

Tema 2. Variables aleatorias unidimensionales

Para cada experimento aleatorio, se ha definido el espacio muestral como el conjunto que incluye todos los posibles resultados del experimento. Asimismo, se han considerado tanto los sucesos simples como los compuestos relacionados con el mismo, con el fin de calcular las probabilidades de interés. No obstante, en algunas ocasiones, describir el espacio muestral puede ser complicado debido a la naturaleza del experimento. Por ejemplo, al intentar describir el espacio muestral de un experimento que consiste en lanzar una moneda 10 veces, la tarea se vuelve compleja.

Además, trabajar directamente con el espacio muestral puede ser poco práctico, especialmente porque no siempre se cuenta con un valor numérico asociado al experimento aleatorio. Sobre este espacio muestral, en el capítulo anterior se ha definido la estructura de σ -álgebra, $\mathcal{P}(\Omega)$ que contiene cualquier subconjunto de Ω y una medida normada, P .

La *variable aleatoria* se define como un mecanismo matemático que asigna valores numéricos a todos los posibles resultados del experimento aleatorio. De esta manera, el espacio muestral Ω se representa por un conjunto de números que reflejan las características de interés del experimento.

En este capítulo se centra en los conceptos fundamentales sobre las variables aleatorias unidimensionales, que son esenciales para comprender cómo modelar y analizar fenómenos aleatorios en diversos contextos. A lo largo del capítulo, se estudian los distintos tipos de variables aleatorias (discretas, continuas, y mixtas), las operaciones que pueden realizarse con ellas, así como sus funciones de distribución y propiedades. Finalmente, se introducen las transformaciones de variables aleatorias, un aspecto esencial para su aplicación tanto en problemas teóricos como prácticos.

2.1. Concepto de variable aleatoria unidimensional

Una variable aleatoria X es una función que asigna un valor numérico a cada posible resultado del experimento aleatorio A , tal que:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow X(A)$$

Más concretamente, es una variable cuyo valor numérico está determinado por el resultado de un experimento aleatorio A . Por ejemplo, en el experimento que consiste en lanzar una moneda 10 veces (siendo $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$), la variable aleatoria X puede definirse como $X = \text{“número de caras”}$.

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad. Se define la función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como una *variable aleatoria unidimensional* si y solo si:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ se verifica que } B = \{A \in \Omega / X(A) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Ejemplo 2.1

Sea el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas. Se pide:

1. Determinar el espacio muestral de este experimento y comprobar si $X = \text{“número de caras obtenidas”}$ es una variable aleatoria.
2. Calcular la probabilidad de que el número de caras sea como máximo una.

1. El espacio muestral de este experimento aleatorio incluye cuatro posibles resultados: $\Omega = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, siendo $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, A_i, \forall i = 1, \dots, 4, \text{uniones y complementarios de } A_i \forall i = 1, \dots, 4\}$$

Sea la variable aleatoria $X = \text{“número de caras obtenidas”}$ tal que $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siendo:

$$X(A_1) = 2$$

$$X(A_2) = X(A_3) = 1$$

$$X(A_4) = 0$$

Una vez descrito el experimento aleatorio, se comprueba si X es una variable aleatoria:

$$\forall x < 0: B_1 = \{A \in \Omega / X(A) \leq x\} = \emptyset \in P(\Omega)$$

$$\forall 0 \leq x < 1: B_2 = \{A \in \Omega / X(A) \leq x\} = \{A_4\} \in P(\Omega)$$

$$\forall 1 \leq x < 2: B_3 = \{A \in \Omega / X(A) \leq x\} = \{A_2, A_3, A_4\} \in P(\Omega)$$

$$\forall x \geq 2: B_4 = \{A \in \Omega / X(A) \leq x\} = \Omega \in P(\Omega)$$

Como todos los sucesos $B_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, 4 \Rightarrow X$ es una variable aleatoria.

2. La probabilidad de que el número de caras sea como máximo una se calcula dividiendo el número de casos favorables entre el número total de casos posibles. En este caso, hay 3 casos favorables: (c, x) , (x, c) , (x, x) y 4 casos posibles. Entonces,

$$P(X \leq 1) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

De igual forma se obtiene que:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2.2. Operaciones con variables aleatorias

1. Sea X una variable aleatoria y c sea una constante, entonces cX también es una variable aleatoria.
2. Sea X una variable aleatoria y sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $Y = aX + b$ también es una variable aleatoria.
3. Sea X una variable aleatoria, entonces $|X|$ también es una variable aleatoria. El recíproco no es cierto.
4. Sean X e Y dos variables aleatorias, entonces también son variables aleatorias las siguientes transformaciones:
 - $X + Y$
 - $X - Y$
 - XY
 - X / Y si $Y \neq 0$
5. Sean X e Y dos variables aleatorias, entonces $\max\{X, Y\}$ y $\min\{X, Y\}$ también son variables aleatorias. Como casos particulares lo son $X^+ = \max\{0, X\}$ y $X^- = -\min\{0, X\}$.

2.3. Función de distribución de una variable aleatoria unidimensional. Propiedades

Para conocer la probabilidad de todos los valores que toma un variable aleatoria X , se introduce la *función de distribución*, definida como una aplicación $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tal que:

$$F_X(x) = P(A \in \Omega / X(A) \leq x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por su definición, la función de distribución no puede ser negativa y ha de estar entre 0 y 1, ya que es una probabilidad. Tampoco puede ser decreciente por su carácter de función acumulativa.

