Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 104, Nº. 1, pp 61-79, 2010
XI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

RIGOR Y DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

FERNANDO BOMBAL GORDÓN *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. 28040 Madrid.

1. INTRODUCCIÓN

Todo texto matemático que se precie contiene una serie de palabras significativas, como *Teorema, Lema, Proposición* o *Corolario*, que preceden una serie de enunciados más o menos ininteligibles. Después aparece la palabra mágica: ***Demostración***, encabezando una serie de argumentos más o menos misteriosos, que suelen terminar en un rotundo *Q.E.D*.

Si estamos examinando un trabajo de investigación muy especializado, los lectores que no pertenezcan a esa especialidad (que puede ser toda la Humanidad, salvo 10 o 12 personas), no entenderán prácticamente nada. Para poner un ejemplo de lo que digo, consideremos el siguiente texto:

Teorema.[1] *Sea Y un espacio de cotipo 2 y X_j espacios $\mathcal{L}_{\infty,\lambda j}$ para $1 \leq j \leq n$. Todo operador multilinear $T : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ es múltiplemente 2-sumante y*

$$\pi_2(T) \leq K_n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \|T\|,$$

donde $K_n = 3^{1/4} C_2(Y)^{2n}$ y $C_2(Y)$ es la constante de cotipo 2 de Y.

Para no tener que ir muy lejos, he optado por elegir un resultado incluido en uno de mis trabajos que, por supuesto, no es tan especializado como los casos extremos mencionados anteriormente. Sin embargo, muchos matemáticos profesionales tendrán la misma impresión ante este texto que la mayoría de los lectores no matemáticos: algunas palabras reconocibles entre una mayoría de términos y signos incomprensibles y cuyo significado se nos escapa completamente.

Pero no hay que pensar que la dificultad para entender un resultado matemático radica sólo en la cantidad de información previa necesaria para su comprensión. Hay enunciados tremendamente sencillos, que todo el mundo puede entender pero que hasta el momento nadie ha sabido responder. Uno de ellos es el siguiente:

Todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos.[2]

Por ejemplo, $4 = 3+1$, $8 = 5+3 = 7+1$, $20 = 13+7 = 19+1$, etc. Hasta hoy, nadie ha encontrado un contraejemplo a la afirmación anterior. ¡Pero tampoco una prueba de su validez para *cualquier* número par mayor que 2!

Y esto nos lleva al siguiente elemento esencial de un texto de matemáticas: la *Demostración* del resultado enunciado. En el ejemplo que hemos considerado al principio, comenzaba así:

---

[1] Theorem 3.1 en *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem,* por F. Bombal, D. Pérez, e I. Villanueva. *Quat. J. Math.* (2004), 441-150.

[2] Se trata de la famosa *Conjetura de Goldbach*, aparecida por primera vez en una carta enviada por **Christian Goldbach** en 1742 al brillante matemático suizo **Leonhard Euler.**

Demostración: Procederemos por inducción sobre *n*. Para *n=1* el resultado es conocido (véase [7.; Theorem 11.14] y [10]). Sea entonces $n \geq 2$...(a continuación aparece una serie de argumentos más o menos ininteligibles para el no experto y, finalmente, las esperadas iniciales ***Q.E.D.***).

Como su propio nombre indica, la demostración incluye una serie de argumentos con los que el autor trata de convencer al lector de la veracidad del resultado enunciado. La inteligibilidad de los razonamientos que aparecen en ella dependerá de nuestra formación y del contenido matemático del enunciado. En general, abundan frases como "por tanto" o "en consecuencia", que parecen indicar que las afirmaciones que siguen tienen un grado de certeza irrefutable. Incluso a veces da la sensación de que los argumentos se deducen infaliblemente, por un procedimiento puramente mecánico, de los datos del enunciado, y pudieran ser producidos por una máquina. En realidad, jamás se ha construido una máquina capaz de reproducir todas las demostraciones que puedan aparecer en un libro de texto elemental de aritmética. Más aún, es *imposible* construir una máquina[3] que pudiera obtener todos los resultados verdaderos de la aritmética.¡Y esto es un Teorema demostrado! Volveremos más adelante sobre el tema.

Pero quizá, antes de seguir adelante, lo mejor es dar un ejemplo concreto de una Demostración típica; y nada mejor, sin duda, que utilizar el teorema más conocido de las matemáticas, con la demostración que aparece en uno de los libros más famosos de la historia: el *Teorema dePitágoras* en la versión que aparece en el libro I de *Los Elementos* de **Euclides** (alrededor del 300 a. de C.):

Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras): En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto* (hipotenusa) *es igual a los dos cuadrados construidos sobre los lados que contienen el ángulo recto* (catetos).

La numeración "I.47" hace referencia a que se trata del resultado número 47 del primero de los 13 "libros" en los que se dividen *Los Elementos*.

Como puede verse, se trata de un enunciado puramente geométrico, sin ninguna referencia a la versión algebraica que aparece en los libros de texto elementales de hoy en día: $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$ (véase la **figura 1**). Lo que afirma el teorema es que los cuadrados **ACDE** y **ABPQ** de la figura pueden dividirse adecuadamente y recombinarse para obtener el cuadrado **CBNM.**

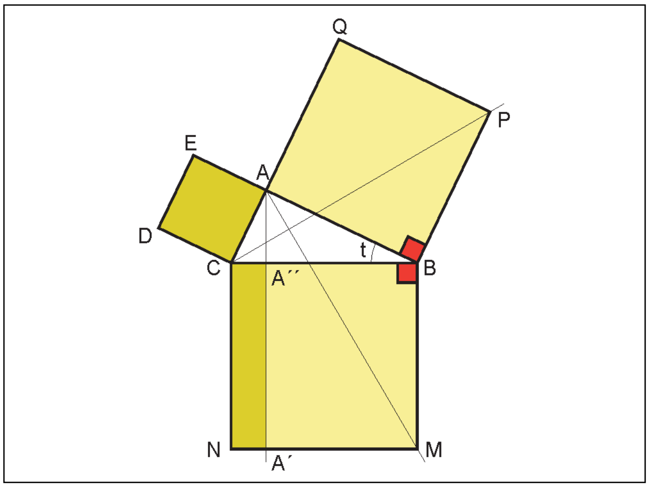


Figura 1

La *Demostración* comienza con una estrategia totalmente novedosa, que no se deduce en absoluto de los datos del enunciado: Construir la paralela a **BM** que pasa por **A** (posibilidad desarrollada en un enunciado anterior: *Proposición I.31*) y considerar los triángulos ***ABM*** y ***CBP***.

Los triángulos $\triangle$***ABM*** y $\triangle$***CPB*** tienen dos lados iguales (**AB=BP** y **CB=BM)** y el mismo ángulo comprendido entre ellos (un recto más el ángulo *t*, como se ve en la figura). Por tanto, por la *Proposición I.4*, los dos triángulos son *iguales.*

Como el ángulo **CAB** es recto, y también lo es (por construcción) el ángulo **BAQ**, la *Proposición I.14* permite afirmar que los puntos **CAQ** están alineados (y, por la misma razón, lo están los **EAB).**

Por tanto $\triangle$***ABM*** tiene la misma base y altura que el $\square$***BMA´A´´*** y $\triangle$***CBP*** tiene también la misma base y altura que el $\square$***ABPQ***. En consecuencia, la *Proposi-*

[3] En el sentido de cualquier artilugio concebible que funcionara de manera análoga a nuestros ordenadores, pero sin limitaciones de memoria o velocidad. En términos más técnicos, me refiero a lo que se conoce como una *máquina de Turing.*

ción I.41 permite afirmar que **área(□*ABPQ*)= área(□*BMA´A´*)**.

Un razonamiento totalmente análogo prueba que **área(□*ACDE*)=área(□*CNA´A´*)**, lo que termina la demostración.

Como vemos, la demostración contiene una serie de elementos característicos: un considerable grado de *abstracción*, con la aparición de conceptos como triángulo, líneas rectas, ángulos, que el lector debe decodificar por informaciones previas; un lenguaje *formalizado*, que no es el lenguaje ordinario, ni el del teatro o la novela; una continua llamada a *resultados anteriores*. Y finalmente, la *idea brillante* o *truco* de la demostración. En este caso, la consideración de las líneas auxiliares, como la **AA'** o la **CP**, que no aparecían en el problema original, pero que han resultado esenciales para completar el proceso deductivo.

La idea de demostración rigurosa depende, obviamente, del contexto y del entorno cultural. En los escritos matemáticos ordinarios (incluso los de hoy en día), *sólo* se detallan los pasos *no* puramente mecánicos; aquellos que suponen una idea nueva, una construcción original o la introducción de algún elemento nuevo (los análogos a las *líneas auxiliares* de la demostración del Teorema de Pitágoras). Pero el consenso sobre lo que es o no un paso obvio o trivial, ha ido cambiando a lo largo de la historia.

Nuestro objetivo es mostrar, con algunos ejemplos tomados de la historia, la evolución de la noción de *demostración correcta*, y, por tanto, la evolución de la noción de *rigor matemático*.

