UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Teoría de Funciones

TESIS DOCTORAL

Algunas propiedades de C(X E) y otros espacios de funciones vectoriales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Javier Mendoza Casas

DIRECTOR:

Fernando Bombal Gordón

Madrid, 2015

José Javier Mendoza Casas

ALGUNAS PROPIEDADES DE C(X;E) Y OTROS ESPACIOS DE FUNCIONES VECTORIALES

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 170/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-24642-1982

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

"ALGUNAS PROPIEDADES DE C(X;E) Y DE OTROS ESPACIOS DE FUNCIONES VECTORIALES"

José Mendoza Casas

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Madrid, Junio de 1981

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi sincero agradecimiento

- Al Profesor Fernando Bombal Gordón por haberme dirigido este trabajo,
- A la Profesora Pilar Cembranos Díaz por el continuo estímulo y ayuda de todo tipo que me ha prestado,
- A los Profesores R. Hollstein, A. Marquina, J. Mujica y J. Schmets por la información que amablemente me han proporcionado durante la realización de este trabajo, y
- A los compañeros del Dto. de Teoría de Funciones, que me han ayudado y animado durante este tiempo.

INTRODUCCION

Sea X un espacio topológico completamente regular y Hausdorff y sea E un espacio localmente convexo y Hausdorff (de forma abreviada e.l.c.). Denotaremos por C(X;E) (simplemente C(X) si E es el cuerpo escalar de los números reales o complejos) al espacio vectorial de las funciones continuas de X en E.

Los espacios de funciones, y más concretamente los espacios de funciones continuas, han sido siempre uno de los principales campos de aplicación del Análisis Funcional. Además, con frecuencia, han contribuido al desarrollo de la teoría general de espacios localmente convexos y han resuelto algunos de los problemas que esta teoría tenía planteados. A lo largo del tiempo se han considerado distintos espacios de funciones y se les ha dotado de diferentes topologías. En la presente memoria, aunque vamos a estudiar varios espacios de funciones con valores vectoriales, nos centraremos en el estudio de C(X;E) supuesto siempre dotado de la topología compacto-abierta (o "de convergencia uniforme sobre compactos"), e.d. de la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\|\ \|_{Kp} : K\in\mathcal{K}(X),\ p\in P\}$ donde $\mathcal{K}(X)$ es la familia de los subconjuntos compactos de X, P es la familia de las seminormas continuas en E y

$$\|\phi\|_{Kp} = \sup\{p(\phi(x)) : x\in K\} \qquad \forall\phi\in C(X;E)\ \forall K\in\mathcal{K}(X)\ \forall p\in P.$$

Concretamente queremos estudiar problemas del tipo siguiente: Dada una propiedad (P) de espacio localmente convexo (p.e. "ser metrizable", "ser bornológico", etc.) ¿qué espacios topológicos X y qué espacios localmente convexos E son tales que C(X;E) tiene la propiedad (P)?.

Naturalmente el tipo de problemas que acabamos de plantear fue estudiado en primer lugar en el caso escalar, para C(X). En este caso, dada una propiedad (P) de espacio localmente convexo se trataba de determinar qué espacios topológicos X son tales que C(X) tiene la propiedad (P). Los primeros resultados importantes obtenidos en esta línea son los famosos teoremas de Nachbin [22] y Shirota [33] (1954). Estos autores, simultánea e independientemente, caracterizaron cuándo el espacio C(X) es tonelado y cuándo es bornológico (ver 5.2. y 13.6. de la presente memoria). Debemos señalar que la importancia de estos resultados se debe a que, aparte de su interés intrínseco, permitieron resolver un problema planteado dentro de la teoría general de espacios localmente convexos: Es claro que no todo e.l.c. bornológico es tonelado (entre los espacios normados es fácil encontrar ejemplos), sin embargo en 1954 era un problema abierto si todo e.l.c. tonelado debe ser bornológico. Gracias a sus caracterizaciones, Nachbin y Shirota pudieron responder negativamente a esta cuestión dando un ejemplo de un espacio topológico X tal que C(X) es tonelado pero no bornológico.

En 1958 Warner [37] publica un artículo bastante completo sobre C(X). En este trabajo caracteriza cuándo C(X) tiene una serie de propiedades de e.l.c.: ser metrizable, ser completo, ser infratonelado, etc. Hay que señalar que de nuevo un estudio sobre C(X) proporciona respuesta a un problema planteado en el marco de la teoría general de los espacios localmente convexos: Grothendieck en su famoso artículo "Sur les espaces (F) et (DF)" [11] de 1954 había planteado el problema de si todo e.l.c. que tiene una sucesión fundamen tal de acotados y verifica la condición de convergencia de Mackey debe tener también la propiedad estricta de Mackey. Mediante sus caracterizaciones Warner pudo dar un ejemplo (de un espacio C(X) naturalmente) que respondía negativamente a la cuestión.

Aunque todavía quedan algunos problemas abiertos en C(X) (p.e. no está caracterizado cuándo C(X) es un espacio de Pták) podemos decir que su estudio queda prácticamente terminado en 1971 cuando De Wilde y Schmets [6] caracterizan cuándo este espacio es ultrabornológico.

Desde hace unos años se plantea el estudio del espacio C(X;E). En este sentido hay que citar los trabajos de Hollstein, Mujica, Prolla, Schmets y Vidossich (ver bibliografía). Ya en 1970 Vidossich [36] publica un trabajo sobre la separabilidad de C(X;E) que además mejora las caracterizaciones dadas por Warner acerca de cuándo C(X) es separable (Hollstein [14] más tarde hace notar que basándose en resultados posteriores sobre ε-tensor productos es inmediato caracterizar cuándo C(X;E) es separable). Sin embargo podemos decir que es Schmets (ver bibliografía) quien comienza el estudio sistemático de C(X;E). Fundamentalmente ha estudiado cuándo este espacio es bornológico, ultrabornológico, tonelado o infratonelado. Pronto prueba que si C(X;E) es bornológico (resp. ultrabornológico, tonelado, infratonelado) entonces C(X) y E son también bornológicos (resp. ultrabornológicos, tonelados, infratonelados). Además obtiene entre otros los siguientes resultados:

- Si C(X) es bornológico y E es metrizable (resp. Fréchet) entonces C(X;E) es bornológico (resp. ultrabornológico).

- Si $C(X)$ es tonelado (resp. infratonelado) y E es Fréchet (resp. metrizable), entonces $C(X;E)$ es tonelado (resp. infratonelado).

Hay que decir también que para obtener estos resultados Schmets desarrolla toda una teoría sobre el espacio $C(X;E)$: generaliza algunos resultados de Nachbin, Shirota y Warner; estudia el dual de $C(X;E)$; etc. En concreto a nosotros más que los resultados que dimos más arriba nos interesará esta teoría que desarrolla para obtenerlos.

Mujica [20,21] ha estudiado básicamente cuestiones de límites inductivos en $C(X;E)$. Concretamente problemas del siguiente tipo: si E es límite inductivo de una sucesión (E_n) de espacios localmente convexos ¿qué relación existe entre $C(X;E)$ y el límite inductivo de la sucesión $(C(X;E_n))$? (ver 8.10. y 14.9. de la presente memoria). Este estudio le permite dar algunos otros resultados acerca de cuándo $C(X;E)$ es tonelado, infratonelado, etc.

Dentro del tipo de problemas que nos hemos marcado, Prolla [26] ha caracterizado cuándo $C(X;E)$ tiene la propiedad de aproximación, mejorando algunos resultados de Bierstedt [2,3].

Hollstein [13,14] ha estudiado otras propiedades de $C(X;E)$: cuándo es un (DF)-espacio, cuándo es cuasinormable, etc., y ha obtenido algunos resultados acerca de cuándo $C(X;E)$ es tonelado o infratonelado.

Por último debemos señalar que van a ser de gran importancia para nosotros las ideas expuestas por Marquina y Sanz Serna en [17] (ver sección 2), donde caracterizan cuándo $c_0(E)$, el espacio de las sucesiones convergentes a cero en E dotado de la topología de la convergencia uniforme, es infratonelado.

En [14] y [19] se hace notar que C(X) y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de C(X;E). En general esto nos permite asegurar que si C(X;E) tiene una propiedad (P) de e.l.c. entonces C(X) y E también tienen la propiedad (P). Esto sugiere que para algunas propiedades (P) de e.l.c. sea cierto el siguiente resultado:

(*) "C(X;E) tiene la propiedad (P) si y sólo si C(X) y E la tienen". Este es por ejemplo el planteamiento de Hollstein en [14] (Obsérvese que la afirmación de que C(X) tiene una propiedad (P), por los resultados conocidos sobre C(X), se traduce inmediatamente en propiedades del espacio topológico X).

Efectivamente (*) es cierto para un buen número de propiedades (P), en unos casos trivialmente y en otros no. Por ejemplo es cierto para: "ser metrizable", "ser normado", "ser separable", "ser un (DF)-espacio", "ser nuclear", etc. En [14] Hollstein, aparte de los resultados nuevos que obtiene, hace un buen resumen de la situación de este problema. Sin embargo para algunas propiedades (*) es falso, en concreto para "ser tonelado", "ser infratonelado", "ser bornológico" y "ser ultrabornológico", como ha probado un ejemplo obtenido independientemente por Dierolf [32] y por Marquina y Sanz Serna [17] (ver 8.1.). Y parece ser que es en estos casos donde se plantean los problemas más interesantes.

Pasamos ahora a examinar el contenido de la presente memoria. Para esto nos conviene introducir algunas notaciones: Sea Σ un álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto no vacío Ω. Denotaremos por $S(\Sigma;E)$ al espacio vectorial de las aplicaciones Σ-simples defipacios localmente convexos (metrizables, (DF)-espacios, etc.), y como consecuencia de esto obtendremos algunas mejoras de resultados conocidos.

Concluido este estudio del problema de caracterizar cuándo C(X;E) y otros espacios de funciones son tonelados o infratonelados, dedicamos el capítulo IV a estudiar cuándo C(X;E) tiene algunas otras propiedades. Concretamente caracterizamos:

- cuándo C(X;E) posee una sucesión fundamental de acotados, y
- cuándo C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey,

y damos nuevas demostraciones de dos resultados probados recientemente [14,26]:

- C(X;E) es un (DF)-espacio si y sólo si C(X) y E lo son
- C(X;E) tiene la propiedad de aproximación si y sólo si E la tiene.

Para terminar, en el capítulo V damos algunas respuestas parciales al problema de determinar cuándo C(X;E) es bornológico y caracterizamos cuándo S(Σ;E) y otros espacios lo son.

CAPITULO I: Preliminares.

1. $B(\Sigma;E)$, $C_c(X;E)$, $C(X;E)$ y sus duales.

1.1. Notaciones: En la presente memoria E denota, salvo indicación expresa, un espacio localmente convexo y Hausdorff (e.l.c.) sobre $\mathbb{K}$, el cuerpo escalar de los números reales o complejos.

Supondremos siempre Hausdorff los espacios topológicos que consideremos.

Sea Σ un álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto Ω. Denotamos por $S(\Sigma;E)$ al espacio vectorial de las funciones Σ-simples definidas en Ω y con valores en E. Esto es, $S(\Sigma;E)$ está formado por las funciones del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(.)e_i$$

donde $(A_i)_{i=1}^{n} \subset \Sigma$ es una partición finita de Ω, χ_A es la función característica de A y $(e_i)_{i=1}^{n} \subset E$.

Denotamos por $B(\Sigma;E)$ al espacio vectorial de las funciones definidas en Ω con valores en E que se pueden aproximar uniformemente por funciones de $S(\Sigma;E)$. Es decir, $\phi \in B(\Sigma;E)$ si y sólo si ϕ es una aplicación de Ω en E tal que para toda seminorma continua p en E existe $T \in S(\Sigma;E)$ verificando

$$p(\phi(x)-T(x)) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Supondremos siempre $B(\Sigma;E)$ y $S(\Sigma;E)$ dotados de la topología de la convergencia uniforme, es decir de la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\| \ \|_p : \text{p es seminorma continua en E}\}$, donde

$$\|\phi\|_p = \sup \{p(\phi(x)) : x \in \Omega\} \quad \forall \phi \in B(\Sigma;E).$$

Por la propia definición es claro que $S(\Sigma;E)$ es un subespacio denso de $B(\Sigma;E)$.

Sea X un espacio topológico localmente compacto (y Hausdorff), denotaremos por $\underline{C_c(X;E)}$ al espacio vectorial de las funciones continuas de X en E con soporte compacto. Recordemos que si ϕ es una función continua de X en E se llama soporte de ϕ, y se nota sop(ϕ), al conjunto

$$\overline{\{x\in X : \phi(x)\neq 0\}}$$

Salvo que indiquemos lo contrario supondremos $C_c(X;E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme.

Sea X un espacio topológico completamente regular (y Hausdorff), denotaremos por $\underline{C(X;E)}$ al espacio vectorial de las funciones continuas de X en E. Salvo indicación expresa supondremos $C(X;E)$ dotado de la topología compacto-abierta (de convergencia uniforme sobre compactos) que es la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\| \ \|_{Kp}$: p es una seminorma continua en E y $K\in \mathcal{K}(X)\}$, donde $\mathcal{K}(X)$ es la familia de los subconjuntos compactos de X y

$$\|\phi\|_{Kp} = \sup\{p(\phi(x)) : x\in K\} \quad \forall\phi\in C(X;E).$$

Como es habitual en el caso en que E sea el cuerpo escalar de los números reales o complejos, en vez de notar $B(\Sigma;\mathbb{K})$, $C_c(X;\mathbb{K})$, etc. notaremos simplemente $B(\Sigma)$, $C_c(X)$, etc.

Naturalmente cuando hablemos de $C_c(X)$ o de $C_c(X;E)$ entenderemos que X es localmente compacto. En cambio al referirnos a $C(X)$ o $C(X;E)$ en general supondremos X simplemente completamente regular.

En la presente memoria cuando hablemos de duales nos referiremos a duales topológicos.

Shuchat, Swong y otros se han ocupado en distintos trabajos (ver bibliografía) de problemas de representación integral de operadores lineales definidos en los espacios $B(\Sigma;E)$ y $C_c(X;E)$, y en particular han obtenido representaciones de sus duales mediante espacios de medidas. Schmets en [30] da también una representación de este tipo del dual de $C(X;E)$. El objetivo principal de esta sección es recoger algunos de estos resultados para disponer de buenas representaciones de los duales de los espacios en los que vamos a trabajar. Como se verá se trata de dar teoremas tipo Riesz-Singer (teoremas 1.9. y 1.13.) y tipo Fichtenholz-Kantorovich-Hildebrant (teorema 1.6.). Al final de la sección también estudiaremos las relaciones entre los espacios de medidas que aparecen como duales y otros espacios de medidas naturales.

<u>1.2. Definición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m:\Sigma \longrightarrow E$ una aplicación. Diremos que m es una medida si

$$m(A_1 \cup A_2)=m(A_1)+m(A_2)$$

para todo par de conjuntos A_1, $A_2 \in \Sigma$ disjuntos.

Es claro que si m es una medida definida en Σ y con valores en E', el dual de E, la aplicación

$$\begin{aligned} S(\Sigma;E) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \sum_i \chi_{A_i}(.)e_i &\longrightarrow \sum_i \langle e_i, m(A_i)\rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal (no necesariamente continua) en $S(\Sigma;E)$. Para que la forma lineal en cuestión sea continua debemos exigirle a m una condición adicional.

1.3. Definición: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω, $m:\Sigma \longrightarrow E'$ una medida y p una seminorma continua en E. Para cada $A\in\Sigma$ definimos

$$V_p m(A) = \operatorname{Sup}\left\{ \sum_i \|m(A_i)\|_p \right\} = \operatorname{Sup}\left\{ \sum_i |\langle e_i, m(A_i)\rangle| \right\}$$

donde

$$\| e' \|_p = \operatorname{Sup}\left\{ |\langle e,e'\rangle| \ : \ e\in E \text{ y } p(e)\leq 1 \right\} \qquad \forall e'\in E'$$

y tomamos el supremo en el primer caso entre las particiones finitas (A_i) de A en elementos de Σ, y en el segundo caso entre las familias finitas $((e_i,A_i))$ tales que $p(e_i)\leq 1$ y (A_i) es una partición finita de A en elementos de Σ.

1.4. Definición: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E'$ una medida. Diremos que m verifica la condición (C) si existe alguna seminorma continua p en E tal que

$$V_p m(\Omega) < +\infty$$

Se puede comprobar fácilmente que la forma lineal definida más arriba en $S(\Sigma;E)$ es continua si y sólo si m verifica la condición (C). Y en este caso, por densidad, esta forma lineal y continua admite una única extensión lineal y continua a $B(\Sigma;E)$, que como es habitual denominaremos "integral respecto de m", y escribiremos

$$\int_\Omega \phi \ \ dm \qquad \forall\phi\in B(\Sigma;E)$$

Hemos definido así una integración en $B(\Sigma;E)$ respecto de medidas $m: \Sigma \longrightarrow E'$ que verifican la condición (C). Damos a continuación un par de propiedades elementales de esta integración:

1.5. Proposición: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E'$ una medida que verifica la condición

(C), entonces:

(i) Si $\phi \in B(\Sigma;E)$ y p es una seminorma continua en E entonces

$$\left| \int_{\Omega} \phi \, dm \right| \leq V_p m(\Omega) \, \|\phi\|_p$$

(ii) Si $f \in B(\Sigma)$ y $e \in E$ entonces

$$\int_{\Omega} f(.)e \, dm = \int_{\Omega} f \, dm_e$$

donde m_e es la medida escalar definida en Σ por

$$m_e(A) = \langle e, m(A) \rangle \qquad \forall A \in \Sigma.$$

<u>Demostración</u>: Trivial.

Denotaremos por <u>$M(\Sigma;E')$</u> al espacio vectorial de las medidas definidas en Σ, con valores en E', que verifican la condición (C). Ya hemos hecho notar (y se sigue de la proposición anterior, parte (i)) que todo elemento de $M(\Sigma;E')$ lo podemos interpretar como un elemento de $B(\Sigma;E)'$, el dual de $B(\Sigma;E)$. Además se tiene el siguiente resultado:

<u>1.6. Teorema [34]</u>: Sea Ω un conjunto no vacío y Σ un álgebra de subconjuntos de Ω, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} M(\Sigma;E') &\longrightarrow B(\Sigma;E)' \\ m &\longrightarrow \tau_m \end{aligned}$$

es un isomorfismo (algebraico), siendo $\tau_m(\phi) = \int_{\Omega} \phi \, dm$ para cada $\phi \in B(\Sigma;E)$.

Sea ahora X un espacio topológico localmente compacto y sea $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de X. Es conocido que $C_c(X;E)$ es un subespacio de $B(\mathcal{B}(X);E)$. Para describir su dual conviene dar un par de definiciones:

<u>1.7. Definición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida. Diremos que m es contablemente aditiva si para cada sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ de conjuntos disjuntos, se tiene

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ se entiende convergente en el e.l.c. E.

<u>1.8. Definición</u>: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de X y $m:\mathcal{B}(X) \longrightarrow E$ una medida. Diremos que m es regular si para cada entorno de cero U en E y cada $A\in\mathcal{B}(X)$ existe un compacto $K\subset A$ y un abierto $G\supset A$ tales que

$$m(B)\in U \quad \text{si } B\in\mathcal{B}(X) \text{ y } B\subset G\setminus K.$$

Sea X un espacio topológico, notaremos por <u>$M(X;E')$</u> al espacio vectorial de las medidas $m\in M(\mathcal{B}(X);E')$ que son débilmente contablemente aditivas y débilmente regulares (e.d. contablemente aditivas y regulares cuando en E consideramos la topología débil $\sigma(E',E)$). Se tiene:

<u>1.9. Teorema [34]</u>: Sea X un espacio topológico localmente compacto, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} M(X;E') & \longrightarrow & C_c(X;E)' \\ m & \longrightarrow & \tau_m \end{array}$$

es un isomorfismo (algebraico), siendo $\tau_m(\phi) = \int_{\Omega} \phi \, dm$ para cada $\phi\in C_c(X;E)$.

Vamos ahora a represetar el dual de $C(X;E)$.

<u>1.10. Definición</u>: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra

de los subconjuntos de Borel de X y $m: \mathcal{B}(X) \longrightarrow E$ una medida regular. Diremos que m tiene soporte compacto si existe un subconjunto compacto K de X tal que

$$(*) \quad m(B) = 0 \quad \text{si } B \in \mathcal{B}(X) \ \text{ y } \ B \cap K = \emptyset.$$

<u>1.11. Proposición</u>: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de X y $m: \mathcal{B}(X) \longrightarrow E$ una medida regular con soporte compacto, entonces existe un compacto mínimo, sop(m), verificando (*) de la definición anterior. Además si $x \in X$, $x \in \text{sop}(m)$ si y sólo si para cada entorno U de x existe $B \subset U$, $B \in \mathcal{B}(X)$, tal que $m(B) \neq 0$.

<u>Demostración</u>: Sea $\text{sop}(m) = \bigcap_{\mathcal{K}_m} K$ donde $\mathcal{K}_m$ es la clase de los subconjuntos compactos K de X que verifican (*). Se verifica:

(i) Si $K_o \subset X$ es compacto, K_1, $K_2 \in \mathcal{K}_m$ y $K_o \cap K_1 \cap K_2 = \emptyset$, entoces $m(K_o) = 0$. Pues

$$m(K_o) = m(K_o \cap (K_1 \cup K_2)) + m(K_o \setminus (K_1 \cup K_2)) =$$
$$= m(K_o \cap K_1) + m(K_o \cap K_2) = 0.$$

(ii) Si $K_o \subset X$ es compacto, $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_m$ y $K_o \cap K_1 \cap \ldots \cap K_n = \emptyset$, entonces $m(K_o) = 0$. Se deduce inmediatamente de lo anterior por inducción.

(iii) Si $K_o \subset X$ es compacto y $K_o \cap \text{sop}(m) = \emptyset$, entonces $m(K_o) = 0$. Pues si $K_o \cap \text{sop}(m) = K_o \cap (\bigcap_{\mathcal{K}_m} K) = \bigcap_{\mathcal{K}_m} (K_o \cap K) = \emptyset$, entonces $\{K_o \cap K : K \in \mathcal{K}_m\}$ es una familia de compactos que no tiene la propiedad de la intersección finita, e.d. existen $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_m$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} (K_o \cap K_i) = K_o \cap (\bigcap_{i=1}^{n} K_i) = \emptyset$, y por (ii) deducimos que $m(K_o) = 0$.

(iv) $sop(m) \in \mathcal{K}_m$. Pues si $B \in \mathcal{B}(X)$ y $B \cap sop(m) = \emptyset$, por la regularidad de m para todo entorno de cero U en E existe $K_U \subset B$ compacto tal que $m(B \setminus K_U) \in U$, y entonces

$$m(B) = m(K_U) + m(B \setminus K_U) = m(B \setminus K_U) \in U;$$

por tanto $m(B) = 0$.

Obsérvese que de (iv) se deduce inmediatamente la primera parte de la proposición.

Sea ahora $x \in X$, si $x \notin sop(m)$ entonces $X \setminus sop(m)$ es un entorno de x; y para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, $B \subset X \setminus sop(m)$, se tiene $m(B) = 0$. Recíprocamente, si existe un entorno U de x, que podemos suponer abierto, tal que $m(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $B \subset U$, y K es un subconjunto compacto de X verificando (*), entonces $K \setminus U$ es un compacto que también verifica (*), e.d. $K \setminus U \in \mathcal{K}_m$, y por tanto $x \notin sop(m)$.

Sea X un espacio topológico, denotaremos por $\underline{M_o(X;E')}$ al espacio vectorial de las medidas $m \in M(\mathcal{B}(X);E')$ débilmente contablemente aditivas y débilmente regulares con soporte compacto. Esto es, $M_o(X;E')$ es el subespacio de $M(X;E')$ formado por las medidas con soporte compacto.

Sea X un espacio topológico completamente regular, $\phi \in C(X;E)$, $A \in \mathcal{B}(X)$ y $m \in M_o(X;E')$. Si denotamos $K = sop(m)$, es claro que $\phi(.)\chi_{A \cap K}(.) \in B(\mathcal{B}(K);E)$, y si m_K es la restricción de m a la σ-álgebra $\mathcal{B}(K)$, es claro que $m_K \in M(K;E')$. Por tanto podemos definir

$$\int_A \phi \, dm = \int_K \phi(.)\chi_{A \cap K}(.) \, dm_K$$

Se puede comprobar fácilmente que la integral que acabamos de definir es lineal y continua en $C(X;E)$. Damos a continuación algunas de sus propiedades:

1.12. Proposición: Sea X un espacio topológico completamente regular y $m \in M_o(X;E')$, entonces:

(i) Si p es una seminorma continua en E y $V_p m(X)$ es finito, entonces $V_p m(A) = V_p m(A \cap \mathrm{sop}(m))$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.

(ii) Si $\phi \in C(X;E)$ y p es una seminorma continua en E entonces

$$\left| \int_X \phi \, dm \right| \leq V_p m(X) \, \|\phi\|_{\mathrm{sop}(m)p}$$

(iii) Si $f \in C(X)$ y $e \in E$ entonces $\int_A f(.)e \, dm = \int_A f \, dm_e$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, donde como siempre m_e es la medida escalar definida por $m_e(B) = \langle e, m(B) \rangle$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Demostración: trivial.

Por la proposición 1.11. nuestra definición de soporte de una medida coincide con la dada por Schmets ([30] IV Sección), por tanto podemos enunciar:

1.13. Teorema [30]: Sea X un espacio topológico completamente regular, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} M_o(X;E') & \longrightarrow & C(X;E)' \\ m & \longrightarrow & \tau_m \end{array}$$

es un isomorfismo (algebraico), siendo $\tau_m(\phi) = \int_X \phi \, dm$ para cada $\phi \in C(X;E)$.

1.14. Nota: En virtud de los teoremas 1.6., 1.9. y 1.13., podemos identificar los duales $B(\Sigma;E)'$, $C_c(X;E)'$ y $C(X;E)'$ con los espacios de medidas $M(\Sigma;E')$, $M(X;E')$ y $M_o(X;E')$. Por ello en adelante no haremos distinción expresa entre los elementos de estos duales y las medidas que los representan. Por ejemplo si $\tau \in C(X;E)$ llamaremos soporte de τ y notaremos sop(τ) al soporte de la medida $m \in M_o(X;E')$ que represente a τ.

1.15. Ejemplos: Sea $e' \in E'$. Si Ω es un conjunto no vacío, Σ es un álgebra de subconjuntos de Ω y μ es una medida escalar definida en Σ, podemos definir la medida vectorial

$$\mu(.)e : \Sigma \longrightarrow E'$$
$$A \longrightarrow \mu(A)e'$$

Es claro que si μ es de variación acotada entonces $\mu(.)e' \in M(\Sigma;E')$. En particular si $A \in \Sigma$ podemos tomar $\mu = \delta_A$ donde para cada $B \in \Sigma$ $\delta_A(B) = 1$ si $B \supset A$ y $\delta_A(B) = 0$ en caso contrario.

Si X es un espacio topológico y $x \in X$ se tiene incluso

$$\delta_x(.)e' \in M_o(X;E') \quad \text{y} \quad \text{sop}(\delta_x(.)e') = \{x\} \quad \text{si} \quad e' \neq 0$$

(naturalmente estamos notando por δ_x a $\delta_{\{x\}}$).

1.16. Definición: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω, $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida y p una seminorma continua en E. Llamaremos p-variación y notaremos por p(m) a la función de conjunto definida para cada $A \in \Sigma$ por

$$p(m)(A) = \text{Sup} \left\{ \sum_i p(m(A_i)) \right\}$$

donde tomamos el supremo entre las particiones finitas (A_i) de A en elementos de Σ(Por el contexto, cuando escribamos p(.) quedará claro si nos referimos a la seminorma p o a la p-variación de una medida).

1.17. Definición: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida, diremos que m es de variación acotada (o finita) si para cada seminorma continua p en E $p(m)(\Omega)$ es finito.

<u>1.18. Proposición [34]</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida de variación acotada, entonces, si p es una seminorma continua en E, p(m) es una medida (no negativa y finita) en Σ.

<u>1.19. Proposición [34]</u>: Sea X un espacio topológico y $m: \mathcal{B}(X) \longrightarrow E$ una medida de variación acotada, entonces m es contablemente aditiva (resp. regular) si y sólo si p(m) es contablemente aditiva (resp. regular) para toda seminorma continua p en E.

<u>1.20. Notaciones y definiciones</u>: Sea Ω un conjunto no vacío y Σ un álgebra de subconjuntos de Ω, denotaremos por $\mathcal{M}(\Sigma;E)$ al espacio vectorial de las medidas $m: \Sigma \longrightarrow E$ de variación acotada. Consideraremos usualmente este espacio dotado de la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\bar{p} : p \text{ es seminorma continua en } E\}$, donde

$$\bar{p}(m) = p(m)(\Omega) \qquad \forall m \in \mathcal{M}(\Sigma;E)$$

Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $\mathcal{M}(X;E)$ al subespacio de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(X);E)$ formado por las medidas de variación finita, contablemente aditivas y regulares. $\mathcal{M}_o(X;E)$ denotará al subespacio de $\mathcal{M}(X;E)$ formado por las medidas $m \in \mathcal{M}(X;E)$ que tienen soporte compacto. Supondremos usualmente $\mathcal{M}(X;E)$ y $\mathcal{M}_o(X;E)$ dotados de la topología inducida por la topología usual de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(X);E)$, e.d. de la topología de e.l.c. definida por la familia $\{\bar{p} : p \text{ es seminorma continua en } E\}$ que introdujimos más arriba.

