

Cartera réplica de mínima varianza relativa



Alumno: Antonio Aita

Tutora: Begoña Vitoriano Villanueva

RESUMEN

En la gestión de activos muy frecuentemente se requiere replicar el perfil de rendimiento de un índice bursátil sin tener la posibilidad de invertir en todos los componentes del mismo ni en las mismas proporciones.

El producto financiero más frecuentemente utilizado en estos casos es una cartera réplica formada por un subconjunto de componentes del índice de referencia.

La bondad de réplica se suele medir a posteriori a través del indicador de Tracking Error.

A priori, o sea en fase de construcción de la cartera réplica, ese mismo indicador es frecuentemente usado como función objetivo de modelos de optimización.

En este trabajo en primer lugar se ilustran los modelos de optimización más comúnmente utilizados para la construcción de carteras réplica (modelos de media-varianzas clásicos) para luego tratar los más interesantes desde el punto de vista práctico que incluyen limitaciones sobre el número de componentes (K) y sobre los porcentajes máximos y mínimos de inversión por título.

Analizamos con detalle un modelo con restricción sobre el número de componentes de la cartera y límites de inversión ya que este representa el caso más interesante y complejo desde el punto de vista operativo.

Este modelo ha sido estudiado por Chang, Meade, Beasley y Sharaiha (Chang et al. (2000)) que han propuesto una solución del mismo con algoritmos heurísticos.

Por lo contrario en este trabajo la resolución del modelo se realiza a través de GAMS (General Algebraic Modelling System) que proporciona una solución óptima.

Este trabajo pretende validar los modelos de optimización más usados comúnmente en la práctica utilizando como criterio la desviación entre Tracking Error ex ante (calculado en fase de optimización de cartera) respecto al valor a posteriori (calculado sobre la ventana de test).

Con este fin se construye una cartera que replique el Ibex 35 compuesta por un subconjunto de los 35 componentes y se analizan los resultados validando el modelo propuesto sobre ventanas temporales históricas.

ABSTRACT

Tracking an index performance is a common issue within the asset management industry. It often requires replicating the performance profile of a stock index while not investing in all index members nor in the same proportions.

The financial product most frequently used in these cases is a tracking portfolio composed by a subset of benchmark constituents.

The best-fit performance is usually measured on an historical basis via the Tracking Error indicator.

While constructing a tracking portfolio the same indicator (Tracking Error) is often used as the objective function for model optimization.

In this paper we illustrate the most widely used optimization models for tracking portfolio purposes. They range from the standard mean-variance model to some most interesting and complex models that include constraints on the number of assets (K) in portfolio and restrictions on the maximum and minimum investment.

We analyze in detail a model with restrictions on the number of portfolio components since this represents the most interesting case from an operational point of view.

This model has been studied by Chang, Meade, Beasley and Sharaiha (Chang et al. (2000)) who proposed a solution using heuristic methods.

On the contrary in this paper the solution is attained using GAMS (General Algebraic Modelling System) which provides optimal portfolio weights.

This work aims to validate the most common tracking portfolio optimization models using the difference between ex ante tracking error (output of the portfolio optimization process) and the realized value calculated in the historical test window.

In order to do this we have set up a tracking portfolio benchmarking the Ibex 35, composed by a subset of the index constituents, and finally we have presented the test results calculated on a historical dataset.

Índice

1	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA: LA GESTIÓN PASIVA.....	5
2	OBJETIVOS DEL TRABAJO.....	8
3	MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA PARA CARTERAS RÉPLICA.....	8
3.1	El modelo de media-varianza y réplica parcial.....	8
3.2	Modelo media-varianza con universo de réplica definido.....	10
3.3	Modelo media-varianza con límites en el número de componentes.....	12
4	CARTERAS RÉPLICAS OPTIMIZADAS: UN CASO PRÁCTICO.....	14
4.1	Cartera réplica del Ibex 35.....	14
4.2	Modelo media-varianza con límites en el número de componentes.....	16
4.3	Test 1: variaciones de K.....	20
4.3.1	Descripción del experimento.....	20
4.3.2	Análisis de los resultados.....	21
4.3.3	Tiempos de computación.....	28
4.4	Test 2: variaciones de la ventana de calibración.....	30
4.4.1	Descripción del experimento.....	30
4.4.2	Análisis de los resultados.....	30
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	37
6	BIBLIOGRAFIA.....	39
7	ANEXOS.....	40

1 Descripción del problema: La gestión pasiva

El mundo de la gestión de activos a partir de los años '90 registró un gran incremento en el número de fondos de gestión pasiva.

En una cartera de gestión pasiva (o de réplica) el gestor busca replicar el perfil de rendimiento de un índice de referencia que se suele denominar benchmark.

Hasta la última década del siglo pasado solo inversores institucionales usaban carteras réplica de índices, su popularidad se debió al hecho de tener un enfoque completamente distinto respecto a las tradicionales técnicas de inversión que ven al gestor intentando conseguir un rendimiento superior a sus índices de referencia (benchmark).

La hipótesis subyacente a la gestión pasiva reside en el concepto de eficiencia de mercado; básicamente según la hipótesis de eficiencia nadie a largo plazo es capaz de generar rendimientos superiores a los del mercado basándose exclusivamente en información públicamente disponible o información pasada y nadie tiene acceso a información privilegiada.

Varios trabajos empíricos, entre los de Fama (Fama (1969)), han respaldado la hipótesis de eficiencia de mercado por lo menos en su versión débil y semifuerte; en la primera, se asume que los precios de mercado reflejan toda la información pasada y en la segunda que los precios incorporan toda la información pasada y la disponible en mercado. Tales estudios demostraban que a largo plazo un gestor no consigue sistemáticamente obtener rendimientos mayores que su índice de referencia.

Uno de los productos financieros más conocidos de gestión pasiva es el denominado ETF (Exchange Traded Fund). Este tipo de instrumentos da la posibilidad a clientes minoristas de construir fácilmente carteras diversificadas y poseen la característica de ser instrumentos negociados al par de las acciones.

Un inversor minorista si no fuera por estos instrumentos muy difícilmente podría invertir en un índice bursátil y menos en varios de ellos, para conseguirlo tendría que comprar en sus proporciones todos los componentes del índice o comprar un derivado financiero el cual requiere tener un capital mínimo adecuado a invertir.

Para los inversores minoristas entonces las ventajas de un fondo de gestión pasiva son sustancialmente las siguientes:

- Bajas comisiones de gestión
- No tener su rentabilidad ligada a las decisiones del gestor sobre los títulos seleccionados dentro del índice de referencia.

Además un ETF tiene como ventaja adicional que cotiza al par de una acción y por tanto se puede ágilmente vender o comprar participaciones correspondientes a este tipo de fondos.

La construcción de un fondo de gestión pasiva que réplica un índice bursátil se puede conseguir básicamente por 2 métodos: réplica total o réplica parcial.

- El método de “réplica total” consiste en construir una cartera compuesta por los mismos componentes y en las mismas proporciones que en el índice de referencia.

Este método nos permite esperar una réplica perfecta pero presenta 3 grandes inconvenientes:

1. Importantes costes de transacción en la fase de construcción de la cartera.
2. Rebalances masivos cuando el índice de referencia registra salida y entrada de componentes.
3. Costes asociados a la escasa liquidez de un activo en el índice.

Respecto a ellas, la primera supone un coste y entonces un menor capital invertido.

En cuanto a los rebalances de cartera debidos a modificaciones del índice de referencia hay que hacer una aclaración acerca de las entradas y salidas de componentes del índice.

Este trabajo más adelante va a describir un caso práctico de cartera réplica del Ibex 35 por eso ahora lo usaremos como ejemplo.

Los títulos componentes de los índices bursátiles en general deben respetar unos criterios para seguir formando parte de ellos.

Si un título forma parte hoy del índice no significa que lo estará en el futuro o que lo haya estado en el pasado.

Los componentes de los índices bursátiles representan un conjunto dinámico no estático.

El Ibex 35 en particular suele revisarse dos veces al año, normalmente en Junio y Diciembre, haciéndose efectivas las modificaciones los primeros días hábiles de Julio y Enero de cada año. No obstante, pueden celebrarse reuniones extraordinarias ante circunstancias que así lo requieran para modificar la composición del índice.

Para que un valor forme parte del IBEX 35, requiere que:

- Su capitalización media sea superior al 0.30% de la del índice en el período analizado.
- Que haya sido contratado por lo menos en la tercera parte de las sesiones de ese período.

No obstante, aun no cumpliéndose dichas condiciones, la empresa también podría ser elegida para entrar en el índice si estuviese entre los 20 valores con mayor capitalización.

Respecto al punto 3, se entiende que un título es “ilíquido” cuando una orden de compra o venta sobre el activo impacta significativamente su precio de mercado. Esta situación se da con mayor frecuencia cuando se está intentando realizar compra/ventas sobre el título por un importe de acciones muy superior al número medio de títulos operados diariamente. De esta forma, es fácil imaginar que si queremos realizar una compra sobre un título por el triple o el cuádruple del importe medio diario, compraremos a precios crecientes, mientras que al revés, si queremos vender, lo haremos a precios decrecientes. Hablamos de precios y no de precio porque para importes considerables es probable que tengamos que acudir a varios operadores de mercado, cuyos precios serán crecientes o decrecientes según el sentido de la operación

(compra o venta).