2. EL PRINCIPIO

La primera civilización en la que aparecen signos de desarrollo matemático es la egipcia, pero exclusivamente dirigidos a facilitar los aspectos de la vida cotidiana, como son el comercio o la agrimensura. Por ejemplo, los arquitectos egipcios usaban el siguiente truco para dibujar ángulos rectos (para construir ángulos de pirámides, templos, etc.): (véase **figura 2**)

Ataban 12 segmentos iguales de cuerda en una curva cerrada. El triángulo de lados 3, 4 y 5 segmentos

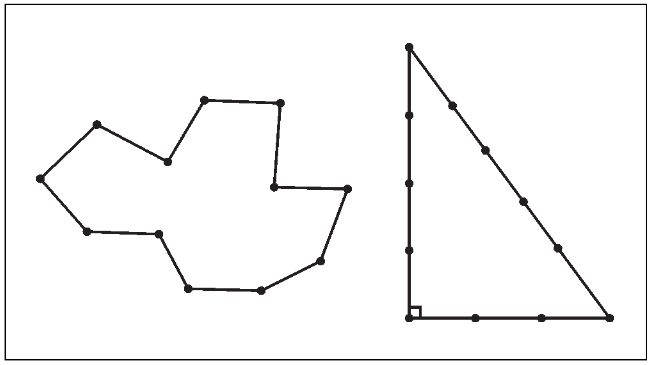


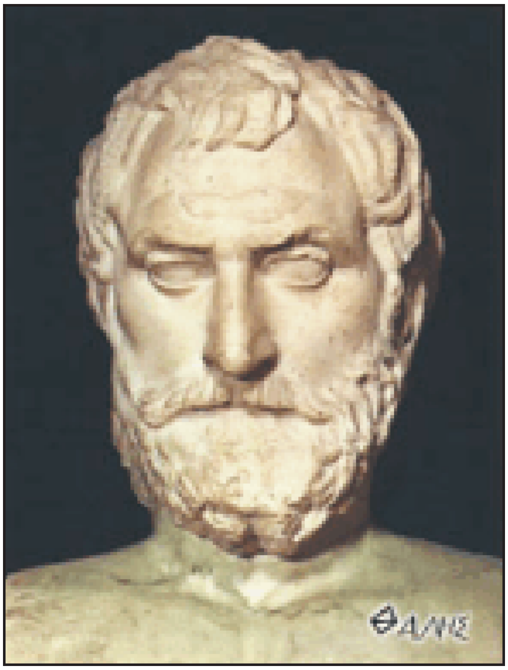
Figura 2

es recto. No hay ninguna evidencia de que supieran, por ejemplo que los triángulos de longitudes 5-12-13 o 65-72-97 son también rectos. Ni en este caso ni en ningún otro que nos haya llegado, los egipcios dan la menor indicación de cómo *demostrar* lo afirmado. Simplemente, se trataba de un hecho aceptado. En general, los resultados matemáticos que se han encontrado de la civilización egipcia aparecen siempre como recetas autoritarias para resolver un problema: Haga Vd. esto primero; después esto otro, etc. Algo, por otro lado, típico de una sociedad totalmente jerarquizada.

Los babilonios tenían una aritmética mucho más desarrollada que la egipcia, y eran capaces de hacer cálculos más sofisticados. Pero, de nuevo, lo que nos ha llegado son una serie de instrucciones para resolver los problemas, sin ningún intento de explicar *cómo* se había llegado a la solución.

Es en Grecia donde se produce el cambio cualitativo que conduce a la creación del método científico en sentido moderno. Entre los siglos IX y VII antes de Cristo las más importantes *polis* continentales organizaron una serie de grandes migraciones, que dieron lugar a la colonización griega de las costas del Mediterráneo y del Mar Negro. Como consecuencia, se fue desarrollando una cultura más abierta e independiente que, con el desarrollo de la democracia como sistema político de algunas ciudades independientes, propició la aparición de una clase de *ciudadanos* abiertos al debate y al análisis, con una tremenda curiosidad por cuanto les rodeaba.

Los escépticos pensadores griegos de alrededor del siglo VII a. de C. asumieron tácitamente que el ser humano podía llegar a comprender la Naturaleza por medio de la penetrante luz de la razón, y se pusieron a



Tales de Mileto

ello. Y así surgen la Filosofía, las Matemáticas y la Ciencia en sentido moderno del término.

Se suelen atribuir a **Tales de Mileto** (640-546 a. de C.), uno de los *siete sabios* de la antigüedad, la paternidad de las primeras demostraciones en Matemáticas. No se sabe mucho de su vida ni han quedado constancia de sus escritos originales, pero sus biógrafos coinciden en su insistencia en que los resultados geométricos, por intuitivos que parecieran, debían someterse a un riguroso análisis lógico para ser aceptados. La tradición atribuye a Tales la *demostración*, entre otros, de los siguientes resultados:

- Un diámetro divide al círculo en dos partes iguales.
- Los ángulos de un triángulo suman dos rectos.
- Un ángulo inscrito en un semicírculo, es recto.

No conocemos las demostraciones originales de Tales, pero, como las primeras de las que nos ha llegado constancia, consistirían en tratar de *hacer ver* o *poner en evidencia* los resultados, de modo que adquirieran un carácter de *certeza irrefutable*. Por ejemplo, algunas de las demostraciones de propiedades aritméticas de los números naturales que nos han llegado son las siguientes:

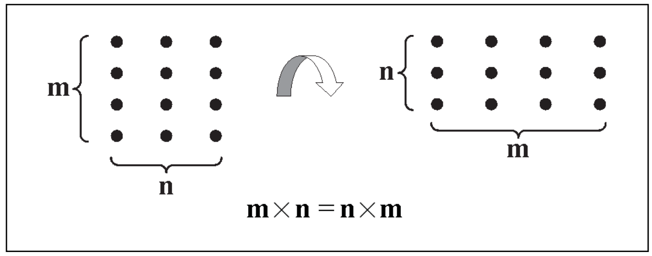


Figura 3

Recuérdese que $m{\times}n$ representa la suma de m colecciones de n elementos cada una, mientras que $n{\times}m$ es la suma de n grupos de m elementos cada uno. El diagrama anterior (dibujado aquí para $m=4$ y $n=3$) muestra de modo irrefutable la conmutatividad del producto de *cualquier* par de números naturales.

Del mismo modo el gráfico siguiente prueba, sin lugar a dudas, que la suma de dos números impares es un número par:

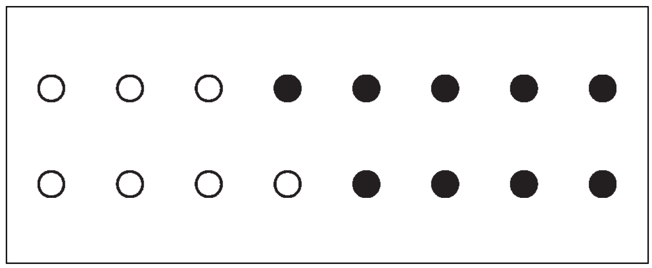


Figura 4

Pitágoras de Samos, nacido alrededor del 572 a. de C. fue uno de los mejores discípulos de Tales y fundador de la sociedad secreta de los Pitagóricos, dedicados a la búsqueda de la verdad. La constatación de la existencia de relaciones matemáticas precisas en muchos fenómenos naturales (Astronomía, música, etc.) hizo que la Filosofía pitagórica diera gran importancia al estudio de los números naturales y sus relaciones, lo que les llevó a desarrollar una parte sustancial de la aritmética. La asunción de que todo objeto estaba formado por una colección de *átomos* individuales e indivisibles (recuérdese la afirmación de que *todo es número*) hace que, en particular, dos magnitudes geométricas análogas sean siempre *conmensurables*, es decir, exista una unidad de medida común para ambas. De este modo, las dos magnitudes están en la misma relación que los correspondientes múltiplos de la unidad de medida común. Estos argumentos permitían visualizar fácilmente los razonamientos geométricos, convirtiéndolos en muchos casos en problemas aritméticos. De este modo, los pitagóricos formularon y desarrollaron una gran cantidad de resultados sobre la geometría del plano.

Pero hete aquí que a mediados del siglo V a. de C. tiene lugar un descubrimiento fundamental: ¡existen segmentos *inconmensurables*! (por ejemplo, el lado y la diagonal del cuadrado o el lado y la diagonal del pentágono regular).[4] Por tanto, todos los resultados basados en la hipótesis de conmensurabilidad de segmentos deben ser puestos en duda. La geometría *no* es aritmética y los objetos matemáticos, no eran tan simples como se pensaba. A este cataclismo vino a unirse el producido por los distintos argumentos (*paradojas*) de **Zenón de Elea** (hacia 500 a. de C.) contra la pluralidad y el movimiento. A través de una serie de brillantes experimentos mentales, Zenón muestra la inconsistencia lógica del movimiento. El punto crucial de los argumentos de Zenón estriba en la utilización de procesos *infinitos* en sus razonamientos, lo que llevó a los matemáticos griegos a excluir cualquier traza del infinito en sus matemáticas (incluyendo el concepto de límite), lo que supuso una fuerte limitación a su desarrollo y crecimiento.

Esta *crisis de fundamentos* hizo cuestionar la seguridad del método seguido hasta entonces en los razonamientos matemáticos, lo que llevó a los pensadores griegos de la segunda mitad del siglo V a. de C. al establecimiento de un nuevo método: el *axiomático-deductivo*, uno de cuyos ejemplos paradigmáticos es, precisamente, el tratado de *Los Elementos* de Euclides. Se trata de partir de una pocas aseveraciones *evidentes* (o **axiomas**; en el caso de *Los Elementos* se trata de 23 *definiciones*, 5 *postulados* y 5 *nociones comunes*) y, utilizando exclusivamente las leyes de la lógica deductiva (algunas recogidas en las *nociones* comunes, aunque la mayoría están implícitas en *Los Elementos*[5]) ir obteniendo, a través de etapas simples, nuevos resultados que, a su vez, pueden ser usados en los razonamientos posteriores, evitando argumentos circulares. Esencialmente, éste sigue siendo el método que se utiliza en los escritos matemáticos actuales, aunque los puntos de partida pueden estar muy alejados de las *verdades evidentes* iniciales de la teoría.

Pero incluso en los aparentemente sólidos *Elementos* de Euclides se pueden encontrar construcciones no claramente justificadas con la sola asunción de los axiomas establecidos por el autor. Ya en la *Proposición I.1* (¡la primera del libro!), en que se prueba que sobre cualquier segmento **AB** se puede construir un triángulo equilátero, aparece una dificultad. La demostración discurre así: Se trazan circunferencias de centros en **A** y en **B**, de radio la longitud del segmento, y el punto de corte **C** es el otro vértice del triángulo buscado (véase **figura 5**).