Denotaremos por E'_β al dual fuerte de E (e.d. E' dotado de la topología fuerte $\beta(E',E)$). Es conocido (y quedará como consecuencia del lema 3.5.) que si Ω es un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m:\Sigma \longrightarrow E'$ es una medida que verifica la condición (C), entonces m es de variación acotada para la topología fuerte en E'. Además si X es un espacio localmente compacto y $m:\mathcal{B}(X) \longrightarrow E'$ es una medida débilmente ($\sigma(E',E)$) contablemente aditiva y débilmente regular que verifica la condición (C), entonces m es contablemente aditiva y regular para la topología fuerte en E' (ver [34]). Teniendo en cuenta las definiciones y resultados dados anteriormente, como resumen de las observaciones que acabamos de hacer, podemos dar la siguiente

<u>1.21. Proposición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y X un espacio topológico localmente compacto (resp. completamente regular), entonces se tiene:

(i) $B(\Sigma;E)' = M(\Sigma;E') \subset \mathfrak{M}(\Sigma;E'_\beta)$

(ii) $C_c(X;E)' = M(X;E') \subset \mathfrak{M}(X;E'_\beta)$

(resp. (ii') $C(X;E)' = M_o(X;E') \subset \mathfrak{M}_o(X;E'_\beta)$).

<u>1.22. Observación</u>: En [17] (Remark 2.2. Example 2.3.) se dan ejemplos de espacios localmente convexos E para los que los contenidos anteriores son estrictos.

Para terminar la sección vamos a dar algunas definiciones que nos permitirán englobar y relacionar las definiciones dadas en 1.3. y 1.6.. Así más tarde podremos estudiar mejor las relaciones que existen entre los espacios de medidas que aparecen en la proposición 1.21..

<u>1.23. Definiciones y notaciones</u>: Sea $A \subset E$ un disco. Si denotamos por E_A al subespacio engendrado por A, tiene sentido considerar en E_A

el funcional de Minkowski de A, es decir la seminorma ρ_A definida por

$$\rho_A(x) = \inf\{\rho>0 : x\in\rho A\} \quad \forall x\in E_A$$

En el caso en que A sea acotado tendremos el espacio normado clásico (E_A, ρ_A).

Más en general podemos definir

$$\rho_A(x) = \inf\{\rho>0 : x\in\rho A\} \quad \forall x\in E$$

donde por convenio suponemos $\inf \emptyset = +\infty$. De esta forma tendremos que dado $x\in E$, $x\in E_A$ si y sólo si $\rho_A(x) < +\infty$.

Si $B\subset E$ es un disco denotaremos

$$p_B(e') = \sup\{|\langle e,e'\rangle| : e\in B\} \quad \forall e'\in E'$$

Observemos que por ejemplo la familia $\{p_B : B\subset E \text{ es un disco acotado}\}$ es la familia de seminormas que define la topología fuerte $\beta(E',E)$.

El resultado que damos a continuación es sencillo y conocido. Relaciona las definiciones que acabamos de hacer:

<u>1.24. Proposición</u>: (1) Si $B\subset E$ es un disco y B° es su polar entonces

$$p_B(e') = \rho_{B^\circ}(e') \qquad \forall e'\in E'$$

(2) Si $A\subset E'$ es un disco $\sigma(E',E)$-cerrado y A° es su polar entonces

$$\rho_A(e') = p_{A^\circ}(e') \qquad \forall e'\in E'$$

Las siguientes definiciones son análogas a la definición 1.16. La diferencia está únicamente en que p_B y ρ_A quizás no son seminormas.

<u>1.25. Definición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de sub-

conjuntos de Ω y $m_1 : \Sigma \longrightarrow E$ y $m_2 : \Sigma \longrightarrow E'$ medidas. Si A y B son discos de E y $C \in \Sigma$ definimos

$$\rho_A(m_1)(C) = \sup \left\{ \sum_i \rho_A(m_1(A_i)) \right\}$$
$$p_B(m_2)(C) = \sup \left\{ \sum_i p_B(m_2(A_i)) \right\}$$

donde tomamos los supremos entre las particiones finitas (A_i) de C en elementos de Σ (Como siempre, por el contexto quedará claro el sentido de $\rho_A(.)$ o $p_B(.)$).

Claramente se puede obtener una proposición análoga a la 1.24.:

<u>1.26 Proposición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E'$ una medida. Se tiene:

(1) Si $B \subset E$ es un disco y B° es su polar entonces

$$\rho_{B^\circ}(m)(A) = p_B(m)(A) \qquad \forall A \in \Sigma$$

(2) Si $A \subset E'$ es un disco $\sigma(E',E)$-cerrado y A° es su polar entonces

$$\rho_A(m)(C) = p_{A^\circ}(m)(C) \qquad \forall C \in \Sigma$$

<u>1.27. Observaciones</u>: (1) Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω , $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida y A y B discos de E. De la definición 1.25. y de las propiedades elementales del funcional de Minkowski se deduce que

(i) Si $A \subset B$ entonces $\rho_B(m)(C) \leqslant \rho_A(m)(C)$ para todo $C \in \Sigma$.

(ii) $\rho_{A \cap B}(m)(C) = \max \left\{ \rho_A(m)(C), \rho_B(m)(C) \right\}$ para todo $C \in \Sigma$.

(2) Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω , $m: \Sigma \longrightarrow E'$ una medida y q una seminorma continua en E. Sea $U = \left\{ e \in E : q(e) \leqslant 1 \right\}$. Es una consecuencia inmediata de las definiciones 1.3. y 1.25. y de la proposición 1.26. que

$$V_q m(A) = p_U(m)(A) = \rho_{U^\circ}(m)(A) \qquad \forall A\in\Sigma.$$

<u>1.28. Proposición</u>: Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $m: \Sigma \longrightarrow E'$ una medida. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) m verifica la condición (C)

(ii) Existe un disco entorno de cero $U\subset E$ tal que

$$p_U(m)(\Omega) \leqslant 1$$

(iii) Existe un disco equicontinuo $A\subset E'$ (que podemos suponer $\sigma(E',E)$-cerrado) tal que

$$\rho_A(m)(\Omega) \leqslant 1.$$

<u>Demostración</u>: Es consecuencia inmediata de la observación anterior.

2. Algunas propiedades de $c_o(E)$.

Denotaremos por $c_o(E)$ al espacio vectorial de las sucesiones convergentes a cero en E. Lo supondremos dotado de la topología de la convergencia uniforme, e.d. de la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{S_p : p$ es seminorma continua en $E\}$, donde

$$S_p((e_n)) = \sup\{p(e_n) : n\in \mathbb{N}\} \qquad \forall (e_n)\in c_o(E).$$

(Como es habitual $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales).

Sea X un espacio topológico completamente regular y sea $\mathbb{N}^*$ la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$. Como ya indicamos, uno de los objetivos centrales de este trabajo es caracterizar cuándo C(X;E) es infratonelado. Un caso particular de este problema es caracterizar cuándo $C(\mathbb{N}^*;E)$ lo es. Ahora bien, veremos más adelante (Nota 4.4.) que $C(\mathbb{N}^*;E)$ es topológicamente isomorfo a $c_o(E) \oplus E$, y también veremos que E es un subespacio complementado de $c_o(E)$ (Proposición 4.5.); por tanto quedará claro que determinar si $C(\mathbb{N}^*;E)$ es infratonelado equivale a determinar si $c_o(E)$ lo es (Realmente $c_o(E)$ y $C(\mathbb{N}^*;E)$ son incluso espacios topológicamente isomorfos ya que, como se observa en Remark 3.6. de [17], $c_o(E)$ es topológicamente isomorfo a $c_o(E)\oplus E$). Marquina y Sanz Serna en [17] caracterizan cuándo $c_o(E)$ (y por tanto $C(\mathbb{N}^*;E)$) es infratonelado. Recogemos en esta sección los resultados fundamentales que obtienen pues nos servirán de guía en nuestro trabajo, ya que como veremos más adelante estos resultados admiten formulaciones análogas en otros espacios (en $C(X;E)$, en $B(\Sigma;E)$, etc.).

Denotaremos por $\ell^1(E)$ al espacio vectorial de las sucesiones (e_n) de vectores de E tales que para cada seminorma continua p en E

$$\Pi_p((e_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} p(e_n) < +\infty$$

La topología usual en $\ell^1(E)$ es la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\Pi_p : p \text{ es seminorma continua en } E\}$.

Diremos que una sucesión $(e'_n) \subset E'$ es $\mathcal{U}$-totalmente sumable si existe algún disco entorno de cero U en E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_U(e'_n) < +\infty$$

(recordemos que si $e' \in E'$ $p_U(e') = \operatorname{Sup}\{|\langle e,e'\rangle| : e \in U\}$).

Es fácil comprobar que si $(e'_n) \subset E'$ es una sucesión $\mathcal{U}$-totalmente sumable y definimos

$$\begin{aligned} \tau_{(e'_n)} : c_o(E) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (e_n) &\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, e'_n\rangle \end{aligned}$$

$\tau_{(e'_n)}$ es una forma lineal y continua en $c_o(E)$. Se puede demostrar incluso que la aplicación $(e'_n) \longrightarrow \tau_{(e'_n)}$ es un isomorfismo (algebraico) del espacio vectorial de las sucesiones $(e'_n) \subset E'$ $\mathcal{U}$-totalmente sumables sobre $c_o(E)'$ (pp. 463-464 de [5], [17]). También se puede probar que si $(e'_n) \subset E'$ es una sucesión $\mathcal{U}$-totalmente sumable entonces $(e'_n) \in \ell^1(E'_\beta)$. Por tanto podemos considerar $c_o(E)'$ como un subespacio de $\ell^1(E'_\beta)$ (en general es un subespacio propio: 2.2. y 2.3. de [17]), más aún:

2.1. Proposición[17]: La topología que induce en $c_o(E)'$ la topología usual de $\ell^1(E'_\beta)$ coincide con la topología $\beta(c_o(E)', c_o(E))$.

2.2. Definición ([24], p. 30): Diremos que E tiene la propiedad (B) de Pietsch si para cada familia $F \subset \ell^1(E)$ acotada (para la topología usual de $\ell^1(E)$) existe un disco cerrado y acotado $B \subset E$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_B(e_n) \leq 1 \qquad \forall (e_n) \in F.$$

2.3. Teorema [17]: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $c_o(E)$ es infratonelado.

(b) E es infratonelado y E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

Además si $c_o(E)$ es infratonelado entonces $c_o(E)' = \ell^1(E'_\beta)$.

Los espacios localmente convexos que verifican cualquiera de las dos condiciones equivalentes del teorema anterior van a jugar un papel importante en este trabajo. Por ello damos la siguiente

2.4. Definición: Diremos que un e.l.c. E es $\mathcal{K}$-infratonelado si E es infratonelado y E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

La razón de esta denominación quedará clara más adelante (ver sección 8). A título de ejemplo digamos que (Corolario 4.11.):

"Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(ii) C(K;E) es infratonelado para todo espacio topológico compacto K.

(iii) Existe un espacio topológico compacto e infinito K tal que C(K;E) es infratonelado."

CAPITULO II: Infratonelación en $C(X;E)$ y en otros espacios de funciones vectoriales.

En este capítulo daremos condiciones necesarias y suficientes para que los espacios que definimos en la sección 1 sean infratonelados. Para esto utilizaremos las representaciones de los duales de estos espacios que ya dimos en el capítulo anterior pues emplearemos técnicas de dualidad. Por esta razón uno de los objetivos principales que va a guiar nuestro desarrollo es el estudio de la topología fuerte (y en particular de los fuertemente acotados) en estos duales.

Será también importante para nosotros el lema 3.11. que nos muestra que la propiedad (B) de Pietsch se traduce en buenas propiedades de los espacios de medidas duales.

3. $B(\Sigma;E)$ y $S(\Sigma;E)$ infratonelados.

En esta sección Ω será un conjunto no vacío arbitrario y Σ un álgebra de subconjuntos de Ω. Caracterizaremos cuándo los espacios $S(\Sigma;E)$ y $B(\Sigma;E)$ son infratonelados.

Como ya dijimos vamos a utilizar las representaciones de los duales dadas en la sección 1. En este sentido es importante tener en cuenta que como $S(\Sigma;E)$ es un subespacio denso de $B(\Sigma;E)$ los duales de estos dos espacios coinciden.

3.1. Lema: Sea $\phi \in B(\Sigma;E)$, entonces existe una red $(T_\gamma)_\Gamma \subset S(\Sigma;E)$ convergente a ϕ tal que

$$T_\gamma(\Omega) \subset \phi(\Omega) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

Demostración: Sea $\phi \in B(\Sigma;E)$ y sea p una seminorma continua en E. Existe $T_p \in S(\Sigma;E)$ tal que

$$p(\phi(t) - T_p(t)) < \frac{1}{2} \qquad \forall t \in \Omega$$

Supongamos $T_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(.)e_i$ con $A_i \in \Sigma$, disjuntos y no vacíos. Sea $t_i \in A_i$. Definimos $S_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(.)\phi(t_i)$. Claramente se tiene $S_p(\Omega) \subset \phi(\Omega)$, y además

$$p(\phi(t) - S_p(t)) \leq p(\phi(t) - T_p(t)) + p(T_p(t) - S_p(t)) < 1 \qquad \forall t \in \Omega.$$

3.2. Notación: Si B es un subconjunto de E notaremos

$$S(\Sigma;B) = \{T \in S(\Sigma;E) : T(\Omega) \subset B\}$$

$$B(\Sigma;B) = \{\phi \in B(\Sigma;E) : \phi(\Omega) \subset B\}$$

3.3. Lema: Si B es un subconjunto de E se tiene

$$\overline{S(\Sigma;B)} \supset B(\Sigma;B)$$

Si B es además cerrado se da la igualdad.

Demostración: Es trivial teniendo en cuenta el lema anterior.

3.4. Corolario: Las topologías $\beta(B(\Sigma;E)', B(\Sigma;E))$ y $\beta(B(\Sigma;E)', S(\Sigma;E))$ coinciden.

Demostración: Es claro que basta probar que todo subconjunto acotado de $B(\Sigma;E)$ está contenido en la adherencia de algún subconjunto acotado de $S(\Sigma;E)$; y esto es cierto: Si $A \subset B(\Sigma;E)$ es un acotado entonces $B = \bigcup_{\phi \in A} \phi(\Omega)$ es un subconjunto acotado de E, y por tanto $B(\Sigma;B)$ es un acotado de $B(\Sigma;E)$. Además $B(\Sigma;B) \supset A$, y por el lema anterior se tiene $B(\Sigma;B)\subset \overline{S(\Sigma;B)}$.

3.5. Lema: Sea $m\in M(\Sigma;E') = B(\Sigma;E)'$ y $B\subset E$ un disco, entonces

$$p_B(m)(\Omega) = \sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in B(\Sigma;B)\right\} = \sup\left\{\left|\int_\Omega T\, dm\right| : T\in S(\Sigma;B)\right\}\leq +\infty$$

En particular si $\phi\in B(\Sigma;B)$ se tiene

$$\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| \leq p_B(m)(\Omega) \leq +\infty.$$

Demostración: La igualdad

$$\sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in B(\Sigma;B)\right\} = \sup\left\{\left|\int_\Omega T\, dm\right| : T\in S(\Sigma;B)\right\}$$

es consecuencia inmediata del lema 3.3. ya que $m\in B(\Sigma;E)'$.

Además si $T\in S(\Sigma;B)$ podemos escribir T de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\cdot)e_i$$

con $(e_i)_{i=1}^{n}\subset B$ y $(A_i)_{i=1}^{n}$ partición de Ω en elementos de Σ ; por tanto

$$\left|\int_\Omega T\, dm\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, m(A_i)\rangle\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, m(A_i)\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} p_B(m(A_i)) \leq$$
$$\leq p_B(m)(\Omega).$$

Y por otra parte dado $\varepsilon>0$ y dada una partición $(A_i)_{i=1}^{n}$ de Ω en elementos de Σ, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ podemos tomar $e_i\in B$ tal que

$$p_B(m(A_i)) \leq |\langle e_i, m(A_i)\rangle| + \frac{\varepsilon}{n}$$

y entonces si $c_i=$ signo $(\langle e_i, m(A_i)\rangle)$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}(\cdot)e_i \in S(\Sigma;B) \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_B(m(A_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, m(A_i)\rangle| + \varepsilon = \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}(\cdot)e_i\, dm\right| + \varepsilon$$

Así podemos concluir

$$p_B(m)(\Omega) = \sup\left\{\left|\int_\Omega T\, dm\right| : T\in S(\Sigma;B)\right\}$$

3.6. Teorema: Las topologías $\beta(B(\Sigma;E)', B(\Sigma;E))$ y $\beta(B(\Sigma;E)', S(\Sigma;E))$

coinciden con la topología inducida por la topología usual de $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$ en $B(\Sigma;E)'$.

Demostración: Por el corolario 3.4. las topologías $\beta(B(\Sigma;E)',B(\Sigma;E))$ y $\beta(B(\Sigma;E)', S(\Sigma;E))$ coinciden. Además, por el lema anterior la topología inducida por la topología usual de $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$ en $B(\Sigma;E)'$ es menos fina que la topología $\beta(B(\Sigma;E)',B(\Sigma;E))$. Por último, si $A\subset B(\Sigma;E)$ es un acotado y denotamos por B a la envoltura absolutamente convexa de $\bigcup_{\phi\in A}\phi(\Omega)$, utilizando de nuevo el lema anterior, podemos escribir:

$$\sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in A\right\} \leqslant \sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in B(\Sigma;B)\right\} = p_B(m)(\Omega)$$

$\forall m\in B(\Sigma;E)'$.

Por tanto efectivamente las tres topologías coinciden en $B(\Sigma;E)'$.

3.7. Proposición: Sea $H\subset B(\Sigma;E)' = M(\Sigma;E')$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es equicontinuo (en $B(\Sigma;E)$)

(ii) Existe alguna seminorma continua p en E tal que

$$V_p m(\Omega) \leqslant 1 \quad \forall m\in H$$

(iii) Existe algún disco equicontinuo $A\subset E'$ (podemos suponer A $\sigma(E',E)$-cerrado) tal que

$$\rho_A(m)(\Omega) \leqslant 1 \quad \forall m\in H.$$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Si H es equicontinuo existe alguna seminorma continua p en E tal que

$$\sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in B(\Sigma;E) \text{ y } p(\phi(t))\leqslant 1\ \forall t\in\Omega\right\} \leqslant 1 \quad \forall m\in H$$

Entonces si notamos $U=\{e\in E : p(e)\leqslant 1\}$, por el lema 3.5., se tiene

$$p_U(m)(\Omega) = \sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in B(\Sigma;U)\right\} \leqslant 1 \quad \forall m\in H$$

Se deduce entonces de la observación 1.27.(2)

$$V_p m(\Omega) \leq 1 \qquad \forall m \in H.$$

Por la misma observación 1.27.(2) se tiene que (ii) es equivalente a (iii).

Por último (i) se sigue de (ii) por 1.5.(i).

El lema que damos a continuación es un ejercicio sencillo sobre álgebras. La parte (ii) puede verse p.e. en [23] 1.2.1.

<u>3.8. Lema</u>: (i) Si Σ es infinita existe una sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ de conjuntos disjuntos no vacíos.

(ii) Si Σ es finita existe una partición finita $(A_i)_{i=1}^{n}$ de Ω en elementos de Σ no vacíos tal que

si $A \in \Sigma$ y $A \subsetneq A_i$ para algún i entonces $A = \emptyset$.

<u>Demostración</u>: Si $A \in \Sigma$ denotaremos por Σ_A al álgebra $\{B \in \Sigma : B \subset A\}$.

(i) Sea Σ un álgebra infinita y sea $A \in \Sigma$, $A \neq \emptyset$ y $A \neq \Omega$. Consideremos las álgebras Σ_A y $\Sigma_{\Omega \setminus A}$. Claramente alguna de estas dos álgebras ha de ser infinita. Si Σ_A es infinita definimos $A_1 = \Omega \setminus A$, y en caso contrario $A_1 = A$. Repitiendo el mismo argumento es claro que existe $A_2 \in \Sigma_{\Omega \setminus A_1}$, $A_2 \neq \emptyset$ tal que $\Sigma_{\Omega \setminus (A_1 \cup A_2)}$ es infinita. Reiterando el proceso es evidente que construimos una sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ de conjuntos disjuntos no vacíos.

(ii) Se prueba fácilmente por inducción sobre la cardinalidad de Σ.

<u>3.9. Proposición</u>: Si Σ es finito $S(\Sigma;E)$ y $B(\Sigma;E)$ coinciden y además existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(\Sigma;E) = B(\Sigma;E)$ es topológicamente isomorfo a E^n.

Demostración: Si Σ es finito, por la parte (ii) del lema anterior, existe una partición finita $(A_i)_{i=1}^{n}$ de Ω en elementos de Σ no vacíos tal que

si $A\in\Sigma$ y $A\subsetneq A_i$ para algún i entonces $A=\emptyset$.

Entonces es inmediato que la aplicación

$$E^n \longrightarrow S(\Sigma;E)$$
$$(e_i)_{i=1}^{n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(.)e_i$$

es un isomorfismo topológico.

Además, si $\phi\in B(\Sigma;E)$, por lo anterior, ϕ es límite uniforme de una red de la forma $(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}e_i^{\alpha})_{\alpha}$, y por tanto $\phi = \sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}$ lím $e_i^{\alpha} \in S(\Sigma;E)$.

Luego $S(\Sigma;E)=B(\Sigma;E)$.

3.10. Proposición: (i) $S(\Sigma)$ y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de $S(\Sigma;E)$

(ii) $B(\Sigma)$ y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de $B(\Sigma;E)$.

Demostración: Sea $x\in\Omega$, $f\in B(\Sigma)$ tal que $f(x)=1$, $e_0\in E$ y $e'\in E'$ tal que $\langle e_0,e'\rangle=1$. Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$E \xrightarrow{T_f} B(\Sigma;E) \xrightarrow{T_x} E \qquad B(\Sigma) \xrightarrow{T_{e_0}} B(\Sigma;E) \xrightarrow{T_{e'}} B(\Sigma)$$

$$T_f(e)=f(.)e; \quad T_x(\phi)=\phi(x); \quad T_{e_0}(g)=g(.)e_0; \quad T_{e'}(\phi)=\langle\phi(.),e'\rangle$$

Es fácil comprobar que estas aplicaciones son lineales y continuas y que verifican además $T_x\circ T_f = I_E$, $T_f\circ T_x|_{T_f(E)} = I_{T_f(E)}$, etc. donde I_E, $I_{T_f(E)}$, etc. son las respactivas identidades. Y de aquí se sigue inmediatamente que E y $B(\Sigma)$ son isomorfos a subespacios complementados de $B(\Sigma;E)$. Para $S(\Sigma;E)$ es análogo.

3.11. Lema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Si Ω es un conjunto no vacío, Σ es un álgebra de subconjuntos de Ω y $H\subset \mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$ es un acotado, entonces existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A\subset E'$ tal que

$$\rho_A(m)(\Omega)\leq 1 \qquad \forall m\in H.$$

(ii) Existe un conjunto Ω (infinito) y un álgebra infinita Σ de subconjuntos de Ω tal que si $H\subset B(\Sigma;E)'$ es una familia fuertemente acotada, entonces existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A\subset E'$ que verifica

$$\rho_A(m)(\Omega)\leq 1 \qquad \forall m\in H.$$

(iii) E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) es trivial teniendo en cuenta que por el teorema 3.6., si $H\subset B(\Sigma;E)'=M(\Sigma;E')\subset \mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$ es fuertemente acotado entonces es también acotado para la topología de $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que se verifica (ii) y sea $F=\{(e'_{ni})_n : i\in I\}$ un acotado de $\ell^1(E'_\beta)$. Por el lema 3.8.(i) existe una sucesión $(A_n)\subset\Sigma$ de conjuntos disjuntos no vacíos. Demostraremos que la familia $H=\left\{\sum_{n=1}^{k}\delta_{A_n}(.)e_{ni} : k\in\mathbb{N},\ i\in I\right\}\subset B(\Sigma;E)'$ (ver ejemplos 1.15.) es fuertemente acotada: Sea $B\subset E$ un disco acotado, $(C_m)_{m=1}^{\ell}$ una partición finita de Ω en elementos de Σ, $j\in I$ y $k\in\mathbb{N}$; se tiene

$$\sum_{m=1}^{\ell} p_B\left(\sum_{n=1}^{k}\delta_{A_n}(C_m)e'_{nj}\right)\leq \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{n=1}^{k}\delta_{A_n}(C_m)p_B(e'_{nj}) = \sum_{n=1}^{k}p_B(e'_{nj})\left(\sum_{m=1}^{\ell}\delta_{A_n}(C_m)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{k}p_B(e'_{nj})\,\delta_{A_n}(\Omega) = \sum_{n=1}^{k}p_B(e'_{nj})\leq\sum_{n=1}^{\infty}p_B(e'_{nj})\leq \sup\left\{\pi_{p_B}((e'_{ni})_n) : i\in I\right\}$$

de donde resulta

$$p_B\left(\sum_{n=1}^{k}\delta_{A_n}(.)e'_{nj}\right)(\Omega)\leq \sup\left\{\pi_{p_B}((e'_{ni})_n) : i\in I\right\} \qquad \forall k\in\mathbb{N},\ \forall j\in I.$$

Como suponemos $\{(e'_{ni})_n : i\in I\}$ acotado en $\ell^1(E'_\beta)$, el segundo miembro de la última desigualdad es finito, y por tanto, por el teorema 3.6. $\left\{\sum_{n=1}^{k} \delta_{A_n}(\cdot)e'_{ni} : k\in \mathbb{N},\ i\in I\right\}$ es efectivamente una familia fuertemente acotada de $B(\Sigma;E)'$.

Aplicando ahora la hipótesis deducimos que existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A\subset E'$ tal que

$$\rho_A\left(\sum_{n=1}^{k} \delta_{A_n}(\cdot)e'_{ni}\right)(\Omega) \leq 1 \qquad \forall k\in \mathbb{N},\ \forall i\in I$$

Así, si $i\in I$ y $k\in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{k} \rho_A(e'_{ni}) = \sum_{n=1}^{k} \rho_A\left(\sum_{\ell=1}^{k} \delta_{A_\ell}(A_n)e'_{\ell i}\right) \leq$$

$$\leq \rho_A\left(\sum_{\ell=1}^{k} \delta_{A_\ell}(\cdot)e'_{\ell i}\right)(\Omega) \leq 1$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_A(e'_{ni}) \leq 1 \qquad \forall i\in I.$$

Queda así probado que E'_β tine la propiedad (B) de Pietsch.

(iii)$\Rightarrow$(i): Supongamos que E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch. Sea Ω un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $H\subset \mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$ un acotado. Sea $\mathcal{P}$ la familia de las particiones finitas de Ω en elementos de Σ y $(A_i)_{i=1}^{\ell} = \pi\in\mathcal{P}$. Dado $m\in H$ definimos $(m_n^\pi)_n\in \ell^1(E'_\beta)$ por

$$m_n^\pi = \begin{cases} m(A_n) & \text{si } 1\leq n\leq \ell \\ 0 & \text{si } \ell< n \end{cases}$$

Entonces $\{(m_n^\pi)_n : \pi\in\mathcal{P},\ m\in H\}$ es un acotado de $\ell^1(E'_\beta)$ ya que si $B\subset E$ es un disco acotado, $u\in H$ y $(B_j)_{j=1}^{k} = \pi\in\mathcal{P}$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_B(u_j^\pi) = \sum_{j=1}^{k} p_B(u(B_j)) \leq p_B(u)(\Omega) \leq \sup\{p_B(m)(\Omega) : m\in H\},$$

y observemos que por ser H acotado este supremo es finito.

Así, por la hipótesis, existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A \subset E'$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_A(m_n^{\pi}) \leq 1 \qquad \forall \pi \in \mathcal{P} \qquad \forall m \in H,$$

pero esto nos dice que si $(A_i)_{i=1}^{\ell} = \pi \in \mathcal{P}$ y $m \in H$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \rho_A(m(A_i)) = \sum_{i=1}^{\ell} \rho_A(m_i^{\pi}) \leq 1$$

y por tanto

$$\rho_A(m)(\Omega) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

que es lo que queríamos probar.

A continuación enunciamos un resultado que caracteriza los espacios localmente convexos que tienen la propiedad (B) de Pietsch en términos de espacios de medidas. Damos este resultado ya que, aunque no lo vamos a utilizar en lo sucesivo, se puede probar siguiendo casi exactamente la demostración anterior.

3.12. Proposición: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Si Ω es un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y $H \subset \mathcal{M}(\Sigma;E)$ es un acotado, entonces existe un disco cerrado y acotado $A \subset E$ tal que

$$\rho_A(m)(\Omega) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

(ii) Existe un conjunto Ω (infinito) y un álgebra infinita Σ de subconjuntos de Ω tal que si $H \subset \mathcal{M}(\Sigma;E)$ es un acotado entonces existe un disco cerrado y acotado $A \subset E$ verificando

$$\rho_A(m)(\Omega) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

(iii) E tiene la propiedad (B) de Pietsch.

