medición y gestión de riesgo, tales como el VaR, el CVaR y la teoría de valor extremo, dando buenas aproximaciones y siendo cada vez más empleadas. Por ejemplo, en Vaz de Melo y Martins de Souza (2004) se modeliza estadísticamente la estructura de dependencia de datos financieros multivariantes usando el concepto cópula. Se compara el efecto de la cópula elegida para utilizarla en la medida de riesgo y evalúan la variabilidad de las predicciones de carteras de pérdida. A su vez se utilizan modelos ajustados para simular datos y con esto evaluar la variabilidad

⁶⁶Véase Nelsen (1999) y Cherubini et al. (2004).

de la medida de riesgo elegida. La simulación refleja la influencia que la cópula elegida tiene sobre la estimación del VaR o CVaR.

Entre las principales propiedades de las cópulas, se destaca que tienen continuidad, diferenciabilidad y que son invariantes a transformaciones estrictamente crecientes de las variables aleatorias y/o sus funciones de distribución, esta propiedad garantiza, por ejemplo, que los rendimientos financieros y sus logaritmos tengan la misma cópula⁶⁷. Éstas permiten extraer la estructura de dependencia de la función de distribución conjunta y entonces, separar la estructura de dependencia de las funciones de distribución marginales. Son utilizadas como medida de concordancia⁶⁸ entre variables aleatorias y por último la dependencia asintótica de cola es una propiedad muy importante de las cópulas.

Por otro lado, no existe consenso en cuanto a la selección de una cópula en alguna situación determinada o en alguna aplicación específica, tampoco se encuentra un consenso en la forma de contrastar la precisión de dichas cópulas. En la literatura se propone elegir una cópula según las necesidades o motivaciones que se tengan y con mucho cuidado para no infravalorar ni sobrevalorar el riesgo. En Kole et al. (2005), se propone un procedimiento que determine la selección y contrastación de las cópulas, el cual brinda buenos resultados, por lo que este procedimiento puede ser una alternativa que ayude y facilite la elección de la cópula más adecuada.

El riesgo de una cartera está directamente relacionado con la dependencia entre los activos que la componen, por lo que la forma de modelizarla es importante para la gestión y selección de carteras. Existe una amplia variedad de cópulas, principalmente para el caso bidimensional; según Nelsen (1999), se puede probar la forma en que se adecuan las distintas cópulas en diferentes escenarios, usando

⁶⁷Para ver una descripción detallada de las propiedades de las cópulas, véase Bundi (2004).

⁶⁸La τ de Kendall y la ρ de Spearman pueden ser medidas de concordancia basadas en cópulas. Para obtener información acerca de la definición de concordancia véase Nelsen (1999) y Joe (1997).

técnicas *stress testing*⁶⁹ para observar los beneficios que brinda cada una de las cópulas.

En cuanto a la variedad existente de cópulas, es posible decir que las cópulas se pueden presentar en distintas familias, desde las llamadas elípticas⁷⁰ hasta las familias de cópulas consideradas de valor extremo⁷¹, las cuales están hechas a medida para problemas que envuelven situaciones caóticas. Así pues, y por la importancia que tienen, se describirán ambas familias de cópulas⁷².

Las cópulas de la familia elíptica son simétricas con distribuciones cuya densidad es constante sobre elipsoides, tal es el caso de la cópula Gaussiana y *t*-cópula⁷³. A continuación se presentan de manera más detallada.

1.10.1. Familia de cópulas elípticas

Las cópulas elípticas reciben este nombre debido a que son simplemente cópulas de distribuciones elípticas.

Definición 4 Sea X un vector aleatorio n -dimensional, $\mu \in \mathbb{R}^n$, Σ es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ definida no negativa y la función característica $\varphi_{X - \mu}$ es una función de la forma cuadrática $t^T \Sigma t$. Se dice que X tiene un distribución elíptica con parámetros (μ, Σ, φ) de forma que

$$\varphi_{X - \mu}(t) = \varphi(t^T \Sigma t) \quad (1.64)$$

por lo que la función de distribución elíptica se describe como $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \varphi)$.

⁶⁹Técnica que identifica pérdidas potenciales bajo condiciones extremas de mercado, se asocia con mayores niveles de confianza.

⁷⁰Este tipo de cópulas también son llamadas cópulas implícitas. Para más detalle ver Aas (2004).

⁷¹También llamadas cópulas arquimedianas o explícitas. Para más detalle ver Aas (2004).

⁷²Se seguirá la notación de Nelsen (1999) y Cherubini et al. (2004), donde se puede encontrar información más detallada.

⁷³La *t*-cópula también es conocida como cópula *t*-Student, para mayor detalle, véase Kole et al. (2007).

La dependencia en distribuciones elípticas está esencialmente determinada por las covarianzas, las cuales son una herramienta débil para describir la dependencia en distribuciones no-Gaussianas.

Según Patton (2002), la asimetría de la cópula se relaciona y conduce a la asimetría de la cartera, aún cuando la distribución de los activos individuales que conforman la cartera sea simétrica. Las cópulas Gaussiana y t-Student cuentan con este tipo de distribución, así que, como se mencionó anteriormente pertenecen a esta familia, siendo éstas muy importantes en el contexto financiero, además de ser extensamente utilizadas en diversas investigaciones.

a) Cópula Gaussiana

También conocida como cópula normal, es usada muy a menudo en el mundo financiero y es la distribución más utilizada en las aplicaciones. Representa la estructura de dependencia para una distribución normal multivariada, lo que significa que distribuciones marginales normales con cópula Gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. Esta se deriva de una función de distribución Gaussiana multivariante con media cero y matriz correlación Σ , transformando las marginales mediante la inversa de la función de distribución normal univariante Φ .

Definición 5 *La función de la cópula Gaussiana está definida por:*

$$C_{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi_{\Sigma} [\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)] \quad (1.65)$$

donde Φ_{Σ} es la función de distribución normal multivariante con media cero y matriz de correlaciones Σ , y Φ^{-1} representa la inversa de la distribución normal univariante estándar.

b) Cópula t-Student

La cópula t-Student, contiene la estructura de dependencia para la distribución t-Student multivariada. Esta es muy popular y se deriva de forma similar y en el mismo sentido que la cópula Gaussiana.

Definición 6 *La función de la cópula t-Student está determinada por:*

$$C_{Stud}(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = T_{\Sigma, v} [t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_n)] \quad (1.66)$$

siendo $T_{\Sigma, v}$ la función de distribución t-Student multivariante centrada con matriz de correlación Σ y v grados de libertad. t_v^{-1} representa la inversa de la función de distribución t-Student univariante con v grados de libertad.

Cabe destacar que en el caso de la cópula t-Student, un valor elevado de v disminuye la probabilidad de eventos en las colas de la distribución. Así mismo, cuando $v \rightarrow \infty$ la cópula t-Student converge a una Gaussiana, sin embargo, con grados de libertad limitados, el comportamiento de ambas cópulas es muy diferente⁷⁴. Una de las características principales de la cópula t-Student es que captura la dependencia en el centro y en las colas de la distribución, mientras que las cópula Gaussiana sólo captura la dependencia en el centro de la distribución y puede implicar que no se detecte la posible dependencia en las colas. Por lo tanto la cópula t-Student tiene mayor probabilidad de detectar eventos extremos que la cópula Gaussiana, pero no recoge las asimetrías.

1.10.2. Familia de cópulas arquimedianas

Así como es posible elegir una cópula elíptica, también se pueden elegir cópulas de la familia arquimediana que son asimétricas, entre las más destacadas se encuentran la cópula Gumbel, la cópula Clayton y la cópula Frank. Teniendo

⁷⁴Para mayor detalle, véase Cherubini et al. (2004).

en cuenta que en la realidad los rendimientos financieros casi nunca están normalmente distribuidos, es esta familia de cópulas la que puede ser utilizada en situaciones extremas o para distribuciones no normales, las cuales son muy interesantes y cada vez más empleadas por las propiedades que otorgan.

Definición 7 *Una cópula es arquimediana si se puede escribir de la siguiente forma:*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Psi) = \Psi^{-1} [\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n)] \quad (1.67)$$

donde $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ y si Ψ es cualquier función continua⁷⁵ que satisfaga las siguientes propiedades

$$\Psi(1) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \Psi(u) = \infty,$$

$$\Psi'(u) < 0,$$

$$\Psi''(u) > 0$$

La función continua Ψ^{-1} en el intervalo $[0, \infty)$ es completamente monótona, siendo este requisito una condición necesaria y suficiente para ampliar las cópulas arquimedianas a dimensiones mayores que dos (Nelsen, 1999). Se puede decir que las cópulas arquimedianas se describen de forma más simple que las elípticas cuando los fenómenos de estudio solo tienen dos dimensiones.

Según Genest y Mackay (1986), las cópulas arquimedianas poseen interesantes propiedades que hacen que este tipo de cópulas sean atractivas para la simulación, mostrando que también son muy útiles en grandes dimensiones.

Este tipo de cópulas también son conocidas como paramétricas, debido a que poseen el parámetro θ , el cual es el responsable de reflejar el grado de dependencia.

⁷⁵A menudo, también es llamada función generadora, véase Nelsen (1999).

El parámetro θ puede obtenerse a través de medidas de concordancia, ya que estas recogen las relaciones no lineales que no capta la correlación, este es el caso de la τ de Kendall, cuya expresión es la siguiente:

$$\tau = \frac{c - d}{c + d} = (c - d) / \binom{n}{2} \quad (1.68)$$

donde n es el número total de observaciones de una muestra aleatoria, c es el número de pares concordantes y d los discordantes.

Seguindo a Genest y Mackay (1986), las expresiones que ligan el parámetro θ con la τ de Kendall son las cópulas que se muestran a continuación⁷⁶.

a) Cópula Gumbel

Según Nelsen (1999), la cópula Gumbel es adecuada para describir la dependencia positiva (fuerte) y las distribuciones bivariantes de valor extremo y por ello, se le conoce como cópula de valor extremo.

Definición 8 Usando la función generadora $\Psi(u) = (-\ln u)^\theta$, la cópula Gumbel multivariante esta definida por:

$$C_{Gumbel}(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}, \quad \theta \in [1, \infty) \quad (1.69)$$

La cópula Gumbel es asimétrica y captura diferentes situaciones de riesgo que ocurren durante periodos de tensión, especialmente en mercados *Bull*⁷⁷ y *Bear*⁷⁸.

⁷⁶Para más detalle de la obtención, véase Cherubini et al. (2004) y Nelsen (1999).

⁷⁷*Bull Market*, periodo prolongado en el cuál la tasa de inversión sube más rápidamente que su promedio histórico; este tipo de mercado se puede dar como resultado de una recuperación económica, de un auge económico o de la psicología del inversionista. Se considera mercado al alza.

⁷⁸*Bear Market*, periodo prolongado en el cual cae la tasa de inversión, acompañado por pesimismo extenso. Se considera mercado bajista.

Es decir, capta las fluctuaciones o variaciones bruscas o repentinas que se pueden dar en los mercados, ya sean a la alza o a la baja.

La cópula Gumbel refleja principalmente la dependencia de las colas de la distribución y son aplicadas con mayor énfasis y más a menudo en la teoría del valor extremo, siendo ésta una importante e interesante característica, ya que las distribuciones de los rendimientos financieros suelen tener colas anchas.

b) Cópula Clayton

Esta cópula es adecuada para describir la dependencia negativa, ya que asigna mayor probabilidad a eventos en la cola izquierda de la distribución.

Definición 9 Sea ahora la función generadora $\Psi(u) = u^{-\theta} - 1$, la cópula Clayton multivariante se representa de la siguiente manera:

$$C_{Clayton}(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-1/\theta} \quad (1.70)$$

donde $\theta \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Este tipo de cópulas es un ejemplo relevante de las cópulas arquimedianas. A menudo esta cópula es llamada Cook-Johnson y es muy significativa e importante en la teoría de valor extremo multivariante porque, al igual que la Gumbel, es una cópula asimétrica.

c) Cópula Frank

Esta cópula implica independencia asintótica de las colas de la distribución⁷⁹, es simétrica y asigna probabilidad cero a eventos que están dentro de las colas.

⁷⁹Esto no implica independencia. Realmente la cópula Frank aumenta su concordancia con θ , cuando θ es positiva.

Definición 10 Con la función generadora $\Psi(u) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$, la copula Frank multivariante esta determinada por:

$$C_{Frank}(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right], \quad \theta \in (-\infty, \infty) \quad (1.71)$$

Con este tipo de cópula, a pesar de ser considerada de la familia de las cópulas arquimedianas, se corre el riesgo de que no sea apropiada en diferentes campos, por ejemplo, en el campo de los seguros, porque tiene la problemática de que considera la misma dependencia para eventos grandes y pequeños.

Se debe prestar especial atención porque dependiendo de la cópula seleccionada y del escenario objeto de estudio, los resultados pueden ser mejores o peores, esto dependerá del tipo de datos a utilizar, del tipo de dependencia existente o del lugar de la distribución que interese con mayor énfasis. En resumen se observa que la dependencia, en el centro y en las colas de la distribución, puede ser tratada de manera separada o conjunta, de esta manera es como la función cópula puede generalizar el concepto de dependencia.

La dependencia de las colas⁸⁰ de la distribución es una propiedad interesante de las cópulas, ya que describe el comportamiento de las colas cuando los valores de sus marginales llegan a cero (*lower tail dependence*) o a la unidad (*upper tail dependence*). Permite identificar la dependencia de los valores extremos de las variables aleatorias, siendo este concepto muy útil para describir la estructura de dependencia en datos financieros, sobre todo en valores extremos.

1.10.3. Dependencia de las colas de la distribución

Este concepto relaciona la dependencia en valores extremos, principalmente la de las colas de la distribución. La dependencia de colas entre dos variables fi-

⁸⁰El concepto de dependencia de colas en contexto financiero fue introducido por Embrechts et al (2002).

nancieras existe cuando la probabilidad de eventos extremos negativos (positivos) conjuntos es mayor que la que debería ser predicha por las distribuciones marginales. Además, relaciona la cantidad de dependencia en el cuadrante superior derecho λ_U o inferior izquierdo λ_L de la cola de una distribución bivalente. Si existiera una relación positiva entre dos situaciones extremas con respecto a las variables aleatorias X e Y , la probabilidad condicional sería

$$\lambda_U(\alpha) = P[X > F_X^{-1}(1 - \alpha) | Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha)] \quad (1.72)$$

y decrecería tal como $\alpha \downarrow 0$. La dependencia de la cola superior λ_U entre X e Y viene definida como

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lambda_U(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[X > F_X^{-1}(1 - \alpha) | Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha)] \quad (1.73)$$

siempre y cuando ese límite existiera. Las dos variables X e Y serán asintóticamente dependientes si $\lambda_U \in (0, 1]$ y asintóticamente independientes si $\lambda_U = 0$. Si se quiere darle una interpretación financiera, se denota a la función $F^{-1}(1 - \alpha)$ como el valor en riesgo. Entonces la función λ_U captura la dependencia relacionada con los periodos de tensión o estrés. En el caso de que existiera una relación negativa entre dos acontecimientos extremos con respecto a las variables aleatorias X e Y , la probabilidad condicional sería

$$\lambda_L(\alpha) = P[X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)] \quad (1.74)$$

La dependencia de la cola inferior izquierda λ_L entre X e Y viene definida como

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lambda_L(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)] \quad (1.75)$$

La dependencia superior derecha λ_U o inferior izquierda λ_L de las colas pueden

expresarse usando una cópula adecuada, C , así que λ_U viene dada por:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C(u, u)}{1 - u} \quad (1.76)$$

siempre y cuando exista tal límite, existe la dependencia de la cola superior entre las variables si $\lambda_U \in (0, 1]$ y se da la independencia cuando $\lambda_U = 0$.

Análogamente, λ_L esta determinada por:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C(u, u)}{u} \quad (1.77)$$

siempre y cuando exista el límite. La dependencia de la cola inferior entre las variables existe si $\lambda_L \in (0, 1]$ y se da la independencia cuando $\lambda_L = 0$.

De cualquier manera, se deben considerar ambas colas de la distribución, debido a que la cola izquierda representa pérdidas cuando un inversor se encuentra en una posición larga en un índice, mientras que la cola derecha también representa pérdidas cuando un inversor está en una posición corta. Estas medidas no presentan relación con las distribuciones marginales a las que se haya ajustado el instrumento financiero elegido, además son invariantes a transformaciones estrictamente crecientes debido a que se expresan a través de la cópula.

a) Dependencia de las colas para las cópulas elípticas

$$\lambda_U(X, Y) = \lambda_L(X, Y) \quad (1.78)$$

si $\lambda_U(X, Y) > 0$ los eventos tienden a ocurrir simultáneamente, sin embargo, cuando $\lambda_U(X, Y) = 0$ la distribución no tiene dependencia de cola y puede considerarse que las variables X e Y son asintóticamente independientes.

Para la cópula Gaussiana, el coeficiente de correlación de la dependencia de ambas colas es:

$$\lambda_U(X, Y) = \lambda_L(X, Y) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = 0 \quad (1.79)$$

donde ρ es el coeficiente de correlación y Φ denota la función de distribución normal estándar univariante.

Para la t -cópula, el coeficiente de correlación de la dependencia de las dos colas está denotado por:

$$\lambda_U(X, Y) = \lambda_L(X, Y) = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{v+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \quad (1.80)$$

siendo t_{v+1} la función de distribución t -Student univariante con $v+1$ grados de libertad⁸¹.

b) Dependencia de las colas para las cópulas arquimedianas

La dependencia de las colas es relevante para el estudio de la dependencia entre los valores extremos de la distribución. Específicamente, cuando existe dependencia en la colas, es que existe dependencia en los valores extremos de la distribución, ya sea izquierda, derecha o en ambas.

Este coeficiente está determinado por el parámetro θ generado por la función generadora de las cópulas arquimedianas bivariantes, lo que hace que tengan una relación directa⁸².

La cópula Gumbel presenta dependencia en la cola superior derecha, es decir, el coeficiente de la cola inferior izquierda es $\lambda_L(X, Y) = 0$ y el coeficiente de la cola superior derecha es

$$\lambda_U(X, Y) = 2 - 2^{1/\theta} \quad (1.81)$$

⁸¹Para ver más detalle de la dependencia de las colas de la distribución, véase Aas (2004).

⁸²Para más información del coeficiente de dependencia de las colas de la distribución, consultar Cherubini et al. (2004) y Nelsen (1999).

donde θ es el parámetro de la cópula que describe el grado de dependencia.

La cópula Clayton muestra dependencia en la cola inferior izquierda para $\theta > 0$, es decir, el coeficiente de la cola superior derecha es $\lambda_U(X, Y) = 0$ y el coeficiente de la cola inferior izquierda es

$$\lambda_L(X, Y) = 2^{-1/\theta} \tag{1.82}$$

donde, al igual que antes, θ mide el grado de dependencia. En cuando a la cópula Frank, es posible decir que no tiene dependencia de cola ni inferior izquierda ni superior derecha, es decir, $\lambda_U = \lambda_L = 0$ ⁸³.

1.10.4. Contrastes sobre la adecuación de cópulas

Al no haber consenso en la forma de elegir una cópula específica en un momento determinado, se considera necesario contrastar los resultados. Ya que las cópulas son equivalentes a una función de distribución, es posible utilizar los contrastes tradicionales de bondad de ajuste.

Contrastar el ajuste de las cópulas es importante por varias razones, entre otras porque es necesario verificar si el conjunto de datos utilizados se pueden ajustar o afirmar que provienen de una distribución determinada. También son aplicables a cualquier familia de cópulas, indican si éstas son capaces de capturar la dependencia observada y además, puede ser aplicado a cualquier cópula n-dimensional.

En Kole et al.(2005) se contrastan las diferentes cópulas para obtener resultados más precisos en cuanto a dependencia, utilizando datos de bonos, acciones y bienes raíces procedentes del índice JP Morgan, S&P 500 y del índice Nare-it respectivamente. Los contrastes se realizan aplicando directamente el ajuste de las cópulas mediante pruebas de bondad de ajuste tradicionales, tales como

⁸³Para más detalle, véase Cherubini et al. (2004).

Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, consiguiendo buenos resultados. Presentan evidencias a favor de la t -cópula debido a que pone énfasis en las colas y en el centro de la distribución. La t -cópula converge a la cópula Gaussiana cuando el número de grados de libertad tiende a infinito. Por último, Kole et al.(2007) hace una utilización de cópulas en gestión de riesgos, resaltando la importancia de escoger la cópula idónea para no incurrir en errores. Se concluye que las correlaciones son útiles para caracterizar la dependencia en el centro de la distribución y que incorporar el parámetro de grados de libertad de la t -cópula es muy útil para capturar la dependencia fuerte en las colas.

Los contrastes de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling son algunos de los contrastes más tradicionales de bondad de ajuste existentes, y están basados en una comparación directa de la dependencia supuesta por la cópula y la observada en la base de datos a estudiar.

a) Contraste de Kolmogorov-Smirnov

El contraste de Kolmogorov-Smirnov es aplicable a variables continuas, es no paramétrico y consiste en comparar entre sí las funciones de distribución muestrales y teóricas (dos distribuciones de probabilidad) y prueba que no hay diferencias significativas entre ambas distribuciones. Los datos han de estar ordenados.

$$H_0 : F_n(x_t) = F_0(x_t)$$

$$H_1 : F_n(x_t) \neq F_0(x_t)$$

donde $F_0(x_t)$ es la distribución que se supone sigue la muestra aleatoria (distribución teórica), $F_n(x_t)$ es la función de distribución empírica y n representa el total de las observaciones. En este contraste interesa la desviación máxima entre la función de distribución teórica y empírica para todo el rango de valores de x . Por lo tanto, se calcula la mayor desviación existente entre las dos funciones de

distribución y se denota por D_n^{KS} y el estadístico para la cola derecha e izquierda viene dado respectivamente por:

$$\begin{aligned} D_n^{KS^+} &= \max_t (F_n(x_t) - F_0(x_t)) \\ D_n^{KS^-} &= \max_t (F_0(x_t) - F_n(x_t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estadístico de Kolmogorov y Smirnov será el máximo de los dos, es decir⁸⁴:

$$D_n^{KS} = \max \left\{ D_n^{KS^+}, D_n^{KS^-} \right\} \quad (1.83)$$

b) Contraste de Anderson-Darling

El contraste de Anderson-Darling determina si los datos observados proceden de una distribución específica $F_0(x_t)$. El estadístico A determina si los datos ordenados $\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$ vienen de una distribución con función de distribución $F(x_t)$. Se debe destacar que es imprescindible que los datos estén ordenados.

$$\begin{aligned} H_0 &: F_n(x_t) = F_0(x_t) \\ H_1 &: F_n(x_t) \neq F_0(x_t) \end{aligned}$$

El estadístico viene dado por:

$$D_n^{AD} = \max_t \frac{|F_n(x_t) - F_0(x_t)|}{\sqrt{F_0(x_t)(1 - F_0(x_t))}} \quad (1.84)$$

donde $F_n(x_t)$ es la función de distribución empírica y $F_0(x_t)$ es la función de distribución teórica⁸⁵.

⁸⁴Los valores críticos del estadístico D_n^{KS} están tabulados y son de fácil acceso (Novales, 1997, o Casas, 1996).

⁸⁵Como en el caso anterior, los valores críticos del estadístico D_n^{AD} están tabulados.

El contraste de Anderson-Darling otorga mayor sensibilidad en los valores extremos de la distribución (colas), mientras que el contraste de Kolmogorov-Smirnov tiene mayor sensibilidad con los valores que se encuentran en el centro de dicha distribución. Estos contrastes se pueden aplicar a cada cópula y con ello saber cuál es la que mejor ajuste presenta sobre los datos observados. Otra forma complementaria de contraste es mediante *Backtesting*, ya que como se describió anteriormente, sirve para hacer un análisis retrospectivo.

Como se ha venido mencionando, las cópulas son de gran utilidad porque permiten modelizar la dependencia relacionada entre variables, independientemente de sus distribuciones marginales. Esto tiene gran importancia porque significa que las cópulas pueden tratar la dependencia entre variables aleatorias sin las limitaciones que tiene la medida de dependencia más familiar, el coeficiente de correlación lineal, siendo las cópulas válidas para cualquier distribución multivariante.

1.10.5. Ventajas e Inconvenientes de las cópulas

En aplicaciones financieras, las cópulas se utilizan a menudo para datos de grandes dimensiones, y no queda muy claro cual es el *trade-off* entre el tamaño de la muestra y la dimensión, ya que el número de parámetros puede ser mayor que el tamaño de la muestra. Existe una mayor variedad de cópulas, pero las descritas anteriormente son las principalmente utilizadas y las más empleadas en cuanto a investigaciones empíricas.

Dentro de sus principales ventajas se encuentran que caracterizan todos los tipos de dependencia, ya que tienen flexibilidad modelizando la dependencia, ya sean dependencias asimétricas, dependencias positivas y/o negativas, dependencia global o independencia, dependencia extrema, u otras⁸⁶. Establecen una relación entre distribuciones marginales de los distintos instrumentos correlacionados y

⁸⁶La cópula tiene en cuenta todos los posibles casos de dependencia.

la función de distribución conjunta multivariante, y son invariantes a transformaciones monótonas crecientes. Además, la función cópula permite modelizar la estructura de dependencia independientemente de las distribuciones marginales.

Sin embargo, sus principales inconvenientes son que las distribuciones marginales y las cópulas de distribuciones multivariantes no están necesariamente ligadas, las cópulas no contribuyen a un mejor entendimiento de los extremos multivariantes y además existen serias dudas de la capacidad de las cópulas para modelizar la dependencia a través del tiempo.

Durante toda la descripción de conceptos y revisión realizada hasta ahora, se ha podido observar que la literatura ha avanzado mucho en el campo de la medición y gestión de riesgos. En cuanto a las cópulas, cada día están más presentes en investigaciones actuales, ya que sus defensores afirman que es la manera más acertada, fácil de aplicar y que da mejores resultados en cuanto a la descripción de la dependencia.

Un punto clave de esta investigación es estimar el riesgo de mercado de un país emergente a través de la metodología VaR mediante las cópulas financieras, así que por ello es necesario tener alguna noción general de la forma de estimación que permita cumplir con los objetivos.

1.11. Estimación del VaR mediante cópulas

Las cópulas pueden ser aplicadas en cualquier problema de riesgo bivariante o multivariante, pero en este apartado se usarán para estimar el VaR, que se utiliza especialmente cuando un instrumento financiero incluye factores de riesgo no-normales. Es decir, como las cópulas determinan la estructura de dependencia de un instrumento financiero sin partir de supuestos distribucionales, se pueden obtener resultados más realistas y así evitar una estimación del valor en riesgo inapropiada e incorrecta.

Para tratar la dependencia de variables de riesgo esta metodología es fiable, sobre todo en el caso de que la correlación sea insegura o su aplicación no sea posible⁸⁷; el procedimiento puede aplicarse a la teoría de valor extremo y en muchos otros problemas financieros, es decir, permite modelizar rendimientos con distribuciones de forma más real, ya que se busca algo mas adecuado para no sobrevalorar o infravalorar el VaR de un instrumento financiero. En el caso bidimensional el procedimiento es el siguiente.

Supóngase que se cuenta con una cartera con posiciones en dos activos, cuyos beneficios (pérdidas) aleatorios son X e Y . Se quiere estimar el VaR de la cartera usando alguna familia de cópulas; el beneficio (pérdida) de la cartera es $X + Y$. Si $X + Y < -VaR$ se incurrirá en un mal resultado y la pérdida excederá al VaR, lo que ocurriría con un nivel de confianza de $100(1 - Z)$ %. Entonces:

$$(1 - Z) = P(X + Y < -VaR) \Rightarrow Z = 1 - P(X + Y < -VaR) \quad (1.85)$$

lo que muestra el nivel de confianza dado el VaR y que dicho nivel de confianza depende de la probabilidad de que la suma de X e Y sea menor que $-VaR$. Por lo que ahora el problema es deducir la segunda probabilidad que es la que corresponde a la distribución multivariante, es decir, la cópula que determina

$$P[(X < x); (Y < y)] \quad (1.86)$$

la probabilidad en términos de los valores de la distribución marginal para X e Y . Se puede mostrar que⁸⁸:

$$P(X + Y < -VaR) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} C(r, F_2(VaR - F_1^{-1}(r))) dr \quad (1.87)$$

donde C es la función cópula, F_1 y F_2 son las funciones de distribución marginales

⁸⁷Las correlaciones no son seguras cuando la relación entre variables no es lineal.

⁸⁸Para mayor información, véase Dowd y Fackler (2004).

de X e Y respectivamente. Se sugiere el siguiente procedimiento para obtener un adecuado nivel de confianza con cualquier VaR determinado⁸⁹:

- a) Elegir una función cópula.
- b) Estimar el valor de la cópula (utilizando algún software: R, Mathematica, Matlab, entre otros.).
- c) Aproximar el miembro derecho de la ecuación 1.87.
- d) Después de obtener el nivel de confianza del VaR, se aplica a la ecuación 1.85.

El anterior es un procedimiento alternativo, ya que en la práctica se puede estimar el VaR a partir un nivel de confianza determinado o viceversa.

Esta investigación pretende analizar la capacidad de medición y gestión de riesgos que tienen las metodologías descritas anteriormente y, a su vez, caracterizar mediante cópulas la dependencia que pueda presentar la base de datos elegida, con el objetivo de comparar las herramientas descritas.

Como se ha podido observar, la literatura dedicada a estos temas es extensa y realmente enriquecedora, además los resultados que se puedan obtener de diferentes investigaciones dependen principalmente de los datos que se han utilizado y de los países de estudio. En esta investigación, se pretende utilizar las herramientas de medición de riesgos que se han venido describiendo para un país emergente, como es el caso específico de México, de manera que se aplicarán las metodologías al índice de precios de la bolsa de valores de México, además de formar una cartera con una selección de empresas que cotizan en dicho índice con el fin de estudiar la dependencia entre las empresas emisoras seleccionadas.

En la literatura no se han encontrado muchos artículos que utilicen medidas de tipo VaR, CVaR o la teoría de valor extremo a través de cópulas para el caso específico de México. Entre los trabajos publicados, se puede citar a Ozun y

⁸⁹Un ejemplo numérico de la forma de obtener el VaR a través de cópulas, se encuentra en el apartado de anexos al final del capítulo.

