Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios

TRABAJO FIN DE GRADO

Curso 2019 /2020

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

Estudiante: María Rodríguez Martín

Tutor: Antonio López Montes

Madrid, 6 de febrero de 2020

Resumen

Se presenta una recopilación de las ideas y definiciones esenciales del cálculo fraccionario y su aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Damos al cálculo fraccionario un contexto histórico, incluyendo la resolución del problema de Abel, definimos los diferentes operadores fraccionarios y los espacios funcionales donde vamos a trabajar, y por último introducimos la transformada de Laplace de los operadores definidos como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias analíticamente y el método de Grünwald-Letnikov para la resolución numérica.

Abstract

In this work we present a compilation of the essential ideas and definitions of fractional calculus and their application to resolution of fractional differential equations. We give the fractional calculus a historical context, including the resolution of the Abel problem, we define the different fractional operators and the functional spaces where we are going to work, and finally introduce the Laplace transform of the operators define as a tool to solve analytically fractional differential equations and the Grünwald-Letnikov method for numerical resolution.

Índice:

0.MOTIVACIÓN.

El cálculo fraccionario generaliza los operadores diferenciales e integrales a ordenes no enteros, por ello también recibe el nombre de cálculo generalizado o cálculo de orden arbitrario.
Esta idea es tan antigua como el cálculo mismo pero su desarrollo ha estado condicionado en gran parte por la ausencia de una interpretación física y geométrica convincente y también por las numerosas definiciones propuestas. Podríamos decir que no tuvo un verdadero desarrollo hasta la segunda mitad del siglo XX, es por ello por lo que encontramos aquí una rama clásica y a la vez moderna de las matemáticas.

Actualmente, se publican gran cantidad de artículos sobre el tema, y encontramos aplicaciones en la mayoría de las ciencias, esto se debe a que los operadores fraccionarios son operadores no locales, es decir, lo que ocurre en un punto depende de un promedio en un intervalo que contiene al punto, y esto hace del cálculo fraccionario una herramienta excepcional para fenómenos no locales como pueden ser procesos ecológicos como la acumulación de metales, problemas de evolución de poblaciones, problemas de radiación, economía... etc. También juegan un papel muy importante en los procesos de relajación como son los asociados a materiales viscoelásticos.

1.BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

La historia del cálculo fraccionario es casi tan antigua como la del cálculo mismo, ya que, aunque la primera obra dedicada enteramente al cálculo fraccionario no apareció hasta el año 1974, la idea de una derivada de orden no necesariamente entero aparece en 1695 cuando el marqués de L’Hôpital planteó a Leibniz cuál sería el significado de una derivada de orden ½.

La primera referencia en un texto a la derivada de orden arbitrario aparece en un libro de Lacroix, en 1819. En él trata este tema como un mero ejercicio matemático sin ofrecer ninguna pista para la aplicación de la derivada de orden arbitrario.

En 1822, Fourier deduce una generalización de los operadores diferenciales e integrales, pero tampoco aportó ninguna aplicación.

La primera aplicación conocida del cálculo fraccionario llegó en 1823 cuando Abel resolvió el problema de la tautócrona. Este problema consiste en encontrar la forma de una curva, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento, llegue al final de su recorrido en un tiempo independiente del punto de partida.
Para ello Abel empleó una derivada de orden ½, y dio una solución tan sencilla y elegante que atrajo la atención de Liouville que en 1832 hizo el primer gran intento de definir la derivada fraccionaria.

En 1847, Riemann escribió un artículo modificando el operador fraccionario dado por Liouville, dando lugar a lo que hoy conocemos como integral fraccionaria de Riemann-Liouville.
En la segunda mitad del siglo XIX podemos destacar a Grünwald que, en 1867, propuso una definición natural y novedosa de derivada e integral de orden arbitrario, y en 1868, Letnikov investigó la derivada de Grünwald y publicó los primeros resultados sobre tal operador.

A lo largo del siglo XX con el desarrollo del análisis matemático y la teoría de funciones, aparecen nuevas definiciones de operadores fraccionarios, así en 1917, Hermann Weyl definió una integral fraccionaria adecuada para funciones periódicas, y ya en 1967, Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los problemas.

Finalmente, en 1974 se publica el primer texto dedicado enteramente a esta disciplina, “the Fractional Calculus”, escrito por el físico y matemático J. Spanier y el químico Keith B. Oldham.

2.UNA PRIMERA IDEA INTUITIVA DE DERIVADA FRACCIONARIA.

Para llegar a la definición formal de derivada fraccionaria, primero vamos a explorar la idea intuitivamente, enseguida encontraremos sorpresas. Tomamos una función exponencial por razones de simplicidad.

Tenemos que $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ para $n \in \mathbb{N}$, ahora cabe preguntarse que pasaría si tomáramos, por ejemplo, n=1/2, o si tomáramos un número irracional, vamos a suponer que para cualquier número α se verifica

$$D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax} \qquad (2.1)$$

Puesto que conocemos el desarrollo de Taylor de esta función veamos que ocurre con las derivadas de las potencias de x.

Comencemos con x^p con p entero, sabemos que para $n \in \mathbb{N}$ se verifica $D^n x^p = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$.

Para poder reemplazar n por un número α arbitrario usamos la función Gamma, y así darle significado a $p!\, y\, (p-n)!$ cuando no sean números naturales.

La función Gamma se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

y tiene la propiedad de que $\Gamma(z+1) = z!$.

Tendríamos entonces que para cualquier número α se verifica

$$D^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1) x^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} \qquad (2.2)$$

Por tanto, de cualquier función que pueda ser expandida en serie de Taylor en potencias de x podríamos calcular la derivada fraccionaria.

Usamos ahora el desarrollo de Taylor para la exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

y aplicando la fórmula (2.2) tendríamos

$$D^{\alpha}e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}$$

pero si α no es un número entero tenemos una expresión diferente a (2.1) que habíamos dado para la derivada fraccionaria de la exponencial.

Veamos donde está el fallo. Lo que sucede es que cuando calculamos la derivada fraccionaria de una función siempre podemos interpretar que estamos derivando e integrando a la vez, es decir, para $\alpha > 0$ podemos considerar $n = [\alpha] + 1$ y hacer

$$D^{\alpha}\varphi(x) = D^{n}D^{-(n-\alpha)}\varphi(x)$$

o lo que es equivalente,

$$D^{\alpha}\varphi(x) = D^{n}I^{(n-\alpha)}\varphi(x).$$

Por tanto, el fallo residía en que la derivada fraccionaria tiene límites de integración. En otras palabras, el cálculo fraccionario está condicionado de manera intrínseca por las condiciones de contorno a diferencia del cálculo infinitesimal.