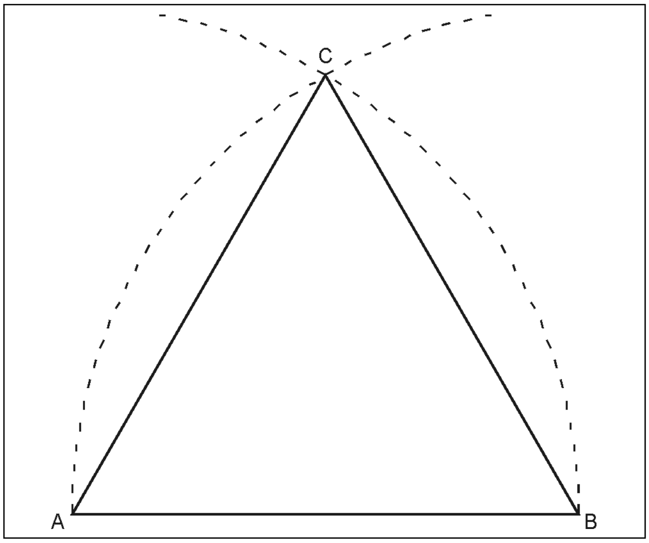


Figura 5

Pero ¿por qué las dos circunferencias se cortan? Nada en las definiciones, los postulados o las nociones comunes permite asegurarlo. Hace falta un nuevo axioma *de continuidad,* como advirtió el gran **D. Hilbert** (1862-1943).

Otro ejemplo: supongamos cuatro puntos sobre la recta, **A**, **B**, **C**, **D**; supongamos que **B** se halle entre **A** y **C** y que **C** esté situado entre **B** y **D** (véase **figura 6**). Parece razonable deducir que, necesariamente, **B** está

4 A veces se atribuye el descubrimiento de los inconmensurables al pitagórico **Hipaso de Metaponte**. La leyenda dice que sus compañeros de hermandad, al percatarse de las consecuencias del descubrimiento, llevaron a Hipasos mar adentro y lo arrojaron por la borda para que muriese.

5 La primera recopilación de las leyes lógicas se encuentra en la obra de **Aristóteles** *El Organon* ("El útil").

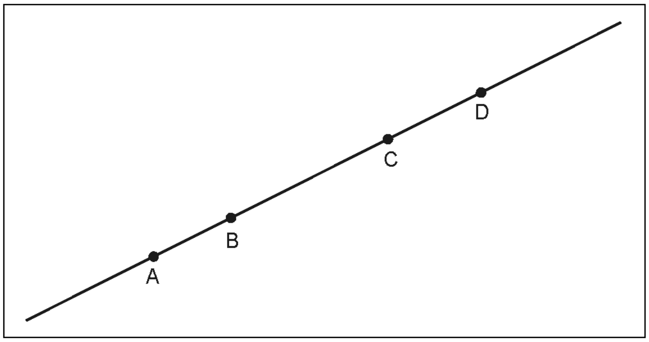


Figura 6

ente **A** y **D**, ¿no?. Pues, sorprendentemente, no es posible demostrar este resultado a partir de los axiomas de Euclides (Este hecho fue detectado por **M. Pasch** nada menos que en 1882). La revisión crítica de *Los Elementos* fue llevada a cabo por Hilbert, alrededor de 1900, quien tuvo que elevar la lista de los postulados hasta 20 para desarrollar correctamente la Geometría euclídea.

En todo caso, Euclides cometió a lo más un pecado de *omisión*, percibido solamente tras más de 2200 años de evolución en las Matemáticas. Ninguna de las 465 proposiciones contenidas en *Los Elementos* es falsa, lo que contrasta con los textos de la misma época sobre cualquier otro aspecto de la Ciencia, llenos de errores y falsedades desde el punto de vista actual.

Tras la edad de oro de los siglos IV y III antes de Cristo, el desarrollo teórico de la matemática griega comenzó a declinar. **Arquímedes** (287-212 a. de C.) significó la cúspide del pensamiento matemático de la antigüedad y hubieron de transcurrir más de 18 siglos para que la Matemática llegara a su altura.

3. EL RENACIMIENTO Y LA APARICIÓN DE LOS *INDIVISIBLES*

El colapso del Imperio Romano de Occidente en el siglo V de nuestra Era llevó a Europa a un largo período de oscuridad en el aspecto cultural y científico. La herencia cultural griega fue conservada en parte y finalmente transmitida a Europa a través del Imperio Bizantino primero y, sobre todo, de los Árabes, quienes la enriquecieron con la incorporación de las ideas sobre aritmética y álgebra de las civilizaciones orientales, especialmente con la notación posicional y la introducción del 0. La asimilación y aceptación de la cultura griega y en particular del pensamiento Aristotélico por parte de la Iglesia Católica a partir del siglo XIII, sentó las bases para el renacimiento intelectual en la cultura Occidental.

A partir del siglo XIV, algunos filósofos (muchos de ellos pertenecientes al *Merton College* de Oxford) inician el estudio *cuantitativo* del movimiento, lo que implica cuantificar la variación de magnitudes continuas (las que son "infinitamente divisibles", según Aristóteles). En particular, comienzan a estudiar el movimiento *uniformemente acelerado*[6], esto es, aquel en el que la velocidad experimenta incrementos iguales en intervalos iguales de tiempo. Esta definición necesita la noción de *velocidad instantánea* que, por supuesto, se utilizaba de manera intuitiva y poco precisa, pero permitió obtener resultados correctos.

El parisino **N. de Oresme** (1323-1382) realizó una aportación fundamental al introducir representaciones gráficas para estudiar el movimiento. Su idea fue representar una magnitud variable (temperatura, velocidad, densidad, etc.) por medio de un segmento vertical cuya longitud en cada instante era (proporcional a) el valor de la cantidad. Esta técnica anticipa claramente la idea de dependencia funcional y representación gráfica.

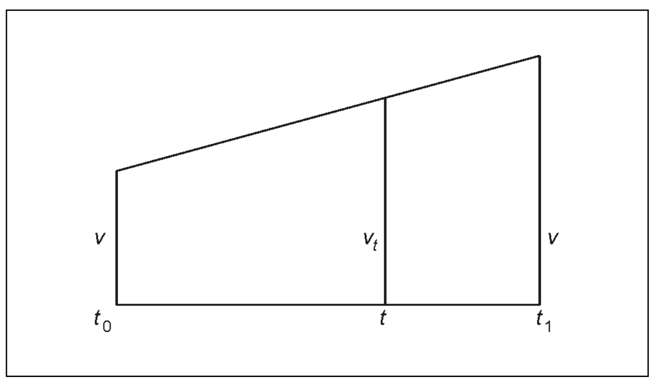


Figura 7

Por ejemplo, representa la velocidad de un punto móvil uniformemente acelerado en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ construyendo sobre cada punto del

6 Algo completamente extraño al pensamiento griego, que sólo consideraba movimientos *uniformes*.

intervalo un segmento igual a la velocidad del móvil en ese punto (véase **figura 7**). La definición de movimiento uniformemente acelerado implica que los extremos de esas líneas estén alineados. Por definición de velocidad instantánea, cada línea vertical es también el espacio recorrido en ese instante, luego el espacio total recorrido es la suma de esos *indivisibles*, es decir, el área del trapecio: $\frac{1}{2}(v_0+v_1)(t_1-t_0)$ (*regla de Merton*).

Por otro lado, la aparición de una nueva clase de artesanos libres despertó el interés en la búsqueda de nuevos materiales y, en general, por el desarrollo de la tecnología. Las exploraciones geográficas a través de miles de kilómetros de mar abierto demandaban nuevos y más precisos métodos para determinar la posición; el incremento del comercio exigía nuevos y más rápidos mecanismos de cálculo; la introducción de la pólvora significó la aparición de nuevos problemas militares, como el movimiento y trayectoria de los proyectiles. Al mismo tiempo, el conocimiento de extrañas civilizaciones provocó un sentimiento de apertura en la cultura europea y la invención de la imprenta permitió la diseminación del conocimiento, hasta entonces controlado férreamente por la Iglesia. Todo, en fin, contribuyó a que la idea de la búsqueda del conocimiento y el desarrollo científico para dominar la Naturaleza se convirtiera en un rasgo dominante de la civilización Europea moderna, preparando el terreno a la revolución científica que tuvo lugar a partir del siglo XVII.

La nueva mentalidad de los matemáticos del Renacimiento hace que estuvieran más interesados en la obtención de nuevos métodos y resultados que en el rigor de las pruebas. Este hecho, junto con la aparición de una escritura simbólica adecuada, facilitó el desarrollo de técnicas formales de cálculo y de los métodos infinitesimales.

Así, **J. Kepler** (1571-1630) utilizó razonamientos de este tipo para tratar de *demostrar* sus leyes del movimiento planetario. Más significativo para el tema fue la publicación en 1615 de su obra sobre la determinación exacta de los volúmenes de barricas de vino (muy importante para el comercio de la época). En ella, se considera un cuerpo sólido como unión de una cantidad infinita de piezas sólidas infinitesimales o *indivisibles*, de forma y tamaño conveniente para resolver el problema estudiado. Por ejemplo, considera la esfera de radio R compuesta por una infinidad de pirámides de vértice en el centro y base en la superficie de la esfera, todas ellas de altura R. Como el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base por la altura, al sumar todos los indivisibles se obtiene que el volumen de la esfera es $V = AR/3$, con A=superficie de la esfera $(=4\pi R^2)$. Con este tipo de técnicas, Kepler determina los volúmenes de más de 90 sólidos de revolución.