- El método de réplica parcial consiste en invertir en un subconjunto de títulos de los que están en el benchmark intentando replicar el rendimiento del índice.

Este método conlleva:

1. Menores costes de transacción
2. Rebalanceos más ágiles
3. La posibilidad de excluir títulos ilíquidos

Con la noción de réplica parcial entra en juego una medida fundamental para evaluar la bondad de réplica del índice, el indicador de Tracking Error.

Este indicador mide volatilidad de la diferencia de rendimiento de la cartera réplica frente al índice de referencia (benchmark). El cálculo del mismo se suele hacer sobre datos históricos para cuantificar en qué medida la cartera réplica ha seguido las variaciones del benchmark en su evolución. La minimización del Tracking Error es el principal objetivo cuando se construye una cartera de réplica. En este caso, se pretende extrapolar la información histórica sobre los precios de activos y lo que se busca es minimizar la desviación de la diferencia de los rendimientos entre la cartera réplica y el benchmark. Esto se traduce en:

(1)

$$\text{Min}(\text{Var}(P-B))$$

Donde:

P: es el rendimiento de la cartera réplica a futuro

B: es el rendimiento del índice de referencia (benchmark) a futuro

Los rendimientos futuros de cartera y benchmark son procesos estocásticos cuya modelización se realiza a través de los modelos que se presentarán más adelante.

2 Objetivos del trabajo

Centrando nuestra atención sobre el método de réplica parcial (modelo con restricción del número de

componentes en la cartera réplica) demostraremos que existen formas eficientes y rápidas de resolver ese tipo de problema.

Varios autores, entre ellos Chang, Meade, Beasley y Sharaiha (Chang et al. (2000)) abordaron esta cuestión a través de métodos heurísticos, mientras nuestro enfoque se centra en encontrar una solución óptima del problema, y no una sub-óptima como en el caso heurístico.

El trabajo se desarrolla en 3 partes:

1. Describir los principales modelos que se usan en la industria financiera para la construcción de carteras réplica.
2. Resolución de los modelos propuestos considerando las restricciones requeridas para un caso muy generalizado como es la réplica del IBEX 35.
3. Validación del modelo propuesto mediante un análisis histórico (back testing) sobre los resultados arrojados por el modelo.

Para la validación, se medirá la varianza de las diferencias entre los rendimientos de la cartera réplica y del índice de referencia (Tracking Error), calculando la sensibilidad de este indicador al número de componentes en la cartera réplica y evidenciando los eventuales puntos de mejora del modelo.

3 Modelos de programación matemática para carteras réplica

3.1 El modelo de media-varianza y réplica parcial

El modelo de media-varianza establece un marco de análisis para determinar los pesos de cada acción que forma parte de la cartera réplica.

La determinación de sus proporciones es un problema clásico de programación cuadrática convexa, el modelo minimiza la volatilidad de la cartera para un nivel de rendimiento fijado, que es el rendimiento esperado del índice de referencia.

Conjuntos e Índices:

L : número de títulos del índice de referencia

i, j : títulos

Parámetros:

$\sigma_{i,j}$: covarianza entre los rendimientos de los títulos i y j

r_i : rendimiento esperado del título i

wb_i : peso en el índice de referencia del título i , se asume que se da $\sum_{i=1}^L wb_i = 1$

La formulación del modelo presupone que la suma de las proporciones de inversión de los títulos constituyentes del índice de referencia sea 1, siendo así una condición de los datos y no de las variables (no es una restricción del modelo).

Variables:

wp_i : peso en la cartera réplica del título i

Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (wp_i - wb_i)(wp_j - wb_j)\sigma_{i,j} \tag{2}$$

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^L wp_i = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^L (wp_i - wb_i)r_i = 0 \tag{4}$$

$$0 \leq wp_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, L \tag{5}$$

Si nos detenemos a examinar la función objetivo del modelo (Ec.2) no damos cuenta de que es exactamente la expresión del Tracking Error y el modelo nos da como resultado la composición de la cartera réplica que minimizará la varianza de la diferencia entre el rendimiento de la cartera y el benchmark.

Ec. (3) asegura que la suma los valores de los activos en cartera réplica es igual al patrimonio a invertir.

Ec. (4) hace que se elijan activos en función de su rendimiento esperado de forma que la cartera réplica tenga el mismo rendimiento que el benchmark.

Ec. (5) impide invertir una proporción negativa del patrimonio así como más de la totalidad del mismo en cualquiera de los activos, siendo L el número de títulos del índice de referencia.

Una de las grandes ventajas de esta formulación del problema, es que hay diferentes algoritmos de optimización para resolverlo de forma muy eficiente dado que es de tipo cuadrático convexo.

El modelo planteado tiene una solución trivial $w p_i = w b_i$, puesto que se permite replicar el índice con la totalidad de los componentes.

Por esa razón se introducen las siguientes restricciones:

1. Definir el subgrupo de componentes del benchmark que formará parte de la cartera réplica
2. Incorporar restricciones para limitar el número de activos a incluir en cartera. El problema dejaría de ser cuadrático y pasaría a ser cuadrático entero mixto.
3. Añadir restricciones adicionales respecto al porcentaje mínimo y máximo de cada título en la cartera réplica.

3.2 Modelo media-varianza con universo de réplica definido

Para no obtener una solución trivial como en el caso anterior definimos los títulos que formarán parte de la cartera réplica e incorporaremos restricciones en los porcentajes de inversión de esta.

Es usual imponer limitaciones sobre el porcentaje mínimo de un título en cartera. Esto tiene su justificación en el hecho de que hay costes fijos de contratación y el importe de las comisiones puede representar un porcentaje muy elevado del capital disponible para la creación de la cartera.

Por otro lado también se suelen imponer límites a porcentajes máximos de inversión para asegurar un cierto grado de diversificación.

Así las restricciones de tipo

$$0 \leq w p_i \leq 1 \tag{6}$$

se sustituyen por

$$\beta \leq w p_i \leq \alpha \tag{7}$$

siendo

(8)

$$0 < \beta < \alpha$$

Conjuntos e Índices:

L : número de títulos del índice de referencia

i, j : títulos

$J \subseteq \{1, \dots, L\}$: subgrupo de títulos del índice de referencia en la cartera réplica

Parámetros:

$\sigma_{i,j}$: covarianza entre los rendimientos de los títulos i y j

r_i : rendimiento esperado del título i

wb_i : peso en el índice de referencia del título i , se asume que se cumple la condición

$$\sum_{i=1}^L wb_i = 1$$

α : porcentaje máximo de inversión en un título

β : porcentaje mínimo de inversión en un título

Variables:

wp_i : peso en la cartera réplica del título i

Función objetivo:

(9)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (wp_i - wb_i)(wp_j - wb_j)\sigma_{i,j}$$

Restricciones:

(10)

$$\sum_{i=1}^L wp_i = 1$$

(11)

$$\sum_{i=1}^L (wp_i - wb_i)r_i = 0$$

(12)

$$\beta \leq wp_i \leq \alpha \quad i \in J$$

$$wp_i = 0 \quad i \notin J$$

Ec. (9) minimiza el Tracking Error asociado a la cartera réplica frente al benchmark.

Ec. (10) asegura que la suma los valores de los activos en cartera réplica es igual al patrimonio a invertir.

Ec. (11) hace que se elijan activos en función de su rendimiento esperado de forma que la cartera réplica tenga el mismo rendimiento que el benchmark.

Ec. (12) impide invertir una proporción del patrimonio menor que β y mayor que α para los títulos en el subgrupo J y nos asegura que se le asigna un peso de cero a los activos parte del índice de referencia pero no incluidos en J.

3.3 Modelo media-varianza con límites en el número de componentes

El modelo anterior presupone el conjunto de títulos que formarán parte de la cartera. Pero el modelo más general y apropiado sería uno que seleccione los títulos que incluir en la cartera, imponiendo un límite al número máximo de títulos a incluir en ella.

Así, la cartera réplica va a estar compuesta por K títulos entre los L componentes del índice de referencia pero no elegidos previamente como antes.

Al modelo básico planteado se le añade una variable de decisión binaria que valdrá 0 si el título no es incluido en la cartera o 1 si es incluido.

Conjuntos e Índices:

L : número de títulos del índice de referencia

i,j : títulos

Parámetros:

K : número de títulos que van a formar la cartera réplica, siendo $K < L$

$\sigma_{i,j}$: covarianza entre los rendimientos de los títulos i y j

r_i : rendimiento esperado del título i

wb_i : peso en el índice de referencia del título i , se asume que se cumple la condición

$$\sum_{i=1}^L wb_i = 1$$

Variables:

wp_i : peso en la cartera réplica del título i

$z_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$: variable binaria que toma valor 1 si el título se incluye en la cartera

réplica y 0 en otro caso

Función objetivo:

(13)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (wp_i - wb_i)(wp_j - wb_j)\sigma_{i,j}$$

Restricciones:

(14)

$$\sum_{i=1}^L wp_i = 1$$

(15)

$$\sum_{i=1}^L (wp_i - wb_i)r_i = 0$$

(16)

$$\sum_{i=1}^L z_i = K$$

(17)

$$0 \leq wp_i \leq z_i \quad i = 1, \dots, L$$

Ec. (13) minimiza el Tracking Error asociado a la cartera réplica frente al benchmark.

Ec. (14) asegura que la suma los valores de los activos en cartera réplica es igual al patrimonio a invertir.