Por lo tanto, para que $F_X(x)$ sea una función de distribución, ha de verificar que:

1. **F_X sea una función no decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$**

$$\begin{aligned} \text{Sean } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x_1 < x_2 &\Rightarrow F_X(x_2) = P(A \in \Omega / X(A) \leq x_2) = \\ &= P(X \leq x_2) = P(\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}) \stackrel{\text{disjuntos}}{=} P(\{X \leq x_1\}) + \\ &\quad P(\{x_1 < X \leq x_2\}) \geq P(\{X \leq x_1\}) = F_X(x_1) \\ &\Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1) \end{aligned}$$

2. **$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$**

$$F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$$

3. **F_X es una función continua por la derecha: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x_0) =$**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x_0 < x}} F_X(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} P(X \leq x) \stackrel{x_0 < x}{=} P(X \leq x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} P(x_0 < X \leq x) = \\ &= F_X(x_0) + P(\emptyset) = F_X(x_0) \end{aligned}$$

Además de las características expuestas anteriormente, la función de distribución cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}: P(X > x) = 1 - F_X(x)$
2. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}: P(X < x) = F_X(x) - P(X = x)$

Ejemplo 2.2

Se realiza un lanzamiento de una moneda equilibrada, y se define la variable aleatoria X como el “número de caras obtenidas en dicho lanzamiento”. Se pide determinar la variable aleatoria X y calcular su función de distribución.

El espacio muestral asociado al experimento es $\Omega = \{c, x\}$,

siendo $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$

$\Rightarrow X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$X(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = c \\ 0 & \text{si } A = x \end{cases}$$

Como la moneda es equilibrada, $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Para obtener la función de distribución, se sabe que $F_X(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces,

$$\forall x < 0: F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$\forall 0 \leq x < 1: F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \geq 1: F_X(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$$

Por lo tanto, la función de distribución de la variable aleatoria X es tal que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.4. Variables aleatorias discretas, continuas y mixtas

Toda variable aleatoria viene caracterizada por su función de distribución, lo que permite clasificarla en tres tipos según las características de esta función: variables aleatorias discretas, absolutamente continuas (en general, las llamaremos continuas), y mixtas.

Variables aleatorias discretas. Función de masa

Una variable aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria discreta* si toma valores sobre un conjunto finito o infinito numerable $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Los valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ se denominan *puntos de masa* y son aquellos tales que $P(X = x_i) = p_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Además, se cumple:

1. $p_i = P(X = x_i) > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

La *función de masa* es el conjunto de las probabilidades asignadas a los puntos de masa, dada por:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x = x_1 \\ p_2 & \text{si } x = x_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{si } x \text{ no es punto de masa} \end{cases}$$

La *función de distribución* de una variable aleatoria discreta X es una **función escalonada**, es decir, es una función continua salvo en un conjunto finito o infinito numerable de puntos (los puntos de masa) donde se presentan discontinuidades de saltos finitas. La función de distribución de una variable aleatoria discreta X viene dada mediante la función de masa, según la siguiente expresión:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Así, la función de distribución de una variable aleatoria discreta X es tal que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

En la Figura 1.6, se muestra la relación entre la función de masa de una variable aleatoria discreta X con cinco puntos de masa y su función de distribución asociada. La función de masa asigna probabilidades a los valores posibles de la variable, mientras que la función de distribución acumulada muestra cómo se suman estas probabilidades hasta cada valor.

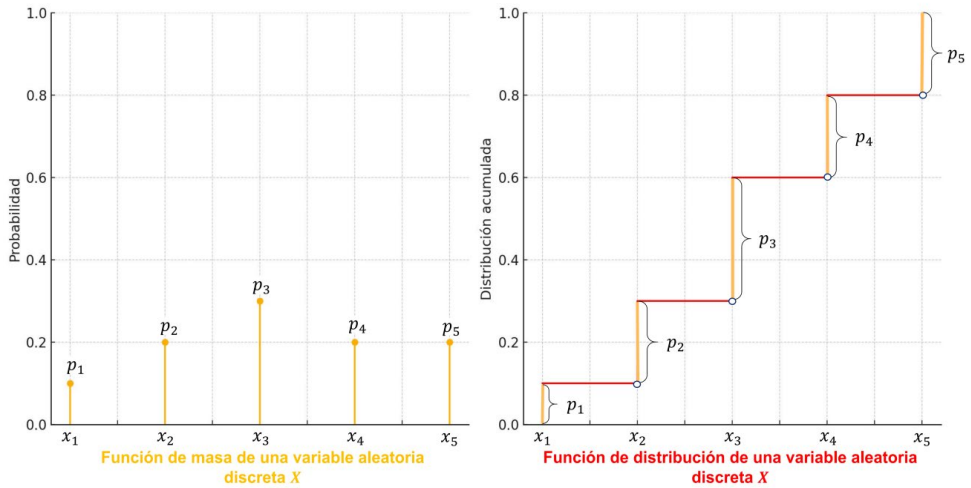


Figura 1.6. Relación entre la función de masa de una variable discreta X y su función de distribución.

Ejemplo 2.3

Se realiza el lanzamiento de un dado equilibrado dos veces, y se define la variable aleatoria X como la suma de las dos tiradas. Se pide:

1. Determinar la variable aleatoria X .
2. Calcular su función de masa y su función de distribución.
3. Calcular la probabilidad de que X sea mayor que 3.

1. El espacio muestral asociado al experimento es

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:}$$

$$X(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } A = (1,1) \\ 3 \text{ si } A = (1,2) \text{ o } (2,1) \\ 4 \text{ si } A = (1,3) \text{ o } (2,2) \text{ o } (3,1) \\ 5 \text{ si } A = (1,4) \text{ o } (2,3) \text{ o } (3,2) \text{ o } (4,1) \\ 6 \text{ si } A = (1,5) \text{ o } (2,4) \text{ o } (3,3) \text{ o } (4,2) \text{ o } (5,1) \\ 7 \text{ si } A = (1,6) \text{ o } (2,5) \text{ o } (3,4) \text{ o } (4,3) \text{ o } (5,2) \text{ o } (6,1) \\ 8 \text{ si } A = (2,6) \text{ o } (3,5) \text{ o } (4,4) \text{ o } (5,3) \text{ o } (6,2) \\ 9 \text{ si } A = (3,6) \text{ o } (4,5) \text{ o } (5,4) \text{ o } (6,3) \\ 10 \text{ si } A = (4,6) \text{ o } (5,5) \text{ o } (6,4) \\ 11 \text{ si } A = (5,6) \text{ o } (6,5) \\ 12 \text{ si } A = (6,6) \end{cases}$$

2. La variable aleatoria X puede tomar los siguientes puntos de masa $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Su función de masa viene dada por:

$$p_1 = P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

$$p_2 = P(X = 3) = \frac{2}{36}$$

$$p_3 = P(X = 4) = \frac{3}{36}$$

$$p_4 = P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

$$p_5 = P(X = 6) = \frac{5}{36}$$

$$p_6 = P(X = 7) = \frac{6}{36}$$

$$p_7 = P(X = 8) = \frac{5}{36}$$

$$p_8 = P(X = 9) = \frac{4}{36}$$

$$p_9 = P(X = 10) = \frac{3}{36}$$

$$p_{10} = P(X = 11) = \frac{2}{36}$$

$$p_{11} = P(X = 12) = \frac{1}{36}$$

Obsérvese que $p_1 + p_2 + \dots + p_{12} = 1$, con esta función de masa, se calcula la función de distribución de la variable aleatoria X como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{12} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{18} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{5}{9} & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ \frac{12}{18} & \text{si } 7 \leq x < 8 \\ \frac{13}{18} & \text{si } 8 \leq x < 9 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 9 \leq x < 10 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

3. La probabilidad de que X sea mayor que 3 se calcula como:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 2) + P(X = 3)) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36}\right) = \frac{11}{12}$$

Variables aleatorias continuas. Función de densidad

Una variable aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria continua* si su función de distribución es absolutamente continua, es decir si existe una función f_X no negativa tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De hecho, la variable aleatoria continua puede tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo, de manera que siempre existe otro valor posible entre cualesquiera dos de ellos. Por ejemplo, el tiempo que dure una llamada telefónica, puede tomar valores en un intervalo de los números reales positivos (\mathbb{R}).

La función f_X se denomina *función de densidad* y cumple las siguientes características:

1. $f_X(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$

Además, si $f_X(t)$ es continua en $[a, b]$, la derivada de la función de distribución en $[a, b]$ coincide con la función de densidad en dicho intervalo, tal que $F_X'(t) = f_X(t) \quad \forall t \in [a, b]$.

Cuando se trabaja con variables aleatorias continuas, es importante tener en cuenta cómo calcular las probabilidades en un punto o en un intervalo, así para el caso continuo si se pretende obtener.

$$3. \quad P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f_X(t) dt = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

En el caso de una variable aleatoria continua, la probabilidad de cualquier punto concreto x_0 es cero, porque no hay área bajo la curva:

$$P(x_0 \leq X \leq x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f_X(x) dx = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t) dt = F_X(b) - F_X(a)$$

Ejemplo 2.4

Dada una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Se pide:

1. Calcular k para que $f_X(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular la función de distribución $F_X(x)$.
3. Calcular la probabilidad de que X sea mayor que 1.

1. Para que $f_X(x)$ sea una función de densidad, debe cumplir dos condiciones:

- 1) La función debe ser no negativa para todo x : $f_X(x) \geq 0$
- 2) La integral de la función sobre todo su rango debe ser igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

Para cumplir con la primera condición, k debe ser positivo. Para cumplir con la segunda condición, tenemos que calcular la integral de la función $f_X(x)$ como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 kdx + \int_2^{+\infty} 0dx = 0 + k[x]_0^2 + 0 = k(2 - 0) = 2k = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $k = \frac{1}{2}$ para que $f_X(x)$ sea una función de densidad. La función de densidad queda:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Se sabe que $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\text{Si } x \leq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0dx = 0$$

$$\text{Si } 0 < x < 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{1}{2}dx = 0 + \frac{1}{2}[x]_0^x = \frac{x}{2}$$

$$\text{Si } x \geq 2, F_X(x) = 1$$

Así, la función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. La probabilidad de interés se calcula como:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Variables aleatorias mixtas

Una variable aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria mixta* si su función de distribución presenta saltos en un conjunto de puntos y es continua para el resto de los valores de \mathbb{R} . Por tanto, una variable aleatoria mixta se caracteriza por tener una parte discreta y una parte continua.

Sea X una variable aleatoria mixta con probabilidad, p_1, p_2, \dots, p_n ($p_i \neq 0 \quad \forall i$), en los puntos de masa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y con función de densidad $f_X(x)$ definida para el intervalo $[a, b]$, entonces se tiene que:

- $\sum_{i=1}^n p_i = p < 1$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = 1 - p$

La *función de distribución* de una variable aleatoria mixta se puede obtener mediante dos funciones de distribución, una función de distribución discreta y una función de distribución continua, tal que:

$$F_X(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha) F_c(x)$$

siendo $F_d(x)$ la función de distribución correspondiente a la parte discreta de la variable aleatoria mixta, $F_c(x)$ la función de distribución absolutamente continua correspondiente a la parte continua de la variable aleatoria mixta y $\alpha \in (0,1)$.

Ejemplo 2.5

El tiempo de espera en la cola, para pedir el menú del día, en la cafetería de la facultad es cero cuando no hay fila, lo cual ocurre con una probabilidad de $\frac{1}{5}$. Si hay fila, el tiempo de espera se distribuye como una variable aleatoria continua que representa el tiempo necesario cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea Y una variable aleatoria mixta que representa el tiempo de espera en la cola de la cafetería compuesta por una parte discreta X_d y una parte continua X_c . Para esta variable aleatoria mixta Y , la función de masa asociada a la parte discreta es $P(X_d = 0) = \frac{1}{5}$, y la función de densidad asociada a la parte continua es:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

1. *Calcular α para que Y sea una variable aleatoria.*
2. *Calcular la función de distribución de Y .*

1. Para calcular el valor α , debemos tener en cuenta la probabilidad acumulada en la parte continua.

$$P(Y = 0) = \frac{1}{5} = \alpha, \rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

$$(1 - \alpha) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -(1 - \alpha)[e^{-x}]_0^{+\infty} = -(1 - \alpha)(0 - 1) = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2. Para calcular la función de distribución de la variable aleatoria Y , se procede de la siguiente forma:

$$\text{Si } y < 0, F_Y(y) = 0$$

$$\text{Si } y = 0, F_Y(y) = \alpha P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Si } y > 0, \quad F_Y(y) = \frac{1}{5} + \int_0^y f_c(t) dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \int_0^y e^{-t} dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \int_0^y e^{-t} dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} [-e^{-t}]_0^y = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} (e^{-y} - e^{-0}) = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} (e^{-y} - 1) = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} e^{-y} + \frac{4}{5} = 1 - \frac{4}{5} e^{-y}$$

Por tanto, la función de distribución de la variable aleatoria Y viene dada por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } y = 0 \\ 1 - \frac{4}{5} e^{-x} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

2.5. Transformaciones de variables aleatorias

Hay distintos métodos para obtener la distribución de una transformación aplicada a una variable aleatoria, que también es variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ con función de distribución $F_X(x)$. Sea Y una transformación de la variable aleatoria X dada por $h(X)$, donde Y también es variable aleatoria cuyo espacio de probabilidad depende del espacio de probabilidad de la variable aleatoria X y de su función de distribución. Sea A un suceso de Y , entonces:

$$P(Y \in A) = P(h(X) \in A) = P(X \in h^{-1}(A))$$

Para caracterizar la nueva variable aleatoria Y , tenemos que determinar su función de distribución $F_Y(y)$, dada por:

- Si la transformación asociada a la Y es derivable y estrictamente monótona **creciente** en el intervalo de definición de X ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y))$$

- Si la transformación asociada a la Y es derivable y estrictamente monótona **decreciente** en el intervalo de definición de X ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \geq y) = P(X \geq h^{-1}(y))$$

- Si la transformación asociada a la Y no es derivable o no es estrictamente monótona en el intervalo de definición de X ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in h^{-1}(y))$$

Transformación de una variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria discreta y sea $Y = h(X)$ entonces la *función de masa* de la nueva variable aleatoria Y viene dada como:

$$P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X \in h^{-1}(y)) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} P(X = x)$$

Ejemplo 2.6

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $P(X = -2) = \frac{7}{25}$, $P(X = -1) = \frac{5}{25}$, $P(X = 0) = \frac{3}{25}$, $P(X = 1) = \frac{2}{25}$, y $P(X = 2) = \frac{8}{25}$. Sea $Y = X^2$ una transformación de la variable X . Calcular la función de masa de la variable Y , así como su función de distribución.

Sabiendo que los puntos de masa de la variable aleatoria X son $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y que $Y = X^2$, entonces los puntos de masa de la variable aleatoria Y son $\{0, 1, 4\}$.

La función de masa de la variable Y queda determinada por:

$$P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{25}$$

$$P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{5}{25} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25}$$

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{7}{25} + \frac{8}{25} = \frac{15}{25}$$

Para encontrar la función de distribución de la variable aleatoria Y , tenemos $F_Y(y) = P(Y \leq y)$, entonces:

$$F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(Y = 0) = \frac{2}{25}$$

$$F_Y(1) = P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \frac{2}{25} + \frac{7}{25} = \frac{9}{25}$$

$$F_Y(4) = P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 4) = \frac{2}{25} + \frac{7}{25} + \frac{15}{25} = 1$$

Transformación de una variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua definida en el intervalo (x_0, x_1) con función de distribución $F_X(x)$ y con función de densidad $f_X(x)$. Sea $Y = h(X)$ una transformación de la variable aleatoria X tal que:

- h es una función derivable.
- h es estrictamente monótona.

Si la transformación asociada a la Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo puesto, la *función de densidad* de la nueva variable aleatoria Y viene dada por la siguiente expresión:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right| \quad \forall y \in \text{dominio de definición}$$

donde $h^{-1}(y)$ es la función inversa de la transformación $y = h(x)$.

El dominio de definición de la variable aleatoria Y dependerá de que la función de transformación sea creciente o decreciente. En el caso de que $h(X)$ sea estrictamente creciente en el dominio de definición de la variable aleatoria X será $(h(x_0), h(x_1))$, si por el contrario es una transformación decreciente el dominio de definición será $(h(x_1), h(x_0))$.

Si la transformación asociada a la Y no es derivable o no es estrictamente monótona en el intervalo de definición de X , es necesario determinar la función de distribución de la variable aleatoria Y para el caso general de las transformaciones de una variable aleatoria, que es:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in h^{-1}(y))$$

En este caso, la *función de densidad* de la nueva variable aleatoria Y se calcula como $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

Ejemplo 2.7

Continuando con la función de densidad de la variable aleatoria X en el Ejemplo 2.4,

$$\text{que } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Sea $Y = X^2$ una transformación de la variable aleatoria X . Se pide:

1. Calcular la función de densidad de la variable aleatoria Y .
 2. Calcular la función de distribución de la variable aleatoria Y .
1. En primer lugar, se calcula el dominio de definición de la variable aleatoria Y . Como la función X^2 es una función creciente en el intervalo $(0, 2)$, la imagen del dominio de la variable aleatoria X es $(0, (0^2, 2^2))$ que es el dominio de definición de la variable aleatoria Y .

A continuación, se comprueba si la transformación asociada a Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(0, 2)$.

La transformación asociada a Y es X^2 , cuya derivada es $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$. La derivada es siempre positiva en el intervalo $(0, 2)$, lo cual indica que la transformación $Y = X^2$ es estrictamente creciente en este intervalo (ver la Figura 1.7).

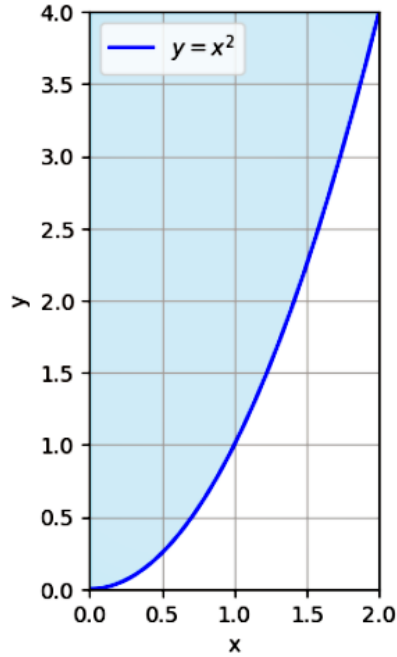


Figura 1.7. $Y=X^2$ (Ejemplo 2.7).

Como la transformación asociada a la Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(0, 2)$, se puede calcular la función de densidad de la variable aleatoria Y mediante la fórmula siguiente:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right|$$

donde $h^{-1}(y)$ es la función inversa de la transformación $Y = X^2$.

Resolvamos para X en términos de Y : $X^2 = Y \rightarrow X = \pm\sqrt{Y}$.

Considerando que $0 < x < 2$, entonces $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Se calcula la derivada parcial de $h^{-1}(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ con respecto a y como:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (y)' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

Entonces,

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right| = f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y}) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad \forall y \in (0, 4)$$

La función de densidad de la variable aleatoria Y viene dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Se sabe que $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

Si $y \leq 0$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^0 0 dy = 0$

Si $0 < y < 4$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^y \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = 0 +$

$$\frac{1}{4} \int_0^y y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4} \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^y = \frac{1}{4} \left[2y^{\frac{1}{2}} \right]_0^y = \frac{1}{4} (2y^{\frac{1}{2}} - 0) = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

Si $y \geq 4$, $F_Y(y) = 1$

Así, la función de distribución es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & \text{si } 0 < y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

Ejemplo 2.8

Siguiendo con la función de densidad de la variable aleatoria X del Ejemplo 2.4, ahora el rango de x se modifica a $-1 < x < 1$. Sea $Y = X^2$ una transformación de la variable aleatoria X . Se pide:

1. *Calcular la función de distribución de la variable aleatoria Y .*
2. *Calcular la función de densidad de la variable aleatoria Y .*

1. En este caso, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

En primer lugar, calculamos el dominio de definición de la variable aleatoria Y .

$Y = X^2$, por lo tanto $Y \in [0, 1]$.

A continuación, se comprueba si la transformación asociada a Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(-1,1)$.

La transformación asociada a Y es X^2 , cuya derivada es $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. La derivada es negativa en el intervalo $(-1,0)$, y positiva en el intervalo $[0,1)$. Esto significa que, la transformación es decreciente en el intervalo $(-1,0)$ y es creciente en el intervalo $[0,1)$ (ver la Figura 1.8).

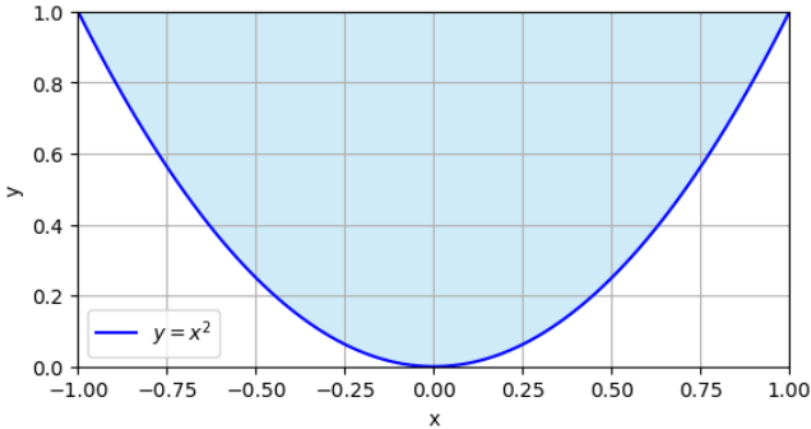


Figura 1.8. $Y=X^2$ (Ejemplo 2.8).

Por lo tanto, la transformación asociada a la Y es derivable pero no es estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(-1,1)$. Es necesario determinar la función de distribución de la variable aleatoria Y como:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in h^{-1}(y))$$

donde $h^{-1}(y)$ es la función inversa de la transformación $Y = X^2$.

Resolvemos para X en términos de Y : $X^2 = Y \rightarrow X = \pm\sqrt{Y}$.

Considerando que $-1 < x < 1$, entonces $h^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \in h^{-1}(y)) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y} \quad \forall y \in [0, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de distribución de la variable aleatoria Y queda:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

2. Una vez obtenida la función de distribución de la variable aleatoria Y , la función de densidad de dicha variable se calcula como:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 2.9

Siguiendo con la función de densidad de la variable aleatoria X del Ejemplo 2.4. Sea $Y = [X]$ (parte entera de X) una transformación de la variable aleatoria X . Se pide: Calcular la función de distribución de la variable aleatoria Y .

En este caso, la transformación no es derivable y se transforma una variable aleatoria X continua en el intervalo $(0, 2)$ en una variable Y discreta en los puntos $\{0, 1\}$.

Sabemos que $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Por tanto, $P(Y = 0) = P(X \in (0, 1)) = \frac{1}{2}$ y $P(Y = 1) = P(X \in [1, 2)) = \frac{1}{2}$

2.6. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio R. 2.1

En una urna hay diez bolas, de las cuales ocho son rojas y dos son negras. Se seleccionan dos bolas al azar (sin remplazamiento) de estas diez. Sea X la variable aleatoria que representa el número de bolas rojas seleccionadas. Se pide:

1. Determinar la variable aleatoria X .
2. Calcular su función de masa y su función de distribución.
3. Calcular la probabilidad de que X sea mayor que 1.
4. Calcular la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[1,2]$.

Solución:

1. El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de este experimento. En este caso, el espacio muestral asociado al experimento es $\Omega = \{(negra, negra), (negra, roja), (roja, negra), (roja, roja)\} \Rightarrow X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$X(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = (negra, negra) \\ 1 & \text{si } A = (negra, roja) \text{ o } (roja, negra) \\ 2 & \text{si } A = (roja, roja) \end{cases}$$

2. La variable aleatoria X puede tomar los siguientes puntos de masa $X = \{0,1,2\}$, la función de masa viene dada por:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45}$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

Obsérvese que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, con esta función de masa, calculamos la función de distribución de la variable aleatoria X como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{45} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La probabilidad de que X sea mayor que 1 se calcula como:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\frac{1}{45} + \frac{16}{45}\right) = \frac{28}{45}$$

La probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[1,2]$ se calcula como:

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = \frac{44}{45}$$

También se puede calcular esta probabilidad utilizando la función de distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$:

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= P(X \leq 2) - P(X < 1) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) \\ &= F_X(2) - F_X(0) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \end{aligned}$$

Ejercicio R. 2.2

En un restaurante local, se ha observado que el peso en kilogramos de patatas necesarias para la preparación de alimentos en una hora es una variable aleatoria continua X cuya función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

1. Calcular c para que $f_X(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular la función de distribución $F_X(x)$.
3. Calcular la probabilidad de que, en una hora al azar del día, este restaurante necesite más de 3 kg de patatas para preparar los alimentos.

Solución:

1. Para que $f_X(x)$ sea una función de densidad, debe cumplir dos condiciones:

- 1) La función debe ser no negativa para todo x : $f_X(x) \geq 0$
- 2) La integral de la función sobre todo su rango debe ser igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

Para cumplir con la primera condición, c debe ser positivo. Para cumplir con la segunda condición, tenemos que calcular la integral de la función $f_X(x)$ como:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^4 c x dx + \int_4^{+\infty} 0 dx = 0 + c \int_2^4 x dx + 0 = c \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \\ &= c \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = c \cdot 6 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c = \frac{1}{6}$ para que $f_X(x)$ sea una función de densidad. La función de densidad queda:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Se sabe que $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\text{Si } x < 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx = 0$$

$$\text{Si } 2 \leq x \leq 4, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^x \frac{1}{6} x dx = 0 + \frac{1}{6} \int_2^x x dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^x = \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \frac{x^2 - 4}{12}$$

$$\text{Si } x > 4, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^4 \frac{1}{6} x dx + \int_4^x 0 dx = 0 + \frac{1}{6} \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) + 0 = 1$$

Así, la función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{12} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

3. La probabilidad de interés se calcula como:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \frac{3^2 - 4}{12} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Ejercicio R. 2.3

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $P(X = -2) = \frac{1}{5}$, $P(X = -1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = 1) = \frac{1}{15}$, y $P(X = 2) = \frac{11}{30}$. Sea Y una transformación de la variable X . Se pide calcular la función de masa de la variable Y , cuando

1. $Y = X^2 + 3$

2. $Y = X + 2$

Solución:

Sabiendo que los puntos de masa de la variable aleatoria X son $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y que $Y = X^2 + 3$, entonces los puntos de masa de la variable aleatoria Y son $\{3, 4, 7\}$. La función de masa de la variable Y queda determinada por:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 3) &= P(X^2 + 3 = 3) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5} \\
 P(Y = 4) &= P(X^2 + 3 = 4) = P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{6} + \\
 &\quad \frac{1}{15} = \frac{7}{30} \\
 P(Y = 7) &= P(X^2 + 3 = 7) = P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{5} + \\
 &\quad \frac{11}{30} = \frac{17}{30}
 \end{aligned}$$

Sabiendo que los puntos de masa de la variable aleatoria X son $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y que $Y = X + 2$, entonces los puntos de masa de la variable aleatoria Y son $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. La función de masa de la variable Y queda determinada por

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= P(X + 2 = 0) = P(X = -2) = \frac{1}{5} \\
 P(Y = 1) &= P(X + 2 = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{6} \\
 P(Y = 2) &= P(X + 2 = 2) = P(X = 0) = \frac{1}{5} \\
 P(Y = 3) &= P(X + 2 = 3) = P(X = 1) = \frac{1}{15} \\
 P(Y = 4) &= P(X + 2 = 4) = P(X = 2) = \frac{11}{30}
 \end{aligned}$$

Ejercicio R. 2.4

Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 2 - X^2$ una transformación de la variable aleatoria X . Se pide:

1. Calcular la función de densidad de la variable aleatoria Y .
2. Calcular la función de distribución de la variable aleatoria Y .

Solución:

1. En primer lugar, comprobamos si la transformación asociada a Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(0, 1)$.

La transformación asociada a Y es $2 - X^2$, cuya derivada es $\frac{d}{dx}(2 - x^2) = 0 - 2x = -2x$. La derivada es siempre negativa en el intervalo $(0, 1)$, lo cual indica que la transformación $Y = 2 - X^2$ es estrictamente decreciente en este intervalo (ver la Figura 1.9).

Como la transformación asociada a la Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(0, 1)$, se puede calcular la función de densidad de la variable aleatoria Y mediante la fórmula siguiente:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right|$$

donde $h^{-1}(y)$ es la función inversa de la transformación $Y = 2 - X^2$.

Resolvamos para X en términos de Y : $X^2 = 2 - Y \rightarrow X = \pm\sqrt{2 - Y}$.

Considerando que $0 < x < 1$, entonces $h^{-1}(y) = \sqrt{2 - y} = (2 - y)^{\frac{1}{2}} \forall y \in (1, 2)$.

Se calcula la derivada de $h^{-1}(y) = (2 - y)^{\frac{1}{2}}$ con respecto a y como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left((2 - y)^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{2} (2 - y)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (2 - y)' = \frac{1}{2} (2 - y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \\ &= -\frac{1}{2} (2 - y)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2-y}} \end{aligned}$$

Entonces, $f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right| = f_X \left((2 - y)^{\frac{1}{2}} \right) \left| \frac{\partial}{\partial y} \left((2 - y)^{\frac{1}{2}} \right) \right| =$
 $= 3 \cdot \left((2 - y)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left| -\frac{1}{2\sqrt{2-y}} \right| = 3(2 - y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-y}} = \frac{3(2-y)}{2\sqrt{2-y}} = \frac{3}{2}\sqrt{2-y} \forall y \in (1, 2)$

La función de densidad de la variable aleatoria Y viene dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{2-y} & \text{si } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

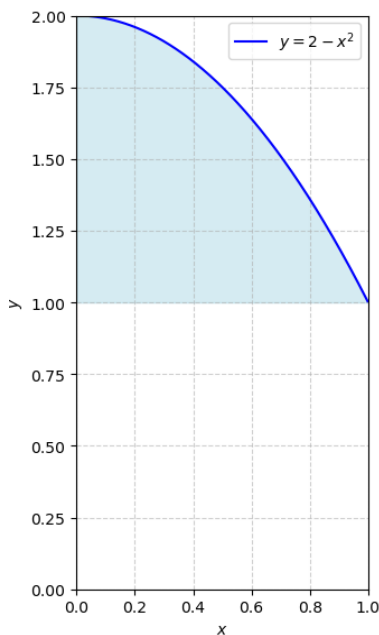


Figura 1.9. $Y=2-X^2$ (Ejercicio R. 2.4).

2. Se sabe que $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y)dy \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

Si $y \leq 1$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^1 0dy = 0$

Si $1 < y < 2$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^1 0dy + \frac{3}{2} \int_1^y \sqrt{2-y}dy =$

$$\frac{3}{2} \left[-\frac{(2-y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^y = \frac{3}{2} \left[-\frac{2(2-y)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^y = \frac{3}{2} \left[-\frac{2}{3} \left((2-y)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 1 - (2-y)^{\frac{3}{2}}$$

Si $y \geq 2$, $F_Y(y) = 1$

Así, la función de distribución es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1 \\ 1 - (2-y)^{\frac{3}{2}} & \text{si } 1 < y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio P. 2.1

Lanzamos tres monedas al aire. Sea X la variable aleatoria que representa el número de caras obtenidas en el lanzamiento. Se pide:

1. Determinar la variable aleatoria X .
2. Calcular su función de masa y su función de distribución.
3. Calcular la probabilidad de que X sea mayor que 1.

Ejercicio P. 2.2

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x) = ke^{-|x|}$ si $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Calcular k para que $f_X(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular la función de distribución $F_X(x)$.
3. Calcular la probabilidad de que X sea menor que 0.
4. Si se sabe que la variable ha tomado un valor superior a 0, ¿cuál es la probabilidad de que tome un valor menor que 2?

Ejercicio P. 2.3

Considerando una variable aleatoria con una función de densidad $f_X(x) = k$ si $0 < x < 2$, determina su función de distribución y las distribuciones correspondientes para las siguientes transformaciones:

$$Y = -2\ln X$$

$$Y = +X^{\frac{1}{4}}$$

Ejercicio P. 2.4

Un vendedor de vinagre tiene una demanda semanal Y distribuida con la siguiente función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{10000} & \text{si } 0 \leq y \leq 100 \\ \frac{1}{100} & \text{si } 100 < y < 150 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En una ocasión, decide adquirir 60 litros de vinagre. Por cada litro vendido, obtiene una ganancia de 5€, mientras que, por cada litro no vendido, pierde 2€. ¿Cuál es la distribución de la variable que representa la ganancia obtenida esa semana?

Ejercicio P. 2.5

Se considera el espacio muestral $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ y se define la probabilidad de los sucesos elementales por $P(n) = \frac{q}{5^n}$ con $n \in N$ y $q \in R$. Determinése el valor de q para que P sea una probabilidad y hállese la probabilidad del suceso $A = \{n \in N: n \text{ es impar}\}$.

Ejercicio P. 2.6

Una variable aleatoria tiene la siguiente función de probabilidad:

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.10	0.20	0.05	0.40	0.25

Se pide:

1. Comprobar que es una función de probabilidad.
2. Calcular $P(X \leq 3)$.
3. Calcular $P(X > 2)$.
4. $P(X = 1 \text{ o } X = 3 \text{ o } X = 5)$.
5. Representar la función de distribución $F_X(x)$.

Ejercicio P. 2.7

Sea X variable aleatoria cuya distribución de probabilidad viene dada por:

$$P(X = r) = \frac{3}{2} \frac{1}{r!(4-r)!} \text{ para } r = 0, 1, 2, 3, 4$$

Se pide:

Hallar $P(X = 3)$; $P(1 \leq X \leq 2.5)$ y $P(X \leq 2.5)$.

Ejercicio P. 2.8

Los artículos en venta en unos grandes almacenes se someten al control diario y, se estima que la probabilidad de que en un día sean vendidos r artículos defectuosos es $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^r$. Determinar la probabilidad de que en un día de los artículos vendidos:

1. Dos o más sean defectuosos.
2. Cinco sean defectuosos.
3. Tres o menos sean defectuosos.

Ejercicio P. 2.9

Sea $Y = 100X$ la variable porcentaje de alcohol, donde X tiene una función de densidad $f_X(x) = 20x^3(1 - x)$ si $0 < x < 1$. Se pide:

1. Determinar la función de densidad y de distribución de Y .
2. Calcular $P(X < 2/3)$.

Ejercicio P. 2.10

Sea X una variable aleatoria continua que representa el tiempo en horas que un estudiante dedica a estudiar para un examen final. Su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el estudiante estudie entre 3 y 5 horas.

2.7. Evaluación

Todos los estudiantes del Grado en Estadística Aplicada y del Grado en Ciencia de los Datos Aplicada de la UCM, matriculados en la asignatura de Azar y Probabilidad, tienen acceso al Campus Virtual para responder una serie de preguntas seleccionadas aleatoriamente del banco de preguntas, con el fin de obtener la calificación de la evaluación continua.

Este manual está disponible en el repositorio de la UCM, por lo que se ha dispuesto una autoevaluación para cualquier persona interesada en la asignatura, utilizando el mismo banco de preguntas del Campus Virtual, accesible en Google Forms a través del siguiente enlace: <https://forms.gle/nfsLWaiVR7eqwb9L9>.