El uso sistemático de las técnicas de indivisibles se popularizó sobre todo por la obra del alumno de Galileo **B. Cavalieri** (1598-1647). A diferencia de Kepler, Cavalieri consideraba las figuras geométricas formadas por *indivisibles* de dimensión menor. Así, las áreas estaban formadas por infinitos segmentos paralelos a una recta fija o *regula* (como en el caso de Oresme); los volúmenes estaban constituidos por infinitos trozos de áreas planas equidistantes, etc. Cavalieri procedía después a establecer una biyección entre los indivisibles de *dos* figuras geométricas dadas, de modo que si entre los indivisibles correspondientes existía una cierta relación constante, se podía concluir que la misma relación existía entre las magnitudes de las figuras en cuestión. En general, la medida de una de las figuras era conocida y así se podía calcular la de la otra. En particular, resulta inmediatamente lo que todavía hoy se conoce hoy como *Principio de Cavalieri*:

> *Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones por planos paralelos a las bases a la misma distancia de ellas tienen áreas en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están en la misma razón.*

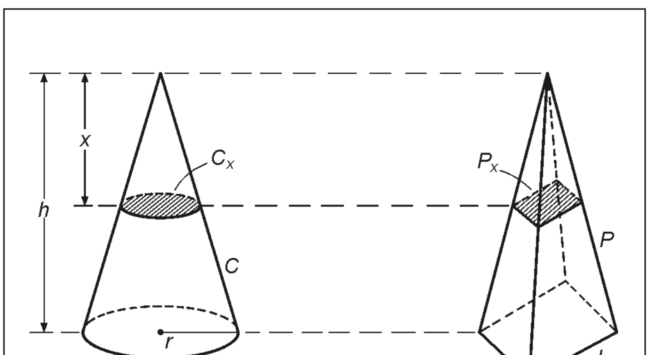


Figura 8

Por ejemplo si comparamos un cono circular C con base de radio r y altura h con una pirámide P de la misma altura y de base cuadrada, de lado 1, y consideramos una sección por un plano paralelo a la base, a distancia x de los vértices, un simple argumento de semejanza de triángulos nos permite obtener las fórmulas paras las áreas correspondientes C_x y P_x:

$$a(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}; a(P_x) = \frac{x^2}{h^2}$$

Es decir, $a(C_x) = \pi r^2 a(P_x)$.Por tanto, según el Principio de Cavalieri, $v(C) = \pi r^2 v(P) = \pi r^2 \frac{h}{3}$

El mismo Cavalieri y, por supuesto, sus contemporáneos, eran conscientes de la falta de rigor del método de los indivisibles. Para Cavalieri, los espectaculares resultados obtenidos bastaban para justificar el método, mientras que el *sentido común* era suficiente para evitar las falacias como las siguientes:

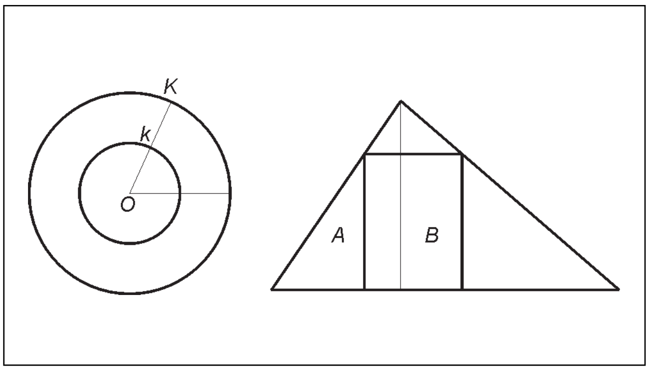


Figura 9

Consideremos en primer lugar dos círculos concéntricos, de modo que el mayor **C** tenga un radio K doble que el menor, **c**. Si consideramos como indivisibles de **C** la colección de sus radios, y hacemos lo mismo con **c**, de acuerdo con el método de los indivisibles el área de **C** debería ser el doble del área de **c,** pues es esta la relación entre sus indivisibles. ¡Sin embargo, sabemos que el área de **C** es *4 veces* el área de **c**!

Como segundo ejemplo, consideremos un triángulo cuya altura h lo divide en dos triángulos rectángulos *desiguales*, **A** y **B**. Consideremos **A** como la suma de sus líneas paralelas a h, y lo mismo **B**. Como se muestra en la figura, a cada indivisible de **A** le corresponde un único indivisible de **B** de la misma longitud, y recíprocamente. Siendo los indivisibles correspondientes iguales, su suma debería serlo también y, por tanto, ¡**A** y **B** tendrían la misma área!

Al fin y al cabo, como escribió más tarde Cavalieri, *El rigor es asunto de los filósofos, más que de los matemáticos* (¡!)

La aplicación de los métodos de los indivisibles al estudio del movimiento proporciona claras evidencias de las relaciones entre los problemas de determinación de la tangente a una curva y la del área encerrada bajo ella. Por ejemplo, la representación del espacio recorrido por un punto en el plano en función del tiempo (**Figura 10**), permite visualizar la noción de *velocidad instantánea en un instante* t_0 e identificarla con la pendiente de la tangente a la curva $e = e(t)$ en el punto t_0. En efecto, la *velocidad media* entre t_0 y $t_0 + \Delta t$ (e.d., aquella con la se movería el punto para recorrer el mismo espacio, si fuera a velocidad uniforme) es $e(t_0+\Delta t) - e(t_0)/\Delta t$, y, según se ve en la figura, es precisamente la pendiente de la secante que une los dos puntos de la cuerva en cuestión. Si el intervalo de tiempo considerado se hace *"infinitesimal"*, la secante se confundirá con la tangente y la velocidad media con la que, intuitivamente, debería considerarse *velocidad instantánea* del punto en t_0.

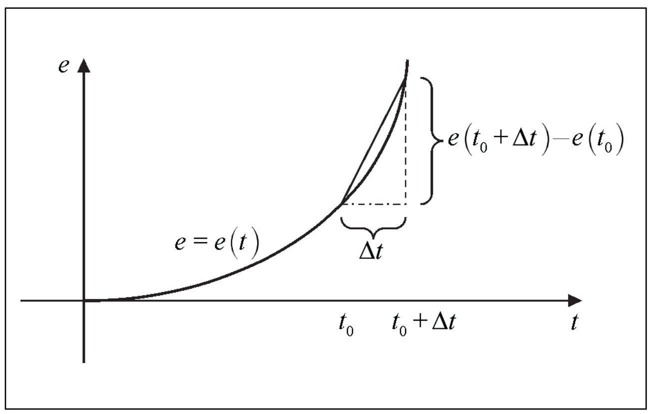


Figura 10

Por otro lado, si representamos ahora la gráfica de la velocidad del punto en función del tiempo (**Figura 11**), el argumento de Oresmes sigue siendo válido: $v(t)$ es, por definición de velocidad instantánea, el espacio recorrido por el móvil en un elemento infinitesimal de tiempo. La suma de estos *indivisibles* entre

0 y t_0 es, por tanto, el área bajo la curva y coincide con el espacio recorrido por el punto hasta el instante t_0.

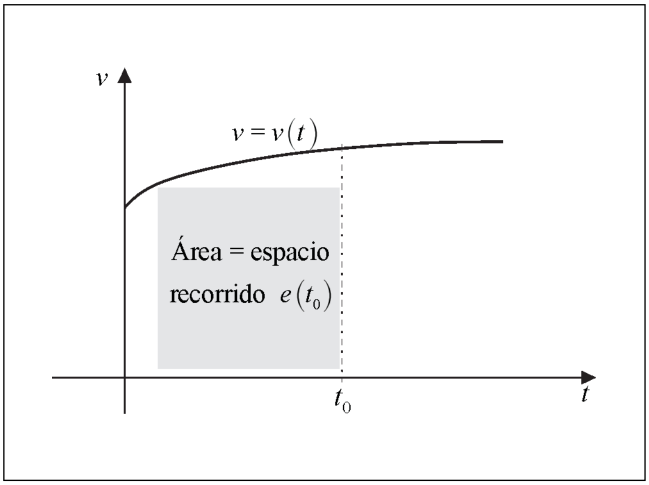


Figura 11

Estos resultados, implícitamente aceptados desde los tiempos de Oresme, adquieren confirmación “matemática”, y como tal se explicitan en *El Discurso* de **Galileo** (1638), y son formulaciones embrionarias del *Teorema Fundamental del Cálculo*[7].

4. LOS *INFINITÉSIMOS* Y EL DESARROLLO DEL CÁLCULO

Poco a poco los métodos geométricos para expresar una magnitud como “suma de indivisibles” se van convirtiendo en técnicas aritméticas para la sumación de series infinitas. A este cambio de mentalidad contribuyeron no poco los trabajos de **R. Descartes** y **P. Fermat** que sentaron las bases de la *Geometría Analítica*, cuyo objetivo era la aplicación de los métodos del álgebra a la resolución de problemas geométricos. El proceso de aritmetización de los indivisibles culmina con la obra de **J. Wallis** (1616-1703), quien en su *Arithmetica infinitorum* abandona el marco geométrico y asigna valores numéricos a los indivisibles y los somete a manipulaciones aritméticas formales[8]

Y así, a lo largo de este proceso de aritmetización, los indivisibles geométricos van dando paso a un nuevo ente, el *infinitésimo*. Se trata de un objeto ideal con propiedades asombrosas: Se puede operar con él como si fuera un número; aunque no es 0, es menor en valor absoluto que cualquier cantidad positiva, y lo mismo sucede con cualquiera de sus múltiplos; sin embargo, una cantidad *infinita* de estos elementos, puede ocasionar un efecto o magnitud finita. A lo largo del siglo XVII estos objetos *infinitesimales* se van introduciendo como elementos auxiliares de cálculo para, tras una manipulación formal, hacerlos desaparecer igualándolos a 0.

