LA PROPIEDAD DE APROXIMACION EN ESPACIOS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

F. Bombal Gordón y J. L. González Llavona

Recibido 3-VI-76

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Introducción

En (1) se prueba que un espacio de Banach E verifica la propiedad de aproximación de Grothendieck si y sólo si el espacio $\mathcal{H}$ (E) de las funciones holomorfas sobre E con la topología compacto abierta, la verifica.

El objeto del presente trabajo es establecer un resultado análogo para el caso de funciones diferenciables reales. Los intentos realizados en esta dirección han tenido, hasta ahora, un éxito parcial (véase (2)).

En los trabajos anteriormente citados, se utiliza de forma esencial la caracterización de la propiedad de aproximación en términos del ε-producto.

Desde nuestro punto de vista, las dificultades radican principalmente en que la topología usual en los espacios C^n (E, F) de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre los compactos de E, no parece la más adecuada para, en primer lugar, establecer la igualdad $C^n (E) \varepsilon F = C^n (E, F)$, y en segundo lugar para estudiar la densidad de $C^n (E) \otimes F$ en C^n (E, F). Por esta última razón, en (5) se introducen en los espacios C^n (E, F) otras topologías, que permiten obtener resultados satisfactorios en la dirección citada.

Por otro lado, debido a las dificultades que presenta la diferencial de Fréchet para estudiar propiedades de completitud en los espacios C^n (E, F) con estas nuevas topologías, hemos adoptado en el presente trabajo la noción de diferencial compacta (de Hadamard), que nos ha permitido resolver favorablemente el problema planteado.

Notaciones

A lo largo de este trabajo, se utilizan las letras E, F, G para designar espacios de Banach reales, y X, Y, Z para espacios localmente convexos, reales y separados. Denotaremos por $\mathcal{L}_c$ (X, Y) el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de X en Y, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos de X. Si Y = R, escribiremos $\mathcal{L}_c (X, R) = X'_c$. Si $n \geqslant 1$, definimos

$$\mathcal{L}_c^n (E, X) = \mathcal{L}_c (E, \mathcal{L}_c^{n-1} (E, X)),$$

donde $\mathcal{L}_c^0 (E, X) = X$. Los conjuntos

$$W (K^n, V) = \{ u \in \mathcal{L}_c^n (E, X) : u (K^n) \subset V \}$$

forman una base de entornos de cero en $\mathcal{L}_c^n$ (E, X) cuando V recorre una base de entornos de cero en X y K recorre los compactos de E. Finalmente, denotaremos por $X \epsilon Y = \mathcal{L}_\varepsilon (Y'_c, X)$, espacio de las aplicaciones lineales continuas de Y'_c en X, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de Y'.

1. La diferencial compacta. Propiedades de densidad

1. Definición.—Sea $f : E \to X$. Diremos que f es *diferenciable en sentido compacto en* $a \in E$, si existe una aplicación lineal continua u de E en X tal que para cada disco compacto $K \subset E$ se verifica

$$\lim_{t \to 0} \frac{f (a + t h) - f (a) - u (t h)}{t} = 0, \text{ uniformemente en } h \in K.$$

Se dice entonces que u es la diferencial, en sentido compacto, de f en a y la denotaremos por D f (a). En lo sucesivo, utilizaremos la expresión de función diferenciable siempre en sentido compacto. Diremos que $f : E \to X$ es diferenciable si f es diferenciable en todos los puntos de E.

2. DEFINICIÓN. — Diremos que $f : E \to X$ es *n veces diferenciable* si f es $(n-1)$ veces diferenciable, y $D^{n-1} f : E \to \mathcal{L}_c{}^{n-1}(E, X)$ es diferenciable, donde $D^0 f = f$. Asimismo, diremos que $f : E \to X$ es una *función de clase n*, si f es n veces diferenciable y todas las diferenciales son continuas.