Cifter (2007) que emplean cópulas con variación temporal para estimar el valor en riesgo de una cartera formada por índices de América Latina, Alonso y Arcos (2005) estiman el VaR con diferentes métodos para siete países de Latinoamérica, utilizando las medias móviles ponderadas exponencialmente y variaciones de los modelos GARCH. Canela y Pedreira (2005) estiman el grado y la estructura de dependencia para los índices de varios países de Latinoamérica, entre ellos México. Sin embargo, no parece haber ningún trabajo publicado donde se seleccione una cartera del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores con criterios similares a esta investigación, o en su defecto una investigación que se dedique única y exclusivamente a analizar el comportamiento del índice de la bolsa mexicana con respecto a un índice americano y otro europeo. A diferencia de los trabajos citados, esta investigación propone una forma alternativa de ajustar los rendimientos financieros a distintas distribuciones, empleando cópulas que permitan valorar el riesgo de forma más precisa y con ello analizar el impacto financiero que está teniendo la actual crisis en México.

El periodo objeto de estudio, evoluciona desde enero de 2002 a diciembre de 2008, éste contiene diversas características importantes y muy destacables, como por ejemplo que el periodo gubernamental de 2000-2006 estuvo basado en los aspectos financieros de la política de migración, lo cual hizo que el mercado mexicano dependiera en gran medida del mercado estadounidense, además en 2002 el mercado de acciones mostró rendimientos negativos y una disminución del volumen de negociación. En 2003-2006 se implementó la estrategia denominada "Mercado Global de la Bolsa Mexicana de Valores"⁹⁰, lo que llevó a registrar rendimientos muy significativos porque se habían ido superando los

⁹⁰Esta estrategia es un mecanismo diseñado para cotizar, en el ámbito de la Bolsa Mexicana de Valores, bajo el esquema regulatorio y operativo del Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC), valores que no fueron objeto de oferta pública en México, que no se encuentran inscritos en la Sección de Valores del Registro Nacional de Valores, y que se encuentran cotizados en mercados de valores extranjeros que han sido reconocidos por parte de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) (Mercados Extranjeros Reconocidos) o cuyos emisores hayan recibido el reconocimiento correspondiente por parte de la citada Comisión (Emisores Extranjeros Reconocidos).

máximos históricos. En 2007 hubo un incremento de la volatilidad haciendo que los rendimientos fueran sensiblemente inferiores respecto a los años anteriores, de modo que también la bolsa mexicana se mostró en línea con el comportamiento del NYSE⁹¹, y con estos acontecimientos aumentó la especulación económica y bursátil, a ello hay que añadir que en Estados Unidos se deterioró la calidad crediticia del mercado hipotecario teniendo efecto directo e inmediato en el mercado mexicano. Respecto al 2008 se puede decir que estuvo lleno de acontecimientos, dentro de los principales se destaca que el euro y el dólar alcanzaron niveles máximos frente al peso, lo que produjo una caída significativa del salario mínimo, a su vez aumentó la incertidumbre financiera internacional y se incrementó la necesidad de liquidez, por lo que Banxico⁹² tomó la decisión subastar dólares para obtener liquidez y estabilizar el peso. A pesar de las medidas tomadas, ha existido fuga de capitales lo que ha desencadenado caídas continuas en la bolsa mexicana.

Es posible preguntarse qué diferencia hay entre la metodología que se utilizará en esta investigación para medir el riesgo y una alternativa como puede ser el caso de *Riskmetrics* o el VaR tradicional. La diferencia se encuentra en la utilización de diferentes cópulas financieras que permitan estimar y valorar el riesgo de forma más adecuada, ya que se tomarán en cuenta comportamientos asimétricos y dependencia no lineal. Además no sólo se basará la investigación en el supuesto de rendimientos normalmente distribuidos, sino que se asumen otro tipo de distribuciones que permitan comparar resultados tanto de la medida de riesgo como de la dependencia que pueda existir entre los rendimientos elegidos. De esta forma se observa la funcionalidad de la metodología cuando no se está dentro de un contexto normal.

Por otro lado, México ha sido elegido para aplicarle las metodologías expuestas por varias razones, principalmente porque es un país que, al igual que Brasil,

⁹¹Bolsa de Nueva York que por sus siglas en inglés es *New York Stock Exchange*.

⁹²Banco Central de México.

ha destacado dentro de los países considerados emergentes y está cobrando fuerza dentro del panorama internacional. Además las características financieras de México son muy interesantes, debido a las asimetrías que presenta por su naturaleza y la dependencia que tiene con el mercado estadounidense. Cabe señalar que las metodologías generales de VaR y de modelización a través de cópulas se han aplicado a diferentes países desarrollados teniendo resultados razonables en cuanto a cobertura, sin embargo en los países emergentes no se ha profundizado demasiado. Así que con esta nueva aproximación se tomará más en cuenta la dependencia como fuente de riesgos, consiguiendo mediciones más acertadas y anticipadas para lograr una gestión más activa y precisa de los riesgos y con ello ampliar la cobertura que permita a México tener menor inestabilidad.

Entonces, por los acontecimientos que ocasionan alzas y bajas prolongadas en México, se ha considerado conveniente la realización de la presente investigación, porque es muy importante conocer cómo se comporta la metodología de cópulas en un país con estas características financieras. Además que hoy por hoy, existe una mayor interdependencia entre países desarrollados y emergentes.

Por último, es importante dar a conocer que el programa informático que se ha utilizado para realizar todas las estimaciones, tablas de resultados y gráficos es Matlab 7.6.0, que es un programa técnico y científico internacionalmente reconocido y además es una excelente herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas.

1.12. Anexos

Para ejemplificar el procedimiento para obtener al VaR a través de cópulas, se han simulado rendimientos de dos activos financieros, pero éste puede ser aplicado a cualquier serie de rendimientos reales. Una vez que se tiene la base de datos objeto de estudio, se supone que los rendimientos siguen una distribución específica, en este caso se ha elegido la distribución normal, esto es $N(\mu, \sigma)$.

A partir de aquí se obtienen las distribuciones marginales univariantes necesarias para calcular el parámetro correspondiente a la cópula seleccionada. La cópula Gaussiana bivalente es la utilizada en este ejemplo, sin embargo, se pudo haber utilizado cualquier otra. La cópula Gaussiana bivalente viene determinada por la siguiente expresión:

$$C_{\rho}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} f_{\rho}(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (1.88)$$

donde f_{ρ} representa la función de densidad normal bivalente con coeficiente de correlación ρ ; Φ denota la función de distribución normal.

Por lo tanto:

$$P(X + Y < -VaR) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} C(r, \Phi_2(VaR - \Phi_1^{-1}(r))) dr \quad (1.89)$$

Ya que se tienen las marginales univariantes y el valor de la cópula, se simulan variables que tengan como distribución conjunta la cópula previamente estimada. Mediante la simulación de Monte Carlo, se simulan rendimientos a través de las distribuciones marginales anteriores y la inversa de la función de distribución que inicialmente se supuso siguen los rendimientos.

Después se ponderan los rendimientos, en este caso y por ser un ejemplo bivalente, la ponderación específica es de 50 % para cada uno de los rendimientos. Por último, se obtiene el percentil de los rendimientos ponderados con un nivel

de confianza determinado, en este caso se ha utilizado el 95 %, 97,5 % y 99 %. Los VaR obtenidos para los tres niveles de confianza se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 1.1. Valoración con distintos niveles de confianza

VaR		
95%	97.5%	99%
-0.1837	-0.2344	-0.2802

De esta forma se han obtenido tres valoraciones de las máximas pérdidas posibles que pueden alcanzar los dos activos elegidos con tres niveles de confianza diferentes.

Capítulo 2

Valoración del riesgo en una cartera de valores mexicanos, mediante cópulas

2.1. Introducción

Para observar y analizar el comportamiento que muestra el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional a través de cópulas como medida de dependencia entre variables, se ha llevado a cabo la implementación de dichas metodologías a México como representante de un país emergente de América Latina. Se ha elegido México debido a la inestabilidad que existe hoy en día en los mercados financieros y por la importancia que los países en vías de desarrollo han alcanzado en el ámbito global, además las economías emergentes muestran comportamientos anormales debido a su naturaleza y, por ello, se requieren aproximaciones flexibles y precisas que sean capaces de capturar estos comportamientos asimétricos.

Así pues, este capítulo tiene como principal objetivo cuantificar el impacto de la crisis actual en el sistema financiero mexicano a través de las pérdidas inesperadas realizadas en la cartera. Para ello se utiliza un periodo temporal que data desde 2002 a 2008 y este, a su vez, se divide en dos subperiodos para diferenciar el inicio de los problemas financieros actuales, y así poder valorar los porcentajes de pérdida correspondientes a cada periodo. Con esta separación de periodos se realiza la valoración del riesgo mediante el VaR a través de cópulas elípticas para cada subperiodo, haciendo las respectivas comparaciones de valoración con la muestra completa. La cartera objeto de estudio esta formada por los cinco activos más negociados del mercado financiero mexicano, específicamente del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

El resto del capítulo se desarrolla como se muestra a continuación. En el apartado siguiente se describen y analizan los activos que conforman la cartera, tanto para el periodo completo como para los subperiodos. En el apartado tres se realiza la descripción de la metodología utilizada para la realización de la estimaciones, en el apartado cuatro se valora el riesgo con la metodología tradicional para la cartera equiponderada y autoponderada. En el apartado quinto, se realiza

la valoración del riesgo utilizando cópulas elípticas para evaluar el funcionamiento de los modelos empleados y analizar el impacto de la crisis en el sistema financiero mexicano, En el apartado sexto se utiliza el modelo GARCH (1,1) para darle dinamismo a las varianzas en la estimación. Las conclusiones a las que se ha llegado se plasman en el séptimo apartado.

2.2. Descripción y análisis de los datos

Para realizar esta investigación, se ha seleccionado y definido una cartera formada por cinco activos financieros, en la cual se medirá el riesgo de mercado a través de las metodologías expuestas en el capítulo anterior.

Se han elegido cinco empresas emisoras que cotizan en el mercado de valores mexicano. Específicamente, se trata de los cinco títulos más negociados y que tienen mayor ponderación dentro del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Así que la cartera está formada por las siguientes empresas: América Móvil (Amx), Wal-Mart de México (Walmex), Cementos Mexicanos (Cemex), Carso Global Telecom (Telecom) y Grupo Televisa (Televisa). Se debe destacar que en este capítulo, aunque se ha formado la cartera eligiendo las empresas de mayor volumen de negociación, se ha decidido que las estimaciones se realicen tanto para la cartera equiponderada como autoponderada¹. La moneda de referencia a utilizar es el peso mexicano², ya que es la moneda de cotización de las empresas. Por último, la unidad de tiempo que se asocia a la estimación será un día, es decir, se tienen datos diarios excluyendo fines de semana y festivos.

Las cinco series que conforman la cartera contienen información de los precios diarios de cierre de cada activo, por lo que la muestra total inicia el 2 de enero

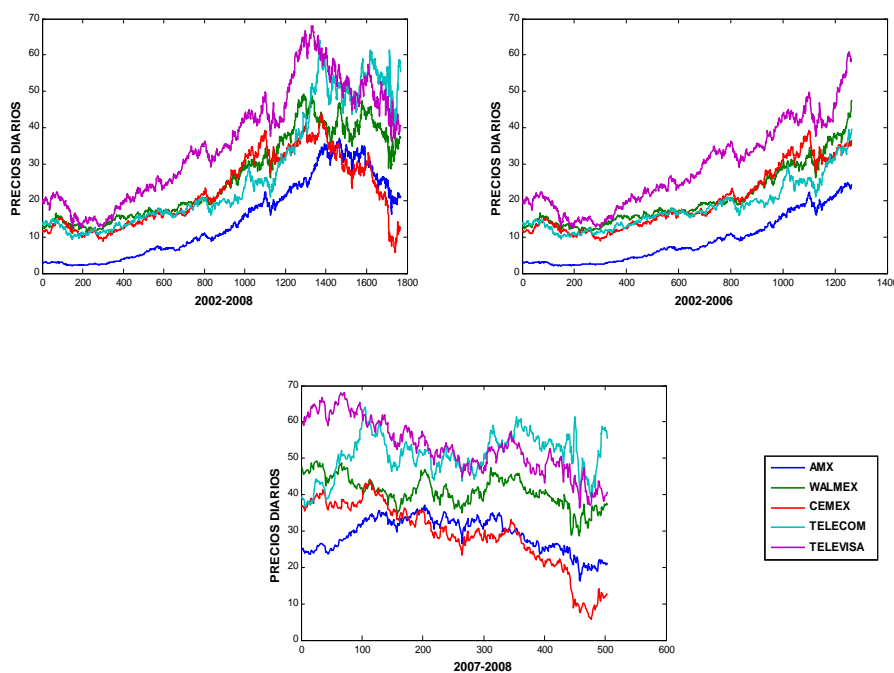
¹Cuando la cartera se equipondera se da un 20% de peso específico a cada activo. En el caso autoponderado las ponderaciones son similares a las que tiene cada activo en el mercado mexicano.

²El peso mexicano respecto al euro con fecha a 16 de febrero de 2009, es de 18.47 pesos a la compra y 18.79 pesos a la venta, según el Banco Nacional de México (BANAMEX).

de 2002 y finaliza el 31 de diciembre de 2008, así que cada serie tiene un total de 1767 observaciones³. También se ha dividido la muestra total en dos subperiodos, con el objetivo de valorar el riesgo antes y durante la crisis financiera actual, para así cuantificar su impacto. El primer subperiodo va desde el 2 de enero de 2002 hasta el 29 de diciembre de 2006, mientras que el segundo subperiodo empieza el 2 de enero de 2007 y termina el 31 de diciembre de 2008. Por tanto, el total de observaciones para cada serie correspondientes a cada subperiodo son 1264 y 503 respectivamente.

Así pues, a lo largo de este apartado se realiza un análisis descriptivo de la cartera en cuestión, tanto para la muestra total como para los subperiodos. Cabe señalar que los gráficos y tablas que se exponen en este capítulo son de elaboración propia a partir de las cotizaciones oficiales. El siguiente gráfico muestra el comportamiento de los precios diarios de cierre de los activos.

Gráfico 2.1: Precios diarios de cierre de los valores de la cartera



³Los datos perdidos se han imputado mediante la media de los datos temporales adyacentes.

2.2 Descripción y análisis de los datos

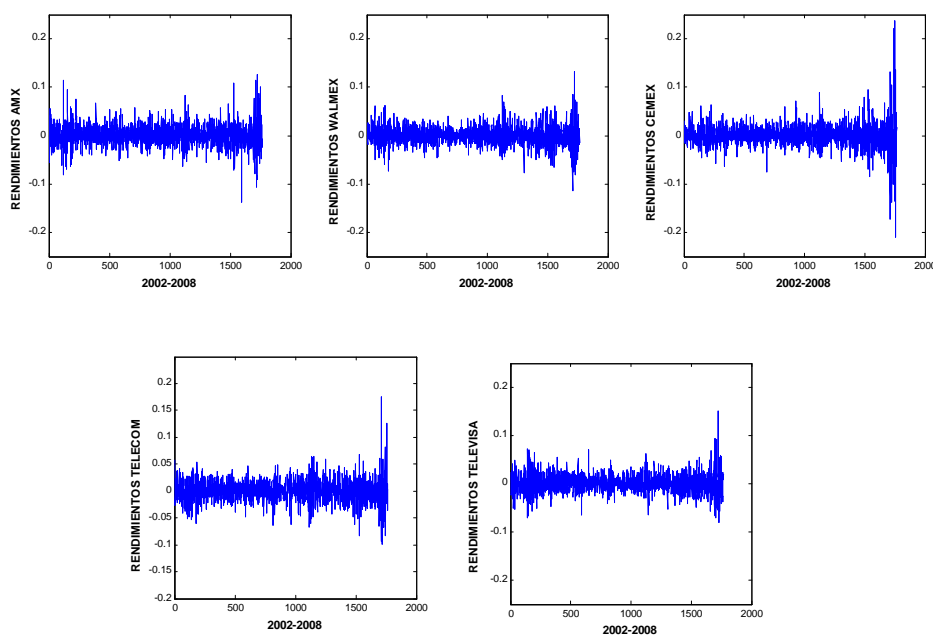
En el gráfico 2.1, se puede observar que en el último periodo temporal la tendencia ha sido completamente a la baja, mientras que en el periodo correspondiente a 2002-2006, se advierte que la tendencia de los precios era alcista. Por tanto, realizar la diferenciación de periodos posiblemente arroje resultados distintos que permitan valorar el riesgo de forma más precisa.

A partir de las series de precios diarios de cierre, se obtienen los rendimientos logarítmicos para facilitar el manejo y porque es interesante observar cómo han variado los rendimientos de cada título. Además, en los rendimientos las pérdidas y ganancias se relativizan al periodo anterior de la cartera o activo financiero, siendo éstos el objetivo de análisis. Los rendimientos logarítmicos se definen de la forma usual:

$$r_t = \ln R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2.1)$$

donde P_t representa el precio de cierre para el periodo t . La siguiente es la representación gráfica de los rendimientos.

Gráfico 2.2: Rendimientos de los valores de la cartera



En el gráfico 2.2, se observa que Cemex presenta mayor dispersión o volatilidad. Cabe señalar que en las últimas observaciones la volatilidad de las cinco series se ve significativamente incrementada, lo que se debe a que, como era de esperar, representan a la actual crisis financiera.

A continuación, se presenta el resumen descriptivo de los rendimientos para la muestra total y los subperiodos, además, mediante el estadístico Jarque-Bera se contrasta la normalidad de los mismos.

El estadístico Jarque-Bera se expresa de la siguiente forma:

$$JB = \frac{n}{6} \left(\left(\widehat{asim} \right)^2 + \frac{\left(\widehat{curt} - 3 \right)^2}{4} \right) \quad (2.2)$$

donde n es el total de observaciones, \widehat{asim}^4 representa la asimetría estimada de la serie y la estimación del exceso de curtosis esta representado por $\left(\widehat{curt} - 3 \right)$. Así pues, el resumen descriptivo se recoge en la tabla 2.1.

Como se observa en la tabla 2.1, en el periodo temporal 2002-2008, los rendimientos medios de los activos son pequeños pero positivos en todos los casos, el título que muestra mayor volatilidad es Cemex, mientras que Walmex es el título menos volátil de la cartera. Al observar la asimetría, se constata que las cinco empresas muestran una distribución claramente asimétrica, y en este caso, todas presentan sesgo positivo hacia la derecha, siendo Televisa la que tiene mayor grado de asimetría dentro de la cartera.

En cuanto a la curtosis, los cinco activos poseen una distribución leptocúrtica, ya que presentan colas más anchas con respecto a la distribución normal, siendo esto relativamente habitual en los rendimientos financieros, debido a que son más susceptibles de tener eventos extremos en las colas de la distribución. Sin

⁴Como es habitual, el estimador de la asimetría es $\widehat{asim} = \frac{1}{T\sigma^3} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3$ y el de la curtosis es $\widehat{curt} = \frac{1}{T\sigma^4} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4$.

2.2 Descripción y análisis de los datos

embargo, Cemex muestra una curtosis muy elevada en comparación con las demás empresas, lo cuál evidencia que es la que tiene las colas más pesadas dentro de la cartera y por lo tanto puede tener más valores extremos que el resto, lo que puede ser a causa de la actual crisis, ya que el sector de la construcción ha sido uno de los sectores que, desde un inicio, se ha visto afectado con más dureza.

Tabla 2.1. Estadística descriptiva de los rendimientos

	AMX	WALMEX	CEMEX	TELECOM	TELEVISÁ
PERIODO TEMPORAL 2002-2008					
MEDIA	0.0011	0.0006	0.0001	0.0008	0.0004
MEDIANA	0.0012	0.0005	0.0000	0.0006	0.0003
MÁXIMO	0.1261	0.1319	0.2381	0.1758	0.1502
MÍNIMO	-0.1374	-0.1149	-0.2101	-0.0993	-0.0814
VOLATILIDAD DIARIA	0.0217	0.0186	0.0247	0.0205	0.0193
ASIMETRÍA	0.1014	0.1025	0.1286	0.2253	0.3154
CURTOSIS	7.2117	7.0216	20.0218	8.0839	6.6410
JARQUE-BERA	1308.259	1193.167	21325.015	1916.766	1004.775
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
PERIODO TEMPORAL 2002-2006					
MEDIA	0.0017	0.0011	0.0009	0.0009	0.0009
MEDIANA	0.0014	0.0006	0.0007	0.0007	0.0007
MÁXIMO	0.1139	0.0827	0.0898	0.0647	0.0725
MÍNIMO	-0.0820	-0.0738	-0.0746	-0.0677	-0.0703
VOLATILIDAD DIARIA	0.0196	0.0162	0.0167	0.0177	0.0178
ASIMETRÍA	0.1466	0.2366	0.1913	-0.0884	0.0658
CURTOSIS	5.3027	4.9786	4.6817	3.9924	4.6086
JARQUE-BERA	283.574	217.805	156.538	53.467	137.081
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
PERIODO TEMPORAL 2007-2008					
MEDIA	-0.0003	-0.0005	-0.0021	0.0007	-0.0008
MEDIANA	0.0009	-0.0003	-0.0019	0.0003	-0.0009
MÁXIMO	0.1261	0.1319	0.2381	0.1758	0.1502
MÍNIMO	-0.1374	-0.1149	-0.2101	-0.0993	-0.0814
VOLATILIDAD DIARIA	0.0264	0.0236	0.0379	0.0263	0.0226
ASIMETRÍA	0.1231	0.0579	0.2253	0.4533	0.6697
CURTOSIS	7.6378	6.7896	12.2697	8.4975	8.0470
JARQUE-BERA	451.175	300.669	1801.575	649.339	570.321
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010

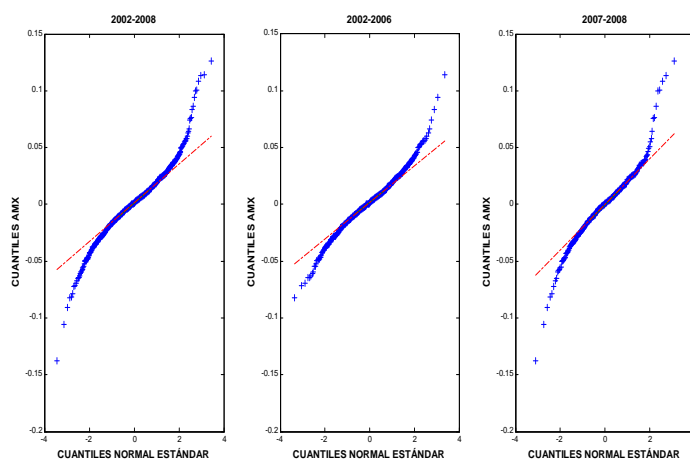
En el subperiodo 2002-2006, los rendimientos medios son ligeramente más elevados en comparación con la muestra completa. La volatilidad es un poco menor, siendo Amx el activo más volátil y Walmex el que tiene menor variabilidad. Respecto a la asimetría, los activos tienen sesgo positivo a la derecha, excepto Telecom que presenta sesgo negativo a la izquierda. En cuanto a la curtosis, de manera general, todas las empresas tienen colas anchas, pero son más próximas a las de la distribución normal respecto al periodo completo.

Por último, el subperiodo correspondiente a 2007-2008 presenta rendimientos medios muy pequeños y negativos, excepto en Telecom que son positivos, en este caso se refleja un aumento significativo de la volatilidad respecto a los dos periodos anteriores. En este subperiodo, la asimetría aumenta considerablemente en todos los casos, mostrando sesgo positivo a la derecha. En cuanto a la curtosis, tal y como se esperaba, refleja la existencia de colas anchas, alejándose en exceso de la distribución normal. Por lo tanto, este subperiodo es el que se muestra más inestable debido a los problemas financieros actuales.

Cuando se lleva a cabo el contraste de Jarque-Bera para el periodo completo y los dos subperiodos, se rechaza la hipótesis nula de normalidad, es decir, los rendimientos de la cartera no están distribuidos normalmente, lo que era previsible después de observar el gráfico de rendimientos y analizar la curtosis de cada una de las series para los tres periodos.

A continuación se realiza un análisis gráfico de los rendimientos de los activos individualmente, para corroborar, de forma más visual, las colas pesadas que presentan dichos rendimientos. Además, es interesante analizar su comportamiento porque no todas las series corresponden a los mismos sectores de producción y se comportan de manera diferente ante eventos inesperados.

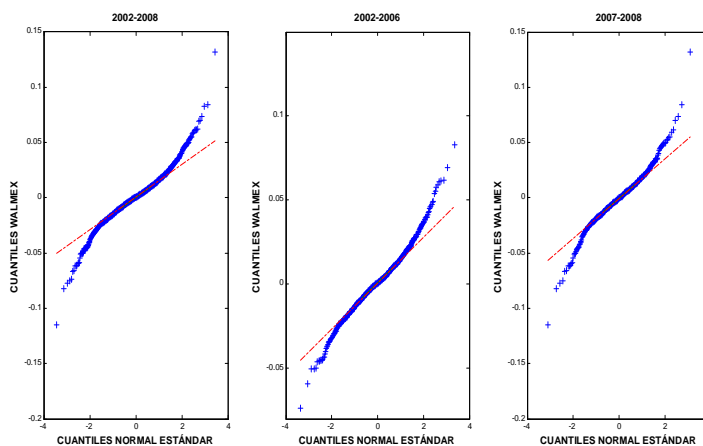
Gráfico 2.3: QQ-Plots AMX



2.2 Descripción y análisis de los datos

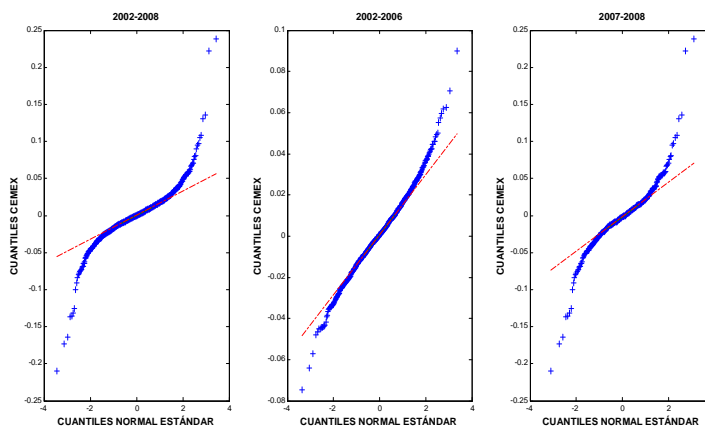
Como se observa en el gráfico 2.3, la distribución de los rendimientos de Amx muestra colas anchas sobre todo en el periodo completo y en el correspondiente a 2007-2008. Por lo tanto, es posible ver gráficamente que esta Amx no se ajusta a una distribución normal, ni en los subperiodos ni en la muestra total.

Gráfico 2.4: QQ-Plots WALMEX



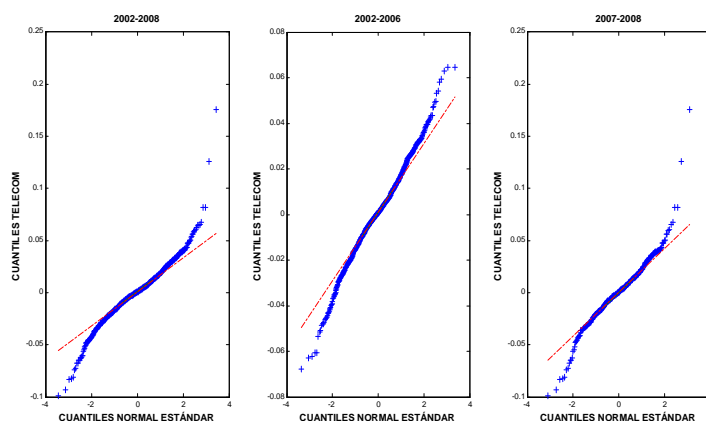
En el gráfico 2.4 se corrobora la presencia de colas pesadas en la distribución de los rendimientos de Walmex. Por lo que es posible decir que esta serie no se distribuye normalmente. Sin embargo, el subperiodo 2002-2006 muestra menor número de observaciones en las colas de la distribución respecto a los otros dos periodos.

Gráfico 2.5: QQ-Plots CEMEX



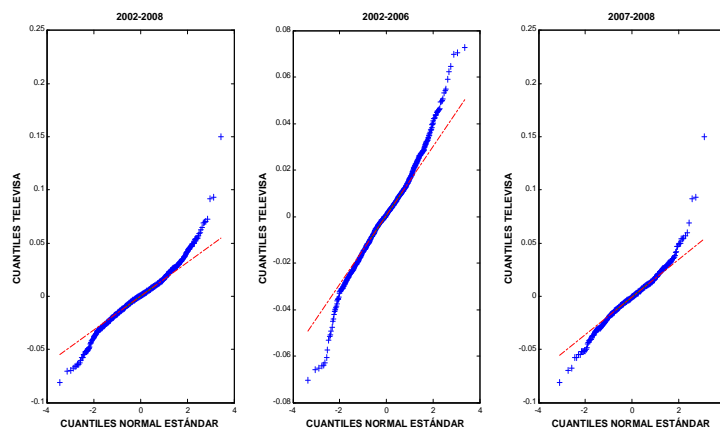
Respecto a Cemex, se pueden observar colas muy anchas, lo cual no es de extrañar, sobre todo después de conocer el valor de la curtosis, principalmente en el periodo completo y en el periodo 2007-2008. Como se observa en el gráfico 2.5, se comprueba que Cemex no se puede ajustar a una distribución normal y que efectivamente es la serie que presenta las colas más pesadas dentro de la cartera.

Gráfico 2.6: QQ-Plots TELECOM



En cuanto a Telecom, se observa la existencia de colas anchas y por lo tanto no es posible ajustar esta serie de rendimientos a una distribución normal. Sin embargo, en el periodo de 2002-2006 es la que muestra las colas menos pesadas, quizá por que presenta un número reducido de valores extremos.

Gráfico 2.7: QQ-Plots TELEVISIA



Por último, y como se observa en el gráfico 2.7, Televisa, al igual que en los demás casos, no se puede ajustar a una distribución normal, debido a que presenta colas anchas. Sin embargo, las colas tienen menor número de extremos y por lo tanto, éstas son menos pesadas que en el resto de los títulos.

Después de haber analizado los respectivos QQ-Plots, es necesario conocer la correlación lineal entre los cinco activos de la cartera, debido a que muy probablemente existe entre ellos correlación imperfecta. Por ello, se ha construido la matriz de correlaciones, y así poder conocer e incluir el efecto de la correlación en todo el proceso de estimación, ya que la dependencia puede hacer que los riesgos de la cartera en su conjunto se vean incrementados, lo que llevaría a subestimar los riesgos en el proceso de toma de decisiones para la cobertura de riesgos, especialmente en situaciones de crisis. La matriz de correlaciones viene definida en la forma habitual:

$$\rho_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \cdots & \rho_{1n,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \cdots & \rho_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1,t} & \rho_{n2,t} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

En este caso, se ha obtenido la matriz de correlaciones con las series de rendimientos históricos de cada uno de los activos miembros de la cartera.