Volviendo entonces al problema de la exponencial, por un lado, tenemos

$$D_{a}^{-1}e^{bx} = \int_{a}^{x} e^{bx}dx = \frac{1}{b}e^{bx}$$

Desarrollando la integral,

$$\int_{a}^{x} e^{bx}dx = \frac{1}{b}e^{bx} - \frac{1}{b}e^{ba}$$

Por tanto, para obtener la igualdad si $b > 0$ necesitamos que nuestro límite de integración sea $a = -\infty$.

Por otro lado, tenemos

$$D_{a}^{-1}x^{p} = \int_{a}^{x} x^{p}dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

Y para obtener la igualdad deseada necesitamos que nuestro límite de integración sea $a = 0$.

De manera que con la expresión (2.1) nos estábamos refiriendo a la derivada fraccionaria $D_{-\infty}^{\alpha}e^{ax}$ y con la expresión (2.2) a $D_{0}^{\alpha}x^{p}$.

3.EL PROBLEMA DE ABEL.

En este apartado vamos a mostrar el problema de Abel y su resolución. Este problema también llamado el problema de la tautócrona fue resuelto por Abel en 1823 y es considerado la primera aplicación del cálculo fraccionario, podemos encontrar el artículo original en [13].

Sea 0$< \alpha < 1$. La ecuación integral

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(x), \qquad x\epsilon[a,b] \tag{3.1}$$

donde f es conocida y φ es la función incógnita por determinar, recibe el nombre de ecuación integral de Abel.

Para resolver esta ecuación vamos a renombrar a la variable x como t y a la variable t como s, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(x-t)^{-\alpha}$ e integramos entre a y x.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}dsdt = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

Intercambiando ahora el orden de integración en el primer miembro deducimos,

$$\int_a^x \varphi(s)\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}(1-s)^{1-\alpha}}dtds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Aplicando el cambio de variable $t = s + \tau(x-s)$, concluimos que

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt$$
$$= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha}d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

Por tanto,

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \tag{3.2}$$

Y entonces,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \tag{3.3}$$

Así pues, si la ecuación integral de Abel admite una solución, entonces viene dada por una función φ de la forma indicada y, por tanto, en caso de existir, esta solución será única.

4.ESPACIOS FUNCIONALES INVOLUCRADOS EN EL PROBLEMA DE ABEL.

Definición 4.1. *Una función f se dice absolutamente continua en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para toda familia finita de intervalos disjuntos dos a dos $[a_\kappa, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$, tal que $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ se tiene que $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.*

Denotamos al espacio de las funciones absolutamente continuas por $\mathrm{AC}([\mathrm{a},\mathrm{b}])$.

Proposición 4.2. *El espacio $AC([a,b])$ coincide con el espacio de las primitivas de funciones del espacio de Lebesgue $L^1(a,b)$, así pues*

$f(x) \in AC([a,b]) \Leftrightarrow f(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt\ ,\ \varphi \in L^1(a,b), c \in \mathbb{R}$

En consecuencia, una función absolutamente continua f tiene derivada $f'(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto.

Además, hay que tener en cuenta que la continuidad absoluta implica la continuidad pero esto no sucede al contrario, ejemplo de esto es la función de Cantor $\varphi_C = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \leq x, a_n \in \{0,1\}\right\}, \forall x \in [0,1]$ que es continua pero no absolutamente continua.

Vamos a estudiar en qué condiciones la ecuación integral de Abel tiene solución.

Para ello introducimos la siguiente notación

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{4.1}$$

Teorema 4.3. *La ecuación integral de Abel (3.1) tiene solución en el espacio de funciones $L^1(a,b)$ si y sólo si*

$f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ *y* $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

Demostración: empecemos observando que

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \left|\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right| dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{-\alpha}dxdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}dt;\end{aligned}$$

Luego si $f \in L^1(a,b)$, entonces $f_{1-\alpha} \in L^1(a,b)$.

Supongamos inicialmente que la ecuación integral de Abel (3.1) admite solución $\varphi \in L^1(a,b)$. En tal caso, se tiene que $f \in L^1(a,b)$, por tanto $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y por la proposición 4.2 concluimos que $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

Por otro lado, supongamos ahora que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

En tal caso, $f'_{1-\alpha} \in L^1(a,b)$ y así, la función φ introducida en (3.3) está definida en casi todo punto del intervalo (a,b). Mostraremos que $f'_{1-\alpha}$ satisface la ecuación integral de Abel, es decir, que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = g(x), \qquad x\epsilon(a,b)$$

con $g = f$ en $L^1(a,b)$.

En esta ecuación $f'_{1-\alpha}$ juega el papel de función incógnita, por tanto, como en la expresión (3.3),

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha}dt,$$

o lo que es equivalente, $f'_{1-\alpha} = g'_{1-\alpha}$ en $L^1(a,b)$.

Por hipótesis, $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y, por otra parte, teniendo en cuenta (3.2), $g_{1-\alpha} \in AC([a,b])$.

Luego, $f_{1-\alpha} - g_{1-\alpha} = c$, para cierta constante c. Finalmente, dado que por hipótesis $f_{1-\alpha}(a) = 0$, concluimos que $c = 0$. Es decir,

$$\int_a^x \frac{g(t) - f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = 0.$$

Nuevamente, estamos ante una integral de Abel, pero ahora por unicidad de solución, concluimos que $f = g$ en $L^1(a, b)$.

■

Veamos ahora una condición suficiente para la existencia de solución de la ecuación integral de Abel, en términos únicamente de f.

Lema 4.4. *Si* $f \in AC([a, b])$, *entonces* $f_{1-\alpha} \in AC([a, b])$ *y, además,*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} [f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt].$$

Demostración: Como $f \in AC([a, b])$, podemos escribir

$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds,$ para cada $t \in [a, b]$.

Teniendo en cuenta (4.1),

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left[f(a) + \int_a^t f'(s) ds \right] (x-t)^{-\alpha} dt$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \int_a^t \frac{f'(s)}{(x-t)^\alpha} ds dt$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha} ds$$

Así, usando que

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int_a^x (t-a)^{-\alpha} dt,$$

Por la proposición 4.2 concluimos que $f_{1-\alpha}$ es una función absolutamente continua en $[a, b]$ por ser suma de funciones absolutamente continuas.

■

Corolario 4.5. *Si* $f \in AC([a, b])$, *entonces la ecuación integral de Abel* $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x),\ x \epsilon [a, b]$ *admite solución única en* $L^1(a, b)$ *y tal solución viene dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds\right], \qquad x \in [a,b]$$

5. OPERADORES FRACCIONARIOS DE RIEMANN-LIOUVILLE.

Para la integral iterada n veces la fórmula de integración reiterada de Cauchy

$$\int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

se prueba fácilmente aplicando el método de inducción. Podemos sustituir $(n-1)! = \Gamma(n)$ para extender el proceso de integración a cualquier número α de veces. Llegando a la siguiente definición:

Definición 5.1 *Sea* $\varphi \in L^1(a,b)$ *y* $\alpha > 0$*; la función*

$$I_a^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a$$

recibe el nombre de integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α *de la función* φ*.*

Después de introducir la definición de integral fraccionaria resulta natural plantearse una definición para el concepto de derivada fraccionaria y para ello, tenemos que tener en cuenta que la derivación y la integración ordinarias no son operaciones inversas, sino que la derivada entera es la inversa por la izquierda de la integral, pero no al contrario, y queremos que nuestro operador herede esta propiedad, es decir, que $D^{\alpha}I^{\alpha} = Id$. Por ello se define la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como la derivada entera de una integral fraccionaria.