Denotaremos por $C_c{}^n (E, X)$ al conjunto de todas las aplicaciones de clase n de E en X. Si $n = 0$, escribiremos

$$C_c{}^0 (E, X) = C_c (E, X) \ (*).$$

Utilizaremos las siguientes propiedades de este concepto de diferencial:

a) Toda función diferenciable de E en X es continua.

b) Si $f \in C_c{}^n (E, X)$ y $u \in \mathcal{L} (F, E)$ (resp. $u \in \mathcal{L} (X, Y)$), entonces

$$f \circ u \in C_c{}^n (F, X)$$

(resp. $u \circ f \in C_c{}^n (E, Y)$) y

$$D^p (f \circ u) (x) (x_1, \ldots, x_p) = D^p f (u (x)) (u\, x_1, \ldots, u\, x_p)$$

(resp. $D^p (f \circ u) = u \circ D^p f$) si $1 \leqslant p \leqslant n$.

c) Regla de la cadena de orden 1.

d) Para cada $x \in E$ y $1 \leqslant p \leqslant n$, $D^p f (x)$ es p-lineal y simétrica.

e) Si f es una aplicación diferenciable de E en X y $a \in E$, entonces

$$f (a + x) - f (a) \in \overline{|\, co\, |} \{ D f (y) (x) : y \in [a, a + x] \},$$

donde $\overline{|\, \cos\, |}\, A$ designa la envoltura absolutamente convexa y cerrada de A. (Teorema del valor medio.)

Las propiedades a), c), d) y e) pueden verse en (11), proposicio-

(*) Nótese que la topología de $C_c (E, X)$ es la compacto-abierta. Utilizaremos esta misma notación cuando E y X sean espacios topológicos arbitrarios.

nes 1.7.1, 1.2.9, 1.8.2 y 1.3.3, respectivamente. En cuanto a la propiedad b), es de comprobación directa inmediata.

3. OBSERVACIÓN.—En la literatura (véase por ejemplo (11)), se suele utilizar para la noción de función n veces diferenciable en sentido compacto la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E en $\mathcal{L}^n$ (E, X). No obstante, las propiedades usuales siguen siendo válidas para nuestra definición, aunque sólo utilizaremos las anteriormente citadas. Véase también (6).

4. DEFINICIÓN.—Para cada compacto $K \subset E$ y cada entorno de cero $V \subset X$, definimos

$$T(K, V) = \{ f \in C_c^n(E, X) : D^p f(K) \subset W(K^p, V), \ 0 \leqslant p \leqslant n \}.$$

Cuando K recorre los compactos de E, y V recorre una base de entornos de cero en X, los conjuntos T (K, V) forman un sistema fundamental de entornos de 0 para una topología localmente convexa y separada en C_c^n (E, X). A lo largo de este trabajo, utilizaremos siempre en C_c^n (E, X) esta topología. Véase (5).

5. LEMA. — *Sea E un espacio de Banach con la propiedad de aproximación, y X un espacio localmente convexo. Si*

$$f \in C_c^n(E, X) \quad y \quad A_f = \{ f \circ u : u \in E' \otimes E \}.$$

entonces f *es adherente a* A_f *en* $C_c^n(E, X)$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea T (K, V) un entorno de cero en C_c^n (E, X), donde podemos suponer que V es absolutameste convexo, y (u_n) una sucesión de elementos de $E' \otimes E$ que converge a la identidad de E, uniformemente sobre K. Como la evaluación es una aplicación continua de C_c (K, E) × E en E, el conjunto

$$L = K \cup \{ u_n(K) ; n \in N \}$$

es compacto en E.