Pero es en manos de **Isaac Newton** (1642-1727) y de **Gottfried W. Leibniz** (1646-1716) cuando estas técnicas alcanzan su madurez, hasta convertirse en una nueva y potente rama de las matemáticas: el *Cálculo*, que iba a ser la herramienta fundamental para llevar a cabo el programa de Galileo de matematización de la Naturaleza. Los métodos utilizados por Newton y Leibniz no difieren esencialmente de los empleados por sus predecesores. Pero lo que en Fermat, Descartes o Roverbal eran una serie de reglas particulares para resolver unos problemas concretos, se transforma en manos de Newton y Leibniz en un método muy general para la determinación de tangentes y cuadraturas, junto con el desarrollo de algoritmos formales para el cálculo con magnitudes infinitesimales.

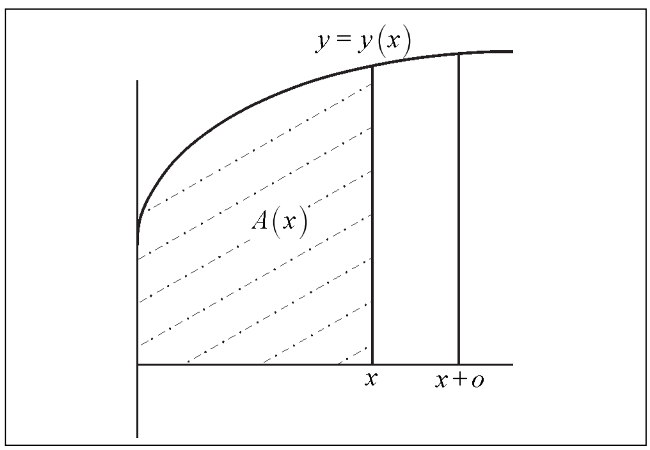
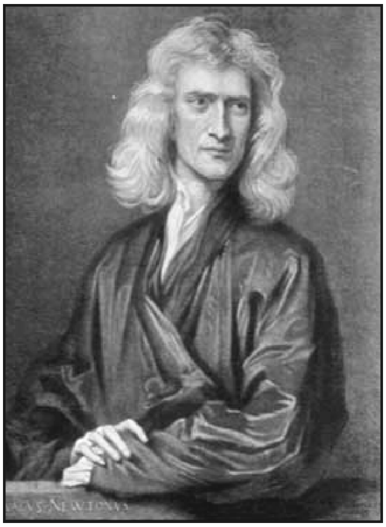


Figura 12

[7] **I. Barrow**, en la Lección X de sus *Lectiones Geometricae* (1670), enuncia y demuestra un teorema geométrico, independiente de cualquier interpretación física, que muestra claramente la relación inversa que existe entre el cálculo de tangentes y el de cuadraturas. Véase, p. ej., [Ed; págs. 138-140].

[8] Es aquí donde aparece por primera vez el signo ∞ para denotar el infinito.



Isaac Newton

Gottfried W.Leibniz

Así, por ejemplo, para el cálculo del área $A(x)$ entre el eje de abscisas y la curva $y = y(x)$ hasta el punto de abscisa x Newton calcula primero su *velocidad de cambio*, esto es, la razón $\left[A(x+o) - A(x)\right]/o$ de la variación del área entre dos puntos infinitamente próximos $x+o$ y x la variación (infinitesimal) de la abscisa. Es decir, la altura del "rectángulo" infinitesimal limitado por la curva $y = y(x)$ y el eje de abscisas entre los puntos $x+o$ y x que se confunde con la ordenada y (véase **figura 12**). De esta forma Newton establece explícitamente el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\frac{dA}{dx} = y(x)$$

Aunque, como sabemos, esta relación era conocida en casos particulares (relación velocidad-espacio recorrido, etc.), lo importante es que Newton "da la vuelta" a esta fórmula, lo que le permite obtener un procedimiento algorítmico de cálculo de áreas (si se posee un algoritmo para el cálculo de derivadas, claro). Esta idea de considerar el cálculo de áreas (la "integral") como el proceso inverso a la derivación va a imponerse hasta el primer tercio del siglo XIX.

Para el cálculo de derivadas Newton emplea sistemáticamente los infinitésimos. Por ejemplo, si

$$A(x) = \frac{n}{m+n} a x^{(m+n)/n},$$

entonces, utilizando su fórmula del binomio, resulta

$$A(x+o) = \frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n} =$$

$$\frac{na}{m+n}\left(x^{(m+n)/n} + \frac{m+n}{n} x^{m/n} o + \text{términos en } o^2\right).$$

Por tanto,

$$A(x+o) - A(x) = a x^{m/n} o + \text{términos en } o^2.$$

Dividiendo por o e igualando a 0 todos los términos que contenga el infinitésimo o, resulta que, en este caso, $\frac{dA}{dx} = a x^{m/n}$, lo que permite a Newton calcular el área bajo todas las curvas de la forma $y = a x^{m/n}$. En el opúsculo *De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas* (1669), Newton establece 3 reglas para el cálculo del área bajo la curva $y = f(x)$:

1. Si $f(x) = a x^{m/n}$, se aplica la fórmula ya obtenida.
2. Si $f(x)$ es una suma finita de términos del tipo anterior, el área es la suma de las áreas limitada por cada uno de los términos (linealidad de la integración).
3. Finalmente, en el caso general se desarrolla $f(x)$ en serie de potencias y se integra término a término.

Ante las dificultades para la fundamentación rigurosa del cálculo con infinitésimos, Newton destaca que lo que realmente importa es la *razón* de cantidades infinitesimales, que puede ser finita independientemente de la naturaleza de los factores. Este método de *últimas razones de cantidades evanescentes* está muy cerca de la noción actual de *límite* de un cociente incremental, pero los problemas de cálculo práctico y, sobre todo, su aplicación a magnitudes que depende de dos o más variables, hizo que pronto fuera sustituido por el *método de las fluxiones*, de clara inspiración física: Para ello, Newton considera que las cantidades variables a estudiar están generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y planos. Por ejemplo, la curva plana $f(x,y)=0$ se considera como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos rectas móviles, una horizontal y otra vertical.

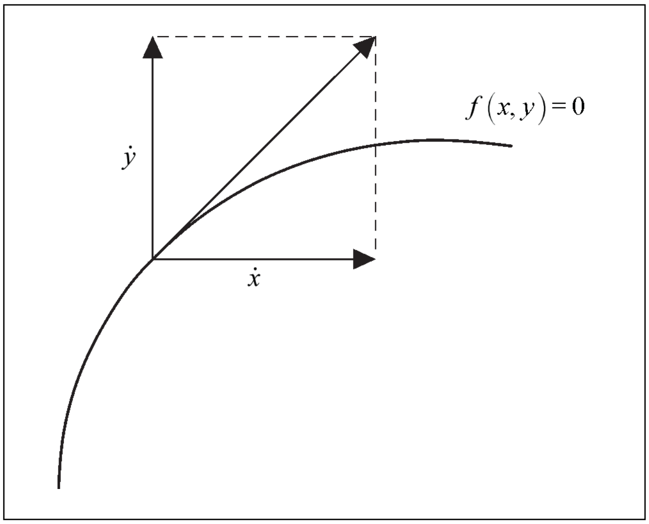


Figura 13

De este modo, las coordenadas x e y de cada punto que describe la curva son funciones del tiempo, y la gráfica de la curva es composición de un movimiento horizontal con velocidad instantánea $\dot{x}$ y un movimiento vertical con velocidad instantánea $\dot{y}$ (nociones que Newton no define y considera intuitivamente evidentes por razones físicas). Por la regla del paralelogramo, la pendiente de la tangente a la curva (que coincide con la "velocidad de cambio" de la ordenada y respecto a la abscisa x) es

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(=\frac{dy}{dx}\right).$$

Las cantidades x e y que varían con el flujo del tiempo fueron llamadas por Newton *fluentes* y su velocidad de cambio, sus *fluxiones.* A su vez, las fluxiones pueden considerarse como fluentes, con fluxiones $\ddot{x}, \ddot{y}$ etc.

Newton plantea inmediatamente el problema fundamental: dada una relación entre cantidades variables, encontrar la relación entre sus fluxiones, y *recíprocamente*. Este último caso comprende tanto el problema del cálculo de primitivas (en el caso de una relación simple $\dot{y}/\dot{x}=g(x)$, como el de la resolución de una *ecuación diferencial* general $h(x,\dot{y}/\dot{x})=0$. Newton se embarca en una serie de cálculos que le permiten obtener las reglas generales de derivación de polinomios, productos y cocientes y, combinándolas con el uso de series infinitas, obtener un algoritmo sistemático para abordar estos problemas (véase [Ed; págs. 191-230]).

Veamos con un ejemplo como aborda Newton el problema de determinar la relación entre las fluxiones. Supongamos que $f(x,y)=\sum a_{nm}x^n y^m=0$. Newton aduce que durante un tiempo *infinitesimal o* el espacio recorrido por las fluentes x e y es proporcional a sus velocidades, como si el movimiento fuera *uniforme*. Por tanto, al cabo del tiempo o, el punto x se habrá movido al $x+\dot{x}o$ y el y al $y+\dot{y}o$ y como el punto final ha de estar sobre la curva, resulta

$$\sum a_{nm}(x+\dot{x}o)^n(y+\dot{y}o)^m=0.$$

Desarrollando por la fórmula del binomio:

$$\sum a_{nm}x^n y^m+\sum a_{nm}x^n\left(my^{m-1}\dot{y}o\right)+$$
$$\sum a_{nm}y^m\left(nx^{n-1}\dot{x}o\right)+\text{términos en } o^2=0.$$

Usando que $\sum a_{nm}x^n y^m=0$, dividiendo por o y, finalmente, suprimiendo los términos que contengan o, resulta:

$$\sum\left(\frac{n\dot{x}}{x}+\frac{m\dot{y}}{y}\right)a_{nm}x^n y^m=0,$$

de donde se obtiene fácilmente $\dot{y}/\dot{x}$.