Definición 5.2 *Sea una función* f *definida en el intervalo* $[a,b]$ *y* $0 < \alpha < 1$, *la expresión*

$$D_a^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

recibe el nombre de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α *de la función* f*.*

Observamos que las definiciones de integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville están íntimamente relacionadas con la ecuación integral de Abel.

Así, como consecuencia del lema 4.4, tenemos el siguiente lema.

Lema 5.3 *Si* $f \in AC([a,b])$ *entonces* $D_a^\alpha f$ *existe para todo* $x \in [a,b]$ *y para todo* $0 < \alpha < 1$. *Además,*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt\right].$$

Introducimos ahora la definición cuando $\alpha > 1$, para ello expresaremos $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, donde $[\alpha]$ se refiere a la parte entera de α y $\{\alpha\}$ a su parte fraccionaria.

Por tanto, si α es un número entero, D_a^α será entendida como el operador derivada usual, y en otro caso tendremos $D_a^\alpha f = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_a^{\{\alpha\}}$.

Definición 5.4 *Sean* $f \in L^1(a,b), \alpha > 0$ *y* $n = [\alpha] + 1$*; la función*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\,dt.$$

recibe el nombre de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Llama la atención que es un operador no local, la derivada queda definida por medio de una integral que depende de los valores que tome a lo largo de un intervalo, por tanto, estas derivadas contienen total o parcialmente el comportamiento de la función. Esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en las mejores candidatas para la modelización de procesos no locales.

Denotamos $AC^n([a,b])$ el grupo formado por las funciones que tienen derivada de orden $n-1$ continua en $[a,b]$ y cuya derivada de orden n es un elemento de $AC([a,b])$.

Vamos a ver bajo qué condiciones existe la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para cualquier orden $\alpha > 0$, para ello introducimos el siguiente lema que caracteriza el espacio $AC^n([a,b])$.

Lema 5.5 *El espacio* $AC^n([a,b])$ *está formado exclusivamente por las funciones* f *que pueden ser expresadas de la forma,*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k,$$

donde $\varphi \in L^1(a,b)$ *y* c_k, *con* $1 \leq k \leq n-1$, *constantes reales.*

Observamos que si escogemos $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, entonces debe ser

$c_k = {f^{(k)}(a)}/{k!}$, para cada $0 \leq k \leq n-1$.

Proposición 5.6 *Dado* $\alpha > 0$, *si* $f \in AC^n([a,b])$ *entonces* $D_a^\alpha f$ *existe en casi todo punto de* $[a,b]$ *y, además,*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

Demostración: Dado que por hipótesis $f \in AC^n([a,b])$, tenemos entonces que

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Y así por la definición 5.4

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(n-k)k!}(x-a)^k \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (t-x)^{-\alpha+n-1}dt$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{1}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\int_a^t (t-s)^{n-1}f^{(n)}(s)dsdt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)\int_s^x (t-x)^{n-\alpha-1}(t-s)^{n-1}dtds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{2n-\alpha-1}\frac{(n-1)!\,\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)}ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{2n-\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}}ds$$

■

Ahora vamos a nombrar algunas propiedades importantes de las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, con el fin de resaltar las principales diferencias y analogías con los operadores integral y diferencial clásicos. En todas ellas suponemos que $f \in L^1(a,b)$ y $\alpha, \beta > 0$ donde corresponde.

Operador / **Propiedad**	**Integral fraccionaria**	**Derivada fraccionaria**
Identidad	$\lim_{\alpha\to 0} I_a^\alpha f(x) = f(x)$	$\lim_{\alpha\to 0} D_a^\alpha f(x) = f(x)$
Semigrupo	$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$	
Derivada fraccionaria	$D_a^\beta I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x)$, $\alpha \geq \beta$	$D_a^\beta D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D_a^{\beta-k} f(a) \frac{(t-a)^{-k-\alpha}}{\Gamma(1-k-\alpha)}$

Derivada entera	$D^m I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-m} f(x), [\alpha] \geq m$	$D^m D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+m} f(x)$

La siguiente propiedad refleja que la derivada fraccionaria es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria, sin embargo, en términos generales, el caso contrario no es necesariamente cierto.

Propiedad 5.7 *Sea* $f \in L^1(a,b)$, *se verifica que*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x), \qquad \forall \alpha > 0$$

Demostración: Intercambiando el orden integración y haciendo un cambio de variable obtenemos,

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} dsdt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(s) \int_s^x (t-s)^{\alpha-1} (x-t)^{n-\alpha-1} dtds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(s)(x-s)^{n-1} ds = \frac{d^n}{dx^n} I_a^n f(x) = f(x)$$

■

Antes de ver que ocurre al invertir los operadores tenemos que introducir el siguiente concepto.

Definición 5.8 *Sea* $\alpha > 0$, *denotaremos por* $I_a^\alpha(L_1)$ *al conjunto formado por aquellas funciones que pueden ser expresadas como la integral fraccionaria de cierta función medible lebesgue, es decir,*

$$I_a^\alpha(L_1) = \{f : f = I_a^\alpha \varphi, \varphi \in L_1(a,b)\}$$

Sin embargo, el hecho de que $f \in I_a^\alpha(L^1)$ es independiente de la existencia de la derivada de orden α de la función f, por tanto, la condición de que existe y es integrable la derivada fraccionaria de orden α de la función f no es suficiente para asegurar que $f \in I_a^\alpha(L^1)$ por ello vamos a trabajar nuevamente con funciones absolutamente continuas.

Definición 5.9. *Dado* $\alpha > 0$, *diremos que* $f \in L^1(a,b)$ *tiene derivada fraccionaria de orden* α *integrable si* $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$ *con* $n = [\alpha] + 1$.

Proposición 5.10. *Sea* $\varphi \in L^1(a,b)$ *y* $I_a^{n-\alpha}\varphi \in AC^n([a,b])$ *, es decir, tiene derivada de orden* α *integrable, entonces*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(n-k-1)}(a)}, con\ n = [\alpha] + 1.$$

Como adelantábamos, esta proposición nos muestra que, como en el caso entero, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville no es el operador inverso izquierdo de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Por último, hay que destacar el hecho de que la derivada fraccionaria de una función constante no siempre es nula.