Por ser f uniformemeste continua en K, existe U_1, entorno de cero en E, tal que

$$f(x) - f(y) \in V \quad \text{si} \quad x \in K, \ y \in E \quad y \quad x - y \in U_1. \tag{1}$$

Por otro lado, si $1 \leqslant p \leqslant n$, como $D^p f(K)$ es compacto en

$$\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c^{p-1}(E, X)),$$

y por tanto equicontinuo, existe U_2, entorno de cero en E, tal que

$$D^p f(K)(U_2 \times L \times \dots \times L) = D^p f(K)(L \times U_2 \times \dots \times L) = \dots =$$
$$= D^p f(K)(L \times \dots \times L \times U_2) \subset (1/2\,p)\, V. \qquad [2]$$

Finalmente, por ser $D^p f$ uniformemente continua sobre K, existe U_3, entorno de cero en E, tal que

$$D^p f(x) - D^p f(y) \in W(L^p, (1/2)\, V), \quad \text{si} \quad x \in K,\ y \in E \quad \text{y} \quad x - y \in U_3. \qquad [3]$$

Sea

$$U = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \quad \text{y} \quad u = u_n \quad \text{con} \quad n \geqslant n_0,$$

donde

$$x - u_n(x) \in U \quad \text{si} \quad x \in K \quad \text{y} \quad n \geqslant n_0.$$

Entonces:

a) $f(x) - f(u\,x) \in V$ si $x \in K$, por [1].

b)

$$D^p f(x)(x_1, \dots, x_p) - D^p f(u\,x)(u\,x_1, \dots, u\,x_p) =$$
$$= D^p f(x)(x_1, \dots, x_p) - D^p f(x)(u\,x_1, \dots, u\,x_p) +$$
$$+ D^p f(x)(u\,x_1, \dots, u\,x_p) - D^p f(u\,x)(u\,x_1, \dots, u\,x_p) \in$$
$$\in (1/2\,p)\, V \overset{(p}{+ \dots +} (1/2\,p)\, V + (1/2)\, V \subset V,$$

si $x, x_1, \dots, x_p \in K$, por [2] y [3]. Es decir,

$$f - f \circ u \in T(K, V).$$

6. Teorema. — *Sea E un espacio de Banach y* $n \geqslant 1$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

6.1. *$C_c^n(E) \otimes X$ es denso en $C_c^n(E, X)$ para todo espacio localmente convexo X.*

6.2. *$C_c^n(E) \otimes X$ es denso en $C_c^n(E, X)$ para todo espacio localmente convexo completo X.*

6.3. *La aplicación identidad de E pertenece a la adherencia de $C_c^n(E) \otimes E$, en $C_c^n(E, E)$.*

6.4. *La aplicación identidad de E pertenece a la adherencia de $E' \otimes E$ en $C_c^n(E, E)$.*

6.5. *E verifica la propiedad de aproximación.*

Demostración.—6.1 $\Longrightarrow$ 6.2 y 6.2 $\Longrightarrow$ 6.3 son inmediatas. Para ver que 6.3 $\Longrightarrow$ 6.4, sea

$$H = \{ D\, u(y) : u \in C_c^n(E) \otimes E,\ y \in E \} \subset E' \otimes E.$$

Una simple comprobación demuestra que la identidad en E pertenece a la adherencia de H en $C_c^n(E, E)$. Trivialmente 6.4 $\Longrightarrow$ 6.5.

Para demostrar que 6.5 $\Longrightarrow$ 6.1, observemos en primer lugar que si la dimensión de E es finita, entonces se cumple 6.1 (véase, por ejemplo, (10), pág. 448). En el caso general, si $f \in C_c^n(E, X)$ y $T(K, V)$ es un entorno de 0 en $C_c^p(E, X)$, donde podemos suponer V convexo, por el lema 5 existe $u \in E' \otimes E$ tal que

$$f - f \circ u \in T(K, (1/2)\, V).$$

Sea $E_0 = u(E)$ y $f_0 = f|_{E_0}$; entonces $f_0 \in C_c^n(E_0, X)$ y por ser E_0 de dimensión finita, existe $a_0 \in C_c^n(E_0) \otimes X$ tal que

$$f_0 - a_0 \in T(u(K), (1/2)\, V) \subset C_c^n(E_0, X).$$

Resulta entonces que

$$f \circ u - a_0 \circ u \in T(K, (1/2)\, V),$$

luego

$$f - a_0 \circ u \in T(K, V).$$

Como $a_0 \circ u \in C_c^n(E) \otimes X$, se obtiene 6.1.