En la tabla 2.2 se observa, de forma general, que los títulos que conforman la cartera se encuentran correlacionados entre sí, y por ello, la correlación debe ser tomada en cuenta cuando se realiza una valoración del riesgo. Tanto en el periodo completo como en los subperiodos los activos de la cartera están muy correlacionados, lo que puede hacer que ante cualquier suceso positivo o negativo estos tengan un comportamiento similar, siendo esto muy arriesgado principalmente en época de crisis, porque esta relación puede hacer que el riesgo total de la cartera se incremente.

Tabla 2.2. Matriz de correlaciones

	AMX	WALMEX	CEMEX	TELECOM	TELEVISA
PERIODO TEMPORAL 2002-2008					
AMX	1	0.51386	0.49297	0.53807	0.58303
WALMEX	0.51386	1	0.37993	0.44117	0.50873
CEMEX	0.49297	0.37993	1	0.45018	0.51966
TELECOM	0.53807	0.44117	0.45018	1	0.49159
TELEVISA	0.58303	0.50873	0.51966	0.49159	1
PERIODO TEMPORAL 2002-2006					
AMX	1	0.50290	0.51597	0.54450	0.55659
WALMEX	0.50290	1	0.45208	0.48667	0.48752
CEMEX	0.51597	0.45208	1	0.43361	0.54169
TELECOM	0.54450	0.48667	0.43361	1	0.49738
TELEVISA	0.55659	0.48752	0.54169	0.49738	1
PERIODO TEMPORAL 2007-2008					
AMX	1	0.52709	0.50211	0.53218	0.62058
WALMEX	0.52709	1	0.33923	0.38840	0.53884
CEMEX	0.50211	0.33923	1	0.48120	0.53911
TELECOM	0.53218	0.38840	0.48120	1	0.48824
TELEVISA	0.62058	0.53884	0.53911	0.48824	1

2.3. Descripción de la metodología

Las metodologías que se describen en este apartado se aplican a una cartera equiponderada y autponderada formada por los cinco activos más negociados del mercado mexicano, los cuales son América Móvil (Amx), Wal-Mart de México (Walmex), Cementos Mexicanos (Cemex), Carso Global Telecom (Telecom) y Grupo Televisa (Televisa). A partir de ahora, sólo se hará mención de cada activo por su nombre abreviado, es decir, el que se encuentra entre paréntesis. La metodología se describe para el periodo completo, ya que ésta se aplicará de forma análoga para los dos subperiodos.

En el presente capítulo, primeramente, se llevan a cabo las valoraciones de los riesgos a través de la metodología tradicional, es decir, mediante simulación histórica se valoran los riesgos de la cartera, tanto de manera equiponderada como autponderada. También se supone que los rendimientos se ajustan a una distribución específica y determinada, es decir, se asume que las distribuciones marginales son normales o uniformes para modelizar el comportamiento de los rendimientos de la cartera. Estas distribuciones serán contrastadas con distribu-

ciones marginales empíricas, porque son las que reflejan de forma más exacta la distribución dentro de muestra. Sin embargo, por este motivo son demasiado rígidas para funcionar fuera de ella. Por tanto, lo que se busca es una distribución que se comporte similar a la empírica en la muestra, pero que sea más flexible fuera de la muestra.

El ajuste de los rendimientos a una distribución uniforme se utiliza para poder asignar una misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos, es decir, todos los eventos son tratados de la misma forma. El ajuste a una distribución normal⁵ se utiliza porque asigna más peso en el centro de la distribución, dejando fuera casos extremos. Es muy común encontrar en la literatura investigaciones en las que se ajustan los rendimientos a través de una distribución t-Student, principalmente por el peso que se da al centro de la distribución sin dejar de lado los casos extremos. Sin embargo, no ha sido posible ajustar las series de rendimientos financieros que se utilizan en esta investigación a esa distribución. Se ha tratado de llevar a cabo el ajuste con aproximaciones realizadas por el método de máxima verosimilitud y de cuasi máxima verosimilitud, obteniendo como resultado un mal ajuste o, en su defecto, grados de libertad muy elevados, lo cual se acercaría mucho a la distribución normal. Aún así, los resultados obtenidos se contrastaron mediante un test chi cuadrado, comprobando que los datos no se ajustaban de forma adecuada a esa distribución quizá por la propia naturaleza de los datos, así que no se ha incluido dicho ajuste.

Tras haber supuesto que los rendimientos de la cartera han sido ajustados a una distribución específica, se estima el modelo de valoración de riesgos a través de cópulas elípticas, ya que, como se ha venido diciendo a lo largo de la investigación, tomar en cuenta la dependencia a la hora de medir el riesgo es de vital importancia y puede ayudar a identificar mejor los riesgos, además las cópulas elípticas son ampliamente utilizadas en la práctica. Al hacer las valoraciones de los riesgos

⁵Aunque en el apartado anterior se ha contrastado, mediante el test de Jarque-Bera, que los rendimientos no son normales, la metodología será orientativa y útil más adelante.

con la metodología de cópulas y de manera tradicional, se pretende comprobar si, para este caso, las valoraciones a través de cópulas logran capturar mejor la exposición al riesgo o en su defecto, saber si la utilización de las cópulas beneficia la valoración del riesgo respecto a las metodologías tradicionales.

Para obtener la valoración del riesgo más precisa, se contrastan los resultados con los obtenidos de forma empírica y con los respectivos *backtesting*, corroborando así que se está eligiendo la forma de estimación acertada, es decir, la estimación que muestre menores diferencias con los resultados empíricos y con los *backtesting*. También se ha tomado como criterio de decisión el error cuadrático medio mínimo de las estimaciones. Es necesario saber que el nivel de confianza asociado a los cálculos se ha establecido en 99 %, aunque también se considerarán el 97,5 % y el 95 %. A continuación se describe, a manera de resumen, el procedimiento que se ha seguido para llevar a cabo la medición del riesgo mediante cópulas elípticas.

1. Se ajustan los rendimientos a una distribución determinada: normal, uniforme o empírica.
2. Se obtienen las distribuciones marginales univariantes a partir de los rendimientos previamente ajustados.
3. Se obtienen los parámetros de la cópula correspondiente.
4. Se simulan distribuciones marginales a partir de las marginales univariantes anteriores y de los parámetros de las cópulas elegidas, es decir, variables que tengan como distribución conjunta la cópula estimada anteriormente.
5. A través de la simulación de Montecarlo, se simulan rendimientos mediante las distribuciones marginales anteriores y la función inversa de la distribución a la que se han ajustado inicialmente los rendimientos.
6. Se ponderan los rendimientos simulados, de forma equiponderada y autoponderada.
7. Se estiman las valoraciones del riesgo con un nivel de confianza de 99 %, 97,5 % y 95 %.

8. Se contrastan los resultados con los obtenidos de forma empírica, los respectivos *backtesting* y con los errores cuadráticos medios mínimos.

9. Se elige la valoración más adecuada teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto anterior.

Cuando se lleva a cabo la aplicación de las cópulas elípticas, se hace en su forma multivariante, es decir, se obtendrá la cópula de los cinco activos que conforman la cartera. Ya que en el capítulo dedicado a los conceptos se han definido los diferentes tipos de cópulas, aquí solo se mencionarán las cópulas elípticas en su forma general. Las cópulas elípticas multivariantes tienen la siguiente forma:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_p) = F[F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p)] \quad (2.4)$$

donde F es la función de distribución multivariante.

Al haber ajustado los rendimientos a una distribución normal se supuso que la varianza de los rendimientos era constante a través del tiempo y con esto se puede incurrir en errores de estimación, por lo que se aplicará un modelo de tipo GARCH para que las varianzas sean cambiantes a través del tiempo. Todo esto para contrastar estos resultados con los previamente estimados y analizar cual ha sido la mejor valoración del riesgo que se ha obtenido para esta selección de datos de este mercado.

2.4. Valoración tradicional del riesgo

En este apartado, la valoración de los riesgos se realiza con la metodología VaR mediante el método de simulación histórica. Esta valoración se aplica a la cartera equiponderada y autoponderada, con el fin de observar y comparar ambas valoraciones. Las valoraciones se realizan tanto para el periodo completo como para los dos subperiodos. A continuación, se presentan los gráficos correspondien-

tes a las valoraciones tradicionales, VaR, de forma equiponderada y para los tres periodos.

Gráfico 2.8: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%

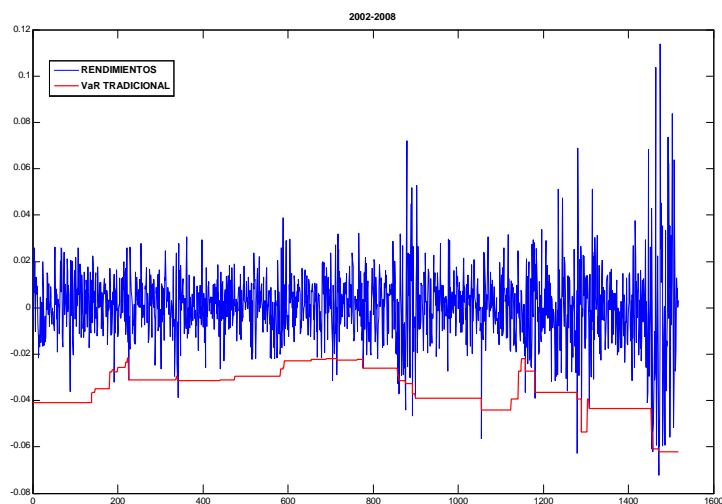
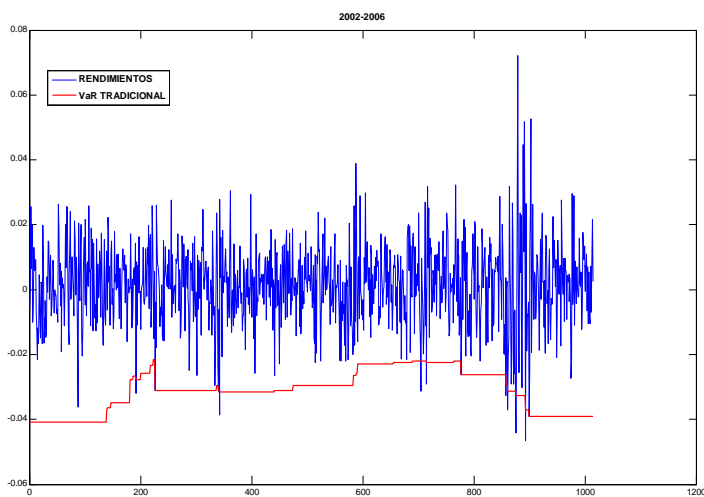
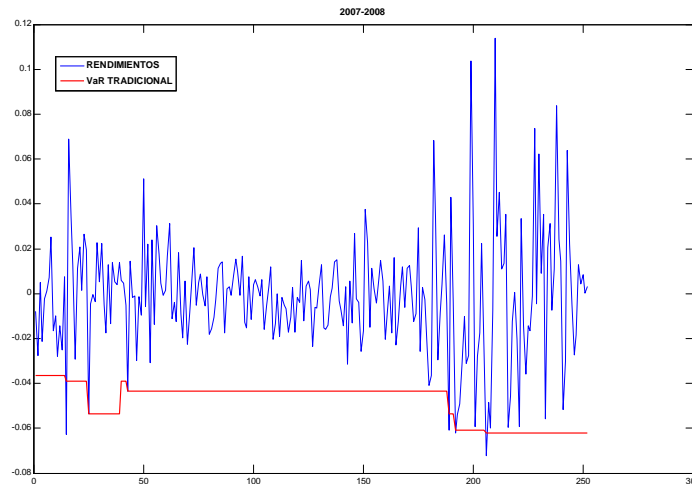


Gráfico 2.9: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%



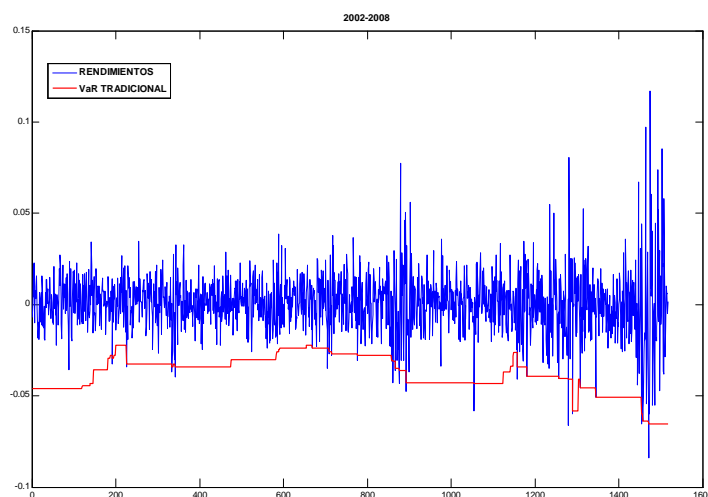
En los gráficos 2.8, 2.9 y 2.10 se puede observar que las valoraciones VaR equiponderadas, tanto en el periodo completo como en los subperiodos, son constantes en determinados momentos. Las ocasiones en que se ha excedido el umbral

Gráfico 2.10: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%



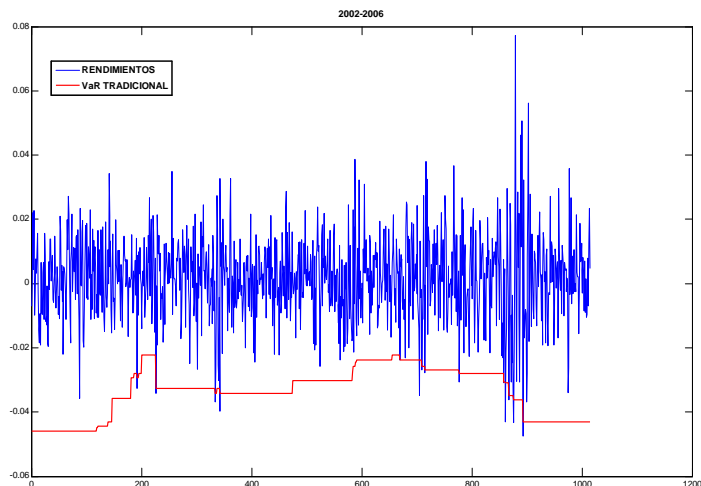
VaR son 16, 9 y 4 para cada periodo respectivamente. Se advierte que en la mayoría de los casos, las valoraciones VaR pueden estar sobrestimando el riesgo en el que se pueda estar incurriendo. A continuación se presentan los gráficos del caso autoponderado.

Gráfico 2.11: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%



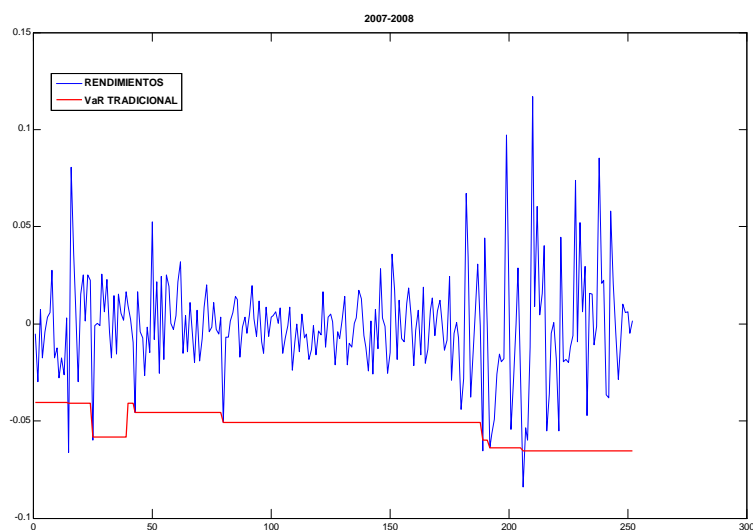
En cuanto a las valoraciones obtenidas a través de la simulación histórica y con la cartera autoponderada, se puede advertir en los gráficos 2.11, 2.12 y 2.13,

Gráfico 2.12: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%



que al igual que en el caso anterior, el VaR diario se muestra constante en determinados instantes de tiempo. Las ocasiones en que el VaR ha sido superado en el periodo 2002-2008 son 20, mientras que en los subperiodos son 14 y 4 respectivamente. Tras conocer las excepciones, se puede llegar a pensar que la metodología tradicional está sobrevalorando los riesgos de la cartera autoponderada.

Gráfico 2.13: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%



2.4 Valoración tradicional del riesgo

Para cuantificar las pérdidas inesperadas se ha dividido la muestra en dos partes, la primera parte corresponde a las observaciones de una año y se utilizan para calcular los VaR diarios correspondientes a la segunda parte de la muestra. Se han considerado como pérdidas inesperadas aquellos rendimientos reales inferiores al VaR. Las pérdidas inesperadas se han definido como la diferencia entre el rendimiento real y el VaR correspondiente y la acumulación de pérdidas se obtuvo de la siguiente forma

$$Pa = 100 \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \quad (2.5)$$

donde Pa son las pérdidas acumuladas, P_i son las pérdidas inesperadas individuales y n son el número de ocasiones en que se ha superado el umbral VaR.

La cuantificación de las pérdidas, tanto para la cartera equiponderada como para la autoponderada, se realizaron con tres niveles de confianza diferentes, para así comprobar como varían los resultados en función del nivel y del periodo temporal.

Tabla 2.3. Acumulación de pérdidas inesperadas

	Pérdida		Pérdida		Pérdida	
	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes
	99%		97.5%		95%	
2002-2008						
VaR Equiponderado	19.34%	21 (1.38%)	39.48%	51 (3.36%)	61.08%	92 (6.06%)
VaR Autoponderado	19.73%	25 (1.65%)	41.21%	54 (3.56%)	62.42%	92 (6.06%)
2002-2006						
VaR Equiponderado	8.46%	12 (1.18%)	17.49%	24 (2.37%)	31.95%	49 (4.83%)
VaR Autoponderado	8.62%	14 (1.38%)	19.33%	26 (2.56%)	33.47%	53 (5.23%)
2007-2008						
VaR Equiponderado	7.99%	6 (2.38%)	18.79%	13 (5.16%)	32.26%	25 (9.92%)
VaR Autoponderado	8.96%	7 (2.78%)	18.78%	13 (5.16%)	31.98%	20 (7.94%)

Como se puede observar en la tabla 2.3, las mayores pérdidas se concentran en el periodo temporal 2002-2008, además es el periodo donde el umbral de pérdida esperada, VaR, ha sido superado más veces por los rendimientos reales, esto puede deberse a que es el periodo que tiene más observaciones. Sin embargo, el periodo

más corto, 2007-2008, no es el que muestra menores pérdidas inesperadas, con lo que se puede decir que no sólo la longitud de la muestra afecta, sino que también los eventos extremos que están incluidos en este subperiodo. En cuanto a la cartera autoponderada, se puede observar que tiene más excedentes respecto a la forma equiponderada, sin embargo, las pérdidas inesperadas se pueden considerar, de manera general, como similares en ambos casos. Por último, a medida que se es menos estricto con el nivel de confianza, las pérdidas inesperadas y los excedentes aumentan.

2.5. Valoración del riesgo a través de cópulas elípticas

Para realizar las estimaciones del VaR mediante cópulas multivariantes, se han ajustado los rendimientos del periodo completo y de los subperiodos a las distribuciones normal y uniforme, y así poder elegir la distribución que mejor se adecua a los rendimientos. Además de seleccionar la cópula elíptica⁶ que capta acertadamente la dependencia existente entre los activos y, entonces, valorar el riesgo de toda la cartera.

La valoración de los riesgos más adecuada se obtuvo comparando los resultados con los obtenidos mediante la distribución empírica y con los *backtesting* correspondientes a cada caso, además se contabilizaron las veces en que la metodología ha fallado y se obtuvieron los errores cuadráticos medios eligiendo el mínimo error.

Los gráficos 2.14, 2.15 y 2.16 corresponden a los *backtesting* que valoran de forma más precisa los riesgos de los tres periodos de manera equiponderada, también se incluye la valoración mediante simulación histórica para poder comparar

⁶Se utilizan cópula elípticas multivariantes porque las cópulas arquimedianas multivariantes aún se están investigando, y son necesarias herramientas matemáticas más complejas como la Transformada de Laplace.

Gráfico 2.14: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%

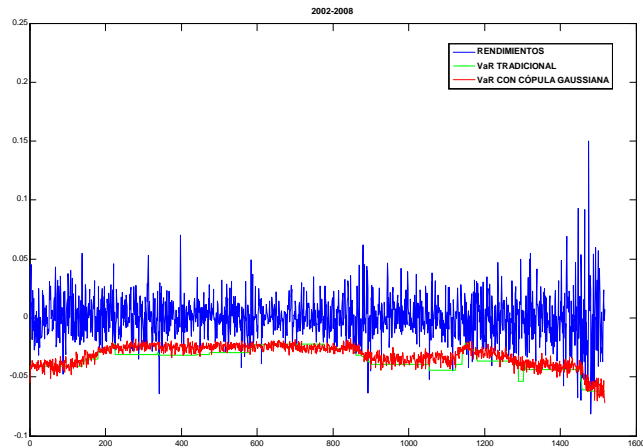
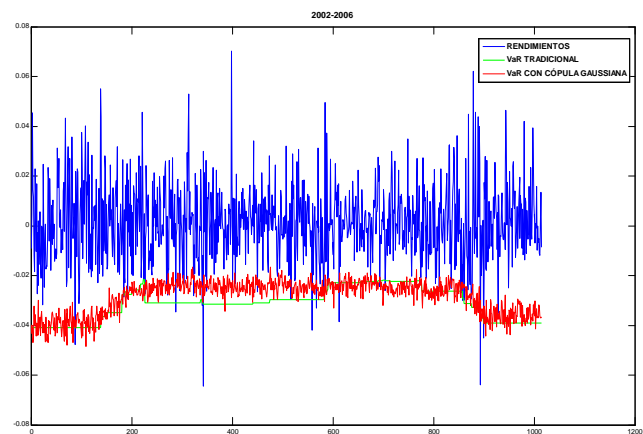
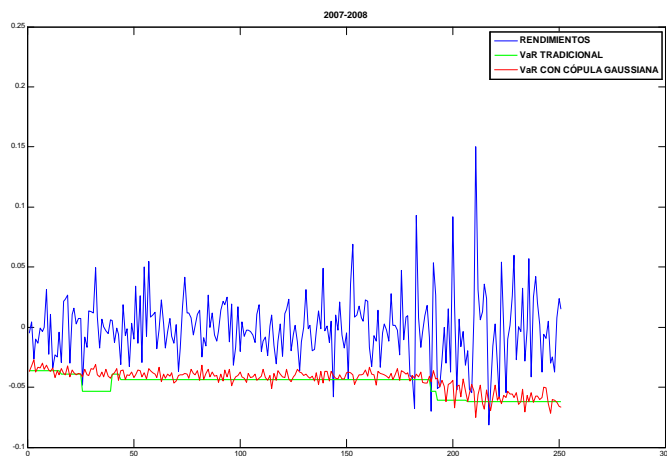


Gráfico 2.15: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%



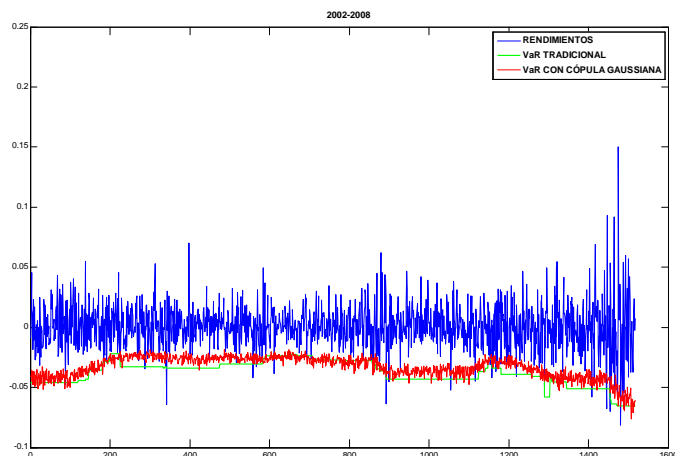
ambos resultados. Las valoraciones se han obtenido ajustando los rendimientos a la distribución normal, ya que la distribución uniforme sobrevalora en exceso los riesgos. En los *backtesting* multivariantes se observa que en el periodo 2002-2008 las veces que se ha superado el VaR son 49. Respecto a los subperiodos, las excepciones son 28 y 12 respectivamente. Se advierte que la valoración con cópulas se ajusta de mejor manera a los rendimientos reales, ya que no sobrevalora el riesgo tanto como la valoración tradicional.

Gráfico 2.16: Cartera equiponderada: *Backtesting* al 99%



Los siguientes gráficos muestra los *backtesting* que valoran de forma más precisa los riesgos de los tres periodos estimados de forma autoponderada, también se incluye la valoración mediante simulación histórica para poder comparar ambos resultados.

Gráfico 2.17: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%



En los *backtesting* 2.17, 2.18 y 2.19 , se observa que en el periodo 2002-2008 las ocasiones que se ha superado el VaR son 39, respecto a los subperiodos, las excepciones son 19 y 11 respectivamente. El ajuste de los rendimientos se llevo a

Gráfico 2.18: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%

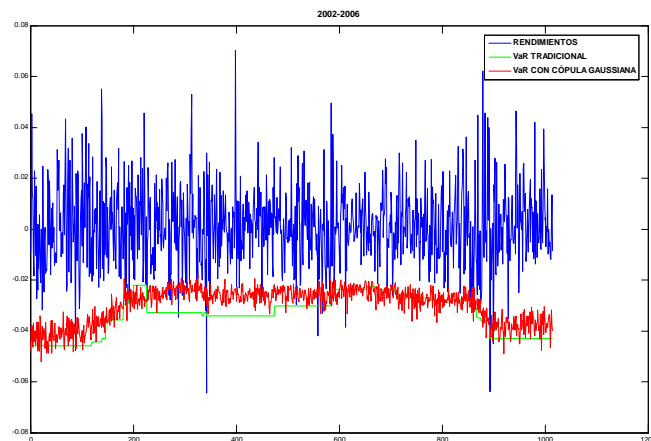
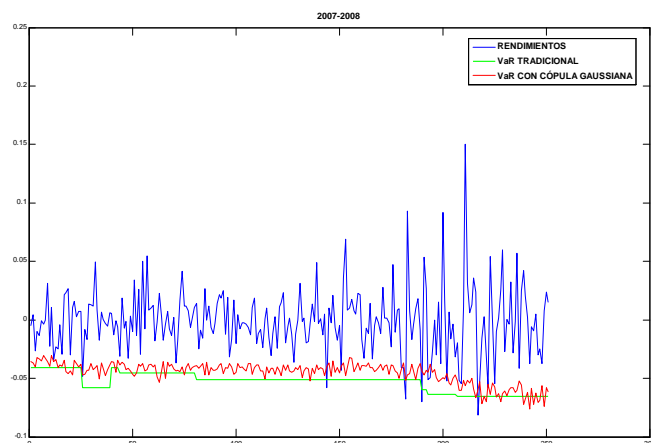


Gráfico 2.19: Cartera autoponderada: *Backtesting* al 99%



cabo con la distribución normal, ya que es la que menor distancia tiene con las valoraciones empíricas. Las veces que se ha excedido el VaR son menores que las de la cartera equiponderada. Se observa, al igual que antes, que las valoraciones, tanto tradicional como a través de cópulas, son parecidas; quizá por las similitudes del valor de la cópula Gaussiana con el coeficiente de correlación lineal, aunque la valoración con la cópula Gaussiana brinda mejores resultados porque se ajusta más adecuadamente a los rendimientos

A continuación se muestran los errores cuadráticos medios de la cartera equiponderada y autoponderada con un nivel de confianza de 99%. Éstos se obtuvieron a partir de los rendimientos simulados para las dos cópula elípticas utilizadas: Gaussiana y t-Student y suponiendo que los rendimientos se distribuyen de manera normal.

Tabla 2.4. Errores cuadráticos medios

	VaR Equiponderado	VaR Autoponderado
2002-2008		
C. Gaussiana	0.000398	0.000430
C. t-Student	0.000408	0.000452
2002-2006		
C. Gaussiana	0.000385	0.000433
C. t-Student	0.000391	0.000440
2007-2008		
C. Gaussiana	0.000938	0.001008
C. t-Student	0.000994	0.001121

Se puede observar en la tabla 2.4, que los errores cuadráticos medios con la cópula Gaussiana son menores en todos los casos, lo que indica que ésta es la cópula elíptica que hace que las valoraciones se acerquen de manera favorable a los valores verdaderos de la cartera, tanto de forma equiponderada como autoponderada. Cuando se realizan aproximaciones mediante el ajuste normal con la cópula t-Student arrojan resultados cercanos a los obtenidos empíricamente, sin embargo, se debe hacer hincapié en que cuando se realizaron los *backtesting* oportunos, la cópula t-Student no fue tan adecuada y los errores cuadráticos medios son mayores en comparación con la cópula Gaussiana.

Tras haber analizado los *backtesting*, los resultados empíricos y los errores cuadrático medios, es posible decir, que las valoraciones más adecuadas se obtuvieron ajustando los rendimientos a la distribución normal y utilizando la cópula Gaussiana. Por lo tanto, las pérdidas inesperadas correspondientes a las valoraciones equiponderadas, se realizaron para tres niveles de confianza diferentes para comparar la variación de las pérdidas en función del nivel, éstas se obtu-

2.5 Valoración del riesgo a través de cópulas elípticas

vieron de forma análoga al apartado anterior. Así pues, las pérdidas inesperadas del caso equiponderado se muestran en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 2.5. Cartera equiponderada: acumulación de pérdidas inesperadas

Pérdida		Pérdida		Pérdida	
Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes
99%		97.5%		95%	
2002-2008					
28.32%	43 (2.83%)	44.73%	73 (4.81%)	61.75%	98 (6.46%)
2002-2006					
14.20%	27 (2.66%)	20.89%	40 (3.94%)	33.35%	52 (5.13%)
2007-2008					
15.37%	15 (5.95%)	20.90%	18 (7.14%)	32.73%	24 (9.52%)

Según los resultados de la tabla 2.5, se observa que el periodo total es el que presenta mayores pérdidas, coincidiendo con aquel que tiene más excedentes. Sin embargo, en este caso, el periodo de menor número de excedentes, 2007-2008, no es aquel de menores pérdidas, ya que aunque tienen menor frecuencia de pérdida, éstas son de mayor cuantía, probablemente debidas a la crisis actual. Cabe señalar que conforme se va siendo menos estricto con el nivel de confianza, las pérdidas inesperadas y las ocasiones en que se excede el VaR aumentan considerablemente.

Las pérdidas inesperadas correspondientes a las valoraciones de la cartera autoponderada, también se realizaron para tres niveles de confianza diferentes, para así comparar la variación de las pérdidas en función del nivel. Las pérdidas inesperadas del caso autoponderado se muestran en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 2.6. Cartera autoponderada: acumulación de pérdidas inesperadas

Pérdida		Pérdida		Pérdida	
Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes
99%		97.5%		95%	
2002-2008					
29.56%	41 (2.70%)	47.39%	67 (4.42%)	62.43%	95 (6.26%)
2002-2006					
12.46%	22 (2.17%)	23.57%	38 (3.75%)	35.16%	58 (5.71%)
2007-2008					
16.58%	10 (3.97%)	22.72%	16 (6.34%)	29.99%	20 (7.93%)

Tal y como se observa en la tabla 2.6, el periodo total es el que presenta mayor número de excedentes en los tres niveles de confianza. De manera general, los excedentes de la cartera son muy similares a los de la cartera equiponderada, sin embargo, en este caso la cartera registra mayores pérdidas inesperadas, esto puede deberse a la ponderación utilizada, lo que puede hacer que estas valoraciones sean más cercanas a la realidad. El periodo 2007-2008 es el que presenta menor número de excedentes, pero no es el que menores pérdidas inesperadas registra, ya que aunque tienen menor frecuencia de pérdida, estas son de mayor cuantía, siendo esto ocasionado por los problemas financieros actuales. Del mismo modo que en el caso equiponderado, cuando se disminuye el nivel de confianza, las pérdidas experimentan un incremento significativo.

Es posible advertir que cuando se utiliza la metodología tradicional, se están sobrestimando demasiado las máximas pérdidas en que se puede incurrir en los tres periodos, y esto conlleva a que se asigne mayor capital del necesario para cubrirlas. Por lo que las valoraciones a través de cópulas se pueden considerar más cercanas a la realidad. Por último, se observa que efectivamente ha existido una mejora al autoponderar la cartera, sin embargo, la ganancia no es ampliamente significativa, por lo que se puede decir que su precisión es muy similar al caso equiponderado.

2.6. Extensiones

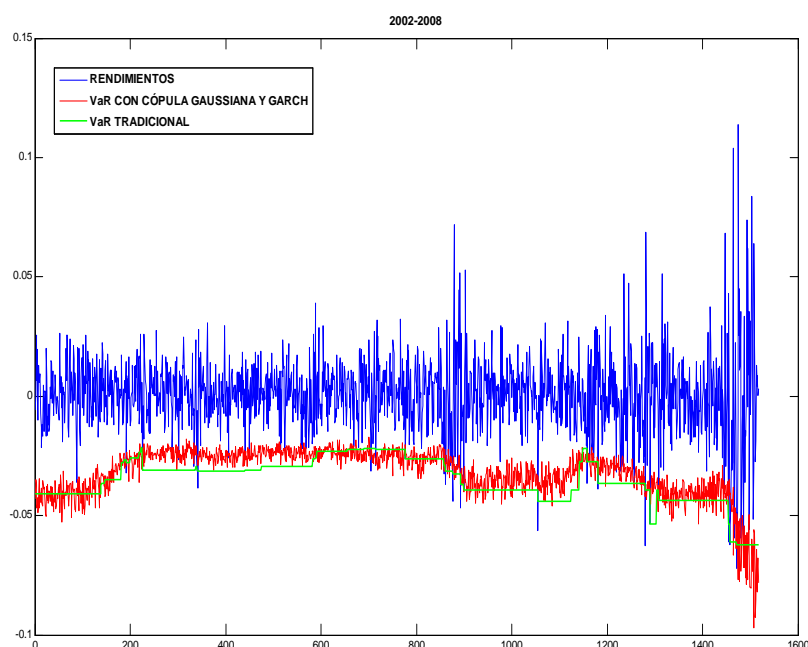
Con el objetivo de obtener alguna mejora en las estimaciones realizadas hasta ahora, se ofrece una alternativa de estimación.

2.6.1. Incorporación de varianzas dinámicas en el modelo

Hasta ahora, se ha supuesto que los rendimientos de la cartera siguen una distribución normal, donde la varianza es constante a través del tiempo. Con esto,

los resultados se pueden alejar de la realidad, ya que la varianza se toma como una aproximación a la volatilidad de los rendimientos y esta nunca es constante. Así que para obtener una estimación más acertada se ha aplicado un modelo que permita incluir varianzas dinámicas. Este es el caso del GARCH (1,1), el cual es un modelo de suavizado exponencial de la varianza y converge a un proceso de difusión en tiempo continuo⁷, así que se ha aplicado este modelo a las valoraciones elegidas de la cartera, tanto de forma equiponderada como de manera autoponderada.

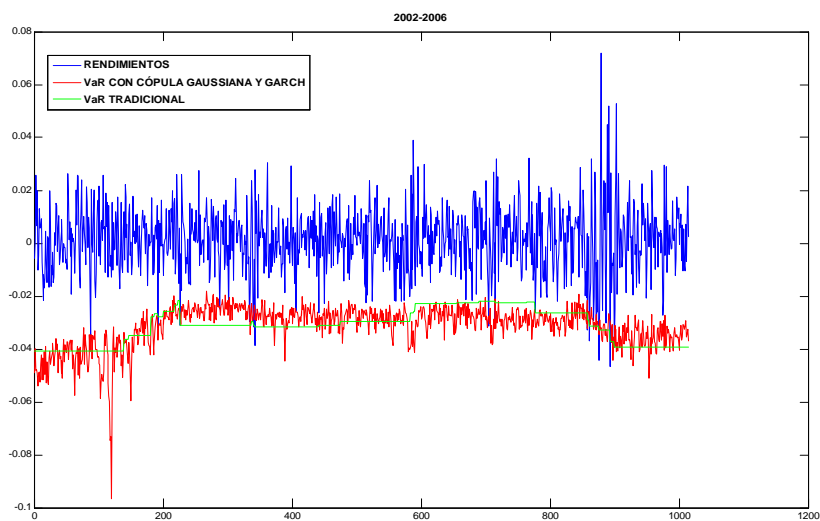
Gráfico 2.20: VaR equiponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%



Los gráficos 2.20, 2.21 y 2.22 corresponden a los *backtesting* de la cartera equiponderada una vez incluido el modelo GARCH, también se incluye la valoración mediante simulación histórica para poder comparar ambos resultados. En los *backtesting* se observa que en el periodo 2002-2008 las ocasiones que se ha superado el VaR son 39. Respecto a los subperiodos, las excepciones son 14 y 15 respectivamente.

⁷Para mayor detalle, véase Nelson (1999) y Bollerslev (1986).

Gráfico 2.21: VaR equiponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%



Se advierte que cuando se valoran los riesgos utilizando el modelo GARCH, las ocasiones en que se supera el umbral de pérdida, VaR, son menores respecto a las valoraciones exentas de este modelo, excepto en el último subperiodo, donde las excepciones aumentan.

Gráfico 2.22: VaR equiponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%

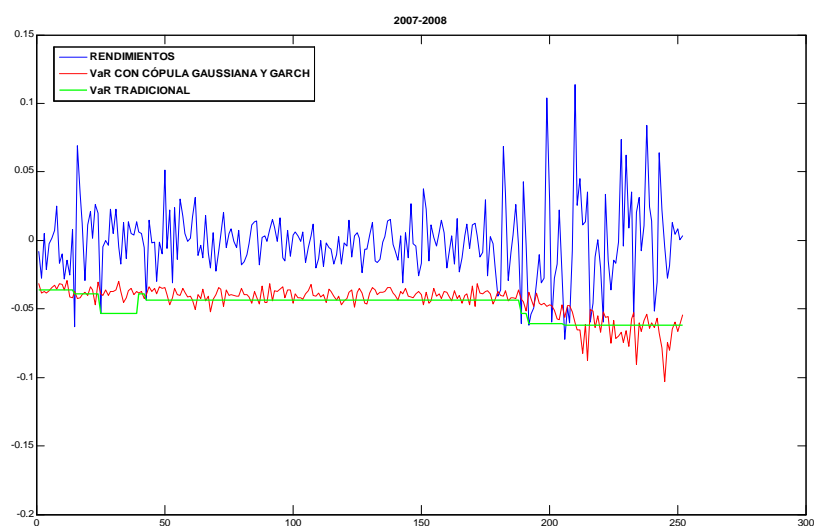


Gráfico 2.23: VaR autoponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%

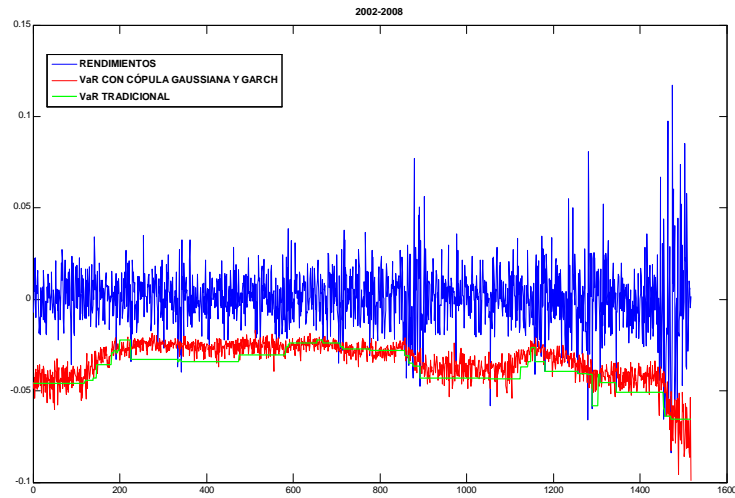
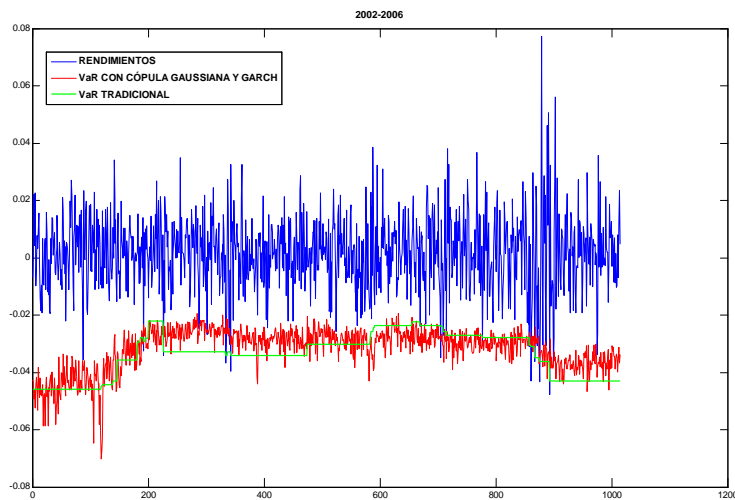
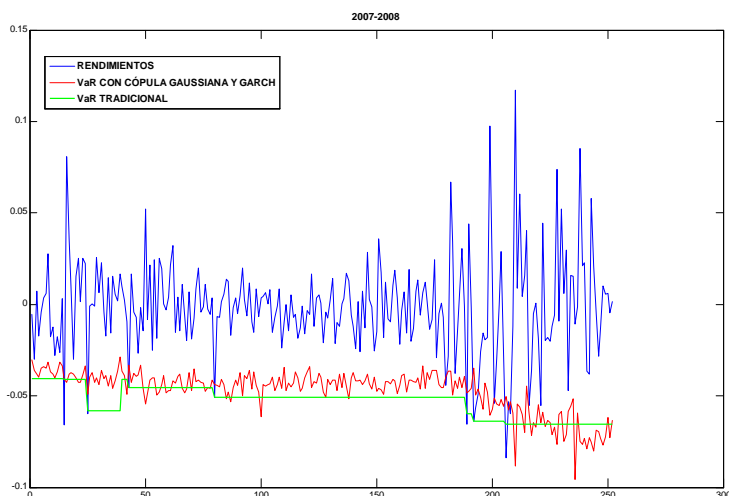


Gráfico 2.24: VaR autoponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%



Los gráficos 2.23, 2.24 y 2.25 son los de la cartera autoponderada una vez incorporado el modelo GARCH, también se incluye la valoración mediante simulación histórica para poder comparar ambos resultados. Se observa que las ocasiones que se ha superado el VaR son 44, 15 y 12 en cada periodo respectivamente.

Gráfico 2.25: VaR autoponderado con GARCH: *Backtesting* al 99%



También se puede observar que cuando se valoran los riesgos de esta forma, las ocasiones en que se supera el umbral de pérdida, VaR, son ligeramente mayores respecto a las valoraciones exentas del modelo GARCH.

Después de haber incorporado los efectos GARCH a la estimación, se ha conseguido disminuir la distancia que hay con el ajuste que aproxima los datos reales, por lo que esta nueva aproximación sugiere que la medida de riesgo es más realista cuando se incorporan varianzas dinámicas para todo el periodo temporal. Sin embargo, la metodología inicialmente propuesta brinda resultados bastante certeros y la ganancia con la utilización de modelos GARCH no ha sido suficientemente significativa.

2.7. Conclusiones

En este capítulo, primeramente se han utilizado cópulas elípticas para valorar el riesgo de una cartera formada por acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). La metodología de valoración utilizada es el VaR, ya que puede implementarse casi a cualquier instrumento de gestión de riesgos. En cuanto al horizonte temporal, se utiliza el periodo completo que va desde 2002

a 2008, además de dos subperiodos, 2002-2006 y 2007-2008 respectivamente, con el objetivo de valorar las repercusiones que la crisis financiera está dejando en el mercado mexicano.

Las cópulas aplicadas pertenecen a la familia elíptica, en concreto son la cópula Gaussiana y la cópula t-Student, éstas han sido elegidas porque tiene una gran versatilidad y son ampliamente utilizadas en la práctica.

Se ha supuesto que los rendimientos utilizados siguen dos tipos de distribuciones: normal o uniforme, contrastando los resultados obtenidos con la distribución empírica y con los *backtesting* correspondientes a cada caso, además de cuantificar las ocasiones en que la metodología falla y obtener los errores cuadráticos medios, para así poder elegir las valoraciones más precisas en cada caso.

En la evidencia empírica mostrada en este capítulo, se observa que cuando las marginales se distribuyen de forma normal se obtienen resultados más adecuados que con la distribución uniforme, es decir, la distribución normal se aproximan mejor a los riesgos reales tanto en el periodo completo como en los subperiodos. Respecto al ajuste uniforme, aunque en la literatura se muestre este tipo de ajuste con buenos resultados, para el caso específico de México, tanto en el periodo total como en los subperiodos elegidos y con esta aplicación concreta, la uniformidad de rendimientos no conduce a una valoración adecuada, ya que sobrestima en exceso el riesgo y su utilización sería una postura demasiado conservadora en cuanto al riesgo.

Lo anterior puede deberse a las peculiaridades de México, o mejor dicho a su propia naturaleza, además que el periodo de estudio, fundamentalmente en las observaciones correspondientes al inicio de la crisis actual (2007-2008), está caracterizado por la inestabilidad, la creciente volatilidad y la asimetría inherente a los países en vías de desarrollo.

En cuanto a las cópulas, cuando se realizaron las estimaciones a través de cópulas elípticas multivariantes, tanto equiponderadas como autoponderadas, se

obtuvieron resultados razonables, principalmente con la cópula Gaussiana. Sin embargo, las valoraciones no se encuentran muy alejadas de las estimadas de manera tradicional mediante simulación histórica, lo cual puede deberse a que la cópula Gaussiana tiene gran similitud con el coeficiente de correlación lineal, lo que las coloca en un escenario normal.

De cualquier manera, es posible decir que con la implementación de las cópulas en las estimaciones se obtienen beneficios cuando se pretende valorar el riesgo mediante metodologías de tipo VaR. Por lo tanto, la máxima pérdida que se puede tener con determinada certeza será más adecuada cuando se incluye la medición del grado de dependencia entre activos.

Respecto al impacto financiero que la actual crisis mundial está teniendo sobre el mercado mexicano, se puede decir que en los últimos dos años del horizonte temporal elegido, 2007-2008, se han aumentado el número de eventos extremos en todos los activos seleccionados, además, la volatilidad diaria sufrió un incremento porcentual significativamente alto y los rendimientos medios cada vez han sido más pequeños.

Por otro lado, los porcentajes de pérdida inesperada se han incrementado considerablemente, haciendo que el valor de la cartera se disminuya significativamente. En el periodo 2002-2008, las pérdidas porcentuales son mayores que las correspondientes a los dos subperiodos, posiblemente porque la longitud de la muestra y las ocasiones en que se supera al umbral VaR pueden estar afectando considerablemente los resultados, además de sufrir una influencia negativa de los eventos extremos del segundo subperiodo, por lo tanto, el modelo con el horizonte temporal más largo es menos flexible tanto en la cartera equiponderada como autoponderada.

También se ha podido observar que los porcentajes de pérdidas inesperadas son significativamente altos, esto quiere decir que las pérdidas reales han superado, en una cuantía muy elevada, las pérdidas que se esperaban tras la valoración

de tipo VaR. Se destaca que a medida que se es menos estricto con el nivel de confianza, las pérdidas inesperadas sufren un importante incremento.

Por último, se observa que las pérdidas inesperadas obtenidas de manera tradicional son menores con respecto a las valoraciones a través de la metodología de cópulas financieras, muy probablemente porque las valoraciones tradicionales están sobrestimando las pérdidas.

Capítulo 3

Valoración del riesgo a través de cópulas, para estimar el riesgo del IPC/Mexbol en comparación con otros índices bursátiles

3.1. Introducción

Con el objetivo de valorar el riesgo del índice principal de la bolsa mexicana de valores, Mexbol, frente al Dow Jones como índice representativo del mercado americano y frente al Ibex-35 como índice seleccionado del mercado europeo por su influencia en el mercado mexicano, se aplicarán metodologías de valoración de los riesgos mediante cópulas financieras como herramienta de medición de la dependencia entre los índices, porque se considera que estos pueden tener una relación significativa y muy relevante.

En efecto, la inestabilidad que existe hoy en día en los mercados desarrollados afecta directamente al comportamiento de los mercados emergentes, debido a la dependencia económica y financiera que estos presentan. Además, en el caso específico del mercado financiero mexicano, se observa un comportamiento asimétrico y dependiente, en gran medida, de los acontecimientos que se dan tanto en Estados Unidos como en España.

También se considera muy importante controlar y gestionar de la mejor manera posible los casos extraños o extremos que se presentan en las series de rendimientos financieros. Los valores extremos provienen de eventos raros y estos muestran como la información inesperada o sucesos anómalos pueden causar una subida o bajada de los rendimientos, ocasionando una mayor variabilidad que pueda considerarse como impulso o en su defecto que esa misma información conduzca a un cambio de nivel de toda la serie de rendimientos.

Los casos extremos, son en gran medida los responsables de los grandes movimientos y del incremento de la volatilidad y la incertidumbre en los mercados, así que deben tomarse en consideración cuando se pretende hacer una valoración de riesgos. Cuando una serie de rendimientos financieros muestra comportamientos inusuales es de gran interés, ya que, en la mayoría de los casos, estos eventos son lo que ocasionan las pérdidas y/o ganancias más significativas, amenazando la

estabilidad del mercado financiero donde se cotiza y a su vez, puede tener una fuerte repercusión en el sistema financiero global.

Por lo tanto, se ha decidido destinar este capítulo a medir el riesgo y analizar el funcionamiento de estas metodologías aplicadas al Mexbol y observar su comportamiento frente a los dos índices seleccionados de forma separada, principalmente para tratar de cuantificar el impacto que está teniendo la crisis actual en los mercados elegidos, donde su efecto se medirá a través de las pérdidas inesperadas realizadas. Para ello, se utilizan las series temporales de los tres índices, las cuales inician en 2002 y terminan en 2008. A su vez, éstas se dividen en dos subperiodos, con el fin de estimar, con especial énfasis, dos periodos económicamente diferentes, resaltando el periodo en que dió inicio la actual crisis. Y así, analizar el impacto y las repercusiones que los problemas financieros han traído consigo, principalmente en el mercado financiero mexicano.

Así pues, a lo largo de este capítulo se observan y analizan los efectos resultantes de la valoración de los riesgos mediante cópulas financieras para cada uno de los subperiodos elegidos, realizando un análisis comparativo con las valoraciones obtenidas para el periodo temporal completo. Con los índices seleccionados se han supuesto dos situaciones independientes, donde cada una representa la relación del Mexbol frente a uno de los otros dos índices objeto de estudio. Adicionalmente, se hará una comparativa de las valoraciones, en cada uno de los casos, en los diferentes periodos temporales y estos, a su vez, se contrastan con resultados obtenidos de forma empírica.

El resto del capítulo está estructurado como se expone a continuación. En el apartado siguiente se presenta la descripción y análisis de los datos utilizados; en el tercer apartado se llevará a cabo la descripción de la metodología empleada para realizar las estimaciones; en el cuarto apartado se valora el riesgo del Mexbol mediante simulación histórica; en el quinto apartado se valora el riesgo de la relación Mexbol e Ibex-35; en el sexto apartado se expone la valoración de los

riesgos de la relación Mexbol y Dow Jones; el séptimo apartado se destina a extensiones, con el fin ofrecer una alternativa a la metodología propuesta; y en el último apartado se exponen las conclusiones a las que se ha llegado.

3.2. Descripción y análisis de los datos

En este apartado se quieren observar y analizar tres índices bursátiles. Específicamente, se trata del principal índice selectivo de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, Mexbol, frente a dos índices selectivos muy representativos: uno es el índice bursátil español, Ibex-35¹, y el otro es el índice industrial estadounidense, Dow Jones².

Se destaca que para este capítulo, la elección de los índices se hizo con el objetivo de comparar el Mexbol con un índice europeo y con uno americano, así que se escogieron los que se consideraron más representativos y principales en sus respectivos países de origen.

Respecto a las ponderaciones, a los índices se les otorgará 50 % de ponderación, ya que se realiza el análisis comparativo del Mexbol con los dos índices de forma independiente, es decir, se lleva a cabo la medición del riesgo de forma bivalente, ya que se suponen dos casos formados por el Mexbol y uno de los otros dos índices. La unidad de tiempo asociada a las estimaciones será de un día, es decir, se han utilizado datos diarios excluyendo fines de semana y días festivos.

Las series temporales de los tres índices bursátiles contienen información de los valores diarios de cierre; el periodo temporal completo va desde el 2 de enero de 2002 hasta el 31 de diciembre de 2008, por lo que cada serie cuenta con un total de 1806 observaciones. El primer subperiodo elegido inicia el día 2 de enero

¹El índice Ibex-35 es el principal índice de referencia de la bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está formado por las 35 empresas que cotizan en el Sistema Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro Bolsas Españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia).

²El *Dow Jones Industrial Average*, refleja el comportamiento del precio de acciones de las 30 compañías industriales más importantes y reconocidas de Estados Unidos.

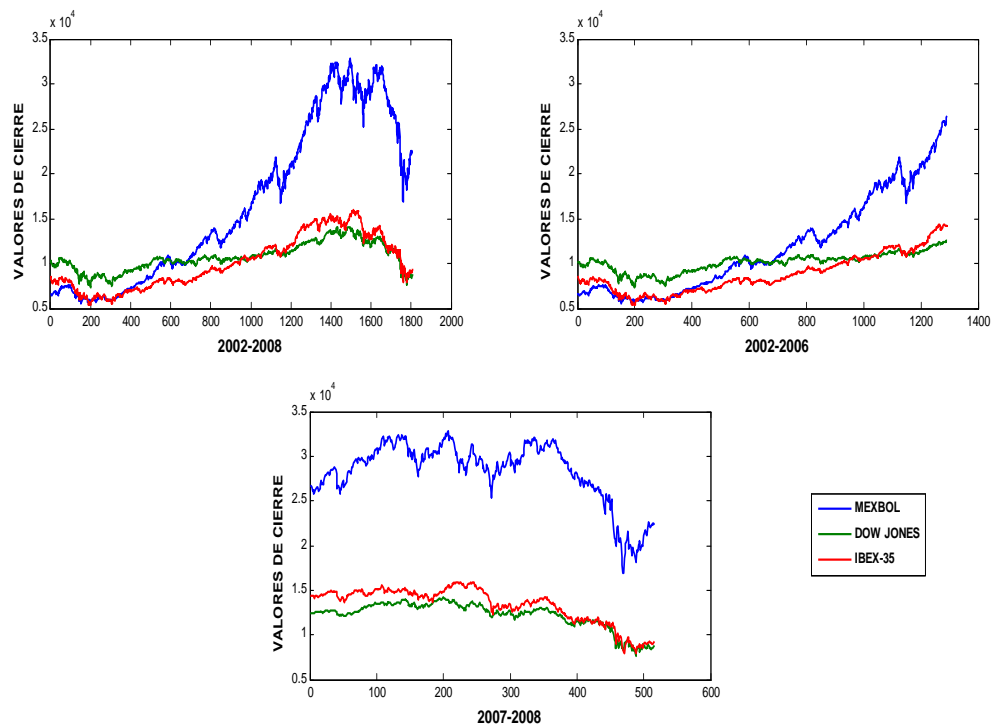
3.2 Descripción y análisis de los datos

de 2002 y finaliza el 29 de diciembre de 2006, mientras que el segundo periodo va desde el 2 de enero de 2007 hasta el 31 de diciembre de 2008, teniendo un total de 1290 y 516 observaciones en cada subperiodo respectivamente.

En la muestra se encontraron observaciones perdidas, las cuales pueden deberse a que entre países los días de asueto y las fiestas nacionales no corresponden al mismo día, además de que, en el caso del mercado europeo, el cambio horario puede afectar. Entonces, para homogeneizar la muestra total y no perder información, se han alineado las series obteniendo la media de los datos temporales adyacentes y con ello continuar con la tendencia de la muestra.

Por último es importante señalar que todos los gráficos y tablas correspondientes a este capítulo son de elaboración propia a partir de las cotizaciones oficiales. A continuación se muestra la representación gráfica de los valores diarios de cierre de los tres índices bursátiles.

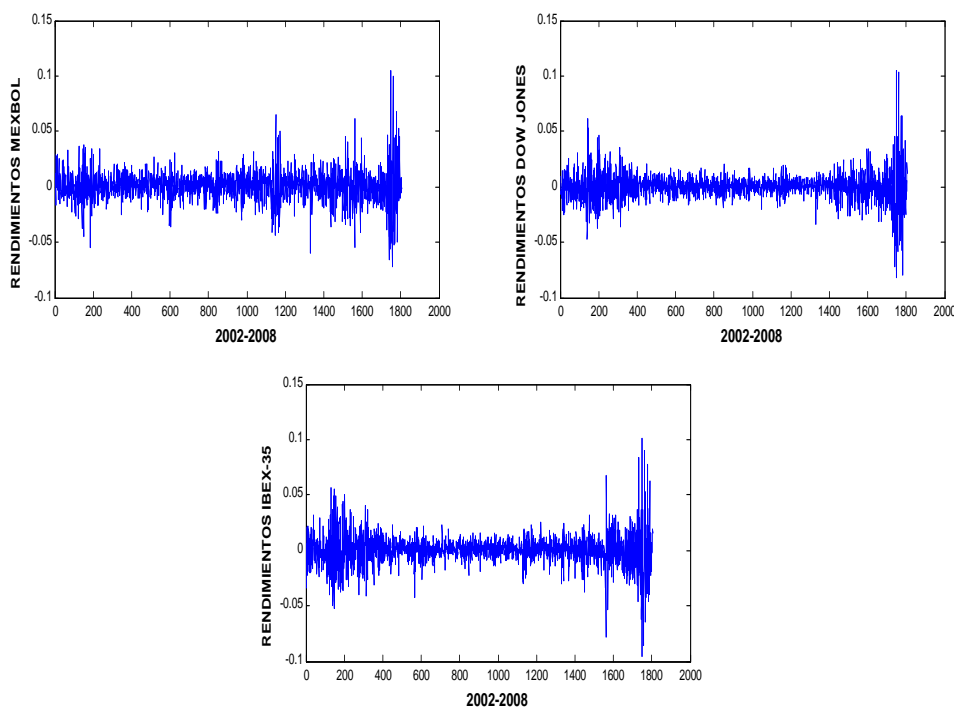
Gráfico 3.1: Valores diarios de cierre de los índices



Como se observa en el gráfico 3.1, existe una clara tendencia al alza en el periodo 2002-2006, mientras que en el periodo 2007-2008, se ve reflejada la tendencia a la baja de los tres índices. Las subidas y las caídas prolongadas, se pueden advertir de manera más intuitiva y clara en el periodo completo, 2002-2008.

A partir de las series temporales de los valores diarios de cierre de cada índice, se obtienen los rendimientos logarítmicos, con el objetivo de suavizar las series y centrarlas en media, observar la variabilidad de los rendimientos de cada uno de los índices y, además, porque en las series de rendimientos las pérdidas y ganancias se relativizan al periodo anterior del índice bursátil, siendo estos rendimientos el objeto de análisis de este capítulo. Los rendimientos logarítmicos se han obtenido de la forma habitual y equivalentemente al capítulo anterior, y la siguiente es su representación gráfica.

Gráfico 3.2: Rendimientos de los índices bursátiles



3.2 Descripción y análisis de los datos

Como se puede observar en el gráfico 3.2, tanto el Mexbol como el Dow Jones y el Ibex-35, presentan variabilidad a lo largo de toda la muestra. Sin embargo, en las últimas observaciones se advierte un aumento significativo de la volatilidad en los tres casos, lo cual era de esperarse, ya que estos últimos rendimientos se han visto fuertemente afectados por la inestabilidad que trajo consigo la crisis, la cual inició en 2007 y continúa en la actualidad. Para realizar una descripción más exhaustiva de los rendimientos, se presenta, en formato tabla, el resumen descriptivo de los rendimientos de cada índice, tanto para el periodo completo como para los subperiodos. Mediante el estadístico de Jarque-Bera, se contrasta si los rendimientos de los índices bursátiles en los tres periodos cumplen la hipótesis nula de normalidad.