Junto con las fluxiones, la otra herramienta utilizada sistemáticamente por Newton fue el uso de series infinitas de funciones (fundamentalmente, series de potencias), tratadas formalmente como "polinomios de grado infinito", derivándolas o integrándolas término a término sin ningún reparo.

El otro creador del Cálculo, G. Leibniz, tiene una trayectoria vital completamente diferente a la de Newton. Hombre de mundo, con amplia formación en derecho y filosofía y diplomático profesional es también uno de los genios más versátiles de todos los tiempos, con contribuciones fundamentales a la filosofía, matemáticas e ingeniería. Inventor de una de las primeras máquinas de calcular y pionero en la búsqueda de un sistema de notación y terminología que codificara el razonamiento lógico, no es extraño que se sintiera atraído por las matemáticas y la búsqueda de un sistema general de cálculo.

El filósofo Leibniz tuvo muchos menos reparos formales en el uso de los infinitésimos que el físico Newton. Leibniz no quería hacer un misterio de los infinitésimos ni apelaba a ninguna intuición geométrica para justificarlos. Simplemente, los usaba[9]. Con su mente lógica pensaba que, independientemente de la naturaleza de los objetos, si se especificaban claramente las reglas de uso y éstas se aplicaban correctamente, el resultado también lo sería.

Para Leibniz, las curvas se consideran formadas por una infinidad de segmentos rectilíneos infinitesimales, coincidentes cada uno con un segmento de una tangente a la curva. La aproximación de Leibniz al cálculo se basa en el análisis de las *diferencias* infinitesimales de una cantidad variable (de ahí el nombre de *Cálculo Diferencial*). La diferencia de dos valores *sucesivos* de x es la diferencial dx y lo mismo para dy. Se supone que las cantidades dx y dy son no nulas, pero despreciables con respecto a los valores de las variables x e y. Análogamente, se supone que un producto de diferenciales, como $(dx)(dy)$ o $(dy)^2$ es despreciable frente a dx y dy. Hay una sucesión infinita de diferenciales dx o dy asociadas a una curva (la sucesión de diferencias de la sucesión de abscisas u ordenadas de la curva). Esta sucesión de diferencias tiene a su vez una sucesión de diferencias, cuyos elementos son las *diferenciales de segundo orden* $d(dx)=d^2x$, etc. Con estos supuestos se pueden obtener sin problemas las fórmulas de diferenciación usuales.

Según declaró Leibniz en alguna ocasión, su inspiración se originó en un trabajo de Pascal para el cálculo del área de un hemisferio, en el que aparecía una figura (el "triángulo diferencial"). Leibniz se percató que esta figura se podía reproducir en cualquier curva,

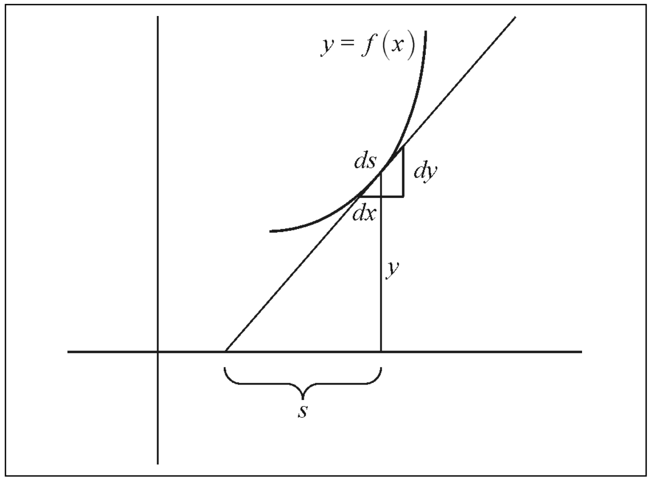


Figura 14

de modo que la determinación de la pendiente de la tangente en un punto depende de la razón de las *diferencias* de la ordenada y la abscisa cuando éstas se hacen infinitesimales, y la cuadratura depende de la *suma* de rectángulos infinitamente pequeños, siendo estas operaciones mutuamente inversas.

Así, de la **figura 14** resulta (por semejanza de triángulos) que la razón de la diferencial de la ordenada dy a la de la abscisa dx es la misma que la de la ordenada y a la subtangente s (y, por tanto, ¡una cantidad finita siempre!).También resulta que el segmento infinitesimal de la curva ds es la hipotenusa del triángulo diferencial, luego

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

lo que inmediatamente proporciona la longitud de la curva como suma de la de los segmentos infinitesimales que la forman:

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Cuando el segmento ds gira alrededor del eje x en un círculo de radio y, genera un área infinitesimal

$$dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

[9] En una carta escrita dos meses antes de su muerte, Leibniz manifestaba que no creía que existieran magnitudes realmente infinitas o infinitesimales. Pero, tanto si existen como si no, estos conceptos son *ficciones útiles para abreviar y utilizar un lenguaje universal.*

Sumando estas áreas infinitesimales obtenemos el área de la superficie

$$A = \int dA = \int 2\pi\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Estos ejemplos ponen de manifiesto una de las grandes ventajas del cálculo de Leibniz: su notación (que es esencialmente la que utilizamos hoy en día) y la facilidad de manipulación formal con los símbolos para obtener resultados correctos.

Desde el punto de vista conceptual el método de Newton toma como elemento central del cálculo la noción de *derivada,* como razón de fluxiones (mucho más próximo a la noción moderna de *límite*) en lugar de considerar separadamente las diferenciales dx y dy. Una segunda derivada es, simplemente, una fluxión de una fluxión, y cada fluxión necesita sólo considerar infinitesimales de primer orden, por lo que Newton no necesita la jerarquía de infinitesimos de Leibniz. También hay diferencias en la concepción de la integral: Para Newton es simplemente una fluente a determinar, conocida su fluxión. Para Leibniz, la integral es una suma de infinitésimo. Por supuesto, ambos calculan finalmente la integral por antiderivación, ya que esa es una característica común en ambos métodos. Finalmente, Leibniz presta un interés relativo a la teoría de series de funciones, mientras que para Newton es herramienta fundamental de su cálculo.

Por lo demás, los resultados a los que se llega son similares.

El éxito del Cálculo, tanto en Matemáticas como en su aplicación a la descripción de la Naturaleza, fue espectacular, y el uso de los infinitésimos se popularizó a lo largo del siglo XVIII.. Probablemente el más hábiles manipulador de estos entes (junto con su inversos, los números infinitamente grandes) fue el genial y prolífico **Leonhard Euler** (1707-1783), uno de los matemáticos más innovadores de la historia.

Por su formación y estrecha relación con los Bernouilli, la concepción de Euler del cálculo está más próxima a la de Leibniz que a la de Newton, haciendo hincapié en el carácter formal de los símbolos que se usan en el mismo, con hábiles extrapolaciones formales de lo finito a lo infinito. Desde un punto de vista actual, sorprende a veces la audacia y confianza de Euler en las manipulaciones formales, muy lejos de nuestra presente concepción de rigor, pero que le permite obtener resultados espectaculares. Por ejemplo, veamos cómo resuelve Euler el famoso *Problema de Basilea*, es decir, el cálculo de la suma[10]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Euler comenzó a trabajar sobre el tema en 1730, obteniendo una aproximación del valor de la suma con seis decimales exactos. Cuando en 1734 anunció que había resuelto el problema, se convirtió de repente en uno de los matemáticos más reputados de su época. El trabajo (uno de los más famosos de Euler) fue presentado en la Academia de San Petersburgo en 1735, aunque no apareció publicado hasta 1740, con el título *De summis serierum reciprocarum.* Y, como es habitual en Euler, contiene hasta tres demostraciones de la solu-

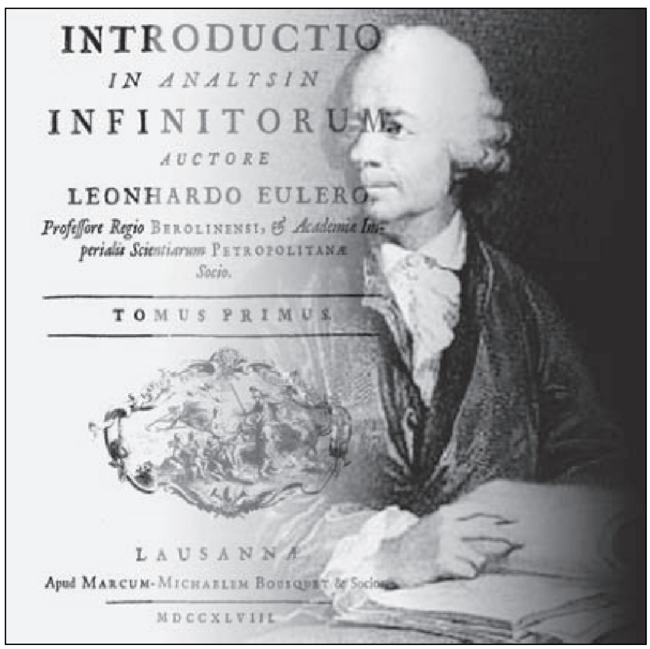


Figura 15

[10] El nombre dado al problema se debe a que **Jakob Bernouilli** dedicó en Basilea muchos esfuerzos a tratar de resolverlo (de hecho, demostró la convergencia de la serie y que la suma era menor o igual que 2)

ción y muchos otros resultados. Su argumento se basa en una extrapolación formal de las propiedades de los polinomios a las series infinitas. Concretamente, si $P(x)$ es un polinomio de grado n con término independiente $P(0)=1$ y con raíces $a_1,...a_n$, entonces P admite la factorización

$$P(x)=1-\alpha_1 x+\alpha_2 x^2-...+(-1)^n \alpha_n x^n = \left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)...\left(1-\frac{x}{a_n}\right)$$

Realizando las operaciones e identificando coeficientes, resulta que

$$\alpha_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}, \quad \alpha_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n},$$

y, en general, α_k es la suma de los inversos de todos los productos de k raíces distintas. Por otro lado, desarrollando las potencias

$$\left(\sum_{j=1}^{n} 1/a_j\right)^k$$

es fácil ver, por inducción, que si $S_k=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^k}$, se tiene

$$S_1=\alpha_1, S_2=\alpha_1^2-2\alpha_2, S_3=\alpha_1^3-3\alpha_1\alpha_2, \text{etc.}$$

Y ahora se produce el *salto al infinito*: ¡Euler considera las series infinitas como polinomios de grado infinito, y aplica sin reparos las fórmulas obtenidas anteriormente a las series! En particular, en su *tercera* demostración del resultado, Euler aplica su método a la función $g(x)=sen\, x/x$, para $x\neq 0$; $g(0)=1$, cuyo desarrollo en serie (bien conocido) es

$$g(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+...$$

y cuyos ceros son $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,.... Entonces

$$S_2=\alpha_1^2-2\alpha_2=\frac{1}{3}=2\times\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+...\right)= \frac{2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\right)$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

¡El problema de Basilea ha sido resuelto! Pero Euler no se detiene aquí. Siguiendo el mismo argumento obtiene los valores de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \text{ para } 1\le k\le 6.$$

Varios de los colegas de Euler (entre ellos **Daniel** y **Nicolás Bernouilli**) presentaron diversas objeciones a su demostración: por ejemplo, la función sen x podía tener otras raíces complejas, además de las reales consideradas por Euler. Más importante era la necesidad de justificar que las fórmulas de Newton para polinomios fueran válidas para series. Más aún, mientras que un polinomio queda caracterizado por sus raíces, eso no es cierto para otras funciones. Por ejemplo, $sen\, x/x$ y $e^x sen\, x/x$ tienen los mismos ceros reales, pero claramente no pueden tener el mismo desarrollo en serie de potencias. El mismo Euler era consciente de estas dificultades, pero el hecho de que su método condujera también a resultados conocidos y que los cálculos numéricos los avalaran en otros casos le persuadieron de su validez.

Y esto nos lleva a la idea de *demostración* que tenía Euler: En esta época, más que una verdad matemática incontestable, se trataba de exponer una *predicción con altas dosis de fiabilidad*, corroborada con la comprobación de una serie de casos particulares del enunciado y combinada con el uso constante de ejemplos numéricos concretos que suministran una mayor evidencia de la certeza de lo afirmado. Por ello, no es extraño que los matemáticos de la época se enzarcen en animadas polémicas sobre la aceptabilidad de determinados resultados. Y, desgraciadamente, la utilización incontrolada de los infinitésimos y los automatismos formales era una fuente constante de paradojas y contradicciones que producía un sin fin de controversias y una creciente sensación de inseguridad. Por ejemplo, **Johann Bernouilli** sostenía que $\log(-n)=\log n$, ya que $2\log(-n)=\log(-n)^2=\log n^2=2\log n$. Por el contrario, Leibniz sostenía que los logaritmos de los números negativos eran imaginarios, basándose en ciertas manipulaciones con series divergentes[11]. No menos problemas surgían de la utili-

[11] Fue Euler quien obtuvo la solución correcta, vía las llamadas *fórmulas de Euler* en [Eu]. En la introducción, hace referencia a la controversia y anuncia su intención de eliminar las contradicciones "*para que pueda verse lo difícil que es descubrir la verdad y defenderse contra la inconsistencia, incluso cuando dos grandes hombres abordan el problema...*" (Obviamente, se refiere a J. Bernouilli y G. Leibniz).

zación automática de la antiderivación para calcular áreas o integrales definidas. Por ejemplo, una vez conocido el valor de $\ln(-1)$, se tiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{-1}^{1} = -\ln(-1) = (2n+1)\pi i \ (n \text{ entero}).$$

¿Cómo se explica que la suma de infinitésimos reales $\frac{dx}{x}$ pueda originar infinitos valores, todos ellos imaginarios? El mismo tipo de contradicción había sido puesto de manifiesto por **J. d'Alembert** (1717-1783) al obtener en 1768

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2,$$

Es decir, ¡un número negativo como suma de infinitésimos positivos!

A. L. Cauchy

5. LA BÚSQUEDA DEL RIGOR

Desde sus mismos inicios, las inconsistencias lógicas de los infinitésimos fueron objeto de críticas. Una de las más demoledoras se debe al obispo irlandés **G. Berkeley** (1685-1753), en su ensayo *The Analyst*[12] (1734), en el que acusa a los seguidores de Newton y Leibniz de utilizar métodos que no comprenden, basados en inconsistencias lógicas y conceptos ambiguos, aunque reconoce que los resultados obtenidos pueden ser correctos, como consecuencia de una cierta "compensación de errores". Curiosamente, esta explicación se iba a repetir posteriormente por quienes intentaron encontrar una base sólida para la fundamentación del Cálculo, incluyendo a personajes de la talla de **Maclaurin, Lagrange** o **L. Carnot.**

Lo cierto es que, a comienzos del siglo XIX, se hizo inevitable una revisión crítica profunda del Cálculo. Y uno de sus principales impulsores fue **A. L. Cauchy** (1789-1857), profesor de la *Ècole Polytechnique* de París. En su famoso *Cours d'analyse* (1821) construye todo el edificio del Análisis sobre la noción de *límite.* A continuación, Cauchy **define** un infinitésimo como *una variable con límite cero* y, de este modo, evita todas las confusiones y controversias que resultan de considerar los infinitésimos como cantidades *constantes* menores que cualquier número positivo. Sobre este concepto, Cauchy desarrolla los contenidos básicos de la Teoría de Funciones. Toma como noción primordial del cálculo diferencial la de *derivada*, definida como límite del cociente de incrementos, y construye de forma rigurosa todo el cálculo. También se plantea la necesidad de *demostrar* la existencia de la integral definida, entendida como área del recinto de ordenadas de la función a integrar, y lo consigue al menos para funciones continuas. En fin, este proceso de rigorización iba a continuar a lo largo de todo el siglo XIX, culminando con los trabajos de **K. Weierstrass** (1815-1897) y su escuela, que establecen la definición de límite en los términos ε-δ tan habitual en los textos actuales y que permite construir todo el Cálculo en términos de las propiedades del sistema de números reales[13], sin ninguna mención a los infinitésimos.

A lo largo de este proceso de fundamentación, la propia noción de rigor va cambiando. El consenso sobre lo que es un paso obvio o trivial depende también del contexto histórico y cultural. Así, el propio Cauchy enuncia como evidente el criterio que lleva su nombre para asegurar la convergencia de una sucesión de números reales. Este criterio es equivalente a la asunción de que todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente, tiene supremo (es decir, una cota superior *mínima*). Sin embargo, estas son las propiedades que, tomadas como axiomas, están en la

[12] Puede consultarse una traducción al castellano en [Nw; págs. 214-219].

[13] **R. Dedekind** y **G. Cantor** publicaron en 1872 sendas construcciones rigurosas de los números reales.

K. Weierstrass

base de las construcciones rigurosas de los números reales de Cantor y Dedekind, respectivamente. Otro ejemplo: el hecho de que una función (real de variable real) continua en un intervalo cerrado que toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo, debe anularse en algún punto del interior, era una propiedad *evidente* (de hecho, equivalente a la continuidad)[14] para gran parte de los matemáticos del siglo XIX. El primero que se planteó la necesidad de demostrar este hecho fue un desconocido monje checo, **B. Bolzano** (1781-1848) en un artículo publicado en Praga en 1817 y que pasó inadvertido durante muchos años. Y para ello tuvo que *asumir* la propiedad del supremo de números reales que hemos citado anteriormente.

Durante gran parte del siglo XIX continúa vigente la noción de *demostración* del siglo XVIII. Cauchy enuncia (y demuestra) en su *Cours d'Analyse* que la suma de una serie convergente de funciones continuas, define una función continua. Cuando en 1826 el joven **N. Abel** (1802-1829) encuentra un contraejemplo a este enunciado, sólo indica en la introducción que *"El resultado de M. Cauchy parece que admite alguna excepción..."* Y este hecho se repite con asiduidad. El famoso matemático francés **L. Schwartz** (1915-2002) cita en su autobiografía ([Sch] el siguiente comentario de su amigo **A. Weil** (1906-1998) sobre la escuela italiana de geometría algebraica: *"Para ellos resulta un complemento interesante proponer, a continuación de un teorema, un contraejemplo al mismo."*

Este tipo de situaciones provoca a lo largo del siglo XIX un proceso continuado en busca de una fundamentación rigurosa del análisis y, en general, de toda la matemática.

Por un lado, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una cierta "parcela" de las matemáticas, se mostraban útiles en otra "parcela". De esta forma, fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la *naturaleza* de los objetos estudiados, sino las *relaciones* entre ellos. Así van surgiendo, no sin dificultad, las primeras *estructuras algebraicas* (grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales), que permiten agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozan de una serie de relaciones y propiedades comunes. Estas nociones permiten también explicar las grandes semejanzas advertidas entre teorías aparentemente muy distintas.

Por otro lado, la falta de seguridad en un edificio cada vez mas grande e inabarcable, junto con la aparición de nuevas teorías, como las Geometrías no euclídeas hizo que los matemáticos sintieran la necesidad de establecer claramente las propiedades de los objetos a estudiar y las *reglas de juego* en cada caso, para evitar posibles contradicciones. Esto es, retornar al viejo método utilizado por los maestros griegos para el desarrollo de la geometría euclídea: el *método axiomático.*

El método axiomático y la organización en términos de estructuras matemáticas ciertamente permiten al matemático una considerable economía de pensamiento y una gran sensación de seguridad, al sentirse dentro de unos límites bien establecidos, y es el que se sigue utilizando para exponer y presentar las matemáticas actualmente.

En cuanto a la fundamentación última, durante algún tiempo se pensó que la lógica y la teoría de conjuntos iban a proporcionar una sólida base sobre la que

[14] Existen funciones no continuas que tienen la "propiedad de los valores intermedios", es decir, si toman dos valores, toman todos los valores intermedios entre ellos.

construir todo el edificio de las matemáticas. Pero las numerosas antinomias y paradojas que surgieron motivaron que también aquí se optara por restringir la noción de *conjunto* y se *axiomatizara* la teoría. Las axiomáticas habituales, como la de **Zermelo-Fraenkel,** resultaban adecuadas para el desarrollo de las matemáticas usuales y evitaban las paradojas conocidas. Pero tenían un defecto: su *consistencia* (es decir, ausencia de contradicción) no había sido demostrada[15]

Esta situación era claramente insatisfactoria. Y por ello, uno de los mejores matemáticos de la época, **D. Hilbert** (1862-1943), que ya había abordado el problema de la consistencia de la geometría, propuso un programa para dar una *demostración* de la consistencia de la matemática por métodos puramente finitistas. En sus propias palabras:

> *Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las matemáticas tienen como propósito eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidd de la inferencia matemática* [...] *Una solución completa de estas dificultades requiere una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma...* ([Hi].

D. Hilbert

Para ello, Hilbert propone la *formalización* completa del sistema estudiado. Ello requiere, en primer lugar, explicitar el listado o *vocabulario completo* de signos que se va a emplear, junto con las *reglas de formación* de las expresiones válidas. A continuación, hay que especificar las *reglas de transformación* para pasar de una fórmula válida a otra. Finalmente, para comenzar la tarea, se seleccionan algunas expresiones válidas como *axiomas*. A partir de aquí, lo que pretende Hilbert es desarrollar una teoría de las propiedades combinatorias del lenguaje formal que permita hacer afirmaciones *sobre* una expresión determinada del sistema. Esta teoría la llamó Hilbert *Metamatemática.* Sus enunciados son pues afirmaciones sobre los signos del sistema formal y su disposición. La demostración de la consistencia de un sistema formal dado consistiría en probar, por enunciados metamatemáticos finitistas, que nunca puede obtenerse en el sistema una fórmula y su negación.

Hacia 1930 el Programa de Hilbert parecía bien encaminado, gracias a los esfuerzos del propio Hilbert y algunos de sus estudiantes. En particular, se había podido demostrar la consistencia absoluta para el sistema de la aritmética de los números naturales con la adición (aunque no con la multiplicación).

K. Gödel

Sin embargo, el año siguiente, un joven docente en la Universidad de Viena, **K. Gödel** (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert. En un artículo que lleva el expresivo título de "*Sobre proposiciones*

[15] Como agudamente observó **Poincaré**, *"hemos puesto una cerca para proteger al rebaño de los lobos, pero no sabemos si hemos dejado algunos lobos dentro de la cerca."*

formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines, I" ([Gö]) Gödel prueba que todo sistema formal (en el sentido del programa de Hilbert) consistente y que contenga a la aritmética, es necesariamente *incompleto*, es decir, contiene enunciados legítimos del sistema que son *indecidibles*, esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables en el sistema. ¡Y uno de esos enunciados es, precisamente, el que afirma la *consistencia* del sistema! Esto supone, por tanto, la imposibilidad de llevar a cabo con éxito el Programa de Hilbert y una limitación fundamental del método axiomático mismo que, desde su invención por los griegos, había sido considerado como la más potente herramienta descubierta para alcanzar la verdad.

Todo ello ha provocado una cierta sensación de desconcierto entre los matemáticos, al tener que renunciar al carácter de irrefutable del que gozaba su Ciencia. Veamos algunos testimonios de esta actitud:

> *...Los esfuerzos para conseguir el rigor más extremo han conducido a un callejón sin salida, en el que ya no existe acuerdo sobre lo que éste significa. Las matemáticas continúan vivas y vitales, pero sólo sobre una base pragmática.* ([Kl])

> *...Una demostración en matemáticas no es más que una comprobación de los productos de nuestra intuición. Obviamente, no poseemos, y probablemente nunca tendremos, un estándar de demostración que sea independiente del tiempo, de lo que queramos probar o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplee... Lo sensato parece que es admitir que no existe tal cosa como la verdad absoluta en matemáticas [...] Nuestra intuición sugiere ciertos resultados [...] que comprobamos por lo que llamamos una demostración.* ([Wi])

> *Si quiere usted que las matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza. Si quiere usted certeza, elimine el significado.* (El alumno Kapa en [La])

6. CONCLUSIÓN

Hace unos 200 años los matemáticos más relevantes podían comprender prácticamente todas las matemáticas que se producían y tener una perspectiva bastante global de los problemas más importantes en las distintas áreas. Hoy en día, esto es imposible. Ya en 1976, fecha de publicación de su autobiografía *Adventures of a Mathematician,* el matemático Stanislaw Ulam estimaba en 200.000 el número de teoremas nuevos publicados cada año, y concluía:

> *Por este motivo está resultando cada vez más difícil enjuiciar el valor de la investigación matemática, y casi todos nosotros nos estamos convirtiendo básicamente en técnicos. [...] En realidad, es imposible mantenerse al tanto ni siquiera de los resultados más destacados y apasionantes.*

Difícilmente un investigador domina las técnicas y conoce los trabajos más recientes de más de dos o tres áreas de investigación en Matemáticas. ¿Cómo se puede entonces saber qué problemas son importantes y que líneas de trabajos son más relevantes? Esta pregunta no parece tener una respuesta satisfactoria a nivel global y de ahí la diversidad de políticas de las distintas instituciones que financian la investigación. Por supuesto que a nivel de superespecialización, los "especialistas" podrían ponerse más o menos de acuerdo para señalar algunas directrices relevantes en su especialidad, aunque muchas veces se sigue la máxima de que "los problemas importantes son aquellos que estudian los investigadores importantes."

Pero, además, es imposible que el matemático, en su trabajo cotidiano, compruebe todos y cada uno de los resultados previos en los que debe apoyarse para llevar a cabo su demostración[16]. Más aún, aunque parece cierto que, dado un sistema formal, la lógica de primer orden debe conducir a resultados correctos, la matemática real, la que hacen los matemáticos habitualmente, *jamás* se escribe en lenguaje formalizado.

Por todo ello, la noción de *demostración correcta* en Matemáticas desde la segunda mitad del siglo XX tiene una dimensión colectiva. En último término, la aceptación de un resultado como correcto se establece por *consenso entre los cualificados.* Cuando surgen diferencias de opinión entre los expertos, las dudas se resuelven por la comunicación y la explicación, nunca por la transcripción de la demostración al cálculo de predicados de primer orden.

---

[16] Por ejemplo la clasificación de los grupos finitos simples se completó en 1985. El resultado final es consecuencia de más de 500 artículos, debidos a diversos autores, y su demostración completa ocupa unas 15.000 páginas. Véase [Go].

Por ejemplo, durante la verificación de la demostración de **A. Wiles** del Último Teorema de Fermat, se reconoció explícitamente en varias ocasiones que la confianza depositada en las opiniones de los revisores era al menos tan importante como el rigor empleado en sus comprobaciones.

Como señalan **P. Davis** y **R. Hersh**,

> *Los matemáticos de todos los campos se apoyan unos en el trabajo de otros; la confianza mutua que les permite hacerlo reside en el sistema social del que forman parte. No se limitan a utilizar resultados que sean capaces de demostrar por sí mismos a partir de primeros principios. Cuando un teorema ha sido publicado en una revista seria, cuando el nombre del autor es conocido, cuando el teorema ha sido citado y utilizado por otros matemáticos, se considera que el teorema está debidamente establecido.* ([DH; pág. 278]).

BIBLIOGRAFÍA

1. [Bo] F. Bombal, *Paradojas y rigor: la historia interminable.* Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Madrid, 2006.
2. [Bot] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Springer, Berlín 1986.
3. [Boy] C. Boyer, *The history of the Calculus and its conceptual development.* Dover Pub., New York, 1959.
4. [Da] A. Dahan Dalmedico, *An image conflict in mathematics after 1945.* En "Changing images in Mathematics. From the French Revolutiion to the New Millenium", U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico Edits. Routledge, London, 2001.
5. [DH] P. J. Davis, R. Hersh, *Experiencia matemática.* MEC y Labor, Barcelona, 1982.
6. [Du] W. Dunham, *Journey through Genius. The great theorems of mathematics,* J. Wiley & Sons, New York, 1990.
7. [Ed] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag, New York, 1979.
8. [Eu] L. Euler, *De la controverse entre Messrs. Leibniz et Bernouilli sur les logaritmes négatifs et imaginaires.* Opera (1) **17**, 195-232.
9. [Go] D. Gorenstein, *El teorema enorme*. Investigación y Ciencia, Febrero 1986, págs. 70-83.
10. [Gö] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monaschefte für Mathematik und Physik **38** (1931), 173-198.
11. [Hi] D. Hilbert, *Die logischen Drundlagen der Mathematik.* Matematische Ann. **88** (1923), 151-165. Traducción española: „Los fundamentos lógicos de las matemáticas" en *Fundamentos de las matema´-ticas*, Mathema, UNAM, México 1993.
12. [Kl] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York 1972.
13. [La] I. Lakatos, *Pruebas y Refutaciones.*Alianza Editorial, Madrid, 2ª ed., 1982.
14. [Nw] J. R. Newman, *Sigma, el mundo de las matemáticas,* vol. 1. Eds. Grijalbo, Barcelona, 1968.
15. [Sch] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Ed. Odile Jacob, 1997.
16. [Wi] R. L. Wilder, *The nature of mathematical proof.* American Math. M. (1944), 309-323.