2. Propiedades de los espacios $C^n_c(E, X)$

7. Teorema.—*Si E es un espacio de Banach y X es un espacio localmente convexo completo, entonces $C_c^n(E, X)$ es completo.*

Demostración.—Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy en $C_c^n(E, X)$. Para cada $x \in E$ y cada j, $0 \leqslant j \leqslant n$, $(D^j f_i(x))_{i \in I}$ es una red de

Cauchy en $\mathcal{L}_c{}^j$ (E, X). Como $\mathcal{L}_c{}^j$ (E, X) es completo ((7), cap. III, prob. 8), resulta que existen

$$f^j(x) \in \mathcal{L}^j{}_c(\mathrm{E}, \mathrm{X}), \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

tales que cada red $(\mathrm{D}^j f_i(x))_{i \in \mathrm{I}}$ converge a $f^j(x)$ en $\mathcal{L}_c{}^j$ (E, X). Esta convergencia es uniforme sobre cada compacto de E, por la definición de la topología en $\mathrm{C}_c{}^n$ (E, X), por lo que f^j es continua sobre cada compacto de E y por ser E de Banach, continua en E.

Por otra parte, para cada $x \in \mathrm{E}$ y cada j, $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$f^j(x) = \mathrm{D}^j f(x),$$

donde $f = f^0$. En efecto, para $j = 0$, el reusltado es evidente. Supongámoslo cierto para $j = p < n$ y probémoslo para $j = p + 1$. Sea $x \in \mathrm{E}$ y $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$ compacto. Bastará probar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{D}^p f(x + t\,h) - \mathrm{D}^p f(x) - f^{p+1}(x)(t\,h)}{t} = 0,$$

uniformemente en $h \in \mathrm{K}$.

Sea W $(\mathrm{L}^p, \mathrm{V})$ un entorno de 0 en $\mathcal{L}_c{}^p$ (E, X). Consideremos U, entorno de cero en X, absolutamente convexo y cerrado, con la propiedad de que $\mathrm{U} + \mathrm{U} + \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$.

Aplicando el teorema del valor medio a la función de variable real

$$v(t) = \mathrm{D}^p f_k(x + t\,h) - \mathrm{D}^p f_i(x + t\,h).$$

resulta

$$[\mathrm{D}^p f_k(x + t\,h) - \mathrm{D}^p f_k(x) - (\mathrm{D}^p f_i(x + t\,h) - \mathrm{D}^p f_i(x))]\, t^{-1} =$$
$$= t^{-1}(v(t) - v(0)) \in t^{-1}\, \overline{|\mathrm{co}|}\{\mathrm{D}\,v(s)(t) : s \text{ comprendido entre } 0 \text{ y } t\} =$$
$$= \overline{|\mathrm{co}|}\{\mathrm{D}^{p+1} f_k(x + s\,h)(h) - \mathrm{D}^{p+1} f_i(x + s\,h)(h) : s \text{ entre } 0 \text{ y } t\}.$$

Por ser $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ una red de Cauchy en $\mathrm{C}_c{}^n$ (E, X), existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tal que si

$$i, k \geqslant i_0 \quad \text{e} \quad y \in x + \mathrm{D\,K}\ (\mathrm{D} = [-1,1]),$$

entonces

$$\mathrm{D}^{p+1} f_k(y) - \mathrm{D}^{p+1} f_i(y) \in \mathrm{W}(\mathrm{K} \times \mathrm{L}^p, \mathrm{U}),$$

por lo que si $i, k \geqslant i_0$,

$$(v(t) - v(0))\, t^{-1} \in W(L^p, U).$$

Como consecuencia se tiene

$$[D^p f(x + t h) - D^p f(x) - D^p f_i(x + t h) - D^p f_i(x))]\, t^{-1} \in W(L^p, U), \qquad [1]$$

siempre que $i \geqslant i_0$, $t \in D$ y $h \in K$.