Proposición 5.17 *Sea* $\mu > 0$ *y sea* $\alpha > 0$, *se verifica que*

$$I_a^\alpha (x-a)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(x-a)^{\alpha+\mu-1}$$

$$D_a^\alpha (x-a)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\alpha)}(x-a)^{\mu-1-\alpha}$$

Por tanto, en el caso en el que $\mu = 1$ la derivada queda

$$D_a^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

que solo se anula cuando $a \to -\infty$, es decir, para la derivada de Liouville, que definimos en el siguiente apartado.

En particular, tenemos que $D_a^\alpha (x-a)^{\alpha-k} = 0$, para $k = 1, \dots, [\alpha] + 1$. Por lo tanto, la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-k}$ desempeña el mismo papel para las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville que la función constante desempeña en la derivación usual.

6.OTROS OPERADORES FRACCIONARIOS

6.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Liouville.

Hemos considerado las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville para funciones definidas en un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$, vamos a extenderlas para el caso de funciones definidas en la recta real.

Definición 6.1.1 *Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, definimos la integral fraccionaria de Liouville de orden $\alpha > 0$ como*

$$I_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt\,, -\infty < x < \infty.$$

Para $0 < \alpha < 1$, el operador integral fraccionario de Liouville está bien definido para funciones $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < {}^1/_\alpha$.

Definición 6.1.2. *Definimos la derivada fraccionaria de Liouville de orden $\alpha > 0$ como*

$$D_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

Al igual que las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, una condición suficiente para la existencia de estas es que $f \in AC^n([a,b])$.

6.2. Derivada fraccionaria de Caputo.

Al tratar de realizar modelizaciones de modelos matemáticos de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge el problema de las condiciones iniciales de orden fraccionario que, hasta este momento, no tienen una interpretación física clara.

El operador diferencial de Caputo invierte el orden de la derivación en la definición de Riemann-Liouville, empleando entonces como condiciones iniciales derivadas de orden entero, esto representa un gran avance en el estudio de fenómenos físicos.

Definición 6.2.1. *La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función f dada se define como*

$${}^cD_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds\ ,\ \ t > a.$$

donde $n = [\alpha] + 1$.

Observamos que, al contrario que en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, en la derivada de Caputo primero derivamos n veces y luego integramos.

Esto provoca que sea una definición más restrictiva, ya que requiere que $f^{(n)}$ sea integrable, a pesar de ello, la condición de que $f \in AC^n([a,b])$ sigue siendo una condición suficiente para garantizar la existencia de la derivada con cualquier orden α.

Mostramos ahora un resultado que muestra cómo se relacionan la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo.

Proposición 6.2.2. *Sea $\alpha > 0$ no entero, $n = [\alpha] + 1$ y $f \in L^1(a,b)$ una función para la que existen la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, entonces*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} $$

Por lo tanto, para ordenes de derivación no enteros la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville coincidirán cuando $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

Además, podemos observar que al contrario que pasaba con los operadores de Riemann-Liouville el valor de la derivada fraccionaria de Caputo de una función constante es nulo.

6.3. Derivada conformable.

Definición 6.3.1 *Sean $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $0 < \alpha \leq 1$. La derivada conformable de orden α de la función f en un punto $t > 0$ viene dada, en caso de existir, por el valor del límite*

$$ D_c^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} $$

Si la función admite derivada conformable de orden α en cierto intervalo $(0,a)$ con $a > 0$ y existe $\lim_{t \to 0^+} D_c^{\alpha} f(t)$ definimos entonces

$$ D_c^{\alpha} f(0) = \lim_{t \to 0^+} D_c^{\alpha} f(t) $$

Para $\alpha > 1$, tenemos la siguiente definición de derivada conformable:

Definición 6.3.2 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n, n+1]$ y $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en cierto punto $t > 0$. Diremos que f admite derivada conformable de orden α en el punto t si existe el siguiente límite,*

$$D_c^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(n)}(t + \varepsilon t^{n+1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

6.4. Derivada de Grünwald-letnikov.

En 1868, Grünwald y Letnikov dan otra definición de derivada fraccionaria partiendo de la definición formal de derivada entera.

Es decir, consideramos la definición formal de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Generalizando, puede probarse por inducción que

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh)}{h^n} \;, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Así, podemos generalizar la expresión a cualquier número $\alpha > 0$ expresando,

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1-m)}$$

Y obtenemos la siguiente definición

Definición 6.4.1. *Sea f una función acotada en $[a, b]$, la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de f se define*

$${}^{GL}D_a^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{m=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1-m)} f(t - mh)}{h^\alpha}$$

Comprobando la existencia del límite y después de algunas operaciones que se pueden ver en Podlubny [14] podemos expresar la derivada de Grünwald-Letnikov de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}D_a^{\alpha} f(t) = &\sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(s)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{d^n}{dt^n}[&\sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+m+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{2n-1-\alpha} f^{(n)}(s)ds]
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f(s)ds\right] = D_a^{\alpha} f
$$

que corresponde con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, por tanto, las dos definiciones son equivalentes.

Es muy común utilizar la derivada de Riemann-Liouville para consideraciones teóricas mientras que se utilizan esquemas numéricos derivados de la derivada de Grünwald-Letnikov para las simulaciones numéricas.

7. ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS.

En el cálculo clásico llamamos ecuación diferencial de orden n a una ecuación de la forma

$$
y^{(n)}(x) = f[x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]
$$

donde x es la variable independiente.

Y llamamos problema de valor inicial a una ecuación diferencial de orden n con n condiciones iniciales.

Diremos que una ecuación diferencial es fraccionaria si al menos una de las derivadas que aparece es de orden fraccionario y definiremos el orden como el menor entero mayor o igual que todas las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial.

Al tratar con ecuaciones diferenciales en general es importante observar las condiciones iniciales y darles una interpretación, en el caso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias estas condiciones iniciales dependerán del tipo de derivada que estemos hablando.

Primero aplicamos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y tenemos el siguiente problema de valor inicial,

$$D_a^{\alpha} y(x) = f\left[x, y(x), D_a^{\alpha_1} y(x), \dots, D_a^{\alpha_{m-1}} y(x)\right] \tag{7.1}$$

sujeto a las n condiciones iniciales,

$$(D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k, \qquad k = 1, \dots, n \tag{7.2}$$

donde $\mathrm{n} = [\alpha] + 1$.

Observamos que si α no es un número entero, la n-ésima condición no verifica que $\alpha - n$ tenga parte real positiva, por tanto, estamos hablando de una integral, $(I_a^{\alpha-n} y)(a) = b_n$.

El planteamiento de este tipo de problema con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville obliga, para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, a establecer condiciones iniciales de orden no entero.

Ahora veamos cómo queda nuestro problema si utilizamos derivadas fraccionarias de Caputo,

$${}^{C}D_a^{\alpha} y(x) = f[x, y(x), {}^{C}D_a^{\alpha_1} y(x), \dots, {}^{C}D_a^{\alpha_{m-1}} y(x)]$$

sujeto a las n condiciones iniciales,

$$\frac{d^k}{dx^k} y(a) = b_k, k = 0,1, \dots, n-1$$

donde $\mathrm{n} = [\alpha] + 1$.