Ec. (15) hace que se elijan activos en función de su rendimiento esperado de forma que la cartera réplica tenga el mismo rendimiento esperado que el índice de referencia.

Ec. (16) nos asegura que la cartera réplica estará formada por K activos elegidos entre los que están en el índice de referencia.

Ec. (17) impide invertir una proporción negativa del patrimonio así como más de la totalidad del mismo en cualquiera de los activos siendo L el número de títulos del índice de referencia.

A este modelo se le puede añadir una restricción sobre los pesos mínimos y máximo de títulos en la cartera réplica, como se hizo en el modelo anterior. Basta con sustituir las condiciones

(18)

$$0 \leq wp_i \leq z_i$$

por

(19)

$$\beta z_i \leq wp_i \leq \alpha z_i$$

Sustituyendo Ec.(18) por Ec.(19) el algoritmo no puede asignar una proporción del patrimonio menor que β y mayor que α para los K títulos parte de la cartera replica.

4 Carteras réplicas optimizadas: un caso práctico

4.1 Cartera réplica del Ibex 35

Hemos elegido el índice bursátil Ibex 35 para construir una cartera réplica y aplicar el modelo de optimización con límites de inversión y número de componentes.

El modelo obliga a definir algunos parámetros, en particular tenemos que indicar con cuántas componentes (K) del índice queremos construir nuestra cartera y además cuales son los límites de inversión máximos y mínimos (α , β) respectivamente.

Otra posible elección que puede resultar muy influyente en relación a la efectividad del modelo es la

metodología de cálculo de las varianzas-covarianzas. La principal hipótesis de este tipo de modelos reside en suponer que las varianzas y las correlaciones futuras entre activos serán las mismas que las que se han verificado en el pasado.

En este trabajo calcularemos la matriz de varianza-covarianza a imputar en el modelo sobre observaciones históricas, cada una de ellas pesara lo mismo independientemente del instante temporal en el que ocurrió.

Con esta metodología de cálculo nos arriesgamos a utilizar volatilidades y correlaciones de activos no representativas de las futuras condiciones de mercado. El impacto de este tipo de riesgo puede ser muy relevante, sobre todo en un cambio de fase de mercado (por ejemplo crisis sistémicas). Las volatilidades de activos y correlaciones pueden variar mucho en fases de mercado bajista como ha quedado demostrado por diferentes estudios empíricos, uno de ellos el de Schwert and Seguin (1991). Las correlaciones en tales fases de mercado suelen subir paulatinamente acompañadas por una subida de volatilidades. Ambos hechos incrementan el riesgo de una cartera debido al incremento de volatilidades de los activos y a la disminución del efecto diversificación.

Volviendo al modelo de optimización de cartera, si optimizamos sobre la base de volatilidades y correlaciones registradas en fases de mercados estables y luego hay un shock de mercado obtendremos un resultado muy diferente al previsto.

Por otro lado estimar correctamente los rendimientos esperados de los activos en el benchmark es tan crítico como la matriz de varianzas/covarianzas.

En todos los modelos de optimización anteriores hay una restricción del tipo

(20)

$$\sum_{i=1}^L (wp_i - wb_i)r_i = 0$$

donde

r_i : rendimiento esperado del título i

wb_i : peso en el índice de referencia del título i, se asume que se cumple la condición

$$\sum_{i=1}^L wb_i = 1$$

wp_i : peso en la cartera réplica del título i

Una de las posibilidades de cálculo de los parámetros r_i es la histórica o sea asumir que en futuro un

activo tenga la misma rentabilidad que ha registrado en pasado.

De esta forma implícitamente se penalizaran los activos que han tenido en el pasado rendimientos negativos independientemente de si ha sido por razones transitorias o estructurales del título.

De todas formas resulta mucho más difícil estimar rendimientos esperados que sus correspondientes volatilidades o correlaciones ya que los precios de activos en mercados eficientes siguen un paseo aleatorio (random walk) como ya demostrado en muchos trabajos entre ellos el de Fama (1965).

En nuestro trabajo vamos a estimar la rentabilidad esperada y la matriz de varianzas-covarianzas con las observaciones históricas de rendimientos diarios desde el **25/06/2013** hasta **31/12/2013** para la calibración del modelo, y se validará el comportamiento del modelo con los datos de los 6 meses siguientes (desde el **01/01/2014** hasta **23/06/2014**). La fuente de los datos de calibración el modelo así como de validación es Bloomberg. En el caso de series históricas con alguna observación missing se ha reemplazado el valor de título en el día “missing” por el precio del día siguiente. La otra alternativa hubiera sido eliminar el día en cuestión de la ventana de calibración o validación pero de esta forma se hubiera perdido una cantidad considerable de datos en relación a todos los demás activos.

4.2 Modelo media-varianza con límites en el número de componentes

El modelo seleccionado es el de media-varianza con límites en el número de componentes con porcentajes mínimos y máximos de inversión:

Conjuntos e Índices:

L : número de títulos del índice de referencia

i, j : títulos

Parámetros:

K : número de títulos que van a formar la cartera réplica, siendo $K < L$

$\sigma_{i,j}$: covarianza entre los rendimientos de los títulos i y j

r_i : rendimiento esperado del título i

wb_i : peso en el índice de referencia del título i , se asume que se da la condición

$$\sum_{i=1}^L wb_i = 1$$

Variables:

wp_i : peso en la cartera réplica del título i

z_i : variable binaria que toma valor 1 si el título se incluye en la cartera réplica y 0 en otro

caso

Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (wp_i - wb_i)(wp_j - wb_j)\sigma_{i,j} \quad (21)$$

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^L wp_i = 1 \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^L (wp_i - wb_i)r_i = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^L z_i = K \quad (24)$$

$$\beta z_i \leq wp_i \leq \alpha z_i \quad i = 1, \dots, L \quad (25)$$

$$\beta z_i \leq wp_i \leq \alpha z_i \quad i = 1, \dots, L$$

Ec. (21) minimiza el Tracking Error asociado a la cartera réplica frente al benchmark.

Ec. (22) asegura que la suma los valores de los activos en cartera réplica es igual al patrimonio a invertir.

Ec. (23) hace que se elijan activos en función de su rendimiento esperado de forma que la cartera réplica tenga el mismo rendimiento esperado que el índice de referencia.

Ec. (24) nos asegura que la cartera réplica estará formada por K activos elegidos entre los que están en el índice de referencia.

Ec. (25) asegura que no se asigne una proporción del patrimonio menor que β y mayor que α para los K títulos parte de la cartera replica.

Como ya hemos adelantado hay varias fuentes de incertidumbre ya en la fase de estimación de los parámetros de entrada del modelo y eso puede alejarnos de los resultados deseados.

Para lo que es la fase de validación del modelo vamos a efectuar diferentes pruebas con el objetivo de medir su eficacia y su sensibilidad a diferentes factores.

Las pruebas que vamos a realizar son básicamente dos

1. Emplear diferentes límites de componentes de cartera K
2. Ampliar y reducir las ventanas de calibración del modelo

Se han tomado en cuenta ventanas temporales para calibrar y validar el modelo de 6 meses. Esta decisión intenta alcanzar un justo compromiso entre una ventana de calibración muy larga y entonces poco reactiva a variaciones de mercado y una muy corta que al revés no sería muy representativa del comportamiento a medio plazo de los activos.

La medida que utilizaremos para evaluar el modelo será el Tracking Error (TE) realizado sobre la muestra de validación. La muestra de validación abarca observaciones de rendimientos diarios del Ibex35 y sus constituyentes desde el **01/01/2014** hasta **23/06/2014**.

Para medir la desviación típica de los rendimientos de la cartera frente al benchmark debemos antes de todo construir la serie de precios de la cartera réplica PC_i que representará el valor de la cartera réplica en el instante i ; lo mismo vale para la serie del benchmark siendo PB_i la observación en el instante i del Ibex35 en nuestro caso. La fecha $i=0$ es el **01/01/2014** y $i=128$ es el **23/06/2014**.

Para el cálculo de TE necesitaremos los rendimientos de las dos series en cada instante i , y los calcularemos según la ley de composición continua de la forma:

(26)

$$P_i = \text{Log}(PC_i / PC_{i-1})$$

(27)

$$B_i = \text{Log}(PB_i / PB_{i-1})$$

donde:

P_i : rendimiento de la cartera réplica en el instante i

B_i : rendimiento del benchmark en el instante i

Una vez calculados los rendimientos podremos calcular la medida de TE como

(28)

$$TE = \sigma(P - B)$$

donde:

$(P-B)$ es la serie de rendimientos relativos entre $i=0$ (01/01/2014) y $i=128$ (23/06/2014)

El TE realizado se comparara con el valor ex- ante estimado. Nuestro modelo resultara ser más eficaz cuanto más similares sean los dos valores de TE.

Las dimensiones del problema arriba planteado son:

Tabla 0: Dimensiones del problema de optimización

MODEL STATISTICS	
BLOCKS OF EQUATIONS	6
SINGLE EQUATIONS	74
BLOCKS OF VARIABLES	4
SINGLE VARIABLES	72
NON ZERO ELEMENTS	282
NON LINEAR N-Z	35
DISCRETE VARIABLES	35

Haciendo referencia a la *Tabla 0* vemos que hay 6 bloques de ecuaciones genéricas de las cuales una es la Ec.21 y las otras son respectivamente Ec.22, 23, 24, 25.

Los bloques arriba mencionados se traducen en la fase de ejecución del algoritmo de optimización en 74 restricciones reales; 70 de ellas previenen de Ec.25 mientras una cada una de Ec.21, 22, 23,24.

Además hay 72 variables de las cuales 35 discretas z_i y 37 continuas wP_i .

La herramienta usada para la resolución del modelo planteado es GAMS (General Algebraic Modelling System) en su versión 24.2.

La rutina de optimización utilizada para la resolución de ese problema en GAMS es MIQCP que a su vez utilizada el solver CPLEX.

Este solver permite tratar problemas de programación entera mixta que contienen variables binarias u enteras.

Se ha usado la rutina MIQCP en lugar de MINLP (que resuelve problemas de minimización no lineal entera) dado que sabemos de antemano que el problema contiene una función objetivo cuadrática convexa.

Para alimentar el proceso de optimización se ha usado Matlab (version 2007b). Este ultimo cubre la necesidad de elaborar los datos de precio de los títulos del Ibex35 para calcular la matriz de varianzas/covarianzas, los rendimientos esperados y recuperar los resultados de la optimización (pesos de cartera réplica y TE estimado) para su validación.

La solución integrada permite cubrir ágilmente todo el proceso de elaboración de los datos brutos, optimización y tratamiento del output representando un ejemplo muy concreto respecto a cómo se podría

implementar los modelos aquí descritos en una empresa.

4.3 Test 1: variaciones de K

4.3.1 Descripción del experimento

El test de esta sección consiste en utilizar el modelo antes presentado variando el número de componentes de la cartera réplica (K).

Se han utilizado como pesos de los títulos en el benchmark los del **31/12/2013** y para calcular los datos de rendimientos esperados y covarianzas se usan datos de rendimientos diarios calculados desde **25/06/2013** hasta **31/12/2013**.

El test se realizara teniendo en cuenta varios valores de K. Hemos elegido el conjunto de valores que tomara como $K \in \{15, 20, 25\}$.

La restricción del modelo relativa al número de componentes es de igualdad (Ec. (24)) en este test mostraremos también resultados para el caso de un K con cota superior 25 o sea dejamos libre el algoritmo de elegir el número de componentes hasta un máximo de 25.

Para definir los valores de inversión máximos y mínimos, lo hemos hecho en función del valor máximo y mínimo de K que vamos a considerar.

$$\alpha = 0.1$$

$$\beta = 0.02$$

Calculados como:

(29)

$$\alpha = (3 / 2) * (1 / K_{\min})$$

(30)

$$\beta = (1 / 2) * (1 / K_{\max})$$

En nuestro caso

$$K_{\max} = 25$$

$$K_{\min} = 15$$

Estos valores están calculados para dar la necesaria holgura para todos los K considerados. Los valores seleccionados representan una holgura del 50% respecto al caso de cartera equiponderada (todos

los K valores representan el mismo porcentaje de inversión en la cartera réplica) considerando el K mínimo y máximo.

4.3.2 Análisis de los resultados

La validación del modelo tiene como objetivo analizar la desviación entre el TE estimado por el modelo y el realizado a posteriori.

La siguiente tabla resume los datos de TE del modelo, realizado, el retorno relativo de la cartera réplica respecto al benchmark y los rendimientos absolutos de cada uno.

Para medir la desviación del TE estimado (ex ante) respecto al realizado (ex post) hemos calculado la diferencia de los dos y la hemos expresado en puntos básicos (la diferencias multiplicada por 10000).

Tabla1: Datos de Validación para diferentes valores de K

	K=15	K=20	K=25	K<=25
TE ex post	0,13%	0,10%	0,09%	0,09%
TE ex ante	0,09%	0,07%	0,07%	0,07%
TE diff. bp	3,37	2,59	1,79	2,52
Rend. Cartera	9,51%	10,45%	12,38%	11,94%
Rend. Bench	11,99%	11,99%	11,99%	11,99%
Excess Ret	-2,48%	-1,54%	0,38%	-0,05%

Donde:

TE ex post: es el Tracking error calculado en validación

TE ex ante: es el Tracking error estimado por el modelo en fase de optimización.

TE diff. bp: es la diferencia entre el TE ex post y ex ante multiplicada por 10000

Rend. Cartera: es el rendimiento de la cartera réplica en validación

Rend. Bench: es el rendimiento de índice de referencia en validación

Excess Ret: es el rendimiento relativo de cartera réplica frente al índice de referencia

Tabla 2: Sensibilidad de Tracking Error a variaciones de K

	K=15 → K=20	K=20 → K=25	K=20 → K=23
TE ex post	-0,57	-0,20	-0,15
TE ex ante	-0,41	-0,04	-0,13
TE diff. bp	-0,16	-0,16	-0,02

Donde:

TE ex post: es la variación de Tracking Error ex post por incremento unitario de K

TE ex ante: es la variación de Tracking Error ex ante por incremento unitario de K

TE diff. bp: es la diferencia entre las variaciones de TE ex post y ex ante por incremento unitario de K multiplicada por 10000

Tabla 3: Componentes y pesos para diferentes valores de K

	K=15	K=20	K=25	K<=25
ABE	8,53%	6,00%	3,96%	5,29%
ANA	0,00%	0,00%	2,00%	2,00%
ACS	0,00%	2,57%	2,00%	2,00%
AMS	0,00%	2,99%	2,54%	2,59%
MTS	2,83%	2,09%	2,00%	2,00%
BBV	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
SAB	0,00%	2,12%	2,00%	2,00%
POP	3,58%	2,23%	2,23%	2,24%
SAN	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
BKI	3,43%	2,83%	2,36%	2,50%
BKT	0,00%	2,00%	2,21%	2,12%
BME	0,00%	0,00%	2,00%	0,00%
CAB	3,94%	2,88%	3,27%	3,14%
DIA	0,00%	2,00%	2,00%	2,00%
EBR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ENG	0,00%	0,00%	2,00%	0,00%
FER	6,17%	3,83%	2,31%	2,53%
FCC	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
GAM	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
GAS	3,58%	3,26%	2,00%	2,00%
GRF	0,00%	0,00%	2,00%	2,00%
IBE	10,00%	10,00%	8,24%	10,00%
ITX	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
IDR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IAG	3,39%	2,72%	3,08%	3,19%
JAZ	0,00%	0,00%	2,00%	2,00%
MAP	4,55%	3,27%	2,23%	2,44%
TL5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
OHL	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
REE	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
REP	10,00%	9,21%	7,57%	7,97%
SCY	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TRE	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TEF	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
VIS	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Figura 1: Gráficas de evolución de cartera, benchmark y rendimientos por K=15

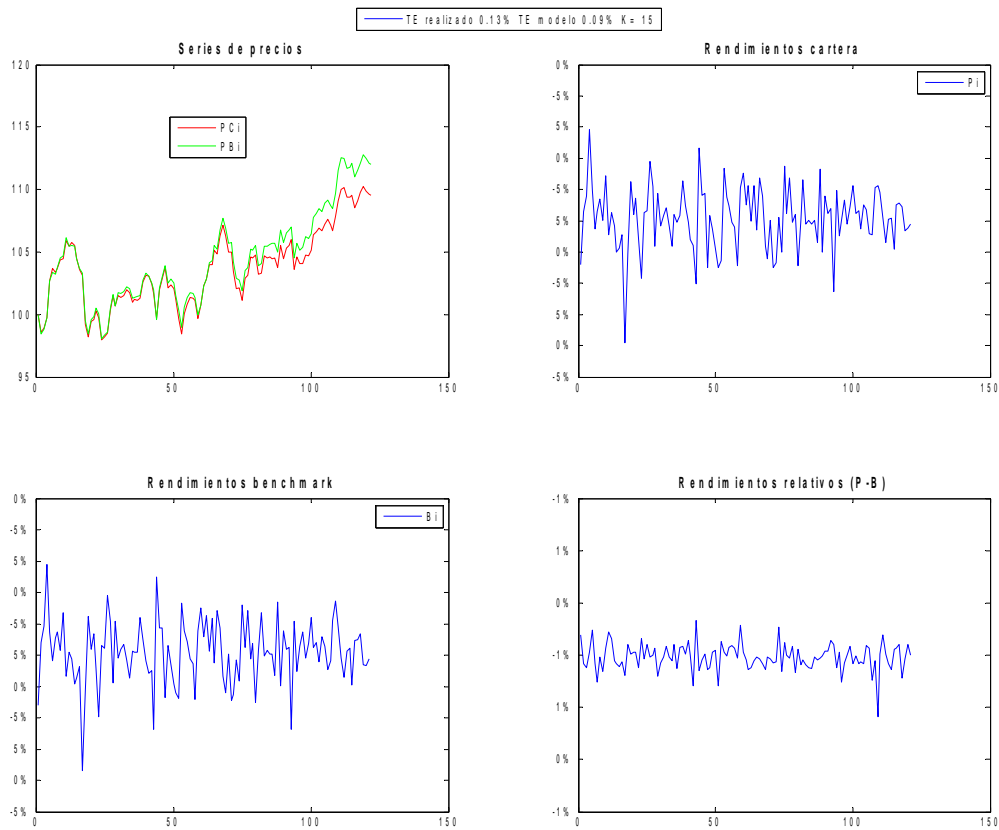


Figura 2: Gráficas de evolución de cartera, benchmark y rendimientos por K=20

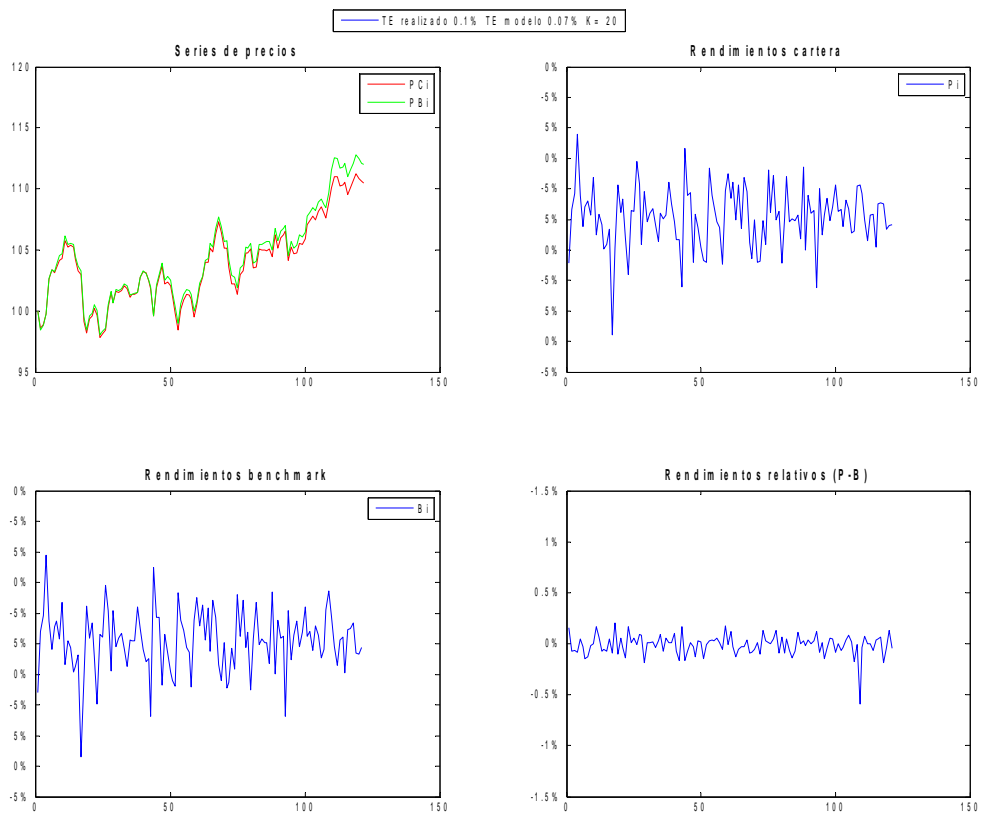


Figura 3: Gráficas de evolución de cartera, benchmark y rendimientos por K=25

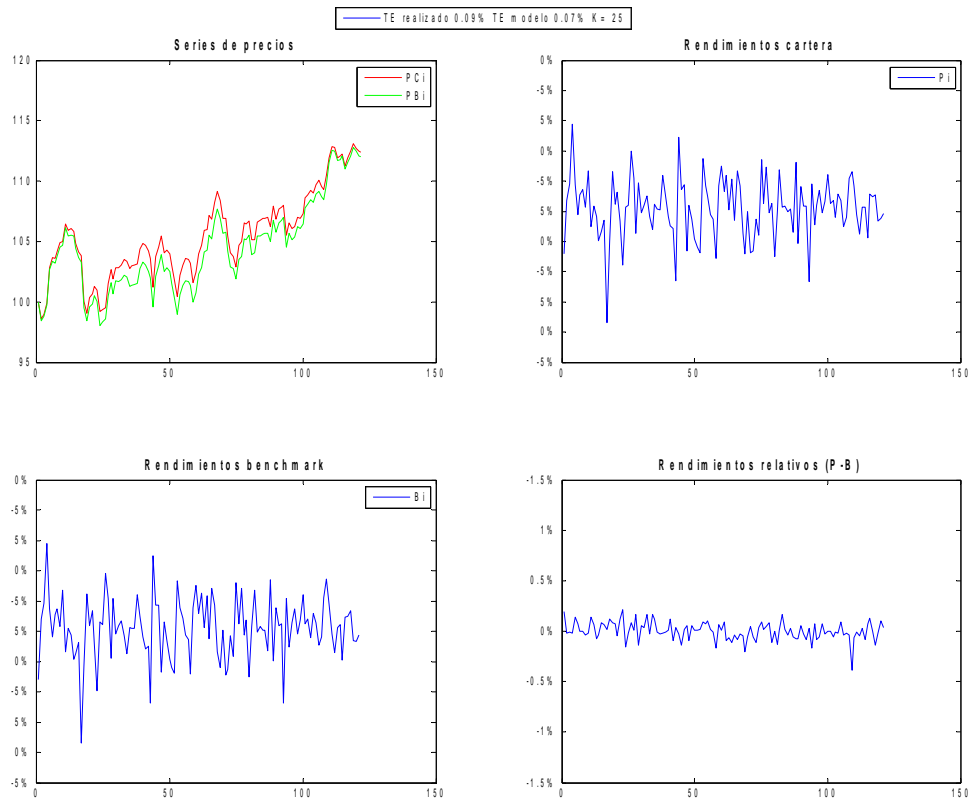
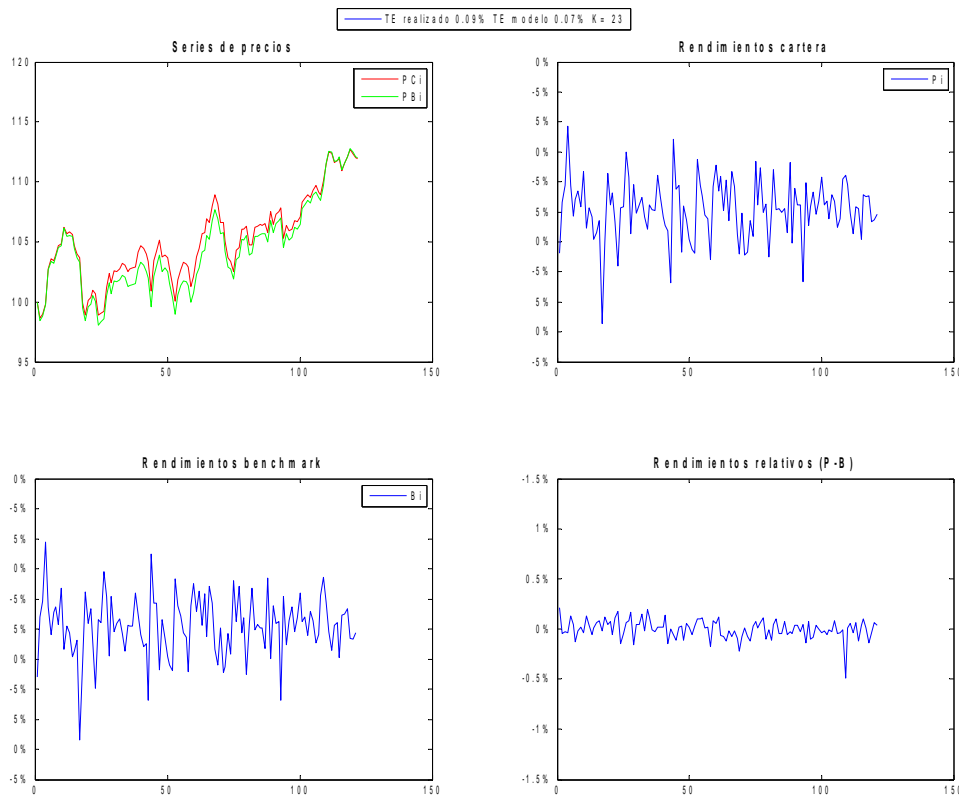


Figura 4: Gráficas de evolución de cartera, benchmark y rendimientos por $K \leq 25$ ($K=23$)



Como se puede apreciar en la *Tabla 1* el modelo en la fase de validación consigue alcanzar valores de TE (TE ex post) muy próximos a los estimados por el modelo (TE ex ante) registrando desviaciones muy pequeñas. La máxima desviación es de 3,37 puntos básicos y las mismas desviaciones decrecen con valores de K crecientes como es de esperar. Para el caso de K con cota superior 25 el algoritmo ha elegido 23 activos a incluir en cartera.

En las *Figura 1,2,3 y 4* se muestran para $K=15$, $K=20$, $K=25$, $K \leq 25$ unos datos relevante para el análisis.

Empezando desde arriba a la izquierda se muestran la series de precios de benchmark y cartera replica, los rendimientos de la cartera, los rendimientos del benchmark y los rendimientos relativos.

El nivel absoluto de Tracking Error ex post decrece con el incremento de K pero solo de aproximadamente 3 puntos básicos cuando K que pasa de 15 a 20 mientras para $K > 20$ las variaciones son mínimas.

Respecto a esto al construir una cartera réplica es fundamental establecer de antemano un nivel de TE dispuestos a tolerar y en función de este dato determinar el menor número de componentes que nos

permiten alcanzarlo.

Por otro lado si consideramos los rendimientos relativos (rendimiento cartera réplica menos rendimiento del benchmark) registramos variaciones importantes sobre todo para $K=15$ (-2.48%). Recordemos que en fase de optimización una de las restricciones consistía en que la cartera réplica tuviese un rendimiento esperado igual que el esperado para el benchmark.

Como se puede observar estas diferencias disminuyen paulatinamente considerando $K=20$ (-1.54%), $K=25$ (+0.38%) y $K \leq 25$ (-0.05%).

La tendencia decreciente de las diferencias al incrementar el K es atribuible a la dificultad en estimar los rendimientos futuros de los títulos. El output del modelo es bastante sensible a estos parámetros y habíamos evidenciado este aspecto ya anteriormente en la fase de descripción de la metodología de resolución del problema.

Lo que se quería validar en esta sección era la fiabilidad del modelo y su capacidad de construir carteras réplica con TE realizados en línea con los estimados ex ante; vistos los resultados de *Tabla 1* queda clara la eficacia del modelo en este sentido pudiéndose registrar solo desviaciones muy leves.

4.3.3 Tiempos de computación

En esta sección mostramos los tiempos de ejecución de los algoritmos de optimización para el test de variaciones de K . Los cálculos se ha realizado con un Intel Core(TM) i5 CPU 760 2.8GHz, 3.49GB RAM con 4 cores.

Tabla 4: Tiempos de ejecución en GAMS y estadísticas de optimización para diferentes valores de K

Statistics				
	K=15	K=20	K=25	K<=25
Iterations	22355	15364	626	1248
QCP Seconds	0.11 sec	0.02 sec	0.06 sec	0.03 sec
B&B nodes	4029	2769	134	380
MIP solution	8,81406000992E-07	5,35626682540E-07	5,08285991111E-07	4,81512858135E-07
Best possible	8,81406000992E-07	5,35626682540E-07	5,08285991111E-07	4,81512858135E-07
Absolute gap	0.000000 optca 0	0.000000 optca 0	0.000000 optca 0	0.000000 optca 0
Relative gap	0.000000 optcr 0	0.000000 optcr 0	0.000000 optcr 0	0.000000 optcr 0
Model Status	8	8	8	8
Solver Status	1	1	1	1

Como se puede observar en *Tabla 4* oscilan ente pocas centésimas de segundo (0.02 seg. para $K=20$) hasta 0.11 seg. para $K=15$.

Chang et al. (2000) muestran en su trabajo resultados sobre una cartera réplica compuesta por 31 componentes del índice bursátil Hang Seng que a la vez contiene 50 activos.

El modelo planteado en su trabajo es el mismo descrito en esta sección (con restricciones sobre el número de componentes y límites de inversión).

La diferencia sustancial reside en el algoritmo de optimización usado para encontrar los pesos óptimos de cartera.

En el trabajo de Chang et al. (2000) la optimización se consigue a través de unos algoritmo de optimización heurísticos (búsqueda tabú, algoritmo genéticos y temple simulado).

Los tiempos de ejecución varían desde 476 seg. para el temple simulado a 469 seg. para la búsqueda tabú' a 621 seg. para el algoritmo genético.

En nuestro trabajo los tiempos de ejecución no superan los 0.11 seg. A pesar de que los tiempos de computación desde el año 2000 han disminuido considerablemente los órdenes de magnitud siguen siendo enormemente diferentes y nuestra solución representa una considerable mejora.

El solver de optimización utilizado (CPLEX) resuelve antes de todo, con un método Barrera, el problema de minimización relajando la restricción binaria sobre Z_i y tratándola como continua.

De esta forma consigue encontrar una cota inferior al problema de minimización que en *Tabla 4* está representado por el valor "Best possible" a partir de este punto empieza a avanzar en la búsqueda a través de un procedimiento de Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound) actualizando de paso en paso la solución "Best possible".

Al final se llega a encontrar la solución del modelo original (con restricción binaria sobre Z_i) que en *Tabla 4* está representada por "MIP Solution" cuando el gap relativo entre "MIP Solution" y "Best possible" es 0.

Para que el algoritmo de Ramificación y Acotamiento se detenga hay que imponer unos criterios de parada, en nuestro caso son:

1. Limite sobre el máximo de los nodos explorados fijado en 50000
2. Diferencia relativa respecto a la solución "Best possible" fijada en 0%

Esta última condición nos asegura conseguir pesos óptimos hecho, que representa un salto cualitativo muy grande respecto al trabajo de Chang et al. (2000).

En nuestro caso para $K=15$ se han explorado 4029 nodos ("B&B nodes"), para $K=20$ 2769, con $K=15$ 134 mientras para $K \leq 25$ 308 nodos.

La solución a través de GAMS que presentamos en este trabajo resulta ser en términos de tiempos bastante más eficaz que cualquiera de los algoritmos heurísticos presentados en Chang et al. (2000) sobre todo si consideramos que en aquel trabajo se intenta replicar el Hang Seng con un 62% de los componentes del índice ($K=31$ mientras en índice contiene 50 títulos).

El problema se puede considerar comparable al propuesto aquí dado que los porcentajes de réplica van de un 42.8% (K=15) a un 57.14% (K=20) hasta un 71.4%(K=25) y como hemos ya podido observar cuando mas aumenta K menor resulta el tiempo de ejecución de nuestro algoritmo.

4.4 Test 2: variaciones de la ventana de calibración

4.4.1 Descripción del experimento

El test de esta sección consiste en verificar la sensibilidad del modelo respecto a variaciones de la amplitud de la ventana de cálculo de la matriz de covarianzas y de rendimientos esperados.

El número de componentes de la cartera réplica ahora esta fijo no como en la sección anterior (se escoge un K=20). Este valor de K resulta ser un justo compromiso entre TE estimado y tiempo de ejecución del algoritmo de optimización.

El objetivo de este test es verificar cuánto se desvía el TE realizado respecto a la estimación ex ante variando la ventana de cálculo de la matriz de covarianza y de los rendimientos esperado.

En la realidad las tendencias de mercado pueden sufrir variaciones fuertes en cuestión de días y en fase de cálculo de los input hay que tomar decisiones sobre cuál es el horizonte temporal mejor para reflejar en el modelo las condiciones de mercado futuras.

En este trabajo se ha utilizado para el “escenario base” una ventana de calibración de 6 meses que representa un buen compromiso entre una ventana muy amplia y entonces poco sensible a movimientos de mercado y una ventana muy corta y entonces muy “reactiva”.

El escenario base es por tanto el utilizado en la sección anterior, sobre 6 meses (**desde 25/06/2013 hasta 31/12/2013**) de rendimientos diarios de los componentes del IBEX35. En esta sección vamos a considerar ventanas de 5 meses (**desde 30/07/2013 hasta 31/12/2013**), de 4 meses (**desde 30/08/2013 hasta 31/12/2013**) y de 3 meses (**desde 30/09/2013 hasta 31/12/2013**).

4.4.2 Análisis de los resultados

El test considerado intenta captar la sensibilidad del modelo a los input de covarianzas y de rendimientos esperados; las diferencias entre TE estimado y realizado serán tanto menores cuanto más parejas serán las condiciones de mercado en fase de calibración respecto a las de validación.

La siguiente tabla resume los resultados del test mostrando el TE del modelo, realizado, el retorno relativo de la cartera réplica respecto al bechmark y los rendimientos absolutos de cada uno. Para medir la desviación del TE estimado (ex ante) respecto al realizado (ex post) hemos calculado la diferencia de los dos y la hemos expresado en puntos básicos (diferencia multiplicada por 10000).

Tabla 5: Datos de Validación para diferentes ventanas de calibración

K=20			
Fecha inicial	30/09/2013	30/08/2013	30/07/2013
Fecha final	31/12/2013	31/12/2013	31/12/2013
	3meses	4meses	5meses
TE ex post	0,10%	0,10%	0,10%
TE ex ante	0,06%	0,07%	0,07%
TE diff. bp	4,31	3,52	3,56
Rend. Cartera	13,19%	11,61%	10,65%
Rend. Bench	11,99%	11,99%	11,99%
Excess Ret	1,20%	-0,39%	-1,34%

Donde:

TE ex post: es el Tracking error calculado en validación

TE ex ante: es el Tracking error estimado por el modelo en fase de optimización.

TE diff. bp: es la diferencia entre el TE ex post y ex ante multiplicada por 10000

Rend. Cartera: es el rendimiento de la cartera réplica en validación

Rend. Bench: es el rendimiento de índice de referencia en validación

Excess Ret: es el rendimiento relativo de cartera réplica frente al índice de referencia

Tabla 6: Datos de Validación para diferentes ventanas de calibración

K=20			
Fecha inicial	30/09/2013	30/08/2013	30/07/2013
Fecha final	31/12/2013	31/12/2013	31/12/2013
ABE	4,23%	5,57%	5,91%
ANA	0,00%	0,00%	0,00%
ACS	3,67%	3,28%	3,29%
AMS	0,00%	0,00%	2,67%
MTS	2,00%	2,00%	2,00%
BBV	10,00%	10,00%	10,00%
SAB	3,72%	2,11%	2,00%
POP	3,31%	2,73%	2,38%
SAN	10,00%	10,00%	10,00%
BKI	2,68%	2,42%	2,62%
BKT	0,00%	2,00%	2,00%
BME	0,00%	0,00%	0,00%
CAB	2,82%	2,06%	2,41%
DIA	2,00%	0,00%	2,42%
EBR	0,00%	0,00%	0,00%
ENG	0,00%	0,00%	0,00%
FER	6,05%	4,57%	3,87%
FCC	0,00%	0,00%	0,00%
GAM	0,00%	0,00%	0,00%
GAS	2,74%	2,14%	3,68%
GRF	0,00%	0,00%	0,00%
IBE	10,00%	10,00%	10,00%
ITX	10,00%	10,00%	10,00%
IDR	2,00%	2,00%	0,00%
IAG	2,66%	2,93%	2,34%
JAZ	0,00%	0,00%	0,00%
MAP	2,06%	4,09%	3,71%
TL5	0,00%	0,00%	0,00%
OHL	0,00%	0,00%	0,00%
REE	2,00%	3,23%	0,00%
REP	8,06%	8,89%	8,69%
SCY	0,00%	0,00%	0,00%
TRE	0,00%	0,00%	0,00%
TEF	10,00%	10,00%	10,00%
VIS	0,00%	0,00%	0,00%

Figura 5: Evolución de cartera, benchmark y rendimientos calibración 3 meses

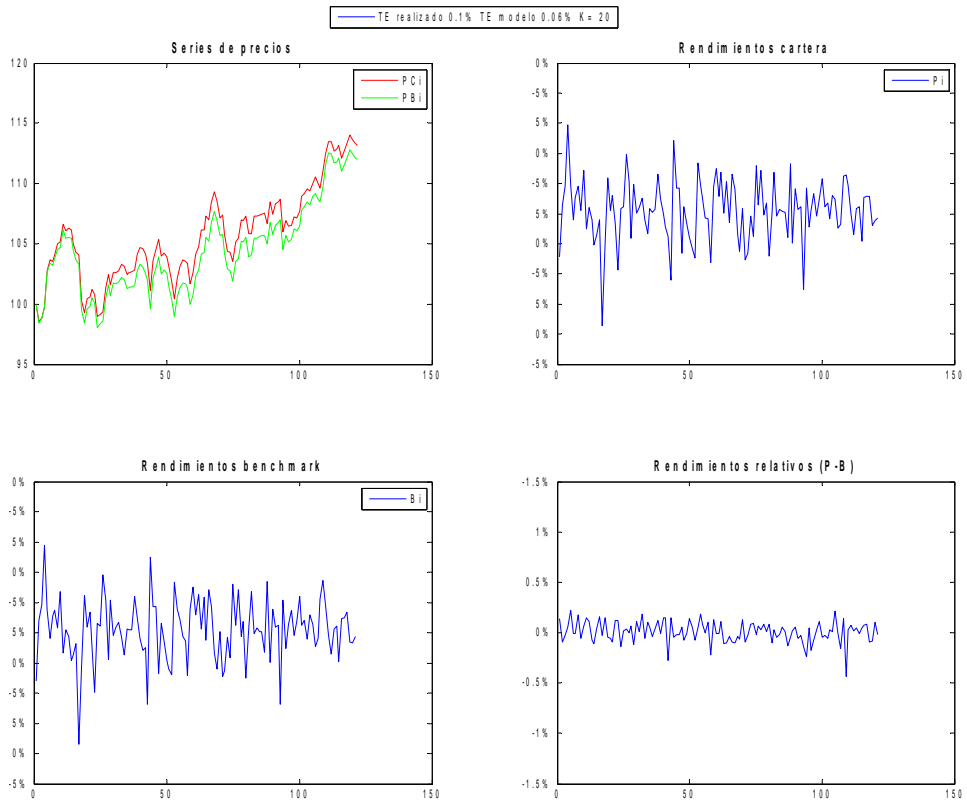


Figura 6: Evolución de cartera, benchmark y rendimientos calibración 4 meses

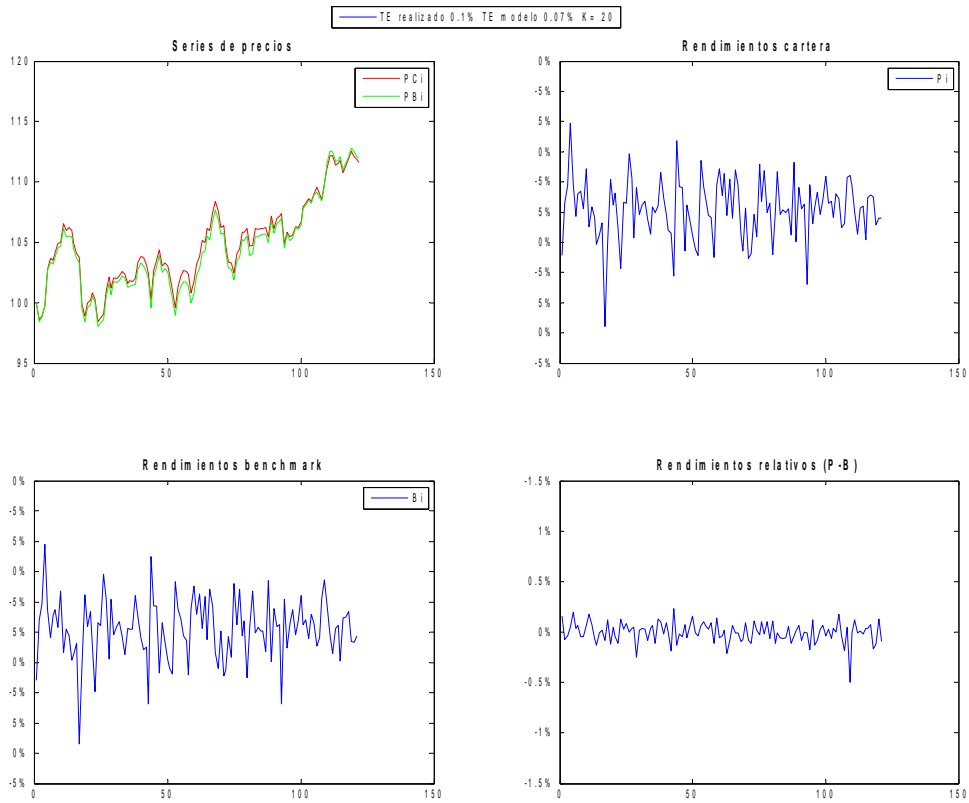
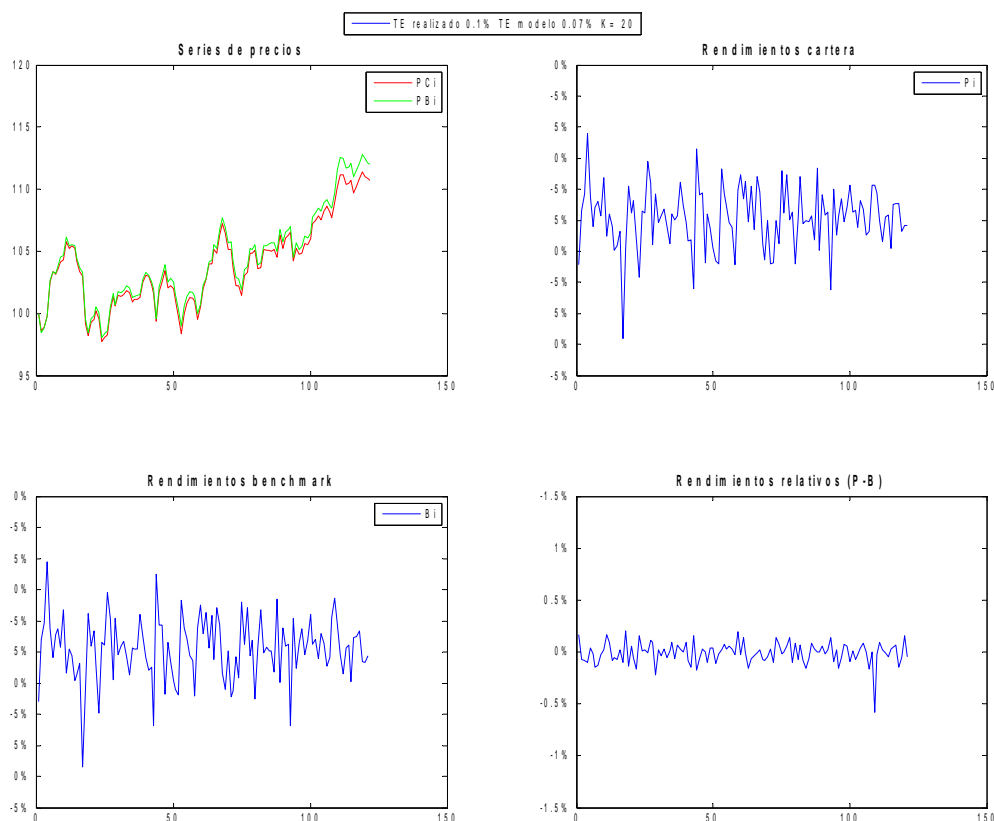


Figura 7: Evolución de cartera, benchmark y rendimientos calibración 5 meses

En las *Figura 5,6 y 7* se muestran para ventanas de calibración de 3, 4 y 5 meses unos datos relevantes para el análisis.

Empezando desde arriba a la izquierda se muestran las series de precios de benchmark y cartera replica, los rendimientos de la cartera, los rendimientos del benchmark y los rendimientos relativos

Como se puede apreciar en la *Tabla 5* el modelo es bastante sensible a los datos de entrada registrando variaciones medias para $K=20$ de 3.8 puntos básicos; esta variación media es bastante mayor que la variaciones calculadas en el test anterior (2.59 bp) con $K=20$ y 6 meses de ventana de calibración y presentada en la *Tabla 1*.

Tabla 7: Volatilidades mensuales desde Jul.-13 hasta Dic.-13

	Jul.-13	Ago.-13	Sept.-13	Oct.-13	Nov.-13	Dic.-13
IBEX	1,26%	1,18%	0,70%	1,03%	0,69%	1,04%
ABE	1,14%	1,10%	0,54%	0,90%	0,87%	1,15%
ANA	3,42%	2,39%	2,61%	1,63%	1,33%	2,01%
ACS	1,92%	1,20%	1,06%	1,53%	0,99%	1,63%
AMS	1,18%	0,99%	0,86%	0,84%	1,00%	1,23%
MTS	1,85%	2,44%	1,63%	1,85%	1,58%	1,55%
BBVA	1,79%	1,63%	0,99%	1,69%	1,14%	1,38%
SAB	3,20%	3,66%	3,04%	2,29%	1,33%	1,39%
POP	3,14%	3,47%	2,70%	2,69%	1,51%	1,72%
SAN	1,83%	1,53%	0,92%	1,63%	0,92%	1,29%
BKIA	3,00%	3,22%	2,21%	3,36%	2,92%	2,50%
BKT	2,56%	2,84%	1,48%	2,51%	1,46%	1,78%
BME	1,54%	1,40%	1,30%	1,50%	1,38%	1,92%
CABK	2,21%	2,13%	1,77%	2,15%	2,73%	1,34%
DIA	1,83%	1,72%	1,20%	1,46%	0,95%	1,44%
EBRO	1,56%	0,81%	1,00%	1,22%	0,58%	0,92%
ENG	2,30%	1,09%	0,83%	0,86%	0,84%	0,84%
FER	1,40%	1,07%	0,88%	1,04%	0,81%	1,45%
FCC	3,86%	3,28%	1,79%	2,41%	1,68%	2,51%
GAM	3,68%	3,45%	1,44%	2,61%	2,71%	2,13%
GAS	2,54%	1,22%	1,09%	1,32%	0,93%	1,14%
GRF	1,12%	1,45%	1,07%	1,40%	1,52%	1,20%
IBE	1,66%	1,10%	0,69%	1,14%	0,57%	0,89%
ITX	1,59%	1,16%	1,04%	0,78%	1,00%	1,25%
IDR	1,45%	2,65%	1,29%	2,29%	1,96%	1,73%
IAG	1,43%	2,71%	1,83%	1,74%	2,32%	1,31%
JAZ	1,43%	1,03%	1,51%	1,10%	1,58%	1,11%
MAP	1,56%	1,83%	1,36%	1,48%	1,20%	1,40%
TL5	1,42%	1,60%	1,46%	1,39%	2,11%	1,70%
OHL	1,26%	1,59%	1,12%	1,30%	1,53%	1,41%
REE	2,55%	0,93%	1,02%	0,89%	0,80%	1,35%
REP	1,51%	1,34%	0,99%	0,91%	1,54%	1,16%
SCYR	2,82%	2,80%	2,24%	1,92%	3,00%	2,08%
TRE	1,83%	1,41%	1,15%	1,40%	1,02%	1,17%
TEF	1,47%	0,98%	0,72%	1,20%	0,87%	0,93%
VIS	1,05%	0,88%	1,02%	1,99%	0,61%	0,78%

Como se puede ver en *Tabla 7* el mes de Julio fue el más volátil (1.26%) para el IBEX35 entre Julio y Diciembre 2013 lo mismo vale también para muchos constituyentes del IBEX35.

A la luz de estos datos se puede entender porque la variación entre TE estimado y realizado en *Tabla 5* es mayor respecto a la variación media encontrada en *Tabla 1*. Los valores de TE ex ante que figuran en esta sección son menores respecto a los mostrados para el test anterior y esto se debe principalmente a no incluir el mes de Julio en la ventana de calibración de la matriz de varianzas y covarianzas.

Este test nos permite cuantificar el impacto en estimación de TE debido a la exclusión de las observaciones relativas al mes de Julio y evidencia cuanto sea importante calibrar el modelo sobre una ventana temporal significativamente amplia y representativa de las condiciones de mercado que se darán a corto plazo.

En fin podemos afirmar que 6 meses de observaciones históricas representa una elección más que razonable para la resolución de este problema.

5 Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se han presentado varios modelos para la construcción de carteras réplica de índices bursátiles y se ha validado el más complejo e interesante desde el punto de vista operativo (modelo con restricciones sobre el número de componentes y límites máximos y mínimos de inversión).

Además se ha proporcionado a través de GAMS una solución rápida, eficaz y fácilmente replicable para la optimización de carteras replica.

La solución propuesta resulta aun más interesante si se compara con los resultados obtenidos en otros estudios ((Chang et al. (2000)) en los cuales se proponían algoritmos de resolución de tipo heurístico que presentan básicamente 3 desventajas claras:

- Tiempos de resolución mucho mayores
- Pesos de cartera réplica sub-óptimos
- La necesidad de adaptar el algoritmo a la especificidad del problema

En la fase de validación del modelo para cartera réplica hemos podido comprobar que los niveles de TE ex ante y ex post registran diferencias muy leves (*Tabla 1*).

Se observan de todas formas diferencias más pronunciadas para carteras replicas con $K=15$ respecto al caso de $K=20$, $K=25$ y $K \leq 25$.

Esto nos confirma que para niveles de K crecientes se obtendrán diferencias entre TE estimado y realizado decrecientes.

Mas inesperada es la diferencia en rentabilidad de las carteras, para $K=15$ obtenemos en validación un valor de -2.48% .

Estas diferencias tienden a cero conforme subimos el K de réplica y son explicables considerando que el rendimiento de un titulo accionario es mas dificilmente predecible que la volatilidad a corto plazo del mismo activo, siendo esta ultima más estable y con estructura temporal como demostrado por varios estudios (G.William Schwert and Paul J. Seguin (1991)).

El segundo tipo de test efectuado tiene que ver con las ventanas de calibración de los input del modelo (varianzas-covarianzas y rendimientos esperados).

Analizando los resultados en *Tabla 5* se ha podido apreciar cual es la importancia de escoger una ventana de calibración representativa de las condiciones de mercado a corto plazo.

En el test realizado excluyendo el mes de Julio 2013 de la ventana de calibración se han registrados diferencias entre TE ex ante y ex post bastante mayores que en el test anterior (el promedio es de 3.8

puntos básicos). Esta diferencia es debida a la alta volatilidad registrada en Julio 2013.

En un futuro sería interesante investigar más a fondo la sensibilidad del TE ex ante frente a incrementos de K.

De hecho la gestión del nivel de complejidad de la cartera réplica es una decisión subjetiva del gestor relacionada con el nivel de TE ex ante que el mismo está dispuesto a tolerar.

Otro aspecto interesante a investigar en un futuro es la efectividad de modelos de varianza condicionada en fase de calibración (modelos ARCH y GARCH).

La volatilidad de activos accionarios muestra una estructura temporal, entonces cabe la posibilidad que estos modelos puedan ser de gran ayuda en la fase de calibración y permitir una estimación más ajustada de la matriz de varianzas/covarianzas.

6 BIBLIOGRAFIA

T.-J. Chang, N. Meade, J.E. Beasley, Y.M. Sharaiha (2000) "Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation", *Computers & Operations Research* 27, 1271-1302

T.-Eugene F. Fama (1969) "Efficient capital markets: a review of theory and empirical work", *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, 383-417

T.-Eugene F. Fama (1965) "The Behavior of Stock-Market Prices", *The Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, 36-105

G.William Schwert and Paul J. Seguin (1991) "Heteroskedasticity in Stock Returns", *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 4, 2-30

7 ANEXOS

Anexo 1 Código GAMS para la optimización de las cartera replicas en el caso de $K=15$

```

$TITLE Track_port;
SETS
  i
/
ABE,ANA,ACS,AMS,MTS,BBV,SAB,POP,SAN,BKI,BKT,BME,CAB,DIA,EBR,ENG,FER,FCC,GAM,GAS,GRF,
IBE,ITX ,IDR,IAG,JAZ,MAP,TL5,OHL,REE,REP,SCY,TRE,TEF,VIS;/
ALIAS(j,i)
$include "E:\TFM\datos_ibex.gms";
Variables
  v      riesgo
  r      rendimiento
;
Positive Variables
  x(i)   peso en asset i
;
Binary Variables
  y(i)
;
Equations
  zdef
  rdef
  tot_c
  b_max
  b_min
  ntitul
;
zdef.. v =e= sum((i,j),(x(i)-wb(i))*q(i,j)*(x(j)-wb(j)));
ntitul.. sum(i, y(i)) =l= 25;
rdef.. 0=e=sum(i, mu(i)*(x(i)-wb(i)));
tot_c.. sum(i, x(i)) =e= 1;
b_max(i).. x(i) =l= (3/2)*(1/15)*y(i);
b_min(i).. x(i) =g= (1/2)*(1/25)*y(i);
option optcr=0;
option optca=0;
option miqcp=cplex;
Model Track_port /all/;
Track_port.nodlim= 50000;
Solve Track_port using miqcp minimizing v;
Display v.l, r.l, x.l;

```