Por otro lado,

$$[D^{p+1} f_i(x)(t h) - f^{p+1}(x)(t h)]\, t^{-1} \in W(L^p, U), \qquad [2]$$

para $h \in K$ y algún $i \geqslant i_0$. Para este i existe un δ, $0 < \delta < 1$, tal que si $|t| < \delta$ y $h \in K$ se cumple

$$[D^p f_i(x + t h) - D^p f_i(x) - D^{p+1} f_i(x)(t h)]\, t^{-1} \in W(L^p, U). \qquad [3]$$

De [1], [2] y [3] se concluye que

$$[D^p f(x + t h) - D^p f(x) - f^{p+1}(x)(t h)]\, t^{-1} \in W(L^p, V),$$

si $|t| < \delta$ y $h \in K$.

A continuación, pasamos a caracterizar los conjuntos relativamente compactos de $C_c^n(E, X)$. Una sencilla modificación en la demostración del teorema de Ascoli, tal como aparece en (9), página 312, permite probar el siguiente resultado:

8. TEOREMA.—*Sea L un* k-*espacio, M un espacio semi-métrico y* $\mathcal{F}$ *una familia en* $C_c(L, M)$. *Entonces son condiciones necesarias y suficientes para que* $\mathcal{F}$ *sea relativamente compacto, las siguientes:*

8.1. *Para cada compacto K de E,* $\mathcal{F}|_K$ *es equicontinuo en* $C(K, M)$.

8.2. *Para cada* $x \in L$, *el conjunto*

$$\mathcal{F}(x) = \{ f(x) : f \in \mathcal{F} \}$$

es relativamente compacto en M.

Consideremos el espacio $C_c(E, \mathcal{L}_c^p(E, X))$. De la definición de la topología en $C_c^n(E, X)$ se deduce que la aplicación

$$\theta : C_c^n(E, X) \longrightarrow \prod_{p=0}^{n} C_c(E, \mathcal{L}^p_c(E, X))$$

definida por

$$\theta(f) = (D^p f)_{0 \leq p \leq n},$$

es un isomorfismo topológico entre $C_c^n(E, X)$ y un subespacio de

$$\prod_{p=0}^{n} C_c(E, \mathcal{L}^p{}_c(E, X)).$$

Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema:

9. TEOREMA.—*Sea E un espacio de Banach y X un espacio localmente convexo completo. Si $\mathcal{F}$ es una familia en $C_c^n(E, X)$, entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:*

9.1. *Para cada* p, $0 \leqslant p \leqslant n$ *y cada compacto* $K \subset E$, *el conjunto*

$$\{D^p f|_K : f \in \mathcal{F}\} \subset C_c(K, \mathcal{L}^p{}_c(E, X))$$

es equicontinuo.

9.2. *Para cada* $x \in E$ *y cada* p, $0 \leqslant p \leqslant n$, *el conjunto*

$$\{D^p f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

es relativamente compacto en $\mathcal{L}_c^p(E, X)$.

DEMOSTRACIÓN.—$\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C_c^n(E, X)$ si y sólo si $\theta(\mathcal{F})$ es rleativamente compacto en $\theta(C_c^n(E, X))$. Como $C_c^n(E, X)$ es completo por el teorema 7, $\theta(C_c^n(E, X))$ es cerrado en

$$\prod_{p=0}^{n} C_c(E, \mathcal{L}^p{}_c(E, X)).$$

Por tanto, por el teorema de Tychonoff resulta que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C_c^n(E, X)$ si y sólo si cada proyección

$$\pi_i(\theta(C_c^n(E, X)))$$

es relativamente compacto en $C_c(E, \mathcal{L}^i{}_c(E, X))$. El resultado se deduce del teorema 8.

3. La propiedad de aproximación en $C^n{}_c(E)$

10. TEOREMA.—*Si E es un espacio de Banach y X es un espacio localmente convexo completo, entonces*

$$C_c{}^n(E, X) = C_c{}^n(E) \varepsilon X = \mathcal{L}_\varepsilon(X'_c, C_c{}^n(E)).$$

DEMOSTRACIÓN.—En primer lugar, como X es completo, la topología en X'_c es la compacto-abierta.