Obsérvese que la proposición anterior no es exactamente una generalización del lema 3.11., ya que en la condición (ii) de éste, $B(\Sigma;E)'$ está contenido pero no es necesariamente igual a $\mathfrak{M}(\Sigma;E'_\beta)$ (Observación 1.22.).

Estamos ya en condiciones de caracterizar cuándo $S(\Sigma;E)$ y $B(\Sigma;E)$ son infratonelados:

3.13. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $S(\Sigma;E)$ es infratonelado

(ii) $B(\Sigma;E)$ es infratonelado

(iii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) Σ es finito y E es infratonelado

(b) E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se verifica por ser $S(\Sigma;E)$ un subespacio denso de $B(\Sigma;E)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Si $B(\Sigma;E)$ es infratonelado, por la proposición 3.10., E es infratonelado. Además, si Σ es infinito se verifica (ii) del lema 3.11. ya que si $H\subset B(\Sigma;E)'$ es una familia fuertemente acotada, por ser $B(\Sigma;E)$ infratonelado, H es equicontinua, y entonces, por la proposición 3.7. existe un disco fuertemente cerrado y equicontinuo (por tanto fuertemente acotado) $A\subset E'$ tal que

$$\rho_A(m)(\Omega)\leq 1 \qquad \forall m\in H$$

Así, del lema 3.11. se sigue que E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch y por tanto E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(iii) $\Rightarrow$ (i): En la hipótesis (a), por la proposición 3.9., es claro que $S(\Sigma;E)$ es infratonelado. Supongamos que E es

$\mathcal{K}$-infratonelado y sea $H\subset B(\Sigma;E)'$ una familia fuertemente acotada. Como E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch, por el lema 3.11., existe un disco fuertemente cerrado y acotado $B\subset E'$ tal que

$$\rho_B(m)(\Omega)\leq 1 \qquad \forall m\in H$$

Pero, como E es infratonelado, B es equicontinuo, y así, de la proposición 3.7. se deduce que H es equicontinua. Por tanto $S(\Sigma;E)$ es infratonelado.

4. Infratonelación en $C_c(X;E)$ y en otros espacios.

En la presente sección X será un espacio topológico localmente compacto.

Nuestro objetivo fundamental es caracterizar cuándo el espacio $C_c(X;E)$ es infratonelado, pero una vez hecho esto, como consecuencia, podremos caracterizar también cuándo son infratonelados otros espacios de funciones continuas.

Denotaremos por $\underline{C_o(X;E)}$ al espacio vectorial de las funciones continuas de X en E que se anulan en el infinito, e.d. $\phi\in C_o(X;E)$ si y sólo si ϕ es una función continua de X en E tal que para cada seminorma continua p en E existe un compacto $K\subset X$ tal que

$$p(\phi(x))\leq 1 \qquad \forall x\in X\setminus K.$$

Salvo indicación en contra supondremos $C_o(X;E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme, e.d. de la topología de e.l.c. definida por la familia de seminormas $\{\|\ \|_p$: p es seminorma continua en E$\}$, donde

$$\|\phi\|_p = \sup\{p(\phi(x)) : x\in X\} \qquad \forall\phi\in C_o(X;E).$$

4.1. Observaciones: (1) Es obvio que si X es compacto entonces $C(X;E) = C_c(X;E) = C_o(X;E)$, y además las topologías que hemos definido en estos espacios coinciden.

(2) Si X no es compacto es conocido (y fácil de probar) que si denotamos por X^* a la compactificación de Alexandroff de X (a X le añadimos un punto $\omega\notin X$ llamado con frecuencia infinito) entonces $C_o(X;E)$ es topológicamente isomorfo al subespacio de $C(X^*;E)$ formado por las funciones $\phi\in C(X^*;E)$ tales que $\phi(\omega)=0$.

4.2. Ejemplos: El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, dotado de la topología discreta es un espacio localmente compacto, y por tanto tiene sentido considerar los espacios $C_o(\mathbb{N};E)$ y $C_c(\mathbb{N};E)$. Observemos que el primero coincide con el que definimos en la sección 2 como $c_o(E)$. El segundo, que es un subespacio de $c_o(E)$, es el de las sucesiones eventualmente nulas, y lo notaremos por $c_{oo}(E)$.

4.3. Proposición: $C_c(X)$ y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de $C_c(X;E)$. Más concretamente: si $x\in X$, $C_c(X;E)$ es topológicamente isomorfo a $C_c(X\setminus\{x\};E)\oplus E$, donde $C_c(X\setminus\{x\};E)$ es el subespacio de $C_c(X;E)$ formado por las funciones $\phi\in C_c(X;E)$ tales que $\phi(x)=0$.

Demostración: Podemos proceder de forma análoga a como hicimos en la proposición 3.10.: Sea $x\in X$, $f\in C_c(X)$ tal que $f(x)=1$, $e_o\in E$ y $e'\in E'$ tales que $\langle e_o,e'\rangle=1$. Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$E \xrightarrow{T_f} C_c(X;E) \xrightarrow{T_x} E \qquad C_c(X) \xrightarrow{T_{e_o}} C_c(X;E) \xrightarrow{T_{e'}} C_c(X)$$

donde $T_f(e)=f(.)e$; $T_x(\phi)=\phi(x)$; $T_{e_o}(g)=g(.)e_o$ y $T_{e'}(\phi)=\langle\phi(.),e'\rangle$ cualesquiera que sean $e\in E$, $\phi\in C_c(X;E)$ y $g\in C_c(X)$. Es fácil comprobar que estas aplicaciones son lineales y continuas y que además verifican $T_x\circ T_f=I_E$, $T_f\circ T_x|_{T_f(E)}=I_{T_f(E)}$, $T_{e'}\circ T_e=I_{C_c(X)}$ y

$$T_e\circ T_{e'}|_{T_e(C_c(X))}=I_{T_e(C_c(X))}$$

donde I_E, $I_{T_f(E)}$, etc. son las respectivas identidades. Y de aquí se sigue inmediatamente que E y $C_c(X)$ son topológicamente isomorfos a subespacios complementados de $C_c(X;E)$. En el primer caso tenemos además que $C_c(X;E)$ es topológicamente isomorfo a $Ker(T_x)\oplus T_x(C_c(X;E))$ y observemos que $Ker(T_x)=C_c(X\|\{x\};E)$ y $T_x(C_c(X;E))=E$.

4.4. Nota: En particular si X no es compacto y X^* es la compactificación de Alexandroff de X, de la proposición anterior y de 4.1.(2) se deduce que $C(X^*;E)$ es topológicamente isomorfo a $C_o(X;E)\oplus E$. Y si tomamos $X=\mathbb{N}$ resulta, por 4.2., que $C(\mathbb{N}^*;E)$ es topológicamente isomorfo a $c_o(E)\oplus E$.

De forma análoga a la proposición 4.3. se puede probar la siguiente

4.5. Proposición: $C_o(X)$ y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de $C_o(X;E)$.

4.6. Notaciones y observaciones: Como es habitual denotaremos por $C_c(X)\otimes E$ y $C_o(X)\otimes E$ a los subespacios de $C_c(X;E)$ y $C_o(X;E)$ engendrados por las familias $\{f(.)e \,:\, f\in C_c(X),\ e\in E\}$ y

$\{f(.)e \,:\, f\in C_o(X),\ e\in E\}$ respactivamente.

Salvo que indiquemos lo contrario supondremos estos espacios dotados de la topología inducida por $C_o(X;E)$.

Es claro que se verifican los siguientes contenidos:

$$C_c(X)\otimes E \subset C_c(X;E) \subset C_o(X;E)$$
$$C_c(X)\otimes E \subset C_o(X)\otimes E \subset C_o(X;E)$$

Además es conocido (y fácil de probar) que $C_c(X)\otimes E$ es denso en $C_o(X;E)$ y así cada uno de los espacios anteriores es un subespacio denso de aquél en que está contenido. Se sigue de esto que los duales de los espacios $C_c(X)\otimes E$, $C_o(X)\otimes E$ y $C_o(X;E)$ coinciden con el de $C_c(X;E)$, que ya estudiamos en la sección 1.

También es conocido que los productos tensoriales $C_c(X)\otimes E$ y $C_o(X)\otimes E$ se pueden interpretar, dentro de la teoría general de productos tensoriales, como ε-tensor productos $(\otimes_\varepsilon)$ de los espacios $C_c(X)$ (o $C_o(X)$) y E ([16] pág. 286). Sin embargo en general esto no nos será necesario.

Si $B\subset E$ es un disco denotaremos

$$C_c(X;B) = \{\phi\in C_c(X;E) \ : \ \phi(X)\subset B\}$$
$$C_o(X;B) = \{\phi\in C_o(X;E) \ : \ \phi(X)\subset B\}$$

<u>4.7. Lema</u>: Sea $m\in M(X;E')$ y sea $B\subset E$ un disco. Entonces
$$p_B(m)(X) = \sup\left\{ \left|\int_X \phi \, dm\right| \ : \ \phi\in C_c(X;B)\cap(C_c(X)\otimes E)\right\} \leq +\infty.$$

<u>Demostración</u>: Por el lema 3.5.
$$\sup\left\{\left|\int_X \phi\, dm\right| \ : \ \phi\in C_c(X;B)\cap(C_c(X)\otimes E)\right\} \leq p_B(m)(X).$$

Por otra parte, dado $\varepsilon>0$, $(A_i)_{i=1}^n\subset \mathcal{B}(X)$ una partición de X y $(e_i)_{i=1}^n\subset B$, por la regularidad de m, para cada i existe un compacto $K_i\subset A_i$ tal que $|m_{e_i}|(A_i\setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$, donde $|m_{e_i}|$ es la variación de la medida escalar m_{e_i}. De nuevo por la regularidad de m, y por ser X localmente compacto, existe una familia finita $(G_i)_{i=1}^n$ de abiertos relativamente compactos y disjuntos tales que

$G_i \supset K_i$ y $|m_{e_i}|(G_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$ para cada i.

Por ser X localmente compacto (y por tanto completamente regular), para cada i existe $f_i \in C(X)$ tal que $f_i(X) \subset [0,1]$, $f_i(K_i)=\{1\}$ y $f_i(X \setminus G_i)=\{0\}$ (por tanto f_i tiene soporte compacto). Claramente $\sum_{i=1}^n c_i f_i(.)e_i \in C_c(X) \otimes E$, donde $c_i =$ signo$\left(\int_X f_i \, dm_{e_i}\right)$. Además, como por la construcción de (f_i) se tiene $\sum_{i=1}^n |c_i f_i(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$, por ser B un disco, se tiene $\sum_{i=1}^n c_i f_i(.)e_i \in C_c(X;B)$. Por otra parte

$$\sum_{i=1}^n |\langle e_i, m(A_i)\rangle| = \sum_{i=1}^n |m_{e_i}(A_i)| \leq \sum_{i=1}^n |m_{e_i}(K_i)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_X f_i \, dm_{e_i} - \int_X \chi_{K_i} \, dm_{e_i} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_X f_i \, dm_{e_i} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |m_{e_i}|(G_i \setminus K_i) + \sum_{i=1}^n \left| \int_X f_i \, dm_{e_i} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_X \sum_{i=1}^n c_i f_i(.)e_i \, dm + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sup\left\{ \left| \int_X \phi \, dm \right| : \phi \in C_c(X;B) \cap (C_c(X) \otimes E)\right\} + \varepsilon.$$

Por tanto, tomando supremo entre las familias finitas $(e_i)_{i=1}^n \subset B$ se tiene

$$\sum_{i=1}^n p_B(m(A_i)) \leq \sup\left\{ \left| \int_X \phi \, dm \right| : \phi \in C_c(X;B) \cap (C_c(X) \otimes E)\right\} + \varepsilon$$

y tomando supremo entre las particiones finitas de X en conjuntos de Borel

$$p_B(m)(X) \leq \sup\left\{ \left| \int_X \phi \, dm \right| : \phi \in C_c(X;B) \cap (C_c(X) \otimes E)\right\} + \varepsilon$$

Así, se deduce la igualdad del enunciado.

4.8. Teorema: En $M(X;E')$, el dual de $C_c(X;E)$, coinciden las siguientes topologías:

(a) $\beta(C_c(X;E)', C_o(X;E))$

(b) $\beta(C_c(X;E)', C_c(X;E))$

(c) $\beta(C_c(X;E)', C_o(X)\otimes E)$

(d) $\beta(C_c(X;E)', C_c(X)\otimes E)$

(e) La topología inducida por la topología usual de $\mathfrak{M}(X;E'_\beta)$.

(f) La topología inducida por $\beta(B(\mathcal{B}(X);E)', B(\mathcal{B}(X);E))$.

Demostración: Por ser $C_c(X;E)$ y $C_o(X)\otimes E$ subespacios de $C_o(X;E)$ la topología $\beta(C_c(X;E)', C_o(X;E))$ es más fina que las topologías $\beta(C_c(X;E)', C_c(X;E))$ y $\beta(C_c(X;E)', C_o(X)\otimes E)$, y por la misma razón cualquiera de éstas es más fina que la topología $\beta(C_c(X;E)', C_c(X)\otimes E)$. Por el lema anterior la topología $\beta(C_c(X;E)', C_c(X)\otimes E)$ es más fina que la topología inducida por la topología usual de $\mathfrak{M}(X;E'_\beta)$. Como consecuencia del teorema 3.6. la topología $\beta(B(\mathcal{B}(X);E)', B(\mathcal{B}(X);E))$ coincide con la topología inducida por la topología usual de $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(X);E'_\beta)$, y por la definición, ésta induce en $\mathfrak{M}(X;E'_\beta)$ su topología usual, por tanto $\mathfrak{M}(X;E'_\beta)$ y $\beta(B(\mathcal{B}(X);E)', B(\mathcal{B}(X);E))$ inducen en $C_c(X;E)'$ la misma topología. Por último la topología inducida por $\beta(B(\mathcal{B}(X);E)', B(\mathcal{B}(X);E))$ es más fina que la topología $\beta(C_c(X;E)', C_o(X;E))$ ya que $C_o(X;E)$ es un subespacio de $B(\mathcal{B}(X);E)$. Así queda claro que todas estas topologías coinciden en $C_c(X;E)'$.

4.9. Proposición: Sea $H \subset C_c(X;E)' = M(X;E')$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es equicontinua en $C_c(X;E)$

(ii) H es equicontinua en $B(\mathcal{B}(X);E)$

(iii) Existe alguna seminorma continua p en E tal que

$$V_p m(X) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

(iv) Existe algún disco equicontinuo $A \subset E'$ (que podemos suponer $\sigma(E',E)$-cerrado) tal que

$$\rho_A(m)(X) \leq 1 \qquad \forall m \in H.$$

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii): Si H es equicontinua en $C_c(X;E)$ existe un disco entorno de cero $U \subset E$ tal que

$$\left| \int_X \phi \, dm \right| \leq 1 \qquad \forall m \in H \quad \forall \phi \in C_c(X;U)$$

Entonces del lema 4.7. se deduce

$$p_U(m)(X) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

Y esto, por el lema 3.5. nos dice

$$p_U(m)(X) = \sup \left\{ \left| \int_X \phi \, dm \right| : \phi \in B(\mathcal{B}(X);U) \right\} \leq 1 \qquad \forall m \in H,$$

es decir H es equicontinua en $B(\mathcal{B}(X);E)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) es claro ya que $C_c(X;E)$ es un subespacio de $B(\mathcal{B}(X);E)$.

(ii),(iii) y (iv) son equivalentes por la proposición 3.7.

<u>4.10. Teorema</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C_c(X;E)$ es infratonelado

(ii) Se verifica alguna de las condiciones siguientes:

(a) X es finito y E es infratonelado

(b) E es $\aleph$-infratonelado.

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii): Por la proposición 4.3. si $C_c(X;E)$ es infratonelado entonces E es infratonelado. Por tanto sólo hemos de

probar que si $C_c(X;E)$ es infratonelado y X es infinito entonces E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch: Sea $(x_n)\subset X$ una sucesión de puntos distintos y sea $F=\{(e'_{ni})_n : i\in I\}$ un acotado de $\ell^1(E'_\beta)$. Por 1.15. $\{\sum_{n=1}^{k}\delta_{x_n}(.)e_{ni} : k\in \mathbb{N},\ i\in I\}$ es un subconjunto de $M(X;E')=C_c(X;E)'$. Además, procediendo con la familia $\{\sum_{n=1}^{k}\delta_{x_n}(.)e'_{ni} : k\in \mathbb{N},\ i\in I\}$ de forma análoga a como hicimos en (ii)$\Rightarrow$(iii) de la demostración de 3.11. con la familia $\{\sum_{n=1}^{k}\delta_{A_n}(.)e'_{ni} : k\in \mathbb{N},\ i\in I\}$, y basándonos ahora en el teorema 4.8. en vez de en el teorema 3.6., se prueba sin dificultad que la familia $\{\sum_{n=1}^{k}\delta_{x_n}(.)e'_{ni} : k\in \mathbb{N},\ i\in I\}$ es $\beta(C_c(X;E)';C_c(X;E))$-acotada. Ahora bien, como suponemos $C_c(X;E)$ infratonelado, se deduce que es equicontinua. Entonces, por la proposición anterior, existe un disco $A\subset E'$ equicontinuo (y por tanto fuertemente acotado) y fuertemente cerrado tal que

$$\rho_A\Big(\sum_{n=1}^{k}\delta_{x_n}(.)e'_{ni}\Big)(X)\leq 1 \qquad \forall k\in \mathbb{N},\ \forall i\in I$$

Procediendo de nuevo como en (ii) $\Rightarrow$ (iii) de 3.11. se prueba que E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que se verifica (ii) y sea $H\subset C_c(X;E)'$ una familia $\beta(C_c(X;E)',C_c(X;E))$-acotada. Por el teorema 4.8. H es $\beta(B(\mathscr{B}(X);E)',B(\mathscr{B}(X);E))$-acotada, y por la hipótesis y por el teorema 3.13., $B(\mathscr{B}(X);E)$ es infratonelado. Por tanto H es equicontinua en $B(\mathscr{B}(X);E)$. Entonces, de la proposición anterior se deduce que H es equicontinua en $C_c(X;E)$. Así queda probado que $C_c(X;E)$ es infratonelado.

4.11. Corolario: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $C(K;E)$ es infratonelado para todo espacio topológico compacto K.

(b) Existe un espacio topológico compacto e infinito K tal que $C(K;E)$ es infratonelado.

(c) E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema anterior.

4.12. Corolario: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X es finito y E es infratonelado

(b) E es $\mathcal{K}$-infratonelado

(ii) $C_c(X;E)$ es infratonelado

(iii) $C_o(X;E)$ es infratonelado

(iv) $C_o(X)\otimes E$ es infratonelado

(v) $C_c(X)\otimes E$ es infratonelado

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema 4.10. y del teorema 4.8.

Hasta ahora hemos supuesto siempre $C_c(X;E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Otra topología natural que se puede considerar en $C_c(X;E)$ es la topología límite inductivo que definimos a continuación: Sea $\mathcal{K}(X)$ la familia de los subconjuntos compactos de X. Para cada $K\in\mathcal{K}(X)$ denotaremos $C_K(X;E)$ al espacio de las funciones $\phi\in C_c(X;E)$ tales que $sop(\phi)\subset K$, donde como siempre $sop(\phi)$ es el soporte de ϕ. Consideremos $C_K(X;E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Llamaremos topología límite inductivo en $C_c(X;E)$ y denotaremos por L a la topología localmente convexa final en $C_c(X;E)$ para la familia de aplicaciones $\{i_K : K\in \mathcal{K}(X)\}$, donde i_K es la inyección canónica de $C_K(X;E)$ en $C_c(X;E)$.

__4.13. Observaciones__: (1) En la definición de la topología L podemos prescindir de los compactos K con interior vacío ya que para éstos $C_K(X;E)=\{0\}$.

(2) Si $K\in\mathcal{K}(X)$ y denotamos por $\mathring{K}$ al interior de K, es fácil comprobar que

$$C_K(X;E) = \{\phi\in C(X;E) : \phi(X\setminus\mathring{K})=\{0\}\}$$

y que $C_K(X;E)$ es topológicamente isomorfo a $C_o(\mathring{K};E)$.

El resultado siguiente es análogo a un lema de De la Fuente [4] que puede verse por ejemplo en [25] pág. 52.

__4.14. Lema__: Sea $K\subset X$ compacto, entonces la aplicación restricción

$$\begin{aligned} \rho_K : (C_c(X;E),L) &\longrightarrow C(K;E) \\ \phi &\longrightarrow \phi|_K \end{aligned}$$

es lineal, continua, abierta sobre su imagen, y de imagen densa.

__Demostración__: Es trivial que ρ_K es lineal y continua. Sea $Im(\rho_K)$ la imagen por ρ_K de $C_c(X;E)$. Como toda función $f\in C(K)$ admite alguna extensión continua $\tilde{f}\in C_c(X)$, es claro que $Im(\rho_K)\supset C(K)\otimes E$, y por tanto $Im(\rho_K)$ es un subespacio denso de $C(K;E)$. Por último ρ_K es abierta sobre su imagen: Sea $U\subset C_c(X;E)$ un entorno de cero para la topología L y sea K_o un subconjunto compacto de X tal que $\mathring{K}_o\supset K$. Por ser U un entorno de cero para la topología L, $i_{K_o}^{-1}(U)=\{\phi\in U : sop(\phi)\subset K_o\}$ es un entorno de cero para la topología de la convergencia uniforme en

$C_{K_o}(X;E)$, e.d. existe una seminorma continua p en E tal que

$$(*)\quad \{\phi\in C_{K_o}(X;E) : p(\phi(x))<1 \ \forall x\in X\}\subset\{\phi\in U : sop(\phi)\subset K_o\}=i^{-1}_{K_o}(U)$$

Entonces

$$\{\phi\in C(K;E) : p(\phi(x))<1 \quad \forall x\in K\}\cap Im(\rho_K)$$

es un entorno de cero en $Im(\rho_K)$, y además

$$\{\phi\in C(K;E) : p(\phi(x))<1 \quad \forall x\in K\} \cap Im(\rho_K)\subset\rho_K(U)$$

ya que si $\psi\in Im(\rho_K)$ existe $\tilde{\psi}\in C_c(X;E)$ extensión continua de ψ, y si además

$$p(\psi(x))<1 \qquad \forall x\in K$$

y definimos $C=\{x\in X : p(\tilde{\psi}(x))\geq 1\}$, existe una función real y continua f tal que $f(X)\subset[0,1]$, $f(C\cup(X\setminus\mathring{K}_o))=\{0\}$ y $f(K)=\{1\}$; tomando $\overline{\psi}=f(.)\tilde{\psi}(.)$, se tiene

$$\overline{\psi}\in C_{K_o}(X;E), \qquad \rho_K(\overline{\psi})=\psi \qquad y \quad p(\overline{\psi}(x))<1 \qquad \forall x\in X,$$

por tanto, por $(*)$, $\rho_K(\overline{\psi})=\psi\in\rho_K(U)$.

4.15. Corolario: Si $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado (resp. tonelado), y K es un subconjunto compacto de X, entonces C(K;E) es infratonelado (resp. tonelado).

Demostración: Es una consecuencia inmediata del lema anterior teniendo en cuenta que si un e.l.c. E tiene algún subespacio infratonelado (resp. tonelado) y denso, entonces E es infratonelado (resp. tonelado).

4.16. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X está dotado de su topología discreta y E es infratonelado

(b) E es $\mathcal{K}$-infratonelado

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Por el corolario anterior, si $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado entonces $C(K;E)$ es infratonelado para todo compacto $K\subset X$. Entonces, por el teorema 4.10., E es infratonelado. Además, por ser X localmente compacto, si no es discreto, tiene algún subconjunto compacto e infinito, y entonces del corolario 4.11. se sigue que E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si X es discreto entonces $(C_c(X;E),L)$ coincide algebraica y topológicamente con $\bigoplus_X E$, y por tanto, si E es infratonelado, se sigue que $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado.

Si E es $\mathcal{K}$-infratonelado, del corolario 4.12. se deduce que $C_o(\mathring{K};E)$ es infratonelado para cualquier subconjunto compacto K de X, y entonces de la observación 4.13. y de la definición de la topología L se deduce que $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado.

5. C(X;E) infratonelado.

En la presente sección X será un espacio topológico completamente regular. En algunas ocasiones (y lo indicaremos expresamente) supondremos que X es incluso localmente compacto.

Vamos a caracterizar cuándo el espacio e.l.c. C(X;E) es infratonelado. Para ello recordemos rápidamente la caracterización dada por Warner [37] en el caso escalar:

5.1. Definición: Diremos que $C \subset X$ es un subconjunto relativamente seudocompacto warneriano de X si toda función real definida en X, no negativa, semicontinua inferiormente y acotada en los subconjuntos compactos de X está acotada en C.

5.2. Teorema [37]: $C(X)$ es infratonelado si y sólo si todo subconjunto relativamente seudocompacto warneriano de X es relativamente compacto.

Damos ahora un lema análogo al 4.7. Para ello introducimos las siguientes

5.3. Notaciones: Denotaremos por $C_b(X)$ al espacio vectorial de las funciones continuas, escalares y acotadas definidas en X.

Como es habitual denotaremos por $C_b(X)\otimes E$ y $C(X)\otimes E$ a los subespacios de $C(X;E)$ engendrados por las familias $\{f(.)e : f\in C_b(X),\ e\in E\}$ y $\{f(.)e : f\in C(X),\ e\in E\}$, respectivamente.

Si $B\subset E$ es un disco denotaremos por $C(X;B)$ al conjunto

$$\{\phi\in C(X;E) : \phi(X)\subset B\}$$

5.4. Lema: Sea $B\subset E$ un disco, sea $m\in M_o(X;E') = C(X;E)'$ y sea K el soporte de m, sop(m), entonces

$$p_B(m)(X) = p_B(m)(K) = \operatorname{Sup}\left\{\left|\int_X \phi\, dm\right| : \phi\in C(X;E) \text{ y } \phi(K)\subset B\right\} =$$

$$= \operatorname{Sup}\left\{\left|\int_X \phi\, dm\right| : \phi\in C(X;B)\right\} = \operatorname{Sup}\left\{\left|\int_X \phi\, dm\right| : \phi\in (C_b(X)\otimes E)\cap C(X;B)\right\}$$

Y por tanto

$$\left|\int_X \phi\, dm\right| \leq p_B(m)(X) \quad \text{si} \quad \phi\in C(X;E) \quad \text{y} \quad \phi(K)\subset B.$$

Demostración: Por la definición de soporte de una medida es claro que

$$p_B(m)(X) = p_B(m)(K)$$

Además, por el lema 3.5.,

$$\left|\int_X \phi \, dm\right| = \left|\int_K \phi \, dm\right| \leqslant p_B(m)(K) \qquad \text{si} \quad \phi \in C(X;E) \quad \text{y} \quad \phi(K) \subset B,$$

y por tanto se tiene

$$p_B(m)(K) \geqslant \operatorname{Sup}\left\{\left|\int_X \phi \, dm\right| : \phi \in C(X;E) \quad \text{y} \quad \phi(K) \subset B\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup\left\{\left|\int_X \phi \, dm\right| : \phi \in C(X;B)\right\} \geqslant \sup\left\{\left|\int_X \phi \, dm\right| : \phi \in (C_b(X) \otimes E) \cap C(X;B)\right\}$$

Por último la igualdad

$$\operatorname{Sup}\left\{\left|\int_X \phi \, dm\right| : \phi \in (C_b(X) \otimes E) \cap C(X;B)\right\} = p_B(m)(K)$$

se prueba mediante una demostración análoga a la de 4.7.

Acabamos de hacer uso, en el lema anterior, de la definición que dimos en la sección 1 de soporte de una forma lineal (o medida) $m \in C(X;E)'$. Para caracterizar algunos subconjuntos de $C(X;E)'$ conviene dar la siguiente

<u>5.5 Definición</u>: Sea $H \subset C(X;E)' = N_o(X;E')$, llamaremos soporte de H y notaremos sop(H) a la clausura en X del conjunto

$$\bigcup_{m \in H} \operatorname{sop}(m)$$

<u>5.6. Observaciones</u>: Observemos que se verifican los siguientes contenidos:

$$C_b(X) \otimes E \subset C(X) \otimes E \subset C(X;E)$$

y si además X es localmente compacto podemos añadir

$$C_c(X) \otimes E \subset C_o(X) \otimes E \subset C_o(X;E) \subset C(X;E)$$

y $\quad C_c(X)\otimes E\subset C_c(X;E)\subset C_0(X;E)\subset C(X;E)$

En esta sección vamos a considerar todos estos subespacios de $C(X;E)$ dotados de la topología inducida por $C(X;E)$, es decir de la topología compacto-abierta, y para evitar ambigüedades utilizaremos la letra $\mathcal{K}$ para designar esta topología. Podríamos considerar estos productos tensoriales con esta topología dentro del marco general de la teoría de productos tensoriales topológicos ([16] pág. 286), pero, al igual que en 4.6., en general prescindiremos de esta interpretación.

Es un resultado conocido, y no es difícil de probar, que todos estos espacios que estamos considerando son densos en $C(X;E)$, y por tanto sus duales coinciden con $C(X;E)' = M_0(X;E')$.

A continuación caracterizaremos los subconjuntos fuertemente acotados de $C(X;E)'$. Debemos señalar que Schmets [30] ya probó que si $H\subset C(X;E)'$ es fuertemente acotado entonces el soporte de H, sop(H), es un relativamente seudocompacto warneriano de X.

<u>5.7. Proposición</u>: Sea $H\subset C(X;E)' = M_0(X;E')$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es $\beta(C(X;E)',C(X;E))$-acotado

(ii) H es $\beta(C(X;E)',(C(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotado

(iii) H es $\beta(C(X;E)',(C_b(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotado

(iv) Se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) sop(H) es un relativamente seudocompacto warneriano de X

(b) H está acotada en $\mathcal{M}_0(X;E'_\beta)$

Además, si X es localmente compacto, las afirmaciones anteriores son equivalentes a cualquiera de las siguientes:

(v) H es $\beta(C(X;E)',(C_o(X;E),\mathcal{K}))$-acotado

(vi) H es $\beta(C(X;E)',(C_o(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotado

(vii) H es $\beta(C(X;E)',(C_c(X;E),\mathcal{K}))$-acotado

(viii) H es $\beta(C(X;E)',(C_c(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotado

<u>Demostración</u>: Por ser cada espacio subespacio del anterior, las siguientes implicaciones son claras:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii),

y si X es localmente compacto,

(i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (viii) y

(i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii)

Veremos ahora que si se verifica (iii) (resp. (viii) si X es localmente compacto) entonces se verifica (iv): Si $B\subset E$ es un disco acotado, es claro que $(C_b(X)\otimes E)\cap C(X;B)$ (resp. $(C_c(X)\otimes E)\cap C(X;B)$ si X es localmente compacto) es un acotado de $C(X;E)$, y entonces del lema 5.4. (resp. del lema 4.7.) se sigue que si se verifica (iii) (resp. (viii)) entonces se verifica la parte (b) de (iv); además se verifica la parte (a): Sea g una función real, no negativa y semicontinua inferiormente definida en X. Supongamos que g no está acotada en sop(H): si para cada $n\in\mathbb{N}$ denotamos por G_n al abierto $g^{-1}((n,\infty))$ se tiene $G_n\cap \mathrm{sop}(H)\neq\emptyset$, y por tanto existe $m_n\in H$ tal que

$$G_n\cap \mathrm{sop}(m_n)\neq\emptyset$$

Entonces por la proposición 1.11. existe $B_n\in\mathcal{B}(X)$, $B_n\subset G_n$ tal que $m_n(B_n)\neq 0$. Por tanto existe $e_n\in E$ tal que $|\langle e_n,m_n(B_n)\rangle|>n+1$. Por la regularidad de m_n existe un compacto $K_n\subset B_n$ y un abierto $G'_n\supset B_n$ tales que $|m_{ne_n}|(G'_n\setminus K_n)<\frac{1}{2}$, donde $|m_{ne_n}|$ es la variación de la medida escalar m_{ne_n} y $m_{ne}(A)=\langle e,m_n(A)\rangle$ para todo $A\in\mathcal{B}(X)$ y todo $e\in E$. Es claro que podemos suponer $G'_n\subset G_n$ (y G'_n relativamente compacto si X es localmente compacto). Sea $f_n\in C_b(X)$ (si X es localmente compacto $f_n\in C_c(X)$) tal que $f_n(X)\subset[0,1]$, $f_n(K_n)=\{1\}$ y $f_n(X\setminus G'_n)=\{0\}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\left|\int_X f_n(.)e_n\, dm_n\right| = \left|\int_{G'_n\setminus K_n} f_n\, dm_{ne_n} + m_{ne_n}(K_n)\right| =$$

$$= \left|\int_{G'_n\setminus K_n} f_n\, dm_{ne_n} + m_{ne_n}(B_n) - m_{ne_n}(B_n\setminus K_n)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|m_{ne_n}(B_n)\right| - \left|\int_{G'_n\setminus K_n} f_n\, dm_{ne_n} - m_{ne_n}(B_n\setminus K_n)\right| \geqslant$$

$$\geqslant n+1 - \Big(|m_{ne_n}|(G'_n\setminus K_n) + |m_{ne_n}|(B_n\setminus K_n)\Big) \geqslant n$$

Entonces, como suponemos H $\beta(C(X;E)',(C_b(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotada (resp. $\beta(C(X;E)',(C_c(X)\otimes E,\mathcal{K}))$-acotada si X es localmente compacto), hemos de concluir que la sucesión $(f_n(.)e_n)$ no está acotada en $C(X;E)$. En particular existe un compacto $K\subset X$ tal que $\{n\in\mathbb{N} : f_n(K)\neq\{0\}\}$ es infinito, y como $\{n\in\mathbb{N} : f_n(K)\neq\{0\}\}\subset\{n\in\mathbb{N} : G_n\cap K\neq\emptyset\}$, de la definición de G_n se deduce que g no está acotada en K. Así podemos concluir que sop(H) es un relativamente seudocompacto warneriano de X.

Ya sólo queda probar:

(iv) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $H\subset C(X;E)'$ verifica la condición (a) y la condición (b) de (iv). Sea $A\subset C(X;E)$ un acotado. Si p es una seminorma continua en E podemos escribir

$$g(x) = \sup\{p(\phi(x)) : \phi\in A\} < +\infty \qquad \forall x\in X$$

Entonces como g está definida como supremo de una familia de funciones continuas podemos afirmar ([8] pág. 85) que es una función real no negativa semicontinua inferiormente. Además como A es un acotado de $C(X;E)$, g está acotada en los subconjuntos compactos de X. Por tanto, como sop(H) es un relativamente seudocompacto warneriano de X, se concluye que g está acotada en sop(H), y así

$$A(sop(H)) = \bigcup_{\phi\in A} \phi(sop(H))$$

es un acotado de E. Sea B la envoltura absolutamente convexa de A(sop(H)). Por la condición (b) existe M_B tal que

$$p_B(m)(X) \leq M_B \qquad \forall m\in H$$

y entonces, por el lema 5.4.

$$\left|\int_X \phi \, dm\right| \leq p_B(m)(X) \leq M_B \qquad \forall\phi\in A \quad \forall m\in H.$$

Por tanto H es $\beta(C(X;E)',C(X;E))$-acotado.

La proposición suguiente se debe a Schmets [30]:

<u>5.8. Proposición [30]</u>: Una familia $H\subset C(X;E)' = M_o(X;E')$ es equicontinua si y sólo si verifica las dos condiciones siguientes:

(i) El soporte de H, sop(H), es un subconjunto compacto de X.

(ii) Existe alguna seminorma continua p en E tal que

$$V_p m(X) \leq 1 \qquad \forall m\in H$$

Al igual que el lema 4.14., el siguiente resultado es análogo al lema de De la Fuente [4] que aparece en [25] pág. 52. Se prueba de modo similar.

5.9. Lema: Sea $K \subset X$ un compacto, entonces la aplicación restricción ρ_K: $C(X;E) \longrightarrow C(K;E)$ es lineal, continua, abierta sobre su imagen, y de imagen densa.

La siguiente proposición es análoga a las proposiciones 3.10. y 4.3.

5.10. Proposición: $C(X)$ y E son (topológicamente isomorfos a) subespacios complementados de $C(X;E)$.

Finalmente podemos ya caracterizar cuándo $C(X;E)$ es infratonelado.

5.11. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(i) $C(X;E)$ es infratonelado

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X es seudofinito (c.d. los únicos subconjuntos compactos de X son los subconjuntos finitos) y E es infratonelado

(b) $C(X)$ es infratonelado y E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Si $C(X;E)$ es infratonelado, por la proposición anterior, $C(X)$ y E son infratonelados. Además, si X tiene algún subconjunto compacto e infinito K, como por el lema 5.9. $C(K;E)$ es infratonelado, se deduce del corolario 4.11. que E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si X es seudofinito entonces $C(X;E)$ está dotado de la topología de la convergencia simple, y para esta topología ya probó Schmets ([27] Th. V.3.2.) que si E es infratonelado entonces $C(X;E)$ también lo es.

Supongamos ahora que $C(X)$ es infratonelado y E es $\mathcal{K}$-infratonelado y sea $H \subset C(X;E)'$ una familia fuertemente acotada. Por la proposición 5.7. sop(H) es un relativamente seudocompacto warneriano de X, pero como $C(X)$ es infratonelado, por el teorema 5.2. podemos afirmar que sop(H) = K es un compacto. Por otra parte, si $m \in H$ y denotamos por m_K a la restricción de m a $\mathcal{B}(K)$, por 5.7. y 4.8. es claro que $H_K = \{m_K : m \in H\}$ es un subconjunto fuertemente acotado de $C(K;E)' =$ $= M(K;E')$ ya que

$$p_B(m_K)(K) = p_B(m)(K) = p_B(m)(X)$$

para todo $m \in H$ y para todo $B \subset E$ disco acotado. Entonces, como por 4.10. $C(K;E)$ es infratonelado, la familia H_K es equicontinua, y así, por la proposición 4.9., existe una seminorma continua p en E tal que

$$V_p m_K(K) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

y por tanto

$$V_p m(X) = V_p m(K) = V_p m_K(K) \leq 1 \qquad \forall m \in H$$

Y así de la proposición 5.8. se sigue que H es equicontinua. Por tanto $C(X;E)$ es infratonelado.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior y del corolario 4.11. se deduce el siguiente resultado que ya dimos en [19]:

<u>5.12. Corolario</u>: Sea X tal que $C(X)$ es infratonelado y sea βX la compactificación de Stone-Čech de X. Supongamos que $C(\beta X;E)$ es infratonelado. Entonces $C(X;E)$ es infratonelado.

5.13. Corolario: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C(X;E)$ es infratonelado

(ii) Se verifica alguna de las condiciones siguientes:

(a) X es seudofinito y E es infratonelado.

(b) $C(X)$ es infratonelado y E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(iii) $(C(X)\otimes E, \mathcal{K})$ es infratonelado.

(iv) $(C_b(X)\otimes E, \mathcal{K})$ es infratonelado.

Si además X es localmente compacto, las afirmaciones anteriores son equivalentes a cualquiera de las siguientes:

(v) $(C_c(X)\otimes E, \mathcal{K})$ es infratonelado.

(vi) $(C_o(X)\otimes E, \mathcal{K})$ es infratonelado.

(vii) $(C_c(X;E), \mathcal{K})$ es infratonelado.

(viii) $(C_o(X;E), \mathcal{K})$ es infratonelado.

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema anterior y de la proposición 5.7.

CAPITULO III: Tonelación en C(X;E) y en otros espacios de funciones vectoriales.

En este capítulo vamos a estudiar en qué condiciones son tonelados los espacios que hemos ido definiendo a lo largo de los dos capítulos anteriores.

Si F es un e.l.c., determinar si F es tonelado es determinar si las familias puntualmente acotadas de F' son equicontinuas. Si ya sabemos que F es infratonelado nuestro problema se reduce a determinar si las familias puntualmente acotadas de F' son fuertemente acotadas, ya que éstas, al ser F infratonelado, ya sabemos que son equicontinuas. Siguiendo esta idea, como en el capítulo anterior estudiamos cuándo son infratonelados los espacios que tratamos en este capítulo, uno de los objetivos fundamentales que perseguimos ahora es determinar en qué condiciones las familias puntualmente acotadas de estos espacios son fuertemente acotadas (6.10. y 7.3.).

Veremos en este capítulo que muchos de los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior al tratar el caso infratonelado admiten formulaciones análogas en el problema que tratamos ahora. Concretamente veremos que una buena parte de los resultados del capítulo anterior son válidos si sustituimos "infratonelado" por "tonelado". No obstante hay que señalar que esto no es cierto ni mucho menos para todos los resultados (Observación 7.5.).

Por último podemos indicar que en este capítulo en concreto caracterizamos (teorema 6.12.) cuándo $c_0(E)$ es tonelado: Veremos que la caracterización que dan Marquina y Sanz Serna [17] de cuándo

$c_o(E)$ es tonelado imponiendo condiciones adicionales de completitud al espacio E, es cierta en el caso general.

6. C(X;E) tonelado.

En la presente sección X será un espacio topológico completamente regular.

Vamos a caracterizar cuándo el espacio C(X;E) es tonelado. Para ello conviene recordar primero la caracterzación dada por Nachbin [22] y Shirota [33] en el caso escalar:

6.1. Definición: Diremos que $C \subset X$ es un subconjunto relativamente seudocompacto de X si toda función real y continua definida en X está acotada en C.

6.2. Teorema [22,33]: C(X) es tonelado si y sólo si todo subconjunto relativamente seudocompacto de X es relativamente compacto.

En el caso vectorial Schmets [30] ha obtenido el siguiente resultado:

6.3. Propsición [30]: Si $H \subset C(X;E)'$ es puntualmente acotada entonces el soporte de H, sop(H), es un subconjunto relativamente seudocompacto de X.

La proposición anterior nos permite dar una primera caracterización de cuándo C(X;E) es tonelado.

Como en secciones anteriores si K es un subconjunto compacto de X denotaremos por ρ_K a la aplicación restricción de C(X;E) en C(K;E).

Naturalmente supondremos la imagen de ρ_K, $Im(\rho_K)$, dotada de la topología inducida por $C(K;E)$.

<u>6.4. Proposición</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C(X;E)$ es tonelado.

(ii) $C(X)$ es tonelado e $Im(\rho_K)$ es tonelado para todo subconjunto compacto K de X.

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) es consecuencia inmediata de 5.9. y 5.10.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que se verifica (ii) y sea $H \subset C(X;E)'$ una familia puntualmente acotada. Por la proposición anterior y por 6.2., sop(H) es un compacto de X. Notemos sop(H)=K. Para cada $m \in H$ denotamos por m_K a la restricción de la medida m a $\mathcal{B}(K)$. Es claro que $\{m_K : m \in H\} \subset C(K;E)' = Im(\rho_K)'$. Además $\{m_K : m \in H\}$ es puntualmente acotada en $Im(\rho_K)$ ya que si $\phi \in C(K;E)$ y $\tilde{\phi} \in C(X;E)$ es una extensión de ϕ se tiene

$$\langle \tilde{\phi}, m \rangle = \int_X \tilde{\phi}\, dm = \int_K \phi \; dm_K = \langle \phi, m_K \rangle$$

para todo $m \in H$. Así, por la hipótesis, $\{m_K : m \in H\}$ es una familia equicontinua en $Im(\rho_K)$, e.d. existe una seminorma continua p en E tal que

$$|\langle \phi, m_K \rangle| \leqslant \|\phi\|_p \qquad \forall m \in H \qquad \forall \phi \in Im(\rho_K)$$

y entonces, si $\psi \in C(X;E)$ se tiene

$$|\langle \psi, m \rangle| = |\langle \psi|_K, m_K \rangle| \leqslant \|\psi|_K\|_p = \|\psi\|_{Kp}$$

para cada $m \in H$. Por tanto H es equicontinua en $C(X;E)$.

Una consecuencia sencilla de la proposición anterior es el siguiente resultado que ya dimos en [19]:

6.5. Corolario: Sea X tal que $C(X)$ es tonelado y sea βX la compactificación de Stone-Čech de X. Supongamos que $C(\beta X;E)$ es tonelado. Entonces $C(X;E)$ es tonelado.

Demostración: Si $K\subset X$ es un compacto denotaremos por ρ_K a la aplicación restricción de $C(X;E)$ en $C(K;E)$ y por ρ_K^{β} a la aplicación restricción de $C(\beta X;E)$ en $C(K;E)$. Obsérvese que $\mathrm{Im}(\rho_K^{\beta})$ es un subespacio de $\mathrm{Im}(\rho_K)$, y además, como $\mathrm{Im}(\rho_K^{\beta})\supset C(K)\otimes E$, es un subespacio denso. Por otra parte si $C(\beta X;E)$ es tonelado, de 5.9. se sigue que $\mathrm{Im}(\rho_K^{\beta})$ es también tonelado, y por tanto, por ser un subespacio denso de $\mathrm{Im}(\rho_K)$, $\mathrm{Im}(\rho_K)$ también lo es. Entonces de la proposición anterior se sigue inmediatamente el resultado.

6.6. Notaciones: Sea K un compacto, A un abierto de K y $B\subset E$ un disco. Ya introdujimos la notación:

$$C(K;B) = \{\phi\in C(K;E)\ :\ \phi(K)\subset B\}$$

Introducimos ahora las siguientes:

$$C_A(K;B) = \{\phi\in C(K;B)\quad \phi(K\setminus A)=\{0\}\}$$

$\mathcal{P}(K;B)$ es el subconjunto de $C(K;B)$ formado por las aplicaciones del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i$$

donde $(f_i)_{i=1}^{n}\subset C(K)$, $(e_i)_{i=1}^{n}\subset B$ y $\sum_{j=1}^{n} f_j(t)\leq 1$ y $f_i(t)\geq 0$ $\forall t\in K$, $1\leq i\leq n$.

$\mathcal{P}_A(K;B)$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(K;B)$ formado por las aplicaciones del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i$$

donde $(f_i)_{i=1}^{n}\subset C(K)$, $(e_i)_{i=1}^{n}\subset B$ y $f_i(K\setminus A)=\{0\}$, y $\sum_{j=1}^{n} f_j(t)\leq 1$ y $f_i(t)\geq 0$ $\forall t\in K$ $1\leq i\leq n$, es decir $\mathcal{P}_A(K;B) = C_A(K;B) \cap \mathcal{P}(K;B)$.

<u>6.7. Lema</u>: Sea K un compacto, $A\subset K$ abierto, $(G_j)_{j=1}^n$ un recubrimiento abierto de A y B un disco de E, entonces

$$C_A(K;B) \subset \overline{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_{G_j}(K;B)}$$

<u>Demostración</u>: Sea $\phi\in C_A(K;B)$ y p una seminorma continua en E. Definimos $G_o = \{t\in K : p(\phi(t)) < 1/3\}$. Por ser $\phi(K)$ compacto existe $(t_i)_{i=1}^m \subset K$ tal que si tomamos $e_i = \phi(t_i)$ y $B_i = \{e\in E : p(e-e_i) < 1/3\}$, se tiene $\phi(K)\subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Sea $A_i = \phi^{-1}(B_i)$. Observemos que si $A_i\cap G_o \neq \emptyset$, tomando $t\in A_i\cap G_o$ podemos escribir

$$p(e_i) = p(\phi(t_i)) \leq p(\phi(t_i) - \phi(t)) + p(\phi(t)) < 2/3$$

Como $\{A_i\cap G_j : 0\leq j\leq n,\ 1\leq i\leq m\}$ es un recubrimiento abierto de K, existe (f_{ij}) partición continua de la unidad en K subordinada a $\{A_i\cap G_j : 0\leq j\leq n,\ 1\leq i\leq m\}$

Claramente se tiene $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(.)e_i \in \sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{G_j}(K;B)$, pero además, si $t\in K$

$$p\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(t)e_i - \phi(t)\Big) \leq p\Big(\sum_{i=1}^{m} f_{io}(t)e_i\Big) + p\Big(\sum_{j=o}^{n}\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(t)e_i - \phi(t)\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} f_{io}(t)p(e_i) + \sum_{j=o}^{n}\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(t)p(e_i-\phi(t)) < 2/3 + 1/3 = 1.$$

<u>6.8. Corolario</u>: Sea K un compacto y $B\subset E$ un disco, entonces

$$C(K;B) \subset \overline{\mathcal{P}(K;B)}$$

Más aún, si B es cerrado

$$C(K;B) = \overline{\mathcal{P}(K;B)}$$

Demostración: Es consecuencia inmediata del lema anterior.

6.9. Lema: Sea K un compacto, $B \subset E$ un disco acotado, $A \subset K$ un abierto y $H \subset C(K;E)'$ una familia no acotada en $C_A(K;B)$. Supongamos que E es tal que toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada. Entonces se verifica al menos una de las dos afirmaciones siguientes:

(a) H no es puntualmente acotada en $C(K;E)$

(b) Si $t \in A$, H no está acotada en $C_{A\setminus\{t\}}(K;B)$

Demostración: Supongamos que se verifica la hipótesis y que H no verifica (a). Vamos a probar que entonces se verifica (b): Observemos que si $f \in C(K)$ es no nula entonces E es topológicamente isomorfo al subespacio de $C(K;E)$ formado por las funciones del tipo $f(.)e$, con $e \in E$. Sea $t \in A$ y $f_o \in C(K)$ tal que $f_o(t)=1$, $f_o(K\setminus A)=\{0\}$ y $f_o(K) \subset [0,1]$. Toda función $\phi \in C_A(K;B)$ se puede escribir de la forma

$$f_o(.)\phi(t) + \left(\phi(.)-f_o(.)\phi(t)\right)$$

donde $\phi(.)-f_o(.)\phi(t) \in C_{A\setminus\{t\}}(K;2B)$, y por tanto

$$(*) \quad C_A(K;B) \subset \left\{f_o(.)e \;:\; e \in B\right\} + C_{A\setminus\{t\}}(K;2B)$$

Como H no verifica (a), en particular H es puntualmente acotada en $\{f_o(.)e \;:\; e \in E\}$, y al ser este subespacio de $C(K;E)$ isomorfo a E deducimos que H está acotada en $\{f_o(.)e \;:\; e \in B\}$, pues toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada. Entonces de $(*)$ y de que H no está acotada en $C_A(K;B)$ se deduce que H no está acotada en $C_{A\setminus\{t\}}(K;B)$. Por tanto se verifica (b).

6.10. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada

(ii) Toda familia puntualmente acotada de $c_o(E)'$ es fuertemente acotada

(iii) Si K es un compacto, toda familia puntualmente acotada de $C(K;E)'$ es fuertemente acotada

(iv) Existe un compacto K tal que toda familia puntualmente acotada de $C(K;E)'$ es fuertemente acotada.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que se verifica (i) y sea $H \subset c_o(E)' \subset \ell^1(E'_\beta)$ una familia puntualmente acotada. Supongamos que H no es fuertemente acotada: existe, por 2.1., un disco acotado B de E tal que

$$(1) \qquad \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_B(e'_n) \ : \ (e'_n) \in H \right\} = +\infty$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotaremos por π_k a la k-ésima proyección canónica de $\ell^1(E'_\beta)$ sobre E'. Es claro que $\pi_k(H) = H_k \subset E'$ es puntualmente acotada y, por (i), fuertemente acotada para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, si $k \in \mathbb{N}$

$$\sup \left\{ \left| \langle e, \pi_k((e'_n)) \rangle \right| \ : \ e \in B, \ (e'_n) \in H \right\} = \sup \left\{ p_B(e') \ : \ e' \in H_k \right\} < +\infty$$

Por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $M_k > 0$ tal que

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{k} p_B(e'_n) \leq M_k \qquad \forall (e'_n) \in H$$

Por otra parte, por (1), existe $(e'^1_n) \in H$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} p_B(e'^1_n) > 1$, y entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_B(e'^1_n) > 1 \qquad y \qquad \sum_{n=n_1+1}^{\infty} p_B(e'^1_n) < 1$$

Por (1) y (2) es claro que

$$\sup \left\{ \sum_{n=n_1+1}^{\infty} p_B(e'_n) \ : \ (e'_n) \in H \right\} = +\infty$$

y así existe $(e'^2_n) \in H$ tal que $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} p_B(e'^2_n) > 2(2+M_{n_1}+1)$. Y por tanto podemos tomar $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_B(e'^2_n) > 2(2+M_{n_1}+1) \quad \text{y} \quad \sum_{n=n_2+1}^{\infty} p_B(e'^2_n) < 1$$

Por inducción podemos construir una sucesión creciente de números naturales (n_j) y una sucesión $((e'^j_n)_n)_j \subset H$ tales que

$$(3) \qquad \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} p_B(e'^j_n) > j(j+M_{n_{j-1}}+1) \qquad \text{y}$$

$$(4) \qquad \sum_{n=n_j+1}^{\infty} p_B(e'^j_n) < 1$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.

De (3) se deduce que existe una sucesión $(e_n) \subset B$ tal que

$$(5) \qquad \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} \langle e_n, e'^j_n \rangle > j(j+M_{n_{j-1}}+1) \qquad \text{si } j \in \mathbb{N},\ j \geq 2$$

Definimos entonces $f_n = e_n$ si $1 \leq n \leq n_1$ y $f_n = \frac{1}{j} e_n$ si $n_{j-1}+1 \leq n \leq n_j$ y $j \geq 2$. Claramente $(f_n) \in c_o(E)$. Pero, por (4) y (5), si $j \geq 2$ se tiene:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, e'^j_n \rangle \right| = \left| \sum_{n=1}^{n_{j-1}} \langle f_n, e'^j_n \rangle + \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} \langle f_n, e'^j_n \rangle + \sum_{n=n_j+1}^{\infty} \langle e_n, e'^j_n \rangle \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} \langle f_n, e'^j_n \rangle \right| - \sum_{n=1}^{n_{j-1}} \left| \langle f_n, e'^j_n \rangle \right| - \sum_{n=n_j+1}^{\infty} \left| \langle f_n, e'^j_n \rangle \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{j} \left| \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} \langle e_n, e'^j_n \rangle \right| - M_{n_{j-1}} - 1 > j$$

Y esto es absurdo ya que habíamos supuesto H puntualmente acotada.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia inmediata de que E es un subespacio complementado de $c_o(E)$ (4.5.).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como acabamos de ver que (i) y (ii) son equivalentes, supondremos que se verifica (i) y (ii) y probaremos que entonces se verifica (iii). Haremos esto en dos partes: primero restringiéndonos a compactos metrizables, y luego en general.

(a) Si K es un compacto metrizable entonces toda familia puntualmente acotada de $C(K;E)'$ es fuertemente acotada:

Sea $H \subset C(K;E)'$ una familia no fuertemente acotada, entonces existe un acotado $A \subset C(K;E)$ tal que H no está acotada en A. Si llamamos B a la envoltura absolutamente convexa de $A(K)= \bigcup_{\phi \in A} \phi(K)$ es claro que B es un disco acotado de E y que H no está acotada en $C(K;B)$.

Fijada una métrica en K existe una familia finita $(A_i)_{i=1}^n$ de abiertos de K con diámetro $(\mathrm{diam}(A_i))$ menor que 1, que recubre K. Por el lema 6.7.

$$C(K;B) \subset \overline{\sum_{i=1}^{n} C_{A_i}(K;B)}$$

y entonces, como H no está acotada en $C(K;B)$, concluimos que H no está acotada en $C_{A_{i_0}}(K;B)$ para algún $i_0 \in \{1,\dots,n\}$. Definimos $G_1=A_{i_0}$. Por inducción podemos construir una sucesión (G_n) de abiertos de K, encajados, tal que $\mathrm{diam}(G_n) < \frac{1}{n}$ y H no está acotada en $C_{G_n}(K;B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_n \mathrm{diam}(G_n)=0$, $\bigcap_n G_n$ consta a lo más de un punto; por tanto, por el lema anterior, o bien H no es puntualmente acotada, que es lo que queremos probar, o bien, tomando

$$G'_n = G_n \setminus \Big(\bigcap_m G_m\Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tenemos

(6) $\quad \bigcap_n G'_n = \emptyset$

y (7) para todo $n \in \mathbb{N}$ H no está acotada en $C_{G'_n}(K;B)$.

Así, por el lema 6.7., para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $m_j \in \mathbb{N}$, $(e_i^j)_{i=1}^{k_j} \subset B$ y

$(f_i^j)_{i=1}^{k_j} \subset C(K)$ tales que

(8) $f_i^j(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k_j} f_i^j(t) \leq 1 \quad$ y $\quad f_i^j(K \setminus G'_j) = \{0\}$ si $t \in K$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k_j$

y (9) $\left| \left\langle \sum_{i=1}^{k_j} f_i^j(.) e_i^j , m_j \right\rangle \right| > 2^{2j}$

Entonces, "tomando bloques", podemos encontrar una sucesión creciente de números naturales (n_j), una sucesión $(m_j) \subset H$, una sucesión $(f_n)_n \subset C(K)$ de funciones no negativas, y una sucesión $(e_n) \subset B$, tales que para cada $j \in \mathbb{N}$ (tomando $n_0 = 0$) se tiene:

(10) $\left| \left\langle \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(.) e_n , m_j \right\rangle \right| > 2^{2j}$

y (11) $\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t) \leq 1 \quad$ y $\quad f_n(K \setminus G'_j) = \{0\}$ si $t \in K$ y $n_{j-1}+1 \leq n \leq n_j$.

Definimos

$$c_o(E) \xrightarrow{\ S\ } C(K;E)$$
$$(x_n) \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(.) x_n \right)$$

S está bien definida, es decir si $(x_n) \in c_o(E)$ entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(.) x_n \right) \in C(K;E),$$

en efecto: si $t \in K$, por (6), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \notin G'_{j_0}$ y como

$G'_j \subset G'_{j_0}$ si $j \geq j_0$, se sigue

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t) x_n \right) = \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t) x_n \right)$$

por tanto $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(.) x_n \right)$ es una aplicación de K en E; además es continua ya que si p es una seminorma continua en E existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p\left(\sum_{j=j_1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t)x_n\right)\right)\leq\sum_{j=j_1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sup_m p(x_m)=\frac{1}{2^{j_1-1}}\sup_m p(x_m)<\frac{1}{3}$$

para todo $t\in K$, y entonces si $t_o\in K$, por la continuidad de

$$\sum_{j=1}^{j_1-1}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(\cdot)x_n\right)$$

existe un entorno de t_o en K, U_{t_o}, tal que

$$p\left(\sum_{j=1}^{j_1-1}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j}(f_n(t)-f_n(t_o))x_n\right)\right)<\frac{1}{3}\qquad\forall t\in U_{t_o};$$

por tanto, si $t\in U_{t_o}$

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t)x_n\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t_o)x_n\right)\right)\leq$$

$$\leq p\left(\sum_{j=1}^{j_1-1}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j}(f_n(t)-f_n(t_o))x_n\right)\right)+p\left(\sum_{j=j_1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t)x_n\right)\right)+$$

$$+p\left(\sum_{j=j_1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t_o)x_n\right)\right)<1.$$

Queda así probado que S está bien definida. Además es claro que es lineal. Y es continua: si p es una seminorma continua en E

$$\|S((x_n))\|_p=\sup\left\{p\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} f_n(t)x_n\right)\right):t\in K\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sup_n p(x_n)=\sup_n p(x_n)$$

Por tanto $\{m\circ S : m\in H\}\subset c_o(E)'$.

Si definimos

$$e_n^j=\begin{cases}e_n & \text{si } n_{j-1}+1\leq n\leq n_j\\ 0 & \text{si } n>n_j \text{ ó } n<n_{j-1}+1\end{cases}$$

se tiene $(e_n^j)_n\in c_o(E)$ para todo $j\in\mathbb{N}$, y además, como $e_n^j\in B$ para todo $(n,j)\in\mathbb{N}^2$, $((e_n^j)_n)_j$ es una sucesión acotada de $c_o(E)$. Sin embargo, por (a),

$$\left| \langle (e_n^j)_n , m_j \circ S \rangle \right| = \left| \langle \frac{1}{2^j} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} f_i(\cdot)e_j , m_j \rangle \right| > 2^j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto $\{m \circ S : m \in H\}$ no es fuertemente acotada y, por la hipótesis (ii), no es puntualmente acotada en $c_o(E)$. Entonces es claro que H no es puntualmente acotada en $C(K;E)$.

Queda así probado (a).

(b) Si K es un compacto entonces toda familia puntualmente acotada de $C(K;E)'$ es fuertemente acotada. En efecto:

Sea $H \subset C(K;E)'$ una familia no fuertemente acotada. Procediendo como hicimos al comienzo de la demostración de (a) podemos afirmar que existe un disco acotado $B \subset E$ tal que H no está acotada en $C(K;B)$. Entonces, por el corolario 6.8., H no está acotada en $\mathcal{P}(K;B)$, e.d. existe una sucesión $(\phi_n) \subset \mathcal{P}(K;B)$ tal que H no está acotada en (ϕ_n). Sea T la topología inicial en K para la sucesión (ϕ_n). Como T es una topología menos fina que la original de K, K con la topología T es un espacio compacto. Además T es una topología seudometrizable, ya que cada ϕ_n toma sus valores en un espacio de dimensión finita y por tanto metrizable. Supongamos que d es una seudométrica en K que define la topología T y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : (K,T) &\longrightarrow K/R \\ t &\longrightarrow [t] \end{aligned}$$

donde $t_1 R\, t_2$ si y sólo si $d(t_1,t_2)=0$. Si consideramos en K/R la topología final para π (e.d. la topología cociente de T para la relación de equivalencia R) habremos definido en K/R una topología de espacio métrico compacto. Además observemos que si $t_1, t_2 \in K$

$$t_1 R\, t_2 \iff \phi_n(t_1) = \phi_n(t_2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definimos ahora

$$\tilde{\pi} : C(K/R;E) \longrightarrow C(K;E)$$
$$\psi \longrightarrow \psi\circ\pi$$

Claramente $\tilde{\pi}$ es una aplicación lineal y continua; además si para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $t\in K$ definimos $\tilde{\phi}_n([t])=\phi_n(t)$, se tiene $\tilde{\phi}_n\in C(K/R;E)$ y $\tilde{\pi}(\tilde{\phi}_n)=\phi_n$. Por tanto $\{m\circ\tilde{\pi} : m\in H\}\subset C(K/R;E)'$ es una familia no fuertemente acotada, ya que $(\tilde{\phi}_n)$ es una sucesión acotada en $C(K/R;E)$ (pues (ϕ_n) es acotada en $C(K;E)$) y

$$\langle \tilde{\phi}_n, m\circ\tilde{\pi}\rangle = \langle \phi_n, m\rangle \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \forall m\in H$$

Así, de (a), se deduce que la familia $\{m\circ\tilde{\pi} : m\in H\}$ no es puntualmente acotada en $C(K/R;E)$. Por tanto H no es puntualmente acotada en el espacio $C(K;E)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) es trivial

(iv) $\Rightarrow$ (i) se deduce inmediatamente de 5.10.

La siguiente definición quedará justificada por el teorema que viene después:

<u>6.11. Definición</u>: Diremos que E es $\mathcal{K}$-tonelado si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

(i) E es tonelado y $\mathcal{K}$-infratonelado.

(ii) E es tonelado y E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

(La equivalencia entre (i) y (ii) es clara por la definición de $\mathcal{K}$-infratonelado, dada en 2.4.).

<u>6.12. Teorema</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-tonelado.

(ii) Existe algún compacto infinito K tal que $C(K;E)$ es tonelado.

(iii) $C(K;E)$ es tonelado para todo espacio topológico compacto K.

(iv) $c_o(E)$ es tonelado.

<u>Demostración</u>: (i), (ii) y (iii) son equivalentes por 4.11. y 6.10.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Si $\mathbb{N}^*$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$ y se verifica (iii) entonces $C(\mathbb{N}^*;E)$ es tonelado. Y de aquí se deduce que $c_o(E)$ es tonelado, ya que $c_o(E)$ es un subespacio complementado de $C(\mathbb{N}^*;E)$ (4.5.).

(iv) $\Rightarrow$ (i) es consecuencia inmediata de 2.3. (o 4.12.) y de 6.10.

De los espacios $\mathcal{K}$-tonelados nos ocuparemos con más detalle en la sección 8.

<u>6.13. Teorema</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C(X;E)$ es tonelado

(ii) $C(X)$ es tonelado y se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X es seudofinito (e.d. los únicos subconjuntos compactos de X son los finitos) y E es tonelado

(b) E es $\mathcal{K}$-tonelado

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii): Si $C(X;E)$ es tonelado, como por 5.10. $C(X)$ y E son subespacios complementados de $C(X;E)$, se deduce que $C(X)$ y E son también tonelados. Además, si X no es seudofinito, por el teorema 5.11. E es $\mathcal{K}$-infratonelado, y por tanto $\mathcal{K}$-tonelado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $C(X)$ es tonelado.

Si X es seudofinito, $F\subset X$ es un compacto (y por tanto un conjunto finito) y ρ_F es la aplicación restricción de $C(X;E)$ en $C(F;E)$, entonces $Im(\rho_F)=C(F;E)$ es un espacio topológicamente isomorfo a E^F. Por tanto si E es tonelado entonces $Im(\rho_F)$ es tonelado, y así se deduce de la proposición 6.4. que $C(X;E)$ es tonelado.

Si E es $\mathcal{K}$-tonelado y βX es la compactificación de Stone-Čech de X se sigue del teorema anterior que $C(\beta X;E)$ es tonelado, y entonces, por el corolario 6.5., es claro que $C(X;E)$ es tonelado.

Si X es seudofinito la topología compacto-abierta en $C(X;E)$ coincide con la topología de la convergencia simple, y para esta topología ya probó Schmets ([27] Teorema V.3.3.) que si $C(X)$ y E son tonelados entonces $C(X;E)$ es tonelado. Debemos por tanto hacer notar que la implicación (ii)(a) $\Rightarrow$ (i) del teorema anterior era ya conocida.

6.14. Corolario: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C(X;E)$ es tonelado

(ii) $C(X)$ es tonelado y $C(K;E)$ es tonelado para todo subconjunto compacto K de X.

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema anterior y del 6.12.

7. $C_0(X;E)$, $H(\Sigma;E)$ y $C_c(X;E)$ tonelados.

7.1. Teorema: Sea X un espacio topológico localmente compacto, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) $C_o(X;E)$ es tonelado.

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X es finito y E es tonelado.

(b) E es $\mathcal{K}$-tonelado.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se deduce inmediatamente del corolario 4.12., teniendo en cuenta que si $C_o(X;E)$ es tonelado, por 4.5., entonces E es tonelado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si X es finito y E es tonelado entonces $C(X;E) = E^X$ es trivialmente tonelado.

Si E es $\mathcal{K}$-tonelado y X es compacto se deduce del teorema 6.12. que $C_o(X;E) = C(X;E)$ es tonelado.

Si E es $\mathcal{K}$-tonelado, X no es compacto y X^* es la compactificación de Alexandroff de X, por el teorema 6.12. $C(X^*;E)$ es tonelado, y entonces como por 4.4. $C(X^*;E)$ es topológicamente isomorfo a $C_o(X;E) \oplus E$, es claro que $C_o(X;E)$ es tonelado.

7.2. Teorema: Sea X un espacio topológico localmente compacto, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) $(C_c(X;E),L)$ es tonelado.

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) X es seudofinito y E es tonelado.

(b) E es $\mathcal{K}$-tonelado.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se deduce inmediatamente del teorema 4.16., teniendo en cuenta que si $(C_c(X;E),L)$ es tonelado, por 4.15. y 4.3., entonces E es tonelado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si X es seudofinito ya hicimos notar en

4.16. que $(C_c(X;E),L)$ es $\underset{X}{\oplus} E$, y por tanto es claro que si E es tonelado entonces $(C_c(X;E),L)$ también lo es.

Si E es $\mathcal{K}$-tonelado por el teorema anterior, 4.13.(2) y la definición de la topología L, $(C_c(X;E),L)$ es tonelado.

<u>7.3. Proposición</u>: Sea Σ un álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto no vacío Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Toda familia puntualmente acotada de $B(\Sigma;E)'$ es fuertemente acotada.

(ii) Toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada.

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) es consecuencia inmediata de que E es un subespacio complementado de $B(\Sigma;E)$ (3.10.)

(ii) $\Rightarrow$ (i): Primero probaremos lo siguiente:

(a) Supongamos que toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada y sea $H\subset B(\Sigma;E)'$ una familia puntualmente acotada, entonces $\{m(A)\ :\ m\in H,\ A\in\Sigma\}$ es una familia fuertemente acotada de E'.

En efecto: Sea $B\subset E$ un disco acotado. Para cada $f\in B(\Sigma)$ definimos

$$T_f:\ E \longrightarrow B(\Sigma;E)$$
$$e \longrightarrow f(.)e$$

Claramente T_f es una aplicación lineal y continua. Por tanto para cada $f\in B(\Sigma)$, $\{m\circ T_f\ :\ m\in H\}$ es una familia puntualmente acotada de E'. Como suponemos que toda familia puntualmente acotada de E' es fuertemente acotada se deduce que para cada $f\in B(\Sigma)$ existe $M_f > 0$ tal que

$$|\langle e, m\circ T_f\rangle| \leqslant M_f \qquad \forall m\in H \qquad \forall e\in B.$$

Para cada $e\in E$ definimos ahora

$$T_e : B(\Sigma) \longrightarrow B(\Sigma;E)$$
$$f \longrightarrow f(.)e$$

Claramente T_e es una aplicación lineal y continua. Además

$$\{m\circ T_e \;:\; m\in H,\; e\in B\}$$

es una familia puntualmente acotada de $B(\Sigma)'$ ya que si $f\in B(\Sigma)$, por lo que vimos más arriba existe $M_f>0$ tal que

$$|\langle f, m\circ T_e\rangle| = |\langle e, m\circ T_f\rangle| \leqslant M_f \qquad \forall e\in B \qquad \forall m\in H.$$

Por tanto, como $B(\Sigma)$ es un espacio de Banach, del principio de acotación uniforme se deduce que existe $M>0$ tal que

$$|\langle \chi_A, m\circ T_e\rangle| = |\langle \chi_A(.)e, m\rangle| = |\langle e, m(A)\rangle| \leqslant M$$

para todo $m\in H$, todo $e\in B$ y todo $A\in\Sigma$.

Queda así claro que $\{m(A) \;:\; m\in H,\; A\in\Sigma\}$ es una familia fuertemente acotada de E'.

Probaremos ahora (ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que se verifica (ii) y supongamos que existe una familia $H\subset B(\Sigma;E)'$ puntualmente acotada no fuertemente acotada. Por 3.6. existe un disco acotado $B\subset E$ tal que $\mathrm{Sup}\,\{p_B(m)(\Omega) \;:\; m\in H\} = +\infty$, y por (a) existe $M>0$ tal que

$$(1) \quad |\langle e, m(A)\rangle| \leqslant M \qquad \forall e\in B \qquad \forall m\in H \qquad \forall A\in\Sigma\,.$$

Como $\mathrm{Sup}\,\{p_B(m)(\Omega) \;:\; m\in H\} = \infty$ existe una partición finita $(A_j^1)_{i=1}^{n_1}$ de Ω en conjuntos de Σ, una familia finita $(e_i^1)_{i=1}^{n_1}\subset B$ y una medida $m_1\in H$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n_1} |\langle e_i^1, m_1(A_i^1)\rangle| > 1+M.$$

De nuevo por ser $\mathrm{Sup}\,\{p_B(m)(\Omega) \;:\; m\in H\} = \infty$ existe $j\in\{1,\dots,n_1\}$ tal que $\sup\,\{p_B(m)(A_j^1) \;:\; m\in H\} = \infty$. Supongamos sin pérdida de generalidad $\sup\,\{p_B(m)(A_{n_1}^1) \;:\; m\in H\} = \infty$. Por (1) se verifica

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} |\langle e_i^1, m_1(A_i^1)\rangle| > 1$$

Podemos afirmar ahora que existe una partición finita $(A_i^2)_{i=1}^{n_2}$ de $A_{n_1}^1$ en conjuntos de Σ, una familia finita $(e_i^2)_{i=1}^{n_2} \subset B$ y una medida $m_2 \in H$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n_2} |\langle e_i^2, m_2(A_i^2)\rangle| > 2+M$$

Razonando como antes existe $j \in \{1,\dots,n_2\}$ tal que $\mathrm{Sup}\{p_B(m)(A_j^2) : m \in H\} = \infty$, y podemos suponer sin pérdida de generalidad $\mathrm{Sup}\{p_B(m)(A_{n_2}^2) : m \in H\} = \infty$. Además, por (1),

$$\sum_{i=1}^{n_2-1} |\langle e_i^2, m_2(A_i^2)\rangle| > 2.$$

Es claro que reiterando el proceso podemos construir una sucesión (A_n) de conjuntos disjuntos de Σ, una sucesión $(e_n) \subset B$, una sucesión creciente (n_j) de números naturales y una sucesión $(m_j) \subset H$ tal que (tomando $n_0 = 1$):

$$(2) \qquad \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} |\langle e_i, m_j(A_i)\rangle| > j \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

Definimos ahora

$$T: c_0(E) \longrightarrow B(\Sigma;E)$$
$$(x_n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(\cdot)x_n$$

T está bien definida. En efecto, como la sucesión (A_n) es de conjuntos disjuntos, si $(x_n) \in c_0(E)$ entonces $T((x_n))$ es una aplicación de Ω en E; además $T((x_n)) \in B(\Sigma;E)$ ya que si p es una seminorma continua en E existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x_n) < 1 \qquad \text{si } n \geq n_0$$

y por tanto

$$p(T((x_n))(t) - \sum_{n=1}^{n_0} \chi_{A_n}(t)x_n) = p(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \chi_{A_n}(t)x_n) \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq n_0} p(x_n) \leq 1 \qquad \forall t \in \Omega.$$

Además es claro que T es lineal y continua y entonces, por ser H puntualmente acotada, $\{m\circ T : m\in H\}$ es una familia puntualmente acotada de $c_o(E)'$. Así, por la hipótesis y por el teorema 6.10., tenemos que $\{m\circ T : m\in H\}$ es fuertemente acotada.

Por otra parte, si definimos

$$f_n^j = \begin{cases} \text{signo}(\langle e_n, m_j(A_n)\rangle)e_n & \text{si} \quad n_{j-1} \leq n \leq n_j - 1 \\ 0 & \text{si} \quad n_{j-1} > n \;\text{ ó }\; n > n_j - 1 \end{cases}$$

para cada $(n,j)\in \mathbb{N}^2$; como $(e_n)\subset B$, es claro que $((f_n^j)_n)_j$ es una sucesión acotada de $c_o(E)$. Sin embargo, por (2), para cada $j\in \mathbb{N}$

$$\langle (f_n^j)_n, m_j\circ T\rangle = \left\langle \sum_{n=n_{j-1}}^{n_j-1} \text{signo}(\langle e_n, m_j(A_n)\rangle)e_n, m_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=n_{j-1}}^{n_j-1} |\langle e_n, m_j(A_n)\rangle| > j,$$

y esto está en contradicción con que $\{m\circ T : m\in H\}$ sea fuertemente acotada.

7.4. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $B(\Sigma;E)$ es tonelado.

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) Σ es finita y E es tonelado.

(b) E es $\aleph$-tonelado.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior y del teorema 3.13.

7.5. Observación: Como ya hemos comentado, los resultados que hemos obtenido en este capítulo tienen un claro paralelismo con los obtenidos en el capítulo anterior, cuando tratábamos el caso infratonelado. Este paralelismo se rompe sin embargo en tres puntos. Veremos a continuación que las diferencias que se manifiestan en estos puntos son realmente insalvables. Provienen simplemente de que los problemas tratados son distintos.

1. En el caso infratonelado, al hablar de espacios de funciones continuas establecimos una serie de equivalencias que involucraban productos tensoriales. Trasladar la versión más simple de estas equivalencias al caso tonelado sería decir lo siguiente: "Si K es un espacio topológico compacto, $C(K;E)$ es tonelado si y sólo si $C(K)\otimes E$ es tonelado". Pero esto es rotundamente falso: si tomamos como E el espacio de Banach ℓ^1 y como K un compacto infinito arbitrario $C(K;E)$ es un espacio de Banach y por tanto tonelado y sin embargo $C(K)\otimes E$ no es tonelado ya que es conocido (ver [16] pág. 286) que $C(K)\otimes E$ es topológicamente isomorfo al ε-tensor producto, $C(K)\otimes_\varepsilon E$, de los espacios $C(K)$ y E, y Hollstein ([12] Corolario 2) ha probado que si F es un espacio de Banach de dimensión infinita $F\otimes_\varepsilon \ell^1$ no es tonelado.

2. Vimos en 3.13. que si Σ es un <u>álgebra</u> de subconjuntos de un cierto conjunto no vacío Ω entonces $S(\Sigma;E)$ es infratonelado si y sólo si $B(\Sigma;E)$ lo es. Este resultado no es cierto si sustituimos "infratonelado" por "tonelado". Se sabe que es falso incluso en el caso escalar: $B(\Sigma)$ es siempre un espacio de Banach y por tanto tonelado y sin embargo $S(\Sigma)$ es un espacio normado no necesariamente tonelado (ver [7] I.3. Ejemplo 5.). Si nos restringimos a trabajar en <u>σ-ágebras</u> ciertamente $S(\Sigma)$ es tonelado (nos lo asegura el teorema de acotación de Nikodym). Podría pensarse que si Σ es una σ-álgebra $S(\Sigma;E)$ es tonelado si y sólo si $B(\Sigma;E)$ lo es. Pero esto también

es falso. En efecto: si tomamos como E el espacio ℓ^1 y como Σ una σ-álgebra (o un álgebra) infinita arbitraria, $B(\Sigma;E)$ es un espacio de Banach y por tanto tonelado, y sin embargo $S(\Sigma;E)$ no es tonelado ya que es fácil comprobar que $S(\Sigma;E)$ es topológicamente isomorfo a $S(\Sigma)\otimes_\varepsilon E$, el ε-tensor producto de los espacios $S(\Sigma)$ y E, y entonces si suponemos que $S(\Sigma)\otimes_\varepsilon E$ es tonelado, por densidad, concluimos que $B(\Sigma)\otimes_\varepsilon E$ también lo es, pero por el resultado de Hollstein citado en el punto anterior, sabemos que $B(\Sigma)\otimes_\varepsilon \ell^1$ no es tonelado.

3. En el caso infratonelado, al tratar de los espacios de funciones continuas sobre espacios topológicos X localmente compactos, establecimos una serie de equivalencias que involucraban a los espacios $C_c(X;E)$, $C_0(X;E)$, etc. Debemos hacer notar que mientras que el espacio $C_c(X)$ es siempre infratonelado (es normado) no es en general tonelado (tómese p.e. $X=\mathbb{K}$). También conviene observar que mientras que son equivalentes (5.13.): (i) $(C_0(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado, (ii) $(C_c(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado y (iii) $(C(X),\mathcal{K})$ es infratonelado; $(C(\mathbb{K}),\mathcal{K})$ es tonelado y sin embargo ni $(C_0(\mathbb{K}),\mathcal{K})$ ni $(C_c(\mathbb{K}),\mathcal{K})$ lo son. Estas diferencias que se muestran ya tan claramente en el caso escalar prueban que no son válidos los resultados análogos a 4.12. y 5.13. para el caso tonelado.

APENDICE A LOS CAPITULOS II Y III.

8. Espacios $\mathcal{K}$-tonelados. Espacios $\mathcal{K}$-infratonelados.

En los dos capítulos anteriores los espacios localmente convexos $\mathcal{K}$-tonelados y $\mathcal{K}$-infratonelados han jugado un papel muy importante. Como hemos visto son fundamentales cuando queremos caracterizar cuándo son tonelados o infratonelados distintos espacios de funciones vectoriales. Por ejemplo resumiendo 2.3. ([17]), 4.11. y 6.12. podemos escribir:

"Son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado)

(ii) Existe un espacio topológico compacto e infinito K tal que C(K;E) es tonelado (resp. infratonelado)

(iii) C(K;E) es tonelado (resp. infratonelado) para todo espacio topológico compacto K.

(iv) $c_o(E)$ es tonelado (resp. infratonelado)."

Como ya hemos indicado las denominaciones $\mathcal{K}$-tonelado y $\mathcal{K}$-infratonelado las hemos dado en parte motivados por este resultado. En esta línea queremos resaltar que hay otra razón que nos lleva a considerar estas clases de espacios de forma especial:

Cuando nos planteamos el problema de determinar cuándo el espacio C(X;E) es tonelado, o simplemente ante el teorema de Nachbin--Shirota (6.2.):

"si X es un espacio topológico completamente regular, entonces C(X) es tonelado si y sólo si todo subconjunto relativamente

seudocompacto de X es relativamente compacto",
surge de forma natural la siguiente pregunta: ¿cuál es la clase de espacios localmente convexos que pueden sustituir al cuerpo escalar en el teorema de Nachbin-Shirota?, es decir ¿cuál es la clase de espacios localmente convexos E tal que

"si X es un espacio topológico completamente regular entonces
(*) C(X;E) es tonelado si y sólo si todo subconjunto relativamente seudocompacto de X es relativamente compacto"?

(Obsérvese que planteamientos análogos han llevado a considerar p. e. los espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym) .
El teorema 6.13. nos dice que los espacios localmente convexos que verifican (*) son precisamente los $\mathcal{K}$-tonelados.

Análogamente los espacios localmente convexos $\mathcal{K}$-infratonelados desempeñan el mismo papel respecto del teorema de Warner (5.2.), es decir, los espacios $\mathcal{K}$-infratonelados son los espacios localmente convexos E que verifican (ver 5.11.):

"si X es un espacio topológico completamente regular entonces C(X;E) es infratonelado si y sólo si todo subconjunto relativamente seudocompacto warneriano de X es relativamente compacto".

En esta sección nos ocupamos de estudiar estas clases de espacios $\mathcal{K}$-tonelados y $\mathcal{K}$-infratonelados: de cómo son, de qué propiedades tienen, de qué ejemplos podemos dar de ellos, etc. Este estudio nos va a permitir entre otras cosas resolver algunos problemas planteados acerca de si determinadas clases de espacios localmente convexos usuales E (metrizables, (DF)-espacios, etc.) verifican que, los distintos espacios de funciones con valores en E tratados son tonelados o infratonelados (8.3., 8.4., 8.5.).

En primer lugar damos un ejemplo obtenido independientemente por Dierolf [32] y Marquina y Sanz Serna [17] que prueba que la clase de los espacios $\mathcal{K}$-tonelados (resp. $\mathcal{K}$-infratonelados) está estrictamente contenida en la clase de los espacios tonelados (resp. infratonelados).

8.1. Ejemplo [17,32]: Sea E un espacio vectorial de dimensión algebraica no contable y considerémoslo dotado de la topología de e.l.c. más fina (e.d. E es del tipo $\bigoplus_I \mathbb{K}$ con I un conjunto de cardinal no contable). Claramente E es un espacio tonelado (es incluso ultrabornológico al ser el límite inductivo de sus subespacios de dimensión finita) y sin embargo Marquina y Sanz Serna [17] probaron que E no es ni siquiera $\mathcal{K}$-infratonelado (Dierolf [32] prueba directamente que $c_o(E)$ no es infratonelado, pero esto, por el resultado de Marquina y Sanz Serna que dimos en 2.3., es equivalente a afirmar que E no es $\mathcal{K}$-infratonelado).

8.2. Nota: Por el ejemplo anterior queda claro que si denotamos por $\mathcal{C}(T)$, $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}T)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}I)$ a las clases de los espacios localmente convexos tonelados, infratonelados, $\mathcal{K}$-tonelados y $\mathcal{K}$-infratonelados respactivamente, se tiene la siguiente situación:

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}T) \subsetneq \mathcal{C}(T) \subsetneq \mathcal{C}(I)$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}I) \subsetneq \mathcal{C}(I)$$

y además, por la propia definición de $\mathcal{K}$-tonelado,

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}T) = \mathcal{C}(T) \cap \mathcal{C}(\mathcal{K}\text{-}I).$$

A continuación vamos a dar algunos ejemplos de clases importantes de espacios localmente convexos que son $\mathcal{K}$-tonelados o $\mathcal{K}$-infratonelados.

8.3. Proposición: Los espacios metrizables, los (DF)-espacios infratonelados y los espacios nucleares infratonelados son $\mathcal{K}$-infratonelados.

Demostración: Evidentemente en los tres casos lo único que tenemos que demostrar es que los duales fuertes de estos espacios tienen la propiedad (B) de Pietsch. Observemos que según la definición que da Pietsch de espacio "dual metric" (0.7.5. de [24]), un (DF)-espacio es un "dual metric". Entonces del teorema 1.5.8. y de la proposición 0.7.6. de [24] se deduce que si E es un espacio metrizable o un (DF)-espacio, el dual fuerte de E tiene la propiedad (B) de Pietsch. Si E es un espacio nuclear e infratonelado, del lema 4.3.2. de [24] se sigue que el dual fuerte de E es nuclear, y entonces, por la proposición 4.2.9. de [24], E'_β tiene la propiedad (B) de Pietsch.

8.4. Corolario: Los espacios metrizables tonelados, los (DF)-espacios tonelados y los espacios nucleares tonelados son $\mathcal{K}$-tonelados.

Demostración: Se deduce inmediatamente de la proposición anterior y de la definición de $\mathcal{K}$-tonelado.

8.5. Nota: Como ya indicamos en la introducción, Schmets [31,32] ha probado que si C(X) es tonelado (resp. infratonelado) y E es un espacio de Fréchet (resp. metrizable) entonces C(X;E) es tonelado (resp. infratonelado). Observemos que el corolario anterior junto con 6.13. nos permite afirmar más: si $C(X)$ es tonelado y E es metrizable y tonelado (no necesariamente completo) entonces $C(X;E)$ es tonelado.

Por otra parte Hollstein en [14] prueba que si X es compacto y E es un espacio bornológico nuclear, o un (DF)-espacio bornológico, entonces $C(X;E)$ es infratonelado, y se pregunta si esto es cierto en condiciones más generales. Podemos responder afirmativamente. Observemos que de los resultados anteriores y de 5.11. y 6.13. se sigue que si $C(X)$ es infratonelado (resp. tonelado) y E es un espacio infratonelado (resp. tonelado) y nuclear, o un (DF)-espacio infratonelado (resp. tonelado), entonces $C(X;E)$ es infratonelado (resp. tonelado).

Es conocido que si K_1 y K_2 son espacios topológicos compactos entonces $C(K_1 \times K_2)$ y $C(K_1, C(K_2))$ son dos espacios de Banach isométricos. El lema que damos a continuación es una extensión sencilla de este resultado.

<u>8.6. Lema</u>: Sean X_1 y X_2 espacios topológicos completamente regulares. Entonces $C(X_1 \times X_2, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio denso de $C(X_1, C(X_2, E))$.

<u>Demostración</u>: Definimos

$$S:\ C(X_1 \times X_2, E) \longrightarrow C(X_1, C(X_2, E)) \quad \text{por}$$

$$[S(\phi)(x)](y) = \phi(x,y) \quad \forall \phi \in C(X_1 \times X_2, E) \quad \forall (x,y) \in X_1 \times X_2$$

Por argumentos usuales de compacidad se prueba que S está bien definida. Además son comprobaciones inmediatas que S es lineal y que es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Finalmente es claro que la imagen de S es un subespacio denso de $C(X_1,C(X_2,E))$ ya que contiene a $C(X_1)\otimes C(X_2,E)$.

El siguiente lema es una aplicación sencilla de los teoremas de Nachbin-Shirota (6.2.) y Warner (5.2.).

8.7. Lema: Sean X_1 y X_2 espacios topológicos completamente regulares. Supongamos que $C(X_1)$ y $C(X_2)$ son tonelados (resp. infratonelados). Entonces $C(X_1\times X_2)$ es tonelado (resp. infratonelado).

Demostración: Observemos que los teoremas 6.2. (Nachbin-Shirota) y 5.2. (Warner) garantizan que basta probar que si los subconjuntos relativamente seudocompactos (resp. relativamente seudocompactos warnerianos) de X_1 y de X_2 son relativamente compactos, entonces los subconjuntos relativamente seudocompactos (resp. relativamente seudocompactos warnerianos) de $X_1\times X_2$ son relativamente compactos.

Sea $C\subset X_1\times X_2$ un relativamente seudocompacto (resp. relativamente seudocompacto warneriano) y sean π_1 y π_2 las proyecciones canónicas de $X_1\times X_2$ sobre X_1 y sobre X_2 respectivamente. Si f es una función real y continua (resp. real, no negativa y semicontinua inferiormente) definida en X_1 entonces $f\circ\pi_1$ es una función real y continua (resp. real, no negativa y semicontinua inferiormente) en $X_1\times X_2$. Por tanto $f\circ\pi_1$ está acotada en C y así f está acotada en $\pi_1(C)$. Queda así probado que $\pi_1(C)$ es un relativamente seudocompacto (resp. relativamente seudocompacto warneriano) de X_1. Análogamente se prueba lo mismo para $\pi_2(C)$. Entonces es claro que si $C(X_1)$ y $C(X_2)$ son tonelados (resp. infratonelados) entonces $C\subset\pi_1(C)\times\pi_2(C)$ es un relativamente compacto de $X_1 \times X_2$, que es lo que queríamos probar.

Ahora podemos dar más ejemplos de espacios $\mathcal{K}$-tonelados y $\mathcal{K}$-infratonelados:

<u>8.8. Proposición</u>: Sea E $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) y X un espacio topológico completamente regular, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) C(X) es tonelado (resp. infratonelado)

(ii) C(X;E) es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

En particular C(X) es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) si y sólo si es tonelado (resp. infratonelado).

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii): Si C(X) es tonelado (resp. infratonelado) y K es un compacto, por el lema anterior, C(K×X) es tonelado (resp. infratonelado). Entonces si E es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) se sigue de 6.13. (resp. de 5.11.) que C(K×X;E) es tonelado (resp. infratonelado), y por tanto, por 8.6., que C(K;C(X;E)) es tonelado (resp. infratonelado). Ahora bien esto, por 6.12. (resp. 4.11.) nos dice que C(X;E) es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

(ii) $\Rightarrow$ (i) es trivial.

Vamos a estudiar ahora si los productos, límites inductivos, etc. de espacios $\mathcal{K}$-tonelados (resp. $\mathcal{K}$-infratonelados) son $\mathcal{K}$-tonelados (resp. $\mathcal{K}$-infratonelados).

<u>8.9. Proposición</u>: (i) Sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos, entonces $\prod_{i\in I} E_i$ es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado)

si y sólo si E_i es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) para todo $i\in I$.

(ii) Si E es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) y F es un subespacio complementado de E, entonces F es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

(iii) Si E es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) y F es un subespacio cerrado de E, entonces E/F es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

(iv) Sea (E_n) una sucesión de espacios $\mathcal{K}$-tonelados (resp. $\mathcal{K}$-infratonelados), entonces $\bigoplus_{\mathbb{N}} E_n$ es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

(v) Sea E un e.l.c. y F un subespacio denso de E, entonces si F es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado) E es también $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

<u>Demostración</u>: (i) y (ii) son consecuencia inmediata de 6.12. (resp. 4.11.) y de que si K es compacto y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios localmente convexos entonces $C(K;\prod_{i\in I} E_i)$ es topológicamente isomorfo a $\prod_{i\in I} C(K;E_i)$.

(iii): Por el corolario 1 de [14], si K es un compacto la aplicación canónica de C(K;E) en C(K;E/F) es lineal, continua y abierta sobre su imagen. Como además su imagen es densa ya que contiene a $C(K)\otimes E/F$, se sigue de 6.12. (resp. 4.11.) el resultado.

(iv): Por 6.12. (resp. 4.11.) basta probar que si K es un compacto entonces $C(K)\otimes\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} E_n\right)$ es topológicamente isomorfo a $\bigoplus_{\mathbb{N}} (C(K)\otimes E_n)$. Pero esto se deduce inmediatamente de que si F es un espacio de Banach entonces $F\otimes_\varepsilon\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} E_n\right)$ es topológicamente isomorfo a $\bigoplus_{\mathbb{N}} (F\otimes_{\varepsilon} E_n)$ (ver [16] 44.5.(6)) y de que como sabemos, $C(K)\otimes_{\varepsilon} E$ es topológicamente isomorfo a $C(K)\otimes E$ ([16] pág. 286).

(v): Es consecuencia inmediata de 6.12. (resp. 4.11.) y de que, en la hipótesis, si K es compacto, C(K;F) es un subespacio denso de C(K;E).

J. Mujica en [21] ha probado el siguiente resultado:

<u>8.10 Teorema [21]</u>: Sea X un espacio topológico completamente regular y E el límite inductivo de una sucesión creciente (E_n) de espacios localmente convexos, entonces, si toda unión contable de subconjuntos compactos de X es relativamente compacta (en particular si X es compacto), el límite inductivo de la sucesión $(C(X;E_n))$ es un subespacio topológico denso de C(X;E).

Como corolario inmediato podemos dar el siguiente resultado:

<u>8.11. Proposición</u>: Si E es límite inductivo de una sucesión creciente (E_n) de espacios $\mathcal{K}$-tonelados (resp. $\mathcal{K}$-infratonelados), entonces E es $\mathcal{K}$-tonelado (resp. $\mathcal{K}$-infratonelado).

<u>Demostración</u>: Es consecuencia inmediata del teorema anterior y de 6.12. (resp. 4.11.).

<u>8.12. Observaciones</u>: 1. Respecto a la proposición anterior y a 8.9.(iv) conviene señalar que las topologías localmente convexas finales arbitrarias de espacios $\mathcal{K}$-tonelados no son en general ni siquiera de espacio $\mathcal{K}$-infratonelado. Esto queda claro considerando el espacio del ejemplo 8.1. que sabemos que no es $\mathcal{K}$-infratonelado

y que sin embargo es límite inductivo de sus subespacios de dimensión finita.

2. Un subespacio tonelado (y completo) de un espacio $\mathcal{K}$-tonelado puede no ser siquiera $\mathcal{K}$-infratonelado. En efecto: basta considerar de nuevo el espacio del ejemplo 8.1. que es tonelado, completo, no $\mathcal{K}$-infratonelado y que (como todo e.l.c.) es un subespacio de un producto de espacios de Banach (ver [15] 19.9.(1)), ya que por 8.4. y 8.9.(i) sabemos que un producto de espacios de Banach es $\mathcal{K}$-tonelado.

<u>8.13. Proposición</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\bigoplus_I \mathbb{K}$ es $\mathcal{K}$-tonelado.

(ii) $\bigoplus_I \mathbb{K}$ es $\mathcal{K}$-infratonelado.

(iii) I es contable.

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) es cierto en general.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) es el ejemplo 8.1.

(iii) $\Rightarrow$ (i) es consecuencia inmediata de la proposición 8.11. ya que si I es contable, $\bigoplus_I \mathbb{K}$ es límite inductivo de una sucesión creciente de subespacios suyos de dimensión finita.

Hasta el momento carecemos de una caracterización de cuándo un e.l.c. E es $\mathcal{K}$-infratonelado que venga dada únicamente por propiedades del espacio E. Recordemos que en la definición de espacio $\mathcal{K}$-infratonelado intervienen propiedades de su dual fuerte y que en las distintas caracterizaciones que hemos obtenido hacíamos siempre referencia a espacios de funciones. Vamos a dar ahora una caracterización "interna" de los espacios $\mathcal{K}$-infratonelados.

Como es habitual si n es un número natural y B es un subconjunto de E notaremos

$$B^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in E^n : x_i\in B \quad \text{si} \quad 1\leq i\leq n\}$$

8.14. Proposición: E es K-infratonelado si y sólo si toda familia $\mathcal{H}$ de discos acotados de E que verifica:

(i) Si $\lambda\in[0,1]$ y $D_1, D_2\in\mathcal{H}$ entonces $\lambda D_1+(1-\lambda)D_2\in\mathcal{H}$,

(ii) Si $B\subset E$ es un disco acotado existe $\lambda>0$ y $D\in\mathcal{H}$ tales que $\lambda B\subset D$,

y (iii) Para cada $n\in\mathbb{N}$ $\bigcup_{\mathcal{H}} D^n$ es un cerrado de E^n,

verifica también

(iv) Existe un entorno de cero $U\subset E$ tal que

$$U^n \subset \bigcup_{\mathcal{H}} D^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Demostración: En 4.2. introdujimos el espacio $c_{oo}(E)$ como $C_c(\mathbb{N};E)$, es decir el espacio de las sucesiones eventualmente nulas de E dotado de la topología de la convergencia uniforme. En esta demostración vamos a utilizar esencialmente que, por 4.10., E es K-infratonelado si y sólo si $c_{oo}(E)$ es infratonalado.

Si B es un subconjunto de E notaremos

$$c_{oo}(B) = \{(x_n)\in c_{oo}(E) : x_n\in B \quad \forall n\in\mathbb{N}\}$$

Supongamos que E es K-infratonelado, e.d. que $c_{oo}(E)$ es infratonelado, sea $\mathcal{H}$ una familia de discos acotados de E que verifica (i), (ii) y (iii). Definimos $V = \bigcup_{\mathcal{H}} c_{oo}(D)$. Por (i) y (ii) V es un disco bornívoro de $c_{oo}(E)$. Además es cerrado: Sea $(e_m)\in\overline{V}$, y sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $e_m=0$ si $m\geq n$. Podemos deducir que $(e_1,\dots,e_n)\in\overline{\bigcup_{\mathcal{H}} D^n}$ ya que si p es una seminorma continua en E existe $(f_m)\in V = \bigcup_{\mathcal{H}} c_{oo}(D)$ tal que

$$p(e_m-f_m)<1 \qquad \forall m\in \mathbb{N},$$

y en particular

$$p(e_m-f_m)<1 \qquad \text{si } 1\leq m\leq n,$$

y observemos que $(f_1,\dots,f_n)\in D_o^n$ para algún $D_o\in\mathcal{H}$. Como por la hipótesis (iii) $\overline{\bigcup_{\mathcal{H}} D^n} = \bigcup_{\mathcal{H}} D^n$, se deduce que $(e_1,\dots,e_n)\in \bigcup_{\mathcal{H}} D^n$ y por tanto que $(e_1,\dots,e_n)\in D_1^n$ para algún $D_1\in\mathcal{H}$. Entonces podemos concluir que $(e_m)\in c_{oo}(D_1)\subset V$ ya que $e_m=0$ si $m\geq n$.

Hemos probado que $V\subset c_{oo}(E)$ es un tonel bornívoro. Entonces, como $c_{oo}(E)$ es infratonelado, V es un entorno de cero, e.d. existe un entorno de cero $U\subset E$ tal que $c_{oo}(U)\subset V$. Y de la definición de V se sigue inmediatamente que la familia $\mathcal{H}$ verifica la condición (iv).

Recíprocamente. Sea $V\subset c_{oo}(E)$ un tonel bornívoro. Definimos

$$\mathcal{H} = \{D\subset E \; : \; D \text{ es un disco acotado y } c_{oo}(D)\subset V\}$$

La familia $\mathcal{H}$ verifica:

(i): Si $\lambda\in[0,1]$, $D_1,D_2\in\mathcal{H}$ y $(e_m)\in c_{oo}(\lambda D_1+(1-\lambda)D_2)$, es inmediato que $(e_m)=\lambda(e_m^1)+(1-\lambda)(e_m^2)$ con $(e_m^1)\in c_{oo}(D_1)$ y $(e_m^2)\in c_{oo}(D_2)$. Entonces por ser V un disco se deduce que $(e_m)\in V$. Por tanto $\lambda D_1+(1-\lambda)D_2\in\mathcal{H}$.

(ii): Se deduce inmediatamente de que V es bornívoro y de que si $B\subset E$ es acotado entonces $c_{oo}(B)$ es un acotado de $c_{oo}(E)$.

(iii): Sea $n\in\mathbb{N}$ y sea $(e_1,\dots,e_n)\in \overline{\bigcup_{\mathcal{H}} D^n}$. Probaremos que C, la envoltura equilibrada y convexa de $\{e_i \; : \; 1\leq i\leq n\}$, pertenece a $\mathcal{H}$, y así en particular tendremos que $(e_1,\dots,e_n)\in \bigcup_{\mathcal{H}} D^n$. Sea $(f_m)\in c_{oo}(C)$ y sea $j\in\mathbb{N}$ tal que $f_m=0$ si $m\geq j$. Sea p una seminorma continua en E; como $(e_1,\dots,e_n)\in \overline{\bigcup_{\mathcal{H}} D^n}$ existe $D_o\in\mathcal{H}$ y $(g_1,\dots,g_n)\in D_o^n$ tal que

$$p(e_i - g_i) < 1 \qquad \text{si } 1 \leq i \leq n$$

Como $(f_m) \in c_{oo}(C)$, si $1 \leq m \leq j$ existen $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m \in \mathbb{K}$ tales que

$$f_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m e_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^m| \leq 1$$

Definimos entonces $(h_m) \in c_{oo}(E)$ por

$$h_m = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m g_i & \text{si } 1 \leq m \leq j \\ 0 & \text{si } m > j \end{cases}$$

Claramente $(h_m) \in c_{oo}(D_o) \subset V$ y además si $1 \leq m \leq j$

$$p(f_m - h_m) = p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m (e_i - g_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^m| p(e_i - g_i) < 1$$

y si $m > j$

$$p(f_m - h_m) = p(0) = 0.$$

Con esto queda claro que $(f_m) \in \overline{V} = V$. Por tanto $C \in \mathcal{H}$.

De esta forma deducimos de la hipótesis que existe un entorno de cero U en E tal que

$$U^n \subset \bigcup_{\mathcal{H}} D^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero de esto y de la definición de $\mathcal{H}$ se sigue inmediatamente que $c_{oo}(U) \subset V$ y por tanto que V es un entorno de cero en $c_{oo}(E)$.

Con esto hemos probado que $c_{oo}(E)$ es infratonelado, es decir que E es K-infratonelado.

Para terminar la sección vamos a ver que el hecho de que un espacio E sea K-infratonelado se traduce en buenas propiedades de los duales de los espacios $B(\Sigma;E)$, $C_c(X;E)$, etc. Como se verá estos resultados son análogos al obtenido por Marquina y Sanz Serna [17] para $c_o(E)$ (ver 2.3.): "si E es K-infratonelado entonces $c_o(E)' = \ell^1(E'_\beta)$".

En lo que sigue Ω será un conjunto no vacío, Σ un álgebra de subconjuntos de Ω y X un espacio topológico completamente regular (cuando hagamos referencia a $C_c(X;E)$ supondremos que X es también localmente compacto).

Vimos en la sección 1 (1.21.) las siguientes relaciones:

$$(*)\quad \begin{cases} B(\Sigma;E)' = M(\Sigma;E') \subset \mathfrak{M}(\Sigma;E'_\beta) \\ C_c(X;E)' = M(X;E') \subset \mathfrak{M}(X;E'_\beta) \\ C(X;E)' = M_o(X;E') \subset \mathfrak{M}_o(X;E'_\beta) \end{cases}$$

Recordemos que en este sentido la situación en el caso escalar es sencilla: Los contenidos anteriores son igualdades y entonces los duales de $B(\Sigma)$, $C_c(X)$ y $C(X)$ son, respectivamente: $\mathfrak{M}(\Sigma)$, el espacio vectorial de las medidas escalares de variación finita definidas en Σ ; $\mathfrak{M}(X)$, el espacio vectorial de las medidas escalares contablemente aditivas, regulares y de variación finita definidas en $\mathcal{B}(X)$; y $\mathfrak{M}_o(X)$, el espacio vectorial de las medidas escalares contablemente aditivas, regulares, con soporte compacto y de variación finita definidas en $\mathcal{B}(X)$.

La definición de los espacios $\mathfrak{M}(\Sigma;E)$, $\mathfrak{M}(X;E)$ y $\mathfrak{M}_o(X;E)$ (1.20) nos sugiere que las generalizaciones naturales de los espacios $\mathfrak{M}(\Sigma)$, $\mathfrak{M}(X)$ y $\mathfrak{M}_o(X)$ son los espacios $\mathfrak{M}(\Sigma;E'_\beta)$, $\mathfrak{M}(X;E'_\beta)$ y $\mathfrak{M}_o(X;E'_\beta)$, y no los espacios $M(\Sigma;E')$, $M(X;E')$ y $M_o(X;E')$. En estos últimos espacios aparece el concepto de "medida que verifica la condición (C)" (1.4.) que se distancia notablemente de los conceptos definidos para medidas escalares. Observemos también que esta condición (C) viene definida en principio para la topología en concreto que tenga el e.l.c. E y no por el par dual $\langle E,E'\rangle$, y por tanto lo mismo les sucede a los espacios $M(\Sigma;E')$, $M(X;E')$ y $M_o(X;E')$; en cambio los espacios $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$, $\mathcal{M}(X;E'_\beta)$ y $\mathcal{M}_o(X;E'_\beta)$ dependen únicamente del e. l. c. E'_β y por tanto del par dual $\langle E,E'\rangle$.

Es conocido (y será una consecuencia de la proposición siguiente) que si E es un espacio de Banach entonces los contenidos de (*) son igualdades y así los duales de $B(\Sigma;E)$, $C_c(X;E)$ y $C(X;E)$ son $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$, $\mathcal{M}(X;E'_\beta)$ y $\mathcal{M}_o(X;E'_\beta)$ respectivamente. Ya hicimos notar (1.22) que esto no ocurre en general en espacios localmente convexos. Veremos a continuación que en cambio los espacios localmente convexos $\mathcal{K}$-infratonelados tienen en este sentido un comportamiento análogo a los espacios de Banach.

<u>8.15. Proposición</u>: Si E es $\mathcal{K}$-infratonelado entonces

$$B(\Sigma;E)' = M(\Sigma;E') = \mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$$
$$C_c(X;E)' = M(X;E') = \mathcal{M}(X;E'_\beta)$$
$$C(X;E)' = M_o(X;E') = \mathcal{M}_o(X;E'_\beta)$$

<u>Demostración</u>: Como consecuencia de 1.21. lo único que debemos probar es

$$\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)\subset M(\Sigma;E'), \quad \mathcal{M}(X;E'_\beta)\subset M(X;E') \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_o(X;E'_\beta)\subset M_o(X;E')$$

Ahora bien, como es claro que si una medida m definida en $\mathcal{B}(X)$ y con valores en E' es fuertemente ($\beta(E',E)$) contablemente aditiva (resp. fuertemente regular) entonces es también débilmente ($\sigma(E',E)$) contablemente aditiva (resp. débilmente regular), sólo debemos probar que si m es de variación acotada para la topología $\beta(E',E)$ entonces m verifica la condición (C). Pero si $m\in\mathcal{M}(\mathcal{B}(X);E'_\beta)$ (o bien $m\in\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$), por el lema 3.11. existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A\subset E'$ tal que

$$\rho_A(m)(X)\leq 1 \qquad (\text{ó} \quad \rho_A(m)(\Omega)\leq 1)$$

Y como suponemos E infratonelado, A es equicontinuo, y así de 1.28. se deduce que m verifica la condición (C).

8.16. Observación: De la proposición anterior y de los teoremas 3.6. y 4.8. se deduce que si E es $\mathcal{K}$-infratonelado y consideramos

$$\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}(X;E'_\beta)$$

dotados de sus topologías usuales, entonces los espacios

$$(B(\Sigma;E)', \beta(B(\Sigma;E)',B(\Sigma;E))) \quad \text{y} \quad (C_c(X;E)', \beta(C_c(X;E)',C_c(X;E)))$$

son topológicamente isomorfos a los espacios

$$\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}(X;E'_\beta)$$

respectivamente.

9. Tablas resumen de los capítulos II y III.

Las tablas que damos a continuación resumen los resultados fundamentales obtenidos en los dos capítulos anteriores.

Obsérvese que la última columna de las tablas (a) y (b) recoge sólo situaciones triviales y que los casos excluídos de las tablas (c) y(d) son igualmente triviales.

(a) Caso infratonelado

$C(X;E)$ es infratonelado (X comp. regular)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado y $C(X)$ es infratonelado	ó	E es infratonelado y X es seudofinito
$C(K;E)$ es infratonelado (K compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y K es finito
$B(\Sigma;E)$ es infratonelado (Σ un álgebra)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y Σ es finito
$S(\Sigma;E)$ es infratonelado (Σ un álgebra)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y Σ es finito
$C_c(X;E)$ es infratonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y X es finito
$C_o(X;E)$ es infratonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y X es finito
$(C_c(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado y $C(X)$ es infratonelado	ó	E es infratonelado y X es discreto
$(C_o(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado y $C(X)$ es infratonelado	ó	E es infratonelado y X es discreto
$(C_c(X;E), L)$ es infratonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-infratonelado	ó	E es infratonelado y X es discreto

(b) Caso tonelado

$C(X;E)$ es tonelado (X comp. regular)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-tonelado y $C(X)$ es tonelado	ó	E es tonelado X es seudofinito y $C(X)$ es tonelado
$C(K;E)$ es tonelado (K compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-tonelado	ó	E es tonelado y K es finito
$B(\Sigma;E)$ es tonelado (Σ un álgebra)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-tonelado	ó	E es tonelado y Σ es finito
$C_o(X;E)$ es tonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-tonelado	ó	E es tonelado y X es finito
$(C_c(X;E),L)$ es tonelado (X loc. compacto)	$\Leftrightarrow$	E es $\mathcal{K}$-tonelado	ó	E es tonelado y X es discreto

(c) Relación entre la $\mathcal{K}$-infratonelación y la infratonelación de distintos espacios de funciones con valores vectoriales.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-infratonelado

(ii) Existe un compacto infinito K tal que $C(K;E)$ es infratonelado

(iii) Existe un compacto infinito K tal que $C(K)\otimes E$ es infratonelado

(iv) $C(K;E)$ es infratonelado para todo compacto K

(v) $C(K)\otimes E$ es infratonelado para todo compacto K

(vi) Existe un espacio topológico completamente regular no seudofinito X tal que $C(X;E)$ es infratonelado

(vii) Existe un espacio topológico completamente regular no seudofinito X tal que $C(X)\otimes E$ es infratonelado

(viii) Si X es un espacio topológico completamente regular y $C(X)$ es infratonelado entonces $C(X;E)$ es infratonelado

(ix) Si X es un espacio topológico completamente regular y $C(X)$ es infratonelado entonces $C(X)\otimes E$ es infratonelado

(x) Existe un álgebra infinita Σ tal que $B(\Sigma;E)$ es infratonelado

(xi) Existe un álgebra infinita Σ tal que $B(\Sigma)\otimes E$ es infratonelado

(xii) Existe un álgebra infinita Σ tal que $S(\Sigma;E)$ es infratonelado

(xiii) $B(\Sigma;E)$ es infratonelado para toda álgebra Σ

(xiv) $B(\Sigma)\otimes E$ es infratonelado para toda álgebra Σ

(xv) $S(\Sigma;E)$ es infratonelado para toda álgebra Σ

(xvi) $c_o(E)$ es infratonelado

(xvii) Existe un espacio topológico localmente compacto e infinito X tal que $C_o(X;E)$ es infratonelado

(xviii) Existe un espacio topológico localmente compacto e infinito X tal que $C_o(X)\otimes E$ es infratonelado

(xix) $C_o(X;E)$ es infratonelado para todo espacio localmente compacto X

(xx) $C_o(X)\otimes E$ es infratonelado para todo espacio localmente compacto X

(xxi) $c_{oo}(E)$ es infratonelado

(xxii) Existe un espacio topológico localmente compacto e infinito X tal que $C_c(X;E)$ es infratonelado

(xxiii) Existe un espacio topológico localmente compacto e infinito X tal que $C_c(X)\otimes E$ es infratonelado

(xxiv) $C_c(X;E)$ es infratonelado para todo espacio topológico localmente compacto X

(xxv) $C_c(X)\otimes E$ es infratonelado para todo espacio topológico localmente compacto X

(xxvi) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto X tal que $(C_c(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado

(xxvii) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto X tal que $(C_c(X)\otimes E,\mathcal{K})$ es infratonelado

(xxviii) $(C_c(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado si X es un espacio topológico localmente compacto tal que $C(X)$ es infratonelado

(xxix) $(C_c(X)\otimes E,\mathcal{K})$ es infratonelado si X es un espacio topológico localmente compacto tal que $C(X)$ es infratonelado

(xxx) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto X tal que $(C_o(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado

(xxxi) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto X tal que $(C_o(X)\otimes E,\mathcal{K})$ es infratonelado

(xxxii) $(C_o(X;E),\mathcal{K})$ es infratonelado si X es localmente compacto y C(X) es infratonelado

(xxxiii) $(C_o(X)\otimes E,\mathcal{K})$ es infratonelado si X es localmente compacto y C(X) es infratonelado

(xxxiv) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto tal que $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado

(xxxv) $(C_c(X;E),L)$ es infratonelado para todo espacio topológico localmente compacto X.

(d) Relación entre la $\mathcal{K}$-tonelación y la tonelación de distintos espacios de funciones con valores vectoriales.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-tonelado

(ii) Existe un compacto infinito K tal que $C(K;E)$ es tonelado

(iii) $C(K;E)$ es tonelado para todo compacto K

(iv) Existe un espacio topológico completamente regular no seudofinito X tal que $C(X;E)$ es tonelado

(v) $C(X;E)$ es tonelado si X es un espacio topológico completamente regular tal que $C(X)$ es tonelado

(vi) Existe un álgebra infinita Σ tal que $B(\Sigma;E)$ es tonelado

(vii) $B(\Sigma;E)$ es tonelado para toda álgebra Σ

(viii) Existe un espacio topológico localmente compacto e infinito X tal que $C_o(X;E)$ es tonelado

(ix) $C_o(X;E)$ es tonelado para todo espacio topológico localmente compacto X

(x) $c_o(E)$ es tonelado

(xi) Existe un espacio topológico localmente compacto no discreto X tal que $(C_c(X;E),L)$ es tonelado

(xii) $(C_c(X;E),L)$ es tonelado para todo espacio topológico localmente compacto X.

CAPITULO IV: Otras propiedades de C(X;E).

En este capítulo X será un espacio topológico completamente regular

10. Condiciones necesarias y suficientes para que C(X;E) tenga una sucesión fundamental de acotados y para que sea un (DF)-espacio.

Recordemos que una sucesión (B_n) de subconjuntos acotados de un e.l.c. E se dice fundamental si todo subconjunto acotado de E está contenido en algún conjunto de la sucesión. Si E tiene una sucesión fundamental de acotados, aludiendo a la definición de base de una bornología, se dice que "la bornología de E tiene una base contable".

Es interesante en general determinar si un e.l.c. E tiene una sucesión fundamental de acotados (observemos p.e. que en estas condiciones el dual fuerte de E, E'_β, es metrizable). Warner en [37] caracteriza de varias formas cuándo el espacio C(X) tiene esta propiedad. Una de las caracterizaciones que da (será la que utilicemos nosotros) es la siguiente: "C(X) tiene una sucesión fundamental de acotados si y sólo si X es seudocompacto (e.d. toda función real y continua en X está acotada) y C(X) es secuencialmente completo".

10.1. Teorema: C(X;E) tiene una sucesión fundamental de acotados si y sólo si C(X) y E tienen sucesiones fundamentales de acotados. Más aún, en este caso, si (B_n) es una sucesión fundamental de acotados de E entonces $(C(X;B_n))$ es una sucesión fundamental de acotados de $C(X;E)$.

Demostración: Como $C(X)$ y E son subespacios complementados de $C(X;E)$ (5.10.), es claro que si $C(X;E)$ tiene una sucesión fundamental de acotados entonces $C(X)$ y E también tienen sucesiones fundamentales de acotados.

Para probar el recíproco usaremos la caracterización de Warner dada más arriba. Veremos que si $C(X)$ es secuencialmente completo, X es seudocompacto y (B_n) es una sucesión fundamental de acotados de E entonces $(C(X;B_n))$ es una sucesión fundamental de acotados de $C(X;E)$. Desde luego $(C(X;B_n))$ es una sucesión de acotados de $C(X;E)$. Supongamos que no es fundamental, e.d. supongamos que existe un acotado $A\subset C(X;E)$ tal que para cada $n\in \mathbb{N}$ existe $x_n\in X$ y $\phi_n\in A$ tales que $\phi_n(x_n)\notin B_n$. Entonces la sucesión $(\phi_n(x_n))$ no es acotada en E y así existe una seminorma continua p en E tal que $\overline{\lim_n}\, p(\phi_n(x_n))=+\infty$. Por tanto podemos extraer una subsucesión de $(\phi_n(x_n))$, que seguimos notando igual, tal que $p(\phi_n(x_n))\geqslant n^3$ para todo $n\in \mathbb{N}$. Consideremos ahora la serie de funciones reales y continuas $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p(\phi_n(.))$. Como A está acotado en $C(X;E)$, es una serie de Cauchy en $C(X)$ y por tanto es convergente. Así se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p(\phi_n(.))\in C(X)$. Pero esto está en contradicción con que X sea seudocompacto ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p(\phi_n(x_k))\geqslant \frac{1}{k^2}p(\phi_k(x_k))\geqslant k \qquad \forall k\in \mathbb{N}.$$

Grothendieck en [11] introdujo la siguiente

10.2. Definición: Diremos que E es un (DF)-espacio si:

(i) E posee una sucesión fundamental de acotados

y (ii) E es $\mathcal{X}_o$-infratonelado (e.d. todo fuertemente acotado de E' que es unión contable de equicontinuos es equicontinuo).

10.3. Observaciones: (1) Es claro que todo espacio infratonelado es $\mathcal{X}_o$-infratonelado.

(2) Por polaridad la condición (ii) de la definición anterior es equivalente a la siguiente: "todo $\mathcal{X}_o$-tonel bornívoro de E (e.d. todo tonel bornívoro que es intersección de una sucesión de discos cerrados entornos de cero) es un entorno de cero.

Warner en [37] caracteriza los espacios X para los que C(X) es un (DF)-espacio:

10.4. Teorema [37]: C(X) es un (DF)-espacio si y sólo si toda unión contable de subconjuntos compactos de X es relativamente compacta.

Hollstein, en un trabajo todavía no publicado [14], ha obtenido ya el resultado que damos a continuación. Nosotros vamos a dar una demostración diferente de la de Hollstein. Veremos que, utilizando algunos resultados de los capítulos anteriores, se puede dar una demostración bastante sencilla.

10.5. Teorema [14]: C(X;E) es un (DF)-espacio si y sólo si C(X) y E son (DF)-espacios.

Demostración: Por la proposición 5.10. si C(X;E) es un (DF)-espacio entonces C(X) y E también son (DF)-espacios.

Supongamos que C(X) y E son (DF)-espacios . Del teorema 10.1. se deduce que C(X;E) posee una sucesión fundamental de acotados. Además $C(X;E)$ es χ_0-infratonelado: Sea (H_n) una sucesión de subconjuntos equicontinuos de $C(X;E)'$ tal que $\bigcup_n H_n$ es un fuertemente acotado. Por la proposición 5.8., para cada $n\in\mathbb{N}$ $sop(H_n)$ es un subconjunto compacto de X, y por tanto, por el teorema anterior

$$sop\left(\bigcup_n H_n\right) = \overline{\bigcup_n sop(H_n)}$$

es un subconjunto compacto de X. Por otra parte, como el dual fuerte de un (DF)-espacio tiene la propiedad (B) de Pietsch ([24] 1.5.8.), del lema 3.11. se deduce que existe un disco fuertemente cerrado y acotado $A\subset E'$ tal que

$$\rho_A(m)(X) \leq 1 \qquad \forall m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

Además, por 5.8. y 1.27.(2), para cada $k\in\mathbb{N}$ existe un disco equicontinuo $U_k\subset E'$ tal que

$$\rho_{U_k}(m)(X) \leq 1 \qquad \forall m \in \bigcup_{n=1}^{k} H_n$$

y es claro que podemos tomar $U_k\subset U_{k+1}$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Entonces, por ser E χ_0-infratonelado, $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k\cap A)$ es un disco equicontinuo de E'; y si $j\in\mathbb{N}$ y $m\in H_j$, por 1.27.(1),

$$\rho_B(m)(X) \leq \rho_{U_j\cap A}(m)(X) = \text{máx}\left\{\rho_{U_j}(m)(X),\ \rho_A(m)(X)\right\} \leq 1$$

y por tanto

$$\rho_B(m)(X) \leq 1 \qquad \forall m\in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

de donde, por 5.8. y 1.27.(2), se deduce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ es equicontinuo. Queda así probado que $C(X;E)$ es χ_0-infratonelado y por tanto un (DF)-espacio.

Estamos ahora en condiciones de dar dos versiones vectoriales de un resultado de Warner ([37], Corolario 2, pág. 276):

10.6. Corolario: C(X;E) es un (DF)-espacio infratonelado si y sólo si X es compacto y E es un (DF)-espacio infratonelado.

Demostración: Como C(X) y E son subespacios complementados de C(X;E) (5.10.) es claro que si C(X;E) es un (DF)-espacio infratonelado entonces C(X) y E son (DF)-espacios infratonelados. Además Warner probó ([37], Corolario 1, pág. 276) que si C(X) es un (DF)-espacio infratonelado entonces X es compacto.

Si E es un (DF)-espacio infratonelado, de 8.3. se sigue que E es $\mathcal{K}$-infratonelado, y entonces por el teorema anterior y por 4.11. se tiene que si X es compacto C(X;E) es un (DF)-espacio infratonelado.

10.7. Corolario: C(X;E) es un (DF)-espacio tonelado si y sólo si X es compacto y E es un (DF)-espacio tonelado.

Demostración: Se sigue del corolario anterior y de 5.10. que si C(X;E) es un (DF)-espacio tonelado entonces X es compacto y E es un (DF)-espacio tonelado.

Si E es un (DF)-espacio tonelado por 8.4. E es $\mathcal{K}$-tonelado, y entonces es consecuencia de 10.5. y de 6.12. que C(X;E) es un (DF)-espacio tonelado para todo compacto X.

11. C(X;E) con la propiedad estricta de Mackey.

En [11] Grothendieck da la siguiente

11.1. Definición: Diremos que un e.l.c. E tiene la propiedad estricta de Mackey si para todo acotado $A \subset E$ existe un disco cerrado y acotado $B \subset E$ tal que $A \subset B$ y tal que las topologías inducidas por E y por el espacio normado (E_B, ρ_B) (ver 1.23.) coinciden en A.

11.2. Nota: Tal como hace notar Grothendieck se puede comprobar fácilmente que la condición anterior es equivalente a la siguiente: para todo acotado $A \subset E$ existe un disco cerrado y acotado $B \subset E$ tal que $A \subset B$ y tal que para cada $\lambda > 0$ existe un entorno de cero U en E que verifica $U \cap A \subset \lambda B$.

Warner [37] probó el siguiente resultado:

11.3. Teorema [37]: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) C(X) tiene la propiedad estricta de Mackey

(ii) X es hemicompacto (e.d. existe una sucesión (K_m) de subconjuntos compactos de X tal que todo subconjunto compacto K de X está contenido en algún compacto de la sucesión)

(iii) C(X) es metrizable.

11.4. Teorema: C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey si y sólo si C(X) y E la tienen.

Demostración: Si C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey entonces C(X) y E también la tienen, por ser subespacios suyos (5.10.).

Supongamos ahora que C(X) y E tienen la propiedad estricta de Mackey. Por el teorema anterior X es hemicompacto, e.d. existe una sucesión (K_n) de subconjuntos compactos de X tal que si $K \subset X$ es compacto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$. Queremos probar que C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey. Sea $\mathcal{A} \subset C(X;E)$ un acotado: para cada $n\in \mathbb{N}$ existe un disco acotado $B_n \subset E$ tal que

$$\phi(K_n) \subset B_n \qquad \forall \phi\in\mathcal{A}$$

por tanto

$$(1)\ \mathcal{A} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\phi\in C(X;E)\ :\ \phi(K_n) \subset B_n\}$$

Como E tiene la propiedad estricta de Mackey para cada $n\in \mathbb{N}$ existe un disco cerrado y acotado $B'_n \subset E$ tal que $B_n \subset B'_n$ y tal que si $m\in \mathbb{N}$ existe un disco cerrado entorno de cero $U_{n,m}$ verificando

$$U_{n,m} \cap B_n \subset \frac{1}{m} B'_n$$

Por tanto podemos asegurar que existe una sucesión (U_j) de discos cerrados entornos de cero en E tal que si $(n,m)\in \mathbb{N}^2$ existe $j\in \mathbb{N}$ verificando

$$(2) \qquad U_j \cap B_n \subset \frac{1}{m} B'_n$$

Por ser $\mathcal{A}$ un subconjunto acotado de $C(X;E)$ para cada $j\in \mathbb{N}$ existe $\lambda_j > 0$ tal que

$$\mathcal{A} \subset \lambda_j \{\phi\in C(X;E)\ :\ \phi(K_j) \subset U_j\} = \{\phi\in C(X;E)\ :\ \phi(K_j) \subset \lambda_j U_j\}$$

y por tanto

$$(3)\quad \mathcal{A} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\phi\in C(X;E)\ :\ \phi(K_j) \subset \lambda_j U_j\}$$

Sea (μ_j) una sucesión de números reales tal que:

(i) $\mu_j \geq 1 \quad \forall j\in \mathbb{N}$;

(ii) $\mu_j \geq \lambda_j \quad \forall j\in \mathbb{N}$;

(iii) $\lim_j \frac{\mu_j}{\lambda_j} = +\infty$

y (iv) $\lim_j \mu_j = +\infty$

Definimos

$$\mathcal{B} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \phi \in C(X;E) : \phi(K_j) \subset \mu_j (U_j \cap B'_j) \}$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es un disco cerrado de C(X;E). Además por la buena propiedad de la sucesión (K_j) y por ser B'_j acotado para todo $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ es acotado. Por otra parte, por (1), (3), (i) y (ii), $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ ya que $B'_j \supset B_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por último, si $m \in \mathbb{N}$, por (iii) y (iv), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\mu_j}{\lambda_j} \geq m$ (e.d. $\frac{\mu_j}{m} \geq \lambda_j$) y $\mu_j \geq m$ si $j \geq j_0$. Si $j \in \{1, \ldots, j_0\}$, por (2) existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_{k_j} \cap B_j \subset \frac{\mu_j}{m} B'_j$$

Definimos entonces

$$\mathcal{U} = \bigcap_{j=1}^{j_0} \{ \phi \in C(X;E) : \phi(K_j) \subset \frac{\mu_j}{m} U_j \cap U_{k_j} \}$$

Claramente $\mathcal{U}$ es un entorno de cero de C(X;E), y además si $\phi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ y $j \geq j_0$, por (1) y (3)

$$\phi(K_j) \subset B_j \cap \lambda_j U_j \subset B'_j \cap \frac{\mu_j}{m} U_j \subset \frac{\mu_j}{m}(B'_j \cap U_j)$$

y si $j \leq j_0$

$$\phi(K_j) \subset \frac{\mu_j}{m} U_j \cap U_{k_j} \cap B_j \subset \frac{\mu_j}{m}(U_j \cap B'_j)$$

Por tanto $\phi \in \frac{1}{m}\mathcal{B}$, con lo que queda probado que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} \subset \frac{1}{m}\mathcal{B}$. Así se deduce que efectivamente C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey.

12. C(X;E) con la propiedad de aproximación.

Recordemos que se dice que un e.l.c. E tiene la propiedad de aproximación si la aplicación identidad de E en E se puede aproximar uniformemente sobre los precompactos por aplicaciones lineales y continuas de rango finito.

En 1973 Bierstedt [2] probó, usando técnicas de ε-productos, que si C(X) y E son completos y E tiene la propiedad de aproximación entonces C(X;E) tiene la propiedad de aproximación.

El problema general (incluso en el caso escalar) de determinar cuándo C(X;E) tiene la propiedad de aproximación no es resuelto hasta que Prolla [26], en 1977, usando técnicas de fibrados vectoriales, prueba que si E tiene la propiedad de aproximación entonces C(X;E) también la tiene.

Debemos hacer notar que tanto Bierstedt como Prolla atacan el problema para espacios de Nachbin, de tipo más general que C(X;E). Vamos a comprobar aquí que para el caso concreto que nos ocupa, del espacio C(X;E), se puede dar una demostración bastante sencilla y natural. Simplemente vamos a ver que la demostración dada por Köthe ([16] 43.7.(4)) de que C(X) tiene la propiedad de aproximación si X es localmente compacto se puede generalizar fácilmente a C(X;E) para espacios X completamente regulares.

<u>12.1. Lema</u>: Si K es un espacio topológico compacto y E tiene la propiedad de aproximación entonces C(K;E) tiene la propiedad de aproximación.

<u>Demostración</u>: Sea $B\subset C(K;E)$ un precompacto y sea p una seminorma continua en E. Por el teorema de Ascoli B es equicontinuo y por tanto para cada $t\in K$ existe un entorno abierto de t, U_t, tal que

$$(1) \qquad p(\phi(s)-\phi(t)) < \frac{1}{2} \qquad \forall s\in U_t.$$

$\{U_t : t\in K\}$ es un recubrimiento abierto del compacto K. Sea $\{U_{t_i} : i\in\{1,\dots,n\}\}$ un subrecubrimiento finito de $\{U_t : t\in K\}$. Como para cada $t\in K$ la aplicación $\delta_t: C(K;E) \longrightarrow E$ definida por $\delta_t(\phi)=\phi(t)$ para todo $\phi\in C(K;E)$, es una aplicación lineal y continua, podemos afirmar que $A=\bigcup_{i=1}^{n}\delta_{t_i}(B)$ es un subconjunto precompacto de E. Entonces, como E tiene la propiedad de aproximación, existe una aplicación lineal y continua de rango finito $L: E \longrightarrow E$ tal que

(2) $\quad p(e-L(e)) < \frac{1}{2} \qquad \forall e\in A$

Sea $(f_i)_{i=1}^{n}$ una partición continua de la unidad en K subordinada a $(U_{t_i})_{i=1}^{n}$. Definimos

$$T: C(K;E) \longrightarrow C(K;E)$$
$$\phi \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(.)L(\phi(t_i))$$

T es una composición y suma de aplicaciones lineales y continuas, y por tanto es lineal y continua. Además como L tiene rango finito es claro que T tiene rango finito. Por otra parte si $\phi\in B$ y $t\in K$, por (1) y (2) se tiene

$$p(\phi(t)-T(\phi)(t)) = p\Big(\phi(t)-\sum_{i=1}^{n} f_i(t)L(\phi(t_i))\Big) =$$
$$= p\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\big(\phi(t)-L(\phi(t_i))\big)\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(t)p(\phi(t)-L(\phi(t_i))) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\big[p(\phi(t)-\phi(t_i))+p(\phi(t_i)-L(\phi(t_i)))\big] < 1$$

Con lo cual queda probado que podemos aproximar uniformemente la identidad en el precompacto B, y por tanto que C(K;E) tiene la propiedad de aproximación.

<u>12.2. Teorema [26]</u>: C(X;E) tiene la propiedad de aproximación si y sólo si E la tiene.

<u>Demostración</u>: Si $C(X;E)$ tiene la propiedad de aproximación entonces es claro, por 5.10., que E también la tiene.

Observemos que $C(X;E)$ está dotado de la topología inicial para la familia de aplicaciones $\{\rho_K : K\in \mathcal{K}(X)\}$, donde $\mathcal{K}(X)$ es la familia de los subconjuntos compactos de X y ρ_K es la aplicación restricción de $C(X;E)$ en $C(K;E)$. Además, tal como hemos observado otras veces, la imagen de ρ_K, $\mathrm{Im}(\rho_K)$, contiene a $C(K)\otimes E$ y por tanto es un subespacio denso de $C(K;E)$ para todo $K\in \mathcal{K}(X)$. Por último si $\phi\in C(X;E)$ y $\phi\neq 0$ es claro que existe $K\in \mathcal{K}(X)$ tal que $\rho_K(\phi)\neq 0$. Así la topología de $C(X;E)$ es una topología inicial para la familia $\{\rho_K : K\in \mathcal{K}(X)\}$ del tipo que llama Köthe "reduced locally convex kernel" ([15] 19.6. y [16] pág. 247). Entonces si E tiene la propiedad de aproximación, como por el lema anterior $C(K;E)$ tiene la propiedad de aproximación para todo $K\in \mathcal{K}(X)$, es claro que por [16] 43.4.7. podemos afirmar que $C(X;E)$ tiene la propiedad de aproximación.

<u>12.3. Nota</u>: La propiedad de aproximación que hemos definido más arriba es la que se suele denominar propiedad de aproximación de Grothendieck. También se define a menudo la llamada propiedad de aproximación de Schwartz: se dice que E tiene la propiedad de aproximación de Schwartz si la aplicación identidad de E en E se puede aproximar uniformemente sobre los <u>discos compactos</u> por aplicaciones lineales y continuas de rango finito.

Es fácil comprobar siguiendo la misma demostración que los resultados anteriores son también válidos para la propiedad de aproximación de Schwartz.

Tabla resumen del capítulo IV

C(X;E) tiene una sucesión fundamental de acotados	$\Leftrightarrow$	C(X) tiene una sucesión fundamental de acotados	y	E tiene una sucesión fundamental de acotados
C(X;E) es un (DF)-espacio	$\Leftrightarrow$	C(X) es un (DF)-espacio	y	E es un (DF)-espacio
C(X;E) tiene la propiedad estricta de Mackey	$\Leftrightarrow$	C(X) tiene la propiedad estricta de Mackey	y	E tiene la propiedad estricta de Mackey
C(X;E) tiene la propiedad de aproximación	$\Leftrightarrow$	——	–	E tiene la propiedad de aproximación

CAPITULO V: C(X;E) y S(Σ;E) bornológicos.

En este último capítulo vamos a estudiar cuándo son bornológicos algunos de los espacios tratados en los capítulos II y III. Concretamente caracterizamos cuándo son bornológicos los espacios $S(\Sigma;E)$ y $C(X)\otimes E$ y damos algunos resultados acerca de cuándo $C(X;E)$ es bornológico o ultrabornológico (como siempre suponemos $C(X)\otimes E$ dotado de la topología inducida por $C(X;E)$).

Hay que señalar que el planteamiento de este capítulo es en parte análogo al que ya ha seguido muy recientemente Marquina en [18] para estudiar cuándo $c_o(E)$ es bornológico.

Como es habitual a lo largo de este capítulo X será un espacio topológico completamente regular.

13. S(Σ;E) y C(X)⊗E bornológicos.

Para empezar vamos a caracterizar cuándo $S(\Sigma;E)$ es bornológico. Para esto utilizaremos fundamentalmente el teorema 3.13. en que caracterizamos cuándo este espacio es infratonelado y el hecho de que un e.l.c. E es bornológico si y sólo si es semibornológico (e.d. las formas lineales en E acotadas sobre los acotados son continuas) e infratonelado (esto se puede probar fácilmente, y en cualquier caso se deduce inmediatamente de [15] 28.1.(3)).

13.1. Teorema: Sea Σ un álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto no vacío Ω. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $S(\Sigma;E)$ es bornológico

(ii) Se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) Σ es finito y E es bornológico

(b) E es bornológico y $\mathcal{K}$-infratonelado.

Demostración: (i) $\Rightarrow$(ii) es consecuencia inmediata de 3.13. y 3.10.

(ii) $\Rightarrow$(i): Por 3.9. es claro que si se verifica (a) entonces $S(\Sigma;E)$ es bornológico. Si se verifica (b), por 3.13., el espacio $S(\Sigma;E)$ es infratonelado, y por tanto para probar que es bornológico basta demostrar que es semibornológico. Sea τ una forma lineal en $S(\Sigma;E)$ que transforma acotados en acotados. Dado $e\in E$ y $A\in\Sigma$ definimos

$$\langle e,m(A)\rangle = \tau(\chi_A(.)e).$$

Es claro que para cada $A\in\Sigma$ $m(A)$ es una forma lineal en E que transforma acotados en acotados. Como suponemos E bornológico se deduce que $m(A)\in E'$. Así es fácil comprobar que m es una medida en Σ con valores en E'. Además m es de variación acotada para la topología fuerte $\beta(E',E)$: si B es un disco acotado de E (ver 3.5.)

$$p_B(m)(\Omega)= \sup\left\{\left|\int_\Omega \phi\, dm\right| : \phi\in S(\Sigma;B)\right\}= \sup\left\{|\langle\phi,\tau\rangle| : \phi\in S(\Sigma;B)\right\},$$

y el último supremo es finito ya que τ transforma acotados en acotados. Por tanto $m\in\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)$, y como por 8.15. $\mathcal{M}(\Sigma;E'_\beta)=S(\Sigma;E)'$ deducimos que $\tau\in S(\Sigma;E)'$ pues

$$\int_\Omega \phi\, dm = \langle\phi,\tau\rangle \qquad \forall\phi\in S(\Sigma;E).$$

A continuación vamos a caracterizar cuándo $C(K)\otimes E$ (con K compacto) es bornológico. Seguiremos un planteamiento análogo al del teorema anterior.

Recuérdese que $c_{oo}(E)$ (ya definido en 4.2.) es el espacio de las sucesiones eventualmente nulas de E dotado de la topología de la convergencia uniforme.

Se podrá observar la analogía de (iv) del teorema siguiente y 8.14.

13.2. Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es $\mathcal{K}$-infratonelado y bornológico

(ii) $C(K)\otimes E$ es bornológico para todo espacio topológico compacto K

(iii) Existe un espacio topológico compacto e infinito K tal que $C(K)\otimes E$ es bornológico

(iv) E tiene la siguiente propiedad: "Si $\mathcal{H}$ es una familia de discos acotados de E que verifica:

(a) Si B es un disco acotado de E entonces existe $\lambda>0$ tal que $\lambda B\in\mathcal{H}$

y (b) Si $D_1, D_2\in\mathcal{H}$ y $\lambda\in[0,1]$ entonces $\lambda D_1+(1-\lambda)D_2\in\mathcal{H}$; entonces $\mathcal{H}$ verifica también

(c) Existe un entorno de cero U en E tal que

$$U^n\subset\bigcup_{\mathcal{H}} D^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}"$$

(v) $c_{oo}(E)$ es bornológico.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea K un espacio topológico compacto. Si E es $\mathcal{K}$-infratonelado, por 4.12., $C(K)\otimes E$ es infratonelado. Por tanto para probar que $C(K)\otimes E$ es bornológico basta probar que es semi-bornológico. Sea τ una forma lineal en $C(K)\otimes E$ que transforma acotados en acotados. Dado $e\in E$ definimos la forma lineal

$$\begin{aligned} \tau_e : C(K) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longrightarrow \tau(f(.)e) \end{aligned}$$

Como $C(K)$ es un espacio de Banach (y en particular bornológico), y τ_e transforma acotados en acotados, τ_e es continua. Por tanto τ_e define una medida escalar contablemente aditiva y regular m_e en $\mathcal{B}(K)$ tal que

$$\tau(f(.)e) = \tau_e(f) = \int_K f \, dm_e$$

Si $A \in \mathcal{B}(K)$ y definimos $\langle e, m(A) \rangle = m_e(A)$ para todo $e \in E$, $m(A)$ es una forma lineal en E. Además $m(A)$ transforma acotados en acotados: si B es un disco acotado de E y $e \in B$, se tiene

$$|\langle e, m(A) \rangle| \leqslant |m_e|(A) \leqslant |m_e|(K) =$$

$$= \sup \left\{ \left| \int_K f \, dm_e \right| : f \in C(K) \text{ y } |f(t)| \leqslant 1 \quad \forall t \in K \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left\{ |\tau(f(.)x)| : x \in B, \ f \in C(K) \text{ y } |f(t)| \leqslant 1 \ \forall t \in K \right\},$$

donde el último supremo es finito porque τ transforma acotados en acotados y porque $\{ f(.)x : x \in B, \ f \in C(K) \text{ y } |f(t)| \leqslant 1 \ \ \forall t \in K \}$ es trivialmente un acotado de $C(K) \otimes E$. Por tanto si E es bornológico $m(A) \in E'$ para todo $A \in \mathcal{B}(K)$. Así queda probado que m es una medida definida en $\mathcal{B}(K)$, con valores en E', débilmente ($\sigma(E',E)$) regular y débilmente contablemente aditiva. Además m es de variación acotada para la topología $\beta(E',E)$ ya que si B es un disco acotado de E, por 4.7.,

$$\begin{aligned} p_B(m)(K) &= \sup \left\{ \left| \int_K \phi \, dm \right| : \phi \in C(K;B) \cap (C(K) \otimes E) \right\} = \\ &= \sup \left\{ |\langle \phi, \tau \rangle| \ : \phi \in C(K;B) \cap (C(K) \otimes E) \right\} \end{aligned}$$

y de nuevo el último supremo es finito porque τ transforma acotados en acotados. Por tanto queda claro que $m \in \mathcal{M}(K;E'_\beta)$ (ver 1.20.)

Y finalmente de 8.15. deducimos que $m \in C(K;E)' = \mathcal{M}(K;E'_\beta)$, y como

$$\int_K \phi \, dm = \langle \phi, \tau \rangle \quad \forall \phi \in C(K) \otimes E,$$

que $\tau \in (C(K) \otimes E)'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sea $\mathcal{H}$ una familia de discos acotados de E que verifica (a) y (b) de (iv). Definimos

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{H}} [C(K;D) \cap (C(K) \otimes E)]$$

Claramente V es un disco bornívoro en $C(K) \otimes E$. Así, si $C(K) \otimes E$ es bornológico se deduce que V es un entorno de cero, e.d. existe un entorno de cero U en E tal que

$$C(K;U) \cap (C(K) \otimes E) \subset V.$$

Vamos a probar ahora que

$$U^n \subset \bigcup_{\mathcal{H}} D^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $(x_1, \ldots, x_n) \in U^n$ y sean $\{t_1, \ldots, t_n\}$ n puntos distintos de K. Tomamos $(f_i)_{i=1}^n \subset C(K)$ tal que

$$f_i(K) \subset [0,1] \quad , \quad sop(f_i) \cap sop(f_j) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

$$\text{y} \quad f_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que $\sum_{i=1}^n f_i(.)x_i \in C(K;U) \cap (C(K) \otimes E)$ y por tanto $\sum_{i=1}^n f_i(.)x_i \in V$, e.d. existe $D \in \mathcal{H}$ tal que

$$\sum_{i=1}^n f_i(.)x_i \in C(K;D) \cap (C(K) \otimes E)$$

Y de aquí se deduce inmediatamente que $(x_1, \ldots, x_n) \in D^n$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Supongamos que se verifica (iv). Sea $V \subset c_{oo}(E)$ un disco bornívoro. Definimos $\mathcal{H} = \{D \subset E$: D es un disco acotado y $c_{oo}(D) \subset V\}$, donde $c_{oo}(D) = \{(x_n) \in c_{oo}(E) : x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\mathcal{H}$ verifica (a) y (b) de (iv) y así existe un entorno de cero

U en E tal que

$$U^n \subset \bigcup_{\mathcal{H}} D^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero de aquí se deduce que $c_{oo}(U) \subset V$ ya que si $(x_m) \in c_{oo}(U)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 0$ si $m \geq n$, y entonces podemos escribir

$$(x_1, \ldots, x_n) \in U^n \subset \bigcup_{\mathcal{H}} D^n,$$

es decir existe $D \in \mathcal{H}$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \in D^n$ y por tanto $(x_m) \in c_{oo}(D) \subset V$. Así concluimos que V es un entorno de cero en $c_{oo}(E)$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Si $c_{oo}(E)$ es bornológico, como, por 4.3., E es un subespacio complementado de $c_{oo}(E)$, se deduce que E es bornológico. Por otra parte, si $c_{oo}(E)$ es bornológico es también infratonelado, y entonces de 4.10. se sigue que E es $\mathcal{K}$-infratonelado.

Nos encaminamos ahora a caracterizar cuándo $C(X) \otimes E$ es bornológico. Para ello nos conviene primero recordar la caracterización de Nachbin [22] y Shirota [33] acerca de cuándo C(X) es bornológico, y algunas cuestiones relacionadas con dicha caracterización.

Como de costumbre denotaremos por βX a la compactificación de Stone-Čech de X, y si $f \in C(X)$ denotaremos por f^β a la (única) extensión continua de f definida de βX en $\mathbb{K}^*$, la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{K}$. Con estas notaciones podemos dar las siguientes definiciones:

13.3. Definición: Llamaremos repleción de X, y notaremos υX, al conjunto de puntos $x \in \beta X$ tales que $f^\beta(x) \in \mathbb{K}$ para toda función $f \in C(X)$, dotado de la topología inducida por βX.

13.4. Definición: Diremos que X es repleto si $X = \upsilon X$.

Para más información sobre repleción de un espacio y sobre espacios repletos ver por ejemplo [1] o [9]. Nosotros simplemente vamos a utilizar el siguiente resultado (puede verse p.e. en [1] p. 22):

13.5. Teorema: υX es el conjunto de puntos $x\in\beta X$ tales que para cualquier sucesión (V_n) de entornos de x en βX se tiene

$$\left(\bigcap_{\mathbb{N}} V_n\right)\cap X \neq \emptyset.$$

Ahora podemos dar el resultado de Nachbin y Shirota:

13.6. Teorema [22,33]: $C(X)$ es bornológico si y sólo si X es repleto.

Schmets ha obtenido el siguiente resultado:

13.7. Teorema [27,29]: Sea $V\subset C(X;E)$ un disco, entonces existe un mínimo subconjunto cerrado $K(V)$ de βX tal que dada $\phi\in C(X;E)$, si $\tilde{\phi}$ (la única extensión continua de ϕ definida de βX en βE) se anula en un entorno de $K(V)$ en βX entonces $\phi\in V$. A $K(V)$ lo denominaremos soporte de V.

Siguiendo la demostración de Schmets se prueba el siguiente:

13.8. Teorema: Sea $V\subset C(X)\otimes E$ un disco, entonces existe un mínimo subconjunto cerrado $K(V)$ de βX tal que dada $\phi\in C(X)\otimes E$, si $\tilde{\phi}$ (la única extensión continua de ϕ definida de βX en βE) se anula en un entorno de $K(V)$ en βX entonces $\phi\in V$. A $K(V)$ lo denominaremos igualmente soporte de V.