Ahora, las condiciones iniciales son de orden entero, y, por tanto, podremos interpretarlas físicamente.

7.1. Teorema de existencia y unicidad.

A continuación, mostramos un teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville cuyas demostraciones podemos encontrar en el libro de Kilbas, Srivastava y Trujillo [15].

Primero introducimos el siguiente espacio de funciones

$$L^{\alpha}(a,b) = \{f \in L_1(a,b) : D_a^{\alpha} f \in L_1(a,b)\}$$

Definición.7.1.1. *Dada una función* $f[x, y_0, \dots, y_{m-1}] \in I \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, *decimos que cumple la condición de Lipschitz para las variables* $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ *cuando existe una constante* $K > 0$ *no dependiente de* t *tal que para todo* $t \in I$ *y cualquier par de m-uplas* $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$, $(\widetilde{y_0}, \widetilde{y_1}, \dots, \tilde{y}_{m-1}) \in B$, *se cumple que*

$$|f[x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}] - f[x, \widetilde{y_0}, \widetilde{y_1}, \dots, \tilde{y}_{m-1}]| \leq \sum_{k=0}^{m-1} K|y_k - \widetilde{y_k}|$$

Teorema.7.1.2. *Dado el problema de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*

$$D_a^{\alpha} y(x) = f\left[x, y(x), D_a^{\alpha_1} y(x), \dots, D_a^{\alpha_{m-1}} y(x)\right]$$

sujeto a las n condiciones iniciales

$$D_a^{\alpha-k} y(a) = b_k, k = 1, \dots, n$$

si la función $f[x, y_0, \dots, y_{m-1}]$ *cumple la condición de Lipschitz y además se da que* $f[x, y_0, \dots, y_{m-1}] \in L^1(a,b)$ *para cualquier* $(y_0, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ *se verifica que existe una solución única y(x) al problema en el espacio* $L^{\alpha}(a,b)$.

Teorema.7.1.3 *Dada una EDF lineal, que cumple* $b(x) \in L_1(a,b)$. *Si* $a_k(x) \in L_{\infty}(a,b)$ *o si* $a_k(x)$ *están acotadas en* $[a,b]$ *entonces el siguiente problema de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*

$$D_a^{\alpha} y(x) = a_0(x) y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x) D_a^{\alpha_k} y(x) + b(x)$$

$$D_a^{\alpha-k} y(a) = b_k, \qquad k = 1, \dots, n$$

tiene solución única $y(x)$ *en el espacio* $L^{\alpha}(a,b)$.

7.2. Transformada de Laplace.

A continuación, vamos a introducir los conceptos de la transformada de Laplace que nos permitirá reducir la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias a manipulaciones algebraicas.

Definición.7.2.1. *Dada una función f, que esté definida para todos los valores $t \geq 0$, se denomina transformada de Laplace de f a la función F dada por*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

siempre que exista la integral.

Para garantizar la existencia de la integral debe cumplirse que $f(t)$ no crezca más rápidamente que e^{st} cuando $t \to \infty$.

Concretamente, la transformada de Laplace de f existe para todo s con $[s] > v$, si f es continua a trozos y $|f(t)| \leq Me^{vt},\ \forall t \geq T > 0,\ \ M, v > 0$.

Además, podemos recuperar la función original $f(t)$ a partir de su transformada de Laplace mediante la transformada de Laplace inversa, que definimos como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds,$$

con $c = [s]$.

Recordemos la transformada de Laplace de orden entero n de una función $f(t)$ que obtenemos integrando por partes n veces,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \qquad (7.2.1)$$

Nuestro objetivo es buscar la expresión similar para los operadores fraccionarios.

En primer lugar, vamos a introducir una herramienta que nos resultará útil a la hora de trabajar con ecuaciones diferenciales fraccionarias, la relación entre la convolución de dos funciones y la transformada de Laplace.

Definición.7.2.2. *Dadas $f, g: [0, \infty) \to \mathbb{C}, f, g \in L^1[0, \infty)$, se define su convolución $f * g$ como la función,*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Teorema.7.2.3. *Dadas* $f, g: [0, \infty) \to \mathbb{C}, f, g \in L^1[0, \infty)$, *tales que existen las respectivas transformadas de Laplace F(s), G(s). Entonces,*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(s)G(s)$$

Ahora consideramos la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^\mu$ que nos resultará de utilidad,

$$\mathcal{L}\{t^\mu\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\mu dt$$

Haciendo el cambio de variable, $r = st$, tenemos,

$$\mathcal{L}\{t^\mu\} = \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-r} r^\mu dr = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \qquad (7.2.2)$$

Es importante observar que, para cualquier función, podemos expresar su integral fraccionaria de Riemann-Liouville como la convolución de las funciones $f(t)$ y $t^{\alpha-1}$ para $a = 0$, multiplicado por una constante, es decir,

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(t) * t^{\alpha-1})$$

Por tanto, por el teorema 7.2.3 y la expresión (7.2.2) llegamos a la siguiente definición.

Definición.7.2.4 *Sea* $f \in L^1(a, b)$ *y* $\alpha > 0$, *definimos la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de la función f de orden* α *como,*

$$\mathcal{L}\{I_a^\alpha f(x)\} = s^{-\alpha} F(s).$$

Anteriormente habíamos expresado la derivada fraccionaria como la derivada entera de una integral fraccionaria, es decir,

$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} f(x) = g^{(n)}(x)$, con $g(x) = I_a^{n-\alpha} f(x)$.

por tanto, aplicando la fórmula (7.2.1) obtenemos,

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(x)\} = \mathcal{L}\left\{g^{(n)}(x)\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0)$$

y como,

$G(s) = \mathcal{L}\{I_a^{n-\alpha} f(x)\} = s^{-(n-\alpha)} F(s)$ y $g^{(n-k-1)}(0) = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} I_a^{n-\alpha} f(0)$

obtenemos la siguiente definición.

Definición.7.2.5. *Sea $f \in L^1(a,b)$ y $\alpha > 0$, definimos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de la función f de orden α como,*

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = [\alpha] + 1$.

Como en el caso anterior, tenemos que la derivada fraccionaria de Caputo es una convolución de las funciones $f^{(n)}(t)$ y $t^{n-\alpha-1}$, con $a = 0$ y multiplicado por una constante, es decir,

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(f^{(n)}(t) * t^{n-\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

Así, de la misma forma, aplicando el teorema 7.2.3 y las fórmulas (7.2.1) y (7.2.2), obtenemos la siguiente definición.

Definición.7.2.6. *Sea $f \in L^1(a,b)$ y $\alpha > 0$, definimos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de la función f de orden α como,*

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D_a^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = [\alpha] + 1$.