Sea $f \in C_c{}^n(E, X)$. Definimos

$$\varphi(f) : X' \longrightarrow C_c{}^n(E)$$

por

$$\varphi(f)\, y' = y' \circ f \in C_c{}^n(E) \text{ para cada } y' \in X'.$$

Es evidente que $\varphi(f)$ es lineal. Veamos que

$$\varphi(f) \in \mathcal{L}(X'_c, C_c{}^n(E)).$$

Sea

$$T(K, \epsilon) = T(W, I_\varepsilon),\ I = [-\epsilon, \epsilon]$$

un entorno de 0 en $C_c{}^n(E)$. Para cada p, $0 \leqslant p \leqslant n$, la aplicación de $E \times E^p$ en X definida por

$$(x, x_1, \ldots, x_p) \longrightarrow D^p f(x)\, x_1, \ldots, x_p$$

es continua ((4), lema 0.1.2), luego

$$L_p = D^p f(K)(K^p)$$

es compacto en X, por lo que

$$L = \bigcap_{p=0}^{n} \epsilon L^0{}_p$$

es un entorno de cero en X'_c. Es inmediato comprobar que si $y' \in L$, entonces

$$\varphi(f)\, y' \in T(K, \varepsilon).$$

La aplicación

$$\varphi : C_c^n(E, X) \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(X'_c, C_c^n(E))$$

es evidentemente lineal. Para probar su continuidad, sea H un equicontinuo en X', que podemos suponer de la forma $H = V^0$, siendo V un entorno de 0 en X, y $T(K, \varepsilon)$ un entorno de 0 en $C_c^n(E)$. Entonces $T(K, \varepsilon V)$ es entorno de 0 en $C_c^n(E, X)$, y si $f \in T(K, \varepsilon V)$ se tiene

$$\varphi(f)\, y \in T(K, \varepsilon) \text{ para todo } y \in H.$$

Así, pues, φ es lineal, continua y obviamente inyectiva. Un razonamiento análogo al anterior prueba que φ es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Para terminar la demostración, bastará probar que φ es suprayectiva.

Sea $u \in \mathcal{L}(X'_c, C_c^n(E))$. Para cada p, $0 \leqslant p \leqslant n$, y cada $x, x_1, \ldots, x_p$ de E, la aplicación

$$y' \longrightarrow D^p(u\, y')(x)\, x_1, \ldots, x_p$$

es una forma lineal y continua sobre X'_c; como $(X'_c)' = X$, existe un único $f^p(x)\, x_1, \ldots, x_p$ de X tal que

$$\langle f^p(x)\, x_1, \ldots, x_p, y'\rangle = D^p(u\, y')(x)\, x_1, \ldots, x_p \qquad (*)$$

Si se prueba que $f^0 = f$ pertenece a $C_c^n(E, X)$, entonces $\varphi(f) = u$ y φ será suprayectiva.

En primer lugar, observemos que como el segundo miembro de (*) es p-lineal en $x_1, \ldots, x_p$, $f^p(x)$ es p-lineal.

Probemos ahora que para cada $x \in E$, $f^p(x) \in \mathcal{L}^p{}_c(E, X)$. Si V es un entorno, absolutamente convexo y cerrado, de cero en X, V^0 es equicontinuo en X' y por tanto relativamente compacto en X'_c. Entonces $u(V^0)$ es relativamente compacto en $C_c^n(E)$. En virtud de 9.2, para cada $x \in E$ el conjunto

$$\{ D^p(u\, y')(x) : y' \in V^0 \}$$

es relativamente compacto en $\mathcal{L}^p{}_c$ (E, R), y por tanto, por el teorema 8, equicontinuo sobre cada compacto de E^p. En consecuencia, si $K \subset E$ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que si

$$x_i, y_i \in K,\ i = 1, \ldots, p \quad \text{y} \quad \| x_i - y_i \| < \delta$$

se tiene

$$| \langle f^p (x)\, x_1, \ldots, x_p - f^p (x)\, y_1, \ldots, y_p, y' \rangle | =$$
$$= | D^p (u\, y')(x)\, x_1, \ldots, x_p - D^p (u\, y')(x)\, y_1, \ldots, y_p | \leq 1$$

para todo $y' \in V^0$. Es decir,

$$f^p (x)\, x_1, \ldots, x_p - f^p (x)\, y_1, \ldots, y_p \in V^{00} = V,$$

lo que prueba que $f^p(x)$ es continua en K^p,, y por ser E^p metrizable, $f^p(x)$ es continua.