Como consecuencia inmediata de los resultados anteriores se obtiene el siguiente:

13.9. Corolario [27]: Sea $V\subset C(X;E)$ (o $V\subset C(X)\otimes E$) un disco, y sea $x\in\beta X$, entonces $x\in K(V)$ si y sólo si para cada entorno de x, U, en βX existe $\phi\in C(X;E)$ (resp. $\phi\in C(X)\otimes E$) tal que $\phi\notin V$ y $\tilde{\phi}(\beta X\setminus U)=\{0\}$.

La siguiente proposición es también de Schmets:

13.10. Proposición [29]: Si $V\subset C(X;E)$ es un disco que absorbe a los discos de Banach acotados entonces $K(V)$ es un subconjuto de υX.

El resultado que damos a continuación es análogo al anterior:

13.11. Proposición: Si $V\subset C(X)\otimes E$ es un disco bornívoro entonces $K(V)\subset \upsilon X$.

Demostración: Sea $t\in K(V)$ y supongamos que $t\in\beta X\setminus\upsilon X$. Por 13.5. existe una sucesión decreciente (W_n) de entornos cerrados de t en βX tal que $\left(\bigcap_n W_n\right)\cap X=\emptyset$. Como $t\in K(V)$, por 13.9., para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\phi_n\in C(X)\otimes E$ tal que $\phi_n\notin V$ y $\tilde{\phi}_n(\beta X\setminus W_n)=\{0\}$, y como

$$\left(\bigcap_n W_n\right)\cap X=\emptyset,$$

si K es un subconjunto compacto de X existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $K\cap W_n=\emptyset$ si $n\geqslant m$. Por tanto es claro que la sucesión $(n\phi_n)$ está acotada en $C(X)\otimes E$. Entonces, por ser V bornívoro, existe $\lambda>0$ tal que

$$\lambda n\phi_n\in V \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

y de aquí se deduce que existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $\phi_j\in V$. Pero esto está en contradicción con la elección de la sucesión (ϕ_n).

13.12. Lema: Sea $f\in C(X)$ y $A\subset X$ tales que

$$|f(t)|\leqslant M \quad \forall t\in A,$$

entonces dado $\varepsilon>0$ existe $g\in C(X)$ tal que $g|_A=f|_A$ y

$$|g(t)| \leq M+\varepsilon \qquad \forall t\in X.$$

Demostración: Sea $\mathbb{K}^*$ la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{K}$ y sea f^β la extensión continua de f definida de βX en $\mathbb{K}^*$. Sea

$$C_1 = \{t\in\beta X \ : \ |f^\beta(t)|\leq M\}$$

y $$C_2 = \{t\in\beta X \ : \ |f^\beta(t)|\geq M+\varepsilon \quad \text{o} \quad f^\beta(t)=\infty\}.$$

C_1 y C_2 son dos cerrados disjuntos de βX. Por tanto existe $h\in C(\beta X)$ tal que $h(\beta X)\subset [0,1]$, $h(C_1)=\{1\}$ y $h(C_2)=\{0\}$. Sea $g=f(h|_X)$. Claramente $g\in C(X)$, $g|_A=f|_A$, y además

$$|g(t)| \leq |f(t)| \leq M+\varepsilon \qquad \text{si} \quad t\in X\setminus C_2$$

y $$g(t)=0 \quad \text{si} \quad t\in C_2\cap X.$$

13.13. Proposición: Sea X repleto y $V\subset C(X)\otimes E$ un disco bornívoro. Supongamos que $\phi\in C(X)\otimes E$ es tal que $\phi(K(V)) =\{0\}$, entonces $\phi\in V$.

Demostración: Sea $\phi\in C(X)\otimes E$; ϕ es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i$$

con $(f_i)_{i=1}^n \subset C(X)$ y $(e_i)_{i=1}^n \subset E$. Claramente podemos suponer que $(e_i)_{i=1}^n$ son linealmente independientes. Y así, si ϕ se anula en $K(V)$ ($K(V)$ es un subconjunto compacto de X por 13.11.) entonces $f_i(K(V))=\{0\}$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$. Sea para cada $m\in\mathbb{N}$

$$G_m = \{x\in X \ : \ |f_i(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{si } 1\leq i\leq n\}.$$

Por el lema anterior para cada $m\in\mathbb{N}$ y cada $i\in\{1,\dots,n\}$ existe una función $g_i^m\in C(X)$ tal que

$$|g_i^m(t)| \leq \frac{2}{m} \qquad \forall t\in X$$

y $$g_i^m|_{G_m} = f_i|_{G_m}$$

Claramente $\left\{ m\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^m(.)e_i\right) : m\in \mathbb{N}\right\}$ es una sucesión acotada en $C(X)\otimes E$. Por tanto, como V es bornívoro, existe $\lambda>0$ tal que

$$\lambda\, m \sum_{i=1}^{n} g_i^m(.)e_i \in V \qquad \forall m\in \mathbb{N}$$

Y así, existe $j\in \mathbb{N}$ tal que $2\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^j(.)e_i\right)\in V$. Por otra parte, como $\sum_{i=1}^{n} g_i^j(.)e_i$ coincide con $\sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i$ en G_j, que es un entorno de $K(V)$, de 13.8. se deduce que

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^j(.)e_i - \sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i\right)\in V.$$

Por tanto, como V es un disco

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i = \frac{1}{2}\, 2\sum_{i=1}^{n} g_i^j(.)e_i - \frac{1}{2}\, 2\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^j(.)e_i - \sum_{i=1}^{n} f_i(.)e_i\right) \in V.$$

<u>13.14. Lema</u>: Sea $V\subset C(X)\otimes E$ un disco bornívoro y sea K un subconjunto compacto de X, entonces

$$U=\left\{ \phi\in C(K)\otimes E \;:\; \text{existe } \tilde{\phi}\in V \text{ tal que } \tilde{\phi}|_K=\phi \right\}$$

es un disco bornívoro en $C(K)\otimes E$.

<u>Demostración</u>: Es claro que U es un disco en $C(K)\otimes E$. Para probar que es bornívoro observemos primero que si $B\subset E$ es un disco cerrado y acotado, y $\phi\in C(K)\otimes E$ es tal que $\phi(K)\subset B$, entonces existe $\tilde{\phi}\in C(X)\otimes E$ tal que $\tilde{\phi}|_K=\phi$ y $\tilde{\phi}(X)\subset B$. En efecto. Sea C la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $\phi(K)$, y sea E_C el subespacio (de dimensión finita) engendrado por C. Claramente $C\subset B$ y $\phi\in C(K;E_C)$. Entonces, como E_C es de dimensión finita, existe $\tilde{\phi}\in C(X;E_C)$ tal que $\tilde{\phi}|_K=\phi$, y además podemos suponer $\tilde{\phi}(X)\subset C$ ya que C es un retracto de E_C (si ρ_C es el funcional de Minkowski de C y definimos $h(x)=\dfrac{x}{\rho_C(x)}$ si $\rho_C(x)\geq 1$ y $h(x)=x$ si $\rho_C(x)\leq 1$ para todo $x\in E_C$, h es una aplicación continua

de E_C sobre C tal que $h(x)=x$ para todo $x\in C$; podemos suponer $\tilde{\phi}(X)\subset C$ tomando $\tilde{\phi}=h\circ\bar{\phi}$, siendo $\bar{\phi}$ una extensión arbitraria de ϕ). Entonces es claro que $\tilde{\phi}\in C(X)\otimes E$, $\tilde{\phi}|_K=\phi$ y $\tilde{\phi}(X)\subset C\subset B$.

Ahora podemos probar que U es bornívoro: Si $A\subset C(K)\otimes E$ es un acotado es inmediato que existe un disco cerrado y acotado $D\subset E$ tal que $A\subset\{\phi\in C(K)\otimes E\ :\ \phi(K)\subset D\}$. Además $\{\psi\in C(X)\otimes E\ :\ \psi(X)\subset D\}$ es un acotado de $C(X)\otimes E$ y por tanto existe $\lambda>0$ tal que $\lambda\{\psi\in C(X)\otimes E\ :\ \psi(X)\subset D\}\subset V$. De lo que probamos anteriormente se sigue inmediatamente que

$$\lambda A\subset U,$$

y por tanto que U es bornívoro.

<u>13.15. Teorema</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $C(X)\otimes E$ es bornológico.

(ii) $C(X)$ y E son bornológicos y $C(X)\otimes E$ es infratonelado.

(iii) $C(X)$ es bornológico y se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) E es bornológico y $\mathbb{K}$-infratonelado.

(b) X es seudofinito y E es bornológico.

(iv) $C(X)$ es bornológico y $C(K)\otimes E$ es bornológico para todo subconjunto compacto K de X.

<u>Demostración</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) se deduce inmediatamente de que todo espacio bornológico es infratonelado y de que $C(X)$ y E son subespacios complementados de $C(X)\otimes E$ (esto es cierto en general para ε-tensor productos, y en cualquier caso es claro que se puede dar una demostración análoga a la de 3.10.)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) es consecuencia inmediata de 5.13.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) es consecuencia inmediata de 13.2.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que se verifica (iv) y sea $V \subset C(X) \otimes E$ un disco bornívoro. Por la proposición 13.11. $K(V)$ es un subconjunto compacto de X, y por el lema anterior

$$U = \{ \psi \in C(K(V)) \otimes E \ : \text{ existe } \ \tilde{\psi} \in V \ \text{ tal que } \ \tilde{\psi}|_{K(V)} = \psi \}$$

es un disco bornívoro y por tanto un entorno de cero en $C(K(V)) \otimes E$, e.d. existe una seminorma continua p en E tal que

$$(*) \quad \{ \psi \in C(K(V)) \otimes E \ : \ p(\psi(x)) < 1 \quad \forall x \in K(V) \} \subset U.$$

Vamos a probar que

$$\{ \phi \in C(X) \otimes E \ : \ p(\phi(x)) < 1 \quad \forall x \in K(V) \} \subset V,$$

y así quedará claro que V es un entorno de cero en $C(X) \otimes E$ y por tanto que este espacio es bornológico. Sea $\phi \in C(X) \otimes E$ tal que

$$p(\phi(x)) < 1 \qquad \forall x \in K(V),$$

entonces existe $r < 1$ tal que

$$p(\phi(x)) < r \qquad (\text{e.d. } p(\tfrac{1}{r}\phi(x)) < 1) \qquad \forall x \in K(V).$$

De (*) se deduce que existe $\tilde{\phi} \in C(X) \otimes E$ tal que

$$\tfrac{1}{r}\tilde{\phi} \in V \qquad \text{y} \qquad \tilde{\phi}|_{K(V)} = \phi|_{K(V)},$$

y por esto último y por la proposición 13.13. tenemos también que

$$\frac{1}{1-r} (\tilde{\phi} - \phi) \in V.$$

Así, por ser V un disco, podemos escribir

$$\phi = r \frac{1}{r} \tilde{\phi} + (1-r) \frac{1}{1-r} (\phi - \tilde{\phi}) \in V.$$

<u>13.16. Observaciones</u>: 1. El estudio que hicimos en la sección 8 de los espacios K-infratonelados nos permite obtener aquí una serie de consecuencias inmediatas. A modo de ejemplo digamos que si Σ es un álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto no vacío Ω y X e

Y son dos espacios repletos, entonces de 8.8., 13.1., y 13.15. se deduce que $S(\Sigma;C(Y))$ y $C(X)\otimes C(Y)$ son bornológicos.

2. $S(\Sigma;E)$ y $C(X)\otimes E$ no son en general ultrabornológicos ni siquiera suponiendo X compacto y E Banach ya que como vimos en 7.5. (partes 1 y 2) estos espacios, en estas buenas condiciones, en general no son tonelados.

14. C(X;E) bornológico.

Vamos a empezar la sección dando una condición necesaria para que $C(X;E)$ sea bornológico. Recuérdese que en 13.15. caracterizamos cuándo $C(X)\otimes E$ es bornológico.

14.1. Teorema: Si $C(X;E)$ es bornológico entonces $C(X)\otimes E$ es también bornoloógico.

Demostración: Basta observar que si $C(X;E)$ es bornológico entonces se verifica la condición (ii) de 13.15.: Si $C(X;E)$ es bornológico entonces (como todo e.l.c. bornológico) es también infratonelado, y de 5.13. se deduce que $C(X)\otimes E$ es infratonelado. Además, por 5.10., $C(X)$ y E tienen que ser también bornológicos.

14.2. Nota: Para la demostración del teorema que damos a continuación debemos introducir un nuevo espacio de funciones: Denotaremos por $C_{rc}(X;E)$ al subespacio de $C(X;E)$ formado por las funciones continuas que tienen imagen relativamente compacta. Supondremos $C_{rc}(X;E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Obsérvese que el espacio $C_{rc}(X;E)$ es topológicamente isomorfo a $C(\beta X;E)$ y que se inyecta de forma continua en $C(X;E)$.

<u>14.3. Teorema</u>: Sea X localmente compacto y repleto y supongamos que $C(\beta X;E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico). Entonces $C(X;E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico).

<u>Demostración</u>: Sea $V\subset C(X;E)$ un disco bornívoro (resp. un disco que absorbe a los discos de Banach acotados). Por la nota anterior $V\cap C_{rc}(X;E)$ es un disco bornívoro (resp. un disco que absorbe a los discos de Banach acotados), y entonces, si $C(\beta X;E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico), de nuevo por la nota anterior, deducimos que $V\cap C_{rc}(X;E)$ es un entorno de cero en $C_{rc}(X;E)$, es decir, existe una seminorma continua p en E tal que

$$(*)\quad V\supset V\cap C_{rc}(X;E)\supset\{\phi\in C_{rc}(X;E)\ :\ p(\phi(x))<1\quad \forall x\in X\}.$$

Por 13.10. K(V) es un subconjunto (compacto) de X. Vamos a probar que

$$V\supset\{\ \phi\in C(X;E)\ :\ p(\phi(x))<1\quad \forall x\in K(V)\}$$

y así quedará probado que V es un entorno de cero en $C(X;E)$, y por tanto que este espacio es bornológico (resp. ultrabornológico). Sea $\phi\in C(X;E)$ tal que $p(\phi(x))<1$ para todo $x\in K(V)$; por ser X localmente compacto existe $f\in C(X)$ tal que

(i) f tiene soporte compacto.

(ii) f es idénticamente 1 en algún abierto que contiene a $K(V)$.

(iii) $sop(f)\subset\{x\in X\ :\ p(\phi(x))<1\}$

y (iv) $f(X)\subset[0,1]$

De (i) se deduce que $f(.)\phi(.)\in C_{rc}(X;E)$, y de (iii) y (iv) que existe $r<1$ tal que $p(f(x)\phi(x))<r$ para todo $x\in X$, esto es

$$p(\tfrac{1}{r}f(x)\phi(x))<1 \qquad \forall x\in X.$$

Pero esto, por (*), nos dice que $\frac{1}{r}f(.)\phi(.)\in V$. Por otra parte, por (ii), $\frac{1}{1-r}\left(\phi-f(.)\phi(.)\right)$ se anula en un entorno de $K(V)$, y así, por 13.7., llegamos a que $\frac{1}{1-r}(\phi-f(.)\phi(.))\in V$. Entonces, como V es un disco, podemos escribir

$$\phi=r\left(\frac{1}{r}f(.)\phi(.)\right)+(1-r)\frac{1}{1-r}\left(\phi(.)-f(.)\phi(.)\right)\in V.$$

<u>14.4. Nota:</u> Vamos a obtener ahora algunas consecuencias de las caracterizaciones de la sección anterior. Para esto haremos uso del siguiente resultado: "Sea E un e.l.c. y sea F un subespacio bornológico secuencialmente denso de E. Entonces si E tiene la propiedad estricta de Mackey, E es bornológico". Este resultado es sencillo de demostrar: Como indicamos al principio del capítulo probar que E es bornológico equivale a probar que E es infratonelado y semibornológico. Ahora bien, si F es infratonelado, por densidad E también lo es. Por otra parte, si τ es una forma lineal en E que transforma acotados en acotados entonces $\tau|_F$ es continua (en F), y por tanto admite una extensión continua $\tilde{\tau}: E \longrightarrow \mathbb{K}$. Para concluir que τ es continua en E basta probar que $\tau=\tilde{\tau}$. Dado $x\in E$, por ser F secuencialmente denso, existe una sucesión $(x_n)\subset F$ tal que $\lim_n x_n=x$, y por tanto

$$\tilde{\tau}(x)=\lim_n \tilde{\tau}(x_n)=\lim_n \tau(x_n);$$

además, como E tiene la propiedad estricta de Mackey existe algún disco cerrado y acotado $B\subset E$ tal que (x_n) converge a x en E_B, y entonces, de que τ transforma acotados en acotados, se deduce ([15] 28.3.(3)) que $\tau(x)=\lim_n \tau(x_n)$. Por tanto efectivamente $\tau=\tilde{\tau}$.

14.5. Teorema: Sea X hemicompacto y E $\mathcal{K}$-infratonelado y bornológico. Supongamos además que E tiene la propiedad estricta de Mackey. Entonces $C(X;E)$ es bornológico.

Demostración: Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema. Por 11.3. $C(X)$ es metrizable y por tanto bornológico, y así, del teorema 13.15. se deduce que $C(X)\otimes E$ es bornológico. Además, por 11.4. se tiene que $C(X;E)$ tiene la propiedad estricta de Mackey. Por tanto, por la nota anterior, para probar que $C(X;E)$ es bornológico basta probar que $C(X)\otimes E$ es secuencialmente denso en $C(X;E)$. Pero como $C(X;E)$ tiene la propiedad estricta de Mackey, probar que $C(X)\otimes E$ es secuencialmente denso en $C(X;E)$ es trivialmente equivalente a probar que para toda función $\phi\in C(X;E)$ existe una red acotada $(\phi_\gamma)_\gamma\subset C(X)\otimes E$ convergente a ϕ. Vamos a probar esto último: Sea $\phi\in C(X;E)$, sea (K_n) una sucesión creciente de subconjuntos compactos de X tal que si K es un subconjunto compacto de X entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $K\subset K_n$, y sea P la familia de las seminormas continuas en E. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea B_n la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $\phi(K_n)$. Por 6.8. para cada $p\in P$ existe $\phi_p^1\in(C(K_1)\otimes E)\cap C(K_1;B_1)$ tal que

$$p(\phi_p^1(t)-\phi(t))<1 \qquad \forall t\in K_1.$$

Tenemos así una red $(\phi_p^1)_p\subset C(K_1)\otimes E$ convergente a $\phi|_{K_1}$ tal que

$$\phi_p^1(K_1)\subset B_1 \qquad \forall p\in P.$$

Vamos a construir ahora una red adecuada en $C(K_2)\otimes E$ convergente a $\phi|_{K_2}$. Si $p\in P$ y $e\in\phi(K_2)$ definimos

$$U_e^p=\begin{cases}\{x\in\phi(K_2)\ :\ p(x-e)<1\} & \text{si}\quad e\in\phi(K_1)\\ \{x\in\phi(K_2)\ :\ p(x-e)<1\}\setminus\phi(K_1) & \text{si}\quad e\in\phi(K_2)\setminus\phi(K_1)\end{cases}$$

Es claro que $\{U_e^p\ :\ e\in\phi(K_2)\}$ es un recubrimiento abierto del compacto $\phi(K_2)$ y por tanto admite un subrecubrimiento finito $\{U^p_{e_i} : 1 \leq i \leq n\}$. Sea $A^p_i = \phi|^{-1}_{K_2}(U^p_{e_i})$ y sea $(f_i)^n_{i=1} \subset C(K_2)$ una partición continua de la unidad en K_2 subordinada a $(A^p_i)^n_{i=1}$. Si definimos $\phi^2_p = \sum_{i=1}^n f_i(.)e_i$, claramente se tiene:

$$p(\phi(t) - \phi^2_p(t)) < 1 \qquad \forall t \in K_2$$

y
$$\phi^2_p(K_2) \subset B_2;$$

pero además, por la elección de los U^p_e se tiene también

$$\phi^2_p(K_1) \subset B_1$$

Siguiendo este procedimiento es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos construir una red $(\phi^n_p)_p \subset C(K_n) \otimes E$ tal que

$$\text{(i)} \quad p(\phi^n_p(t) - \phi(t)) < 1 \qquad \forall t \in K_n \qquad \forall p \in P$$

y
$$\text{(ii)} \quad \phi^n_p(K_i) \subset B_i \qquad \forall p \in P \qquad \text{si} \quad n \geq i$$

Ya observamos al principio de la demostración de 13.14. que si K es un subconjunto compacto de X y B es un disco cerrado y acotado de E, dada $\phi \in C(K) \otimes E$ tal que $\phi(K) \subset B$ existe $\tilde{\phi} \in C(X) \otimes E$ extensión de ϕ tal que $\tilde{\phi}(X) \subset B$. Por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $p \in P$ existe $\tilde{\phi}^n_p \in C(X) \otimes E$ extensión de ϕ^n_p tal que

$$\text{(iii)} \quad \tilde{\phi}^n_p(X) \subset B_n.$$

Entonces, por la buena propiedad de la sucesión (K_n) y por (i) es inmediato que $(\tilde{\phi}^n_p)_{pn} \subset C(X) \otimes E$ es una red convergente a ϕ, y utilizando además (ii) y (iii) se concluye que es acotada.

14.6. Corolario: Sea K un espacio topológico compacto y sea E $\mathcal{K}$-infratonelado y bornológico. Supongamos además que E tiene la propiedad estricta de Mackey y que es casi-completo (por tanto ultraborno lógico). Entonces C(K;E) es ultrabornológico.

Demostración: Por el teorema anterior C(K;E) es bornológico. El resultado se sigue inmediatamente de que por ser E casi-completo el espacio C(K;E) es también casi-completo.

14.7. Observación: El teorema 14.1. nos proporciona una condición necesaria para que C(X;E) sea bornológico. Podemos preguntarnos si esta condición es suficiente. Por analogía a 5.11. y 6.4. también podemos preguntarnos si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

- C(X;E) es bornológico si y sólo si C(X) es bornológico y C(K;E) es bornológico para todo subconjunto compacto K de X.
- C(X;E) es bornológico si y sólo si C(X) es bornológico e $Im(\rho_K)$ es bornológico para todo subconjunto compacto K de X (como siempre ρ_K es la aplicación restricción de C(X;E) en C(K;E)).

Sin embargo la respuesta a todas estas preguntas es negativa: Govaerts en [10], suponiendo que existen cardinales medibles, ha dado un ejemplo de un espacio topológico Y y de un espacio topológico X seudofinito tales que C(Y) y C(X) son bornológicos y que sin embargo C(X;C(Y)) no lo es. Observemos que por 8.8. C(Y) es $\mathcal{K}$-infratonelado, y por tanto, por 13.15, $C(X)\otimes C(Y)$ es bornológico. Observemos también que como los subconjuntos compactos de X son finitos, los espacio del tipo C(K;C(Y)) o $Im(\rho_K)$ son de la forma $C(Y)^n$ con $n\in \mathbb{N}$, y por tanto son bornológicos.

Los resultados de esta sección unidos a otros ya conocidos y a los de la sección 8 en que estudiamos los espacios $\mathcal{K}$-infratonelados permiten obtener algunas consecuencias inmediatas. A modo de ejemplo damos a continuación dos de estas consecuencias (14.8. y 14.11.):

<u>14.8. Corolario</u>: Si X es hemicompacto y E es un (DF)-espacio bornológico (e.d. un límite inductivo de una sucesión creciente de espacios normados) que tiene la propiedad estricta de Mackey entonces C(X;E) es bornológico.

<u>Demostración</u>: Se deduce inmediatamente de 14.5. y 8.3.

En [20] Mujica probó el siguiente resultado:

<u>14.9. Teorema [20]</u>: Sea K un espacio topológico compacto y E límite inductivo de una sucesión creciente (E_n) de espacios de Banach. Supongamos que este límite inductivo es compactamente regular (e.d. todo subconjunto compacto de E está contenido y es compacto en algún E_n). Entonces C(K;E) es límite inductivo de la sucesión $(C(K;E_n))$.

Schmets en [30] observó que el resultado de Mujica es válido para espacios localmente convexos en general y como corolario da el siguiente

<u>14.10. Teorema [30]</u>: Sea K un espacio topológico compacto y E límite inductivo compactamente regular de una sucesión creciente (E_n) de espacios metrizables (resp. Fréchet). Entonces C(K;E) es bornológico (resp. ultrabornológico)

Nosotros de este teorema y de 14.3. deducimos inmediatamente la siguiente mejora:

<u>14.11. Corolario</u>: Sea X localmente compacto y repleto y E límite inductivo compactamente regular de una sucesión creciente (E_n) de espacios metrizables (resp. Fréchet). Entonces $C(X;E)$ es bornológico (resp. ultrabornológico).

BIBLIOGRAFIA

[1] BECKENSTEIN, E., NARICI,L. y SUFFEL,C., Topological Algebras, Notas de Matemática 60, North-Holland, Amsterdam 1977.

[2] BIERSTEDT, K.-D., Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt I, J. reine angew. Math. 259 (1973), 186-210.

[3] BIERSTEDT, K.-D., The approximation property For weighted function spaces, Bonner Math. Schriften 81 (1975), 3-25.

[4] DE LA FUENTE ANTUÑEZ, A., Algunos resultados sobre aproximación de Funciones vectoriales tipo teorema Weierstrass-Stone, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1973.

[5] DE WILDE, M., GARNIR,H.G., SCHMETS, J.,Analyse Fonctionelle I, Basel 1968.

[6] DE WILDE, M. y SCHMETS, J., Caractérisation des spaces C(X) ultrabornologiques, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 40 (1971), 119--121.

[7] DIESTEL,J. y UHL,J.J., Vector Measures, AMS Mathematical Surveys 1977.

[8] DUGUNDJI, J., Topology, Allyn and Bacon, Boston 1966.

[9] GILLMAN,L. Y JERISON, M., Rings of continuous Functions, van Nostrand, New York 1960.

[10] GOVAERTS, W., Bornological spaces of vector-valued conti-- nuous Functions, Bull.Soc. Roy. Sc. Liége 48(1979),413-416.

[11] GROTHENDIECK, A., Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3 (1954),57-123.

[12] HOLLSTEIN,R., Über die Tonneliertheit von lokalkonvexen Tensor-produkten, Manuscripta Math. 22, Fasc. 1 (1977),7-12.

[13] HOLLSTEIN, R., ε-Tensorprodukte von Homomorphismen, Habilitationss chrift, Paderborn 1978.

[14] HOLLSTEIN, R., Permanence properties of C(X,E)(Por aparecer)

[15] KÖTHE, G., Topological Vector Spaces I, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer-Verlag 1969.

[16] KÖTHE,G., Topological Vector Spaces II, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer-Verlag 1979.

[17] MARQUINA,A. y SANZ SERNA, J.M., Barrelledness conditions on $c_o(E)$, Arch. Math. 31(1978), 589-596.

[18] MARQUINA, A., Concerning $c_o(E)$ bornological. (Por aparecer)

[19] MENDOZA CASAS, J., Algunas propiedades de $C_c(X,E)$, Pub. Mat. UAB 21, Actas de las VII JMHL (1980), 195-198.

[20] MUJICA,J., Representation of analytic Functionals by vector measures, Vector space measures and applications, Proc. Dublin 1977, Lecture Notes in Math. 645 (1978), 147-161.

[21] MUJICA,J., Spaces of continuous Functions with values in an inductive limit (Por aparecer)

[22] NACHBIN, L., Topological vector spaces of continuous Func-- tions, Proc. Nat. Acad. USA 40 (1954), 471-474.

[23] NEVEU,J., Bases mathematiques du calcul des probabilités, Masson Cie. 1970.

[24] PIETSCH, A., Nuclear Locally Convex Spaces, Berlin-Heidelberg -New York, Springer-Verlag 1972.

[25] PROLLA,J.B., Approximation of Vector Valued Funsctions, No-- tas de Matemática 61, North-Holland, Amsterdam 1977.

[26] PROLLA, J.B., The approximation property for Nachbin spaces, Approximation Theory and Functional Analysis. J.B.Prolla (ed.), North-Holland Publishing Company 1979.

[27] SCHMETS,J., Espaces de Fonctions continues, Lecture Notes in Mathematics 519, Springer-Verlag 1976.

[28] SHMETS,J., Spaces of continuous Functions. Proc. of the Pa- derborner 1976 Mathematiktagung, Notas de Matemática, North- -Holland 1977.

[29] SCHMETS,J., Bornological and ultrabornological C(X;E) spaces, Manuscripta Math. 21 (1977), 117-133.

[30] SCHMETS, J., Spaces of vector-valued continuous Functions, Vector space measures and applications, Proc.Dublin 1977,

Lectures Notes in Mathematics 644(1978),368-377.

[31] SCHMETS, J., Survey on some locally convex properties of the spaces of continuous functions, Bull. Soc. Math. de Belgique XXX (1978), 15-26.

[32] SCHMETS, J., An example of the barrelled space associated to C(X;E), Proc. Rio de Janeiro 1978, Lecture Notes in Mathematics 843 (1981), 561-571 .

[33] SHIROTA,T., On locally convex vector spaces of continuous Functions, Proc. Japan Acad. 30 (1954), 294-298 .

[34] SHUCHAT, A.H., Integral representation theorems in topological vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 373-397.

[35] SWONG, K., A representation theory of continuous linear maps, Math. Ann. 155 (1964), 270-291.

[36] VIDOSSICH, G., Characterizing Separability of Function Spaces. Inventiones Math. 10 (1970), 205-208.

[37] WARNER. S., The topology of compact convergence on continuous Function spaces. Duke Math. J. 25 (1958), 265-282.