Tabla 3.1. Estadística descriptiva de los rendimientos

PERIODO TEMPORAL 2002-2008			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX-35
MEDIA	0.0007	-0.0001	0.0001
MEDIANA	0.0012	0.0003	0.0008
MÁXIMO	0.1044	0.1051	0.1012
MÍNIMO	-0.0727	-0.0820	-0.0959
VOLATILIDAD	0.0138	0.0126	0.0142
ASIMETRÍA	0.1631	0.1478	-0.0184
CURTOSIS	9.0993	13.8537	10.5128
JARQUE-BERA	2805.88	8866.40	4244.97
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010
PERIODO TEMPORAL 2002-2006			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX
MEDIA	0.0011	0.0002	0.0004
MEDIANA	0.0014	0.0003	0.0009
MÁXIMO	0.0651	0.0615	0.0569
MÍNIMO	-0.0544	-0.0475	-0.0520
VOLATILIDAD	0.0115	0.0097	0.0117
ASIMETRÍA	-0.0534	0.3762	0.0206
CURTOSIS	5.4670	6.9801	6.1178
JARQUE-BERA	327.49	881.20	522.18
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010
PERIODO TEMPORAL 2007-2008			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX
MEDIA	-0.0003	-0.0007	-0.0008
MEDIANA	0.0006	0.0004	0.0000
MÁXIMO	0.1044	0.1051	0.1012
MÍNIMO	-0.0727	-0.0820	-0.0959
VOLATILIDAD	0.0184	0.0179	0.0190
ASIMETRÍA	0.3794	0.1013	0.0491
CURTOSIS	8.1699	10.4621	9.2993
JARQUE-BERA	585.90	1195.74	851.69
P-VALOR	0.0010	0.0010	0.0010

Según los resultados de la tabla 3.1, los índices muestran unos rendimientos medios muy pequeños en los tres periodos, y sólo en el periodo 2002-2006 el rendimiento medio de los tres índices es positivo.

Los índices presentan, en los tres periodos, una volatilidad significativamente alta, sin embargo, en el periodo 2007-2008 se advierte un aumento considerable, muy probablemente porque es el periodo en el que la variabilidad de las observaciones se ha visto incrementada.

Respecto a la asimetría, los índices muestran sesgo positivo a la derecha, con excepción del Ibex-35, que en el periodo completo presenta sesgo negativo a la izquierda, al igual que el Mexbol en el primer subperiodo, 2002-2006.

En cuanto a la curtosis, como es de esperarse cuando se utilizan rendimientos financieros, los índices poseen una distribución leptocúrtica, es decir, presentan colas más pesadas respecto a la distribución normal, ya que en la tabla 3.1 se observa que los coeficientes de curtosis son mayores que tres. El Dow Jones muestra una curtosis más elevada en los tres periodos en comparación con los otros dos índices, lo cual evidencia que tiene colas más pesadas y por lo tanto puede tener más valores extremos que el resto, esto puede deberse a que es en Estados Unidos donde se ha detonado la actual crisis financiera e hipotecaria.

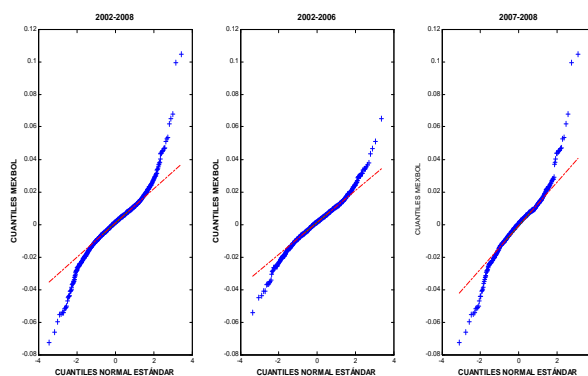
Tras las realización del contraste de Jarque-Bera, en los tres índices y en los tres periodos se rechaza la hipótesis nula de normalidad, es decir, los rendimientos de los índices no están normalmente distribuidos en ninguno de los periodos.

A continuación se muestra un análisis gráfico de los rendimientos de cada uno de los índices bursátiles individualmente, para que sea posible corroborar la existencia de colas pesadas en cada uno de los periodos que se están analizando.

3.2.1. Mexbol

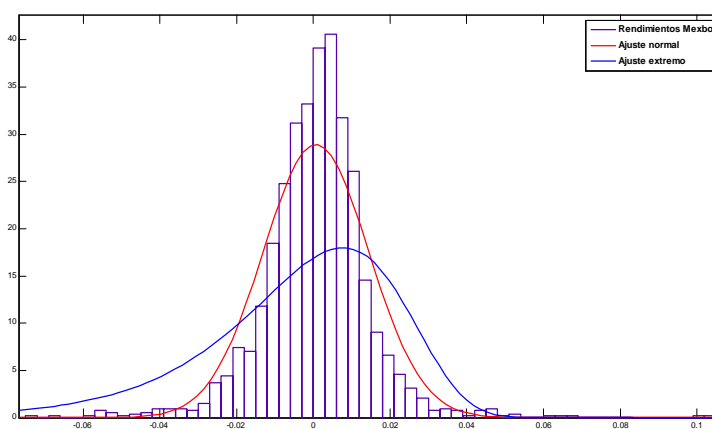
En los siguientes gráficos se muestran los QQ-Plots y los histogramas del índice bursátil mexicano, Mexbol, ajustados a las distribuciones normal y de valor extremo, ya que la primera se enfoca en el centro, y la segunda en las colas de la distribución, fundamentalmente en la izquierda.

Gráfico 3.3: QQ-Plots Mexbol



Es posible observar en el gráfico 3.3 que el índice Mexbol presenta colas más anchas respecto a la distribución normal, sobre todo en el periodo 2007-2008, y por lo tanto, esta serie de rendimientos no se ajusta a dicha distribución.

Gráfico 3.4: Periodo completo, 2002-2008



En los gráficos 3.4, 3.5 y 3.6 se puede observar que los rendimientos del índice Mexbol, se ajustan de manera más adecuada a la distribución normal. Sin embargo, en la cola izquierda se advierte que ésta infravalora las pérdidas en las que se puede incurrir, ya que en este caso, la cola izquierda representa las pérdidas. Por lo tanto, la distribución de valor extremo recoge mejor esos eventos inusuales, y aunque sobrevalora las posibles pérdidas, esta opción se puede considerar como más adecuada sobre todo en el segundo subperiodo, 2007-2008.

Gráfico 3.5: Primer subperiodo, 2002-2006

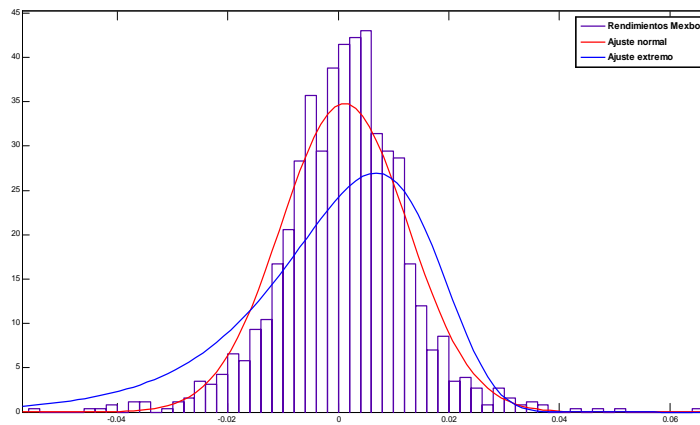
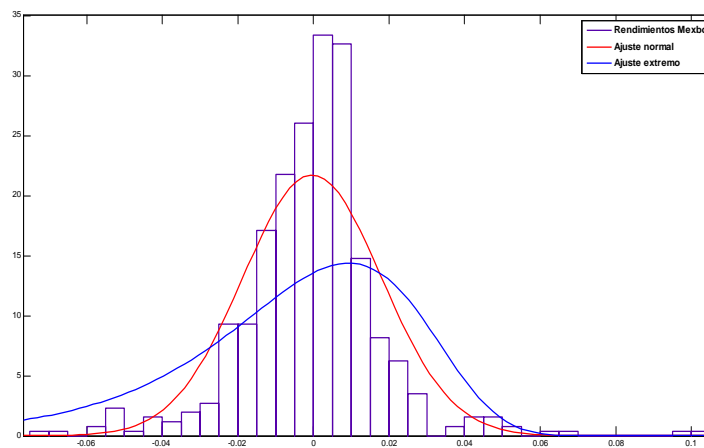


Gráfico 3.6: Segundo Subperiodo, 2007-2008

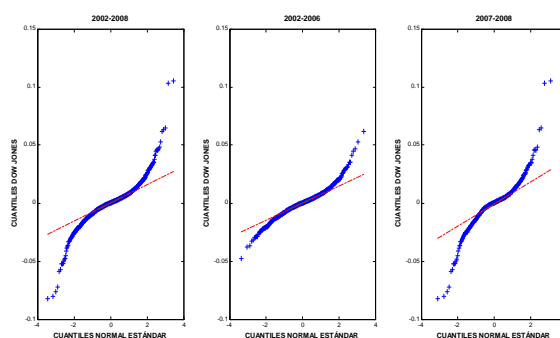


3.2.2. Dow Jones

En los siguientes gráficos se muestran los QQ-Plots y los histogramas del índice bursátil estadounidense, Dow Jones, ajustados a las distribuciones normal y de valor extremo, ya que la primera se enfoca en el centro, y la segunda en las colas de la distribución, fundamentalmente en la izquierda.

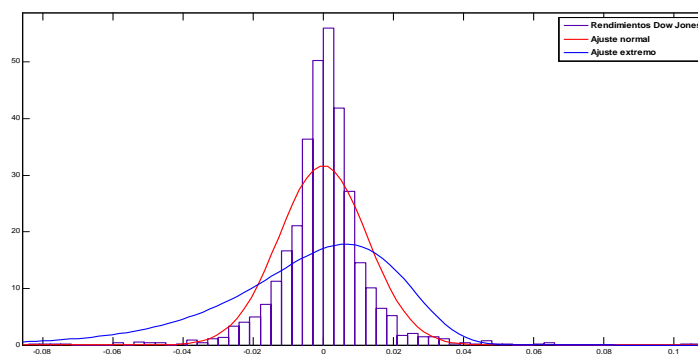
3.2 Descripción y análisis de los datos

Gráfico 3.7: QQ-Plots Dow Jones



En el índice Dow Jones se observa que también presenta colas anchas, y por lo tanto, esta serie tampoco se ajusta a una distribución normal, además se confirma que puede estar en presencia de más valores extremos respecto a los otros índices, sobre todo en el periodo completo, 2002-2008, y en el último subperiodo, 2007-2008.

Gráfico 3.8: Periodo completo, 2002-2008



Respecto al índice Dow Jones, la distribución normal ajusta los rendimientos de la serie de manera más oportuna que la otra distribución. Se puede observar en los gráficos 3.8, 3.9 y 3.10, que las colas de la distribución se adaptan bien a las dos distribuciones, aunque la distribución de valor extremo sobrevalora la cola izquierda mientras que la normal la infravalora. Por lo tanto, la distribución de valor extremo aproxima de mejor manera las posibles pérdidas reflejadas en la cola izquierda, aunque de forma sobrevalorada.

Gráfico 3.9: Primer subperiodo, 2002-2006

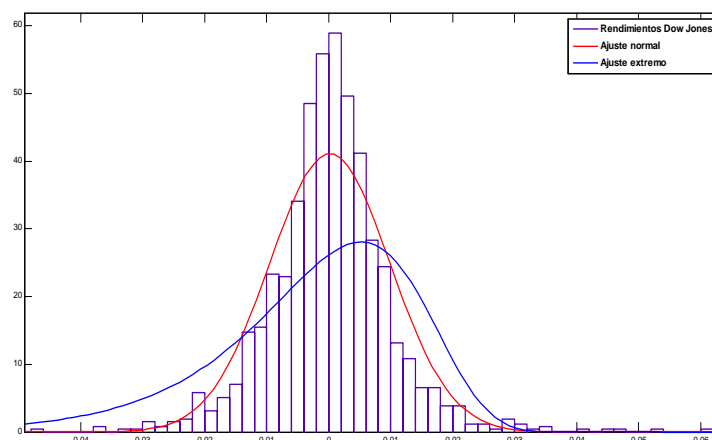
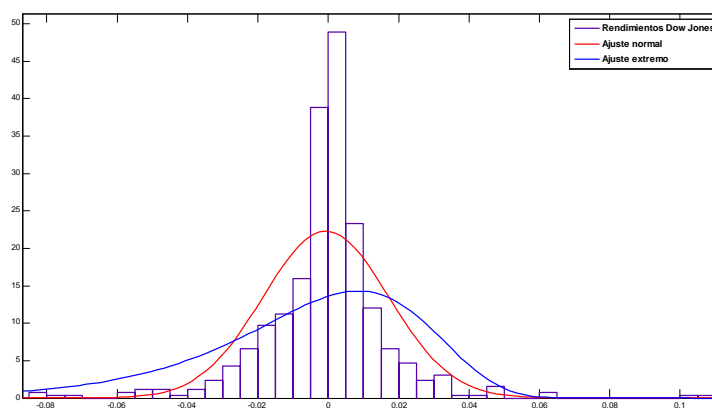


Gráfico 3.10: Segundo subperiodo, 2007-2008

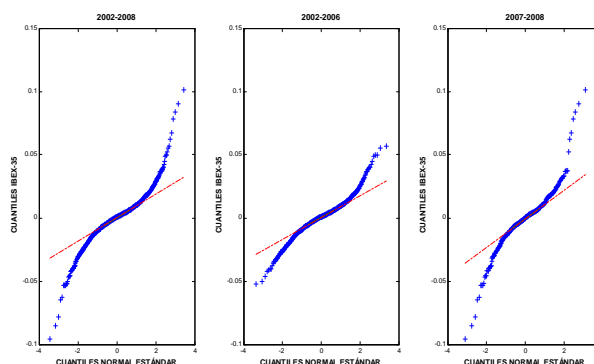


3.2.3. Ibex-35

En los siguientes gráficos se muestran los QQ-Plots y los histogramas del índice bursátil español, Ibex-35, ajustados a las distribuciones normal y de valor extremo, ya que, al igual que con los índices anteriores, la primera se enfoca en el centro, y la segunda en las colas de la distribución, fundamentalmente en la izquierda.

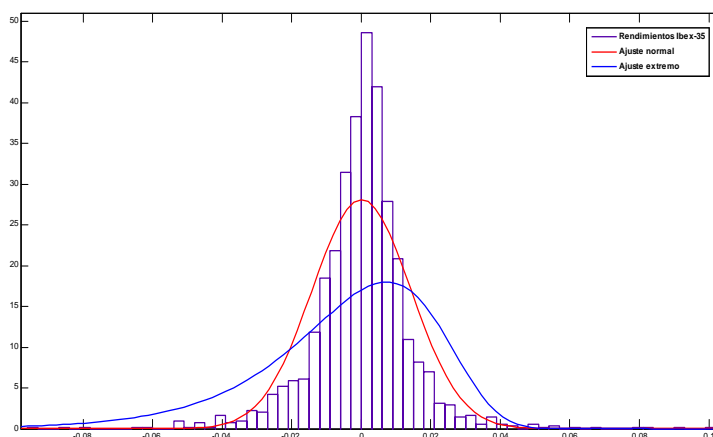
3.2 Descripción y análisis de los datos

Gráfico 3.11: QQ-Plots Ibex-35



Por último, el Ibex-35 muestra colas anchas, tal y como se observa en el gráfico 3.11, así que no se ajusta a una distribución normal, especialmente en el periodo completo y en el subperiodo 2007-2008.

Gráfico 3.12: Periodo completo, 2002-2008



Por último, se observa, como en los dos índices anteriores, que la serie de rendimientos correspondientes al Ibex-35 se adecua mejor a la distribución normal. Sin embargo, y al igual que con los rendimientos del Mexbol, esta distribución infravalora las posibles pérdidas registradas en la cola izquierda, por lo que una buena opción es la distribución de valor extremo ya que incluye estas pérdidas aunque de forma sobrevalorada.

Gráfico 3.13: Primer subperiodo, 2002-2006

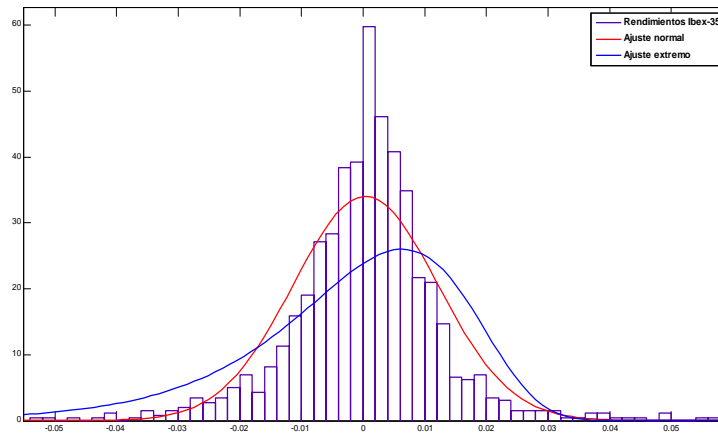
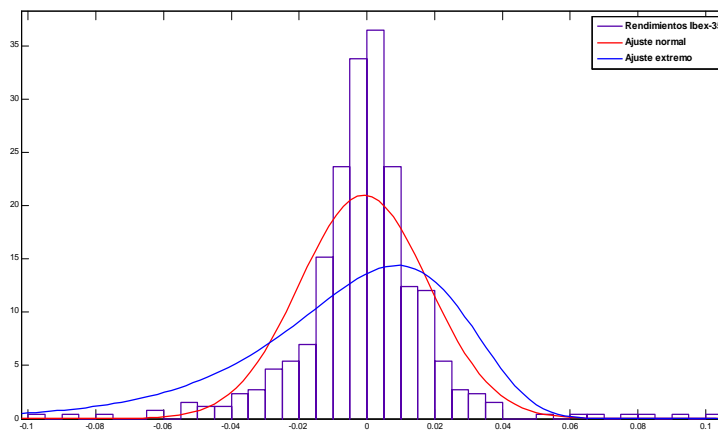


Gráfico 3.14: Segundo subperiodo, 2007-2008



Después de haber analizado los QQ-plots y los histogramas de manera individual, es necesario conocer la correlación lineal entre los índices, debido a que es muy probable que exista correlación imperfecta entre ellos. Por lo que se ha construido la matriz de correlaciones y, del mismo modo que en el capítulo anterior, se pretende plasmar el efecto de correlación histórica en el proceso de estimación. El cálculo de la matriz de correlaciones es similar al mostrado anteriormente, y ésta se muestra a continuación.

Tabla 3.2. Matriz de correlaciones de los índices

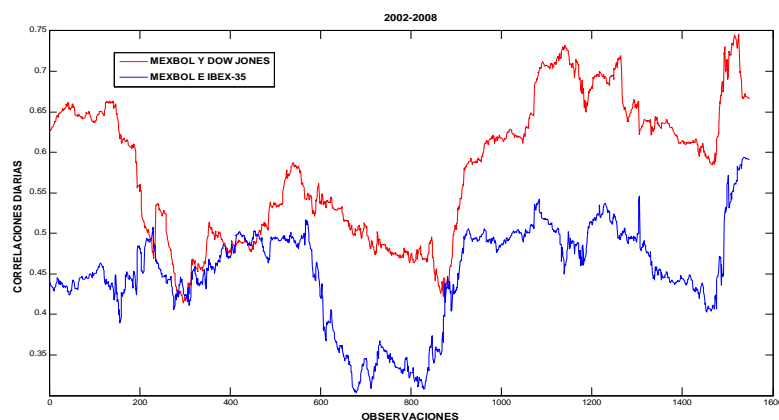
PERIODO TEMPORAL 2002-2008			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX
MEXBOL	1	0.59909	0.49505
DOW JONES	0.59909	1	0.44878
IBEX	0.49505	0.44878	1
PERIODO TEMPORAL 2002-2006			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX
MEXBOL	1	0.53563	0.41952
DOW JONES	0.53563	1	0.44703
IBEX	0.41952	0.44703	1
PERIODO TEMPORAL 2007-2008			
	MEXBOL	DOW JONES	IBEX
MEXBOL	1	0.65497	0.56602
DOW JONES	0.65497	1	0.45131
IBEX	0.56602	0.45131	1

Al analizar las matrices de correlaciones, se advierte que el Mexbol y el Dow Jones están más correlacionados que el Mexbol y el Ibex-35, principalmente en el periodo 2007-2008 donde tienen una relación del 65,50 %. Esto puede deberse a la enorme dependencia económica, laboral y financiera que el mercado mexicano mantiene con el mercado estadounidense y eso puede traer consigo que, en épocas de inestabilidad, fuertes fluctuaciones o crisis, ambos mercados se comporten de forma similar.

Como se puede observar en la tabla 3.2, los tres índices se encuentran altamente correlacionados de manera imperfecta, sobre todo en el periodo de inicio de la actual crisis financiera, así que la dependencia debe tomarse en consideración cuando se van a realizar las estimaciones, ya que ésta juega un papel fundamental en cuanto a la valoración de los riesgos financieros, debido a que acontecimientos positivos y/o negativos en el mercado español o en el estadounidense afectan directamente al comportamiento del mercado mexicano.

Por otro lado, se ha considerado indispensable e intuitivo mostrar gráficos de tipo *Rolling Window* para observar la evolución de las correlaciones diarias de los tres índices a lo largo del tiempo.

Gráfico 3.15: *Rolling Window* de las correlaciones diarias



Se observa que con el tiempo, el índice Mexbol aumenta su relación con ambos índices, tal y como se esperaba, el Mexbol y el Dow Jones tienen mayor correlación a lo largo de toda la muestra. Sin embargo, se observa que la dependencia que muestra el Mexbol respecto a los dos índices sufre un incremento en las últimas observaciones y además, es posible decir que a través del tiempo mantienen un grado de correlación significativamente alto. Por lo tanto, en el momento de la estimación es muy relevante tomar en cuenta la estructura de dependencia de forma adecuada para no subestimar los riesgos en que se puede incurrir.

3.3. Descripción de la metodología

Es necesario conocer que las metodologías que se describen en este apartado se aplicarán a dos situaciones equiponderadas y formadas por dos índices bursátiles. El primer caso de estudio está formado por el índice Mexbol y el IBEX-35, mientras que el segundo caso lo conforman el Mexbol y el Dow Jones, por lo que la aplicación de las metodologías se llevará a cabo de forma bivalente.

En cuanto al periodo temporal, se realizan las estimaciones para el periodo completo, 2002-2008, y para los dos subperiodos seleccionados, 2002-2006 y 2007-2008. Con esta división de la muestra se pretende cuantificar el impacto financiero

3.3 Descripción de la metodología

de la crisis para cada una de las carteras, a través de sus pérdidas inesperadas realizadas.

En primer lugar, se valora el riesgo del índice Mexbol con la metodología tradicional, es decir, se valora el riesgo del principal índice del mercado financiero mexicano mediante simulación histórica.

En el presente capítulo se parte del supuesto de que las distribuciones marginales son normales, uniformes o de valor extremo para modelizar el comportamiento de los rendimientos de los índices, este supuesto se contrasta con distribuciones marginales empíricas, ya que es muy probable que los índices bursátiles no se ajusten de forma exacta a cualquier distribución específica. Además, se elaboran los *backtesting* pertinentes, se obtienen los errores cuadráticos medios y se contabilizan las ocasiones en que la metodología falla, con el fin de tener varios criterios para la selección de las valoraciones de los riesgos más adecuadas.

El ajuste de los rendimientos a la distribución uniforme se utiliza porque ésta asigna una misma probabilidad de ocurrencia a todas las observaciones, por lo que todos los eventos son tratados de la misma forma. El ajuste a la distribución normal³ se emplea porque asigna más peso en el centro de la distribución, dejando fuera casos extremos. El ajuste a la distribución de valor extremo se utiliza porque al contrario que la normal, otorga mayor peso a los eventos situados en las colas de la distribución, especialmente a la izquierda.

Es habitual encontrar investigaciones en las que ajustan los rendimientos a través de la distribución t-Student, ya que es una distribución que se destaca por dar peso a los eventos que ocurren en el centro sin dejar fuera los eventos que suceden en las colas de la distribución. Sin embargo, las series de datos que se utilizan en este capítulo no se ajustan de forma adecuada a esa distribución. Aún cuando se intentó aproximarla por diferentes métodos, tales como máxima

³Aunque en la descripción de los datos se ha contrastado que los rendimientos no son normales, se utiliza porque este ajuste será necesario en las extensiones.

verosimilitud, cuasi máxima verosimilitud y, mediante el contraste chi cuadrado, se obtuvo un ajuste incorrecto o en su defecto grados de libertad muy elevados, lo cual se aproximaría a una distribución normal, así que por estas razones, el ajuste t-Student no se incluyó en esta investigación. Esto puede ser ocasionado por los valores extremos que presentan las series, las irregularidades o asimetrías propias de los países objeto de análisis.

Después de suponer que los rendimientos de los índices se ajustan a una distribución específica, se estima el modelo de valoración de riesgos a través de cópulas, primero se lleva a cabo la aplicación para la relación Mexbol e Ibex-35 aplicando cópulas elípticas y arquimedianas, ya que, como se ha venido diciendo a lo largo de la investigación, tomar en cuenta la dependencia a la hora de medir el riesgo es de vital importancia y puede ayudar a identificar mejor los riesgos en los que se puede incurrir, traducándose en una mejor cobertura. Del mismo modo se aplicará la metodología a la relación Mexbol y Dow Jones. También se valorará el riesgo omitiendo el uso de las cópulas, para comprobar si, en estos casos, la valoración a través de la metodología de cópulas logra capturar mejor la exposición al riesgo, además de saber si ésta forma de estimación realmente arroja beneficios considerables respecto a las metodologías tradicionales.

Para obtener la valoración en riesgo más precisa, se contrastan los resultados con los obtenidos de forma empírica, con los respectivos *backtesting* y eligiendo el error cuadrático medio mínimo, corroborando así que se está eligiendo la forma de estimación que mejor valora los riesgos. El nivel de confianza asociado a los cálculos se ha establecido en 99 %, aunque también se han considerado el 97,5 % y el 95 %. A continuación se resume el procedimiento empleado.

1. Se ajustan los rendimientos de los índices a las distribuciones determinadas: normal, uniforme, valor extremo y empírica.
2. Se obtienen las distribuciones marginales univariantes a partir de los rendimientos previamente ajustados.

3.3 Descripción de la metodología

3. Se obtienen los parámetros necesarios para cada cópula, principalmente para las arquimedianas, ya que dichos parámetros miden el grado de dependencia.

4. Se realizan las simulaciones de las distribuciones marginales a partir de las marginales univariantes anteriores y de los parámetros de las cópulas elegidas, es decir, se simulan variables que tengan como distribución conjunta la cópula estimada anteriormente.

5. Mediante la simulación de Montecarlo, se simulan rendimientos a través de las distribuciones marginales anteriormente simuladas y la inversa de la función de distribución que se supuso que siguen los rendimientos.

6. Se ponderan los rendimientos simulados, se asume que cada caso objeto de estudio será equiponderado, siendo la ponderación para cada índice de 50 %.

7. Se estiman las valoraciones del riesgo con un nivel de confianza de 99 %, 97,5 % y 95 %.

8. Se contrastan los resultados con los obtenidos de forma empírica, los respectivos *backtesting* y con los errores cuadráticos medios mínimos.

9. Se elige la valoración más adecuada teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto 8.

La aplicación de las cópulas tanto elípticas como arquimedianas, se hará en su forma bivalente, ya que cada caso sólo está compuesto de dos índices. Cabe señalar que en el capítulo destinado a conceptos, se han definido los diferentes tipos de cópulas en su forma multivalente, por lo que se ha considerado importante observar su forma bivalente, ya que es la que se utiliza en este capítulo.

La cópula Gaussiana viene determinada por la siguiente expresión:

$$C_{\rho}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} f_{\rho}(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (3.1)$$

donde f_{ρ} representa la función de densidad normal bivalente con coeficiente de correlación ρ ; Φ denota la función de distribución normal.

La t-cópula bivalente toma la siguiente forma:

$$C_{\rho v}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{v_1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{v_2}^{-1}(v)} f_{\rho v}(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (3.2)$$

siendo t la función de distribución t-Student y v son los grados de libertad.

Respecto a las cópulas arquimedianas, se han elegido la cópula Gumbel, Frank y Clayton para realizar las valoraciones de los riesgos. Así pues se exponen sus respectivas formas bivalentes,

Cópula Gumbel

$$C(u, v; \theta) = \exp \left\{ - \left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \quad (3.3)$$

Cópula Frank

$$C(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right] \quad (3.4)$$

Cópula Clayton

$$C(u, v, \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (3.5)$$

Cuando se realizó el ajuste de los rendimientos a una distribución normal se consideraron varianzas homocedásticas, y con esto se puede incurrir en errores de estimación y especificación del modelo, por el hecho de que los rendimientos financieros, generalmente, tienen varianzas heterocedásticas. Por ello, en el apartado de extrensiones, se llevará acabo la aplicación de un modelo tipo GARCH a las valoraciones más precisas obtenidas hasta el momento, con el fin de contrastar ambos resultados y así observar cual es la aproximación que valora el riesgo en ambos casos de forma más adecuada.

3.4. Valoración tradicional del Mexbol

En este apartado, la valoración de los riesgos se realiza con la metodología VaR mediante el método de simulación histórica. Esta valoración se aplica al índice bursátil Mexbol, ya que éste es el principal motivo de análisis. Las valoraciones se realizan tanto para el periodo completo como para los dos subperiodos. A continuación, se presentan los gráficos correspondientes a las valoraciones tradicionales para tres niveles de confianza, para observar como varían las pérdidas esperadas en función del nivel.

Gráfico 3.16: *Backtesting* de las valoraciones del Mexbol

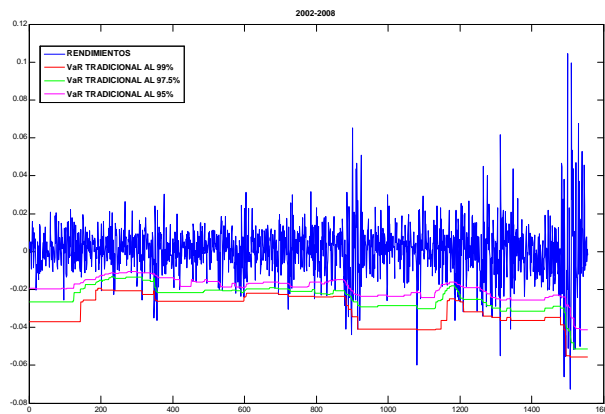


Gráfico 3.17: *Backtesting* de las valoraciones del Mexbol

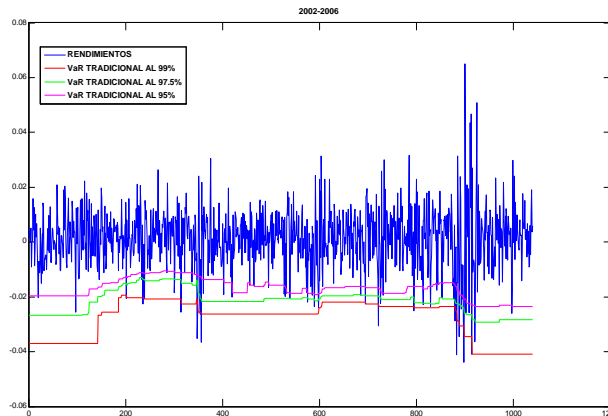
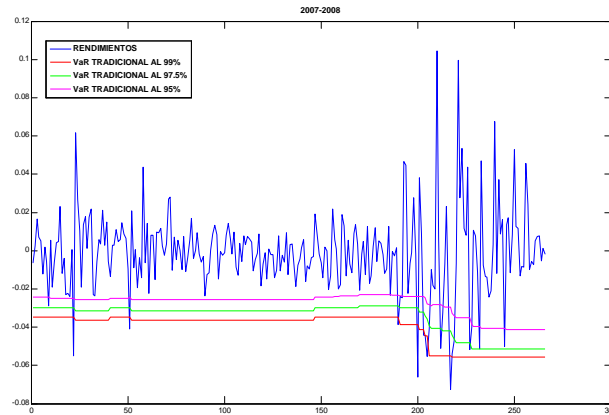


Gráfico 3.18: *Backtesting* de las valoraciones del Mexbol



En los gráficos 3.16, 3.17 y 3.18 se puede observar que las valoraciones del Mexbol, tanto en el periodo completo como en los subperiodos, son constantes en determinados momentos. Las ocasiones en que se ha excedido el umbral VaR con un nivel de confianza de 99 %, son 29, 16 y 7 para cada periodo respectivamente. Se advierte que a medida que se es menos restrictivo con el nivel de confianza, las ocasiones en que se superan las pérdidas esperadas, VaR, aumentan considerablemente.

Para cuantificar las pérdidas inesperadas, se ha dividido la muestra en dos partes, la primera parte se utiliza para calcular los VaR diarios correspondientes a la segunda parte de la muestra. Se han considerado como pérdidas inesperadas aquellos rendimientos reales inferiores a umbral VaR. Las pérdidas inesperadas se han definido como la diferencia entre el rendimiento real y el VaR correspondiente y la acumulación de pérdidas se obtuvo de la siguiente forma

$$Pa = 100 \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \quad (3.6)$$

donde Pa son las pérdidas acumuladas, P_i son las pérdidas inesperadas individuales y n son el número de ocasiones en que se ha superado el umbral VaR. La cuantificación de las pérdidas inesperadas del índice Mexbol, se realizaron con

3.5 Relación Mexbol e Ibex-35

tres niveles de confianza diferentes, para así comprobar como varían los resultados en función del nivel y del periodo temporal.

Tabla 3.3 Mexbol: acumulación de pérdidas inesperadas

Pérdida		Pérdida		Pérdida	
Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes
99%		97.5%		95%	
2002-2008					
20.06%	29 (1.86%)	39.12%	57 (3.66%)	60.17%	96 (6.17%)
2002-2006					
9.03%	16 (1.54%)	19.10%	30 (2.88%)	33.08%	56 (5.38%)
2007-2008					
8.63%	7 (2.63%)	16.74%	13 (4.89%)	28.65%	21 (7.89%)

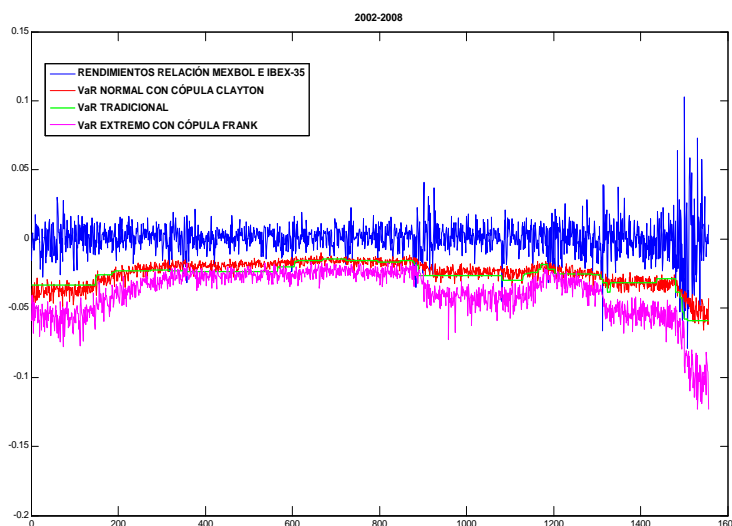
Como se puede observar en la tabla 3.3, las mayores pérdidas del Mexbol se concentran en el periodo temporal 2002-2008, además es el periodo donde el umbral de pérdida esperada, VaR, ha sido superado más veces por los rendimientos reales del Mexbol, esto puede deberse a que es el periodo que tiene más observaciones y por lo tanto puede ser menos flexible. Sin embargo, el periodo más corto, 2007-2008, muestra un nivel alto de pérdidas inesperadas, ya que aunque es el periodo más corto, los excedentes generan más pérdida proporcionalmente. Con lo que se puede decir que no sólo la longitud de la muestra afecta, sino que también los eventos extremos que están incluidos en el segundo subperiodo. Por último, a medida que se disminuye el nivel de confianza, las pérdidas inesperadas y los excedentes aumentan considerablemente, sobre todo con un nivel de confianza de 95 %.

3.5. Relación Mexbol e Ibex-35

Para realizar las valoraciones de los riesgos mediante cópulas, se ajustaron los rendimientos del periodo completo y de los dos subperiodos a las distribuciones elegidas, para así llevar a cabo el proceso de selección, tanto de la distribución más acertada, como de la cópula más precisa.

Para elegir la valoración de los riesgos más adecuada, se han comparado todos los resultados obtenidos con las valoraciones de forma empírica, con los respectivos *backtesting* y con el error cuadrático medio mínimo, para así poder contar con varios criterios que ayuden a efectuar la selección de la mejor manera. A continuación se exponen los *backtesting* que corresponden a las valoraciones a través de simulación histórica, a las valoraciones normales con la cópula Clayton, por ser la que se enfoca especialmente en la cola izquierda y a las valoraciones extremas con la cópula Frank, que es la que arroja, en este caso, un error cuadrático medio menor.

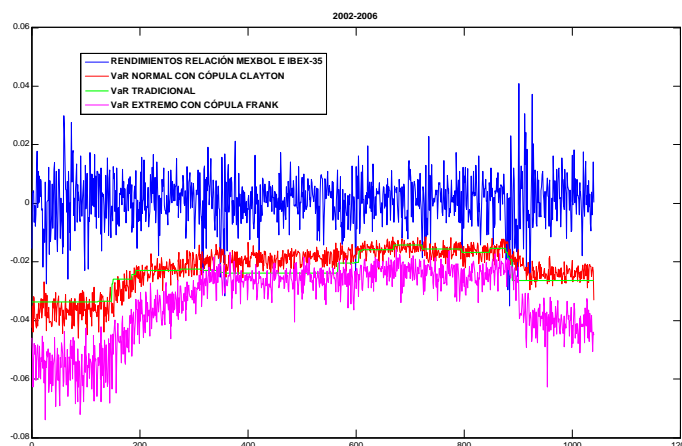
Gráfico 3.19: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99%



En el gráfico 3.19 se observa que las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 34, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 8 y con el VaR tradicional 16. Cabe destacar que de manera general, el ajuste normal ajusta adecuadamente los rendimientos, sin embargo, al final de la muestra la distribución de valor extremo se adecua mejor a los fuertes movimientos, ocasionados en gran medida por la crisis actual.

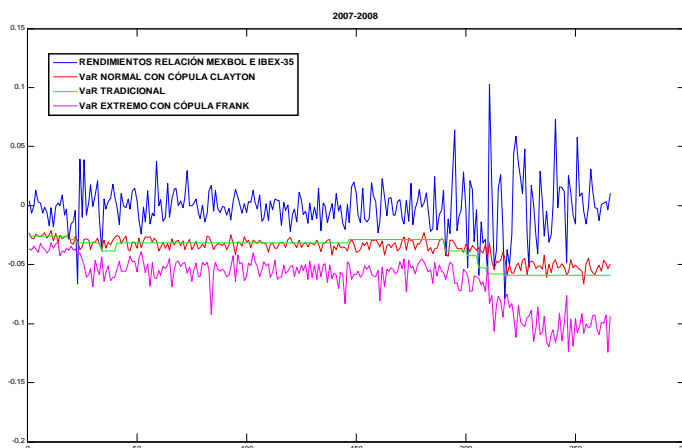
3.5 Relación Mexbol e Ibex-35

Gráfico 3.20: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99 %



En el gráfico 3.20 se observan las valoraciones para el periodo 2002-2006. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 18, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 5 y con el VaR tradicional 9.

Gráfico 3.21: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99 %



En el gráfico 3.21 se observan las valoraciones para el periodo 2007-2008. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 9, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 3 y con el VaR tradicional 5.

En este caso, existe beneficio cuando la muestra se divide en dos periodos correspondientes a ciclos económicos diferentes, ya que las excepciones en las que el modelo falla son menores en ambos subperiodos respecto a la muestra completa. Esto puede deberse a que en el periodo completo se están asumiendo mayores riesgos porque tiene mayor número de observaciones, con lo que este periodo puede ser menos flexible.

La tabla 3.4 muestra los errores cuadráticos medios de la relación Mexbol e Ibex-35 con un nivel de confianza de 99 %. Éstos se obtuvieron a partir de los rendimientos simulados para las cópula financieras utilizadas y suponiendo que los rendimientos se distribuyen tanto de manera normal como extrema.

Tabla 3.4. Errores cuadráticos medios Mexbol-Ibex-35

Error Cuadrático Medio		
Cópula	Ajuste Normal	Ajuste Extremo
2002-2008		
Gaussiana	0.000275	0.000519
t-Student	0.000287	0.000603
Frank	0.000283	0.000503
Gumbel	0.000287	0.000507
Clayton	0.000282	0.000559
2002-2006		
Gaussiana	0.000276	0.000420
t-Student	0.000267	0.000457
Frank	0.000272	0.000402
Gumbel	0.000276	0.000431
Clayton	0.000272	0.000444
2007-2008		
Gaussiana	0.000751	0.001282
t-Student	0.000711	0.001375
Frank	0.000722	0.001239
Gumbel	0.000725	0.001301
Clayton	0.000684	0.001268

Se puede observar en la tabla 3.4 que los errores cuadráticos medios en el caso normal y con la cópula arquimediana Clayton son menores en todos los casos, lo que indica que ésta es la cópula que hace que las valoraciones se acerquen de manera favorable a los valores verdaderos de los rendimientos. En el caso extremo, los errores cuadráticos mínimos se han obtenido utilizando la cópula Frank en los tres periodos temporales.

3.5 Relación Mexbol e Ibex-35

Tras haber analizado los *backtesting*, los resultados empíricos y los errores cuadrático medios, es posible decir que las valoraciones más adecuadas se obtuvieron ajustando los rendimientos a la distribución normal y de valor extremo, utilizando las cópulas Clayton y Frank respectivamente. Por lo tanto, las pérdidas inesperadas correspondientes a las valoraciones más adecuadas de la relación Mexbol e Ibex-35, se realizaron para tres niveles de confianza diferentes para comparar la variación de las pérdidas en función del nivel, éstas se obtuvieron análogamente al apartado anterior. Así pues, las pérdidas inesperadas correspondientes a este caso se muestran en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 3.5. Acumulación de las pérdidas inesperadas⁴

Pérdida Inesperada		Pérdida Excedentes		Pérdida Inesperada		Pérdida Excedentes		Pérdida Inesperada		Pérdida Excedentes	
99%		97.5%		95%							
PÉRDIDAS INESPERADAS NORMALES											
2002-2008											
26.99%	32 (2.06%)	38.37%	53 (3.41%)	52.79%	92 (5.91%)						
2002-2006											
10.70%	20 (1.92%)	17.03%	27 (2.50%)	24.80%	48 (4.62%)						
2007-2008											
16.27%	12 (4.51%)	22.06%	15 (5.64%)	29.70%	23 (8.65%)						
PÉRDIDAS INESPERADAS EXTREMAS											
2002-2008											
7.37%	11 (0.71%)	13.15%	17 (1.09%)	26.50%	38 (2.44%)						
2002-2006											
3.97%	5 (0.48%)	5.86%	9 (0.87%)	12.31%	23 (2.21%)						
2007-2008											
3.99%	2 (0.75%)	5.24%	4 (1.50%)	10.29%	8 (3.01%)						

Tal y como se observa en la tabla 3.5, el periodo total, 2002-2008, es el que soporta las mayores pérdidas, además es donde el umbral de pérdida supera más veces a los rendimientos reales tanto de forma normal como extrema. Se advierte que el subperiodo más corto, 2007-2008, es el que menores excedentes tiene, pero no es el que tiene menores pérdidas, ya que aunque tiene menor frecuencia de pérdida, éstas son de mayor cuantía, muy probablemente por la crisis financiera

⁴Las pérdidas inesperadas de la relación Mexbol e Ibex-35 correspondientes al resto de valoraciones realizadas, tanto normales como extremas, se encuentran en el apartado de anexos.

actual. Además, a medida que se es menos estricto con el nivel de confianza para las valoraciones, las pérdidas se incrementan excesivamente.

Cabe señalar que existe una diferencia considerablemente alta entre las valoraciones ajustando los rendimientos a la distribución normal y la distribución de valor extremo, esto se debe a que la primera da prioridad al centro de la distribución, mientras que la segunda se enfoca fundamentalmente en la cola izquierda.

Para concluir este apartado, se puede decir que el índice Mexbol tiene un fuerte vínculo con el Ibex-35, incluso más de lo que se podía esperar. Así que el Mexbol también se encuentra muy influenciado por lo que acontece en el mercado financiero español, siendo desfavorable en época de crisis, ya que quizá por la relación existente, no se puedan anticipar los eventos negativos con toda certeza. Por último, se debe hacer hincapié en que las valoraciones a través de cópulas financieras se muestran superiores respecto a las valoraciones tradicionales, ya que se adecuan mejor a los rendimientos reales de la relación Mexbol e Ibex-35

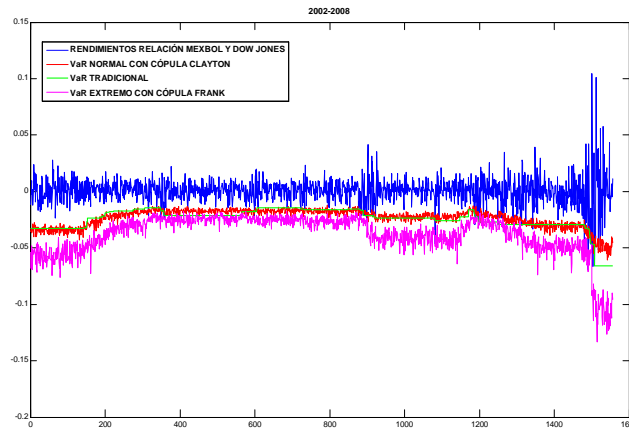
3.6. Relación Mexbol y Dow Jones

Para realizar las valoraciones de los riesgos mediante cópulas, se utilizó la misma metodología que en la relación Mexbol e Ibex-35. Así que para elegir la valoración de los riesgos más adecuada, se han comparado todos los resultados obtenidos con las estimaciones a través de la distribución empírica, con los *backtesting* correspondientes a este caso y obteniendo el error cuadrático mínimo; para así poder contar con varios criterios que ayuden a efectuar la selección de la mejor manera.

Así que del mismo modo que antes, a continuación se exponen los *backtesting* que corresponden a las valoraciones a través de simulación histórica, a las valoraciones normales con cópula Clayton y a las valoraciones extremas con la cópula Frank.

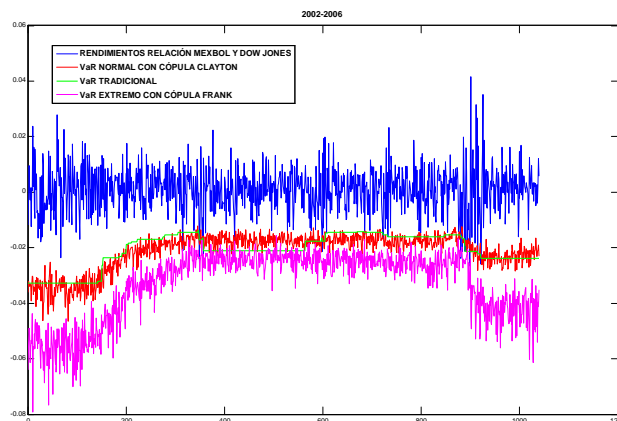
3.6 Relación Mexbol y Dow Jones

Gráfico 3.22: Relación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



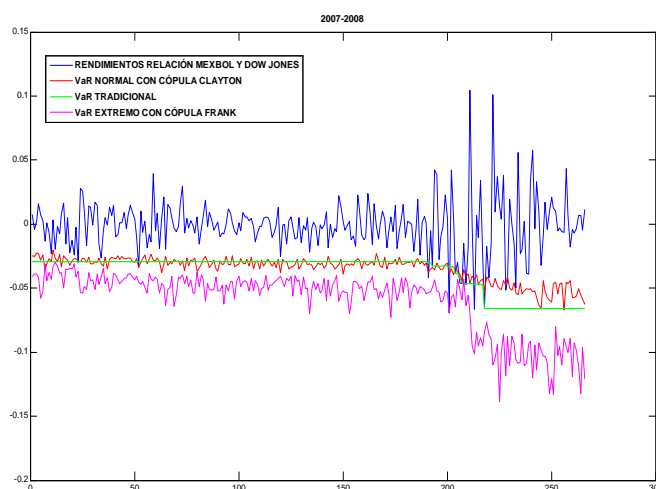
En el gráfico 3.22 se observa que las ocasiones que se ha excedido el VaR ajustado a la distribución normal son 43, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 4 y con el VaR tradicional 20. De manera general y al igual que en el caso anterior, el ajuste normal ajusta adecuadamente los rendimientos, sin embargo, al final de la muestra la distribución de valor extremo se adecua mejor a los fuertes movimientos, aunque sobrevalora. Las ocasiones en que se supera el VaR son mayores respecto al caso anterior, excepto en la valoración extrema, que en este caso disminuyen.

Gráfico 3.23: Relación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



En el gráfico 3.23 se observan las valoraciones para el periodo 2002-2006. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 13, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 3 y con el VaR tradicional 10. En este las excepciones son menores que en la relación anterior, excepto en la forma tradicional.

Gráfico 3.24: Relación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



En el gráfico 3.24 se observan las valoraciones para el periodo 2007-2008. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 11, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 1 y con el VaR tradicional 8. Es importante señalar que en este caso, la distribución de valor extremo sobrevalora en exceso el riesgo.

Esto refleja el beneficio de dividir la muestra en dos periodos económicamente diferentes, ya que las excepciones en las que el modelo falla son menores en los subperiodos respecto a la muestra completa. Esto puede deberse a que el periodo completo incluye todas las observaciones y esto hace que no se reaccione rápidamente ante eventos inusuales.

La tabla 3.6 muestra los errores cuadráticos medios de la relación Mexbol y Dow Jones con un nivel de confianza de 99%. Éstos se obtuvieron a partir de los

rendimientos simulados para las cópula financieras utilizadas y suponiendo que los rendimientos se distribuyen tanto normalmente como de forma extrema.

Tabla 3.6. Errores cuadráticos medios Mexbol-Dow Jones

Error Cuadrático Medio		
Cópula	Ajuste Normal	Ajuste Extremo
2002-2008		
Gaussiana	0.000270	0.000544
t-Student	0.000284	0.000583
Frank	0.000272	0.000540
Gumbel	0.000274	0.000536
Clayton	0.000282	0.000561
2002-2006		
Gaussiana	0.000252	0.000446
t-Student	0.000255	0.000447
Frank	0.000263	0.000413
Gumbel	0.000258	0.000416
Clayton	0.000258	0.000422
2007-2008		
Gaussiana	0.000736	0.001361
t-Student	0.000777	0.001503
Frank	0.000726	0.001269
Gumbel	0.000739	0.001321
Clayton	0.000738	0.001404

Se pueden observar en la tabla 3.6, todos los errores cuadráticos medios obtenidos tanto del caso normal como del extremo para los tres periodos temporales. En la relación Mexbol y Dow Jones no existe una única cópula que arroje el mínimo error cuadrático para todos los periodos.

Tras haber analizado los *backtesting*, los resultados empíricos y los errores cuadrático medios, es posible decir que las valoraciones más adecuadas se obtuvieron ajustando los rendimientos a la distribución normal y de valor extremo, utilizando las cópulas Clayton y Frank respectivamente. Se eligieron estas cópulas para comparar los resultados respecto al caso anterior y también por sus características, ya que la Clayton tiene la buena propiedad de enfocarse en la cola izquierda, mientras que la Frank toma más en cuenta el centro. Por lo tanto, las pérdidas inesperadas correspondientes a las valoraciones más adecuadas de la relación Mexbol y Dow Jones, se realizaron para tres niveles de confianza diferentes, y así comparar la variación de las pérdidas en función del nivel. Las pérdidas inesperadas de este caso se exponen en la tabla 3.7.

Tabla 3.7. Acumulación de las pérdidas inesperadas⁵

Pérdida		Pérdida		Pérdida	
Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes	Inesperada	Excedentes
99%		97.5%		95%	
PÉRDIDAS INESPERADAS NORMALES					
2002-2008					
26.21%	38 (2.44%)	37.45%	60 (3.86%)	51.36%	94 (6.04%)
2002-2006					
5.14%	10 (0.96%)	9.43%	23 (2.21%)	18.98%	49 (4.71%)
2007-2008					
12.45%	11 (4.14%)	22.39%	17 (6.39%)	30.16%	25 (9.40%)
PÉRDIDAS INESPERADAS EXTREMAS					
2002-2008					
1.79%	7 (0.45%)	10.42%	21 (1.35%)	24.68%	40 (2.57%)
2002-2006					
0.57%	4 (0.38%)	4.32%	10 (0.96%)	7.84%	20 (1.92%)
2007-2008					
2.16%	1 (0.38%)	4.69%	4 (1.50%)	8.88%	10 (3.76%)

En la tabla 3.7 es posible observar que el periodo total es el que presenta mayores pérdidas, coincidiendo con aquel que tiene más excedentes. Se advierte que el periodo 2007-2008, es el que menores excedentes tiene y aunque sea el periodo que menos observaciones incluye, no es el que muestra menores pérdidas inesperadas, por lo que se puede decir que los acontecimientos extremos propios de la crisis financiera están afectando directamente a este subperiodo. También se observa que generalmente los excedentes son mayores respecto a la relación Mexbol e Ibex-35, pero las pérdidas inesperadas son menores y de menor cuantía. Se puede destacar, tal y como se esperaba, que cuando se es menos estricto con el nivel de confianza las pérdidas inesperadas aumentan considerablemente.

A manera de conclusión, se puede decir que el índice Mexbol tiene un importante vínculo con el Dow Jones, lo que hace que las posibilidades de pérdidas se incrementen, principalmente porque la estrecha dependencia entre los índices siempre genera mayores riesgos, ya sean de mercado, de crédito, de liquidez, legales u operacionales, y aún más cuando estos se combinan. Además eventos

⁵Las pérdidas inesperadas de la relación Mexbol y Dow Jones correspondientes al resto de valoraciones realizadas, tanto para la distribución normal como de valor extremo, se encuentran en el apartado de anexos.

positivos o negativos en el Dow Jones afectan de manera directa al comportamiento del Mexbol, aumentando así la incertidumbre y la variabilidad de los rendimientos.

3.7. Extensiones

A lo largo de este capítulo se han ajustado los rendimientos de cada una de las carteras a la distribución normal, sin embargo, en este apartado se ajustaron los rendimientos a la distribución normal pero utilizando varianzas dinámicas que se obtienen con la aplicación de modelos tipo GARCH. Esta alternativa se debe a que las varianzas de ambos casos de estudio sirven de indicadores de volatilidad y, en la práctica, éstas son cambiantes a través del tiempo.

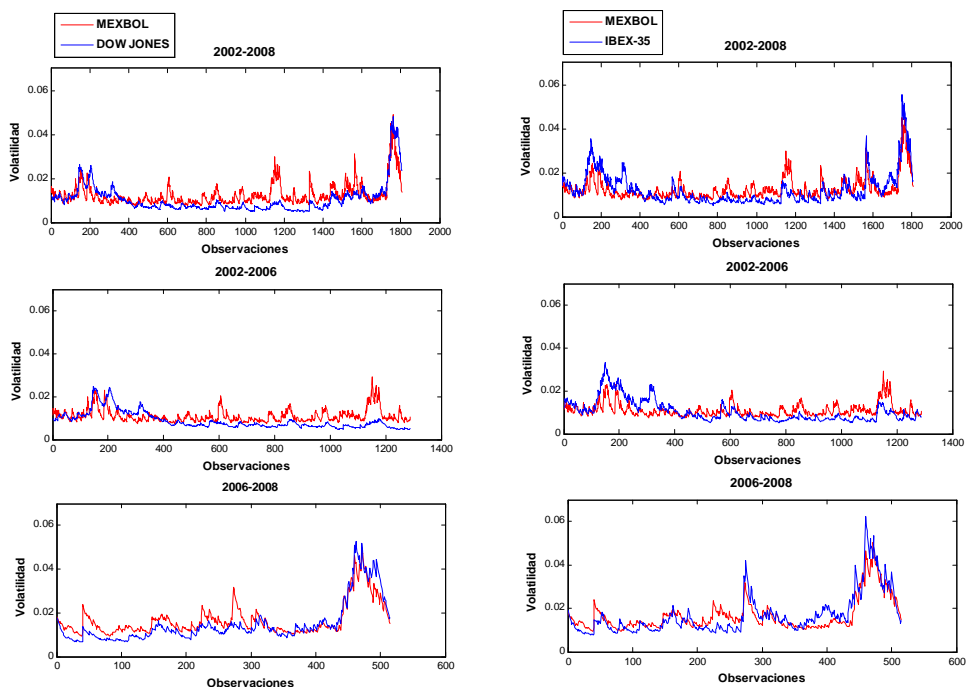
Así que el modelo de volatilidad condicional que ha sido elegido es el GARCH $(1, 1)$, ya que suaviza la varianza de forma exponencial e incorpora un retardo autorregresivo y un componente de media móvil a la estimación. Este tipo de modelo generaliza el comportamiento de la volatilidad al tomarla como variable dependiente, además, los resultados de su estimación son comparables a los obtenidos con modelos más complejos.

Aunque ya se había contrastado que los rendimientos no seguían una distribución normal, era necesario realizar este ajuste para después cotejar los resultados de esta nueva aproximación.

En el gráfico 3.25 se plasma gráficamente la evolución de la volatilidad en las series de rendimientos de los índices y en los tres periodos objeto de estudio. Se observa que efectivamente existen agrupamientos de volatilidad, tanto en el periodo completo como en los subperiodos, sobre todo en el subperiodo 2007-2008 para ambos casos, donde la volatilidad es considerablemente alta.

En el periodo 2002-2006, la volatilidad es relativamente más baja, además, se puede advertir que a lo largo del tiempo la volatilidad varía constantemente.

Gráfico 3.25: Evolución de la volatilidad



Esto confirma que es posible llevar a cabo la aplicación de modelos GARCH en las estimaciones, tanto para la relación Mexbol e Ibex-35 como para la relación Mexbol y Dow Jones.

3.7.1. Relación Mexbol e Ibex-35

El modelo GARCH (1, 1) se aplica sólo a las valoraciones seleccionadas de este caso, es decir, el modelo se utiliza para obtener el VaR con distribución normal y de valor extremo mediante las cópula Clayton y Frank respectivamente.

En el gráfico 3.26 se observa que las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 27, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 8 y con el VaR tradicional 16. Se debe señalar que con esta aproximación, las ocasiones que se excede el VaR con la distribución normal son menores respecto a las valoraciones excentas del modelo GARCH.

Gráfico 3.26: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99 %

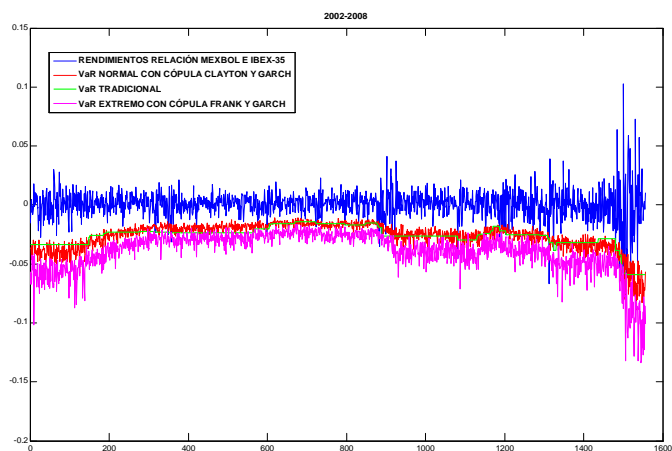
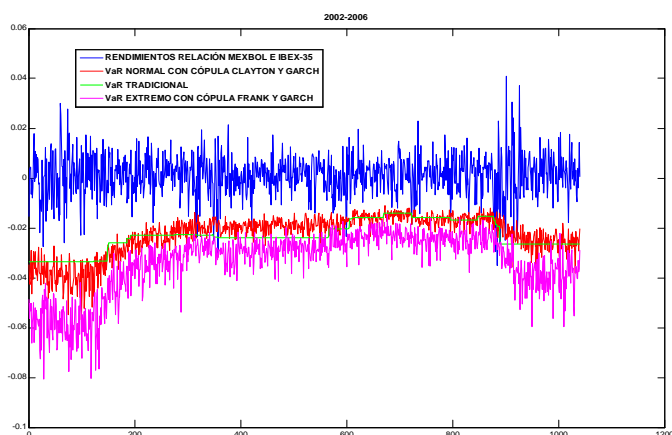


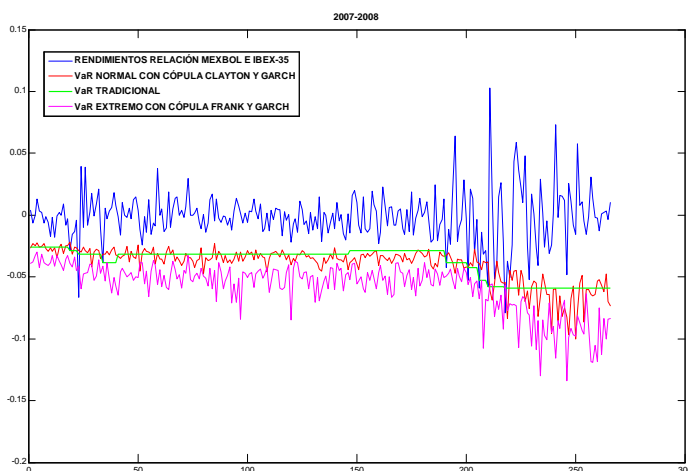
Gráfico 3.27: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99 %



En el gráfico 3.27 se observan las valoraciones para el periodo 2002-2006. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 14, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 4 y con el VaR tradicional 9. En este periodo las excepciones normales y extremas disminuyen un poco.

En el gráfico 3.28 se observan las valoraciones para el periodo 2007-2008. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 10, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las

Gráfico 3.28: Relación Mexbol e Ibex-35: *Backtesting* al 99%



excepciones son 2 y con el VaR tradicional 5. En este periodo las valoraciones son muy similares a las obtenidas sin la utilización del modelo GARCH.

Con la incorporación de los efectos GARCH a las estimaciones se ha conseguido disminuir la distancia que hay con el ajuste que aproxima los datos reales, por lo que esta aproximación sugiere que la medida de riesgo es más real cuando se incorporan varianzas dinámicas para todo el periodo temporal. Sin embargo, los beneficios obtenidos no son tantos como se esperaba, ya que de manera normal sólo mejora las valoraciones en el periodo completo, y de forma extrema los resultados son prácticamente los mismos.

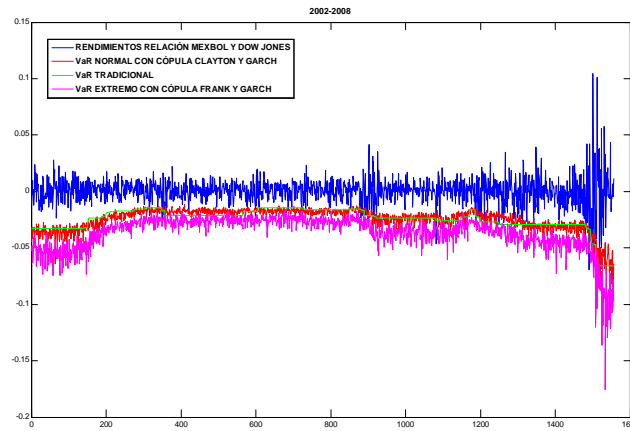
3.7.2. Relación Mexbol y Dow Jones

El modelo GARCH (1, 1) se aplica sólo a las valoraciones seleccionadas de este caso, es decir, el modelo se utiliza para obtener el VaR con distribución normal y de valor extremo a través de las cópula Clayton y Frank respectivamente.

En el gráfico 3.29 se observa que las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 30, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 3 y con el VaR tradicional

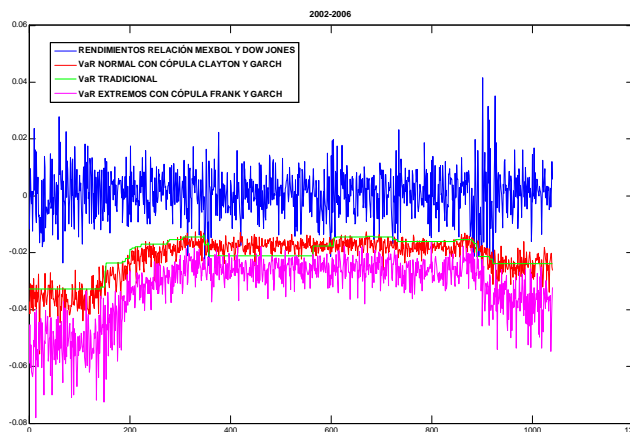
3.7 Extensiones

Gráfico 3.29: Raleación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



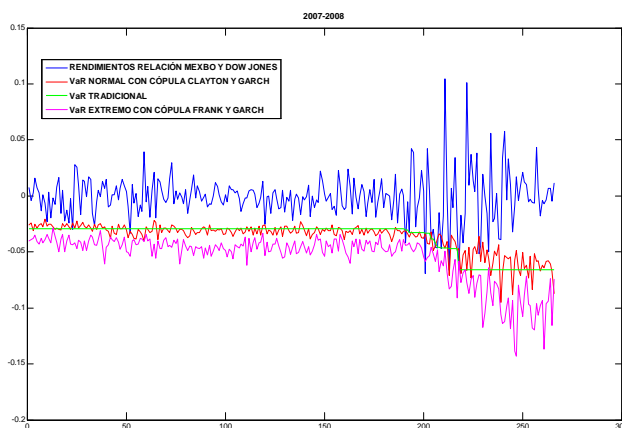
20. Se debe destacar que con esta aproximación, las ocasiones que se excede el VaR con la distribución normal son menores respecto a las valoraciones con el uso del modelo GARCH.

Gráfico 3.30: Relación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



En el gráfico 3.30 se observan las valoraciones para el periodo 2002-2006. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 11, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 3 y con el VaR tradicional 10.

Gráfico 3.31: Relación Mexbol y Dow Jones: *Backtesting* al 99%



En el gráfico 3.31 se observan las valoraciones para el periodo 2007-2008. Las ocasiones que se ha excedido el umbral VaR ajustado a la distribución normal son 11, mientras que con el VaR ajustado a la distribución de valor extremo las excepciones son 2 y con el VaR tradicional 8.

Después de haber incorporado los efectos GARCH a las estimaciones, se ha conseguido disminuir la distancia que hay con el ajuste que aproxima los datos reales, por lo que esta nueva aproximación sugiere que la medida de riesgo es más realista cuando se incorporan varianzas dinámicas para todo el periodo temporal y los dos subperiodos. Sin embargo, las ventajas de esta estimación, no son tantas como se esperaba, es decir, los beneficios obtenidos son significativamente más bajos de los esperados.

3.8. Conclusiones

En este capítulo han sido empleadas las cópulas financieras como herramientas para la medición del grado de dependencia entre las variables, y con esto valorar el riesgo de dos situaciones, donde cada una esta formada por dos índices bursátiles. La primera relación la conforman los índices Mexbol y Dow Jones,

del mismo modo, la segunda relación esta compuesta por el Mexbol y el Ibex-35. La metodología de valoración utilizada son el VaR ya que puede ser aplicada a diferentes ejercicios de gestión de riesgos, además de ser una medida de fácil interpretación, ya que arroja un sólo número.

Las valoraciones se realizaron para el periodo 2002-2008 y para dos subperiodos, 2002-2006 y 2007-2008 respectivamente. Esta división de la muestra total, se debe a que se consideró prioritario cuantificar el impacto que la crisis financiera actual está teniendo en los índices seleccionados, además de que es interesante observar como era la valoración del riesgo antes de que iniciaran los problemas financieros vigentes.

Las cópulas utilizadas son las siguientes: Gaussiana, t-Student, Frank, Gumbel y Clayton, ya que son las más representativas de las familias a las que pertenecen; las dos primeras pertenecen a la familia elíptica y las últimas a la familia arquimediana. Para esta última familia, es indispensable el parámetro θ , porque representa el nivel o grado de dependencia, éste se obtuvo a partir de la τ de Kendall porque de esta forma no ha sido necesario asumir normalidad de rendimientos previamente.

Se ha supuesto que los rendimientos de cada caso siguen tres distribuciones: normal, uniforme o de valor extremo, siendo contrastadas con distribuciones empíricas y con los *backtesting* respectivos a cada caso y a cada periodo objeto de estudio, además, se contabilizaron las ocasiones en las que el VaR fue superado y se calcularon los errores cuadráticos medios, eligiendo el mínimo; estas forma de contrastar los resultados se hicieron con la finalidad de elegir los resultados con la mayor fiabilidad posible.

En lo que respecta a la evidencia empírica de este capítulo, se observa que cuando se lleva a cabo la estimación del VaR mediante distribuciones marginales normales y extremas se obtienen valoraciones más precisas que con marginales uniformes, estas últimas se alejan demasiado de las valoraciones realizadas de for-

ma empírica y los errores cuadráticos medio son mayores, además los respectivos *backtesting* muestran que con la distribución uniforme las valoraciones son excesivamente conservadoras, incluso más que con la distribución de valor extremo. Las valoraciones seleccionadas como adecuadas para ambas relaciones, se obtuvieron a través de cópulas arquimedianas Clayton y Frank, quizá porque éstas se encargan de la dependencia no lineal, además, toman en cuenta las asimetrías de los rendimientos. La cópula Clayton da prioridad a la dependencia que sucede en la cola izquierda, mientras que la Frank se enfoca en el centro de la distribución.

Se puede corroborar con la evidencia empírica aquí presentada, que cuando se valora el riesgo a través de las cópulas, se obtienen beneficios significativos, que pueden conducir a una estimación adecuada. Así que una buena especificación del modelo incluyendo la dependencia entre activos y teniendo en cuenta los valores extremos, puede llevar a obtener resultados óptimos, realistas y satisfactorios, permitiendo elaborar una buena estrategia de cobertura.

En cuanto al impacto financiero que la actual crisis está teniendo sobre el índice principal de la Bolsa Mexicana de Valores, se puede decir que en los últimos dos años del horizonte temporal elegido, 2007-2008, se han aumentado el número de eventos extremos, además, la volatilidad ha sufrido un incremento porcentual significativamente alto y los rendimientos medios cada vez han sido más pequeños. El periodo 2007-2008 muestra un nivel alto de pérdidas inesperadas, ya que aunque es el periodo más corto, los excedentes generan más pérdidas proporcionalmente.

Respecto al índice bursátil mexicano frente a los dos índices seleccionados, se puede advertir que el Mexbol depende en gran medida de lo que sucede en Estados Unidos y en el mercado europeo, fundamentalmente, en España. Así que según los resultados de las dos relaciones utilizadas, cuando dieron inicio los problemas financieros en 2007 la volatilidad y la incertidumbre se incrementaron, teniendo como consecuencia que los rendimientos disminuyeran hasta volverse negativos.

Por otro lado, los porcentajes de las pérdidas inesperadas se han incrementado en los tres países. En el periodo 2002-2008, las pérdidas inesperadas de las dos relaciones son mayores que en los subperiodos, muy probablemente porque la longitud de la muestra puede hacer que la valoración sea menos flexible, además los eventos extremos que tiene inyectan una influencia negativa, porque son correspondientes a la crisis actual. Además, en el periodo completo, en ambos casos, es donde se excede el VaR con mayor frecuencia. También se ha podido observar que los porcentajes de pérdidas inesperadas son significativamente altos, esto quiere decir que las pérdidas reales han superado en una cuantía muy elevada, las pérdidas que se esperaban tras la valoración de tipo VaR. Cabe señalar que dividir la muestra a beneficiado la valoración, ya que las pérdidas en cada subperiodo son considerablemente más bajas respecto al periodo completo. Con los resultados obtenidos se puede advertir, de manera general, que en las valoraciones realizadas, las pérdidas inesperadas en la relación Mexbol e Ibex-35 son mayores que en la relación Mexbol y Dow Jones. Lo que puede deberse a que el mercado mexicano depende cada vez más de los acontecimientos del mercado español.

Se observa que cuando se valora el riesgo de manera tradicional los beneficios son menores con respecto a las valoraciones a través de la metodología de cópulas financieras, muy probablemente porque las valoraciones tradicionales están sobrestimando las pérdidas y las cópulas tratan de acercarse a los movimientos de los rendimientos reales.

Por último, cuando se realizan las valoraciones mediante distribuciones marginales normales y extremas se obtienen buenos resultados, pero las normales infravaloran el riesgo en el que se puede incurrir y las extremas lo sobrevaloran. Aún así, los resultados de este capítulo pueden llevar a pensar que las dos distribuciones utilizadas para valorar los riesgos pueden ser complementarias, y que quizá no deben utilizarse de forma separada, ya que entre ambas distribuciones las predicciones serían más idóneas, convenientes y precisas.

3.9. Anexos

Tabla 3.8. Relación Mexbol e Ibx-35: acumulación de pérdidas inesperadas

Cópula	Ajuste Normal		Ajuste Extremo	
	Pérdidas Inesperadas	Exced.	Pérdidas Inesperadas	Exced.
2002-2008				
Gaussiana	33.68%	44 (2.83%)	6.76%	8 (0.51%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	36.44%	47 (3.02%)	7.37%	11 (0.71%)
Gumbel	36.25%	51 (3.28%)	7.24%	10 (0.64%)
Clayton	26.99%	32 (2.06%)	3.29%	4 (0.26%)
2002-2006				
Gaussiana	12.60%	22 (2.12%)	1.91%	6 (0.58%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	14.64%	29 (2.79%)	3.97%	5 (0.48%)
Gumbel	15.40%	26 (2.50%)	2.94%	6 (0.58%)
Clayton	10.70%	20 (1.92%)	1.45%	2 (0.19%)
2002-2007				
Gaussiana	17.95%	13 (4.89%)	1.65%	1 (0.38%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	20.17%	13 (4.89%)	3.99%	2 (0.75%)
Gumbel	20.54%	12 (4.51%)	2.48%	1 (0.38%)
Clayton	16.27%	12 (4.51%)	0.65%	1 (0.38%)

Tabla 3.9. Relación Mexbol y Dow Jones: acumulación de pérdidas inesperadas

Cópulas	Ajuste Normal		Ajuste Extremo	
	Pérdidas Inesperadas	Exced.	Pérdidas Inesperadas	Exced.
2002-2008				
Gaussiana	29.27%	47 (3.02%)	0.91%	4 (0.25%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	37.78%	53 (3.41%)	1.79%	7 (0.45%)
Gumbel	32.57%	53 (3.41%)	4.55%	10 (0.64%)
Clayton	26.21%	38 (2.44%)	1.89%	2 (0.13%)
2002-2006				
Gaussiana	8.57%	20 (1.92%)	0.61%	2 (0.19%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	9.10%	24 (2.31%)	0.57%	4 (0.38%)
Gumbel	9.13%	24 (2.31%)	1.14%	3 (0.29%)
Clayton	5.14%	10 (0.96%)	-	0
2002-2007				
Gaussiana	16.41%	18 (6.77%)	0.86%	1 (0.38%)
t-Student	-	-	-	-
Frank	20.05%	19 (7.14%)	2.16%	1 (0.38%)
Gumbel	18.08%	18 (6.77%)	1.22%	1 (0.38%)
Clayton	12.45%	11 (4.14%)	-	0

Capítulo 4

Valoración del riesgo mediante
cópulas, utilizando mixturas
normales y de valor extremo

4.1. Introducción

En el segundo capítulo se supuso que los rendimientos de una cartera con acciones de la Bolsa Mexicana de Valores sigue dos distribuciones elegidas: normal o uniforme. Tras ajustar los rendimientos a las distribuciones supuestas, se obtiene las valoraciones a través de la metodología de cópulas tanto equiponderando la cartera como autoponderándola. De la misma manera, en el capítulo anterior se supuso que los rendimientos de los índices bursátiles principales, Mexbol, Dow Jones e Ibex-35, siguen tres distribuciones elegidas: normal, uniforme o de valor extremo. Después de ajustar los rendimientos a las distribuciones, se obtiene las valoraciones a través de la metodología de cópulas.

En los resultados de los capítulos previamente expuestos, ha sido posible observar que, aunque los ajustes han arrojado buenas aproximaciones con respecto a las obtenidas de forma empírica, con sus respectivos *backtesting* y obteniendo los errores cuadráticos medios, éstas no son del todo precisas, ya que ninguna de las distribuciones utilizadas encaja correcta y adecuadamente al conjunto de datos utilizados en los dos capítulos anteriores. Dicho de otra forma, los rendimientos diarios tanto de los tres índices bursátiles como de la cartera de inversión, no se distribuyen de la misma manera a lo largo del tiempo, debido a los periodos de auge y crisis propios de los ciclos económicos y financieros.

Una posible alternativa es combinar las distribuciones que mejores resultados han brindado en los capítulos anteriores, es decir, partir del supuesto de que los rendimientos en los periodos de baja volatilidad se distribuyen normalmente, y en los de alta volatilidad se asume la distribución de valor extremo. El periodo temporal, al igual que antes, data de 2002 a 2008 y a su vez la muestra total se divide en dos subperiodos para analizar el impacto de la crisis. El primer subperiodo inicia en 2002 y termina en 2006 y el segundo subperiodo va de 2007 a 2008 y así se tiene delimitados los periodos de interés para esta investigación.

4.2. Descripción de la metodología

Primeramente, es importante decir que la descripción y análisis de los datos que se utilizan en este capítulo es análoga a los capítulos 2 y 3, ya que las bases de datos son las mismas que las utilizadas anteriormente. La metodología se describe para el periodo completo, porque los subperiodos se estiman de manera similar.

Se define el horizonte temporal $[t, T]$, la muestra a utilizar se divide en función de los periodos de volatilidad o de los valores extremos presentes a lo largo de toda la serie de rendimientos. Para dividir la serie completa en subseries normales o extremas, se han establecido dos umbrales, definidos de la siguiente manera:

$$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) \tag{4.1}$$

donde μ es la media y σ la desviación estándar de los rendimientos. Se debe mencionar que sólo se han considerado como periodos extremos aquellos en los que se agrupa un número considerable de rendimientos extremos, dejando a un lado valores atípicos puntuales.

Supóngase que se tiene una cartera formada por dos series temporales¹ X e Y , donde la descripción de la metodología se desarrollará minuciosamente para X , ya que el procedimiento para Y es análogo.

Se fracciona la serie X en n subseries, X_1, X_2, \dots, X_n , con el fin de tener agrupados los periodos considerados como normales y como extremos. Se denotará como

$$X_{iN} \sim N(\mu_i, \sigma_i) \tag{4.2}$$

a las subseries que se encuentran en relativa estabilidad, con lo cual se supone que siguen una distribución normal.

¹La metodología se describe de forma bivalente, pero puede aplicarse de forma multivariante.

Las subseries que agrupan momentos con mayor volatilidad asumen una distribución de valor extremo, tal que

$$X_{iev} \sim ev(\mu_i, \sigma_i) \quad (4.3)$$

Así pues, tras dividir la muestra en subseries ajustadas a distribuciones normales y extremas, se obtienen las distribuciones marginales univariantes respectivas para cada subserie de rendimientos previamente ajustadas. Las distribuciones marginales se consiguen a través de la función de distribución acumulada, calculándose de forma independiente para cada subserie, ya que cada división esta siendo tratada según al grupo al que pertenecen: normal o extremo. Se crea un vector U , el cual incluye las distribuciones marginales univariantes cronológicamente ordenadas para respetar la secuencia temporal,

$$U_X = [U_{X_{1N}}, U_{X_{2ev}}, \dots, U_{X_{iN}}, U_{X_{jev}}, \dots], \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \quad (4.4)$$

En este caso se asume que el primer subperiodo X_1 , sigue una distribución normal, es decir, X_{1N} , seguido de la segunda subserie X_2 que se supone con distribución de valor extremo X_{2ev} . Cabe mencionar que en este punto se tienen los vectores U_X y U_Y obtenidos de forma similar, por lo que es posible que se obtengan los parámetros² θ que reflejan el grado de dependencia necesario para cada cópula.

A partir de las distribuciones marginales univariantes, U_X y U_Y , se simulan distribuciones marginales conjuntas para el vector $U_{X,Y}$, es decir, se obtienen variables que tengan como distribución conjunta la cópula estimada,

$$C(U_{X,Y}) = C(U_X, U_Y) \quad (4.5)$$

²El parámetro θ para las cópulas arquimedianas se a estimado a través de la τ de Kendall.

Las cópulas utilizadas son: Gaussiana, t-Student, Frank, Gumbel y Clayton, las dos primeras de la familia elíptica y las últimas pertenecientes a la familia arquimediana.

Mediante la simulación de Monte Carlo, se obtienen rendimientos simulados a través de las distribuciones marginales conjuntas y la inversa de la función de distribución acumulada. Para simular los rendimientos, se tiene en cuenta la proporción de los valores normales y extremos que tiene la muestra. De forma que, a la hora de simular, se utiliza la misma proporción en cada uno de los dos casos. Por lo tanto, es importante señalar que las simulaciones se realizan de forma independiente entre rendimientos normales y extremos. Los parámetros a utilizar en las simulaciones son las medias de los parámetros individuales, es decir, supóngase que se tiene n_1 subseries normalmente distribuidas, se denotará mediante μ_N la media a utilizar,

$$\mu_N = \frac{\mu_{X_{iN}} + \dots + \mu_{X_{(i+n_1)N}}}{n_1} \quad (4.6)$$

y la desviación típica σ_N ,

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{X_{iN}} + \dots + \sigma_{X_{(i+n_1)N}}}{n_1} \quad (4.7)$$

Por lo tanto, los rendimientos se simulan mediante una distribución normal de la siguiente forma:

$$R_{X_1} \sim N(\mu_N, \sigma_N) \quad (4.8)$$

En cuanto a los parámetros utilizados para la simulación extrema, se han utilizado aquellos parámetros que mostraron mayor variabilidad. Por lo que los rendimientos que asumen una distribución de valor extremo se simulan de la siguiente manera:

$$R_{X_2} \sim ev(\mu_{ev}, \sigma_{ev}) \quad (4.9)$$

Así pues, se crea un vector R_{SX} que incluya las simulaciones normales y extremas anteriormente expuestas,

$$R_{SX} = [R_{X_1}, R_{X_2}] \quad (4.10)$$

cabe mencionar, que para la variable Y los rendimientos se simularon de forma similar. Por lo tanto el vector general de rendimientos simulados es:

$$RS = [R_{SX}, R_{SY}] \quad (4.11)$$

A partir de aquí se ponderan los rendimientos simulados, en este caso X e Y se equiponderan, es decir, cada variable tiene 50 % de peso específico. Por último se estima el VaR y CVaR con un nivel del confianza de 99 %, el primero corresponde al percentil de la distribución de los rendimientos simulados y el segundo es el promedio de los rendimientos que exceden el nivel del VaR.

Esta metodología se ha aplicado tanto al periodo completo como a los subperiodos elegidos, porque así se puede observar el comportamiento de esta metodología en situaciones económicamente diferentes. Es preciso decir que las tablas correspondientes a este capítulo se han realizado a partir de las cotizaciones oficiales.

4.3. Relación Mexbol e Ibex-35

Las valoraciones de los riesgos con esta nueva aproximación correspondientes a la relación Mexbol e Ibex-35, han sido contrastadas con las obtenidas de forma empírica³. Las metodologías utilizadas son el VaR y el CVaR y se han estimado a través de las cinco cópulas y para los tres periodos temporales. Las valoraciones se recogen en la tabla 4.1.

³Esta nueva aproximación tiene como deficiencia que hasta el momento no se pueden realizar los análisis retrospectivos *backtesting*, así que solo se han contrastado los resultados con los obtenidos de forma empírica.

Tabla 4.1. Valoraciones de los riesgos

VaR Y CVaR 2002-2008				
Mexbol-Ibex-35				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-5.75%	-7.34%	-1.19%	-5.37%
Cópula t-Student	-5.60%	-7.40%	-2.70%	-6.37%
Cópula Frank	-5.67%	-6.80%	-1.10%	-2.53%
Cópula Gumbel	-5.68%	-7.16%	-0.09%	-4.08%
Cópula Clayton	-6.19%	-8.97%	-6.10%	-10.43%
VaR Y CVaR 2002-2006				
Mexbol-Ibex-35				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-4.93%	-6.06%	-1.28%	-4.77%
Cópula t-Student	-5.19%	-7.26%	-2.92%	-7.34%
Cópula Frank	-4.34%	-5.66%	-0.90%	-2.97%
Cópula Gumbel	-4.63%	-6.18%	-0.79%	-4.83%
Cópula Clayton	-5.37%	-8.18%	-5.31%	-9.74%
VaR Y CVaR 2007-2008				
Mexbol-Ibex-35				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-5.83%	-9.77%	-4.23%	-8.83%
Cópula t-Student	-6.17%	-10.41%	-6.07%	-11.00%
Cópula Frank	-6.31%	-9.36%	-2.47%	-6.49%
Cópula Gumbel	-6.22%	-9.84%	-2.29%	-6.55%
Cópula Clayton	-7.41%	-12.33%	-7.28%	-7.28%

Las valoraciones VaR más adecuadas se han obtenido con la cópula Clayton en los tres periodos, ya que es con la que la valoración de los riesgos se encuentra más cercana a la estimación empírica. Esto se debe a que la cópula Clayton se centra en la dependencia de los eventos extremos registrados en la cola izquierda de la distribución. En cuanto a las valoraciones CVaR, la cópula que mejor aproxima los rendimientos reales es la t-Student, quizá porque da suficiente peso a los eventos en el centro de la distribución, sin dejar de tomar en cuenta los extremos.

Se debe señalar que con esta nueva forma de aproximación los resultados se muestran cercanos a los empíricos. Este puede deberse al efecto de combinar distribuciones en la estimación, ya que cuando se supone que los rendimientos se distribuyen a través de valor extremo, los resultados sobrestiman excesivamente el riesgo. Por el contrario, cuando se supone normalidad de rendimientos, las valoraciones se ven infravaloradas. Por lo que esta nueva forma de estimar los rendimientos puede acercarse un poco más a la realidad de la relación Mexbol e Ibex-35.

Para finalizar este apartado, es importante decir que para este caso, todos los resultados obtenidos se han aproximado de forma favorable a los empíricos, haciendo que la nueva forma de valoración del riesgo propuesta sea acertada y precisa, pudiendo ser una buena alternativa tanto para valorar el riesgo como para realizar la cobertura.

4.4. Relación Mexbol y Dow Jones

Las valoraciones de los riesgos con esta nueva aproximación correspondientes a la relación Mexbol y Dow Jones, han sido contrastadas con las obtenidas de forma empírica. Las metodologías utilizadas son el VaR y el CVaR y, al igual que en el apartado anterior, se han estimado a través de las cinco cópulas y para los tres periodos temporales. Las valoraciones se recogen en la tabla 4.2.

Tabla 4.2. Valoraciones de los riesgos

VaR Y CVaR 2002-2008				
Mexbol-Dow Jones				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-6.11%	-8.48%	-2.67%	-7.35%
Cópula t-Student	-6.19%	-8.38%	-4.09%	-8.24%
Cópula Frank	-5.91%	-8.08%	-1.84%	-4.36%
Cópula Gumbel	-6.04%	-7.99%	-2.18%	-5.79%
Cópula Clayton	-6.50%	-8.93%	-5.54%	-9.68%
VaR Y CVaR 2002-2006				
Mexbol-Dow Jones				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-5.04%	-7.04%	-4.12%	-8.12%
Cópula t-Student	-4.83%	-6.67%	-3.27%	-6.97%
Cópula Frank	-4.57%	-5.81%	-0.94%	-4.09%
Cópula Gumbel	-4.51%	-5.77%	-1.39%	-6.13%
Cópula Clayton	-5.08%	-7.69%	-7.15%	-11.67%
VaR Y CVaR 2007-2008				
Mexbol-Dow Jones				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-7.25%	-10.37%	-6.26%	-10.18%
Cópula t-Student	-7.69%	-11.63%	-5.24%	-10.44%
Cópula Frank	-6.98%	-10.45%	-2.58%	-5.98%
Cópula Gumbel	-7.52%	-10.59%	-4.20%	-9.02%
Cópula Clayton	-8.34%	-13.10%	-8.48%	-13.16%

En el periodo total, la valoración VaR es más adecuada con la cópula Clayton, ya que es la que se encuentra más cercana a la valoración de forma empírica, mientras que la valoración CVaR es más precisa con la cópula t-Student. En el primer subperiodo, 2002-2006, el VaR es más adecuado con las cópulas Gaussiana y Clayton, y el CVaR próximo a los datos reales se obtiene con la cópula t-Student. En el segundo subperiodo, 2007-2008, también las cópulas Gaussiana y Clayton ajustan el VaR y, del mismo modo, el CVaR es más adecuado con la cópula Clayton quizá por el hecho de que otorga mayor énfasis a la dependencia de los eventos extremos ubicados en la cola izquierda de la distribución. En la tabla 4.2 se observa que el periodo 2007-2008 es el que registra las mayores pérdidas, muy probablemente ocasionadas por los eventos extremos propios de la crisis actual.

Cabe destacar que con esta nueva forma de aproximación existe una acercamiento favorable a los resultados empíricos. Esto puede ser el efecto de combinar distribuciones en la estimación, ya que cuando se supone que toda la muestra es extrema los resultados sobrestiman en exceso el riesgo. Por el contrario, cuando se supone normalidad de rendimientos, las valoraciones se ven infravaloradas. Por lo que esta nueva forma de estimar los rendimientos puede acercarse un poco más a la realidad. Por lo tanto, esta nueva aproximación ha beneficiado significativamente la valoración de los riesgos, aproximándose bastante a lo que sucede con los rendimientos reales de la relación Mexbol y Dow Jones.

4.5. Cartera equiponderada

Las valoraciones de los riesgos correspondientes a la cartera de inversión en su forma equiponderada, han sido contrastadas con las obtenidas de forma empírica. Las metodologías utilizadas son el VaR y el CVaR y, al igual que en los apartados anteriores, se han estimado a través de las cópulas elípticas y para los tres periodos temporales. Las valoraciones se muestran en la tabla 4.3.

Tabla 4.3. Valoraciones de los riesgos

VaR Y CVaR 2002-2008				
Cartera Equiponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-3.95%	-4.67%	-2.03%	-2.66%
Cópula t-Student	-4.09%	-5.96%	-0.56%	-5.53%
VaR Y CVaR 2002-2006				
Cartera Equiponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-3.38%	-3.97%	-0.49%	-3.78%
Cópula t-Student	-3.59%	-4.09%	-0.97%	-3.85%
VaR Y CVaR 2007-2008				
Cartera Equiponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-5.68%	-6.63%	-0.49%	-4.76%
Cópula t-Student	-5.95%	-7.40%	-1.38%	-8.79%

En el periodo total, la valoración VaR es más adecuada con la cópula Gaussiana, ya que es la que se encuentra más cercana a la valoración de forma empírica, mientras que la valoración CVaR es más precisa con la cópula t-Student. En el primer subperiodo, 2002-2006, el VaR es más adecuado con la cópula Gaussiana, y el CVaR próximo a los datos reales se obtiene con la cópula t-Student. En el segundo subperiodo, 2007-2008, tanto el VaR como el CVaR, están valorados de mejor forma con la cópula t-Student, quizá por el hecho de que se enfoca en el centro de la distribución, sin descuidar los eventos extremos de las colas. En la tabla 4.3 se observa que el periodo 2007-2008 es el que registra las mayores pérdidas, esto puede deberse en gran medida a la volatilidad de este subperiodo, la que correspondiente a la crisis actual.

Cabe destacar que con esta nueva forma de aproximación existe un acercamiento adecuado a los resultados empíricos, pero tiene menores beneficios respecto a las valoraciones de los índices. Esto puede ser el efecto de combinar distribuciones en la estimación y de utilizar únicamente cópula de la familia elíptica. De cualquier forma, esta nueva forma de estimar los rendimientos puede acercarse un poco más a la realidad. Por lo que, esta nueva aproximación ha beneficiado la

valoración de los riesgos, aproximándose a los movimientos de los rendimientos reales de la cartera equiponderada.

4.6. Cartera autoponderada

Las valoraciones de los riesgos correspondientes a la cartera inversión en su forma autoponderada, han sido contrastadas con las obtenidas de forma empírica. Las metodologías utilizadas son el VaR y el CVaR y, al igual que en los apartados anteriores, se han estimado a través de las cinco cópulas y para los tres periodos temporales. Las valoraciones se exponen en la tabla 4.4.

Tabla 4.4. Valoraciones de los riesgos

VaR Y CVaR 2002-2008				
Cartera Autoponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-4.45%	-5.09%	-0.93%	-3.80%
Cópula t-Student	-4.69%	-5.37%	-0.75%	-5.98%
VaR Y CVaR 2002-2006				
Cartera Autoponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-3.71%	-4.13%	-2.09%	-2.40%
Cópula t-Student	-3.95%	-4.74%	-1.09%	-4.27%
VaR Y CVaR 2007-2008				
Cartera Autoponderada				
	Nuevo Ajuste		Ajuste Empírico	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Nivel de Confianza	99%	99%	99%	99%
Cópula Gaussiana	-6.24%	-6.77%	-0.71%	-4.83%
Cópula t-Student	-6.90%	-7.36%	-3.29%	-9.22%

Del mismo modo que con la cartera equiponderada, en el periodo total, la valoración VaR es más adecuada con la cópula Gaussiana, ya que es la que se encuentra más cercana a la valoración de forma empírica, mientras que la valoración CVaR es más precisa con la cópula t-Student. En el primer subperiodo, 2002-2006, el VaR es más adecuado con la cópula Gaussiana, y el CVaR próximo a los datos reales se obtiene con la cópula t-Student. En el segundo subperiodo, 2007-2008,

tanto el VaR como el CVaR, están valorados de forma más precisa con la cópula t-Student, lo que se debe a que ésta se enfoca en el centro de la distribución, sin descuidar los eventos extremos de las colas. En la tabla 4.4 se observa que el periodo 2007-2008 es el que soporta las mayores pérdidas, esto era de esperarse, porque este es el periodo que representa los problemas financieros vigentes. En términos generales, las valoraciones para la cartera equiponderada y autoponderada, pueden considerarse como muy similares.

Cabe destacar que con esta nueva forma de aproximación existe una acercamiento adecuado a los resultados empíricos pero, al igual que con la cartera equiponderada, tiene menores beneficios respecto a las valoraciones de los índices. De cualquier manera, esta nueva forma de estimar los rendimientos puede acercarse un poco más a la realidad. Así que esta nueva aproximación ha beneficiado la valoración de los riesgos, aproximándose a los movimientos de los rendimientos reales de la cartera autoponderada.

4.7. Conclusiones

En esta metodología propuesta se ha empleado la teoría de cópulas para valorar la pérdida máxima que pueden sufrir dos situaciones, cada una de ellas compuesta por dos índices bursátiles. La primera situación la integran el Mexbol y el Ibex-35, mientras que la segunda situación la conforman el Mexbol y el Dow Jones, esta selección es por el interés de ésta investigación en conocer los movimientos del mercado mexicano bursátil frente a los índices selectivos y representativos del mercado estadounidense y español independientemente. Del mismo modo, la metodología propuesta se aplica a una cartera de inversión formada por los cinco activos más negociados de la Bolsa Mexicana de Valores. Las valoraciones de los riesgos para la cartera se llevan a cabo de manera equiponderada y autoponderada, con el fin de observar como cambian las valoraciones en función de

la ponderación otorgada a cada activo. La valoración al riesgo se realizó aplicando las metodologías de valor en riesgo y valor en riesgo condicional, debido a que su estimación se puede aplicar en diversas investigaciones de gestión de riesgos y su interpretación es relativamente sencilla pero no trivial. Además se valoró el riesgo para el periodo completo y para los dos subperiodos, con el fin de cuantificar el impacto que esta teniendo la crisis actual.

Las cópulas que se han utilizado en las valoraciones de los índices bursátiles son la Gaussiana y t-Student, Clayton, Gumbel y Frank. Las tres últimas cópulas pertenecen a la familia arquimediana, también se les denomina como de valor extremo y/o paramétricas, porque para estimarlas es imprescindible obtener los parámetros que miden el grado de dependencia que hay entre las variables. Los parámetros se estimaron a través de la τ de Kendall porque no asume anticipadamente que los rendimientos se distribuyan específicamente de alguna forma. En el caso de la cartera, las cópulas que se han empleado son la Gaussiana y la t-Student multivariantes, ya que las cópulas arquimedianas multivariantes aún se están investigando, y son necesarias herramientas matemáticas más complejas como la Transformada de Laplace para su estimación. Tanto para los índices como para la cartera, se ha supuesto que los rendimientos siguen dos distribuciones combinadas, una normal y otra de valor extremo, siendo comparadas con la distribución empírica, debido a que ésta es la que brinda una visión más real del comportamiento de los mercados y de las acciones.

En lo que respecta a la evidencia empírica obtenida para los índices, se observa que cuando se estiman el VaR y el CVaR a través de distribuciones marginales combinadas se obtienen excelentes resultados, especialmente cuando se aplica la cópula Clayton, esto puede deberse a que es la que prioriza la cola izquierda de la distribución. Hay que señalar que el objetivo de esta nueva forma de estimación es el de predecir, principalmente, el centro y la cola izquierda de la distribución, porque es ahí donde, en este caso, se muestra el comportamiento de los

rendimientos y se reflejan las pérdidas.

En cuanto a la evidencia empírica obtenida para la cartera, se observa que para el VaR se tienen mejores resultados con la cópula Gaussiana, excepto en el periodo 2007-2008. Con el CVaR la cópula que permite valoraciones más adecuadas es la t-Student, ya que se enfoca en el centro de la distribución, sin dejar de lado los eventos extremos de las colas. Respecto a las pérdidas, se ha podido observar que son mayores respecto a las obtenidas en capítulos previos, esto puede deberse al efecto de combinar distribuciones en una misma aproximación.

Según la evidencia empírica, esta aproximación mejora de manera significativa las predicciones, ya que, de forma general, los rendimientos financieros no siguen una única distribución, es decir, las series de rendimientos no se comportan de forma normal o extrema, sino que el comportamiento es cambiante a través del tiempo.

Cabe señalar, que la dependencia observada en la relación Mexbol e Ibex-35 es menor que en relación Mexbol y Dow Jones, una vez más es por la dependencia temporal que México tiene con Estados Unidos en diversos sectores económicos y financieros. Sin embargo, las pérdidas no siempre son mayores en la relación Mexbol y Dow Jones, lo que puede llevar a pensar que el mercado mexicano muestra bastante relación con el mercado español, incluso más de la que se esperaba. Las pérdidas registradas en la cartera son muy similares en el caso equiponderado y autoponderado, sin embargo, autoponderar la cartera ofrece la posibilidad de replicar el índice Mexbol, ya que los activos utilizados son los de mayor ponderación.

Por último, se insiste en que esta nueva aproximación se considera adecuada, acertada y brinda beneficios en cuanto a la predicción respecto a las metodologías tradicionales o a las metodologías que asumen una única distribución para toda una serie temporal de rendimientos, y conduce a la posibilidad de mejorar la cobertura de los riesgos a los que continuamente se está expuesto.

Conclusiones generales y líneas abiertas de investigación

Como se ha venido diciendo a lo largo de toda la investigación, valorar los riesgos de manera adecuada y oportuna es primordial, ya que de esas valoraciones depende, en gran medida, la estabilidad de los mercados financieros, así que se consideró importante dejar claras las definiciones más relevantes. Por lo tanto, el primer capítulo se ha destinado a definir los conceptos necesarios que permitan conocer los elementos fundamentales para llevar a cabo la valoración de los riesgos.

En el segundo capítulo, se observa que cuando las marginales se distribuyen de forma normal se obtienen aproximaciones más precisas que con la distribución uniforme, tanto en el periodo completo como en los subperiodos, ya que el ajuste uniforme sobrevalora en exceso los riesgos, colocando a un posible inversor en una posición extremadamente conservadora. La cópula elegida para las estimaciones es la Gaussiana, ya que es una cópula versátil y ampliamente utilizada en la práctica. Para escoger tanto la distribución como la cópula adecuada, los resultados se contrastaron con los obtenidos de forma empírica, con los respectivos *backtesting* y con los mínimos errores cuadráticos medios. Se ha podido constatar, que cuando se implementa la metodología de cópulas en las estimaciones se obtienen beneficios a la hora de valorar el riesgo, sin embargo, no presenta grandes diferencias con respecto a las valoraciones realizadas por el método tradicional de simulación histórica.

Respecto al impacto financiero, se puede advertir que en el periodo 2007-2008, se han aumentado el número de eventos extremos en todos los activos seleccionados, ocasionando el incremento de la volatilidad y la disminución de los rendimientos medios. En el periodo 2002-2008, las pérdidas inesperadas porcentuales son mayores que las de los subperiodos, posiblemente porque al ser el horizonte temporal más largo se muestre menos flexible, además de sufrir una influencia negativa de los eventos extremos del segundo subperiodo. Por otro lado, las pérdidas inesperadas en el subperiodo 2007-2008 son mucho mayores que en el otro subperiodo, ya que es allí donde se refleja el efecto de la crisis financiera actual. Se observa que las pérdidas inesperadas son mayores cuando las valoraciones se obtienen a través de cópulas con respecto a la metodología tradicional.

Como consecuencia de este capítulo, se sugieren algunas líneas abiertas de investigación, entre las que destacan la integración del riesgo de mercado y de crédito y la utilización de componentes principales. La primera línea se plantea por el hecho de que hoy en día los riesgos financieros reales, en la mayoría de los casos, no son específicamente de un sólo tipo, sino que pueden estar combinados. Tal es el caso del riesgo de mercado y de crédito, por lo que las estimaciones de valoración del riesgo de mercado podrían incluir un factor de crédito, como puede ser el caso de las CDO's (*Collateralized Debt Obligation*), y con esto mostrar un panorama diferente de valoración. La segunda línea surge porque los componentes principales pueden ser una buena alternativa para simular los rendimientos de la cartera. Ya que esta técnica es útil en cuanto a resumir la información, o en otras palabras, ayuda a reducir la dimensión (número de variables) en la valoración de los riesgos. Lo que puede llevar a obtener aproximaciones razonables a través de una síntesis de las variables, pero perdiendo la menor información posible.

En el tercer capítulo, se observa que cuando los rendimientos se ajustan a la distribución normal o a la de valor extremo, se obtienen valoraciones más precisas respecto a la distribución uniforme, ya que esta última sobrevalora los resultados

incluso más que la de valor extremo. Para escoger tanto la distribución como la cópula adecuada, los resultados se contrastaron con los obtenidos de forma empírica, con los respectivos *backtesting* y con los mínimos errores cuadráticos medios. Las cópulas elegidas como más adecuadas fueron de la familia arquimediana: Clayton y Frank, quizá porque tratan con la dependencia no lineal y toman en cuenta la asimetría de los rendimientos, corroborando que con su utilización se obtienen beneficios significativos a la hora de llevar a cabo la valoración de los riesgos respecto a la metodología tradicional. Después de ajustar los rendimientos y obtener los valores correspondientes a cada cópula, se obtuvieron las valoración del riesgo de cada relación: Mexbol-Ibex-35 y Mexbol-Dow Jones.

Respecto al impacto financiero, se puede observar que con el ajuste normal las pérdidas inesperadas son muy altas, lo que indica que la normalidad de rendimientos puede estar infravalorando el riesgo, además de que el periodo 2002-2008 es el que sufre mayores pérdidas inesperadas, principalmente porque la longitud de la muestra da menos flexibilidad a las valoraciones. Por el contrario, con el ajuste de valor extremo, las pérdidas inesperadas son muy pocas, quizá porque se ha supuesto que todas las observaciones son extremas, lo que ha llevado a sobrevalorar las pérdidas inesperadas. Con el ajuste de valor extremo, también las pérdidas inesperadas son mayores en el periodo 2002-2008 respecto a los subperiodos, aunque se pierde mucho menos que asumiendo normalidad.

Con los resultados obtenidos se puede advertir, de manera general, que en las valoraciones realizadas, las pérdidas inesperadas en la relación Mexbol e Ibex-35 son mayores que en la relación Mexbol y Dow Jones. Lo que puede deberse a que el mercado mexicano depende cada vez más de los acontecimientos del mercado español. Es importante remarcar que las series de rendimientos no se distribuyen ni de manera extrema ni de manera normal continuamente, por lo que sería necesario encontrar un equilibrio con ambas distribuciones, para así tratar de manera específica cada nueva observación.

Como consecuencia del tercer capítulo, se sugieren algunas líneas abiertas de investigación, entre las que se pueden destacar la medición del contagio financiero, la utilización de modelos de correlación dinámicas condicionales e incorporar variables macroeconómicas a las valoraciones. La primera línea se plantea por la necesidad de saber si en periodos de crisis financieras, existe realmente el contagio financiero entre países, fundamentalmente entre los emergentes, además de poder comprobar en caso de haber contagio, si es de carácter débil o fuerte. La segunda línea de investigación surge de la pregunta de qué ocurre con las valoraciones cuando se tienen en cuenta las variaciones de la correlación en el tiempo. Este análisis se podría llevar a cabo utilizando los modelos de Correlaciones Dinámicas Condicionales (DCC). Pudiendo hacer un análisis comparativo entre la utilización de correlaciones lineales, cópulas financieras y modelos DCC. Con el objetivo de valorar los riesgos con tres instrumentos de dependencia diferentes. La tercera línea aparece porque sería interesante incluir variables macroeconómicas a las estimaciones, tales como las expectativas, la variabilidad de los tipos de interés y la evolución de la inflación y/o del IPC.

En el cuarto y último capítulo, se propone ajustar los rendimientos combinando la distribución normal y de valor extremo, con la finalidad de tratar específicamente las observaciones, es decir, en periodos de alta volatilidad se supone que los rendimientos se distribuyen de manera extrema y el resto de observaciones asumen normalidad. Respecto a las máximas pérdidas posibles, se ha podido observar que éstas son mayores que las obtenidas en los capítulos previos, pero esta aproximación se acerca favorablemente a los resultados obtenidos de forma empírica, ya que, de forma general, los rendimientos financieros no siguen una única distribución, es decir, las series de rendimientos no se comportan de forma normal o extrema, sino que el comportamiento es cambiante a través del tiempo.

La principal desventaja de esta aproximación es que no se pueden realizar análisis retrospectivos, *backtesting*, así que solo se han contrastado los resultados

con lo obtenidos de forma empírica. Sin embargo, se insiste en que esta nueva aproximación se considera adecuada, acertada y brinda beneficios en cuanto a la predicción respecto a las metodologías tradicionales o a las metodologías que asumen una única distribución para toda una serie temporal de rendimientos, conduciendo a la posibilidad de mejorar la cobertura de los riesgos a los que continuamente se está expuesto.

De este capítulo se sugieren dos líneas abiertas de investigación. La primera es encontrar una forma de que los umbrales de decisión se puedan obtener automáticamente, es decir, que los umbrales puedan obtenerse endógenamente del modelo de valoración. La segunda línea surge de la pregunta de si es posible realizar análisis retrospectivos *backtesting*, en caso afirmativo, de que manera incluirlos en el modelo de forma eficiente.

Bibliografía

- [1] Aas, K. (2004); Modelling the Dependence Structure of Financial Assets: A Survey of Four Copulas. Disponible en <http://www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA2204b.pdf>.
- [2] Acerbi, C., y Tasche, D. (2001); Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. *Economic Notes* 31, 379-388.
- [3] Acerbi, C., Nordio, C. y Sirtori, C. (2008); Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management. Disponible en <http://www.gloriamundi.org/ShowTracking.asp?ResourceID=453055940>.
- [4] Alexander, C. (2008); *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics*, Vol II. John Wiley & Sons.
- [5] Alexander, C. (2008); *Market Risk Analysis: Value at Risk Models*, Vol IV. John Wiley & Sons.
- [6] Alonso, J. y Arcos, M. (2005); *Valor en Riesgo: Evaluación del Desempeño de Diferentes Metodologías para 7 Países Latinoamericanos*. Fondo de Investigaciones de la Universidad Icesi. Cali, Colombia.
- [7] Aragonés, J. y Blanco, C. (2000); *Valor en Riesgo: Aplicación a la gestión empresarial*. Ediciones Pirámide.
- [8] Arregui, G. (2004); Los Modelos Implícitos de Valoración de Opciones. *Cuadernos de Gestión* Vol. 4. N.º 2, 77-93

-
- [9] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. y Heath, D. (1999); Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.
- [10] Bali, T. G. (2007); A Generalized Extreme Value Approach to Financial Risk Measurement. *Journal of Banking and Finance* 39, 1614-1649.
- [11] Balkema, A. A. y de Haan, L. (1974); Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability* 2, 792-804.
- [12] Berkowitz, J. y O'Brien, J. (2002); How Accurate are the Value at Risk Models at Commercial Banks. *Journal of Finance* 57, 1093-1112.
- [13] Black, F. G. y Scholes, M. (1973); The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 635-654.
- [14] Blum, P., Dias, A. y Embrechts, P. (2002); The ART of Dependence Modelling: the Latest Advances in Correlation Analysis. Swiss Federal Institute of Technology, Switzerland.
- [15] Blyth, S. (1996); Out of Line. *Risk*, 9(10), 82-84.
- [16] Bollerslev, T. (1986); Generalised Autorregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- [17] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. y Roncalli, T. (2002); Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications. Disponible en SSRN:<http://ssrn.com/paper=1032533>.
- [18] Borrell, M., Murillo, C., Pérez, J. y Torra, S. (1997); *Estadística financiera: Aplicación a la Formación y Gestión de Carteras de Renta Variable*. Editorial Ramón Areces.
- [19] Brooks C. (2002); *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press.

- [20] Bundi, D. (2004); Copulas in Finance. *African Institute for Mathematical Sciences*. Cadiz Financial Strategists.
- [21] Canela, M. y Pedreira, E. (2005); Modelling Dependence in Latin American Markets Using Copula Functions. *Working Paper*, disponible en http://wwwtest.aup.edu/lacea2005/system/step2_php/papers/pedreira_eped.pdf.
- [22] Casas, J.M. (1996); *Tablas y Fórmulas Estadísticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.
- [23] Cassidy, C. y Gizycki, M. (1997); Measuring Traded Market Risk: Value at Risk and Backtesting Technique. Research Discussion Paper 9708, Reserve Bank of Australia.
- [24] Cech, C. (2006); Copula-Based Top-Down Approches in Financial Risk Aggregation. *Working Paper Series 32*, University of Applied Sciences of Vienna.
- [25] Cherubini, U., Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004); *Copula Methods in Finance*. Wiley Finance.
- [26] Christoffersen, P., Diebold, F. X., y Schuermann, T. (1998); Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management. *Economic Policy Review, Federal Reserve Bank of New York*, 109-118.
- [27] Christoffersen, P., Hahn, J. y Inoue, A. (2001); Testing and Comparing Value at Risk Measures. *Scientific Series, CIRANO Working Papers*.
- [28] Christoffersen, P. y Pelletier, D. (2004); Backtesting Value at Risk: A Duration Based Approach. *Journal of Empirical Finance* 2, 84-108.
- [29] David, H. A. (1980) *Order statistics*. 2ª edición, John Wiley.
- [30] De Lara Haro, A. (2004); *Medición y Control de Riesgos Financieros*. Tercera edición, editorial Limusa.

- [31] Dorey, M. y Joubert, P. (2005); Modelling Copulas: an Overview. Presentado para *The Staple Inn Actuarial Society*.
- [32] Dowd, K. y Fackler, P.(2004); Estimating VaR with Copulas. *Financial Engineering News* 39, 9-21.
- [33] Duffie, D. y Pan, J. (1997); An Overview of Value at Risk. *Journal of Derivatives* 4, 7-49.
- [34] Duffie, D. y Singleton, K. (2003); *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*. Princeton Series in Finance.
- [35] Embrechts, P. (2008). Copulas: A Personal View. *Journal of Risk Insurance*, de próxima aparición.
- [36] Embrechts, P., McNeil, A. y Straumann D. (1999); Correlation: Pitfalls and Alternatives. *Risk* 5, 69-71.
- [37] Embrechts, P., Kluppelberg y Mikosch, T. (1997); *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [38] Embrechts, P., McNeil, A. y Straumann, D. (2002); Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (Edited by M. Dempster). Cambridge University Press 176-223.
- [39] Embrechts, P., Lindskog, F. y McNeil, A. (2003); Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (Edited by S. T. Rachev), Elsevier 329-384.
- [40] Embrechts, P., McNeil, A., y Frey, R. (2005); *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

- [41] Embrechts P., Furrer H. y Kaufmann R. (2009); Different Kinds of Risk. *Handbook of Financial Time Series*, Eds. Andersen, Davis, Kreiss and Mikosch 729-751.
- [42] Engle, R. F. (1982); Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- [43] Engle, R. F. y T Bollerslev (1986); Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews* 5, 57-61.
- [44] Etheridge, A. (2002); *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University Press.
- [45] Fang, K. T., Kotz, S. y Ng, K. W. (1987); *Symetric Multivariate and Related Distributions*, London: Chapman & Hall.
- [46] Fisher, R. y Tippett, L. (1928); Limiting Forms of Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24, 180-190.
- [47] Frey, R. y McNeil, A. (2003); Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk. *J. Risk* 6/1, 59-92.
- [48] Garcia, J. y Martínez, J. (2005); Enfoques Diferentes para Medir el Valor en Riesgo (VaR) y su Comparación. Aplicaciones. *Working Paper, XIII Jornadas de ASEPUMA*.
- [49] Garman, M. y Klass, M. (1980); On the Estimation of Security Volatilities from Historical Data. *Journal of Bussines* 5, 367-378.
- [50] Genest, C. y MacKay, J. (1986); The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *The American Statistician* 40, 280-283.

-
- [51] Gilli M., Këllezi E. (2006); An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics* 27, 207-228.
- [52] Global Derivatives Study Group (1993); *Derivatives: Practices and Principles*. Washington, D.C.
- [53] Gnedenko, B. V. (1943); Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford 2nd series, 38, 45-71.
- [54] Goorbergh, R. Genest, C. y Werker, M. (2005); Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models. *Insurance, Math. Econ* 37, 101-114.
- [55] Green, W. (2003); *Econometric Analysis*. 5ª edición, Prentice Hall
- [56] Gujarati, D. (2001); *Econometría*. 3ª edición, McGraw Hill.
- [57] Hamerle, A. y Rosch, D. (2005); Misspecified Copulas in Credit Risk Models. How Good is Gaussian? *J. Risk* 8, 35-47.
- [58] Hotta, L.K.; Lucas, E.C. y Palaro, H.P. (2006). "Estimation of VaR using copulas and extreme value theory". *Cass Business School Research Paper*. City University London. Disponible en <http://papers.ssrn.com>.
- [59] Hull, J. C. (2006); *Options, Futures and Other Derivatives*. 6ª edición, Prentice Hall.
- [60] Hull, J. C. (2007); *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall.
- [61] Hull, J. y White, A. (1987); The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.
- [62] Hull, J. y White, A. (1990); Pricing Interest Rate Derivatives, *The Review of Financial Studies* 3, 573-592.

- [63] Jenkinson, A. F. (1955); The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) of Meteorological elements, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81, 158-171.
- [64] Joe, H. (1997); *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall.
- [65] Jorion, P. (1996); *Valor en Riesgo: El Nuevo Paradigma para el Control de Riesgos con Derivados*. Universidad de California, Irvine. McGraw-Hill.
- [66] Jorion, P. (1997); *Valor en Riesgo*. Universidad de California, Irvine. McGraw-Hill.
- [67] Jorion, P. (2003); *Financial Risk Manager Handbook*. 2ª edición, Wiley Finance.
- [68] Kibzun, A. y Kuznetsov, E. (2006): Analysis of Criteria VaR and CVaR, *Journal of Banking and Finance* 30, 779-796.
- [69] Kisacik, A. (2006); High Volatility, Heavy Tails and Extreme Values in Value at Risk Estimation. Middle East Technical University. Disponible en www3.iam.metu.edu.tr/iam/images/a/a6/Aysekisacikterm.pdf
- [70] Kole, E., Koedijk, K. y Verbeek, M. (2005); Testing Copulas to Model Financial Dependence. Artículo disponible en http://symposium.fbv.uni-karlsruhe.de/10th/papers/Kole_Koedijk_Verbeek%20-%20Testing%20copulas%20to%20model%20financial%20dependence.pdf
- [71] Kole, E., Koedijk, K. y Verbeek, M. (2007); Selecting Copulas for Risk Management. *Journal of Banking and Finance* 31, 2405-2423.
- [72] Kupiec, P. (1995); Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives* 3, 73-84.

-
- [73] Longin, F. y Solnik, B. (2001); Extreme Correlation of International Equity Markets. *Journal of Finance* 56, 649-676.
- [74] Lopez, J. A. (1999); Regulatory Evaluation of Value at Risk Models. *Journal of Risk* 1, 37-64.
- [75] Manistre, J. (2003); Risk Dependency Research: A Progress Report". Paper presented at Enterprise Risk Management Symposium, Washington DC.
- [76] Markowitz, H. (1952); Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- [77] Melo, L. y Becerra, O. (2005); *Medidas de Riesgo, Característica y Técnicas de Medición: una Aplicación del VaR y el ES a la Tasa Interbancaria de Colombia*. Banco de la Republica, Gerencia Técnica.
- [78] Merton, R. C. (1973); Theory of option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- [79] J.P. Morgan & Co., Inc., Arthur Andersen & Co. SC, and Financial Engineering Limited, The J.P. Morgan/Arthur Andersen Guide to Corporate Exposure Management, *RISK* (agosto 1994).
- [80] J. P. Morgan (1995); *RiskMetrics Technical Document*. Morgan Guaranty Trust.
- [81] J. P. Morgan (1996). *RiskMetrics-Technical Document*. Diciembre. Company, Market Risk Research. Tercera Edition.
- [82] Nassaj, F. y Strelen J. Ch. (2006); Generating simulation input with approximate copulas. *Modelling and Simulation 2006, Proceedings of the European Simulation and Modelling Conference, Toulouse*. ed. A. Nketsa, M. Paludetto, and C. Bertelle, 88-93. Ghent: Eurosis-ETI.
- [83] Nelsen, R. B. (1999); *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.

BIBLIOGRAFÍA

- [84] Nelson, D.B. (1990); ARCH Models as Diffusion Approximations, University of Chicago, Chicago, IL, *Journal of Econometrics* 45, 7-38.
- [85] Novales, A. (1993); *Econometría*. 2^a edición, McGraw Hill.
- [86] Novales, A. (1997); *Estadística y Econometría*. McGraw Hill.
- [87] Office of the Comptroller of the Currency, (1993). *Banking Circular BC-277: Risk Management of Financial Derivatives*. Washington, D.C.: Comptroller of the Currency.
- [88] Ozun, Alper y Cifter, Atilla, 2007. Portfolio Value-at-Risk with Time-Varying Copula: Evidence from the Americas, *MPRA Paper 2711*, University Library of Munich, Germany.
- [89] Parra, H. y Hotta, L. (2006); Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk. *Journal of Data Science* 4, 93-115.
- [90] Patton, A. (2002); Skewness, Asymmetric Dependence, and Portfolios. Working paper, University of California, San Diego.
- [91] Peña, I. (2002); *La Gestión de Riesgos Financieros de Mercado y de Crédito*. Prentice Hall.
- [92] Pickands, J. I. (1975); Statistical Inference Using Extreme Value Order Statistics. *Annals of Statistics* 3, 119-131.
- [93] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (1999); Optimization of Conditional Value at Risk. *Research Report 99-4* Center for Applied Optimization, University of Florida.
- [94] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2001); Conditional Value at Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance* 26, 1443-1471.

-
- [95] Rodriguez J. (2007); Measuring Financial Contagion: A Copula Approach. *Journal of Empirical Finance* 14, 401-423.
- [96] Saunders, A. y Allen, L. (2002); *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*. 2ª edición, John Wiley & Sons
- [97] Shaw, J. (1997); Beyond VaR and Stress Testing, in VaR, Understanding and Applying Value at Risk. *Risk Publications* 211-224.
- [98] Simons, K. (1996); VaR-New Approaches to Risk Management. *New England Economic Review*, 3-13.
- [99] Sklar, A. (1959); Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges, *Publications de L'Institut de Statistique de L'Université de Paris* 8, 229-231.
- [100] Sullivan, J., Brooks, R. y Stoumbos, Z. (2003); Assessing the Accuracy of Value at Risk. Working Paper Rutgers University.
- [101] Tang, A. y Valdez, E. (2009); Economic Capital and the Aggregation of Risks Using Copulas. Clasificación JEL G22, Working Paper, disponible en <http://ssrn.com/abstract=1347675>.
- [102] Torrero, A. (2008); La Crisis Financiera Internacional. Documento de trabajo 08/2008, Instituto Universitario de Análisis Económico y Social. Universidad de Alcalá.
- [103] Torres, G. y Olarte, A. (2007); *Valor en Riesgo desde un Enfoque de Cópulas*. Universidad de Colombia.
- [104] Tsay, R.S. (2005); *Analysis of Financial Time Series*. 2ª edición. Wiley Interscience.
- [105] Vaz de Melo, B. y Martins de Souza, R. (2004); Measuring Financial Risks with Copulas. *International Review of Financial Analysis* 13, 27-45.

BIBLIOGRAFÍA

- [106] Wilmott, P. (1998); *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons.
- [107] Wilmott, P. (2006); *Quantitative Finance*. 2ª edición, John Wiley & Sons.