Utilizando 9.1 en lugar de 9.2, se prueba de forma análoga que

$$f^p : E \longrightarrow \mathcal{L}_c{}^p (E, X)$$

es continua.

Finalmente, probemos que para cada $x \in E$ y cada p, $0 \leq p \leq n$,

$$D^p f(x) = f^p(x).$$

Para $p = 0$ es evidente. Supongámoslo cierto para $p = k < n$ y probémoslo para $p = k + 1$. Sea $x \in E$ y $K \subset E$ un compacto. Bastará probar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{D^k f(x + t\, h) - D^k f(x) - f^{k+1}(x)(t\, h)}{t} = 0.$$

uniformemente en $h \in K$. Sea entonces $W(L^k, V)$ un entorno de 0 en $\mathcal{L}^k{}_c$ (E, X), donde V podemos suponerlo absolutamente convexo y cerrado. Para cada y' de X' se tiene

$$y' \circ [D^k f(x + t\, h) - D^k f(x) - f^{k+1}(x)(t\, h)]\, t^{-1} =$$
$$[D^k (u\, y')(x + t\, h) - D^k (u\, y')(x) - D^{k+1} (u\, y')(x)(t\, h)]\, t^{-1} \in \mathcal{L}^k (E, R).$$

Apliquemos el teorema del valor medio a la función de variable real

$$v(t) = D^k(u\,y')(x + t\,h) - D^{k+1}(u\,y')(x)(t\,h).$$

Entonces

$$[v(t) - v(0)]^{-1} \in t^{-1}\,\overline{|\text{co}|}\,\{D\,v(s)'(t) : s \text{ entre } 0 \text{ y } t\} =$$

$$\overline{|\text{co}|}\,\{D^{k+1}(u\,y')(x + s\,h)(h) - D^{k+1}(u\,y')(x)(h) : s \text{ entre } 0 \text{ y } t\}.$$

Si $D = [-1,1]$, $D\,K$ es compacto en E. El conjunto

$$\{D^{k+1}(u\,y')|_{D\,K} : y' \in V^0\} \subset C_c(D\,K, \mathcal{L}_c^{k+1}(E, R))$$

es equicontinuo por 9.1, luego dado el entorno $W(K \times L^k, 1)$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in D\,K$, $\|x - y\| < \delta$, se verifica

$$D^{k+1}(u\,y')(x) - D^{k+1}(u\,y')(y) \in W(K \times L^k, 1),$$

es decir,

$$D^{k+1}(u\,y')(x)(h) - D^{k+1}(u\,y')(y)(h) \in W(L^k, 1),$$

para todo $h \in K$ y todo $y' \in V^0$. Si

$$M = \text{máx}\,\{\|h\| : h \in K\} \quad \text{y} \quad \delta' = \delta/M,$$

resulta que si $|t| < \delta'$, se cumple que $\|s\,h\| < \delta$ si s está entre 0 y t, luego

$$D^{k+1}(u\,y')(x + s\,h)(h) - D^{k+1}(u\,y')(x)(h) \in W(L^k, 1),$$

para cada $h \in K$, $y' \in V^0$ y s entre 0 y t. Como $W(L^k, 1)$ es convexo y cerrado, resulta

$$y' \circ [D^k f(x + t\,h) - D^k f(x) - f^{k+1}(x)(t\,h)]\; t^{-1} \in W(L^k, 1)$$

para todo $y' \in V^0$, $h \in K$, siempre que $|t| < \delta'$. Es decir,

$$[D^k f(x + t\,h) - D^k f(x) - f^{k+1}(x)(t\,h)]\; t^{-1} \in W(L^k, V^{00}) = W(L^k, V),$$

para todo $h \in K$, siempre que $|t| < \delta'$.