Podemos observar que mientras para aplicar la transformada de Laplace a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville necesitamos condiciones iniciales fraccionarias, sin embargo, para la de Caputo usamos condiciones iniciales enteras lo cual facilita nuevamente la interpretación física.

Además, si las condiciones iniciales son nulas el sumatorio se anula y obtenemos la expresión

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s)$$

de forma que la derivada fraccionaria se puede expresar como

$$D_a^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}\right\}$$

Este resultado nos proporciona una nueva expresión para la derivada fraccionaria y es válida tanto para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como para la de Caputo, siempre que las condiciones iniciales sean nulas.

Por último, vamos a introducir la función de Mittag-Leffler que es una generalización de la función exponencial. Esta función resulta especialmente importante ya que se comporta como una solución natural en las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Definición.7.2.7. *La función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}$ es la función definida por la serie,*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

siendo z variable compleja y α, β constantes complejas con parte real positiva.

Algunos casos particulares son,

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

Proposición.*7.2.8.* *Sean* $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *entonces tenemos que para todo* $t > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^{\alpha})\right\}(s) = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha} - a)^{k+1}}$$

con $[s] > |a|^{1/\alpha}$.

En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha} - a)^{k+1}}\right\} = t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^{\alpha}) \tag{7.2.3}$$

7.3. Ejemplos.

7.3.1. Ecuación de oscilación fraccionaria.

Estudiamos una generalización de la ecuación diferencial de oscilación $y''(x) = \lambda y(x) + f(x)$.

Sustituyendo la segunda derivada por una derivada de Caputo de orden $\alpha \in (1,2]$ obtenemos una ecuación diferencial fraccionaria que llamaremos ecuación de oscilación fraccionaria.

Dada una función continua $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}\ y\ \alpha \in (1,2]$ vamos a resolver el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por

$${}^{C}D_0^{\alpha} y(x) = \lambda y(x) + f(x)$$

Como $1 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que necesitamos dos condiciones iniciales en el límite de integración 0

$$y(0) = b_0$$

$$y'(0) = b_1$$

Aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados de nuestra ecuación

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D_0^{\alpha} y(x)\} = s^{\alpha} Y(s) - \sum_{K=0}^{1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0) = s^{\alpha} Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0)$$

y

$$\mathcal{L}\{\lambda y(x) + f(x)\} = \lambda Y(s) + F(s)$$

Y obtenemos

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) = \lambda Y(s) + F(s)$$

Donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$.

Introducimos las condiciones iniciales

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}b_0 - s^{\alpha-2}b_1 = \lambda Y(s) + F(s)$$

y despejamos

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha-1}b_0 + s^{\alpha-2}b_1 + F(s)}{s^{\alpha} - \lambda}$$

Se trata ahora de aplicar la transformada inversa de Laplace a los dos miembros de la ecuación, para recuperar $y(x)$.

Utilizando la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ tenemos

$$y(x) = b_0\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda}\right) + b_1\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} - \lambda}\right) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{F(s)}{s^{\alpha} - \lambda})$$

Ahora calculamos cada una de las transformadas, las dos primeras salen directamente por (7.2.3)

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda}) = E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} - \lambda}\right) = E_{\alpha,2}(\lambda x^{\alpha})$$

Para el cálculo de $\mathcal{L}^{-1}(\frac{F(s)}{s^{\alpha}-\lambda})$ utilizamos el teorema 7.2.3,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^{\alpha} - \lambda}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha} - \lambda}\right) * \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \qquad (7.3.1)$$

con lo que reducimos el problema a la obtención de $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda}\right)$ y volvemos a usar (7.2.3)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda}\right) = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})$$

y sustituyendo en (7.3.1) y con la definición 7.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^{\alpha}-\lambda}\right) &= \left[x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})\right] * f(x)\\ &= \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt\end{aligned}$$

Por tanto, el problema tiene solución de la forma

$$\begin{aligned}y(x) = b_0E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha})&+b_1E_{\alpha,2}(\lambda x^{\alpha})\\ &+ \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt\end{aligned}$$

7.3.2. Ecuación diferencial fraccionaria lineal homogénea.

Vamos a estudiar cuál sería la solución de una ecuación fraccionaria lineal homogénea.

Para facilitar los cálculos consideraremos la siguiente ecuación con coeficientes constantes,

$$Dy(t) + aD^{\frac{1}{2}}y(t) + by(t) = 0$$

cuyo polinomio característico es $P(x) = x^2 + ax + b$.

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros tenemos

$$\mathcal{L}\{Dy(t)\} + a\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}y(t)\right\} + b\mathcal{L}\{y(t)\} = 0$$

$$sY(s) - y(0) + a\left(s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D^{-\frac{1}{2}}y(0)\right) + bY(s) = 0$$

$$Y(s)=\frac{y(0)+aD^{-\frac{1}{2}}y(0)}{s+as^{1/2}+b}$$

Llamamos $C=y(0)+aD^{-\frac{1}{2}}y(0)$, luego $Y(s)=C\Big/P(s^{\frac{1}{2}})$

Expandimos $\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{x^2+ax+b}$ de la siguiente forma

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$$

Para nuestro caso

$$\frac{1}{P(s^{1/2})}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha}-\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}+\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\beta^2)}+\frac{\beta}{s-\beta^2}\right)$$

Consideramos dos casos:

1. Suponemos que las raíces $\alpha\, y\, \beta$ del polinomio característico son diferentes.
   Aplicando la transformada inversa de Laplace tenemos,
$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{C}{P(s^{1/2})}\}$$
$$y(t)=\frac{C}{\alpha-\beta}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}+\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\beta^2)}+\frac{\beta}{s-\beta^2}\}$$

   Por tanto, en el caso en el que $\alpha\neq\beta$ la solución es

$$y(t)=\frac{C}{\alpha-\beta}(t^{-\frac{1}{2}}E_{1,1\over 2}(\alpha^2t)+E_{1,1}(\alpha^2t)+t^{-\frac{1}{2}}E_{1,1\over 2}(\beta^2t)+E_{1,1}(\beta^2t))$$

2. Suponemos ahora que $\alpha=\beta$.Entonces $Y(s)=\frac{C}{(s^{\frac{1}{2}}-\alpha)^2}$.
   Aplicando la transformada inversa de Laplace a ambos lados tenemos
$$y(t)=C\mathcal{L}^{-1}\{[\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}]^2\}$$

$$y(t) = C\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{-1}(s-\alpha^2)^2} + \frac{2\alpha}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)^2} + \frac{\alpha^2}{(s-\alpha^2)^2}\}$$

Por tanto, en el caso en el que $\alpha = \beta$ la solución es

$$y(t) = C(E_{1,0}^{1}(\alpha^2 t) + 2\alpha t^{\frac{1}{2}} E_{1,1/2}^{(1)}(\alpha^2 t) + \alpha^2 t E_{1,1}^{(1)}(\alpha^2 t))$$

8.EL MÉTODO DE GRUNWALD-LETNIKOV PARA LA APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS.

Hemos visto que el operador de Grünwald-Letnikov y el de Riemann-Liouville son equivalentes, y nosotros estamos interesados en usar el operador de Caputo que nos ofrece más ventajas a la hora de trabajar con problemas de valor inicial, por tanto, en el caso en el que las condiciones iniciales no sean homogéneas tendremos que usar un término corrector.

Vamos a suponer que el límite inferior es $a = 0$ y que $0 < \alpha < 1$, entonces

$$^{C}D_0^{\alpha} y(t) = D_0^{\alpha} y(t) - r_0^{\alpha}(t) y_0$$

$$r_0^{\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Veamos una definición directa de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov basada en aplicar el método de diferencias finitas en una malla de puntos equidistantes en un intervalo $[0, t]$.

Asumimos que la función $y(\tau)$ satisface algunas condiciones de suavidad en cada intervalo finito $(0, t), t \leq T$. Tomamos la siguiente malla de puntos

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < t = \tau_{n+1} = (n+1)h$ con $\tau_{n+1} - \tau_n = h$

y aplicando diferencias finitas,

$$\frac{1}{h^{\alpha}} \Delta_h^{\alpha} y(t) = \frac{1}{h}(y(\tau_{n+1}) - \sum_{v=1}^{n+1} c_v^{\alpha} y(\tau_{n+1-v})) \qquad (8.1)$$

donde $c_\upsilon^\alpha = (-1)^{\upsilon-1}\binom{\alpha}{\upsilon}$. (8.2)

Proposición 8.1. *Podemos obtener el valor de c_υ^α recursivamente mediante la siguiente expresión*

$$c_0^\alpha = 1, \qquad c_\upsilon^\alpha = (1-\frac{\alpha+1}{\upsilon})c_{\upsilon-1}^\alpha$$

Demostración: Por definición tenemos

$$c_\upsilon^\alpha = (-1)^{\upsilon-1}\binom{\alpha}{\upsilon} = (-1)^{\upsilon-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\upsilon+1)\Gamma(\alpha+1-\upsilon)}$$

Es fácil observar que si $\upsilon = 0, \upsilon_0^\alpha = 1$.

Ahora, multiplicamos la expresión por $(\alpha-\upsilon+1)$ en el numerador y en el denominador y aplicamos la propiedad de la función gamma $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$$c_\upsilon^\alpha = (-1)^{\upsilon-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)(\alpha-\upsilon+1)}{\upsilon\Gamma(\upsilon)\Gamma(\alpha+1-\upsilon)(\alpha-\upsilon+1)}$$

$$= \left[(-1)\frac{(\alpha-\upsilon+1)}{\upsilon}\right]\left((-1)^{\upsilon-2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\alpha+2-\upsilon)}\right]$$

$$= \left(1-\frac{\alpha+1}{\upsilon}\right)[(-1)^{\upsilon-2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\alpha-(\upsilon-1)+1)}]$$

$$= \left(1-\frac{\alpha+1}{\upsilon}\right)c_{\upsilon-1}^\alpha$$

■

La definición de Grünwald-Letnikov queda

$${}^{GL}D_a^\alpha y(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\Delta_h^\alpha y(t)$$

Introducimos el siguiente lema para ver el orden de aproximación.

Lema 8.2. *Sea la función $y(\tau)$ infinitamente diferenciable en el intervalo $[0,T]$. Entonces la aproximación Grünwald-Letnikov satisface para cada $0 < t < T$ y una serie de pasos de tamaño h con $\frac{t}{h} \in \mathbb{N}$ y $t = (n+1)h$*

$${}^{GL}D_0^\alpha y(t) = \frac{1}{h^\alpha}\Delta_h^\alpha y(t) + O(h), \quad (h \to 0)$$

Ahora vamos a considerar la siguiente ecuación diferencial fraccionaria

$$ {}^{C}D_0^{\alpha} y(t) = f\big(y(t)\big), \qquad y(\tau_0) = y_0 \ \ (0 < \alpha < 1) $$

y asumimos que existe una única solución $y = y(\tau)$ en el intervalo $[0, T]$.

Para la discretización tomamos una malla de puntos equidistantes,

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{N+1} = T$ con $\tau_{n+1} - \tau_n = h$

Y denotamos y_k a la aproximación de la solución real $y(\tau_k)$.

Aplicamos la definición (8.1) en el lado izquierdo de nuestra ecuación con $\tau_{n+1} = (n+1)h$ incluyendo el término corrector y en el lado derecho aproximamos por $f(y_n)$ o $f(y_{n+1})$.Entonces el método explícito o implícito de Grünwald-Letnikov queda

$$ y_{n+1} - \sum_{v=1}^{n+1} c_v^{\alpha} y_{n+1-v} - r_{n+1}^{\alpha} y_0 = h^{\alpha} f(y_n) \ \ (o = h^{\alpha} f(y_{n+1})) $$

donde $r_{n+1}^{\alpha} = h^{\alpha} r_0^{\alpha}(\tau_{n+1}) = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

El término corrector $r_{n+1}^{\alpha} y_0$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ y es cero cuando se consideran condiciones iniciales homogéneas.

Podemos considerar este método como una extensión del método de Euler a ecuaciones diferenciales fraccionarias, si $\alpha \to 1$ tenemos el método de Euler explícito o implícito $y_{n+1} - y_n = hf(y_n)$ o $y_{n+1} - y_n = hf(y_{n+1})$ respectivamente.

Además, los coeficientes binomiales definidos en (8.2) son de orden fraccional, están definidos recursivamente por $c_\nu^{\alpha} = (1 - \frac{\alpha+1}{\nu}) c_{\nu-1}^{\alpha}$ y son positivos, estos actúan como factores de amortiguamiento y producen estabilidad y un buen comportamiento del error.

9.CÁLCULO FRACCIONARIO APLICADO A MODELOS BIOLÓGICOS Y CRECIMIENTO TUMORAL.

Vamos a ver una muestra de las múltiples y recientes aplicaciones del cálculo fraccionario en el entorno biológico.

9.1. Modelo epidemiológico SIR de orden fraccional.

En [18] encontramos un modelo epidemiológico muy sencillo, en el que para empezar se considera población con sólo tres estados: Susceptibles (S), Infectados (I) y Recuperados (R).

El modelo se describe de la siguiente manera

$$D^{\alpha}S(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)I(t-\tau)}{1+\sigma S(t)}$$

$$D^{\alpha}I(t) = \frac{\beta S(t)I(t-\tau)}{1+\sigma S(t)} - aI(t) - \gamma I(t)$$

con $0 < \alpha \leq 1, t \geq 0$.

Donde:

- r es la tasa de crecimiento.
- K es la capacidad de carga, es decir, la población máxima.
- β es la tasa de aumento del número de infectados y la tasa de disminución del número de susceptibles.
- τ es el tiempo de incubación.
- σ es la tasa de mortalidad de los susceptibles y los recuperados.
- a es el número de infectados que han muerto.
- γ es la tasa de recuperación de los infectados.

9.2 Modelo epidemiológico MSEIR de orden fraccional.

En [17] encontramos otro modelo epidemiológico un poco más complicado ya que suponemos que una vez recuperado el individuo este se vuelve inmune, y a su vez, los hijos de madres inmunes serán inmunes.

Tenemos los siguientes estados:

- M: Nacidos con inmunidad.
- S: Susceptibles, pero no se han expuesto a la enfermedad.
- E: Expuestos a la enfermedad, pero no han enfermado todavía.
- I: Infectados.
- R: Recuperados y, por tanto, inmunes.

$$D^{\alpha}M(t) = b^{\alpha}\big(N - S(t)\big) - (\delta^{\alpha} + b^{\alpha})M(t)$$

$$D^{\alpha}S(t) = b^{\alpha}S(t) + \delta^{\alpha}M(t) - \frac{\beta^{\alpha}}{N}S(t)I(t) - b^{\alpha}S(t)$$

$$D^{\alpha}E(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{N}S(t)I(t) - (\varepsilon^{\alpha} + b^{\alpha})E(t)$$

$$D^{\alpha}I(t) = \varepsilon^{\alpha}E(t) - (\gamma^{\alpha} + b^{\alpha})E(t)$$

$$D^{\alpha}R(t) = \gamma^{\alpha}I(t) - b^{\alpha}R(t)$$

con $0 < \alpha \leq 1, t > 0$.

Donde:

- b es la tasa de nacimiento y de muerte.
- N es la población total.
- δ es la tasa de crecimiento de los individuos inmunes.
- β es la tasa de transmisión.
- ε es la tasa de crecimiento de individuos expuestos.
- γ es la tasa de recuperación de los infectados.

9.3. Modelo de Interacción entre las células tumorales y las células inmunes.

Por último veamos un modelo de interacción entre células tumorales y células inmunes, que encontramos en [16].

Este modelo es una adaptación del modelo presa-depredador clásico, en este caso consideraremos a las células inmunes como los depredadores y a las células tumorales como las presas.

$$D^{\alpha}N(t) = rN(t) - N(t)I(t)$$

$$D^{\alpha}I(t) = \sigma - \frac{1}{r}I(t) - dN(t) + N(t)I(t)$$

con $0 < \alpha \leq 1, t > 0$.

Donde:

- N es el número de células tumorales.
- I es el número de células inmunes.
- r es la tasa de proliferación de las células tumorales.
- σ es el flujo constante de células inmunes.

- d es la tasa de mortalidad de las células inmunes frente al crecimiento de las células tumorales.

Podemos encontrar una versión del modelo de presa-depredador en el que el cáncer está en un estado de latencia, es decir, en un período en el que el número de células tumorales está en un nivel bajo durante un período de tiempo y puede darse una resistencia a las terapias. Después de este período las células tumorales crecen rápidamente.

En este modelo, la fuerza de depredación del sistema inmune y el reclutamiento de células por parte del sistema inmune decae exponencialmente en el tiempo en algunos casos.

Además, para la capacidad de carga del sistema inmune se predice un aumente continuo hasta un valor umbral 10^9 células, así como se predice un escape del cáncer llegado a un valor de 10^9 células tumorales.

Aplicando derivadas fraccionarias de Caputo se presenta el siguiente modelo,

$$D^{\alpha}N(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - aN(t)I(t)$$

$$D^{\alpha}I(t) = \gamma I(t)(1 - \frac{I(t)}{I_e + \mu N(t)I(t)})$$

con $0 < \alpha \leq 1, t > 0$.

Donde:

- K es la capacidad de población de las células tumorales.
- γ es la tasa de crecimiento de las células inmunes.
- a es el coeficiente de relación entes las células tumorales y las células inmunes.
- I_e es el estado inmune homeostático, es decir, el estado de equilibrio.
- μ es el coeficiente relacionado con el potencial de reclutamiento de células por el sistema inmune.

BIBLIOGRAFÍA

[1] K. B. Oldham y J. Spanier, The Fractional Calculus. New York and London: Academic Press, 1974.

[2] J. M. Sánchez Muñoz, «Historias de Matemáticas, Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional», *Pensamiento Matemático,* 2011, no 1, p. 4.

[3] J. L. Rodriguez, *Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones.* Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela, 2018.

[4] V. G. Buesaquillo Gomez, Métodos de Cálculo fraccional en la descripción de sistemas físicos, San Juan de Pasto, Colombia: Universidad de Nariño, 2013.

[5] M. Martinez Garcia, Ecuaciones diferenciales de orden fraccional y sus aplicaciones, Universidad politécnica de Cataluña, 2013.

[6] P. Arafet Padilla, H. Domínguez Abreu y F. Chang Mumañ, *Una introducción al cálculo fraccionario.* Universidad de Oriente, 2008.

[7] T. Pierantozzi, *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas.* Universidad Complutense de Madrid, 2006.

[8] E. Coronel Frías y M. T. Moreno Chapoñán, *Equivalencias entre las propiedades de las derivadas fraccionarias y las derivadas clásicas.* Universidad nacional Pedro Ruiz Gallo, 2016.

[9] R. Scherer, S. L. Kalla, Y. Tang y J. Huang, «the Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations». *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, vol. 62, no 3, p. 902-917.

[10] Y. Ouyang y W. Wang, «Comparison of Definition of Several Fractional Derivatives», En *2016 International Conference on Education, Management and Computer Science*. Atlantis Press, 2016.

[11] D. Baleanu, Fractional Calculus: Models and Numerical Methods; Series o n complexity, Nonlinearity , and chaos, vol.3, Singapur: World Scientific, 2012.

[12] D. Maravall Casesnoves, «Inventiva y creatividad en matemáticas y en física. Los fractales y el cálculo fraccionario», *Real academia de ciencias exactas , fisicas y naturales,* vol. 103, nº 1, 2009.

[13] N. H. Abel, «Auflösung einer mechanischen Aufgabe», J. *für die Reine und Angewandte Mathematik,* vol. I, pp. 153-157, 1826.

[14] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* San Diego: Academic Press, 1999.

[15] A. A. Kilbas, H. Srivastava y J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2006.

[16] J. G. Silva, A. C.O. Ribeiro, R. F.Carmago, P. F.A.Mancera y F. L.P.Santos, «Stability analysis and numerical simulations via fractional for tumor dormancy models», *Elsevier,* 2019.

[17] R. Almeida, A. M.C.Brito da cruz, N. Martins y M. T.Monteiro, «An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative», *International journal of dynamics and control*, 2019.

[18] F. Rihan, Q. Al-Mdallal, H. AlSakaji y A. Hashish, «A fractional-order epidemic model with time-delay and non linear incidence rate», *Elsevier,* 2019.