Es bien conocido que un espacio localmente convexo Y verifica la propiedad de la aproximación si y sólo si $Y \otimes X$ es denso en

$Y \varepsilon X$ para todo espacio localmente convexo X ((8), prop. 11). Si Y es casi-completo, por (3), 3.9 (2), basta probar la densidad de $Y \otimes X$ en $Y \varepsilon X$ para todo espacio localmente convexo completo X. Por otra parte, si X eY son espacios localmente convexos casi-completos verificando la propiedad de aproximación, el espacio $X \varepsilon Y$ también la verifica ((8), cor. 2, pág. 48). Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

11. TEOREMA.—*Sea E un espacio de Banach y* $n \geqslant 1$. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

11.1. *E verifica la propiedad de aproximación.*

11.2. $C_c^n(E)$ *verifica la propiedad de aproximación.*

11.3. $C_c^n(E, X)$ *verifica la propiedad de aproximación para todo espacio localmente convexo completo X que verifique la propiedad de aproximación.*

DEMOSTRACIÓN.—Es una consecuencia inmediata de la observación anterior y de los teoremas 6, 7 y 10.

4. La propiedad de aproximación en $P(^nE)$.

Para cada $n \in N$ designamos por $P(^nE, X)$ el espacio de los polinomios homogéneos de grado n, continuos, de E en X. Se comprueba fácilmente que la topología inducida en $P(^nE, X)$ por la de $C_c^n(E, X)$ es la compacta-abierta. Con técnicas similares a las de los teoremas 6, 7 y 10 se prueban los siguientes resultados:

Si E verifica la propiedad de aproximación, entonces $P(^nE) \otimes X$ es denso en $P(^nE, X)$ para todo espacio localmente convexo X y cada $n \geqslant 1$.

Si X es completo, entonces $P(^nE, X)$ es completo.

Si X es completo, entonces

$$P(^nE, X) = P(^nE) \varepsilon X.$$

Como consecuencia de estos resultados, se obtiene el siguiente teorema:

12. TEOREMA.—*Sea E un espacio de Banach. Las afirmaciones del teorema 11 son equivalentes a las siguientes:*

12.1. *$P(^nE) = P(^nE, R)$ verifica la propiedad de aproximación para cada* n $\geqslant 1$.

12.2. *$P(^nE, X)$ verifica la propiedad de aproximación para todo X completo que verifique la propiedad de aproximación y cada* n $\in N$.

Bibliografía

(1) Aron, R. M. y Schottenloher, M. 1974. Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, vol. **80**, núm. **6**.

(2) Aron, R. *Compact polynomials and compact differentiable mappings between Banach spaces.* (Por aparecer.)

(3) Bierstedt, K. D. 1973. Gewichtete Raume stetiger vektorwertiger funktionen und das injektive tensorprodukt. I. *J. reine angew Math.*, **259**, 186-210.

(4) Keller, H H. 1974. Differential calculus in locally convex spaces. *Lect. Notes in Math.*, núm. 417. Springer, Berlín.

(5) González Llavona, J. L. *Aproximación de funciones diferenciables.* Tesis doctoral. (Por aparecer.)

(6) Rodríguez Marín, L. *Diferenciación en espacios vectoriales topológicos.* Tesis doctoral. (Por aparecer.)

(7) Schaefer, H. H. 1967. *Topological vector spaces.* Macmillan, Nueva York.

(8) Schwartz, L. 1957. Théorie des distributions a valeurs vecto. rielles. I. *Ann. Inst. Fourier*, **7**, 1-139.

(9) — — 1970. *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, París.

(10) Treves, F. 1967. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, Nueva York.

(11) Yamamuro, S. 1974. Differential calculus in Topological Linear spaces. *Lect. Notes in Math.*, núm. 374. Springer, Berlín.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid